

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Под редакцией академика М. А. ЛЕОНТОВИЧА

ВЫПУСК 6



МОСКВА
АТОМИЗДАТ 1972

Вопросы теории плазмы. Сб. статей. Вып. 6. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1972.

Со времени издания последнего, 5-го выпуска (1967 г.) этой серии в теории плазмы накоплен новый интересный и практически важный материал.

В сборник включены четыре обзорные работы; «Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях» (д-р физ.-матем. наук А. А. Веденов, д-р физ.-матем. наук Д. Д. Рютов); «Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы» (д-р физ. - матем. наук А. Б. Михайловский); «Взаимодействие высокочастотных полей с плазмой» (канд. физ.-матем. наук А. А. Иванов); «Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций» (канд. физ.-матем. наук Л. С. Соловьев).

Сборник содержит библиографию из 271 наименования, 25 рисунков, 1 таблицу.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОТОКОВЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ

А. А. Веденов, Д. Д. Рютов

Введение

Если в плазме по той или иной причине возникают взаимопроникающие потоки заряженных частиц, то она обычно становится неустойчивой. Нарастая, колебания начинают оказывать обратное воздействие на функции распределения заряженных частиц и в конечном итоге обычно приводят плазму к устойчивому состоянию. В связи с этим возникает вопрос о динамике установления устойчивого состояния.

Ясно, что если исходные (неустойчивые) функции распределения не слишком сильно отличаются от устойчивых, то энергия колебаний в течение всего процесса релаксации остается малой. Это позволяет при исследовании релаксации слабонадкритических систем пользоваться уравнениями квазилинейной теории [1—3], которые описывают взаимодействие между колебаниями и частицами плазмы в первом неисчезающем приближении по энергии колебаний и имеют поэтому относительно простую структуру. Фактически условие слабой надкритичности не является слишком ограничивающим и позволяет рассмотреть достаточно много вопросов, интересных для приложений.

В обзоре излагаются основные методы и результаты решения квазилинейных уравнений для потоковых неустойчивостей. При этом из обширного класса потоковых неустойчивостей выбраны только те, которые связаны с потенциальными колебаниями, поскольку такие колебания обычно возбуждаются легче других. Основное внимание уделено важным для приложений задачам о релаксации в плазме электронного пучка и об аномальном сопротивлении плазмы. В тех случаях, когда это возможно, предсказания теории сравниваются с результатами экспериментов.

§ 1. Основные уравнения

Поскольку ниже речь пойдет об эффектах, в которых влияние внешнего магнитного поля на дисперсию колебаний несущественно, выпишем систему квазилинейных уравнений для плазмы без

МАГНИТНОГО ПОЛЯ:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_a} D_{a\beta}^{(a)} \frac{\partial f_a}{\partial p_\beta}; \quad (1.1)$$

$$D_{a\beta}^{(a)} = 8\pi^2 e^2 \int \frac{k_a k_\beta}{k^2} W \delta(\omega - kv_a) d^3 k; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{p}c (p^2 + m_a^2 c^2)^{-1/2}; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 2\gamma W.$$

Здесь $f_a \equiv f_a(\mathbf{p}, t)$ — функция распределения частиц сорта a по импульсам; $W \equiv W(\mathbf{k}, t)$ — спектральная плотность электростатической энергии колебаний; e_a и m_a — заряд и масса частиц сорта a ; c — скорость света, а $\omega \equiv \omega(\mathbf{k}, t)$ и $\gamma \equiv \gamma(\mathbf{k}, t)$ — частота и инкремент колебаний с волновым вектором \mathbf{k} , которые определяются соответственно из следующих формул:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \equiv 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{k^2} \mathcal{P} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3 \mathbf{p}}{\omega - kv_a} = 0; \quad (1.4)$$

$$\gamma = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right]^{-1} \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2}{k^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega - kv_a) d^3 \mathbf{p}. \quad (1.5)$$

Приведенная здесь система уравнений справедлива только тогда, когда характерный разброс частиц по скоростям Δv достаточно велик:

$$\Delta v \gg \gamma/k. \quad (1.6)$$

Неустойчивости, для которых это условие выполнено, обычно называют «кинетическими» (в отличие от гидродинамических, для которых $\Delta v \leq \gamma/k$). Поскольку для слаборадикальных систем γ в некотором смысле мало (точный смысл малости γ зависит от конкретной задачи), то условие (1.6) весьма мягкое, и ниже повсюду будем считать его выполненным*.

Через спектральную плотность электростатической энергии колебаний $W(\mathbf{k}, t)$ можно выразить спектральную плотность их полной энергии $\tilde{W}(\mathbf{k}, t)$ (в которую включается, в частности, энергия колебательного движения частиц):

$$\tilde{W} = W \left(\omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega = \omega(\mathbf{k})}.$$

* Относительно применения квазилинейных уравнений к исследованию гидродинамических неустойчивостей см. работу [4].

С помощью функции $\tilde{W}(\mathbf{k}, t)$ удобно записывать интегралы энергии и импульса:

$$\left. \begin{aligned} c \sum_a \int \sqrt{m_a^2 c^2 + p^2} f_a d^3 \mathbf{p} + \tilde{U} &= \text{const}; \\ \sum_a \int \mathbf{p} f_a d^3 \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{P}} &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где $\tilde{U} = \int \tilde{W} d^3 \mathbf{k}$ и $\tilde{\mathbf{P}} = \int \frac{\mathbf{k}}{\omega} \tilde{W} d^3 \mathbf{k}$ — объемные плотности энергии и импульса колебаний соответственно.

Система уравнений (1.1)—(1.3) относится к однородной плазме. Ее можно обобщить на случай слабонеоднородной плазмы, когда масштаб неоднородности L велик по сравнению с характерной длиной волны неустойчивых колебаний. При этом колебания можно рассматривать как суперпозицию волновых пакетов (квазичастиц), каждый из которых описывается координатой \mathbf{r} и волновым вектором (квазиимпульсом) \mathbf{k} , причем \mathbf{r} и \mathbf{k} удовлетворяют уравнениям типа Гамильтона [5]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t); \quad (1.8)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t). \quad (1.9)$$

Спектральная плотность энергии колебаний зависит теперь не только от \mathbf{k} и t , но и от \mathbf{r} : $\tilde{W} \equiv \tilde{W}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$, поэтому вместо уравнения (1.3) следует пользоваться уравнением [6,7]

$$d\tilde{W}/dt = 2\gamma\tilde{W}, \quad (1.10)$$

где $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ — полная производная по времени вдоль фазовой траектории квазичастицы. Учет неоднородности в уравнении (1.1) сводится просто к замене:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} \rightarrow \frac{df_a}{dt} \equiv \frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + e_a \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}$$

(мы приняли во внимание возможность существования в плазме регулярных электрического и магнитного полей).

При рассмотрении нерелятивистской плазмы удобно перейти от функций распределения по импульсам к функциям распределения по скоростям $f_a(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$. При этом, учитывая, что $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, вместо (1.1) получаем

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta}^{(a)} \frac{\partial f_a}{\partial v_\beta}, \quad (1.11)$$

где сохранено обозначение $D_{\alpha\beta}^{(a)}$ для коэффициента диффузии по скоростям, который отличается только множителем m_a^{-2} от коэффициента диффузии по импульсам (1.2).

§ 2. Релаксация нерелятивистского электронного пучка

Пусть в начальный момент времени в плазме имеется малая группа электронов, движущихся параллельным потоком со скоростью v_0 , существенно превышающей тепловую скорость электронов плазмы v_{Te} , т. е. в плазме имеется электронный пучок. Хорошо известно, что такая система неустойчива относительно возбуждения ленгмюровских колебаний. Вообще говоря, волновые векторы этих колебаний лежат в широком угловом интервале, и квазилинейная релаксация носит существенно трехмерный характер. Это чрезвычайно осложняет задачу. Некоторые результаты, относящиеся к трехмерной задаче, мы изложим позже, а пока рассмотрим простую модель, предположив, что спектр колебаний одномерный (волновые векторы параллельны направлению движения пучка, т. е. $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$).

2.1. Одномерная релаксация

Одномерная модель разумна, например, в тех случаях, когда в плазме имеется магнитное поле, параллельное пучку и достаточно сильное для того, чтобы подавить колебания, распространяющиеся под углом к оси пучка. Процесс релаксации при этом полностью характеризуется одномерной функцией распределения электронов* $f(v_z, t)$ и одномерной спектральной функцией $W(k_z, t)$.

Условие черенковского резонанса для одномерной задачи имеет вид $\omega_{pe} - k_z v_z = 0$ (где ω_{pe} — электронная плазменная частота), т. е. волновой вектор каждого колебания однозначно связан со скоростью тех частиц, с которыми данное колебание взаимодействует: $k_z = \omega_{pe}/v_z$. Поэтому можно считать, что функция W зависит от переменной v_z . Величина $W \omega_{pe} dv_z / v_z^2$ представляет собой плотность энергии колебаний, фазовая скорость которых лежит в интервале от v_z до $v_z + dv_z$.

В одномерной задаче интегрирование по $d^3\mathbf{k}$ и $d^3\mathbf{p}$ в формулах (1.2) и (1.5) удается провести в явном виде, и в результате система уравнений существенно упрощается:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v_z} D \frac{\partial f}{\partial v_z}, \quad D = \frac{8\pi^2 e^2}{m^2} \cdot \frac{W(v_z, t)}{v_z}; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= 2\gamma W, \quad \gamma(v_z, t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_{pe}}{n} \cdot \frac{1}{v_z^2} \left| \frac{\partial f(v_z, t)}{\partial v_z} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь учтено, что для ленгмюровских колебаний $\epsilon = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$, т. е. $\omega \partial \epsilon / \partial \omega = 2$. Тепловая добавка к дисперсии ленгмюровских колебаний незначительна, если, как мы это считаем, $v_0 \gg v_{Te}$.

Одномерная система уравнений, помимо интегралов энергии и импульса (1.7), имеет еще один специфический, так называемый

* Индекс «e» у функции распределения электронов для краткости опускаем.

«квазилинейный», интеграл, который можно получить, если заметить, что

$$D \frac{df}{dv_z} = \frac{2\omega_{pe}}{mv_z^3} 2\gamma W = \frac{2\omega_{pe}}{mv_z^3} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Отсюда, в сочетании с первым из уравнений (2.1), следует:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(f - \frac{2\omega_{pe}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \frac{W}{v_z^3} \right) = 0.$$

Поскольку обычно предполагается, что в начальный момент времени флуктуации в плазме тепловые и их энергия пренебрежимо мала по сравнению с энергией пучка, можно положить $W_0 = W|_{t=0} = 0$; в результате имеем

$$f - \frac{2\omega_{pe}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \frac{W}{v_z} = f_0 = n' \delta(v_z - v_0). \quad (2.2)$$

Полагаем $f_0 = n' \delta(v_z - v_0)$, имея в виду, что начальный разброс пучка по скоростям Δv_0 мал по сравнению с конечным ($\Delta v \sim v_0$). Вместе с тем, естественно, считаем

$$\Delta v / v_0 \gtrsim (n'/n)^{1/3} \quad (2.3)$$

[такой вид имеет в применении к рассматриваемой задаче условие (1.6)]. Если условие (2.3) в начальный момент времени не выполнено, то возникающая гидродинамическая неустойчивость приводит к быстрому увеличению Δv до значений, удовлетворяющих неравенству (2.3) без существенного уменьшения энергии пучка [4]. Поэтому условие (2.3) несущественно*.

Как видно из формулы для инкремента (2.1), колебания с фазовой скоростью v_z возбуждаются только при условии $df/dv_z > 0$, т. е. только при $v_z < v_0$. Следовательно, коэффициент диффузии $D(v_z, t)$ отличен от нуля только при $v_z < v_0$, и функция распределения электронов пучка «размывается» лишь в направлении малых скоростей.

Из квазилинейных уравнений следует, что в стационарном состоянии, к которому релаксирует пучок, должно быть $f_\infty = \text{const}$ ** при $0 < v_z < v_0$ и, согласно сказанному выше, $f_\infty = 0$ при $v_z > v_0$. Таким образом, пучок релаксирует к состоянию «плато» (рис. 1). Значение функции f в области $0 < v_z < v_0$ легко определяется из условия сохранения числа частиц, и окончательно получаем

$$f_\infty = \begin{cases} \frac{n'}{v_0}, & 0 < v_z < v_0; \\ 0, & v_z > v_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

* Приведенные аргументы относятся к случаям, когда начальный разброс пучка не слишком мал: $\Delta v/v_0 \gtrsim \exp(-n/n')^{1/3}$. Для пучков с $\Delta v/v_0 \leq \exp(-n/n')^{1/3}$ они неприменимы [8].

** Индекс « ∞ » здесь и ниже относится к конечному состоянию плазмы.

Строго говоря, левая граница плато находится не в точке $v_z = 0$, а в той точке $v_z = v_{\text{мин}}$, где высота плато равна функции распределения электронов плазмы $F(v_z)$. В частности, для максвелловской функции распределения электронов плазмы $F = \frac{n}{\sqrt{2\pi}v_{Te}} \exp\left(-\frac{v_z^2}{2v_{Te}^2}\right)$ приближенно имеем:

$$v_{\text{мин}} = v_{Te} \left[2 \ln \left(\frac{n}{n'} \cdot \frac{v_0}{v_{Te}} \right) \right]^{1/2}.$$

Таким образом, в рассматриваемом нами пределе $v_0 \gg v_{Te}$ формула (2.4) достаточно хороша.

Энергия пучка в конечном состоянии составляет 1/3 его начальной энергии, а 2/3 энергии переходят в ленгмюровские колебания. Чтобы найти их спектр, следует воспользоваться квазилинейным интегралом (2.2). Подставляя в него функцию f_∞ , находим $W_\infty(v_z)$:

$$W_\infty = \begin{cases} \frac{mn'v_z^4}{2\omega_{pe}v_0}, & v_z < v_0; \\ 0, & v_z > v_0. \end{cases}$$

Изложенная часть задачи — отыскание конечного состояния — была решена еще в первых работах по квазилинейной теории [1—3]. Перейдем теперь к исследованию динамики процесса релаксации.

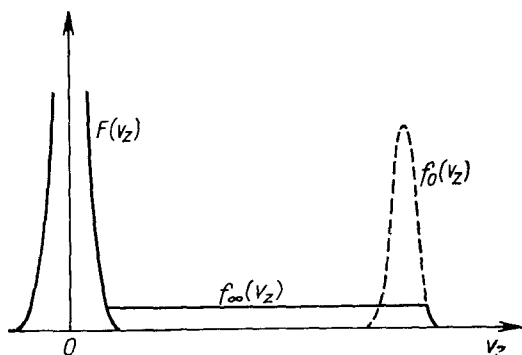


Рис. 1. Конечная форма функции распределения электронов пучка при одномерной релаксации.

Прежде всего отметим еще раз, что энергия колебаний в начальном состоянии очень мала — порядка энергии тепловых флуктуаций \tilde{U}_T . Идея решения задачи о динамике релаксации основана именно на использовании малого параметра $\tilde{U}_T/\tilde{U}_\infty$ [9], где $\tilde{U}_\infty = mn'v_0^2/3$ —

энергия колебаний в конечном состоянии. Допустим, что в интервале фазовых скоростей от 0 до некоторого $u < v_0$ в начальный момент времени колебания вообще отсутствуют: $W_0(v_z) = 0$. Тогда из уравнения $\partial W / \partial t = 2\gamma W$ следует, что в этом интервале они отсутствуют всегда, т. е. релаксация, дойдя до точки $v_z = u$, вообще остановит-

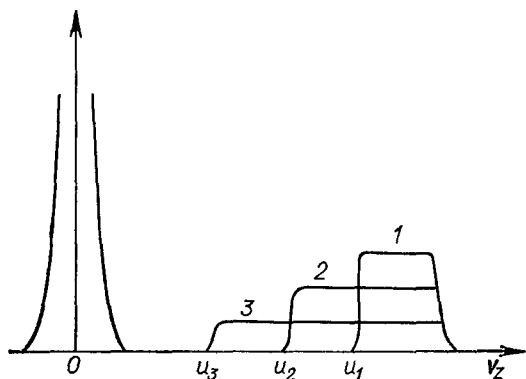


Рис. 2. Форма функции распределения электронов пучка для трех последовательных моментов релаксации $t_1 < t_2 < t_3$. Слева на графике показана функция распределения электронов плазмы.

ся и частицы со скоростями $v_z < u$ не появятся. В интервале же от $v_z = u$ до $v_z = v_0$ релаксация приведет к установлению плато:

$$f = \begin{cases} \frac{n'}{v_0 - u}, & u < v_z < v_0; \\ 0, & v_z < u. \end{cases} \quad (2.5)$$

На самом деле энергия колебаний хотя и мала, но все-таки отлична от нуля, и граница области релаксации медленно смещается влево (медленно в том смысле, что справа от точки $v_z = u$ квазилинейная диффузия успеваеет приводить функцию распределения к состоянию плато). Форма функции распределения для трех последовательных моментов времени показана на рис. 2.

Чтобы найти зависимость $u(t)$, проинтегрируем уравнение

$$\frac{\partial \ln W}{\partial t} = \frac{\pi \omega_{pe}}{n} v_z^2 \frac{\partial f}{\partial v_z}$$

по v_z от $u-0$ до $u+0$. Учитывая, что

$$\int_{u-0}^{u+0} \frac{\partial \ln W}{\partial t} dv_z = - \frac{du}{dt} \ln \frac{W(u+0)}{W(u-0)};$$

$$\int_{u-0}^{u+0} v_z^2 \frac{\partial f}{\partial v_z} dv_z = u^2 f(u+0) = \frac{u^2 n'}{v_0 - u},$$

получаем

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{\Lambda} \omega_{pe} \frac{n'}{n} \cdot \frac{u^2}{v_0 - u}, \quad (2.6)$$

где введено обозначение $\Lambda = \ln \frac{W(u+0)}{W(u-0)} = \ln \frac{W(u+0)}{W_T}$. Отношение, стоящее под знаком логарифма, очень велико, и поэтому сам логарифм не чувствителен к значению $W(u+0)$, можно приближенно записать:

$$\Lambda \simeq \ln \frac{\tilde{U}_\infty}{\tilde{U}_T} \simeq \ln \frac{mn'v_0^2}{\tilde{U}_T}.$$

Как известно [10], отношение энергии тепловых флуктуаций к тепловой энергии плазмы \tilde{U}_T/nT_e порядка N_D^{-1} , где $N_D = n \frac{4}{3} \pi (v_{Te}/\omega_{pe})^3$ — число частиц в дебаевской сфере. В типичной лабораторной плазме ($n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e \sim \sim 100 \text{ эв}$) $N_D \sim 10^6$, а в плазме солнечного ветра ($n \sim 10 \text{ см}^{-3}$,

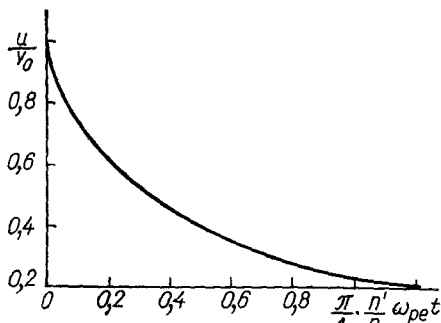


Рис. 3. Положение левой границы плазмы в функции от времени.

$T_e \sim 10 \text{ эв}$) $N_D \sim 3 \cdot 10^{10}$. С другой стороны, отношение энергии пучка к тепловой энергии плазмы в практически интересных случаях редко бывает меньше 10^{-3} . Поэтому $\Lambda = \ln N_D + \ln(mn'v_0^2/nT) \simeq \simeq \ln N_D$, т. е. Λ представляет собой не что иное, как известный кулоновский логарифм (см., например, [11]).

Так как, согласно сказанному, величину Λ можно считать не зависящей от времени, уравнение (2.6) легко интегрируется. Результат имеет вид

$$\frac{v_0}{u} + \ln \frac{u}{v_0} = 1 + \frac{\pi}{\Lambda} \omega_{pe} \frac{n'}{n} t. \quad (2.7)$$

Получаемая отсюда зависимость $u(t)$ приведена на рис. 3.

С помощью решения (2.7) можно найти, в течение какого времени энергия колебаний достигает половины своего конечного значения. Это происходит, когда энергия электронов пучка становится равной $mn'v_0^2/3$, т. е. при $u/v_0 = (\sqrt{5}-1)/2$. Тогда из (2.7) следует:

$$t_{1/2} = \frac{\Lambda}{\pi\omega_{pe}} \cdot \frac{n}{n'} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \simeq 0,07 \frac{\Lambda}{\omega_{pe}} \cdot \frac{n}{n'}.$$

Более подробное исследование (см. работу [9]) показывает, что на самом деле левая граница «ступеньки» (2.5) имеет конечную ширину порядка $(v_0 - u)/\Lambda$ при $v_0 - u \lesssim v_0$ и порядка u/Λ при $u \ll v_0$.

Отметим, что спектральная перекачка энергии колебаний, возникающая при учете нелинейных процессов, может увеличить значение W в области слева от точки $v_z = u$ (по сравнению с тепловым уровнем) и, как следствие, привести к некоторому уменьшению Λ .

2.2. Задача с граничными условиями

В предыдущем разделе предполагалось, что в начальный момент времени пучок имеется во всем пространстве, заполненном плазмой. Такая постановка задачи представляет интерес в применении к вопросу об «убегающих электронах» в тороидальных системах, где пучок действительно может появиться сразу во всем объеме плазмы. Но чаще пучок вводится в плазму извне через ее границу и релаксирует по мере распространения вглубь плазмы. Такая постановка эксперимента может быть смоделирована граничной задачей о стационарной инжекции пучка в полупространство, заполненное плазмой. Предположим, что пучок инжектируется в плазму вдоль оси z , перпендикулярной к границе плазмы, причем ограничимся одномерной (в указанном в разд. 2.1 смысле) моделью. При этом, если поперечный размер пучка существенно превышает длину релаксации, можно считать его параметры не зависящими от координат x и y .

Так как дисперсионное соотношение для ленгмюровских колебаний имеет вид

$$\omega = \omega_{pe} + \frac{3k_z^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}, \quad (2.8)$$

то $\partial\omega/\partial k_z = 3v_{Te}^2 k_z/\omega_{pe} = 3v_{Te}^2/v_z$ (обозначения те же, что в разд. 2.1). Считая, что концентрация и температура плазмы не зависят от z , получаем вместо (2.1):

$$\left. \begin{aligned} v_z \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} D \frac{\partial f}{\partial v_z}, & D &= \frac{8\pi^2 e^2}{m^2} \cdot \frac{W}{v_z}; \\ 3 \frac{v_{Te}^2}{v_z} \cdot \frac{\partial W}{\partial z} &= 2\gamma W, & \gamma &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_{pe}}{n} v_z^2 \frac{\partial f}{\partial v_z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.9) сохраняют, естественно, не концентрацию, а поток частиц

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} v_z f dv_z = 0,$$

и не энергию, а поток энергии

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^{\infty} \frac{mv_z^3}{2} f dv_z + \int_0^{\infty} \frac{\partial\omega}{\partial k_z} \tilde{W} dk_z \right] = 0.$$

Квазилинейный интеграл для системы (2.9) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(v_z f - \frac{6\omega_{pe} v_{Te}^2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \frac{W}{v_z^4} \right) = 0.$$

Пучок по-прежнему релаксирует к состоянию плато

$$f_{\infty} = \begin{cases} \frac{2n_0'}{v_0}, & v_z < v_0; \\ 0, & v_z > v_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

(нормировка соответствует сохранению потока частиц), но теряет при этом только 1/3 своей первоначальной энергии (т. е. $mn_0'v_0^2/6$). Тем не менее плотность энергии колебаний в конечном состоянии, которая может быть найдена из квазилинейного интеграла, оказывается существенно больше, чем прежде: $\tilde{U} = \frac{mn_0'v_0^2}{15} \cdot \frac{v_0^2}{v_{Te}^2} \gg$

$\gg mn'v_0^2$. Причина состоит в том, что групповая скорость ленгмюровских колебаний, равная по порядку величины v_{Te}^2/v_0 , мала по сравнению со скоростью пучка, и для того чтобы поток энергии колебаний был сравним с потоком энергии пучка (как это имеет место в установившемся состоянии), величина \tilde{U}_{∞} должна быть очень большой [12].

В процессе релаксации функция распределения все время имеет вид «ступеньки»:

$$f = \begin{cases} \frac{2n_0' v_0}{v_0^2 - u^2}, & u < v_z < v_0; \\ 0, & v_z < u, \end{cases}$$

а зависимость $u(z)$ дается формулой

$$\frac{v_0^2 - u^2}{2u^2} - \ln \frac{v_0}{u} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{n_0'}{n} \cdot \frac{\omega_{pe} v_0 z}{\Lambda v_{Te}^2}.$$

Энергию $mn_0'v_0^2/12$ пучок теряет на расстоянии

$$l_{1/2} = 0,2 \frac{n}{n'} \cdot \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe} v_0} \Lambda.$$

Стационарность решения граничной задачи обеспечивается тем, что генерация колебаний при пучковой неустойчивости компенсируется их сносом в направлении $z > 0$. Распространяясь в глубь плазмы, колебания поглощаются на некотором расстоянии $l_{\text{погл}} > l_{1/2}$ за счет процессов, идущих более медленно, чем квазилинейные (например, из-за столкновительного затухания). В качестве $l_{\text{погл}}$ в это неравенство может входить и длина плазменного промежутка (если колебания поглощаются границей плазмы).

Найденное выше стационарное решение устанавливается внутри слоя толщиной $\sim l_{1/2}$ за время порядка $l_{1/2}v_0/v_{Te}^2 \sim \Lambda n/\omega_{pe}n'$. Естественно, что стационарное распределение колебаний в слое толщиной $\sim l_{\text{погл}}$ устанавливается за значительно большее время ($\sim l_{\text{погл}}v_0/v_{Te}^2$). Что касается переднего фронта пучка, то он движется в глубь плазмы со скоростью порядка v_0 , существенно превышающей групповую скорость колебаний. Описание явлений, происходящих в области $z \gg l_{1/2}$, дано в § 5. Здесь мы отметим, что в этой области пучок также возбуждает колебания, но только в течение короткого промежутка времени порядка z/v_0 .

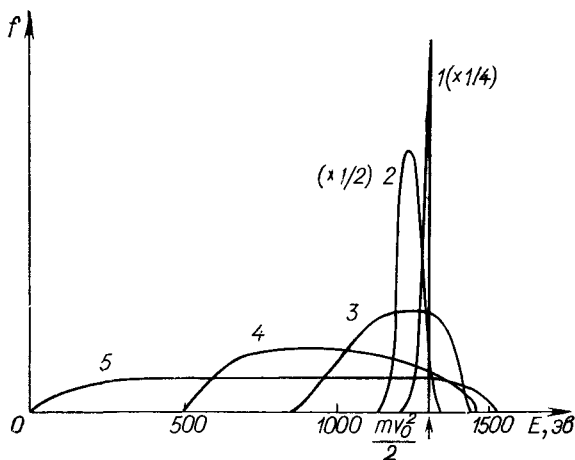


Рис. 4. Функция распределения электронов пучка на выходе из плазмы при различных значениях тока пучка:

$$i_1 = 2 \text{ ма}, \quad i_2 = 10 \text{ ма}, \quad i_3 = 12 \text{ ма}, \quad i_4 = 16,5 \text{ ма}, \quad i_5 = 22 \text{ ма}.$$

Приведенные результаты относятся к случаю, когда групповая скорость ленгмюровских колебаний $v_{gz} = \partial\omega/\partial k_z$ связана с тепловой добавкой к частоте. Если же v_{gz} определяется другими факторами (например, конечностью поперечных размеров плазмы), то длину релаксации следует оценивать по формуле $l_{1/2} \sim \Lambda v_{gz}/\gamma$, где под v_{gz} следует понимать групповую скорость тех колебаний, фазовая скорость которых равна v_0 , а под γ — инкремент неустойчивости, соответствующий размытому пучку ($\Delta v_0 \sim v_0$).

Экспериментально одномерная релаксация электронного пучка в плазме была исследована С. М. Левитским и И. П. Шашуриным [13] на установке, представлявшей собой стеклянную трубку длиной $L = 25 \div 30$ см и внутренним радиусом $a \simeq 0,5$ см. Концентрация плазмы составляла 10^{10} см $^{-3}$, концентрация пучка была примерно на порядок меньше. При указанных условиях электронная циклотронная частота превышала электронную плазменную частоту,

так что релаксация была, по-видимому, одномерной. При начальной скорости пучка $v_0 \sim 3 \cdot 10^9$ см/сек, которая типична для описываемых экспериментов, характерный волновой вектор ленгмюровских колебаний $k_z \sim \omega_{pe}/v_0$ был сравним с обратным радиусом трубки a^{-1} , так что ограниченность плазмы оказывала существенное влияние на дисперсию.

Имея в виду, что при $k_z a \sim 1$ групповая скорость ленгмюровских колебаний порядка фазовой, можно оценить длину релаксации как $l_{1/2} \sim \Lambda v_0 / \omega_{pe} \cdot n/n'$. Эта оценка оказалась в удовлетворительном согласии с результатами эксперимента. Кроме того, авторы измеряли функцию распределения электронов пучка на выходе из плазмы. При малых концентрациях пучка, когда выполнялось условие $l_{1/2} > L$, можно было, изменяя n' , получать на выходе из плазмы функцию распределения, соответствующую тому или иному этапу квазилинейной релаксации (рис. 4). Из рисунка видно, что функция распределения действительно близка по форме к ступеньке.

2.3. Трехмерная релаксация

Рассмотрим только задачу с начальными условиями. Ввиду громоздкости приведенных ниже формул, перейдем в квазилинейных уравнениях к безразмерным переменным. Для этого произведем в них следующие замены:

$$\left. \begin{aligned} t &\rightarrow t \frac{n}{\pi \omega_{pe} n'}; & k &\rightarrow k \frac{\omega_{pe}}{v_0}; & v &\rightarrow v v_0; \\ f &\rightarrow \frac{f}{v_0^3}; & W &\rightarrow W \frac{m n' v_0^5}{2 \omega_{pe}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где величины t , k , v , f и W , стоящие справа, уже безразмерны. После такой замены система уравнений (1.2), (1.3), (1.5) и (1.11) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial v_\beta}; \\ D_{\alpha\beta} &= \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W \delta(1 - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 \mathbf{k}; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= 2\gamma W; \quad \gamma = \frac{1}{2k^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \delta(1 - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поскольку рассматриваемая задача обладает аксиальной симметрией вокруг направления v_0 , удобно ввести цилиндрические системы координат в пространстве скоростей и в пространстве волновых векторов: (v_z, v_\perp, φ) и (k_z, k_\perp, φ) . В цилиндрических координатах уравнение для функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_z} \left(D_{zz} \frac{\partial f}{\partial v_z} + D_{z\perp} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \right) + \frac{1}{v_\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\perp} v_\perp \left(D_{z\perp} \frac{\partial f}{\partial v_z} + D_{\perp\perp} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \right).$$

Выражения для величин $D_{zz}, D_{z\perp}, D_{\perp\perp}$ и γ в аксиально-симметричном случае приведены в Приложении 1.

Описать трехмерную релаксацию пучка аналитически пока не удалось. Не известно также и конечное состояние системы. Можно, однако, высказать некоторые общие соображения о форме спектра колебаний в конечном состоянии. Прежде всего, из законов сохранения числа частиц, импульса и энергии следует, что колебания в конечном состоянии присутствуют обязательно. Действительно, если бы это было не так, то выполнялись бы соотношения

$$\int f_{\infty} d^3 \mathbf{v} = n'; \quad \int \mathbf{v} f_{\infty} d^3 \mathbf{v} = n' \mathbf{v}_0; \quad \int v^2 f_{\infty} d^3 \mathbf{v} = n' v_0^2,$$

и, следовательно, $\int (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 f_{\infty} d^3 \mathbf{v} = 0$, т. е. функция распределения в конечном состоянии отличалась бы от нуля только при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, но такая функция распределения неустойчива. Умножая далее уравнение (2.12) на f и проводя интегрирование по скоростям, получаем [14, 15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{f^2}{2} d^3 \mathbf{v} &= - \int D_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial v_{\alpha}} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{\beta}} d^3 \mathbf{v} = \\ &= - \int d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{v} W \left(\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 \delta(1 - \mathbf{k}\mathbf{v}). \end{aligned}$$

В конечном состоянии $\partial f_{\infty} / \partial t = 0$ и, следовательно,

$$\int d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{v} W_{\infty} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_{\infty}}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 \delta(1 - \mathbf{k}\mathbf{v}) = 0.$$

В цилиндрических координатах это соотношение сводится к

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} W_{\infty}(k_z, k_{\perp}) \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \times \\ &\times \int_{\substack{|1 - k_z v_z| < 1 \\ k_{\perp} v_{\perp}}} v_{\perp} dv_{\perp} \frac{\left(\frac{1 - k_z v_z}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} \right)^2}{V k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - (1 - k_z v_z)^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, она должна быть тождественно равна нулю. Из сказанного выше следует, что $W \neq 0$. Пусть, например, функция W_{∞} отлична от нуля в некоторой точке (k_z, k_{\perp}) . Тогда должно быть

$$\frac{1 - k_z v_z}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 \quad (2.14)$$

в области скоростей

$$-\infty < v_z < +\infty; \quad v_{\perp} > \frac{|1 - k_z v_z|}{k_{\perp}} \quad (2.15)$$

(рис. 5). Таким образом, в области (2.15) функция распределения должна быть постоянной вдоль характеристик уравнения (2.14), которые, как можно убедиться, представляют собой окружности с центром в точке $v_z = 1/k_z$. Если функция W_∞ отлична от нуля в некотором интервале значений k_z , то, вообще говоря, происходит пе-

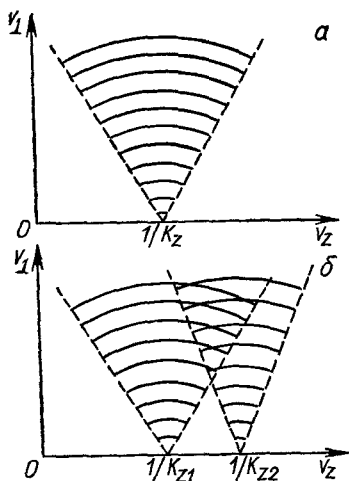


Рис. 5. Характеристики уравнения (2.25) для случая, когда функция W отлична от нуля при одном (а) и при двух значениях k_z (б).

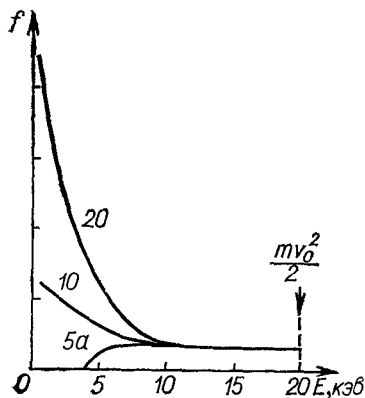


Рис. 6. Функции распределения электронов по продольной скорости для различных значений тока пучка. Для удобства сопоставления функции распределения в каждом случае отнесены к значению $f(v_0)$.

ресечение характеристик (см. рис. 5) и функция f_∞ равняется константе в бесконечной области скоростей, что несовместимо с законом сохранения энергии. Таким образом, мы приходим к выводу, что спектр колебаний в конечном состоянии может быть отличен от нуля только на нескольких (скорее всего, на одной) плоскостях $k_z = \text{const}$ или на линии $k_\perp = 0$ (последняя возможность связана с тем, что при $k_\perp = 0$ область (2.15) вырождается в линию $v_z = 1/k_z$).

Трехмерная релаксация электронного пучка исследовалась экспериментально А. Г. Плаховым и Л. П. Закатовым [16] в пробочной ловушке длиной около 1 м. Концентрация плазмы составляла примерно 10^{13} см^{-3} . Магнитное поле в объеме ловушки равнялось 2 кэ, так что электронная циклотронная частота была существенно ниже электронной плазменной частоты. Диаметр пучка равнялся 2 см и значительно превышал характерную длину волны ленгмюровских колебаний, возбуждаемых пучком. В то же время длина релаксации, оцененная по формулам квазилинейной теории, была больше диаметра пучка. Поэтому сопоставление теории, основан-

ной на рассмотрении пучка, безграничного в поперечном направлении, с результатами эксперимента может быть только качественным.

Функция распределения электронов пучка по продольной скорости $F = 2\pi \int_0^{\infty} v_{\perp} f(v_z, v_{\perp}) dv_{\perp}$ измерялась на выходе из плазмы с помощью сеточного анализатора. Результаты измерений приведены на рис. 6 для разных значений тока пучка (начальная энергия пучка была равна 20 кэВ). Одновременно с помощью болометрического датчика измерялась полная потеря энергии пучка:

$$\Delta E = tS \left(\frac{mn_0' v_0^3}{2} - 2\pi \int_0^{\infty} v_z dv_z \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \frac{m}{2} \times \right. \\ \left. \times (v_z^2 + v_{\perp}^2) f(v_z, v_{\perp}) \right),$$

где t — время инжекции пучка, S — площадь его сечения, а n_0' — его начальная концентрация. По измеренной функции распределения $F(v_z)$ можно было вычислить потерю «продольной» энергии:

$$\Delta E_z = tS \left(\frac{mn_0' v_0^3}{2} - \int_0^{\infty} \frac{mv_z^3}{2} F(v_z) dv_z \right).$$

Сопоставление величин ΔE_z и ΔE (отнесенных к полной энергии пучка $E = tS mn_0' v_0^3/2$, проведено в таблице.

Из таблицы видно, что при малых значениях тока пучка функция распределения электронов пучка на выходе из плазмы почти одномерна ($\Delta E_z \simeq \Delta E$). Поскольку малые значения тока соответствуют большой

длине релаксации, отсюда, по-видимому, следует, что на начальной стадии релаксации почти одномерна. Однако, появление большой разницы между ΔE_z и ΔE с увеличением тока пучка говорит о том, что на заключительной стадии релаксации функция распределения электронов пучка становится существенно трехмерной.

Относительные потери полной и продольной энергии

Ток пучка, a	$\Delta E_z/E$	$\Delta E/E$
5	0,34	0,29
10	0,57	0,36
20	0,67	0,41

2.4. Роль неоднородности плазмы

При распространении ленгмюровского колебания в неоднородной плазме его волновой вектор изменяется в соответствии с уравнением (1.9). Как мы увидим ниже, это обстоятельство приводит к нарушению условия черенковского резонанса между колебаниями и частицами пучка и к существенному замедлению процесса релаксации [17].

Из дисперсионного соотношения для ленгмюровских колебаний и уравнения (1.9) следует, что при $v_0 \gg v_{Te}$ изменение волнового вектора обусловлено по преимуществу неоднородностью концентрации плазмы. Неоднородность температуры не играет существенной роли, и мы будем поэтому считать $v_{Te} = \text{const}$.

Для начала рассмотрим случай, когда концентрация плазмы зависит только от координаты z , параллельной направлению инжекции пучка.

Из формул, содержащихся в Приложении 1, следует, что взаимодействовать с пучком и, следовательно, усиливаться могут только те колебания, у которых продольная составляющая волнового вектора лежит в интервале шириной $\Delta k_z \sim (\Delta v/v_0)(k_\perp + \omega_{pe}/v_0)$ вокруг точки $k_z = \omega_{pe}/v_0$. В то же время в неоднородной плазме k_z изменяется во времени [см. (1.9)]: $dk_z/dt \sim \omega_{pe}/L_\parallel$, где L_\parallel — характерный масштаб продольной неоднородности. Поэтому каждое колебание взаимодействует с пучком лишь в течение конечного промежутка времени $\Delta t \sim (L_\parallel \Delta v/v_0^2)(1 + k_\perp v_0/\omega_{pe})$.

Квазилинейная релаксация происходит только в том случае, если за время Δt колебание успевает существенно нарасти от теплового уровня, т. е. только при условии

$$\gamma \Delta t \gtrsim \Lambda. \quad (2.16)$$

Из формулы для инкремента [см. (П.1.2)]

$$\gamma \sim \omega_{pe} \frac{n'}{n} \left(\frac{v_0}{\Delta v} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{k_\perp v_0}{\omega_{pe}} \right)^2 \right]^{-1}$$

следует, что релаксация в однородной плазме определяется колебаниями с $k_\perp \leq \omega_{pe}/v_0$. Для них условие (2.16) имеет вид $\frac{\omega_{pe} L_\parallel}{v_0} \times \times \frac{v_0}{\Delta v} \cdot \frac{n'}{n} \gtrsim \Lambda$ или, иначе,

$$\frac{\Delta v}{v_0} \leq \frac{1}{\mu_\parallel \Lambda}, \quad (2.17)$$

где

$$\mu_\parallel = \frac{v_0}{\omega_{pe} L_\parallel} \cdot \frac{n}{n'}.$$

Если величина $\mu_\parallel \Lambda$ значительно меньше единицы, то условие (2.17) выполняется при любых значениях Δv , которые могут представлять интерес в задаче о релаксации пучка ($\Delta v \lesssim v_0$). Иными словами, при $\mu_\parallel \Lambda \leq 1$ влияние неоднородности плазмы на релаксацию пучка несущественно. Если же имеется обратное неравенство, $\mu_\parallel \Lambda \gtrsim 1$, то релаксация возможна только при $\Delta v/v_0 \leq \leq 1/\mu_\parallel \Lambda$. В частности, если начальный разброс пучка по скоростям Δv_0 не удовлетворяет последнему неравенству, то релаксация отсутствует. В процессе релаксации разброс пучка по скоростям, во

всяком случае, не может превысить величины $v_0/\mu_{\parallel} \Lambda \ll v_0$, и релаксация заканчивается при $\Delta v \sim v_0/\mu_{\parallel} \Lambda \ll v_0$.

Продольная неоднородность плазмы приводит к одному очень характерному эффекту (см. работы [17, 18]) в случае одномерной релаксации. Именно, оказывается, что если концентрация плазмы возрастает в направлении $z > 0$, то релаксация приводит к появлению ускоренных электронов (со скоростью $v_z > v_0$). Этот эффект связан с тем, что при $\partial \omega_{pe}/\partial z > 0$ фазовая скорость колебаний возрастает при их распространении вглубь плазмы, так что коэффициент квазилинейной диффузии становится отличным от нуля и при $v_z > v_0$. Наиболее рельефно эффект ускорения проявляется при $\mu_{\parallel} \Lambda \ll 1$. В этом случае, как отмечалось выше, неоднородность плазмы не оказывает влияния на установление плато, которое формируется точно так же, как и в однородной плазме, на расстоянии $\sim l_{1/2} \sim \sim \Lambda n v_{Te}^2/\omega_{pe} v_0 n'$. Что касается фазовой скорости колебаний, то она увеличивается на величину $\sim v_0$ на расстоянии $s \sim L v_{Te}^2/v_0^2$, причем $s \gg l_{1/2}$ при $\mu_{\parallel} \Lambda \ll 1$. Поэтому при $\mu_{\parallel} \Lambda \ll 1$ весь процесс релаксации можно разделить на два этапа: сначала на масштабе $l_{1/2}$ происходит установление плато в области скоростей $0 < v_z < v_0$, и функция распределения приобретает вид (2.10); затем на масштабе $s_{1/2}$ фазовая скорость колебаний возрастает, и происходит ускорение электронов.

Чтобы понять, как идет релаксация на втором этапе, оценим левую и правую части уравнения (2.9):

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} \sim v_0 \frac{f}{s};$$

$$\frac{\partial}{\partial v_z} D \frac{\partial f}{\partial v_z} \sim D \frac{f}{v_0^2} \sim \omega_{pe} \frac{n'}{n} \cdot \frac{v_0^2}{v_{Te}^2} f.$$

Мы приняли во внимание, что $W \sim mn'v_0^5/\omega_{pe} v_{Te}^2$. Из приведенных оценок как будто бы следует, что левая часть уравнения (2.9) много меньше правой. На самом же деле это означает, что функция распределения близка к состоянию плато (т. е. $|\partial f/\partial v_z| \ll f/v_0$) во всей области скоростей, где коэффициент диффузии $D(v_z, z)$ отличен от нуля [иными словами, в области $0 < v_z < u(z)$, где через $u(z)$ обозначена максимальная фазовая скорость колебаний в точке z]. Следовательно, на втором этапе релаксации функция распределения имеет вид

$$f(v_z, z) = \begin{cases} \frac{2n_0' v_0}{u^2(z)}, & 0 < v_z < u(z); \\ 0, & v_z > u(z). \end{cases}$$

Можно написать довольно простое уравнение для функции $u(z)$ (см. работу [18]), но мы не будем этого делать. Найдем только значение $u = u_{\infty}$, которое соответствует окончанию второго этапа релаксации (т. е. полному поглощению ленгмюровских колебаний элек-

тронами пучка). Для этого достаточно воспользоваться законом сохранения потока энергии:

$$\frac{1}{2} m n_0' v_0^3 = \int_0^{\infty} \frac{m}{2} v_z^3 f(v_z, \infty) dv_z = \frac{1}{4} m n_0' v_0 u_{\infty}^2$$

(мы учли, что поток энергии колебаний при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$ равен нулю). Отсюда $u_{\infty} = v_0 \sqrt{2}$, т. е. в результате ускорения появляются электроны с энергией, вдвое превышающей начальную. Отметим, что для возникновения эффекта ускорения достаточно, чтобы на длине плазменного промежутка концентрация плазмы увеличивалась на очень малую величину $\Delta n \sim (v_{Te}^2/v_0^2)n$.

Если концентрация плазмы убывает в направлении инжекции пучка, то при $\mu \parallel \Lambda \ll 1$ релаксация также идет в два этапа: сначала устанавливается плато на функции распределения электронов пучка, что сопровождается возбуждением колебаний, а затем фазовая скорость колебаний уменьшается, и они поглощаются электронами плазмы, приводя к ускорению последних. В рассматриваемом нами случае $v_0 \gg v_{Te}$ функция распределения электронов после окончания первого этапа релаксации имеет вид

$$f = \begin{cases} \frac{n}{\sqrt{\pi} v_{Te}} \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{Te}^2}\right), & v_z < v_{\text{мин}}; \\ \frac{2n_0'}{v_0}, & v_{\text{мин}} < v_z < v_0; \\ 0, & v_z > v_0. \end{cases}$$

Здесь, в отличие от предыдущего, мы учли, что левая граница находится в точке $v_{\text{мин}} \sim v_{Te} \left[\ln\left(\frac{n}{n_0'} \cdot \frac{v_0}{v_{Te}}\right) \right]^{1/2}$ (см. разд. 2.1).

Ускорение электронов плазмы происходит, соответственно этому, на масштабе $s \sim L / \ln\left(\frac{n}{n_0'} \cdot \frac{v_0}{v_{Te}}\right)$, который отвечает уменьшению фазовой скорости колебаний от ее начального значения $\sim v_0$ до $v_{\text{мин}} \ll \ll v_0$. В конечном состоянии, когда все колебания поглощаются, функция распределения на участке от $v_{\text{мин}}$ до v_0 становится плавно спадающей — плато исчезает.

Обратимся теперь снова к трехмерной релаксации и рассмотрим случай, когда концентрация плазмы изменяется в направлении, перпендикулярном к оси z . При этом продольная составляющая волнового вектора не меняется и колебание не выходит из резонанса с пучком. Но увеличение поперечной составляющей волнового вектора приводит к уменьшению инкремента, и вследствие этого мо-

жет случиться, что колебание не нарастает в достаточной степени, чтобы оказать обратное воздействие на пучок.

Поскольку k_{\perp} изменяется со временем, грубо говоря, по линейному закону $k_{\perp} \sim \omega_{pe} t / L_{\perp}$, где L_{\perp} — характерный масштаб поперечной неоднородности, то условие, при котором квазилинейная релаксация возможна, имеет вид

$$\omega_{pe} \frac{n'}{n} \left(\frac{v_0}{\Delta v} \right)^2 \int_0^{\infty} \left[1 + \left(\frac{v_0 t}{L_{\perp}} \right)^2 \right]^{-1} dt \gtrsim \Lambda \quad (2.18)$$

или

$$(v_0 / \Delta v)^2 \gtrsim \mu_{\perp} \Lambda,$$

где $\mu_{\perp} = v_0 n / \omega_{pe} L_{\perp} n'$. Точно так же, как и выше, отсюда следует, что влияние поперечной неоднородности несущественно, если $\mu_{\perp} \Lambda \ll 1$; если же $\mu_{\perp} \Lambda \gtrsim 1$, то релаксация заканчивается при $\Delta v \sim v_0 \sqrt{\mu_{\perp} \Lambda}$.

В заключение отметим, что при наличии внутри плазменного промежутка даже очень незначительных минимумов концентрации (глубиной $\Delta n \gtrsim n v_{Te}^2 / v_0^2$) появляются ленгмюровские колебания, «запертые» вблизи этих минимумов [17, 18]. Поскольку в этом случае генерация колебаний при неустойчивости не может компенсироваться их сносом в направлении инжекции пучка, стационарное решение граничной квазилинейной задачи, вообще говоря, исчезает. Эффективность взаимодействия пучка с плазмой может при этом существенно возрастать.

§ 3. Релаксация ультрарелятивистского электронного пучка

Специальное рассмотрение ультрарелятивистского электронного пучка оправдано не только большим интересом, проявляемым к нему как к эффективному средству нагрева плазмы (см., например, [19]), но и тем, что при его релаксации возникают очень характерные физические эффекты. Немаловажную роль играет и то обстоятельство, что квазилинейные уравнения в ультрарелятивистском случае допускают довольно простое решение даже в трехмерной задаче.

Мы ограничимся исследованием электронных пучков с достаточно большим угловым разбросом в импульсном пространстве:

$$\Delta \theta > \frac{mc^2}{E} \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

где $E \gg mc^2$ — энергия электронов пучка, а ΔE — разброс пучка по энергии. При этом условии можно пренебречь отличием модуля скорости электронов пучка от c и считать, что $\mathbf{v} = c\mathbf{p}/p$, где \mathbf{p} — импульс электрона.

Если к тому же

$$\Delta\theta > \left(\frac{n'}{n} \cdot \frac{mc^2}{E} \right)^{1/4}, \quad (3.2)$$

где n' и n — концентрации пучка и плазмы, то неустойчивость кинетическая.

Для ориентации в порядках величин воспользуемся параметрами пучка и плазмы, которые приводятся в работе [19] в связи с предлагаемыми там опытами по нагреву плазмы твердой мишени: $n' \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $E \sim 10 \text{ Мэв}$. Подставляя эти значения параметров в неравенства (3.1) и (3.2), получаем, что в применении к таким опытам наши результаты будут справедливы уже при $\Delta\theta > 0,05$.

Ниже мы ограничимся рассмотрением граничной квазилинейной задачи, поскольку она представляет наибольший интерес для приложений.

3.1. Релаксация в однородной плазме

При указанных выше условиях система квазилинейных уравнений может быть записана в виде

$$\frac{3v_{Te} k_z}{\omega_{pe}} \cdot \frac{\partial W}{\partial z} = 2\gamma W; \quad (3.3)$$

$$c \frac{p_z}{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_\beta}. \quad (3.4)$$

Так как ниже будет показано, что в процессе релаксации угловой разброс пучка все время меньше единицы, то левую часть уравнения (3.4) можно записать в виде $c\partial f/\partial z$. Это означает, в частности, что концентрация пучка не меняется вдоль z и остается равной своему начальному значению n' .

Для фактического вычисления инкремента γ и тензора $D_{\alpha\beta}$ удобно использовать сферические координаты p , θ , φ в пространстве импульсов и k , θ' , φ' в пространстве волновых векторов (углы θ и θ' отсчитываются от оси z). Результаты соответствующих вычислений приведены в Приложении 2.

Функция распределения пучка на входе в плазму для определенности считается моноэнергетической:

$$f = \frac{n' g(\theta)}{2\pi p_0^2} \delta(p - p_0). \quad (3.5)$$

Такое предположение соответствует экспериментальной постановке задачи в тех случаях, когда пучок создается электростатическими источниками.

Для сокращения записи удобно произвести в уравнениях (3.3) и (3.4) следующие замены:

$$\left. \begin{aligned} z &\rightarrow \frac{3v_{Te} n p_0}{mc^2 \omega_{pe} n'} z; & \mathbf{k} &\rightarrow \frac{\omega_{pe}}{c} \mathbf{k}; & \mathbf{p} &\rightarrow p_0 \mathbf{p}; & f &\rightarrow \frac{n'}{p_0^3} f; \\ W &\rightarrow \frac{c^6 p_0 n'}{3\omega_{pe}^3 v_{Te}^2} W; & \gamma &\rightarrow \gamma \frac{\omega_{pe} n' mc}{np_0}; \\ D_{\alpha\beta} &\rightarrow \frac{mc^3 p_0 \omega_{pe} n'}{3v_{Te}^2 n} D_{\alpha\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

где величины z , \mathbf{k} , \mathbf{p} , f , W , γ и $D_{\alpha\beta}$, стоящие справа, уже безразмерны. В новых (безразмерных) переменных система уравнений (3.3), (3.4) приобретает вид

$$k_z \frac{\partial W}{\partial z} = 2\gamma W; \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left(D_{pp} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{D_{p\theta}}{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{p \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left(D_{p\theta} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{D_{\theta\theta}}{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь использованы введенные выше сферические системы координат p , θ , φ и k , θ' , φ' .

Основной результат, касающийся релаксации пучка в однородной плазме, был получен Я. Б. Файнбергом, В. Д. Шапиро и В. И. Шевченко [20] и состоит в том, что релаксация почти одномерна, т. е. потеря энергии пучком происходит без существенного увеличения его углового разброса (см. также [21 — 23]). Это обстоятельство вытекает из анализа выражений для инкремента и коэффициентов диффузии,

приведенных в Приложении 2. Действительно, зависимость инкремента, максимизированного по k , от угла распространения θ' изображена на рис. 7. Ширина максимума на кривой $\gamma_m(\theta')$ примерно равна $\Delta\theta$, причем отношение γ_{m1}/γ_{m2} порядка единицы (обозначения см. на рис. 7). Вблизи точки $\theta' = \theta'_0$ спектр колебаний

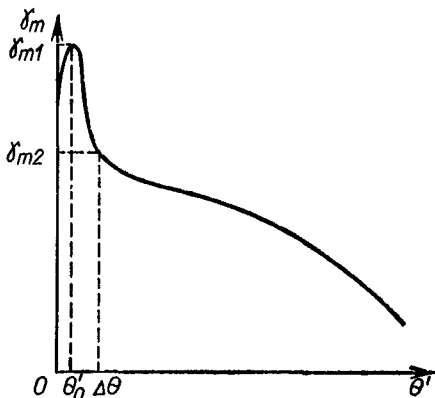


Рис. 7. Зависимость инкремента, максимизированного по k , от угла распространения θ' .

имеет вид

$$W = W_T \exp \left[\gamma_{m1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial \theta'^2} \Big|_{\theta' = \theta_0'} (\theta' - \theta_0')^2 \right] \frac{z}{v_{gz}}.$$

Поскольку колебания начинают нарастать от теплового уровня, их обратное влияние на частицы пучка становится существенным при $z/v_{gz} \sim \Lambda/\gamma_{m1}$. К этому моменту

$$W \simeq W_T (\exp \Lambda) \exp \left[\frac{\Lambda}{2\gamma_{m1}} \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial \theta'^2} \Big|_{\theta' = \theta_0'} (\theta' - \theta_0')^2 \right],$$

т. е. спектр колебаний «стянут» в узкую область шириной порядка $\Delta\theta/\sqrt{\Lambda}$ вокруг точки $\theta' = \theta_0'$ (мы учли, что $\frac{1}{\gamma_{m1}} \left| \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial \theta'^2} \right| \sim \frac{1}{\Delta\theta'} \cdot$).

Зная положение и ширину спектра колебаний, можно с помощью формулы (П.2.6) оценить отношение коэффициентов диффузии D_{pp} и $D_{\theta\theta}$: $D_{pp}/D_{\theta\theta} \sim \Delta\theta^{-2} \gg 1$. Отсюда следует, что диффузия по импульсу идет много быстрее диффузии по углу, и за время, в течение которого угловой разброс пучка $\Delta\theta$ увеличивается на величину порядка своего начального значения $\Delta\theta_0$, пучок выделяет в плазме уже значительную (порядка единицы) долю своей начальной энергии. Это происходит на расстоянии

$$l_{1/2} \sim \Lambda/\gamma_{m1} \sim \Lambda \Delta\theta_0^2, \quad (3.9)$$

или, в размерных переменных,

$$l_{1/2} \sim \Lambda \frac{c}{\omega_{pe}} \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{E}{mc^2} \frac{n}{n'} \Delta\theta_0^2. \quad (3.9')$$

Полное количественное описание процесса релаксации очень затруднено, так как конкретные его детали существенно зависят от формы начальной функции распределения. Поэтому рассмотрим простую модель [21], в которой спектр колебаний предполагается в точности одномерным: $W(k, \theta') = \bar{W}(k) \times \delta(1 - \cos \theta')$. В случае одномерного спектра колебаний условие черенковского резонанса имеет вид: $1 - k_z p_z / p = 0$ (используются безразмерные переменные!). Следовательно, с колебанием, имеющим волновой вектор k_z , взаимодействуют все электроны, которые в плоскости (p_z, p_\perp) лежат на луче, образующем угол $\theta = \arctg \sqrt{k_z^2 - 1} \approx \sqrt{k_z^2 - 1}$ с осью p_z . Если же в плазме возбуждены колебания с волновыми векторами в некотором интервале, то с ними взаимодействуют электроны, лежащие на лучах с углами θ от $\theta_- = \arctg \sqrt{k_-^2 - 1}$ до $\theta_+ = \arctg \sqrt{k_+^2 - 1}$, где k_- и k_+ — минимальный и максимальный волновые векторы. Так как в одномерном случае электрическое поле колебаний направлено вдоль оси z , то квазилинейная диффузия идет вдоль линий $p_\perp = \text{const}$ (рис. 8). В процессе релаксации угол

* Впервые об эффекте стягивания спектра в квазилинейных задачах упоминалось в работе [24].

θ_+ увеличивается, а θ_- уменьшается. При этом, как видно из рис. 8, в плазме обязательно появляются электроны с энергией, превышающей начальную энергию электронов пучка.

При формальном исследовании одномерной модели удобно считать f функцией независимых переменных θ и $p_{\perp} = p \sin \theta$, а \bar{W} — функцией переменной $\eta = [2(k-1)]^{1/2}$. Используя соотношения

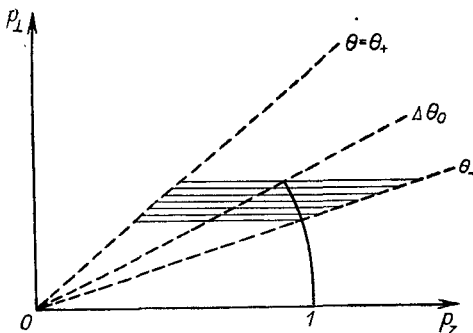


Рис. 8. Релаксация ультрарелятивистского электронного пучка при одномерном спектре колебаний. Дуга окружности единичного радиуса представляет собой ту часть импульсного пространства, где p_{\perp} отлична от нуля начальная функция распределения ($p = 1, \theta \leq \Delta\theta_0$).

(П.2.2) и (П.2.7), а также условие $\theta \ll 1$, запишем систему уравнений (3.7), (3.8) в новых переменных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \bar{W}(z, \theta) &= -\frac{\pi}{\theta} \bar{W}(z, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} h(z, \theta); \\ h(z, \theta) &= 2\pi \int_0^{\infty} f p_{\perp} dp_{\perp}; \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z, \theta, p_{\perp}) = \frac{2\pi^2 \theta^2}{p_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\theta^2 \bar{W}(z, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} f(z, \theta, p) \right]. \quad (3.11)$$

Здесь же укажем два интеграла этой системы, в наличии которых можно убедиться непосредственной проверкой:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2} f(z, \theta, p_{\perp}) = \frac{g_0(p_{\perp})}{2\pi p_{\perp}}; \quad (3.12)$$

$$\int_0^{\infty} p_{\perp}^3 f(z, \theta, p_{\perp}) dp_{\perp} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \theta^3 \bar{W}(z, \theta) = \frac{\theta^4}{2\pi} g_0(\theta). \quad (3.13)$$

Первый из них представляет собой закон сохранения числа частиц с заданным p_{\perp} , а второй является аналогом нерелятивистского квазилинейного интеграла (2.2).

Получим решение системы (3.10), (3.11), соответствующее ступенчатой начальной функции g_0 :

$$g_0(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\Delta\theta_0^2}, & \theta < \Delta\theta_0; \\ 0, & \theta > \Delta\theta_0. \end{cases}$$

Способ решения аналогичен тому, который используется в теории одномерной релаксации нерелятивистского пучка: в той области значений θ , где спектральная плотность энергии колебаний существенно превышает тепловой уровень, функция распределения может считаться не зависящей от θ (плато); там, где энергия колебаний близка к тепловой, функция распределения равна своему начальному значению. Другими словами, функция распределения может быть записана в виде

$$f(z, \theta, p_{\perp}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \Delta\theta_0^2} \delta\left(\frac{p_{\perp}}{\theta} - 1\right), & \theta < \theta_-(z); \\ \mathcal{P}(p_{\perp}, z), & \theta_-(z) < \theta < \theta_+(z); \\ 0, & \theta > \theta_+(z), \end{cases}$$

где функция $\mathcal{P}(p_{\perp}, z)$ определяет высоту плато, а функции $\theta_-(z)$ и $\theta_+(z)$ — его границы, причем $\mathcal{P}(p_{\perp}, z)$ выражается через θ_- и θ_+ с помощью интеграла (3.12):

$$\mathcal{P}(p_{\perp}, z) = \begin{cases} 0, & p_{\perp} < \theta_-; \\ \frac{1}{\pi \Delta\theta_0^2 p_{\perp}} \cdot \frac{\theta_+ \theta_-}{\theta_+ - \theta_-}, & \theta_- < p_{\perp} < \Delta\theta_0; \\ 0, & p_{\perp} > \Delta\theta_0. \end{cases}$$

Что касается спектра колебаний, то его легко найти с помощью интеграла (3.13):

$$\overline{W}(z, \theta) = \frac{1}{2\pi\theta^3} \left[\int_{\theta_-}^{\theta} \theta^2 g_0(\theta) d\theta - \frac{1}{\theta_-} - \frac{1}{\theta} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \theta^2 g_0(\theta) d\theta \right]. \quad (3.14)$$

Остается теперь определить положение границ плато. С этой целью проинтегрируем обе части уравнения (3.13) по θ от θ_- — 0 до $\theta_+ + 0$, в результате чего

$$\frac{d\theta_-}{d\xi} = -\theta_- + \frac{\theta_+}{\theta_+ - \theta_-} (\Delta\theta_0 - \theta_-); \quad \xi = \frac{2\pi}{\Delta\theta_0^2 \Lambda} z. \quad (3.15)$$

Аналогичный результат получается и для θ_+ интегрированием уравнения (3.10) по промежутку $(\theta_+ - 0, \theta_+ + 0)$:

$$\frac{d\theta_+}{d\xi} = \frac{\theta_-}{\theta_+ - \theta_-} (\Delta\theta_0 - \theta_-). \quad (3.16)$$

Поскольку инкремент неустойчивости, вычисленный по начальной функции распределения, положителен только в одной точке ($\theta = \Delta\theta_0$), не представляет труда записать начальные условия для системы (3.15), (3.16): $\theta_+(0) = \theta_-(0) = \Delta\theta_0$. Несмотря на сравнительно простой вид уравнений (3.15), (3.16), их удается проинтегрировать только численно. Результаты соответствующих вычислений приведены на рис. 9.

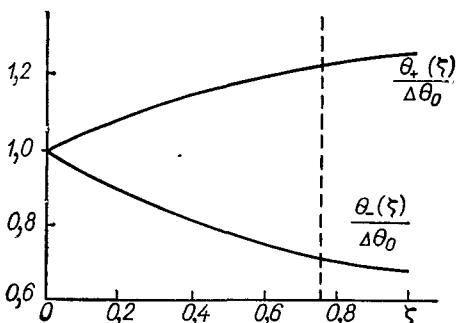


Рис. 9. Результат численного интегрирования системы (3.15), (3.16).

Найденное решение исходной системы уравнений (3.10), (3.11) описывает лишь начальную стадию релаксации ($\xi < 0,77$). Дело в том, что спектральная плотность энергии колебаний, формально вычисленная согласно (3.13), при $\xi > 0,77$ оказывается отрицательной в окрестности точки $\theta = \theta_-$. Это означает, что при $\xi > 0,77$ энергия колебаний становится недостаточной для выравнивания функции распределения вдоль линии $\rho_{\perp} = \text{const}$, а приближение плато нарушается. Простого аналитического описания дальнейшей эволюции пучка найти не удастся. Отметим, что эффект ускорения электронов достаточно ярко выражен уже при $\xi = 0,77$, при этом значении ξ доля ускоренных электронов равна 0,13 полного числа электронов пучка.

3.2. Релаксация в неоднородной плазме (качественное рассмотрение)

Рассмотрим сначала роль продольной неоднородности плазмы, которая, как отмечалось выше, приводит к изменению k_z . Взаимодействовать с ультрарелятивистским пучком могут только те колебания, у которых k_z лежит в узком интервале вокруг точки $k_z = \omega_{pe}/c^*$: $|k_z - \frac{\omega_{pe}}{c}| \lesssim \frac{\omega_{pe}}{c} \Delta\theta^2 + k_{\perp} \Delta\theta$ [последнее обстоятельство можно усмотреть, например, из формулы (П.2.1)]. Поскольку k_z изменяется со временем по закону $dk_z/dt \sim \omega_{pe}/L_{\parallel}$, то колебание с данным k_z взаимодействует с пучком в течение промежутка времени $\Delta t \sim \frac{L_{\parallel}}{c} \left(\Delta\theta^2 + \frac{k_{\perp} c}{\omega_{pe}} \Delta\theta \right)$. Принимая во внимание, что инкремент пучковой неустойчивости может быть оценен по формуле [см. (П.2.3)]:

$$\gamma \sim \frac{\omega_{pe}}{\Delta\theta^2} \cdot \frac{n'}{n} \cdot \frac{mc^2}{E} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + k_{\perp}^2 c^2},$$

* В этом разделе мы для ясности пользуемся размерными переменными.

запишем условие (2.16) в виде

$$1 + \frac{k_{\perp} c}{\omega_{pe} \Delta\theta} \geq \mu_{\parallel} \Lambda, \quad (3.17)$$

где параметр μ_{\parallel} определяется формулой

$$\mu_{\parallel} = \frac{c}{\omega_{pe} L_{\parallel}} \cdot \frac{E}{mc^2} \cdot \frac{n}{n'}. \quad (3.18)$$

Отсюда видно, что неоднородность по-разному влияет на колебания с разными k_{\perp} . Для тех значений k_{\perp} , при которых критерий (3.17) выполнен, роль неоднородности несущественна (так как соответствующие колебания успевают значительно усилиться за то время, в течение которого они взаимодействуют с пучком). Наоборот, если для некоторых значений k_{\perp} он не выполнен, то такие колебания фактически вообще не возбуждаются.

Как было показано в разд. 3.1, релаксация пучка в однородной плазме обусловлена возбуждением колебаний с $k_{\perp} \sim \Delta\theta k \sim \Delta\theta \omega_{pe}/c$. Для них критерий (3.17) приобретает вид

$$\mu_{\parallel} \Lambda \leq 1. \quad (3.19)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что теперь в него вообще не входит $\Delta\theta$. Это означает, что влияние продольной неоднородности плазмы на релаксацию пучка полностью определяется величиной $\mu_{\parallel} \Lambda$; если она удовлетворяет неравенству (3.19), то роль неоднородности несущественна; если же выполнено обратное неравенство

$$\mu_{\parallel} \Lambda \geq 1, \quad (3.20)$$

то колебания с $k_{\perp} \sim \Delta\theta \omega_{pe}/c$ не возбуждаются, и вся динамика релаксации изменяется.

Для опытов, предлагаемых в работе [19] ($n' \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $E \sim 10 \text{ Мэв}$, $L_{\parallel} \sim 0,2 \text{ см}$), произведение $\mu_{\parallel} \Lambda$ равно 100, и роль неоднородности очень важна. Остановимся поэтому на случае $\mu_{\parallel} \Lambda \gg 1$ более подробно. Легко видеть, что при $\mu_{\parallel} \Lambda \gg 1$ и

$$\Delta\theta \geq 1/\mu_{\parallel} \Lambda \quad (3.21)$$

неравенство (3.17) не выполняется ни для одного значения k_{\perp} . Следовательно, если начальный угловой разброс пучка достаточно велик, $\Delta\theta_0 \geq 1/\mu_{\parallel} \Lambda$, то релаксация отсутствует. Напротив, при

$$\Delta\theta \leq 1/\mu_{\parallel} \Lambda \quad (3.22)$$

релаксация возможна, поскольку существует интервал значений k_{\perp}

$$\frac{\omega_{pe}}{c} \mu_{\parallel} \Lambda \Delta\theta \lesssim k_{\perp} \lesssim \frac{\omega_{pe}}{c} \frac{1}{\mu_{\parallel} \Lambda \Delta\theta}, \quad (3.23)$$

для которого неравенство (3.17) удовлетворяется. Но теперь, в отличие от однородной плазмы, возбуждаются только такие колебания, у которых угол θ' велик по сравнению с $\Delta\theta$ ($\theta' \gtrsim \mu_{\parallel} \Lambda \Delta\theta$), т. е. релаксация является существенно трехмерной. Ясно, что релаксация заканчивается тогда, когда угловой разброс пучка становится порядка $(\mu_{\parallel} \Lambda)^{-1} \ll 1$.

Рассмотрим вкратце роль поперечной неоднородности плазмы. Если характерный масштаб этой неоднородности равен L_{\perp} , то поперечная составляющая волнового вектора изменяется со временем по закону $k_{\perp} \sim \omega_{pe} t / L_{\perp}$. Влияние поперечной неоднородности плазмы на релаксацию несущественно, если за время порядка Λ/γ поперечный волновой вектор изменится не более чем на $\Delta\theta \omega_{pe} / c$, т. е. при условии $\Delta\theta \ll 1/\mu_{\perp} \Lambda$, $\mu_{\perp} = \frac{c}{L_{\perp} \omega_{pe}} \cdot \frac{n}{n'} \cdot \frac{E}{mc^2}$; если же [см. для сравнения

$$(2.18)] \int_0^{\infty} \gamma [k_{\perp}(t)] dt \lesssim \Lambda, \text{ т. е.}$$

$$\Delta\theta \gtrsim \frac{1}{\sqrt{\mu_{\perp} \Lambda}}, \quad (3.24)$$

то релаксация вообще отсутствует. При промежуточных значениях $\Delta\theta$, $1/\mu_{\perp} \Lambda < \Delta\theta < 1/\sqrt{\mu_{\perp} \Lambda}$, релаксация идет, но неоднородность оказывает на нее сильное влияние: пучок выделяет в плазме энергию, много меньшую $n'E$.

Из сравнения формул (3.21) и (3.24) видно, что при одинаковых масштабах продольной и поперечной неоднородности продольная неоднородность приводит к исчезновению релаксации при значительно меньших значениях $\Delta\theta$, чем поперечная, т. е. продольная неоднородность оказывает на релаксацию более сильное влияние, чем поперечная. Поэтому в следующем разделе мы подробно исследуем роль продольной неоднородности.

3.3. Релаксация в неоднородной плазме (количественное рассмотрение)

В соответствии со сказанным выше будем считать, что параметры пучка и плазмы зависят только от координаты z . Как будет видно из дальнейшего, релаксация происходит на масштабе, много меньшем L_{\parallel} . Поэтому зависимость $\omega_{pe}(z)$ можно аппроксимировать линейной функцией $\omega_{pe} = \omega_{pe}^{(0)} \left(1 + \frac{z}{L_{\parallel}} \right)$, считая для определенности, что концентрация плазмы возрастет в направлении $z > 0$. При

указанных условиях система квазилинейных уравнений в безразмерных переменных (3.6) имеет вид:

$$\cos \theta' \frac{\partial W}{\partial z} - \mu \left(\cos \theta' \frac{\partial W}{\partial k} - \frac{\sin \theta'}{k} \cdot \frac{\partial W}{\partial \theta'} \right) = 2\gamma W; \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} = & \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \left(D_{\rho\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{D_{\rho\theta}}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left(D_{\rho\theta} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{D_{\theta\theta}}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где параметр μ определяется соотношением (3.18). При отыскании аналитического решения задачи мы будем считать выполненными условия (3.20) и (3.22), которые означают, что, с одной стороны, уже существенна роль неоднородности, а с другой — что еще возможна релаксация. При этих условиях пучок возбуждает в плазме только такие колебания, у которых угол θ' лежит в интервале

$$\mu \Lambda \Delta \theta \ll \theta' \ll 1. \quad (3.27)$$

Ограничение θ' снизу связано с тем, что продольные колебания подавляются из-за эффекта неоднородности, а ограничение сверху с тем, что инкремент неустойчивости убывает при увеличении θ' .

Наличие неравенства (3.27) позволяет вычислять инкремент по формуле (П.2.4). Подставляя ее в уравнение (3.25) и проводя интегрирование по характеристикам, нетрудно найти W :

$$W(z, \theta', \varepsilon) = W_T \exp[v(z, \theta', \varepsilon)], \quad (3.28)$$

где

$$\begin{aligned} v(z, \theta', \varepsilon) = & \left(1 - \frac{\theta'^2}{2} \right) \int_0^z \Psi dz' \int_{|\Psi|} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \Psi^2}} g(z', \theta); \\ g(z, \theta) = & 2\pi \int_0^\infty \rho f(z, \theta, \rho) d\rho; \quad \Psi = \varepsilon + \frac{\mu}{\theta'} (z - z'); \end{aligned}$$

W_T — спектральная плотность энергии тепловых колебаний. Здесь и в дальнейшем мы считаем W функцией переменных z, θ и $\varepsilon = \theta' - [2(k-1)]^{1/2}$.

Формула (3.28) справедлива только при $v > 0$. Если же $v < 0$, то $W \simeq W_T$. Поскольку влияние тепловых колебаний на релаксацию не учитывается, ниже будем полагать $W = 0$ при $v < 0$.

Как будет видно из дальнейшего, пучок выделяет в плазме лишь незначительную долю своей первоначальной энергии. Это означает, в частности, что изменение импульса электронов пучка мало по сравнению с их начальным импульсом, который в безразмерных обозначениях равен просто единице. Вводя поэтому в уравнение (3.26)

новую переменную $q = p - 1$ и считая $|q| \ll 1$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial q} \left(D_{pp} \frac{\partial f}{\partial q} + D_{p\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \left(D_{p\theta} \frac{\partial f}{\partial q} + D_{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

Интегрируя его по q и учитывая, что с принятой точностью $g(z, \theta) = 2\pi \int_0^\infty f(z, \theta, q) dq$, получаем

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta D_{\theta\theta} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (3.29)$$

где величина $D_{\theta\theta}$ в соответствии с неравенствами (3.27) может быть вычислена по формуле (П.2.8):

$$D_{\theta\theta}(z, \theta) = \frac{2\pi}{\theta^2} \int_0^\infty \theta'^3 d\theta' \int_{-\theta}^{\theta} \frac{W(z, \theta', \varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon}{\sqrt{\theta^2 - \varepsilon^2}}. \quad (3.30)$$

Полагая, что на входе в плазму угловой разброс пучка мал по сравнению с тем значением, которого он достигает к моменту окончания релаксации, будем пользоваться следующим граничным условием для уравнения (3.29):

$$g|_{z=0} = \frac{1}{\theta} \delta(\theta). \quad (3.31)$$

Система уравнений (3.28), (3.29) содержит две неизвестные функции $W(z, \theta', \varepsilon)$ и $g(z, \theta)$ и является замкнутой. Для ее решения заметим, что коэффициент диффузии $D_{\theta\theta}$ существенно отличен от нуля только при $\theta \gtrsim |\varepsilon_0|$, где ε_0 — характерное значение ε . Отсюда следует, что ε_0 должно быть мало по сравнению с $\Delta\theta$:

$$|\varepsilon_0| \ll \Delta\theta, \quad (3.32)$$

так как в противном случае значительная часть функции распределения не была бы захвачена квазилинейной релаксацией и самоподавления неустойчивости не происходило бы. Считая поэтому $\varepsilon_0 \ll \Delta\theta$, можно представить соотношение (3.30) в виде

$$D_{\theta\theta} = \frac{F(z)}{\theta^2}; \quad F(z) = 2\pi \int_0^\infty \theta'^3 d\theta' \int_{-\infty}^{+\infty} W(z, \theta', \varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.33)$$

Теперь не представляет труда найти решение уравнения (3.29), удовлетворяющее граничному условию (3.31):

$$g(z, \theta) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{5}\right) [\Delta\theta(z)]^2} \exp\left[-\left[\frac{\theta}{\Delta\theta(z)}\right]^5\right]; \quad (3.34)$$

$$\Delta\theta(z) = \left[25 \int_0^z F(z') dz'\right]^{1/5}. \quad (3.35)$$

По известной функции $g(z, \theta)$ легко вычислить величину $\nu(z, \theta', \varepsilon)$, характеризующую спектр колебаний [см. (3.28)]:

$$\nu(z, \theta', \varepsilon) = \left(1 - \frac{\theta'^2}{2}\right) \int_0^z dz' \frac{\varepsilon + \frac{\mu}{\theta'}(z-z')}{[\Delta\theta(z')]^3} \times \\ \times G \left[\frac{\varepsilon + \frac{\mu}{\theta'}(z-z')}{\Delta\theta(z')} \right] \equiv \left(1 - \frac{\theta'^2}{2}\right) I, \quad (3.36)$$

где

$$G(\xi) = \frac{10}{\Gamma\left(\frac{7}{5}\right)} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\xi'^4 e^{-\xi'^5}}{\sqrt{\xi'^2 - \xi^2}} d\xi'.$$

Для дальнейшего решения задачи воспользуемся следующим рассуждением. Пусть максимум функции ν по переменным θ' и ε располагается в точке $\theta' = \theta'_0(z)$, $\varepsilon = \varepsilon_0(z)$ и равен $\nu_m(z)$, а соответствующее значение W равно $W_m(z)$. Тогда из (3.28) следует, что $\nu_m = \ln(W_m/W_T)$. Но так как отношение W_m/W_T очень велико, то его логарифм нечувствителен к W_m и является почти константой (примерно равной кулоновскому логарифму Λ). Таким образом, мы приходим к выводу, что максимальное (по переменным θ' и ε) значение ν должно быть равно Λ вне зависимости от z .

Форма спектра колебаний определяется зависимостью ν от θ' и ε вблизи точки $\theta' = \theta'_0$; $\varepsilon = \varepsilon_0$. Ясно, что в этой области значений θ' и ε должны выполняться условия (3.27) и (3.32). Как отмечалось в разд. 3.2, при условии (3.27) неоднородность плазмы не оказывает существенного влияния на колебания. Это означает, что в выражении (3.36) для ν можно (чисто формально) считать μ малым параметром. Поскольку, кроме того, величина ε также мала [см. (3.32)], то интеграл I , входящий в (3.36), можно разложить по μ и ε (подробнее о параметрах разложения см. ниже), причем, в соответствии с вышесказанным, нулевой член разложения должен быть равен Λ^* . Чтобы осуществить указанное разложение, перейдем в интеграле I к новой переменной интегрирования $\xi = \left(\varepsilon + \frac{\mu}{\theta'}(z - z')\right)/\Delta\theta(z')$. В результате получим

$$I = \int_{\varepsilon/\Delta\theta(z)}^{\infty} d\xi \xi G(\xi) \left[\frac{\mu}{\theta'} \Delta\theta + \frac{\xi}{2} \frac{d}{dz'} \Delta\theta^2 \right]^{-1}, \quad (3.37)$$

где $\Delta\theta$ и $d\Delta\theta^2/dz'$ рассматриваются как функции ξ . При выводе последнего соотношения мы считали $\varepsilon > -\mu z/\theta'$, так как в области

* Строго говоря, должен быть равен Λ максимум функции ν . Но при условиях (3.27), (3.32) этот максимум близок к нулевому члену разложения I : различие между ними порядка первого члена разложения I .

$\varepsilon < -\mu z/\theta'$ величина ν отрицательна и энергия колебаний близка к тепловой.

Приведенная форма записи интеграла I позволяет сделать вывод, что в пределе $\mu, \varepsilon \rightarrow 0$ он имеет конечное и не зависящее от z значение только при $\Delta\theta(z) = A\sqrt{z}$, где A — константа. Простые вычисления показывают, что в этом случае

$$I_{\mu, \varepsilon \rightarrow 0} = \frac{2}{A^2} \int_0^{\infty} G(\xi) d\xi = \frac{2\pi}{A^2 \Gamma\left(\frac{7}{5}\right)}.$$

Определяя константу A из условия $I_{\mu, \varepsilon \rightarrow 0} = \Lambda$, находим окончательно, что

$$\Delta\theta(z) = \sqrt{\frac{2\pi z}{\Gamma\left(\frac{7}{5}\right) \Lambda}} = 2,7 \sqrt{\frac{z}{\Lambda}}. \quad (3.38)$$

Таким образом, из условия $I_{\mu, \varepsilon \rightarrow 0} = \Lambda$ мы нашли зависимость углового разброса функции распределения от координаты z . Как отмечалось в разд. 3.2, релаксация заканчивается при $\Delta\theta \sim (\mu\Lambda)^{-1}$. Это значение $\Delta\theta$ достигается при $z \sim (\mu^2\Lambda)^{-1}$. При дальнейшем увеличении z угловой разброс остается неизменным.

Не представляет труда записать следующий член разложения I по параметрам ε и μ . Используя найденную выше зависимость $\Delta\theta(z)$, из соотношения (3.37) получим (пока точно)

$$I = \frac{2}{A^2} \int_{\varepsilon/\Delta\theta(z)}^{\infty} d\xi \xi G(\xi) \left\{ \xi^2 + \frac{4\mu z}{\theta' \Delta\theta(z)} \left[\frac{\varepsilon}{\Delta\theta(z)} + \frac{\mu z}{\theta' \Delta\theta(z)} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (3.39)$$

Отсюда прежде всего видно, что фактически параметрами разложения являются величины $\mu z/\theta' \Delta\theta(z)$ и $\varepsilon/\Delta\theta(z)$. Ниже мы убедимся в том, что они действительно малы. Разлагая I по этим параметрам с точностью до членов первого порядка, приходим к следующему результату:

$$I = \Lambda \left[1 - \frac{5\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{2\pi \Delta\theta(z)} \left(\varepsilon + \frac{2\mu z}{\theta'} \right) \right]; \quad \varepsilon > -\frac{\mu z}{\theta'}.$$

Обращаясь к формуле (3.36), находим, что в интересующей нас области значений ε и θ'

$$\nu(z, \theta', \varepsilon) \simeq \Lambda \left[1 - \frac{\theta'^2}{2} - \frac{5\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{2\pi \Delta\theta(z)} \left(\varepsilon + \frac{2\mu z}{\theta'} \right) \right]; \quad \varepsilon > -\frac{\mu z}{\theta'}.$$

Учитывая, что величина ν положительна только при $\varepsilon > -\frac{\mu z}{\theta'}$,

получаем отсюда

$$\theta_0' = \left[\frac{5\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)\mu z}{2\pi\Delta\theta(z)} \right]^{1/3}; \quad \varepsilon_0 = -\frac{\mu z}{\theta'} + 0.$$

Наличие в формуле для ν большого параметра позволяет утверждать, что спектр колебаний сосредоточен вблизи максимума функции θ , т. е. вблизи точки θ_0' , ε_0 . При малых отклонениях θ' и ε от θ_0' и ε_0 имеем

$$\nu - \nu_m = -\frac{3\Lambda(\theta' - \theta_0')^2}{2} - \Lambda \frac{5\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{2\pi\Delta\theta(z)} \left(\varepsilon + \frac{\mu z}{\theta'} \right);$$

$$\left\{ \varepsilon > -\frac{\mu z}{\theta'} \right.$$

Из последнего соотношения вытекает, что ширина спектра колебаний по θ' порядка $\Lambda^{-1/2}$, а по ε — порядка $\Delta\theta/\Lambda$. Как легко проверить, в этой области значений переменных параметры $\mu z/\theta'\Delta\theta(z)$ и $\varepsilon/\Delta\theta(z)$, по которым проводилось разложение в формуле (3.39), действительно малы вплоть до самого конца релаксации [т. е. вплоть до $z \sim (\mu^2\Lambda)^{-1}$].

В соответствии с формулой (3.28) спектр колебаний может быть записан в виде

$$W =$$

$$= \begin{cases} W_m(z) \exp\left(-\frac{3\Lambda(\theta' - \theta_0')^2}{2}\right) - \Lambda \frac{5\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{2\pi\Delta\theta(z)} \left(\varepsilon + \frac{\mu z}{\theta'}\right), & \varepsilon > -\frac{\mu z}{\theta'}; \\ 0, & \varepsilon < -\frac{\mu z}{\theta'} \end{cases} \quad (3.40)$$

где нормировочный множитель $W_m(z)$ определяется из соотношений (3.33), (3.35) и (3.38). Зная спектр колебаний, можно вычислить плотность их энергии

$$\tilde{U} = 4\pi \int_0^{\infty} \theta'^2 d\theta' \int_{-\infty}^{+\infty} W d\varepsilon,$$

что, собственно, и является задачей квазилинейной теории. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем только окончательный результат:

$$\tilde{U}(z) = \frac{4\pi\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{3\Gamma^2\left(\frac{7}{5}\right)} \frac{1}{\mu\Lambda} \frac{\psi[a(z)]}{\chi[a(z)]}, \quad (3.41)$$

где

$$a(z) = \sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} \theta_0'(z);$$

$$\begin{aligned}\psi(a) &= a^3 \left[\left(a^2 + \frac{1}{2} \right) I(a) + \frac{a}{2} e^{-a^2} \right]; \\ \chi(a) &= a \left[\frac{4}{9} a^6 - \frac{4}{3} a^4 + \frac{4}{3} a^2 + 3 \right] I(a) + \\ &+ \left[\frac{2}{9} a^6 - \frac{2}{3} a^4 + a^2 + 1 \right] e^{-a^2}; \\ I(a) &= \int_{-a}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi.\end{aligned}$$

Анализ показывает, что при увеличении z функция $U(z)$ сначала возрастает пропорционально $z^{1/2}$, достигает максимума при $z = z_{\text{макс}} = 81/\mu^2 \Lambda^4$, после чего убывает как $z^{-1/3}$:

$$\tilde{U} = \frac{1}{\mu \Lambda} \begin{cases} 0,57 (\mu^2 \Lambda^4 z)^{1/2}, & z \ll z_{\text{макс}}; \\ 3,76, & z = z_{\text{макс}}; \\ 8,31 (\mu^2 \Lambda^4 z)^{-1/3}, & z \gg z_{\text{макс}}. \end{cases} \quad (3.42)$$

Интересной особенностью найденного решения является то, что релаксация идет в две стадии. На первой из них, при $z < z_{\text{макс}}$, колебания возбуждаются пучком, а на второй, при $z > z_{\text{макс}}$, в значительной мере им же поглощаются. Это явление характерно для неоднородной плазмы и в случае нерелятивистского пучка было описано в разд. 2.4.

Как отмечалось выше, релаксация заканчивается при $z \sim (\mu^2 \Lambda)^{-1}$. Соответствующее значение плотности энергии колебаний по порядку величины равно $10 (\mu \Lambda^2)^{-1}$. При дальнейшем увеличении z энергия колебаний уже не меняется.

Таким образом, пучок выделяет в неоднородной плазме лишь очень незначительную долю своей энергии: порядка $10(\mu \Lambda^2)^{-1}$ (напомним, что в безразмерных переменных начальная энергия пучка равна единице).

Быть может, некоторого увеличения энерговыделения можно добиться, искусственно подавляя релаксацию в области $z \gg z_{\text{макс}}$. Этого можно достигнуть, в частности, если сделать плазму в этой области сильно неоднородной. Но и тогда, как видно из (3.41), выделение энергии пучком будет незначительным [порядка $3(\mu \Lambda)^{-1}$].

Приведенные выше результаты были получены в работе [21]. Сформулируем их еще раз в компактной форме.

Влияние неоднородности плазмы на квазилинейную релаксацию ультрарелятивистского электронного пучка полностью характеризуется величиной произведения $\mu \Lambda$, где $\mu = \frac{c}{L_{\parallel} \omega_{pe}} \cdot \frac{E}{mc^2} \cdot \frac{n}{n'}$, а Λ — величина порядка кулоновского логарифма. При $\mu \Lambda \ll 1$ релаксация нечувствительна к влиянию неоднородности, а энергия, выделяемая пучком в плазме, порядка начальной энергии пучка.

При $\mu\Lambda \gg 1$ роль неоднородности очень существенна, причем имеются две возможности. Если начальный угловой разброс пучка $\Delta\theta_0$ достаточно велик, $\Delta\theta_0 > (\mu\Lambda)^{-1}$, то релаксация вообще отсутствует. Если же разброс $\Delta\theta_0$ мал, $\Delta\theta_0 \ll (\mu\Lambda)^{-1}$, то релаксация возможна, но приводит, однако, к потере пучком лишь малой доли (приблизительно $(\mu\Lambda)^{-1}$) его начальной энергии. Этот результат можно сформулировать несколько иначе. Именно, можно сказать, что условие $\mu\Lambda \sim 1$ определяет критический градиент концентрации плазмы

$$\left| \frac{\partial n}{\partial z} \right|_{\text{крит}} \equiv \frac{n}{L_{\parallel \text{крит}}} \sim \frac{\omega_{pe} n' mc^2}{\Lambda c E}, \quad (3.43)$$

при котором взаимодействие пучка с плазмой еще эффективно (при $\left| \frac{\partial n}{\partial z} \right| > \left| \frac{\partial n}{\partial z} \right|_{\text{крит}}$ энерговыведение мало).

3.4. Волна релаксации

В разд. 3.3. мы рассмотрели релаксацию пучка в неоднородной плазме, считая зависимость $n(z)$ заданной. Такой подход заведомо несправедлив, если плазма нагревается самим пучком. Пусть, например, в начальный момент времени плазма, заполняющая полупространство $z > 0$, однородна. Тогда непосредственно после включения пучка его энергия будет выделяться в слое толщиной $z \sim l_{1/2}$. По мере нагрева плазмы, находящейся в этом слое, она будет расширяться со все большей скоростью и становиться все более неоднородной. Когда характерный градиент концентрации достигнет критического значения, соответствующего срыву неустойчивости, энергия начнет выделяться в следующем слое толщиной порядка $l_{1/2}$, где плазма, в свою очередь, станет неоднородной, и т. д. Естественно, что на самом деле область релаксации перемещается в глубь плазмы не скачками, а непрерывно (это явление можно назвать волной релаксации).

Отметим, что в случае, когда поперечный размер пучка a меньше или порядка $l_{1/2}$, как это имеет место в опытах типа [19], возникновение продольного градиента концентрации связано с расширением плазмы в поперечном направлении.

В зависимости от отношения длины свободного пробега электронов плазмы к a и $l_{1/2}$, при решении задачи следует пользоваться той или иной системой газодинамических уравнений. Для определенности рассмотрим ситуацию, когда длина свободного пробега мала, а теплопроводностью плазмы можно пренебречь. Тогда при $a \ll l_{1/2}$ можно записать, что за время Δt концентрация плазмы в той области, где выделяется энергия пучка, уменьшается на величину $\Delta n \sim \frac{T}{M} \times \times \frac{\Delta t^2}{a^2} n$, где M — масса ионов, а T — температура, до которой плазма нагревается пучком за время Δt ($T \sim \frac{n'}{n} \cdot \frac{c\Delta t}{l_{1/2}} E$). Продольный гра-

диент концентрации достигает критического значения $n/L_{\parallel \text{крит}}$ за время $\Delta t_0 \sim a \sqrt{M/T} \sqrt{l_{1/2}/L_{\parallel \text{крит}}}$. За это время область релаксации смещается в направлении $z > 0$ на расстояние порядка $l_{1/2}$, так что скорость волны релаксации может быть найдена по формуле

$$v \sim \frac{l_{1/2}}{\Delta t_0} \sim \sqrt{\frac{T}{M}} \cdot \frac{l_{1/2}}{a} \sqrt{\frac{L_{\parallel \text{крит}}}{l_{1/2}}}, \quad (3.44)$$

где под T понимается теперь температура, которую плазма имеет за фронтом волны релаксации ($T \sim \frac{n'}{n} \cdot \frac{c \Delta t_0 E}{l_{1/2}}$). Из формулы (3.44) видно, что волна релаксации распространяется со скоростью, существенно превышающей скорость звука в плазме, нагретой пучком.

§ 4. Аномальное сопротивление плазмы без столкновений

Пусть в однородной плазме имеется постоянное однородное электрическое поле E , параллельное магнитному и достаточно большое для того, чтобы можно было пренебречь парными столкновениями. При этом электроны свободно ускоряются до тех пор, пока скорость их направленного движения не превышает порога возбуждения колебаний звукового типа, после чего в плазме возникает неустойчивость, приводящая к торможению электронов и появлению так называемого аномального сопротивления*. За время порядка нескольких обратных инкрементов система возвращается к пороговому состоянию и далее все время остается в этом состоянии.

Основной вопрос, на который должна ответить теория аномального сопротивления, состоит в том, каково установившееся значение токовой скорости электронов и как оно изменяется со временем вследствие нагрева плазмы.

4.1. Аномальное сопротивление на начальной стадии тока

Фазовая скорость звуковых колебаний мала по сравнению с тепловой скоростью электронов. В этом случае, как известно (см., например, [28]), квазилинейный интеграл столкновений в электронном кинетическом уравнении по своей структуре очень близок к интегралу столкновений электронов с бесконечно тяжелыми ионами и имеет вид

$$\text{St} f_e = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} v_{\text{эфф}}(v, \theta) \sin \theta \frac{\partial f_e}{\partial \theta}. \quad (4.1)$$

* Явление аномального сопротивления было связано с ионно-звуковой неустойчивостью в работах [25—27].

[Мы ввели сферическую систему координат (v, θ, φ) в пространстве скоростей и учли, что задача аксиально симметрична: $\partial/\partial\varphi \equiv 0$.] Выражение для $v_{\text{эфф}}$ легко получить из формулы (1.2) в нулевом приближении по параметру $\omega/kv_{Te} \lesssim (m/M)^{1/2} \ll 1$:

$$v_{\text{эфф}}(v, \theta) = \frac{16\pi^2 e^2}{m^2 v^3} \int k dk \times \\ \times \int_{|\cos \theta'| < \sin \theta} \frac{\sin \theta' \cos^2 \theta'}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{W(k, \theta') d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \theta' - \cos^2 \theta \cos^2 \theta'}},$$

где, как обычно, k, θ', φ' — сферические координаты в пространстве волновых векторов. Имея в виду, что

$$2\pi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi W(k, \theta') \sin \theta' d\theta' = U,$$

где U — плотность электростатической энергии ионно-звуковых колебаний, можно записать следующую оценку для $v_{\text{эфф}}$:

$$v_{\text{эфф}} \sim \omega_{pe} \left(\frac{v_{Te}}{v} \right)^3 \frac{U}{nT_e} \cdot \frac{k_D}{\bar{k}}, \quad (4.2)$$

где \bar{k} — характерный волновой вектор ионно-звуковых колебаний, а $k_D = \omega_{pe}/v_{Te}$ — дебаевский волновой вектор.

Из линейной теории ионно-звуковой неустойчивости известно, что характерный волновой вектор возбуждаемых звуковых колебаний равен k_D . Поэтому из (4.2) следует, что для основной массы электронов, т. е. для электронов с $v \sim v_{Te}$

$$v_{\text{эфф}} \sim \omega_{pe} \frac{U}{nT_e}. \quad (4.3)$$

На начальной стадии нагрева функция распределения электронов должна быть почти изотропной, поскольку пороговая скорость возбуждения звука в плазме с $T_e \gg T_i$ (только такой случай мы и рассматриваем в этом разделе) порядка $v_{Te}(m/M)^{1/2}$ и много меньше тепловой скорости электронов. Таким образом, в первое время после включения внешнего электрического поля средняя скорость электронов \bar{v}_e по порядку величины должна быть равна $v_{Te}(m/M)^{1/2}$. Эффективная проводимость плазмы $\sigma_{\text{эфф}} \equiv en|\bar{v}_e/E|$ при $\bar{v}_e \sim v_{Te}(m/M)^{1/2}$ равна

$$\sigma_{\text{эфф}} \sim \frac{env_{Te}}{E} \sqrt{\frac{m}{M}},$$

и, что следует подчеркнуть особо, обратно пропорциональна E . Эти выводы были получены в работе [28] и нашли качественное подтверждение в ряде экспериментов (например, [29—31]).

Остановимся более подробно на результатах работы [29], в которой была исследована зависимость эффективной проводимости от электрического поля в тороидальной установке (большой радиус порядка 30 см, малый радиус — 5 см). Вихревое электрическое поле напряженностью от 0,1 до 200 в/см создавалось на обходе тора с помощью ВЧ-контура, охватываемого тором. Внешнее магнитное

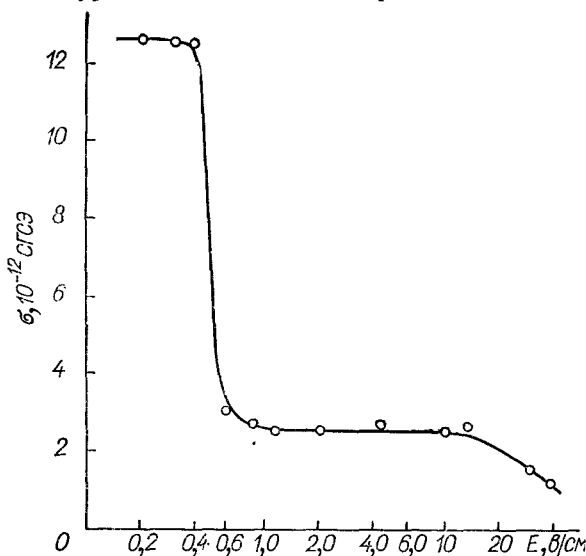


Рис. 10. Зависимость $\sigma_{эфф}(E)$, найденная в эксперименте [29].

поле, направленное вдоль обхода тора, имело напряжённость порядка нескольких килоэстед. Концентрация плазмы равнялась примерно 10^{12} см⁻³. Полученная в этом эксперименте зависимость $\sigma_{эфф}(E)$ приведена на рис. 10.

В области слабых полей проводимость плазмы совпадает с кулоновской. Когда электрическое поле превышает 0,4 в/см, возникает anomальное сопротивление, причем на участке $0,4 \text{ в/см} < E < 1 \text{ в/см}$ $\sigma_{эфф} \sim 1/E$, и эксперимент удовлетворительно описывается теорией [28].

Оставляя пока в стороне обсуждение дальнейшего хода экспериментальной кривой, отметим, что хотя уже давно нет сомнений в том, что anomальное сопротивление в подобных опытах обусловлено возбуждением звуковых колебаний, до последнего времени не удавалось непосредственно измерить соответствующее флуктуационное электрическое поле. Первые результаты в этом направлении были получены в работах [32, 33] с помощью наблюдения штарковского уширения спектральных линий водорода под действием хаотических электрических полей колебаний, возбуждаемых током, параллель-

ным внешнему магнитному полю. Оказалось, что ширина линий существенно превышает значение, характерное для ламинарной плазмы (хольтсмарковское уширение), и, по мнению авторов работ [32, 33], не может быть приписана также эффекту Допплера и влиянию ленгмюровских колебаний. Найденная по ширине линий плотность электростатической энергии колебаний находится в согласии с оценкой этой величины по формуле (4.3), в которую подставлялось вычисленное по измеренной проводимости плазмы значение $\nu_{\text{эфф}}$.

Вновь обращаясь к рис. 10, отметим, что в условиях опытов [29] при $E < 1$ в/см температура плазмы за время наблюдения не успевает существенно измениться по сравнению со своим начальным значением. Это очень важно, так как при теоретической интерпретации соответствующего участка кривой можно считать электронную температуру известной.

Для интерпретации результатов в области $E > 1$ в/см, где становится существенным нагрев электронов, необходимо привлекать уравнение баланса для электронной температуры, учитывающее потери тепла на стенки разрядной камеры (энергетическое время жизни плазмы в области $E > 1$ в/см мало по сравнению со временем наблюдения). С этой точки зрения зависимость $\sigma_{\text{эфф}}(E)$ при $E > 1$ в/см еще не получила удовлетворительного объяснения. Во всяком случае, ее нельзя понять на основе теоретической модели, изложенной выше.

Действительно, как уже отмечалось, электронный интеграл столкновений (4.1) фактически такой же, как и в случае лоренцевой плазмы. Хорошо известно (см. [34]), что в лоренцевой плазме электроны с большой скоростью не могут быть заторможены в результате столкновений и практически свободно ускоряются внешним электрическим полем (явление «убегания»). Формальное исследование процесса убегания для интеграла столкновений типа (4.1) проведено в работе [34], где установлено, что к тому моменту, когда температура плазмы, грубо говоря, удваивается, убегающими становятся все электроны. Между тем в экспериментах [29—31] во многих режимах температура плазмы существенно возрастает за время наблюдения, но направленная скорость электронов остается много меньше их тепловой скорости*.

Возникающее таким образом противоречие можно, видимо, разрешить, принимая во внимание взаимодействие плазмы со стенками и электродами (для электродных разрядов). Но имеется принципиальный вопрос о том, как будут изменяться при больших временах ток и другие характеристики плазмы, полностью изолированной от стенок. Выяснению этого вопроса посвящены следующие три раздела.

* Отметим, что в ряде экспериментов (например, [35]) наблюдалась другая ситуация: отношение \bar{v}_e/v_{Te} было порядка $1/2—1/3$ и существенно превышало $(m/M)^{1/2}$.

4.2. Асимптотическое решение задачи
об аномальном сопротивлении.
Автомодельные переменные

Ясно, что по мере нагрева плазмы она «забывает» о своем исходном состоянии, и в конце концов эволюция функций распределения частиц (а также спектра колебаний) приобретает некоторый универсальный характер, не зависящий от начальных условий. Соответствующее решение задачи было названо в работе [36] «асимптотическим».

Асимптотическое решение может быть найдено на основе квазилинейных уравнений*. Запишем эти уравнения в системе координат, движущейся со скоростью свободно ускоряемых ионов — eEt/M . Мы считаем, что электрическое поле равно $-E$, т. е. электроны ускорятся в направлении вектора E :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) eE \frac{\partial f_e}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta}; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f_i}{\partial v_\beta}; \quad (4.5)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{8\pi^2 e^2}{m^2} \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 \mathbf{k}.$$

Влиянием магнитного поля пренебрегаем.

Поскольку, как указывалось выше, система находится на пороге неустойчивости, для решения задачи следует найти такую функцию $W = W(\mathbf{k}, t)$, чтобы функции f_e и f_i , определенные из уравнений (4.4) и (4.5), давали $\gamma = 0$ там, где $W > 0$, и $\gamma \leq 0$ там, где $W = 0$.

Формально наличие асимптотического режима соответствует возможность перехода в квазилинейных уравнениях к автомодельным переменным. При этом из простых размерных соображений следует, что скорости частиц должны измеряться в единицах eEt/m^{**} , а волновые векторы колебаний — в единицах $m\omega_{pe}/eEt$.

Учитывая условия нормировки для функций f_e и f_i , можно записать, что

$$f_{e,i} = n \left(\frac{m}{eEt} \right)^3 g_{e,i}(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \frac{m\mathbf{v}}{eEt}, \quad (4.6)$$

где функции $g_{e,i}$ нормируются на единицу: $\int g_{e,i} d^3 \mathbf{u} = 1$. Спектральная плотность электростатической энергии колебаний в асимптотическом режиме имеет вид

$$W(\mathbf{k}, t) = \frac{mn}{2\pi\omega_{pe}^4} \left(\frac{eE}{m} \right)^5 t^4 \mathcal{W}'(\mathbf{q}); \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}eEt}{m\omega_{pe}}, \quad (4.7)$$

* Роль нелинейных процессов асимптотически убывает со временем, поскольку отношение энергии колебаний к кинетической энергии частиц, как будет видно из дальнейшего, пропорционально t^{-1} .

** Речь идет о нерелятивистской плазме.

где множитель t^4 появляется потому, что уравнения (4.4) и (4.2), записанные в автомодельных переменных \mathbf{u} и \mathbf{q} , не должны содержать времени, а буквенный коэффициент перед функцией \mathcal{W} подбирается из соображений удобства (так, чтобы \mathcal{W} была безразмерной функцией, а тензор диффузии, записанный в автомодельных переменных, не содержал буквенного множителя).

Подставляя формулы (4.6) и (4.7) в (4.4) и (4.5), получаем систему квазилинейных уравнений в автомодельных переменных:

$$-3g_e - \mathbf{u} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{n} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial g_e}{\partial u_\beta}; \quad (4.8)$$

$$-3g_i - \mathbf{u} \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{u}} = \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial g_i}{\partial u_\beta}; \quad (4.9)$$

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \int \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \mathcal{W}(\mathbf{q}) \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}) d^3 \mathbf{q}.$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{E} . В автомодельных переменных записывается также дисперсионное соотношение (1.4)

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{q}) \equiv 1 + \frac{1}{q^2} \mathcal{P} \int \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(g_e + \frac{m}{M} g_i \right) \frac{d^3 \mathbf{u}}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}} = 0$$

и условие $\gamma = 0$: $\int \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(g_e + \frac{m}{M} g_i \right) \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}) d^3 \mathbf{u} = 0$ (частота измеряется в единицах ω_{pe}). В некоторых случаях удобно использовать сферические системы координат u, θ, φ и q, θ', φ' в пространстве скоростей и в пространстве волновых векторов. В сферических координатах уравнения (4.8) и (4.9) приобретают вид:

$$-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} u^3 g_e + \left(\cos \theta \frac{\partial g_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial g_e}{\partial \theta} \right) = \text{St } g_e; \quad (4.10)$$

$$-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} u^3 g_i = \frac{m^2}{M^2} \text{St } g_i; \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \text{St } g_{e,i} &= \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} u^2 \left(\mathcal{D}_{uu} \frac{\partial g_{e,i}}{\partial u} + \frac{\mathcal{D}_{u\theta}}{u} \cdot \frac{\partial g_{e,i}}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{u \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left(\mathcal{D}_{u\theta} \frac{\partial g_{e,i}}{\partial u} + \frac{\mathcal{D}_{\theta\theta}}{u} \cdot \frac{\partial g_{e,i}}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Точные и приближенные выражения для величин \mathcal{D}_{uu} , $\mathcal{D}_{u\theta}$, $\mathcal{D}_{\theta\theta}$ приведены в Приложении 3.

Уравнения (4.8) и (4.9) можно представить в форме, которая позволяет придать им простой физический смысл:

$$\text{div}_{\mathbf{u}} [(\mathbf{n} - \mathbf{u}) g_e + \mathbf{Q}_e] = 0, \quad Q_{e\alpha} = -\mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial g_e}{\partial u_\beta}; \quad (4.12)$$

$$\text{div}_{\mathbf{u}} [-\mathbf{u} g_i + \mathbf{Q}_i] = 0, \quad Q_{i\alpha} = -\frac{m^2}{M^2} \mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial g_i}{\partial u_\beta}. \quad (4.13)$$

Первое из этих уравнений описывает стационарное распределение некоторой субстанции с концентрацией g_e в газе со стационарным полем скоростей $\mathbf{n} - \mathbf{u}$ при наличии диффузионного потока \mathbf{Q}_e . Второе имеет аналогичный смысл для субстанции с концентрацией g_i в газе со стационарным полем скоростей $-\mathbf{u}$ (рис. 11).

Конвекционный поток [которому соответствует слагаемое $-\mathbf{u}g_i$ в уравнении (4.13)] стремится стянуть ионы в точку $\mathbf{u} = 0$. Этому противодействует диффузионный поток. В результате устанавливается некоторое стационарное распределение ионов с максимумом вблизи точки $\mathbf{u} = 0$.

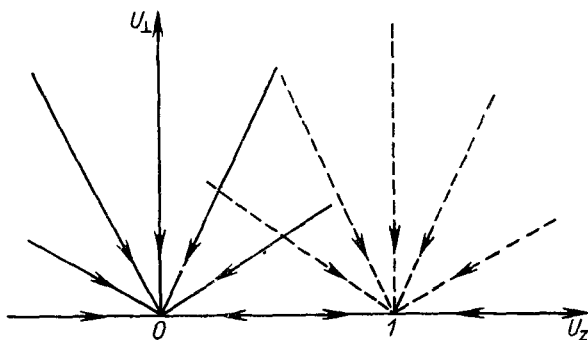


Рис. 11. Поле скоростей для уравнений (4.12) и (4.13): пунктир — для уравнения (4.12); сплошная — для (4.13).

Как известно [10], колебания с фазовыми скоростями, меньшими тепловой скорости ионов, в плазме отсутствуют. Это означает, что в некоторой окрестности точки $\mathbf{u} = 0$ коэффициент квазилинейной диффузии $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ равен нулю. Но тогда конвекционный поток приведет к тому, что ионы стянутся в точку $\mathbf{u} = 0$, и их распределение примет вид δ -функции $\delta(\mathbf{u})$. В действительности, однако, после того как в точку $\mathbf{u} = 0$ стянется часть ионов, дисперсия изменится и появятся колебания со сколь угодно малыми фазовыми скоростями, так что коэффициент диффузии станет отличным от нуля в сколь угодно малой окрестности точки $\mathbf{u} = 0$. Таким образом, мы приходим к выводу, что ионная функция распределения обязательно имеет дельта-образный ядро в точке $\mathbf{u} = 0$ (который соответствует свободно ускоряющимся ионам).

Аналогичные соображения показывают, что, вообще говоря, имеется также электронный ядро в точке $\mathbf{u} = \mathbf{n}$ (который соответствует свободно ускоряющимся электронам). Доли частиц, находящихся в электронном и ионном ядрах, обозначим соответственно X_e и X_i . В асимптотическом режиме величины X_e и X_i , очевидно, не зависят от времени и электрического поля и определяются только отношением масс электронов и ионов.

В заключение этого раздела запишем автомодельные уравнения для одномерного решения, которое осуществляется, когда ионная циклотронная частота ω_{Hi} существенно превышает ионную плазменную частоту ω_{pi} . В этом случае задача описывается одномерными функциями распределения $f_{e,i}(v_z, t)$ и одномерной спектральной функцией $W(k_z, t)$, которые удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int f_{e,i}(v_z, t) dv_z = n; \quad \int W(k_z, t) dk_z = U(t),$$

где $U(t)$ — объемная плотность электростатической энергии колебаний. При этом в асимптотическом режиме имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_{e,i}(v_z, t) &= \frac{mng_{e,i}(u)}{eEt}; & W(k_z, t) &= \frac{eE^3 t^2}{8\pi^2 m} \mathcal{W}(q); \\ u &= \frac{mv_z}{eEt}; & q &= \frac{eEt k_z}{m\omega_{pe}} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

и

$$-\frac{d}{du} \left(u - 1 - \frac{m}{M} \right) g_e = \frac{d}{du} \mathcal{D}(u) \frac{dg_e}{du}; \quad (4.15)$$

$$-\frac{d}{du} u g_i = \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{d}{du} \mathcal{D}(u) \frac{dg_i}{du}, \quad (4.16)$$

где

$$\mathcal{D}(u) = \left. \frac{\mathcal{W}'(q)}{\left| \frac{\omega}{q} - \frac{d\omega}{dq} \right|} \right|_{q = \frac{\omega(u)}{u}} \quad (4.17)$$

квазилинейный коэффициент диффузии.

4.3. Исследование автомодельных уравнений для одномерной модели

В одномерном случае в стационарном состоянии сумма диффузионного и конвекционного потоков должна быть равна нулю, т. е.

$$-\left(u - 1 - \frac{m}{M} \right) g_e = \mathcal{D}(u) \frac{dg_e}{du}; \quad (4.18)$$

$$-u g_i = \frac{m^2}{M^2} \mathcal{D}(u) \frac{dq_i}{du}. \quad (4.19)$$

Отсюда следует, что в областях $u < 0$ и $u > 1$ условие равенства нулю инкремента колебаний, которое в одномерном случае имеет вид

$$\frac{d}{du} \left(g_e + \frac{m}{M} g_i \right) = 0, \quad (4.20)$$

может быть выполнено только при $g_e = g_i = 0$. Что же касается области $0 < u < 1$, то в ней система уравнений (4.18)—(4.20) поз-

воляет найти функции g_e , g_i и \mathcal{D}^* :

$$g_e = \frac{Cu}{u + \mu^2}; \quad g_i = \frac{C\mu(1-u)}{u + \mu^2}; \quad \mathcal{D} = \mu^{-2} u^2 (1-u); \quad \mu \equiv \frac{m}{M},$$

где C — произвольная положительная постоянная. Согласно тому, что говорилось в разд. 4.2, к функциям g_e и g_i следует добавить некоторое число свободно ускоряющихся электронов и ионов, причем из условия нормировки сразу вытекает, что $X_e + C = 1$, $X_i + 2C\mu \ln \mu^{-1} = 1$.

Зная функции g_e и g_i , легко записать дисперсионное соотношение

$$\varepsilon(\omega, q) \equiv 1 - \frac{1-C}{(\omega-q)^2} - \mu \cdot \frac{1}{\omega^2} + \frac{C}{\omega q} - \frac{C}{(\omega-q)q} = 0.$$

Функция $\varepsilon(\omega, q)$ должна удовлетворять двум требованиям: 1) все колебания должны быть устойчивыми; 2) должны существовать колебания со всеми фазовыми скоростями в интервале $(0,1)^{**}$. Из этих условий можно определить константу C . Для этого представим дисперсионное соотношение в виде

$$F(\tilde{u}) \equiv \frac{1-C}{(\tilde{u}-1)^2} + \frac{\mu}{\tilde{u}^2} - \frac{C}{\tilde{u}} + \frac{C}{\tilde{u}-1} = q^2, \quad (4.21)$$

где $\tilde{u} = \omega/q$. Соотношение (4.21) представляет собой уравнение четвертого порядка относительно \tilde{u} , причем для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы оно имело четыре вещественных корня. График функции $F(\tilde{u})$ при различных значениях константы C приведен на рис. 12. Из рисунка видно, что при $C < 2\mu^{1/2}$ система неустойчива для малых q , а при $C > 2\mu^{1/2}$ имеется интервал фазовых скоростей внутри промежутка $(0,1)$, где колебания отсутствуют.

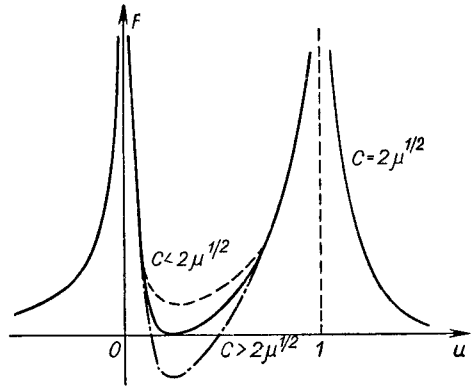


Рис. 12. Функция $F(\tilde{u})$ при различных значениях константы C .

* В дальнейших вычислениях будем для простоты считать $m/M \ll 1$, хотя можно получить и точное решение, справедливое при любом отношении масс электронов и ионов.

** Если бы не было выполнено последнее условие, то в промежутке $(0,1)$ существовал бы участок с равным нулю коэффициентом диффузии $\mathcal{D}(u)$. Тогда конвекционный поток снес бы ионы влево от этого промежутка, а электроны — вправо, и уравнение (4.20) не могло бы быть выполнено.

Поэтому приходим к выводу, что $C = 2\mu^{1/2}$, и тем самым однозначно определяем функции распределения.

Спектральную функцию можно найти по формуле (4.14). Условно разобьем все колебания на два типа: ленгмюровские (с фазовыми скоростями $\tilde{u} \gtrsim \mu^{1/2}$) и звуковые (с фазовыми скоростями $\tilde{u} \lesssim \mu^{1/2}$). Для первых $\omega \simeq q - 1$, а для вторых $\omega \simeq \mu^{1/2}$. Тогда из (4.17) получаем следующие выражения для плотности энергии этих колебаний:

$$\int_{\tilde{u} \gtrsim \mu^{1/2}} \mathcal{W}^{\omega}(q) dq \simeq \frac{1}{3\mu^2}; \quad \int_{\tilde{u} \lesssim \mu^{1/2}} \mathcal{W}^{\omega}(q) dq \simeq \frac{1}{2\mu^{1/2}}.$$

Перечислим основные качественные особенности полученного решения: 1) почти все электроны и ионы свободно ускоряются электрическим полем; 2) несмотря на это, система находится на пороге устойчивости, что обеспечивается наличием малых групп электронов и ионов, «размазанных» по скоростям; 3) имеются очень «горячие» ионы с энергиями, в μ^{-1} раз больше энергии свободно ускоряющихся электронов [относительная концентрация таких ионов примерно равна $(\mu)^{3/2}$]; 4) в асимптотическом режиме энергия ленгмюровских колебаний существенно превышает энергию звуковых колебаний.

4.4. Исследование автомодельных уравнений для трехмерной модели

Как следует из изложенного, существенной особенностью одномерного решения является наличие ленгмюровских колебаний. Это связано с тем, что ионно-звуковые колебания, обладая малой фазовой скоростью, не могут обеспечить отличной от нуля диффузии на всем интервале скоростей (0,1). В трехмерном же случае, где присутствуют и «косые» волны, уже одних ионно-звуковых колебаний в принципе достаточно для диффузии частиц во всем пространстве скоростей. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о том, можно ли обеспечить аномальное сопротивление только возбуждением ионно-звуковых колебаний (см. [37]).

Прежде всего получим точные соотношения, являющиеся аналогами законов сохранения энергии и импульса. Для этого умножим уравнения (4.12) и (4.13) на $\mathbf{p}\mathbf{u}$ и u^2 и проинтегрируем их по $d^3\mathbf{u}$, учитывая, что функция \mathcal{W}^{ω} отлична от нуля только при тех значениях \mathcal{W}^{ω} , для которых $\int \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (g_e + \mu g_i) \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}) d^3\mathbf{u} = 0$. В результате получим:

$$\bar{u}_e - 1 = -A; \quad (4.22)$$

$$\bar{u}_i / \mu = A; \quad (4.23)$$

$$\bar{u}_e^2 - \bar{u}_e = -A v_{\phi}; \quad (4.24)$$

$$\bar{u}_i^2 / \mu = A v_{\phi}, \quad (4.25)$$

где введены обозначения: $A = \int \mathbf{n} \mathbf{Q}_e d^3 \mathbf{u}$;

$$A v_\Phi = \int \mathbf{u} \mathbf{Q}_e d^3 \mathbf{u}; \quad \bar{u}_{e,i} = \int g_{e,i}(\mathbf{n}, \mathbf{u}) d^3 \mathbf{u};$$

$\bar{u}_{e,i}^2 = \int g_{e,i} u^2 d^3 \mathbf{u}$. Величина v_Φ имеет смысл характерной фазовой скорости колебаний. Складывая (4.22) с (4.23) и (4.24) с (4.25), легко получить искомые соотношения.

Так как фазовая скорость ионно-звуковых колебаний мала по сравнению с тепловой скоростью электронов, то для вычисления тензора $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$, входящего в электронное кинетическое уравнение, можно воспользоваться приближенной формулой (П.3.2), из которой следует, что $\mathcal{D}_{\theta\theta} \sim \frac{B}{u} \chi_1(\theta)$; $\mathcal{D}_{u\theta} \sim \frac{v_\Phi}{u} \cdot \frac{B}{u} \chi_2(\theta)$; $\mathcal{D}_{uu} \sim \left(\frac{v_\Phi}{u}\right)^2 \frac{B}{u} \chi_3(\theta)$, где B — некоторая константа, а χ_1, χ_2, χ_3 — плавные функции угла θ , по порядку величины равные единице. Таким образом, для основной массы электронов $\mathcal{D}_{\theta\theta} \gg \mathcal{D}_{u\theta}, \mathcal{D}_{uu}$, и главным процессом для них является упругое рассеяние. Частота рассеяния ν растет с уменьшением скорости ($\nu \propto v^{-3}$). Поэтому в пространстве скоростей всегда есть область (ее границы будут указаны ниже), где распределение электронов почти изотропно, и функцию $g_e(u, \theta)$ можно представить в виде $g_e(u, \theta) = \bar{g}_e(u) + \delta g_e(u, \theta)$, где $\delta g_e \ll \bar{g}_e \equiv \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta g_e(u, \theta) d\theta$. Тогда из уравнения (4.10) получаем

$$\frac{\partial \delta g_e}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{2 \mathcal{D}_{\theta\theta}} u^2 \frac{\partial \bar{g}_e}{\partial u} - u \frac{\mathcal{D}_{u\theta}}{\mathcal{D}_{\theta\theta}} \cdot \frac{\partial \bar{g}_e}{\partial u}. \quad (4.26)$$

Используя приведенные выше оценки для коэффициентов диффузии, видим, что при $u \leq u_1 = B^{1/3} v_\Phi^{2/3}$ главным в правой части (4.26) является второй член и анизотропия электронов в этой области скоростей определяется их взаимодействием с колебаниями. При $u > u_1$ электроны становятся анизотропными под действием электрического поля [первый член в правой части (4.26)]. Уравнение (4.26) справедливо вплоть до скоростей $u \sim B^{1/2}$, где функцию распределения электронов уже нельзя считать слабоанизотропной. Подставляя выражение (4.26) в уравнение (4.10) и проводя интегрирование по углу, получаем уравнение по изотропной части функции распределения \bar{g}_e . При $u < u_1$ (область 1)

$$-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{d}{du} u^3 \bar{g}_e = \frac{1}{2u^2} \cdot \frac{d}{du} \left\{ u^2 \frac{d\bar{g}_e}{du} \left[\int_0^\pi \sin \theta \left(\mathcal{D}_{uu} - \frac{\mathcal{D}_{u\theta}^2}{\mathcal{D}_{\theta\theta}} \right) d\theta \right] \right\}$$

и

$$\bar{g}_e \sim \exp \left(-\frac{u^5}{B v_\Phi^2} \right). \quad (4.27)$$

При $u_1 < u < B^{1/2}$ (область 2)

$$-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{d}{du} u^3 \bar{g}_e = \frac{1}{8u^2} \cdot \frac{d}{du} \left[u^4 \frac{d\bar{g}_e}{du} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{\mathcal{D}_{\theta\theta}} d\theta \right]$$

и

$$\bar{g}_e \sim \exp \frac{B}{u}. \quad (4.28)$$

Вид функции распределения и относительное число электронов в областях 1 и 2 определяются двумя параметрами, характеризующими решения (4.27) и (4.28): B и v_ϕ , причем в наших единицах всегда $v_\phi \ll 1$.

Рассмотрим прежде всего случай $B \gg 1$, когда в областях 1 и 2 заведомо находятся почти все электроны (из энергетических соображений очевидно, что лишь малая часть электронов может иметь скорость $u > 1$). Нетрудно убедиться, что большинство электронов при этом сосредоточено в области 1. Действительно, так как $u_1^5 \sim B^{5/3} v_\phi^{5/3} \gg B v_\phi^2$, то решение (4.27) при $u = u_1$ уже экспоненциально мало. Тогда температура электронов ($\bar{u}_e^2 \sim B^{2/5} v_\phi^{4/5}$) и их направленная скорость ($\bar{u}_e \sim v_\phi$) определяются их взаимодействием с колебаниями и никак не связаны с электрическим полем, влиянием которого в области 1 можно пренебречь. Уже это указывает на физическую бессмысленность полученного решения.

Для более строгого доказательства обратимся к формулам (4.22)—(4.25). Так как мы пытаемся построить решение с $\bar{u}_e \ll 1$, то из (4.22) сразу следует, что постоянная A близка к единице. Учитывая это, из уравнения (4.20) имеем

$$\bar{u}_e^2 = \alpha v_\phi, \quad (4.29)$$

где $\alpha \lesssim 1$. Среднеквадратичную скорость электронов в рассматриваемом случае можно определить из уравнения (4.27): $\bar{u}_e^2 \sim B^{2/5} v_\phi^{4/5}$, что при $B \gg 1$ и $v_\phi \ll 1$ несовместно с (4.25). Тем самым доказана неосуществимость ионно-звуковых решений с $\bar{u}_e \ll 1$ и $B \gg 1$. Перейдем поэтому к исследованию случая $B \ll 1$. Для того чтобы электроны были слабоанизотропны, нужно их почти все поместить внутри сферы радиусом $B^{1/2}$ в пространстве скоростей. Если при этом $v_\phi \ll B^2$, то $u_1^5 \gg B v_\phi^2$, и снова все электроны оказываются в области 1, что приводит к описанному противоречию.

Итак, остается рассмотреть решение при $v_\phi \gtrsim B^2$. В этом случае $u_1^5 \lesssim B v_\phi^2$, и в области 1 функция распределения $\bar{g}_e(u)$ почти не меняется. В то же время $u_1 \gtrsim B$, и в области 2 решение тоже константа. Это постоянное решение, справедливое до $u \sim B^{1/2}$, должно сшиваться с решением в остальной области скоростей, где анизотропия уже не мала. Так как размер этой области порядка единицы и много больше $B^{1/2}$, то большинство электронов окажется в ней,

и поэтому $\bar{u}_e \sim 1$. Таким образом, мы показали, что при учете одних только ионно-звуковых колебаний обязательно будет $\bar{u}_e^2 \sim 1$, $\bar{u}_e \sim 1$ (аномальное сопротивление в асимптотическом режиме отсутствует). Включение в задачу ленгмюровских колебаний не может привести к существенному изменению этого результата, поскольку ленгмюровские колебания приводят только к перераспределению энергии и импульса внутри электронного газа.

Изложенные результаты были получены в работе [37]. При $T_e \gg T_i$ пороговая скорость возбуждения звука порядка $v_{Te} (m/M)^{1/2}$. Однако, если электронное распределение анизотропно (причем разброс по поперечным скоростям меньше продольного разброса), то пороговая скорость возрастает и при анизотропии порядка единицы становится порядка v_{Te} . Одно из таких анизотропных распределений и должно устанавливаться в асимптотическом режиме.

При наличии магнитного поля анизотропия может служить источником различного рода неустойчивостей, связанных с нормальным и аномальным эффектами Допплера и приводящих к изотропизации функции распределения. Но так как пороговая анизотропия для этих неустойчивостей не мала (порядка единицы), они не могут привести к заметному изменению приведенных выше оценок. Специально следует отметить, что в очень слабых магнитных полях, $H^2 \lesssim 8\pi n v_e^2$, возможно возбуждение «шланговой» неустойчивости.

Естественно, что изложенная здесь теория применима только к тем экспериментам, в которых энергетическое время жизни плазмы велико по сравнению со временем нагрева, но именно такая ситуация должна, по-видимому, осуществляться в любой установке, представляющей интерес для термоядерных исследований (иначе все затраты энергии пойдут на «нагрев» стенок). Если же потери тепла значительны, то приведенные выводы могут существенно измениться: охлаждение электронов эквивалентно их перебросу в фазовом пространстве из области больших в область малых скоростей, где взаимодействие со звуковыми колебаниями очень эффективно. Как следствие может вновь появиться аномальное сопротивление.

4.5. Аномальное сопротивление току, перпендикулярному к магнитному полю

Рассматриваемая в этом разделе задача представляет интерес прежде всего для физики ударных волн, распространяющихся поперек магнитного поля. Пытаясь объяснить аномальное сопротивление плазмы в ударных волнах, мы сразу учтем те конкретные условия, которые обычно выполняются в этих экспериментах и упрощают решение задачи. Так, малость электронной циклотронной частоты по сравнению с электронной плазменной позволяет пренебречь влиянием магнитного поля на дисперсию и по-прежнему пользовать-

ся обычным дисперсионным соотношением (1.4). Поскольку ионы в бесстолкновительных ударных волнах не замагничены, в кинетическом уравнении для ионов основную роль играет квазилинейная диффузия:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f_i}{\partial v_\beta}. \quad (4.30)$$

В то же время частота рассеяния электронов много меньше их циклотронной частоты, так что направленное движение электронов является дрейфовым, и в системе координат, связанной с дрейфом, их распределение можно считать аксиально симметричным вокруг магнитного поля.

Как мы убедились в предыдущем разделе, при $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ большая часть электронов почти свободно ускоряется электрическим полем. Теперь же магнитное поле препятствует убеганию электронов, и можно ожидать, что в установившемся состоянии их направленная скорость будет много меньше тепловой. Для иллюстрации последнего утверждения рассмотрим идеализированную модель, допускающую точное решение.

Пусть имеются колебания, распространяющиеся только вдоль тока, направление которого будем считать параллельным оси x . В тензоре диффузии отлична от нуля только компонента $D_{xx} = D(v_x)$. Поэтому функция распределения ионов, как следует из (4.30), тоже одномерна, а электроны в плоскости (v_x, v_y) , перпендикулярной к направлению магнитного поля, распределены аксиально симметрично в округ точки $(\bar{v}, 0)$ (\bar{v} — скорость дрейфа). Вводя полярные координаты (v, φ) на плоскости (v_x, v_y) с началом в этой точке, запишем кинетическое уравнение для функции $f_e(v, t)$:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\partial}{\partial v_x} D(v_x) \frac{\partial f_e}{\partial v_x} \right] = \frac{\bar{D}}{v} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v^2} \frac{\partial f_e}{\partial v}, \quad (4.31)$$

где $\bar{D} = \frac{1}{\pi} \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} D(v_x) (v_x - \bar{v})^2 dv_x$, а (v_{x_1}, v_{x_2}) — интервал фазовых

скоростей, где имеются колебания, и, тем самым, коэффициент диффузии $D(v_x)$ отличен от нуля. При этом мы учли малость этих фазовых скоростей по сравнению с тепловой скоростью электронов, что будет подтверждено найденным ниже решением.

Кинетическое уравнение для ионов записывается очень просто:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial}{\partial v_x} D(v_x) \frac{\partial f_i}{\partial v_x}. \quad (4.32)$$

Ясно, что в асимптотическом режиме все скорости следует измерять в единицах дрейфовой скорости \bar{v} . Соответственно этому введем автономные переменные $\xi = v/\bar{v}$ и $u_x = v_x/\bar{v}$, а функции распределения представим в виде $f_e(v, t) = \frac{n}{v^2} g_e(\xi)$, $f_i(v_x, t) =$

$= \frac{n}{v} g_i(u_x)$. Автомодельный коэффициент диффузии $\mathcal{D}(u_x)$ связан с $D(u_x)$ соотношением $\mathcal{D} = D/\bar{v}\bar{v}$. Функции g_e и g_i удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\xi} \cdot \frac{d}{d\xi} \xi^2 g_e &= \frac{\bar{\mathcal{D}}}{\xi} \cdot \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{dg_e}{d\xi}; \\ \bar{\mathcal{D}} &= \frac{1}{\pi} \int_{u_{x1}}^{u_{x2}} \mathcal{D}(u_x) (u_x - 1)^2 du_x; \\ -\frac{d}{du_x} u_x g_i &= \mu^2 \frac{d}{du_x} \mathcal{D}(u_x) \frac{dg_i}{du_x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Первое из них легко интегрируется: $g_e = C_1 \exp(-\xi^5/5\bar{\mathcal{D}})$, причем связь между константами C_1 и $\bar{\mathcal{D}}$ может быть найдена из условия

нормировки: $2\pi \int_0^\infty \xi g_e(\xi) d\xi + X_e = 1$, где X_e — число частиц в электронном ядре, который находится сейчас в точке $\xi = 0$. Необходимость его существования в этой модели видна из следующих соображений. Допустим, что $X_e = 0$. Тогда в системе возможны только ионно-звуковые колебания, фазовая скорость которых не может быть больше некоторой $u_{\text{макс}}$. Так как спектр одномерный, то при скорости дрейфа больше $u_{\text{макс}}$ часть электронов (электроны внутри круга на рис. 13) не взаимодействует с колебаниями. Поэтому они «остывают» и концентрируются в точке $u_x = 1$. Это происходит до тех пор, пока дисперсия не изменится настолько, что появляются колебания со всеми фазовыми скоростями в интервале $(0, 1)$. Как мы убедимся, это происходит при $X_e \ll 1$. Тогда из условия нормировки сразу следует, что $\pi \Gamma\left(\frac{7}{5}\right) (5\bar{\mathcal{D}})^{2/5} C_1 = 1$.

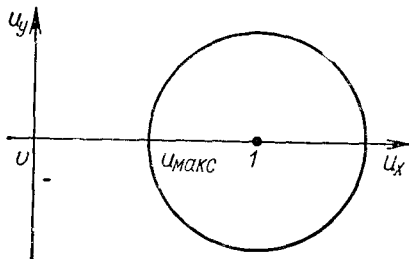


Рис. 13. Область фазового пространства, внутри которой электроны не взаимодействуют с колебаниями.

Вклад электронов в дисперсионное соотношение определяется их распределением по продольной скорости $h_e(u_x)$:

$$\begin{aligned} h_e(u_x) &= 2 \int_{|u_x-1|}^{\infty} \frac{g_e(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (u_x-1)^2}} = \\ &= -2 \int_{|u_x-1|}^{\infty} \frac{dg_e(\xi)}{d\xi} \sqrt{\xi^2 - (u_x-1)^2} d\xi. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Из условия $\gamma = 0$ в интервале фазовых скоростей $(0, 1)$ следует:

$$\begin{aligned} \frac{dg_i}{du_x} &= -\mu^{-1} \frac{dh_e}{du_x} \simeq 2\mu^{-1} (1 - u_x) \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \cdot \frac{dg_e(\xi)}{d\xi} = \\ &= -\mu^{-1} (1 - u_x) (5\bar{\mathcal{D}})^{-3/5} \frac{5\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{2\pi\Gamma\left(\frac{7}{5}\right)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

При вычислении dh_e/du_x из (4.30) мы учли, что тепловая скорость электронов много больше их дрейфовой скорости, которая в наших переменных равна просто единице. Отсюда находим функцию распределения ионов $g_i = \mu^{-1} (1 - u_x)^2 (5\bar{\mathcal{D}})^{-3/5} 5\Gamma\left(\frac{9}{5}\right) / 4\pi\Gamma\left(\frac{7}{5}\right)$ и из уравнения (4.29) средний коэффициент диффузии $\bar{\mathcal{D}} = 1/40\pi\mu^2$. Теперь из соотношения

$$\bar{\xi}^2 = \int_0^{\infty} \xi^3 g_e(\xi) d\xi / \int_0^{\infty} \xi g_e(\xi) d\xi = (5\bar{\mathcal{D}})^{2/5} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{5}\right)} \quad (4.36)$$

можно найти среднеквадратичную скорость электронов $(\bar{\xi}^2)^{1/2}$, которая оказывается равной $0,38\mu^{-2/5}$. Таким образом, отношение токовой скорости электронов к тепловой в рассматриваемой модели равно $2,63 \mu^{2/5}$ [37].

Число ионов, взаимодействующих с колебаниями, по-прежнему мало:

$$1 - X_i = \int_0^1 g_i(u_x) du_x = \mu^{1/5} \frac{10\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{3(8\pi)^{2/5} \Gamma\left(\frac{7}{5}\right)}, \quad (4.37)$$

а для определения X_e следует воспользоваться дисперсионным соотношением:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, q) &\equiv 1 - \frac{1}{q^2} \mathcal{P} \int \frac{du_x}{u_x} \cdot \frac{dh_e}{du_x} \frac{X_e}{(\omega - q)^2} - \\ &- \mu \frac{g_i(0)}{\omega q} - \mu \frac{X_i}{\omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Из требования устойчивости и присутствия колебаний со всеми фазовыми скоростями в интервале $(0, 1)$ совершенно аналогично тому, как это было проделано в разделе 4.3, находим число частиц в электронном керне: $X_e = 8,2 \mu^{4/5}$.

Интересно отметить, что отношение токовой скорости электронов \bar{v}_e к их тепловой скорости v_{Te} и число резонансных ионов $1 - X_i$ можно оценить из простых соображений, основанных на законах сохранения. Из-за рассеяния электронов на колебаниях возникает

сила электрон-ионного трения $F_{\text{тр}}$, передающая импульс от электронов к ионам. Обозначая импульс последних P_i , имеем $\dot{P}_i = F_{\text{тр}}^*$. Это равенство эквивалентно вычислению первого момента от кинетического уравнения для ионов. А так как $\dot{P}_i \sim (1 - X_i) M \dot{\bar{v}}_e$, то $F_{\text{тр}} \sim (1 - X_i) M \dot{\bar{v}}_e$. Работа силы трения идет на нагрев электронов: $\dot{T}_e \sim \bar{v}_e F_{\text{тр}}$. Отсюда следует, что $v_{Te}^2 \sim (1 - X_i) M \bar{v}_e^2 / m$. Сравнение электронного инкремента с ионным затуханием дает еще одно равенство:

$$\frac{m}{M} \cdot \frac{1 - X_i}{\bar{v}_e^2} \approx \frac{\bar{v}_e}{v_{Te}^3} \quad (4.39)$$

Отсюда сразу получаем, что $1 - X_i \sim \mu^{1/5}$, $\bar{v} \sim \mu^{2/5} v_{Te}$. Этот результат, естественно, подтверждается точным решением.

В нашем рассмотрении мы до сих пор совсем не учитывали «косых» волн, распространяющихся под углом к направлению тока. Нетрудно убедиться в том, что наличие резкого максимума у электронной функции распределения в точке $u_x = 1$ приводит к неустойчивости ионно-звуковых волн с волновым вектором q , направленным почти поперек тока.

Под действием косых волн электронный керн размывается до тех пор, пока эти волны не становятся устойчивыми. В результате исчезает ветка колебаний с большими фазовыми скоростями, и в системе остаются только ионно-звуковые колебания. В кинетических уравнениях для электронов и ионов можно снова перейти к автомодельным переменным, но точного их решения найти не удастся. Тем не менее можно оценить интересующие нас величины, рассматривая баланс энергий и импульса [38].

Так как в системе присутствуют теперь косые волны, функция распределения ионов становится существенно трехмерной. Спектр колебаний обладает анизотропией порядка единицы (отсутствуют колебания, волновой вектор которых образует тупой угол с направлением движения электронов). Поэтому и ионная функция распределения будет анизотропна. Оценивая слагаемые с $D_{\theta\theta}$ и Dv_{θ} в кинетическом уравнении для ионов, легко установить, что анизотропия ионной функции распределения порядка v_{ϕ}/v_{Ti} , где под v_{Ti} понимается среднеквадратичная скорость ионов, находящаяся вне керна («резонансных» ионов), а под v_{ϕ} — характерная фазовая скорость звуковых колебаний. Можно поэтому написать, что

$$P_i \sim (1 - X_i) M v_{\phi}. \quad (4.40)$$

Возникновение аномального сопротивления связано с тем, что ионно-звуковые колебания, излучаемые электронами, поглощаются резонансными ионами, передавая последним свою энергию и импульс. Это означает [27], что $\dot{P}_i / (1 - X_i) \dot{T}_i \sim \frac{1}{v_{\phi}}$ (T_i — температура резо-

* Фигурирующие ниже величины P_i и $F_{\text{тр}}$ представляют собой импульс и силу, отнесенные к одному иону плазмы.

нансных ионов). Величина \dot{P}_i равна силе трения, действующей на электроны, и, следовательно, $\dot{T}_e \sim \dot{P}_i \bar{v}_e$.

В автомодельном решении, где все величины размерности скорости изменяются пропорционально одной из них (например, \bar{v}_e),

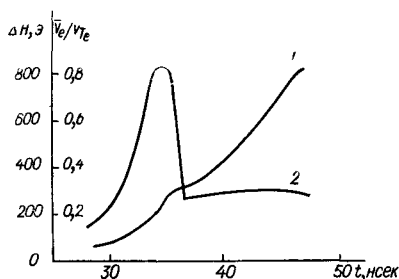


Рис. 14. Изменение величины $\Delta H(t) = H(t) - H_0(t)$ и \bar{v}_e/v_{Te} (2) на фронте бесстолкновительной ударной волны, распространяющейся перпендикулярно к магнитному полю. Время отсчитывается от момента включения ударного витка.

можно снять знаки дифференцирования по времени в последних двух формулах. Учитывая к тому же (4.40), получаем

$$\frac{(1-X_i) T_i}{T_e} \sim \frac{v_\Phi}{\bar{v}_e}; \quad T_i \sim M v_\Phi^2. \quad (4.41)$$

Еще одно соотношение между входящими сюда величинами получается из условия равенства электронного инкремента $\gamma_e \sim \omega_{pe} \bar{v}_e/v_{Te}$ и ионного декремента $\gamma_i \sim \omega_{pi} (1-X_i) v_\Phi^3/v_{Ti}^3$:

$$(1-X_i) \frac{v_\Phi^3}{v_{Ti}^3} \sim \frac{\bar{v}_e}{v_{Te}}. \quad (4.42)$$

Если принять, что характерная скорость ионно-звуковых колебаний равна $v_{Te} (m/M)^{1/2}$, то из соотношений (4.41), (4.42) немедленно следует:

$$\frac{\bar{v}_e}{v_{Te}} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}; \quad 1-X_i \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}; \quad T_i \sim T_e.$$

Приведенные результаты нашли свое подтверждение в экспериментах В. Г. Еселевича, А. Г. Еськова, Р. Х. Куртмуллаева и А. И. Малютина [39] по исследованию бесстолкновительной ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля. Волна возбуждалась ударным витком, надетым на стеклянную трубу диаметром 16 см, заполненную водородной плазмой с концентрацией 10^{14} см^{-3} и температурой 1 эв. Продольное магнитное поле H_0 было порядка 1 кэ.

Типичные результаты эксперимента приведены на рис. 14. Верхняя осциллограмма дает изменение магнитного поля во времени на расстоянии 3 см от оси трубы, на нижнем рисунке показана зависимость от времени отношения \bar{v}_e/v_{Te} в той же точке. Видно, что после

окончания переходного процесса величина \bar{v}_e/v_{Te} выходит на постоянное значение порядка 0,2 и не меняется на всей толщине фронта волны (концу фронта соответствует момент времени $t \simeq 50$ нсек).

Начальное увеличение \bar{v}_e/v_{Te} до значений порядка единицы связано с тем, что в плазме перед волной $T_e \simeq T_i$, и порог неустойчивости есть $\bar{v}_e \simeq v_{Te}$. По мере того как в переходной области электроны нагреваются, происходит уменьшение порогового значения \bar{v}_e/v_{Te} до числа, предсказываемого автомодельным решением.

В заключение этого раздела остановимся на изящном опыте Дж. Пола, К. Дафни и Л. Холмса [40], который дал непосредственное доказательство того, что на фронте бесстолкновительной ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля, возбуждаются интенсивные ионно-звуковые колебания. Для этого был использован метод комбинационного рассеяния света рубинового лазера ($\lambda \simeq 7000 \text{ \AA}$) на турбулентных флуктуациях плазмы.

Хорошо известно, что если в плазме существуют флуктуации с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , то при падении на нее электромагнитной волны с частотой ω_i и волновым вектором \mathbf{k}_i возникает

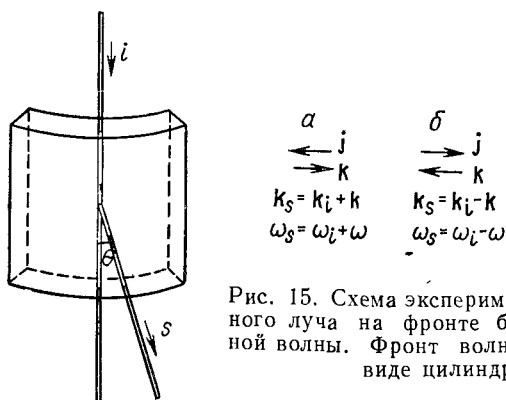


Рис. 15. Схема эксперимента по рассеянию лазерного луча на фронте бесстолкновительной ударной волны. Фронт волны условно изображен в виде цилиндрического слоя.

рассеянная волна с частотой $\omega_s = \omega_i \pm \omega$ и волновым вектором $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_i \pm \mathbf{k}$. Сдвиг частоты при рассеянии лазерного света очень мал, и поэтому $|\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}_i|$, так что $|\mathbf{k}| = 2|\mathbf{k}_i| \sin \theta/2$, где θ — угол между \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_s . Фиксируя направление наблюдения с помощью коллиматоров, можно тем самым фиксировать (с точностью до знака) значение вектора \mathbf{k} . Иными словами, при наблюдении рассеяния в определенном направлении можно заранее указать, на флуктуациях с каким волновым вектором оно будет происходить.

Схематическое изображение опыта по рассеянию дано на рис. 15, где показана часть фронта цилиндрической ударной волны и направления падающей и рассеянной волн. Угол θ выбирался равным 5° . Спектры рассеянного излучения показаны на рис. 16 для двух направлений тока. Измеренный сдвиг частоты $|\omega_i - \omega_s|$ хорошо соответствует частоте ионно-звуковых колебаний с волновым вектором

$|\mathbf{k}| = 2 |\mathbf{k}_i| \sin \frac{\theta}{2} \simeq 0,09 |\mathbf{k}_i|$ в плазме с температурой $T_e \simeq 30$ эв (а именно такой была температура электронов в середине фронта). Большая ширина линии рассеяния обусловлена, видимо, тем, что радиус падающего луча был сравним с толщиной фронта ударной волны.

Интересно отметить, что в зависимости от знака тока \mathbf{j} в спектре присутствует либо только красный, либо только фиолетовый спутник [рис. 16, 1 и 16, 2 соответствуют направлениям тока, обозначенным буквами *a* и *b* на рис. 15]. Это означает, что колебания, распро-

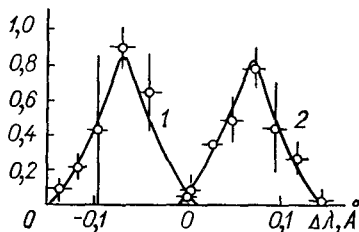


Рис. 16. Контур линии рассеянного излучения: кривые 1 и 2 соответствуют направлениям тока, обозначенным буквами *a* и *b* на рис. 15

страняющиеся навстречу движению электронов, отсутствуют (не возбуждаются).

§ 5. Квазилинейные эффекты при расширении густков электронов и ионов

Исследуем квазилинейные эффекты, возникающие при расширении густков горячих электронов и ионов в холодной плазме. Сначала рассмотрим задачу о динамике расширения облака горячих электронов.

5.1. Постановка задачи

Пусть в безграничной холодной плазме при $t = 0$ имеется облако горячих электронов, заполняющее полупространство $z < 0$, причем начальная концентрация облака n'_0 мала по сравнению с концентрацией холодной плазмы n . Так как при $n'_0 \ll n$ для обеспечения квазинейтральности плазмы требуется лишь незначительное изменение концентрации холодных электронов, то поляризационное электрическое поле, возникающее при разлете горячих электронов, мало и не оказывает существенного влияния на их движение. Поэтому можно было бы ожидать, что горячие электроны разлетаются совершенно свободно, и их функция распределения в произвольный момент времени $t > 0$ дается формулой

$$f(v_z, z, t) = \begin{cases} 0, & v_z < \frac{z}{t}; \\ f_0(v_z), & v_z > \frac{z}{t}; \end{cases} \quad (5.1)$$

где $f_0(v_z)$ — начальная функция распределения быстрых электронов, относительно которой мы предполагаем, что она имеет единственный максимум в точке $v_z = 0$.

Легко видеть, что в полупространстве $z > 0$ функция распределения (5.1) неустойчива относительно возбуждения ленгмюровских колебаний (рис. 17). Характерное время развития неустойчивости τ равно $\Lambda n/n' \omega_{pe}$ и в практически интересных случаях мало по сравнению со временем наблюдения. Поэтому возникает вопрос о влиянии неустойчивости на расширение облака горячих электронов. Покажем, что при $t \gg \tau$ движение облака описывается относительно простыми уравнениями, которые в работе [41] были названы квазигидродинамическими. Приведем так же аналитическое решение этих уравнений.

Прежде чем переходить к соответствующим вычислениям, остановимся на одном важном частном случае, который допускает очень простое рассмотрение. Предположим, что начальная функция распределения быстрых электронов $f_0(v_z)$ в области $v_z > 0$ имеет вид ступеньки (2.10)*:

$$f_0(v_z) = \begin{cases} \frac{2n_0'}{v_0}, & 0 < v_z < v_0; \\ 0, & v_z > v_0. \end{cases}$$

При таком начальном условии квазилинейная релаксация, которая в масштабе времени $t \gg \tau$ является «быстрой», приводит в каждой точке полупространства $z > 0$ к установлению функции распределения вида

$$f(v_z, z, t) = \begin{cases} p(z, t), & 0 < v_z < v_0; \\ 0, & v_z > v_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $p(z, t)$ — высота плато. Функцию $p(z, t)$ можно найти из уравнения непрерывности для быстрых электронов, если учесть, что их концентрация и поток равны соответственно pv_0 и $pv_0^2/2$. В результате имеем $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v_0}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, т. е. $p(z, t) = p(z')$, $z' = z - \frac{v_0}{2} t$. Воспользуемся далее граничным условием на плоскости $z = 0$.

* Конкретный вид функции $f_0(v_z)$ при $v_z < 0$ в задачу не входит, поскольку электроны с $v_z < 0$ не попадают в полупространство $z > 0$, а движение в полупространстве $z < 0$ полностью описывается формулой (5.1), справедливой при любой функции $f_0(v_z)$.

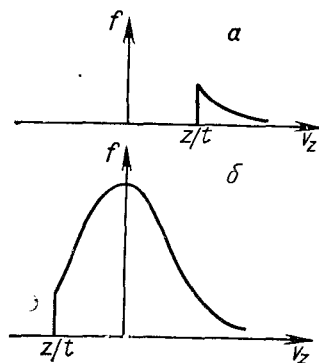


Рис. 17. Функция распределения быстрых электронов в момент времени $t > 0$ при $z > 0$ (а) и $z < 0$ (б).

При $t < 0$ быстрые электроны в полупространстве $z > 0$ отсутствуют, т. е. $p(z') = 0$ при $z' > 0$. При $t > 0$ через плоскость $z = 0$ в полупространство $z > 0$ вытекает постоянный поток частиц, равный $n_0' v_0$. Поэтому $p(z') = 2n_0'/v_0$ при $z' < 0$.

Окончательно имеем

$$p(z, t) = \begin{cases} \frac{2n_0'}{v_0}, & 0 < z < \frac{v_0}{2} t; \\ 0, & z > \frac{v_0}{2} t. \end{cases} \quad (5.3)$$

Отсюда можно найти зависимость концентрации быстрых электронов от z и t (рис. 18):

$$n' = \begin{cases} 2n_0', & 0 < z < \frac{v_0}{2} t; \\ 0, & z > \frac{v_0}{2} t. \end{cases}$$

Для сравнения на рисунке приведена также зависимость $n'(z, t)$, соответствующая свободному разлету быстрых электронов, начальная функция распределения которых определяется формулой (2.10).

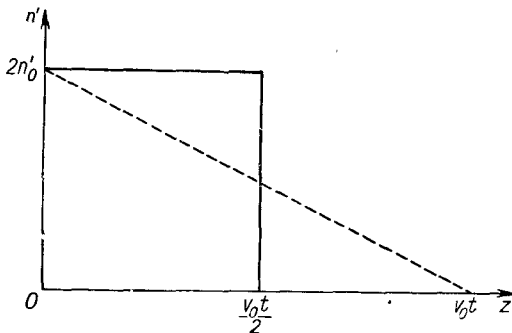


Рис. 18. Зависимость $n'(z)$ в фиксированный момент времени $t > 0$. Пунктиром показана зависимость $n'(z)$, соответствующая свободному разлету электронов.

Из рис. 18 видно, что учет квазилинейной релаксации приводит к заметному замедлению разлета быстрых электронов и появлению характерного скачка по функции $n'(z, t)$.

Плотность энергии колебаний, возбуждаемых быстрыми электронами в области $z > 0$, будет найдена ниже [см. (5.12)]. Здесь приведем только результат:

$$\bar{U} = \begin{cases} \frac{mn_0' v_0^2}{6}, & 0 < z < \frac{v_0}{2} t; \\ 0, & z > \frac{v_0}{2} t. \end{cases}$$

Рассмотренная задача позволяет ответить на упомянутый в разд. 2.2 вопрос о движении инжектируемого в плазму электронного пучка в области $z \gg l_{1/2}$. Действительно, как отмечалось в разд. 2.2, на расстоянии $\sim l_{1/2}$ функция распределения пучка приобретает вид (2.10), причем стационарное решение в этой области устанавливается за время порядка τ . Ясно, что при временах $t \gg \tau$ и масштабах $z \gg l_{1/2}$ можно рассматривать слой толщиной $\sim l_{1/2}$ как источник электронов с функцией распределения (2.10), как это и делалось в только что решенной задаче. Тем самым мы приходим к выводу, что функция распределения пучка в области $z \gg l_{1/2}$ определяется формулами (5.2) и (5.3).

5.2. Вывод квазигазодинамических уравнений

Перейдем теперь к более формальному исследованию задачи. Для учета взаимодействия быстрых электронов с возбуждаемыми в плазме ленгмюровскими колебаниями воспользуемся системой квазилинейных уравнений*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial v_z} D \frac{\partial f}{\partial v_z} \equiv \text{St}f; \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = D \frac{\pi \omega_{pe}}{n} v_z^2 \frac{\partial f}{\partial v_z}, \quad (5.5)$$

где $D = D(v_z, z, t)$ — квазилинейный коэффициент диффузии, связанный соотношением $D = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2} \tilde{W}$ со спектральной плотностью энергии ленгмюровских колебаний $\tilde{W}(v_z, z, t)$, а остальные обозначения общепринятые. Групповая скорость ленгмюровских колебаний v_{gz} мала по сравнению с характерной скоростью разлета быстрых электронов, равной по порядку величины их тепловой скорости, и поэтому мы опускаем слагаемое $v_{gz} \partial D / \partial z$ в левой части уравнения (5.5).

В масштабе времени $t \gg \tau$ неустойчивость быстрая, т. е. правые части уравнений (5.4) и (5.5), формально оцениваемые как Df/v^2 и D/τ , велики по сравнению с левыми. Поэтому при решении системы (5.4), (5.5) можно воспользоваться разложением по параметру τ/t . Положение здесь во многом аналогично тому, которое имеет место в динамике обычного газа, где при рассмотрении движений с пространственными и временными масштабами, существенно превышающими соответственно длину свободного пробега и время парных столкновений, кинетическое уравнение решается разложением по обратной частоте столкновений.

* Ограничимся одномерными (в пространстве скоростей) квазилинейными уравнениями, имея в виду, что в плазме присутствует достаточно сильное магнитное поле, параллельное оси z .

В нулевом приближении функция f равна просто той устойчивой функции распределения f_s , которая устанавливается в каждой точке пространства в результате квазилинейной релаксации и определяется из условий $St \dot{f}_s = 0$, $\partial f_s / \partial v_z \leq 0$. Отсюда следует, что для рассматриваемых нами начальных условий

$$f_s(v_z, z, t) = \begin{cases} p(z, t), & v_z^* < u(z, t); \\ f_0(v_z), & v_z > u(z, t), \end{cases} \quad (5.6)$$

где p и u — некоторые не определенные пока функции координат и времени. Коэффициент квазилинейной диффузии D также пока не известен; можно лишь утверждать, что он существенно отличен от нуля в интервале скоростей $(0, u)$, а вне этого интервала диффузией можно пренебречь.

В полной аналогии с тем, что имеет место в обычной газодинамике, функция распределения нулевого приближения однозначно характеризуется конечным числом параметров (в нашем случае таких параметров два: p и u ; в одномерной газодинамике их три: плотность, температура и массовая скорость). Задача состоит теперь в том, чтобы получить уравнения для этих параметров. В газодинамике такая задача решается взятием нулевого, первого и второго моментов кинетического уравнения (с учетом того, что интеграл столкновений сохраняет концентрацию, импульс и энергию частиц). В нашем случае $St \dot{f}$ сохраняет только концентрацию частиц, поэтому указанным способом можно получить лишь одно уравнение — аналог газодинамического уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} p u + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{p u^2}{2} - f_0(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (5.7)$$

Второе уравнение для p и u можно найти следующим образом. Поскольку $\lim_{v_z \rightarrow 0} D \partial f / \partial v_z = 0$, то из уравнений (5.4), (5.5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{v_z} f dv_z' + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{v_z} v_z' f dv_z' &= \\ &= D \frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{n}{\pi \omega_{pe} n'} \cdot \frac{\partial D}{\partial t}. \end{aligned}$$

В той области скоростей $0 < v_z < u$, где коэффициент квазилинейной диффузии отличен от нуля, функция распределения равна просто $p(z, t)$, так что

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\pi \omega_{pe}}{n} v_z^2 \left(v_z \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v_z^2}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

и

$$D = \frac{\pi \omega_{pe}}{n} v_z^3 \left(p + \frac{v_z}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t p dt' \right). \quad (5.8)$$

Так как в точке $v_z = u$ коэффициент квазилинейной диффузии должен обращаться в нуль, из (5.8) получаем искомое второе уравнение для p и u :

$$p + \frac{u}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t p dt' = 0.$$

Оно легко приводится к дифференциальной форме:

$$u \frac{\partial p}{\partial t} - p \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.9)$$

Интересно отметить, что подобно тому, как конкретное значение эффективной частоты столкновений не входит в уравнения идеальной газодинамики, так и параметры, характеризующие пучковую неустойчивость, не входят в «квазигазодинамические» уравнения (4.8), (5.9).

Зная p и u , можно найти все макроскопические характеристики горячей плазмы. Например, для ее концентрации n' и средней скорости \bar{v}' имеем:

$$n' = pu + \int_u^\infty f_0(v_z) dv_z; \quad (5.10)$$

$$\bar{v}' = \frac{1}{n'} \left[\frac{pu^2}{2} + \int_u^\infty v_z f_0(v_z) dv_z \right]. \quad (5.11)$$

Через p и u выражается также плотность энергии ленгмюровских колебаний:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \omega_{pe} \int_0^\infty \frac{\tilde{W}}{v_z^2} dv_z = \\ &= \omega_{pe} \frac{m^2}{4\pi^2 e^2} \int_0^u \frac{D}{v_z} dv_z = \frac{mpu^3}{12}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.3. Решение квазигазодинамических уравнений

Заметим, что в квазигазодинамическую задачу не входят параметры размерности длины. Поэтому решение системы уравнений (5.7) и (5.9) автомодельно и имеет вид

$$p = t^\alpha q(\xi); \quad u = u(\xi); \quad \xi = z/t. \quad (5.13)$$

Параметр α определяется из условия, что полное число частиц в полупространстве $z > 0$ линейно возрастает со временем. Тогда указанное условие приводит к значению $\alpha = 0$.

В результате подстановки (5.13) в (5.7) и (5.9) получаются обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} u(u-2\xi) \frac{dp}{d\xi} + 2(u-\xi)[p-f_0(u)] \frac{du}{d\xi} &= 0; \\ u(u-2\xi) \frac{dp}{d\xi} + 2p\xi \frac{du}{d\xi} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

решение которых находится элементарно:

$$p = \frac{u^2}{2 \int_0^u \frac{v_z dv_z}{f_0(v_z)}}; \quad \xi = \frac{p-f_0}{2p-f_0}. \quad (5.14)$$

Это решение определяет неявным образом зависимости $u(\xi)$ и $p(\xi)$ в полупространстве $z > 0$. Макроскопические параметры горячей плазмы и плотность энергии ленгмюровских колебаний можно найти по формулам (5.10)—(5.12). Что же касается полупространства $z < 0$, то там справедливо решение (5.1), поскольку соответствующая функция распределения устойчива.

Исследуем теперь задачу о расширении облака горячих электронов в случае, когда его начальная толщина равна нулю. Иначе говоря, рассмотрим начальное условие вида

$$f|_{t=0} = Ng_0(v_z) \delta(z), \quad (5.15)$$

где N — полное число горячих электронов, а функция $g_0(v_z)$ предполагается нормированной на единицу: $\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(v_z) dv_z = 1$.

Естественно, что в реальных условиях начальная толщина облака всегда отлична от нуля, но если рассматривать движение на расстояниях $z \gg L$, то приближение (5.15) является достаточно хорошим. Отметим, что решенная выше задача о разлете первоначально полуограниченного облака фактически соответствует обратному предельному случаю, $z \ll L$.

При начальном условии (5.15) функция $f_s(v_z, z, t)$ определяется

$$f_s(v_z, z, t) = \begin{cases} p(z, t), & v_z < u(z, t); \\ 0, & v_z > v(z, t) \end{cases} \quad (5.16)$$

(для определенности рассмотрим решение в полупространстве $z > 0$), и квазигазодинамические уравнения приобретают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} pu + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{pu^2}{2} = 0; \quad (5.17)$$

$$u \frac{\partial p}{\partial t} - p \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.18)$$

Решение этих уравнений по-прежнему является автомодельным, но параметр α равен теперь -1 , так как в рассматриваемом случае

сохраняется полное число горячих электронов, а не их поток через плоскость $z = 0$. Подставляя $p = q(\xi)/t$, $u = u(\xi)$ в уравнения (5.17), (5.18), получаем:

$$u(u - 2\xi) \frac{dq}{d\xi} + 2(u - \xi)q \frac{du}{d\xi} - 2qu = 0;$$

$$u(u - 2\xi) \frac{dq}{d\xi} + 2\xi q \frac{du}{d\xi} - 2qu = 0,$$

или, что эквивалентно:

$$(u - 2\xi)q \frac{du}{d\xi} = 0; \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{d\xi} [u(u - 2\xi)q] = 0. \quad (5.20)$$

Из уравнения (5.19) следует, что $u = 2\xi$ (решение $u = \text{const}$, очевидно, является посторонним), а уравнение (5.20) удовлетворяется тождественно, при любом $q(\xi)$. Чтобы найти функцию $q(\xi)$, воспользуемся точным уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{n}{\pi\omega_{pe}} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \frac{1}{v_z^2} \cdot \frac{\partial D}{\partial t},$$

которое справедливо при любых z (а не только при $|z| \gg L$) и позволяет поэтому корректно учесть начальное условие. Проинтегрируем это уравнение сначала по времени от 0 до ∞ , а затем по координате в пределах $(-0, z)$ и воспользуемся начальным условием (5.15). В результате найдем, что

$$-Ng_0(v_z) + v_z \int_0^{\infty} f(v_z, z, t')_i dt' = 0.$$

Поскольку при $z \gg L$ функция распределения дается формулой (5.16), в которой, как было показано выше, следует положить $u = 2\xi$, $p = q(\xi)/t$, то последнее равенство приводится к виду

$$-Ng_0(v_z) + v_z \int_{v_z/2}^{\infty} \frac{q(\xi)}{\xi} d\xi = 0,$$

откуда легко определяется $q(\xi)$:

$$q(\xi) = -\frac{N}{2} \xi \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{g_0(2\xi)}{\xi}.$$

Используя теперь соотношения (5.10)–(5.12), находим n' , \bar{v}' и \bar{U} :

$$\left. \begin{aligned} n' &= -\frac{N}{t} \xi^2 \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{g_0(2\xi)}{\xi}; \\ \bar{v}' &= \xi; \\ \bar{U} &= -\frac{mN}{3t} \xi^4 \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{g_0(2\xi)}{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Форма решения (5.21) для случая, когда

$$g_0(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T_{e'}}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2T_{e'}}\right)$$

дана на рис. 19.

Из рис. 19 видно, что учет квазилинейных эффектов приводит к заметному изменению формы решения по сравнению со случаем свободного разлета: скорость движения уменьшается, а передний фронт концентрации становится более крутым; кроме того,

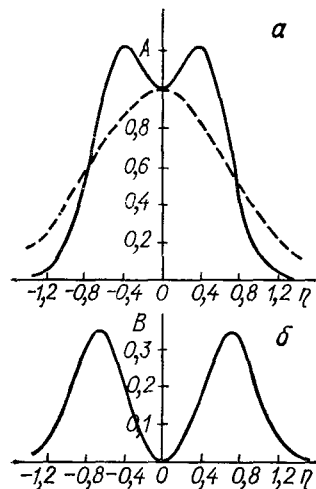


Рис. 19. Решение задачи с начальным условием (5.15) при максвелловской функции $g_0(v_z)$:

$$a - A \equiv \frac{n't}{N} \left(\frac{2\pi T_{e'}}{m} \right)^{1/2};$$

$$\sigma - B \equiv \frac{Ut^3}{N} \left(\frac{\pi}{2mT_e} \right)^{1/2}. \text{ По оси абсцисс отложен безразмерный параметр } \eta = \xi \left(\frac{m}{2T_{e'}} \right)^{1/2}.$$

Пунктир на a соответствует свободному разлету электронов.

на функции $n'(z)$ появляется отчетливый максимум. Указанные особенности движения становятся еще более заметными, если функция $g_0(v_z)$ убывает при больших v_z быстрее, чем максвелловская. Отметим, что плотность энергии ленгмюровских колебаний, возбуждаемых в системе, по порядку величины равна плотности энергии быстрых электронов.

5.4. Другие задачи о расширении сгустков

Квазинейтральность плазмы при разлете горячих электронов обеспечивается за счет встречного движения холодных электронов относительно ионов. Ясно, что вышеприведенное решение справедливо только до тех пор, пока скорость этого движения, равная по порядку величины $(n'/n)\sqrt{T_{e'}/m}$, не превышает критической скорости, соответствующей порогу возбуждения колебаний ионно-звукового типа в холодной плазме. Последняя зависит от соотношения температур холодных электронов T_e и ионов T_i и в частном случае $T_e = T_i$ по порядку величины равна $\sqrt{T_e/m}$. Имея в виду это

обстоятельство, получаем следующее ограничение на допустимые значения концентрации горячих электронов (при $T_e = T_i$): $n' < < n \sqrt{T_e/T_e'}$. Если это условие не выполнено, то возникает трение холодных электронов об ионы, вследствие чего величина поляризационного электрического поля возрастает и скорость разлета горячих электронов уменьшается.

Наше рассмотрение должно быть изменено также и в том случае, когда внешнее магнитное поле мало или вообще отсутствует, так что квазилинейная релаксация является трехмерной (в пространстве скоростей). Не исключено, что при этом может возникать решение типа бесстолкновительной ударной волны.

В заключение отметим, что результаты, полученные в разд. 5.2 и 5.3, непосредственно переносятся на случай, когда в сильно неизо-термической ($T_e \gg T_i$) однородной плазме имеется облако теплых ионов с температурой T_i' , удовлетворяющей неравенству $T_i \ll \ll T_i' \ll T_e$. Разлет такого облака сопровождается возбуждением ионно-звуковых колебаний с фазовой скоростью порядка $\sqrt{T_i'/M}$ (где M — масса иона) и частотой, близкой к ω_{pi} . При этих условиях функция распределения теплых ионов по-прежнему подчиняется уравнениям (5.4), (5.5) (в них только следует заменить m на M) и, следовательно, сохраняют свою силу все выводы, приведенные в разд. 5.2 и 5.3.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Используем безразмерные переменные (2.11). Инкремент неустойчивости:

$$\gamma = \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \int_{\frac{|1-k_z v_z|}{k_{\perp} v_{\perp}} < 1} dv_z \frac{k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{1-k_z v_z}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}}{\sqrt{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - (1-k_z v_z)^2}}.$$

В случае, когда разброс пучка по скоростям удовлетворяет условию $\Delta v_z \sim \Delta v_{\perp} \sim \Delta v \ll 1$, инкремент отличен от нуля при

$$|k_z - 1| \leq \Delta v k_{\perp}. \quad (\text{П.1.1})$$

Внутри этой области значений k_z и k_{\perp} он может быть оценен по формуле

$$\gamma \sim \frac{1}{\Delta v^2} \cdot \frac{1}{1+k_{\perp}^2}. \quad (\text{П.1.2})$$

Тензор диффузии:

$$\left. \begin{matrix} D_{zz} \\ D_{z\perp} \\ D_{\perp\perp} \end{matrix} \right\} = 2 \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \int_{\frac{|1-k_z v_z|}{k_{\perp} v_{\perp}} < 1} dk_z \frac{W(k_z, k_{\perp})}{\sqrt{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - (1-k_z v_z)^2}} \begin{pmatrix} k_z^2 \\ \frac{1-k_z v_z}{v_{\perp}} k_z \\ \frac{(1-k_z v_z)^2}{v_{\perp}^2} \end{pmatrix}.$$

Используем безразмерные переменные, определяемые соотношениями (3.6). Инкремент неустойчивости:

$$\gamma(k, \theta') = \frac{1}{2k^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(\cos \theta - k \cos \theta') \frac{\partial g}{\partial \theta} - 2g \sin \theta}{\sqrt{(\cos \theta_1 - \cos \theta)(\cos \theta - \cos \theta_2)}} d\theta. \quad (\text{П.2.1})$$

Здесь

$$g = 2\pi \int_0^\infty f p dp; \quad \cos \theta_{1,2} = \frac{1}{k} (\cos \theta' \pm \sin \theta' \sqrt{k^2 - 1}).$$

Если $\theta' = 0$, то

$$\gamma = \gamma(k) = \frac{\pi}{2k^2} \left(\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \sin^2 \theta g \right) \Big|_{\cos \theta = k^{-1}}. \quad (\text{П.2.2})$$

Если $\theta' \gg \Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — угловой разброс пучка, то

$$\gamma = \frac{\delta}{2k^2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \delta^2}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (\text{П.2.3})$$

где $\delta = (1 - k \cos \theta') / k \sin \theta'$. Если к тому же $\theta' \ll 1$ (но $\theta' \gg \Delta\theta$), то

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{2} (1 - \theta'^2) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \varepsilon^2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (\text{П.2.4})$$

где

$$\varepsilon = \theta' - \sqrt{2(k-1)}. \quad (\text{П.2.5})$$

Тензор диффузии

$$\left. \begin{matrix} D_{pp} \\ D_{p\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{matrix} \right\} = 2\pi \int_1^\infty \frac{dk}{k} \int_{\theta_1'}^{\theta_2'} \frac{\sin \theta' W(k, \theta') d\theta'}{\sqrt{(\cos \theta_1' - \cos \theta)(\cos \theta - \cos \theta_2')}} \left(\begin{matrix} 1 \\ \frac{\cos \theta - k \cos \theta'}{\sin \theta} \\ \frac{(\cos \theta - k \cos \theta')^2}{\sin^2 \theta} \end{matrix} \right). \quad (\text{П.2.6})$$

Здесь $\cos \theta_{1,2}' = \frac{1}{k} (\cos \theta \pm \sin \theta \sqrt{k^2 - 1})$. Если $W = \bar{W}(k) \delta(1 - \cos \theta')$,

а $\theta \ll 1$, то

$$\left. \begin{matrix} D_{pp} \\ D_{p\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{matrix} \right\} = \pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta \\ \theta^2 \end{pmatrix} \bar{W} \Big|_{k=1+\frac{\theta^2}{2}}. \quad (\text{П.2.7})$$

Если $\theta \ll \Delta\theta'$, где $\Delta\theta'$ — угловая ширина спектра колебаний, причем $\Delta\theta' \ll 1$, то

$$\left. \begin{array}{l} D_{pp} \\ D_{p\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{array} \right\} = 2\pi \int_0^\infty \theta' d\theta' \int_{-\theta}^{\theta} \frac{W d\varepsilon}{\sqrt{\theta^2 - \varepsilon^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\varepsilon\theta'}{\theta} \\ \frac{\varepsilon^2 \theta'^2}{\theta^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2.8})$$

где ε определяется соотношением (П.2.5).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

При использовании сферических координат \dot{u} , θ , φ и q , θ' , φ' в пространстве скоростей и волновых векторов тензор диффузии имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} D_{uu} \\ D_{u\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{array} \right\} = \frac{2}{u} \iint \frac{W \sin \theta' d\theta' dq}{q \sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \theta' - \left(\frac{\omega}{qu} - \cos \theta \cos \theta' \right)^2}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{u^2} \\ \frac{\omega}{u} \frac{\cos \theta - q \cos \theta'}{\sin \theta} \\ \left(\frac{\omega}{u} \frac{\cos \theta - q \cos \theta'}{\sin \theta} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1.3})$$

Интегрирование проводится по той области переменных q и θ' , где подкоренное выражение положительно. При $\frac{\omega}{qu} \ll 1$

$$\left. \begin{array}{l} D_{uu} \\ D_{u\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{array} \right\} = \frac{2}{u} \int q dq \int_{|\cos \theta'| < \sin \theta} \frac{W \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \theta' - \cos^2 \theta \cos^2 \theta'}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{q^2 u^2} \\ -\frac{\omega}{qu} \frac{\cos \theta'}{\sin \theta} \\ \frac{\cos^2 \theta'}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», **1**, 82 (1961).
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез». Дополнение, **2**, 465 (1962).
3. D g i t t o n d W. E., P i p e s D. Nucl. Fusion, Suppl., **3**, 1049 (1962).
4. Шапиро В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 613 (1963).
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1967, стр. 174.
6. S a t a s M. et al. Nucl. Fusion, Suppl., **2**, 423 (1962).
7. Веденов А. А. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, стр. 203.
8. Кадомцев Б. Б., Погуще О. П. Препринт IC/70/45. Триест, Международный центр теор. физики, 1970.
9. Иванов А. А., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **51**, 1522 (1966).
10. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, стр. 3.
11. Трубников Б. А. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 98.
12. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. В сб. «Взаимодействие пучков заряженных частиц в плазме». Киев, «Наукова думка», 1965, стр. 69.
13. Левитский С. М., Шашурин И. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **52**, 350 (1967).
14. Сизоненко В. Л., Степанов К. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, 1197 (1965).
15. B e r n s t e i n I. V., E n g e l m a n n F. Phys. Fluids, **9**, 937 (1966).
16. Закаатов Л. П., Плахов А. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **60**, 588 (1971).
17. Рютов Д. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **57**, 232 (1969).
18. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **57**, 1401 (1969).
19. W i n t e r b e r g F. Phys. Rev., **174**, 212 (1968).
20. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **57**, 966, 1969.
21. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **60**, 408 (1971).
22. Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **59**, 2091 (1970).
23. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д. «Письма ЖЭТФ», **11**, 606 (1970).
24. D g i t t o n d W. E. Phys. Fluids, **5**, 1133 (1962).
25. Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4. М., Атомиздат, 1964, стр. 263.
26. F i e l d E. C., F r i e d V. D. Phys. Fluids, **7**, 1937 (1964).
27. S a g d e e v R. Z. Proc. of the 18-th Symp. in Appl. Math. N. Y., 1965, p. 281.
28. Рудаков Л. И., Кораблев Л. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **50**, 220 (1966).
29. Демидов Б. А., Елагин Н. И., Фанченко С. Д. «Докл. АН СССР», **174**, 327 (1967).
30. Калинин Ю. Г. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **56**, 462 (1969).
31. N a m b e r g e r S. M., F r i e d m a n M. Phys. Rev. Lett., **26**, 674 (1968).
32. Завойский Е. К. и др. «Докл. АН СССР», **194**, 55 (1970).
33. Антонов А. С. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **58**, 1567 (1970).
34. K r u s k a l M. D., B e r n s t e i n I. V. Phys. Fluids, **7**, 407 (1964).

35. Бобровский Г. А., Кузнецов Э. И., Разумова К. А. «Ж. эксперим. и теор. физ», **59**, 1103 (1970).
36. Векштейн Г. Е., Рютов Д. Д., Сагдеев Р. З. «Письма ЖЭТФ», **12**, 419 (1970).
37. Векштейн Г. Е., Рютов Д. Д., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **60**, 2142 (1971).
38. Векштейн Г. Е., Сагдеев Р. З. «Письма ЖЭТФ», **11**, 297 (1970).
39. Еселевич В. Г. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **60** (1971).
40. Paul J. W. M., Daughney C. S., Holmes L. S. Препринт CLM-P222. Culham Lab., 1969.
41. Рютов Д. Д., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **58**, 739 (1970).

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕМАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЫ

А. Б. Михайловский

Введение

В работе излагается теория электромагнитных неустойчивостей плазмы с немаксвелловским распределением частиц по скоростям. Термин «электромагнитные неустойчивости» означает, что речь идет о неустойчивостях, при развитии которых возмущается не только электрическое, но и магнитное поле. Наряду с электромагнитными неустойчивостями существуют также электростатические, при развитии которых магнитное поле возмущается несущественно.

Материал, представленный в настоящей работе, дополняет теоретическую картину о колебаниях и неустойчивостях плазмы, излагавшуюся в предыдущих выпусках серии «Вопросы теории плазмы». Отметим некоторые из работ этой серии. Знакомство с ними полезно для лучшего понимания обсуждаемых ниже явлений.

В работе В. Д. Шафранова «Электромагнитные волны в плазме» (в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3. М., Атомиздат, 1963) изложена теория колебаний термодинамически равновесной (максвелловской) плазмы; развит общий подход исследования колебаний плазмы с использованием тензора диэлектрической проницаемости. Этот подход принят и в настоящей работе. В работе В. Д. Шафранова приведены дисперсионные соотношения для большинства основных типов колебаний максвелловской плазмы. Многие из этих типов колебаний имеют и при немаксвелловском распределении частиц по скоростям. Качественное различие этих двух типов колебаний состоит в том, что все колебания максвелловской плазмы затухают во времени (или обладают вещественными частотами), тогда как колебания немаксвелловской плазмы могут самопроизвольно возбуждаться, что приводит к неустойчивости.

В работе Т. Ф. Волкова «Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы» (вып. 4, 1964) получены гидродинамические уравнения для плазмы с некалярным давлением (уравнения Чу — Голдбергера — Лоу), позволяющие исследовать некоторые разновидности электромагнитных неустойчивостей. В этом же выпуске в работе Р. З. Сагдеева «Коллективные процессы и ударные волны в раз-

реженной плазме» обсуждаются, в частности, нелинейные эффекты, связанные с электромагнитными неустойчивостями, излагаются качественные представления о некоторых неустойчивостях.

Исследованию неустойчивостей немаквелловской плазмы посвящена работа А. В. Тимофеева и В. И. Пистуневича «Циклотронная неустойчивость анизотропной плазмы» (вып. 5). В ней рассматриваются электростатические неустойчивости, особенно существенные для плазмы с малым отношением давления частиц к давлению магнитного поля. Обсуждаемые нами электромагнитные неустойчивости совместно с рассмотренными в указанной работе электростатическими неустойчивостями составляют полную картину неустойчивостей немаквелловской плазмы.

Систематизированному изложению вопросов теории плазменных неустойчивостей посвящена также монография автора «Теория плазменных неустойчивостей» [1]. Настоящий обзор можно рассматривать как дополнение к этой монографии.

Электромагнитные неустойчивости оказываются более важными, чем электростатические, если давление плазмы p_0 не мало по сравнению с давлением статического магнитного поля $B_0^2/8\pi$, $\beta \equiv \equiv 8\pi p_0/B_0^2 \gtrsim 1$. (В оценочных формулах p означает $\max(p_{\parallel}, p_{\perp})$, где p_{\parallel} и p_{\perp} — продольная и поперечная компоненты тензора давления в системе координат, связанной с магнитным полем.) Они могут играть существенную роль и при $\beta < 1$. Например, в случае плазмы, содержащей небольшое число быстрых электронов, роль электромагнитных неустойчивостей существенна, если $\beta > n_1/n_0$, где n_1, n_0 — плотности быстрых и медленных частиц. Возможность раскачки электромагнитных возмущений следует учитывать даже при сколько угодно малом β , если скорость частиц v не слишком мала по сравнению со скоростью света c , т. е. в случае релятивистской плазмы. Наконец, при немаквелловском распределении ионов по скоростям возможно развитие электромагнитных неустойчивостей, если $\beta > m_e/m_i$.

Немаквелловская плазма с большим или конечным β и с конечным $(v/c)^2$ реализуется во многих лабораторных экспериментах. Плазма с такими параметрами существует в космических условиях. В настоящее время имеется много экспериментальных доказательств проявления электромагнитных неустойчивостей немаквелловской плазмы. Представления об этих неустойчивостях используются для интерпретации большого круга физических явлений в лабораторной и космической плазме. В этой связи представляется целесообразным дать систематизированное изложение основ теории электромагнитных неустойчивостей, чему и посвящена данная работа.

В зависимости от конкретных условий немаквелловское распределение по скоростям имеют электроны или ионы, а возможно, и обе компоненты плазмы. В гл. 1 мы исследуем неустойчивости плазмы с немаквелловскими электронами, § 1—5; в гл. 2 — с немаквелловскими ионами, § 6—10.

В § 1 исследуются неустойчивости плазмы большого давления, $\beta \gtrsim 1$, с анизотропным распределением электронов. Согласно современным представлениям, такого рода плазма, возможно, характерна для солнечного ветра. Анизотропная плазма с большим β может моделироваться в лабораторных экспериментах с θ -пинчами.

В § 2 рассматривается раскачка колебаний холодной плазмы группой быстрых электронов с анизотропным распределением по скоростям. Такая плазма типична для лабораторных экспериментов по СВЧ-нагреву и адиабатическому сжатию. Плазма с малой долей быстрых анизотропных электронов существует в электронных радиационных поясах Земли.

Исследованию электромагнитных неустойчивостей плазмы, пронизываемой электронным пучком с анизотропным распределением по скоростям, посвящен § 3. Такие неустойчивости могут играть роль в пучково-плазменных разрядах, а также в плазме с убегающими электронами.

При конечном релятивистском параметре $(v/c)^2$ в плазме с немасвелловскими электронами обнаруживаются дополнительные классы неустойчивостей. Обсуждению некоторых из них посвящены § 4 и 5. Показано также, что релятивистская плазма может быть неустойчивой даже при изотропном распределении электронов по скоростям. Однако для неустойчивости необходимо, чтобы функция распределения имела положительную производную, $df/dv > 0$. В § 4 исследуются квазиэлектростатические неустойчивости слаборелятивистской плазмы, примером которых является неустойчивость отрицательной массы. В § 5 обсуждается раскачка электромагнитных волн в плазме с $df/dv > 0$ (такой процесс иногда называют реабсорбцией синхротронного излучения). Неустойчивости плазмы с $df/dv > 0$ используются для создания усилителей микроволнового излучения — мазеров на циклотронном резонансе. Такие неустойчивости иногда называются неустойчивостями мазерного типа.

Изложение теории ионных неустойчивостей начинается с анализа анизотропной плазмы большого давления, $\beta \gtrsim 1$. В § 6 показано, что при анизотропном распределении ионов развиваются неустойчивости с частотами выше, порядка и ниже ионной циклотронной частоты. Такие неустойчивости, как и электронные, важны для физики плазмы солнечного ветра и для интерпретации лабораторных экспериментов с θ -пинчами. Представления об этих неустойчивостях широко используются при построении теории ударных волн в плазме.

Эффекты ионной анизотропии могут сказываться также при столкновении двух максвелловских плазм — анизотропия по скоростям в этом случае означает, что средняя продольная энергия ионов превышает их поперечную температуру. Физически родственной системе двух сталкивающихся плазм является движущаяся вдоль магнитного поля плазменная струя с неоднородным профилем скорости: в системе отсчета, связанной со средней скоростью струи, частицы имеют среднюю продольную энергию, но не имеют попереч-

ной. Неустойчивости, свойственные сталкивающимся плазмам и струе с неоднородным профилем скорости, обсуждаются в § 7. Реально они могут проявляться при взаимодействии плотных плазменных сгустков и при транспортировке плазмы в магнитных каналах. Неустойчивость плазмы с неоднородным профилем скорости часто называют неустойчивостью типа Кельвина — Гельмгольца.

Как известно, при удержании плазмы в адиабатической ловушке, распределение ионов по скоростям имеет «конус потерь» — отсутствуют частицы с малыми v_{\parallel}/v_{\perp} . Наличие конуса потерь влечет за собой два дестабилизирующих фактора: анизотропию распределения частиц по продольным и поперечным скоростям, $\partial f/\partial(v_{\perp}^2) \neq \neq \partial f/\partial(v_{\parallel}^2)$, и немонотонность их распределения по поперечным скоростям, $\partial f_{\perp}/\partial v_{\perp} > 0$. На устойчивость плазмы с $\beta < 1$ наибольшее влияние оказывает второй из этих факторов — немонотонность. С этим связаны многочисленные разновидности так называемых конусных неустойчивостей плазмы с $\beta \rightarrow 0$. Обсуждению конусных неустойчивостей пространственно-однородной плазмы с конечным β посвящен § 8. Здесь наибольшее внимание уделяется высокочастотной ($\omega \gg \omega_{Bi}$) неустойчивости, связанной с раскачкой электронных волн ионами с $\partial f_{\perp}/\partial v_{\perp} > 0$. В теории неустойчивостей плазмы нулевого давления эта неустойчивость известна просто как конусная. В § 8 отмечается, что конусная неустойчивость слабо чувствительна к увеличению параметра β вплоть до $\beta \simeq 1$ (если не считать того, что подавляется наиболее длинноволновая часть спектра колебаний, нарастающих при $\beta \rightarrow 0$). Рассмотрено влияние конечности β также на некоторые другие разновидности конусных неустойчивостей.

В § 9 излагаются основы теории конусно-градиентной (называемой также дрейфово-конусной) неустойчивости в плазме с конечным β . Показано, что при конечных β эта неустойчивость менее опасна, чем при $\beta \rightarrow 0$. К стабилизации этого типа возмущений может приводить также небольшое количество слегка нагретых ионов — с температурой, на два порядка меньшей температуры плазмы.

Раскачка ионами электромагнитных возмущений может играть большую роль даже при очень малых значениях параметра β , если в плазме, помимо основной компоненты ионов, имеется небольшая группа ионов со скоростями, значительно превышающими среднюю скорость ионов. Исследованию соответствующих неустойчивостей посвящен § 10. Вопрос о неустойчивостях плазмы с небольшой долей очень быстрых ионов представляет интерес в связи с проблемой термоядерных реакторов, в которых роль быстрых частиц могут играть α -частицы, образующиеся в результате термоядерных реакций, а также в связи с проблемой истолкования различных геофизических явлений, например устойчивости протонного радиационного пояса Земли. В § 10 мы приведем некоторые основные результаты теории электромагнитных неустойчивостей, обязанных как анизотропии, так и немонотонности скоростного распределения быстрых частиц.

Изложенные в § 1—10 результаты были получены в теоретических работах, обзор которых дается в § 11. Там же упоминаются экспериментальные исследования, стимулировавшие развитие теории. Общие заключительные замечания по теории электромагнитных неустойчивостей даны в § 12.

В конце работы помещено Приложение, в котором выводится выражение для тензора диэлектрической проницаемости, используемое в § 1—10.

ЭЛЕКТРОННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 1. Плазма с анизотропными электронами

1.1. Предварительные замечания

Рассмотрим электромагнитные неустойчивости, которые могут развиваться в плазме с анизотропным распределением электронов по скоростям.

По характеру взаимодействия частиц с электромагнитным полем можно различать неустойчивости гидродинамические и кинетические. В случае гидродинамической неустойчивости за раскачку возмущений ответственны все частицы анизотропной компоненты плазмы, тогда как при кинетической неустойчивости возмущения раскачиваются только некоторой группой резонансных частиц. Гидродинамические неустойчивости возможны только при достаточно большой анизотропии. В этом случае степень анизотропии характеризуется отношением средних энергий частиц v_1^2/v_2^2 , где индекс «1» соответствует направлению, в котором частицы движутся с большими скоростями, а индекс «2» — с меньшими. Для развития кинетических неустойчивостей достаточно, вообще говоря, меньшей анизотропии, чем для гидродинамических. Анизотропия в теории кинетических неустойчивостей означает неравенство производных функции распределения по квадратам каких-либо двух компонент скорости, $df/d(v_1^2) \neq df/d(v_2^2)$.

Электромагнитные колебания, в отличие от электростатических, — это процесс, в котором движение частиц неоднородно. Неоднородность движения связана с тем, что в такого типа колебаниях индуцируется магнитное поле, искривляющее траектории частиц. Характер неоднородного движения частиц модифицируется статическим магнитным полем \mathbf{V}_0 , если таковое имеется в плазме. При достаточно большом статическом магнитном поле двумерное движение превращается в одномерное, вследствие чего затрудняется развитие анизотропных неустойчивостей. Поэтому анизотропная раскачка колебаний сильнее всего проявляется, если статическое поле отсутствует.

Учитывая сказанное выше, мы начнем изложение теории анизотропных неустойчивостей с анализа гидродинамических неустойчивостей сильноанизотропной плазмы в отсутствие магнитного

поля. Простейшим примером плазмы с большой анизотропией является совокупность двух встречных электронных потоков. Неустойчивость такой плазмы при $\mathbf{V}_0 = 0$ рассматривается в разд. 1.2. С анализа этого простейшего случая плазмы удобно начать еще и потому, что вместо строгого кинетического описания плазмы можно использовать простые гидродинамические уравнения холодных электронных потоков. Стабилизирующее влияние статического магнитного поля также удобнее всего разобрать на примере двух потоков. Этому посвящен разд. 1.3. Кинетические анизотропные неустойчивости плазмы без статического магнитного поля обсуждаются в разд. 1.4. Роль статического магнитного поля в кинетических неустойчивостях исследуется в разд. 1.5—1.7. Вначале рассматриваются возмущения с $\mathbf{k} \perp \mathbf{V}_0$ — разд. 1.5, затем с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}_0$ — разд. 1.6 и, наконец, косые возмущения ($k_1, k_2 \neq 0$) — разд. 1.7. Каждому из этих трех случаев соответствуют физически различные типы неустойчивостей.

1.2. Электромагнитная неустойчивость двух встречных электронных потоков

Пусть плазма состоит из двух потоков, каждый плотности n_0 , движущихся навстречу со скоростями \mathbf{V}_0 и $-\mathbf{V}_0$ вдоль оси z . Рассмотрим возмущения такой плазмы. В возмущенном состоянии каждый поток характеризуется плотностью $n^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) и скоростью $\mathbf{V}^{(\alpha)}$, удовлетворяющими уравнениям непрерывности и движения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{V}}{c}, \mathbf{B} \right] \right). \quad (1.2)$$

Здесь индекс номера потока α для простоты опущен; e, m — заряд и масса частиц; c — скорость света; \mathbf{E}, \mathbf{B} — возмущения электрического и магнитного полей, определяемые уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{j} в (1.3) — электрический ток возмущений, связанный с плотностью и скоростью потоков соотношением

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} en \mathbf{V}. \quad (1.5)$$

Полагаем, что все возмущенные величины характеризуются зависимостью от координат и времени вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Ограничимся рассмотрением таких возмущений, волновой вектор которых

направлен поперек направления равновесного движения потоков \mathbf{z} , скажем вдоль \mathbf{x} :

$$\mathbf{k} = (k_x, 0, 0), \quad (1.6)$$

предполагая при этом электрическое поле направленным вдоль \mathbf{z} :

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z). \quad (1.7)$$

Из (1.4) находим, что возмущение магнитного поля имеет только компоненту B_y :

$$B_y = -\frac{ck_x}{\omega} E_z. \quad (1.8)$$

Как следует из (1.2), поля E_z и B_y приводят к возмущениям скорости потоков:

$$\left. \begin{aligned} V_x^{(\alpha)} &= \frac{iek_x V_0^{(\alpha)}}{m\omega^2} E_z; \\ V_z^{(\alpha)} &= \frac{ie}{m\omega} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Согласно уравнению (1.1), с наличием $V_x^{(\alpha)}$ связано возмущение плотности каждого потока $n'^{(\alpha)}$:

$$n'^{(\alpha)} = \frac{ien_0 k_x^2 V_0^{(\alpha)}}{m\omega^2}. \quad (1.10)$$

Выражения (1.9) и (1.10) подставляем в линеаризованное уравнение (1.5) для электрического тока и находим, что отлична от нуля только z -компонента тока:

$$j_z = \frac{2ie^2 n_0}{m\omega} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2} \right) E_z. \quad (1.11)$$

Это значение тока подставляем в линеаризованное уравнение (1.3):

$$k_x^2 E_z = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z. \quad (1.12)$$

Тогда получаем

$$\left[\frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\omega p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2} \right) \right] E_z = 0, \quad (1.13)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ — квадрат ленгмюровской частоты каждого потока. Мы считаем $E_z \neq 0$, так что уравнение (1.13) может быть удовлетворено, если только

$$\frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\omega^2 p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Рассмотрим свойства возмущений, описываемых этим дисперсионным уравнением. Мы полагаем $V \ll c$, так что, как следует из

(1.14), роль относительного движения потоков важна только при $\omega \ll \omega_p$. Для таких возмущений

$$\omega^2 = -2\omega_p^2 \frac{(V_0/c)^2}{1 + 2(\omega_p/c k_x)^2}. \quad (1.15)$$

Эта частота чисто мнима, причем для одного из корней $\text{Im}\omega > 0$, что при принятой выше временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$ соответствует неустойчивости. Характерный масштаб волнового числа этой неустойчивости порядка

$$k_x \simeq \omega_p/c. \quad (1.16)$$

Максимальный инкремент достигается при $k_x \gtrsim \omega_p/c$:

$$\gamma_{\text{макс}} = \sqrt{2} \omega_p V_0/c. \quad (1.17)$$

Для неустойчивости исследуемого типа существенны не только возмущения электрического, но и магнитного полей. Такую неустойчивость можно назвать электромагнитной. Этим она отличается от обычной пучковой неустойчивости, связанной с раскачкой электростатических возмущений, $E \approx -\nabla\psi$.

Если сравнить инкремент (1.17) с инкрементом пучковой неустойчивости $\gamma_{\text{пучк}} \simeq \omega_p$, то окажется, что

$$\gamma_{\text{эм}}/\gamma_{\text{пучк}} \simeq V_0/c \ll 1. \quad (1.18)$$

Это означает, что электромагнитная неустойчивость развивается во времени более медленно, чем пучковая. Однако, как будет показано ниже, электромагнитная неустойчивость менее чувствительна к тепловому разбросу частиц по скоростям и потому может проявляться в условиях, при которых развитие пучковой неустойчивости невозможно.

1.3. Два встречных потока в продольном магнитном поле

Выше предполагалось, что в плазме нет статического магнитного поля. Если оно есть и направлено вдоль движения потоков, $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$, то, как можно найти с помощью уравнения движения (1.2), возмущенное движение частиц, в отличие от (1.9), будет характеризоваться соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} V_x^{(\alpha)} &= \frac{iek_x^2 V_0^{(\alpha)}}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} E_z; \\ V_y^{(\alpha)} &= \frac{\omega_B}{\omega} \cdot \frac{ek_x^2 V_0^{(\alpha)}}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} E_z; \\ V_z^{(\alpha)} &= \frac{ie}{m\omega} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Здесь $\omega_B = eB_0/mc$ — циклотронная частота зарядов. Появление y -компоненты скорости потоков связано с циклотронным вращением частиц в магнитном поле \mathbf{B}_0 . С этим же связано отличие x -компоненты скорости от соответствующего выражения (1.9).

Используя (1.19), находим новые выражения для возмущений плотности и тока, после чего получаем дисперсионное уравнение, аналогичное (1.14):

$$\frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \right) = 0. \quad (1.20)$$

Отсюда, вместо (1.15), находим

$$\omega^2 = \omega_B^2 - 2\omega_p^2 \frac{(V_0/c)^2}{1 + 2(\omega_p/c k_x)^2}. \quad (1.21)$$

Видно, что магнитное поле играет стабилизирующую роль. Неустойчивость возможна, если только магнитное поле \mathbf{B}_0 достаточно мало:

$$\omega_B^2 \leq 2(\omega_p V_0/c)^2. \quad (1.22)$$

Вводя параметр $\beta_{\parallel} = 16\pi n_0 V_0^2/B_0^2$, характеризующий отношение продольного давления частиц к давлению магнитного поля, условие неустойчивости (1.22) можно записать еще так:

$$\beta_{\parallel} \geq 2. \quad (1.23)$$

Таким образом, приближение нулевого магнитного поля в задаче об электромагнитной неустойчивости означает $\beta_{\parallel} \gg 1$ (приближение плазмы большого давления).

1.4. Плазма большого давления с анизотропным распределением электронов

а. Исходные соотношения. Как и в разд. 1.2, пренебрежем влиянием статического магнитного поля \mathbf{B}_0 на возмущенное движение частиц, полагая $\beta \gg 1$ (см. разд. 1.3), но учтем тепловое движение частиц. Исходим из линеаризованного кинетического уравнения для возмущенной функции распределения f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = - \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1.24)$$

где f_0 — функция распределения частиц в стационарном состоянии. В случае возмущений с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} из (1.24) следует:

$$f = - \frac{ie}{m} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}}. \quad (1.25)$$

Будем считать, что функция f_0 обладает цилиндрической симметрией в пространстве скоростей:

$$f_0 = F(v_x^2 + v_y^2, v_z). \quad (1.26)$$

Такая симметрия может быть обусловлена, например, статическим магнитным полем, в котором находится плазма. Выражая в уравнении (1.25) \mathbf{V} через \mathbf{E} с помощью (1.4), приводим это уравнение к виду

$$f = -\frac{ie}{m(\omega - kv)} (\mathbf{E}_\perp v_\perp \Phi_1 + E_z v_z \Phi_2). \quad (1.27)$$

Здесь обозначено

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) + \frac{k_z}{\omega} \frac{\partial F}{\partial v_z}; \\ \Phi_2 &= \frac{1}{v_z} \frac{\partial F}{\partial v_z} \left(1 - \frac{k_x v_x}{\omega} \right) + \frac{k_x v_x}{\omega} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp}; \\ \varepsilon_\perp &= (v_x^2 + v_y^2)/2; \quad \mathbf{E}_\perp = (E_x, E_y, 0); \quad \mathbf{v}_\perp = (v_x, v_y, 0). \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Предположено также, что $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$.

С помощью (1.27) вычисляем плотность токов \mathbf{j} и связанный с \mathbf{j} тензор проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$, учитывая связь $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$. Затем находим вклад рассматриваемой нами компоненты плазмы (в данном случае электронов) в тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$, учитывая соотношения

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_k \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}; \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = 4\pi i \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} / \omega, \quad (1.30)$$

k —индекс сорта зарядов. В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_x^2}{\omega - kv} \Phi_1 \right\rangle; \\ \varepsilon_{xz}^{(k)} &= \varepsilon_{zx}^{(k)} = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_x v_z}{\omega - kv} \Phi_1 \right\rangle; \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_y^2}{\omega - kv} \Phi_1 \right\rangle; \\ \varepsilon_{zz}^{(k)} &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_z^2}{\omega - kv} \Phi_2 \right\rangle; \\ \varepsilon_{yx}^{(k)} &= \varepsilon_{xy}^{(k)} = \varepsilon_{yz}^{(k)} = \varepsilon_{zy}^{(k)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Здесь $\langle \dots \rangle = \int (\dots) dv$ — усреднение по скоростям.

Дисперсионное уравнение для нашей задачи получается при подстановке (1.29)—(1.31) в общее дисперсионное уравнение

$$\left| \varepsilon_{\alpha\beta} - N^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \right| = 0; \quad N^2 \equiv (ck/\omega)^2. \quad (1.32)$$

При $\epsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ вида (1.31) дисперсионное уравнение (1.32) распадается на два:

$$\epsilon_{yy} - N^2 = 0; \quad (1.33)$$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - N^2 \cos^2 \theta & \epsilon_{xz} + N^2 \sin \theta \cos \theta \\ \epsilon_{zx} + N^2 \sin \theta \cos \theta & \epsilon_{zz} - N^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0, \quad (1.34)$$

где θ — угол между волновым вектором и осью z , $\theta = \arctg(k_x/k_z)$. Первое из этих уравнений соответствует чисто электромагнитным возмущениям ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{y} \perp \mathbf{k}$), а второе — возмущениями смешанного типа, $\mathbf{kE} \neq 0$, $[\mathbf{k}, \mathbf{E}] \neq 0$.

б. Качественные соображения о свойствах анизотропной плазмы. Перейдем к обсуждению физических свойств возмущений в плазме с анизотропным распределением электронов по скоростям. Примером такого распределения является двумаксвелловское:

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T_{\parallel}} \right)^{1/2} \frac{m}{2\pi T_{\perp}} \exp \left(-\frac{mv_z^2}{2T_{\parallel}} = \frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} \right). \quad (1.35)$$

Уже предварительный анализ выражений для возмущенной функции распределения (1.27) или выражений для $\epsilon_{\alpha\beta}$ (1.31) приводит к мысли, что плазма с распределением типа (1.35) может быть неустойчива. Это вытекает из того, что при анизотропном распределении частиц по скоростям в указанные выражения входит отличная от нуля разность производных функции f_0 :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} - \frac{1}{v_z} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = -mf_0 \left(\frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_{\parallel}} \right). \quad (1.36)$$

Из-за неравенства нулю этого выражения вещественная часть тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ может оказаться не только положительной, как в случае изотропной плазмы, но и отрицательной, что соответствует увеличению энергии колебаний вследствие взаимодействия с ними резонансных частиц. Разность (1.36) входит в (1.27) с весом $1/\omega$. Это означает, что соответствующие члены обязаны воздействовать на плазму возмущенного магнитного поля, поскольку множитель $1/\omega$ возникает при замене $\mathbf{B} = c[\mathbf{k}, \mathbf{E}]/\omega$.

Ясно, что неустойчивость может иметь место только в случае, если возмущение функции распределения, обусловленное магнитным полем, $f(\mathbf{B})$, превосходит возмущение $f(\mathbf{E})$, обязанное непосредственному воздействию возмущенного электрического поля, поскольку в противном случае $\text{Im}\epsilon_{\alpha\beta}$ имеет такой же знак, как и в изотропной плазме. В частном случае возмущений с $k_z = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$, для которых

$$f = -\frac{i e E_z v_z}{m(\omega - k_x v_x)} \left[\frac{\partial f_0}{\partial (v_z^2/2)} - \frac{k_x v_x}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial (v_z^2/2)} - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right], \quad (1.37)$$

это означает, что неустойчивость возможна только при

$$\frac{\partial f_0}{v_z \partial v_z} - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} > 0. \quad (1.38)$$

Видно, что это условие может удовлетворяться, например, для плазмы, состоящей из двух холодных потоков, обсуждавшейся в разд. 1.2. Действительно, рассматривая соответствующую такой плазме функцию распределения

$$f_0 = \delta(\varepsilon_{\perp}) [\delta(v_z - V_0) + \delta(v_z + V_0)] \quad (1.39)$$

как предел выражения

$$f_0 \sim \frac{1}{T_{\perp} T_{\parallel}^{1/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\perp}}{T_{\perp}}\right) \left[\exp\left(-\frac{m(v_z - V_0)^2}{2T_{\parallel}}\right) + \exp\left(-\frac{m(v_z + V_0)^2}{2T_{\parallel}}\right) \right], \quad (1.40)$$

можно найти, что условие (1.38) выполняется, если $|v_z| < V_0$.

При двумаксвелловском распределении типа (1.35) из (1.38) следует, что возмущения с $k_z = 0$, $\mathbf{E} \parallel z$ могут быть неустойчивы только при

$$T_{\parallel} > T_{\perp}. \quad (1.41)$$

В другом предельном случае непотенциальных возмущений $\mathbf{E} \parallel y$, $k_x = 0$ возмущенная функция распределения равна

$$f = \frac{i e E_y v_y}{m(\omega - k_z v_z)} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \frac{k_z v_z}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \frac{\partial f_0}{\partial (v_z^2/2)} \right) \right]. \quad (1.42)$$

Поэтому необходимое условие неустойчивости плазмы относительно таких возмущений имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \frac{1}{v_z} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_z} > 0. \quad (1.43)$$

Для двумаксвелловского распределения это означает

$$T_{\perp} > T_{\parallel}. \quad (1.44)$$

в. Дисперсионные уравнения при двумаксвелловском распределении по скоростям. Условия (1.41) и (1.44) физически эквивалентны. Они означают, что неустойчивости соответствуют возмущения с вектором \mathbf{k} , ориентированным перпендикулярно к направлению наибольшей из средних компонент скорости равновесного движения.

Отмеченные выше два предельных случая возмущений с $k_z = 0$ и $k_x = 0$ в плазме с двумаксвелловским распределением по скоростям описываются дисперсионными уравнениями, отличающимися одно от другого только переобозначением продольных и поперечных индексов. Эти уравнения имеют вид:

а) $k_z = 0$, $k = k_x$, $\mathbf{E} \parallel z$

$$N^2 - \varepsilon_{zz} \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} - i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k| v_{T_{\perp}}} \cdot \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} W \left(\frac{\omega}{|k| v_{T_{\perp}}} \right) \right] = 0; \quad (1.45)$$

б) $k_x = 0$, $k = k_z$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{y}$

$$N^2 - \varepsilon_{yy} \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left\{ 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k| v_{T\parallel}} W \left(\frac{\omega}{|k| v_{T\parallel}} \right) \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right\} = 0. \quad (1.46)$$

Здесь $v_{T\perp} = (2T_{\perp}/m)^{1/2}$; $v_{T\parallel} = (2T_{\parallel}/m)^{1/2}$;

$$W(x) = e^{-x^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt \right).$$

Перейдем к конкретному исследованию этих уравнений. Вследствие их эквивалентности достаточно исследовать какое-либо одно из этих двух уравнений. Мы поступим так: будем исследовать симметризованное уравнение

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - i \sqrt{\pi} \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \cdot \frac{\omega}{|k| v_{T_{\min}}} W \left(\frac{\omega}{|k| v_{T_{\min}}} \right) \right] = 0, \quad (1.47)$$

где

$$T_{\max} = \max(T_{\parallel}, T_{\perp}); \quad T_{\min} = \min(T_{\parallel}, T_{\perp}). \quad (1.48)$$

При $T_{\parallel} > T_{\perp}$ это уравнение соответствует (1.45), а при $T_{\perp} > T_{\parallel}$ — (1.46).

г. **Неустойчивость гидродинамического типа.** Пусть анизотропия температур достаточно велика, $T_{\min}/T_{\max} \rightarrow 0$. Тогда для случая возмущений с фазовой скоростью $v_{T_{\min}} \ll \omega/k \ll c$ из (1.47) следует:

$$\omega^2 = - \frac{k^2 T_{\max}}{m [1 + (ck/\omega_p)^2]}. \quad (1.49)$$

Этот результат находится в соответствии с (1.15) и свидетельствует о наличии электромагнитной неустойчивости гидродинамического типа в плазме с большой анизотропией температур. Инкремент нарастания возмущений по порядку величины равен [ср. с (1.17)]

$$\gamma \approx \frac{v_{T_{\max}}}{c} \omega_p. \quad (1.50)$$

Решение (1.49) удовлетворяет принятому выше предположению $\omega/k \gg v_{T_{\min}}$, если

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \gg 1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2}. \quad (1.51)$$

Видно, что степень анизотропии, необходимая для развития неустойчивости гидродинамического типа минимальна при

$$k \leq \omega_p / c. \quad (1.52)$$

д. Кинетическая неустойчивость. Неустойчивость гидродинамического типа отсутствует, если степень анизотропии плазмы не слишком велика — меньше, чем по условию (1.51). В этом случае возможна кинетическая неустойчивость $|\omega| \lesssim kv_{T \text{ мин}}$. Границу этой неустойчивости, соответствующую возмущениям с $\text{Im} \omega = 0$, находим, полагая в (1.47) $\omega \ll kv_{T \text{ мин}}$:

$$\left(\frac{T_{\text{макс}}}{T_{\text{мин}}} \right)_{\text{гран}} = 1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2}. \quad (1.53)$$

На границе устойчивости, как следует из (1.47), обращаются в нуль как $\text{Im} \omega$, так и $\text{Re} \omega$. При $T_{\text{макс}}/T_{\text{мин}}$, несколько превышающей граничное значение (1.53), имеем

$$\gamma = \frac{|k| v_{T \text{ мин}}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}} \left(1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2} \right) \right]. \quad (1.54)$$

Видно, что плазма может быть неустойчивой при сколь угодно малом отношении $\Delta T/T_{\text{макс}}$, где $\Delta T = T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}$. Однако при $\Delta T \ll T_{\text{макс}}$ длина волны нарастающих возмущений должна быть весьма велика:

$$k \simeq \frac{\omega_p}{c} \left(\frac{\Delta T}{T_{\text{макс}}} \right)^{1/2}. \quad (1.55)$$

1.5. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_z = 0$ в плазме с $T_{\parallel} > T_{\perp}$

В разд. 1.2 в приближении двух потоков была показана неустойчивость плазмы с $\beta_{\parallel} \rightarrow \infty$, $\beta_{\perp}/\beta_{\parallel} = 0$ относительно возмущений с $k_z = 0$. В разд. 1.3 также в двухпотоковом приближении было отмечено стабилизирующее влияние статического магнитного поля на такие возмущения при конечных β_{\parallel} и $\beta_{\perp}/\beta_{\parallel} = 0$. Двухпотоковое приближение было обобщено в п. 1.4 на случай плазмы с $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ для конечных T_{\perp}/T_{\parallel} и $(\beta_{\perp}, \beta_{\parallel}) \rightarrow \infty$ (приближение нулевого магнитного поля). Из рассмотрения, проведенного в разд. 1.4 д, следует, что неустойчивость с $k_z = 0$ имеет место не только при $T_{\perp}/T_{\parallel} \rightarrow 0$, но и при всех $T_{\perp}/T_{\parallel} < 1$. Рассмотрим теперь влияние на эту неустойчивость магнитного поля в случае конечных T_{\perp}/T_{\parallel} .

При $k_z = 0$ дисперсионное уравнение для возмущений с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$ имеет вид (П.26) (см. Приложение). В случае двумаксвелловского распределения (1.35) и $k_z = 0$ входящая в (П.26) компонента тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{33} равна (см. П.28)

$$\epsilon_{33} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[\frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(z_{\perp}) e^{-z_{\perp}^2}}{\omega - n\omega_B} \right], \quad (1.56)$$

где $z_{\perp} = k_{\perp}^2 T_{\perp} / m \omega_B^2$. С помощью (1.56) и (П.26) получаем дисперсионное уравнение для интересующей нас задачи:

$$1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2} - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} (1 - I_0 e^{-z_{\perp}}) + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \sum_{n \neq 0} \frac{\omega I_n e^{-z_{\perp}}}{\omega - n \omega_B} = 0. \quad (1.57)$$

Чтобы сделать здесь предельный переход к $T_{\perp} \rightarrow 0$, нужно разложить в ряд функции Бесселя. Тогда получается уравнение

$$\left(\frac{ck_{\perp}}{\omega_p} \right)^2 + 1 + \frac{k_{\perp}^2 T_{\parallel}}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} = 0, \quad (1.58)$$

качественно совпадающее с (1.20).

Предельный переход к приближению нулевого магнитного поля при конечных T_{\perp} можно сделать, воспользовавшись тождеством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n e^{-z_{\perp}}}{\omega - n \omega_B} = \frac{i}{\omega_B} \int_0^{\infty} e^{z_{\perp} \cos \varphi + i(\omega/\omega_B)\varphi} d\varphi. \quad (1.59)$$

Разлагая показатель экспоненты в правой части (1.59) в ряд по φ , можно провести интегрирование по φ и привести таким путем (1.57) к (1.45).

Рассмотрим теперь уравнение (1.57) при конечных ω_B/ω и T_{\perp}/T_{\parallel} . Замечаем, что оно имеет решение $\omega = 0$, если

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right)_{\text{гран}} \equiv \frac{1 - I_0 e^{-z_{\perp}}}{1 + (ck_{\perp}/\omega_p)^2}. \quad (1.60)$$

При T_{\perp}/T_{\parallel} , близких к этому граничному значению, частота колебаний определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \cdot \frac{\omega_B^2}{\sum_{n \neq 0} (I_n/n^2) e^{-z_{\perp}}} \left[\left(\frac{ck_{\perp}}{\omega_p} \right)^2 + 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} (1 - I_0 e^{-z_{\perp}}) \right]. \quad (1.61)$$

Видно, что плазма неустойчива, $\omega^2 < 0$, если

$$T_{\perp}/T_{\parallel} < (T_{\perp}/T_{\parallel})_{\text{гран}}. \quad (1.62)$$

В соответствии с (1.60) критическое значение T_{\perp}/T_{\parallel} при всех $(ck_{\perp}/\omega_p)^2$ и z_{\perp} не превосходит единицу. Ближе всего к единице это отношение может быть при $z_{\perp} > 1$, $(ck_{\perp}/\omega_p)^2 < 1$, что возможно только при $(\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}) > 1$. Если же $\beta_{\perp} < 1$ и $z_{\perp} > 1$, то

$$(T_{\perp}/T_{\parallel})_{\text{гран}} = \beta_{\perp}/2, \quad (1.63)$$

так что условие неустойчивости в точности совпадает с (1.23).

Таким образом, с уменьшением параметра β при заданном T_{\perp}/T_{\parallel} неустойчивость подавляется.

1.6. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_{\perp} = 0$
в плазме с $T_{\perp} > T_{\parallel}$

Из анализа, проведенного в разд. 1.4, следует, что в приближении нулевого магнитного поля плазма с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ неустойчива относительно возмущений с $k_{\perp} = 0$. Рассмотрим эту неустойчивость при увеличении магнитного поля, т. е. при уменьшении параметра β .

Как показано в Приложении, общее дисперсионное уравнение плазмы в магнитном поле при $k_{\perp} = 0$ распадается на три [см. (П.30) и (П.31)]. Эффекты анизотропии содержатся в двух из этих уравнений, соответствующих чисто электромагнитным возмущениям, $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$. При двумаксвелловском распределении электронов [см. уравнение (1.35)] явный вид этих уравнений таков [используется (П.32)]:

$$1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} + \left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{T\parallel}} \left[(\omega \mp \omega_B) \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) - \omega \right] W \left(\frac{\omega \mp \omega_B}{|k_z| v_{T\parallel}} \right) = 0. \quad (1.64)$$

Неустойчивость гидродинамического типа. При $|\omega \mp \omega_B| \gg k_z v_{T\parallel}$ и $\omega \ll k_z c$ из (1.64) следует:

$$\left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 + \frac{\omega}{\omega \mp \omega_B} \left[1 + \frac{(T_{\perp} - T_{\parallel}) k_z^2}{m \omega (\omega \mp \omega_B)} \right] = 0. \quad (1.65)$$

При $\omega \gg \omega_B$, $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$, $\omega \ll k_z c$ это уравнение совпадает с (1.49) и описывает неустойчивость гидродинамического типа в плазме с $\beta_{\perp} \gg 1$ и $\beta_{\parallel} \ll \beta_{\perp}$. Слагаемое с разностью температур в (1.65) не мало по сравнению с остальными членами только при $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$. При этом корни (1.65) удовлетворяют условию

$$(\omega \mp \omega_B)^2 \left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 + \omega (\omega \mp \omega_B) + \frac{k_z^2 T_{\perp}}{m} = 0. \quad (1.66)$$

Отсюда следует, что имеет место неустойчивость, если

$$2\beta_{\perp} (ck_z/\omega_p)^2 [1 + (ck_z/\omega_p)^2] > 1. \quad (1.67)$$

Видно, что при фиксированном значении параметра $(ck_z/\omega_p)^2$ плазма неустойчива, если ее поперечное давление не слишком мало. Критическое значение β_{\perp} , выше которого плазма гидродинамически неустойчива, зависит от волнового числа. Величина $\beta_{\perp, \text{крит}}$ тем меньше, чем больше $(k_z c/\omega_p)^2$. Однако при большом $(k_z c/\omega_p)^2$ частота ω оказывается весьма близкой к ω_B , вследствие чего условие $|\omega \mp \omega_B| \gg k_z v_{T\parallel}$ перестает выполняться, если только T_{\parallel}/T_{\perp} не чрезмерно мало.

С помощью (1.66) можно найти, что интервал частот нарастающих возмущений ограничен снизу циклотронной частотой, $\omega \gtrsim \omega_B$. Ин-

кремент возмущений в плазме с $\beta_{\perp} \simeq 1$ и $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$ порядка циклотронной частоты:

$$\gamma \simeq \omega_B. \quad (1.68)$$

Кинетическая неустойчивость. Граница устойчивости плазмы относительно возмущений, удовлетворяющих уравнению (1.64), при $\omega \ll k_z c$ определяется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} + \left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 &= 0; \\ (\omega \mp \omega_B) \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) - \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Эти соотношения получаются, если в (1.64) считать ω вещественным и приравнять к нулю вещественные и мнимые члены.

Из второго уравнения (1.69) находим, что в отличие от случая разд. 1.4д вещественная часть частоты на границе неустойчивости не равна нулю:

$$\omega = \pm \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}\right) \omega_B. \quad (1.70)$$

Первое уравнение (1.69) дает граничное значение T_{\parallel}/T_{\perp} , ниже которого возможна неустойчивость. Этот результат совпадает с (1.53), полученным в приближении нулевого магнитного поля. Видно, что наличие магнитного поля не влияет на границу неустойчивости плазмы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Это качественно отличается от того, что имеет место для плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ [см. разд. 1.5]: граница устойчивости такой плазмы чувствительна к наличию магнитного поля, как это следует из (1.60) и (1.62).

Магнитное поле, однако, существенно влияет на условия резонанса частиц с волной, вследствие чего инкремент нарастания возмущений оказывается весьма чувствительным к величине параметра β . В частности, при $\beta_{\parallel} \ll 1$ и $\alpha \equiv (ck_z/\omega_p)^2 \simeq 1$ частота и инкремент колебаний, описываемых уравнением (1.64), таковы:

$$\operatorname{Re} \omega = \pm \frac{\alpha}{1 + \alpha} \omega_B; \quad (1.71)$$

$$\gamma = \operatorname{Im} \omega = \frac{\sqrt{\pi} \omega_B \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 - \alpha\right)}{(1 + \alpha)^2 \beta_{\parallel}^{1/2} \alpha^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{\alpha \beta_{\parallel} (1 + \alpha)^2} \right]. \quad (1.72)$$

Видно, что если только анизотропия температур не слишком велика, то инкремент экспоненциально мал.

Заметим, что при $\alpha \ll 1$ колебания типа (1.71) называются свистящими атмосфериками (а также свистами, вистлерами и геликонами). Неустойчивость анизотропной плазмы с малым β , описываемая соотношениями (1.71), (1.72), а также более общим уравнением (1.64), иногда называется неустойчивостью вистлер-моды.

1.7. Низкочастотная неустойчивость плазмы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$
на косых волнах

Рассмотрим возмущения с k_z и k_{\perp} , отличными от нуля. Считаем их низкочастотными, $(\omega, k_z v_{T\parallel}) \ll \omega_B$, и длинноволновыми, $k_{\perp} \rho \ll 1$, $k \ll \omega_p/c$. При этих предположениях из (П.24) следует, что компонента ϵ_{33} велика по сравнению с остальными компонентами тензора диэлектрической проницаемости как $(\omega_p/c k)^2$ либо как $1/(k\rho)^2$. В нулевом приближении по $1/\epsilon_{33}$ общее дисперсионное уравнение (1.32) для возмущений с $E_z = 0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} -N^2 \cos^2 \theta + \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - N^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.73)$$

В случае двумаксвелловской плазмы оно сводится к следующему:

$$\omega^2 - \left(\frac{kc}{\omega_p}\right)^4 \omega_B^2 \cos^2 \theta \left\{ 1 + \beta_{\perp} \left(\frac{k_{\perp}}{k}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \left(1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} \right) \right) \right] \right\} = 0. \quad (1.74)$$

При $T_{\perp} = T_{\parallel}$ это уравнение описывает колебания ветви свистящих атмосфериков. Частота этих колебаний приближенно равна [ср. с (1.71)]

$$\omega = \pm \left(\frac{kc}{\omega_p}\right)^2 \omega_B \cos \theta. \quad (1.75)$$

При большой степени анизотропии температур возмущения типа (1.74) неустойчивы гидродинамически, а при малой — кинетически. Остановимся на анализе только второй из этих неустойчивостей.

При $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ уравнение (1.74) удовлетворяется при $\omega = 0$, если

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right)_{\text{гран}} \equiv 1 + \frac{k^2}{\beta_{\perp} k_{\perp}^2}. \quad (1.76)$$

Вблизи этого значения T_{\perp}/T_{\parallel} частота возмущений чисто мнима, причём

$$\text{Im } \omega = \frac{|k_z| v_{T\parallel}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \left(1 + \frac{k^2}{k_{\perp}^2 \beta_{\perp}} \right) \right]. \quad (1.77)$$

Видно, что неустойчивость развивается при не слишком малом значении параметра β_{\perp} :

$$\beta_{\perp} \geq \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp} - T_{\parallel}}. \quad (1.78)$$

Критерий неустойчивости (1.78) можно записать еще и так:

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1 + \frac{1}{\beta_{\perp}}. \quad (1.79)$$

Такого же типа критерий неустойчивости получается и для неустойчивости, вызываемой ионной анизотропией [см. ниже разд. 6.8].

§ 2. Раскачка колебаний плазмы группой быстрых электронов с анизотропным распределением по скоростям

2.1. Постановка задачи

Предположим, что электронная компонента плазмы состоит из двух групп электронов: медленных, иначе называемых холодными, и быстрых — горячих. Медленные электроны имеют плотность n_0 , а быстрые $n_1 \equiv \alpha n_0 \ll n_0$. Распределение по скоростям быстрых электронов считаем анизотропным, так что для них $\partial f / \partial (v_{\perp}^2) \neq \partial f / \partial (v_z^2)$. Вследствие анизотропии скоростного распределения быстрых электронов их взаимодействие с собственными колебаниями холодных электронов может приводить к неустойчивости. Мы исследуем возможность развития такой неустойчивости, предполагая, что в плазме имеется слабое магнитное поле, такое, что $\omega_p > \omega_B$, где ω_p — ленгмюровская частота холодных электронов.

В холодной плазме с $\omega_p > \omega_B$ имеется несколько ветвей колебаний, которые могут эффективно взаимодействовать с быстрыми электронами. Ниже ограничимся рассмотрением только таких колебаний, в которых существенно возмущается магнитное поле, — электромагнитных. (Теория анизотропных электростатических неустойчивостей изложена в работе [11].) Анализ электромагнитных колебаний в пренебрежении эффектами быстрых электронов проводится в разд. 2.2. Раскачка колебаний с $\mathbf{k}_{\perp} = 0$ обсуждается в разд. 2.3, а раскачка колебаний с $\mathbf{k}_{\perp} \neq 0$ — в разд. 2.4.

2.2. Электромагнитные колебания в плазме с холодными электронами

Диэлектрическая проницаемость. Тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы можно получить, используя гидродинамическое описание плазмы, аналогично тому, как мы поступали в разд. 1.2 и 1.3. Начнем с того, что линеаризуем уравнение (1.2):

$$-i\omega \mathbf{V}' = \frac{e}{m} \mathbf{E} + [\mathbf{V}', \omega_B]; \quad \omega_B \equiv e\mathbf{B}_0/mc. \quad (2.1)$$

Отсюда находим возмущение скорости электронов:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}'_{\perp} &= \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} (i\omega \mathbf{E} - [\mathbf{E}_{\perp}, \omega_B]); \\ \mathbf{V}'_z &= \frac{ieE_z}{m\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

По формулам $\mathbf{j} = en_0 \mathbf{V}'$ и $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$ вычисляем плотность тока и тензор проводимости, а по формуле (1.30) вклад в тензор диэлектрической проницаемости, обязанный холодным электронам (индекс вверх нуль):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(0)} = \varepsilon_{22}^{(0)} &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}; \\ \varepsilon_{12}^{(0)} = -\varepsilon_{21}^{(0)} &= -i \frac{\omega_p^2 \omega_B}{\omega (\omega^2 - \omega_B^2)}; \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= -\omega_p^2 / \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Остальные компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ равны нулю.

Общее дисперсионное уравнение холодной плазмы. Подставляем (2.3) в (1.32). Результат удобно представить в виде

$$N^4 \varepsilon_0 - N^2 \varepsilon_{33} (\varepsilon_+ + \varepsilon_-) \cos 2\theta + \varepsilon_+ \varepsilon_- (\varepsilon_{33} - N^2 \sin^2 \theta) = 0, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_{11} \sin^2 \theta + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta$ — скалярная диэлектрическая проницаемость, а $\varepsilon_\pm = \varepsilon_{11} \mp i \varepsilon_{12}$ означает

$$\varepsilon_\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega \mp \omega_B)}. \quad (2.5)$$

Электромагнитные волны при $k_\perp = 0$. Уравнение (2.4) при $\mathbf{k}_\perp = 0$ ($\theta = 0$) распадается на три. Одно, $\varepsilon_{33} = 0$, соответствует электростатическим возмущениям, а два других

$$N^2 - \varepsilon_\pm = 0 \quad (2.6)$$

электромагнитным волнам с $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$.

В плотной плазме $\omega_p^2 > \omega_B^2$ уравнения (2.6) имеют решение с $|\omega| \leq \omega_B$:

$$\omega = \pm \frac{\omega_B}{1 + (\omega_p / ck)^2}. \quad (2.7)$$

Это — ветвь свистящих атмосфериков. Остальные корни (2.6) при $\omega_p^2 > \omega_B^2$ приближенно равны

$$\omega = \pm (\omega_p^2 + c^2 k_z^2)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Свистящие атмосферики при $k_\perp \neq 0$. При $\omega_p^2 \gg \omega_B^2$ общее уравнение (2.4) для возмущений с $k \ll \omega_p / c$ и $\omega \leq \omega_B$ сводится к следующему:

$$N^4 \cos^2 \theta + \varepsilon_+ \varepsilon_- = 0. \quad (2.9)$$

Это уравнение имеет решение

$$\omega = \pm \frac{\omega_B \cos \theta}{\omega_p^2} c^2 k^2, \quad (2.10)$$

соответствующее свистящим атмосферикам, распространяющимся под углом к магнитному полю.

2.3. Раскачка электромагнитных колебаний с $k_{\perp} = 0$

Рассмотрим взаимодействие колебаний типа (2.7) с быстрыми частицами малой плотности. Дисперсионное уравнение для этой задачи аналогично (2.6), но теперь

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\pm}^{(0)} + \varepsilon_{\pm}^{(1)}, \quad (2.11)$$

где $\varepsilon_{\pm}^{(0)}$ соответствует вкладу холодной плазмы:

$$\varepsilon_{\pm}^{(0)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)}, \quad (2.12)$$

а $\varepsilon_{\pm}^{(1)}$ — быстрым частицам. Величина $\varepsilon_{\pm}^{(1)}$ связана с ε_{12} , ε_{11} таким же соотношением, как и в случае холодной плазмы:

$$\varepsilon_{\pm}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(1)} \mp i\varepsilon_{12}^{(1)}. \quad (2.13)$$

Используя (П.32), находим

$$\varepsilon_{\pm}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega \mp \omega_B - k_z v_z} \left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right) \right] \right\rangle. \quad (2.14)$$

Из (2.6), (2.11), (2.12), (2.14) следует выражение для инкремента колебаний частоты (2.7):

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi}{|k_z|} \cdot \frac{r q}{(1+q)^3} \cdot \frac{\omega_B^2}{(ck)^2} \cdot \frac{4\pi e^2}{m} \times \\ &\times \int \frac{v_{\perp}^3}{2} dv_{\perp} \left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right) \right]_{v_z=v_{\text{рез}}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $v_{\text{рез}} \equiv (\omega \mp \omega_B)/k_z$ — скорость резонансных частиц, $q \equiv (\omega_p/ck_z)^2$. Согласно (2.7),

$$v_{\text{рез}} = \mp \frac{\omega_B}{k_z [1 + (ck_z/\omega_p)^2]}. \quad (2.16)$$

При $k_z \simeq \omega_p/c$ скорость резонансных частиц порядка

$$v_{\text{рез}} \simeq \frac{\omega_B}{\omega_p} c. \quad (2.17)$$

Энергия таких частиц $mv_{\text{рез}}^2/2 \simeq B_0^2/8\pi n_0$, т. е. порядка энергии магнитного поля, приходящейся на одну частицу плазмы. Соотношению (2.17) можно придать другой наглядный смысл:

$$\beta \simeq n_1/n_0. \quad (2.18)$$

Для неустойчивости необходимо, чтобы при каких-либо значениях поперечной скорости

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \left(\frac{k_z}{\omega} \frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right) \right]_{v_z=v_{рез}} > 0. \quad (2.19)$$

При двумаксвелловском F это означает:

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1 + (ck_z/\omega_p)^2. \quad (2.20)$$

Правую часть неравенства можно выразить через ω , и тогда критерий возбуждения колебаний с заданной частотой будет иметь вид

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} < 1 - \left| \frac{\omega}{\omega_B} \right|. \quad (2.21)$$

Инкремент колебаний (2.15) при двумаксвелловском распределении быстрых электронов равен

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{\sqrt{\pi} \omega_B^2}{|k_z| v T_{\parallel}} \cdot \frac{q^2}{(1+q)^3} \cdot \frac{n_1}{n_0} \times \\ & \times \left[q \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right) - 1 \right] \exp \left[- \frac{\omega_B^2}{k_z^2 (1+q)^2 v T_{\parallel}^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Он не экспоненциально мал, если левая часть неравенства (2.20) хотя бы в два раза превышает правую.

2.4. Раскачка низкочастотных колебаний с $k_{\perp} \neq 0$

В холодной плазме с $\omega_p^2 \gg \omega_B^2$ при $k_{\perp} \neq 0$, $k_z \neq 0$ и $k \ll \omega_p/c$ имеется ветвь низкочастотных колебаний ($\omega \ll \omega_B$) с законом дисперсии (2.10) — вистлер-мода. Рассмотрим взаимодействие этих колебаний с группой быстрых электронов малой плотности, $n_1 \ll n_0$.

Дисперсионное уравнение для косых волн в приближении $(ck/\omega_p)^2 \rightarrow 0$. В пренебрежении малыми членами порядка $(ck/\omega_p)^2$ непотенциальные колебания плазмы описываются дисперсионным уравнением типа (1.73). Если плазма содержит холодные и горячие электроны, то

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad (2.23)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ определяется соотношениями (2.3), а $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$ соотношениями (П.24). При $\omega \ll \omega_B$ компоненты $\varepsilon_{11}^{(0)} = \varepsilon_{22}^{(0)}$ малы по сравнению с $\varepsilon_{12}^{(0)}$. Поэтому можно принять, что из всех компонент, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$, $(\alpha, \beta) = (1, 2)$, отличны от нуля только $\varepsilon_{12}^{(0)} = -\varepsilon_{21}^{(0)} = i\omega_p^2/\omega\omega_B$. В этом приближении для случая плазмы, содержащей только холодные элек-

троны, получаем дисперсионное уравнение (2.10). При наличии быстрых электронов из (1.73) и (2.23) следует:

$$\begin{aligned} & (N^2 \cos \theta + i \varepsilon_{12}^{(0)}) (N^2 \cos \theta - i \varepsilon_{12}^{(0)}) + \\ & + 2\varepsilon_{12}^{(0)} \varepsilon_{12}^{(1)} - N^2 (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)} \cos^2 \theta) = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Учитывая, что в пренебрежении вкладом быстрых частиц решения уравнения (2.24) таковы, что $N^2 \cos^2 \theta = \mp i \varepsilon_{12}^{(0)}$, представляем это уравнение в виде

$$N^2 \cos \theta \pm i \varepsilon_{12}^{(0)} - \frac{\varepsilon_{\pm}^{(1)}}{\cos \theta} = 0, \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm}^{(1)} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^{(1)} \mp 2i \cos \theta \varepsilon_{12}^{(1)} + \cos^2 \theta \varepsilon_{22}^{(1)}) = \\ &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[(n/\xi) J_n \pm \cos \theta J_n']^2}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \cdot \frac{v_{\perp}^2}{2} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь была использована формула (П.24), определяющая явный вид компонент $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$.

Полагая $\omega = \omega_{\pm}^{(0)} + \omega_{\pm}^{(1)}$, где $\omega_{\pm}^{(0)}$ — решение нулевого приближения (2.10), из (2.25) находим уравнение для поправки к частоте $\omega_{\pm}^{(1)}$:

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \mp \frac{\omega_B}{\cos \theta} \left(\frac{\omega_{\pm}^{(0)}}{\omega_p} \right)^2 \varepsilon_{\pm}^{(1)}. \quad (2.27)$$

Если $\varepsilon_{\pm}^{(1)}$ не имеет полюса при $\omega = \omega_{\pm}^{(0)}$, то достаточно учитывать только мнимый вклад правой части (2.27). При этом из (2.27) получаем выражение для инкремента колебаний:

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega &= \frac{\pi \omega_B^2 (ck)^2}{|k_z| \omega_p^4} \cdot \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{v_{\perp}^3}{2} dv_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{n}{\xi} J_n \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \cos \theta J_n' \right) \left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right) \right] \right\}_{v_z = v_{\text{рез}}^{(n)}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $v_{\text{рез}}^{(n)} = (\omega_{\pm}^{(0)} - n\omega_B)/k_z$. При $\theta = 0$ этот результат совпадает с (2.15), если в последнем принять $(ck)^2 \ll \omega_p^2$.

Стабилизирующий эффект черенковского резонанса. С помощью (2.28) находим инкремент колебаний с $k_z v_{T\parallel} \ll \omega_B$:

$$\gamma = \frac{\alpha \sqrt{\pi} \omega_B^2}{|k_z| v_{T\parallel}} \left[\left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right) \exp \left[- \left(\frac{\omega_B}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right] - \left(\frac{ck_z}{\omega_p} \right)^2 \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \cdot \frac{k_{\perp}^2 T_{\perp}}{m\omega_B^2} \right]. \quad (2.29)$$

Из этого выражения видно, что при $k_z \neq 0$ анизотропная раскачка электромагнитных колебаний ослабляется. Полная стабилизация имеет место при

$$\frac{k_{\perp}^2 T_{\perp}}{m\omega_B^2} > \left(\frac{\omega_p}{ck_z}\right)^2 \exp \left[-\left(\frac{\omega_B}{k_z v_{T\parallel}}\right)^2 \right]. \quad (2.30)$$

Стабилизирующий эффект связан с черенковским резонансом [член с $n = 0$ в сумме (2.28)], проявляющимся только при $k_{\perp} \neq 0$.

§ 3. Электромагнитные неустойчивости в пучковых системах с анизотропным распределением частиц по скоростям

3.1. Предварительные замечания

Пучок электронов, движущихся вдоль магнитного поля, может раскачивать электростатические и электромагнитные колебания плазмы. Условия раскачки этих двух типов колебаний, однако, существенно различны. Например, электростатическая неустойчивость холодного пучка проявляется сильнее всего при $k_{\perp} = 0$, тогда как электромагнитные возмущения с $k_{\perp} = 0$ холодным пучком не раскачиваются вовсе, разд. 3.2. Электромагнитные неустойчивости весьма чувствительны к анизотропии скоростного распределения частиц пучка. В частности, колебания с $k_{\perp} = 0$, устойчивые в приближении холодного пучка, оказываются гидродинамически неустойчивыми, если $T_{\parallel} = 0$, $T_{\perp} \neq 0$, разд. 3.3. При конечных T_{\parallel}/T_{\perp} электромагнитные возмущения с $k_{\perp} = 0$ неустойчивы кинетически, разд. 3.4.

Существенно иной класс пучково-анизотропных неустойчивостей обнаруживается при $k_{\perp} \neq 0$, разд. 3.5. В этом случае для раскачки колебаний достаточно наличия только продольной энергии частиц, $T_{\perp} \rightarrow 0$, и асимметрии распределения по продольным скоростям, не обязательно связанной с положительностью производной $v_z \partial f / \partial v_z$.

3.2. Раскачка колебаний холодным пучком

Пусть группа быстрых частиц имеет функцию распределения $F = n_1 \delta(v_z - V) \delta(\varepsilon_{\perp})$. Тогда выражение (2.26) имеет вид

$$\varepsilon_{+}^{(1)} = -\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} (\omega - k_z V) \left[\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\omega - \omega_B - k_z V} + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\omega + \omega_B - k_z V} \right]. \quad (3.1)$$

Из (2.27) и (3.1) находим, что пучок раскачивает колебания холодной плазмы при $k_z \approx \omega_B/V$. Колебания с таким k_z имеют частоту

$$\text{Re } \omega = \left(\frac{c\omega_B}{V\omega_p}\right)^2 \frac{\omega_B}{\cos \theta} \quad (3.2)$$

и инкремент

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/2} \frac{\omega_p}{|\cos \theta|^{1/2}} (1 - |\cos \theta|). \quad (3.3)$$

Неустойчивость возможна только при $\cos \theta \neq 1$. Именно при этом в дисперсионное уравнение входит слагаемое с резонансным знаменателем $\omega + \omega_B - k_z V$, соответствующее циклотронному взаимодействию частиц с волной при аномальном эффекте Доплера. Условия $k_z \approx \omega_B/V$ и $k_z \ll \omega_p/c$ не противоречивы при

$$V/c > \omega_B/\omega_p, \quad (3.4)$$

т. е. при достаточно большой скорости пучка.

3.3. Раскачка колебаний пучком с конечной поперечной энергией частиц

Теперь предположим, что помимо продольно направленной скорости частицы имеют некоторую поперечную скорость, так что

$$F = n_1 \delta(v_z - V) f_{\perp}(\varepsilon_{\perp}), \quad (3.5)$$

где

$$\int \varepsilon_{\perp} f_{\perp}(\varepsilon_{\perp}) d\varepsilon_{\perp} \equiv \overline{v_{\perp}^2}/2 \neq 0. \quad (3.6)$$

Покажем, что в отличие от предыдущего пункта, неустойчивость может иметь место и при $k_{\perp} = 0$.

При условиях (3.5), (3.6), $k_{\perp} = 0$ выражение (2.26) сводится к следующему:

$$\varepsilon_{\perp}^{(1)} = -\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega - k_z V}{\omega - \omega_B - k_z V} + \frac{k_z^2 \overline{v_{\perp}^2}/2}{(\omega - \omega_B - k_z V)^2} \right]. \quad (3.7)$$

Из (3.7) и (2.27) находим, что частота колебаний комплексна при $\omega - \omega_B - k_z V \approx 0$. Это условие соответствует циклотронному взаимодействию частиц с волной при нормальном эффекте Доплера. Поскольку $\omega \ll \omega_B$, то приближенно $k_z \approx -\omega_B/V$. Частота колебаний определяется соотношением (3.2), а максимальный инкремент нарастания колебаний равен

$$\gamma = \frac{V\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3} \left(\frac{\overline{v_{\perp}^2}}{2V^2} \right)^{1/3} \omega_B. \quad (3.8)$$

Это одна из разновидностей пучково-анизотропных неустойчивостей, связанная с раскачкой чисто электромагнитных возмущений. Для ее существования необходимо выполнение условия (3.4), а также условия достаточно малого продольного теплового разброса пучка, $\gamma > k_z v_{T\parallel} \approx \omega_B V/v_{T\parallel}$.

3.4. Кинетическая пучково-анизотропная неустойчивость

Указанное выше условие малости продольного теплового разброса частиц по скоростям не выполняется, если

$$\frac{v_{T\parallel}}{V} > \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{1/3} \left(\frac{v_{\perp}^2}{V^2}\right)^{1/3}. \quad (3.9)$$

При больших $v_{T\parallel}$ возможна еще одна разновидность пучково-анизотропных неустойчивостей — кинетическая. При $k_{\perp} = 0$ и двумаксвелловском F с $T_{\parallel} \neq 0$ из (2.28) следует:

$$\begin{aligned} \gamma = & -\pi \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\omega_B}{|k_z| v_{T\parallel}} \cdot \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \left\{ \left[\omega - k_z V - \omega_B \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] \times \right. \\ & \left. \times \exp \left[- \left(\frac{\omega - \omega_B - k_z V}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right] \right\}_{\omega=\omega_{\pm}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$ и $V > v_{T\parallel}$, то

$$\gamma \simeq \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{V}{v_{T\parallel}} \cdot \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \omega_B. \quad (3.11)$$

Для справедливости этого результата необходимо также выполнение условия (3.4).

3.5. Раскачка вистлеров убегающими электронами

Пусть в плазме наряду с холодными электронами имеется небольшая доля быстрых электронов с отличной от нуля средней скоростью вдоль магнитного поля. Предполагаем, что поперечная энергия быстрых электронов мала по сравнению с их продольной энергией, $T_{\perp} \rightarrow 0$. Такая ситуация может иметь место в плазме, помещенной в продольное электрическое поле. Роль группы быстрых частиц в этом случае играют убегающие электроны.

Предполагаем плотность холодных электронов столь большой, что выполняется условие $\omega_p/\omega_B \gg 1$. Рассмотрим возможность раскачки быстрыми частицами низкочастотных длинноволновых колебаний такой плазмы, $\omega \ll \omega_B$, $k \ll \omega_p/c$. В пренебрежении эффектами быстрых частиц такие колебания соответствуют ветви свистящих атмосфериков и характеризуются вещественной частотой (2.10). Взаимодействие быстрых частиц с этими колебаниями может приводить к их нарастанию или затуханию с инкрементом, определяемым общим выражением (2.28). Используя принятое выше предположение об отсутствии у быстрых частиц поперечных скоростей, $F = n_1 \delta(v_{\perp}) f_{\parallel}(v_z)$, это выражение можно существенно упростить и записать его в следующем виде:

$$\gamma = -\frac{\pi \alpha \omega_B^2}{4 |k_z| \cos \theta} \left[(1 + \cos \theta)^2 f_{\parallel} \left(-\frac{\omega_B}{k_z} \right) - (1 - \cos \theta)^2 f_{\parallel} \left(\frac{\omega_B}{k_z} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Здесь предполагается, что ω_B , k_z и $\cos \theta$ положительны. Скобки $(\pm \omega_B/k_z)$ означают аргумент f_{\parallel} .

При $k_{\perp} = 0$ правая часть всегда отрицательна, т. е. колебания, распространяющиеся строго вдоль магнитного поля, затухают. При $k_{\perp} \neq 0$ имеет место неустойчивость, если

$$f_{\parallel} \left(\frac{\omega_B}{k_z} \right) \geq \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 f_{\parallel} \left(-\frac{\omega_B}{k_z} \right). \quad (3.13)$$

Это означает, что число частиц со скоростями $v_z = \pm \omega_B/k_z$ должно быть различно, что характерно для пучковых систем и для плазмы с некоторой долей убегающих электронов. Например, в случае плазмы с убегающими электронами $f(-|v_z|) = 0$, так что условие (3.13) выполняется автоматически при всех $\cos \theta \neq 1$.

Для неустойчивости вовсе не обязательно, чтобы функция $f_{\parallel}(v_z)$ имела максимум при $v_z \neq 0$, как это должно быть в случае электростатической пучковой неустойчивости. Существенно, однако, другое условие, а именно наличие частиц с достаточно большими скоростями. Это вытекает из того, что $k_z \ll \omega_p/c$, и потому условие $v_z = \omega_B/k_z$ удовлетворяется только при

$$\frac{v_z}{c} > \frac{\omega_B}{\omega_p}. \quad (3.14)$$

Качественно результаты низкочастотного приближения остаются в силе вплоть до $k_z \simeq \omega_p/c$, так что неравенство (3.14) не обязательно должно быть сильным.

§ 4. Раскачка квазиэлектрических колебаний в слаборелятивистской плазме с $\partial f_0/\partial v > 0$

4.1. Неустойчивость отрицательной массы

Будем полагать отношение скорости электронов v к скорости света c конечным; распределение электронов по импульсам δ -функциональным:

$$f_0(\mathbf{p}) \sim n_0 \delta(p^2 - p_0^2). \quad (4.1)$$

Рассмотрим возмущения такой плазмы с $k_z = 0$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. Дисперсионное уравнение для возмущений этого типа имеет вид

$$\epsilon_{11}(\epsilon_{22} - N^2) + \epsilon_{12}^2 = 0, \quad (4.2)$$

где элементы ϵ_{ik} определяются формулой (П.29).

Если плотность плазмы достаточно мала, так что $\omega_p \ll kc$, то уравнение (4.2) распадается на два:

$$\epsilon_{11} = 0; \quad (4.3)$$

$$\epsilon_{22} - N^2 = 0. \quad (4.4)$$

Первое описывает электростатические возмущения с $\omega \ll kc$, а второе — электромагнитные волны с $\omega \simeq kc$. В этом пункте исследуем уравнение (4.3). При $f_0(\mathbf{p})$ вида (4.1), $(v/c) \ll 1$, $k_z = 0$ и $\xi \ll 1$ с помощью (П.29) находим

$$\varepsilon_{11} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} + \frac{\omega_p^2}{6} \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \left[\frac{1}{(\omega - \omega_B)^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_B)^2} \right] = 0. \quad (4.5)$$

При $\omega_p \ll \omega_B$ и $\omega \approx \omega_B$ отсюда получим более простой результат:

$$1 - \frac{\omega_p^2 \text{эфф}}{(\omega - \omega_B)^2} = 0, \quad (4.6)$$

где

$$\omega_p^2 \text{эфф} = -\frac{v_0^2}{6c^2} \omega_p^2. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.6) аналогично дисперсионному уравнению ленгмюровских колебаний движущейся плазмы

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv)^2} = 0 \quad (4.8)$$

с тем существенным отличием, что $\omega_p^2 > 0$, а $\omega_p^2 \text{эфф} < 0$. Аналогия была бы полной, если бы частицы пучка имели отрицательную массу m , так как при $m < 0$ $\omega_p^2 \sim 1/m < 0$.

Уравнение (4.6) имеет решение

$$\omega = \omega_B \pm \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{v_0}{c} \omega_p. \quad (4.9)$$

Один из корней соответствует нарастающим возмущениям $\text{Im} \omega > 0$, т. е. неустойчивости. Имея в виду аналогию с ленгмюровскими колебаниями, описываемыми уравнением (4.8), эту неустойчивость называют неустойчивостью типа отрицательной массы.

4.2. Неустойчивость колебаний на верхней гибридной частоте в плазме, содержащей небольшую долю релятивистских электронов

Дисперсионное уравнение. Пусть в холодной плазме содержится небольшое число релятивистских электронов $n_1/n_0 \ll 1$. Тогда в приближении электростатических возмущений имеем дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)} = 0, \quad (4.10)$$

где

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{B0}^2}, \quad \omega_{B0} = \omega_B \Big|_{(v/c) \rightarrow 0}; \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d^3p \frac{1}{v_\perp} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_\perp} \sum_n \frac{\omega J_n^2(k_\perp v_\perp / \omega_B)}{\omega - n\omega_B}. \quad (4.12)$$

При F , сферически симметричном по углам в пространстве скоростей:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{k^2} \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \times \sum_n \frac{\omega J_n^2(k_\perp v \sin \vartheta / \omega_B)}{\omega - n\omega_B}. \quad (4.13)$$

Будем простоты ради интересоваться только возмущениями с $k_\perp v \sin \vartheta / \omega_B \gg 1$. При этом приближенно $J_n^2(\xi) = (\pi \xi)^{-1}$, так что

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{k^3} \sum_n \int \frac{\omega \omega_B}{\omega - n\omega_B} \cdot \frac{p^2}{v^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} dp. \quad (4.14)$$

Неустойчивость гидродинамического типа. Пусть $F(p) = (n_1/2\rho_0^2) \delta(p - \rho_0)$. При $\rho_0 \ll m_0 c$ для такого F из (4.14) следует:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2 n_1}{mk^2 c^2} \cdot \frac{\omega_B}{kv_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega - n\omega_B} \right)^2. \quad (4.15)$$

С помощью (4.10), (4.11) и (4.15) находим, что быстрые электроны раскачивают колебания верхней гибридной частоты

$$\omega^{(0)} = (\omega_p^2 + \omega_{B0}^2)^{1/2}, \quad (4.16)$$

если эта частота попадает в резонанс с n -й гармоникой и циклотронной частоты быстрых электронов:

$$\omega_p^2 + \omega_{B0}^2 \approx (n\omega_B)^2, \quad (4.17)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

Инкремент этой неустойчивости порядка

$$\gamma \simeq \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3} \left(\frac{nv_0}{c} \right)^{2/3} \frac{\omega_B^2}{kv_0}. \quad (4.18)$$

Неустойчивость такого типа возможна только в плазме с $\omega_p > \omega_B$, причем номер раскачиваемой гармоники вполне определенный, $n \approx 1 + (\omega_p/\omega_B)^2$.

Помимо рассмотренных выше квазиэлектростатических неустойчивостей релятивистской плазмы теоретически изучены и другие. О них будет сказано в § 11.

Кинетическая неустойчивость. Если распределение быстрых частиц по импульсам не δ -функциональное, то результат (4.18) справедлив при $\gamma > (p_0 \Delta p / m_0 c^2) \omega_B$. В противном случае вместо (4.18) из (4.10) и (4.14) следует, что имеет место кинетическая неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n_1}{n_0} \frac{\omega_p^4 c^2}{k^3} \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \right)_{v=v_n}, \quad (4.19)$$

где

$$v_n = c \left[1 - \left(\frac{\omega}{n\omega_{B0}} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad \int F dv = 1. \quad (4.20)$$

Видно, что $\gamma > 0$ (неустойчивость), если при $v = v_n$ производная функции распределения положительна.

§ 5. Мазерная раскачка электромагнитных волн

5.1. Раскачка электромагнитных колебаний с $k_z = 0$ и $\mathbf{E}_\perp \mathbf{B}_0$ (типа необыкновенной волны)

Как и в § 4, рассмотрим возмущения с $k_z = 0$, но теперь исследуем уравнение для электромагнитных волн (4.4), которое имеет явный вид

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \frac{4\pi e^2 n_0}{\omega} \int p_\perp dp_\perp dp_\parallel \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_\perp (J_n')^2 \partial F / \partial p_\perp}{\omega - n\omega_{B0} (1 - v^2/c^2)^{1/2}} = 0; \quad (5.1)$$

нормировка F здесь такова, что $\int p_\perp dp_\perp dp_\parallel F = 1$.

Полагая плотность достаточно малой, находим $\text{Re } \omega = ck$:

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega = 2\pi^2 e^2 n_0 \int p_\perp dp_\perp dp_\parallel \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_\perp (J_n')^2 \times \\ \times \frac{\partial F}{\partial p_\perp} \delta [\omega - \omega_{B0} (1 - v^2/c^2)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Остановимся более подробно на случае слаборелятивистской плазмы, $v/c \ll 1$. При $v/c \ll 1$ и выполнении резонансного условия типа $ck \approx \omega_B$ можно считать $\xi \ll 1$. Поэтому в сумме (5.2) важен только один член, $n = 1$, так что

$$\gamma = \frac{\pi \omega p^2}{8} \int p_\perp dp_\perp dp_\parallel v_\perp \frac{\partial F}{\partial v_\perp} \delta \left(\omega - \omega_{B0} + \omega_{B0} \frac{v^2}{2c^2} \right). \quad (5.3)$$

Для сферически симметричного F

$$\gamma = \frac{\pi \omega p^2}{6} \int_0^\infty p^3 \frac{\partial F}{\partial p} \delta \left(\omega - \omega_{B0} + \omega_{B0} \frac{v^2}{2c^2} \right) dp. \quad (5.4)$$

Если при некотором p производная $\partial F / \partial p$ положительна, то $\gamma > 0$, т. е. имеет место неустойчивость. Инкремент неустойчивости при $\partial F / \partial p \simeq F/p$ порядка

$$\gamma \simeq \omega_p^2 / \omega_B. \quad (5.5)$$

Это так называемая синхротронная неустойчивость. Она описывает процесс реабсорбции синхротронного излучения.

5.2. Раскачка электромагнитных колебаний с $k_{\perp} = 0$
в нерелятивистской слабоионизованной плазме
инертных газов

При изотропном распределении частиц по скоростям дисперсионное уравнение электромагнитных колебаний нерелятивистской плазмы при $k_{\perp} = 0$ и $|\omega - \omega_B| \gg k_z v_z$ имеет вид

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \frac{\omega \omega_p^2}{3} \int_0^{\infty} v^3 dv \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - \omega_B} = 0. \quad (5.6)$$

Здесь принята нормировка $\int f_0 v^2 dv = 1$. Результат (5.6) вытекает из общих уравнений (П.30) и (П.32). Если существенны столкновения электронов между собой или с другими частицами, то знаменатель $\omega - \omega_B$ в (5.6) должен быть заменен $\omega - \omega_B + i\nu(v)$, где $\nu(v)$ — частота столкновений электрона, обладающего скоростью v . Поэтому для столкновительной плазмы вместо (5.6) будем иметь

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \frac{\omega \omega_p^2}{3} \int_0^{\infty} v^3 dv \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - \omega_B + i\nu(v)} = 0. \quad (5.7)$$

При малой плотности плазмы отсюда следует:

$$\operatorname{Re} \omega = ck$$

$$\gamma = -\frac{\omega_p^2}{6} \int_0^{\infty} dv f_0(v) \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v^3 \nu(v)}{(ck - \omega_B)^2 + \nu^2(v)} \right]. \quad (5.8)$$

Видно, что при моноэнергетическом распределении электронов, $f_0 \sim \delta(v - v_0)$, электромагнитные колебания могут нарастать во времени, если

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v} [v^3 \nu(v)] \right\}_{v=v_0} < 0. \quad (5.9)$$

Для неустойчивости необходимо, чтобы частота столкновений электронов падала быстрее, чем v^{-3} . Это условие удовлетворяется при столкновениях достаточно медленных ($mv_0^2/2 \simeq$ несколько электронвольт) электронов с атомами инертных газов.

ИОННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 6. Плазма с анизотропными ионами

6.1. Предварительные замечания

Содержание этого параграфа близко к тому, что обсуждалось в § 1. Мы рассмотрим неустойчивости, вызываемые анизотропией скоростного распределения частиц. Отличие § 1 состоит в том, что там анизотропными полагались электроны, а здесь — ионы. При исследовании электронных неустойчивостей можно пренебречь движением ионов, считая их бесконечно тяжелыми, так что диэлектрическая проницаемость определялась только одной компонентой плазмы — электронной. В этом отношении задача о неустойчивостях, вызываемых ионной анизотропией, более сложна, поскольку, вследствие малой массы электронов, их движение необходимо учитывать наряду с движением ионов.

Принятая ниже схема изложения теории ионных анизотропных неустойчивостей в целом аналогична той, которой мы следовали в § 1; сначала рассматриваются неустойчивости плазмы с большим β (приближение нулевого магнитного поля), затем постепенно учитываются эффекты, связанные с конечностью параметра $1/\beta$, и, наконец, производится анализ неустойчивостей плазмы с $\beta \lesssim 1$.

6.2. Неустойчивость в приближении нулевого магнитного поля ($\beta \rightarrow \infty$)

Пусть электроны распределены по скоростям изотропно и имеют температуру T_e , а распределение ионов анизотропно и характеризуется двумаксвелловской функцией распределения (1.35). Полагаем, что магнитное поле, если таковое имеется в плазме, настолько мало, что его влиянием на движение электронов и ионов можно пренебречь. При этих предположениях дисперсионное уравнение для возмущений с $k_z = 0$ и $k_{\perp} = 0$ имеет вид, аналогичный (1.47), с тем отличием, что теперь в нем учитываются не только электроны, но и ионы. При условии $\omega \ll (kv_{Te}, kv_{Ti})$, которое в дальнейшем предполагается выполненным, это дисперсионное уравнение выглядит так:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} + 1 - \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - i \sqrt{\pi} \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{\omega}{|k| v_{Te}} = 0, \quad (6.1)$$

где $T_{\max} = \max(T_{\perp i}, T_{\parallel i})$; $T_{\min} = \min(T_{\perp i}, T_{\parallel i})$.

Уравнение (6.1) имеет решение

$$\omega = \frac{i |k| v_{Te}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} \right). \quad (6.2)$$

Видно, что имеет место неустойчивость, если

$$\frac{T_{\text{макс}}}{T_{\text{мин}}} \geq 1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2}. \quad (6.3)$$

Характерное волновое число этой неустойчивости порядка

$$k \approx \omega_{pi}/c, \quad (6.4)$$

а характерный инкремент порядка

$$\gamma \simeq \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{v_{Ti}}{c} \omega_{pi}. \quad (6.5)$$

Эта величина в $(m_i/m_e)^{3/2}$ раз меньше инкремента неустойчивости плазмы с анизотропным распределением электронов [ср. (6.5) с (1.50)].

6.3. Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ при $k_z = 0$

При $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ результат предыдущего пункта относится к возмущениям с $k_z = 0$. Рассмотрим, насколько эта неустойчивость чувствительна к магнитному полю. Магнитное поле сильнее всего влияет на движение электронов. Если, как и выше, пренебрегать влиянием магнитного поля на движение ионов, то при $\mathbf{V}_0 \neq 0$ вместо (6.1) с учетом (П.26), (П.28) получим

$$\frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} + 1 - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} + \frac{m_i}{m_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega I_n(z_e) e^{-z_e}}{\omega - n\omega_{Be}} = 0. \quad (6.6)$$

Видно, что пренебрегать влиянием магнитного поля на движение электронов можно, если $\omega \gg \omega_{Be}$, $z_e \gg 1$. При условиях (6.4) и (6.5) это означает, что параметр β должен быть весьма большим:

$$\beta > (m_i/m_e)^3. \quad (6.7)$$

При $\beta \simeq (m_i/m_e)^3$ прежде всего нарушается условие $\omega > \omega_{Be}$. В обратном предельном случае, когда

$$\beta \ll (m_i/m_e)^3, \quad (6.8)$$

в уравнении (6.6) следует считать $\omega \ll \omega_{Be}$, и тогда для ω получается уравнение

$$\omega^2 = -\frac{m_e}{2m_i} (2\pi z_e)^{1/2} \omega_{Be}^2 \left(\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} - 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} - \frac{m_i}{(2\pi z_e)^{1/2} m_e} \right). \quad (6.9)$$

Как следует из (6.9), неустойчивость возможна и при $\beta \ll \ll (m_i/m_e)^3$, но для этого требуется очень большая анизотропия температур:

$$\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \gtrsim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/2} \beta^{-1/2}. \quad (6.10)$$

6.4. Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ при $k_{\perp} = 0$

Если $T_{\perp} > T_{\parallel}$, то рассмотрение разд. 6.2 относится к возмущениям с $k_{\perp} = 0$. Выясним, как изменятся эти результаты при не слишком малом магнитном поле, полагая, что последнее влияет только на движение электронов. Используя (П.30), (П.32) и учитывая $\omega \ll \omega_{Be}$, вместо (6.1) получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} + 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - i \sqrt{\pi} \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} W \left(\mp \frac{\omega_{Be}}{|k_z| v_{Te}} \right) = 0. \quad (6.11)$$

При $\omega_{Be} \ll k_z v_{Te}$ отсюда получается выражение для частоты (6.2), соответствующее приближению нулевого магнитного поля. Учитывая (6.4), заключаем, что такое приближение справедливо, если

$$\beta > m_i/m_e. \quad (6.12)$$

При $\beta \simeq m_i/m_e$ функция W порядка единицы, и тогда инкремент и частота колебаний порядка ионно-циклотронной частоты:

$$\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq \omega_{Bi}. \quad (6.13)$$

Условие неустойчивости (6.3) при этом остается в силе.

Если волновое число k_z достаточно мало, $k_z < \omega_{Be}/v_{Te}$, то решение (6.11) имеет вид

$$\omega = \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \right) \left\{ \pm \omega_{Bi} + \frac{i \sqrt{\pi} |\omega_{Bi} \omega_{Be} - \omega|}{|k_z| v_{Te}} \exp \left[- \left(\frac{\omega_{Be}}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (6.14)$$

Инкремент таких возмущений экспоненциально мал. Однако при очень малом $k_z v_{Te}/\omega_{Be}$ формула (6.14) становится неприменимой, поскольку при ее получении пренебрегалось резонансным взаимодействием колебаний с ионами. Этот эффект обсуждается в следующем пункте.

6.5. Неустойчивости плазмы с $1 < \beta < m_i/m_e$

Из (6.14) следует, что при $\beta \lesssim m_i/m_e$ частота возмущений с $k_{\perp} = 0$ оказывается порядка ионно-циклотронной. Поэтому при исследовании резонансного взаимодействия колебаний с ионами следует учитывать влияние на них магнитного поля. Дисперсионное уравнение, учитывающее это влияние, получается с использованием (П.30), (П.32). Если $T_{\perp i}$ и $T_{\parallel i}$ одного порядка, то при $\beta \gg 1$ величины $\omega/(k_z v_{T\parallel i})$, $\omega_{Bi}/(k_z v_{T\parallel i})$ малы, как $\beta^{-1/2}$. Вследствие этого дисперсионное уравнение упрощается и сводится к следующему:

$$1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} + \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega}{\omega_{Bi}} - \frac{i \sqrt{\pi} m_i \omega}{m_e |k_z| v_{Te}} \exp \left[- \left(\frac{\omega_{Be}}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{T\parallel i}} \left[(\omega \mp \omega_{Bi}) \left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \right) - \omega \right] = 0. \quad (6.15)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} \omega = \pm \omega_{Bi} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \right); \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{\sqrt{\pi} m_i \omega_{Bi}^2}{m_e k_z v_{Te}} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \right) \exp \left[- \left(\frac{\omega_B}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\sqrt{\pi} \omega_{Bi}^2}{|k_z| v_{T\parallel i}} \left[\left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \right)^2 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Видно, что взаимодействие резонансных ионов с колебаниями может приводить к раскачке последних при любом знаке разности $1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i}$. Используя закон сохранения энергии для системы плазма—электромагнитное поле, можно убедиться в том, что при $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ имеет место раскачка волн с отрицательной энергией, а при $T_{\parallel i} < T_{\perp i}$ — волн с положительной энергией.

6.6. Кинетические неустойчивости плазмы с $\beta \simeq 1$ при $k_{\perp} = 0$

При $\beta \leq 1$ в дисперсионном уравнении нужно учитывать все степени параметров $\omega/k_z v_{T\parallel i}$, $\omega_{Bi}/k_z v_{T\parallel i}$, так что в отличие от (6.15) теперь имеем

$$\begin{aligned} & \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega}{\omega_{Bi}} + 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} + i \frac{\sqrt{\pi}}{|k_z| v_{T\parallel i}} \times \\ & \times \left[(\omega \mp \omega_{Bi}) \left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \right) - \omega \right] W \left(\frac{\omega \mp \omega_{Bi}}{|k_z| v_{T\parallel i}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Если $\beta \simeq 1$, $k_z \simeq \omega_{pi}/c$ и $T_{\perp i} \simeq T_{\parallel i}$, то это уравнение имеет комплексные решения с

$$\gamma \simeq \operatorname{Re} \omega \simeq \omega_{Bi}. \quad (6.19)$$

Оказывается, что $\gamma > 0$ как при $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$, так и при $T_{\perp i} < T_{\parallel i}$. Эти решения соответствуют двум типам неустойчивости, обсуждавшимся в п. 6.5.

При достаточно больших длинах волн, $k_z \ll \omega_{pi}/c$, решение (6.18) находим разложением функции W в ряд по обратным степеням аргумента. В случае $\beta_{\parallel} < \beta_{\perp} + 2$ вещественная часть частоты удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2 \left(1 - \frac{\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}}{2} \right), \quad (6.20)$$

а инкремент равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} \omega_{Bi}^3 |1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i}|}{2 k_z^2 v_{T\parallel i} c_A [1 - (\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})/2]^{1/2}} \exp \left[- \left(\frac{\omega_{Bi}}{k_z v_{Ti}} \right)^2 \right]. \quad (6.21)$$

Из (6.18) следует также, что частота колебаний вещественна, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega_{Bi}}{\omega} + 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} &= 0; \\ \left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}}\right) (\omega \mp \omega_{Bi}) - \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Эти соотношения характеризуют границу неустойчивости. Граничное значение волнового числа равно

$$|k_{z \text{ гран}}| = \frac{\omega_{pi}}{c} \left(\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}}\right)^{1/2} \left|1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}}\right|, \quad (6.23)$$

а граничная частота колебаний

$$\omega_{\text{гран}} = \pm \omega_{Bi} \left(1 - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}}\right). \quad (6.24)$$

Вблизи границы неустойчивости инкременты пропорциональны величинам:

$$\gamma \sim \exp \left[-\frac{1}{\beta_{\parallel i} (1 - T_{\parallel i}/T_{\perp i})^2} \right], \quad T_{\perp i} > T_{\parallel i}; \quad (6.25)$$

$$\gamma \sim \exp \left[-\frac{1}{\beta_{\perp i} (1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i})^2} \right], \quad T_{\parallel i} > T_{\perp i}. \quad (6.26)$$

Отсюда заключаем, что рассмотренные неустойчивости могут играть роль только при не слишком малых β , так как в противном случае их инкременты экспоненциально малы.

6.7. Гидродинамическая неустойчивость плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ (шланговая неустойчивость)

Из уравнения (6.20) следует, что низкочастотные возмущения ($\omega \ll \omega_{Bi}$) с $k_{\perp} = 0$ аperiодически нарастают во времени, если

$$\beta_{\parallel} > \beta_{\perp} + 2. \quad (6.27)$$

Дисперсионное уравнение (6.20) и критерий неустойчивости (6.27) можно получить из уравнений одножидкостной гидродинамики с анизотропным давлением. При таком подходе движение плазмы описывается уравнением

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{\leftrightarrow}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (6.28)$$

Здесь $\rho \equiv m_i n$ — массовая плотность; \mathbf{V} — полное магнитное поле $\mathbf{B}_0 + \mathbf{V}'$ (в наших обычных обозначениях $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_0 + \mathbf{V}$); P — тензор давления, характеризующийся компонентами

$$P_{ik} = p_{\parallel} e_i e_k + p_{\perp} (\delta_{ik} - e_i e_k), \quad (6.29)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$. Символ $\nabla \overleftrightarrow{P}$ означает

$$\nabla \overleftrightarrow{P} = \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{e}\nabla)\mathbf{e} + \mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{e} (p_{\parallel} - p_{\perp}). \quad (6.30)$$

Линеаризуя (6.28) и учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, $\mathbf{V}' = B_0 \partial \xi / \partial z, \partial \xi / \partial t \equiv \nabla'$, а p_{\parallel}, p_{\perp} — не возмущаются, получаем уравнение для смещения ξ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(-\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho} + c_A^2 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (6.31)$$

Отсюда при $\xi \sim \exp(-i\omega t + ik_z z)$ непосредственно следует дисперсионное уравнение (6.20) и критерий неустойчивости (6.27). Эта неустойчивость часто называется шланговой (*fire-hose*).

*6.8. Низкочастотная неустойчивость плазмы
конечного давления с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ при $(k_z, k_{\perp}) \neq 0$
(пробкотронная неустойчивость)*

Дисперсионное уравнение. Для простоты предполагаем температуру электронов малой, $T_e \rightarrow 0$. Общее дисперсионное уравнение (1.32) с $\epsilon_{\alpha\beta}$ вида (П.24) для низкочастотных $(\omega, k_z v_{T\parallel i}) \ll \omega_{Bi}$ колебаний с $k_{\perp} \neq 0$ и $E_z = 0$ распадается на два:

$$\epsilon_{11} - N^2 \cos^2 \theta = 0; \quad (6.32)$$

$$\epsilon_{22} - N^2 = 0. \quad (6.33)$$

Первое соответствует альфвеновской ветви колебаний, второе — магнитозвуковой.

При двумаксвелловском распределении ионов по скоростям выражения для $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$ имеют вид:

$$\epsilon_{11} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} \left[1 + \frac{k_z^2}{m_i \omega^2} (T_{\parallel i} - T_{\perp i}) \right]; \quad (6.34)$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{11} - N^2 \sin^2 \theta \beta_{\perp i} \left\{ 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} \right) \right] \right\}. \quad (6.35)$$

Уравнение (6.32.) есть обобщение (6.20) на случай $k_{\perp} \neq 0$ для альфвеновской ветви. Оно описывает возмущения, аperiodически нарастающие во времени при условии (6.27). При $k_{\perp} = 0$ из (6.33) также получается (6.20). Если же $k_{\perp} \neq 0$, то уравнение (6.33) описывает еще один тип неустойчивости, к анализу которой и перейдем.

Гидродинамическая неустойчивость сильноанизотропной плазмы с $T_{\perp i} \gg T_{\parallel i}$. Пусть $T_{\perp i} \gg T_{\parallel i}$. При этом (6.35) имеет следующее решение с $\omega \gg k_z v_{T\parallel}$:

$$\omega^2 = -\frac{\beta_{\perp i} \sin^2 \theta}{1 + (1 + \sin^2 \theta) \beta_{\perp i} / 2} \cdot \frac{k_z^2 T_{\perp i}}{m_i}. \quad (6.36)$$

Частота возмущений чисто мнима, что соответствует так называемой пробкотронной неустойчивости (в зарубежной литературе такая неустойчивость обозначается термином *mirror instability*). Частота (6.36) удовлетворяет условию $\omega \gg k_z v_{T\parallel}$ даже при малом $\beta_{\perp i}$, если

$$\beta_{\perp i} > T_{\parallel i} / T_{\perp i}. \quad (6.37)$$

Пробкотронная неустойчивость сильноанизотропной плазмы, как и шланговая, может быть изучена в приближении одножидкостной гидродинамики с анизотропным давлением.

Кинетическая неустойчивость плазмы с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$. Уравнение (6.33) с ϵ_{22} вида (6.35) имеет решение с $\omega \ll k_z v_{T\parallel}$:

$$\omega = i \frac{k_z v_{T\parallel i}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i} \beta_{\perp i}} \left[\beta_{\perp i} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) - 1 - \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \left(1 + \frac{\beta_{\perp i} - \beta_{\parallel i}}{2} \right) \right], \quad (6.38)$$

если выражение, стоящее в квадратных скобках, близко к нулю. Это решение соответствует неустойчивости при условии

$$\beta_{\perp i} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) > 1 + \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \left(1 + \frac{\beta_{\perp i} - \beta_{\parallel i}}{2} \right). \quad (6.39)$$

Это — кинетический аналог рассмотренной выше гидродинамической неустойчивости.

§ 7. Сталкивающиеся плазмы и плазма с неоднородным профилем скорости

7.1. Электромагнитная неустойчивость сталкивающихся плазм

Пусть вдоль магнитного поля движутся две взаимопроникающие электрон-ионные плазмы с плотностями $n_1 = n_2$ и скоростями $V_1 \neq V_2$ (скоростью V_{α} , $\alpha = 1, 2$, обладают как электроны, так и ионы α -й компоненты плазмы). В зависимости от соотношения между тепловыми и направленными скоростями частиц в такой системе двух плазм могут развиваться различные типы неустойчивостей. Например, при $|V_1 - V_2| > (v_{Te1}, v_{Te2})$ должна развиваться электронная двухпучковая неустойчивость. При $(v_{Ti1}, v_{Ti2}) \ll |V_1 - V_2| \ll (v_{Te1}, v_{Te2})$ и $T_e \gg T_i$ должны раскачиваться ионно-звуковые и ионные ленгмюровские колебания.

Если тепловой разброс ионов значителен, так что $(v_{Ti1}, v_{Ti2}) > |V_1 - V_2|$, то никакие электростатические неустойчивости в обсуждаемой системе двух плазм развиваться не могут. В этих условиях основную роль должна играть раскачка непотенциальных возмущений. Раскачка такого типа возмущений за счет анизотропии температур ($T_{\parallel} > T_{\perp}$) была рассмотрена в § 6. Наличие относительного движения компонент плазмы вдоль магнитного поля означает,

что средняя продольная энергия частиц больше поперечной, так что и в этом случае можно ожидать такие же эффекты, как и в плазме с $T_{\parallel} > T_{\perp}$.

Перейдем к количественному анализу электромагнитной неустойчивости. Как и в разд. 6.7, полагаем $k_{\perp} \rho_i \ll 1$, $\omega \ll \omega_{Bi}$. В этом приближении получаются дисперсионные уравнения для альфвеновских и магнитозвуковых волн, но с другим значением компонента $\epsilon_{\alpha\beta}$. Уравнение для альфвеновских волн имеет явный вид

$$\sum_{\alpha=1,2} \frac{c^2}{c_{A\alpha}^2} \left(1 - \frac{k_z V_{\alpha}}{\omega}\right)^2 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} = 0. \quad (7.1)$$

В частном случае равных плотностей, $n_1 = n_2$, отсюда следует:

$$\omega^2 - k_z (V_1 + V_2) \omega + \frac{1}{2} k_z^2 (V_1^2 + V_2^2) - c_{A0}^2 k_z^2 = 0; \quad (7.2)$$

$$c_{A0}^2 = B_0^2 / 4\pi m_i n_0, \quad n_0 = 2n_1.$$

Эти колебания неустойчивы при

$$|V_1 - V_2| > 2c_{A0}. \quad (7.3)$$

Их инкремент зависит от k_z . В случае сильного неравенства (7.3) он порядка

$$\gamma \simeq k_z |V_1 - V_2|. \quad (7.4)$$

Максимум инкремента не превосходит ионно-циклотронной частоты, $\gamma_{\max} \leq \omega_{Bi}$.

Сходные результаты получаются для магнитозвуковой ветви колебаний, если $k_z \gg k_{\perp}$. При $k_z \ll k_{\perp}$ для раскачки магнитозвуковых колебаний требуется относительная скорость $|V_1 - V_2|$, гораздо большая, чем по условию (7.3).

7.2. Раскачка альфвеновских волн в плазме с неоднородным профилем скорости (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца)

Электродинамическое рассмотрение. Пусть электроны и ионы плазмы движутся вдоль магнитного поля с одинаковой скоростью V_0 , профиль которой неоднороден, $dV_0(x)/dx \neq 0$. Будем считать температуру частиц достаточно малой, столкновениями между частицами пренебрежем. Возмущения плотности и скорости электронов и ионов в этих условиях можно найти из уравнений двухжидкостной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{V}') + \operatorname{div}(n' \mathbf{V}_0) &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial z} + (\mathbf{V}' \nabla) \mathbf{V}_0 &= \frac{e}{m} \mathbf{E}' + [\mathbf{V}', \mathbf{w}_B] + \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_0, \mathbf{B}']. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Предполагая возмущения низкочастотными, $|\omega - k_z V_0| \ll \ll \omega_{Bi}$, и длинноволновыми, $\partial/\partial x \ll \omega_{pe}/c$, с помощью (7.5) получаем уравнения для возмущенных полей:

$$(\text{rot rot } \mathbf{E})_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_\alpha, \quad \alpha = (x, y), \quad (7.6)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\omega_{pi}^2(x)}{\omega_{Bi}^2} \left(1 - \frac{k_z V_0(x)}{\omega} \right)^2. \quad (7.7)$$

В случае однородной плазмы уравнение (7.6) описывает альфвеновские и быстрые магнитозвуковые волны. При $V_0 \neq 0$ такие волны имеют закон дисперсии:

$$\left. \begin{aligned} \omega - k_z V_0 &= \pm |k_z| c_A; \\ \omega - k_z V_0 &= \pm k c_A. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

При наличии неоднородности скорости либо плотности возмущения этих двух типов оказываются связанными друг с другом и, в соответствии с (7.6), описываются следующим дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_z^2 - \omega^2 \varepsilon / c^2}{k_y^2 + k_z^2 - \omega^2 \varepsilon / c^2} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) E_y = 0. \quad (7.9)$$

Это уравнение можно упростить при малых k_z/k_y , когда волны (7.8) обладают существенно различной частотой. Тогда можно снова говорить о волнах альфвеновского и магнитозвукового типа. Для первых из них $\varepsilon \ll (ck/\omega^2)$, так что их электрическое поле, как следует из (7.9), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] - k_y^2 \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) E_y = 0. \quad (7.10)$$

Аналогичное уравнение можно написать для волн магнитозвукового типа. Для этого в (7.9) надо пренебречь членами k_z^2 по сравнению с $(\omega/c)^2 \varepsilon$.

Ниже нас будут интересовать только возмущения альфвеновского типа: благодаря их малой частоте они могут раскачиваться из-за градиента V_0 .

Рассмотрим простейший случай скачкообразного профиля скорости (и скачкообразного профиля плотности, если имеется градиент плотности). Следуя методу поверхностных волн (см. § 1.7 работы [1]), находим дисперсионное уравнение для возмущений, локализованных в окрестности скачка:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2 \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} = 0. \quad (7.11)$$

Индексы «1» и «2» означают, что величина (7.7) берется по разные стороны скачка.

Уравнение (7.11) сходно с дисперсионным уравнением (7.1) альфвеновских волн в системе двух взаимопроникающих однородных плазм с различными продольными скоростями. Это обстоятельство отражает сходство физических процессов в этих двух классах плазм.

Такое же сходство имеет место между пучковыми неустойчивостями в системе взаимопроникающих и пространственно разделенных электронных потоков. Механизм раскачки колебаний в рассматриваемом случае отличен от пучкового: в основе его лежит электромагнитное взаимодействие между электрическим полем и токами в плазме.

Результаты, вытекающие из (7.11), аналогичны приведенным в разд. 7.1. В частности, если $\nabla n_0 = 0$, то имеет место неустойчивость при

$$|V_1 - V_2| > 2c_A. \quad (7.12)$$

Гидродинамическое рассмотрение. Из уравнений (7.5) можно исключить электрическое поле, и тогда задача о раскачке альфвеновских волн сводится к анализу уравнений одножидкостной гидродинамики. Именно такая постановка этой задачи является наиболее распространенной.

Чтобы перейти к одножидкостной гидродинамике, несколько преобразуем уравнения (7.5). Из электронного уравнения движения (или из ионного) в нулевом приближении по ω/ω_B находим связь между возмущенной скоростью и электрическим полем:

$$\mathbf{V}' = \frac{c[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]}{B_0} \left(1 - \frac{k_z V_0}{\omega} \right). \quad (7.13)$$

Введем смещение плазмы ξ , определив его соотношением $d\xi/dt = \mathbf{V}'$, т. е.

$$\xi = i\mathbf{V}'/(\omega - k_z V_0) \equiv \frac{i}{\omega} \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]}{B_0}. \quad (7.14)$$

Возмущенное магнитное поле связано с ξ соотношением $\mathbf{B} = \text{rot}[\xi, \mathbf{B}_0]$, что при $\mathbf{B}_0 = \text{const}$ означает

$$\mathbf{B}' = ik_z B_0 \xi - \mathbf{B}_0 \text{div} \xi. \quad (7.15)$$

Используя (7.14) и (7.15) в первом приближении по ω/ω_{Bi} , из (7.5) получаем искомое уравнение для смещения ξ :

$$-\rho_0 \omega'^2 \xi = \frac{B_0^2}{4\pi} \nabla \text{div} \xi - \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi} \xi; \quad (7.16)$$

$$\omega' \equiv \omega - k_z V_0.$$

Покажем теперь, как отсюда можно получить результат, аналогичный (7.10). Полагаем в (7.16) члены с ω'^2 и k_z^2 малыми. В нулевом приближении по этим членам из (7.16) находим условие несжимаемости:

$$\text{div} \xi = 0. \quad (7.17)$$

Это условие дает связь между компонентами ξ_x и ξ_y , так что

$$\xi_y = \frac{i}{k_y} \cdot \frac{\partial \xi_x}{\partial x}. \quad (7.18)$$

Другую связь между ξ_x и ξ_y получаем, взяв rot_z от обеих частей равенства (7.16):

$$\text{rot}_z [(\rho_0 \omega'^2 - k_z^2 B_0^2 / 4\pi) \xi] = 0. \quad (7.19)$$

Исключая отсюда с помощью (7.18) ξ_y , находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho_0 \omega'^2 - \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi} \right) \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right] - k_y^2 \left(\rho_0 \omega'^2 - \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi} \right) \xi_x = 0. \quad (7.20)$$

Учитывая второе равенство (7.14), заключаем о полной тождественности уравнений (7.20) и (7.10).

Неустойчивость, описываемая уравнением (7.20), называется в магнитной гидродинамике неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца.

§ 8. Конусные неустойчивости в плазме с конечным β

8.1. Высокочастотная конусная неустойчивость

Рассмотрим плазму с электронной температурой, достаточно малой по сравнению с поперечной энергией ионов, $T_e/m_i \bar{v}_{\perp i}^2 \rightarrow 0$. Распределение ионов по поперечным скоростям для простоты примем δ -функциональным:

$$f_i = \frac{n_0}{2\pi v_0} \delta(v_{\perp} - v_0). \quad (8.1)$$

Интересуемся возмущениями такой плазмы с частотами $\omega_{Bi} < \omega < \omega_{Be}$. Пренебрежем эффектами, связанными с конечностью электронной температуры, что законно, если $k_{\perp} \rho_e \ll 1$, $\omega/k_z \gg v_{Te}$. Вклад электронов в тензор диэлектрической проницаемости в принятом приближении определяется соотношениями (2.3). Используя общие формулы Приложения, заключаем, что вклад ионов существен только в компоненте ϵ_{11} . При f_i вида (8.1) он равен:

$$\epsilon_{11}^{(i)} = - \frac{i \omega \omega_{pi}^2}{(k_{\perp}^2 v_0^2 - \omega^2)^{3/2}}. \quad (8.2)$$

С помощью соотношений (1.32), (2.3) и (8.2) получаем дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2 (1+q)^2} - \frac{i}{1+q} \cdot \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{\omega \omega_{Be}^2}{(k_{\perp}^2 v_0^2 - \omega^2)^{3/2}} = 0, \quad (8.3)$$

где $q = (\omega_p e / ck)^2$. В пределе $\omega \gg k_{\perp} v_0$ это уравнение описывает колебания ветви свистящих атмосфериков. При $k \gg \omega_p e / c$ оно соответствует потенциальному приближению ($\mathbf{E} \approx -\nabla\psi$), обычно ис-

пользуемому в теории устойчивости плазмы нулевого давления. При этом условии из (8.3) следует, что плазма неустойчива. Характерные параметры этой неустойчивости таковы:

$$\gamma \simeq \operatorname{Re} \omega \simeq \omega_{\text{гибр}}; \quad (8.4)$$

$$k_{\perp} \rho_i \simeq (m_i/m_e)^{1/2}; \quad (8.5)$$

$$k_z \rho_i \simeq 1. \quad (8.6)$$

Из (8.5) видно, что предположение $k > \omega_p e/c$ оправдывается вплоть до

$$\beta \simeq 1. \quad (8.7)$$

Вплоть до таких же β качественно справедливы и соотношения (8.4)—(8.6).

8.2. Высокочастотная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков

При $k_{\perp} \ll \omega_p e/c$ из (8.3) получается следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^4 - \frac{i\omega}{k_{\perp} v_0 \beta_i} = 0, \quad (8.8)$$

$\beta_i \equiv (v_0/c_A)^2$. Это уравнение описывает существенно непотенциальные возмущения. Их максимальный инкремент

$$\gamma \simeq \operatorname{Re} \omega \simeq k_{\perp} v_0 \beta_i \simeq \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^2 \omega_{Be} \cos \theta. \quad (8.9)$$

Этим возмущениям соответствуют довольно малые продольные волновые числа:

$$k_z \rho_i \simeq \beta_i^2. \quad (8.10)$$

Решение (8.9) удовлетворяет условию $\gamma > \omega_{Bi}$ при $k_{\perp} \rho_i > 1/\beta_i$, что совместимо с принятым выше предположением $k \ll \omega_p e/c$, если

$$\beta \gg m_e/m_i. \quad (8.11)$$

8.3. Циклотронная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков

Пусть, как и в разд. 8.2, $k_{\perp} \rho_i > 1/\beta_i$, а k_z достаточно мало:

$$k_z \rho_i \simeq \frac{\beta_i}{k_{\perp} \rho_i} < \beta_i^2. \quad (8.12)$$

При таких k_z частота ветви свистящих атмосфериков порядка ионно-циклотронной частоты ω_{Bi} . Чтобы распространить результаты разд. 8.2 на эту область частот, необходимо вместо приближенного выражения (8.2) для $\varepsilon_{11}^{(i)}$ использовать более точное

$$\varepsilon_{11}^{(i)} = \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \cdot \frac{\partial f_{\perp}}{\partial \varepsilon_{\perp}}. \quad (8.13)$$

Здесь $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Bi}$; $\varepsilon_{\perp} = v_{\perp}^2 / 2$; $f_{\perp} = f_{\perp}(\varepsilon_{\perp})$; $f_{\perp}(0) = 0$; $\int f_{\perp} d\varepsilon_{\perp} = 1$. [В формуле (8.2) предполагалось $f_{\perp}(\varepsilon_{\perp}) = \delta(\varepsilon_{\perp} - v_0^2/2)$.]

При $\varepsilon_{11}^{(i)}$ вида (8.13) вместо (8.3) получается дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^4 + c_A^2 \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \frac{df_{\perp}}{d\varepsilon_{\perp}} = 0. \quad (8.14)$$

Исследуем это уравнение, полагая параметр $\xi \gg n$, где n — несколько первых натуральных чисел. При таких ξ $J_n^2(\xi) \approx (\pi\xi)^{-1}$, так что из (8.14) следует:

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^4 + \frac{1}{\pi k \rho_i \beta_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (8.15)$$

Поскольку выше предполагалось $k_{\perp} \rho_i > 1/\beta_i$, то коэффициент при сумме мал. Используя эту малость, находим приближенное решение для частоты нарастающих возмущений:

$$\text{Re } \omega \approx \omega_{Be} \cos \theta \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^2 \approx n\omega_{Bi}; \quad (8.16)$$

$$\gamma \approx \left(\frac{1}{2\pi k \rho_i \beta_i} \right)^{1/2} n\omega_{Bi}. \quad (8.17)$$

8.4. Неустойчивость двугорбого распределения при малой доле холодных ионов

Полагаем, что помимо горячих ионов с $df_{\perp}/dv_{\perp} > 0$ в плазме имеется некоторое число холодных с плотностью $n_1 \equiv \alpha n_0 \ll n_0$. Ионная функция распределения имеет два максимума, в связи с чем такое распределение называется двугорбым (*double humped*). Рассмотрим возмущения плазмы с двугорбым распределением ионов, предполагая $k_z = 0$. Ионная компонента $\varepsilon_{11}^{(i)}$ тензора диэлектрической проницаемости теперь определяется выражением

$$\varepsilon_{11}^{(i)} = - \frac{\alpha \omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \frac{df_{\perp}}{d\varepsilon_{\perp}}. \quad (8.18)$$

При $\rho_i^{-1} \ll k \ll \omega_{pe}/c$ с помощью (1.73), (2.3), (8.18) получаем дисперсионное уравнение непрерывного спектра

$$1 - \frac{\alpha c^2 k^2}{\omega^2} - \frac{i\omega}{k v_0 \beta_i} = 0 \quad (8.19)$$

и аналогичное уравнение для гармоник

$$1 - \frac{\alpha c^2_A k^2}{\omega^2} + \frac{1}{\pi k \rho_i \beta_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (8.20)$$

Уравнения (8.19), (8.20) сходны соответственно с (8.3) и (8.15). Отличие состоит в том, что роль электронной компоненты теперь играют холодные ионы.

Колебания непрерывного спектра. Решение уравнения (8.19) имеет различный вид в зависимости от отношения α/β_i^3 . При $\alpha \ll \beta_i^3$

$$\operatorname{Re} \omega \approx \sqrt{\alpha} c_A k; \quad (8.21)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\alpha} c_A k}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta_i^3} \right)^{1/2}. \quad (8.22)$$

При $k < \omega_{pe}/c$ условие $\gamma > \omega_{Bi}$ удовлетворяется, если

$$\alpha > 2 (m_e/m_i)^{1/2} \beta_i^{3/2}, \quad (8.23)$$

а параметр β_i должен быть бóльшим, чем $(m_e/m_i)^{1/3}$.

В другом предельном случае $\alpha \gg \beta_i^3$,

$$\operatorname{Re} \omega \simeq \gamma \simeq \alpha^{1/3} k v_0. \quad (8.24)$$

Это решение удовлетворяет условию $|\omega| > \omega_{Bi}$ при $k \rho_i > \alpha^{-1/3}$, а параметр α должен быть при этом бóльшим $(m_e/m_i)^{3/4}$.

Колебания дискретного спектра. При $m_i/m_e < \alpha < \beta_i^3$ уравнение (8.20) описывает раскачку ионно-циклотронных гармоник

$$\operatorname{Re} \omega \approx \sqrt{\alpha} c_A k \approx n \omega_{Bi} \quad (8.25)$$

с инкрементом

$$\gamma \simeq \frac{\operatorname{Re} \omega}{(\pi k \rho_i \beta_i)^{1/2}}. \quad (8.26)$$

Эта неустойчивость развивается вместо неустойчивости непрерывного спектра, если не удовлетворяется условие (8.23).

8.5. Высокочастотная конусная неустойчивость плазмы с бóльшим β

Предположим теперь $\beta_i \gg 1$ и покажем, что при этом условии в плазме может развиваться конусная неустойчивость, описываемая уравнением высокочастотного приближения (8.2). Полагая ионный вклад в (8.2) меньше вклада остальных членов, решаем это уравнение методом последовательных приближений. В нулевом приближении из (8.2) получаем выражение для частоты свистящих атмосфериков [ср. с (2.7), (2.10)]:

$$\omega^{(0)} = \frac{\omega_{Be} \cos \theta}{1 + (\omega_{pe}/ck)^2}. \quad (8.27)$$

При $\omega^{(0)} < kv_0$ и не слишком малой разности $1 - \omega^{(0)}/k_{\perp}v_0$ из (8.2) находим инкремент этих колебаний:

$$\gamma \simeq \frac{\omega_{\text{гибр}}^2}{k_{\perp}v_0 [1 + (\omega_{pe}/ck)^2]}. \quad (8.28)$$

Он максимален при $k_{\perp} \simeq \omega_{pe}/c$ и равен при этом

$$\gamma_{\text{макс}} \simeq \frac{\omega_{\text{гибр}}}{V\beta_i}. \quad (8.29)$$

Таким образом, конусная неустойчивость остается и при $\beta \gg 1$, хотя ее инкремент становится меньше, чем при $\beta \ll 1$.

§ 9. Конусно-градиентная неустойчивость плазмы конечного давления

Вследствие положительности производной $\partial f_{\perp}/\partial v_{\perp}$ в плазме может развиваться так называемая конусно-градиентная неустойчивость, инкремент которой зависит от градиента плотности. Эта неустойчивость, как и другие обсуждавшиеся выше разновидности конусных неустойчивостей, характерна для плазмы с $\beta \rightarrow 0$, но может проявляться и при конечных β . Сначала напомним некоторые основные результаты, касающиеся плазмы с $\beta \rightarrow 0$, а затем обсудим возможность развития конусно-градиентной неустойчивости при конечных β .

9.1. Неустойчивость плазмы с $\beta \rightarrow 0$

Исследование неустойчивости плазмы с $\beta \rightarrow 0$ проводится в рамках электростатического приближения. В этом приближении возмущение электрического поля считается равным $\mathbf{E} = -\nabla\psi$. Из уравнений Максвелла используется только уравнение $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$, которое при достаточно большой плотности плазмы $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{Be}^2$, сводится к условию квазинейтральности:

$$n_i' = n_e'. \quad (9.1)$$

Возмущенную плотность ионов можно найти, решая ионное кинетическое уравнение методом интегрирования по траекториям. Вклад в n_i' от слагаемых, содержащих градиент равновесной плотности, оказывается малым, так что в случае пространственно-временной зависимости возмущений вида $\exp(-i\omega t + ik_x dx + ik_y y)$ возмущенную плотность можно найти, используя выражение (П.17) для f . Величина n_i' оказывается равной

$$n_i' = -\frac{e_i \psi n_0}{m_i} \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\perp}}. \quad (9.2)$$

Здесь обозначения те же, что и в § 8. Предполагается, что n_0 слабо зависит от x , так что $\partial n_0 / \partial x \ll n_0 k_{\perp}$. При вычислении возмущенной плотности электронов можно пренебрегать их тепловым движением и исходить из гидродинамических уравнений непрерывности и движения:

$$-i\omega n_e' + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{V}_e') = 0; \quad (9.3)$$

$$-i\omega \mathbf{V}_e' = \frac{e_e}{m_e} \mathbf{E} + [\mathbf{V}_e', \boldsymbol{\omega}_{Be}]. \quad (9.4)$$

Из (9.4) находим возмущенную скорость электронов \mathbf{V}_e' , которая при $\omega \ll \omega_{Be}$ приближенно равна

$$\mathbf{V}_e' = \frac{e_e}{m_e \omega_{Be}^2} ([\mathbf{E}, \boldsymbol{\omega}_{Be}] - i\omega \mathbf{E}). \quad (9.5)$$

Подставляя (9.5) в (9.3), учитывая неоднородность равновесной плотности вдоль x и электростатичность поля \mathbf{E} , получаем

$$n_e' = -\frac{e_e n_0 \Psi}{m_e} \left(\frac{k^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{k_y \kappa}{\omega \omega_{Be}} \right), \quad (9.6)$$

$\kappa \equiv \partial \ln n_0 / \partial x$. Подстановка (9.2) и (9.6) в (9.1) приводит к дисперсионному уравнению электростатического приближения

$$1 + \frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 \omega} + \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{\omega_{Bi}^2}{k^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \cdot \frac{\partial f_{\perp}}{\partial \varepsilon_{\perp}} = 0. \quad (9.7)$$

Это уравнение сходно с (8.3) (при $q \ll 1$ и $\omega \gg \omega_{Bi}$). Отличие состоит в том, что в (8.3) $k_z \neq 0$ и электронный вклад в дисперсионное уравнение обусловлен их возмущенным движением вдоль силовых линий, тогда как в (9.7) $k_z = 0$, а электронный вклад электронов в это уравнение обусловлен их конвективным переносом поперек магнитного поля вследствие дрейфа в скрещенных полях.

Как и в задаче о косых возмущениях однородной плазмы (см. разд. 8.3), примем $\xi \gg 1$ и сделаем приближенную замену $J_n^2(\xi) = (\pi \xi)^{-1}$. Тогда (9.7) сводится к следующему более простому уравнению:

$$1 + \frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 \omega} + \frac{m_i}{\pi m_e} \cdot \frac{1}{(k\rho_i)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (9.8)$$

Если

$$\kappa \rho_i \gg (m_e/m_i)^{2/3} \quad (9.9)$$

и

$$k\rho_i \simeq (m_i/m_e)^{1/3}, \quad (9.10)$$

то уравнение (9.8) описывает возмущения, нарастающие с инкрементом

$$\gamma \simeq \operatorname{Re} \omega \simeq \omega_{Bi}. \quad (9.11)$$

Соотношения (9.9)—(9.11) характеризуют конусно-градиентную неустойчивость плазмы с $\beta \rightarrow 0$.

9.2. Дисперсионное уравнение для плазмы с конечным β

Теперь рассмотрим, как изменится исходное уравнение (9.8) при учете непотенциальности возмущений, т. е. при

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9.12)$$

с отличным от нуля векторным потенциалом \mathbf{A} . Вследствие коротковолновости возмущений по отношению к ионам ($\xi \gg 1$), влиянием вихревой части \mathbf{E} и связанным с ней возмущением магнитного поля $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$ на движение ионов можно пренебречь [ср. с аналогичной ситуацией в § 8]. Электронные уравнения (9.3)—(9.5) остаются справедливыми и при \mathbf{E} вида (9.12), тогда как вместо (9.6) получаем

$$n_e' = -\frac{e_e n_0 \psi}{m_e} \left(\frac{k^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{\kappa k_y}{\omega \omega_{Be}} \right) - \frac{i e_e n_0}{m_e m_{Be} \omega} \text{rot}_z \mathbf{E}. \quad (9.13)$$

Используем уравнения Максвелла:

$$\text{rot}_z \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} B_z; \quad (9.14)$$

$$i k_y B_z = \frac{4\pi e_e n_0}{c} V'_{xe} \quad (9.15)$$

и x — компоненту уравнения (9.5), которая приближенно означает

$$V'_{xe} = -\frac{i k_y e_e \psi}{m_e \omega_{Be}}, \quad (9.16)$$

выразим n_e' через ψ :

$$n_e' = \frac{e_e n_0 \psi k^2}{m_e \omega_{Be}^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 \omega} \right). \quad (9.17)$$

Из (9.1), (9.2), (9.17) при $\xi \gg 1$ получаем обобщение дисперсионного уравнения (9.8) на случай непотенциальных возмущений:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 \omega} + \frac{m_i}{\pi m_e} \cdot \frac{1}{(k\rho_i)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (9.18)$$

С помощью этого уравнения можно исследовать устойчивость плазмы с конечным $\beta \leq 1$. При $\beta \gg 1$ необходимо наряду с ∇n_0 учитывать также ∇B_0 .

9.3. Неустойчивость плазмы с конечным β

Как следует из (9.18), непотенциальность возмущений важна при $k \leq \omega_{pe}/c$. Учитывая это и используя оценку (9.10), заключаем, что применимость приближения $\beta \rightarrow 0$ нарушается при

$$\beta \gtrsim (m_e/m_i)^{1/3}. \quad (9.19)$$

Пусть условие (9.19) выполнено. При этом уравнение (9.18) имеет комплексные решения, если частота электронных колебаний

$$\omega^{(e)} = -\frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 (1 + \omega_{pe}^2/c^2 k^2)} \quad (9.20)$$

порядка или больше ионно-циклотронной частоты ω_{Bi} . Это условие может быть выполнено только при

$$\kappa \geq 2 \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{\omega_{pe}}{c}. \quad (9.21)$$

Это граница неустойчивости плазмы с $\beta > (m_e/m_i)^{1/3}$. Условие (9.21) можно записать в виде, аналогичном (9.10):

$$\kappa \rho_i \geq 2 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{2/3} \left(\frac{m_i \beta^3}{m_e} \right)^{1/6}. \quad (9.22)$$

Видно, что критическое значение относительного градиента плотности κ , начиная с которого плазма неустойчива, растет с ростом β как $\beta^{1/2}$. Это обстоятельство можно считать благоприятным с точки зрения проблемы устойчивого удержания плазмы. При $\beta \simeq 1$ градиент неустойчивой плазмы должен быть таким, что

$$\kappa \rho_i \geq 2 (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (9.23)$$

Вследствие непотенциальности возмущений уменьшается их инкремент. При $\beta > (m_e/m_i)^{1/3}$ и значениях κ , ненамного больших правой части (9.21),

$$\gamma \simeq \frac{\omega_{Bi}}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{m_e}{m_i \beta i^3} \right)^{1/4}. \quad (9.24)$$

В отличие от случая $\beta \rightarrow 0$ инкремент мал по сравнению с ионно-циклотронной частотой.

9.4. Неустойчивость плазмы конечного давления с малой примесью слегка нагретых максвелловских ионов

При наличии группы максвелловских ионов с плотностью $n_1 = \alpha n_0 \ll n_0$ дисперсионное уравнение (9.18) заменяется на:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 \omega} + \frac{\alpha m_i}{m_e (k \rho_i)^2} \left[1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega I_n(z_1) e^{-z_1}}{\omega - n \omega_{Bi}} \right] + \frac{m_i}{\pi m_e} \cdot \frac{1}{(k \rho_i)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n \omega_{Bi}} = 0. \quad (9.25)$$

Здесь $\rho_1 = (T_1/m_i\omega_{Bi}^2)^{1/2}$ — ларморовский радиус максвелловских ионов; T_1 — их температура; $z_1 = (k\rho_1)^2$.

Оценим с помощью (9.25), как влияют на устойчивость максвелловские ионы, если градиент плотности не очень велик, так что неравенство (9.21) не сильное. При этом характерное k порядка $\omega_p e/c$, так что

$$z_1 \simeq \frac{m_i}{m_e} \beta \frac{T_1}{m_i v_0^2}. \quad (9.26)$$

Пусть

$$T_1 \geq \frac{m_e v_0^2}{\beta}. \quad (9.27)$$

Тогда z_1 в уравнении (9.25) можно считать большим, так что $I_n(z_1)e^{-z_1} \simeq (2\pi z_1)^{-1/2}$. Неустойчивость невозможна, если коэффициент при резонансном знаменателе максвелловских ионов больше, чем соответствующий коэффициент от быстрых немаксвелловских ионов. Это условие сводится к следующему:

$$\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{T_1}{m_i v_0^2} \right)^{3/2}. \quad (9.28)$$

При $\beta \simeq 0,1$ условия (9.27) и (9.28) означают, что конусо-градиентная неустойчивость подавляется, если $T_1 \simeq 10^{-2} m_i v_0^2$, $\alpha \simeq 10^{-3}$.

§ 10. Раскачка колебаний плазмы быстрыми ионами

Группа быстрых ионов может приводить к раскачке колебаний плазмы, если распределение этих ионов по скоростям анизотропно, $\partial f/\partial(v_\perp^2) \neq \partial f/\partial(v_z^2)$, или производная функция распределения по поперечным скоростям положительна, $\partial f/\partial v_\perp > 0$. Рассмотрим некоторые разновидности такого типа неустойчивостей.

10.1. Быстрые ионы с анизотропным распределением по скоростям

Дисперсионное уравнение. Раскачка электромагнитных колебаний вследствие анизотропии проявляется сильнее всего при $k_\perp = 0$. Дисперсионное уравнение для системы холодная плазма — быстрые ионы при $k_\perp = 0$ имеет вид [см. уравнения (П.30), (П.32)]

$$\epsilon_\pm^{(0)} + \epsilon_\pm^{(1)} - N^2 = 0, \quad (10.1)$$

где

$$\epsilon_\pm^{(0)} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Be})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Bi})}; \quad (10.2)$$

$$\epsilon_\pm^{(1)} = \frac{4\pi e^2 n_1}{m_i \omega} \left\langle \frac{v_\perp^2}{2} \frac{1}{\omega \mp \omega_{Bi} - k_z v_z} \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} \right) \right] \right\rangle, \quad (10.3)$$

$\langle F \rangle = 1$. Ограничимся рассмотрением колебаний с частотами $\omega \ll \ll \omega_{Bi}$. При таких частотах

$$\epsilon_{\pm}^{(0)} = \frac{c^2}{c_A^2}, \quad (10.4)$$

так что в нулевом приближении по малому параметру n_1/n_0 из (10.1) получаем

$$\omega^2 = \omega_{\pm}^2 = k_z^2 c_A^2. \quad (10.5)$$

Этот результат относится к решениям с обоими знаками в индексе $\epsilon_{\pm}^{(0)}$, что соответствует двум типам волн — альфвеновским и магнитозвуковым. Дополнительный анализ дисперсионного уравнения при конечных ω/ω_{Bi} показывает, что альфвеновским волнам соответствует знак «+», а магнитозвуковым — знак «-».

Учитывая вклад $\epsilon_{\pm}^{(1)}$, находим инкремент колебаний

$$\gamma_{\pm} = \frac{2\pi^2 e^2 n_1}{m_i} \cdot \frac{c_A^2}{c^2} \cdot \frac{k_z}{\omega_{\pm}} \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\pm}} \right) \delta(k_z v_z \pm \omega_{Bi}) \right\rangle. \quad (10.6)$$

Быстрые ионы с двумаксвелловским распределением по скоростям. При F вида (1.35) из (10.6) следует:

$$\gamma_{\pm} = \mp \frac{\sqrt{\pi} (n_1/n_0) \omega_{Bi}^2}{2k_z^2 c_A v_{T\parallel}} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \exp \left[- \left(\frac{\omega_{Bi}}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right]. \quad (10.7)$$

Ионы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ раскачивают альфвеновские волны, а с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ — магнитозвуковые.

Поскольку частота (10.5) удовлетворяет условию $\omega < \omega_{Bi}$, только при $k_z < \omega_{Bi}/c$, то инкремент (10.7) не экспоненциально мал, если

$$v_{T\parallel} \gtrsim c_A. \quad (10.8)$$

Это означает, что раскачка электромагнитных волн группой быстрых анизотропных ионов эффективна, если энергия этих ионов сравнима с энергией магнитного поля, приходящейся на одну частицу холодной плазмы [ср. с аналогичным критерием (2.18) для электронной неустойчивости].

Раскачка быстрыми α -частицами электромагнитных колебаний плазмы, удерживаемой в адиабатической ловушке. В термоядерной плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке, должно содержаться некоторое количество быстрых α -частиц — с энергией около 3,5 Мэв. Вследствие ухода части α -частиц в конус потерь их распределение по скоростям должно быть анизотропным, а это может служить причиной раскачки электромагнитных колебаний. Иссле-

дугем соответствующий тип неустойчивости, полагая, что функция распределения α -частиц имеет вид

$$F = \begin{cases} \left(\frac{R}{R-1}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m_1}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_1 v^2}{2T_1}\right), & |v_z| < v_\perp (R-1)^{1/2}; \\ 0, & |v_z| > v_\perp (R-1)^{1/2}, \end{cases} \quad (10.9)$$

где R — пробочное отношение; m_1 — масса α -частиц.

Функция вида (10.9) является частным случаем функций типа

$$F = f_0(v) \Phi(\vartheta), \quad (10.10)$$

где $\vartheta = \text{arctg}(v_\perp/v_z)$; $v = (v_\perp^2 + v_z^2)^{1/2}$. Для таких функций общее выражение (10.6) можно записать в виде

$$\gamma_\pm = -\frac{\pi^2 e_1^2 n_1 c_A^2 k_z}{m_1 c^2 \omega_\pm} \int_0^\infty dv \int_0^\pi d\vartheta v^3 f_0(v) \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \delta(k_z v \cos \vartheta \pm \omega_{Bi}). \quad (10.11)$$

Здесь e_1 — заряд α -частиц; $\omega_{Bi} = e_1 B_0 / m_1 c$.

При F вида (10.9) $\partial \Phi / \partial \vartheta = -2[\delta(\vartheta - \vartheta_0) + \delta(\vartheta - \pi + \vartheta_0)]$. Используя это условие, проводим в (10.11) интегрирование по ϑ и v и получаем окончательное выражение для инкремента колебаний:

$$\gamma = 2 \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\omega_{Bi}^2}{|k_z| c_A} \sqrt{\pi R} x^3 e^{-x^2}, \quad (10.12)$$

где $x = (\omega_{Bi} / k_z) v_{T1} \cos \vartheta_0$; $v_{T1} = (2T_1 / m_1)^{1/2}$;

$$\cos \vartheta_0 = [(R-1) / R]^{1/2}.$$

Инкремент (10.12) не экспоненциально мал при условии типа (10.8).

При $v_{T1} \simeq c_A$

$$\gamma \simeq \frac{n_1}{n_0} \omega_{Bi}. \quad (10.13)$$

10.2. Ионно-циклотронная неустойчивость магнитозвуковых колебаний при $k_z = 0$, вызываемая частицами с $\partial f / \partial v_\perp > 0$

При наличии небольшого числа горячих немаксвелловских ионов, $n_1 \equiv \alpha n_0 \ll n_0$, колебания плазмы с $k_z = 0$ и $\omega \gg \omega_{Bi}$ описываются дисперсионным уравнением [см. (8.13)]:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2}\right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\alpha \omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^\infty d\varepsilon_\perp \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \cdot \frac{\partial f_\perp}{\partial \varepsilon_\perp} = 0. \quad (10.14)$$

Здесь $f_{\perp}(\epsilon_{\perp})$ — нормированная на единицу функция распределения быстрых ионов.

При $\omega_p e > \omega_{Be}$ колебания существенно непотенциальные, если $k < \omega_p e/c$. Если, кроме того, $\xi \gg 1$, что совместимо с условием $k < \omega_p e/c$ при

$$v_{\perp} > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} c_A, \quad (10.15)$$

то дисперсионное уравнение (10.14) сводится к виду [ср. с (8.20)]

$$1 - \frac{k^2 c_A^2}{\omega^2} + \frac{\alpha c_A^2}{\pi k \rho_1 v_1^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0, \quad (10.16)$$

где $v_1 = [\int (f_1/v^3) d\epsilon_{\perp}]^{-1/3}$.

В пренебрежении быстрыми ионами частота колебаний вещественна:

$$\omega^2 = k^2 c_A^2. \quad (10.17)$$

Это высокочастотные магнитозвуковые колебания. Их волновое число k , хотя и меньше $\omega_p e/c$, но тем не менее достаточно велико, $k > \omega_{pi}/c$.

Быстрые частицы приводят к раскачке колебаний при

$$\omega \approx kc_A \simeq n\omega_{Bi}. \quad (10.18)$$

Инкремент такой неустойчивости выражается формулой

$$\gamma = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi k \rho_1}\right)^{1/2} \frac{c_A}{v_1} n\omega_{Bi}. \quad (10.19)$$

Подобного рода раскачка ионно-циклотронных гармоник может происходить в плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке, если такая плазма содержит некоторое количество быстрых α -частиц, образующихся в результате термоядерных реакций.

§ 11. Обзор теоретических и экспериментальных работ

В настоящее время теоретически исследовано большое число разновидностей электромагнитных неустойчивостей. Развитие теории этих неустойчивостей стимулировалось многими факторами. Важным стимулирующим фактором оказалась проблема управляемого термоядерного синтеза и связанные с нею проблемы устойчивого удержания плазмы в магнитном поле и нагрева плазмы переменным электромагнитным полем. Кроме того, важную роль в развитии теории электромагнитных неустойчивостей сыграли многочисленные астрофизические и геофизические проблемы.

Неустойчивости плазмы с анизотропным распределением электронов по скоростям, § 1, исследовались в работах Вайбеля [2], Фрида [3], Р. З. Сагдеева и В. Д. Шафранова [4], а затем во многих других работах (см., в частности, [5—13]).

Для лабораторных экспериментов наибольший интерес представляют неустойчивости плазмы с $p_{\perp} > p_{\parallel}$. Как было впервые показано в работе Р. З. Сагдеева и В. Д. Шафранова [4], при не слишком большой анизотропии электронов электромагнитная неустойчивость плазмы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ имеет экспоненциально малый инкремент. Поскольку в лабораторных условиях, как правило, $\beta \ll 1$, то при интерпретации аномальных явлений в плазме с анизотропными электронами часто (см., например, работу [14]) используются представления об электростатических неустойчивостях (иногда называемых неустойчивостями типа Харриса [7,15]), инкремент которых может быть велик и при $\beta \ll 1$. Для развития электростатических неустойчивостей, однако, требуется большая анизотропия, чем для электромагнитных. Например, при двумаксвелловском распределении электронов электростатические неустойчивости могут развиваться, если только $T_{\perp} > 2T_{\parallel}$, тогда как для развития электромагнитных неустойчивостей достаточно $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Поэтому, несмотря на малость инкрементов, электромагнитные неустойчивости могут быть ответственны за аномальное поведение плазмы даже при $\beta \ll 1$. На это было обращено внимание в работах Шэраера и Трайвелпайса [16] и Шэраера [17].

Представления о неустойчивостях плазмы с $p_{\parallel} > p_{\perp}$ широко используются при анализе вопросов динамики солнечного ветра [18]. Чаще всего в этой связи анализируются шланговая неустойчивость (см. разд. 6.7) и кинетическая ионно-циклотронная неустойчивость (см. разд. 6.6), которые развиваются при $\beta_{\parallel e}$, несколько меньшем, чем необходимо для развития электронной неустойчивости, рассмотренной в разд. 1.5. Электронная неустойчивость имеет, однако, гораздо больший инкремент, $\gamma_{эл}/\gamma_{ион} \simeq m_i/m_e$, так что при выполнении условия неустойчивости (1.62) она должна быть определяющей. На это обращается внимание в работе Ландау и Купермана [19].

Неустойчивости плазмы, содержащей малую долю анизотропных электронов, § 2, исследовались В. Ю. Трахтенгерцем (см. обзор [20] и указанные там работы), Б. А. Тверским [21], а также рядом других авторов (см. [22, 23]) для объяснения механизма возбуждения ультранизкочастотного излучения магнитосферы и динамики быстрых электронов в радиационных поясах Земли. В дальнейшем представления об этих неустойчивостях стали использоваться для интерпретации аномального поведения лабораторной плазмы с горячими электронами, удерживаемой в адиабатических ловушках [24—29].

Электромагнитные неустойчивости, возбуждаемые в плазме продольным пучком частиц, § 3, реально могут проявляться в условиях, когда затруднено возбуждение электростатических не-

устойчивостей. На это обратили внимание в 1964 г. Белл и Бунеман [30], хотя сама теория электромагнитных неустойчивостей начала развиваться гораздо раньше (см., например, обзор Я. Б. Файнберга [31] и монографию А. И. Ахиезера и др. [32]). В работе [30] был рассмотрен простейший пример пучковой системы, когда электромагнитная неустойчивость является первостепенной: пучок с большой поперечной энергией частиц, разд. 3.3.

Теория электромагнитных неустойчивостей пучка с немаксвелловским распределением по скоростям применялась для объяснения механизмов генерации низкочастотного излучения в магнитосфере (см., например, работы [33—35]) и спорадического радиоизлучения Солнца [36, 37]. Электромагнитные колебания типа свистящих атмосфериков наблюдались в лабораторных экспериментах по взаимодействию с плазмой электронного пучка, инжектируемого под большим углом к магнитному полю (Сайдл и Шунка [38]), а также в экспериментах, где инжектируемый в плазму пучок не имеет поперечной энергии ([38], А. Н. Кархов [39]). В случае продольно инжектированного пучка вначале могут возбуждаться ленгмюровские колебания, при рассеянии на которых частицы могут приобретать поперечные скорости и затем возбуждать электромагнитные волны. Такая точка зрения на механизм возбуждения свистящих атмосфериков высказана в работе [39].

Рассмотренная в разд. 3.5 электромагнитная неустойчивость убегающих электронов в несколько другой постановке исследовалась А. А. Андроновым и В. Ю. Трахтенгерцем [40]. Она близка по природе также к электростатической неустойчивости плазмы с несимметричным распределением частиц по продольным скоростям, на возможность которой указывалось в монографии А. И. Ахиезера и др. [32], а затем в работе Гитера [1] и работе В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко [41]. Эта неустойчивость может быть ответственна за возбуждение электромагнитных колебаний с частотами $\omega \lesssim \omega_{pe}$ в экспериментах по омическому нагреву плотной плазмы.

Помимо изложенных в § 3 пучково-анизотропных электромагнитных неустойчивостей в настоящее время известны и некоторые другие. Обширный обзор литературы по такого рода неустойчивостям содержится в работе К. Е. Зайеда и А. Б. Киценко [42].

Первоначальным стимулом к развитию теории неустойчивостей типа отрицательной массы, разд. 4.1, послужила проблема создания электронных ускорителей (бетатронов). Первые работы в этом направлении были выполнены А. А. Коломенским и А. Н. Лебедевым [34], Нилсоном и Сесслером [44]. В этих работах исследовалась плазма, все электроны которой вращаются вокруг общего центра. В такой же постановке задача о неустойчивостях типа отрицательной массы решалась и в более поздних работах [45—48], связанных с термоядерной программой «Астрон». Н. С. Ерохин и С. С. Моисеев (частное сообщение, 1968 г.) рассмотрели пространственно-однородную плазму с δ -функциональным распределением по скоростям (разд. 4.1).

В последнее время теория неустойчивостей типа отрицательной массы и других разновидностей квазиэлектростатических неустойчивостей плазмы с релятивистскими электронами интенсивно развивалась Блэнкеном и др. [49—51], в связи с экспериментами по удержанию СВЧ-нагретой плазмы. В этих экспериментах в ряде случаев получается плазма с двумя энергетическими группами электронов: холодными (нерелятивистскими), составляющими основную часть плазмы, и горячими (релятивистскими). Некоторые примеры неустойчивостей такой плазмы приведены в разд. 4.2. Более полная картина такого рода неустойчивостей дана в упомянутых выше работах Блэнкена и др. [49—51]. Там же учитывается и непотенциальность колебаний. Кукес и Сьюдан [52] высказали гипотезу о важности этого класса неустойчивостей в процессах генерации всплесков солнечного радиоизлучения.

Раскачка электромагнитных волн релятивистскими электронами с изотропным распределением по скоростям, разд. 5.1, исследовалась с целью создания на этой основе усилителей и генераторов микроволнового излучения (см. работы А. В. Гапонова [53], Шнайдера [54], Бекефи и др. [55]), а также для объяснения природы спорадического радиоизлучения Солнца и других космических объектов (Твисс [56], Хиршфилд и Бекефи [57]). На основе представления об этих неустойчивостях был разработан новый тип электронных приборов — мазеров на циклотронном резонансе (см., например, обзор А. В. Гапонова и др. [58], а также работы А. В. Гапонова и др. [59], Хиршфилда и Уохтела [60], Ботта [61]). В. В. Железняков [62, 63] развил теорию неустойчивости плазмы с ультрарелятивистскими электронами и проанализировал роль этих неустойчивостей как возможную причину радиоизлучения некоторых космических объектов. В. Л. Гинзбург и др. [64] привлекают представления об этих неустойчивостях для объяснения радиоизлучения пульсаров (см. также [65]).

Различные вопросы теории электромагнитных неустойчивостей плазмы с релятивистскими электронами обсуждались также в работах [42, 66, 67].

Интересная возможность раскачки электромагнитных волн нерелятивистскими электронами с изотропным распределением по скоростям возникает в случае плазмы инертных газов, разд. 5.2. Впервые на эту возможность обратили внимание Бекефи и др. [65]. Теория столкновительной мазерной неустойчивости в дальнейшем развивалась в работах [68, 69]. Многочисленные экспериментальные исследования этой неустойчивости были проведены в основном японскими физиками [70, 71]. В них наблюдалось возбуждение колебаний с частотой, близкой к электронно-циклотронной и ее гармоникам. Однако в отмеченных работах нет доказательства того, что электроны имеют пик по энергиям. Приятное исключение составляет эксперимент Уохтела и Хиршфилда [72], где плазма представляет собой поток инжектируемых извне моноэнергетических электронов.

Большое место в теоретических исследованиях занимают вопросы устойчивости плазмы с анизотропными ионами, § 6. В приближении нулевого магнитного поля, разд. 6.2, эти вопросы впервые рассматривались С. С. Моисеевым и Р. З. Сагдеевым [73, 74]. В указанных работах было выдвинуто предположение, что неустойчивость плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ может быть ответственна за резкий фронт ударной волны в солнечном ветре. Однако приближение $\mathbf{V}_0 = 0$ для неустойчивости плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ означает $\beta \gg (m_i/m_e)^3$ (см. разд. 6.3), что в условиях солнечного ветра не удовлетворяется. На неприменимость результатов [73, 74] к плазме солнечного ветра обращалось внимание в работе [75]. В настоящее время не ясно, имеется ли в природе анизотропная плазма с очень большим значением β . Поэтому пока не ясна и прикладная роль анизотропных неустойчивостей плазмы с очень большим β , обсуждавшихся в разд. 6.2—6.5. В Калэмской лаборатории была получена плазма с $\beta \simeq 10^2$ [76] (θ -пинч), однако не известно, проявлялись ли в этой плазме эффекты анизотропии.

При $\beta \simeq 1$ и небольшой анизотропии ионов наиболее важными являются кинетические неустойчивости, обсуждавшиеся в разд. 6.6. Они исследовались Р. З. Сагдеевым и В. Д. Шафрановым [4] и Розенблютом [77]. Лабораторные эксперименты по обнаружению этих неустойчивостей, по-видимому, отсутствуют.

К числу наиболее давно известных неустойчивостей относятся шланговая и пробкотронная неустойчивости, обсуждавшиеся в разд. 6.7 и 6.8: Впервые на возможность развития в плазме этих неустойчивостей было указано в работах Л. И. Рудакова и Р. З. Сагдеева [78, 79], А. А. Веденова и Р. З. Сагдеева [80], Чандрасекара и др. [81], Паркера [82]. В работах [79 и 81] предполагалось, что такие неустойчивости могут играть роль в пинч-разрядах. В работе [80] обсуждалась возможность проявления пробкотронной неустойчивости при удержании плазмы в адиабатических ловушках (пробкотронах). Паркер [82] анализировал динамику потоков плазмы, выпускаемых Солнцем в межпланетное пространство (солнечный ветер), и высказал предположение, что такие потоки могут быть неустойчивы при $\rho_{\parallel} > \rho_{\perp}$.

В лабораторных условиях чаще всего реализуется плазма с $\rho_{\perp} > \rho_{\parallel}$. Это связано с особенностями магнитного удержания плазмы и ее нагрева. В частности, плазма обязательно должна иметь анизотропию давлений с $\rho_{\perp} > \rho_{\parallel}$, если она удерживается в адиабатической ловушке. При нагреве плазмы адиабатическим или ударным сжатием энергия от магнитного поля передается на поперечные степени свободы, так что и в этих случаях оказывается $\rho_{\perp} > \rho_{\parallel}$. В связи с этим вопросом об устойчивости плазмы с $\rho_{\perp} > \rho_{\parallel}$ посвящено большое число теоретических работ.

Обширные теоретические результаты были получены А. Б. Киченко и К. Н. Степановым [83] о неустойчивостях с $\omega \ll \omega_{Vi}$ и $k\rho_i \ll 1$. В работах [84—86] неустойчивости с $\omega \ll \omega_{Vi}$ были рассмотрены с учетом конечности ларморовского радиуса ионов. В. Ф. Алек.

син и В. И. Яшин [87] развили обобщенный энергетический метод, в рамках которого учитываются неустойчивости, вызываемые скоростной анизотропией. Мощным импульсом к дальнейшему развитию теории пробкотронной неустойчивости явилась проблема создания адиабатических ловушек с магнитной ямой (минимумом B). Тейлор и Хасты [88, 89] и Андреалетти [90, 91] показали, что в ловушках с минимумом B может устойчиво удерживаться только плазма с достаточно малым давлением, таким, что $\beta \lesssim \delta$, где δ — относительная глубина магнитной ямы. Еще более радикальные требования вытекают из более строгого анализа Грэда [92]. В последние годы интерес к исследованию пробкотронной неустойчивости возрос также в связи с развитием программы θ -пинчей. Теоретические исследования и машинные расчеты в этом направлении ведутся Морзом [93, 94].

Впервые о наблюдении пробкотронной неустойчивости в лабораторных условиях сообщалось Постом и Перкинсом [95]. В этой работе пробкотронная неустойчивость предполагалась ответственной за аномальный уход плазмы, полученной адиабатическим сжатием и удерживаемой в пробкотроне. Однако в дальнейшем Перкинс и Пост [96] отказались от этой точки зрения и стали считать, что причиной наблюдавшегося [95] аномального ухода плазмы является желобковая неустойчивость (последняя связана с поперечной неоднородностью плазмы и кривизной силовых линий магнитного поля).

По-видимому, наиболее надежные экспериментальные свидетельства о пробкотронной неустойчивости дают исследования по θ -пинчам. Такого рода исследования производились Бодином и др. [97] и Кауфманом и др. [98]. Пробкотронная неустойчивость в θ -пинчах проявляется в виде возмущений нулевой азимутальной моды, $m = 0$ (аксиально симметричные возмущения).

Одним из важных объектов приложения теории ионных анизотропных неустойчивостей является солнечный ветер. Начиная с работы Паркера [82] (см. также его монографию [181]), многократно высказывалась точка зрения о важной роли, которую должна играть в динамике солнечного ветра шланговая неустойчивость (см. разд. 6.7). В связи с этим интересно отметить, что Скарф и др. [99], основываясь на измерениях ионной анизотропии плазмы солнечного ветра, описанных в работах [100, 101], показали, что в околоземном пространстве критерий развития шланговой неустойчивости не удовлетворяется. Эти авторы пришли к выводу, что в условиях солнечного ветра наиболее важной является кинетическая неустойчивость, впервые рассмотренная Р. З. Сагдеевым и В. Д. Шафрановым [4], а затем Стиксом [8] (разд. 6.6). Теоретический анализ анизотропных неустойчивостей плазмы солнечного ветра производился также в работах Н. А. Лотовой [102, 103], Скарфа и Фредрикса [104] и др.

Предсказания о неустойчивостях солнечного ветра подтверждаются многими наблюдениями. Установлено, что солнечный ветер пространственно неоднороден, причем характерный масштаб неодно-

родности порядка c/ω_{pi} [102, 105]. В солнечном ветре регистрируются шумы с частотой порядка ионно-циклотронной [104]. Оба эти факта находятся в согласии с теорией ионных анизотропных неустойчивостей (о лабораторном моделировании анизотропных неустойчивостей солнечного ветра см. работы [105—107]; машинный эксперимент по таким неустойчивостям изложен в работе [108]).

Электромагнитная неустойчивость встречных потоков плазмы (разд. 7.1) теоретически исследовалась А. А. Галеевым [109] и Д. Г. Ломинадзе и К. Н. Степановым [110]. В работе [109] описан эксперимент по использованию этой неустойчивости для захвата плазмы в адиабатическую ловушку.

Неустойчивость плазмы с неоднородным профилем скорости (разд. 7.2; типа Кельвина — Гельмгольца) известна довольно давно. Гидромагнитная теория этой неустойчивости изложена в книгах Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [111] и Чандрасекара [112]. В лабораторных условиях эта неустойчивость может проявляться в экспериментах с плазменными струями, движущимися вдоль магнитного поля [113]. В работах Паркера [114], Данжи [115], Талвара [116], Ю. Л. Москвина и Д. А. Франк-Каменецкого [117] и некоторых других обсуждалась возможность развития неустойчивости типа Кельвина — Гельмгольца при обтекании границы магнитосферы плазмой солнечного ветра (см. также обзор В. А. Троицкой и А. В. Гульельми [118]). Паркер [119], а затем Талвар [120] и другие обсуждали вопрос о развитии этой неустойчивости в условиях солнечной короны.

Изложенные в § 7.9 результаты по конусным неустойчивостям плазмы конечного и большого давления были получены только в самое последнее время (Ю. П. Курчашовым, Н. В. Чудиным и автором), и потому они не настолько исчерпывающие, как многолетние исследования по анизотропным неустойчивостям. Ранее оживленно дискутировались аналогичные вопросы, касающиеся плазмы нулевого давления. Ю. Н. Днестровским [121] было обращено внимание на то, что наличие конуса потерь влечет за собой установление такого распределения по скоростям, при котором $\partial f/\partial v_{\perp} > 0$, и что положительность этой производной может служить причиной неустойчивостей пучкового типа. В. Б. Красовицкий и К. Н. Степанов [122] подробно исследовали основные типы конусных неустойчивостей однородной плазмы. В частности, они впервые указали на высокочастотную конусную неустойчивость, обусловленную взаимодействием ионов с электронами (разд. 8.1). Вслед за [122] эта неустойчивость исследовалась автором [123] и Розенблютом и Постом [124]. Последняя работа получила особенно широкий резонанс вследствие того, что в ней была подчеркнута важность высокочастотной конусной неустойчивости для адиабатических ловушек как возможных термоядерных реакторов. Обширные численные расчеты по высокочастотной конусной неустойчивости были проведены в работе Поста и Розенблюта [125]. Конусная неустойчивость должна приводить к повышенному уходу частиц в конус по-

ть. Скорость такого ухода оценивалась в работах А. А. Галеева [126, 127]. Предлагались различные пути подавления высокочастотной конусной неустойчивости. Один из них состоит в добавлении в плазму некоторого количества слабо нагретых ионов. Подробно такая возможность обсуждалась в работе Мойра [128], а также в работе Берка и др. [129]. Этот стабилизирующий эффект может проявляться и при конечных β . В условиях современных экспериментов реализуется, по-видимому, также плазма с примесью слегка нагретых ионов [130]. Возможно, вследствие этого пока не удалось экспериментально обнаружить конусную неустойчивость.

В плазме с небольшой долей ионов очень малых энергий возможна еще одна разновидность конусных неустойчивостей, так называемая неустойчивость двугорбого распределения (*double humped instability*, разд. 8.4). При $\beta \rightarrow 0$ она теоретически изучалась Холлом и др. [131], а экспериментально была обнаружена в специально поставленном для этой цели эксперименте Кэнсчена и др. [132]. В условиях, когда давление плазмы не чрезмерно мало, так что существенна непотенциальность возмущений (разд. 8.4), эта неустойчивость экспериментально не исследовалась.

О конусно-градиентных неустойчивостях до последнего времени имелась только теоретическая информация и только такая, которая относится к плазме с $\beta \rightarrow 0$. Соответствующий тип неустойчивости для плазмы с $\beta \rightarrow 0$ и δ -функциональным распределением ионов был предсказан в работе автора [123]. Позднее Пост и Розенблют [125], также в приближении $\beta \rightarrow 0$, провели детальный анализ этого типа неустойчивости при некоторых других зависимостях $f_{\perp}(v_{\perp})$ с $df_{\perp}/dv_{\perp} > 0$. В другой работе автора [133] (см. также работу А. А. Галеева [134]) вычислялись турбулентные коэффициенты переноса, обусловленные этой неустойчивостью. Корди и др. [135] исследовали влияние на конусно-градиентную неустойчивость кривизны силовых линий магнитного поля. Результаты § 9, касающиеся плазмы с конечным β , недавно получены Ю. П. Курчаховым и автором.

Основным стимулом развития теории анизотропных электромагнитных неустойчивостей, вызываемых группой быстрых ионов (разд. 10.1), до сих пор была проблема интерпретации различных магнитосферных явлений, таких, как возбуждение геомагнитных пульсаций, процессы, определяющие предельную плотность быстрых частиц в протонном радиационном поясе Земли, и др. В применении к этой проблеме теория развивалась Б. А. Тверским [136], Корнуоллом [137], Кеннелом и Петчеком [22], Кеннелом [23], Ф. З. Фейгиным и В. Я. Якименко [138] и др. Более подробную библиографию по этим вопросам можно найти в книге Б. А. Тверского [21], обзоре В. А. Троицкой и А. В. Гульельми [119], а также в работе Крисуэллы [139]. Изучались также неустойчивости, вызываемые релятивистскими протонами в межзвездной плазме. Эти вопросы отражены в обзоре Лёрча [140].

Возбуждение быстрыми ионами с $df/dv_{\perp} > 0$ волн, распространяющихся под большим углом к магнитному полю, разд. 10.2, до

сих пор рассматривалось в основном в электростатическом приближении (см., например, работы автора и Э. А. Пашицкого [141], Перлстайна, Розенблюта и Чанга [142], Свифта [143]). Исключение составляет работа В. Б. Красовицкого и К. Н. Степанова [144], где учитывались и электромагнитные эффекты.

Практически интересный случай плазмы с быстрыми немаксвелловскими ионами должна представлять собой плазма, содержащая продукты тормоядерных реакций— α -частицы с энергией в несколько мегаэлектронвольт. Л. В. Кораблевым [145] и Я. И. Колесниченко и В. Н. Ораевским [146] было обращено внимание на то, что коллективное взаимодействие α -частиц с основной компонентой плазмы может приводить к неустойчивостям. В этих и последующих работах названных авторов [147—149] было рассмотрено несколько разновидностей неустойчивостей, возникающих при изотропном распределении α -частиц по скоростям. Общий вывод, сделанный в работах [147—149], сводится к тому, что эти неустойчивости не могут быть существенным препятствием магнитного удержания термоядерной плазмы.

Такой вывод не относится к плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке. Вследствие ухода некоторой доли α -частиц в конус потерь распределение захваченных α -частиц по скоростям анизотропно, $\partial f/\partial(v_{\parallel}^2) \neq \partial f/\partial(v_{\perp}^2)$, а их поперечное распределение должно иметь более резкий максимум, чем при изотропном распределении,— большее $\partial f/\partial v_{\perp} > 0$. Вследствие этого в плазме могут развиваться более сильные неустойчивости, чем при изотропном распределении α -частиц (разд. 10.1 и 10.2). Это тем более нежелательно с точки зрения проблемы удержания плазмы, так как уход плазмы из ловушки может происходить не только в результате пространственной диффузии, но и в результате скоростной диффузии частиц в конус потерь.

При не слишком малых значениях параметра β (см. § 10) практически все разновидности неустойчивостей, вызываемые α -частицами, являются электромагнитными. На это обращалось внимание в работе Л. В. Кораблева и Л. И. Рудакова [147]. Однако в [147], как и в [148], были рассмотрены электромагнитные неустойчивости с $\omega \ll \omega_{Bi}$, тогда как более важными представляются наиболее быстро развивающиеся неустойчивости с $\omega > \omega_{Bi}$, рассмотренные нами в разд. 10.2. Экспериментально ни те, ни другие неустойчивости пока не исследовались.

§ 12. Заключение

Теория предсказывает много разновидностей электромагнитных неустойчивостей плазмы с немаксвелловским распределением частиц по скоростям. В настоящее время общепризнана важная роль этих неустойчивостей в физике околоземной плазмы. Что касается лабораторной плазмы, то пока основную роль здесь играют электростатические неустойчивости. Это связано с тем, что плазма, получаемая

в большинстве типов лабораторных экспериментов, имеет малое значение параметра β . Можно, однако, ожидать, что со временем будут разработаны более эффективные способы получения плазмы с конечным и большим β , поскольку без этого практически невозможен прогресс в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза. Поэтому кажется, что в будущем лабораторные эксперименты с плазмой конечного давления займут центральное место в физике плазмы. Если в процессе создания или удержания такой плазмы распределение частиц по скоростям окажется немаксвелловским, то ее динамика будет определяться обсуждавшимися выше неустойчивостями.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. Решение кинетического уравнения для однородной релятивистской плазмы в магнитном поле

Кинетическое уравнение Больцмана для возмущенной функции распределения f электронов или ионов, находящихся в магнитном поле, имеет хорошо известный вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -e \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (\text{П.1})$$

Это уравнение получается при линеаризации полного уравнения Больцмана в пренебрежении столкновениями между частицами. В (П.1) \mathbf{v} , \mathbf{p} — скорость и импульс частиц, связанные соотношением

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad (\text{П.2})$$

где e , m_0 — заряд и масса покоя частиц; c — скорость света; \mathbf{E} , \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля возмущения, связанные друг с другом соотношением

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}; \quad (\text{П.3})$$

\mathbf{B}_0 — равновесное магнитное поле, которое предполагается направленным вдоль оси \mathbf{z} , $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$; f_0 — равновесная функция распределения соответствующего сорта зарядов, удовлетворяющая кинетическому уравнению нулевого приближения:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \partial f_0 / \partial \mathbf{p} = 0. \quad (\text{П.4})$$

Общее решение (П.4) можно представить в виде

$$f_0(\mathbf{p}) = F(p_\perp, p_z), \quad (\text{П.5})$$

где $p_\perp = |\mathbf{p}_\perp|$; \mathbf{p}_\perp , p_z — поперечные и продольная по отношению к \mathbf{B}_0 компоненты импульса частицы; F — функция произвольного вида.

Решение (П.1) можно записать в виде интеграла вдоль характеристик соответствующего однородного уравнения, означающих траектории невозмущенного движения частиц:

$$f = -e \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} dt'. \quad (\text{П.6})$$

Стоящие под интегралом функции импульсов и координат берутся при $\mathbf{p} \parallel = \mathbf{p}(t', \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t', \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$, где функции $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяют уравнениям движения:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]; \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (\text{П.7})$$

а $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$ — координата и импульс, которым в некоторый момент времени t_0 характеризуется частица, находящаяся в момент времени t в точке \mathbf{r} и обладающая при этом импульсом \mathbf{p} . При получении (П.6) предполагалось, что при $t = -\infty$ плазма и поле находятся в невозмущенном состоянии, а затем появляется очень малое возмущение, которое медленно нарастает во времени. Ниже будем считать, что пространственно-временное поведение возмущения характеризуется зависимостью вида $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, где ω имеет бесконечно малую положительную мнимую часть.

Используя (П.2), (П.3), (П.5), а также удобное преобразование

$$\mathbf{v}_\perp \mathbf{E}_\perp = \frac{1}{k_\perp^2} \{ (\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp) (\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp) + [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{E}_\perp]_z [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{v}_\perp]_z \}, \quad (\text{П.8})$$

где $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, а индекс « \perp » у векторов означает их часть, перпендикулярную \mathbf{B}_0 , приводим (П.6) к виду

$$\begin{aligned} f = -e \left\{ \frac{1}{k_\perp^2} \Phi_\perp [(\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp)] G_1 + [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{E}_\perp]_z G_2 + \right. \\ \left. + E_z \left[\frac{\partial F}{\partial p_z} G_0 - \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_\perp} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_\perp} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Здесь

$$\Phi_\perp = \frac{1}{v_\perp} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_\perp} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_\perp} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_\perp} \right); \quad (\text{П.10})$$

$$G_\alpha = \int_0^\infty \exp \left[i\omega\tau - i\mathbf{k} \int_{t-\tau}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, \tau') d\tau' \right] d\tau, \quad (\text{П.11})$$

а функции G_1, G_2 отличаются от G_0 тем, что в подынтегральном выражении перед экспонентой стоят соответственно множители $\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp(t - \tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$, $[\mathbf{k}_\perp, \mathbf{v}_\perp(t - \tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)]_z$.

Интегралы G_α ($\alpha = 0, 1, 2$) вычисляются следующим образом. Учитывая закон движения частицы в магнитном поле, вытекающий из (П.7):

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_\perp \cos [\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)]; \\ v_y(t) &= v_\perp \sin [\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)]; \\ v_z(t) &= v_z; \\ \omega_B &= (eB_0/m_0c) (1 - v^2/c^2)^{1/2}; \\ \alpha_0 &= \arctg [v_y(t_0)/v_x(t_0)], \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.12})$$

вычисляем интеграл, стоящий в экспоненте правой части (П.11):

$$\int_{t-\tau}^t \mathbf{k}v(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, \tau') d\tau' = k_z v_z \tau - \xi \{ \sin(\alpha_0 - \omega_B t - \Psi) - \sin[\alpha_0 - \omega_B(t - \tau) - \Psi] \}. \quad (\text{П.13})$$

Здесь $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$; $\Psi = \text{arctg}(k_y/k_x)$. Экспоненту, содержащую в аргументе $\sin[\alpha_0 - \omega_B(t - \tau) - \Psi]$, представляем в виде ряда по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} & \exp\{-i \xi \sin[\alpha_0 - \omega_B(t - \tau) - \Psi]\} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi) \exp\{-i n[\alpha_0 - \omega_B(t - \tau) - \Psi]\}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Выражение для G_0 сводится при этом к сумме интегралов типа

$$\int_0^{\infty} \exp[i(\omega - |k_z v_z - n\omega_B| \tau)] d\tau = i(\omega - k_z v_z - n\omega_B)^{-1}. \quad (\text{П.15})$$

Величины G_1, G_2 выражаются через интегралы от произведения экспоненты $\exp[i(\omega - n\omega_B - k_z v_z)(t - \tau)]$ на $\cos(\alpha_0 - \omega_B \tau - \Psi)$, $\sin(\alpha_0 - \omega_B \tau - \Psi)$, которые сводятся к интегралам типа (П.15) путем представления синуса и косинуса в виде суперпозиции экспонент. При этом под знаком суммы по n получают знаменатели вида $\omega - k_z v_z - (n \pm 1)\omega_B$. Заменой индекса суммирования их можно сделать равными $\omega - k_z v_z - n\omega_B$.

Окончательные выражения для G_{α} имеют вид

$$\begin{aligned} (G_0, G_1, G_2) = i \exp \left[i \xi \sin(\alpha - \Psi) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n (J_n, n\omega_B J_n, \\ i k_{\perp} v_{\perp} J_n') \exp[-i n(\alpha - \Psi)]. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Здесь $\zeta_n = (\omega - k_z v_z - n\omega_B)^{-1}$; $\alpha = \text{arctg}(v_x/v_y)$. Подставляя (П.16) в (П.9), получаем искомое выражение для возмущения функции распределения

$$\begin{aligned} f = -i e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \left\{ \frac{\Phi_{\perp}}{k_{\perp}^2} (n\omega_B J_n(k_{\perp} E_{\perp})) + \right. \\ \left. + i k_{\perp} v_{\perp} J_n' [k_{\perp}, E_{\perp}]_z + \Phi_{\parallel} J_n E_z \right\} \exp[i \xi \sin(\alpha - \Psi) - i n(\alpha - \Psi)], \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

где

$$\Phi_{\parallel} = \frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{n\omega_B}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \right). \quad (\text{П.18})$$

2. Общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости

Интегрируя по импульсам уравнение (П.17) с весом $e v$, вычислим плотность токов. Интегрирование по углу α производится с помощью соотношений

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} (\cos \alpha, \sin \alpha, 1) \exp(i \xi \sin \alpha - i n\alpha) = \left(\frac{n J_n}{\xi}, -i J_n', J_n \right). \quad (\text{П.19})$$

Тогда получается

$$(j_1, j_2, j_3) = -i e^2 \int p_{\perp} dp_{\perp} dp_z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \left[v_{\perp} \Phi_{\perp} \left(\frac{nJ_n}{\xi} E_1 + i J_n' E_2 \right) + \Phi_{\parallel} J_n E_3 \right] \left(\frac{nv_{\perp} J_n}{\xi}, -i v_{\perp} J_n', v_z J_n \right). \quad (\text{П.20})$$

Здесь индекс «1» означает проекцию вектора на направление k_{\perp} ; «2» — на направление, перпендикулярное k_{\perp} и \mathbf{B}_0 ; «3» — на направление \mathbf{B}_0 . Функция F , входящая в Φ_{\perp} , Φ_{\parallel} , предположена нормированной так, что

$$\int F p_{\perp} dp_{\perp} dp_z = n_0, \quad (\text{П.21})$$

где n_0 — равновесная плотность частиц.

Далее, используя соотношения

$$j_a^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} E_{\beta} \quad (\text{П.22})$$

($\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ — тензор проводимости k -й компоненты плазмы) и

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad (\text{П.23})$$

находим вклад в диэлектрическую проницаемость соответствующей компоненты плазмы:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{4\pi e^2}{\omega} \times \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \Phi_{\perp} \begin{pmatrix} \bar{v}_{\perp}^2 \frac{n^2}{\xi^2} J_n^2, & i v_{\perp}^2 \frac{nJ_n J_n'}{\xi}, & v_{\perp} v_z \frac{nJ_n^2}{\xi} \\ -i v_{\perp}^2 \frac{nJ_n J_n'}{\xi}, & v_{\perp}^2 J_n'^2, & -i v_{\perp} v_z J_n J_n' \\ v_{\perp} v_z \frac{nJ_n^2}{\xi}, & i v_{\perp} v_z J_n J_n', & v_z J_n^2 \frac{\Phi_{\parallel}}{\Phi_{\perp}} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (\text{П.24})$$

Здесь символ $\langle \dots \rangle$ означает $\int \dots p_{\perp} dp_{\perp} dp_z$.

При получении (П.24) были использованы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n n J_n^2 \Phi_{\parallel} &= v_z \Phi_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n n J_n^2; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n J_n' \Phi_{\parallel} &= v_z \Phi_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n J_n'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.25})$$

Полный тензор диэлектрической проницаемости получается при подстановке (П.24) в (1.29), а общее дисперсионное уравнение имеет вид (1.32).

Отметим некоторые частные случаи общего дисперсионного уравнения.

3. Возмущения с $k_z = 0$

Общее дисперсионное уравнение (1.32) при $k_z = 0$ распадается на два:

$$\varepsilon_{33} - N^2 = 0; \quad (\text{П.26})$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - N^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{П.27})$$

Входящие сюда компоненты $\epsilon_{\alpha\beta}$ имеют вид:

$$\epsilon_{33} = 1 + \sum_{e, i} \frac{4\pi e}{m\omega} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_z J_n^2}{\omega - n\omega_B} \left[\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{n\omega_B}{\omega} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \right) \right] \right\rangle; \quad (\text{П. 28})$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{e, i} \frac{4\pi e^2}{m\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{v_{\perp} \partial F / \partial p_{\perp}}{\omega - n\omega_B} \times \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\xi^2} J_n^2, & \frac{i n J_n J_{n'}}{\xi} \\ -i \frac{n J_n J_{n'}}{\xi}, & J_{n'}^2 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad (\text{П. 29}) \\ (\alpha, \beta) = (1, 2)$$

4. Возмущения с $k_{\perp} = 0$

При $k_{\perp} = 0$ общее дисперсионное уравнение распадается на три:

$$\epsilon_{11} \mp i \epsilon_{12} - N^2 = 0, \quad (\text{П. 30})$$

$$\epsilon_{33} = 0. \quad (\text{П. 31})$$

Первые два уравнения описывают электромагнитные волны, а третье — электростатическое. Нас интересуют только уравнения (П.30). Входящие в них комбинации $\epsilon_{11} \mp i \epsilon_{12}$ равны

$$\epsilon_{11} \mp i \epsilon_{12} = 1 + \sum_{e, i} \frac{4\pi e^2}{\omega} \times \\ \times \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{1}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \right) \right\rangle. \quad (\text{П. 32}) \\ \omega \mp \omega_B - k_z v_z$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. I. неустойчивости однородной плазмы. М., Атомиздат, 1970.
2. Weibel E. S. Phys. Rev. Lett., 2, 83 (1959).
3. Fried B. D. Phys. Fluids, 2, 337 (1959).
4. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 39, 181 (1960).
5. Маханьков В. Г., Рухадзе А. А. «Ядерный синтез», 2, 177 (1962).
6. Bernstein I. B., Trehan S. K. Nucl. Fusion, 1, 3 (1960).
7. Harris E. G. J. Nucl. Energy, C2, 138 (1961).
8. Стикс Т. Теория плазменных волн. М., Атомиздат, 1965.
9. Furth H. P. Phys. Fluids, 6, 48 (1963).
10. Sudan R. N. Phys. Fluids, 6, 57 (1963).
11. Sudan R. N. Phys. Fluids, 8, 153 (1965); 8, 1208 (1965).
12. Hamasaki S. Phys. Fluids, 11, 1173 (1968).
13. Hamasaki S. Phys. Fluids, 11, 2724 (1968).
14. Alíkayev V.V. et al. Plasma Physics, 10, 753 (1968).
15. Harris E. G. Phys. Rev. Lett., 2, 34 (1959).

16. Scharer J. E., Trivelpiece A. W. *Phys. Fluids*, **10**, 591 (1967).
17. Scharer J. E. *Phys. Fluids*, **10**, 562 (1967).
18. Паркер Е. Динамические процессы в межпланетной среде. М., «Мир», 1965.
19. Landau R. W., Superman S. J. *Plasma Physics*, **4**, 13 (1970).
20. Гершман Б. Н., Трахтегерц В. Ю. «Успехи физ. наук», **89**, 201 (1966).
21. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М., «Наука», 1968.
22. Kennel C. F., Petschek H. E. *J. Geophys. Res.*, **71**, 1 (1966).
23. Kennel C. F. *Phys. Fluids*, **9**, 2190 (1966).
24. Ikegami H. et al. *Phys. Fluids*, **11**, 1061 (1968).
25. Ikegami H. et al. *Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res.*, v. 11, Vienna, IAEA, 1969, p. 423.
26. Jacquinet J. *Ibid.*, p. 358.
27. Jacquinet J. *Third Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. Groningen, Wolters-Nordhoff Publ. Comp.*, 1969, p. 14.
28. Herrmann V. et al. *Ibid.*, p. 70.
29. Lazar N. H. et al. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **23**, 1521 (1968).
30. Bell T. F., Вупеман О. *Phys. Rev.*, **133A**, 1300 (1964).
31. Файнберг Я. Б. «Атомная энергия», **11**, 313 (1961).
32. Ахизер А. И. и др. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.
33. Brice N. J. *Geophys. Res.*, **69**, 4515 (1964).
34. Gendrin R. J. *Geophys. Res.*, **70**, 5369 (1965).
35. Hrušká A. *Geophys. Res.*, **71**, 1377 (1966).
36. Железняков В. В. «Изв. вузов. Радиофизика», **2**, 14 (1959).
37. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет. М., «Наука», 1964.
38. Seidl M., Šupká P. *Nucl. Fusion*, **7**, 237 (1967).
39. Кархов А. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **56**, 3 (1969).
40. Андронов А. А., Трахтенгерц В. Ю. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 1009 (1963).
41. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **54**, 1187 (1969).
42. Zayed K. E., Kitsenko A. B. *Plasma Physics*, **10**, 147 (1968).
43. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. «Атомная энергия», **7**, 549 (1959).
44. Nielsen C., Sessler A. *Rev. Scient. Instrum.*, **30**, 80 (1959).
45. Landau R. W., Neil V. K. *Phys. Fluids*, **9**, 2412 (1966).
46. Briggs R. G., Neil V. R. *Plasma Physics*, **9**, 209 (1967).
47. Grewol M. S., Вуерс I. A. *Plasma Physics*, **11**, 727 (1967).
48. Briggs R. J., Lau Y. Y. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **14**, 1031 (1969).
49. Blanken R. A. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **13**, 280 (1968).
50. Blanken R. A., Kuckes A. F. *Plasma Physics*, **11**, 3211 (1969).
51. Blanken R. A., Stix T. H., Kuckes A. F. *Plasma Physics*, **11**, 945 (1969).
52. Kuckes A. F., Sudan R. N. *Nature*, **223**, 1048 (1969).
53. Гапонов А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 326 (1960).
54. Schneider. *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 504 (1959).
55. Bekefi G. et al. *Phys. Fluids*, **4**, 175 (1961).
56. T w i s s Q. R. *Australian J. Phys.*, **11**, 564 (1958).
57. Hirschfield J. L., Bekefi G. *Nature*, **198**, 20 (1963).
58. Гапонов А. В. и др. «Изв. вузов. Радиофизика», **10**, 1414 (1967).
59. Гапонов А. В. и др. «Письма ЖЭТФ», **2**, 430 (1965).
60. Hirschfield J. L., Wachtel J. M. *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 533 (1964).
61. Bott I. B. *Phys. Lett.*, **14**, 293 (1965).

62. Железняков В. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 51, 570 (1966).
63. Железняков В. В. «Астрон. ж.», 44, 44 (1967).
64. Гинзбург В. Л., Железняков В. В., Зайцев В. В. «Успехи физ. наук», 98, 201 (1969).
65. Такакига Т. Nature, 224, 252 (1969).
66. Железняков В. В. «Изв. вузов. Радиофизика», 3, 57 (1960).
67. Neufeld J., Wiginton C. L. Phys. Rev., 148, 97 (1960).
68. Такака С., Митани К. J. Phys. Soc. Japan, 19, 1476 (1964).
69. Idehara T., Sugara R. J. Phys. Soc. Japan, 23, 1122 (1967).
70. Tegumici Y. et al. J. Phys. Soc. Japan, 20, 1705 (1965).
71. Idehara T. et al. J. Phys. Soc. Japan, 22, 671 (1967).
72. Wachtel J. M., Hirschfield J. L. Phys. Rev. Lett., 19, 293 (1967).
73. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 146, 329 (1962).
74. Moiseev S. S., Sagdeev R. Z. J. Nucl. Energy, C5, 43 (1963).
75. Kennel C. F., Sagdeev R. Z. J. Geophys. Res., 72, 3303 (1967).
76. Spalding I. J. et al. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., v. 11, Vienna, IAEA 1969, p. 639.
77. Rosenbluth M. N. Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 197 (1959).
78. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 268.
79. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. Там же, т. 4, стр. 54.
80. Веденов А. А., Сагдеев Р. З. Там же, т. 3, стр. 278.
81. Chandrasekhar S. et al. Proc. Roy. Soc., A245, 435 (1958).
82. Parker E. N. Phys. Rev., 109, 1874 (1958).
83. Киценко А. Б., Степанов К. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 38, 1841 (1960).
84. Furth H. P. Nucl. Fusion, Suppl., 1, 169 (1962).
85. Михайловский А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 43, 230 (1962).
86. Заславский Г. М., Моисеев С. С. «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», 6, 24 (1962).
87. Алексин В. Ф., Яшин В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 39, 822 (1960).
88. Hastie R. A., Taylor J. B. Phys. Rev. Lett., 13, 123 (1964).
89. Taylor J. B., Hastie R. A. Phys. Fluids, 8, 323 (1965).
90. Andrealett J. Compt. rend. Acad. Sci., 258, 5183 (1964).
91. Andrealetti J. Compt. rend. Acad. Sci., 259, 2392 (1964).
92. Grad H. Phys. Fluids, 9, 499 (1966).
93. Marse R. L. Phys. Fluids, 10, 1017 (1967).
94. Dickman D. O. et al. Phys. Fluids, 12, 1708 (1969).
95. Post R. F., Perkins W. A. Phys. Rev. Lett., 6, 85 (1961).
96. Perkins W. A., Post R. F. Phys. Fluids, 6, 1537 (1963).
97. Bodin H. A. B. et al. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., v. 11, Vienna, IAEA, 1969, p. 533.
98. Kaufmann M. et al. Third Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. Gröningen, Wolters-Nordhoff Publ. Comp., 1969, p. 80.
99. Scarf F. L. et al. J. Geophys. Res., 72, 993 (1967).
100. Wolfe J. H. et al. J. Geophys. Res., 71, 3329 (1966).
101. Hundhausen A. J. et al. J. Geophys. Res., 72, 87 (1967).
102. Лотова Н. А. «Успехи физ. наук», 95, 293 (1968).
103. Лотова Н. А. «Геомagnetизм и аэрономия», 9, 332 (1969).
104. Scarf F. L., Fredrics R. W. J. Geophys. Res., 73, 1747 (1968).
105. Подгорный И. М., Сагдеев Р. З. «Успехи физ. наук», 98, 409 (1969).
106. Манагадзе Г. Г., Подгорный И. М. «Докл. АН СССР», 180, 1333 (1968).
107. Дубинин Э. М. и др. Космические исследования 9, 91 (1971).

108. Березин Ю. А., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», **184**, 570 (1968)
109. Галеев А. А. и др. Proc. VII Internat. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, v. II. Belgrad, Gradevinska Knjiga, 1965.
110. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. «Ж. техн. физ.», **35**, 148 (1965).
111. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
112. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. London, Oxford Univ. Press., 1962.
113. Морозов А. И. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., v. II, Vienna, IAEA, 1969, p. 3.
114. Parker E. N. Phys. Fluids, **1**, 171 (1958).
115. Данжи Дж. В. Геофизика. М., «Мир», 1964, стр. 383.
116. Talwar S. P. J. Geophys. Res., **69**, 1707 (1964).
117. Москвин Ю. Л., Франк-Каменецкий Д. А. «Докл. АН СССР», **174**, 1079 (1967).
118. Троицкая В. А., Гульельми А. В. «Успехи физ. наук», **97**, 453 (1969).
119. Parker E. N. Astrophys. J., **139**, 6901 (1964).
120. Talwar S. P. Phys. Fluids, **8**, 1295 (1965).
121. Днестровский Ю. Н. «Ядерный синтез», **3**, 259 (1963).
122. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. «Ж. техн. физ.», **34**, 1013 (1964).
123. Михайловский А. Б. «Ядерный синтез», **5**, 125 (1965).
124. Rosenbluth M. N., Post R. F. Phys. Fluids, **8**, 547 (1965).
125. Post R. F., Rosenbluth M. I. Phys. Fluids, **9**, 273 (1966).
126. Галеев А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, 672 (1965).
127. Галеев А. А. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., v. I. Vienna, IAEA, 1966, p. 393.
128. Moir R. W. Plasma Physics, **11**, 169 (1969).
129. Berk H. L. et al. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., vol. **11**. Vienna, IAEA, 1969, p. 151.
130. Coensgen F. H. et al. Ibid., p. 225.
131. Hall L. S. et al. Phys. Rev., **A139** 1117 (1965).
132. Coensgen F. H. et al. Bull. Amer. Phys. Soc., **14**, 1053 (1969).
133. Михайловский А. Б. «Докл. АН СССР», **169**, 554 (1966).
134. Галеев А. А. «Ж. прикл. мех. и техн. физ.», **2**, 7 (1966).
135. Soddy et al. Nuclear Fusion, **8**, 153 (1968).
136. Тверской Б. А. «Геомagnetизм и аэрoномия», **7**, 226 (1967).
137. Cornwall J. M. J. Geophys. Res., **70**, 61 (1965).
138. Фейгин Ф. З., Якименко В. Л. «Геомagnetизм и аэрoномия», **9**, 700 (1969).
139. Criswell D. R. J. Geophys. Res., **74**, 205 (1969).
140. Lerche I. Advances in Plasma Physics. Interscience Publishers. v. 2. N. Y., 1969, p. 47.
141. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. «Ж. техн. физ.», **35**, 1961 (1965).
142. Pearlstein L. D., Rosenbluth M. N., Chang D. B. Phys. Fluids, **9**, 953 (1966).
143. Swift D. W. J. Geophys. Res., **73**, 7447 (1968).
144. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. «Изв. вузов. Радиофизика», **7**, 83 (1964).
145. Кораблев Л. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **53**, 1600 (1967).
146. Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н. «Атомная энергия», **23**, 289 (1967).
147. Кораблев Л. В., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **54**, 818 (1968).
148. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **55**, 2210 (1968).
149. Колесниченко Я. И. «Укр. физ. ж.», **14**, 1070 (1969).

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ С ПЛАЗМОЙ

А. А. Иванов

Введение

В настоящее время проведено много исследований, посвященных изучению поведения плазмы в высокочастотных полях. Основное внимание при этом обращается не на проблемы равновесия или радиационного ускорения плазмы высокочастотными полями, для чего необходимы достаточно большие амплитуды полей (плотность энергии высокочастотного поля должна быть больше давления плазмы или сравнима с ним), а на вопросы устойчивости плазмы в высокочастотном поле, т. е. на проблемы подавления наиболее опасных, с точки зрения удержания плазмы, неустойчивостей [1—6]. Это означает, что амплитуды высокочастотного поля считались малыми, и дополнительным давлением, возникающим из-за высокочастотного поля, можно пренебречь. Частоты поля Ω и тип волны выбирались таким образом, чтобы поле проникало в плазму. Так, в отсутствие постоянного поля H_0 частота удовлетворяла условию $\Omega > \omega_{pe}$ [7]; в том случае, если плазма удерживалась постоянным магнитным полем, рассматривалось высокочастотное поле волны типа геликон с частотой $\Omega < \omega_{He}$ и волновым числом k_0 , проникающее в плазму без затухания [8, 9].

Кроме того, изучалось влияние высокочастотного поля на устойчивость плазмы при частоте $\Omega < \omega_{pe}$, когда высокочастотное электрическое поле направлено вдоль постоянного магнитного поля H_0 [8, 10]. В этом случае поле проникало в плазму на глубину скин-слоя, которая могла быть из-за неустойчивостей, раскачиваемых волной, значительно больше величины c/ω_{pe} .

Длина волны высокочастотного поля, как и в случае плазмы без магнитного поля H_0 , считалась много большей характерных длин волн неустойчивостей плазмы, поэтому зависимость амплитуды высокочастотного поля от координат не учитывалась.

Оказалось, что определенным выбором частоты и амплитуды высокочастотного поля можно подавлять неустойчивости плазмы [8—11] либо раскачивать их [12]. Изучение поведения плазмы, находя-

щейся в полях достаточно большой амплитуды, которые меняются с частотой, близкой к одной из собственных частот плазмы, указало на возможность раскачки так называемых параметрических неустойчивостей [12]. В цитированных работах фаза высокочастотной волны считалась фиксированной. В последнее время появились работы, в которых исследовалось влияние высокочастотных турбулентных пульсаций на дрейфовые неустойчивости и было показано, что турбулентность может приводить к дополнительному движению плазмы поперек магнитных силовых линий, компенсирующему дрейфы. При определенных условиях это может подавлять дрейфовые неустойчивости [13].

Настоящая работа имеет целью систематическое изложение вопросов взаимодействия бесстолкновительной плазмы с высокочастотными полями. В соответствии с этим за основу будет взят метод бесстолкновительного кинетического уравнения повсюду, кроме § 5, где рассматривается влияние высокочастотных полей на устойчивость плазмы, в которой существенны столкновения электронов с ионами или нейтральными частицами. В § 1 введены основные понятия и качественно оценено влияние высокочастотных полей на устойчивость плазмы. В § 2 проведено интегрирование кинетических уравнений в присутствии высокочастотных полей. В § 3 получены дисперсионные соотношения для плазмы, взаимодействующей с различными типами высокочастотных полей.

Выведенные в этом параграфе дисперсионные соотношения для ряда наиболее опасных с точки зрения проблемы удержания плазмы неустойчивостей исследуются в § 4.

Влияние высокочастотных полей на диссипативные неустойчивости изучено в § 5. В отличие от остальных разделов исследование проводится при помощи гидродинамических уравнений.

§ 1. Основные понятия и качественные оценки

Начнем с простейшей постановки задачи. Пусть в плазме имеется электрическое поле с амплитудой E_0 , осциллирующее с частотой Ω , т. е.

$$E = E_0 \cos \Omega t. \quad (1.1)$$

Тогда, считая, что в нулевом приближении движение электронов и ионов задано, можно исследовать такую плазму на устойчивость относительно малых возмущений. Именно так ставилась задача в первых работах В. П. Силина и Ю. М. Алиева [7], В. П. Силина [14, 15]. Частота Ω считалась много больше плазменной электронной частоты $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / n_e)^{1/2}$. Было обнаружено, что в гидродинамическом приближении пучковая неустойчивость стабилизируется [7]. При кинетическом рассмотрении оказалось, что в тех же условиях раскачиваются новые неустойчивости [14]. Кажется совершенно естественным, что в такой плазме должны существовать неустойчивости. Действительно, в каждый момент времени электроны и

ионы движутся в противоположных направлениях, и, несмотря на то что направление скорости, скажем, электронов меняется с частотой $\Omega(v_e = v_{0e} \sin \Omega t)$, много большей частоты неустойчивых колебаний, при достаточно большом значении $v_{0e} = eE/m_e \Omega$ плазма может оказаться неустойчивой.

Однако, раскачивая неустойчивости в области плазменных ленгмюровских частот, такое высокочастотное поле может оказывать стабилизирующее действие на низкочастотные дрейфовые колебания, которыми определяется диффузия плазмы поперек магнитного поля. Частота дрейфовых колебаний много ниже ионно-циклотронной, $\omega_{Hi} = eH_0/mc$. На возможность такой стабилизации указали Я. Б. Файнберг и В. Д. Шапиро [11]. Они обратили внимание на то, что вследствие осцилляций электронов вдоль магнитной силовой линии под действием высокочастотного электрического поля происходит увеличение эффективной температуры электронов T_e . В результате увеличивается частота дрейфовых колебаний $\omega = \omega^* = \frac{cT_e}{eH} \cdot \frac{d \ln n_0}{dx}$. (Как обычно, считаем, что магнитное поле направлено вдоль z , концентрация неоднородна вдоль оси x [16]). С увеличением частоты колебаний в инкременте возрастает стабилизирующий член, в результате чего сужается область неустойчивости по параметру $\eta = d \ln T/d \ln n$.

Таким образом, прикладывая к плазме переменное электрическое поле, можно стабилизировать низкочастотные дрейфовые колебания, уменьшив тем самым диффузию плазмы поперек магнитного поля. Раскачка плазменных колебаний, которая имеет при этом место, приводит к появлению эффективной частоты столкновений и нагреву плазмы [17].

К сожалению, практическое использование такого метода стабилизации наталкивается на серьезные трудности, так как частота внешнего электрического поля должна быть очень большой $\Omega \gg \gg \omega_{Hi}$ и необходимо иметь очень мощные генераторы.

Поэтому были предприняты попытки найти иной способ стабилизации, который позволил бы снизить частоту Ω при использовании тех же или даже меньших амплитуд высокочастотных полей.

Такой способ предложили А. А. Иванов, Л. И. Рудаков, И. Тейхманн и Р. А. Демирханов в работах [10]. Остановимся на физической картине предлагаемого метода. Для изучаемых неустойчивостей проекция волнового вектора k на направление магнитного поля H_0 мала: $k_z \ll k$. Следовательно, возмущения равновесных значений плотности, потенциала и т. п. имеют вид желобков, сильно вытянутых вдоль магнитных силовых линий. Когда к основному постоянному магнитному полю $H_z \equiv H_0$ добавляется поперечное высокочастотное магнитное поле $H_y = H_1$, $H_y \ll H_z$, изменяющееся с частотой Ω , много большей частоты колебаний ω , то в определенные моменты времени направление магнитной силовой линии может стать таким, что соседние желобки возмущений окажутся связанными.

Если электроны или ионы, двигаясь в замагниченной плазме с тепловыми скоростями вдоль силовых линий, смогут пройти поперек постоянного магнитного поля расстояние порядка поперечной длины волны $\lambda \sim k_{\perp}^{-1}$ (поперечная скорость частиц равна $v_T H_1/H_0$), то они уменьшат электрические поля возмущений, и неустойчивость может исчезнуть.

Условие заметного влияния высокочастотного магнитного поля на неустойчивость может быть, таким образом, записано в виде

$$\frac{k_{\perp} v_T}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} > 1. \quad (1.2)$$

Мы намеренно опустили у v_T индекс «е» или «i», так как для одних неустойчивостей существенным оказывается движение электронов, для других — ионов.

В том случае, если рассматриваются диссипативные неустойчивости, условие (1.2) имеет другой вид. Действительно, теперь мы должны учесть, что частицы вдоль силовой линии движутся не с тепловой скоростью, а со скоростью $v \sim (T/m_e \nu) k_{\parallel}$, где ν — частота столкновений электронов с ионами для дрейфово-диссипативной неустойчивости, $k_{\parallel} = \frac{(kH)}{H_0} \simeq \frac{k_y H_1}{H_0} \left(\frac{k_y H_1}{H_0} > k_z \right)$. При этом условие влияния высокочастотного поля на дрейфово-диссипативную неустойчивость принимает вид [18]

$$\frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\nu \Omega} \cdot \left(\frac{H_1}{H_0} \right)^2 = \frac{k_{\perp}^2 D_e}{\Omega} \left(\frac{H_1}{H_0} \right)^2 > 1. \quad (1.3)$$

Здесь D_e — коэффициент диффузии электронов вдоль силовой линии. Для случая винтовой неустойчивости величину D_e следует заменить на D_A (D_A — коэффициент амбиполярной диффузии [18]).

Из критериев (1.2) и (1.3) следует, что чем ниже частота высокочастотного электрического поля, тем эффективнее данный метод. Минимально возможная частота $\Omega \gtrsim \max\{k_z v_{Te}, \omega\}$, где ω — частота стабилизируемой неустойчивости. Например, на дрейфовые неустойчивости можно влиять, используя частоту Ω , меньшую ионно-циклотронной ω_{Hi} . Единственное существенное требование — конфигурация полей должна быть строго определенной. Необходимо, чтобы возмущенное магнитное поле высокочастотной волны было перпендикулярно к основному полю H_0 и высокочастотная волна не возмущала плотности плазмы. Можно говорить о волне или о высокочастотном электрическом поле, приложенном к плазме, необходимо только, чтобы было создано заметное возмущение магнитного поля. Направленная скорость электронов вдоль постоянного магнитного поля определится из соотношения $\text{rot } H = \frac{4\pi e}{c} n_0 v_z$ и зависит от толщины скин-слоя. При этом выбираются такие условия, когда можно пренебречь движением электронов вдоль z ($v_{0z} \ll$

$\ll v_{Te}$), т. е. влиянием электрического поля. Поэтому можно говорить о стабилизации высокочастотным магнитным полем.

Остановимся на одном из типов волн, обладающих нужными свойствами. Это спиральные волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, частота которых расположена между электронно- и ионно-циклотронными частотами [19].

Такие волны иногда называют также геликонами, свистящими атмосфериками (вистлерами) или быстрыми магнитозвуковыми волнами. Магнитное поле \mathbf{H} в этих волнах перпендикулярно к основному \mathbf{H}_0 , электрическое поле перпендикулярно к волновому вектору \mathbf{k} и \mathbf{H} . Эффект подавления неустойчивости, связанный с колебаниями магнитной силовой линии, для геликонов безусловно будет существовать, как и в общем случае, рассмотренном выше. Однако скорость движения электронов поперек желобков концентрации при некоторых условиях будет определяться не столько этим, сколько спецификой колебаний электронов в геликоне. Дело в том, что электроны плазмы совершают при распространении геликона вдоль магнитного поля колебания, причем скорость поперечного движения электронов есть

$$v_e = \frac{c}{H_0^2} [E H_0] \sim \frac{c}{H_0} \cdot \frac{\Omega}{k_0 c} H_1 \cos \Omega t,$$

где k_0 — волновое число для геликона. Отсюда если за время Ω^{-1} электроны успеют сместиться поперек H_0 на расстояние порядка $\lambda_{\perp} \sim 1/k_{\perp}$, то влияние геликона на неустойчивость будет заметным, т. е.

$$\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{k_{\perp}}{k_0} > 1. \quad (1.4)$$

Сравним этот критерий с условием (1.1), полученным для стабилизации высокочастотным магнитным полем.

При выполнении соотношения

$$\frac{\Omega}{k_0 v_{Te}} > 1 \quad (1.5)$$

критерий (1.4) оказывается менее жестким. Это означает, что при выполнении неравенства (1.5) для геликона более существенным оказывается движение электронов поперек магнитного поля со скоростью $v_e = \frac{c}{H_0^2} [E H_0]$, чем их движение вдоль мгновенного направления магнитной силовой линии с тепловой скоростью [9].

В левой части неравенства (1.5) стоит, по сути дела, отношение фазовой скорости геликона к тепловой скорости электронов. Известно, что фазовая скорость геликона больше альфвеновской скорости, но меньше электронной альфвеновской скорости $v_{Ae} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 m_e}}$ [19],

а волновое число $k_0 = \frac{\omega_{pe}}{c} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_{He}}}$. Подставляя k_0 в условие (1.5), получаем

$$\frac{c}{v_{Te}} \cdot \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_{He}}} > 1 \quad (1.6)$$

или

$$\beta < \frac{\Omega}{\omega_{He}}; \quad \omega_{Hi} < \Omega < \omega_{He}, \quad (1.7)$$

где $\beta = \frac{8\pi n_0 T_e}{H_0^2}$.

Таким образом, в достаточно разреженной плазме, параметры которой удовлетворяют условию (1.7), электрическое поле волны типа геликон влияет на неустойчивые потенциальные колебания с $k_z \ll k$ сильнее высокочастотного магнитного поля.

Если рассматривать влияние высокочастотных полей на колебания с частотой $\omega \ll \omega_{Hi}$, то высокочастотное магнитное поле оказывает на эти колебания более сильное воздействие, так как его можно создать, окружая плазму проводниками с переменным током, частота которого меньше ионно-циклотронной.

§ 2. Решение кинетического уравнения в присутствии высокочастотных полей

2.1. Интегралы движения

Для нахождения дисперсионных соотношений для плазмы в высокочастотном поле необходимо сначала найти движение частиц в заданных высокочастотных полях и «равновесную» функцию распределения частиц, зависящую от интегралов движения. Затем находится поправка к равновесной функции распределения, возникающая из-за собственных колебаний плазмы, и определяются возмущения концентрации электронов и ионов. Пользуясь затем либо условием квазинейтральности, либо уравнением Пуассона, можно в линейном по возмущениям приближении найти дисперсионное соотношение, в которое будут входить параметры высокочастотных полей—их амплитуды и частоты. Кинетическое уравнение в бесстолкновительном случае имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \left(\mathbf{E}_\Sigma + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_\Sigma] + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \right) \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь α означает сорт частицы $\alpha = i, e$ для ионов и электронов соответственно, плазма находится в постоянном магнитном поле \mathbf{H}_0 . Электрическое \mathbf{E}_Σ и магнитное \mathbf{H}_Σ поля являются суммой высокочастотных \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 и самосогласованных полей собственных колебаний \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$E_{\Sigma} = E_1 + E$; $H_{\Sigma} = H_1 + H$. В нулевом приближении $E = H = 0$ кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(E_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, H_0 + H_1] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} = 0. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) представляет собой уравнение в частных производных, и его решение — произвольная функция от характеристик

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \quad (2.3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(E_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_1, H_0 + H_1] \right). \quad (2.3')$$

Уравнения (2.3) и (2.3') — уравнения движения заряженной частицы в заданных полях, зависящих от времени, а константы, получившиеся при интегрировании, — интегралы движения, от которых будет зависеть равновесная функция распределения $f_{\alpha 0}$. По сути дела, решив уравнение (2.3), мы найдем движение частиц для высокочастотного магнитного поля, для геликона при $\beta < \Omega/\omega_{HeH}$ т. д.

Рассмотрение будет проведено для каждого случая отдельно.

2.2. Интегрирование по траекториям для случая высокочастотного магнитного поля

Пусть плазма концентрации $n_0(x)$ помещена в магнитное поле, направленное вдоль оси z , и силовые линии магнитного поля совершают осцилляции в плоскости yoz , так что

$$H_1 = e_y H_1 \cos \Omega t. \quad (2.4)$$

Здесь e_y — единичный вектор вдоль оси y . Амплитуда H_1 зависит от x и определяется толщиной скин-слоя δ , которую будем считать заданной. Обсуждение влияния величины δ на решение и ее конкретное выражение приведены ниже. Рассмотрим сначала движение ионов для случая $\Omega \ll \omega_{Hi}$. В силу того что $m_i/m_e \gg 1$, высокочастотное магнитное поле не влияет на движение ионов вдоль силовых линий.

Обозначив h единичный вектор вдоль направления магнитного поля, заметим, что с точностью до членов порядка $(H_1/H_0)^2$ вектор $h = e_z + e_y \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t$. Тогда уравнение движения для ионов можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \omega_{Hi} [\mathbf{v}_i h]. \quad (2.5)$$

Умножая уравнение (2.5) скалярно на h , получаем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_i h) = -\Omega v_{yi} \frac{H_1}{H_0} \sin \Omega t. \quad (2.6)$$

Проектируя (2.5) на z , имеем

$$\frac{dv_{zi}}{dt} = \omega_{Hi} v_{xi} \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что при $\Omega \ll \omega_{Hi}$, $v_x \sim v_y$, $dv_{zi}/dt \gg d(v_i \mathbf{h})/dt$. Пренебрежем членами порядка $\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{\Omega}{\omega_{Hi}} \ll 1$ и $(H_1/H_0)^2 \ll 1$. Следовательно, уже отсюда видно, что интегралом движения скорее будет $(\bar{v}_i \mathbf{h})$, чем v_{zi} . Действительно, из уравнения (2.5) имеем

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{h} \mathbf{v}_{i\perp}] = \omega_{Hi} \left\{ \mathbf{v}_{\perp i} - \frac{1}{\omega_{Hi}} \left[\frac{d\mathbf{h}}{dt} \mathbf{v}_{\perp} \right] \right\}. \quad (2.8)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках порядка $\frac{\Omega}{\omega_{Hi}} \cdot \frac{H_1}{H_0}$. Таким образом, с указанной точностью уравнения (2.5) и (2.8) описывают вращение ионов вокруг мгновенного направления силовой линии с частотой ω_{Hi} . Теперь можно найти производную $\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_i \mathbf{h})$ и получить окончательное выражение для $(\mathbf{v}_i \mathbf{h})$:

$$(\mathbf{v}_i \mathbf{h}) = v_{\parallel}^0 + v_{\perp}^0 \frac{1}{2} \Omega \frac{H_1}{H_0} \times \\ \times \left\{ \frac{\sin [(\omega_{Hi} - \Omega) t + \alpha]}{\omega_{Hi} - \Omega} - \frac{\sin [(\omega_{Hi} + \Omega) t + \alpha]}{\omega_{Hi} + \Omega} \right\}. \quad (2.9)$$

Отношение второго слагаемого в выражении (2.9) к первому при $v_{\parallel}^0 \sim v_{\perp}^0$ порядка $\frac{\Omega}{\omega_{Hi}} \cdot \frac{H_1}{H_0}$, и можно считать, что интегралом движения является $(\mathbf{v}_i \mathbf{h})$, а не v_{zi} .

Полученный результат имеет простой физический смысл. Когда частота колебаний силовой линии Ω много меньше циклотронной частоты ω_{Hi} , ион успевает следить за положением силовой линии и осциллирует вместе с ней.

Точно также можно показать, что при $\Omega \gg \omega_{Hi}$ такой «подстройки» не происходит и интегралом движения будет v_{zi} . Это означает, что колебания силовой линии никак не влияют на движение ионов.

Рассмотрим теперь движение электронов. Считаем, что условие $\Omega \ll \omega_{He}$ выполняется всегда. Поэтому для электронов движение всегда будет замагниченным. Однако если поля создаются системой проводников, окружающих плазму, то электроны под действием высокочастотного поля совершают еще дополнительное осцилляторное движение вдоль постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 . Скорость такого дополнительного движения можно найти из уравнения $(\text{rot } H)_z = -\frac{4\pi}{c} en_0 v_z$ с точностью до членов порядка $\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{\Omega}{\omega_{He}}$, $\left(\frac{H_1}{H_0}\right)^2$ и $\frac{v_z}{v_{Te}}$ и определяется толщиной скин-слоя, который может достигать величины c/ω_{pi} [20], и граничными условиями ($\Omega < \omega_{Hi}$,

$\Omega < \frac{2\pi}{L}c$, где L — длина системы). Рассмотрим такие условия, когда $v_z \ll v_{Te} \sim v_{\parallel}^0$:

$$(\mathbf{v}_e \mathbf{h}) = v_{\parallel}^0; \quad (2.10)$$

$$\frac{dv_{\perp e}}{dt} = -\omega_{He} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{h}]; \quad (2.11)$$

$$\frac{d[\mathbf{v}_{\perp e} \mathbf{h}]}{dt} = \omega_{He} \mathbf{v}_{\perp e}. \quad (2.12)$$

Найдем теперь траектории движения электронов и ионов в обыкновенной волне. Для этого необходимо провести еще одно интегрирование по времени. Найдем сначала траектории ионов. Из уравнения (2.9) следует, что при $\Omega < \omega_{Hi}$ скорость ионов вдоль мгновенного направления силовой линии — константа, поэтому

$$\xi = v_{\parallel}^0 t + \xi_0, \quad (2.13)$$

где ξ — координата, отсчитываемая вдоль мгновенного направления силовой линии. Для нахождения координат x и y обратимся к уравнениям (2.8) и (2.5). Проектируя их на оси ξ и η , направленные перпендикулярно \mathbf{h} , получаем

$$\frac{dv_{\xi}}{dt} = \omega_{Hi} v_{\eta}; \quad \frac{dv_{\eta}}{dt} = -\omega_{Hi} v_{\xi}. \quad (2.14)$$

Интегрируя два последних уравнения, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = v_{\xi} = v_{\perp}^0 \sin(\omega_{Hi} t + \alpha); \quad (2.15)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v_{\eta} = v_{\perp}^0 \cos(\omega_{Hi} t + \alpha). \quad (2.16)$$

Здесь v_{\perp}^0 и α — две константы интегрирования, они же интегралы движения. Окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \cos(\omega_{Hi} t + \alpha) + \xi_0; \\ \eta &= \frac{v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \sin(\omega_{Hi} t + \alpha) + \eta_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Формула (2.13) и два последних выражения описывают движение частицы с постоянной скоростью v_{\parallel}^0 вдоль мгновенного направления силовой линии и вращение с частотой ω_{Hi} вокруг этого направления. Найдем теперь выражения для скоростей и координат в лабораторной системе. Учитывая, что силовая линия колеблется в плоскости y, z , причем угол наклона к оси z есть $\frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t$, имеем с точностью до членов порядка $(H_1/H_0)^2$:

$$v_x = v_{\xi} = v_{\perp}^0 \sin(\omega_{Hi} t + \alpha); \quad (2.18)$$

$$v_y = v_\eta + v_\xi \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t = v_\perp^0 \cos(\omega_{Hi} t + \alpha) + v_\parallel^0 \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t; \quad (2.19)$$

$$v_z = v_\xi - v_\eta \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t = v_\parallel^0 - v_\perp^0 \cos(\omega_{Hi} t + \alpha) \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t. \quad (2.20)$$

Интегрируя уравнения (2.18)–(2.20) еще раз по времени, найдем координаты частицы:

$$x = -\frac{v_\perp}{\omega_{Hi}} \cos(\omega_{Hi} t + \alpha) + x_0; \quad (2.21)$$

$$y = \frac{v_\perp}{\omega_{Hi}} \sin(\omega_{Hi} t + \alpha) + v_\parallel^0 \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t + y_0; \quad (2.22)$$

$$z = v_\parallel^0 t + v_\perp^0 \frac{H_1}{H_0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(\omega_{Hi} + \Omega)t + \alpha]}{\omega_{Hi} + \Omega} + \frac{\sin[(\omega_{Hi} - \Omega)t + \alpha]}{\omega_{Hi} - \Omega} \right\} + z_0. \quad (2.23)$$

Итак, равновесная функция распределения может зависеть от следующих констант: v_\parallel^0 , v_\perp^0 , а также, как это следует из полученных выражений для скоростей и координат, от комбинации:

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{v_\perp}{\omega_{Hi}} \cos(\omega_{Hi} t + \alpha) = \\ &= x + \frac{\left(v_y - v_\parallel^0 \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t \right)}{\omega_{Hi}} \cos(\omega_{Hi} t + \alpha); \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} Y &= y - \frac{v_\perp^0}{\omega_{Hi}} \sin(\omega_{Hi} t + \alpha) - v_\parallel^0 \frac{H_1}{H_0} \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t = \\ &= y - \frac{v_x}{\omega_{Hi}} - v_\parallel^0 \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Мы рассматриваем плазму, для которой все параметры слабо зависят от x . Кроме того, для упрощения выкладок можно считать, что продольная и поперечная температуры ионов одинаковы, тогда равновесная функция распределения ионов зависит лишь от двух интегралов движения: энергии частицы $\epsilon = \frac{1}{2}(v_\parallel^0 + v_\perp^0) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ и величины X , имеющей смысл обобщенного импульса в магнитном поле, т. е. $f = f_0(\epsilon, X)$.

Найдем теперь поправку к равновесной функции распределения в линейном приближении, считая, что в плазме могут существовать потенциальные колебания с частотой ω . Для этого линеаризуем кинетическое уравнение, считая, что

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 \quad \text{и} \quad E = -\nabla\Phi: \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m_i} \left\{ -\mathbf{v}\Phi + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}_0(t)] \right\} \frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{v}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Первое, второе и четвертое слагаемые можно объединить, тогда

$$\frac{\partial f_{\mathbf{1}}}{\partial t} = \frac{e}{m_i} \nabla \Phi \frac{\partial f_{0i}}{\partial v}. \quad (2.27)$$

Отметим, что полная производная по времени, стоящая в левой части, берется вдоль тех траекторий, которые только что определяли, следовательно, равновесная функция распределения f_{0i} не зависит от t . Интегрируя уравнение (2.27) по времени, получаем

$$f_{\mathbf{1}} = \frac{e}{m_i} \int_{-\infty}^t \nabla \Phi \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} dt'. \quad (2.28)$$

Сделаем фурье-преобразование по координатам, полагая

$$f_{\mathbf{1}} = \int e^{i\mathbf{k}r} f_{\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k}; \quad \Phi = \int e^{i\mathbf{k}r} \Phi_{\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k},$$

тогда с учетом того, что $k_z \ll k$, уравнение (2.28) примет вид

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{k}}(t) = & i \frac{e}{m_i} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t') \left[\frac{\partial f_{0i}}{\partial v} \{ k_x v_{\perp}^0 \sin(\omega_{Hi} t + \alpha) + k_y v_{\perp}^0 \cos(\omega_{Hi} t + \alpha) - \right. \\ & \left. - k_y v_{\parallel}^0 \frac{H_1}{H_0} \cos \Omega t' + k_z v_{\parallel}^0 \right] + \frac{k_y}{\omega_{Hi}} \cdot \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} \Big] \exp \left\{ i k_x \frac{v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} [\cos(\omega_{Hi} t + \alpha) - \right. \\ & \left. - \cos(\omega_{Hi} t' + \alpha)] + i k_y \frac{v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} [\sin(\omega_{Hi} t' + \alpha) - \sin(\omega_{Hi} t + \alpha)] + \right. \\ & \left. + i k_y \frac{v_{\parallel}^0}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} (\sin \Omega t' - \sin \Omega t) + i k_z v_{\parallel}^0 (t' - t) \right\} dt'. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Здесь опущены члены порядка H_1/H_0 там, где они являются малой добавкой, и удержаны в том месте, где они существенны, исходя из того, что величина k_y больше k_z . Кроме того, здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что характерная длина неоднородности $d \ln n_0 / dx$ много больше ларморовского радиуса иона. При этом оказывается возможным заменить $\partial f_{0i} / \partial X$ на $\partial f_{0i} / \partial x$ с точностью до членов порядка $\frac{v_{Ti}}{\omega_{Hi} a}$. Выражение для поправки к функции распределения можно упростить, взяв интеграл по частям:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{k}}(t) = & \frac{e}{m_i} \Phi_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} + \frac{e}{m_i} \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial f_{0i}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi_{\mathbf{k}}(t')}{\partial t'} + \right. \\ & \left. + i k_y \frac{\Phi_{\mathbf{k}}(t')}{\omega_{Hi}} \cdot \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} \right) \exp \left\{ i \frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}} \times \right. \\ & \left. \times [\sin(\omega_{Hi} t' + \alpha - \psi) - \sin(\omega_{Hi} t + \alpha - \psi)] + \right. \\ & \left. + i k_y \frac{v_{\parallel}^0}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} (\sin \Omega t' - \sin \Omega t) + i k_z v_{\parallel}^0 (t' - t) \right\} dt', \quad (2.30) \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} \psi = k_x/k_y$. Воспользуемся соотношением

$$e^{i \rho \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\rho) e^{i m \varphi} \quad (2.31)$$

и перепишем формулу (2.31) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{f}_k(t) = & \frac{e}{m_i} \Phi_k(t) \frac{\partial f_{0i}}{\partial \varepsilon} - \frac{e}{m_i} \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial f_{0i}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \Phi_k(t')}{\partial t'} + i \frac{k_y}{\omega_{Hi}} \cdot \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} \right) \times \\ & \times \sum_{n, p, q} J_n^2(\chi_i) J_p(\delta) J_q(\delta) \exp \{ i n \omega_{Hi} (t' - t) + i p \Omega t' - \\ & - i q \Omega t + i k_z v_{\parallel}^0 (t' - t) \} dt'. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\text{Здесь } \bar{f}_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(t) d\alpha; \quad \chi_i = \frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}}; \quad \delta = \frac{k_y v_{\parallel}^0}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}.$$

Для получения окончательного выражения для поправки к функции распределения нужно провести интегрирование по времени в формуле (2.32). В присутствии высокочастотного поля необходимо считать, что $\Phi_k(t)$ и $\bar{f}_k(t)$ зависят от времени следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k(t) &= e^{-i \omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m e^{i m \Omega t}; \\ \bar{f}_k(t) &= e^{-i \omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{f}_m e^{i m \Omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Подставляя выражение для $\Phi_k(t)$ и $\bar{f}_k(t)$ в уравнение (2.32), проведем интегрирование по времени. Приравнявая в полученном уравнении слагаемые с одинаковой зависимостью от времени, имеем

$$\begin{aligned} \bar{f}_{mi} = & \frac{e}{m_i} \Phi_m \frac{\partial f_{0i}}{\partial \varepsilon} + \frac{e}{m_i} \sum_{p, r, n} \frac{-\frac{\partial f_{0i}}{\partial \varepsilon} (r \Omega - \omega) + \frac{\partial f_{0i}}{\partial x} \cdot \frac{k_y}{\omega_{Hi}}}{p \Omega + k_z v_{\parallel}^0 - \omega + r \Omega + n \omega_{Hi}} \times \\ & \times J_n^2(\chi_i) J_p(\delta) J_{-m+p+r}(\delta) \Phi_r. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Из выражения (2.34) следует, что m -я гармоника поправки к функции распределения связана со всеми гармониками потенциала.

Если бы мы рассматривали случай $\Omega \gg \omega_{Hi}$, то ионы не успевали бы следить за осциллирующими силовой линией, и поэтому выражение для поправки к функции распределения было бы обычным, т. е. без высокочастотного поля ($\delta = 0$).

Найдем теперь поправку к функции распределения электронов. Для этого обратим внимание на то, что уравнения движения электронов и ионов очень похожи друг на друга. Поэтому, сделав соответствующие замены, можно сразу написать выражение для поправки к равновесной функции распределения электронов по скоростям:

$$f_{m_e} = -\frac{e}{m_e} \Phi_m \frac{\partial f_{0e}}{\partial \epsilon} - \frac{e}{m_e} \times \\ \times \sum_{p, r, n} \frac{\left[-\frac{\partial f_{0e}}{\partial \epsilon} (r\Omega - \omega) - \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \cdot \frac{k_y}{\omega_{He}} \right]}{p\Omega + k_z v_{\parallel}^0 - \omega + r\Omega - n\omega_{He}} \times \\ \times J_n^2(\chi_e) J_p(\delta) J_{-m+p+r\delta} \Phi_r. \quad (2.35)$$

Здесь

$$\chi_e = k_{\perp} v_{\perp}^0 / \omega_{He}$$

или

$$f_{es} = \frac{e}{m_e} \sum_{m, p, n} \frac{\frac{\partial f_{0e}}{\partial \epsilon} (-n\omega_{He} + p\Omega + k_z v_{\parallel}^0) + \frac{k_y}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial x}}{-n\omega_{He} + p\Omega + k_z v_{\parallel}^0 - \omega + n\Omega} \times \\ \times J_n^2(\chi_e) J_p(\delta) J_{p+m-s} \Phi_m. \quad (2.35')$$

При получении выражения (2.35) было использовано соотношение

$$\sum_p J_{p+n-r}(\delta) J_p(\delta) = J_{n-s}(0) = \delta_{n, s}.$$

Найденные в этом разделе выражения для f_{m_i} и f_{m_e} будут в дальнейшем использованы для получения дисперсионных соотношений $\omega(k)$.

2.3. Интегрирование по траекториям для случая геликона ($\beta < \Omega/\omega_{He}$)

Рассмотрим неограниченную в пространстве плазму с плотностью, меняющейся вдоль оси x . Вдоль постоянного магнитного поля распространяется быстрая магнитозвуковая волна, или геликон, с частотой Ω ($\omega_{Hi} \ll \Omega \ll \omega_{He}$), имеющая в этом частотном угловом интервале волновой вектор $k_0 = \frac{\omega_{pe}}{c} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_{He}}}$ и круговую поляризацию:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_1(z, t) &= H_1 [\mathbf{e}_x \sin(k_0 z - \Omega t) + \mathbf{e}_y \cos(k_0 z - \Omega t)]; \\ \mathbf{E}_1(z, t) &= \frac{\Omega}{k_0 c} H_1 [\mathbf{e}_x \cos(k_0 z - \Omega t) - \mathbf{e}_y \sin(k_0 z - \Omega t)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Исследуем устойчивость такого равновесного состояния по отношению к возмущениям с частотами $\omega \ll \Omega$ и волновыми векторами, удовлетворяющими неравенству $k_z \ll k_0$.

Уравнения характеристик для электронов (2.3) и (2.3') в равновесном состоянии можно довольно просто решить методом последовательных приближений, разлагая по степеням H_1/H_0 :

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_{\perp}^0 \cos(\omega_{He} t + \alpha) - \frac{H_1}{H_0} \left(v_{\parallel}^0 - \frac{\Omega}{k_0} \right) \times \\
 &\quad \times \frac{\omega_{He}}{\omega_{He} - \Omega + k_0 v_{\parallel}^0} \sin [k_0 z - t(\Omega - k_0 v_{\parallel}^0)]; \\
 v_y &= -v_{\perp}^0 \sin(\omega_{He} t + \alpha) + \frac{H_1}{H_0} \left(v_{\parallel}^0 - \frac{\Omega}{k_0} \right) \times \\
 &\quad \times \frac{\omega_{He}}{\omega_{He} - \Omega + k_0 v_{\parallel}^0} \cos [k_0 z - t(\Omega - k_0 v_{\parallel}^0)]; \\
 v_z &= v_{\parallel}^0 + \frac{H_1}{H_0} v_{\perp}^0 \frac{\omega_{He}}{\omega_{He} - \Omega + k_0 v_{\parallel}^0} \sin [k_0 z_0 + \alpha + \\
 &\quad + t(\omega_{He} - \Omega + k_0 v_{\parallel}^0)]; \\
 x &= x_0 + \frac{v_{\perp}^0}{\omega_{He}} \sin(\omega_{He} t + \alpha) + a \cos [k_0 z_0 - t(\Omega - k_0 v_{\parallel}^0)]; \\
 z &= z_0 + v_{\parallel}^0 t - \frac{a k_0 v_{\perp}^0}{\omega_{He} - \Omega + k_0 v_{\parallel}^0} \cos [k_0 z_0 + \alpha + \\
 &\quad + t(\omega_{He} - \Omega + k_0 v_{\parallel}^0)]; \\
 y &= y_0 + \frac{v_{\perp}^0}{\omega_{He}} \cos(\omega_{He} t + \alpha) + a \sin [k_0 z_0 - t(\Omega - k_0 v_{\parallel}^0)],
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

где $a = \frac{H_1}{H_0 k_0} \cdot \frac{\omega_{He}}{\omega_{He} - \Omega + k_0 v_{\parallel}^0} \simeq \frac{H_1}{H_0 k_0}$, так как $\omega_{He} \gg \Omega \gg k_0 v_{\parallel}^0$.

При помощи найденных траекторий электронов в поле электромагнитной волны можно найти интегралы движения:

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon &= \left(v_x - \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{\Omega}{k_0} \sin [k_0 z_0 - t(\Omega - k_0 v_{\parallel}^0)] \right)^2 + \\
 &\quad + \left(v_y + \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{\Omega}{k_0} \cos [k_0 z_0 - t(\Omega - k_0 v_{\parallel}^0)] \right)^2 + \\
 &\quad + v_z^2 = (v_{\perp}^0)^2 + (v_{\parallel}^0)^2 + o\left(\frac{H_1^2}{H_0^2}\right).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Таким образом, интегралами движения с точностью до H_1^2/H_0^2 являются ε , x_0 , y_0 , z_0 . Как и в разд. 2.2, будем считать, что равновесная функция распределения зависит от ε и $X = x_0$, т. е. $f_{0\varepsilon} = f_{0\varepsilon}(\varepsilon, X)$.

Поправка к равновесной функции находится так же, как и в предыдущем разделе. Разница состоит лишь в том, что траектории для данного случая отличаются от того, что было прежде. Поэтому, например, производную $\partial f_{0e}/\partial v$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} = & \frac{\partial f_{0e}}{\partial e} \left\{ \mathbf{e}_x \left[v_{\perp}^0 \cos(\omega_{He} t + \alpha) + v_{\parallel}^0 \frac{H_1}{H_0} \times \right. \right. \\ & \times \sin(\Omega t - k_0 v_{\parallel}^0 t - k_0 z_0) \left. \right] + \mathbf{e}_y \left[-v_{\perp}^0 \sin(\omega_{He} t + \alpha) + \right. \\ & \left. + v_{\parallel}^0 \frac{H_1}{H_0} \cos(\Omega t - k_0 v_{\parallel}^0 t - k_0 z_0) \right] + \mathbf{e}_z \left[v_{\parallel}^0 - \right. \\ & \left. - v_{\perp}^0 \frac{H_1}{H_0} \sin(\Omega t - k_0 v_{\parallel}^0 t - \omega_{He} t - \alpha - k_0 z_0) \right] \left. \right\} - \\ & - \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \cdot \frac{1}{\omega_{He}} \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь, как и в формуле (2.29), мы заменим $\partial f_{0e}/\partial X$ на $\partial f_{0e}/\partial x$. В присутствии геликона коэффициенты уравнения являются периодическими функциями координаты z и времени t . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \exp\{-i\omega t + in(k_0 z - \Omega t)\}; \\ f_k(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp\{-i\omega t + in(k_0 z - \Omega t)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Проводя интегрирование в уравнении (2.28) с учетом (2.39) и (2.40), можно получить

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} dt f_1 \exp\{-ikr + i\omega t - i(k_0 z - \Omega t)s\} = \\ &= -i e \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} dt \sum_{n, m, q=-\infty}^{\infty} \Phi_n \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \frac{\partial f_{0e}}{\partial e} [m\omega_{He} + (k_z + nk_0)v_{\parallel}^0 + \right. \\ & \left. + k_{\perp} v_{\parallel}^0 \frac{H_1}{H_0} \cos(k_0 z_0 - \psi - \Omega t' + k_0 v_{\parallel}^0 t')] - \frac{k_y}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \right\} \times \\ & \times J_m(\chi_e) J_q(\chi_e) \exp\{i[k_0 z_0(n-s) + (t'-t)(k_z v_{\parallel}^0 - \omega) + \\ & + k_0 v_{\parallel}^0(nt' - st) - \Omega(nt' - st) + \omega_{He}(mt' - qt) + \\ & + (m-q)\left(\alpha - \psi + \frac{\pi}{2}\right) + ak_{\perp} \sin(k_0 z_0 - \psi - \Omega t' + k_0 v_{\parallel}^0 t') - \\ & - ak_{\perp} \sin(k_0 z_0 - \psi - \Omega t + k_0 v_{\parallel}^0 t)]\}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $\psi = \arctg\left(-\frac{k_x}{k_y}\right)$; $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \gg k_z$.

Для получения дисперсионного соотношения нам потребуется вычислить возмущение концентрации электронов $n_e = \int f_1 dv_{\parallel}^0 \times \times v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 d\alpha$. В данном случае нам будет удобно провести интегрирование по поперечным скоростям и углу α , считая функцию распределения максвелловской с температурой T . Выражение для поправки к функции распределения, зависящей при этом только от v_{\parallel} , будет иметь более компактный вид:

$$f_s(v_{\parallel}^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f_s v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 d\alpha = i e^{-\frac{\Omega}{2\pi} t} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} dt \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \Phi_n I_m(b) \times \\ \times e^{-b} \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{f_{0e}(v_{\parallel}^0)}{T} [\omega_{He} + (k_z + k_0 n) v_{\parallel}^0 + \right. \\ \left. + k_{\perp} v_{\parallel}^0 \frac{H_1}{H_0} \cos(k_0 z_0 - \psi - \Omega t' + k_0 v_{\parallel}^0 t')] + \right. \\ \left. + \frac{ck_y}{eH_0} \cdot \frac{\partial f_{0e}(v_{\parallel}^0)}{\partial x} \right\} \exp \{ i [k_0 z_0 (n-s) + (t' - t) \times \\ \times (k_z v_{\parallel}^0 - \omega + n\omega_{He}) + (k_0 v_{\parallel}^0 - \Omega)(nt' - st) + \\ + \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{k_{\perp}}{k_0} (\sin(k_0 z_0 - \psi - \Omega t' + k_0 v_{\parallel}^0 t') - \\ - \sin(k_0 z_0 - \psi - \Omega t + k_0 v_{\parallel}^0 t))] \} dt'.$$

Здесь $b = k_{\perp} T / m_e \omega_{He}$, где $v_{Te} = \sqrt{2T_e / m_e}$ — тепловая скорость электрона; $I_m(b)$ — модифицированная функция Бесселя.

В сумме (2.42) слагаемое $m = 0$ соответствует фурье-компоненте возмущенной функции распределения, получающейся из дрейфового кинетического уравнения $f_s^{sp}(v_{\parallel}^0)$ [20]. Вычислим отдельно эту поправку. Производя интегрирование по частям, как в предыдущем разделе, эту часть поправки к равновесной функции распределения можно привести к виду

$$f_s^{sp} = I_0(b) e^{-b} \left[\frac{e\Phi_s}{T} \cdot \frac{v_{\parallel}^0}{v_{\parallel}^0 - \frac{\Omega}{k_0}} f_{0e}(v_{\parallel}^0) + \right. \\ \left. + i \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} dt \sum_{n, p, r} \frac{e\Phi_n}{T} \left[\frac{v_{\parallel}^0 \left(\omega - k_z \frac{\Omega}{k_0} \right)}{v_{\parallel}^0 - \frac{\Omega}{k_0}} f_{0e} + \frac{ck_y T}{eH_0} \cdot \frac{\partial f_{0e}(v_{\parallel}^0)}{\partial x} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^t dt' J_p(\mu) J_r(\mu) \exp \{ i [(t' - t) (k_z v_{\parallel}^0 - \omega) + \right. \\ \left. + (k_0 v_{\parallel}^0 - \Omega)(nt' - st) + (p-r)(k_0 z_0 - \psi) + (rt - pt')(\Omega - k_0 v_{\parallel}^0)] \} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e\Phi_s}{T} \cdot \frac{v_{\parallel}^0}{v_{\parallel}^0 - \frac{\Omega}{k_0}} \cdot f_{0e}(v_{\parallel}^0) + \\
&+ \left[\frac{v_{\parallel}^0 \left(\omega - k_z \frac{\Omega}{k_0} \right)}{v_{\parallel}^0 - \frac{\Omega}{k_0}} f_{0e}(v_{\parallel}^0) + k_y \frac{cT}{eH_0} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \right] \times \\
&\times \sum_{n, p=-\infty}^{\infty} \frac{e\Phi_n}{T} \cdot \frac{J_p(\mu) J_{n-s+p}(\mu) e^{i\beta(n-s)}}{k_z v_{\parallel}^0 - \omega + (n+p) (k_0 v_{\parallel}^0 - \Omega)}, \quad (2.43) \\
&\mu = \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{k_{\perp}}{k_0}.
\end{aligned}$$

Найдем теперь вклад в поправку к равновесной функции распределения от циклотронных гармоник, т. е. от слагаемых в сумме (2.42) с $m \neq 0$. Учитывая соотношение (2.31) и производя интегрирование по t и t' в выражении (2.42) для $m \neq 0$, получаем

$$\begin{aligned}
f_s(v_{\parallel}^0) &= f_s^{\text{ДР}}(v_{\parallel}^0) + e \sum_{m \neq 0} I_m(b) e^{-b} \sum_{n+p=s+r} \Phi_n J_p(\mu) J_r(\mu) \times \\
&\times e^{i\beta(r-p)} \frac{\frac{f_{0e}}{T} [m\omega_{He} + (p+n) k_0 v_{\parallel}^0 + k_z v_{\parallel}^0] + k_y \frac{cT}{eH_0} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial x}}{m\omega_{He} + k_z v_{\parallel}^0 - \omega + (n+p) (k_0 v_{\parallel}^0 - \Omega)}. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Поскольку $\omega_{He} \gg \Omega, k_0 v_{\parallel}^0, k_z v_{\parallel}^0, \omega$, а функции Бесселя $J_n(\mu)$ при увеличении порядка n для значений аргумента $\mu \sim 1$ (а именно такие значения мы будем рассматривать) быстро стремятся к нулю, то в числителе и знаменателе выражения (2.44) можно оставить лишь члены $m\omega_{He}$. Тогда с учетом соотношения между функциями Бесселя [21]

$$\begin{aligned}
f_s(v_{\parallel}^0) &= f_s^{\text{ДР}}(v_{\parallel}^0) + \sum_{m \neq 0} I_m(b) e^{-b} \sum_{n, p} \frac{e\Phi_n}{T} \times \\
&\times J_p(\mu) J_{p+n-s}(\mu) f_{0e}(v_{\parallel}^0) e^{i(n-s)\beta} = \\
&= f_s^{\text{ДР}}(v_{\parallel}^0) + [1 - I_0(b) e^{-b}] \sum_{n, p} \frac{e\Phi_n}{T} \times \\
&\times J_p(\mu) J_{p+n-s}(\mu) e^{-i(n-s)\beta} = \\
&= f_s^{\text{ДР}}(v_{\parallel}^0) + \frac{e\Phi_s}{m} \cdot \frac{k_{\perp}}{\omega_{He}^2} f_{0e}(v_{\parallel}^0). \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Выражение для поправки к функции распределения будет в дальнейшем использовано при получении дисперсионных соотношений.

2.4. Интегрирование по траекториям для случая высокочастотного электрического поля

Найдем поправку к равновесным функциям распределения электронов и ионов для следующей постановки задачи. Пусть вдоль постоянного магнитного поля течет переменный по времени ток, созданный переменной разностью потенциалов. Переменный ток может создаваться также полем падающей на плазму волны. В такой постановке задача рассматривалась в разд. 2.1; однако там считалось, что частота изменения поля во времени мала по сравнению с ω_{He} , ω_{pe} , т. е. частота ВЧ-поля была мала по сравнению с характерными собственными частотами плазмы. Поэтому оказалось возможным пренебречь движением частиц вдоль постоянного магнитного поля при достаточно малом значении амплитуды ВЧ-поля.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда этим движением пренебречь нельзя, оно существенно и определяет поведение плазмы. Такое положение может создаться либо при достаточно больших амплитудах высокочастотного поля, либо когда частота высокочастотного поля, например, больше ω_{He} , и электроны уже не следят за осцилляциями силовой линии. Такая ситуация возможна и в случае отсутствия постоянного поля \mathbf{H}_0 .

Скорость одной из компонент плазмы при этом может значительно возрасти и превысить тепловую скорость данной компоненты, что приведет, в свою очередь, к возможности раскачки неустойчивости. Следует заметить, однако, что если частота раскачиваемой неустойчивости значительно ниже частоты внешнего поля, то инкременты неустойчивости будут уменьшены по сравнению со случаем постоянного электрического поля. В принципе могут несколько измениться и пороги неустойчивости.

Обратимся сначала к решению задачи в простейшей постановке. Считаем, что частота внешнего электрического поля Ω и частота ω много больше ω_{He} , т. е. пренебрежем влиянием магнитного поля на электроны и ионы. Найдем траектории движения частиц в переменном электрическом поле. Пусть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \Omega t. \quad (2.46)$$

Тогда для скоростей частиц имеем соответственно

$$\mathbf{v}_\alpha = - \frac{e_\alpha}{m_\alpha \Omega} \mathbf{E}_0 \cos \Omega t + \mathbf{v}_{\alpha 0}, \quad (2.47)$$

где индекс « α » принимает значения i и e . В силу малости отношения m_e/m_i можно считать, как это следует из выражения (2.47), что внешнее электрическое поле на ионы практически не действует, $v_{Ti} \gg \frac{eE_0}{m_i \Omega}$. В этом случае равновесная функция распределения электронов будет зависеть от следующего интеграла движения:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[v_\perp^{02} + \left(v_\parallel^{02} - \frac{e}{m_e \Omega} E_0 \cos \Omega t \right)^2 \right]. \quad (2.48)$$

Значки « \parallel » и « \perp » означают направления вдоль и поперек направления внешнего поля E_0 . Функция распределения ионов зависит от $(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)/2$. Найдем поправку к равновесной функции распределения электронов. Для этого необходимо предварительно определить зависимость координат частиц от времени. Проинтегрировав уравнение (2.47) по времени и выбрав ось z вдоль направления вектора E , получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_x^0 t + x_0; \\ y &= v_y^0 t + y_0; \\ z &= -\frac{eE_0}{m_e \Omega^2} \sin \Omega t + v_z^0 t + z_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Пользуясь уравнениями (2.49), можно записать уравнение для поправки к функции распределения

$$f_{pe} = \sum_{n,s} \frac{-\frac{e}{m_e} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{kv})}{(n+s)\Omega - \omega + (\mathbf{kv})} J_n(\delta) J_{n-p+s}(\delta) \Phi_s. \quad (2.50)$$

Здесь величина $\delta = (\mathbf{kE})e/m\Omega^2$. Поправка к функции распределения ионов может быть получена обычным способом, как в отсутствие высокочастотного поля. Единственное отличие состоит в том, что повсюду величину ω следует заменить $\omega - p\Omega$:

$$f_{pi} = \frac{e}{m_i} \Phi_p \frac{\partial f_{0i}}{\partial \varepsilon} - \frac{e}{m_i} \cdot \frac{\frac{\partial f_{0i}}{\partial \varepsilon}(-\omega + p\Omega)}{kv - \omega + p\Omega} \Phi_p. \quad (2.51)$$

Отметим, что формулу (2.51) можно также вывести из выражения (2.50), заменив m_e на m_i и e на $-e$. Воспользовавшись затем малостью аргумента у функций Бесселя, получим формулу (2.51). Стремление к нулю аргумента функции Бесселя для ионов соответствует пренебрежению влиянием высокочастотного электрического поля на ионы.

В том случае, если плазма помещена в сильное магнитное поле, такое, что циклотронная частота электронов ω_{He} сравнима с частотой Ω , формулу (2.50) для поправки к равновесной функции распределения следует заменить следующей:

$$\begin{aligned} f_{pe} &= -\frac{e}{m_e} 2\pi \sum_{n,m,s} \Phi_s J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{He}} \right) J_m(\delta) \times \\ &\times J_{m+s-p}(\delta) \frac{\left(-\frac{n\omega_{He}}{v_{\perp}^0} \cdot \frac{\partial}{\partial v_{\perp}^0} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}^0} \right) f_{0e}}{\omega + n\omega_{He} - k_{\parallel} v_{\parallel}^0 + (m+s)\Omega}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Соотношение (2.52) может быть получено тем же способом, что и формула (2.34). Влияние магнитного поля сводится к появлению в резонансных знаменателях слагаемого $n\omega_{He}$ и функции Бесселя $J_n^2(\chi_e)$, где $\chi_e = k_{\perp} v_{\perp 0} / \omega_{He}$.

Выражение для поправки к функции распределения ионов в магнитном поле получают аналогичным способом

$$f_{pi} = -\frac{e}{m_i} \Phi_p \frac{\partial f_{oi}}{\partial \mathbf{e}} + \frac{e}{m_i} \sum_n J_n^2(\chi_i) \frac{\frac{\partial f_{oi}}{\partial \mathbf{e}} (\omega + p\Omega)}{k\mathbf{v} - \omega + p\Omega + n\omega_{Hi}}. \quad (2.53)$$

Отметим, что мы здесь считали плазму однородной, и поэтому в выражениях для поправки к функциям распределения отсутствуют слагаемые $\frac{\partial f_{oi}}{\partial x} \cdot \frac{k_y}{\omega_{Hi}}$ или $\frac{\partial f_{oe}}{\partial x} \cdot \frac{k_y}{\omega_{He}}$. Учет неоднородности в этом смысле приведет лишь к появлению соответствующих слагаемых в формулах (2.50)—(2.53), вид которых можно установить довольно просто, сравнивая выражения (2.52), (2.53) и (2.34), (2.35).

В заключение этого раздела отметим, что обычно при получении дисперсионных уравнений для случая высокочастотного электрического поля принят иной метод изложения [7, 11, 12]. При интегрировании кинетического уравнения авторы вводят, например, в отсутствие постоянного магнитного поля новую функцию:

$$\psi_{\alpha} = \exp \left\{ i \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} k \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' E(t'') \right\} \times \times f_{k\alpha} \left(t, v_{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^t dt E(t') \right). \quad (2.54)$$

Здесь $f_{k\alpha}$ — поправка к функции распределения частиц сорта α . Решая затем уравнение относительно ψ_{α} , можно найти дисперсионное соотношение. Методы интегрирования по траекториям полностью эквивалентны методу, использованному в цитированных работах, и оба они приводят к одинаковым результатам.

§ 3. Получение дисперсионных соотношений

В этом разделе будут получены дисперсионные соотношения для колебаний с частотами $\omega \ll \Omega$. Для этого необходимо вычислить возмущение концентраций электронов и ионов через найденные в § 2 поправки к равновесным функциям распределения и подставить затем их в уравнение Пуассона. Вывод дисперсионных соотношений для различных типов высокочастотных полей имеет свои специфические особенности и поэтому излагается отдельно.

3.1. Дисперсионные соотношения для случая высокочастотного магнитного поля

Для получения дисперсионных соотношений в этом случае, с учетом того что $\omega \ll \Omega$, необходимо проинтегрировать выражения (2.34) и (2.35) по скоростям и затем разложить их по степеням отношения ω/Ω : Так как мы считали $\Omega \ll \omega_{He}$, то в сумме по n следует оставить лишь одну гармонику $n = 0$. Считая равновесную функцию распределения по скоростям максвелловской, получаем следующее выражение для возмущения концентраций:

$$n_{si} = -\frac{e}{T_i} \Phi_s - \frac{e}{T_i} I_0(\rho_i) e^{-\rho_i} \sum_{p,m} \Phi_m \int_{-\infty}^{\infty} J_p(\delta) J_{p+m-s}(\delta) \times \\ \times \frac{\omega - m\Omega + \omega_i^* \left(1 - \eta/2 + \eta \frac{v_{\parallel}^2}{v_{Ti}^2}\right)}{(p+m)\Omega + k_z v_{\parallel}^0 - \omega} f_{0i}(v_{\parallel}^0) dv_{\parallel}^0, \quad (3.1)$$

$$\text{где } \rho_i = \frac{k_{\perp}^2 T_i}{\omega_{Hi}^2}; \quad \omega_i^* = \frac{cT_i}{eH_0} \cdot \frac{d \ln n_0}{dx}; \quad \eta = \frac{d \ln T_i}{d \ln n_0};$$

I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента; T_i — температура ионов; v_{Ti} — их тепловая скорость. Напомним, что полученное выражение для поправки справедливо при $\Omega \ll \omega_{Hi}$. Выражение для возмущения концентрации электронов непосредственно получается из формулы (3.1) заменой индекса « i » на « e » и знака заряда. В том случае, если $\Omega > \omega_{Hi}$, выражение для возмущения концентрации ионов получается при интегрировании формулы (2.34) по скоростям, причем аргументы функций Бесселя должны быть положены равными нулю, так как высокочастотное магнитное поле на ионы никак не влияет:

$$\frac{n_{si}}{n_0} = -\frac{e}{T_i} \Phi_s - \frac{e}{T_i} \Phi_s \times \\ \times \sum_n \int \frac{(\omega - s\Omega) + \omega_i^* \left(1 - \eta/2 + \eta \frac{v_{\parallel}^2}{v_{Ti}^2}\right)}{s\Omega + k_z v_{\parallel}^0 - \omega} f_{0i}(v_{\parallel}^0) dv_{\parallel}^0 = \Delta_i(\omega - s\Omega). \quad (3.2)$$

Здесь мы ввели обозначение $\Delta_i(\omega - s\Omega)$, означающее возмущение концентрации ионов, полученное без учета высокочастотного поля, в котором частота ω заменена $\omega - s\Omega$.

Для вывода дисперсионного соотношения для потенциальных колебаний подставляем найденные значения n_{se} и n_{si} в уравнение Пуассона:

$$k^2 \Phi_s = 4\pi e (n_{st} - n_{se}). \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (2.57) представляет собой бесконечную систему однородных линейных уравнений относительно величин Φ_s . Условием нетривиальности решения является обращение бесконечного детерминанта, составленного из коэффициентов уравнений, в нуль. В силу быстрого убывания функций Бесселя при больших значениях порядка детерминант быстро сходится.

Для того чтобы продемонстрировать принцип вывода дисперсионного уравнения, рассмотрим простой частный случай: когда длины волн велики по сравнению с ларморовским радиусом электронов, плотность плазмы однородна и высокочастотное магнитное поле на ионы не влияет. Кроме того, для упрощения выкладок будем рассматривать квазинейтральные колебания. Тогда уравнение Пуассона (3.3) заменится условием квазинейтральности $n_{si} = n_{se}$, а бесконечная система уравнений имеет следующий вид:

$$\Delta_i(\omega - s\Omega) \Phi_s = \frac{e}{T_e} \Phi_s - \frac{e}{T_e} \sum_{p, m} \Phi_m \int \frac{J_p(\delta) J_{p+m-s}(\delta)}{(\rho+m)\Omega + k_z v_{\parallel}^0 - \omega} \times \\ \times (\omega - m\Omega) f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}. \quad (3.4)$$

Аргументы функций Бесселя зависят от скоростей согласно определению (2.32), поэтому интеграл по продольной скорости не сводится просто к функции Крампа. Разложим систему уравнений (3.4) по степеням ω/Ω :

$$\left[\Delta_i(\omega - s\Omega) - \frac{e}{T_e} \right] \Phi_s = \frac{e}{T_e} \sum_m \Phi_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\Omega J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta)}{k_z v_{\parallel} - \omega} \times \\ + f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} - \frac{e}{T_e} \sum_m \Phi_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta)}{k_z v_{\parallel} - \omega} \times \\ \times f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} + \frac{e}{T_e} \sum_{m \neq -p} \Phi_m \int_{-\infty}^{\infty} J_p(\delta) J_{p+m-s}(\delta) f_{0e} dv_{\parallel} \frac{m}{m+p}. \quad (3.5)$$

Разложение (3.5) позволяет сразу указать симметрию Φ_s , если учесть, что, согласно (3.2), $n_{si} \sim n_{0i} \frac{\omega}{\Omega}$.

Действительно, оставляя в сумме по m и p самое большое слагаемое, получаем

$$\left(\Delta_i(\omega) \delta_{s0} - \frac{e}{T_e} \right) \Phi_s = \frac{e}{T_e} \sum_m \Phi_m m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta)}{k_z v_{\parallel} - \omega} \times \\ \times f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}. \quad (3.6)$$

откуда следует, что $\Phi_{-s} = (-1)^s \Phi_s$. Сумма $\sum_m J_{-m} m \Phi_m$ при этом обращается в нуль. Указанное соотношение для амплитуд Φ_s справед-

ливо с точностью до членов порядка ω/Ω . Поэтому в следующем приближении мы должны написать:

$$\Phi_s = \psi_s^{(+)} + \frac{\omega}{\Omega} \psi_s^{(-)}; \quad \Phi_{-s} = \left[\psi_s^{(+)} - \frac{\omega}{\Omega} \psi_s^{(-)} \right] (-1)^s \quad (3.7)$$

или

$$\psi_s^{(+)} = \frac{1}{2} [\Phi_s + (-1)^s \Phi_{-s}]; \quad \psi_s^{(-)} = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\omega} [\Phi_s - (-1)^s \Phi_{-s}].$$

Вводимые нами функции оказываются более удобными, чем Φ_s , и позволяют освободиться в уравнениях от членов порядка Ω/ω . Это соответствует определенной комбинации столбцов определителя. Выписывая систему (3.5) для моды s и $(-s)$ и умножая второе соотношение на $(-1)^s$, можно получить следующую систему уравнений для $\psi_s^{(+)}$ и $\psi_s^{(-)}$:

$$\begin{aligned} & \left[\Delta_i(\omega) \delta_{s0} \frac{T_e}{e} - 1 \right] \psi_s^{(+)} = \sum_{m>0} \psi_m^{(-)} m \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta)}{\omega - k_z v_{\parallel}} f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} - \sum_{m>0} \psi_m^{(+)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta)}{\omega - k_z v_{\parallel}} f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} + \sum_{\substack{m \neq -p \\ m>0}} \left(\frac{m}{m+p} \right) \times \\ & \times \psi_m^{(+)} \int_{-\infty}^{\infty} J_p(\delta) [J_{p+m-s}(\delta) + (-1)^s J_{p+m-s}(\delta)] f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}; \quad (3.8) \\ & - \psi_s^{(-)} = \sum_{\substack{m \neq -p \\ m>0}} \frac{m}{m+p} \psi_m^{(-)} \int_{-\infty}^{\infty} J_p(\delta) [J_{p+m-s}(\delta) - \\ & - (-1)^s J_{p+m-s}(\delta)] f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}. \end{aligned}$$

Уравнение для амплитуд $\psi_m^{(-)}$ отделилось из-за того, что возмущение концентрации ионов не входит в это уравнение; отсюда следует, что $\psi_m^{(-)} = 0$. В этом также легко убедиться еще следующим образом: даже если бы возмущение концентрации ионов входило в уравнение для $\psi_m^{(-)}$, но n_{si} не зависело бы от ω , то все равно необходимо положить $\psi_m^{(-)} = 0$, так как уравнение для $\psi_m^{(-)}$ не содержит ω .

Окончательная система уравнений для $s \geq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{T_e}{e} \Delta_i(\omega) \delta_{s0} - 1 \right] \psi_s^{(+)} = - \sum_{m>0} \psi_m^{(+)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta)}{\omega - k_z v_{\parallel}} \times \\ & \times f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} + \sum_{\substack{m \neq -p \\ m>0}} \left(\frac{m}{m+p} \right) \psi_m^{(+)} \int_{-\infty}^{\infty} J_p(\delta) [J_{p+m-s}(\delta) + \\ & + (-1)^s J_{p+m-s}(\delta)] f_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Для того чтобы найти дисперсионное соотношение в замкнутом виде, необходимо воспользоваться еще одним параметром малости. Как мы уже показывали при обсуждении физической картины подавления неустойчивостей, заметное влияние высокочастотных полей на неустойчивости плазмы возможно в случае, когда $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \times \frac{H^1}{H_0} > 1$. Рассмотрим случай, когда величина $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ в несколько раз превышает единицу. При этом окажется, что из-за присутствия под знаком интеграла функции Бесселя интеграл заметно уменьшит свою величину (например, $\int_0^\infty \frac{J_0^2(v_{\parallel}) \dot{f}_{0e} dv_{\parallel}}{\omega - k_z v_{\parallel}}$ при $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} = 2$ из-за $J_0^2(\delta)$ уменьшается примерно в четыре раза). При этом детерминант представляет собой следующее: по диагонали стоят члены типа $A + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, $A \sim 1$, а остальные члены порядка ε . Раскрывая детерминант, найдем окончательный вид дисперсионного уравнения. В первом приближении по ε имеем уравнение

$$\frac{T_e}{e} \Delta_i(\omega) - 1 = - \int \frac{\omega J_0^2(\delta)}{\omega - k_z v_{\parallel}} \dot{f}_{0e}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}. \quad (3.10)$$

В следующем приближении учтем все квадратичные по ε члены. Тогда дисперсионное уравнение представит собой следующую сумму произведений:

$$(A_{00} + \varepsilon_{00})(A_{11} + \varepsilon_{11}) \dots (A_{nn} + \varepsilon_{nn}) - \varepsilon_{01} \varepsilon_{10} (A_{22} + \varepsilon_{22})(A_{33} + \varepsilon_{33}) - \\ - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} (A_{00} + \varepsilon_{00})(A_{33} + \varepsilon_{33}) \dots = 0.$$

Здесь индексы букв внизу обозначают строку и столбец соответственно. В первом приближении по ε , пренебрегая членами ε^2 , получаем $A_{00} + \varepsilon_{00} = 0$, что соответствует дисперсионному соотношению (3.10). Находя теперь поправку к уравнению (3.10), получаем, что она порядка ε^2 . Обозначая поправку $\delta A_{00} + \delta \varepsilon_{00}$, имеем $\delta A_{00} + \delta \varepsilon_{00} = \frac{\varepsilon_{01} \varepsilon_{10}}{A_{11} + \varepsilon_{11}}$.

Правая часть берется в точке, где $A_{00} + \varepsilon_{00} = 0$. Таким образом, при $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} > 1$ в детерминанте существенным членом оказывается единственный $A_{00} + \varepsilon_{00}$. Этот же член — главный и в другом предельном случае $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \ll 1$, так как в дисперсионном соотношении (3.9) обращаются в нуль все слагаемые, кроме тех, которые содержат $J_0^2(\delta)$. Поэтому получается, что дисперсионное соотношение (3.10) верно в пределе как малых, так и больших значений величины $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$. Отметим, что большим значением указанного параметра может считаться значение $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ по-

рядка двух. Для такого значения $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ решения дисперсионного соотношения $A_{00} + \varepsilon_{00} = 0$ и $(A_{00} + \varepsilon_{00})(A_{11} + \varepsilon_{11}) = \varepsilon_{01}\varepsilon_{10}$ будут различаться на несколько процентов. Это обстоятельство связано с тем, что функция Бесселя $J_m(\delta)$ при $m \neq 0$ достигает своего максимального значения при $\delta \sim m$, причем этот максимум тем меньше, чем больше m [24], а так как $f_{0e}(v_{\parallel})$ при $v > v_{Te}$ экспоненциально мала, то вклад от больших значений m очень мал. Мы будем пользоваться далее в качестве дисперсионного соотношения уравнением (3.10), считая, что параметр $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ в несколько раз превышает единицу.

3.2. Дисперсионное соотношение для плазмы, находящейся в поле спиральной волны (геликона) ($\beta < \Omega/\omega_{He}$)

В разд. 2.3 была найдена поправка к равновесной функции распределения электронов по скоростям в присутствии высокочастотного поля спиральной волны, или геликона.

При этом оказалось, что, в отличие от предыдущего случая, аргументы функций Бесселя μ , согласно формуле (2.43), не зависят от скорости: $\mu = \frac{k_{\perp}}{k_0} \cdot \frac{H_1}{H_0}$. Поэтому при определении возмущения концентрации электронов интегрирование по скоростям производится как и в отсутствие высокочастотного поля, а функции Бесселя являются просто коэффициентами. В этом случае оказывается возможным, используя свойства функций Бесселя, вычислить бесконечный детерминант, не предполагая, что $\mu > 1$. Дисперсионное соотношение для потенциальных колебаний плазмы получается подстановкой выражений для возмущенной плотности электронов и ионов в уравнение Пуассона (3.3).

Возмущение плотности электронов и ионов находится обычным способом — интегрированием поправки к функции распределения по скоростям.

Как уже отмечалось в § 2, спиральная волна, геликон, не влияет на движение ионов, поэтому можем использовать соотношение (3.2). Интегрируя теперь обе части уравнения (2.45) по v_{\parallel} и подставляя найденные значения n_{se} и n_{si} в уравнение Пуассона, получаем бесконечную систему уравнений для амплитуд потенциала Φ_s :

$$k_{\perp}^2 \Phi_s = 4\pi e \Delta_i(\omega) \Phi_s \delta_{s0} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} k_{\perp}^2 \Phi_s - \\ - \frac{4\pi e^2}{T_e} \Phi_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\parallel} f_{0e}(v_{\parallel})}{v_{\parallel} - \frac{\Omega}{k_0}} dv_{\parallel} - \frac{4\pi e^2}{T_e} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\parallel} (\omega k_0 - k_z \Omega) f_{0s}(v_{\parallel})}{(k_z v_{\parallel} - \omega) (k_0 v_{\parallel} - \Omega)} dv_{\parallel} \times \\ \times \sum_n (-1)^{n+s} \Phi_n J_n(\mu) J_s(\mu) e^{i(n-s)\beta}. \quad (3.11)$$

Здесь мы пренебрегли малостью ω/Ω , оставив в сумме по p лишь член $p = -n$. Для простоты считаем, что плазма однородна и $k_z \ll k_{\perp}$. Умножая уравнение (3.11) сначала на $(-1)^s J_s(\mu) e^{i\beta s}$ и суммируя по s , а затем для $s = 0$ умножая (3.11) на $J_0(\mu)$, исключаем из полученных уравнений амплитуду Φ_0 , не входящую в суммы по s . Полагая $\sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s e^{i\beta s} J_s(\mu) \Phi_s \neq 0$ и учитывая свойство функций Бесселя $\sum_s J_s^2 = 1$, получаем дисперсионное соотношение в конечном виде

$$\left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 k_0^2}{\Omega^2 k_{\perp}^2} - \frac{4\pi e}{k_{\perp}^2} \Delta_i(\omega) \right] \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} \right] + \\ + J_0^2(\mu) \frac{4\pi e}{T_e} \Delta_i(\omega) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left(\frac{k_0^2}{\Omega^2} - \frac{k_z^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Здесь проведено интегрирование по продольным скоростям электронов для того, чтобы выражение имело более компактный вид. При этом считалось $\frac{\Omega}{k_0}, \frac{\omega}{k_z} \gg v_{Te}$.

В том случае, если аргументы функций Бесселя не зависят от скоростей, дисперсионное соотношение можно получить в замкнутом виде с учетом всех гармоник. Здесь мы пренебрегали высшими гармониками, так как считали, что никакая гармоника частоты Ω не попадает в резонанс ни с одной из собственных частот плазмы. Поэтому все отброшенные члены порядка ω/Ω . Такое приближение может оказаться непригодным в случае раскачки высокочастотным полем параметрических неустойчивостей.

3.3. Дисперсионные соотношения для высокочастотного электрического поля

Выражения для поправок к равновесным функциям распределения в присутствии переменного электрического поля очень высокой (порядка ω_{pe}) частоты и достаточно большой амплитуды были получены в разд. 2.3.

При большой частоте электрического поля, а именно при $\Omega > \omega_{He}$, электрон не успевает следить за осцилляциями магнитной силовой линии, и тот эффект, который подробно обсуждался в двух предыдущих пунктах данного параграфа, не имеет места. Это приводит соответственно к изменению характеристик, описывающих движение электрона в высокочастотных полях, и поправка к функции рас-

предела (2.50) будет иной. Самое главное отличие состоит в том, что аргумент функций Бесселя теперь при $\Omega > \omega_{He}$ определяется амплитудой и частотой внешнего электрического поля и не зависит от скорости. Поэтому для получения дисперсионного соотношения можно использовать прием, примененный в предыдущем пункте.

Следует, однако, отметить, что в данном случае могут оказаться необходимыми высшие гармоники.

Интегрируя соотношения (2.50) и (2.51) по скоростям и подставляя их в уравнение Пуассона (3.3), получаем бесконечную систему уравнений:

$$[1 + \delta\epsilon_i(\omega - p\Omega)] \Phi_p + \sum_{n,s} \delta\epsilon_e[\omega - (n+s)\Omega] J_n(\delta) J_{n-p+s}(\delta) \Phi_s = 0. \quad (3.13)$$

Здесь введены обозначения согласно работе [14]:

$$\delta\epsilon_\alpha(\omega - p\Omega) = \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{k_z v \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \epsilon} d v}{\omega - k_z v - p\Omega}.$$

Напомним, что ось z направлена вдоль внешнего электрического поля.

Умножим обе части уравнения (3.13) на величину J_{q-p} и просуммируем по p от $-\infty$ до $+\infty$. При суммировании используем свойства функций Бесселя, а также то обстоятельство, что $\delta\epsilon_i(\omega - p\Omega) = \delta\epsilon_i(\omega)\delta_{p,0}$. В результате получим

$$\sum_r J_{-r+q} \Phi_r = \frac{\delta\epsilon_i(\omega) J_q(\delta)}{1 + \delta\epsilon_e(\omega - q\Omega)} \Phi_0. \quad (3.14)$$

Подставляя теперь найденную сумму в уравнение (3.13), записанное для $p = 0$, и полагая $\Phi_0 \neq 0$, окончательно имеем

$$1 + \frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\delta\epsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta\epsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q^2(\delta). \quad (3.15)$$

Дисперсионное соотношение (3.15) впервые было получено при помощи введения функции (2.54) в работе [7]. Отметим, что в случае, описанном в предыдущем разделе, можно свести бесконечную систему уравнений к одному. Это обстоятельство связано с тем, что аргументы функций Бесселя не зависят от скорости.

В заключение отметим, что уравнение (3.15) остается справедливым и в присутствии постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси z , при этом следует лишь видоизменить $\delta\epsilon$ с учетом соотношений (2.53) и (2.52).

§ 4. Исследование дисперсионных соотношений

4.1. Влияние высокочастотного магнитного поля на неустойчивости плазмы

При проведении усреднения по времени в разд. 3.1 было получено дисперсионное соотношение (3.10), учитывающее влияние высокочастотного магнитного поля. При значении аргумента бесселевых функций, взятом при $\nu = \nu_{Te}$, таким, что $\delta > 1$ или $\delta < 1$, бесконечный детерминант сводится к одному члену, приравнявая который к нулю можно вывести дисперсионное уравнение.

Применим полученные в § 3 результаты для определения влияния высокочастотного поля на неустойчивости, связанные с анизотропией функции распределения.

1. Конусная неустойчивость

Рассмотрим важный тип неустойчивости однородной плазмы, удерживаемой в ловушке с магнитными пробками, когда $\partial f_0 / \partial x = 0$, так называемую конусную неустойчивость, исследованную впервые Постом и Розенблютом [4]. Дисперсионное соотношение для этой неустойчивости в отсутствие высокочастотного поля можно найти при помощи соотношений (2.34) и (2.35), выведенных нами в разд. 2.2, устремив в этих соотношениях величину δ к нулю. Это соответствует обращению в нуль амплитуды высокочастотного поля H_1 . Интегрируя затем выведенное выражение для поправки к функции распределения электронов и ионов по скоростям и подставляя n_e и n_i в уравнение Пуассона, получаем [4]

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 \bar{v}_{Ti}^2} F\left(\frac{\omega}{k \bar{v}_{Ti}}\right). \quad (4.1)$$

Здесь $\omega \gg k_z \bar{v}_{Te}$, $\omega_{pi} \gg \omega_{Hi}$; $k_z \ll k_{\perp}$; \bar{v}_{Ti} — тепловая скорость ионов. Вклад ионов в дисперсионное соотношение описывается функцией $F\left(\frac{\omega}{k \bar{v}_{Ti}}\right)$, которая определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F(y) &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{-1/2}; \\ \psi(x) &= \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} f_{0i}(v_{\perp}^2, v_{\parallel}) dv_{\parallel}; \\ \text{const} &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx \right]^{-1}; \quad x = v_{\perp}^2 / \bar{v}_{Ti}^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

f_{0i} — функция распределения ионов, удерживаемых магнитными пробками и поэтому обладающая анизотропией в пространстве ско-

ростей. Неустойчивости, описываемые уравнением (4.1), приводят к раскачке потенциальных колебаний с $\omega = \min\{\omega_{pi}; \sqrt{\omega_{He}\omega_{Hi}}\}$ с $k_{\perp} \sim \omega_{pi}/\bar{v}_{Ti}$ и быстрому уходу частиц в пробки.

Найдем теперь дисперсионное уравнение для колебаний этого типа в присутствии высокочастотного магнитного поля. Дисперсионное соотношение (3.9) получено в приближении $\omega_{He}^2 \ll \omega_{He}^2$. В том случае, когда эти величины одного порядка, в выражении для поправки к функции распределения (2.35') необходимо учитывать, что $e^{-\rho_e} I_0(\rho_e)$ отличается от единицы, если

$$\frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 v_{Te}^2} [1 - I_0(\rho_e) e^{-\rho_e}] = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \sim 1.$$

Так как $\Omega \gg \omega \gg \omega_{Hi}$, то высокочастотное поле не возмущает движения ионов и можно положить $\frac{k_y v_{Ti}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} = 0$.

Дисперсионное соотношение, в котором отброшены члены порядка ω/Ω , является детерминантом следующей системы уравнений [ср. (3.9)]:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2}\right) \psi_s^{(+)} = & -2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \sum_{m \geq 0} \psi_m^{(+)} \left[\delta_{m,s} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - k_z v_{\parallel}} \times \right. \\ & \times J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta) f_{0e} dv_{\parallel} \left. \right] + \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \sum_{\substack{m \neq -p \\ ni > 0}} \left(\frac{m}{m+p} \right) \psi_m^{(+)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} J_p(\delta) [J_{m+p-s}(\delta) + (-1)^s J_{m+p+s}(\delta)] f_{0e} dv_{\parallel} + \\ & + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 \bar{v}_{Ti}} F\left(\frac{\omega}{k \bar{v}_{Ti}}\right) \psi_s^{(+)} \delta_{s0}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отметим, что вклад от ионов существен лишь для $\psi_0^{(+)}$, так как

$$F\left(\frac{\omega - s\Omega}{k \bar{v}_{Ti}}\right) \lesssim \frac{\omega}{\Omega} F\left(\frac{\omega}{k \bar{v}_{Ti}}\right).$$

Уже при $\frac{k_{\perp} v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} = 1$ в этом случае можно пренебречь недиагональными элементами. Дисперсионное уравнение при этом имеет вид [8, 10]

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} = & -2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 - \omega^{\mathcal{P}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{0e}(v_{\parallel}) J_0^2(\delta)}{\omega - k_z v_{\parallel}} dv_{\parallel} \right) + \\ & + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 \bar{v}_{Ti}} F\left(\frac{\omega}{k \bar{v}_{Ti}}\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Мы здесь явно выписали главное значение интеграла, стоящего в правой части уравнения и пренебрегли вычетом на электронах, так как для дальнейшего он несуществен.

Из работы [4] следует, что возмущения с фазовой скоростью ω/k_z , меньшей v_{Te} , устойчивы. Иными словами, затухание Ландау на электронах приводит к исчезновению неустойчивости. Слагаемое в круглых скобках появилось из-за движения электронов вдоль силовых линий. А так как линии теперь осциллируют, то в рассматриваемом приближении только это слагаемое и будет изменяться. В том случае, если амплитуда высокочастотного поля $H_1 = 0$, получаем результат Розенблюта и Поста [4], так как слагаемое в круглых скобках меньше нуля и равно $-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{\omega^2}$. При этом действительная часть уравнения (4.4) при некоторых действительных значениях ω и k может обратиться в нуль. Это означает, что существуют колебания с $\text{Im}(\omega) = 0$, т. е. имеется порог неустойчивости.

В присутствии высокочастотного поля при достаточно больших значениях H_1/H_0 выполняется неравенство

$$\omega^{\mathcal{P}} \int \frac{f_{0e}(v_{\parallel}) J_0^2(\delta)}{\omega - k_z v_{\parallel}} dv_{\parallel} < 1 \quad (4.5)$$

для любых значений $\omega/k_z v_{Te}$. Действительно, максимальное значение левой части неравенства достигается при $\delta = 0$, и его значение можно найти при помощи таблиц функций Крампа [22]. Оно равно примерно 1,5. Стоящий в числителе квадрат функции Бесселя уменьшает интеграл тем сильнее, чем больше $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$. Неравенство

(4.5) выполняется уже при $\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \sim 1$. При этом член в круглых скобках в дисперсионном соотношении (4.4) меняет знак, став из положительного отрицательным. Посмотрим, как это повлияет на устойчивость плазмы. Исследование при помощи метода Найквиста [26] уравнения (4.4) показывает, что плазма устойчива при выполнении условия (4.5), так как ни при каких ω и k невозможно добиться равенства нулю действительной части дисперсионного уравнения (4.4) ввиду того, что $\text{Re}F < 0$. Полученный результат можно истолковать следующим образом. В присутствии высокочастотного поля слагаемое $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2}$ в дисперсионном соотношении заменяется, грубо говоря, на $-2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2}$, и колебания, как таковые, исчезают вообще. Отброшенные недиагональные члены дадут при этом вклад порядка $\left| \omega^{\mathcal{P}} \int \frac{J_0(\delta) J_1(\delta)}{\omega - k_z v_{\parallel}} f_{0e} dv_{\parallel} \right|^2$, а так как функция $J_1(\delta) \ll J_0(\delta)$ при $0 \leq \delta \leq 1$, то их влияние будет несущественным.

Таким образом, достаточное условие стабилизации можно записать в виде

$$\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \gtrsim 1. \quad (4.6)$$

Фазовая скорость ω/k неустойчивых в отсутствие высокочастотного поля колебаний всегда меньше средней тепловой скорости ионов. Если взять частоту, минимально допустимую для подавления неустойчивости с данным значением волнового вектора $\Omega \gtrsim \omega_h \gtrsim kv_{Ti} \gg k_z v_{Te}$, то получим следующее условие на амплитуды высокочастотного поля:

$$\frac{H_1}{H_0} > \frac{v_{Ti}}{v_{Te}}. \quad (4.7)$$

2. Дрейфово-конусная неустойчивость

Рассмотрим теперь случай, когда плотность плазмы зависит от x , $k_z = 0$, так называемую дрейфово-конусную неустойчивость. Воспользуемся для простоты функцией распределения ионов в пробирке, использованной А. Б. Михайловским [5]:

$$f_{0i} = m_i (T_1 + T_2) T^{-2} \exp(-m_i v_{\perp}^2 / 2T) \times \\ \times [1 - \exp(-m_i v_{\perp}^2 / 2T_1)]$$

(T имеет смысл температуры, а величина $[2TT_1/m_i \times (T_1 + T)]^{1/2} = v_c$ соответствует масштабу скорости, ниже которой $\partial f_{0i} / \partial \epsilon_{\perp} > 0$, $T_1 \lesssim T(\epsilon_{\perp} = v_{\perp}^2 / 2)$, т. е. является характеристической скоростью конуса потерь).

При $H_1 = 0$ дисперсионное уравнение будет иметь вид [5]:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - k_y \frac{d \ln n_0}{dx} \cdot \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi} \omega k^2} - \\ - i\pi^{1/2} \frac{\omega}{|k| v_c} \cdot \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \cdot \frac{m_i (T + T_1)}{T^2} \left[1 - \left(\frac{T_1}{T + T_1} \right)^{1/2} \right] = 0. \quad (4.8)$$

В присутствии высокочастотного поля вид дисперсионного уравнения изменится так же, как и при конусной неустойчивости:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} (1 - A) - A k_y \frac{d \ln n_0}{dx} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He} \omega k^2} - \\ - i\pi^{1/2} \frac{\omega}{|k| v_e} \cdot \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \cdot \frac{m_i (T + T_1)}{T^2} \left[1 - \left(\frac{T_1}{T + T_1} \right)^{1/2} \right] = 0, \quad (4.9)$$

где $A = \int J_0^2(\delta) f_0(v_{\parallel}) dv_{\parallel}$.

Уравнение (4.9) удобно переписать в следующем виде

$$2(1 - A) \frac{T}{T_e} + k^2 (\rho_e^2 + r_{Di}^2) + A \frac{\omega^*}{\omega} - i b \frac{\omega}{|k| v_c} = 0; \\ \omega^* = -k_y \frac{eT}{eH_0} \cdot \frac{d \ln n_0}{dx}; \quad b = \pi^{1/2} \frac{T + T_1}{T} \left[1 - \left(\frac{T_1}{T + T_1} \right)^{1/2} \right]; \\ \rho_e^2 = mTc^2/e^2 H_0^2; \quad r_{Di}^2 = T/4\pi e^2 n_0.$$

Формально это уравнение всегда имеет неустойчивое решение, однако видно, что по мере уменьшения A все меньший вклад дают те слагаемые в дисперсионном соотношении, которые приводят к неустойчивости. Отношение ларморовского радиуса к характерной длине неоднородности ρ_i/a должно быть меньше единицы для этой неустойчивости ($a = \frac{d \ln n_0}{dx}$).

Поэтому рассмотрим такой случай, когда $1 - A \gg \sqrt{\rho_i/a}$. При этом инкремент неустойчивости записывается довольно просто:

$$\gamma = \frac{2bA^2 \omega^{*2}}{|k| v_c \left[2(1-A) \frac{T}{T_e} + k^2 (\rho_e^2 + r_{Di}^2) \right]}. \quad (4.9')$$

Для применимости дисперсионного уравнения, в котором ионы в колебаниях считались немагнитными, надо чтобы выполнялось неравенство $\gamma > \omega_{Hi}$ (см. работу А. Б. Михайловского [5]). Поэтому неустойчивость этого типа может существовать, если

$$\frac{k}{\left[2(1-A) \frac{T}{T_0} + k^2 (\rho_e^2 + r_{Di}^2) \right]^3} > \frac{a^2 v_c}{2\rho_i^3 bA^2 v_{Ti}}.$$

Максимизируя левую часть неравенства по k , получаем

$$a \lesssim 3^{-1} \rho_i A m^{1/4} / (1-A) m_e^{1/4}. \quad (4.10)$$

Отсюда следует, что уже при значениях $A \sim 0,5$ неустойчивость может быть стабилизирована, т. е. $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \sim 1$ и $\frac{H_1}{H_0} \sim \frac{v_{Ti}}{v_{Te}}$.

3. Циклотронная неустойчивость

Обратимся теперь к тому случаю, когда плотность плазмы не зависит от x , а раскачка происходит на гармониках ионно-циклотронной частоты. Дисперсионное соотношение в отсутствие магнитного поля для этого случая имеет вид [6, 23]

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} = -2\pi \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \omega \int_0^\infty dv_\perp^2 \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \frac{\partial f_{oi}}{\partial v_\perp^2} \sum \frac{J_n^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Hi}} \right)}{\omega + n\omega_{Hi}}. \quad (4.11)$$

Отметим, что наиболее опасными с точки зрения проблемы устойчивости являются распределения типа δ -функции по поперечным скоростям. В этом пределе конусная неустойчивость переходит в неустойчивость, изучавшуюся Дори, Гестом и Харрисом [6].

Пусть

$$f_{0i} = (2\pi)^{3/2} m_i^{1/2} T^{-1/2} \exp\left(-\frac{m_i v_{\parallel}^2}{2T}\right) v_{\perp}^{-1} \delta(v - v_{\perp}^0),$$

тогда уравнение (4.11) принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega + n\omega_{Hi}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial}{\partial p} J_n^2(p) = 0; \quad (4.12)$$

$$p = \frac{k_{\perp} v_{\perp}^0}{\omega_{Hi}}.$$

В присутствии высокочастотного поля, осциллирующего с частотой $\Omega > \omega_{Hi}$, дисперсионное соотношение (4.12) применяется следующим образом [8]:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} (1 - A) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega + n\omega_{Hi}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial}{\partial p} J_n^2(p) = 0. \quad (4.13)$$

Рассмотрим область частот вблизи первой циклотронной гармоники ионов. Оставляя в сумме члены с $n = 0, 1, -1$ и пользуясь рекуррентными соотношениями для функций Бесселя, получаем выражение для частоты

$$\omega^2 = \frac{B \frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_{pi}^2} + 2J_0 J_1/p}{B \frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_{pi}^2} + 2J_1 J_2/p} \omega_{Hi}^2; \quad B = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} (1 - A). \quad (4.14)$$

Так, если $\omega_{pi}^2/\omega_{Hi}^2 \gg 1$, а $\omega_{pe}^2/\omega_{He}^2 \ll 1$, то в отсутствие высокочастотного поля всегда есть неустойчивость. Формально влияние высокочастотного поля проявляется в том, что величина B сильно увеличивается при $A \leq 1$. Неустойчивость этого типа заведомо исчезает, если $\omega_{Hi}^2 \omega_{pe}^2/\omega_{pi}^2 k^2 v_{Te}^2$ больше $2J_0 J_1/p$, т. е. при $T_i \gg T_e$. Условие стабилизации $A < 1 \left(\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \gg 1 \right)$ в данном случае сводится к следующему ($k_{y \text{ мин}} \sim \rho_i^{-1}$, $\Omega \gg \omega_{Hi}$):

$$\frac{H_1}{H_0} > \frac{v_{Ti}}{v_{Te}}.$$

4. Дрейфово-температурная неустойчивость

Дрейфовыми неустойчивостями называют обширный класс неустойчивостей, возникающих из-за пространственной неоднородности плазмы, удерживаемой магнитным полем. Одной из наиболее

опасных в настоящее время принято считать так называемую дрейфово-температурную неустойчивость, впервые описанную в работе [1]. Диффузия частиц из установок и теплопроводность, обязанные своим происхождением этой неустойчивости, подробно изучены Б. Б. Кадомцевым и О. П. Погуце [24].

Дисперсионное соотношение для дрейфово-температурной неустойчивости проще всего получить, воспользовавшись уравнением квазинейтральности, взяв для электронов возмущение плотности в виде $\frac{n_{se}}{n_0} = \frac{e\Phi_s}{T}$, так как рассматриваемые частоты $\omega \sim k_z v_{Ti} \ll \ll k_z v_{Te} (T_e \sim T_i)$; $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \gg 1$. Частота высокочастотного поля Ω должна быть выбрана из того условия, чтобы ионы успевали следить за осцилляциями силовой линии $\Omega \ll \omega_{Hi}$, так как рассматриваемая неустойчивость обязана своим происхождением затуханию Ландау на ионах.

Пользуясь выражениями для поправок к функциям распределения электронов и ионов в приближении нулевого ларморовского радиуса и квазинейтральности, произведем усреднение по высокой частоте. В результате получим вместо системы уравнений (3.9) следующую:

$$\begin{aligned} & \Psi_s^{(+)} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) - \sum_{m>0} \Psi_m^{(+)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_i^* (1 - \eta/2 + \eta v_{\parallel}^2 / v_{Ti}^2) + \omega}{\omega - k_z v_{\parallel}} \times \\ & \times \frac{f_{0i}(v_{\parallel})}{n_0} J_{-m}(\delta) J_{-s}(\delta) dv_{\parallel} + \sum_{\substack{m \neq -p \\ m > 0}} \left(\frac{m}{m+p} \right) \Psi_m^{(+)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{0i}(v_{\parallel})}{n_0} J_p(\delta) [J_{p+m-s}(\delta) + (-1)^s J_{p+m+s}(\delta)] dv_{\parallel}; \quad (4.15) \\ & \delta = \frac{k_y v_{\parallel}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}. \end{aligned}$$

Нас интересуют значения $\frac{k_y v_{Ti}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \gg 1$, поэтому при выводе уравнения (4.15) от электронов оставлен лишь бoльцмановский член. Разлагая по малости $\int J_{-m} J_{-s} \frac{f_{0i}}{n_0} dv_{\parallel} \ll 1$ детерминант системы (4.15), получаем [8,10]

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{T_i}{T_e} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_i^* (1 - \eta/2 + \eta v_{\parallel}^2 / v_{Ti}^2) + \omega}{\omega - k_z v_{\parallel}} \cdot \frac{f_{0i}}{n_0} J_0^2(\delta) = 0; \quad (4.16) \\ & \omega_i^* = -k_y \frac{cT_i}{eH_0} \cdot \frac{d \ln n_0}{dx}; \quad \eta = \frac{d \ln T_i}{d \ln n_0}. \end{aligned}$$

Определим из уравнения (4.16) границу устойчивости. Для этого считаем частоту ω действительной величиной и приравняем нулю по отдельности действительную и мнимую, возникающую из-за получета, части уравнения (4.16). В результате простых вычислений получим для значений ω и k_z на границе:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_i^* (\eta/2 - 1) A (2 - A)^{-1}; \\ k_z^2 &= \omega_i^2 v_{Ti}^2 (\eta/2 - 1) \eta A^2 (2 - A)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Из требования $k_z^2 > 0$ находим условие неустойчивости, совпадающее с условием неустойчивости в отсутствие магнитного поля [1, 24]. Иными словами, высокочастотное поле не влияет на границу устойчивости. Посмотрим теперь, как меняются под действием высокочастотного поля частота и инкремент неустойчивости. В пределе больших значений $\ln \left| \frac{k_y}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} v_{Ti} \right| \gg 1$ возможно оценить интеграл в смысле главного значения, входящий в дисперсионное уравнение (4.16), пользуясь тем, что основной вклад в интеграл дают значения $\omega/k_z > v > \frac{\Omega}{k_y} \cdot \frac{H_0}{H_1}$, $\left(\frac{\Omega}{k_z} \gg v_{Ti} \right)$. Выражения для частоты и инкремента имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_i^* A (2 - A)^{-1} (\eta/2 - 1); \\ \gamma &= -\pi^{1/2} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Ti}} \cdot \frac{J_0^2 \left(\frac{\omega}{k_z} \cdot \frac{k_y}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \right)}{A} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2} \right\} \left[1 + \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2} \eta (1 - \eta/2)^{-1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Величина

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} J_0^2(\delta) \frac{f_{0i}(v_{\parallel})}{n_0} dv_{\parallel} \ll \frac{\ln \left| \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{k_y v_{Ti}}{\Omega} \right|}{\frac{k_y v_{Ti}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}} \ll 1$$

является одновременно параметром разложения детерминанта. Из формул (4.18) следует, что частота неустойчивости уменьшилась в $1/A$ раз, инкремент γ по сравнению с инкрементом в отсутствие высокочастотного поля уменьшился еще сильнее — больше, чем в $1/A^2$ раз. Необходимые напряженности высокочастотного магнитного поля для подавления волны с данным значением k_y определяются из условия $[\Omega \sim \omega_i^*(k_y)]$

$$\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{k_y v_{Ti}}{k_y v_{Ti} \frac{\rho_i}{a}} = \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{a}{\rho_i} \gg 1.$$

Величина a/ρ_i для данного типа неустойчивости много больше единицы, a — характерная длина неоднородности температуры. Длина

неоднородности a для плотной плазмы может быть больше c/ω_{pe} — глубины проникновения волны, и эффективность стабилизации будет мала. Однако если $T_i \leq T_e$, то при амплитуде магнитного поля $H_1 \gg \sqrt{4\pi n_0 T_e} \sqrt{m_e/m_i}$ разовьется ионно-звуковая неустойчивость, которая приведет к ограничению скорости электронов и появлению турбулентного скина $\delta \sim \frac{c}{\omega_{pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta_{вч}}}$, где $\beta_{вч} = \frac{8\pi n_0 T_e}{H_1^2}$; $\frac{m_i}{m_e} \gg \beta_{вч} \gg 1$ [17, 25]. Частота эффективных столкновений для электронов $\nu_{эфф} \sim \frac{eE_1}{m_e c_s} \sim \frac{eH_1}{m_e c} \cdot \Omega \delta = \Omega \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{1}{\beta_{вч}} \gg \Omega$ не будет влиять на инкремент, так как неустойчивость обязана своим происхождением ионам.

5. У н и в е р с а л ь н а я д р е й ф о в а я н е у с т о й ч и в о с т ь

Другой важный тип дрейфовых неустойчивостей связан с раскачкой колебаний плазмы резонансными электронами. Одна из неустойчивостей этого типа была впервые изучена в работе [1] и часто называется универсальной. Дисперсионное уравнение, описывающее неустойчивые дрейфовые колебания с длинами волн, много большими ларморовского радиуса ионов, получается из условия квазинейтральности:

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{i\alpha} dv_{\parallel} = 0$$

($\alpha = e, i$ — электроны и ионы соответственно). В том случае, когда $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} > 1$, дисперсионное соотношение можно свести к виду

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{\alpha}^* \left(1 - \frac{\eta_{\alpha}}{2} + \eta_{\alpha} \frac{v_{\parallel}^2}{v_{Ti}^2} \right) + \omega}{\omega - k_z v_{\parallel}} J_0^2(\delta) \frac{f_{0\alpha}}{n_0} dv_{\parallel} \right) = 0; \quad (4.19)$$

$$\omega_{\alpha}^* = -k_y \frac{cT_{\alpha}}{eH_0} \cdot \frac{d \ln n_0}{dx}; \quad \eta_{\alpha} = \frac{d \ln T_{\alpha}}{d \ln n_0}.$$

Это уравнение помимо решения, определяющего дрейфово-температурную неустойчивость, рассмотренную выше, имеет решение в интервале значений фазовых скоростей $v_{Te} \gg \frac{\omega}{k_z} \gg v_{Ti}$; $\eta_i = 0$.

При этом $\frac{k_y v_{Ti}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ может оказаться меньше или порядка единицы, однако влияние высокочастотного поля на неустойчивость будет сильным, так как величина $\frac{k_y v_{Tc}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ при этом может быть

большой. Частота ω в этом случае может быть записана в следующем виде:

$$\omega = \frac{\omega_e^* A_i}{1 - (A_i - 1) \frac{T_e}{T_i}}; \quad (4.20)$$

$$A_{\alpha} = \int J_0^2(\delta) \frac{f_{0\alpha}}{n_0} dv_{\parallel}.$$

Это — дрейфовые колебания плазмы в высокочастотном внешнем поле. Отметим, что величина $A_i \approx 1$, в то время как $A_e \ll 1$.

Найденные колебания могут раскачиваться резонансными электронами. Инкремент γ , формально возникающий из-за электронного полувывчета, равен [8]

$$\gamma = \pi^{1/2} \frac{\omega_e^{*2}}{|k_z| v_{Te}} J_0^2 \left(\frac{k_y \omega}{k_z \Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \right) A_i \frac{1 + (1 - A_i) \frac{T_e}{T_i} - \eta/2}{\left[1 + (1 - A_i) \frac{T_e}{T_i} \right]^3}. \quad (4.21)$$

Оказывается, что с ростом амплитуды высокочастотного поля область неустойчивости длинноволновых ($k_{\rho i} \ll 1$) дрейфовых колебаний по параметру η_e расширяется: $\eta_e < 2[1 + (1 - A_i) \frac{T_e}{T_i}]$, но инкремент неустойчивости может быть существенно уменьшен. Например, если в отсутствие высокочастотного поля максимальный инкремент $\gamma \sim \omega_k$ имеет колебания с $\omega/k_z \leq v_{Te}$, то за счет высокочастотного магнитного поля относительно малой напряженности $H_1 \sim H_0 \rho_e/a$ при минимально допустимой частоте $\Omega \sim \omega_e^* \sim k_z v_{Te}$ инкремент колебаний с данным значением k_y может быть уменьшен примерно в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз.

Для плотной плазмы, когда $c/\omega_{pe} < a$, мы можем повторить все рассуждения предыдущего пункта с той лишь разницей, что частота эффективных турбулентных столкновений теперь может привести к исчезновению универсальной дрейфовой неустойчивости за счет $v_{\text{эфф}} \sim \Omega \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{H_1}{8\pi n_0 T_e} \gtrsim \Omega$. Остается возможность раскачки дрейфо-диссипативной неустойчивости, которая также может быть стабилизирована высокочастотным магнитным полем (см. § 5).

6. Дрейфово-циклотронная неустойчивость

Рассмотрим влияние высокочастотного поля на так называемую дрейфово-циклотронную неустойчивость неоднородной плазмы, изученную впервые Михайловским и Тимофеевым [22]. Ограничимся анализом желобковой моды $k_z = 0$, имеющей в отсутствие высокочастотного поля максимальный инкремент. Воспользовавшись выражениями для поправки к функциям распределения для частоты

неустойчивости $\omega \simeq n\omega_{Hi} \ll \Omega$, получим следующее дисперсионное соотношение [10]:

$$\frac{1}{T_i} \left[1 + k^2 r_{Di}^2 - \frac{\omega - \omega_i^*}{\omega - n\omega_{Hi}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2} k\rho_i} \right] = -\frac{1}{T_e} \left[1 - A_e \frac{\omega - \omega_e^*}{\omega} \right]. \quad (4.22)$$

Здесь мы считаем $k\rho_i \gg 1$, $\nabla T_i = \nabla T_e = 0$. В левой и правой частях уравнения (4.22) стоят члены, описывающие возмущения плотности соответственно ионов и электронов в колебаниях. Влиянием высокочастотного поля на ионы мы пренебрегаем, так как $\Omega \gg \omega_{Hi}$. Уравнение (4.22) имеет неустойчивые решения

$$\left. \begin{aligned} \omega &= n\omega_{Hi} + \gamma; \\ \gamma^2 &= \frac{n^2 \omega_{Hi}^2}{(2\pi)^{1/2} k\rho_i} A_e^{-1} (1 - n\omega_{Hi}/\omega_i^*), \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

если выполнено условие

$$\omega_i^* = n\omega_{Hi} A_e^{-1} [1 + k^2 r_{Di}^2 + T_i T_e^{-1} (1 - A_e)]. \quad (4.24)$$

Его следует рассматривать как уравнение для значений k_y неустойчивых возмущений. Оно не имеет решений в допустимой для k_y области значений $k_y \rho_e \ll 1$, если [10]

$$\frac{H_1}{H_0} > \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{\rho_i}{a} \cdot \frac{\Omega}{n\omega_{Hi}}. \quad (4.25)$$

Следовательно, при выполнении этого условия нет дрейфово-циклотронной неустойчивости.

7. Желобковая неустойчивость

Желобковая неустойчивость плазмы [16] описывается следующим дисперсионным уравнением при параметрах плазмы и магнитного

поля, удовлетворяющим условию $c \ll v_A$, где $v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 m_i}}$ — альфвеновская скорость:

$$2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 - \frac{\omega_e^* + \omega}{\omega} A_e \right] = - \frac{\omega_{pi}^2 k_y \frac{d \ln n_0}{dx}}{k^2 \omega_{Hi} (\omega - \omega_e)}; \quad (4.26)$$

$$\omega_g = k_y g / \omega_{Hi}.$$

Эффект кривизны основного магнитного поля моделируется, как обычно, введением ускорения силы тяжести $g = T_i m_i^{-1} \frac{d \ln H_0}{dx}$. Это ускорение направлено перпендикулярно к границе плазмы (обычно $\omega_g / \omega_i^* \sim \frac{d \ln H_0}{d \ln n_0} \ll 1$). Мы считали при получении уравне-

ния (4.26), что $\frac{H_1}{H_0} < \frac{\Omega}{k_y v_{Te}}$, так что движение ионов вдоль мгновенного направления силовой линии можно не рассматривать. Из уравнения (4.26) следует условие устойчивости:

$$1 - A_e > 4 \left| \frac{\omega_g}{\omega_i} \right| k^2 \rho_i^2. \quad (4.27)$$

Разлагая функцию Бесселя, входящую в A_e , в ряд и считая, что $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} \ll 1$, перепишем условие (4.27) в виде

$$\frac{H_1^2}{H_0^2} > 4 \left| \frac{\omega_g}{\omega_i} \right| \frac{\Omega^2}{\omega_{Hi}^2} \cdot \frac{m_e}{m_i}.$$

Если в это неравенство подставить минимально допустимую частоту Ω , примерно равную инкременту желобковой неустойчивости $\gamma \sim \left(g \frac{d \ln n_0}{dx} \right)^{1/2}$, то получим оценку минимальной амплитуды высокочастотного поля, подавляющего желобковую неустойчивость [8]:

$$\frac{H_1}{H_0} > \left| \frac{d \ln H_0}{dx} \right| \rho_e. \quad (4.27')$$

В заключение этого раздела следует сделать несколько замечаний относительно взаимодействия высокочастотных полей с плазмой. Для реальных систем, имеющих конечную длину, кроме полученных нами критериев существует еще одно необходимое условие стабилизации [8]:

$$\frac{H_1}{H_0} > \frac{2\pi a}{mL}, \quad (4.28)$$

где a и L — радиус и длина плазменного шнура, m — азимутальное число возмущения ($k_y = m/a$). Это условие того, что силовая линия в некоторый момент времени пересекает два соседних желобка возмущения. Его же можно получить, определяя минимально необходимую частоту для стабилизации как $\Omega \geq k_z v_{Te} \left(k_z \geq \frac{2\pi}{L}, k_{\perp} = m/a \right)$. Это условие можно получить из того требования, что $\Omega > \max \{ k_z v_{Te}, \omega \}$. Подставляя в критерий $\frac{k_y v_{Te}}{\Omega} \cdot \frac{H_1}{H_0} > 1$ вместо Ω величину $k_z v_{Te}$, получаем условие (4.28). Достаточным условием стабилизации будет то из двух условий, которое труднее выполнить.

Анализируя рассмотренные выше примеры, можно заметить, что влияние высокочастотного поля на неустойчивости плазмы может проявляться по-разному. Во-первых, вследствие появившейся для заряженных частиц возможности легко перемещаться поперек постоянного магнитного поля из-за осцилляции направления магнитной силовой линии существенно меняются дисперсионные свойства

плазмы [действительная часть тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, k)$]. Так, в рассмотренном в п. 1 примере вообще исчезают колебания (напомним, что в изотермической плазме в отсутствие постоянного поля нет низкочастотных колебаний). В других примерах (п. 2, 4, 5) изменяется частота колебаний.

В случае конусной, дрейфово-конусной и циклотронных неустойчивостей высокочастотное поле не влияет на ионы, вызывающие неустойчивости, а действует на электроны, и только изменение дисперсионных свойств приводит к исчезновению неустойчивостей.

При дрейфово-температурной неустойчивости высокочастотное поле достаточно большой амплитуды подавляет неустойчивость возмущений, у которых $\frac{\omega}{k_z} \gg v_{Ti}$, но возмущения с $\frac{\omega}{k_z} \sim v_{Ti}$ остаются неустойчивыми, хотя инкремент их может быть значительно уменьшен. По своему характеру остающаяся неустойчивость может быть названа кинетической — инкремент ее определяется полувывчетом, т. е. за неустойчивость ответственны резонансные ионы.

Аналогично не происходит полной стабилизации неустойчивости дрейфовых колебаний неоднородной плазмы, раскачиваемых электронами. Резонансная частица, проходя за период колебаний силовой линии $2\pi/\Omega$ много пространственных периодов возмущения, испытывает усредненное действие электрического поля возмущений, не исчезающее полностью, а лишь уменьшенное в $\pi^{-1/2} \left(\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{k_y}{\Omega} \times \frac{\omega}{k_z} \right)^{-1}$ раз. Здесь имеет место такая же ситуация, как в случае кинетических неустойчивостей коротковолновых возмущений $k\rho_i \gg 1$ в постоянном магнитном поле, где взаимодействие резонансных частиц с полем возмущения падает в $\pi^{-1/2} k\rho_i$ раз. (На одном ларморовском радиусе иона электрическое поле меняет знак очень часто, из-за чего и происходит ослабление взаимодействия.) Исходя из этих соображений можно высказать следующие рекомендации: для еще большего уменьшения инкремента дрейфовых неустойчивостей нужно использовать высокочастотное магнитное поле, представляющее собой смесь двух или более не кратных друг другу частот Ω_1 и Ω_2 [8]. Величины $\frac{k_y v_{T\alpha}}{\Omega_1} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ и $\frac{k_y v_{T\alpha}}{\Omega_2} \cdot \frac{H_2}{H_0}$ должны быть конечно больше единицы.

4.2. Влияние волны типа геликон на неустойчивости плазмы при $\beta < \Omega/\omega_{He}$

1. Конусная неустойчивость

В разд. 4.1 был развит метод получения дисперсионного соотношения для плазмы, находящейся в поле спиральной волны (геликона) и получено уравнение (3.12), в котором не конкретизиро-

вался вклад от ионов в дисперсионное соотношение. Аргументом функции Бесселя J_0 в данном случае является величина $\mu = \frac{k_{\perp}}{k_0} \times \frac{H_1}{H_0}$, где $2\pi/k_{\perp}$ — поперечная длина волны неустойчивости; k_0 — волновое число для геликона, лежащее в пределах от ω_{pi}/c до ω_{pe}/c . Заметное влияние геликона на неустойчивости плазмы имеет место лишь в том случае, если функция Бесселя J_0 , входящая в дисперсионное соотношение, заметно отличается от единицы, т. е. величина μ должна быть больше единицы.

Так как отношение $H_1/H_0 \ll 1$, то геликон будет заметно влиять на коротковолновые неустойчивости типа конусной и дрейфово-конусной. При этом из качественных оценок, приведенных в § 1, можно ожидать, что это влияние более сильно, чем у обыкновенной волны, рассмотренной в разд. 4.1.

Дисперсионное соотношение для конусной неустойчивости получается непосредственно из уравнения (3.12), если в него подставить выражение для $\Delta_i(\omega)$ в том виде, в каком оно использовалось в разд. 4.1:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) \equiv & \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 k_0^2}{k^2 \Omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} F\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right) \right] \times \\ & \times \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_z^2}{k} \right] + J_0^2(\mu) \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} F\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right) \times \\ & \times \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left(\frac{k_0^2}{\Omega^2} - \frac{k_z^2}{\omega^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь $\frac{\Omega}{k_0}, \frac{\omega}{k_z} \gg v_{Te}$.

Формально это уравнение имеет неустойчивые решения при любом значении μ . В этом проще всего убедиться при помощи метода Найквиста.

Число нулей этого уравнения в верхней части комплексной плоскости ω , т. е. число неустойчивых решений, определяется формулой [27]

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{d \ln \Phi}{d\omega} d\omega,$$

где c — контур в верхней полуплоскости ω , внутри которого нет особенностей функции $\Phi(\omega)$. Выбирая контур c по действительной оси ω от $-\infty$ до $+\infty$ с обходом над полюсом $\omega = 0$ по бесконечно малой окружности и замыкая его окружностью бесконечно большого радиуса, можно получить для числа нулей N выражение

$$N = 1 + \frac{1}{2\pi} [\text{Arg } \Phi(+\infty) - \text{Arg } \Phi(-\infty)].$$

Анализируя приращение аргумента вектора Φ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ при различных значениях $J_0^2(\mu)$ для типичного вида функции $F\left(\frac{\omega}{k v_{Ti}}\right)$ [4], можно установить, что неустойчивые решения исчезают при условии $\text{Re}\Phi(\omega_1) < 0$, где $\omega_1 = k v_{Ti} y_1$, а точка y_1 характеризуется тем, что в ней $\text{Im}F(y_1) = 0$. Однако при этом стабилизируются волны лишь в определенном диапазоне волновых чисел k_z , удовлетворяющих неравенству

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} < 0. \quad (4.30)$$

При определенных параметрах геликона

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{k_0^2}{k^2} < 0$$

либо

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{k_0^2}{k^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left| \text{Re} F\left(\frac{\omega}{k v_{Ti}}\right) \right| < 0.$$

Для реальных установок, в которых можно ожидать появления этой неустойчивости, выполняется первое из неравенств. При этом значения k_z , не удовлетворяющие условию (4.30), соответствуют нарастающим во времени колебаниям при любом значении величины $J_0^2(\mu)$. Однако, как будет видно из дальнейшего, инкремент оканчивается пропорциональным $J_0^2(\mu)$ при $\mu \gg 1$.

Если учесть, что $\text{Re} F(\omega_1) < 0$ [4] и если для определенности $\frac{k_0}{\Omega} < \frac{k_z}{\omega}$, то условие на k_z можно привести к виду

$$\begin{aligned} & J_0^2(\mu) < \\ & \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} \right) \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{k_0^2}{k^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left| \text{Re} F\left(\frac{\omega}{k v_{Ti}}\right) \right| \right) \\ & < \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left| \text{Re} F\left(\frac{\omega_1}{k v_{Ti}}\right) \right| \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left(\frac{k_0^2}{\Omega^2} - \frac{k_z^2}{\omega_1^2} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Условие (4.31) является довольно жестким, так как мы потребовали, чтобы инкремент был отрицательным для всех значений $k_z > \frac{k_0}{\Omega} \omega$.

В действительности можно ограничиться менее жестким условием, потребовав, чтобы инкремент неустойчивости стал меньше ω_{Hi} . Этого удастся добиться во всем диапазоне неустойчивых волн подбором соответствующей амплитуды высокочастотного поля спиральной волны. При достаточно большом значении $\frac{k_{\perp}}{k_0} \cdot \frac{H_1}{H_0}$ функция

Бесселя становится малой величиной и дисперсионное уравнение удается разрешить, пользуясь этой малостью, относительно частоты ω . Выражение для инкремента γ при этом имеет вид

$$\gamma = \frac{1}{2} \times \omega_0 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \cdot \frac{k_0^2}{\Omega^2} \right) \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \operatorname{Im} F \left(\frac{\omega_0}{kv_{Ti}} \right) J_0^2(\mu) \times \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \right) \left\{ \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \cdot \frac{k_0^2}{k_{\perp}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \operatorname{Re} F \left(\frac{\omega_0}{kv_{Ti}} \right) \right]^2 + \left(\frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \operatorname{Im} F \right)^2 \right\}}. \quad (4.32)$$

Здесь

$$\omega_0 = \frac{k_z^2}{k^2} \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \right)^{-1} \quad (4.33)$$

частота устойчивых колебаний при $J_0^2(\mu) = 0$. Инкремент (4.32) положителен, если $\operatorname{Im} F \left(\frac{\omega}{kv_{Ti}} \right) > 0$. Как известно, соответствующая [4] область по частотам простирается от нуля до $\omega = \omega_1 = kv_{Ti} y_1$. Ей соответствует область значений k_z , определяемая из соотношения

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} \geq 0,$$

что, естественно, совпадает с условием (4.30), полученным при помощи метода Найквиста.

Итак, с увеличением амплитуды геликона во всей области значений k_z инкремент уменьшается, хотя для различных k_z это уменьшение происходит по-разному. Поскольку при $J_0(\mu) = 0$ $\gamma = 0$ повсюду, то существует такое μ , при котором перестанет выполняться условие существования неустойчивости даже для максимального инкремента. Оценим величину γ_{\max} по формуле (4.32) сверху:

$$\gamma_{\max} < \omega_{pi} J_0^2(\mu). \quad (4.34)$$

Здесь учтено, что частота, соответствующая максимальному инкременту без геликона $\omega \simeq kv_{Ti} \simeq k_z v_{Ti} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$, с увеличением амплитуды геликона не увеличивается, так как максимальное уменьшение γ происходит как раз в той области значений k_z , где инкремент в отсутствие высокочастотного поля максимален. Кроме того, если формулу (4.32) переписать в виде $\gamma = \frac{1}{2} \omega_0 J_0^2(\mu) B$, то величина B для достаточно широкого класса функций удовлетворяет условию $B < 1$ [4].

Итак, неустойчивость исчезает, если

$$J_0^2 \left(\frac{k_{\perp}}{k_0} \cdot \frac{H_1}{H_0} \right) < \frac{\omega_{Hi}}{\omega_{pi}}. \quad (4.35)$$

Учитывая, что для конусной неустойчивости $k_{\perp} \sim r_{Di}^{-2}$ волновой вектор спиральной волны $k_0 = \frac{\omega_{pe}}{c} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_{He}}}$, а минимальное значение $\Omega \gtrsim \omega_{pi}$, получаем

$$\mu = \frac{k_{\perp}}{k_0} \cdot \frac{H_1}{H_0} \sim \frac{c}{v_{Ti}} \sqrt{\frac{\omega_{Hi}}{\omega_{pi}} \cdot \frac{H_1}{H_0}}.$$

Так как для рассматриваемой неустойчивости $\omega_{Hi} \ll \omega_{pi}$ (в работе проделан расчет для $\omega_{Hi} = 0,2\omega_{pi}$), найдем, что неравенство (4.35) выполняется при $\mu \sim 2$. Отсюда следует, что неустойчивость отсутствует при [9]

$$\frac{H_1}{H_0} > 4 \frac{v_{Ti}^2}{c}. \quad (4.36)$$

Заметим для сравнения, что при стабилизации этой неустойчивости обыкновенной волной в плазме с холодными электронами ($T_i > T_e$) требовались большие амплитуды высокочастотных полей, а именно (см. разд. 4.1)

$$\frac{H_1}{H_0} > \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{T_i}{T_e}}.$$

2. Дрейфово-конусная неустойчивость

Рассмотрим теперь влияние спиральной волны конечной амплитуды на дрейфово-конусную неустойчивость. В том случае, если высокочастотная волна является обыкновенной, она взаимодействует с плазмой, подавляя дрейфово-конусную неустойчивость, как это следует из рассмотрения, проведенного в разд. 4.1.

Так как дрейфово-конусная неустойчивость имеет частоту, много большую ионно-циклотронной, то можно попытаться исследовать влияние геликона на эту неустойчивость. Дисперсионное соотношение в этом случае получается так же, как для конусной неустойчивости и имеет следующий вид [9]:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} + \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} \cdot \frac{\omega^*}{\omega} \right] \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{k_0^2}{k^2} \right] = \\ & = i \frac{\omega}{|k| v_c} \cdot \frac{b}{k^2 r_{Di}^2} \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{k_0^2}{k^2} + \right. \\ & \left. + (1 - J_0^2(\mu)) \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{k_0^2}{k^2} + \frac{\omega^*}{\omega} \cdot \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} \right) \right]. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Здесь $\mu = \frac{k_{\perp}}{k_0} \cdot \frac{H_1}{H_0}$, остальные обозначения такие же, как в разд. 4.1. Из уравнения (4.37) следует, что при $J_0^2(\mu) \rightarrow 0$ неустойчивость исчезает, так как дисперсионное уравнение в этом пределе распадается на два уравнения, одно из которых дает нейтральные, а другие — затухающие во времени колебания. Напомним, что условие применимости выписанного дисперсионного уравнения есть $\gamma > \omega_{Hi}$, так как ионы в колебаниях считались немагнитными. Учитывая, что $\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{k_0^2}{k^2} \ll 1$, можно найти частоту и инкремент.

Максимум инкремента достигается при тех же значениях волнового числа $k_{\text{макс}}$, что и в отсутствие высокочастотного поля:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\text{макс}} &= J_0^2(\mu) \left(\frac{\rho_i}{a} \right)^{3/4} \left(\frac{v_c}{v_{Ti}} \right)^{1/4} \frac{\omega_{pi}}{\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \right)^{1/2}} = \\ &= J_0^2(\mu) \gamma_{\text{макс}}^0; \\ k_{\text{макс}}^2 &= \frac{\omega_{pi}^2}{v_{Ti}^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \right)} \left(\frac{\rho_i}{a} \cdot \frac{v_T}{v_c} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Здесь $\gamma_{\text{макс}}^0$ — максимальное значение инкремента в отсутствие высокочастотного поля. Неустойчивость исчезает, если $\gamma < \omega_{Hi}$, т. е.

$$J_0^2(\mu) < \frac{\omega_{Hi}}{\gamma_{\text{макс}}^0} = \frac{\omega_{Hi}}{\omega_{pi}} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \right) \left(\frac{v_T}{v_c} \right)^{1/4} \left(\frac{a}{\rho_i} \right)^{3/4}. \quad (4.39)$$

Так как в отсутствие высокочастотного поля неустойчивость существовала, то $\gamma_{\text{макс}}^0 \geq \omega_{Hi}$. Для конкретности рассмотрим случай, когда $\omega_{Hi}/\gamma_{\text{макс}}^0 \simeq 0,1$. Тогда аргумент функции Бесселя должен быть больше или порядка 2. Это означает, что должно выполняться неравенство

$$\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{\omega_{pi}}{v_{Ti}} \cdot \frac{\rho_i}{a} \cdot \frac{v_T}{v_c} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \right)^{-1/2} > 2.$$

$$\frac{\omega_{pe}}{c} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_{He}}}$$

Так как инкремент и частота величины примерно одного порядка, то можно подставить в качестве Ω величину $\geq \gamma_{\text{макс}}^0$.

Тогда неравенство будет иметь вид

$$\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{c}{v_{Ti}} \cdot \frac{\left(\frac{a}{\rho_i} \cdot \frac{v_T}{v_c}\right)^{1/8}}{\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2}\right)^{1/4}} \sqrt{\frac{\omega_{Hi}}{\omega_{pi}}} > 2. \quad (4.40)$$

Положив $a/\rho_i \sim 10$, $v_T \sim v_c$, $\omega_{Hi} \sim 0,3\omega_{pi}$, получаем

$$\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{c}{v_{Ti}} > 6,$$

т. е. величина H_1/H_0 опять значительно меньше, чем при стабилизации обыкновенной волновой (см. разд. 4.1).

К сожалению, стабилизировать дрейфовые волны геликоном будет, по-видимому, труднее, так как отношение k_{\perp}/k_0 не столь велико. Действительно, поперечное волновое число у дрейфовых волн k_{\perp} , как правило, меньше или порядка ρ_i^{-1} , минимально возможное значение k_0 есть ω_{pi}/c , при этом частота геликона стремится к ω_{Hi} .

Таким образом, $\frac{k_{\perp}}{k_0} \leq \frac{\omega_{Hi}}{v_{Ti}} \cdot \frac{c}{\omega_{pi}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{v_A}{v_{Ti}}$, а аргумент функции

Бесселя $\mu = \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{v_A}{v_{Ti}}$. В то время как при стабилизации ВЧ магнитным

полем дрейфовых неустойчивостей эффект имел место при выполнении неравенства $\frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{a}{\rho_i}$ ($\alpha = i, e$ для дрейфово-температурной

и универсальной неустойчивостей соответственно). При этом, в отличие от геликона, мы можем выбрать частоту $\Omega \ll \omega_{Hi}$. В принципе при малых β стабилизация дрейфовых волн геликоном может оказаться более предпочтительной, однако в каждом конкретном случае надо проводить сравнение критериев, полученных в разд. 4.1 и 4.2. При одном и том же значении частоты геликона и ВЧ магнитного поля воздействие геликона более эффективно, однако, как мы уже отмечали, частота Ω ВЧ магнитного поля может быть сделана гораздо меньшей ω_{Hi} . Обозначая Ω_0 частоту ВЧ магнитного поля, можно записать условие, при котором стабилизация геликоном с частотой Ω оказывается более эффективной:

$$\frac{ck_{\perp}}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_{He}}} \cdot \frac{H_1}{H_0} > \frac{k_{\perp} v_{T\alpha}}{\Omega_0} \cdot \frac{H_1}{H_0} \quad (4.41)$$

или

$$\frac{c}{v_{T\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\Omega\omega_{He}}}{\omega_{pe}} \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega} > 1.$$

Следует отметить, что использование геликона может оказаться более эффективным, так как в отличие от ВЧ магнитного поля он не сканируется.

4.3. Влияние высокочастотных электрических полей на неустойчивость плазмы

Рассмотрим поля с высокими частотами, удовлетворяющими неравенству $\Omega \gtrsim \omega_{He}$, когда уже можно считать, что ни электроны, ни тем более ионы не успевают следить за осцилляциями магнитной силовой линии. Дисперсионное соотношение в этом случае получается способом, аналогичным изложенному в разд. 3.3. При этом возможна как стабилизация неустойчивостей, так и параметрическая раскачка их, когда частота Ω близка к одной из собственных частот плазмы.

1. Стабилизация пучковой неустойчивости

Начнем с простейшей постановки задачи: однородная плазма находится во внешнем высокочастотном поле, постоянное магнитное поле отсутствует. Дисперсионное соотношение для этого случая было получено в разд. 3.3 [уравнение (3.15)]. Будем считать, что частота Ω не приближается ни к одной из собственных частот плазмы и много больше частоты рассматриваемых колебаний. Кроме того, выполняется неравенство $\Omega \gg kv_{T\alpha}$. Тогда в уравнении (3.15) можно пренебречь величиной $\delta\epsilon_e(\omega - q\Omega)$ по сравнению с $\delta\epsilon_e(\omega)$ и оставить в сумме по q нулевой член.

Подставляя теперь значение $\delta\epsilon_e$ и $\delta\epsilon_i$, запишем дисперсионное соотношение в окончательном виде:

$$1 + \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_{oe}}{\partial v} dv + \frac{4\pi e^2}{m_i} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_{oi}}{\partial v} dv + \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \int \mathbf{k} \frac{df_{oe}}{\partial v} dv \int \mathbf{k} \frac{\partial f_{oi}}{\partial v} dv (1 - J_0^2(\delta)) = 0; \quad (4.42)$$

$$\delta = \frac{(kE_0)}{\Omega^2} \cdot \frac{e}{m_e}.$$

Рассмотрим сначала гидродинамический предел $\omega \gg kv_{T\alpha}$, т. е. пренебрежем тепловыми скоростями электронов и ионов, по сравнению с фазовой скоростью волн (холодная плазма). Пусть электроны движутся со скоростью $u \gg v_{Te}$. Тогда дисперсионное уравнение принимает вид [7]

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - ku)^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2}{\omega^2 (\omega - ku)^2} [1 - J_0^2(\delta)] = 0. \quad (4.43)$$

Уравнение (4.43) описывает пучковую неустойчивость в присутствии высокочастотного электрического поля. Если $\omega \gg ku$, т. е.

в плазме нет направленного движения электронов, то получаются следующие выражения для собственных частот:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 J_0^2(\delta); \quad (4.44)$$

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 [1 - J_0^2(\delta)]. \quad (4.45)$$

При выводе этих формул учтено, что $\omega_{pe}^2/\omega_{pi}^2 \gg 1$.

Обратимся теперь к обратному предельному случаю $\omega \gg \mathbf{k}u$, т. е. к пучковой неустойчивости. Из общего дисперсионного соотношения при этом следует

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2 \{ (ku)^2 - \omega_{pe}^2 (1 - J_0^2(\delta)) \}}{(ku)^2 - \omega_{pe}^2}. \quad (4.46)$$

Неустойчивость возможна при выполнении условий

$$\omega_{pe}^2 > (ku)^2 > \omega_{pe}^2 (1 - J_0^2(\delta)). \quad (4.47)$$

Левое неравенство возникает и для обычной пучковой неустойчивости [28], в то время как правое обязано своим происхождением наличию высокочастотного электрического поля. В области малых значений имеем

$$(ku)^2 > \omega_{pe}^2 \Omega^{-2} \left(\mathbf{k} \frac{e\mathbf{E}_0}{m_e \Omega} \right)^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} (\mathbf{k}v_E)^2. \quad (4.48)$$

В этом смысле можно сказать, что имеет место некоторая аналогия колебаний быстрых частиц в электрическом поле тепловому разбросу, сужающему область существования пучковой неустойчивости. Можно сказать, что высокочастотное поле стабилизирует пучковую неустойчивость, уменьшая область ее существования. Найдем теперь инкремент этой неустойчивости. Для этого, как обычно, будем считать $\omega - (ku) = \Delta$, $\mathbf{k}u \simeq \omega_{pe}$ и найдем величину $\Delta \ll \mathbf{k}u$:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{pe}^3} \gamma - \frac{\omega_{pi}^2}{\gamma^2} J_0^2(\delta) = 0. \quad (4.49)$$

Отсюда следует, что максимальный инкремент

$$\gamma = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \omega_{pe} J_0^{2/3}(\delta) \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \quad (4.50)$$

меньше обычного инкремента бунемановской неустойчивости в $J_0^{-2/3}(\delta)$ раз.

2. К и н е т и ч е с к а я н е у с т о й ч и в о с т ь п л а з м ы

Мы рассмотрели влияние сверхвысокочастотного поля на токовую неустойчивость плазмы в гидродинамическом приближении. При более последовательном кинетическом подходе даже в отсутствие постоянного тока, как было впервые показано В. П. Силиным [29],

возможна раскачка неустойчивости при достаточно больших значениях амплитуды высокочастотного поля.

Пусть частота Ω много больше электронной ленгмюровской частоты, так что плазма является прозрачной. Будем искать неустойчивость, раскачиваемую резонансными электронами на частоте $\omega \ll \omega_{pe}$.

Воспользуемся полным дисперсионным соотношением (3.15), в котором удержаны все слагаемые суммы по q .

Для малости затухания найденных волн будем считать, что фазовая скорость ω/k много больше тепловой скорости ионов. Принимая во внимание, что при $\Omega \gg kv_{Te} \gg \omega$, $\delta\epsilon_e(\omega + n\Omega) \gg 1$, мы можем записать дисперсионное соотношение в следующем виде ($\bar{k}r_{De} \gg 1$):

$$1 - \frac{1}{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int \frac{\partial f_{oi}}{\partial v} k \delta(\omega - kv) dv} = -i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \times \\ \times \sum_n J_n^2(\delta) \int k \frac{\partial f_{oe}}{\partial v} \delta(\omega - n\Omega - kv) dv. \quad (4.51)$$

Здесь функции распределения электронов и ионов по скоростям являются четными и нормированы на единицу.

Правую часть уравнения (4.51) можно упростить, разложив ее по степеням ω/Ω :

$$\sum_n J_n^2(\delta) k \frac{\partial \bar{f}_{oe}}{\partial v} \delta(\omega - n\Omega - kv) = \sum_n J_n^2(\delta) \frac{\partial \bar{f}_{oe}}{\partial v} \Big|_{v=\frac{\omega-n\Omega}{k}} = \\ = \sum_n J_n^2(\delta) \frac{\partial \bar{f}_{oe}}{\partial v} \Big|_{v=-n\Omega/k} - \frac{\omega}{k} \sum_n J_n^2(\delta) \frac{\partial^2 \bar{f}_{oe}}{\partial v^2} \Big|_{v=-n\Omega/k} + \\ + J_0^2(\delta) \frac{\partial \bar{f}_{oe}}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (4.52)$$

Черта над функцией \bar{f}_{oe} означает, что функция проинтегрирована по поперечным к вектору \mathbf{E}_0 -скоростям. Первая сумма в правой части уравнения (4.52) равна нулю из-за четности функции распределения ионов по скоростям. Теперь можно решить дисперсионное уравнение (4.51) с учетом указанных параметров малости и найти частоту ω и инкремент γ неустойчивости:

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2; \\ \gamma = \frac{\omega_{pi}^2}{2\omega} \pi \left[\frac{\omega^4}{\omega_{pi}^2 k^2} \cdot \frac{\partial \bar{f}_{oe}}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} J_0^2(\delta) \frac{\partial \bar{f}_{oe}}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} - \right. \\ \left. - \frac{\omega\omega_{pe}^2}{k^3} \sum_n J_n^2(\delta) \frac{\partial^2 \bar{f}_{oe}}{\partial v^2} \Big|_{v=-n\Omega/k} \right]. \quad (4.53)$$

Для того чтобы возникла неустойчивость, необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках стало положительным. Так как первое и второе слагаемые всегда отрицательны, то неустойчивость может иметь место лишь в том случае, если вторая производная от функции распределения, проинтегрированной по скоростям, перпендикулярным к вектору E_0 , будет отрицательной. При этом еще необходимо, чтобы она по абсолютной величине была больше первых двух слагаемых в квадратных скобках. Затухание на ионах будет достаточно мало, если их температура T_i много меньше температуры электронов. Что касается затухания Ландау на электронах, описываемого вторым слагаемым, то его также можно сделать малым, рассматривая, например, такие значения величины δ , когда функция Бесселя $J_0(\delta)$ обращается в нуль. Либо же нужно рассматривать очень короткие волны, тогда аргумент функции Бесселя будет велик, и затухание Ландау на электронах может стать меньше, чем раскачка, вызываемая высшими гармониками.

Следуя работе В. П. Силина [29], изучим подробно случай, когда распределение электронов можно считать максвелловским с температурой T_e , и покажем, что при определенных значениях амплитуды E_0 и частоты Ω высокочастотного поля возможна неустойчивость.

Обратимся сначала к случаю длинных волн $kv_{Te} \ll \Omega$ и не будем считать частоту Ω близкой к ω_{pe} . Тогда, учитывая сказанное выше, вблизи нулей функции $J_0(\delta_r) = 0$ инкремент неустойчивости можно записать в виде

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pi}}{(kr_{Di})^2} \left\{ \exp\left(-\frac{\omega^2}{k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{r_{Di}^3 \omega_{pi}}{r_{De}^3 \omega_{pe}} J_1^2(\delta_r) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(\delta - \delta_r)^2}{1 + (kr_{De})^2} - \frac{\Omega^2}{k^2 v_{Te}^2 (\Omega^2 - \omega_{pe}^2)} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{k^2 v_{Te}^2}\right) \right] \right\}. \quad (4.54)$$

Здесь мы разложили $J_0(\delta)$ вблизи $\delta = \delta_r$, а в сумме $\sum_n J_n^2(\delta_r) \frac{\partial^2 f_{0e}}{\partial v^2} \Big|_{v=-n\Omega/k}$ удержали первый отличный от нуля член, так как $\frac{\Omega^2}{k^2 v_{Te}^2} \gg 1$.

Для частоты ω имеем

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left\{ 1 + \frac{J_1^2(\delta_r) (\delta - \delta_r)^2}{1 + (kr_{De})^{-2}} \right\}. \quad (4.55)$$

При получении этой формулы было использовано соотношение [15, 30]

$$\sum_n \frac{J_n^2(\delta) \omega_{pe}^2}{n^2 \Omega^2 - \omega_{pe}^2} = \frac{\pi \frac{\omega_{pe}}{\Omega}}{\sin \frac{\pi \omega_{pe}}{\Omega}} J_{\frac{\omega_{pe}}{\Omega}} J_{\frac{\omega_{pe}}{\Omega}}. \quad (4.56)$$

Учитывая, что последний член в формуле (4.55) мал по сравнению с единицей, и принимая во внимание, что легче всего будут раскачиваться волны, для которых $\delta_r = 0$, получаем критерий неустойчивости:

$$k^2 \ln \frac{4\omega_{pi}^2 \Omega^6 (r_{Di}/r_{De})^3 J_1^2(\delta_r)}{\omega_{pe}^2 k^2 v_{Te}^2 (\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2} > \frac{\Omega^2}{v_{Te}^2} \left\{ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \cdot \frac{T_e}{T_i} \right\}. \quad (4.57)$$

Если температура электронов много больше температуры ионов, то условие раскачки существенно облегчается. В рассматриваемом случае $\Omega \gg kv_{Te}$, но длина волны должна быть меньше амплитуды колебания электрона во внешнем поле (иначе аргумент функции Бесселя будет меньше единицы). Отсюда следует, что скорость осциллирующий электрона должна быть много больше тепловой, так как $\delta = \frac{kv_E}{\Omega}$, где v_E — скорость осциллирующий электрона во внешнем поле, и мы имеем следующие условия:

$$kv_E \gg \Omega \gg kv_{Te}. \quad (4.58)$$

Рассмотрим теперь второй предельный случай, когда $kv_{Te} \gg \Omega$. При вычислении сумм по n , входящих в дисперсионное соотношение, можно по-прежнему пользоваться теми же математическими приемами, что и при суммировании по циклотронным гармоникам, когда $k_z v_{Te} \gg \omega_{He}$:

$$\begin{aligned} \sum_n J_n^2 \frac{1}{\omega - kv - n\Omega} &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \int_{-\infty}^t dt' \exp \{ -i\omega(t' - t) + \\ &+ ikv(t' - t) + i\delta \sin \Omega t' - i\delta \sin \Omega t \} = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau + ikv\tau} \times \\ &\times J_0 \left(2\delta \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Проводя интегрирование по скорости и оставляя интеграл по τ , получим дисперсионное соотношение в следующем виде [31]:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega)} &= \frac{1}{(kr_{De})^2} \int_0^{\infty} d\tau \tau e \frac{k^2 v_{Te}^2 \tau^2}{4} \times \\ &\times J_0^2 \left(2\delta \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) \exp(i\tau\omega). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Перейдем теперь к предельному случаю $\Omega \ll kv_{Te}$. Тогда

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[1 + 3k^2 r_{Di}^2 - 0 \left(\frac{2}{k^2 r_{De}^2} \right) \right]. \quad (4.60)$$

Выражение для инкремента запишем в пределе больших значений δ , таких, что $\Omega\delta \gg kv_{Te}$. При этом в аргументе функции J_0 синус можно заменить его аргументом из-за малости Ω/kv_{Te} , а для самой функции Бесселя использовать асимптотику, так как $\Omega\delta \gg kv_{Te}$.

В результате имеем

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pi}}{(kr_{Di})^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{pe}^2}{|kv_E|^3}. \quad (4.61)$$

При $v_E = \frac{eE_0}{m_e \Omega}$ интеграл по τ в уравнении (4.59) может быть взят и оказывается, что устойчивость нарушается при

$$|kv_E| \simeq 1,8kv_{Te}, \quad (4.62)$$

т. е. при частотах поля, удовлетворяющих условию

$$\Omega < 0,55\omega_{pe} \left(\frac{E_0^2}{4\pi n_0 T_e}\right)^{1/2}. \quad (4.63)$$

Для длин волн нарастающих колебаний имеем

$$k < r_{Di}^{-1} \left\{ \ln \left[\frac{T_e^3}{T_i^3} \cdot \frac{m_i}{m_e} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (4.64)$$

Так как $kr_{De} \gg 1$, то для выполнения неравенства (4.64) необходимо, чтобы температура электронов была много больше температуры ионов.

3. Параметрические неустойчивости

Мы рассмотрели случай, когда частота внешнего поля была много больше плазменной электронной частоты ω_{pe} . Принимая во внимание, что при приближении частоты поля Ω к ω_{pe} нарастающими оказываются все более длинноволновые колебания, можно было бы попытаться найти неустойчивость, когда параметры kr_{De} удовлетворяют неравенству $kr_{De} \ll 1$, а аргумент функции Бесселя δ много меньше единицы. Такие неустойчивости были впервые и подробно исследованы в работах В. П. Силина и его сотрудников [12, 15].

Для получения дисперсионного соотношения для параметрической неустойчивости воспользуемся уравнением (3.13).

Однако мы учтем, что теперь $\delta\epsilon_i(\omega)$ и $\delta\epsilon_i(\omega \pm p\Omega)$ могут быть величинами одного порядка (рассматривается случай, когда происходит резонанс на p -й гармонике). Умножая уравнение (3.13) на $J_{q-p}(\delta)$ и суммируя по p , получаем

$$\begin{aligned} & \sum_s J_{q-s}(\delta) \Phi_s = \\ = & \frac{J_q(\delta) \delta\epsilon_i(\omega) \Phi_0 + \Phi_r J_{q-r}(\delta) \delta\epsilon_i(\omega + r\Omega) + \Phi_{-r} J_{q+r}(\delta) \delta\epsilon_i(\omega - r\Omega)}{1 + \delta\epsilon_e(\omega - q\Omega)}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь в уравнения системы (3.13) для $p=0$, r и $-r$ сумму $\sum_s J_{q-s}(\delta) \Phi_s$, получаем систему трех уравнений для величины Φ_0 , Φ_r и Φ_{-r} :

$$\begin{aligned} & \left[-1 - \delta \varepsilon_i(\omega) + \delta \varepsilon_i(\omega) \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q^2(\delta) \right] \Phi_0 + \\ & + \Phi_r \delta \varepsilon_i(\omega + r\Omega) \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q(\delta) \times \\ & \times J_{q-r}(\delta) + \Phi_{-r} \delta \varepsilon_i(\omega - r\Omega) \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q J_{q+r} = 0; \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_0 \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q(\delta) J_{q-r}(\delta) \delta \varepsilon_i(\omega) + \\ & + \Phi_r \left[-1 + \delta \varepsilon_i(\omega - r\Omega) + \delta \varepsilon_i(\omega - r\Omega) \times \right. \\ & \times \left. \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_{q-r}^2(\delta) \right] + \Phi_{-r} \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} \times \\ & \times J_{q-r}(\delta) J_{q+r}(\delta) \delta \varepsilon_i(\omega + r\Omega) = 0; \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_0 \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_q(\delta) J_{q+r}(\delta) \delta \varepsilon_i(\omega) + \\ & + \delta \varepsilon_i(\omega + r\Omega) \Phi_r \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_{q+r}(\delta) J_{q-r}(\delta) + \\ & + \Phi_{-r} \left[-1 - \delta \varepsilon_i(\omega - r\Omega) + \delta \varepsilon_i(\omega - r\Omega) \times \right. \\ & \times \left. \sum_q \frac{\delta \varepsilon_e(\omega - qr)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega - q\Omega)} J_{q+r}^2(\delta) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Условие равенства нулю определителя этой системы уравнений приведет к искомому дисперсионному соотношению. Если рассматривать $\delta \ll 1$ и $kr_{De} \gg 1$, то дисперсионное соотношение можно сильно упростить. С точностью до членов порядка δ^2 , с учетом того, что $\delta \varepsilon_e(\omega) \gg \delta \varepsilon_e(\omega \pm \Omega)$, так как $\omega \ll \Omega \sim \omega_{pe} \gg kv_{Te}$, получим [7, 31, 32]

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{[1 + \delta \varepsilon_e(\omega)] \delta \varepsilon_i(\omega)} + \frac{\delta^2}{4} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega - \Omega)} + \frac{1}{\varepsilon(\omega + \Omega)} \right] = 0, \quad (4.68)$$

где $\varepsilon(\omega) = 1 + \delta \varepsilon_e(\omega) + \delta \varepsilon_i(\omega)$.

Кроме дисперсионного уравнения можно получить соотношение между амплитудами Φ и $\Phi_{\pm 1}$, следующее из системы уравнений (4.65)–(4.67):

$$\Phi_{\pm 1} = \mp \frac{\delta \varepsilon_i(\omega) \delta}{2\varepsilon(\omega \pm \Omega)} \Phi_0. \quad (4.69)$$

Общая схема решения дисперсионного соотношения (4.68) для колебаний с малым инкрементом состоит в следующем.

Разложим все члены уравнения (4.68) по степеням γ/ω и приравняем нулю в отдельности мнимые и действительные члены. В результате имеем [31]:

$$\left[1 - \gamma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\right] \left[\frac{1}{\delta \varepsilon_i'(\omega)} + \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_e'(\omega)} \right] + \frac{1}{4} \delta^2 \left[\frac{u_+}{v_+} + \frac{u_-}{v_-} \right] = 0; \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & -\frac{1}{\Xi} \left\{ \frac{\delta \varepsilon_e''(\omega)}{[1 + \delta \varepsilon_e'(\omega)]^2} + \frac{\delta \varepsilon_i''(\omega)}{[\delta \varepsilon_i'(\omega)]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \delta^2 \left[\frac{\delta \varepsilon_e''(\omega + \Omega)}{v_+} + \frac{\delta \varepsilon_e''(\omega - \Omega)}{v_-} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Здесь $\delta \varepsilon_\alpha'(\omega)$ и $\delta \varepsilon_\alpha''(\omega)$ — соответственно действительная и мнимая части величины $\delta \varepsilon_\alpha$, а

$$u_\pm = \varepsilon'(\pm \Omega) \pm \omega \frac{\partial \varepsilon'(\pm \Omega)}{\partial \Omega}; \quad (4.72)$$

$$v_\pm = (u_\pm)^2 + \left[\varepsilon''(\omega \pm \Omega) \pm \gamma \frac{\partial \varepsilon'(\pm \Omega)}{\partial \Omega} \right]^2; \quad (4.73)$$

$$\Xi = -\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{1}{\delta \varepsilon_i''(\omega)} + \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_e'(\omega)} \right] + \frac{1}{4} \delta^2 \left[\frac{1}{v_+} - \frac{1}{v_-} \right] \frac{\partial \varepsilon'(\Omega)}{\partial \Omega}. \quad (4.74)$$

Если в выражении v_\pm можно пренебречь величиной γ/Ω , то функция $\Xi = -\partial D/\partial \omega$, где величина $D(\omega, k)$ введена следующим образом: уравнение $D(\omega, k) = 0$ является эквивалентным дисперсионному уравнению. Случай кинетической неустойчивости, рассмотренный в предыдущем разделе, соответствовал $\Xi > 0$. Если окажется, что справедливо обратное неравенство, то может возникнуть неустойчивость даже если не учитывать затухание Ландау на электронах на частотах $\omega \pm \Omega$. Это означает, что можно опустить все члены с $\varepsilon''(\omega \pm \Omega)$, которые были ответственны за кинетическую неустойчивость, обсуждавшуюся в предыдущем разделе. Рассмотрим бестолковительную плазму в присутствии сверхвысокочастотного поля. Пусть $kv_{Te} \gg \omega \gg kv_{Ti}$, тогда, вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta \Omega &= \Omega - (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 + 3k^2 r_{De}^2 \omega_{pe}^2)^{1/2}; \\ \Phi &= \frac{1}{4} \delta^2 \frac{\omega_{pi}^2 \Omega \Delta \Omega}{[(\Delta \Omega) - \omega_s^2]^2}; \quad \omega_s^2 = \omega_{pi}^2 k^2 r_{De}^2, \end{aligned}$$

получим

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} [(\Delta \Omega)^2 + \omega_s^2 + \{(\Delta \Omega)^2 - \omega_s^2\} \sqrt{1 - \Phi}]} + \gamma^2; \quad (4.75)$$

$$\gamma = -\frac{1}{\Xi_0} \left\{ \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{kv_{Te}}{\sqrt{2}} + \frac{8\omega^4}{k^3 v_{Ti}^2} e^{-\frac{\omega^2}{k^2 v_{Ti}^2}} \right\} = -\frac{2\gamma_0}{\Xi_0}; \quad (4.76)$$

$$\Xi_0 = -\frac{4}{\Phi} (\sqrt{1 - \Phi} + 1) \sqrt{1 - \Phi}. \quad (4.77)$$

Когда γ^2 мало, неустойчивость возникает в области прозрачности $\Omega > \omega_{pe}$ при $\Xi < 0$, $\Phi > 0$. Величина γ^2 становится существенной при стремлении Φ к единице, при этом в той окрестности ω , где $\partial D/\partial \omega$ меняет знак, инкремент становится наибольшим, оставаясь все-таки меньше частоты

$$\gamma_{\max} \sim \frac{\gamma_0}{\sqrt{1-\Phi}} \simeq |\gamma_0 \{(\Delta\Omega)^2 - \omega_s^2\}^{1/3}|, \quad (4.78)$$

так как

$$\sqrt{1-\Phi} |\gamma_0^2 \{(\Delta\Omega)^2 - \omega_s^2\}^{1/3}| \simeq 1.$$

В этой части расстройка $\Delta\Omega$ и частота ω близки к ионно-звуковой частоте ω_s .

Условие применимости полученных формул можно записать в виде

$$\gamma \gg \delta \epsilon_e''(\Omega) \left[\frac{\partial (\delta \epsilon_e'(\Omega))}{\partial \Omega} \right]^{-1}$$

или для Φ , не близких к единице,

$$\frac{E_0^2}{E_T^2} = E_0^2 \frac{e^2}{m\Omega^2 T} \gg \frac{\Omega}{\Delta\Omega} \left[1 - \left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \right)^2 \right]^2 \frac{1}{k^2 r_{De}^2} e^{-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2}}. \quad (4.79)$$

Вместе с этим условием можно выписать условие, ограничивающее область допустимых значений для волновых чисел, которое для водородной плазмы дает $kr_{De} < 0,2$. Для значений Φ , близких к единице, напряженность внешнего поля и допустимая область k определяются неравенством

$$\frac{\gamma_0}{\Omega} \gg \sqrt{1-\Phi} (kr_{De})^{-3} e^{-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2}}$$

и соотношением (4.78). Нетрудно видеть, что для выполнения этих условий необходима сильная неизотермичность.

Рассмотрим теперь случай так называемой гидродинамической неустойчивости, для которой несущественны эффекты затухания Ландау вообще. Пусть $\omega < kv_{Ti}$, тогда $\delta \epsilon_i = (k^2 r_{Di}^2)^{-1}$ и выражение для инкремента ($\gamma \gg \omega$) колебаний принимает вид

$$\gamma = -\tilde{\gamma} + \left[-(\Delta\omega)^2 - \frac{1}{4} \omega_{pe} \Delta\Omega \frac{\delta^2}{k^2 r_{Di}^2 + k^2 r_{De}^2} \right]^{1/2}. \quad (4.80)$$

Здесь $\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{\omega_{pe}}{k^3 r_{De}^3}} e^{-\frac{\Omega^2}{k^2 v_{Te}^2}} + \frac{1}{2} \nu_{ei}$ — затухание Ландау на

электронах; электрон-ионные столкновения не являются ответственными за раскачку. Мы считали, что

$$kv_{Te} \gg v_{ei}; \quad \frac{\omega^3}{k^2 v_{Ti}^2} \gg v_{ii}.$$

Из формулы (4.80) следует, что раскачка возможна при выполнении неравенства $\Omega < \omega_{pe}$. Неустойчивость в этом случае является аperiodической.

Аperiodическая неустойчивость возможна и при $kv_{Te} > \omega > kv_{Ti}$. В этом случае уже $\delta\epsilon_i(\omega) = -\omega_{pi}^2/\omega^2$, и в выражении для инкремента появляется ионно-звуковая частота ω_s :

$$\gamma = -\tilde{\gamma} + \left\{ \frac{1}{2} \left[((\Delta\Omega)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2)^2 - \omega_s^2 \omega_{pe} \Delta\Omega \frac{\delta^2}{k^2 r_{De}^2} \right]^{1/2} + \tilde{\gamma}^2 - \frac{1}{2} ((\Delta\Omega)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2) \right\}^{1/2}. \quad (4.81)$$

Формулу (4.80) в гидродинамическом пределе без точного учета теплового движения ионов получил Нишикава [33].

Наконец, разберем еще случай так называемой распадной неустойчивости, который соответствует достаточно большим значениям расстройки $\Delta\Omega \gg \tilde{\gamma}$. При этом можно, пренебрегая всеми мнимыми членами, получить дисперсионное соотношение непосредственно из формулы (4.68). Действительно, если не считать, как мы это делали при получении формулы (4.81), что $\gamma \gg \omega$, то можно получить следующие выражения для частоты и инкремента [12]:

$$\omega^2 = \frac{1}{4} [(\Delta\Omega)^2 + \omega_s^2 + \omega_s \Delta\Omega (4 + \alpha_0)^{1/2}]; \quad (4.82)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} [\omega_s \Delta\Omega (4 + \alpha_0)^{1/2} - \omega_s^2 - (\Delta\Omega)^2]^{1/2}, \quad (4.83)$$

$$\text{где } \alpha_0 = \frac{\delta^2}{k^2 r_{De}^2} \cdot \frac{\Omega}{\Delta\Omega}.$$

Отметим, что формулы (4.82) и (4.83) можно непосредственно получить из выражения (4.75), положив $\gamma^2 = 0$ и считая $(\Delta\Omega)^2 \approx \omega_s^2$. При этом выражение для квадрата частоты ω^2 будет иметь действительное и мнимое слагаемые. Извлекая из этой суммы корень и разделяя мнимую и действительную части, получаем соотношения (4.82) и (4.83).

Из формул (4.82) и (4.83) следует, что при малых значениях α_0 неустойчивыми оказываются колебания с волновыми векторами, удовлетворяющими условию $\Delta\Omega = \omega_s$. Это соответствует распадной неустойчивости, рассмотренной В. Н. Оравским и Р. З. Сагдеевым [34].

Исследование параметрических неустойчивостей в отсутствие постоянного магнитного поля с учетом кулоновских столкновений проделано в работе [12]. Для плазмы, помещенной в постоянное

магнитное поле, задача практически может быть решена теми же методами. Отличие состоит в том, что величины $\delta\epsilon_\alpha(\omega)$ должны быть записаны с учетом магнитного поля. Число резонансных частот для плазмы в магнитном поле возрастает, так как параметрический резонанс теперь уже возможен на циклотронных частотах. В этой связи представляет интерес работа, выполненная Д. Зюндером и О.М. Градовым [35], в которой авторы рассмотрели реальную ситуацию, имеющую место при циклотронном нагреве электронов, и показали, что при частоте Ω , близкой к ω_{He} , возможна параметрическая раскачка ионно-звуковых колебаний.

Наконец, рассмотрим случай плазмы в магнитном поле, когда $\Omega < \omega_{Hi}$. Если частота внешнего электрического поля Ω близка к частоте ионно-звуковых колебаний ω_s , то может происходить, как показал Ф. М. Некрасов [36], параметрическая раскачка ионно-звуковых колебаний. Рассматривая для простоты одномерный случай, можно, интегрируя по характеристикам, получить следующее выражение для возмущения плотности электронов:

$$n_e = \frac{k_z^2 e n_0}{m_e} \int_0^t d\tau (t - \tau) \Phi(\tau) \times \\ \times \exp \left\{ ia (\sin \Omega t - \sin \Omega \tau) - \frac{k_z^2 T_e}{2m_e} (t - \tau)^2 \right\}.$$

Здесь величина $a = \frac{k_z u}{\Omega}$; u — амплитуда осцилляций скорости электронов под действием внешнего электрического поля. Плазма считается сильно неизотермичной $T_e \gg T_i$, $\Omega^2 \simeq \omega_s^2 = k_z^2 \frac{T_e}{m_i}$, и, наконец, $u \ll v_{Te}$. Ввиду того что $\frac{\Omega}{k_z v_{Te}} \ll 1$, можно разложить $\exp \{ ia \times \sin \Omega (t - \tau) \}$ вблизи точки $\tau = 0$.

Возмущение плотности ионов записывается так же, как и в отсутствие внешнего электрического поля, ибо из-за большого отношения m_i/m_e можно пренебречь движением ионов. Считая, что $\Phi_k = \sum_m \Phi_m e^{i\omega t + im\Omega t}$, и пользуясь условием квазинейтральности, получаем следующую систему алгебраических уравнений для Φ_m :

$$\left[1 + \frac{\Omega_s^2}{(-i\xi + im)^2} - \frac{\alpha^2}{2} - \varepsilon (-i\xi + im) \sqrt{\frac{\pi}{2} + \varepsilon^2 (-i\xi + im)^2} \right] \Phi_m + \\ + \frac{\alpha}{2} \left\{ \left[i \sqrt{\frac{\pi}{2} + \varepsilon (2m + 1 - 2\xi)} \right] \Phi_{m+1} + \right. \\ \left. + \left[i \sqrt{\frac{\pi}{2} + \varepsilon (2m - 1 - 2\xi)} \right] \Phi_{m-1} \right\} - \frac{1}{4} \alpha^2 (\Phi_{m+2} + \Phi_{m-2}) = 0. \quad (4.84)$$

Здесь введены следующие безразмерные величины:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{k_z u}{\sqrt{\frac{k_z T_e}{m_e}}} \ll 1; & \varepsilon &= \frac{\Omega}{k_z \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}} \ll 1; \\ \Omega_s^2 &= \frac{\omega_s^2}{\Omega^2} \simeq 1; & \xi &= \frac{\omega}{\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

Подставляя теперь в систему (4.84)

$$\Phi_m = \Phi_m^{(0)} + \alpha \Phi_m^{(1)} + \alpha^2 \Phi_m^{(2)}; \quad (4.86)$$

$$\xi = -1 + i\alpha\xi^{(1)} + i\alpha^2\xi^{(2)}, \quad (4.87)$$

получаем, что $\Phi_m^0 = 0$ для всех m , кроме $m = 0; -2$, так как в этом приближении $\Omega_s^2 = 1$. Будем считать $\Phi^{(0)}$ и $\Phi_{-2}^{(0)}$ произвольными константами и найдем поправки к частоте $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_s - i \frac{\omega_s^2}{|k_z| v_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{4} \pm i \frac{u^2}{v_{Te}^2} \omega_s} \times \\ &\times \sqrt{\frac{1}{16} - \left[\frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \cdot \frac{v_{Te}^2}{2u^2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \right]^2}; \quad v_{Te} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Отсюда следует, что допустимая расстройка, при которой возникает параметрическая неустойчивость, определяется неравенством

$$\left| \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \right| < \frac{u^2}{2v_{Te}^2}. \quad (4.89)$$

Кроме этого, необходимо еще, чтобы скорость u превысила некоторое критическое значение для того, чтобы инкремент стал положительным

$$\frac{u^2}{v_{Te}^2} > \sqrt{2\pi \frac{m_e}{m_i}}. \quad (4.90)$$

Мы видим, что критическая скорость увеличилась примерно в $\sqrt[4]{\frac{m_i}{m_e}}$ по сравнению со скоростью ионно-звуковых колебаний, которая является порогом в стационарном случае. Это связано с тем, что в одном направлении ток течет в течение времени π/Ω , после чего направление тока меняется на обратное. За время π/Ω при $\Omega \sim \sim \omega_s$ волна сумеет раскачаться лишь при условии, если инкремент ее будет достаточно велик, т. е. если будет достаточно велика скорость u . Действительно, в течение полупериода $T/2$ раскачивается волна, бегущая, скажем, в положительном направлении оси z , и ее амплитуда вырастает в $e^{\gamma T/2} \simeq 1 + \gamma T/2$ раз по сравнению с тепловыми шумами. В течение следующего полупериода эта волна затухает, так как средняя скорость электронов направлена в противоположную сторону ($\gamma \sim -\omega_s^2/k_z v_{Te}$) и раскачивается волна,

бегущая в отрицательном направлении оси z . Таким образом, если амплитуда волны $\omega/k_z > 0$ в течение второго полупериода не успевает уменьшиться до своего исходного значения, то волна будет раскачиваться.

То же самое можно сказать и о волне, бегущей в обратном направлении. Из уравнения (4.88) действительно следует, что раскачиваются волны, бегущие в обоих направлениях, и что затухание определяется величиной $\omega_e^2/k_z v_{Te}$.

4. Стабилизация дрейфовой неустойчивости высокочастотным электрическим полем

Представляет интерес изучить влияние высокочастотной обыкновенной волны достаточно большой амплитуды на дрейфовую неустойчивость плазмы. Такое исследование было проведено в работе Я. Б. Файнберга и В. Д. Шапиро [11]. В направлении постоянного магнитного поля действовало высокочастотное электрическое поле $E_{z0} = E_0 \sin \Omega t$. Возможность стабилизации дрейфовых неустойчивостей таким способом можно разъяснить следующим образом. Если амплитуда внешнего электрического поля достаточно велика, то становятся существенными колебания электронов в поле волны. Тогда при возбуждении в плазме дрейфовых волн на электроны будет действовать дополнительная сила давления в высокочастотном электрическом поле, являющемся суммой внешнего поля и электрического поля дрейфовых волн $E = E_{z0}(t) + E_1(t, r)$.

Эта сила давления равна

$$\frac{\epsilon_{zz}(\Omega) - 1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \langle E_{z0} E_1 \rangle,$$

где ϵ_{zz} — компонента тензора диэлектрической проницаемости, скобки означают усреднение по периоду $2\pi/\Omega$. Эта сила может привести к увеличению частоты дрейфовой волны, так как частота зависит от температуры. С ростом частоты в инкременте увеличивается

стабилизирующий член $\frac{df_{0e}}{dv_z} \cdot \frac{\omega}{k_z} \simeq -\frac{m_e \omega}{T_e k_z} f_{0e}(0)$ при $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ и при заданном градиенте концентрации плазма может оказаться устойчивой относительно раскачки дрейфовых волн. Дисперсионное соотношение можно получить сразу из уравнения (3.15), если учесть, что $\delta\epsilon_e(\omega) \gg \delta\epsilon_e(\omega - q\Omega)$ при $q \neq 0$ и изменить $\delta\epsilon_e(\omega)$ и $\delta\epsilon_i(\omega)$ на следующие ($T_e = T_i$, $\omega \ll \omega_{Hi}$):

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_e(\omega) \rightarrow \delta\epsilon_e^{(H)}(\omega) &= \frac{1}{k^2 r_{De}^2} - \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \left(\frac{k_y}{\omega_{He}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{m_e}{T} \omega \right) n_0 \times \\ &\times \left(\frac{m_e}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z e^{-\frac{m_e v_z^2}{2T}}}{\omega - k_z v_z}; \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\delta \varepsilon_i(\omega) \rightarrow \delta \varepsilon_i^{(H)}(\omega) = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} - \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \left(\frac{k_y}{\omega_{Hi}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{m_i}{T} \omega \right) \times \\ \times n_0 e^{-k^2 \rho_i^2} J_0(k^2 \rho_i^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z e^{-\frac{m_i v_z^2}{2T}}}{\omega - k_z v_z}; \quad \rho_i^2 = \frac{T m_i c^2}{e^2 H_0^2}. \quad (4.92)$$

Выражения (4.91) и (4.92) являются не чем иным, как определением парциальных вкладов в диэлектрическую проницаемость плазмы, находящейся в постоянном магнитном поле в отсутствие внешних электрических полей. Влияние высокочастотного поля проявляется в том, что меняется дисперсионное соотношение, в которое теперь входит $J_0^2(\delta)$ — функция Бесселя нулевого порядка от аргумента $\delta = \frac{E e_0}{m \Omega^2} k_z$. Итак, дисперсионное соотношение теперь имеет следующий вид:

$$1 + \delta \varepsilon_i^{(H)}(\omega) + \delta \varepsilon_e^{(H)}(\omega) + \delta \varepsilon_i^{(H)} \delta \varepsilon_e^{(H)} (1 - J_0^2(\delta)) = 0. \quad (4.93)$$

При $\delta = 0$ уравнение (4.93) переходит в обычное уравнение дрейфовых колебаний, так как $J_0^2(\delta) = 1$. При увеличении δ неустойчивость может исчезнуть, так как дисперсионное соотношение при $J_0^2(\delta) \rightarrow 0$ имеет вид

$$[1 + \delta \varepsilon_e^{(H)}(\omega)] [1 + \delta \varepsilon_i^{(H)}(\omega)] = 0,$$

а решение этого уравнения не приводит к нарастающим во времени колебаниям.

Таким образом, для стабилизации дрейфовых неустойчивостей необходимы большие значения величин δ . Такие значения δ соответствуют большим значениям величины осцилляторной скорости электронов. Как показано в работе [11], неустойчивость можно стабилизировать и при значениях $\delta < 1$, если подобрать частоту Ω соответствующим образом.

Для $\delta \ll 1$ и квазинейтральных колебаний ($k^2 r_{De}^2 \ll 1$) в предыдущем разделе было получено дисперсионное уравнение (4.68), которое может быть использовано и в нашем случае. Его удобно переписать в следующем виде:

$$\delta \varepsilon_i^{(H)}(\omega) + \delta \varepsilon_e^{(H)}(\omega) - \frac{\delta^2}{2} \varphi(\Omega) \delta \varepsilon_i^{(H)}(\omega) \delta \varepsilon_e^{(H)}(\omega) = 0, \quad (4.94)$$

где $\delta \varepsilon_e^{(H)}(\omega)$ заданы соотношениями (4.91) и (4.92):

$$\varphi(\Omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \delta \varepsilon_i^{(H)}(\Omega) + \delta \varepsilon_e^{(H)}(\Omega)} + \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_i^{(H)}(-\Omega) + \delta \varepsilon_e^{(H)}(-\Omega)} \right]. \quad (4.95)$$

Будем считать, что $\omega_{Hi} \ll \Omega \ll \omega_{He}$, $k_z v_{Te} \ll \Omega$, тогда $\delta \varepsilon_i^{(H)}(\Omega) = -\omega_{pi}^2 / \Omega^2$, т. е. в парциальном вкладе от ионов можно пренебречь влиянием магнитного поля. Величину $\delta \varepsilon_e^{(H)}(\Omega)$ можно получить из формулы (4.91), так как $\Omega \ll \omega_{He}$, однако при этом надо учесть члены порядка $\omega_{pe} / \omega_{He}$:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_e(\pm \Omega) = & -\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega} \cdot \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \cdot \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \pm \\ & \pm \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega \omega_{He}} \cdot \frac{k_y \kappa}{k^2}; \quad \kappa = \frac{d \ln n_0}{dx}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Окончательно имеем [11]

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega) = & \frac{\Omega^2 \left(N \Omega^2 - \omega_{pe}^2 \frac{k_z^2}{k^2} - \omega_{pi}^2 \right)}{\left[N \Omega^2 - \omega_{pe}^2 \frac{k_z^2}{k^2} - \omega_{pi}^2 \right]^2 - \Omega^2 \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_{He}^4} \cdot \frac{k_y^2 \kappa^2}{k^4}}; \\ N = & 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \cdot \frac{k_{\perp}^2}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Функция $\varphi(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $\varphi(\Omega) > 0$ при

$$\Omega_- < \Omega < \frac{1}{N^{1/2}} \left(\omega_{pe}^2 \frac{k_z^2}{k^2} + \omega_{pi}^2 \right)^{1/2} \quad \text{или} \quad \Omega > \Omega_+, \quad (4.98)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm}^2 = & \frac{1}{N^2} \left[N \left(\omega_{pe}^2 \frac{k_z^2}{k^2} + \omega_{pi}^2 \right) + \frac{\omega_{pe}^4}{2\omega_{He}^2} \cdot \frac{k_y^2 \kappa^2}{k^4} \pm \right. \\ & \pm \left. \left\{ N \left(\omega_{pe}^2 \frac{k_z^2}{k^2} + \omega_{pi}^2 \right) + \frac{\omega_{pe}^4}{2\omega_{He}^2} \cdot \frac{k_y^2 \kappa^2}{k^4} \right\}^2 - \right. \\ & \left. - N^2 \left(\omega_{pe}^2 \frac{k_z^2}{k^2} + \omega_{pi}^2 \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Пусть частота Ω выбрана так, что $\varphi(\Omega) > 0$.

Исследуем решения уравнений (4.94) в нескольких предельных случаях.

А. Случай малых частот $\omega \ll k_z v_{Ti}$. Уравнение (4.94) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k_z} = & - \left[\frac{2 + \beta}{1 + \beta} \cdot \frac{1}{A} - i \left(\frac{\pi T}{2m_i} \right)^{1/2} \frac{k_y}{k_z} \cdot \frac{\Gamma_1}{\omega_{Hi}} \right] \times \\ & \times \left[\frac{k_y}{k_z} \frac{\Gamma}{\omega_{Hi}} + i \left(\frac{\pi m_i}{2T} \right)^{1/2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

где

$$\beta = \frac{\delta^2}{2k^2 r_{De}^2} \varphi(\Omega); \quad \Gamma = \kappa \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln n_0} (1 + \delta/2) \right];$$

$$\Gamma_1 = \kappa \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln n} \cdot \frac{1 + \delta}{2} \right]; \quad \Delta = 2k^2 \rho_i^2 [1 - I_1(k^2 \rho_i^2) \times$$

$$\times I_0^{-1}(k^2 \rho_i^2)]; \quad A = \exp(-k^2 \rho_i^2) I_0(k^2 \rho_i^2).$$

Условие неустойчивости:

$$\left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln n} \left(1 + \frac{\Delta}{2} \right) \right] \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln n} \cdot \frac{1 + \Delta}{2} \right] +$$

$$+ \frac{2 + \beta}{1 + \beta} \cdot \frac{k_z^2}{k_y^2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{m_i \omega_{Hi}^2}{\kappa^2 T} > 0.$$

При достаточно больших β последнее слагаемое может уменьшиться, однако само оно слабо влияет на границу устойчивости, и поэтому область неустойчивости остается практически такой же, как и для плазмы без высокочастотного поля:

$$\frac{d \ln T}{d \ln n_0} > \frac{2}{1 + \Delta}.$$

Б. Случай $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$. Выражения для частоты и инкремента имеют вид:

$$\omega = -k_y \frac{T}{m_i \omega_{Hi}} \kappa A (1 + \beta) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{d \ln T}{d \ln n_0} \right] [2 - A + \beta (1 - A)]^{-1};$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{m_e} \right)^3 \frac{k_y^2 \kappa^2 z}{|k_z|^4} \cdot \frac{A}{\omega_{He}^2} \left[1 - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{d \ln T}{d \ln n_0} \right]} \times$$

$$\times [2 - A + \beta (1 - A)]^{-3} \left\{ 2(1 - A) + \beta(1 - 2A) - \frac{1}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d \ln T}{d \ln n_0} [2 - A(1 + \Delta) + \beta(1 - A + A\Delta)] \right\}.$$

Существуют две области неустойчивости — одна не меняется от включения высокочастотного поля:

$$\frac{d \ln T}{d \ln n_0} > \frac{2}{\Delta};$$

другая:

$$\frac{d \ln T}{d \ln n_0} < 2 \frac{2(1 - A) + \beta(1 - 2A)}{2 - A(1 + \Delta) + \beta(1 - A + A\Delta)}.$$

Граница второй области при $k^2 \rho_i^2 \rightarrow 0$ определяется уравнением $\frac{d \ln T}{d \ln n_0} = -2\beta$. При $k^2 \rho_i^2 \rightarrow \infty$ ($A \simeq 0$, $\Delta \simeq 1$) $\frac{d \ln T}{d \ln n_0} = 2$. При значениях $k^2 \rho_i^2 \neq 0$, когда $A < 1$ и величина β достаточно велика, инкремент уменьшается как $1/\beta^2$.

Стабилизация проявляется в данном случае в расширении области устойчивости (особенно при $k^2 \rho_i^2 \ll 1$) и в уменьшении инкрементов для колебаний с $k^2 \rho_i^2 \sim 1$.

В. Случай больших частот $\omega \gg k_z \sqrt{T/m_e}$. Если $k_0 \sqrt{T/m_i} \rho_i \gg \omega$, где $k_0 = \frac{1}{n_0 T} \cdot \frac{d}{dx} (n_0 T)$,

то

$$\begin{aligned} \varepsilon_e^{(H)} &= \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{He}} \cdot \frac{k_y \kappa}{k^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He} \omega^3} \cdot \frac{k_z^2 k_y}{k^2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{n_0} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{n_0 T}{m_e} \right); \\ \varepsilon_i^{(H)} &= \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \omega_{Hi}} \cdot \frac{k_y \kappa}{k^2} A \left(1 - \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{d \ln T}{d \ln n_0} \right). \end{aligned}$$

Решение дисперсионного уравнения, удовлетворяющее условию $\omega \gg k_z v_{Te}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\beta}{2k^2 \rho_i^2} \sqrt{\frac{T}{2m_i}} \frac{\kappa}{\left(1 + \frac{d \ln T}{d \ln n_0} \right)} \pm \\ &\quad \pm \left[\frac{\beta^2}{k^2 \rho_i^2} \cdot \frac{T}{m_i} \cdot \frac{\kappa^2}{\left(1 + \frac{d \ln T}{d \ln n_0} \right)^2} - \frac{2}{k^2 \rho_i^2} k_z^2 \frac{T}{m_i} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

При значениях $\beta > 2 \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{k_z}{\kappa} \left(1 + \frac{d \ln T}{d \ln n_0} \right)$ неустойчивость стабилизируется.

Обсудим теперь выбор частоты и амплитуды стабилизирующего поля несколько подробнее. Эффект становится существенным при $\beta \gtrsim 1$. В случае больших частот, $\Omega \gg \frac{1}{N^{1/2}} (\omega_{pe}^2 k_z^2 / k^2 + \omega_{pi}^2)^{1/2}$, $\left| \frac{1}{N} \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Hi}^2} \cdot \frac{k_y \kappa}{k^2} \right|$, это условие выполняется лишь в сильных электрических полях, когда $\frac{m_e u^2}{T} \gg 1$, $u = \frac{eE_0}{\{m_e \Omega}}$, так как при этом $\varphi(\Omega) \simeq 1/N$. Если мы будем пользоваться другим условием положительности $\varphi(\Omega)$, то $\beta > 1$ при $\frac{m_e u^2}{T} \gtrsim 1$.

При таких больших амплитудах поля могут раскачиваться новые неустойчивости, связанные с относительным движением электронов и ионов. Однако эти высокочастотные колебания не будут столь существенно влиять на диффузию плазмы, как медленные дрейфовые волны. Отметим, что в работе [11] использовался иной метод вывода дисперсионных соотношений (аналогичный методу, разработанному в работе [7]), который приводит к тем же результатам.

§ 5. Стабилизация диссипативных неустойчивостей

До сих пор мы рассматривали бесстолкновительную плазму и изучали влияние высокочастотных полей на неустойчивости такой плазмы. В настоящее время имеется ряд подробно исследованных неустойчивостей плазмы, в которой достаточно велика частота кулоновских столкновений или частота столкновений с нейтральными частицами. При этом для некоторых таких неустойчивостей, например для винтовой и дрейфово-диссипативной, проекция волнового вектора на постоянное магнитное поле k_z удовлетворяет неравенству $k_z \ll k$ [37, 38]. Эти неустойчивости достаточно хорошо изучены экспериментально. Поэтому было бы интересно обсудить влияние на них высокочастотного поля и выяснить возможности их стабилизации.

5.1. Стабилизация высокочастотным электрическим полем

Впервые исследование влияния высокочастотного электрического поля на дрейфово-диссипативную неустойчивость было проведено в работе Я. Б. Файнберга и В. Д. Шапиро [11]. Считалось, что в плазме вдоль постоянного магнитного поля действует переменное электрическое поле с частотой Ω . Дисперсионное уравнение для этого случая получается в следующих предположениях: $\omega \ll v_{ei} \ll \Omega \ll \omega_{He}$; $v_{ii} \ll \omega_{Hi}$; $k^2 \rho_e^2 \ll 1$; $k^2 \rho_e^2 \ll 1$; $k^2 \rho_i^2 \ll 1$; $k^2 r_D^2 \ll 1$; так что мы можем по-прежнему пользоваться общим уравнением (3.15), в котором, однако, нужно заменить $\delta \epsilon_e^{(H)}(\omega)$ на $\delta \epsilon_e^{(H)}(\omega + i v_{ei})$, так как столкновения существенно влияют лишь на продольное движение электронов. Дисперсионное соотношение с учетом сделанных приближений будет иметь вид:

$$\delta \epsilon_e^{(H)}(\omega + i v_{ei}) + \delta \epsilon_i^{(H)}(\omega) - \frac{\delta^2}{2} \varphi(\Omega) \delta \epsilon_e^{(H)}(\omega + i v_{ei}) \times \\ \times \delta \epsilon_i(\omega) = 0, \quad (5.1)$$

где $\varphi(\Omega)$ определяется формулой (4.97), $\delta = \frac{k_z e E_0}{m_e \Omega}$. При вычислении величины $\delta \epsilon_i^{(H)}(\omega)$ по формуле (4.91) необходимо учесть, что для дрейфово-диссипативной неустойчивости фазовая скорость ω/k_z много больше тепловой скорости ионов v_{Ti} . Вклад от электронов

$\delta \varepsilon_e^{(H)}(\omega + i\nu_{ei})$ можно найти, пользуясь гидродинамическими уравнениями, а именно:

$$v_{\parallel} = -\frac{e}{m_e \nu_{ei}} i k_z \left\{ -\Phi + \frac{T}{en_0} n_e \right\};$$

$$v_{\perp} = -\frac{c}{H_0} i [kH_0],$$

где n_e , v_{\parallel} , v_{\perp} — возмущения концентрации, продольной и поперечной скоростей электронов соответственно; Φ — возмущение потенциала. Подставляя полученные выражения для скорости в уравнение непрерывности для электронов, можно выразить возмущение концентрации n_e через возмущение потенциала Φ :

$$\delta \varepsilon_e^{(H)} = -\frac{4\pi e}{k^2} \cdot \frac{n_e}{\Phi_k} = \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 \frac{T}{m_e} - i\omega \nu_{ei}} \left[\frac{k_z^2}{k^2} + i \frac{k_y \kappa}{k^2} \cdot \frac{\nu_{ei}}{\omega_{He}} \right]. \quad (5.2)$$

Величина $\delta \varepsilon_i$ при $k^2 \rho_i^2 \ll 1$ может быть записана в виде

$$\delta \varepsilon_i^{(H)} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega k^2 \omega_{Hi}} \cdot \frac{k_y \kappa}{k^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} = \frac{4\pi e}{k^2} \cdot \frac{n_i}{\Phi_k}. \quad (5.3)$$

Подставляя найденные значения $\delta \varepsilon_i^{(H)}$ и $\delta \varepsilon_e^{(H)}$ в уравнение (5.1), получим [11]

$$\omega^2 + \omega \left[i \omega_s - \omega_e \frac{\beta}{1 + \beta} \left(1 + \frac{\beta g^2}{2} \right) \right] + i \omega_e \omega_s - \frac{2\beta}{g} \cdot \frac{\omega_e^2}{(1 + \beta)^2} \left(1 + \frac{\beta}{2} g^2 \right)^2 = 0. \quad (5.4)$$

Здесь величина β определена в соответствии с формулой (4.99):

$$\frac{g^2}{2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2} k_{\perp}^2 r_D^2; \quad \omega_s = \frac{k_z^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{\nu_{ei}} \left(1 + \frac{\beta}{2} g^2 \right);$$

$$\omega_e = k_y \frac{T}{m_i \omega_{Hi}} \kappa \frac{1 + \beta}{1 + \frac{\beta g^2}{2}}.$$

При $\beta \rightarrow 0$ уравнение (5.4) переходит в дисперсионное уравнение для дрейфовой диссипативной неустойчивости [38] в отсутствие высокочастотного поля. Рассмотрим достаточно большие значения β :

$$1 \ll \beta^2 \ll g^{-2},$$

что соответствует следующим значениям δ и $\varphi(\Omega)$:

$$\delta^2 \varphi(\Omega) \gg \omega_{Hi}^2 / \omega_{pi}^2.$$

Последнее условие может выполняться и при $\delta \ll 1$, так как $\frac{\omega_{Hi}}{\omega_{pi}} \ll \ll 1$. Раскладывая решение в ряд по степеням $1/\beta g^2$, получим:

$$\text{Im } \omega_- = -i\omega_s + \frac{2\omega_e}{\beta g^2} \cdot \frac{i\omega_s}{\omega_s^2 + \omega_e^2 \beta^2 \frac{g^4}{4}}; \quad (5.5)$$

$$\text{Im } \omega_+ = -2 \frac{\omega_e^2}{\beta g^2} \cdot \frac{i\omega_s}{\omega_s^2 + \omega_e^2 \beta^2 \frac{g^4}{4}}. \quad (5.6)$$

При $\beta g^2 \gg 1$ второе слагаемое в (5.5) мало, и в случае $\varphi(\Omega) > 0$ получаем $\text{Im}(\omega) < 0$, что соответствует устойчивости. Напомним, что $\varphi(\Omega) > 0$ при выполнении одного из условий (4.98).

Отметим, что для стабилизации дрейфово-диссипативной неустойчивости требуются большие амплитуды, чем для стабилизации дрейфовых неустойчивостей этим способом.

5.2. Стабилизация высокочастотным магнитным полем

Рассмотрим теперь влияние колебаний силовых линий магнитного поля на дрейфово-диссипативную неустойчивость [18]. В предыдущем разделе мы пренебрегали этим эффектом, что справедливо, так как в том случае, если через плазму течет высокочастотный ток, создающий в силу малой плотности плазмы магнитное поле ничтожное.

Итак, рассмотрим изотермическую плазму, помещенную в магнитное поле с осциллирующими силовыми линиями. Параметры плазмы выбраны такими же, как и в предыдущем разделе.

В нулевом приближении уравнение движения электронов имеет вид (E_{01} — компонента высокочастотного электрического поля, $\Omega < \nu_{ei}$)

$$-\frac{e}{m_e} E_{01} - \omega_{He} [\mathbf{v}_{0e} \mathbf{e}_z] - \mathbf{e}_x \frac{T}{m_e} \cdot \frac{d}{dx} \ln n_0 - \nu_{ei} \mathbf{v}_0 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{0e} = & -\frac{e}{m_e \nu_{ei}} \mathbf{e}_z (E_{01} \mathbf{e}_z) - \mathbf{e}_y \frac{T}{m_e \omega_{He}} \times \\ & \times \frac{d}{dx} \ln n_0 + 0 \left(\frac{\nu_{ei}}{\omega_{He}} \right)!. \end{aligned} \quad (5.7)$$

В первом приближении по возмущенным величинам имеем

$$e (\mathbf{E}_1 \mathbf{h}) + \nu_{ei} (\mathbf{v}_{1e} \mathbf{h}) + i (\mathbf{kh}) T \frac{n_e}{n_0} = 0. \quad (5.8)$$

Здесь E_1 — возмущение электрического поля.

Для поперечного движения в силу замагниченности электронов имеем

$$\mathbf{v}_{1e} = \frac{c}{H_0} [\mathbf{E}_1 \mathbf{h}]. \quad (5.9)$$

Подставляя выражение для скорости электронов в уравнение непрерывности и учитывая, что

$$\mathbf{h} = \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \frac{H_{01}}{H_0} \cos \Omega t; \quad \frac{H_{01}}{H_0} \ll 1; \\ E_{01} = E_{01} \sin \Omega t,$$

получим

$$\frac{n_{1e}}{n_0} = \int_{-\infty}^t dt' \left[b_e (kh)^2 - i \frac{e}{T} \omega^* \right] \Phi_k(t') \times \\ \times \exp \int_t^{t'} [D_e (kh)^2 + i \omega^* - i b_e k_z E_{01} \sin \Omega t''] dt'', \quad (5.10)$$

где $h = h(t)$; $\omega^* = -k_y \frac{cT}{eH_0} \cdot \frac{d \ln n_0}{dx}$; $b_e = \frac{e}{m_e v_{ei}}$ — коэффициент подвижности; $D_e = T/m_e v_{ei}$ — коэффициент диффузии для электронов.

Ограничимся разбором наиболее простого и важного случая. Будем считать, что осцилляторная скорость, приобретаемая электронами за счет поля E_{01} , достаточно мала, а именно $\frac{b_e k_z E_{01}}{\Omega} \ll 1$, а также, что отношение $\frac{H_{01}}{H_0} > \frac{k_z}{k_y}$.

Естественно, что заметного эффекта при этом можно ожидать, если $D_e k^2 \gg \Omega \gg \omega$.

Выражение для возмущения плотности электронов при этом можно записать в виде

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{e}{T} \left[\Phi_k(t) - \int_{-\infty}^t dt' \left[\frac{\partial \Phi_k(t')}{\partial t'} + i \omega^* \Phi_k(t') \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[\int_t^{t'} dt'' D_e (kh)^2 \right] \right]. \quad (5.11)$$

Разлагая $\Phi_k(t)$ в ряд

$$\Phi_k(t) = \sum_n \Phi_n \exp(-i \omega t - 2i n \Omega t) \quad (5.12)$$

и подставляя это разложение в формулу (5.11), получаем

$$\frac{(n_e)_m}{n_0} = \frac{e}{T} \Phi_m - \frac{e}{T} \sum_p \Phi_p \int_0^\infty d\tau [-i \omega - 2i p \Omega + i \omega^*] \times \\ \times (-1)^{p-m} I_{p-m}(\beta \sin \Omega \tau) \exp[-i(p-m)\Omega \tau - \beta \Omega \tau + \\ + i \omega \tau + 2i p \Omega \tau]; \quad (5.13) \\ \beta = \frac{D_e k_y^2}{4\Omega} \left(\frac{H_{01}}{H_0} \right)^2.$$

(В силу того, что при $\beta \gg 1$ самый большой вклад в дисперсионное уравнение даст член $p = m = 0$ (ср. разд. 3.1)). Таким образом,

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{e}{T} \Phi_0 \left\{ 1 - \int_0^\infty d\tau (-i\omega + i\omega^*) I_0(\beta \sin \Omega\tau) e^{-\beta\Omega\tau} \right\}. \quad (5.14)$$

Для больших значений β интеграл можно оценить

$$\int_0^\infty d\tau I_0(\beta \sin \Omega\tau) e^{-\beta\Omega\tau} \simeq \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{1}{\beta^{2/3}},$$

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{e}{T} \Phi_0 \left[1 + \frac{i(\omega - \omega^*)}{\Omega\beta^{2/3}} \right]. \quad (5.15)$$

Мы видим, что действие высокочастотного магнитного поля сводится к тому, что электроны вдоль силовой линии распределяются почти по Больцману. Используя теперь формулу (5.3) для нахождения n_i [осцилляции силовой линии не влияют на возмущение плотности ионов, так как $\frac{k_\perp v_{Ti}}{\Omega} \cdot \frac{H_{01}}{H_0} \ll 1$ (см. разд. 3.1)], получаем из условия квазинейтральности следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega + \omega^*}{\omega} [I_0(k^2 \rho_i^2) \exp(-k^2 \rho_i^2) - 1] = 1 + i \frac{\omega - \omega^*}{\Omega\beta^{2/3}}. \quad (5.16)$$

Инкремент неустойчивости:

$$\gamma \simeq \frac{\omega^{*2}}{\Omega\beta^{2/3}}. \quad (5.17)$$

Сравнивая с величиной максимального инкремента γ в отсутствие высокочастотного поля ($\gamma \sim \omega^*$), мы видим, что происходит довольно сильная стабилизация дрейфово-диссипативной неустойчивости. Условие стабилизации $\frac{k_y^2 v_{Te}^2}{\Omega v_{ei}} \left(\frac{H_{01}}{H_0} \right)^2 > 1$ обсуждалось в § 1 и свелось к тому, что частицы за время $1/\Omega$ успели, двигаясь вдоль мгновенного положения силовой линии, пройти расстояние порядка λ поперечной длины волны неустойчивости.

В заключение отметим, что стабилизация винтовой неустойчивости [37] за счет колебаний силовых линий магнитного поля должна быть довольно слабой. Это обстоятельство связано: во-первых, для винтовой неустойчивости k_\perp мало ($k_\perp a \sim 1$), где a — размер неоднородности; во-вторых, коэффициент амбиполярный диффузии электронов вдоль силовой линии меньше, чем для дрейфово-диссипативной неустойчивости. Поэтому фактор, определяющий стабилизацию, $\frac{D_A k_y^2}{\Omega} \left(\frac{H_{01}}{H_0} \right)^2 \ll 1$ [18].

Стабилизацию винтовой неустойчивости высокочастотным электрическим полем подробно изучал В. В. Владимиров [39]. Им была показана большая роль торцов, учет которых приводил к тому, что собственные колебания представляли собой суперпозицию волн с

несколькими значениями $k_z = 2\pi/nL$, где n — целое число. При этом, естественно, в отличие от рассмотренных случаев, стабилизация тем сильнее, чем короче система.

§ 6. Заключение

Мы рассмотрели теоретические вопросы влияния высокочастотного поля на неустойчивости плазмы. Вопросы равновесия плазмы в присутствии высокочастотных полей и связанные с ними проблемы радиационного ускорения плазмы, а также специальные вопросы стабилизации плазмы при помощи обратных связей [40] в данный обзор не вошли.

Было бы интересно в заключение обсудить существующие эксперименты по проверке изложенных теорий. Что касается взаимодействия плазмы с высокочастотным магнитным полем и возможной стабилизации ряда опасных неустойчивостей, то при постановке опыта необходимо принять во внимание следующие обстоятельства: во-первых, выбор частоты и амплитуды высокочастотных полей и во-вторых, способ создания таких полей.

Для воздействия на конусную, дрейфово-конусную и циклотронные неустойчивости, особо опасные для ловушек с магнитными пробками, оказываются подходящими по конфигурации переменного магнитного поля колебания плазмы типа геликонов, иначе быстрой магнитозвуковой волны. Частота переменного магнитного поля должна быть больше циклотронной частоты ионов для подавления циклотронных неустойчивостей и больше $\min\{\omega_{pi}, \sqrt{\omega_{He}\omega_{Hi}}\}$ для воздействия на конусные неустойчивости.

Для воздействия на дрейфовые неустойчивости можно использовать магнитное поле переменного тока, текущего по плазменному шнуру, или магнитное поле токнесущих проводов, уложенных вдоль плазменного шнура. Второй способ кажется предпочтительнее, так как пропустить через плазму большой ток для создания нужного магнитного поля было бы затруднительно из-за малой по сравнению с металлом концентрации электронов. В любом из этих случаев магнитное поле проникает в плазму только на глубину скин-слоя (которая может быть порядка c/ω_{pi}) [17, 25]. Казалось бы, для объемного воздействия на дрейфовые неустойчивости можно было использовать альфвеновскую волну в плазменном шнуре, в частности, основную симметричную моду с полем H_ϕ и E_z . К сожалению, переменное магнитное поле низкочастотных колебаний $\Omega \ll \omega_{Hi}$ не подходит для этой цели. Действительно, стабилизирующий эффект имеет место только тогда, когда магнитная силовая линия поворачивается относительно возмущения, а в силу вмороженности магнитного поля в плазму возмущения будут перемещаться вместе с магнитной силовой линией.

Таким образом, воздействовать на дрейфовую неустойчивость частотой $\Omega < \omega_{pe}$ можно лишь в области скин-слоя, где силовые линии не вморожены в плазму. Отметим, что при стабилизации вы-

сокочастотным магнитным полем в первую очередь подавляются волны с большими значениями k_y . Эта закономерность была подтверждена экспериментально [41—43].

Качественное согласие с теорией было получено при опытной проверке возможности стабилизации дрейфово-диссипативной неустойчивости [41—43] и винтовой неустойчивости [44].

Раскачка параметрических неустойчивостей может быть причиной уменьшения коэффициента отражения от плазмы электромагнитных волн. Экспериментальное исследование, проведенное И. Р. Геккером и О. В. Сизухиным [45], показало, что при относительно малой амплитуде волны $E_0 \sim 0,1(4\pi n_0 T_e)^{1/2}$ имеет место резкое уменьшение коэффициента отражения, которое, по-видимому, является следствием раскачки высокочастотным полем волны параметрических неустойчивостей. Появляющийся при циклотронном нагреве спектр ионно-звуковых шумов в районе плазменной ионной частоты [46] обязан своим происхождением параметрической раскачке, рассчитанной в работе [35].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 138, 581 (1961).
2. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 34, 248 (1964).
3. Rosenbluth M. N., Rostoker N., Krall N. A. Nucl. Fusion, Suppl., 1, 143 (1962).
4. Rosenbluth M. N., Post R. E. Phys. Fluids, 8, 547 (1965).
5. Михайловский А. Б. «Ж. техн. физ.», 35, 229 (1966).
6. Dory R. A., Guest G. E., Harris E. G. Phys. Rev. Lett., 14, 131 (1965).
7. Алиев Ю. М., Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 48, 901 (1965).
8. Иванов А. А., Рудаков Л. И., Тейхманн И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 54, 1380 (1968).
9. Иванов А. А., Муравьев В. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 59, 1325 (1970).
10. Иванов А. А., Рудаков Л. И., Тейхманн И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 53, 1690 (1967); Demirkhanov R. A. II^{-ème} Colloque International, Saclay, Jan. 1968; Ivanov A. A., Rudakov L. I., Teichmann J. Ibid.
11. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 52, 293 (1967).
12. Андреев Н. Е., Кирий А. Д., Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 57, 1024 (1969).
13. Rehan E. Phys. Fluids, 12, 192 (1968).
14. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 48, 901 (1965).
15. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 48, 1679 (1965).
16. Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4. М., Атомиздат, 1974, стр. 270.
17. Рудаков Л. И., Кораблев Л. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 50, 220 (1965).
18. Ivanov A. A., Teichmann J. Czechosl. J. Phys., B 19, 941 (1969).
19. Шифранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3. М., Атомиздат, 1963, стр. 3.

20. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых теормоядерных реакций», т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 268.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962, стр. 994.
22. Фадеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., Гостехиздат, 1954.
23. Тимофеев А. В., Пистунович В. И. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 5. М., Атомиздат, 1967, стр. 373.
24. Кадомцев Б. Б., Погуде О. П. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 5. М., Атомиздат, 1965, стр. 259.
25. Брейзман Б. Н., Мирнов В. В., Рютов Д. Д. «Ж. техн. физ.», **10**, 1817 (1969).
26. Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 919 (1963).
27. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958, стр. 83.
28. Файнберг Я. Б. «Атомная энергия», **11**, 4 (1961).
29. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **51**, 1842 (1966).
30. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Перев. с нем. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
31. Силин В. П. «Письма ЖЭТФ», **7**, 242 (1968).
32. Aliev Ju. M., Gorbunov L. M., Silin V. P. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., v. 1. Vienna, IAEA, 1966, p. 659.
33. Nishikawa K. J. Soc. Phys. Japan, **24**, 916, 1152 (1968).
34. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», **32**, 1291 (1962).
35. Градов О. М., Зюндер Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **58**, 979 (1970).
36. Nekrasov F. M. Nucl. Fusion, **9**, 291 (1969).
37. Кадомцев Б. Б., Недоспасов А. В. J. Nucl. Energy, PC1, **1580** (1960).
38. Монсеев С. С., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 248 (1964).
39. Владимиров В. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **48**, 175 (1964).
40. Арсенин В. В., Чуянов В. А. «Атомная энергия», **24**, 327 (1968).
41. Иванов А. А. и др. «Письма ЖЭТФ», **9**, 356 (1969).
42. Dubovos L. V., Dyatlov V. D. Nucl. Fusion Special, Suppl. (1969).
43. Alcock M. W., Keen B. E. Symposium on Feedback and Dynamic Control of Plasmas, report A1, Princeton, 1970.
44. Artsimovich L. A. et al. Phys. Lett., **27A**, 573 (1968).
45. Геккер И. Р., Сизухин О. В. «Письма ЖЭТФ», **9**, 7 (1969).
46. Патрушев Б. И. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **60**, 1080 (1970).

ГИДРОМАГНИТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Л. С. Соловьев

Введение

Задача об устойчивости равновесных конфигураций плазмы является одной из центральных задач в проблеме создания управляемого термоядерного синтеза. Теоретические исследования устойчивости плазмы в настоящее время ведутся по двум направлениям: 1) развивается гидродинамическая теория устойчивости замкнутых плазменных конфигураций и 2) исследуются кинетические микро-неустойчивости плазмы. Согласно современным воззрениям, крупномасштабные неустойчивости, которые удовлетворительно описываются в рамках идеальной магнитной гидродинамики, приводят к быстрому распаду плазмы, в то время как кинетические и диссипативные неустойчивости ответственны за сравнительно более медленную аномальную диффузию.

В настоящем обзоре рассматривается теория гидромагнитной устойчивости плазмы в рамках магнитной гидродинамики при условии идеальной проводимости и отсутствия вязкости. Рассматриваемые равновесные конфигурации представляют собой систему вложенных тороидальных магнитных поверхностей, совпадающих с поверхностями постоянного давления плазмы. Эти поверхности расположены вокруг магнитной оси, являющейся для замкнутых конфигураций некоторой замкнутой пространственной кривой. Внешняя магнитная поверхность представляет собой границу плазмы с внешним вакуумным магнитным полем.

С точки зрения создания равновесных конфигураций и исследования их устойчивости замкнутые плазменные конфигурации можно разбить на два класса: конфигурации без продольного тока и конфигурации с продольным током. В конфигурациях без продольного тока прокручивание магнитных силовых линий вокруг магнитной оси осуществляется либо при помощи прокручивания внешнего магнитного поля (стеллараторы с винтовыми магнитными полями), либо при использовании конфигураций с пространственной магнитной осью, обладающей кручением (стеллараторы типа восьмерки Спитцера). В конфигурациях с продольным током (типа «Токамак») прокручивание магнитных силовых линий создается продольным током, текущим в плазме.

Прокручивание силовых линий вокруг магнитной оси определяет прочность равновесной конфигурации по отношению к статическим возмущениям магнитного поля. В том случае, когда магнитные силовые линии не прокручиваются и замкнуты, наложение однородного поля приводит к разматыванию силовых линий и к разрушению магнитных поверхностей. Аналогичный эффект возникает и при наложении винтового поля, если угол прокручивания для всех силовых линий одинаков [1].

Таким образом, для обеспечения некоторого запаса прочности по отношению к статическим возмущениям поля равновесные конфигурации должны иметь прокручивающиеся вокруг магнитной оси силовые линии, причем угол прокручивания должен меняться с расстоянием от магнитной оси. Соответствующее изменение угла прокручивания создает перекрещенность силовых линий, или шпир, и характеризуется производной от угла прокручивания. Токи, текущие в плазме достаточно большого давления, также приводят к возникновению возмущающих магнитных полей, способных ухудшать прочность равновесной конфигурации.

В связи с этим условия существования равновесной конфигурации могут содержать некоторое ограничение на допустимое давление плазмы при заданном прокручивании силовых линий. В системах с продольным током, в которых скорость прокручивания силовых линий определяется величиной продольного тока, соответствующее ограничение налагается на отношение давления плазмы к продольному току.

Для аксиально симметричной тороидальной конфигурации с продольным током при эллиптических поперечных сечениях магнитных поверхностей это ограничение имеет вид

$$\beta_J < 12 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{2 + \varepsilon}{(5 + \varepsilon)^2} \cdot \frac{R}{a}, \quad (\text{B.1})$$

где $\beta_J = -8\pi L p'(V)/j^2$, $p = p_0(1 - V/V_\Sigma)$, $V_\Sigma = \pi L a^2$, $L = 2\pi R$; R — радиус магнитной оси; $\varepsilon = (1 - l_r^2/l_z^2)/(1 + l_r^2/l_z^2)$ — параметр эллиптичности, l_r/l_z — отношение полуосей эллиптических поперечных сечений магнитных поверхностей; $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$, \mathbf{B} — напряженность магнитного поля.

При исследовании динамической устойчивости равновесных плазменных конфигураций как давление плазмы, так и продольный ток являются дестабилизирующими факторами. Поэтому конфигурации без продольного тока сравнительно более устойчивы, и условия устойчивости для них сводятся к ограничению на допустимое давление плазмы. Условия устойчивости для систем с продольным током приводят также к некоторым ограничениям на величину продольного тока.

Кроме внутренней неустойчивости, которая возможна и при неподвижной границе плазмы, в конфигурациях с продольным током может развиваться также поверхностная неустойчивость, связан-

ная с разрывом плотности тока на свободной границе плазмы. Однако эта неустойчивость, по-видимому, не реализуется, если плотность тока спадает достаточно быстро и обращается в нуль на границе плазмы [2] и если, кроме того, выполняется необходимое условие устойчивости Крускала — Шафранова, сводящееся к ограничению на полный продольный ток J при заданной длине магнитной оси конфигурации L :

$$\frac{LJ}{2\pi\sigma B} < \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}. \quad (\text{B.2})$$

Здесь σ — площадь поперечного сечения граничной магнитной поверхности.

Внутренние неустойчивости плазмы эффективно стабилизируются магнитной ямой. Поскольку магнитная яма образуется в конфигурациях достаточно сложной геометрии и отсутствует в простейшей модели плазменного цилиндра с отождествленными торцами, особый интерес представляют общегеометрические критерии устойчивости, не связанные с конкретной геометрией равновесной плазмы. Понятие магнитной ямы, которая характеризуется второй производной от объема по продольному потоку или, для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями, производной от интеграла $\oint \frac{dl}{B}$, было введено в работах Розенблюта — Лонгмайра [3] и Б.Б. Кадомцева [4]. Общегеометрические критерии устойчивости удобно формулировать, используя инвариантные характеристики равновесных конфигураций, выражающиеся через потоки внутри текущей магнитной поверхности, ограничивающей объем V . При этом уравнение равновесия плазмы в магнитном поле \mathbf{B}

$$\nabla p = [j\mathbf{B}]; \quad j = \text{rot } \mathbf{B} \quad (\text{B.3})$$

записывается в виде

$$p' = T'\Phi' - J'\chi', \quad (\text{B.4})$$

где Φ и J — продольные, а χ и I — поперечные потоки векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} ; штрихами обозначены производные по объему V .

Введем еще инвариантные характеристики:

$$S = \chi' \Phi'' - \Phi' \chi''; \quad \Omega = I' \Phi'' - J' \chi''. \quad (\text{B.5})$$

Величина S — характеризует перекрещенность магнитных силовых линий, а величина Ω — характеристика магнитной ямы для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями.

Критерий устойчивости Розенблюта — Лонгмайра [3] сводится к требованию существования магнитной ямы и для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями может быть записан в виде

$$-\Omega > 0. \quad (\text{B.6})$$

Необходимый критерий конвективной устойчивости Кадомцева [5], выведенный для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями

в предположении о постоянстве возмущений вдоль силовых линий, при наличии магнитной ямы представляется в виде

$$-\Omega \langle \mathbf{B}^2 \rangle - p'^2 > 0, \quad (\text{B.7})$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по объему слоя между двумя соседними магнитными поверхностями $\langle f \rangle = \frac{d}{4\pi V} \int f d\tau$.

В работах Мерсье [6], Бино [7], Грина и Джонсона [8] получен необходимый общегеометрический критерий локальной устойчивости при единственном предположении об узкой области локализации возмущений между двумя соседними магнитными поверхностями. Как показано в работе [9], этот критерий можно представить в виде

$$\frac{S^2}{4} - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle + S \left\langle \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{j^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle + \left\langle \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 > 0. \quad (\text{B.8})$$

Здесь первый член описывает стабилизирующее влияние перекрещенности силовых линий; совокупность второго и третьего члена является характеристикой магнитной ямы; последние два члена характеризуют дестабилизирующее действие токов в плазме. В применении к конфигурациям с замкнутыми силовыми линиями $S = 0$, критерий Мерсье (B.8) оказывается более жестким, чем критерий Кадомцева (B.7), что указывает на более слабое дестабилизирующее действие токов в плазме на конвективные возмущения.

В работе Л. С. Соловьева [10] получен точный достаточный общегеометрический критерий гидромагнитной устойчивости

$$-\Omega - [je]^2 > 0 \quad (\text{B.9})$$

в предположении об отсутствии поверхностных токов. Здесь в качестве единственного стабилизирующего фактора выступает магнитная яма, описываемая членом $-\Omega$. Через $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$ обозначен третий координатный вектор натуральной системы координат θ, ζ, V Хамады [11] $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dx^i$. В применении к конфигурациям без продольного тока достаточный критерий (B.9) приводит к более жесткому ограничению на допустимое давление плазмы, чем необходимый критерий (B.8). Тем не менее существует достаточно широкий класс конфигураций, для которых выполняется точное достаточное условие устойчивости (B.9). Для конфигураций с продольным током критерий (B.9), вообще говоря, оказывается слишком жестким.

В той же работе Л. С. Соловьева [10] получен достаточный критерий внутренней устойчивости

$$-\Omega \langle [\mathbf{Be}]^2 \rangle + S \langle [je] [\mathbf{Be}] \rangle - \langle [je]^2 \rangle \langle [\mathbf{Be}]^2 \rangle + \langle [je] [\mathbf{Be}] \rangle^2 > 0 \quad (\text{B.10})$$

для произвольных конфигураций плазмы низкого давления при условии спадания плотности тока. Достаточным для устойчивости

плазменных конфигураций со спадающей до нуля плотностью тока на свободной границе плазмы является, по-видимому, выполнение критерия (В.10) и дополнительного условия

$$\frac{\chi'}{\Phi'} < 1 \text{ или } \left| \frac{JL}{\Phi'V} \right| < \frac{4\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (\text{В.11})$$

являющегося обобщением условия устойчивости Крускала—Шафранова для тороидальной геометрии плазмы с продольным током J .

Достаточным условием устойчивости плазмы в окрестности магнитной оси является критерий (В.8) без члена $S^2/4$.

Для бессиловых конфигураций $\mathbf{j} = \kappa \mathbf{B}$, $p' = 0$ функция κ зависит только от V . При этом необходимый критерий локальной устойчивости (В.8) выполняется при $S \neq 0$, в то время как достаточный критерий (В.10) указывает на безразличное равновесие.

При цилиндрической геометрии равновесной плазмы ($\mathbf{e} = \frac{\nabla V}{|\nabla V|^2}$) достаточный критерий (В.10) отличается от необходимого критерия (В.8) отсутствием члена $S^2/4$. При этом необходимый критерий (В.8) переходит в критерий Сайдема [12], а достаточный критерий (В.10) сводится к требованию $p' > 0$.

Применение необходимого критерия локальной устойчивости Мерсье (В.8) к аксиально симметричной конфигурации с круговой магнитной осью и круглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей («Токамак») приводит, в предположении о малости отношения ρ/R , к условию [13]

$$\frac{\mu'^2}{4} - \frac{2p'}{\rho B_\phi^2} \left(\frac{1}{R^2} - \mu^2 \right) > 0. \quad (\text{В.12})$$

Здесь $\mu(\rho) = B_\omega / \rho B_\phi$, B_ω — поперечное, B_ϕ — продольное магнитные поля, а ρ — расстояние от магнитной оси. Стабилизирующее действие магнитной ямы, которая возникает при сворачивании плазменного цилиндра в тор, представлено здесь членом $1/R^2$, где R — радиус кривизны магнитной оси.

При $p'(\rho) < 0$ условие (В.12) выполняется, если $\mu(\rho)R < 1$, а при $R \rightarrow \infty$ оно переходит в критерий Сайдема [12]. В случае спадающей плотности тока наиболее жестким оказывается условие $\mu(0)R < 1$ в окрестности магнитной оси, которое можно записать также в виде

$$\frac{jR}{B} < 2. \quad (\text{В.13})$$

Регулярным методом вычисления характеристик, входящих в общегеометрические критерии (В.6)—(В.10), является метод разложения по степеням ρ . При этом мы получаем критерии устойчивости, справедливые в окрестности магнитной оси для произвольных конфигураций и справедливые для всей конфигурации при выпол-

нении условия квазиоднородности. Полученные таким образом критерии устойчивости выражаются контурными интегралами по магнитной оси конфигурации [14] и, в общем случае, зависят от кривизны и кручения магнитной оси и от вида поперечного сечения магнитных поверхностей.

Приведем для сравнения критерии (В.6)—(В.8) и (В.10), примененные к аксиально симметричной тороидальной конфигурации с продольным током «Токамак». Для круглых поперечных сечений магнитных поверхностей, при условии $p'(\rho) < 0$, соответственно получим:

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} - \frac{4p'}{\rho R^2 j^2} - \frac{p'}{2\rho B^2} > 0; \quad (\text{В.14})$$

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} - \frac{4p'}{\rho R^2 j^2} > 0; \quad (\text{В.15})$$

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} > 0; \quad (\text{В.16})$$

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} + \frac{4p'}{\rho R^2 j^2} > 0. \quad (\text{В.17})$$

Здесь левая часть неравенства (В.14) равна $BV''(\Phi)/2R$. При исчезающе малом давлении все выписанные критерии совпадают с необходимым условием локальной устойчивости (В.16). Как показывает выражение (В.14), при увеличении давления магнитная яма углубляется. Согласно неравенству (В.15), увеличение давления улучшает устойчивость конфигурации по отношению к конвективным возмущениям. Условие локальной устойчивости (В.16) в рассматриваемом случае не зависит от давления, в то время как, согласно достаточному условию (В.17), давление выступает в качестве дестабилизирующего фактора.

Критерий (В.17) совпадает с достаточным условием устойчивости Уэйра и Хааса [15], выведенном специально для рассматриваемой конфигурации. Для случая параболически спадающего давления $p = p_0(1 - V/V_\Sigma)$ этот критерий приводит к следующим ограничениям на продольный ток:

$$1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta_0 R^2}{a^2}} < \frac{j^2 R^2}{2B^2} < 1 + \sqrt{1 - \frac{4\beta_0 R^2}{a^2}}, \quad (\text{В.18})$$

где $\beta_0 = 2p_0/B^2$. Он близок к необходимому условию устойчивости (В.16) только при достаточно малом давлении плазмы, когда $\beta_0 \ll \ll a^2/4R^2$, и содержит ограничение на допустимое давление $\beta_0 < < a^2/4R^2$. Согласно выражению (В.18), при конечном давлении плазма становится неустойчивой также в области малых токов.

Аналогичными по структуре получаются и критерии устойчивости для конфигураций с некруглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей. При этом применение критериев (В.8)

и (В.10) дает соответственно:

$$\frac{2}{R^2} \cdot \frac{1-\varepsilon}{2+\varepsilon} \left[1 + \frac{3\varepsilon}{4} (1+\Gamma) \right] - \frac{j^2}{B^2} \cdot \frac{1-\varepsilon^2}{4} - \frac{8\beta_0 B^2 (1-t) t^2}{a^2 R^2 j^2 (2+\varepsilon) (1+t)^2} > 0; \quad (\text{В.19})$$

$$\frac{2}{R^2} \frac{1-\varepsilon}{2+\varepsilon} \left[1 + \frac{3\varepsilon}{4} (1+\Gamma) \right] - \frac{j^2}{B^2} \cdot \frac{1-\varepsilon^2}{4} - \frac{8\beta_0 B^2 (1-t) (1+t^2)}{a^2 R^2 j^2 (2+\varepsilon) (1+t)^3} > 0. \quad (\text{В.20})$$

Здесь a — средний радиус поперечного сечения плазменного тора, определяемый соотношением $V_\Sigma = 2\pi^2 a^2 R$; ε и t — параметры эллиптичности поперечных сечений магнитных поверхностей: $\varepsilon = \text{th}\eta$, $t = \text{th}\eta/2$, $l_z/l_r = e^\eta$; l_r и l_z — полуоси эллиптических сечений; Γ — параметр несимметричности сечений. Как показывают выражения (В.19) и (В.20), глубина магнитной ямы в случае некруглых поперечных сечений магнитных поверхностей зависит от их эллиптичности и несимметричности. При этом, в случае $l_z/l_r > 1$, несимметричность улучшает устойчивость, если поперечные сечения имеют грушевидную форму с уплощением с внутренней стороны тора, а при $l_z/l_r < 1$ благоприятным является уплощение с наружной стороны тора.

В случае некруглых поперечных сечений магнитных поверхностей давление плазмы оказывает дестабилизирующее действие согласно обоим критериям (В.19) и (В.20), которые различаются только коэффициентами при β_0 . Отношение этих коэффициентов для необходимого критерия (В.19) и достаточного критерия (В.20) равно:

$$M = t^2 \frac{1+t}{1+t^2}. \quad (\text{В.21})$$

Оно мало, если поперечное сечение близко к круговому $l_z/l_r \simeq 1$, и стремится к единице при увеличении отношения l_z/l_r . В случае малой эллиптичности $\varepsilon \ll 1$ ограничение на давление плазмы, вытекающее из достаточного критерия (В.20), в $4/\varepsilon^2$ раз более жесткое, чем ограничение, накладываемое необходимым критерием (В.19).

Для конфигураций без продольного тока критерии устойчивости приводят лишь к ограничениям на допустимое давление плазмы. Применение критериев (В.8), (В.10) и (В.9) к стелларатору с круговой магнитной осью, магнитные поверхности в котором создаются внешним винтовым магнитным полем, дает соответственно:

$$\beta_0 < \frac{\varepsilon^2 n^2 a^2}{R^2} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon^2 n^2 + \frac{A}{\varepsilon n} \right); \quad (\text{В.22})$$

$$\beta_{0i} < \frac{\varepsilon^4 n^2 a^2}{4R^2} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon^2 n^2 + \frac{A}{\varepsilon n} \right); \quad (\text{В.23})$$

$$\beta_0 < \frac{\varepsilon^4 n^2 a^2}{4R^2} (1 + 2|\varepsilon|) \left(\frac{3}{2} - \varepsilon^2 n^2 + \frac{A}{\varepsilon n} \right). \quad (\text{В.24})$$

Здесь, аналогично предыдущему, ε и A — параметры эллиптичности и несимметричности поперечных сечений магнитных поверхностей; n — число оборотов сечений магнитных поверхностей на длине $L = 2\pi R$. Предполагается, что $\varepsilon^2 \ll 1$.

Как видно из выражений (В.22)—(В.24), достаточный критерий (В.23) дает в $4/\varepsilon^2$ раз более жесткое ограничение, чем необходимый критерий (В.22), а достаточный критерий (В.24) является еще в $(1+2|\varepsilon|)$ раз более жестким, чем критерий (В.23). Несимметричность сечений, характеризуемая параметром A , создается трехзаходным винтовым магнитным полем, которое прокручивается в полтора раза медленней, чем основное двухзаходное поле и делает $2n/3$ оборота на длине L . Соответствующее винтовое поле существенно влияет на устойчивость рассматриваемой конфигурации при сравнительно малой амплитуде.

Магнитная яма является основным стабилизирующим механизмом в приведенных выше критериях устойчивости для замкнутых плазменных конфигураций. В ограниченных конфигурациях с замороженными в металлические стенки торцами возникает сильный стабилизирующий механизм, обусловленный натяжением магнитных силовых линий [16]. Применение приведенного ниже достаточного общегеометрического критерия устойчивости для таких конфигураций к плазменному цилиндру приводит, при условии квазиоднородности, к следующему ограничению на продольный ток:

$$\frac{iL}{\pi B} < 1, \quad (\text{В.25})$$

где L — расстояние между идеально проводящими стенками.

Если выйти за рамки рассматриваемых здесь равновесных конфигураций и допустить возможность стационарного движения плазмы, то соответственно добавляются новые стабилизирующие и дестабилизирующие факторы. Отметим, в частности, что однородно-вращающийся плазменный цилиндр с однородным продольным током в однородном продольном магнитном поле оказывается внутренне устойчивым при $p' < 0$ относительно произвольных несжимаемых возмущений, если выполнены неравенства [17]

$$B_\phi^2 < \rho v_\phi^2 < 2B_z^2, \quad (\text{В.26})$$

где v_ϕ — скорость вращения; ρ — плотность.

При расчете равновесных характеристик плазмы и при выводе общих критериев гидромагнитной устойчивости и применении этих критериев к конкретным плазменным конфигурациям целесообразно и спользовать подходящие криволинейные системы координат, с рассмотрения которых и начнем систематическое изложение теории гидромагнитной устойчивости замкнутых плазменных конфигураций.

Исследование равновесия и устойчивости плазменных конфигураций упрощается при выборе подходящих координатных систем. Применяемые системы координат можно разбить на два класса— осевые и поверхностные.

Осевые системы координат удобно связать с магнитной осью конфигурации, выбрав в качестве одной из координатных линий магнитную ось. При этом естественно определяется зависимость равновесия и устойчивости плазменных конфигураций от геометрических характеристик магнитной оси—ее кривизны k и кручения κ .

Поверхностные системы координат—это системы, в которых в качестве одного из семейств координатных поверхностей принимает семейство вложенных магнитных поверхностей. Такие системы координат наиболее удобны для получения общегеометрических критериев устойчивости. При этом форма магнитных поверхностей, естественно, предполагается заданной.

Для нахождения магнитных поверхностей приходится использовать осевую систему координат. Наиболее подходящей для этой цели оказывается «скругляющая» осевая система координат, магнитные поверхности в которой в окрестности магнитной оси имеют круглые поперечные сечения. Равновесные характеристики плазменных конфигураций в окрестности магнитной оси, а также характеристики квазиоднородных плазменных конфигураций наиболее просто получаются при использовании преобразования от натуральных поверхностных координат к скругляющим осевым координатам.

§ 1.1. Натуральная осевая система координат

Наиболее просто построить осевую систему координат, выбрав в качестве координат $x^1 = x$ и $x^2 = y$ расстояния до магнитной оси по нормали \mathbf{v} и бинормали $\boldsymbol{\beta}$, а в качестве третьей координаты $x^3 = s$, взяв длину s , отсчитываемую вдоль магнитной оси [1]. При этом радиус-вектор произвольной точки равен

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + x\mathbf{v}(s) + y\boldsymbol{\beta}(s), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_0(s)$ —радиус-вектор магнитной оси s .

Воспользовавшись формулами Серре—Френэ $\frac{d\mathbf{r}_0}{ds} = \boldsymbol{\tau}$, $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\mathbf{v}$, $\frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{\tau} + \kappa\boldsymbol{\beta}$, $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\kappa\mathbf{v}$, легко получить выражение

для элемента

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dx + \boldsymbol{\beta}dy + [(1 - \kappa x)\boldsymbol{\tau} + \kappa(\boldsymbol{\beta}x - \mathbf{v}y)] ds. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что квадрат элемента длины, определяющий метрику такой системы координат, равен

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + 2(xdy - ydx)\kappa ds + [(1 - kx)^2 + \kappa^2 \rho^2] ds^2, \quad (1.3)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Если вместо координат x и y ввести полярные координаты ρ и θ в сечении $s = \text{const}$, так чтобы угол θ отсчитывался от нормали \mathbf{v} , а ρ было расстоянием до оси s , то

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta, \quad (1.4)$$

а элемент длины, согласно (1.3), запишется в виде

$$dr = (\mathbf{v} \cos \theta + \boldsymbol{\beta} \sin \theta) d\rho + (\boldsymbol{\beta} \cos \theta - \mathbf{v} \sin \theta) \rho d\theta + [(1 - k\rho \cos \theta) \boldsymbol{\tau} + \kappa \rho (\boldsymbol{\beta} \cos \theta - \mathbf{v} \sin \theta)] ds. \quad (1.5)$$

Соответственно квадратичная форма для $dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ определится выражением

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + 2\kappa \rho^2 d\theta ds + [(1 - k\rho \cos \theta)^2 + \kappa^2 \rho^2] ds^2. \quad (1.6)$$

Детерминант метрического тензора g_{ik} равен

$$g = (1 - kx)^2 = (1 - k\rho \cos \theta)^2. \quad (1.7)$$

§ 1.2. Ортогональная осевая система координат

Как видно из выражения (1.6), натуральная осевая система координат превращается в ортогональную [18], если вместо θ ввести угол ω :

$$\omega = \theta + \alpha(s); \quad \alpha(s) = \int_0^s \kappa ds. \quad (1.8)$$

Элемент длины в такой системе координат равен

$$dr = (\mathbf{v} \cos \omega + \boldsymbol{\beta} \sin \omega) d\rho + (\boldsymbol{\beta} \cos \omega - \mathbf{v} \sin \omega) \rho d\omega + h_s \boldsymbol{\tau} ds, \quad (1.9)$$

а выражение для dl^2 приводится к сумме квадратов

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + h_s^2 ds^2, \quad (1.10)$$

где

$$h_s = 1 - k\rho \cos \theta. \quad (1.11)$$

§ 1.3. Скругляющая осевая система координат

Натуральную осевую систему координат (1.2) можно сделать вращающейся вокруг оси s с заданной скоростью прокручивания $\delta'(s)$, если ввести угол $\delta(s)$ между осью x_1 новой системы координат и нормалью \mathbf{v} [19]:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \delta - y \sin \delta = \rho \cos u; \\ y_1 &= x \sin \delta + y \cos \delta = \rho \sin u, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$u = \theta + \delta = \omega + \delta(s) - \alpha(s). \quad (1.13)$$

Вычисление квадрата элемента длины приводит к выражению

$$dl^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + 2u'(y_1 dx_1 - x_1 dy_1) ds + (h_s^2 + u'^2 \rho^2) ds^2. \quad (1.14)$$

Здесь параметр u' , согласно (1.13) равный

$$u' = \delta' - \kappa, \quad (1.15)$$

определяется кручением κ координатной оси s и скоростью прокручивания $\delta'(s)$ координатных осей x_1 и y_1 вокруг оси s . Величины ρ^2 , h_s и g соответственно равны

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x_1^2 + y_1^2; \quad h_s = 1 - k(x_1 \cos \delta + y_1 \sin \delta); \\ g &= h_s^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Осевые координаты x_1 , y_1 , s , прокручивающиеся вместе с приосевыми сечениями магнитных поверхностей, можно преобразовать таким образом, чтобы нормальные сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси стали бы в новых координатах круглыми. В общем случае нормальные сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси являются эллиптическими, а полуоси этих эллипсов прокручиваются с некоторой скоростью $\delta'(s)$ вокруг магнитной оси s , причем угол $\delta(s)$ определяет ориентацию эллипса относительно нормали \mathbf{v} .

Уравнение магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси s , в координатах x_1 , y_1 , s , имеет вид

$$\psi = B_0'(s) \{e^{\eta(s)} x_1^2 + e^{-\eta(s)} y_1^2\} = \text{const}, \quad (1.17)$$

где функция $\eta(s)$ характеризует отношение полуосей эллипсов

$$l_y/l_x = e^\eta, \quad (1.18)$$

а $B_0(s)$ — магнитное поле на магнитной оси s .

Как это следует из выражения (1.17), магнитные поверхности в приосевой области можно сделать цилиндрическими, если в вести полярные координаты r и ϑ соотношениями

$$x_1 = \lambda_1 r \cos \vartheta, \quad x_2 = \lambda_2 r \sin \vartheta; \quad (1.19)$$

$$\lambda_1 = B_0^{-1/2} e^{-\eta/2}, \quad \lambda_2 = B_0^{-1/2} e^{\eta/2}. \quad (1.20)$$

Запишем метрический элемент координатной системы (1.12) в виде

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx_1 + \mathbf{e}_y dy_1 + \mathbf{e}_s ds. \quad (1.21)$$

Координатные векторы \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_s соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{v} \cos \delta - \beta \sin \delta; & \mathbf{e}_y &= \mathbf{v} \sin \delta + \beta \cos \delta; \\ \mathbf{e}_s &= h_s \boldsymbol{\tau} - u'(x_1 \mathbf{e}_y - y_1 \mathbf{e}_x). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Элемент длины в скругляющей системе координат r, ϑ, s при этом представится в виде

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\vartheta d\vartheta + \mathbf{e}_s ds, \quad (1.23)$$

где координатные векторы определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \lambda_1 \mathbf{e}_x \cos \vartheta + \lambda_2 \mathbf{e}_y \sin \vartheta; \\ \mathbf{e}_\vartheta &= (\lambda_2 \mathbf{e}_y \cos \vartheta - \lambda_1 \mathbf{e}_x \sin \vartheta) r; \\ \mathbf{e}_s &= h_s \boldsymbol{\tau} + (\lambda_4 \mathbf{e}_x - \lambda_3 \mathbf{e}_y) r, \end{aligned} \quad (1.24)$$

а

$$\lambda_3 = u' \lambda_1 \cos \vartheta - \lambda_2' \sin \vartheta; \quad \lambda_4 = u' \lambda_2 \sin \vartheta + \lambda_1' \cos \vartheta. \quad (1.25)$$

Детерминант метрического тензора рассматриваемой системы координат равен

$$\begin{aligned} g &= r^2 h_s^2 / B_0^2; \\ h_s &= 1 - kr (\lambda_1 \cos \delta \cos \vartheta + \lambda_2 \sin \delta \sin \vartheta) \equiv 1 - r f_c. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Введенная здесь система скругляющих координат r, ϑ, s , в которой квадрат расстояния от магнитной оси $\rho^2 = (\lambda_1^2 \cos^2 \vartheta + \lambda_2^2 \sin^2 \vartheta) r^2$, наиболее удобна для нахождения магнитных поверхностей методом разложения по степеням r .

Метрический тензор скругляющей системы координат r, ϑ, s имеет компоненты

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} q_0 - q_1 \cos 2\vartheta, & q_1 r \sin 2\vartheta, & \frac{r}{2} (q_0' - q_1' \cos 2\vartheta) \\ q_1 r \sin 2\vartheta, & r^2 (q_0 + q_1 \cos 2\vartheta), & \frac{r^2}{2} \left(-\frac{2u'}{B_0} + q_1' \sin 2\vartheta \right) \\ \frac{r}{2} (q_0' - q_1' \cos 2\vartheta), & \frac{r^2}{2} \left(-\frac{2u'}{B_0} + q_1' \sin 2\vartheta \right), & 1 - 2rf_c + r^2 q_2 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

$$\text{где } q_0 = \frac{\text{ch } \eta}{B_0}; \quad q_1 = \frac{\text{sh } \eta}{B_0}; \quad q_2 = f_c^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2.$$

§ 1.4. Естественная поверхностная система координат

Для получения условий устойчивости тороидальных плазменных конфигураций удобно использовать систему криволинейных координат x^1, x^2, x^3 , связанную с магнитными поверхностями рассматриваемой равновесной конфигурации.

Уравнения равновесия плазмы в магнитном поле \mathbf{B} имеют вид:

$$\nabla p = [\mathbf{j}; \mathbf{B}]; \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}; \quad \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (1.28)$$

Как следует из уравнений (1.28), векторы \mathbf{B} и \mathbf{j} лежат на магнитных поверхностях, совпадающих с поверхностями равного давления p . Рассмотрим плазменные конфигурации, магнитные поверхности

которых представляют собой систему вложенных тороидальных поверхностей, окружающих магнитную ось.

Если выбрать систему координат таким образом, чтобы координаты x^1 и x^2 изменялись вдоль магнитных поверхностей, а x^3 в поперечном направлении, и принять магнитные поверхности за координатные поверхности $x^3 = \text{const}$, то векторы \mathbf{B} и \mathbf{j} будут иметь по две контравариантные компоненты, отличные от нуля, а $\nabla\rho$ лишь одну ковариантную компоненту:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B^1 \mathbf{e}_1 + B^2 \mathbf{e}_2; & \mathbf{j} &= j^1 \mathbf{e}_1 + j^2 \mathbf{e}_2; \\ \nabla\rho &= \sqrt{g} (j^1 B^2 - j^2 B^1) \mathbf{e}^3. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Как показано в работе [11], можно ввести натуральную поверхностную систему координат, в которой $x^1 = \theta$, $x^2 = \zeta$ — циклические координаты с периодами изменения, равными единице; $x^3 = V$, где V — текущий объем системы вложенных магнитных поверхностей, отсчитываемый от магнитной оси $V = 0$; детерминант метрического тензора $g = 1$. Контравариантные компоненты векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} в такой системе координат выражаются инвариантным образом через производные от потоков по объему V :

$$\mathbf{B} = \chi' \mathbf{e}_1 + \Phi' \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{j} = I' \mathbf{e}_1 + J' \mathbf{e}_2. \quad (1.30)$$

Здесь $J(V)$ и $\Phi(V)$ — продольные, а $I(V)$ и $\chi(V)$ — поперечные потоки векторов \mathbf{j} и \mathbf{B} внутри текущей магнитной поверхности

$$J = \int \mathbf{j} d\sigma_{\perp}; \quad \Phi = \int \mathbf{B} d\sigma_{\perp}; \quad I = \int \mathbf{j} d\sigma_{\parallel}; \quad \chi = \int \mathbf{B} d\sigma_{\parallel}. \quad (1.31)$$

Отметим, что натуральная поверхностная система координат пригодна не только для замкнутых тороидальных конфигураций, но также и для пространственно периодических конфигураций, если считать отождествленными начало и конец периода.

Из уравнений магнитных силовых линий и линий тока

$$\frac{dx^1}{B^1} = \frac{dx^2}{B^2} = \frac{dx^3}{B^3}; \quad \frac{dx^1}{j^1} = \frac{dx^2}{j^2} = \frac{dx^3}{j^3} \quad (1.32)$$

следует, что силовые линии \mathbf{B} и линии тока \mathbf{j} в натуральной поверхностной системе координат — прямые линии. Условие выпрямленности силовых линий и линий тока (1.30) и условие равенства единице детерминанта g_{ih} можно рассматривать как определение натуральной системы координат θ , ζ , V , в которой координата θ изменяется по малому обходу тора, а ζ — по большому.

Из уравнения $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ следует, что векторный потенциал в натуральной системе координат имеет две отличные от нуля ковариантные компоненты

$$\mathbf{A} = \Phi \mathbf{e}^1 - \chi \mathbf{e}^2, \quad (1.33)$$

причем любой другой векторный потенциал отличается от (1.33) добавочным градиентом произвольной функции.

Ковариантные компоненты магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla\varphi + \mathbf{B}_j$ можно выразить через скалярный потенциал φ и потоки J и I :

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + J \right) \mathbf{e}^1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - I \right) \mathbf{e}^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial V} \mathbf{e}^3. \quad (1.34)$$

Кроме основных функций Φ, χ, J, I и их первых производных по V , фигурирующих в соотношениях (1.30), (1.33) и (1.34), целесообразно ввести следующие инвариантные функции:

$$\begin{aligned} \rho' &= I' \Phi' - J' \chi'; \quad \Omega = I' \Phi'' - J' \chi''; \\ S &= \chi' \Phi'' - \Phi' \chi'', \end{aligned} \quad (1.35)$$

с помощью которых наиболее просто формулируются условия равновесия и устойчивости произвольных тороидальных плазменных конфигураций. Первое из соотношений (1.35) — следствие уравнений равновесия (1.28), а вторые два определяют функции Ω и S .

Запишем метрический элемент в натуральной поверхностной системе координат $x^1 = \theta, x^2 = \xi, x^3 = V$ в виде

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_2 dx^2 + \mathbf{e} dx^3. \quad (1.36)$$

Координатные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 находятся из выражений (1.30):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\rho'} (\Phi' \mathbf{j} - J' \mathbf{B}); \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\rho'} (I' \mathbf{B} - \chi' \mathbf{j}). \quad (1.37)$$

Координатный вектор \mathbf{e} можно представить в виде разложения по векторам \mathbf{j}, \mathbf{B} и ∇V :

$$\mathbf{e} = \frac{\nabla V}{|\nabla V|^2} + \frac{1}{\rho'} (\kappa \mathbf{j} - \lambda \mathbf{B}). \quad (1.38)$$

При этом функции κ и λ удовлетворяют следующим, так называемым «магнитным дифференциальным уравнениям» [10]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \nabla \kappa &= S - \mathbf{B} \mathbf{j}^* / |\nabla V|^2; \quad \mathbf{B} \nabla \lambda = \Omega - \mathbf{j} \mathbf{j}^* / |\nabla V|^2; \\ \mathbf{j}^* &= \mathbf{j} - \frac{2}{|\nabla V|^2} [\nabla V, (\nabla V \nabla) \mathbf{B}]. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Как уже отмечалось, для определения метрики натуральной поверхностной системы координат можно использовать преобразования от поверхностной системы координат к какой-либо осевой системе. В частности, применяя ортогональную осевую систему координат ρ, ω, s , можно определить вектор \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = [\nabla \theta \nabla \xi]; \quad \theta = \frac{\omega}{2\pi} + \theta_1; \quad \xi = \frac{s}{L} + \xi_1, \quad (1.40)$$

где L — длина магнитной оси рассматриваемой равновесной конфигурации. При этом для определения функций θ_1 и ξ_1 получаем следующие магнитные дифференциальные уравнения:

$$\mathbf{B} \nabla \theta_1 = \chi' - B_\omega / 2\pi\rho; \quad \mathbf{B} \nabla \xi_1 = \Phi' - B_s / h_s L. \quad (1.41)$$

Общим при решении магнитных дифференциальных уравнений является метод разложения по степеням удаления от магнитной оси.

Соответствующая задача будет рассмотрена далее при исследовании равновесных конфигураций, причем в общем случае мы воспользуемся преобразованием от натуральной поверхностной системы координат θ, ζ, V к скругляющей осевой системе координат r, φ, s .

Глава 2. РАВНОВЕСНЫЕ ПЛАЗМЕННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

§ 2.1. Равновесные аксиально симметричные конфигурации плазмы

Исследование равновесных плазменных конфигураций существенно упрощается при наличии пространственной симметрии задачи. К таким конфигурациям относятся, в частности, аксиально симметричные конфигурации с круговой магнитной осью и конфигурации с винтовой магнитной осью, обладающие винтовой симметрией. Мы остановимся сначала более подробно на случае аксиальной симметрии, а затем рассмотрим общий случай тороидальных равновесных конфигураций, ограничиваясь при этом методом разложения по степеням отклонения от магнитной оси.

2.1.1. Общие соотношения

Аксиально симметричные конфигурации удобно описывать с помощью функций $\psi = rA_\varphi$, $I_A = rB_\varphi$ и p , зависящих только от ψ . В цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной с осью симметрии конфигурации, компоненты векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} определяются соотношениями [20]:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_\varphi = \frac{I_A}{r}; \quad (2.1)$$

$$j_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial I_A}{\partial r}, \quad j_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial I_A}{\partial z}, \quad j_\varphi = rp' + \frac{I_A I_A'}{r}, \quad (2.2)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ψ .

Функция $\psi(r, z)$ удовлетворяет уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r^2 p' - I_A I_A', \quad (2.3)$$

которое зависит от произвольных функций $p(\psi)$ и $I_A(\psi)$, определяющих распределение продольного поля B_φ и плотности продольного тока j_φ по сечению плазмы.

Основные «поверхностные» величины Φ, χ, J, I , определяющие равновесие и устойчивость плазмы, для случая аксиальной симметрии задачи представляются в виде

$$\chi = -2\pi \int B_z r dr = -2\pi\psi, \quad I = -2\pi \int j_z r dr = -2\pi I_A; \quad (2.4)$$

$$\Phi = \int \frac{I_A}{r} dr dz, \quad J = \int \left(rp' + \frac{I_A I_A'}{r} \right) dr dz. \quad (2.5)$$

Если наряду с объемом V , ограниченным замкнутой магнитной поверхностью $\psi = \text{const}$, ввести функцию U так, чтобы

$$V = 2\pi \int r dr dz; \quad U = 2\pi \int \frac{1}{r} dr dz, \quad (2.6)$$

то дифференциалы функций Φ и J выразятся через дифференциалы V и U :

$$2\pi d\Phi = I_A dU; \quad 2\pi dJ = p' dV + I_A I_A' dU. \quad (2.7)$$

Уравнение равновесия (1.35) для аксиально симметричных систем можно представить в виде

$$\frac{dp}{dV} = - \frac{dJ}{dV} \cdot \frac{d\chi}{dV} - \frac{1}{2} \cdot \frac{dU}{dV} \cdot \frac{d}{dV} (r^2 B_\varphi^2). \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что величина «однородного» внешнего продольного магнитного поля $B_\varphi \sim 1/r$ не влияет на равновесие плазмы, которое зависит только от магнитного поля, создаваемого токами в плазме. Однако, как мы увидим далее, устойчивость плазмы определяется именно наличием продольного магнитного поля.

2.1.2. Аксиально симметричные тороидальные конфигурации в окрестности магнитной оси

Разложим функции p' и $I_A I_A'$ в ряд по степеням ψ :

$$p' = -a - a' \psi - \dots; \quad I_A I_A' / R^2 = -b - b' \psi - \dots \quad (2.9)$$

и будем искать решение уравнения равновесия (2.3) в окрестности магнитной оси $r = R, z = 0$ в виде ряда по степеням z и $r^2 - R^2$. Налагая требование симметрии относительно плоскости $z = 0$ и учитывая, что на магнитной оси $\partial\psi/\partial r = \partial\psi/\partial z = 0$, получаем с точностью до кубических членов включительно [9]

$$\psi = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{a+b}{1+v^2} \left\{ \left(1 + c \frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) z^2 + \frac{v^2}{4R^2} (r^2 - R^2)^2 - \frac{c - (a - v^2 b) / (a + b)}{12R^4} (r^2 - R^2)^3 \right\}. \quad (2.10)$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении линейные по ψ члены разложений (2.9) не влияют на равновесную конфигурацию. Сечения магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ в окрестности магнитной оси, с точностью до квадратичных членов, являются эллипсами, отношение полуосей которых определяется постоянной $v = l_z/l_r$. Вторая произвольная постоянная c , определяющая амплитуду куби-

ческих членов разложения (2.10), может быть найдена из решения граничной задачи.

Если рассматривать решение (2.10) во всей плоскости r, z , то вследствие наличия кубических членов разложения возникнут сепаратрисы [1] магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$. Координаты ребер сепаратрисы $r_{1,2}, z_{1,2}$ зависят от постоянной c :

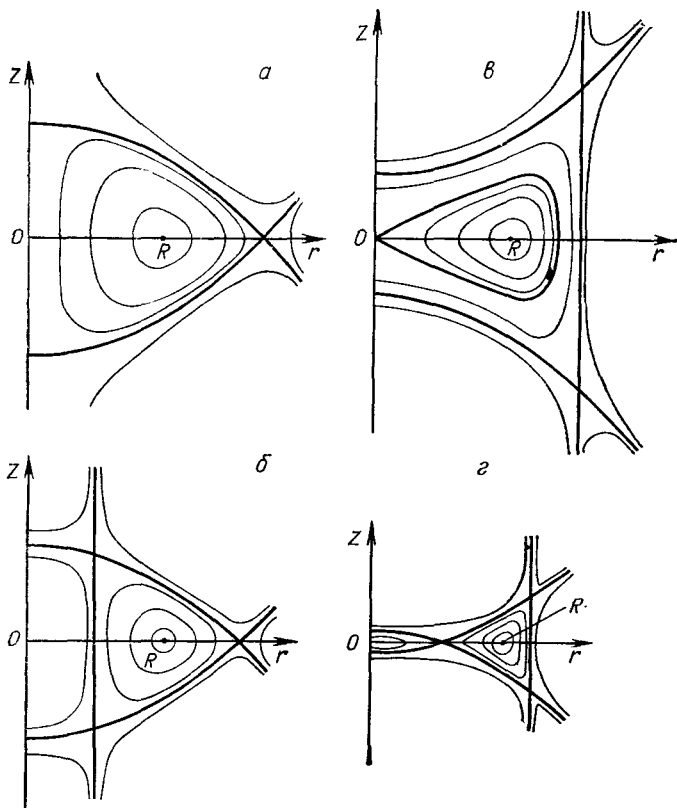


Рис. 1. Нормальные сечения магнитных поверхностей аксиально симметричной равновесной конфигурации (3.10):

$a-c=1, b/a=1$; $б-c=4/3, b/a=1$; $в-c=-4/5, b/a=1$; $г-c=-8/3, b/a=1$.

$$r_1^2 = R^2 \left(1 - \frac{1}{c}\right), \quad z_1^2 = \frac{R^2}{4c^2} \left[(1 + 2v^2)c + \frac{a - v^2 b}{a + b} \right]; \quad (2.11)$$

$$r_2^2 = R^2 \left[1 + \frac{2v^2}{c - (a - v^2 b)/(a + b)} \right], \quad z_2 = 0. \quad (2.12)$$

Сечения магнитных поверхностей конфигурации (2.10) показаны на рис. 1. Соответствующее решение «обратной задачи» может быть реализовано с помощью идеально проводящего экрана, располо-

женного по контуру сечения одной из магнитных поверхностей, окружающих магнитную ось $r = R$.

Таким образом, форма магнитных поверхностей равновесной конфигурации кубического по $r - R$ и z приближения зависит от трех постоянных параметров: v , c и b/a , причем отношение b/a определяется распределением токов в плазме. Ниже убедимся, что устойчивость

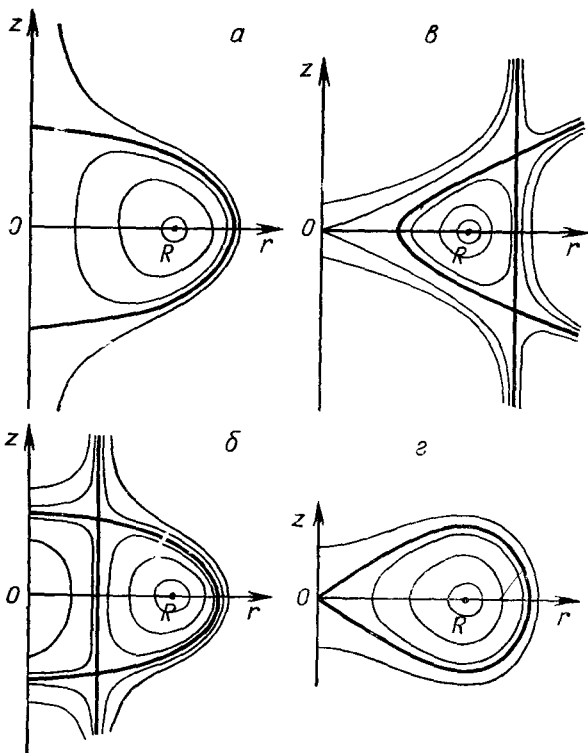


Рис. 2. Нормальные сечения магнитных поверхностей аксиально симметричной равновесной конфигурации (2.13):

$$a - b/a = 0; \quad б - b/a = -1/7; \quad в - b/a = -7; \quad г - b/a = 1.$$

плазмы в окрестности магнитной оси также зависит от параметров кубических членов разложения $\psi(r - R, z)$.

Нетрудно проверить, что при выборе констант таким образом, чтобы коэффициент при $(r^2 - R^2)^3$ обращался в нуль, выражение (2.10) дает точное решение уравнения (2.3) при постоянных $p' = -a$ и $I_A I_{A'} = -bR^2$. Полагая $b = (1 - c)(a + b)/(1 + v^2)$, $c_0 = c(a + b)/(1 + v^2)$, получаем точное решение в виде

$$\psi = \frac{1}{2} (bR^2 + c_0 r^2) z^2 + \frac{1}{8} (a - c_0) (r^2 - R^2)^2. \quad (2.13)$$

Сечения магнитных поверхностей равновесной конфигурации (2.13) показаны на рис. 2. Эти магнитные поверхности отличаются от магнитных поверхностей для общего случая (2.10) отсутствием ребра сепаратрисы (2.12), расположенного при $z = 0$.

В полярных координатах ρ , ω , φ , связанных с магнитной осью $r = R$, $z = 0$; $r - R = \rho \cos \omega$, $z = \rho \sin \omega$, решение (2.10), с точностью до членов порядка ρ^3 включительно, запишется в виде

$$\psi = (\alpha_1 \cos^2 \omega + \alpha_2 \sin^2 \omega) \rho^2 + \cos \omega (\alpha_3 \cos^2 \omega + \alpha_4 \sin^2 \omega) \rho^3, \quad (2.14)$$

где параметры α_i выражаются через параметры конфигурации (2.10) формулами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{v^2 R^2}{2} \cdot \frac{a+b}{1+v^2}; & \alpha_2 &= \frac{R^2}{2} \cdot \frac{a+b}{1+v^2}; \\ \alpha_3 &= \frac{R}{6} \left[3a+b - \frac{a+b}{1+v^2} (1+2c) \right]; & \alpha_4 &= Rc \frac{a+b}{1+v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Уравнение равновесия (2.8) в окрестности магнитной оси принимает вид

$$-\frac{dp}{dV} = \frac{v}{1+v^2} \cdot \frac{j_0^2}{4\pi^2 R} + \frac{1}{2R^2} \cdot \frac{d}{dV} (r^2 B_\varphi^2). \quad (2.16)$$

Здесь j_0 — плотность продольного тока в окрестности магнитной оси $r = R$, а второй член в правой части уравнения (2.16) характеризует степень диамагнетизма плазмы.

2.1.3. Плазменный тор эллиптического сечения

Рассмотрим решение граничной задачи при заданном поперечном сечении внешней магнитной поверхности ψ_Σ . Пусть поверхность ψ_Σ имеет эллиптическое сечение

$$z^2 + v_0^2 (r - R_0)^2 = v_0^2 \rho_0^2, \quad (2.17)$$

центр которого расположен при $r = R_0$, $z = 0$, а отношение полуосей $l_z/l_r = v_0$. Если ограничиться случаем малой тороидальности, то решение уравнения равновесия (2.3), правая часть которого разложена по степеням ψ согласно (2.9), можно искать в виде ряда по степеням малых параметров z/R_0 и $(r - R_0)/R_0$.

Полагая $x = r - R_0$, будем искать решение в виде ряда по x , z и ρ_0 , получим:

$$\psi = (A + Bx + \dots) (z^2 + v_0^2 x^2 - v_0^2 \rho_0^2), \quad (2.18)$$

каждый член которого точно удовлетворяет граничному условию $\psi = 0$ на поверхности тора эллиптического сечения (2.17). Приравняв члены при одинаковых степенях x , z и ρ_0 , получим:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{aR_0^2 + bR^2}{1+v_0^2}; \quad B = \frac{1}{2R_0} \cdot \frac{(2+3v_0^2)aR_0^2 + v_0^2 bR^2}{(1+v_0^2)(1+3v_0^2)}. \quad (2.19)$$

Как показывает выражение (2.18), функция магнитных поверхностей ψ обращается в нуль не только на граничной поверхности (2.17), но и на цилиндрической поверхности $x = x_0$, где

$$x_0 = -\frac{A}{B} = -R_0 \frac{(1+3v_0^2)(aR_0^2 + bR^2)}{(2+3v_0^2)aR_0^2 + v_0^2 bR^2}. \quad (2.20)$$

При достаточно малом числителе в выражении (2.20) эта магнитная поверхность (перегородка) пересекает плазменный тор (2.17), в результате чего в сечении тора возникает вторая магнитная ось и семейство магнитных поверхностей расщепляется на два семейства вложенных магнитных поверхностей [21, 22], причем вдоль появив-

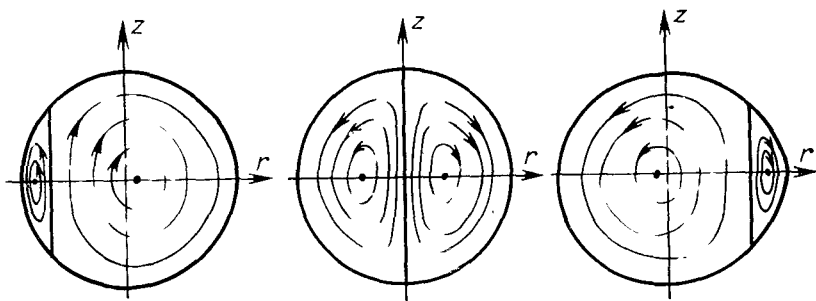


Рис. 3. Нормальные сечения магнитных поверхностей аксиально симметричной тороидальной равновесной конфигурации при прохождении перегородки.

шейся второй магнитной осью течет ток противоположного основному току направления (рис. 3). Положение перегородки $x = x_0$ зависит от величины

$$\beta_J = -\frac{16\pi^2 R p'(V)}{j_0^2}. \quad (2.21)$$

При достаточно малом β_J перегородка находится слева от сечения плазменного тора ψ_Σ . При увеличении β_J она входит в сечение ψ_Σ , причем в образующейся слева от нее равновесной конфигурации $p'(V) > 0$, поскольку, согласно уравнениям равновесия, в окрестности произвольной магнитной оси $r = R$ имеют место соотношения:

$$\frac{4\pi^2 p'(V)}{j_0} = -\frac{va}{1+v^2}; \quad \frac{4\pi^2 R p'(V)}{j_0^2} = -\frac{v}{1+v^2} \cdot \frac{1}{1+b/a}. \quad (2.22)$$

После того как перегородка $x = x_0$ проходит сечение плазмы ψ_Σ , остается опять только одна магнитная ось, однако в полученной равновесной конфигурации $p'(V) > 0$, т. е. давление может только возрасти при удалении от магнитной оси. Если давление p обращается в исходной конфигурации в нуль на внешней поверхно-

сти ψ_{Σ} , то при наличии перегородки давление слева от нее должно быть равным нулю в силу непрерывности.

Положение магнитных осей первого (правого) и второго (левого) семейств магнитных поверхностей определим, приравняв нулю z и $d\psi/dr$, в результате чего

$$x_{1,2} = \frac{1}{3} (x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 3\rho_0^2}). \quad (2.23)$$

Если β_J достаточно мало, так что $|x_0| \gg \rho_0$, то, беря верхний знак при $x_0 < 0$, имеем

$$x_1 = \rho_0^2/2 |x_0|. \quad (2.24)$$

Эта величина положительна, так что магнитная ось в этом случае смещена вправо от центра сечения $r = R_0$ на расстояние $x_1 \sim \sim \rho_0^2/R$.

Параметры v и c разложения ψ в окрестности магнитной оси (2.19) определяются производными

$$v^2 = \frac{\partial^2 \psi / \partial r^2}{\partial^2 \psi / \partial z^2}; \quad c = \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial^3 \psi / \partial r \partial z^2}{\partial^2 \psi / \partial z^2}, \quad (2.25)$$

взятыми при $r = R = R_0 + x_{1,2}$. Дифференцируя (2.18), получаем

$$v^2 = \mp 3v_0^2 \frac{\sqrt{x_0^2 + 3\rho_0^2}}{2x_0 \mp \sqrt{x_0^2 + 3\rho_0^2}}; \quad c = -\frac{3R}{2} \cdot \frac{1}{2x_0 \mp \sqrt{x_0^2 + 3\rho_0^2}}. \quad (2.26)$$

В случае достаточно малого β_J , когда $|x_0| \gg \rho_0$, эти величины с точностью до членов $\sim \rho_0^2/R_0^2$ оказываются равными

$$v = v_0 \left(1 + \frac{\rho_0^2}{2x_0^2} \right); \quad c = -\frac{R}{2x_0} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{2x_0^2} \right). \quad (2.27)$$

Таким образом, сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси оказываются более вытянутыми вдоль оси z , чем сечение граничной поверхности ψ_{Σ} .

При вхождении перегородки $x = x_0$ слева в сечение ψ_{Σ} , когда $x_0 = -\rho_0$, магнитная ось $r = R_1$ находится при $x_1 = \rho_0/3$, а $v_1^2 = = 3v_0^2/2$, причем $v_2 \rightarrow \infty$. Когда перегородка $x = x_0$ находится в середине сечения $x_0 = 0$, обе магнитные оси расположены симметрично $x_{1,2} = \pm \rho_0/\sqrt{3}$ и имеют одинаковую эллиптичность $v_{1,2} = = \sqrt{3}v_0$. Наконец, в момент прохождения края сечения $x_0 = +\rho_0$ картина магнитных поверхностей получается из случая $x_0 = -\rho_0$ инверсией относительно центральной линии сечения $x = 0$. При этом $x_2 = -\rho_0/\sqrt{3}$; $v_2^2 = 3v_0^2/2$; $v_1 \rightarrow \infty$.

После выяснения характера решения граничной задачи в зависимости от параметра x_0 нам осталось лишь связать x_0 с основными параметрами равновесной плазмы $p'(V)$ и j_0 . Согласно (2.20), найдем отношение

$$\frac{b}{a} = -\frac{R_0^2}{R} \cdot \frac{1 + 3v_0^2 + (2 + 3v_0^2) x_0/R_0}{1 + 3v_0^2 + v_0^2 x_0/R_0}. \quad (2.28)$$

Согласно (2.22) и (2.28), получим β_J в зависимости от параметра x_0 :

$$\beta_J = \frac{4\nu}{1+\nu^2} \cdot \frac{1+3\nu_0^2+\nu_0^2 x_0/R_0}{1+3\nu_0^2+\nu_0^2 x_0/R_0 - [1+3\nu_0^2+(2+3\nu_0^2)x_0/R_0] R_0^2/R^2}. \quad (2.29)$$

Условие $|x_0| \ll R_0$ соблюдается при малой тороидальности, когда перегородка $x = x_0$ пересекает сечение плазменного тора ψ_Σ . Учитывая это, выражение (2.29) можно записать как

$$\beta_J = \frac{6\nu R_0}{1+\nu^2} \cdot \frac{1+3\nu_0^2}{-2x_0 \pm (1+3\nu_0^2)\sqrt{x_0^2+3\rho_0^2}}. \quad (2.30)$$

Отсюда непосредственно видно, что в правом семействе магнитных поверхностей $x_1 > x_0$ давление спадает, а в левом $x_2 < x_0$ нарастает к периферии от магнитной оси, как и отмечалось выше.

Если потребовать, чтобы перегородка $x = x_0$ не пересекала плазменного тора и тем самым не выедалась часть плазмы, то это приводит, согласно (2.30) и (2.26) при $x_0 = -\rho_0$, к следующему ограничению на равновесное значение β_J :

$$\beta_J < \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6\nu_0(1+3\nu_0^2)R_0}{(2+3\nu_0^2)^2\rho_0}. \quad (2.31)$$

В случае круглого поперечного сечения плазменного тора $\nu_0 = 1$ получаем [23, 24]

$$\beta_J < R_0/\rho_0. \quad (2.32)$$

Таким образом, равновесное состояние со спадающим давлением существует только при достаточно малом давлении плазмы, так что $\beta_J = -4p'(\rho)/\rho j_0^2$ должно быть меньше отношения большого радиуса плазменного тора R_0 к малому радиусу ρ_0 .

Если не выполняется сильное неравенство $\beta_J \ll R_0/\rho_0$, то, как это следует из соотношений (2.26), даже в случае круглого поперечного сечения плазменного тора $\nu_0 = 1$ появляется эллиптичность приосевых сечений магнитных поверхностей $\nu > 1$, а это, в свою очередь, влияет на устойчивость плазмы.

2.1.4. Плазменный тор с круглыми приосевыми сечениями магнитных поверхностей

Описанный выше метод разложения по степеням расстояния от магнитной оси применим для всего сечения плазменного тора только для квазиоднородных конфигураций, когда плотность продольного тока почти постоянна по сечению плазмы. В противном случае для нахождения магнитных поверхностей необходимо более аккуратное решение уравнения (2.3). Для получения соответствующего решения более удобно использовать осевую ортогональную систему координат ρ, ω, φ , связанную с круговой осью $r = R$. При этом

соотношения (2.1) и (2.2) преобразуются к виду:

$$B_\rho = \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \omega}, \quad B_\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad B_\varphi = I_A/r; \quad (2.33)$$

$$j_\rho = \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial I_A}{\partial \omega}, \quad j_\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial I_A}{\partial \rho}, \quad j_\varphi = r p' + \frac{I_A I_A'}{r}. \quad (2.34)$$

Соответственно функция $\psi(\rho, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = -r p' - \frac{I_A I_A'}{r}, \quad (2.35)$$

где $p(\psi)$ и $I_A(\psi)$ — произвольные функции, а $r = R + \rho \cos \omega$.

Если ограничиться случаем квазикруговых поперечных сечений магнитных поверхностей и считать малым отношение ρ/R , то в первом приближении

$$\psi = f_0(\rho) + f_1(\rho) \cos \omega, \quad (2.36)$$

причем $f_1/f_0 \sim \rho/R$.

Решение уравнения (2.35) просто получить, если ограничиться линейными функциями

$$I_A(\psi) = I_0 + I_0' \psi; \quad p'(\psi) = p_0' + p_0'' \psi.$$

При этом уравнение (2.35) является линейным, и его решение может быть выражено через бесселевы функции. Для $f_0(\rho)$ и $f_1(\rho)$ получаем:

$$\frac{1}{\rho} (\rho f_0')' + \varepsilon^2 f_0 = -R j_0; \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{\rho} (\rho f_1')' + \left(\varepsilon^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) f_1 = \frac{f_0'}{R} - \frac{2\rho R}{f_0'^2} p'. \quad (2.38)$$

Решение уравнения (2.37), определяющее нулевое приближение для функции ψ и имеющее вид

$$\psi = f_0(\rho) = \frac{R j_0}{\varepsilon^2} [J_0(\varepsilon \rho) - 1], \quad (2.39)$$

описывает плазменную конфигурацию, распределение токов в которой зависит от произвольных постоянных параметров ε и γ :

$$j_\rho = 0; \quad j_\omega = \gamma j_0 J_1(\varepsilon \rho); \quad j_\varphi = j_0 J_0(\varepsilon \rho),$$

а компоненты магнитного поля определяются выражениями:

$$B_\rho = 0; \quad B_\omega = \frac{j_0}{\varepsilon} J_1(\varepsilon \rho); \quad B_\varphi = B_0 + \frac{\gamma j_0}{\varepsilon} [J_0(\varepsilon \rho) - 1].$$

Решение уравнения (2.39) для f_1 можно представить в виде

$$f_1 = \frac{j_0 \rho}{2\varepsilon^2} \left\{ J_0(\varepsilon \rho) - [2 + (1 - \gamma^2) \varepsilon^2 \rho^2] \frac{J_1(\varepsilon \rho)}{\varepsilon \rho} + 4\gamma \varepsilon \left(\frac{B_0}{j_0} - \frac{\gamma}{\varepsilon} \right) \left[1 - \frac{2J_1(\varepsilon \rho)}{\varepsilon \rho} \right] \right\}. \quad (2.40)$$

При этом сечения магнитных поверхностей в окрестности $r = R$ будут круглыми. К функции $f_1(\rho)$ можно добавить произвольное решение однородного уравнения (2.38), равное $\text{const } J_1(\varepsilon\rho)$, и получить, например, функцию $\Psi(\rho, \omega)$, которая постоянна на окружности $\rho = \rho_0$. Таким образом, получим решение граничной задачи при заданном сечении внешней магнитной поверхности Ψ_Σ , аналогично предыдущему разделу.

Добавляя к функции f_0 постоянную, так чтобы $\Psi(\rho, \omega)$ обращалась в нуль на окружности $\rho = \rho_0$, в системе координат, связанной с круговой осью $r = R_0$, расположенной в центре сечения плазменного тора, получим

$$\Psi = F_0(\rho) + F_1(\rho) \cos \omega, \quad (2.41)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{R_0 j_0}{\varepsilon^2} [J_0(\varepsilon\rho) - J_0(\varepsilon\rho_0)]; \\ F_1 &= f_1(\rho) - f_1(\rho_0) \frac{J_1(\varepsilon\rho)}{J_1(\varepsilon\rho_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

где $f_1(\rho)$ определено выражением (2.40). Поскольку $x = r - R_0 = \rho \cos \omega$, то положение перегородки $\Psi = 0$ определяется формулой

$$x_0 = -\frac{\rho F_0(\rho)}{F_1(\rho)}.$$

Требую, чтобы перегородка не пересекала внешний контур сечения плазмы $\rho = \rho_0$ и оставалась левее него, получаем условие

$$\rho_0 < \frac{F_0'(\rho_0)}{[F_1(\rho_0)/\rho_0]'}. \quad (2.43)$$

Здесь для раскрытия неопределенности использовано правило Лопиталя.

Если пренебречь эллиптичностью магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси и определить β_J как предел отношения $-4\rho'(\rho)/\rho j^2$ при $\rho \rightarrow 0$, то величина γ , согласно уравнению равновесия, выразится формулой

$$\gamma = \frac{j_0}{\varepsilon B_0} \left(1 - \frac{\beta_J}{2} \right),$$

откуда следует, что азимутальный ток j_ω меняет знак при $\beta_J = 2$. В случае продольного тока, спадающего до нуля на границе плазмы $\varepsilon\rho_0 \simeq 2, 4$, из неравенства (2.43) вытекает ограничение $\beta_J < < 3R_0/5\rho_0$. Таким образом, равновесное значение β_J оказывается ограниченным величиной порядка R_0/ρ_0 [23].

2.1.5. Натуральная метрика

В рассматриваемом случае аксиально симметричных конфигураций с круговыми сечениями магнитных поверхностей можно определить метрику натуральной координатной системы Хаммады θ , ζ , V для произвольного распределения токов в плазме, если воспользоваться методом разложения по малому параметру ρ/R . Для нахождения координат $\theta = \omega/2\pi + \theta_1$ и $\zeta = \varphi/2\pi + \zeta_1$ необходимо решить магнитные дифференциальные уравнения (1.41):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}\nabla\theta_1 &= \frac{1}{2\pi r\rho} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{2\pi}{V'(\psi)}; \\ \mathbf{B}\nabla\zeta_1 &= \frac{I_A}{2\pi} \left(\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Функция ψ представляется при этом в виде $\psi = f_0(\rho) + f_1(\rho) \cos \omega$ где $f_0 \sim R$, $f_1 \sim \rho$. Отсюда с точностью порядка ρ/R имеем

$$\rho = \rho_\psi - (f_1/f_0') \cos \omega,$$

где ρ_ψ — постоянно на магнитных поверхностях. Вычисление $V' = V'(\psi)$, согласно формулам усреднения

$$\langle f \rangle = \frac{2\pi}{V'} \int_0^{2\pi} f \frac{r\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}; \quad V' = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{r\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho},$$

дает с той же точностью

$$V' = \frac{4\pi^2 R\rho_\psi}{f_0'(\rho_\psi)} = \frac{4\pi^2 R\rho}{f_0'} \left[1 + \frac{f_1}{\rho} \left(\frac{\rho}{f_0'} \right)' \cos \omega \right].$$

Таким образом, уравнения (2.44) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\nabla\theta_1 &= -\frac{f_0'}{2\pi R^2} \left[1 - \frac{R}{\rho^2} \left(\rho \frac{f_1}{f_0'} \right)' \right] \cos \omega; \\ \mathbf{B}\nabla\zeta_1 &= \frac{I_A \rho}{\pi R^3} \cos \omega. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $(\mathbf{B}\nabla) \simeq -(f_0'/\rho R) \partial/\partial\omega$, получаем

$$\theta_1 = \frac{\rho}{2\pi R} \left[1 - \frac{R}{\rho^2} \left(\rho \frac{f_1}{f_0'} \right)' \right] \sin \omega; \quad \zeta_1 = -\frac{I_A \rho^2}{\pi R^2 f_0'} \sin \omega. \quad (2.45)$$

Координатные векторы $\mathbf{e}^i = \nabla x^i$ выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \nabla\theta &= \frac{\partial\theta_1}{\partial\rho} \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\partial\theta_1}{\partial\omega} \right) \frac{\mathbf{e}_\omega}{\rho}; \\ \nabla\zeta &= \frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\omega} \cdot \frac{\mathbf{e}_\omega}{\rho} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{2\pi r}; \\ \nabla V &= V'(\psi) \left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \cdot \frac{\mathbf{e}_\omega}{\rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Для координатных векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 имеются точные выражения (1.37), в то время как вектор $\mathbf{e}_3 = [\nabla\theta\theta\zeta]$ определяется из приведенных выражений с точностью до членов порядка ρ/R . Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{2\pi r} \{[\mathbf{e}_\varphi \nabla V] + I_A [r^2 U'(\psi) - V'(\psi)] \mathbf{e}_\varphi\}; \\ \mathbf{e}_2 &= 2\pi r \mathbf{e}_\varphi; \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\nabla V}{|\nabla V|^2} + \frac{\sin \omega}{|\nabla V|} \left\{ \frac{2}{R} \left(\rho^2 \frac{I_A}{f_0'} \right)' \mathbf{e}_\varphi - \left[\frac{\rho}{R} - \left(\rho \left(\frac{f_1}{f_0'} \right)' \right)' \right] \mathbf{e}_\omega \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

В окрестности магнитной оси, или для квазиоднородных конфигураций, координатный вектор $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$ приближенно равен

$$\mathbf{e} = \frac{\nabla V}{|\nabla V|^2} + \frac{2I_A \sin \omega}{R |\nabla V|} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^2}{\partial \psi / \partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.48)$$

Относительное различие векторов \mathbf{e} и $\nabla V / |\nabla V|^2$ имеет порядок $\rho B_\varphi / R B_\omega = 1/\mu R$, и является существенным при $\mu R < 1$.

§ 2.2. Равновесие произвольных плазменных конфигураций

2.2.1. Магнитные поверхности в окрестности произвольной магнитной оси

Регулярным методом нахождения магнитных поверхностей является метод разложения функции ψ по степеням расстояния от магнитной оси. Для квазиоднородных равновесных конфигураций этот метод дает хорошее приближение для всего сечения плазменного тора.

При заданном магнитном поле магнитные поверхности находят наиболее просто, если использовать скругляющую систему координат r, ϑ, s . Запишем контравариантные компоненты магнитного поля в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g} B^1 &= r^3 f_a + r^4 F_l + \dots; \\ \sqrt{g} B^2 &= r \nu' + r^2 f_b + r^3 F_m + \dots; \\ \sqrt{g} B^3 &= r + r^2 f_c + r^3 F_n + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Здесь f и F — тригонометрические функции ψ , коэффициенты которых являются периодическими функциями s и обозначаются той же буквой, что и индекс, например:

$$\left. \begin{aligned} f_a &= a_1 \cos \vartheta + a_2 \sin \vartheta + a_3 \cos 3\vartheta + a_4 \sin 3\vartheta; \\ F_n &= n_0 + n_1 \cos 2\vartheta + n_2 \sin 2\vartheta + n_3 \cos 4\vartheta + n_4 \sin 4\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Величина \sqrt{g} введена для удобства использования уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \sqrt{g} B^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \sqrt{g} B^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} \sqrt{g} B^3 \right\} = 0 \quad (2.51)$$

и для рассматриваемой скругляющей системы координат представляется в виде

$$\sqrt{g} = \frac{r h_s}{B_0} = \frac{r}{B_0} (1 - r f_c). \quad (2.52)$$

Функция f_c имеет отличных от нуля лишь два коэффициента c_1 и c_2 :

$$f_c = k B_0^{-1/2} (e^{-\eta/2} \cos \delta \cos \vartheta + e^{\eta/2} \sin \delta \sin \vartheta), \quad (2.53)$$

где $k(s)$ — кривизна магнитной оси s ; $B_0(s)$ — продольное магнитное поле на магнитной оси; $\varepsilon(s) = \operatorname{th} \eta(s)$ — параметр эллиптичности приосевых нормальных сечений магнитных поверхностей; $\delta(s)$ — угол большой полуоси эллипса с нормалью к магнитной оси; $\delta'(s)$ — угловая скорость прокручивания магнитных поверхностей вокруг магнитной оси; ν' — угловая скорость прокручивания магнитных силовых линий в окрестности магнитной оси. Величина ν' связана с параметрами приосевых магнитных поверхностей следующим соотношением, вытекающим из уравнения $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$:

$$\nu' = \frac{1}{\operatorname{ch} \eta} \left(u' + \frac{j_0}{2B_0} \right), \quad (2.54)$$

где $u' = \delta' - \kappa$, $\kappa(s)$ — кручение магнитной оси.

Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ получаются следующие соотношения, связывающие введенные функции f и F :

$$3f_a + \frac{\partial f_b}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f_c}{\partial s} = 0; \quad (2.55)$$

$$4F_l + \frac{\partial F_m}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F_n}{\partial s} = 0. \quad (2.56)$$

Поскольку, согласно определению, вектор \mathbf{B} лежит на магнитной поверхности $\psi = \operatorname{const}$, функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$\mathbf{B} \nabla \psi = B^1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} = 0. \quad (2.57)$$

Функцию магнитных поверхностей $\psi(r, \vartheta, s)$ ищем в виде

$$\psi = r^2 + r^3 f_\alpha + r^4 F_\nu + \dots \quad (2.58)$$

Подстановка разложений (2.49) и (2.58) в уравнение (2.57) приводит к системе уравнений:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial s} + v' \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vartheta} = -2f_a; \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial s} + v' \frac{\partial F_v}{\partial \vartheta} = -2F_l - f_b \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vartheta} - f_c \frac{\partial f_\alpha}{\partial s} - 3f_a f_\alpha, \quad (2.60)$$

левые части которых имеют стандартную форму.

Уравнение четвертого приближения (2.60) отличается от уравнения третьего приближения (2.59) наличием в искомой функции члена $v_0(s)$, не зависящего от ϑ . Использование соотношений (2.55) и (2.56) позволяет преобразовать правую часть уравнения (2.60), в результате чего получаем

$$\frac{\partial F_v}{\partial s} + v' \frac{\partial F_v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{F_n}{2} + \frac{3f_a^2}{2} - f_c f_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{F_m}{2} + \frac{3v' f_a^2}{2} - f_b f_\alpha \right). \quad (2.61)$$

Отсюда легко получить явное выражение для $v_0(s)$ путем усреднения обеих частей равенства (2.61) по ϑ :

$$v_0 = \frac{n_0}{2} - \frac{1}{2} (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2) + \frac{3}{4} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2). \quad (2.62)$$

Возникающая здесь произвольная постоянная опущена по принципу отбрасывания решений однородных уравнений (2.59) и (2.60), что необходимо делать, если допустить существование весьма малого, но отличного от нуля прокручивания силовых линий, характеризуемого параметром $v' \neq 0$.

Уравнения для функций $\alpha_i(s)$ и $v_i(s)$, которые получаются из уравнений (2.59)—(2.61) в результате сравнения коэффициентов при одинаковых гармониках, сводятся к системе уравнений стандартного вида:

$$\sigma_1' + n v' \sigma_2 = \Sigma_1; \quad \sigma_2' - n v' \sigma_1 = \Sigma_2, \quad (2.63)$$

где n — целые числа. Уравнения (2.63) по существу уравнения с постоянными коэффициентами, поскольку от переменной s можно перейти к новой переменной $v(s)$. Решение уравнений (2.63) легко найти методом вариации постоянных. Вводя комплексные функции

$$\sigma = \sigma_1 + i \sigma_2; \quad \Sigma = \Sigma_1 + i \Sigma_2, \quad (2.64)$$

получаем вместо системы (2.63) одно уравнение

$$\sigma' - i n v' \sigma = \Sigma. \quad (2.65)$$

Исходя из требования периодичности функции σ : $\sigma(s + L) = \sigma(s)$, находим решение уравнения (2.65) в виде интеграла Мерсье:

$$\sigma = \frac{e^{i n v(s)}}{e^{-i n v(L)} - 1} \int_s^{s+L} e^{-i n v} \Sigma ds. \quad (2.66)$$

Выражение (2.66) для σ целесообразно преобразовать к другой форме, более удобной для вычислений:

$$\sigma = i \frac{e^{in[v(L)/2 + v(s)]}}{2 \sin [nv(L)/2]} \int_0^L e^{-inv} \Sigma ds + e^{inv(s)} \int_0^s e^{-inv} \Sigma ds. \quad (2.67)$$

Фигурирующая в формулах (2.66) и (2.67) функция $u(s)$ определяется выражением $v(s) = \int_0^s v' ds$.

В случае, когда правые части уравнений (2.63) содержат конечное число гармоник по δ' , те же гармоники содержатся и в решении. При этом решение уравнений (2.64) проще находить непосредственно в виде разложения по соответствующим гармоникам.

2.2.2. Равновесие плазмы в окрестности произвольной магнитной оси

Задачу о равновесии плазмы в окрестности произвольной пространственной магнитной оси, или (что эквивалентно) задачу о равновесии произвольной квазиоднородной конфигурации, мы будем решать, используя преобразование от натуральных координат θ, ζ, V к скругляющим координатам r, ϑ, s . Соответствующее преобразование, записанное в виде разложения по степеням r , ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} V &= V_\psi (r^2 + r^3 f_\alpha + \dots); \\ \theta &= k_0 \vartheta + \int_0^s k_1 ds + r f_\beta + \dots; \\ \zeta &= \int_0^s k_2 ds + r f_\gamma + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

Используя уравнения равновесия в натуральной поверхностной системе координат, приведенные в § 1.3, и правила преобразования компонент вектора $B_i = g_{ik} B^k$ в скругляющей осевой системе координат, в низшем приближении разложения по r получаем формулы:

$$\Phi'(\psi) = \pi; \quad \chi'(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \oint v'(s) ds; \quad V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0}. \quad (2.69)$$

Соответственно коэффициенты k_i и V_ψ в разложениях (2.68) и функции $J'(\Phi)$ и $I'(\Phi)$ имеют следующие выражения:

$$k_0 = 1/2\pi; \quad k_1 = \frac{\chi'(V)}{B_0} - \frac{v'(s)}{2\pi}; \quad k_2 = \frac{V'(\Phi)}{B_0}; \quad (2.70)$$

$V_\psi = \pi V'(\Phi); J'(\Phi) = j_0/B_0; I'(\Phi) = p'(\Phi) V'(\Phi) - J'(\Phi) \chi'(\Phi)$, (2.71) где $B_0(s)$ и $j_0(s)$ — магнитное поле и плотность тока на магнитной оси.

Контравариантные компоненты векторов преобразуются как дифференциалы координат, поэтому для компонент \mathbf{B} имеем:

$$B^i \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0; \quad B^i \frac{\partial \theta}{\partial x^i} = \chi'; \quad B^i \frac{\partial \xi}{\partial x^i} = \Phi', \quad (2.72)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Из равенств (2.68) и (2.72) вытекают следующие уравнения стандартного вида для функций $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial s} + v' \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} = -2f_\alpha; \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial s} + v' \frac{\partial f_\beta}{\partial \theta} = -k_0 f_\beta - (2k_1 + k_0 v') f_c; \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial s} + v' \frac{\partial f_\gamma}{\partial \theta} = -2k_2 f_c. \quad (2.75)$$

Уравнение (2.73) мы уже получали выше другим способом. Отметим, что поскольку $c_3 = c_4 = 0$, то при учете равенства (2.55) из уравнения (2.75) следует:

$$\gamma_3 = \gamma_4 = 0; \quad 2\beta_3 = k_0 \alpha_4; \quad 2\beta_4 = -k_0 \alpha_3. \quad (2.76)$$

Уравнение (2.75) для функции f_γ имеет известную правую часть (2.53). Функцию f_β можно выразить через f_α и f_γ , если воспользоваться уравнением (2.55). В результате

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \theta} = k_0 \left(f_c - \frac{3}{2} f_\alpha \right) + \chi' (\Phi) \frac{\partial f_\gamma}{\partial \theta}. \quad (2.77)$$

Ковариантные компоненты преобразуются как компоненты градиента, и, следовательно, ковариантные компоненты \mathbf{B} , которые в натуральной системе координат θ, ξ, V , согласно (1.34), имеют вид

$$B_i = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + J, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - I, \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right\}, \quad (2.78)$$

в скругляющих координатах r, ϑ, s запишутся в виде

$$B_i = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial r} + J \frac{\partial \theta}{\partial r} - I \frac{\partial \xi}{\partial r}, \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + J \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} - I \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta}, \frac{\partial \Phi}{\partial s} + J \frac{\partial \theta}{\partial s} - I \frac{\partial \xi}{\partial s} \right\}. \quad (2.79)$$

Представим скалярный потенциал Φ и функцию магнитных поверхностей Ψ в виде разложений по степеням r с точностью до кубических членов включительно:

$$\Phi = \int_0^s B_0 ds + r^2 F_D + r^3 f_\Phi + \dots; \quad (2.80)$$

$$\Psi = r^2 + r^3 f_\alpha + \dots \quad (2.81)$$

Отсюда видно, что с той же точностью в разложениях функций $J(\psi)$ и $I(\psi)$ можно ограничиться линейными членами $J(\psi) = J_\psi \psi + \dots$, $I(\psi) = I_\psi \psi + \dots$.

Если приравнять ковариантные компоненты \mathbf{B} в выражениях (2.79) и получаемые по формулам $B_i = g_{ik} B^k$, где B^k определены выражениями (2.49), то, сравнивая коэффициенты при r и r^2 , найдем $D_3 = D_4 = 0$:

$$4D_0 = B_0 (\operatorname{ch} \eta / B_0)', \quad 4D_1 = -B_0 (\operatorname{sh} \eta / B_0)', \quad 2D_2 = v' \operatorname{sh} \eta; \quad (2.82)$$

$$B_0 n_0 = k_1 J_\psi - k_2 I_\psi + u' (v' - u' \operatorname{ch} \eta) - \frac{1}{8B_0} [e^{-\eta} (B_0' + B_0 \eta')' + e^\eta (B_0' - B_0 \eta')'] + \frac{k^2}{2} (e^{-\eta} \cos^2 \delta + e^\eta \sin^2 \delta). \quad (2.83)$$

Выразим правые части уравнений (2.73) через известные функции. Согласно (2.79) и (2.80), ковариантные компоненты \mathbf{B} в координатах r, ϑ, s представляются в виде:

$$\begin{aligned} B_1 &= 2rF_D + r^2 (3f_\varphi^* + f_\mu) + \dots; \\ B_2 &= r^2 \left(\frac{\partial F_D}{\partial \vartheta} + \frac{J_\Phi}{2} \right) + r^3 \left(\frac{\partial f_\varphi^*}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f_\mu}{\partial \vartheta} \right) + \dots; \\ B_3 &= B_0 + r^2 \left(\frac{\partial F_D}{\partial \vartheta} + k_1 J_\psi - k_2 I_\psi \right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где для сокращения записи введены две новые функции f_φ^* и f_μ , определяющиеся соотношениями:

$$\frac{\partial f_\varphi^*}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{J_\Phi}{4} f_a; \quad \frac{\partial f_\mu}{\partial \vartheta} = \frac{J_\Phi}{2} f_c - p_\psi V_\psi \frac{\partial f_\gamma}{\partial \vartheta}, \quad (2.85)$$

индексами ψ и Φ обозначены производные по ψ и Φ в окрестности магнитной оси.

В то же время, контравариантные компоненты \mathbf{B} в той же системе координат, согласно (2.49), представляются разложениями:

$$\left. \begin{aligned} B^1 &= r^2 B_0 f_a + \dots; \\ B^2 &= v' B_0 + r B_0 (f_b + v' f_c) + \dots; \\ B^3 &= B_0 + 2r B_0 f_c + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Сравнивая члены порядка r^2 и r^3 в соотношениях $B_i = g_{ik} B^k$, где g_{ik} определены в (1.27), получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B_0^{-1} (3f_\varphi^* + f_\mu) &= (q_0 - q_1 \cos 2\vartheta) f_a + q_1 \sin 2\vartheta (f_b + v' f_c) + \\ &\quad + (q_0' - q_1' \cos 2\vartheta) f_c; \\ B_0^{-1} (\partial f_\varphi^* / \partial \vartheta + \partial f_\mu / \partial \vartheta) &= q_1 \sin 2\vartheta f_a + (q_0 + q_1 \cos 2\vartheta) (f_b + v' f_c) - \\ &\quad - (2u' B_0^{-1} - q_1' \sin 2\vartheta) f_c. \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

В результате сравнения коэффициентов при одинаковых гармониках из (2.87) получается шесть независимых уравнений, связывающих функции $\varphi_1^*(s)$, $\varphi_2^*(s)$, $\varphi_3^*(s)$, $\varphi_4^*(s)$, $a_1(s)$, $a_2(s)$, $a_3(s)$, $a_4(s)$. Две из этих функций можно задать произвольно. Если выбрать в качестве произвольных функций a_3 и a_4 и исключить функции φ_i^* , то a_1 и a_2 можно выразить через a_3 и a_4 :

$$2a_1 = \frac{p_1 - 2q_1 a_3}{2q_0 - q_1}; \quad 2a_2 = \frac{p_2 - 2q_1 a_4}{2q_0 + q_1}, \quad (2.88)$$

где функции p_1 и p_2 определяются выражениями:

$$\begin{aligned} 2p_1 &= (q_0' + q_1') c_1 - (3q_0 - q_1) (c_1' - v' c_2) - \\ &\quad - (6u' + J_\Phi) c_2 / B_0 - 2\rho_\Psi V_\Phi \gamma_1 / B_0; \\ 2p_2 &= (q_0' - q_1') c_2 - (3q_0 + q_1) (c_2' + v' c_1) + (6u' + J_\Phi) c_1 / B_0 - \\ &\quad - 2\rho_\Psi V_\Phi \gamma_2 / B_0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Уравнения для параметров магнитных поверхностей $\alpha_i(s)$ запишутся при этом в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' + v' \alpha_2 &= -\frac{p_1 - 2q_1 a_3}{2q_0 - q_1}, \quad \alpha_3' + 3v' \alpha_4 = -2a_3; \\ \alpha_2' - v' \alpha_1 &= -\frac{p_2 - 2q_1 a_4}{2q_0 + q_1}, \quad \alpha_1' - 3v' \alpha_3 = -2a_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

Параметры β_i определяются через α_i и γ_i с помощью равенства (2.77), а параметры γ_i удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1' + v' \gamma_2 &= -2k_2 c_1; \\ \gamma_2' - v' \gamma_1 &= -2k_2 c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

с известными правыми частями, поскольку

$$\begin{aligned} k_2 &= \Phi_V / B_0; \\ c_1 &= kB_0^{-1/2} e^{-n/2} \cos \delta; \\ c_2 &= kB_0^{-1/2} e^{n/2} \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Произвольные функции a_3 и a_4 , от которых зависят правые части уравнений (2.90), характеризуют магнитное поле третьей гармоники по θ . В случае круглых приосевых сечений магнитных поверхностей, когда $q_1 = 0$, параметры α_1 и α_2 (входящие в выражение для магнитной ямы) оказываются полностью определенными. Амплитуды третьей гармоники магнитного поля a_3 и a_4 могут быть определены по заданному внешнему магнитному полю. Однако более простой задачей является граничная задача нахождения магнитных поверхностей по заданной внешней магнитной поверхности Ψ_Σ .

Решение этой задачи дает возможность, в частности, установить зависимость глубины магнитной ямы, а, следовательно, и устойчи-

ности равновесной конфигурации от геометрических свойств магнитной оси и от формы поперечного сечения плазменного тора.

Функции a_3 и a_4 легко определить по заданному профилю поперечного сечения граничной магнитной поверхности ψ_Σ , если считать малым смещение магнитной оси от центральной линии сечений поверхности ψ_Σ . Пусть смещение магнитной оси описывается в «декартовых» координатах $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ двумя функциями $x_0(s)$ и $y_0(s)$.

В системе координат

$$x_1 = r_1 \cos \vartheta_1 = x_0 + x; \quad y_1 = r_1 \sin \vartheta_1 = y_0 + y, \quad (2.93)$$

связанной с центром сечения поверхности ψ_Σ , функция ψ имеет вид

$$\psi = (1 + r_1 f_\Delta) (r_1^2 + r_1^3 f_\sigma - r_0^3) + r_0^2, \quad (2.94)$$

где коэффициенты $\sigma_i(s)$ можно считать заданными функциями, поскольку считается заданным профиль нормального поперечного сечения поверхности ψ_Σ :

$$r_1^2 + r_1^3 f_\sigma = r_0^2. \quad (2.95)$$

Выражая $\psi = r^2 + r^3 f_\alpha$ в новых координатах x_1, y_1 и сравнивая выражение (2.95) с (2.94), получаем при малых Δ_1 и Δ_2 :

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 2x_0/r_0^2, \quad \Delta_2 = 2y_0/r_0^2, \quad \Delta_3 = 0, \quad \Delta_4 = 0; \\ \alpha_1 = \sigma_1 + \Delta_1, \quad \alpha_2 = \sigma_2 + \Delta_2, \quad \alpha_3 = \sigma_3, \quad \alpha_4 = \sigma_4. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Таким образом, в рассматриваемой постановке задача определения функций $\alpha_1(s)$ и $\alpha_2(s)$ сводится к решению стандартной системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' + v' \alpha_2 &= - \frac{q_1 (\sigma_3' + 3v' \sigma_4) + p_1}{2q_0 - q_1}; \\ \alpha_2' - v' \alpha_1 &= - \frac{q_1 (\sigma_4' - 3v' \sigma_3) + p_2}{2q_0 + q_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

с известными правыми частями. Метод решения таких уравнений приведен в конце предыдущего раздела.

В общем случае несимметричность профиля поперечного сечения граничной поверхности ψ_Σ определяется четырьмя функциями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Если ограничиться случаем симметрии относительно оси x , то $\Delta_2 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_4 = 0$, и остаются две произвольные функции σ_1 и σ_3 . Можно положить $\sigma_3 = 0$ или же $\sigma_1 = 0$, выбирая, тем самым, поверхность ψ_Σ из семейства поверхностей, которые имеют соответственно одно или три ребра сепаратрисы. При этом следует иметь в виду, что поперечные размеры семейства вложенных несимметричных сечений магнитных поверхностей (2.95) ограничены сепаратрисой, так что величина r_0 , вообще говоря, не произвольна.

§ 2.3. Интегральные характеристики равновесных тороидальных конфигураций

Основные интегральные характеристики замкнутой магнитной конфигурации, представляющей собой систему вложенных магнитных поверхностей, окружающих некоторую пространственную магнитную ось, следующие: текущий объем V , продольный магнитный поток Φ и поперечный магнитный поток χ . Дифференциалы этих функций, т. е. объем и потоки, заключенные между двумя соседними бесконечно близкими магнитными поверхностями, можно получить из выражений [19]:

$$\left. \begin{aligned} dV &= \int \sqrt{g} \, dr \, d\vartheta \, ds; \\ d\Phi &= \frac{1}{L} \int \sqrt{g} B^3 \, dr \, d\vartheta \, ds; \\ d\chi &= \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{g} B^2 \, dr \, d\vartheta \, ds, \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

записанных в скругляющих координатах r, ϑ, s , где L — длина магнитной оси конфигурации. Для незамкнутых периодических конфигураций L — длина магнитной оси между отождествленными концами. В справедливости выражений (2.98) легко убедиться, если учесть, что элемент объема и контравариантные компоненты представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= \sqrt{g} \, dr \, d\vartheta \, ds, \\ B^2 &= \mathbf{B} \nabla \vartheta = \operatorname{div} \vartheta \mathbf{B}, \\ B^3 &= \mathbf{B} \nabla s = \operatorname{div} s \mathbf{B}, \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

и перейти по теореме Гаусса к интегрированию по поверхности слоя с разрезом $s = 0$, L во втором интеграле и $\vartheta = 0, 2\pi$ в третьем интеграле (2.98). При учете соотношений (2.99) можно получить также следующие выражения для элементов $d\Phi$ и $d\chi$:

$$d\Phi = \int \sqrt{g} B^3 \, dr \, d\vartheta; \quad d\chi = \int \sqrt{g} B^2 \, dr \, ds. \quad (2.100)$$

При вычислении удельного объема $V'(\Phi)$ и удельного потока $\chi'(\Phi)$, от которых зависит устойчивость равновесной конфигурации, удобно ввести продольный поток $d\Phi$ под знак интеграла по s . Таким образом, согласно (2.98) и (2.100), находим:

$$\frac{dV}{d\Phi} = \oint ds \frac{\int \sqrt{g} \, dr \, d\vartheta}{\int \sqrt{g} B^3 \, dr \, d\vartheta}; \quad \frac{d\chi}{d\Phi} = \frac{1}{2\pi} \oint ds \frac{\int \sqrt{g} B^2 \, dr \, d\vartheta}{\int \sqrt{g} B^3 \, dr \, d\vartheta}. \quad (2.101)$$

Для вычисления этих величин в окрестности магнитной оси, или для квазиоднородных конфигураций, запишем выражения (2.49) и (2.52) сокращенно в виде:

$$\sqrt{g} = \frac{r}{B_0} (1 - rf_c); \quad \sqrt{g} B^2 = rv' (1 + rb^2); \quad \sqrt{g} B^3 = r(1 + rb^3), \quad (2.102)$$

где в функциях b^2 и b^3 учтены также и кубические по r члены разложений (2.49). С точностью до величин порядка r^3 включительно, согласно (2.58), имеем

$$r^2 = \psi (1 - \sqrt{\bar{\psi}} f_a);$$

$$\frac{r^2}{\partial\psi/\partial r} = \frac{\sqrt{\bar{\psi}}}{2} (1 - 2\sqrt{\bar{\psi}} f_a). \quad (2.103)$$

Если заменить теперь в интегралах (2.101) переменную интегрирования dr на $d\psi$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} dr \quad (2.104)$$

и учесть, что $d\psi$ можно вынести за знак интеграла, то

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\bar{\psi}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2\sqrt{\bar{\psi}} f_a) (f_c + b^3) d\vartheta \right\}; \quad (2.105)$$

$$\chi'(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \oint v' ds \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\bar{\psi}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2\sqrt{\bar{\psi}} f_a) (b^2 - b^3) d\vartheta \right\}. \quad (2.106)$$

Заметим, что в первом приближении, согласно (2.100) и (2.103), $d\Phi = \int r dr d\vartheta = \pi d\psi$, так что в окрестности магнитной оси имеет место приближенное равенство $\Phi = \pi\psi$.

Интегрируя (2.105) и (2.106), получаем следующие выражения:

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} \left\{ 1 - \frac{\Phi}{\pi} (n_0 - 2\alpha_i c_i) \right\}; \quad (2.107)$$

$$\chi'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} \left\{ v' - \frac{\Phi}{\pi} [(n_0 - \alpha_i c_i) v' - m_0 + \alpha_i b_i] \right\}, \quad (2.108)$$

где подразумевается суммирование по индексу « i ». Эти выражения для $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$, записанные в виде контурных интегралов по магнитной оси, представляют собой, по существу, первые члены разложений $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$ по степеням продольного магнитного потока Φ . Значения V' и χ' на магнитной оси соответственно равны

$$V' = \oint \frac{ds}{B_0}; \quad \chi' = \frac{1}{2\pi} \oint v' ds = \frac{v(L)}{2\pi}. \quad (2.109)$$

В то же время вторые производные V'' и χ'' определяются выражениями:

$$V'' = -\frac{1}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0} (n_0 - 2\alpha_i c_i) = -\frac{1}{\pi} \oint ds \left(\frac{n_0}{B_0} + 2V' \gamma_i a_i \right); \quad (2.110)$$

$$\chi'' = -\frac{1}{2\pi^2} \oint \frac{ds}{B_0} [(n_0 - \alpha_i c_i) v' - m_0 + \alpha_i b_i]. \quad (2.111)$$

Отсюда видно, что величины V'' и χ'' — характеристики магнитной ямы и перекрещенности магнитных силовых линий соответственно определяются в окрестности магнитной оси компонентами магнитного поля (2.49) и параметрами α_i магнитных поверхностей (2.58) третьего приближения в разложении по степеням r .

Кроме основных «поверхностных» величин V , Φ , χ и их производных в теории равновесия и устойчивости фигурируют еще средние значения по объему слоя, заключенного между соседними магнитными поверхностями. Соответствующие средние значения, обозначенные угловыми скобками, в скругляющих координатах r , ϑ , s определяются формулами

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \frac{d}{dV} \int f d\tau = \frac{\int f V \bar{g} dr d\vartheta ds}{\int V \bar{g} dr d\vartheta ds} = \frac{\oint ds B_0^{-1} \int f h_s r dr d\vartheta}{\oint ds B_0^{-1} \int h_s r dr d\vartheta} = \\ &= \oint \frac{ds}{B_0} \int_0^{2\pi} f \frac{h_s r d\vartheta}{\partial \Psi / \partial r} / \oint \frac{ds}{B_0} \int_0^{2\pi} \frac{h_s r d\vartheta}{\partial \Psi / \partial r}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

В нулевом приближении в окрестности магнитной оси выражение для среднего значения произвольной функции f принимает вид

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi V'} \oint \frac{ds}{B_0} \int_0^{2\pi} f d\vartheta. \quad (2.113)$$

Подставив в выражение (2.110) величину n_0 из формулы (2.83) и функции c_1 и c_2 из формул (2.92), получим выражение для характеристики магнитной ямы V'' в виде контурного интеграла по магнитной оси

$$\begin{aligned} V'' &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2} \left\{ \frac{1}{B_0} (2p_\Psi + v' j_0) - 2u' (v' - u' \operatorname{ch} \eta) + \right. \\ &+ \frac{1}{4B_0} [e^{-\eta} (B_0' + B_0 \eta')' + e^\eta (B_0' - B_0 \eta')'] - \\ &- k^2 (e^{-\eta} \cos^2 \delta + e^\eta \sin^2 \delta) + \\ &\left. + 4kB_0^{1/2} (\alpha_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \alpha_2 e^{\eta/2} \sin \delta) \right\}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Члены подынтегрального выражения (2.114) целесообразно проинтегрировать по частям, используя при этом соотношение (2.54) [14, 25]:

$$\begin{aligned} V'' &= \frac{1}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2} \left\{ \left[\varepsilon^2 u'^2 + \frac{\eta'^2}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{B_0'^2}{B_0^2} - \frac{\varepsilon \eta' B_0'}{B_0} - \right. \right. \\ &- \frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon \cos 2\delta) \left. \right] \operatorname{ch} \eta + \frac{j_0^2}{4B_0^2 \operatorname{ch} \eta} + \frac{p_\Psi}{B_0} + \\ &\left. + 2kB_0^{1/2} (\alpha_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \alpha_2 e^{\eta/2} \sin \delta) \right\}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Здесь $\varepsilon = \text{th } \eta$ — параметр эллиптичности приосевых нормальных сечений магнитных поверхностей.

Параметры магнитных поверхностей α_1 и α_2 , входящие в выражение для V'' , определяются стандартной системой уравнений (2.90), причем в правые части этих уравнений входят члены, содержащие функции γ_1 и γ_2 , которые определяются также из стандартной системы уравнений (2.91). От этих членов в правых частях уравнений для α_1 и α_2 можно избавиться, если представить α_1 и α_2 в виде двух слагаемых

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_1; \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_2. \quad (2.116)$$

При этом в выражение для V'' будут входить только $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$, которые удовлетворяют стандартной системе уравнений с известными правыми частями. Действительно, определим $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнениям:

$$\tilde{\alpha}_1' + v' \tilde{\alpha}_2 = \frac{2\rho_\psi V' \gamma_1}{e^\eta + 3e^{-\eta}}; \quad \tilde{\alpha}_2' - v' \tilde{\alpha}_1 = \frac{2\rho_\psi V' \gamma_2}{e^{-\eta} + 3e^\eta}. \quad (2.117)$$

С учетом этих уравнений, а также уравнений (2.91) для функций γ_1 и γ_2 получим с помощью интегрирования по частям

$$\oint kB_0^{-3/2} (\tilde{\alpha}_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \tilde{\alpha}_2 e^{\eta/2} \sin \delta) ds = \\ = \rho_\psi V'^2 \oint \left(\frac{\gamma_1^2}{e^\eta + 3e^{-\eta}} + \frac{\gamma_2^2}{e^{-\eta} + 3e^\eta} \right) ds. \quad (2.118)$$

Отсюда выражение (2.115) для V'' можно представить в виде

$$V'' = \frac{1}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2} \left\{ \left[\varepsilon^2 u'^2 + \frac{\eta'^2}{4} + \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} - \frac{\varepsilon \eta' B_0'}{B_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon \cos 2\delta) \right] \text{ch } \eta + \frac{j_0^2}{4B_0^2 \text{ch } \eta} + \right. \\ \left. + \frac{\rho_\psi}{B_0} \left[1 + \frac{V'^2 B_0^3}{\text{ch } \eta} \left(\frac{\gamma_1^2}{2 - \varepsilon} + \frac{\gamma_2^2}{2 + \varepsilon} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2kB_0^{1/2} (\bar{\alpha}_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \bar{\alpha}_2 e^{\eta/2} \sin \delta) \right\}, \quad (2.119)$$

где $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ — решения уравнений (2.90) или (2.97), в правых частях которых отброшены члены с γ_1 и γ_2 , входящие в выражения (2.89) для функций p_1 и p_2 .

В заключение приведем приближенные выражения для координатных векторов натуральной поверхностной системы координат θ , ξ , V в окрестности магнитной оси, которые следуют из соотношений (2.68).

Для $e^i = \nabla x^i$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} e^1 &= \frac{B_0}{2\pi r} (\lambda_1 \cos \vartheta e_y - \lambda_2 \sin \vartheta e_x); \\ e^2 &= \frac{\tau}{B_0 V'} + B_0 (\gamma_1 \lambda_2 e_x + \gamma_2 \lambda_1 e_y); \\ e^3 &= 2\pi r B_0 V' (\lambda_2 \cos \vartheta e_x + \lambda_1 \sin \vartheta e_y). \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

Соответственно координатные векторы e_1 , e_2 и $e_3 = e$ равны:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= 2\pi r \left(\lambda_2 \cos \vartheta e_y - \lambda_1 \sin \vartheta e_x - B_0 V' \frac{\partial f_\gamma}{\partial \vartheta} \tau \right); \\ e_2 &= B_0 V' \tau; \\ e_3 &= \frac{1}{2\pi r V'} (\lambda_1 \cos \vartheta e_x + \lambda_2 \sin \vartheta e_y - B_0 V' f_\gamma \tau). \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

Глава 3. УСЛОВИЯ ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

§ 3.1. Энергетический принцип

Методы, основанные на использовании энергетического принципа [26], являются наиболее эффективными методами исследования гидромагнитной устойчивости плазмы. Однако устойчивость простейших конфигураций типа плазменного цилиндра может быть с одинаковым успехом рассмотрена и непосредственно методом малых колебаний.

Для устойчивости плазменной конфигурации, удерживаемой в равновесии магнитным полем \mathbf{B}

$$\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}]; \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3.1)$$

необходимо и достаточно положительности потенциальной энергии [26] $\delta W = \delta W_i + \delta W_\Sigma + \delta W_e$ при произвольных смещениях плазмы ξ :

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \{ (\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\xi]) \mathbf{Q} + (\gamma p \text{ div } \xi + \xi \nabla p) \text{ div } \xi \} dt; \quad (3.2)$$

$$\delta W_\Sigma = -\frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{2} - \frac{B_e^2}{2} \right) \xi_n^2 d\sigma; \quad (3.3)$$

$$\delta W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\text{rot } \delta \mathbf{A}_e)^2 d\tau, \quad \mathbf{Q} = \delta \mathbf{B} = \text{rot } [\xi \mathbf{B}]. \quad (3.4)$$

Здесь p — давление плазмы; \mathbf{B} и \mathbf{B}_e — невозмущенные магнитные поля; $\delta \mathbf{B}$ и $\delta \mathbf{B}_e = \text{rot } \delta \mathbf{A}_e$ — возмущающие магнитные поля соот-

ответственно внутри и вне плазмы; Σ — граница плазмы с внешним магнитным полем; \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности Σ . Квадрат частоты выражается через δW соотношением $\omega^2 = 2\delta W / \int \rho |\xi|^2 d\tau$, где ρ — плотность.

При использовании уравнения равновесия в форме

$$\nabla(p + B^2/2) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \quad (3.5)$$

и аналогичного уравнения $\nabla B_e^2/2 = (\mathbf{B}_e \nabla) \mathbf{B}_e$ для внешнего магнитного поля, а также граничных условий $\mathbf{nB} = 0$ и $\mathbf{nB}_e = 0$ на границе плазма — вакуум, выражение для поверхностного интеграла приводится к виду

$$\delta W_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \{ \mathbf{B} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{n} - \mathbf{B}_e (\mathbf{B}_e \nabla) \mathbf{n} \} \xi_n^2 d\sigma. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что в отсутствие поверхностных токов, когда магнитное поле непрерывно на границе плазмы, $\delta W_\Sigma = 0$. Поскольку $\delta W_e \geq 0$, то достаточным для устойчивости будет при этом условие $\delta W_i > 0$.

Как показано в работе [26], выражение для δW_i можно представить в виде

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\mathbf{Q} + \frac{[\mathbf{j} \Delta V]}{|\nabla V|^2} \xi \right)^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 - \frac{2\xi^2}{|\nabla V|^4} [\mathbf{j} \nabla V] (\mathbf{B} \nabla) \nabla V \right\} d\tau, \quad (3.7)$$

где $\xi = \xi^3 = \xi \nabla V$ — контравариантная компонента ξ в натуральной поверхностной системе координат.

В произвольной поверхностной системе координат выражение для δW_i можно представить в форме [10]

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \{ (\mathbf{Q} + [\mathbf{j} \mathbf{e}_3] \xi^3)^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 + [\mathbf{j} \mathbf{e}_3] (\mathbf{B}' - [\mathbf{j} \mathbf{e}_3]) (\xi^3)^2 \} d\tau, \quad (3.8)$$

где \mathbf{e}_3 — координатный вектор рассматриваемой поверхностной системы координат; $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_2 dx^2 + \mathbf{e}_3 dx^3$, в которой координатные поверхности $x^3 = \text{const}$ совпадают с магнитными поверхностями; $\mathbf{B}' = \mathbf{e}_1 \partial B^1 / \partial x^3 + \mathbf{e}_2 \partial B^2 / \partial x^3$. В натуральной поверхностной системе координат θ, ζ, V выражение (3.8) для δW_i запишется в виде [10]

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \{ (\mathbf{Q} + [\mathbf{j} \mathbf{e}] \xi)^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 - (\Omega + [\mathbf{j} \mathbf{e}]^2) \xi^2 \} d\tau, \quad (3.9)$$

где $\xi = \xi^3$; $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$; Ω — поверхностная величина, определенная в (1.35).

Отметим, что выражения (3.7) и (3.8) не являются эквивалентными (как это имеет место для случая цилиндрической геометрии равновесной плазмы) и отличаются друг от друга некоторой пере-

группировкой членов. Формально выражение (3.8) переходит в (3.7), если заменить в нем вектор $\mathbf{e}_3 = \sqrt{g} [\nabla x^1 \nabla x^2]$ на вектор $\nabla V / |\nabla V|^2$.

§ 3.2. Устойчивость плазменного цилиндра

3.2.1. Малые колебания плазменного цилиндра

При условии цилиндрической симметрии равновесной плазменной конфигурации задача об устойчивости может быть решена методом малых колебаний. Линейные волны, распространяющиеся в такой конфигурации, представляют собой винтовые волны, и для исследования устойчивости достаточно рассмотреть устойчивость по отношению к каждой отдельной винтовой гармонике смещения

$$\xi = \xi(\mathbf{r}) e^{im\varphi - ikz + i\omega t} \quad (3.10)$$

в цилиндрических координатах r, φ, z , характеризуемой волновыми числами m и k . В случае, когда в качестве модели тора используется цилиндр с отождествленными торцами, расположенными при $z = 0$ и $z = L$, волновое число k , так же как и m , принимает дискретные значения $k = 2\pi n/L$.

Уравнение равновесия при цилиндрической геометрии плазмы имеет вид

$$(p + B^2/2)' + r b_\varphi^2 = 0, \quad (3.11)$$

где $b_\varphi = B_\varphi/r$, а штрихом обозначена производная по r .

Уравнение малых колебаний приводится к одному уравнению [17] для функции $F = r\xi_r$:

$$\left(\frac{rs}{1-\kappa} \cdot \frac{F'}{\beta} \right)' - \left\{ \frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 r y^2 b_\varphi^2}{\beta s} + \left(\frac{q + \kappa b_\varphi^2}{1-\kappa} \right)' + \frac{\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{\beta}{rs} (q + b_\varphi^2)^2 \right\} F = 0, \quad (3.12)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= k/m; \quad s = \frac{\rho\omega^2}{m^2} - y^2; \quad y = \alpha B_z - b_\varphi; \\ q &= \frac{2y b_\varphi}{\beta} + b_\varphi^2; \quad \beta = 1 + \alpha^2 r^2; \\ \kappa &= \frac{\rho r^2 \omega^2}{\beta m^2} \left(B^2 + \frac{m s c_T^2}{\omega^2} \right)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$c_T = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ — скорость звука; ρ — плотность.

Величина y , связанная с $\mathbf{B}\nabla\xi_r$ соотношением $my\xi_r = i\mathbf{B}\nabla\xi_r$, характеризует степень постоянства смещений вдоль силовых линий

магнитного поля. При $y = 0$ гребни волн направлены точно вдоль магнитных силовых линий на текущей магнитной поверхности $r = \text{const}$.

Вблизи границы области устойчивости плазменного цилиндра $\omega = 0$, величина $\kappa \rightarrow 0$, и, за исключением случая $y = 0$, в уравнении (3.12) можно пренебречь всеми членами $\sim \kappa$. Кроме того, $\kappa \rightarrow 0$ в случае, когда рассматриваются несжимаемые колебания $c_T \rightarrow \infty$. Устремив κ к нулю, получим уравнение малых колебаний для несжимаемой жидкости

$$\left(\frac{rs}{\beta} F'\right)' - \left(\frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 ry^2 b_\Phi^2}{\beta s} + q'\right) F = 0. \quad (3.14)$$

Если положить в нем $\omega = 0$, то полученное таким образом уравнение совпадает с уравнением Эйлера для функции $r\xi_r$, минимизирующей функционал δW_i .

При $y = 0$ уравнение (3.12) запишется в виде

$$\left(\frac{\rho r c_s^2 F'}{\beta m^2 c_s^2 - \omega^2 r^2}\right)' - \left\{ \frac{\rho}{r} + \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{4}{\rho} \cdot \frac{\beta m^2 r b_\Phi^4}{\beta m^2 c_s^2 - \omega^2 r^2} + \left(\frac{\beta m^2 c_s^2 + \omega^2 r^2}{\beta m^2 c_s^2 - \omega^2 r^2} b_\Phi^2\right)' \right] \right\} F = 0, \quad (3.15)$$

где

$$c_s^2 = c_T^2 + B^2/\rho = (\gamma p + B^2)/\rho. \quad (3.16)$$

3.2.2. Условия конвективной и локальной устойчивости

В пределе $\omega \rightarrow 0$, согласно (3.15), получаем уравнение

$$\left(\frac{\rho r}{\beta} F'\right)' - \left\{ \frac{m^2 \rho}{r} + \frac{2m^2}{\omega^2} \left(b_\Phi b_\Phi' + \frac{2r b_\Phi^4}{\rho c_s^2} \right) \right\} F = 0. \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует [27], что необходимым и достаточным условием отсутствия собственных функций с $\omega^2 < 0$ является отрицательность выражения в круглых скобках. Таким образом, получаем условие устойчивости относительно «конвективных» возмущений, направленных вдоль силовых линий равновесной конфигурации [17]:

$$-b_\Phi b_\Phi' - \frac{2r b_\Phi^4}{B^2 + \gamma p} > 0. \quad (3.18)$$

Условие (3.18) будет необходимым, если $y = 0$ в некотором конечном интервале Δr , т. е. в случаях, когда существует такой интервал Δr , в котором отсутствует перекрещенность силовых линий $\mu' = (b_\Phi/B_z)' = 0$. С учетом уравнения равновесия (3.11) условие конвективной устойчивости (3.18) можно представить в виде

$$-\gamma p B_z'/B_z + p' > 0, \quad (3.19)$$

откуда следует, что при $p' < 0$ для устойчивости необходимо $B_z'/B_z < 0$.

Если предположить, что возмущения локализованы в достаточно узком интервале Δr , то, как это следует из уравнения (3.14), необходимым и достаточным условием устойчивости относительно таких «локальных» возмущений является условие Сайдема [12]:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{2p'}{rB_z^2} > 0; \quad \mu = \frac{b_\Phi}{B_z}. \quad (3.20)$$

Здесь первый член описывает стабилизирующее действие перекрещенности силовых линий на локальные возмущения. Если учесть, что $\mu(r)$ и $p(r)$ разлагаются по четным степеням r , то легко видеть, что для параболического распределения давления критерий (3.20) не выполняется в окрестности оси z . Однако если давление спадает более медленно, то критерий (3.20) может быть выполнен. Действительно, используя уравнение равновесия (3.11), представим (3.20) в виде

$$r(B^2 b_\Phi'/b_\Phi + 2rb^2_\Phi + p')^2 + 8B_z^2 p' > 0. \quad (3.21)$$

Полагая $p = p_0(1 - r^2/a^4)$, $j_z = j_0(1 - \epsilon r^2/a^2)$, получаем следующие ограничения, вытекающие из критерия (3.20) для двух частных случаев.

1. В случае квазигодородного продольного тока $\epsilon \rightarrow 0$ для устойчивости необходимо

$$\beta_J = \frac{8p_0}{a^2 j_z^2} < \left(\frac{j_z a}{4B_z} \right)^2. \quad (3.22)$$

2. В случае параболического распределения продольного тока $\epsilon = 1$ область неустойчивости относительно рассматриваемых локальных возмущений ограничена неравенствами

$$1 - 4\sqrt{\beta_B} < j_0^2 a^2 / 2B^2 < 1 + 4\sqrt{\beta_B}; \quad \beta_B = 2p_0/B^2 \quad (3.23)$$

и при достаточно малом давлении плазмы локализована в узкой области изменения j_0 в окрестности $j_0 a / B = \sqrt{2}$.

Отметим, что критерий конвективной устойчивости (3.19) и критерий локальной устойчивости (3.20) являются лишь необходимыми условиями устойчивости плазменного цилиндра, поскольку при их выводе накладывались некоторые ограничения на рассматриваемые возмущения.

3.2.3. Неустойчивость тангенциальных разрывов

Если какой-либо из физических параметров изменяется достаточно быстро на малом интервале Δr , то для исследования устойчивости такой конфигурации можно аппроксимировать соответствующее резкое изменение разрывом.

Ограничимся случаем несжимаемых колебаний и предположим, что в окрестности $r = r_0$ какие-либо из коэффициентов уравнения (3.14) теряют разрыв. Проинтегрировав (3.14) от $r_0 - 0$ до $r_0 + 0$, получим

$$\frac{r}{\beta} \left(\frac{s_i F_i'}{F_i} - \frac{s_e F_e'}{F_e} \right) - q_i + q_e = 0. \quad (3.24)$$

Здесь индексами « i » и « e » отмечены предельные значения соответствующих величин при $r_0 - 0$ и $r_0 + 0$. При известных отношениях F_i'/F_i и F_e'/F_e уравнение (3.24) представляет собой дисперсионное уравнение для определения частот колебаний различных винтовых гармоник.

Уравнение для функции F_e в области вакуума можно формально получить из уравнения (3.14), положив в нем $\rho = 0$. Введя новую функцию $f = yF = ry\xi$, получаем для вакуумной области уравнение

$$\left(\frac{r}{\beta} f_e' \right)' - \frac{m^2}{r} f_e = 0. \quad (3.25)$$

Соответственно дисперсионное уравнение (3.24) для границы плазма — вакуум запишется в виде

$$\frac{r}{\beta} \left(s_i \frac{F_i'}{F_i} + y_e^2 \frac{f_e'}{f_e} \right) - \frac{2y_i b_{\varphi i}}{\beta} - b_{\varphi i}^2 + b_{\varphi e}^2 = 0, \quad (3.26)$$

где учтено, что в вакууме отсутствуют токи и, следовательно, $B_{ze} = \text{const}$, $B_{\varphi e} \sim 1/r$. Полученное уравнение (3.26) можно вывести и другим способом, исходя из баланса давлений на возмущенной границе плазмы [17].

В общем случае, произведя замену переменных $f = \sqrt{s}F$ в уравнении (3.14), получим

$$\left(\frac{r}{\beta} f' \right)' - \left\{ \frac{m^2}{r} - \frac{\dot{r}}{\beta s^2} \left(4\alpha^2 y^2 b_{\varphi}^2 + \frac{s'^2}{4} \right) + \frac{1}{s} \left(q + \frac{rs'}{2\beta} \right) \right\} f = 0.$$

При $\rho = \text{const}$ это уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{\beta} f' \right)' - \left\{ \frac{m^2}{r} - \frac{\rho\omega^2 r}{\beta m^2 s^2} (4\alpha^2 b_{\varphi}^2 + y'^2) + \right. \\ \left. + \frac{y}{\beta_s} \left(\frac{2\alpha}{\beta} j_{\perp} + j'_{\parallel} \right) - \frac{2\alpha^2 p'}{\beta_s} \right\} f = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где j_{\parallel} и j_{\perp} — следующие комбинации компонент плотности тока:

$$j_{\parallel} = j_z + \alpha r j_{\varphi}; \quad j_{\perp} = j_{\varphi} - \alpha r j_z.$$

Соответственно дисперсионное уравнение (3.24), выраженное через f_i и f_e , будет

$$\frac{s_i f_i'}{f_i} - \frac{s_e f_e'}{f_e} - \frac{1}{r} (y_i j_{\parallel}^i - y_e j_{\parallel}^e) - \frac{\beta}{r} (b_{\varphi i}^2 - b_{\varphi e}^2) = 0. \quad (3.28)$$

В случае $i_z = \text{const}$, $B_z = \text{const}$ уравнения (3.14) и (3.27) принимают вид

$$\frac{1}{r} \left(\frac{r}{\beta} f' \right)' - \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{2\alpha\varepsilon}{\beta^2} - \frac{\varepsilon^2}{\beta} \right) f = 0, \quad (3.29)$$

где $\varepsilon = 2ayb_\Phi/s = \text{const}$. Это уравнение, как и уравнение для вакуумной области (3.25), имеет точные решения, выражающиеся через бесселевы функции:

$$f = \varepsilon J_m(\kappa r) - \alpha \kappa r J_m'(\kappa r), \quad \kappa^2 = \varepsilon^2 - k^2; \quad (3.30)$$

$$f_e = c_1 r I_m'(kr) + c_2 r K_m'(kr). \quad (3.31)$$

В общем случае в связи с трудностями решения уравнения (3.27) для внешней области при $\rho\omega^2 \neq 0$ исследование внутренних разрывов в плазме удобнее производить на основании энергетического принципа. Здесь мы ограничимся лишь разрывом на границе плазма — магнитное поле.

Рассмотрим сначала случай, когда внутри плазмы нет токов $p = \text{const}$, а имеются только поверхностные токи при $r = a$. При этом, согласно уравнению (3.26) или (3.28), имеем

$$\omega^2 = \frac{m^2}{\rho} \cdot \frac{f_i}{f_i'} \left\{ \alpha^2 B_{zi}^2 \frac{f_i'}{f_i} - (\alpha B_{ze} - b_\Phi)^2 \frac{f_e'}{f_e} - \frac{\beta b_\Phi^2}{r} \right\}. \quad (3.32)$$

Здесь f_i и f_e выражаются через бесселевы функции формулой (3.31). Для наиболее опасных длинноволновых колебаний $ar \ll 1$ из (3.32) вытекает, что в случае $B_{ze} = 0$ для устойчивости достаточно $B_{\Phi e}^2 < B_{zi}^2$, а в случае $B_{ze} = B_{zi}$ должно выполняться условие [28]

$$B_\Phi / \kappa r B_z < 1. \quad (3.33)$$

Отсутствие поверхностных токов из (3.26) вытекает следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \frac{m^2 F_i}{\rho r F_i'} \left\{ 2yb_\Phi + ry^2 \left(\frac{F_i'}{F_i} - \frac{f_e'}{f_e} \right) \right\}. \quad (3.34)$$

Отсюда видно, что в окрестности $y = 0$, когда возмущения почти параллельны магнитным силовым линиям на границе плазмы $r = a$, возможна неустойчивость $\omega^2 < 0$. Максимальное значение квадрата инкремента $-\omega^2$ по переменной y равно

$$-\omega_{\text{макс}}^2 = \frac{m^2 b_\Phi^2}{\rho r^2 (F_i'/F_i) (F_i'/F_i - f_e'/f_e)}. \quad (3.35)$$

Входящая сюда функция f_e определяется выражением (3.31), а функция F_i является решением уравнения (3.14). Для случая однородного тока $j_z = \text{const}$, $B_z = \text{const}$, функция $f_i = \sqrt{s} F_i$ выражается формулой (3.30). Полагая для длинноволновых колебаний $f_e'/f_e = -m/r$, $F_i'/F_i = m/r$, получим, согласно (3.35),

$$\omega_{\text{макс}}^2 = -\frac{B_\Phi^2}{2\rho a^2}$$

независимо от номера гармоники m . Таким образом, граница плазмы — вакуум в отсутствие поверхностных токов оказывается неустойчивой относительно винтовых возмущений, причем инкремент развития этой неустойчивости порядка альфвеновской скорости, рассчитанной по азимутальному полю на границе плазмы $r = a$, деленной на a . Заметим, что условие устойчивости для каждой отдельной гармоники m , как это следует из (3.34), можно записать в виде [29]

$$\frac{B_\varphi}{kaB_z} < \frac{1}{m},$$

однако, в отличие от условия (3.33), это условие не может быть выполнено для всех гармоник m . Оно свидетельствует лишь о неустойчивости плазменного цилиндра со свободной границей в случае однородного продольного тока.

3.2.4. Применение энергетического принципа

Как уже отмечалось выше, для исследования устойчивости плазменного цилиндра достаточно рассмотреть устойчивость каждой отдельной винтовой гармоники $\xi = \xi(r) e^{im(\varphi - \alpha z)}$, $\alpha = k/m$. Условия минимизации δW_i можно записать в виде [16]

$$\xi_\varphi - \alpha r \xi_z = -\frac{i}{m} (r\xi)'; \quad \xi_z + \alpha r \xi_\varphi = \frac{2i\alpha r b_\varphi}{my} \xi, \quad (3.36)$$

где $\xi = \xi_r$; $b_\varphi = B_\varphi/r$; $y = \alpha B_z - b_\varphi$. Из (3.36) вытекает, что $\text{div} \xi = 0$, т. е. наиболее опасными для устойчивости являются несжимаемые колебания. Кроме того, как показывают выражения (3.36), смещения ξ_z и ξ_φ сдвинуты по фазе относительно смещения ξ_r на $\pi/2$, и при $B_\varphi \neq 0$ радиальное смещение ξ_r приводит к значительному смещению вдоль винтовых линий $\varphi - \alpha z = \text{const}$, когда эти линии направлены почти вдоль магнитных силовых линий $y \simeq 0$.

Используя вместо радиальной компоненты смещения ξ переменную $f = ry\xi$, можно представить сумму $\delta W_i + \delta W_e = \delta W_0$ в виде единого интеграла, распространенного как на область, занятую плазмой $0 < r < a$, так и по внешнему магнитному полю $a < r < b$:

$$\delta W_0 = \pi L \int_0^b \left\{ \frac{r}{\beta} \left(f' + \frac{j_{\parallel}}{ry} f \right)^2 + \left(\frac{m^2}{r} - \frac{2b_\varphi j_z}{ry^2} \right) f^2 \right\} dr. \quad (3.37)$$

При этом величина

$$\delta W_\Sigma = \pi L a^2 \xi^2(a) [b_\varphi^2(a) - b_{\varphi e}^2(a)]. \quad (3.38)$$

Функция f , минимизирующая (3.37), удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\left(\frac{r}{\beta} f' \right)' - \left\{ \frac{m^2}{r} - \frac{2b_\varphi j_z}{ry} + \frac{j_{\parallel}^2}{r\beta y^2} - \left(\frac{j_{\parallel}}{\beta y} \right)' \right\} f = 0.$$

С учетом уравнения равновесия (3.11) это уравнение преобразуется к виду

$$\left(\frac{r}{\beta} f'\right)' - \left\{m^2 - \frac{1}{\beta y} \left(\frac{2\alpha}{\beta} j_{\perp} + j'_{\parallel}\right) + \frac{2\alpha^2 p'}{\beta y^2}\right\} f = 0. \quad (3.39)$$

Таким образом, уравнение Эйлера для функционала (3.37) совпадает с уравнением колебаний несжимаемой жидкости (3.27), если положить в нем $\omega = 0$. Для переменной $\xi = \xi_r$ уравнение (3.39) можно преобразовать к виду [16]

$$\frac{1}{r y^2} \left(\frac{r^3 y^2}{\beta} \xi'\right)' - \left\{m^2 - \frac{1}{\beta} + \frac{2\alpha^2 r^2}{\beta^2 y^2} (\alpha^2 B_z^2 - b_{\varphi}^2) + \frac{2\alpha^2 r p'}{\beta y^2}\right\} \xi = 0. \quad (3.40)$$

Условием устойчивости плазмы с «закрепленной» границей является отсутствие нулей $\xi(r)$ в интервале $0 < r < a$ [16]. Согласно (3.39), достаточным условием устойчивости будет

$$k^2 p' - \frac{r}{8\beta} \left(\frac{2\alpha}{\beta} j_{\perp} + j'_{\parallel}\right)^2 > 0, \quad (3.41)$$

и неустойчивость возможна лишь в узком интервале изменения y в окрестности $y = 0$, т. е. для возмущений, которые почти постоянны вдоль магнитных силовых линий $\mathbf{BV}\xi \approx 0$. В случае, когда продольный ток почти постоянен $j'_z \simeq 0$, условие (3.41) принимает вид

$$r p' - \frac{2B_{\varphi}^2 B_z^2}{m^2 B_z^2} > 0. \quad (3.42)$$

Таким образом, при малом отношении B_{φ}/B_z для устойчивости достаточно, чтобы p' было положительным и большим некоторой малой величины.

Согласно (3.40), достаточные условия устойчивости для плазменного цилиндра с закрепленной границей $\xi(a) = 0$ можно записать в виде двух требований отдельно для $m = 1$ и $m \geq 2$:

$$kr B_z > B_{\varphi}; \quad r p' - \frac{2B_{\varphi}^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{B_{\varphi}^2}{B_z^2} > 0, \quad (3.43)$$

причем, в отличие от условия (3.42), здесь не предполагается каких-либо ограничений на распределение тока.

Условия (3.42) и (3.43) локальные, т. е. должны выполняться на каждом радиусе r . Для выполнения этих условий необходимо $p'(r) > 0$.

В отсутствие продольного поверхностного тока, когда B_{φ} непрерывно, $\delta W_{\Sigma} = 0$ и $\delta W = \delta W_0$. Допуская возможность разрыва плотности тока при $r = r_0$ и принимая, что при $r = b$ выполняется граничное условие $f(b) = 0$, а f удовлетворяет уравнению Эйлера (3.39) в обеих областях $0 < r < r_0$ и $r_0 < r < b$, получаем с помощью интегрирования по частям в (3.37)

$$\delta W = \frac{\pi L r^2 \xi^2}{\beta} \left\{ \left(\frac{r f_i'}{f_i} - \frac{r f_e'}{f_e} \right) y^2 + (j'_{\parallel} - j''_{\parallel}) y \right\}. \quad (3.44)$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность δW . При наличии разрывов на других радиусах условия шивки решения на них: $\xi_i = \xi_e$, $\xi_i' = \xi_e'$. В выражении: (3.44) величина δW определяется разностью значений j_{\parallel} и f'/f при стремлении $r \rightarrow r_0$ из внутренней области (i) $r < r_0$ и из внешней (e) $r > r_0$.

При исследовании неустойчивости разрывов следует иметь в виду, что необходимым условием существования такой неустойчивости является отсутствие особых точек r_s , где $y(r_s) = 0$, внутри плазмы [30]. В противном случае смещение $\xi = f/ry$ обращается в бесконечность в особой точке $r = r_s$.

Для первой моды $m = 1$ длинноволновых возмущений $ka \ll 1$ уравнение Эйлера (3.40) имеет приближенное решение $\xi = \text{const}$. Подставив в выражение (3.44) $f_i = ry$, получим необходимое условие устойчивости $y(a) > 0$ или

$$\frac{B_{\Phi}(a)}{kaB_z(a)} < 1, \quad (3.45)$$

где $k = 2\pi/L$. Таким образом, критерий Крускала — Шафранова (3.45) — необходимое условие поверхностной устойчивости плазменного цилиндра со свободной границей при произвольном распределении тока. Это условие представляет собой ограничение на полный продольный ток и остается, очевидно, справедливым для замкнутых конфигураций с длиной магнитной оси L .

В отсутствие поверхностных токов выражение для δW можно представить в виде трех слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\pi L} = & \int_0^a \left\{ \frac{r^3 y^2}{\beta} \xi'^2 + \left[\left(m^2 - \frac{1}{\beta} \right) y^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\alpha^2 r^2}{\beta^2} (\alpha^2 B_z^2 - b_{\Phi}^2) + \frac{2\alpha^2 r p'}{\beta} \right] r \xi^2 \right\} dr + \\ & + \left[\frac{r^2 \xi^2}{\beta} (\alpha^2 B_z^2 - b_{\Phi}^2) \right]_a + \int_a^b \left(\frac{r}{\beta} f'^2 + \frac{m}{r} f^2 \right) dr. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Согласно этому выражению, плазма со свободной границей может быть неустойчивой также и в том случае, когда объемные интегралы положительны, т. е. имеется внутренняя устойчивость.

Внутренний разрыв плотности тока. Если пренебречь в (3.40) членами $\sim \alpha^2 r^2$, то уравнение Эйлера для функции ξ примет вид

$$(r^3 y^2 \xi')' - (m^2 - 1) r y^2 \xi = 0$$

и соответственно уравнение для f

$$\frac{1}{r} (r f')' - \left[\frac{m^2 - 1}{r^2} + \frac{(r (ry)')'}{r^2 y} \right] f = 0.$$

Рассмотрим конфигурацию с $j = j_z = j_0$ при $0 < r < r_0$ и $j = j_z = \varepsilon j_0$ при $r_0 < r < a$. В этом случае потенциальная энергия, согласно (3.44), равна

$$\delta W = \pi L a^2 \xi_a^2 \left\{ \left(\frac{r f_i'}{f_i} - \frac{r f_e'}{f_e} \right) y^2 + \varepsilon j_0 y \right\}_a,$$

причем $f = c_1 r^m + c_2 r^{-m}$.

Сшивая решение на разрыве $r = r_0$: $\xi_- = \xi_+$, $\xi'_- = \xi'_+$, и полагая $b \rightarrow \infty$, так что $f_e = c_3 r^{-m}$, получаем

$$\frac{\delta W}{2\pi m L f_a^2} = \frac{\eta^2 + \left[1 - m(1-\varepsilon) \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) \right] \eta - \varepsilon(1-\varepsilon) \left[m \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) - \left(1 - \frac{r_0^{2m}}{a^{2m}} \right) \right]}{\eta \left\{ \eta - (1-\varepsilon) \left[m \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) - \left(1 - \frac{r_0^{2m}}{a^{2m}} \right) \right] \right\}}, \quad (3.47)$$

где $\eta = m y_a / b_{\varphi 0}$, а величина y в области $r_0 < r < a$ определяется выражением

$$y = \alpha B_{z0} - b_{\varphi 0} + (1-\varepsilon) b_{\varphi 0} \left(1 - r_0^2 / a^2 \right).$$

Условием устойчивости является положительность δW при $y_a > 0$. В случае $y_a < 0$ рассматриваемая поверхностная неустойчивость не развивается, поскольку особая точка попадает внутрь плазмы. Достаточными для стабилизации поверхностной неустойчивости будут условия отсутствия нулей в числителе и знаменателе (3.27) при $\eta < 0$:

$$\begin{aligned} & m(1-\varepsilon) \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) - 1 \pm \\ & \pm \sqrt{\left[m(1-\varepsilon) \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) - 1 \right]^2 + 4\varepsilon(\varepsilon-1) \left[m \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) - 1 + \frac{r_0^{2m}}{a^{2m}} \right]} > 0; \\ & (1-\varepsilon) \left[m \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) - 1 + \frac{r_0^{2m}}{a^{2m}} \right] > 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Для стабилизации первой моды $m = 1$ необходима конечная длина $L = 2\pi/k$; $kB_z > b_{\varphi a}$. Неустойчивость высших мод $m \geq 2$ может не развиваться, если $\varepsilon \leq 0$, т. е. когда плотность тока при $r = r_0$ обращается в нуль либо меняет знак. В случае $\varepsilon = 0$ условием отсутствия поверхностной неустойчивости является [2]

$$\frac{r_0^3}{a^2} < 1 - \frac{1}{m}. \quad (3.49)$$

Таким образом, если плотность тока спадает достаточно быстро, так что этот спад можно аппроксимировать разрывом, то возможно

построить такую цилиндрическую модель тороидальной конфигурации, в которой отсутствует поверхностная неустойчивость. В случае, когда плотность тока спадает до нуля при $r = r_0$, соответствующие условия устойчивости: $kaB_z > B_\phi$, $r_0^2/a^2 < 1/2$.

Бессиловая конфигурация. В отличие от случая однородного распределения тока, бессиловая конфигурация $j = \varepsilon B$, $\varepsilon = \text{const}$, в которой $B_z = B_0 J_0(\varepsilon r)$, $B_\phi = B_0 J_1(\varepsilon r)$ может быть сделана внутренне устойчивой. При этом функция $f(r)$ определяется выражением (3.30), где $\varepsilon = j/B$, и достаточным условием внутренней устойчивости для m -й моды будет [31] $j/B < x_{m1}$, где x_{m1} — первый корень $J_m(x)$. При наличии же свободной границы возможна неустойчивость разрыва плотности тока. Для стабилизации этой неустойчивости необходимо, чтобы особая точка r_s , где $y(r_s) = 0$, попала внутрь плазмы. Так как $ry(r) = B_0 [\alpha r J_0(\varepsilon r) - J_1(\varepsilon r)]$, то для устойчивости при $\alpha r \ll 1$ необходимо $\varepsilon a > x_{11}$. Если $\varepsilon a \simeq x_{11}$, то удовлетворяется также необходимое условие устойчивости (3.45).

Таким образом, условия устойчивости плазмы со свободной границей выделяют из класса бессиловых конфигураций с произвольными $\varepsilon = \text{const}$ конфигурацию с $\varepsilon a \simeq x_{11} \simeq 3,8$, в которой продольное магнитное поле B_z и плотность продольного тока j_z меняют знак внутри плазмы при $r/a \simeq x_{01}/x_{11} \simeq 0,63$.

Параболическое распределение плотности тока. Выше было показано, что неустойчивость, связанная с наличием свободной границы плазмы, может быть стабилизирована для $k^2 a^2 \ll 1$ в модели с разрывом плотности тока. Здесь мы рассмотрим случай параболического распределения плотности продольного тока $j_z = j_0(1 - \varepsilon r^2/a^2)$ и будем также считать, что $B_z = \text{const}$.

Пренебрегая в (3.45) малыми членами $\sim a^2 r^2$, имеем при $b \rightarrow \infty$

$$\frac{\delta W}{\pi L} = \int_0^a \{ r^3 y^2 \xi'^2 + (m^2 - 1) r y^2 \xi^2 \} dr + [r^2 \xi^2 (\alpha^2 B_z^2 - b_\phi^2) + m r^2 \xi^2 y^2]_a. \quad (3.50)$$

Выберем $\xi = r^{m-1}$, тогда, поскольку $b_\phi = b_{\phi 0} (1 - \varepsilon r^2/2a^2)$, получим

$$\frac{\delta W}{2\pi a^2 L} = m y_0^2 + \left(1 + \frac{m^2 \varepsilon}{m+1} \right) b_{\phi 0} y_0 + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{m^2 - 1}{m+2} \varepsilon \right) b_{\phi 0}^2,$$

где $y_0 = a B_{z0} - b_{\phi 0}$. Отсюда вытекает необходимое условие устойчивости

$$2m\varepsilon \left(1 + \frac{m^2 - 1}{m+2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(1 + \frac{m^2 \varepsilon}{m+1} \right)^2 > 0. \quad (3.51)$$

Для параметра ε , характеризующего скорость спадания плотности тока, находим следующее ограничение, зависящее от номера гармоники m :

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{2m+1}{m+2}} < \frac{\varepsilon}{m+1} \cdot \frac{2m+1}{m+2} < 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{2m+1}{m+2}}. \quad (3.52)$$

Как это следует из (3.52), мода $m = 1$ является устойчивой лишь в случае $\varepsilon = 2$, когда $B_\varphi(a) = 0$, а для ее стабилизации при $B_\varphi(a) \neq 0$ необходима конечная длина цилиндра (3.45). Для $m = 2$, $m = 3$ и $m \gg 1$ соответственно получаем:

$$0,96 < \varepsilon < 3,8; \quad 0,8 < \varepsilon < 4,8; \quad 0,5 < \varepsilon < m.$$

Для стабилизации мод $m \geq 2$ поверхностной неустойчивости необходимо, чтобы плотность тока достаточно быстро спадала. При этом рассматриваемые возмущения стабилизируются при $\varepsilon = 1$, когда плотность тока обращается в нуль на границе плазмы.

Как показывает предыдущее рассмотрение модели плазменного цилиндра с отождествленными торцами, возможные неустойчивости в плазменном шнуре с продольным током можно разбить на два класса: внутренние и поверхностные, или разрывные.

Внутренние неустойчивости, существующие и при неподвижной границе плазмы, характеризуются в случае $B_\varphi/B_z \ll 1$ сравнительно меньшими инкрементами развития (в отношении B_z/B_φ). При этом к неустойчивости приводят лишь возмущения, близкие к постоянным вдоль магнитных силовых линий $|\mathbf{V} \nabla \xi / b_\varphi \xi| < B_\varphi/B_z$. Как мы увидим ниже, внутренние неустойчивости плазмы в замкнутых системах типа «Токамак» эффективно стабилизируются магнитной ямой, которая возникает при сворачивании плазменного цилиндра в тор.

Необходимым и достаточным условием отсутствия поверхностной неустойчивости для первой винтовой моды возмущения $m = 1$ является условие Крускала — Шафранова $LB_\varphi(a)/2\pi a B_z(a) < 1$, представляющее собой ограничение на продольный ток и длину системы L . Поверхностная неустойчивость для высших мод $m \geq 2$ стабилизируется в случае достаточно быстро спадающей по радиусу плотности тока.

§ 3.3. Стабилизирующее действие проводящих торцов

Для ограниченных конфигураций, концы силовых линий в которых упираются в проводящие стенки, существует механизм стабилизации плазменных неустойчивостей, обусловленный натяжением магнитных силовых линий, вследствие их искривления [16]. Если концы силовых линий можно считать замороженными в торцы рассматриваемой конфигурации, то касательная компонента смещения ξ должна обращаться в нуль на торцах. Последнее обстоятельство и приводит к возникновению некоторой области устойчи-

вости для плазменной конфигурации с замороженными в торцы магнитными силовыми линиями.

1. Достаточное условие устойчивости. Выражение (3.9) для δW_i можно записать в виде

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \{ ([\nabla \mu \nabla V] - (\mathbf{B}\xi)') + (\mathbf{B}\nabla \xi) \mathbf{e} + [j\mathbf{e}] \xi \}^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 - (\Omega + [j\mathbf{e}]^2) \xi^2 \} d\tau, \quad (3.53)$$

где штрихом обозначена производная по V , а

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{e}\nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \chi'' + \mathbf{e}_2 \Phi''.$$

Отбросив член $\gamma p (\operatorname{div} \xi)^2$ и заменив вектор в первой круглой скобке (3.56) его проекцией на ∇V , получим

$$\delta W_i \geq \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{(\mathbf{B}\nabla \xi)^2}{|\nabla V|^2} - \left(\Omega + \frac{j^2}{|\nabla V|^2} - \mathbf{B}\nabla \lambda \right) \xi^2 \right\} d\tau. \quad (3.54)$$

Здесь λ определяется соотношениями (1.38) и (1.39).

Используя уравнение силовых линий $\chi' d\zeta = \Phi' d\theta$, имеем $\mathbf{B}\nabla \xi = \Phi' d\xi/d\zeta$. При выполнении граничного условия $\xi = 0$ на торцах, расположенных при $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$, находим путем минимизации интеграла от квадрата производной

$$\int_0^1 (d\xi/d\zeta)^2 d\zeta = \pi^2 \int_0^1 \xi^2 d\zeta,$$

где знак равенства реализуется для $\xi = \sin \pi \zeta$. Отсюда, согласно (3.54), получаем следующее достаточное условие устойчивости [35]

$$\left\langle \frac{\pi^2 \Phi'^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \frac{j^2}{|\nabla V|^2} - \Omega + \mathbf{B}\nabla \lambda > 0. \quad (3.55)$$

Для случая плазменного цилиндра, упирающегося в проводящие стенки, расположенные при $z = 0$ и $z = L$, имеем $\mathbf{B}\nabla \lambda = 0$, $V = \pi r^2 L$, $\Phi' = B_z/L$, и условие (3.55) принимает вид

$$\pi^2 B_z^2 / L^2 - j^2 - \Omega |\nabla V|^2 > 0, \quad (3.56)$$

где в случае цилиндрической геометрии

$$\Omega |\nabla V|^2 = 2j_z B_\phi / r - j^2.$$

Стабилизирующее действие проводящих торцов, описываемое первым членом в (3.56), обратно пропорционально квадрату расстояния L между торцами. В случае $j_z = \text{const}$, $B_z = \text{const}$, когда $\Omega = 0$, достаточное условие устойчивости (3.56) для плазменного цилиндра сводится к требованию

$$\frac{jL}{\pi B} < 1. \quad (3.57)$$

Как мы убедимся далее, это условие оказывается в четыре раза более жестким, чем условие устойчивости для аналогичной конфигурации, свернутой в тор радиуса R , длина магнитной оси которой $L = 2\pi R$.

Достаточное условие устойчивости (3.55) отличается от необходимого условия [16]:

$$\pi^2 \Phi'^2 / |\nabla V|^2 - \Omega + \gamma p \Omega^2 / p'^2 > 0,$$

полученного Б. Б. Кадомцевым, наличием дестабилизирующего члена $-j^2 / |\nabla V|^2$. Стабилизация магнитной ямой $\Omega < 0$ играет здесь второстепенную роль, поскольку основной стабилизирующий фактор представлен членом $\langle \pi^2 \Phi'^2 / |\nabla V|^2 \rangle$.

2. Необходимое условие устойчивости для плазменного цилиндра с замороженными торцами. Рассмотрим плазменный цилиндр с продольным током, торцы которого упираются в идеально проводящие стенки, расположенные при $z = 0$ и $z = L$. Выберем пробные смещения плазмы в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 [\cos m(\varphi - \alpha_1 z) - \cos m(\varphi - \alpha_2 z)]; \\ \eta &= \eta_0 [\sin m(\varphi - \alpha_1 z) - \sin m(\varphi - \alpha_2 z)], \end{aligned} \quad (3.58)$$

где $\alpha_1 = \mu + \alpha$; $\alpha_2 = \mu - \alpha$; $k = \pi/L$; $\xi = \xi_r$; $\eta = B_\varphi \xi_z - B_z \xi_\varphi$. При этом тангенциальные компоненты $\mathbf{A} = [\xi \mathbf{B}]$, а, следовательно, и электрического поля $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$ обратятся в нуль на торцах.

Ограничимся случаем $j = j_z = \text{const}$ и положим $\mu = b_\varphi / B_z$. Минимизация δW_i по η и ξ_z дает

$$\frac{m\eta_0}{B_z} = -\frac{f' + \mu^2 r^4 (f/r^2)'}{1 + (\mu^2 + \alpha^2) r^2}; \quad \xi_z = 0,$$

где $f = r\xi_0$. Среднее значение $(\text{div } \xi)^2$ оказывается равным

$$\langle (\text{div } \xi)^2 \rangle = r^2 \frac{[\alpha^2 f' - \mu^2 r^2 (f/r^2)']^2}{1 + (\mu^2 + \alpha^2) r^2}. \quad (3.59)$$

Выражение для δW_i , при условии малости давления плазмы $2p/B^2 \ll \ll 1$, запишем в виде

$$\frac{\delta W_i}{2\pi L} = B_z^2 \int_0^a \left\{ \frac{\alpha^2 [f'^2 + \mu^2 r^6 (f/r^2)'^2] - 4\mu^2 (\mu^2 + \alpha^2) f^2}{1 + (\mu^2 + \alpha^2) r^2} + \frac{k^2}{r^2} f^2 \right\} r dr. \quad (3.60)$$

При $\mu^2 \alpha^2 \ll 1$ и $\alpha^2 a^2 \ll 1$ следует:

$$\frac{\delta W}{2\pi L} = \alpha^2 B_z^2 \int_0^a \left\{ f'^2 + \left(\frac{m^2}{r^2} + 4\mu^2 - \frac{4\mu^4}{\alpha^2} \right) f^2 \right\} r dr. \quad (3.61)$$

Соответствующее уравнение Эйлера имеет решение

$$f = J_m(2\mu r \sqrt{\mu^2/\alpha^2 - 1}).$$

Наиболее жестким является необходимое условие устойчивости для $m = 1$:

$$\mu a < \sqrt{\frac{\pi a x_{11}}{2L}} \approx \sqrt{\frac{2\pi a}{L}}, \quad (3.62)$$

которое приводит к ограничению на продольный ток

$$ja/B < \sqrt{8\pi a/L}.$$

§ 3.4. Общегеометрические критерии устойчивости для замкнутых конфигураций

Специфика задачи об устойчивости замкнутых тороидальных плазменных конфигураций в рамках идеальной магнитной гидродинамики заключается в том, что основной стабилизирующий механизм обусловлен в них наличием магнитной ямы, которая возникает в конфигурациях достаточно сложной геометрии и отсутствует в обычно рассматриваемых простых моделях. Таким образом, особый интерес представляют критерии устойчивости, не связанные с конкретной геометрией плазмы.

1. Впервые понятие магнитной ямы ($\min \bar{B}$) было введено Розенблютом и Лонгмайром [3]. Условие устойчивости, полученное ими из энергетических соображений, для конфигураций с замкнутыми магнитными силовыми линиями в принятых здесь обозначениях (1.35) имеет вид

$$-\Omega > 0. \quad (3.63)$$

2. Аналогичное условие, полученное Б. Б. Кадомцевым [4] в предположении о замкнутости магнитных силовых линий и при условии малости давления плазмы, можно записать в виде

$$-\Omega + \gamma p \Omega^2 / p' > 0, \quad (3.64)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по текущему объему V . По сравнению с (3.63) условие (3.64) имеет дополнительный стабилизирующий член, пропорциональный γp , где γ — показатель адиабаты. Однако в условиях (3.63) и (3.64) не полностью учтены члены, описывающие дестабилизирующее действие токов в плазме. Конкуренция этих членов с членом $-\Omega$, описывающим магнитную яму, и приводит, как мы убедимся ниже, к тем или иным ограничениям на допустимые ток и давление плазмы.

3. Далее Б. Б. Кадомцевым [5] из энергетического принципа [26] получен необходимый критерий устойчивости для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями в предположении, что рассматриваемые возмущения постоянны вдоль магнитных силовых линий. Этот критерий можно представить как

$$-\Omega \langle \mathbf{B}^2 \rangle - p' + \gamma p (\langle \mathbf{B}^2 \rangle \Omega^2 / p' + \Omega) > 0, \quad (3.65)$$

где угловыми скобками обозначено среднее значение по объему слоя (2.112). Здесь уже появился дестабилизирующий фактор $-p'^2$, обязанный дестабилизирующему действию токов в плазме. Согласно необходимому условию устойчивости (3.65) относительно рассматриваемых «конвективных» возмущений, существуют две области устойчивости:

$$\gamma p \Omega - p'^2 > 0; \quad (3.66)$$

$$-\Omega \langle \mathbf{B}^2 \rangle - p'^2 > 0, \quad (3.67)$$

и плазма неустойчива, если не выполняется ни одно из неравенств (3.66) и (3.67). В случае, когда магнитная яма отсутствует $\Omega > 0$, условие (3.66) совпадает с условием (3.64). В применении к плазменному цилиндру критерий (3.66) при $p' < 0$ приводит к необходимому условию устойчивости (3.19), полученному методом малых колебаний [17].

При наличии магнитной ямы $\Omega < 0$ условие (3.66) не выполняется, и единственным необходимым условием устойчивости остается критерий (3.67). Для цилиндрической геометрии плазмы критерий (3.67) сводится к требованию $p' > 0$. Отметим, что условие замкнутости магнитных силовых линий, при котором выведен необходимый критерий (3.65), эквивалентно ограничению случаем слабой перекрещенности силовых линий.

4. В работах Мерсье [6], Бино [7], Грина и Джонсона [8] получен общегеометрический необходимый критерий устойчивости, при единственном предположении о малости области локализации рассматриваемых возмущений между соседними магнитными поверхностями. Как показано в работе [9], критерий можно представить

$$\frac{S^2}{4} + \left(S \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right) - \left(\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \right) > 0. \quad (3.68)$$

Здесь первый член $S^2/4$ описывает стабилизирующее влияние перекрещенности магнитных силовых линий (*shear*), члены в первой круглой скобке описывают стабилизирующее действие магнитной ямы ($\min \bar{B}$), а члены во второй круглой скобке характеризуют дестабилизирующее действие токов в плазме. Для случая цилиндрической геометрии плазмы критерий Мерсье (3.68) переходит в критерий Сайдема (3.20).

5. В работе Л. С. Соловьева [10] получен достаточный общегеометрический критерий устойчивости для произвольных возмущений плазмы при единственном предположении об отсутствии поверхностных токов:

$$-\Omega - [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2 > 0. \quad (3.69)$$

Здесь $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$ — третий координатный вектор натуральной системы координат θ, ξ, V Хамады [11], $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dx^i$, связанной с системой вложенных магнитных поверхностей. Критерий (3.69) имеет об-

ласть выполнимости для конфигураций с малым продольным током J , однако он оказывается слишком жестким для конфигураций с большим продольным током типа «Токамак».

6. В той же работе [10] получен достаточный критерий устойчивости в предположении о квазиоднородности рассматриваемых равновесных конфигураций

$$S \langle [je] [Be] \rangle - \Omega \langle [Be]^2 \rangle - (\langle [je]^2 \rangle \langle [Be]^2 \rangle - \langle [je] [Be] \rangle^2) > 0 \quad (3.70)$$

и при выполнении граничного условия $\xi \nabla V = 0$ на поверхности плазмы. Если продольный ток спадает при удалении от магнитной оси, то для устойчивости конфигураций плазмы низкого давления с малым отношением B_{\perp}/B_{\parallel} достаточно выполнения критерия (3.70) и дополнительного условия

$$\chi'/\Phi' < 1, \quad (3.71)$$

аналогичного условию (4.45) для случая плазменного цилиндра.

Отдельные члены в критерии (3.70) имеют тот же физический смысл, что и соответствующие члены в критерии (3.68). Критерий Мерсье формально получается из критерия (3.70), если заменить вектор e отношением $\nabla V/|\nabla V|^2$ и добавить член $S^2/4$. Заметим, что для цилиндрической геометрии плазмы различие между векторами e и $\nabla V/|\nabla V|^2$ исчезает. Если в левой части неравенства (3.70) добавить член $S^2/4$, то полученное таким образом условие будет достаточным условием устойчивости относительно локальных возмущений. Этот член, характеризующий шир, появляется в критериях устойчивости только в тех случаях, когда рассматриваются лишь возмущения, локализованные в тонком слое между соседними магнитными поверхностями. Отсюда можно заключить, что стабилизирующее влияние шири ограничено лишь случаем локальных мелкомасштабных возмущений. Основным стабилизирующим фактором в критериях (3.67)—(3.70) является магнитная яма. В условии же (3.71), так же как и в условии устойчивости (3.59) для конфигураций с замороженными в проводящие торцы концами силовых линий, в качестве стабилизирующего фактора выступает конечная длина магнитных силовых линий.

Как это следует из критериев (3.69) и (3.70), существование области устойчивости обусловлено конкуренцией двух основных факторов — стабилизирующим действием магнитной ямы и дестабилизирующим действием токов в плазме. В замкнутых тороидальных конфигурациях возникновение магнитной ямы связано в основном с кривизной магнитной оси. В конфигурациях с пространственной магнитной осью существенную роль играет также кручение магнитной оси [32].

Для конфигураций, обладающих магнитной ямой, существенны критерии устойчивости (3.63), (3.67)—(3.70), однако критерии (3.63) и (3.67) неправильно описывают дестабилизирующее действие

конечного давления плазмы. Поскольку, кроме этого, необходимый критерий устойчивости (3.68) является более жестким, чем необходимый критерий (3.67), мы далее ограничимся лишь рассмотрением критериев (3.68)—(3.70).

§ 3.5. Локальная устойчивость аксиально симметричных конфигураций

3.5.1. Конфигурации с круглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси

Необходимый критерий локальной устойчивости Мерсье (3.68) для аксиально симметричных конфигураций можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{I_A V'}{2r^2} \right\rangle^2 - p' V'^2 \left\{ \frac{I_A^2}{R^2} \left[\left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle \left\langle \frac{R^2-r^2}{r^2} \right\rangle' + \frac{V''}{V'} \left\langle \frac{R^2-r^2}{r^2} \right\rangle \left(\left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle - \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right) \right] + p' \left(\left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle \left\langle \frac{(R^2-r^2)^2}{r^2 |\nabla\psi|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{R^2-r^2}{r^2 |\nabla\psi|^2} \right\rangle \left\langle \frac{R^2-r^2}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle \right) \right\} + \\ + \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \left(\left\langle \frac{r^2 p' + I_A I_A'}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle - \frac{V''}{V'} \right) \geq 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

где использованы обозначения § 2.1, штрихом обозначено дифференцирование по ψ , а средние значения для произвольной функции f вычисляются по формуле

$$\langle f \rangle = \frac{2\pi}{V'} \int_0^{2\pi} f \frac{r\rho}{\partial\psi/\partial\rho} d\omega. \quad (3.73)$$

Выражение для V' получается отсюда при $f = 1$.

Если ограничиться случаем квазикруговых поперечных сечений плазменного тора и считать малым отношение ρ/R , то в первом приближении

$$\psi = f_0(\rho) + f_1(\rho) \cos \omega, \quad (3.74)$$

где $f_1/f_0 \sim \rho/R$. Для вычисления средних значений величину ρ можно представить в виде

$$\rho = \rho_\psi - (f_1/f_0') \cos \omega. \quad (3.75)$$

Здесь ρ_ψ постоянно на магнитной поверхности $\psi = \text{const}$. Таким образом:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{R^2-r^2}{r^2} \right\rangle &= \frac{\rho^2}{2R^2} + \frac{1}{\rho R} \left(\frac{\rho^2 f_1}{f_0'} \right)'; \\ \left\langle \frac{R^2-r^2}{r^2} \left(\left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle - \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right) \right\rangle &= \frac{2\rho}{R} \left(\frac{f_0'' f_1}{f_0'^2} - \frac{\rho f_1'}{f_0'} \right), \end{aligned}$$

и критерий (3.72) для малых ρ/R принимает вид

$$\frac{\mu'^2}{4} - \frac{p'}{\rho B_\Phi^2} < \frac{1}{R^2} \left\{ 1 + \frac{R}{f_0'} \left[\frac{(\rho f_1')'}{\rho} - \frac{f_1}{\rho^2} - \frac{f_1}{f_0'} \left(\frac{(\rho f_0')')'}{\rho} \right) \right] \right\} - 2\mu^2 > 0. \quad (3.76)$$

При использовании уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} (\rho f_0')' &= -\frac{1}{f_0'} (R^2 p' + I_A I_{A'}); \\ \frac{1}{\rho} (\rho f_1')' - \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{f_0'} \left(\frac{R^2 p' + I_A I_{A'}}{f_0'} \right)' \right] f_1 &= \frac{f_0'}{R} - \frac{2\rho R p'}{f_0'} \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

получаем весьма компактное необходимое условие локальной устойчивости [13]

$$\frac{\mu'^2}{4} - \frac{2p'}{\rho B_\Phi^2} \left(\frac{1}{R^2} - \mu^2 \right) > 0, \quad (3.78)$$

где $\mu = B_\omega/\rho B_\Phi$, а штрихами обозначены производные по ρ . При $R \rightarrow \infty$ это условие переходит в критерий Сайдема [12], выведенный для цилиндрической геометрии плазмы.

Для квазиоднородных конфигураций, когда $\mu' \simeq 0$, получаем $-p'(1 - \mu^2 R^2) > 0$. Согласно (3.78), наиболее жестким в случае спадающего тока $j_\Phi'(\rho) < 0$ оказывается условие устойчивости

$$-p' \left(\frac{4B^2}{R^2} - j^2 \right) > 0 \quad (3.79)$$

в окрестности магнитной оси $r = R$. Появление стабилизирующего члена $\sim 1/R^2$, делающего возможным существование области устойчивости $jR/B < 2$ при спадающем давлении $p' < 0$, обусловлено магнитной ямой, образующейся при сворачивании плазменного цилиндра в тор.

3.5.2. Устойчивость произвольных аксиально симметричных конфигураций в окрестности магнитной оси

Используя выражение (2.14) для функции ψ в виде разложения по степеням ρ , получаем следующий критерий устойчивости для тороидальной плазменной конфигурации с круговой магнитной осью $r = R$ при условии $p' < 0$ [9]:

$$\frac{j^2 R^2}{B^2} < \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \right)^2 \left[1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{2a}{a+b} - \frac{1-\nu^2}{1+\nu^2} (1+2c) \right]. \quad (3.80)$$

Здесь $\nu = l_z/l_r$ — отношение полуосей эллиптических нормальных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси $r = R$. Постоянные параметры b/a и c характеризуют распределение токов и форму магнитных поверхностей и могут быть определены, например, путем решения граничной задачи при заданной форме поперечного сечения внешней магнитной поверхности ψ_Σ . Если вве-

сти параметр эллиптичности $\varepsilon = \text{th} \eta$, то $\mathbf{v} = e^\eta$ и выражение для критерия устойчивости (3.80) примет вид

$$\frac{j^2 R^2}{4B^2} < \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \left[1 - \frac{2 \text{th } \eta/2}{1+b/a} + \varepsilon(1+2c) \right].$$

В случае заданного эллиптического профиля поперечного сечения граничной магнитной поверхности Ψ_Σ параметры b/a и c при малом отношении ρ_0/x_0 , согласно соотношениям (2.22) и (2.27), выражаются через β_J :

$$\frac{1}{1+b/a} = \frac{1+v^2}{v} \cdot \frac{\beta_J}{4}; \quad c = \frac{1}{1+3v^2} \left(\frac{1+v^2}{1+b/a} + \frac{v^2}{2} \right).$$

Подстановка этих выражений в неравенство (3.80) дает

$$\frac{j^2 R^2}{B^2} < \frac{1}{v^2} \cdot \frac{(1+v^2)^2}{1+3v^2} \left[\frac{1+7v^2}{1+v^2} - \frac{(1-v)^2}{v^2} \cdot \frac{1+v^2}{1+v} \beta_J \right]. \quad (3.81)$$

Как это следует из полученного необходимого условия устойчивости (3.81), давление плазмы — дестабилизирующий фактор.

В общем случае параметры b/a и c зависят от давления плазмы и формы поперечных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси, однако в частном случае круглых приосевых сечений магнитных поверхностей они выпадают из критерия устойчивости, и неравенство (3.80) приводит к ограничению (3.79). К вопросу об устойчивости аксиально симметричных конфигураций с заданным профилем поперечного сечения мы еще вернемся, после преобразования критериев устойчивости (3.63)—(3.70) для общего случая квазиоднородных конфигураций.

§ 3.6. Общегеометрические критерии устойчивости для квазиоднородных конфигураций

3.6.1. Общие соотношения

При использовании координатных векторов натуральной системы координат, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ и $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3 = \nabla V$, необходимый критерий локальной устойчивости (3.68) и достаточные критерии устойчивости (3.70) и (3.69) преобразуются соответственно к виду:

$$\frac{S^2}{4} - \frac{p'}{\Phi'} \left(\Phi'' \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - S \left\langle \frac{\mathbf{B} \mathbf{e}_1}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right) - p'^2 \left(\left\langle \frac{\mathbf{e}_1^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{e}_2^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \right) > 0; \quad (3.82)$$

$$-\frac{p'}{\Phi'} (\Phi'' \langle [\mathbf{B} \mathbf{e}]^2 \rangle + S \langle [\mathbf{B} \dot{\mathbf{e}}] \mathbf{e}^2 \rangle) - p'^2 (\langle |\mathbf{e}^1|^2 \rangle \langle |\mathbf{e}^2|^2 \rangle - \langle \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \rangle^2) > 0; \quad (3.83)$$

$$-\frac{p'}{\Phi'} (\Phi'' + J' S) - \frac{1}{\Phi'^2} (p' \mathbf{e}^2 - J' [\mathbf{B} \mathbf{e}])^2 > 0, \quad (3.84)$$

где штрихи означают производные по V . В выражениях (3.82)—(3.84) явно выделена зависимость от градиента давления p' .

Для квазиоднородных конфигураций, или в окрестности магнитной оси для произвольных конфигураций, критерии устойчивости существенно упрощаются. Оставляя в (3.82) и (3.83) лишь основные члены и полагая в (3.84) $J' = 0$, получаем:

$$p' \left(\frac{V''}{V'^3} - p' \left\langle \frac{|\mathbf{e}_1|^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right) > 0; \quad (3.85)$$

$$p' \left(\frac{V''}{V'^3} - p' \langle |\mathbf{e}^2|^2 \rangle \right) > 0; \quad (3.86)$$

$$p' \left(\frac{V''}{V'^3} - p' \langle |\mathbf{e}^2|^2 \rangle \right) > 0. \quad (3.87)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по продольному потоку Φ . В выражениях (3.85) и (3.87) член, описывающий стабилизирующее действие магнитной ямы, представлен отношением V''/V'^3 .

Входящие в (3.85)—(3.87) величины $|\mathbf{e}_1|^2/|\nabla V|^2$ и $|\mathbf{e}^2|^2$ выражаются, согласно (2.120) и (2.121), через функции $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$:

$$\frac{|\mathbf{e}_1|^2}{|\nabla V|^2} = \frac{1}{B_0^2 V'^2} + \frac{\gamma_1^2 \sin^2 \vartheta + \gamma_2^2 \cos^2 \vartheta}{e^\eta \cos^2 \vartheta + e^{-\eta} \sin^2 \vartheta} B_0;$$

$$|\mathbf{e}^2|^2 = \frac{1}{B_0^2 V'^2} + (\gamma_1^2 e^\eta + \gamma_2^2 e^{-\eta}) B_0.$$

Параметр η характеризует отношение полуосей эллиптического поперечного сечения магнитных поверхностей $l_2/l_1 = e^\eta$ в окрестности магнитной оси. В случае, когда магнитные поверхности не прокручиваются вокруг магнитной оси и $\delta = 0$, $l_1 = \rho e^{-\eta/2}$ — полуось эллипса в направлении нормали, а $l_2 = \rho e^{\eta/2}$ — полуось эллипса в направлении бинормали к магнитной оси.

Средние значения, обозначенные угловыми скобками, легко вычисляются по формуле (2.113), если воспользоваться равенством

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2m\vartheta d\vartheta}{e^\eta \sin^2 \vartheta + e^{-\eta} \cos^2 \vartheta} = \operatorname{th}^m \frac{\eta}{2}.$$

Введем величину V_0'' , связанную с V' соотношением

$$V'' = V_0'' + p' \oint \frac{ds}{B_0^3} + p' V'^2 \oint \left(\frac{\gamma_1^2}{2-\varepsilon} + \frac{\gamma_2^2}{2+\varepsilon} \right) \frac{ds}{\operatorname{ch} \eta}, \quad (3.88)$$

тогда критерии устойчивости (3.85)—(3.87) при $p' < 0$ примут соответственно вид:

$$-V_0'' + p' V'^2 \oint \frac{\text{sh}^2 \eta/2}{\text{ch} \eta/2} \left(\frac{\gamma_1^2 e^{\eta/2}}{2-\varepsilon} + \frac{\gamma_2^2 e^{-\eta/2}}{2+\varepsilon} \right) \frac{ds}{\text{ch} \eta} > 0; \quad (3.89)$$

$$-V_0'' + p' V'^2 \oint \left(\frac{\gamma_1^2 e^\eta}{2-\varepsilon} + \frac{\gamma_2^2 e^{-\eta}}{2+\varepsilon} \right) ds > 0; \quad (3.90)$$

$$-V_0'' + p' \left(\frac{V'}{B_0^2} - \oint \frac{ds}{B_0^3} \right) + p' V'^2 \left\{ B_0 V' (\gamma_1^2 e^\eta + \gamma_2^2 e^{-\eta}) - \oint \left(\frac{\gamma_1^2}{2-\varepsilon} + \frac{\gamma_2^2}{2+\varepsilon} \right) \frac{ds}{\text{ch} \eta} \right\} > 0. \quad (3.91)$$

Значение V_0'' , согласно (2.119) и (3.88), не зависит от p' и выражается контурным интегралом по магнитной оси:

$$V_0'' = \frac{1}{\pi} \oint \left\{ \frac{\text{ch} \eta}{B_0^2} \left[\varepsilon^2 u'^2 + \frac{\eta'^2}{4} + \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} - \frac{\varepsilon \eta' B_0'}{B_0} - \frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon \cos 2\delta) + \frac{j_0^2}{4B_0^2} (1 - \varepsilon^2) \right] + 2kB_0^{-3/2} (\bar{\alpha}_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \bar{\alpha}_2 e^{\eta/2} \sin \delta) \right\} ds. \quad (3.92)$$

Здесь B_0 и j_0 — магнитное поле и плотность тока на магнитной оси; $\varepsilon = \text{th} \eta$ — параметр эллиптичности сечений магнитных поверхностей $u' = \delta' - \kappa$; δ' — угловая скорость прокручивания магнитных поверхностей; k и κ — кривизна и кручение магнитной оси.

Функции γ_1 и γ_2 определяются, согласно (2.91), из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1' + v' \gamma_2 &= 2c_1/B_0 V'; \\ \gamma_2' - v' \gamma_1 &= 2c_2/B_0 V', \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

где использованы следующие обозначения:

$$c_1 = kB_0^{-1/2} e^{-\eta/2} \cos \delta; \quad c_2 = kB_0^{-1/2} e^{\eta/2} \sin \delta; \\ v' \text{ch} \eta = u' + j_0/2B_0; \quad V' = \oint ds/B_0.$$

Функции $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ определяются из системы уравнений (2.90):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_1' + v' \bar{\alpha}_2 &= -\frac{\bar{p}_1 - 2q_1 a_3}{2q_0 - q_1}; \\ \bar{\alpha}_2' - v' \bar{\alpha}_1 &= -\frac{\bar{p}_2 - 2q_1 a_4}{2q_0 + q_1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

где a_3 и a_4 — амплитуды третьей гармоники винтового магнитного поля. В случае заданного профиля поперечного сечения внешней магнитной поверхности $r^2 + r^2 f_\sigma = r_0^2$ функции a_3 и a_4 выражаются через заданные параметры σ_3 и σ_4 :

$$2a_3 = -\sigma_3' - 3v' \sigma_4; \quad 2a_4 = -\sigma_4' + 3v' \sigma_3.$$

Величины $q_0, q_1, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ определяются выражениями:

$$q_0 = \operatorname{ch}\eta/B_0; \quad q_1 = \operatorname{sh}\eta/B_0;$$

$$2\bar{p}_1 = (q_0 + q_1)' c_1 - (3q_0 - q_1) (c_1' - v' c_2) - (6q_0 v' - 2j_0/B_0^2) c_2;$$

$$2\bar{p}_2 = (q_0 - q_1)' c_2 - (3q_0 + q_1) (c_2' + v' c_1) + (6q_0 v' - 2j_0/B_0^2) c_1.$$

Таким образом, в общем случае критерии устойчивости для квазигомогенных конфигураций выражаются контурными интегралами по магнитной оси от известных функций s . Кроме характеристик магнитного поля и плазмы устойчивость плазменной конфигурации существенно зависит от кривизны и кручения магнитной оси и от формы поперечного сечения магнитных поверхностей.

Критерий локальной устойчивости для конфигурации с магнитной осью в форме рейстрекка. Рассмотрим в качестве примера однородную конфигурацию $B_0 = \operatorname{const}$ с плоской магнитной осью $\kappa = 0$. Ограничиваясь случаем круглых поперечных сечений магнитных поверхностей $\varepsilon = 0$, представим необходимый критерий локальной устойчивости Мерсье, согласно (3.89) и (3.92), в виде

$$\oint (k^2/2 - v'^2 - 2k\bar{\alpha}_1) ds > 0. \quad (3.95)$$

Здесь $v' = j_0/2B_0$, а величина B_0 принята равной единице. Функция $\bar{\alpha}_1(s)$ определяется из системы уравнений (3.94):

$$\bar{\alpha}_1' + v' \bar{\alpha}_2 = 3k'/4; \quad \bar{\alpha}_2' - v' \bar{\alpha}_1 = kv'/4. \quad (3.96)$$

Для того чтобы избавиться от производной $k'(s)$ в правой части первого уравнения (3.96), произведем замену переменных $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + 3k/4$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$, тогда условием устойчивости будет неравенство

$$-\oint (k^2 + v'^2 + 2k\alpha_1) ds > 0, \quad (3.95a)$$

в котором функция $\alpha_1(s)$ является решением системы уравнений:

$$\alpha_1' + v' \alpha_2 = 0; \quad \alpha_2' - v' \alpha_1 = kv'. \quad (3.96a)$$

Согласно формуле (3.67), выражение для $\alpha_1(s)$ можно представить в виде

$$\alpha_1 = -v' \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{iv'(s+L/2)} K(L)}{2\sin v'L/2} - ie^{iv's} K(s) \right\}, \quad (3.97)$$

где $K(s) = \int_0^s e^{-iv's} k(s) ds$, и, следовательно, последний член в левой части неравенства (3.95a) оказывается равным

$$-2 \int_0^L k\alpha_1 ds = v' \left\{ \frac{|K(L)|^2}{\operatorname{tg} v'L/2} - 2 \operatorname{Re} \int_0^L ike^{iv's} K ds \right\}.$$

Для конфигурации, магнитная ось которой имеет форму рейстрекка с длинами прямолинейных участков, равными l , и общей длиной $L = 2\pi R + 2l$, функция $k(s)$ равна нулю в интервалах $0 <$

$\leq s < l/2$, $(L - l)/2 < s < (L + l)/2$, $L - l/2 < s < L$ и равна $1/R$ в интервалах $l/2 < s < (L - l)/2$, $(L + l)/2 < s < L - l/2$. Вычислив функцию $K(s)$ с помощью интегрирования по отдельным участкам s , получим критерий локальной устойчивости для такой конфигурации в виде

$$\frac{2\pi R}{L} - v'^2 R^2 + \frac{8}{v' L} \left[\frac{\cos v' L/2 \sin^2 \pi v' R/2}{\operatorname{tg} v' L/4} + \right. \\ \left. + \cos \frac{v'}{2} (L - l) \sin \frac{v' l}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{v' L}{2} \cos \pi v' R \right] > 0. \quad (3.98)$$

При отсутствии прямолинейных участков $l = 0$, $L = 2\pi R$ условие устойчивости (3.98) сводится к ограничению $v' R < 1$, совпадающему с условием (3.79) для конфигурации с круговой магнитной осью. Для устойчивости при малых токах, когда $v' L/2 \ll 1$, из неравенства (3.98) вытекает ограничение [32]

$$l/L < 1/4. \quad (3.99)$$

Полученное ограничение на относительную длину прямолинейных участков естественно, поскольку стабилизация осуществляется только на криволинейных участках, где имеется магнитная яма, в то время как прямолинейные участки — дестабилизирующие.

Для условия локальной устойчивости (3.98) характерно наличие резонансного знаменателя $\operatorname{tg} v' L/2$, благодаря чему в окрестности $v' L = 4\pi n$, $n = 1, 2, 3 \dots$, появляются резонансные области устойчивости, соответствующие большим токам $jL/B \simeq 4\pi n$. Но для конфигураций со свободной границей плазмы при больших n они запрещены условием устойчивости Крускала — Шафранова (3.71).

3.6.2. Конфигурации однородного сечения с непрокручивающимися магнитными поверхностями

Магнитные поверхности в окрестности магнитной оси будут иметь постоянное сечение, если $B_0 = \operatorname{const}$, $j_0 = \operatorname{const}$, $\varepsilon = \operatorname{const}$. Предположим для простоты, что $k = \operatorname{const}$ и $\kappa = \operatorname{const}$, и рассмотрим случай непрокручивающихся магнитных поверхностей, полагая что одна из полуосей эллиптического поперечного сечения ориентирована по нормали \mathbf{v} к магнитной оси, т. е. $\delta = 0$. Положим, кроме того, $\sigma_2 = \sigma_4 = 0$, так чтобы поперечное сечение граничной магнитной поверхности было симметричным относительно нормали \mathbf{v} . В класс выделенных таким образом конфигураций попадают конфигурации с круговой магнитной осью $k = \operatorname{const}$, $\kappa = 0$ и с винтовой магнитной осью $k = \operatorname{const}$, $\kappa = \operatorname{const}$. В рассматриваемом случае, согласно (3.92),

$$V_0'' = \frac{L}{\pi B_0^2} \left\{ \left[\varepsilon^2 \kappa^2 - \frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon) + \frac{j_0^2}{4 B_0^2} (1 - \varepsilon^2) \right] \operatorname{ch} \eta + \right. \\ \left. + 2k B_0^{1/2} e^{-\eta/2} \bar{\alpha}_1 \right\}, \quad (3.100)$$

где L — длина магнитной оси.

Решениями уравнений (3.93) и (3.94) являются постоянные γ_i и $\bar{\alpha}_i$:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{4B_0^{1/2} e^{-\eta/2} \operatorname{ch} \eta}{j_0 - 2\kappa B_0} \cdot \frac{k}{L}; \quad (3.101)$$

$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{j_0 + 6\kappa B_0}{j_0 - 2\kappa B_0} + \varepsilon \right) \frac{k B_0^{-1/2} e^{-\eta/2}}{2 + \varepsilon} - \frac{3\varepsilon \sigma_3}{2 + \varepsilon}, \quad \bar{\alpha}_2 = 0. \quad (3.102)$$

Обращение в нуль знаменателя ($j_0 - 2\kappa B_0$) происходит при равенстве нулю угла прокручивания силовых линий в окрестности магнитной оси. В случае чисто эллиптических сечений внешней магнитной поверхности $\sigma_3 = 0$ и величина α_1 , так же как и γ_2 , пропорциональна кривизне k магнитной оси. Если обозначить $\sigma_3 B_0^{1/2} e^{-\eta/2} = \Sigma_3$, то получим

$$V_0'' = \frac{L \operatorname{ch} \eta}{\pi B_0^2} \left\{ \varepsilon^2 \kappa^2 + \frac{j_0^2}{4B_0^2} (1 - \varepsilon^2) - 2k^2 \frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} \left[\frac{j_0 + 2\kappa B_0}{j_0 - 2\kappa B_0} + \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon \Sigma_3}{k} \right] \right\}. \quad (3.103)$$

Величина V_0'' может быть отрицательной, если отрицательно выражение в квадратной скобке. Член Σ_3 описывает влияние несимметричности поперечных сечений магнитных поверхностей.

3.6.3. Конфигурации однородного сечения с равномерно прокручивающимися магнитными поверхностями

Полагая $B_0 = \text{const}$, $j_0 = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ и принимая для простоты $k = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$, предположим теперь, что магнитные поверхности равномерно прокручиваются вокруг магнитной оси, так что $\delta(s) = \delta' s$, $\delta' = \text{const}$. При этом $\gamma_1 = \gamma_1^0 \sin \delta$, $\gamma_2 = \gamma_2^0 \cos \delta$, $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1^0 \cos \delta$, $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2^0 \sin \delta$, и согласно (3.92), получаем:

$$V_0'' = \frac{L \operatorname{ch} \eta}{\pi B_0^2} \left[\varepsilon^2 u'^2 - \frac{k^2}{2} + \frac{j_0^2}{4B_0^2} (1 - \varepsilon^2) + K \right]; \quad (3.104)$$

$$K = 2k B_0^{1/2} (\bar{\alpha}_1^0 e^{-\eta/2} + \bar{\alpha}_2^0 e^{\eta/2}) / \operatorname{ch} \eta. \quad (3.105)$$

Представим K в виде суммы $K = K_0 + K_1$, где величина K_0 соответствует случаю чисто эллиптических сечений внешней магнитной поверхности Ψ_Σ , а K_1 — добавка, описывающая влияние несимметричности Ψ_Σ .

Решение уравнения (3.93) для γ_1 и γ_2 дает:

$$\gamma_1^0 = -\frac{2k}{L B_0^{1/2}} \frac{\delta' e^{-\eta/2} + v' e^{\eta/2}}{v'^2 - \delta'^2}; \quad \gamma_2^0 = \frac{2k}{L B_0^{1/2}} \cdot \frac{v' e^{-\eta/2} + \delta' e^{\eta/2}}{v'^2 - \delta'^2}. \quad (3.106)$$

Соответственно, решая уравнения (3.94) при $a_i = 0$, получаем

$$K_0 = \frac{2k^2(1-\varepsilon^2)}{(4-\varepsilon^2)(v'^2-\delta'^2)} \left[3v'^2 \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} - \delta'^2 \frac{3-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} - \right. \\ \left. - J' v' \operatorname{ch} \eta (2+\varepsilon^2) - 2J' \delta' + \varepsilon^2 \delta' v' \operatorname{ch} \eta \right]. \quad (3.107)$$

Выделяя явно зависимость от кручения κ , это выражение можно переписать в виде

$$K_0 = \frac{2k^2(1-\varepsilon^2)}{(4-\varepsilon^2)(v'^2-\delta'^2)} \left[3\kappa^2(1+\varepsilon^2) - \kappa\delta'(6+7\varepsilon^2) - \right. \\ \left. - \kappa J'(1+2\varepsilon^2) + 2\delta'^2 \varepsilon^2 \frac{1-2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} - \frac{J'^2}{4}(1-\varepsilon^2) - \frac{\delta' J'}{2}(2-5\varepsilon^2) \right]. \quad (3.108)$$

Здесь $J' = j_0/B_0$. Для получения величины K_1 выберем амплитуды поля третьей гармоники a_3 и a_4 в скругляющей системе координат r, θ, s соответственно равными

$$a_3 = a_3^0 \sin \delta; \quad a_4 = -a_3^0 \cos \delta, \quad (3.109)$$

тогда, согласно (4.94), найдем

$$K_1 = \frac{4\varepsilon a_3^0}{4-\varepsilon^2} \left(\frac{2\operatorname{ch} \eta/2}{v'-\delta'} + \frac{\varepsilon \operatorname{sh} \eta/2}{v'+\delta'} \right) \frac{1}{\operatorname{ch} \eta}. \quad (3.110)$$

При применении достаточного критерия устойчивости (3.91) функцию $\gamma_1^2 e^\eta + \gamma_2^2 e^{-\eta}$ можно мажорировать по переменной $\delta(s)$:

$$\gamma_1^2 e^\eta + \gamma_2^2 e^{-\eta} \leq \frac{4k^2}{L^2 B_0} \cdot \frac{(|\delta' + u'| + |\varepsilon u'|)^2}{(v'^2 - \delta'^2)^2}. \quad (3.111)$$

Таким образом, в случае равномерно прокручивающихся магнитных поверхностей, так же как и в случае непрокручивающихся магнитных поверхностей, все величины, входящие в критерии устойчивости, выражаются в элементарных функциях.

§ 3.7. Устойчивость симметричных конфигураций

Симметричными равновесными конфигурациями называются такие конфигурации, в которых все физические величины зависят только от двух пространственных координат. Мы рассмотрим здесь конфигурации с винтовой симметрией и, в качестве предельного случая, аксиально симметричные конфигурации.

3.7.1. Конфигурации с винтовой симметрией

Простейшей моделью замкнутых равновесных плазменных конфигураций с пространственной магнитной осью являются конфигурации с винтовой магнитной осью. При рассмотрении устойчивости конфигураций выявляется влияние кручения магнитной оси.

Необходимый критерий локальной устойчивости (3.89) и достаточный критерий устойчивости (3.90) для конфигураций, обла-

дающих винтовой симметрией, записываются соответственно в виде:

$$-\bar{V}_0'' - \frac{2\beta_0 k^2 \varepsilon^2 e^{-3\eta/2} \operatorname{ch}^2 \eta}{\rho_0^2 (2 + \varepsilon) \operatorname{ch}^3 \eta / 2 (j_0/B_0 - 2\kappa)^2} > 0; \quad (3.112)$$

$$-\bar{V}_0'' - \frac{8\beta_0 k^2 e^{-2\eta} \operatorname{ch} \eta}{\rho_0^2 (2 + \varepsilon) (j_0/B_0 - 2\kappa)^2} > 0. \quad (3.113)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{V}_0'' = \frac{\pi B_0^2}{L \operatorname{ch} \eta} V_0'' = & -2k^2 \frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} \left[\frac{j_0/B_0 + 2\kappa}{j_0/B_0 - 2\kappa} + \frac{3\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{4\Sigma_3}{k} \right) \right] + \\ & + \varepsilon^2 \kappa^2 + \frac{j_0^2}{4B_0^2} (1 - \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Принято, что давление $p = p_0(1 - V/V_\Sigma)$, $\beta_0 = 2\rho_0/B_0^2$, $V_\Sigma = \pi\rho_0^2 L$. Величина $\Sigma_3 = B_0^{1/2} e^{-\eta/2} \sigma_3$ характеризует несимметричность профиля поперечного сечения граничной поверхности плазмы.

Достаточный критерий устойчивости (3.91) в рассматриваемом случае в точности совпадает с критерием (3.113), если положить в нем $j_0 = 0$.

Достаточный критерий (3.113) отличается от необходимого критерия (3.112) более сильным дестабилизирующим влиянием на устойчивость конечного давления плазмы. В случае круглых поперечных сечений магнитных поверхностей $\varepsilon = 0$ зависимость от давления в критерии (3.112) пропадает, в то время как, согласно критерию (3.113), она остается.

Поскольку при $\kappa \neq 0$ существует прокручивание силовых линий при $j_0 = 0$, и следовательно, возможны равновесные конфигурации, мы можем получить критерии устойчивости таких равновесных конфигураций, положив в (3.112) и (3.113) величину j_0 , равной нулю:

$$2k^2 \frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} \left[\frac{3\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{4\Sigma_3}{k} \right) - 1 \right] - \varepsilon^2 \kappa^2 - \frac{\beta_0 k^2 \varepsilon^2 e^{-3\eta/2} \operatorname{ch}^2 \eta}{2\rho_0^2 (2 + \varepsilon) \kappa^2 \operatorname{ch}^3 \eta / 2} > 0; \quad (3.114)$$

$$2k^2 \frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} \left[\frac{3\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{4\Sigma_3}{k} \right) - 1 \right] - \varepsilon^2 \kappa^2 - \frac{2\beta_0 k^2 e^{-2\eta} \operatorname{ch} \eta}{\rho_0^2 (2 + \varepsilon) \kappa^2} > 0. \quad (3.115)$$

Заметим, что для винтовой магнитной оси кривизна k и кручение κ определяются формулами:

$$k = \frac{R}{R^2 + \lambda^2}; \quad \kappa = \frac{\lambda}{R^2 + \lambda^2},$$

где R — радиус цилиндра, на который навита винтовая линия, а $\lambda = 2\pi\lambda$ — шаг винта.

При условии $\varepsilon^2 \ll 1$ критерии устойчивости (3.114) и (3.115) приводят к следующим ограничениям на допустимое давление плазмы в винтовых конфигурациях без продольного тока:

$$\beta_0 < \frac{4\kappa^2 \rho_0^2}{\varepsilon^2} \left[\frac{3\varepsilon}{4} (1 - \Gamma) - \varepsilon^2 \frac{\kappa^2}{k^2} \right]; \quad \beta_0 < \kappa^2 \rho_0^2 \left[\frac{3\varepsilon}{4} (1 - \Gamma) - \varepsilon^2 \frac{\kappa^2}{k^2} \right]. \quad (3.116)$$

Здесь $\Gamma = 4\Sigma_3/k$ — характеристика несимметричности профиля поперечных сечений магнитных поверхностей. Как показывают выражения (3.116), достаточный критерий устойчивости накладывает в $4/\varepsilon^2$ раз более жесткое ограничение на допустимое давление, чем необходимый критерий локальной устойчивости.

Согласно критериям (3.114) и (3.115), равновесная конфигурация плазмы с винтовой магнитной осью без продольного тока может быть устойчивой только в случае несимметричного профиля поперечного сечения магнитных поверхностей, когда $\varepsilon\Sigma_3 \neq 0$. Такую несимметрию можно создать, например, с помощью наложения дополнительного трехзаходного винтового поля [19].

В случае круговых поперечных сечений магнитных поверхностей $\varepsilon = 0$ критерии (3.112) и (3.113) принимают вид:

$$k^2 \frac{j_0/B_0 + 2\kappa}{j_0/B_0 - 2\kappa} - \frac{j_0^2}{4B_0^2} > 0; \quad (3.117)$$

$$k^2 \frac{j_0/B_0 + 2\kappa}{j_0/B_0 - 2\kappa} - \frac{j_0^2}{4B_0^2} - \frac{4k^2\beta_0}{\rho_0^2 (j_0/B_0 - 2\kappa)^2} > 0. \quad (3.118)$$

Максимум левой части неравенства (3.117), рассматриваемой как функция от $i = j_0/\kappa\beta_0$, достигается при $k^2/\kappa^2 = -i(i-1)^2$. Этот максимум положителен, если $\frac{k^2}{\kappa^2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{5}+3)^2}{\sqrt{5}-1} \approx 11$. Таким образом, в случае круглых поперечных сечений винтового плазменного шнура области устойчивости могут существовать только при $j_0 \neq 0$ и при достаточно малом шаге винта.

3.7.2. Аксиально симметричные конфигурации

Критерии устойчивости для аксиально симметричных тороидальных конфигураций можно получить из (3.112), (3.113) при $\kappa \rightarrow 0$:

$$2k^2 \frac{1-\varepsilon}{2+\varepsilon} \left[1 + \frac{3\varepsilon}{4} (1-\Gamma) \right] - \frac{j_0^2 (1-\varepsilon^2)}{4B_0^2} - \frac{2\beta_0 B_0^2 k^2 \varepsilon^2 e^{-3\eta/2} \operatorname{ch}^2 \eta}{\rho_0^2 (2+\varepsilon) \operatorname{ch}^3 \eta/2 j_0^2} > 0; \quad (3.119)$$

$$2k^2 \frac{1-\varepsilon}{2+\varepsilon} \left[1 + \frac{3\varepsilon}{4} (1-\Gamma) \right] - \frac{j_0^2 (1-\varepsilon^2)}{4B_0^2} - \frac{8\beta_0 B_0^2 k^2 \varepsilon^{-2\eta} \operatorname{ch} \eta}{\rho_0^2 (2+\varepsilon) j_0^2} > 0. \quad (3.120)$$

Если сечения магнитных поверхностей не круглые $\varepsilon \neq 0$, то, согласно обоим критериям (3.119) и (3.120), устойчивость аксиально симметричных конфигураций существенно зависит от кривизны магнитной оси k , от эллиптичности сечений, от несимметричности

сечений ε и от давления плазмы. В случае круглых сечений $\varepsilon = 0$ зависимость от Γ пропадает в обоих критериях (3.119)—(3.120), однако зависимость от $\beta_0 = \frac{2\rho_0}{B_0^2}$ в необходимом критерии (3.119) пропадает, а в достаточном критерии (3.120) остается:

$$k^2 - \frac{j_0^2}{4B_0^2} > 0; \quad (3.119a)$$

$$k^2 - \frac{j_0^2}{4B_0^2} - \frac{4\beta_0 k^2 B_0^2}{\rho_0^2 j_0^2} > 0. \quad (3.120a)$$

Согласно (3.120a), область устойчивости при $\varepsilon = 0$ ограничена неравенствами

$$1 - \sqrt{1 - 4\beta_0 R^2/\rho_0^2} < j_0^2 R^2/2B_0^2 < 1 + \sqrt{1 - 4\beta_0 R^2/\rho_0^2} \quad (3.120б)$$

и, следовательно, критерий (3.120a) близок к критерию (3.119a), только когда $\beta_0 \ll \rho_0^2/4R^2$, где $R = 1/k$. Отметим, что достаточный критерий (3.120a) был получен в работе [15] методом разложения по винтовым гармоникам.

В общем случае квазиэллиптических сечений магнитных поверхностей $\varepsilon \neq 0$, области устойчивости по плотности тока, согласно необходимому критерию (3.119) и достаточному критерию (3.120), ограничены неравенствами:

$$\frac{1 + \varepsilon\Gamma_0}{1 + \varepsilon} \frac{1 - \sqrt{1 - M\beta_0 R^2/\rho_0^2}}{2 + \varepsilon} < \frac{j_0^2 R^2}{2B_0^2} < \frac{1 + \varepsilon\Gamma_0}{1 + \varepsilon} \frac{1 + \sqrt{1 - M\beta_0 R^2/\rho_0^2}}{2 + \varepsilon}, \quad (3.121)$$

где $\Gamma_0 = (3/4)(1 - 4\Sigma_3/k)$, а коэффициенты M соответственно равны:

$$M_1 = \frac{\varepsilon^2 (2 + \varepsilon) (1 - \text{th } \eta/2)^3}{2 (1 + \varepsilon\Gamma_0)^2 (1 - \varepsilon)^2}; \quad M_2 = \frac{2(2 + \varepsilon) (1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon\Gamma_0)^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (3.122)$$

Если $\varepsilon \neq 0$, то согласно обоим критериям (3.119) и (3.120) области устойчивости исчезают при некотором достаточно большом давлении плазмы. Ограничения на давление, при условии $\varepsilon \ll 1$, можно записать соответственно в виде:

$$\beta_0^1 < \frac{1 + \varepsilon\Gamma_0}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\rho_0^2}{R^2}; \quad \beta_0^2 < \frac{1 + \varepsilon\Gamma_0}{4} \frac{\rho_0^2}{R^2}. \quad (3.123)$$

Существенное влияние на устойчивость плазмы при $\varepsilon \neq 0$ оказывает несимметричность сечений магнитных поверхностей, характеризующаяся параметрами Σ_3 или Γ_0 . При $\varepsilon > 0$, когда малая полуось эллипса ориентирована в направлении нормали к магнитной оси, устойчивость улучшается, если $\Gamma_0 > 0$. При этом внутренняя сторона эллипса уплощается, а внешняя заостряется. В случае $\varepsilon < 0$ несимметричность сечений улучшает устойчивость, если, наоборот, внешняя сторона эллипса уплощается, а внутренняя заостряется. Более целесообразным, по-видимому, является случай $\varepsilon > 0$. Соответствующая несимметричность поперечных сечений

магнитных поверхностей может быть создана как с помощью наложения дополнительных витков с током, так и с помощью подходящего подбора профиля поперечного сечения проводящего кожуха

3.7.3. Области устойчивости

Если ограничиться симметричными относительно нормали ν поперечными сечениями магнитных поверхностей, то профиль поперечного сечения внешней магнитной поверхности можно выбрать из семейства $\Psi = \text{const}$, где

$$\Psi = B_0 \{ e^\eta x^2 + e^{-\eta} y^2 + [(\Sigma_1 + \Sigma_3) e^{2\eta} x^2 + (\Sigma_1 - 3\Sigma_3) y^2] x \};$$

$$x = B_0^{-1/2} e^{-\eta/2} r \cos \vartheta; \quad y = B_0^{-1/2} e^{\eta/2} r \sin \vartheta.$$

Произвольные параметры Σ_1 и Σ_3 определяют форму поперечных сечений семейства $\Psi = \text{const}$, которое в зависимости от соотношения Σ_1 и Σ_3 может иметь одно, два и три ребра сепаратрисы. Координаты этих ребер выражаются формулами:

$$1) \quad x_1 = -\frac{2}{3} \frac{e^{-\eta}}{\Sigma_3 + \Sigma_1}, \quad y_1 = 0;$$

$$2) \quad x_2 = \frac{e^{-\eta}}{3\Sigma_3 - \Sigma_1}, \quad y_2^2 = \frac{9\Sigma_3 + \Sigma_1}{(3\Sigma_3 - \Sigma_1)^3}.$$

Для численного расчета областей устойчивости критерии (3.112) и (3.113) удобно записать в виде:

$$G_1(i_0) = -\bar{V}_0'' - \frac{\beta_0 \varepsilon^2 (1-t)^3}{2k^2 \rho_0^2 (2+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)} \cdot \frac{1}{(i_0 - \kappa_0)^2} > 0; \quad (3.112a)$$

$$G_2(i_0) = -\bar{V}_0'' - \frac{2\beta_0 (1-\varepsilon)^2}{k^2 \rho_0^2 (2+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(i_0 - \kappa_0)^2} > 0, \quad (3.113a)$$

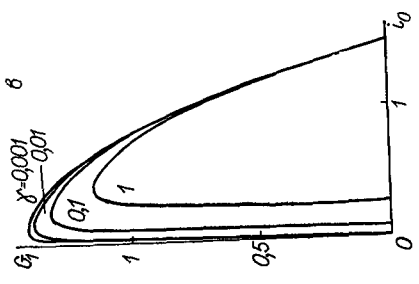
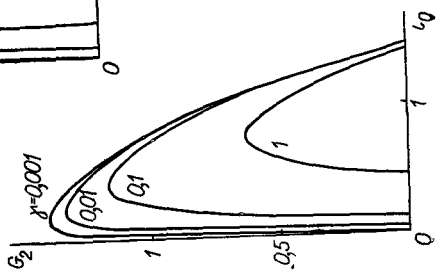
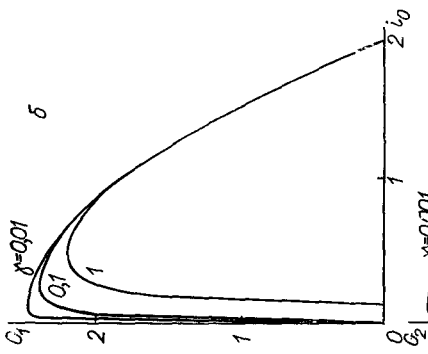
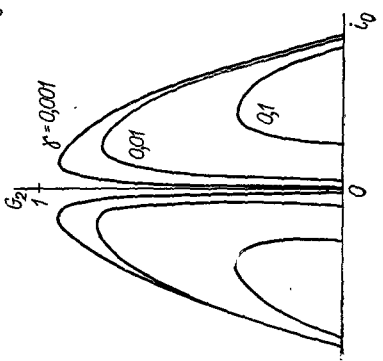
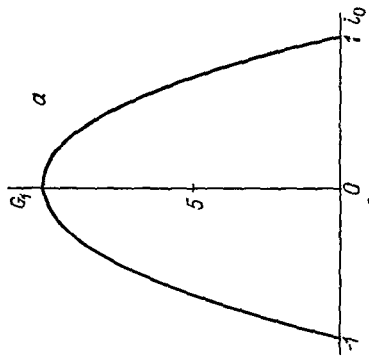
где $\bar{V}_0'' = -2 \frac{1-\varepsilon}{2+\varepsilon} \left(\frac{i_0 + \kappa_0}{i_0 - \kappa_0} + \varepsilon \Gamma_0 \right) + \varepsilon^2 \kappa_0^2 + i_0^2 (1-\varepsilon^2)$;

$$i_0 = j_0 / 2k B_0; \quad \kappa_0 = \kappa/k; \quad t = \text{th } \eta/2 = \varepsilon / (1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}); \quad \Gamma_0 = (3/4) \times \\ \times (1 - 4\Sigma_3/k).$$

Левые части неравенств (3.112a) и (3.113a) при различных параметрах ε , κ_0 , Γ_0 и $\beta_0 = \beta_0/k^2 \rho_0^2$ представлены на рис. 4 и 5.

§ 3.8. Устойчивость конфигураций с прокручивающимися магнитными поверхностями

Предполагая, аналогично предыдущему, «параболическое» распределение давления $p = p_0(1 - V/V_\Sigma)$, $V_\Sigma = \pi \rho_0^2 L$, получаем необходимое условие устойчивости (3.89) и достаточные условия



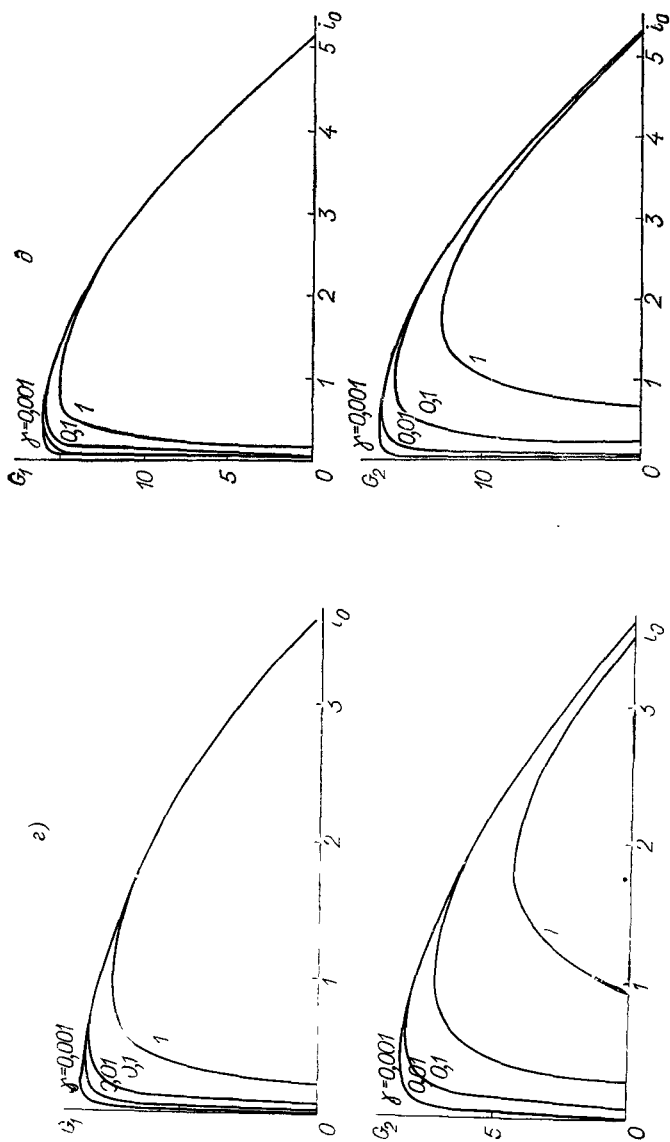


Рис. 4. Области устойчивости аксиально симметричных торондальных конфигураций $\gamma = \beta_0/k^2\rho_0^2$:
 $a - \epsilon = 0$; $b - \epsilon = 0.6$, $\Sigma_3 = 15/4$; $c - \epsilon = 0.6$, $\Sigma_3 = 7/4$; $d - \epsilon = -0.6$, $\Sigma_3 = -7/4$; $e - \epsilon = -0.6$, $\Sigma_3 = -15/4$.

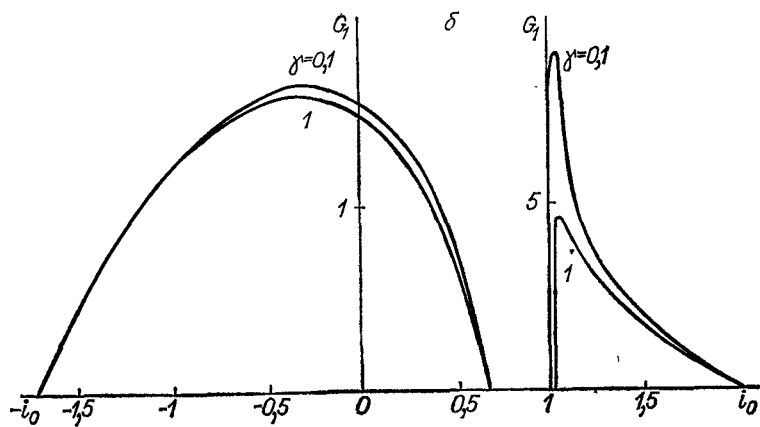
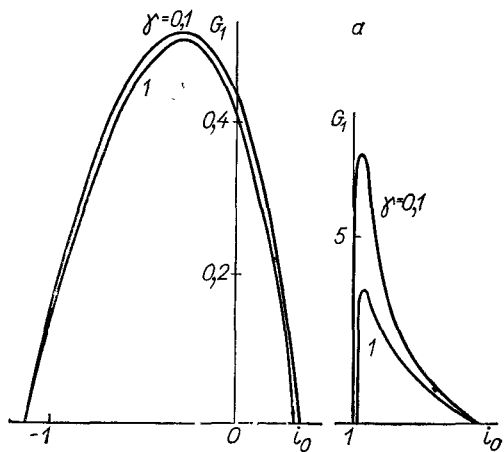
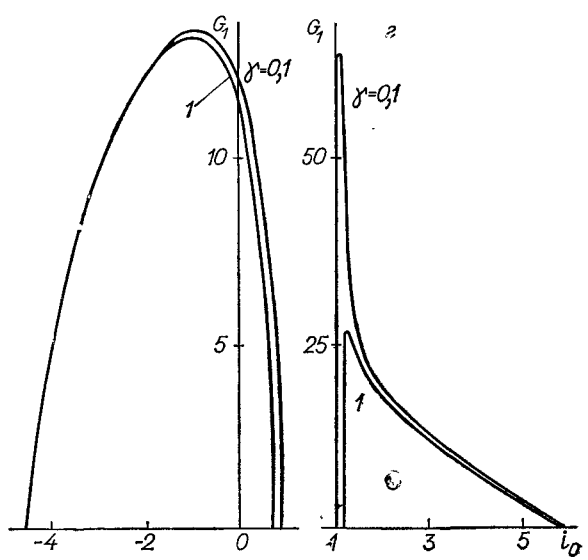
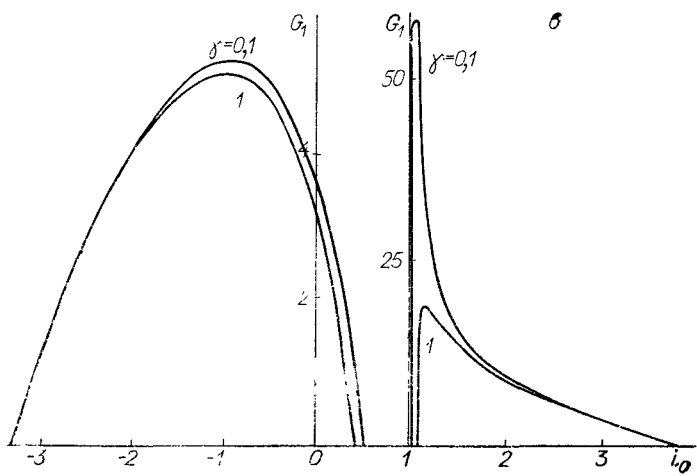


Рис. 5. Области устойчивости винтовых конфи
 а- $\epsilon=0,6$, $\Sigma_3=7/4$; б- $\epsilon=0,6$, $\Sigma_3=15/4$; в- $\epsilon=$



гураций $\gamma = \beta_0/k^2\rho_0^2$; $\kappa/k = 1$:
 $-0,6$, $\Sigma_3 = -\sqrt{4}$; $\varepsilon - \varepsilon = -0,6$, $\Sigma_3 = -15/4$.

Устойчивости (3.90) и (3.91) соответственно в виде:

$$-\bar{V}_0'' - \frac{\beta_0 k^2 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2)}{2\rho_0^2 (4 - \varepsilon^2)} \times \frac{(2 - \varepsilon t) [(\delta' + \bar{v}')^2 + \varepsilon^2 \bar{v}'^2] + 2\varepsilon (\varepsilon - 2t) \bar{v}' (\delta' + \bar{v}')}{\text{ch}^2 \eta/2 (v'^2 - \delta'^2)^2} > 0; \quad (3.124)$$

$$-\bar{V}_0'' - \frac{4\beta_0 k^2}{\rho_0^2 (4 - \varepsilon^2)} \cdot \frac{(\delta' + \bar{v}')^2 + \varepsilon^2 \bar{v}' (\delta' + 2\bar{v}')}{\text{ch} \eta (v'^2 - \delta'^2)^2} > 0; \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} & -\bar{V}_0'' - \frac{2\beta_0 k^2}{\rho_0^2 (4 - \varepsilon^2)} \times \\ & \times \frac{(4 - \varepsilon^2) (|\delta' + u'| + |\varepsilon u'|)^2 - (2 - \varepsilon^2) (\delta' + u')^2 + \varepsilon^2 u' (2\delta' + \varepsilon^2 u')}{\text{ch} \eta (v'^2 - \delta'^2)^2} > 0. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Здесь $u' = \delta' - \kappa$; $\bar{v}' = v' \text{ch} \eta$; $t = \text{th} \eta/2$, а магнитная яма, согласно (3.104), представлена выражением

$$\begin{aligned} -\bar{V}_0'' &= -\frac{\pi B_0^2}{L \text{ch} \eta} V_0'' = \frac{k^2}{2} - \varepsilon^2 (\delta' - \kappa)^2 \cdot \frac{j_0^2 (1 - \varepsilon^2)}{4B_0^2} - \\ & - \frac{4\varepsilon \bar{a}_3 \text{ch} \eta/2}{(4 - \varepsilon^2) \text{ch} \eta} \left(\frac{2}{v' - \delta'} + \frac{\varepsilon t}{v' + \delta'} \right) + \frac{2k^2 (1 - \varepsilon^2)}{(4 - \varepsilon^2) (\delta'^2 - v'^2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{3v'^2 (1 + \varepsilon^2) - \delta'^2 (3 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon^2} - \frac{j_0}{B_0} [\bar{v}' (2 + \varepsilon^2) + 2\delta'] + \varepsilon^2 \delta' \bar{v}' \right\}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

причем, как это предполагалось выше, в критерии (3.126) следует положить $j_0 = 0$.

Рассмотрим сначала случай двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью $\kappa = 0$ при условии $j_0 = 0$. В этом случае критерии (3.124)–(3.126) соответственно дают:

$$-\bar{V}_0'' - \frac{\beta_0 k^2 (1 - \varepsilon^2)}{2\rho_0^2 (4 - \varepsilon^2) \delta'^2} \cdot \frac{8 - 2\varepsilon (\varepsilon - 2t) - \varepsilon^3 t}{\varepsilon^2 \text{ch}^2 \eta/2} > 0; \quad (3.128)$$

$$-\bar{V}_0'' - \frac{4\beta_0 k^2}{\rho_0^2 (4 - \varepsilon^2) \delta'^2} \cdot \frac{4 + 3\varepsilon^2}{\varepsilon^4 \text{ch} \eta} > 0; \quad (3.129)$$

$$-\bar{V}_0'' - \frac{4\beta_0 k^2}{\rho_0^2 (4 - \varepsilon^2) \delta'^2} \cdot \frac{4 + 3\varepsilon^2 + 2|\varepsilon| (4 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^4 \text{ch} \eta} > 0, \quad (3.130)$$

где

$$-\bar{V}_0'' = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{12 - 17\varepsilon^2}{4 - \varepsilon^2} - \varepsilon^2 \delta'^2 + \frac{8a_3^0 \text{ch}^3 \eta/2}{\varepsilon \delta' \text{ch}^2 \eta} \cdot \frac{2 - \varepsilon t}{4 - \varepsilon^2}. \quad (3.131)$$

В случае чисто эллиптических поперечных сечений магнитных поверхностей, когда $a_3^0 = 0$, для отрицательности V_0'' необходимо наличие кривизны магнитной оси $k \neq 0$ и требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\varepsilon^2}{2} < 1 + \frac{17}{8n^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{17}{8n^2}\right)^2 - \frac{3}{2n^2}}, \quad (3.132)$$

где n — число оборотов двухзаходного винтового магнитного поля на длине $L = 2\pi R$. Отсюда для $n = 1$ и $n \gg 1$ соответственно вытекает

$$\varepsilon^2 < 1/2; \quad \varepsilon^2 < 3/2n^2. \quad (3.133)$$

Как показывают выражения (3.128)—(3.130), давление плазмы всегда оказывает дестабилизирующее действие. Ограничения на величину $\beta_0 = 2\rho_0/B_0^2$, которые накладывают условия устойчивости (3.128)—(3.130), можно представить в виде [34]:

$$\beta_0 < \varepsilon^2 n^2 \left(\frac{3}{2} - \varepsilon^2 n^2 + \frac{4A_3^0}{\varepsilon n} \right) \frac{\rho_0^2}{R^2}; \quad (3.134)$$

$$\beta_0 < \frac{\varepsilon^4 n^2}{4} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon^2 n^2 + \frac{4A_3^0}{\varepsilon n} \right) \frac{\rho_0^2}{R^2}; \quad (3.135)$$

$$\beta_0 < \frac{\varepsilon^4 n^2}{4} (1 + 2|\varepsilon|) \left(\frac{3}{2} - \varepsilon^2 n^2 + \frac{4A_3^0}{\varepsilon n} \right) \frac{\rho_0^2}{R^2}. \quad (3.136)$$

Здесь предположено, что $\varepsilon^2 \ll 1$, и введены обозначения $k = 1/R$, $n = R\delta'$, $A_3^0 = a_3^0/k^3$. Отсюда видно, что достаточный критерий (3.135) дает в $4/\varepsilon^2$ раз более жесткое ограничение на допустимое давление, чем необходимый критерий (3.134). Достаточный критерий (3.136) является еще в $(1+2|\varepsilon|)$ раз более жестким, чем (3.135). Существенное влияние на устойчивость оказывает несимметричность поперечных сечений магнитных поверхностей, описываемая параметром A_3^0 . Соответствующая несимметричность может быть создана трехзаходным винтовым магнитным полем, которое равномерно прокручивается вокруг магнитной оси в полтора раза медленней, чем основное двухзаходное поле.

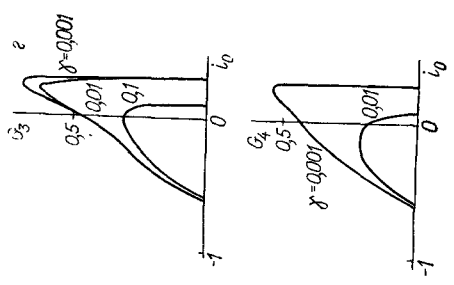
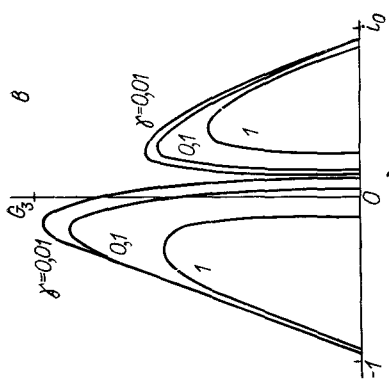
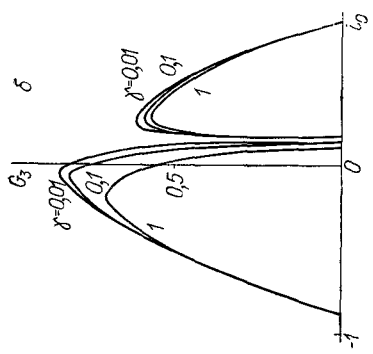
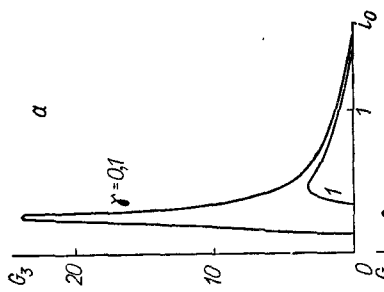
Критерии устойчивости (3.124) и (3.125) для двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью при наличии продольного тока запишем в виде:

$$G_3(i_0) = -\bar{V}_0'' - \frac{\beta_0 \varepsilon t (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}{k^2 \rho_0^2 (4 - \varepsilon^2)} \times \\ \times \frac{(2 - \varepsilon t) [(2n + i_0)^2 + \varepsilon^2 (n + i_0)^2] - 2\varepsilon (\varepsilon - 2t) (n + i_0) (2n + i_0)}{[(n + i_0)^2 (1 - \varepsilon^2) - n^2]^2} > 0; \quad (3.124a)$$

$$G_4(i_0) = -\bar{V}_0'' - \frac{4\beta_0 (1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{k^2 \rho_0^2 (4 - \varepsilon^2)} \cdot \frac{(2n + i_0)^2 + \varepsilon^2 (n + i_0) (3n + i_0)}{[(n + i_0)^2 (1 - \varepsilon^2) - n^2]^2} > 0, \quad (3.125a)$$

где

$$-\bar{V}_0'' = \frac{1}{2} - \varepsilon^2 n^2 - i_0^2 (1 - \varepsilon^2) - \frac{2(1 - \varepsilon^2)(4 - \varepsilon^2)^{-1}}{(n + i_0)^2 (1 - \varepsilon^2) - n^2} \times \\ \times \left\{ 2\varepsilon^2 n^2 \frac{1 - 2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} - i_0^2 (1 - \varepsilon^2) - i_0 n (2 - 5\varepsilon^2) - \right. \\ \left. - 4\varepsilon A_3^0 [n + (1 - \varepsilon t^3)(n + i_0)] \right\}.$$



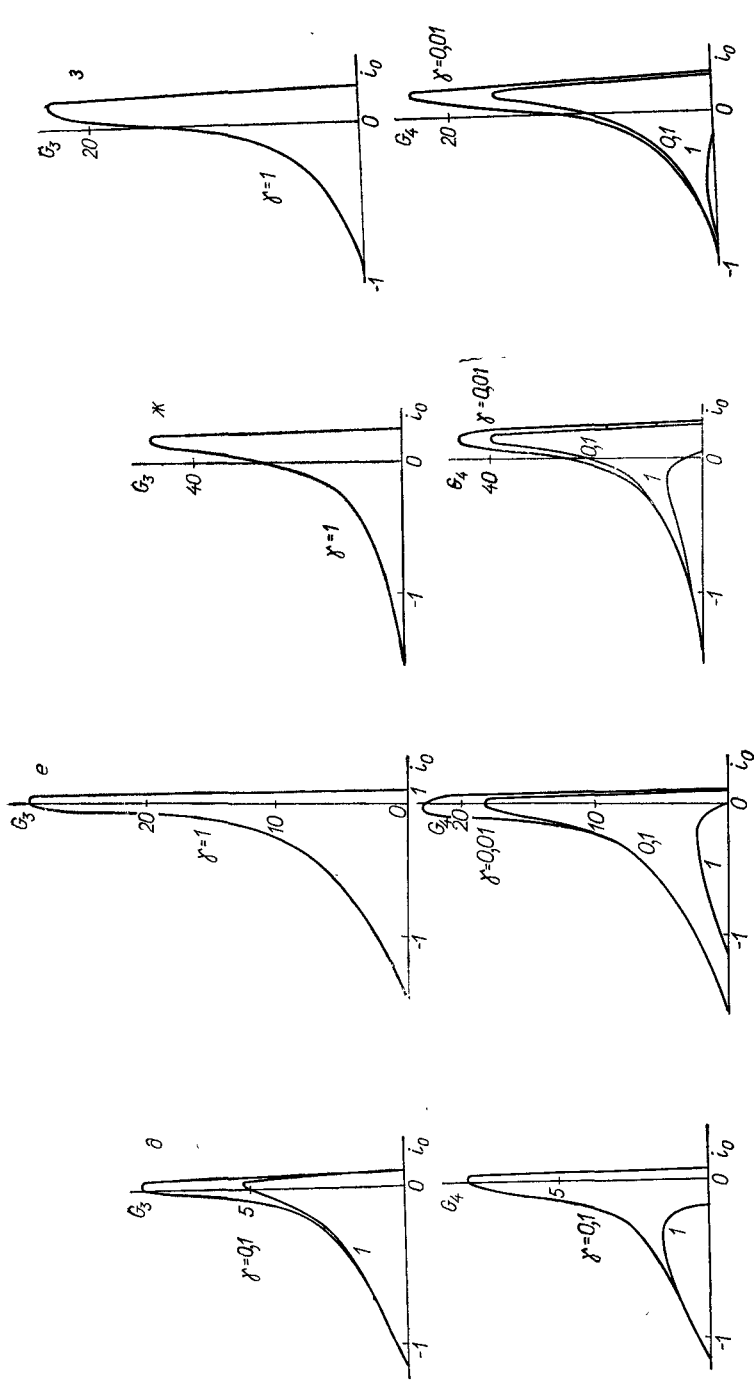


Рис. 6. Области устойчивости двухзаходного стеллятора с круговой магнитной осью $\gamma = \beta_0/k^2\rho_0^2$: $\sigma - n = 1, \epsilon = 0.6, A_3 = -1$; $\delta - n = 5, \epsilon = 0.1, A_3 = 0$; $\epsilon - n = 1, \epsilon = 0.6, A_3 = 0$; $\delta - n = 1, \epsilon = 0.3, A_3 = 1$; $\epsilon - n = 1, \epsilon = 0.3, A_3 = 5$; $\sigma - n = 5, \epsilon = 0.3, A_3 = 10$; $\gamma - n = 5, \epsilon = 0.3, A_3 = 5$.

Величина $A_3^0 = \text{ch}^3 \frac{\eta}{2} \frac{a_3^0}{k^3}$ характеризует амплитуду трехзаходного винтового поля, делающего $2n/3$ оборота на длине $L = 2\pi R$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ прокручивание магнитных поверхностей естественно не влияет на устойчивость и условия (3.124а), (3.125а) переходят в условия устойчивости (3.119а), (3.120а) для аксиально симметричной конфигурации.

Левые части неравенств (3.124а) и (3.125а) при различных параметрах ε , n , A_3^0 и $\beta_0 = \beta_0/k^2\rho_0^2$ изображены на рис. 6.

§ 3.9. Заключение

1. Выше было рассмотрено применение необходимого критерия локальной устойчивости Мерсье (3.68), точного достаточного критерия устойчивости (3.69) и приближенного достаточного критерия устойчивости (3.70) к квазиоднородным замкнутым конфигурациям. Как показывает это рассмотрение, основным стабилизирующим механизмом, обеспечивающим существование области устойчивости, является механизм, связанный с наличием магнитной ямы. В замкнутых конфигурациях возникновение магнитной ямы обусловлено кривизной магнитной оси. Глубина магнитной ямы и устойчивость замкнутых конфигураций в рассматриваемом приближении зависят от напряженности магнитного поля, от продольного тока, от давления плазмы, от кривизны и кручения магнитной оси, от эллиптичности и несимметричности профиля поперечных сечений магнитных поверхностей и от скорости прокручивания этих сечений вокруг магнитной оси. Продольный ток и давление плазмы всегда оказывают дестабилизирующее действие.

2. При отсутствии продольного тока существование замкнутых равновесных конфигураций рассматриваемого типа обусловлено прокручиванием силовых линий вокруг магнитной оси. Это прокручивание создается либо кручением магнитной оси, либо прокручиванием сечений магнитных поверхностей вокруг магнитной оси. В последнем случае, очевидно, необходимо наличие эллиптичности сечений магнитных поверхностей, которая обычно создается внешним двухзаходным винтовым магнитным полем. Критерии устойчивости для конфигураций без продольного тока сводятся к ограничениям на допустимое давление плазмы.

В случае винтовой конфигурации применение необходимого критерия устойчивости (3.68) приводит к ограничению (3.116), в то время как оба достаточные критерия устойчивости, как точный (3.69), так и приближенный (3.70), приводят к одинаковому ограничению (3.116б), которое при малых ε оказывается в $4/\varepsilon^2$ раз более жестким. Для устойчивости винтовой конфигурации принципиально необходима несимметричность сечений магнитных поверхностей.

В случае прокручивающихся магнитных поверхностей (двухзаходный стеллатор) необходимый критерий устойчивости (3.68)

приводит к ограничению (3.134), приближенный достаточный критерий (3.70) приводит к ограничению (3.135) в $4/\varepsilon^2$ раз более жесткому, а точный достаточный критерий (3.69) дает еще в $(1 + 2|\varepsilon|)$ раз более жесткое ограничение (3.136).

Для рассматриваемой конфигурации двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью область устойчивости существует и при чисто эллиптических поперечных сечениях магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси, однако следует иметь в виду, что существенное влияние на устойчивость оказывает дополнительное трехзаходное винтовое магнитное поле, которое делает в полтора раза меньше оборотов вокруг магнитной оси, чем основное двухзаходное винтовое поле.

При прочих равных условиях устойчивость улучшается при увеличении отношения малого радиуса плазменного тора к большому, причем допустимое давление плазмы обратно пропорционально квадрату радиуса кривизны магнитной оси. Как уже упоминалось выше, устойчивость обусловлена кривизной магнитной оси, и поэтому представляется нецелесообразной конфигурация с магнитной осью в виде рейстрекка с прямолинейными участками.

3. При наличии продольного тока возможны замкнутые равновесные конфигурации, магнитная ось которых не обладает кручением и магнитные поверхности не прокручиваются вокруг магнитной оси. Простейшими конфигурациями такого типа являются аксиально симметричные тороидальные конфигурации с круговой магнитной осью. Условие существования равновесного состояния для таких конфигураций в случае круглых поперечных сечений магнитных поверхностей приводит к ограничению $\beta_J = -16\pi^2 R p'(V)/j_0^2 < R_0/\rho_0$, где R_0/ρ_0 — отношение большого и малого радиусов плазменного тора.

Таким образом, чем больше продольный ток, тем большее давление плазмы допускается с точки зрения существования равновесного состояния. Необходимый критерий устойчивости (3.68) приводит при этом к ограничению $j_0 R/B_0 < 2$, так что, при отсутствии эллиптичности сечений магнитных поверхностей $\varepsilon = 0$ локальная устойчивость плазмы зависит только от продольного тока, продольного магнитного поля и радиуса кривизны магнитной оси R . Дестабилизирующее действие продольного тока уравнивается стабилизирующим действием продольного магнитного поля и кривизны магнитной оси $k = 1/R$. Приближенный достаточный критерий устойчивости (3.70) при $\varepsilon = 0$ приводит к ограничению как на продольный ток, так и на допустимое давление плазмы (3.120б). При этом область устойчивости по току при $\beta_0 = 2\rho_0/B_0^2 = \rho_0^2/4R^2$ стягивается в точку $j_0 R/B_0 = 1/\sqrt{2}$ и при больших давлениях исчезает.

В случае некруглых поперечных сечений магнитных поверхностей $\varepsilon \neq 0$, устойчивость аксиально симметричных тороидальных конфигураций с круговой магнитной осью, как согласно необходимому критерию (3.68), так и согласно достаточному критерию (3.70),

начинает зависеть от давления плазмы и несимметричности сечений магнитных поверхностей. Соответствующие области устойчивости по току ограничены неравенствами (3.121) и (3.122), причем достаточный критерий устойчивости (3.70) приводит к ограничению на допустимое давление плазмы (3.123) в $4/\epsilon^2$ раза более жесткому, чем необходимый критерий (3.68). Целесообразной формой некруглых сечений магнитных поверхностей представляются эллиптические сечения, сплюснутые вдоль нормали к магнитной оси, которые имеют уплощения с внутренней стороны плазменного тора и заострения с внешней стороны плазменного тора.

4. Существенный интерес представляют гибридные системы, равновесие и устойчивость в которых возможны как в отсутствие продольного тока, так и в некотором интервале изменения продольного тока: $-j_1 < j_0 < j_2$. К таким системам относятся рассмотренные выше конфигурации с круговой магнитной осью и прокручивающимися вокруг нее магнитными поверхностями, а также конфигурация с винтовой магнитной осью и магнитными поверхностями, прокручивающимися вместе с нормалью к магнитной оси. Первая из этих конфигураций имеет область устойчивости по току в некоторой окрестности $j_0 = 0$ и при чисто эллиптических сечениях магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси, однако с помощью дополнительного трехзаходного винтового поля, прокручивающегося в полтора раза медленней, чем основное двухзаходное винтовое поле, эта область устойчивости может быть существенно расширена.

Конфигурация с винтовой магнитной осью может иметь отличную от нуля область устойчивости в некоторой окрестности $j_0 = 0$ только в случае несимметричных сечений магнитных поверхностей. При этом, так же как и в случае аксиально симметричных конфигураций, представляются предпочтительными эллиптические сечения, сплюснутые в направлении нормали к магнитной оси, которые имеют уплощения с внутренней стороны и заострения с внешней стороны эллиптического сечения. Соответствующую конфигурацию с круговой магнитной осью можно рассматривать как гибрид «Токамака» и двухзаходного «Стелларатора», а конфигурацию с винтовой магнитной осью — как модель гибрида «Токамака» и «Стелларатора» типа восьмерки Спитцера. Рассмотренные гибридные системы представляются заслуживающими внимания, поскольку равновесие и устойчивость в них могут существовать как без продольного тока, так и в некотором интервале изменения продольного тока, и, в частности, при наличии переменного тока в плазме.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВИНТОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Потенциальная энергия колебаний плазмы при цилиндрической геометрии представляется суперпозицией парциальных энергий для отдельных винтовых гармоник, и для исследования устойчивости достаточно ограничиться

рассмотрением отдельных гармоник возмущения. Представляет также интерес рассмотрение потенциальной энергии отдельной винтовой гармоники возмущения для случая тороидальной геометрии плазмы. При этом непосредственно выявляется стабилизирующее действие магнитной ямы на винтовые возмущения в тороидальных конфигурациях с продольным током [35].

Если выбрать смещения плазмы ξ и μ в натуральной системе координат θ, ζ, V' в виде

$$\xi = \xi(V) \cos 2\pi (m\theta - n\zeta); \quad \mu = \mu_1(V) \cos 2\pi (m\theta - n\zeta) + \mu_2(V) \sin 2\pi (m\theta - n\zeta) \quad (\text{П.1})$$

и ввести следующие обозначения:

$$u = n\Phi' - m\chi'; \quad v = nJ' - mI'; \quad \mathbf{c} = n\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 = (uj - v\mathbf{B})/\rho', \quad (\text{П.2})$$

то минимизация потенциальной энергии (4.9) по μ_1 и μ_2 приводит к следующему выражению для δW_i :

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{c^2} (\nabla V (u\xi)') - [\mathbf{c} [\mathbf{j}\mathbf{e}]] \xi \right\}^2 + \left(\frac{[\mathbf{c}\mathbf{e}]^2}{c^2} 4\pi^2 u^2 - \Omega - [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2 \right) \xi^2 \right\} d\tau. \quad (\text{П.3})$$

Ограничимся для простоты случаем аксиально симметричных тороидальных конфигураций, тогда интегрирование по частям, при использовании граничного условия $\xi_{\Sigma} = 0$ либо $(\mathbf{j}\mathbf{c})_{\Sigma} = 0$, дает

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \left\{ \left\langle \frac{|\nabla V|^2}{c^2} \right\rangle (u\xi')^2 + \left\langle \frac{[\mathbf{c}\mathbf{e}]^2}{c^2} 4\pi^2 u^2 + \left[\frac{v}{\chi'} \cdot \frac{I' + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{e}_2}{c^2} - \frac{nI'}{\chi'^2} \cdot \frac{\rho' + \mathbf{B}\mathbf{B}'}{c^2} - \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{c}}{c^2} \right\rangle' \right] u + \frac{n^2}{\chi'^2} \cdot \frac{\mathbf{S}\mathbf{j}\mathbf{B} - \Omega \mathbf{B}^2 - \rho'^2}{c^2} \right\rangle \xi^2 \right\} d\tau. \quad (\text{П.4})$$

Для случая цилиндрической геометрии плазмы полученное выражение сводится к (3.37):

$$\delta W_i = \pi L \int \left\{ \left[\frac{r}{\beta} (ry\xi_r)' \right]^2 + \left[\frac{m^2}{r} y^2 - \left(\frac{2\alpha}{\beta} j_{\perp} + j_{\parallel} \right) \frac{y}{\beta} + \frac{2\alpha^2 \rho'}{\beta} \right] r^2 \xi_r^2 \right\} dr. \quad (\text{П.5})$$

Как это видно из сравнения формул (П.4) и (П.5), при сворачивании плазменного цилиндра в тор дестабилизирующий член $\sim \rho'(r)$ преобразуется согласно соотношению

$$\frac{B_{\phi}^2 \rho'(r)}{\pi r^2 L \beta} \rightarrow S \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{c^2} \right\rangle - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{c^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\rho'^2}{c^2} \right\rangle \quad (\text{П.6})$$

и может стать стабилизирующим при $\rho' < 0$. Совокупность первых двух членов в правой части соотношения (П.6) и является характеристикой магнитной ямы для винтового возмущения. Аналогичные члены описывают магнитную яму в общегеометрических критериях устойчивости (3.68) и (3.70).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Морозов А. И., Соловьев Л. С. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 3.
2. Шафранов В. Д. «Ж. техн. физ.», **40**, 241 (1970).
3. Rosenbluth M., Longmire C. App. Phys., **1**, 120 (1957).
4. Кадомцев Б. Б. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 16.
5. Кадомцев Б. Б. Там же, стр. 380.

6. Mercier C. Int. Conf. Plasma Physics. and Controlled. Nucl. Fus. Res., Salzburg, 1961, p. 95.
7. Bineau M. Ibid., p. 35.
8. Green J. M., Johnson J. L. Phys. Rev. Lett., 7, 401 (1961).
9. Соловьев Л. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 53, 627 (1967).
10. Соловьев Л. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 53, 2063 (1967).
11. Hamada S. Nucl. Fusion, 1—2, 23 (1962).
12. Suydem B. Proceeding of Second U. N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 31, 157 (1958).
13. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 53, 1157 (1967).
14. Соловьев Л. С. «Докл. АН СССР», 182, 1052 (1968).
15. Ware A. A., Haas F. A. Phys. Fluids, 9, 956 (1966).
16. Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 132.
17. Соловьев Л. С. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, стр. 245.
18. Mercier C. Nucl. Fusion, 3, 89 (1963); 4, 213 (1964).
19. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 5. М., Атомиздат, 1967, стр. 3.
20. Шафранов В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 33, 710 (1957).
21. Зуева Н. М., Соловьев Л. С. «Атомная энергия», 24, 5 (1968).
22. Зуева Н. М., Соловьев Л. С. «Атомная энергия», 26, 1 (1969).
23. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 92.
24. Юрченко Э. И. «Ж. техн. физ.», 37, 1458 (1967).
25. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res., 1, 175 (1969).
26. Bergstein I. V. et al. Proc. Roy. Soc. A244, 17 (1958).
27. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1953, стр. 198.
28. Шафранов В. Д. «Атомная энергия», 5, 38 (1956).
29. Шафранов В. Д. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 61.
30. Newcomb W. A. Ann. Phys., 10, 232 (1960).
31. Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Докл. АН СССР», 158, 831 (1964).
32. Solov'ev L. S., Shafranov V. D. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Culham. U. K. (1965); Vienna, IAEA, 1, 169 (1965).
33. Shafranov V. D. Nucl. Fusion, 8, 253 (1968).
34. Shafranov V. D., Yurchenko E. I. Nucl. Fusion, 9, 285 (1969).
35. Соловьев Л. С. «Атомная энергия», 30, 14 (1971).

СОДЕРЖАНИЕ

Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. А. А. Веденов, Д. Д. Рютов	3
Введение	3
§ 1. Основные уравнения	3
§ 2. Релаксация нерелятивистского электронного пучка	6
2.1. Одномерная релаксация	6
2.2. Задача с граничными условиями	11
2.3. Трехмерная релаксация	14
2.4. Роль неоднородности плазмы	17
§ 3. Релаксация ультрарелятивистского электронного пучка	21
3.1. Релаксация в однородной плазме	22
3.2. Релаксация в неоднородной плазме (качественное рассмотрение)	27
3.3. Релаксация в неоднородной плазме (количественное рассмотрение)	29
3.4. Волна релаксации.	36
§ 4. Аномальное сопротивление плазмы без столкновений	37
4.1. Аномальное сопротивление на начальной стадии тока	37
4.2. Асимптотическое решение задачи об аномальном сопротивлении. Автомодельные переменные	41
4.3. Исследование автомодельных уравнений для одномерной модели	44
4.4. Исследование автомодельных уравнений для трехмерной модели	46
4.5. Аномальное сопротивление току, перпендикулярному к магнитному полю	49
§ 5. Квазилинейные эффекты при расширении сгустков электронов и ионов	56
5.1. Постановка задачи	56
5.2. Вывод квазигазодинамических уравнений	59
5.3. Решение квазигазодинамических уравнений	61
5.4. Другие задачи о расширении сгустков	64
Приложение 1	65
Приложение 2	66
Приложение 3	67
Литература	68

Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. А. Б. Михайловский	70
Введение	70

Электронные неустойчивости

§ 1. Плазма с анизотропными электронами	74
1.1. Предварительные замечания	74
1.2. Электромагнитная неустойчивость двух встречных электронных потоков	75
1.3. Два встречных потока в продольном магнитном поле	77
1.4. Плазма большого давления с анизотропным распределением электронов	78
1.5. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_z = 0$ в плазме с $T_{\parallel} > T_{\perp}$	83
1.6. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_{\perp} = 0$ в плазме с $T_{\perp} > T_{\parallel}$	85
1.7. Низкочастотная неустойчивость плазмы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ на коротких волнах	87
§ 2. Раскачка колебаний плазмы группой быстрых электронов с анизотропным распределением по скоростям	88
2.1. Постановка задачи	88
2.2. Электромагнитные колебания в плазме с холодными электронами	88
2.3. Раскачка электромагнитных колебаний с $k_{\perp} = 0$	90
2.4. Раскачка низкочастотных колебаний с $k_{\perp} \neq 0$	91
§ 3. Электромагнитные неустойчивости в пучковых системах с анизотропным распределением частиц по скоростям	93
3.1. Предварительные замечания	93
3.2. Раскачка колебаний холодным пучком	93
3.3. Раскачка колебаний пучком с конечной поперечной энергией частиц	94
3.4. Кинетическая пучково-анизотропная неустойчивость	95
3.5. Раскачка вистлеров убегающими электронами	95
§ 4. Раскачка квазиэлектрических колебаний в слаборелятивистской плазме с $df_0/dv > 0$	96
4.1. Неустойчивость отрицательной массы	96
4.2. Неустойчивость колебаний на верхней гибридной частоте в плазме, содержащей небольшую долю релятивистских электронов	97
§ 5. Мазерная раскачка электромагнитных волн	99
5.1. Раскачка электромагнитных колебаний с $ck_z = 0$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$ (типа необыкновенной волны)	99
5.2. Раскачка электромагнитных колебаний с $k_{\perp} = 0$ в нерелятивистской слабоионизованной плазме инертных газов	100

Ионные неустойчивости

§ 6. Плазма с анизотропными ионами	101
6.1. Предварительные замечания	101
6.2. Неустойчивость в приближении нулевого магнитного поля ($\beta \rightarrow \infty$)	101

6.3.	Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ при $k_z = 0$	102
6.4.	Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ при $k_{\perp} = 0$	103
6.5.	Неустойчивости плазмы с $1 < \beta < m_i/m_e$	103
6.6.	Кинетические неустойчивости плазмы с $\beta \simeq 1$ при $k_{\perp} = 0$	104
6.7.	Гидродинамическая неустойчивость плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ (шланговая неустойчивость)	105
6.8.	Низкочастотная неустойчивость плазмы конечного давления с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ при $(k_z, k_{\perp}) \neq 0$ (пробкотронная неустойчивость)	105
§ 7.	Сталкивающиеся плазмы и плазма с неоднородным профилем скорости	107
7.1.	Электромагнитная неустойчивость сталкивающихся плазм	107
7.2.	Раскачка альфвеновских волн в плазме с неоднородным профилем скорости (неустойчивость Кельвина—Гельмгольца)	108
§ 8.	Конусные неустойчивости в плазме с конечным β	111
8.1.	Высокочастотная конусная неустойчивость	111
8.2.	Высокочастотная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков	112
8.3.	Циклотронная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков	112
8.4.	Неустойчивость двугорбого распределения при малой доле холодных ионов	113
8.5.	Высокочастотная конусная неустойчивость плазмы с большим β	114
§ 9.	Конусно-градиентная неустойчивость плазмы конечного давления	115
9.1.	Неустойчивость плазмы с $\beta \rightarrow 0$	115
9.2.	Дисперсионное уравнение для плазмы с конечным β	117
9.3.	Неустойчивость плазмы с конечным β	118
9.4.	Неустойчивость плазмы конечного давления с малой примесью слегка нагретых максвелловских ионов	118
§ 10.	Раскачка колебаний плазмы быстрыми ионами	119
10.1.	Быстрые ионы с анизотропным распределением по скоростям	119
10.2.	Ионно-циклотронная неустойчивость магнитозвуковых колебаний при $k_z = 0$, вызываемая частицами с $df/dv_{\perp} > 0$	121
§ 11.	Обзор теоретических и экспериментальных работ	122
§ 12.	Заключение	130
Приложение.	Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле	131
Литература		135
Взаимодействие высокочастотных полей с плазмой.	<i>А. А. Иванов</i>	139
Введение		139
§ 1.	Основные понятия и качественные оценки	140
§ 2.	Решение кинетического уравнения в присутствии высокочастотных полей	144
2.1.	Интегралы движения	144
2.2.	Интегрирование по траекториям для случая высокочастотного магнитного поля	145

2.3. Интегрирование по траекториям для случая геликона ($\beta < \Omega/\omega_{He}$)	151
2.4. Интегрирование по траекториям для случая высокочастотного электрического поля	156
§ 3. Получение дисперсионных соотношений	158
3.1. Дисперсионные соотношения для случая высокочастотного магнитного поля	159
3.2. Дисперсионное соотношение для плазмы, находящейся в поле спиральной волны (геликона) ($\beta < \Omega/\omega_{He}$)	163
3.3. Дисперсионное соотношение для высокочастотного электрического поля	164
§ 4. Исследование дисперсионных соотношений	166
4.1. Влияние высокочастотного магнитного поля на неустойчивости плазмы	166
4.2. Влияние волны типа геликон на неустойчивости плазмы при $\beta < \Omega/\omega_{He}$	178
4.3. Влияние высокочастотных электрических полей на неустойчивость плазмы	185
§ 5. Стабилизация диссипативных неустойчивостей	202
5.1. Стабилизация высокочастотным электрическим полем	202
5.2. Стабилизация высокочастотным магнитным полем	204
§ 6. Заключение	207
Литература	208
Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций. <i>Л. С. Соловьев</i>	210
Введение	210
Глава 1. Системы координат	218
§ 1.1. Натуральная осевая система координат	218
§ 1.2. Ортогональная осевая система координат	219
§ 1.3. Скругляющая осевая система координат	219
§ 1.4. Натуральная поверхностная система координат	221
Глава 2. Равновесные плазменные конфигурации	224
§ 2.1. Равновесные аксиально симметричные конфигурации плазмы	224
2.1.1. Общие соотношения	224
2.1.2. Аксиально симметричные тороидальные конфигурации в окрестности магнитной оси	225
2.1.3. Плазменный тор эллиптического сечения	228
2.1.4. Плазменный тор с круглыми приосевыми сечениями магнитных поверхностей	231
2.1.5. Натуральная метрика	234
§ 2.2. Равновесие произвольных плазменных конфигураций	235
2.2.1. Магнитные поверхности в окрестности произвольной магнитной оси	235
2.2.2. Равновесие плазмы в окрестности произвольной магнитной оси	238
§ 2.3. Интегральные характеристики равновесных тороидальных конфигураций	243
Глава 3. Условия гидромагнитной устойчивости плазмы	247
§ 3.1. Энергетический принцип	247
§ 3.2. Устойчивость плазменного цилиндра	249

3.2.1. Малые колебания плазменного цилиндра	249
3.2.2. Условия конвективной и локальной устойчивости	250
3.2.3. Неустойчивость тангенциальных разрывов	251
3.2.4. Применение энергетического принципа	254
§ 3.3. Стабилизирующее действие проводящих торцов	259
§ 3.4. Общегеометрические критерии устойчивости для замкнутых конфигураций	262
§ 3.5. Локальная устойчивость аксиально симметричных конфигураций	265
3.5.1. Конфигурации с круглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси	265
3.5.2. Устойчивость произвольных аксиально симметричных конфигураций в окрестности магнитной оси	266
§ 3.6. Общегеометрические критерии устойчивости для квазиоднородных конфигураций	267
3.6.1. Общие соотношения	267
3.6.2. Конфигурации однородного сечения с непрокручивающимися магнитными поверхностями	271
3.6.3. Конфигурации однородного сечения с равномерно прокручивающимися магнитными поверхностями	272
§ 3.7. Устойчивость симметричных конфигураций	273
3.7.1. Конфигурации с винтовой симметрией	273
3.7.2. Аксиально симметричные конфигурации	275
3.7.3. Области устойчивости	277
§ 3.8. Устойчивость конфигураций с прокручивающимися магнитными поверхностями	277
§ 3.9. Заключение	286
Приложение	288
Литература	289

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

В ы п у с к 6

Редактор *В. Н. Безрукова*
Художественный редактор *А. С. Александров*
Технический редактор *Е. И. Мазель*
Корректор *Г. Л. Кокосова*

Сдано в набор 7/IX 1971 г. Подп. к печати 16/III 1972 г.
Т-04557. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 1.
Усл. печ. л. 18,5, Уч.-изд. л. 18,1. Тираж 2 180 экз.
Цена 1 р. 92 к. Зак. изд. 70027 Зак. тип. 495

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Б. Переяславская, 46

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

АТОМИЗДАТ·1972