

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Под ред. акад. М. А. ЛЕОНТОВИЧА

ВЫПУСК 7



МОСКВА
АТОМИЗДАТ 1973

Вопросы теории плазмы. Сб. статей. Вып. 7. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1973, с. 304.

В настоящем выпуске серии сборников «Вопросы теории плазмы» с единой точки зрения излагается теория явлений распространения и взаимодействия колебаний сплошной среды, рассмотрены такие эффекты, как трансформация волн в неоднородной среде, нелинейное ограничение кинетических неустойчивостей плазмы, приводящих к появлению аномального сопротивления и турбулентной диффузии плазмы; дан обзор неоклассической теории процессов переноса в тороидальных системах, рассмотрено также циклотронное излучение плазмы.

Таблиц 4, рисунков 80, библиография 324.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЫ

А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев

ВВЕДЕНИЕ

В линейной теории плазмы произвольное возмущение можно представить в виде суперпозиции собственных колебаний, каждое из которых независимо от других. В нелинейной теории колебания в результате нелинейностей взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие во многом напоминает взаимодействие движений разных масштабов в гидродинамической турбулентности. Для плазмы, однако, картину такого взаимодействия часто можно представить на знакомом языке суперпозиции линейных собственных колебаний, но учитывая слабое взаимодействие между модами вследствие нелинейности. Это означает, что коэффициенты в разложении по собственным колебаниям становятся медленно меняющимися функциями времени и в конце концов сильно отклоняются от своих первоначальных значений, предсказываемых линейной теорией.

Такой подход теперь общепринято называть теорией слабой турбулентности. Уравнения этой теории можно вывести из первых принципов с помощью разложения исходных уравнений для плазмы по малому параметру — отношению энергий колебаний к полной энергии плазмы. Источником энергии для возбуждения колебаний в этой теории обычно служат различные неустойчивости плазмы.

Теория слабой турбулентности возникла в начале шестидесятых годов, в настоящее время с ее помощью удалось объяснить целый ряд важных нелинейных явлений: взаимодействие пучка заряженных частиц с плазмой; турбулентный нагрев плазмы; механизмы диссипации в бесстолкновительных ударных волнах; аномальное сопротивление. Метод слабой турбулентности перешагнул рамки физики плазмы и с успехом применяется в теории нелинейных диспергирующих сред вообще и, в частности, в нелинейной динамике волн на воде. Таким образом, удалось построить количественную теорию «ряби на воде» — явления, долго не имевшего количественной интерпретации.

Хотя теории слабой турбулентности в течение прошедшего десятилетия и уделялось внимание в книгах и обзорах*, тем не ме-

* Кадоццев Б. Б. Турбулентность плазмы. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.

нее назрела необходимость подытожить с единой точки зрения результаты теории слабой турбулентности, не ограничиваясь рамками только лабораторной физики плазмы.

Удобно изложить нелинейную теорию плазмы в терминах трех основных типов взаимодействия: нелинейные взаимодействия волна — волна, взаимодействие волна — частица и, наконец, взаимодействие волна — частица — волна (иногда называемое нелинейным взаимодействием волна — частица).

Первое взаимодействие *волна — волна* часто называют *резонансным рассеянием волн друг на друге*. Условие такого резонанса можно записать как

$$\sum_i \omega_i = 0, \quad \sum_i \mathbf{k}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где ω_i и \mathbf{k}_i — частота и волновой вектор волн, участвующих во взаимодействии, соответственно. Простейшим из взаимодействий такого сорта является случай трех волн. Особенно сильна связь между ними, если выполнено условие резонанса. Поскольку такое взаимодействие не включает резонансные частицы, его можно описать с помощью гидродинамических уравнений (иначе говоря, нет необходимости пользоваться кинетическими уравнениями). Взаимодействия волна — волна лежат в основе многих эффектов в нелинейной волновой динамике: параметрической неустойчивости волн (случай малых амплитуд соответствует известной распадной неустойчивости); модуляционной неустойчивости волновых пакетов в плазме и в нелинейной оптической среде; самофокусировке волн в нелинейной оптике. Интерпретируя ω и \mathbf{k} как энергию и импульс кванта, связанного с (ω, \mathbf{k}) -волной, можно заметить, что условия резонанса приводят к сохранению энергии и импульса в элементарном процессе распада одного кванта на два других или в обратном процессе. Поэтому неудивительно, что взаимодействующие волны сохраняют полную энергию и суммарный импульс.

Второе взаимодействие можно считать почти *линейным* (или *квазилинейным*). Взаимодействие *волна — частица* особенно сильно вблизи резонанса $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, (\mathbf{v} — скорость частицы, участвующей во взаимодействии). Если выполнено условие такого резонанса Ландау, частица сохраняет постоянную фазу относительно волны и эффективно ускоряется (или замедляется) электрическим полем волны. Аналогичный резонанс в магнитном поле осуществляется при условии

$$\omega - l\omega_H = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}, \quad l = 0, \pm 1, \dots,$$

где ω_H — ларморова частота частиц. Поскольку взаимодействие такого типа включает резонансные частицы, необходимо пользоваться кинетическими уравнениями. С квантовой точки зрения условие резонанса для такого взаимодействия — это условие сохранения энергии и импульса в элементарном процессе излучения или поглощения кванта с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ частицей, движущейся со скоростью \mathbf{v} . Поэтому неудивительно, что взаимо-

действие волна — частица сохраняет суммарную энергию и импульс волн и частиц (но не просто волн самих по себе). Изменение амплитуды волн, связанное с таким взаимодействием, называется *затуханием Ландау* (или обращенным затуханием Ландау), а соответствующее изменение в распределении частиц по скоростям — квазилинейной диффузией.

Третье взаимодействие *волна — частица — волна* часто называют *нелинейным затуханием Ландау*. Условие резонанса для такого взаимодействия имеет вид $\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}$, а основной механизм его напоминает механизм линейного взаимодействия волна — частица. В данном случае частица сохраняет постоянную фазу по отношению к биениям двух волн. Это взаимодействие также включает резонансные частицы и должно рассматриваться в рамках кинетической теории. Условие резонанса, написанное выше, взятое со знаком плюс, соответствует элементарному процессу одновременного излучения или поглощения частицей двух квантов. При знаке минус условие резонанса относится к элементарному процессу излучения одного кванта и поглощения другого (иначе говоря, к процессу рассеяния). Помимо сохранения суммарной энергии и полного импульса волн и частиц в процессе рассеяния сохраняется также полное число квантов. Число квантов в классическом случае можно определить как энергию $W_{\mathbf{k}}$ волны, деленную на частоту [т. е. $W_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}}$ — действие (ω, \mathbf{k})-волны].

Разумеется, в общем случае в плазме в одно и то же время происходят взаимодействия всех трех типов, и поведение плазмы определяется суммарным влиянием всех этих взаимодействий. В отдельной главе рассматривается проблема аномального сопротивления плазмы как пример взаимодействия такого типа.

Нелинейные явления в плазме не всегда можно трактовать с помощью теории слабой турбулентности. Многие эффекты в плазме относятся к случаю сильной турбулентности, подобно обычной гидродинамической турбулентности. В теории сильной турбулентности до сих пор отсутствуют надежные количественные методы. Речь идет, как правило, о получении разумных оценок по порядку величины. Некоторые приемы такого сорта обсуждаются в различных разделах обзора.

Первоначальным толчком к написанию этой статьи послужили лекции, прочитанные авторами в Международном институте теоретической физики в Триесте в 1966 г. Конспекты лекций [I] были отредактированы Д. Буком и Т. О. Нейлом и изданы в 1969 г.

За прошедшее время в нелинейной теории плазмы было получено настолько много новых результатов, что пришлось подвергнуть первоначальный вариант коренной переработке. Кроме того, появилась новая глава об аномальном сопротивлении плазмы. Чтение настоящего обзора предполагает некоторое знакомство с линейной теорией волн и неустойчивостей плазмы*.

* Михайловский А. В. Теория плазменных неустойчивостей. М., Атомиздат, 1969.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНА — ВОЛНА

§ 1.1. Резонансное взаимодействие плазменных волн

Рассмотрим нелинейное взаимодействие типа волна — волна в системе из трех плазменных волн. Примером такого взаимодействия может служить процесс распада волны конечной амплитуды на два волновых возмущения, впервые рассмотренный В. Н. Ораевским и Р. З. Сагдеевым [1]. Чтобы взаимодействие имело место, волновые векторы и частота волн должны удовлетворять условию резонанса, т. е. $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$, $\omega_0 = \omega_1 \pm \omega_2$. Разумеется, что частоты и волновые векторы каждой из волн связаны линейным дисперсионным уравнением $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Характер дисперсии играет важную роль при решении вопроса о том, возможно или невозможно резонансное

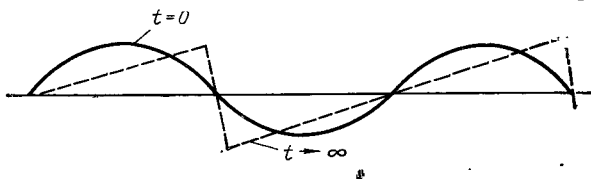


Рис. 1. Укрупнение профиля звуковой волны конечной амплитуды.

взаимодействие в данной группе волн. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, укажем на различие между нелинейными резонансами, доминирующими в обычной газовой динамике, и теми, которые важны для физики плазмы. В случае монохроматической звуковой волны большой амплитуды теория газодинамических явлений предсказывает, что основным нелинейным эффектом искажения этой волны будет укрупнение волнового фронта (рис. 1). Такое укрупнение можно понять в терминах резонансного генерирования высших гармоник. Если исходная волна большой амплитуды имела частоту ω и волновой вектор \mathbf{k} , то нелинейное взаимодействие волны приводит к появлению второй гармоники (2ω , $2\mathbf{k}$). Поскольку дисперсионное уравнение для звуковой волны является линейным $\omega = kc_s$, то гармоники, как и основное колебание, это собственные колебания системы, и поэтому они все время находятся в резонансе с основным колебанием и растут во времени. Аналогично возникают более высокие гармоники, и появление более высоких значений \mathbf{k} , т. е. более коротких волн, обуславливает укрупнение фронта (см. рис. 1).

С другой стороны, колебания плазмы, как правило, обладают сильной дисперсией (т. е. ω обычно зависит от \mathbf{k} нелинейно), так что гармоники собственных колебаний сами уже не являются собственными колебаниями среды. Следовательно, гармоники плазменной волны большой амплитуды обычно ограничиваются на очень низком

уровне и приводят только к небольшому нелинейному искажению формы волны [2]. Однако последнее не означает, что плазменные волны всегда распространяются без изменения формы. Даже если эти волны не могут взаимодействовать со своими гармониками, они могут все же попасть в резонанс с двумя другими волнами.

Резонансного генерирования гармоник можно также избежать выбором поляризации волны, так что матричный элемент оператора взаимодействия волны с ее гармониками исчезает тождественно. Пример этого — псперечные колебания типа альвеновских волн. Тем не менее, как уже замечено ранее, это не означает, что такие колебания распространяются в плазме без изменения формы.

Для иллюстрации рассмотрим взаимодействие типа волна — волна между геликоном конечной амплитуды, геликоном малой амплитуды и звуковым возмущением. Представим магнитное и электрическое поля, скорость электронной жидкости и ее плотность в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}_\perp(z, t) + \mathbf{h}_\perp(z, t); \\ \mathbf{E} &= \delta\mathbf{E}_\perp(z, t) + \mathbf{e}_\perp(z, t); \\ \mathbf{v} &= \delta\mathbf{V}_\perp(z, t) + \mathbf{v}_\perp(z, t) + \mathbf{v}_\parallel(z, t); \\ N &= N_0 + N(z, t), \end{aligned} \right\} (1.1)$$

где \mathbf{H}_0 — напряженность постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси z ; функции $\delta\mathbf{H}_\perp(z, t)$, $\delta\mathbf{E}_\perp(z, t)$ и $\delta\mathbf{V}_\perp(z, t)$ описывают геликон конечной амплитуды; \mathbf{h}_\perp , \mathbf{e}_\perp , \mathbf{v}_\perp — возмущения поля и скорости жидкости в геликоне малой амплитуды; N , \mathbf{v}_\parallel — возмущения плотности и скорости жидкости в звуковой волне. Заметим, что все три волны распространяются вдоль постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 .

Будем решать уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики по теории возмущений, рассматривая \mathbf{H}_0 , N_0 , $\delta\mathbf{H}_\perp$, $\delta\mathbf{E}_\perp$, $\delta\mathbf{V}_\perp$ как невозмущенные величины, а \mathbf{h}_\perp , \mathbf{e}_\perp , \mathbf{v}_\perp , N и \mathbf{v}_\parallel — как бесконечно малые возмущения.

Геликон конечной амплитуды представляет собой циркулярно-поляризованную волну и его можно представить в виде

$$\delta V_x - i\delta V_y = \delta V \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z) + \text{к. с.} \quad (1.2)$$

Связь между амплитудами полей $\delta\mathcal{H}$, $\delta\mathcal{E}$, определенных аналогичным образом, и скоростью течения δV дается уравнениями движения электронной жидкости и уравнениями Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} -i(\omega_0 + \omega_H)\delta V &= -(e/m)\delta\mathcal{E}; \\ k_0\delta\mathcal{H} &= -(4\pi e N_0/c)\delta V - (i\omega_0/c)\delta\mathcal{E}; \\ k_0\delta\mathcal{E} &= (i\omega_0/c)\delta\mathcal{H}; \\ \omega_{Hj} &= e_j H_0 / m_j c; \quad \omega_{He} \equiv \omega_H, \quad \omega_{Hi} \equiv \Omega_H, \quad m_e \equiv m, \quad m_i \equiv M. \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Решение этих уравнений приводит к линейному дисперсионному уравнению

$$\left. \begin{aligned} k_0^2 c^2 &= \omega_0^2 \varepsilon(\omega_0); & \varepsilon(\omega) &\equiv 1 - [\omega_p^2 / \omega(\omega + \omega_H)]; \\ \omega_{pj}^2 &= 4\pi e_j^2 N_0 / m_j; & \omega_{pe}^2 &\equiv \omega_p^2; & \omega_{pi}^2 &\equiv \Omega_p^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Уравнения первого порядка для возмущений имеют вид

$$\partial v_{\parallel} / \partial t + (c_s^2 / N_0) (\partial N / \partial z) = -(\partial / \partial z) (\mathbf{h}_{\perp} \cdot \delta \mathbf{H}_{\perp} / 4\pi N_0 M); \quad (1.5)$$

$$\partial N / \partial t + N_0 (\partial v_{\parallel} / \partial z) = 0; \quad (1.6)$$

$$m (\partial \mathbf{v}_{\perp} / \partial t) + e \{ \mathbf{e}_{\perp} + (1/c) [\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{H}_0] \} = -m v_{\parallel} (\partial / \partial z) \delta \mathbf{V}_{\perp} - \\ - (e/c) [\mathbf{v}_{\parallel} \times \delta \mathbf{H}_{\perp}]; \quad (1.7)$$

$$\text{rot } \mathbf{h}_{\perp} - (1/c) (\partial \mathbf{e}_{\perp} / \partial t) + (4\pi e/c) N_0 \mathbf{v}_{\perp} = (-4\pi e/c) N \delta \mathbf{V}_{\perp}; \quad (1.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{e}_{\perp} + (1/c) (\partial \mathbf{h}_{\perp} / \partial t) = 0. \quad (1.9)$$

Левая часть уравнений (1.5) и (1.6) описывает звуковую волну, а правая часть этих уравнений связывает звуковую волну с двумя геликонами. Аналогичным образом левая часть уравнений (1.7) — (1.9) описывает геликон малой амплитуды, а правая — связывает этот геликон со звуковой волной и геликоном конечной амплитуды.

Чтобы упростить уравнения (1.7) — (1.9), сделаем дополнительное предположение: $\beta = c_s^2 / v_A^2 \ll 1$ ($v_A^2 = H_0^2 / 4\pi N_0 M$). Можно определить порядок величины членов в правой части этих уравнений, сравнивая их с линейными членами:

$$R_1 = [v_{\parallel} (\partial / \partial z) \delta V_{\perp}] (\partial v_{\perp} / \partial t)^{-1} \sim (k_0 v_{\parallel} \delta V_{\perp} / \omega_0 v_{\perp});$$

$$R_2 = [(e/mc) v_{\parallel} \delta H_{\perp}] (\partial v_{\perp} / \partial t)^{-1} \sim (\omega_H v_{\parallel} \delta H_{\perp} / \omega_0 H_0 v_{\perp});$$

$$R_3 = [(4\pi e/c) N \delta V_{\perp}] [(4\pi e/c) N_0 v_{\perp}]^{-1} \sim (N \delta V_{\perp} / N_0 v_{\perp}).$$

Используя линейные связи между параметрами \mathbf{h}_{\perp} , \mathbf{v}_{\perp} и N , v_{\parallel} в волне, можно переписать предыдущие отношения в виде

$$R_2 \sim R_1 \approx \frac{k_0 c_s}{\omega_0} R_3 \ll R_3.$$

Следовательно, в уравнениях (1.7) и (1.8) следует удерживать лишь нелинейность, соответствующую R_3 , т. е. член $4\pi e N \delta \mathbf{V}_{\perp} / c$ в уравнении (1.8).

Так как нас интересует эволюция возмущения во времени, разложим амплитуды возмущений как функции координат в ряд Фурье. Пусть \mathbf{k}_A — волновой вектор возмущения геликонного типа, а \mathbf{k}_s — звукового. Тогда нелинейный член в правой части уравнения (1.5) должен иметь пространственную зависимость вида $\exp(i\mathbf{k}_s z)$. Это означает, что произведение двух экспонент $\hbar \delta H^* \sim \sim \exp[i(\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_0)z]$ имеет ту же зависимость, т. е. $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_A - \mathbf{k}_0$. При том же условии пространственная зависимость нелинейного члена в уравнении для геликона, пропорционального произведению $N \delta H \sim \exp[i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_0)z]$, совпадает с $\exp(i\mathbf{k}_A z)$.

В однородной плазме правая часть уравнения (1.5) равна нулю и из системы уравнений (1.5) — (1.6) получаем дисперсионное уравнение для звука $\omega_s^2 = k_s^2 c_s^2$. При наличии невозмущенной волны она не исчезает и звуковое колебание оказывается связанным с геликоном $h_{\perp} \propto \exp(ik_A z)$. Это приводит к сдвигу частот $\delta\omega$ таких связанных колебаний. Частоты колебаний геликонного типа, как правило, много больше звуковых ($\omega_A \gg \omega_s$). Поэтому будем считать, что $\omega_A \gg \delta\omega$, и представим решение уравнений (1.7)—(1.8) в виде произведения медленно меняющейся амплитуды и быстро осциллирующей экспоненты:

$$h_x - ih_y = h_{\perp}(t) \exp[i(k_A z - \omega_A t)]. \quad (1.10)$$

Зависимость же звуковых возмущений от времени пока конкретизировать не будем:

$$N(z, t) = N(t) \exp(ik_s z). \quad (1.11)$$

Исключая из системы уравнений (1.5) — (1.9) переменные e_{\perp} , v_{\perp} , v_{\parallel} , получаем два уравнения для $N(t)$ и $h_{\perp}(t)$:

$$[\partial^2/\partial t^2 + k_s^2 c_s^2]N(t) = (k_A - k_0)^2 (\delta\mathcal{H}^* h_{\perp}(t)/4\pi N_0 M) \times \\ \times \exp[i(k_A - k_0 - k_s)z - i(\omega_A - \omega_0)t]; \quad (1.12)$$

$$[k_A - (\omega_A^2/k_A c^2) \varepsilon(\omega_A)]h_{\perp}(t) = k_0 (\delta\mathcal{H}N/N_0) \times \\ \times \exp[i(k_s + k_0 - k_A)z - i(\omega_0 - \omega_A)t]. \quad (1.13)$$

Усреднив эти уравнения по быстрым осцилляциям в пространстве и во времени, получим $N, h_{\perp} = \text{const}$, если только три волновых вектора не удовлетворяют резонансным условиям $k_A = k_0 + k_s$, а частоты геликонов не близки ($\omega_A - \omega_0 \propto N/N_0$).

Если же резонансные условия по k удовлетворены, а частоты геликонов близки, то можно искать решение уравнений в виде

$$N(t) \propto \exp[-i\Omega t], \quad h_{\perp} \exp[-i\omega_A t] \propto \exp[-i(\Omega + \omega_0)t].$$

Тогда система уравнений (1.12) — (1.13) сводится к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 - k_s^2 c_s^2 & k_s^2 \delta\mathcal{H}^*/4\pi M \\ k_0 \delta\mathcal{H}/N_0 & k_A - [(\omega_0 + \Omega)^2/k_A c^2] \varepsilon(\omega_0 + \Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ h_{\perp} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.14)$$

Условие разрешимости этого уравнения (равенство нулю детерминанта) представляет собой дисперсионное уравнение для Ω .

Распадная неустойчивость. В случае малой амплитуды невозмущенного геликона решение системы уравнений (1.14) следует искать по теории возмущений. В первом приближении оно описывает распространение собственных колебаний с частотами, удовлетворяющими условию резонанса:

$$\left. \begin{aligned} \omega_s^2 &= k_s^2 c_s^2; & k_A^2 c^2 &= \omega_A^2 \varepsilon(\omega_A); \\ \omega_A &= \omega_0 + \omega_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В следующем приближении следует учесть недиагональные элементы в матрице (1.14), а в диагональных произвести разложение по малому сдвигу частоты ($\delta\Omega = \Omega - \omega_s$). В результате получаем

$$\begin{pmatrix} 2\delta\Omega \cdot \omega_s & k_s^2 \delta\mathcal{H}/4\pi M \\ k_0 \delta\mathcal{H}/N_0 & -\delta\Omega \frac{\partial}{\partial \omega_A} \cdot \frac{\omega_A^2}{k_A c^2} \varepsilon(\omega_A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ h_{\perp} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.16)$$

Из условия разрешимости находим дисперсионное уравнение [3]

$$\delta\Omega^2 = -(k_s^2 k_0 v_{gA}/8\omega_s) \cdot (|\delta\mathcal{H}|^2/2\pi N_0 M), \quad v_g \equiv \partial\omega/\partial k. \quad (1.17)$$

Входящие сюда собственные частоты и волновые векторы удовлетворяют условиям резонанса

$$k_0 = k_A - k_s; \quad \omega_0 = \omega_A - \omega_s. \quad (1.18)$$

Поскольку в дисперсионные уравнения входят лишь квадраты величин k_0 , k_A , k_s и ω_s , то знаки их могут быть выбраны произвольно.

Знаки частоты геликонов фиксированы и являются положительными. Если, кроме того, одинаковы знаки волновых векторов (направления распространения), то из уравнений (1.17) $k_s = 0$ и, следовательно, $\delta\Omega = 0$.

Поэтому знаки k_0 и k_A должны быть разными. В силу неравенства $\omega_0 \gg \omega_s$ отсюда сразу получаем $k_A \approx -k_0$, $k_s \approx -2k_0$. Как видно из уравнения (1.17), малые возмущения нарастают только в том случае, если $\omega_s < 0$. Другими словами, если энергия кванта исходной волны больше энергии каждого из квантов волн возмущений (т. е. $\omega_0 > \omega_A$, $|\omega_s|$), то она неустойчива по отношению к распаду на две волны — *распадная неустойчивость*.

Модуляционная неустойчивость. Изменение термодинамических параметров среды (плотности, давления и т. д.) под действием присутствующего в ней электромагнитного поля приводит к изменению диэлектрических свойств среды, т. е. частота колебаний зависит от амплитуды волны. В случае, когда по плазме распространяется геликон, изменение диэлектрической проницаемости среды обусловлено локальным возмущением плотности под действием давления электромагнитного поля. Поэтому частота геликона пропорциональна квадрату его магнитного поля:

$$\omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0) + \alpha |\delta\mathcal{H}|^2/2\pi. \quad (1.19)$$

Зависимость частоты колебаний от амплитуды приводит к возможности явления самомодуляции волны и разбиению ее на отдельные пакеты, если выполнен критерий Лайтхилла [4]

$$\alpha (\partial^2 \omega / \partial k_0^2) < 0. \quad (1.20)$$

Механизм неустойчивости нетрудно пояснить с помощью рис. 2, на котором изображено изменение магнитного поля в слегка промоду-

лированном геликоне. При $\alpha > 0$ в областях максимума амплитуды волны фазовая скорость больше, чем в областях минимума. В соответствии с этим волновое число, пропорциональное числу узлов функции $\delta\mathcal{H}(z)$, растет при приближении к области минимума амплитуды и падает при удалении от него. Если групповая скорость уменьшается с увеличением волнового числа ($v'_g \equiv \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} < 0$), то колебания в области 1 перед минимумом амплитуды отстают, а в области 2 после него забегают вперед. Минимум амплитуды при этом углубляется. Первые примеры модуляционных неустойчивостей обнаружены в 1957 г. Р. З. Сагдеевым была рассмотрена неустойчивость электромагнитного поля на границе с плазмой [5], а Т. Ф. Волков обнаружил, что электромагнитные колебания неустойчивы и при распространении по плазме [6] (см. задачу 6 к наст. параграфу).

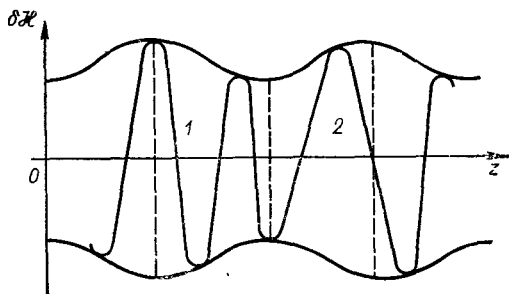


Рис. 2. Развитие модуляции амплитуды геликона.

Модуляционную неустойчивость можно описать в терминах резонансного взаимодействия волн на основе нелинейных уравнений (1.5)—(1.9). Однако теперь возмущение состоит из пары колебаний типа геликонов с волновыми векторами $k_{\pm} = k_0 \pm q$ и амплитудами h_{\pm} и несобственного колебания плотности электронной жидкости с частотой $\Omega = (d\omega_0/dk_0) q$. Соответственно этому в правую часть уравнения для колебаний плотности дают вклад биения основного колебания с колебаниями на верхней $\omega(k_+)$ и нижней $\omega(k_-)$ боковых частотах. Кроме этого в матрицу уравнения (1.14) следует добавить еще одну строку — уравнение для возмущений на нижней боковой частоте:

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 - q^2 c_s^2 & (k_+ - k_0)^2 \frac{\delta\mathcal{H}^*}{4\pi M} & (k_0 - k_-)^2 \frac{\delta\mathcal{H}}{4\pi M} \\ k_0 \delta\mathcal{H}/N_0 & k_+ - \frac{(\omega_0 + \Omega)^2}{k_+ c^2} \varepsilon(\omega_0 + \Omega) & 0 \\ k_0 \delta\mathcal{H}^*/N_0 & 0 & k_- - \frac{(\omega_0 - \Omega)^2}{k_- c^2} \varepsilon(\omega_0 - \Omega) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} N \\ h_+ \\ h_-^* \end{pmatrix} = 0. \quad (1.21)$$

Дисперсионное уравнение для колебаний геликонного типа здесь следует разложить по малой разности $[\Omega - q(d\omega_0/dk_0)]$:

$$\begin{aligned} & k_{\pm}^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] \Big|_{\omega=\omega(k_{\pm})} (\omega_0 \pm \Omega - \omega(k_{\pm})) = \\ & = \frac{1}{k_{\pm}} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] \Big|_{\omega=\omega(k_{\pm})} \left\{ \pm \left(\Omega - q \frac{\partial \omega_0}{\partial k_0} \right) - q^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{2 \partial k_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Условие разрешимости уравнения (1.21) дает дисперсионное уравнение для Ω :

$$\Omega^2 - q^2 c_s^2 = - \frac{k_0 q^4 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k_0^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial k_0}}{\left(\Omega - q \frac{\partial \omega_0}{\partial k_0} \right)^2 - q^4 \left[\frac{\partial^2 \omega_0}{2 \partial k_0^2} \right]^2} \cdot \frac{|\delta \mathcal{H}|^2}{8 \pi N_0 M}. \quad (1.23)$$

Возмущения, обуславливающие модуляцию волны, распространяются с групповой скоростью $(\Omega/q) \approx (d\omega/dk)$ и нарастают с инкрементом

$$\text{Im} \left(\Omega - \frac{\partial \omega}{\partial k} q \right) = q \sqrt{- \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k_0^2} \left(\alpha \frac{|\delta \mathcal{H}|^2}{2\pi} + \frac{\partial^2 \omega_0}{4 \partial k_0^2} q^2 \right)}, \quad (1.24)$$

где $\alpha = k_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial k_0} / 4MN_0 \left[c_s^2 - \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial k_0} \right)^2 \right]$ — коэффициент пропорциональности, связывающий нелинейное изменение частоты с $|\delta \mathcal{H}|^2/2\pi$.

Соотношение (1.24) доказывает справедливость критерия Лайтхилла (1.20). Здесь же следует подчеркнуть, что неустойчивость имеет место лишь для небольших q , соответствующих низкой частоте модуляции. Максимальный инкремент модуляционной неустойчивости при этом пропорционален второй степени амплитуды поля, как и в случае распада второй гармоники исходной волны на пару колебаний боковых частот, распространяющихся в том же направлении, что и исходная волна (см. § 1.3).

В рассматриваемом здесь пределе плазмы низкого давления ($c_s^2 \ll v_A^2$) коэффициент α отрицателен [$\alpha = -k_0/MN_0(d\omega_0/dk_0)$], поэтому условие модуляционной неустойчивости принимает вид [7]

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) > 0 \text{ или } \omega < (1/4) |\omega_H|. \quad (1.25)$$

Апериодическая неустойчивость. В плазме малого давления ($\beta \ll 1$) инкремент распадной неустойчивости волны малой амплитуды ($\delta \mathcal{H} \ll H_0$) может превысить частоту собственных звуковых колебаний, нарастание которых носит характер почти аperiодиче-

ского экспоненциального роста начальной амплитуды. Эта ветвь неустойчивости является продолжением распадной на область $\nu \gg \gg \omega_s$ и ее естественно назвать модифицированным распадом. Распадные неустойчивости имеют параметрическую природу, аналогичную параметрическому резонансу в системе двух связанных осцилляторов (связь осуществляется через исходную волну большой амплитуды — волну накачки). В § 1.3 рассматривается структура соответствующих зон Матье.

В случае, если волной накачки является электромагнитная волна ($k_0 \ll k_s$), возникает вырождение и нужно рассматривать три осциллятора [8, 9].

Для обсуждаемой здесь неустойчивости имеется область параметров, при которых по-прежнему справедлива теория возмущений (малый параметр $\delta \mathcal{H}/H_0 \ll 1$). Поэтому для описания процесса нарастания возмущений можно воспользоваться уравнением (1.14). Пренебрегая в первой строке детерминанта членом $k_s^2 c_s^2$ по сравнению с Ω^2 , получаем дисперсионное уравнение:

$$\Omega = \left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right) [k_0 k_s^2 v_g |\delta \mathcal{H}|^2 / (8\pi N_0 M)]^{1/3} \gg (\omega_0 - \omega_A). \quad (1.26)$$

Инкремент неустойчивости максимален для случая рождения геликона, распространяющегося в сторону, противоположную исходному геликону и, естественно, растет с увеличением амплитуды более медленно.

ЗАДАЧИ

1. Найти инкремент неустойчивости ленгмюровской волны (ω_0, k_0) по отношению к распаду на ленгмюровскую (ω_l, k_l) и звуковую (ω_s, k_s) волны (процесс $l \rightarrow l + s$) [2], [III].

Инкремент неустойчивости оказывается максимальным в случае возмущений, распространяющихся в ту же сторону, что и исходная волна. Поэтому можно ограничиться рассмотрением одномерной картины распада. Кроме того, ограничимся описанием колебаний с длинами волн, много большими дебаевского радиуса, когда плазма в процессе звуковых колебаний остается квазинейтральной

$$n_i^- = N_0 + N, \quad n_e = N_0 + N + n^l + \delta n.$$

Нелинейное воздействие ленгмюровских колебаний на медленное движение среды можно описать с помощью силы динамического давления (иногда называемой силой Миллера), в действительности выведенной независимо в работах [5, 10 и 11]

$$F = -m \frac{\partial}{\partial z} (v^l \delta v^*) = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^2 E^l \delta E^*}{m\omega_l \omega_0} \exp [i(k_l - k_0)z - i(\omega_l - \omega_0)t].$$

Тогда уравнение движения и уравнение непрерывности в процессе медленного движения можно свести к уравнению типа (1.26), в которое вместо магнитного давления входит динамическое:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k_s^2 c_s^2 \right) N(t) = -k_s^2 \frac{e^2 E^l \delta E^*}{mM\omega_l \omega_0} \exp [i(k_l - k_0 - k_s)z - i(\omega_l - \omega_0)t]. \quad (1)$$

В уравнениях для ленгмюровских колебаний достаточно удержать нелинейный член, соответствующий модуляции плотности электронов звуковыми волнами:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2(k_l) \right) E^l(t) = (4\pi e^2/m) N(t) \delta E \exp [i(k_0 \mp k_s - k_l)z - i\omega_0 t]. \quad (2)$$

В матричном виде уравнения (1) и (2) имеют вид

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 - k_s^2 c_s^2 & k_s^2 \frac{e^2 \delta E^* N_0}{mM\omega_0 \omega_l} \\ \omega_p^2 \frac{\delta E}{\omega_0 N_0} & (\omega_0 \mp \Omega) \varepsilon(k_l, \omega_0 \mp \Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ E^l \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Отсюда находим инкремент распадной неустойчивости:

$$\nu_d^2 \equiv -\text{Im} \Omega^2 = \frac{m}{4M} \frac{\omega_p^2}{\omega_l \omega_s} k_s^2 |\delta v|^2, \quad \delta v = -\frac{i e \delta E}{m\omega_0}. \quad (4)$$

2. Найти инкремент распада электромагнитной волны на электромагнитную и звуковую (обратное параметрическое рассеяние).

Задача по существу не отличается от предыдущей. Инкремент неустойчивости, соответствующий рассеянию электромагнитной волны на угол Θ , равен (ср. с формулой (4) задачи 1)

$$\nu_d^2 = \frac{\omega_p^4 \omega_s}{\omega_0^2 \omega_l} \cdot \frac{|\delta E|^2}{16\pi n_0 T_e}, \quad \omega_s^2 \approx \frac{2\omega_0 \omega_l T_e}{Mc^2} (1 - \cos \Theta).$$

При $\nu > \omega_s$ вместо обычного распада следует рассматривать модифицированный:

$$\nu \approx (\sqrt{3}/2) (2\omega_s \nu_d^2)^{1/3}.$$

3. Найти порог распадной неустойчивости, рассмотренной в задаче 1, в случае, если плазма изотермическая и звуковые возмущения затухают с декрементом затухания $\nu_s \leq \omega_s$ [12].

Наличие затухания ионного звука не останавливает развитие неустойчивости, а лишь замедляет его. Поэтому для определения порога следует учесть редкие соударения электронов с частотой ν_e . Система уравнений (3) (см. задачу 1) в данном случае принимает вид:

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 - 2i\Omega\nu_s + k_s^2 c_s^2 & k_s^2 \frac{N_0 e^2 \delta E}{mM\omega_0 \omega_l} \\ \omega_p^2 \frac{\delta E}{\omega_0 N_0} & (\omega_0 + \Omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega_0 + \Omega + i\nu_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ E^l \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

В первой строке детерминанта, описывающей звуковое возмущение, при разложении диагонального элемента по малой разности $(\Omega^2 - k_s^2 c_s^2)$ можно пренебречь медленным изменением амплитуды и учесть лишь вклад от затухания Ландау (считая $\nu_s \gg \nu_d$). Во второй строке удержим малые члены, описывающие диссипацию плазменной волны из-за соударений частиц. Из условия разрешимости системы (1) находим необходимое уравнение для инкремента неустойчивости:

$$\nu = \frac{\nu_e}{2} \left[\frac{\omega_0 \omega_s}{2\nu_e \nu_s} \frac{|\delta E|^2}{4\pi N_0 T_e} - 1 \right]. \quad (2)$$

Особый интерес представляет случай, когда затухание ν_s связано с резонансным взаимодействием колебаний $\frac{\omega_s}{k_s} = \frac{\omega_0 - \omega_l}{k_0 - k_l} \sim V_{T_i}$ с ионами. Нетрудно видеть, что параметрическая неустойчивость может иметь место и при условии $T_i \gg T_l$, т. е. когда нельзя говорить об ионном звуке. Этот случай подробнее рассмотрен в § 3.1, так как параметрическую неустойчивость такого типа удобно интерпретировать как индуцированное рассеяние плазмонов на ионах. Здесь же, используя известное выражение для диэлектрической проницаемости сильно неизотермической плазмы

$$\varepsilon(\Omega, k_l - k_0) = 1 - \frac{\Omega_p^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{k_s^2 c_s^2}, \quad (3)$$

перепишем детерминант уравнения (1) в терминах диэлектрической проницаемости:

$$\begin{vmatrix} \frac{\Omega_p^2 \varepsilon(\omega_l - \omega_0, k_l - k_0)}{|\varepsilon_e(\omega_l - \omega_0, k_l - k_0)|^2} & (k_l - k_0)^2 \frac{e^2 \delta E^* N_0}{m M \omega_0 \omega_l} \\ \frac{\Omega_p^2 \delta E / N_0 \omega_0}{\omega_l \varepsilon(\omega_l, k_l)} & \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Отсюда нетрудно получить инкремент неустойчивости:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_l} \nu = -\operatorname{Im} \varepsilon(\omega_l, k_l) + \frac{|\delta E|^2}{4\pi n_0 T_l} (k \lambda_D)^{-2} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(\omega_l - \omega_0)}. \quad (5)$$

4. Найти инкремент аperiodической неустойчивости электромагнитной волны ($\omega_0 \gg \omega_p$) в холодной плазме, приводящей к нарастанию возмущений ленгмюровского и звукового типов (процесс $t \rightarrow t + s$ [13]).

Уравнения, описывающие процесс распада поперечной волны на ленгмюровскую и звуковую волны, совпадают с уравнениями для случая распада ленгмюровской волны на ленгмюровскую и звуковую (см. задачу 1). Причина этого заключается в том, что в уравнения (1), (2) задачи 1 входит лишь электрическое поле волны накачки и скорость электронов в волне. Конкретная же природа электрического поля (является ли волна накачки поперечной или продольной) не играет никакой роли.

В случае немалых амплитуд появляется существенная особенность данной задачи, связанная с малостью волнового вектора волны накачки по сравнению с волновым вектором плазменной волны. Положим $k_0 = 0$ и рассмотрим такие большие амплитуды волны накачки, что инкремент распадной неустойчивости становится больше частоты собственных звуковых колебаний. Тогда оказывается, что оба биения волны накачки со звуковой волной (как с суммарной, так и с разностной частотой $\Omega \pm \omega_0$) находятся в резонансе с частотой собственных плазменных колебаний. Поэтому детерминант матричного уравнения (3) задачи 1 следует дополнить еще одной строкой:

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - k^2 c_s^2 & N_0 k^2 \frac{e^2 \delta E^*}{m M \omega_0 \omega_l} & N_0 k^2 \frac{e^2 \delta E}{m M \omega_0 \omega_l} \\ \frac{\Omega_p^2 \delta E}{\omega_0 N_0} & (\Omega + \omega_0) \varepsilon(\Omega + \omega_0, k) & 0 \\ -\frac{\Omega_p^2 \delta E^*}{\omega_0 N_0} & 0 & (\Omega - \omega_0) \varepsilon(\Omega - \omega_0, k) \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Пренебрегая в первой строке $k^2 c_s^2$ по сравнению с Ω^2 и разлагая диагональные элементы следующих двух строк по малой разности $\Delta = \omega_0 - \omega_p$, получаем

уравнение для Ω :

$$-\text{Im } \Omega^2 = \frac{\Delta^2}{4} - \frac{1}{2} \left[\Delta \omega_s^2 \omega_p \frac{|\delta E|^2}{4\pi n T_l} \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Инкремент достигает максимума $\nu_{\text{макс}} = (\sqrt{3}/2) (\omega_s^2 \omega_p |\delta E|^2 / 8\pi n T)^{1/3}$ при $\Delta = 2\nu_{\text{макс}}/\sqrt{3}$.

5. Решить задачу о распадной неустойчивости в неоднородной среде.

В неоднородной плазме помимо эффектов, связанных с затуханием, существует еще одна причина, накладывающая ограничение снизу на амплитуду волны накачки, для того чтобы возникла параметрическая неустойчивость. Дело в том, что при наличии неоднородности любой волновой пакет в процессе движения будет смещаться также в пространстве волнового вектора (иначе говоря, будет меняться его среднее волновое число). Поэтому условия резонанса можно выполнить лишь в некоторой точке, которую для простоты поместим в начало координат. В любой другой точке выполнение резонансного условия для волновых векторов влечет за собой появление расстройки частоты. Действительно, пусть волновые пакеты волны накачки (ω_0, k_0) и первой волны (ω_1, k_1) движутся в неоднородной по оси x плазме, и, следовательно, волновые векторы $k_{0,1}$, меняются от точки к точке в соответствии с уравнениями

$$\omega_i(s, k_{ix}(x)) = \text{const}. \quad (1)$$

Тогда частота второго возмущения меняется в силу двух причин: благодаря изменению резонансного волнового вектора $k_{2x} = k_{1x} - k_{0x}$ и явной зависимости частоты ω_2 от x , т. е.

$$\frac{d\omega_2}{dx} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial k_{2x}} \left(\frac{dk_{1x}}{dx} - \frac{dk_{0x}}{dx} \right). \quad (2)$$

Но вынуждающая сила в уравнении второго колебания пропорциональна $\exp[-i(\omega_0 - \omega_1)t]$ и сохраняет свою частоту. Поэтому резонанс между $\omega_2(x)$ и $\omega_0 - \omega_1$ постепенно нарушается. Когда же расстройка частоты $\delta = \omega_0 + \omega_2 - \omega_1$ превысит максимально допустимую (ширину зоны неустойчивости), рост пары связанных волн прекратится. В конце концов, волновой пакет может даже попасть в область затухания, т. е. параметрическая неустойчивость в рассматриваемой задаче должна проявиться лишь в том случае, когда коэффициент усиления при прохождении волнового пакета плазменом через резонансную область ($|\delta| < 2\nu_d$) окажется достаточно большим. Коэффициент усиления можно оценить следующим образом. При сносе волнового пакета по x приращение времени $dt = dx / (d\omega/dk_x)$. Тогда интенсивность колебаний в области неустойчивости увеличивается как

$$\exp(\Gamma) \equiv \exp \left[2 \int \nu(x) (\partial \omega_1 / \partial k_{1x})^{-1} dx \right], \quad (3)$$

где интегрирование нужно ограничить зоной неустойчивости.

Вычислим этот интеграл в некоторых частных случаях. Пусть вблизи точки резонанса разложение волновых векторов как функций координат имеет вид

$$k_{ik}(x) = k_{ix}(0) + k'_{ix}(0)x.$$

Тогда расстройка частоты, обусловленная изменением частоты, оказывается также пропорциональной смещению волнового пакета по оси x :

$$\delta = -\frac{\partial \omega_2}{\partial k_{2x}} \left[\frac{d}{dx} (k_{0x} + k_{2x} - k_{1x}) \right] x, \quad (4)$$

где производная вектора k_i вычислена при постоянной частоте ω_i . Инкремент распадной неустойчивости в общем случае наличия расстройки частот есть (см. § 1.2)

$$v = [v_d^2 - \delta^2(x)/4]^{1/2}.$$

Интегрирование уравнения (3) приводит к формуле Пилия — Розенблюта:

$$\Gamma = 2\pi v_d^2 \left/ \left| \frac{\partial \omega_1}{\partial k_{1x}} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial k_{2x}} \frac{d}{dx} (k_{0x} + k_{2x} - k_{1x}) \right| \right. \quad (5)$$

Эта формула несправедлива, если одна из волн находится в окрестности точки поворота ($k_{1x} = 0$). При этом групповая скорость является малой ($\partial \omega_1 / \partial k_{1x} \approx 0$) и интеграл (3) нужно вычислить с учетом этого обстоятельства. Коэффициент усиления выражается в терминах полных эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (8/3) K(\kappa) \left[2\kappa^2 \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - \left(\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 + \kappa^2 \right) \right] \times \\ &\quad \times v_d^{3/2} / (\partial \omega_1 / \partial k_{1x}^2) \left| \frac{dk_{1x}^2}{dx} \cdot \frac{d\delta}{dx} \right|^{1/2}, \\ 0 &\leq \kappa^2 \equiv 1 - 0,5 [1 + \delta(0)/2v_d - k_{1x}^2(0)\Lambda^2] \leq 1, \\ \Lambda^{-2} &= 2v_d |dk_{1x}^2/dx| / |d\delta/dx|. \end{aligned}$$

6. Получить дисперсионное уравнение для колебаний границы «плазма — стоячая электромагнитная волна» [5].

Мы исследуем устойчивость относительно одномерных возмущений границы плазмы (см. рис. 3). Неустойчивость заключается в модуляции электромагнитного поля в вакуумной полости и сопровождается возбуждением магнитозвуковых колебаний в плазме. Внутри вакуумной полости и в плазме колебания описываются линейными уравнениями для вакуумного электрического поля и вектора смещения плазмы ξ

$$\begin{aligned} [\Delta - \partial^2 / \partial c^2 t^2] E_y^{(1)} &= 0, \quad 0 \leq z \leq L, \\ \partial^2 \xi / \partial t^2 - (c_s^2 + v_A^2) \nabla \operatorname{div} \xi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Связь между этими колебаниями возникает из условия баланса давлений и отсутствия тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности плазмы и металла:

$$\begin{aligned} \left[p^{(1)} + \frac{H_0 H_y^{(1)}}{4\pi} \right]_{z=L} &= \frac{H_x^{(0)} H_x^{(1)}}{4\pi} \Big|_{z=L}, \\ E_y^{(1)}(L) + \xi_z (\partial \delta E_y^{(0)} / \partial z)_{z=L} &= 0, \quad E_y^{(1)}(0) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= \gamma p_0 \operatorname{div} \xi, \quad H_y^{(1)} = H_0 \operatorname{div} \xi \\ \delta E_y^{(0)} &= \delta E_0 \sin \omega z / c, \quad \partial H_x^{(1)} / \partial c t = \partial E_y^{(1)} / \partial z. \end{aligned}$$

Решение уравнений (1) при граничных условиях (2) приводит к следующему уравнению для инкремента неустойчивости

$$\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} = v^2/c_s^2 \sqrt{k^2 + v^2/(c_s^2 + v_A^2)}.$$

§ 1.2. Взаимодействие волн конечной амплитуды

В § 1.1 рассмотрена задача устойчивости геликона конечной амплитуды. Для возмущений в виде суммы звуковой волны и геликона мы написали два связанных уравнения для возмущений продольной скорости и поперечного магнитного поля. Эти уравнения описывают взаимодействие звуковой волны с геликонами.

Показано, что правило частот для распадной неустойчивости соответствует квантовомеханическому закону сохранения. Следовательно, можно ожидать, что уравнения значительно упростятся, если написать их в гамильтоновой форме, используя такие квантовомеханические параметры, как энергия кванта волны и число квантов. Чтобы сделать это, заменим N и h_{\perp} на $[N(t), h_{\perp}(t)] \times \exp(ikz - i\omega t)$, где $N(t)$ и $h_{\perp}(t)$ — медленно меняющиеся амплитуды, а ω и \mathbf{k} удовлетворяют линейным дисперсным уравнениям звуковой волны и геликона соответственно. Кроме того, пометим индексом 1 параметры геликона, а индексом 2 — звуковой волны:

$$\left. \begin{aligned} h_{\perp} &\equiv h_1; & k_A &= k_1; & \omega_1^2 \varepsilon(\omega_1) &= k_1^2 c^2; \\ N &\equiv N_2; & k_s &= k_2; & \omega_2^2 &= k_2^2 c_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Тогда уравнения (1.14)—(1.15) примут вид

$$i \frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{k_2^2}{2\omega_2} \frac{\delta \mathcal{H}^*}{4\pi M} h_1 \exp[-i(\omega_1 - \omega_0 - \omega_2)t]; \quad (1.28)$$

$$i \frac{\partial h_1}{\partial t} = -k_0 \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} \frac{\delta \mathcal{H}}{2N_0} N_2 \exp[-i(\omega_2 + \omega_0 - \omega_1)t]. \quad (1.29)$$

Число квантов определим как полную энергию в данной моде колебаний, деленную на частоту волны. Для звуковой волны

$$n_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}^{-1} \left(\frac{MN_0 v_{\mathbf{k}}^2}{2} + \frac{MN_{\mathbf{k}}^2 c_s^2}{2N_0} \right). \quad (1.30)$$

Энергию геликона найдем согласно известным формулам энергии поля в диспергирующей среде [14]

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \right] \frac{|\delta \mathcal{H}|^2}{4\pi k^2}. \quad (1.31)$$

Уравнения (1.28)—(1.29) можно записать в симметричной форме, вводя амплитуды вероятности ($|C_j|^2 = n_j$). В рассматриваемом здесь случае амплитуды вероятности определяются следующим образом:

$$C_0(t) = \frac{\delta \mathcal{H}}{(2\pi k_0 v_{g0})^{1/2}}; \quad C_1(t) = \frac{h_1}{(4\pi k_1 v_{g1})^{1/2}}; \quad C_2(t) = \frac{N_2}{(N_0 k_2^2 / |\omega_2|)^{1/2}}. \quad (1.32)$$

В этих переменных уравнения (1.28) и (1.29) можно переписать в форме уравнения Шредингера в представлении взаимодействия [15]:

$$i \frac{\partial C_1}{\partial t} = V_{k_1, k_0, k_2} C_0 C_2; \quad (1.33)$$

$$i \frac{\partial C_2}{\partial t} = V_{k_2, -k_0, k_1} C_0^* C_1, \quad (1.34)$$

где

$$V_{k_2, -k_0, k_1} = V_{k_1, k_0, k_2} \operatorname{sign}(\omega_2 k_1 v_{g1}) \equiv - \left[\frac{|k_0 v_{g0} k_1 v_{g1} \omega_2|}{8MN_0 c_s^2} \right]^{1/2} \operatorname{sign} \omega_2.$$

Уравнения в виде (1.33), (1.34) для C -амплитуд справедливы для любых незатухающих волн. Отличие всякий раз связано лишь с конкретным выражением для матричного элемента, который всегда удовлетворяет условиям симметрии (в силу гамильтоновости системы). Уравнения (1.33) и (1.34) можно несколько обобщить на

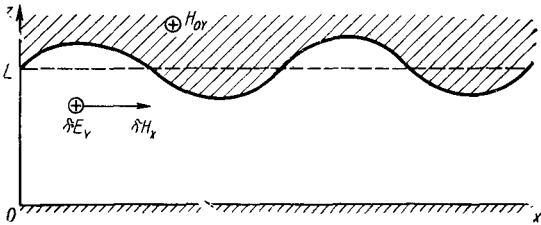


Рис. 3. Возмущение границы плазма — стоячая электромагнитная волна.

случай расстройки частоты $\delta = \omega_0 + \omega_2 - \omega_1 \neq 0$. Тогда в правой части (1.33) добавляется множитель $\exp(i\delta t)$, а в (1.34) $\exp(-i\delta t)$.

Задача о распадной неустойчивости в общем виде с учетом расстройки частоты описывается с помощью уравнений (1.33) и (1.34). Эти уравнения имеют неустойчивые решения с инкрементом

$$\nu = \left[-|V_{k_1, k_0, k_2}|^2 |C_0|^2 \operatorname{sign}(\omega_1 \omega_2) - \frac{1}{4} \delta^2 \right]^{1/2}. \quad (1.35)$$

Аналогия с параметрическим резонансом в системе двух связанных осцилляторов становится особенно наглядной, если в уравнениях для C -амплитуд не выделять быстро осциллирующие множители $\exp(i\omega t)$ (см., например, уравнение (1.12)), тогда вместо системы уравнений (1.33), (1.34) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \right) C_1 &= -2\omega_1 V_{k_1, k_0, k_2} C_0 C_2, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_2^2 \right) C_2 &= -2\omega_2 V_{k_2, -k_0, k_1} C_0^* C_1. \end{aligned}$$

Эти уравнения описывают не только распадную неустойчивость, но и модифицированный распад с инкрементом

$$\nu = (\sqrt{3}/2) (2\omega_2 |V_{k_1, k_0, k_2}|^2 |C_0|^2)^{1/3}. \quad (1.36)$$

До сих пор мы получили только уравнения, описывающие нарастание волн — возмущений, и совсем не рассматривали обратную реакцию со стороны этих волн на исходную (распадающуюся) волну. Чтобы описать релаксацию исходной волны, нужно рассмотреть эффект конечных амплитуд возмущений и удержать нелинейные члены в уравнении для исходной волны. В случае, когда C_0 , C_1 и C_2 — величины одного порядка, можно ожидать, что соответствующее уравнение для C_0 имеет вид

$$i \frac{\partial C_0}{\partial t} = V_{k_0, k_1, -k_2} C_1 C_2^*. \quad (1.37)$$

Это уравнение, конечно, можно вывести из тех же уравнений гидродинамики, которые мы использовали для вывода уравнений (1.33) и (1.34). Чтобы решить систему связанных уравнений (1.33), (1.34) и (1.37), представим амплитуду вероятности в виде

$$C_j(t) = a_j(t) \exp(i\Phi_j(t)), \quad \text{Im } a_j = \text{Im } \Phi_j = 0.$$

В случае $\omega_0 > \omega_1 > |\omega_2|$ и $\omega_2 < 0$ из соотношений симметрии для V имеем

$$\begin{aligned} V_{k_1, k_0, k_2} &= -H; \\ V_{k_2, -k_0, k_1} &= V_{k_1, k_0, k_2} \text{sign}(\omega_1 \cdot \omega_2) = H; \\ V_{k_0, k_1, -k_2} &= V_{k_1, k_0, k_2} \text{sign}(\omega_1 \cdot \omega_0) = -H. \end{aligned}$$

Разделяя действительную и мнимые части уравнений (1.33), (1.34), (1.37) и используя переменные $a_j(t)$ и $\Theta = \Phi_0 - \Phi_1 - \Phi_2$, получаем следующие уравнения [16]:

$$\left. \begin{aligned} (\partial a_1 / \partial t) &= H a_2 a_0 \sin \Theta; \\ \partial a_2 / \partial t &= H a_1 a_0 \sin \Theta; \\ (\partial a_0 / \partial t) &= -H a_1 a_2 \sin \Theta; \\ (\partial \Theta / \partial t) &= H [(a_0 a_2 / a_1) + (a_0 a_1 / a_2) - \\ &- (a_1 a_2 / a_0)] \cos \Theta = \text{ctg } \Theta (\partial / \partial t) \ln (a_0 a_1 a_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $a_0 a_1 a_2 \cos \Theta \equiv \Gamma = \text{const}$. Используя условие резонанса для частот, можно получить первый интеграл остающихся уравнений:

$$a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 |\omega_2| - a_0^2 \omega_0 = \text{const}. \quad (1.39)$$

Интегрируя $a_0(da_0/dt) + a_1(da_1/dt)$ и т. д., находим следующие константы движения:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &\equiv n_0 + n_1 = \text{const}; \\ m_2 &\equiv n_0 + n_2 = \text{const}; \\ m_3 &\equiv n_1 - n_2 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

В теории параметрических усилителей [17] эти уравнения хорошо известны как векторные соотношения Мэнли—Роу, взятые в направ-

лении распространения. Их нетрудно понять на основе диаграммы трехволнового процесса (рис. 4), если заметить, что при исчезновении одного кванта волны ω_{k_0} появляются кванты волн ω_{k_1} и ω_{k_2} , таким образом, $\Delta n_0 = -1$, $\Delta n_1 = 1 = \Delta n_2$. Используя соотношения (1.38)–(1.40), получаем уравнение для n_0 :

$$(dn_0/dt) = -2H [n_0 (m_1 - n_0)(m_2 - n_0) - \Gamma^2]^{1/2}. \quad (1.41)$$

Если три корня уравнения $n_0 (m_1 - n_0) (m_2 - n_0) = \Gamma^2$ расположить в убывающем порядке, то уравнение (1.41) можно преобразовать к виду

$$H(t-t_0) = -\frac{1}{2} \int_{n_0(t_0)}^{n_0(t)} \frac{dn_0}{[(n_0-n_c)(n_0-n_b)(n_0-n_a)]^{1/2}}, \quad n_c \geq n_b \geq n_a \geq 0.$$

Входящий сюда интеграл можно свести к эллиптическому заменой переменных

$$y(t) \equiv [(n_0(t) - n_a)/(n_b - n_a)]^{1/2};$$

$$\kappa = [(n_b - n_a)/(n_c - n_a)]^{1/2}.$$

Выбирая момент времени t_0 так, чтобы $y(t_0) = 0$, переписываем полученное уравнение в стандартной форме:

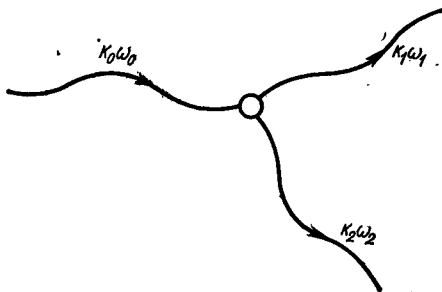


Рис. 4. Графическое представление взаимодействия трех волн.

$$H(t-t_0) \sqrt{n_c - n_a} = - \int_0^{y(t)} \frac{dy}{[(1-y^2)(1-\kappa^2 y^2)]^{1/2}}. \quad (1.42)$$

Следовательно,

$$y(t) = \operatorname{sn} [H \sqrt{n_c - n_a} (t_0 - t); \kappa],$$

и из определения $y(t)$ получаем общее решение:

$$n_0(t) = n_a + (n_b - n_a) \operatorname{sn}^2 (H \sqrt{n_c - n_a} (t_0 - t); \kappa). \quad (1.43)$$

Рассмотрим два простых примера [16].

Случай А. В момент времени $t = 0$, $n_0(0) = 0$, $n_1(0) \gg n_2(0)$. Без потери общности можно положить $\Gamma = 0$ в уравнении (1.41). Тогда три корня n_a, b, c запишем так: $m_1 \equiv n_1(0) = n_c \gg m_2 \equiv n_2(0) = n_b > 0 = n_a$.

Можно упростить решение, пренебрегая $\kappa^2 y^2$ в уравнении (1.42), так как в рассматриваемом случае $\kappa^2 \ll 1$. Тогда

$$n_0(t) = n_2(0) \sin^2 (Ht \sqrt{n_1(0)});$$

$$n_2(t) = n_2(0) \cos^2 (Ht \sqrt{n_1(0)});$$

$$n_1(t) = n_1(0) - n_2(0) \sin^2(Ht\sqrt{n_1(0)}).$$

Зависимость чисел заполнения от времени изображена на рис. 5. Этот рисунок описывает случай, когда частота волны конечной амплитуды меньше, чем частоты волны-возмущения, и, следовательно, она устойчива по отношению к распаду. Небольшое периодическое изменение ее амплитуды происходит вследствие того, что небольшая доля энергии первоначально была запасена в возмущении с малой частотой и впоследствии в результате процесса слияния квантов могла перейти в энергию возмущения с большой частотой.

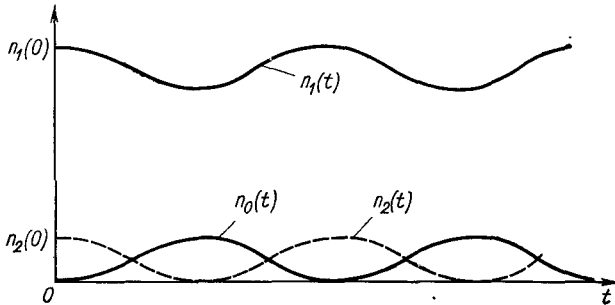


Рис. 5. Зависимость от времени амплитуды волны, устойчивой по отношению к распаду.

Случай Б. Рассмотрим теперь распад волны конечной амплитуды, когда в момент $t = 0$ $n_2(0) = 0$, $n_0(0) \gg n_1(0)$. Полагая снова $\Gamma = 0$, находим константы $n_{a, b, c}$: $n_c = m_1 \equiv n_0(0) + n_1(0) > n_b = m_2 \equiv n_0(0) > n_a = 0$. Из уравнений (1.40) и (1.43) в этом случае имеем:

$$\begin{aligned} n_0(t) &= n_0(0) \operatorname{sn}^2[H(t-t_0)\sqrt{n_c}; \kappa]; \\ n_1(t) &= n_1(0) + n_0(0) \{1 - \operatorname{sn}^2[H(t-t_0)\sqrt{n_c}; \kappa]\}; \\ n_2(t) &= n_0(0) \{1 - \operatorname{sn}^2[H(t-t_0)\sqrt{n_c}; \kappa]\}, \end{aligned}$$

где $1 - \kappa^2 = n_1(0)/[n_0(0) + n_1(0)] \ll 1$. Поскольку $n_1 = n_1(0)$ при $t = 0$, то можно написать $1 - \operatorname{sn}^2[Ht_0\sqrt{n_c}; \kappa] = 0$. Следовательно, величина $Ht_0\sqrt{n_c}$ равна одной четверти периода sn : $Ht_0\sqrt{n_c} = K(\kappa)$. Поскольку $1 - \kappa^2 \ll 1$, то полный эллиптический интеграл первого рода $K(\kappa)$ можно разложить по малому параметру $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$:

$$K(\kappa) \approx -(\kappa'/2)^2 + \ln(4/\kappa') [1 + (\kappa'/2)^2 + O(\kappa'^4)].$$

В результате получаем

$$t_0 = (1/2H\sqrt{n_0(0)}) \ln(n_0(0)/n_1(0)).$$

За это время амплитуда исходной волны $n_0(0)$ уменьшится до нуля, так что можно назвать эту величину *временем распада*. Величина, обратная t_0 , отличается от линейного инкремента неустойчивости $H\sqrt{n_0}$ только логарифмическим множителем. Этот множитель учитывает, что даже при экспоненциальном росте амплитуда малых возмущений достигает амплитуды исходной волны за время порядка $t = (1/2 \nu) \ln(n_0/n_1)$. Поведение чисел квантов колебаний во времени показано на рис. 6. Оказывается, что по истечении достаточного времени амплитуда возмущений снова падает до нуля. Таким образом, процесс распада в схеме взаимодействия трех отдельных волн обратимый.

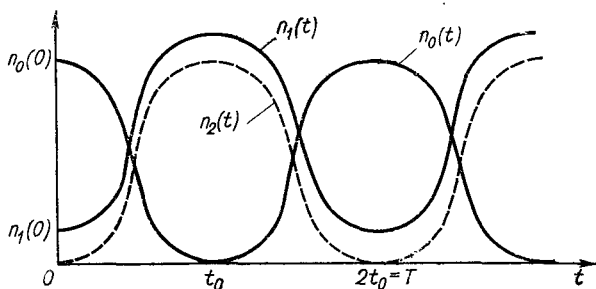


Рис. 6. Поведение во времени амплитуды волны неустойчивой по отношению к распаду.

В данном параграфе мы ограничились рассмотрением взаимодействия трех волн, хотя сейчас уже получено точное решение системы уравнений, описывающей взаимодействие четырех волн. Читателя, интересующегося этим решением, а также многочисленными задачами нелинейной оптики, где это взаимодействие играет важную роль, мы отсылаем к книгам [18, 19].

ЗАДАЧА

Найти инкремент распадной неустойчивости в случае, когда возмущения затухают с декрементами затухания ν_1 и ν_2 .

В уравнениях (1.33) и (1.34) следует заменить $\partial C_{1,2}/\partial t$ на $\frac{\partial C_{1,2}}{\partial t} + \nu_{1,2} C_{1,2}$. Представляя решение в виде $\exp(\nu t)$, находим

$$\nu = -(1/2)(\nu_1 + \nu_2) \pm \sqrt{(1/4)(\nu_1 - \nu_2)^2 + |V_{k_1, k_0, k_2}|^2 |C_0|^2}.$$

Нетрудно видеть, что неустойчивость имеет порог, определяемый уравнением [20]

$$|C_0|^2 > \frac{\nu_1 \nu_2}{|V_{k_1, k_0, k_2}|^2}.$$

В частности, отсюда можно получить решение задачи 2 § 1.1.

§ 1.3. Параметрические неустойчивости высших порядков

Необходимое условие возникновения резонансного взаимодействия в системе из трех плазменных волн — выполнение соотношений (1.18) для частот и волновых векторов. Естественно, что не при всяком спектре волн выполняются эти соотношения.

На рис. 7 изображены различные формы реализующихся спектров волн. Используя векторное неравенство $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \leq |\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2|$, нетрудно показать, что условия резонанса могут быть выполнены только для волн со спектром, аналогичным кривым 1 и 4

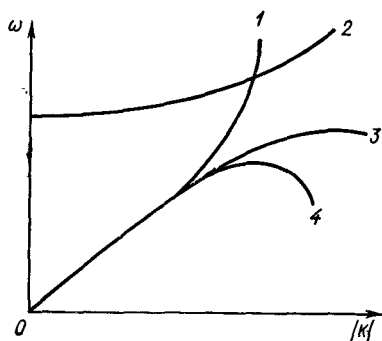


Рис. 7. Различные типы дисперсий волн в плазме.

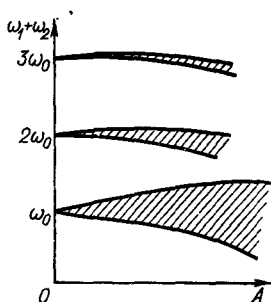


Рис. 8. Диаграмма устойчивости в плоскости частота — амплитуда волны (область неустойчивости заштрихована).

(см. рис. 7), и наоборот, для волн со спектрами типа 2 и 3 это невозможно. Если дисперсионное соотношение имеет более, чем одну ветвь, то условие резонанса может быть выполнено для волн, соответствующих различным ветвям. В общем случае, условие резонанса удается удовлетворить тогда, когда через три точки, соответствующие колебаниям (ω_0, \mathbf{k}_0) , (ω_1, \mathbf{k}_1) и (ω_2, \mathbf{k}_2) (эти точки могут лежать на различных ветвях), можно провести кривую, аналогичную кривым 1 или 4.

В тех случаях, когда условия резонанса для трех волн выполнены быть не могут, можно включить в рассмотрение четыре волны. Разумеется, чтобы получить конечный инкремент неустойчивости, эта четвертая волна должна иметь конечную амплитуду. Следовательно, необходимо рассмотреть устойчивость второй гармоники волны конечной амплитуды. Условие резонанса теперь принимает вид

$$2\omega(\mathbf{k}_0) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2); \quad 2\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (1.44)$$

Используя условие распада $2|\omega(\mathbf{k}_0)| > |\omega(\mathbf{k}_1)|, |\omega(\mathbf{k}_2)|$ и эти условия резонанса, можно показать, что во втором порядке условия резонанса удается выполнить для колебаний со спектром 3

(см. рис. 7) и невозможно выполнить для колебаний со спектром 2. Следует ожидать, что диаграмма неустойчивых областей в плоскости частота — амплитуда волны качественно выглядит так же, как соответствующая диаграмма для задачи о параметрическом резонансе (рис. 8).

Ширина неустойчивой зоны вблизи n -й гармоники порядка инкремента неустойчивости и пропорциональна n -й степени амплитуды. Разумеется, условия наличия резонанса при этом должны быть выполнены:

$$n\omega(k_0) = \omega(k_1) + \omega(k_2); \quad nk_0 = k_1 + k_2.$$

Интересным примером распадной неустойчивости высокого порядка является неустойчивость альвеновской волны большой амплитуды с пилообразным профилем по отношению к распаду на возмущения с частотами ω_1 и ω_2 , причем $\max(\omega_1, \omega_2) \gg v_A/\lambda$, λ — длина волны, соответствующая расстоянию между зубьями профиля альвеновской волны [21].

Рассмотрим более простую задачу о распаде второй гармоники колебаний на поверхности глубокой жидкости [22, 23].

Колебания поверхности жидкости можно описать с помощью двух функций: потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$ и величины смещения поверхности жидкости от равновесной $\eta(x, y, t)$. Уравнения для этих функций хорошо известны [24]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &\equiv \nabla^2\varphi + \varphi_{zz} = 0; \\ \eta_t + \nabla\eta \cdot [\nabla\varphi]_{z=\eta} - [\varphi_z]_{z=\eta} &= 0; \\ g\eta + [\varphi_t + (1/2)(\nabla\varphi)^2 + (1/2)\varphi_z^2]_{z=\eta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

В интересующем нас случае малых колебаний величину $[\varphi]_{z=\eta}$ можно разложить в ряд по степеням $(k\eta) \ll 1$. Сохраняя члены до третьего порядка включительно, находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_z &= \eta_t + \operatorname{div}(\eta\nabla\varphi) + \operatorname{div}[(1/2)\eta^2\nabla\varphi_z] - \varphi_{zz}\eta - (1/2)\varphi_{zzz}\eta^2; \\ -g\eta &= \varphi_t + \varphi_{zt}\eta + \varphi_{zzt}\eta^2/2 + (1/2)[(\nabla\varphi)^2 + \varphi_z^2] + \\ &\quad + (1/2)[(\nabla\varphi)^2 + \varphi_z^2]_z \cdot \eta, \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

где потенциал скоростей вычисляется на невозмущенной поверхности. Сводя эти уравнения к одному уравнению для φ , получаем динамическое уравнение для волн на поверхности воды

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + g\varphi_z &= \{g^{-1}\varphi_t\varphi_{zt} - g^{-2}\varphi_t\varphi_{zt}^2 - 0,5g^{-2}\varphi_{zzt}\varphi_t^2 - \\ &- (1/2)[(\nabla\varphi)^2 + \varphi_z^2] + (1/2g)\varphi_t [(\nabla\varphi)^2 + \varphi_z^2]_z\}_t + \operatorname{div}\{-\varphi_t\nabla\varphi + \\ &+ 0,5g^{-1}\varphi_t^2\nabla\varphi_z - (1/2)[(\nabla\varphi)^2 + \varphi_z^2]\nabla\varphi + g^{-1}\varphi_t\varphi_{zt}\nabla\varphi\}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Нелинейные члены второго порядка в уравнении (1.47) описывают генерацию второй гармоники. Сохраняя лишь эти члены, нетрудно получить два члена разложения Стокса исходной волны. При этом

оказывается, что вторая гармоника в разложении потенциала скоростей по амплитудам отсутствует:

$$\delta\varphi_0 = a_0 \exp(|\mathbf{k}_0|z) \sin(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t).$$

Как и в случае взаимодействия трех волн, удобно ввести амплитуду вероятности C_0 таким образом, чтобы поверхностная плотность энергии волны была равна $|C_0|^2 \omega(\mathbf{k}_0)$. Нетрудно видеть, что

$$C_0 = (|\mathbf{k}_0|/4\omega(\mathbf{k}_0))^{1/2} a_0,$$

где плотность жидкости для простоты принята равной единице. Члены третьего порядка в уравнении (1.47) ответственны за нелинейный сдвиг частоты и описывают также взаимодействие возмущений (ω_1, \mathbf{k}_1) и (ω_2, \mathbf{k}_2) со второй гармоникой поверхностных колебаний, если частоты и волновые вектора возмущений удовлетворяют резонансным условиям (1.44). Как было показано впервые Бини [25], уравнения для C_0, C_1, C_2 имеют симметричную форму:

$$\left. \begin{aligned} i(\partial C_1/\partial t) &= \alpha_{10} |C_0|^2 C_1 + (1/2)\beta C_0^2 C_2^* \times \\ &\times \exp(-i(2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2)t); \\ i(\partial C_2/\partial t) &= \alpha_{20} |C_0|^2 C_2 + (1/2)\beta C_0^2 C_1^* \times \\ &\times \exp(-i(2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2)t); \\ i(\partial C_0/\partial t) &= \alpha_{00} |C_0|^2 C_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

где α_{i0}, β — вещественные однородные функции третьей степени. Нелинейный сдвиг частоты волны конечной амплитуды известен из разложения Стокса:

$$\delta\omega_0 \equiv \alpha_{00} |C_0|^2 = 2|\mathbf{k}_0|^3 |C_0|^2.$$

Нелинейный сдвиг частоты возмущений в общем случае дается громоздким выражением, которое значительно упрощается в случае одномерных возмущений, распространяющихся в ту же сторону, что и исходная волна. При малой амплитуде волны распад происходит на возмущения с близкими волновыми векторами $\mathbf{k}_{1,2} = \mathbf{k}_0 \pm \mathbf{q}, \mathbf{q} \ll \mathbf{k}_0$. Поэтому очевидно, что [25] $\alpha_{10} = \alpha_{20} = \beta = 2\alpha_{00}$. Решение системы уравнений (1.48) ищем в виде $C_{1,2} = \exp(\mathbf{v}t - i\alpha_{1,20} |C_0|^2 t)$. Тогда для $\text{Re } v$ получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \text{Re } v &= \pm (1/2) \{ \beta^2 |C_0|^4 - [q^2 (\partial^2 \omega / \partial k^2) + (\alpha_{10} + \alpha_{20} - 2\alpha_{00}) |C_0|^2]^2 \}^{1/2} = \\ &= \pm q \{ -(\partial^2 \omega / \partial k^2) [\alpha_{00} |C_0|^2 + (1/4) q^2 (\partial^2 \omega / \partial k^2)] \}^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в одномерном случае необходимом условии для распада второй гармоники — нелинейная компенсация разбалансировки частот из-за дисперсии групповой скорости, математически совпадающая с критерием Лайтхилла. В случае возмущений, рас-

прсстраняющихся под большим углом к исходной волне, резонансные условия удается удовлетворить только для спектра типа \mathcal{Z} (см. рис. 7). Так как для этого спектра $\partial^2\omega/\partial k^2 < 0$, $\alpha_{00} > 0$, то спять требуется выполнение критерия Лайтхилла.

§ 1.4. Приближение геометрической оптики

Взаимодействие волн с существенно разными частотами и масштабами, результат которого — медленное изменение амплитуды и частоты исходной волны (см. § 1.1), можно описать на языке геометрической оптики. Действительно, пусть по плазме распространяется почти монохроматическая волна геликонного типа. В разложении Фурье такой волны присутствуют только компоненты, близкие к некоторым средним значениям частоты и волнового вектора. Поэтому в уравнении для амплитуд компонент $[\omega - \omega(\mathbf{k})]\delta\mathcal{H}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ можно воспользоваться разложением функции $\omega(\mathbf{k})$ по малому отклонению волновых векторов от его среднего значения

$$[\omega - \omega(k_0) - \partial\omega/\partial k_0 (k_z - k_0) - 1/2 \partial^2\omega/\partial k_0^2 (k_z - k_0)^2]\delta\mathcal{H}(\omega, k_z) = 0.$$

Переходя теперь к переменным z , t и учитывая нелинейную добавку к частоте геликона, получаем параболическое уравнение, используемое ранее в целом круге задач дифракции [26], теории сверхпроводимости [27], самовоздействия света [28] и нелинейной теории распространения волн [29]:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta\mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2\delta\mathcal{H}}{\partial z^2} - \alpha |\delta\mathcal{H}|^2 \delta\mathcal{H} = 0, \quad (1.49)$$

где $\alpha = k/4\pi NM(d\omega/dk)$ [см. уравнение (1.24)].

Рассмотрим в качестве примера задачу о модуляционной неустойчивости геликона. Комплексная амплитуда невозмущенного колебания представляется в виде $\delta\mathcal{H}(z, t) = a \exp(i\varphi)$. Медленное изменение амплитуды в пространстве и во времени можно описать с помощью малых возмущений амплитуды и фазы

$$a = a_0 + a'; \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad (1.50)$$

где величины a' и φ' предполагаются действительными. Уравнение для последних нетрудно получить из уравнения (1.49), подставив в него комплексную амплитуду $a \exp(i\varphi)$ и разделив действительную и мнимую части:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 + \alpha a^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} a^{-1} \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = 0; \quad (1.51)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) a^2 + \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} a^2 \right) = 0. \quad (1.52)$$

Линеаризуя эти уравнения относительно малых возмущений, находим

$$a_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi' - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 a'}{\partial z^2} + 2\alpha a_0^2 a' = 0;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial}{\partial z} \right) a' - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} a_0 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0.$$

Поскольку полученные уравнения являются линейными, то решение их можно искать в виде $\exp(-i\Omega t + iqz)$. В результате нетрудно получить дисперсионное соотношение для Ω , совпадающее с уравнением (1.24):

$$\Omega = q \frac{\partial \omega}{\partial k} \pm \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} q^2 \left(\alpha a^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} q^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Уравнение (1.49) допускает стационарное решение, описывающее самосжатый волновой пакет. Как и в динамике нелинейных периодических волн [III], возможность стационарного решения обусловлена конкуренцией двух факторов: нелинейного самосжатия волнового пакета и расплывания его вследствие дисперсии групповых скоростей. Поэтому размер пакета и его амплитуда оказываются связанными.

Стационарное решение уравнения (1.49) ищем в виде

$$\delta \mathcal{H} = f(z - v_g t) \exp(-i\delta \omega t). \quad (1.53)$$

Для функции f имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2\alpha}{v_g'} f^3 - \frac{2\delta \omega}{v_g'} f, \quad v_g' \equiv \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}.$$

Как и в задачах нелинейной динамики периодических волн [III], уравнение для огибающей волнового пакета можно представить в виде уравнения движения нелинейного осциллятора в потенциальном поле $U(f) = -\alpha f^4/2v_g' + \delta \omega f^2/v_g'$. При $\alpha v_g' < 0$ потенциал $U(f)$ имеет форму ямы. Поэтому уравнение (1.53) допускает решения в виде периодических или уединенных волн огибающих. Решение для уединенных волн, например, имеет вид [30]

$$\delta \mathcal{H}(z, t) = \delta \mathcal{H}_0 \operatorname{sech} [\delta \mathcal{H}_0 (-\alpha/v_g')^{1/2} (z - v_g t)]; \quad \delta \omega = (1/2) \alpha \delta \mathcal{H}_0^2. \quad (1.54)$$

В заключение заметим, что если не ограничиваться одномерным рассмотрением, а учесть также возмущения, распространяющиеся под небольшим углом к оси z , то аналогичным образом можно рассмотреть явление самофокусировки света, впервые описанное Г. А. Аскарьяном [31].

§ 1.5. Взаимодействие волн в приближении хаотических фаз

Поскольку условия резонанса могут быть выполнены для большого числа наборов из трех волн, то их взаимодействие в плазме обычно не носит характера упорядоченного процесса (см. рис. 6).

Обратимость процесса при этом нарушается (рис. 9) так, что если частоты различных мод колебаний несоизмеримы, то сдвиги фаз между ними через некоторое время можно считать случайными. Для описания эволюции волновых возмущений в этом случае можно воспользоваться приближением хаотических фаз (т. е. будем следить только за амплитудами волн, а по фазам проводить усреднение). Поскольку теперь нет смысла отличать исходную волну от многих других, перепишем уравнение для волновых амплитуд в виде

$$i(dC_k/dt) = \sum_{k'} V_{k, k', k-k'} C_{k'}(t) C_{k-k'}(t) \exp[-i(\omega_k + \omega_{k-k'} - \omega_{k'})t]. \quad (1.55)$$

При определенной нормировке амплитуды волн C_k имеют смысл амплитуд вероятности, так что числа заполнения равны квадрату этих амплитуд:

$$n_k = |C_k|^2. \quad (1.56)$$

При таком выборе нормировки матричные элементы обладают следующими свойствами симметрии (ср. с матричными элементами, описывающими взаимодействие геликонов со звуком):

$$\left. \begin{aligned} V_{k, k', k-k'} &= V_{k-k', -k', k} \text{sign}(\omega_k \omega_{k-k'}); \\ V_{k, k', k-k'} &= V_{k, k-k', k'} = -V_{-k, -k', k'-k}. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

Поскольку нас интересует поведение во времени амплитуд волн, а не их фаз, то необходимо получить уравнение, в которое входили бы только числа заполнения n_k . Для этого воспользуемся квантовомеханической теорией возмущений. Разлагая C_k в ряд по оператору взаимодействия V

$$C_k(t) = C_k^{(0)} + C_k^{(1)} + C_k^{(2)} + \dots$$

и, подставляя затем в уравнение (1.55), получаем

$$\left. \begin{aligned} C_k^{(1)} &= -i \sum_{k', k''} C_{k'}^{(0)} C_{k''}^{(0)} \int_0^t V_{k, k', k''}(t) dt; \\ C_k^{(2)} &= - \sum_{k', k'', q', q''} \left[C_{k'}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' V_{k, k', k''}(t') V_{k'', q', q''}(t'') + \right. \\ &\quad \left. + C_{k''}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' V_{k, k', k''}(t') V_{k', q', q''}(t'') \right]; \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

$$V_{k, k', k''}(t) \equiv V_{k, k', k-k'} \exp[i(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})t] \delta_{k, k'+k''}, \quad (1.59)$$

$$\delta_{k, q} = \begin{cases} 1, & k = q \\ 0, & k \neq q. \end{cases}$$

Величины $C_k^{(0)}$ не зависят от времени и соответствуют решению в отсутствие взаимодействия между модами. Их можно представить в виде произведения положительной амплитуды на фазовый множитель $\exp i\Phi_k$. Хотя фазы Φ_k задаются начальными условиями в каждом конкретном эксперименте, тем не менее разумно предположить их случайными, имея в виду их размешивание во времени [32] (т. е. $\langle C_k^{(0)} C_{k'}^{(0)*} \rangle = |C_k^{(0)}|^2 \delta_{k, -k'}$). Используем это свойство, что-

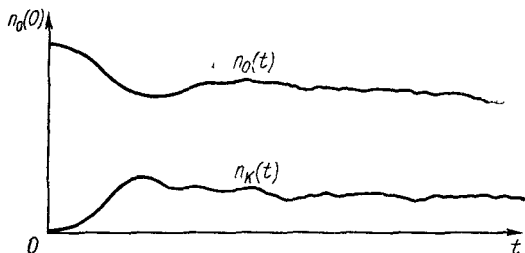


Рис. 9. Поведение во времени амплитуды волны, распадающейся на спектр волн.

бы провести усреднение изменения числа заполнения (т. е. величины $|C_k(t)|^2 - |C_k(t_0)|^2$). В низшем порядке по амплитуде получаем

$$\langle |C_k(t)|^2 \rangle = |C_k^{(0)}(t_0)|^2 + \langle |C_k^{(1)}|^2 \rangle + \langle C_k^{(0)} C_k^{(2)*} + C_k^{(2)*} C_k^{(2)} \rangle. \quad (1.60)$$

Подставляя сюда найденные ранее значения из уравнения (1.58), находим

$$\begin{aligned} & |C_k(t)|^2 - |C_k(0)|^2 = \\ &= \sum_{k', k'', q', q''} \left[\underbrace{C_k^{(0)} C_{k''}^{(0)} C_{q'}^{(0)*} C_{q''}^{(0)*}}_{\text{bracketed}} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') dt' \times \right. \\ & \times \int_0^t V_{k', q', q''}^*(t') dt' - \text{Re} 2 \underbrace{C_k^{(0)*} C_{k''}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)}}_{\text{bracketed}} \times \\ & \times \int_0^t dt' V_{k, k', k''}(t') \int_0^{t'} V_{k'', q', q''}(t'') dt'' - \\ & \left. - \text{Re} 2 \underbrace{C_k^{(0)*} C_{k''}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)}}_{\text{bracketed}} \int_0^t dt' V_{k, k', k''}(t') \int_0^{t'} dt'' V_{k', q', q''}(t'') \right]. \quad (1.61) \end{aligned}$$

В результате усреднения этого уравнения по случайным фазам произведение четырех амплитуд $C_k^{(0)}$ сводится к произведению двух чисел заполнения. Два возможных варианта спаривания амплитуд

показаны здесь пунктирной и непрерывной скобками. В первом члене амплитуды $C_k^{(0)}$ комбинируются в произведение $|C_k^{(0)}|^2 \cdot |C_{k'}^{(0)}|^2 = n_k^{(0)} n_{k'}^{(0)}$, а в двух других — соответственно в $|C_k^{(0)}|^2 |C_{k''}^{(0)}|^2 = n_k^{(0)} n_{k''}^{(0)}$ и $|C_k^{(0)}|^2 |C_{k'}^{(0)}|^2 = n_k^{(0)} n_{k'}^{(0)}$. Использование свойств симметрии матричных элементов приводит к тому, что произведение любых двух матричных элементов, входящих в уравнение (1.61),

можно записать в виде квадрата его модуля $\left| \int_0^t V_{k, k', k''}(t) dt \right|^2$ со знаком, зависящим от знаков частот $\omega_k; \omega_{k'}; \omega_{k+k''}$. Для интервалов времени, много больших периода колебаний величин в любой из волн, интегрирование по времени можно выполнить приближенно:

$$\left| \int_0^t V_{k, k', k''}(t) dt \right|^2 = \frac{4 \sin^2 [(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) t / 2]}{(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})} |V_{k, k', k''}|^2 \times \\ \times \delta_{k, k'+k''} = 2\pi \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k'+k''} |V_{k, k', k''}|^2 \cdot t.$$

Следовательно, изменение во времени чисел заполнения можно записать в виде

$$\Delta n_k = 4\pi \Delta t \sum_{k', k''} |V_{k, k', k''}|^2 [n_{k'}^{(0)} n_{k''}^{(0)} - \text{sign}(\omega_k \omega_{k''}) n_k^{(0)} n_{k'}^{(0)} - \\ - \text{sign}(\omega_k \omega_{k'}) n_k^{(0)} n_{k''}^{(0)}] \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k'+k''}. \quad (1.62)$$

Предположим, что в результате эволюции системы не происходит коррелирования фаз. Тогда можно представить полученный результат в виде дифференциального уравнения, считая, что процедуру усреднения, использованную выше, можно провести в любой момент времени, тем самым определив изменение чисел заполнения к следующему времени $t + \Delta t$. Другими словами,

$$\Delta n_k / \Delta t \approx dn_k / dt; \quad n_k^{(0)} \equiv n_k(t).$$

Описанная процедура, таким образом, приводит к кинетическому уравнению для волн [15, 33, 34]:

$$dn_k / dt = 4\pi \sum_{k', k''} |V_{k, k', k''}|^2 \{n_{k'} n_{k''} - \text{sign}(\omega_k \omega_{k''}) n_k n_{k'} - \\ - \text{sign}(\omega_k \omega_{k'}) n_k n_{k''}\} \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k'+k''}. \quad (1.63)$$

Это уравнение, написанное для волн с положительными частотами, можно получить непосредственно из динамического уравнения для амплитуд с помощью квантовомеханической теории возмущений и «золотого правила». Рассмотрим, например, взаимодействие волны n_k с другими волнами меньшей частоты (т. е. $\omega_k > \omega_{k'}, \omega_{k''} > 0$). Процессы взаимодействия в этом случае состоят из набора процессов распада волны с частотой ω_k и обратного процесса слияния

двух волн с частотами $\omega_{k'}$, $\omega_{k''}$. Изменение числа заполнения в этих процессах можно записать как [35]

$$dn_k/dt = -4\pi \sum_{k', k''} |V_{k, k', k''}|^2 \{n_k (n_{k'} + 1)(n_{k''} + 1) - n_{k'} n_{k''} (n_k + 1)\} \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta_{k, k' + k''}. \quad (1.64)$$

В классическом пределе, когда число квантов велико ($n_k \gg 1$), получаем отсюда уравнение (1.63). Аналогичным образом выводится «соударительный член» для четырехволнового взаимодействия. Он пропорционален уже третьей степени чисел заполнения. Следовательно, в отсутствие трехволнового взаимодействия (как это имеет место, например, для волн на поверхности воды [36]) взаимодействие мод возникает лишь в третьем порядке по энергии волн.

Кинетическое уравнение в форме (1.63) уже давно использовалось в теории твердого тела для описания взаимодействия фононов с нерегулярностями решетки [35]. Однако существует принципиальная разница между применениями этого уравнения к фононам и к плазменной турбулентности. В твердом теле мы обычно имеем дело с состоянием, близким к термодинамическому равновесию. В этом случае нелинейные явления приводят лишь к небольшим поправкам к равновесным числам заполнения. В плазме же, напротив, нелинейные явления часто играют главную роль, так как длина свободного пробега волны в турбулентной плазме может быть очень мала и равномерное распределение энергии между различными колебаниями не реализуется.

ЗАДАЧИ

1. Дано динамическое уравнение для волн с нераспадным спектром

$$i(\partial C_k/\partial t) = \sum_{k_1+k_2=k} V_{kk_1 k_2} C_{k_1} C_{k_2} \mp \sum_{k_2+k_3=k+k_1} W_{kk_1 k_2 k_3} C_{k_1}^* C_{k_2} C_{k_3}. \quad (1)$$

Вывести кинетическое уравнение для волн.

Прежде всего следует заметить, что биения двух колебаний в случае нераспадного спектра никогда не попадают в резонанс с собственным колебанием среды. Следовательно, они не расходуют свою энергию и их можно рассматривать как дополнительный набор колебаний среды, число квантов которых в низшем порядке разложения по энергии сохраняется. Изменение чисел квантов в четырехволновых процессах удобно описывать с помощью динамического уравнения, в правой части которого на равных правах учтены как члены, описывающие резонансное взаимодействие четырех волн, так и члены, ответственные за резонансное взаимодействие двух биений

$$i(\partial C_k/\partial t) = \sum_{k_2+k_3=k+k_1} U_{kk_1 k_2 k_3} C_{k_1}^* C_{k_2} C_{k_3}, \quad (2)$$

где

$$U_{kk_1 k_2 k_3} = W_{kk_1 k_2 k_3} - 2V_{k, -k_1, k+k_1} V_{k+k_1, k_2, k_3} / (\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) - \frac{2V_{k, k_2, k-k_2} V_{k-k_2, -k_1 k_2}}{\omega_k - \omega_{k_2} \mp \omega_{k_1} - \omega_{k_3}} - \frac{2V_{k, k_2, k-k_2} V_{k-k_2, -k_1, k_2}}{\omega_k - \omega_{k_2} \mp \omega_{k_1} - \omega_{k_3}}.$$

Кинетическое уравнение для волн получается из приведенного динамического уравнения либо с помощью процедуры, описанной в тексте, либо с использованием золотого правила и имеет вид

$$dn_k/dt = 6\pi \sum_{k+k_1=k_2+k_3} |U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 (n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} + n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3}) \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_3}). \quad (3)$$

2. Найти интенсивность излучения электромагнитной волны с частотой $\omega \approx 2\omega_p$ при наличии газа ленгмюровских колебаний в плазме [37].

Уравнение для электрического поля электромагнитной волны имеет вид

$$[k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)] E^t = -4\pi i \omega \mathbf{j}_{\text{нел}}, \quad (1)$$

где колебания тока на частоте $2\omega_p$ обусловлены присутствием ленгмюровских колебаний (ω_1, \mathbf{k}_1) и (ω_2, \mathbf{k}_2)

$$\mathbf{j}_{\text{нел}} = -e \{n_1 \mathbf{v}_2 + n_2 \mathbf{v}_1 + N_0 \mathbf{v}^{(2)}\}.$$

Возмущение скорости электронов, квадратичное по амплитудам волн, не дает вклада в уравнение (1), так как

$$\mathbf{v}^{(2)} = (1/\omega_1 + \omega_2) [(\mathbf{v}_1 \mathbf{k}_2) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 \mathbf{k}_1) \mathbf{v}_1] = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2/\omega_1 + \omega_2) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2).$$

Используя линейные соотношения, переписываем выражение для тока в виде

$$\mathbf{j}_{\text{нел}} = \frac{e^3}{m^2 \omega_1 \omega_2} (\mathbf{k}_1 E_1^t) (\mathbf{k}_2 E_2^t) \left\{ \frac{\mathbf{k}_2}{\omega_1 k_2^2} + \frac{\mathbf{k}_1}{\omega_2 k_1^2} \right\}. \quad (2)$$

Подставляя уравнение (2) в (1) и умножая на E^{t*} , получаем динамическое уравнение для амплитуд в симметричной форме

$$(-i/2) \frac{\partial}{\partial t} |C_{\mathbf{k}}^t|^2 = \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} C_{\mathbf{k}}^{t*} C_{\mathbf{k}_1}^t C_{\mathbf{k}_2}^t, \quad (3)$$

где

$$|C_{\mathbf{k}}^t|^2 = \frac{\partial}{\omega^2 \partial \omega} [\omega^2 \varepsilon(\omega)] \cdot \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^t|^2}{8\pi}; \quad |C_{\mathbf{k}}^t|^2 = \frac{\partial}{\omega \partial \omega} [\omega \varepsilon(\omega)] \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^t|^2}{8\pi};$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{\omega_p^3}{\sqrt{N_0 m |\omega_1 \omega_2 \omega_3|}} \frac{([\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2] \mathbf{e}_h)}{k_1 k_2 k} \left(\frac{k_1^2}{\omega_1} - \frac{k_2^2}{\omega_2} \right); \quad \mathbf{e}_h \equiv \frac{\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^t}{|\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^t|}.$$

Интенсивность излучения находим из кинетического уравнения

$$(\partial/\partial t) n_{\mathbf{k}}^t \approx 4\pi \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} |V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1}|^2 n_{\mathbf{k}_1}^t n_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}^t \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}). \quad (4)$$

Следует заметить, что ввиду низкой частоты излучения волновые векторы плазменных колебаний должны быть близки друг к другу ($|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \lambda_D \lesssim \lesssim v_{Te}/c$). Поэтому интенсивность излучения содержит фактор (v_{Te}/c) в высокой степени

$$n_{\mathbf{k}}^t \approx \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\pi^2} \frac{n_{\mathbf{k}}^t \omega_{\mathbf{k}}^2}{N_0 T_e} \left(\frac{v_{Te}}{c} \right)^5 n_{\mathbf{k}}^t.$$

§ 1.6. Слабая турбулентность в терминах кинетического уравнения для волн

В § 1.5 мы вывели кинетическое уравнение для волн, используя приближение случайных фаз. Здесь мы исследуем свойства этих уравнений и рассмотрим некоторые их решения.

Исследования устойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем, показывает, что под действием малых возмущений плазма нередко приходит в состояние беспорядочного движения. В общем случае это движение нужно описывать с помощью набора всех физических величин — скорости, температуры и др. (в случае гидродинамического описания плазмы) — в каждой точке пространства и времени. Если отклонение от равновесного состояния невелико (или полная энергия турбулентного движения мала), то можно представить это турбулентное движение в виде суперпозиции линейных собственных колебаний:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \exp[-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}], \quad (1.65)$$

где частоты удовлетворяют дисперсионному соотношению $\omega_{\mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k})$. Таким образом, состояние турбулентности описывается заданием амплитуд этих собственных колебаний как функций волнового вектора и времени t . Распределение энергии между различными масштабами турбулентности можно найти на основе уравнений, описывающих взаимодействие волн. Эти уравнения нетрудно получить в приближении хаотических фаз, которое, по-видимому, справедливо для случая взаимодействия большого числа мод.

Описанный подход получил название теории *слаботурбулентной плазмы*. Результаты такого рода решения задачи могут быть даны либо в терминах энергии волн, либо в терминах чисел заполнения $n_{\mathbf{k}}$. В последнем случае кинетическое уравнение для волн можно представить в виде

$$\partial n_{\mathbf{k}} / \partial t \approx 2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + \text{St}(n_{\mathbf{k}}). \quad (1.66)$$

Интеграл соударений, входящий в это уравнение, получен нами в предыдущем параграфе. Кроме того, в нелинейной задаче об устойчивости должен присутствовать источник и сток энергии, которые в уравнении (1.66) описываются первым членом в правой части. При отыскании состояния квазистационарной турбулентности можно опустить член $dn_{\mathbf{k}}/dt$ и приравнять правую часть уравнения (1.66) нулю.

Здесь мы обсудим соотношение между теорией слаботурбулентной плазмы и колмогоровской теорией турбулентности. В теории гидродинамической турбулентности очень трудно найти строгое описание обмена энергией между различными масштабами турбулентности, так как турбулентное движение уже нельзя представить в виде набора собственных мод и поэтому у нас нет эквивалента такого статистического описания, какое дает кинетическое уравнение для

волн, полученное выше. Поэтому в обычной гидродинамике наиболее надежные оценки дают соображения размерности.

Представим себе ситуацию, когда источник крупномасштабного (малые k) турбулентного движения (рис. 10, область раскачки 1) отделен от области, где турбулентное движение быстро затухает из-за увеличения вязкой диссипации в мелких масштабах (область затухания 2). При этом энергия непрерывно перетекает от больших масштабов к малым в k -пространстве. Хорошо известные размерностные соображения приводят к следующему спектру в промежуточной области (между 1 и 2): $W_k \sim k^{-5/3}$ (закон Колмогорова — Обухова), где W_k — энергия единицы объема на единичный интервал волнового числа. При выводе этого закона предполагалось, что турбулентность изотропна и ее можно описать в терминах локальных

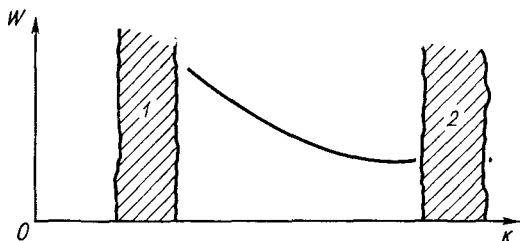


Рис. 10. Спектр турбулентности в случае постоянства потока энергии по спектру в интервале равновесия между областями раскачки и затухания.

характеристик среды, а энергия передается от малых масштабов к большим при резонансном взаимодействии мод, проходя последовательно все уменьшающиеся масштабы турбулентности [24].

Интересно найти аналог колмогоровского спектра в случае слаботурбулентной плазмы, поскольку для нее имеется уравнение для спектральной плотности энергии, выведенное из первых принципов. Однако в плазме можно возбудить большое число различных мод собственных колебаний, так что универсального спектра с простой степенной зависимостью $n_k \sim k^{-s}$ не существует. Поэтому искать такой простой спектр имеет смысл лишь в некоторых случаях, когда возбужден определенный тип волн.

Интересный пример слаботурбулентной среды, в которой возбужден один тип волн, дает известная задача о спектре волн на поверхности глубокой жидкости. Дисперсионное соотношение для поверхностных волн

$$\omega_k = \sqrt{gk} \quad (1.67)$$

таково, что трехволновое резонансное взаимодействие невозможно (см. рис. 7). Четырехволновое взаимодействие происходит лишь

в третьем порядке по энергии волн и описывается кинетическим уравнением вида (см. § 1.4, задача 1)

$$\begin{aligned} \partial n_{\mathbf{k}} / \partial t = \int U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} (n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} + n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} - \\ - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3}) \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d^2 \mathbf{k}_1 d^2 \mathbf{k}_2 d^2 \mathbf{k}_3, \end{aligned} \quad (1.68)$$

где $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ — однородная функция шестой степени (см. § 1.3).

Стандартная программа нахождения спектра турбулентности, предложенная В. Е. Захаровым [38], основана на предположении об однородности и изотропности турбулентности, наличии интервала равновесия и использует факт однородности ядра интегрального уравнения (1.68) и его свойств симметрии

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = U_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \\ = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2} = U_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}\mathbf{k}_1}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Согласно этой программе уравнение (1.68) усредняется по углам в \mathbf{k} -пространстве, а в полученном таким образом уравнении переходят к переменным $\omega = \omega(\mathbf{k})$ (спектр частот, разумеется, тоже должен быть изотропным). В результате задача

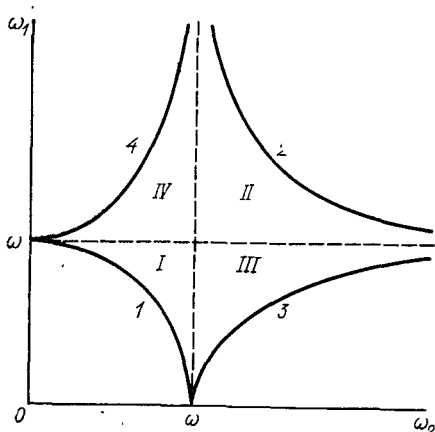


Рис. 11. Область интегрирования в плоскости (ω_1, ω_2) .

сводится к отысканию степенных решений уравнения

$$\begin{aligned} \int T_{\omega, \omega_1 + \omega_2 - \omega, \omega_1, \omega_2} \{ n_{\omega_1} n_{\omega_2} n_{\omega_1 + \omega_2 - \omega} + n_{\omega} n_{\omega_1} n_{\omega_2} - \\ - 2n_{\omega} n_{\omega_1} n_{\omega_1 + \omega_2 - \omega} \} d\omega_1 d\omega_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Интегрирование здесь происходит по области, изображенной на рис. 11, где кривые 1—4 описываются соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 &= -\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega^2; \\ (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega^2; \\ (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 &= -\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega^2; \\ (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega^2. \end{aligned}$$

Ядро уравнения (1.70) остается по-прежнему однородным (степень однородности можно найти, если сравнить это уравнение с (1.68); она равна 20) и положительным. Решение уравнения представим в виде

$$n_{\omega} = A \omega^8. \quad (1.71)$$

При этом удастся отобразить каждую из областей II, III, IV на область I по следующим правилам.

1. Для области II $\omega_1 \rightarrow \omega_2 \omega / (\omega_1 + \omega_2 - \omega)$; $\omega_2 \rightarrow \omega_1 \omega / (\omega_1 + \omega_2 - \omega)$.

2. Для области III $\omega_2 \rightarrow \omega^2 / \omega_1$; $\omega_1 \rightarrow (\omega_1 + \omega_2 - \omega) \omega / \omega_2$.

3. Для области IV $\omega_1 \rightarrow \omega^2 / \omega_2$; $\omega_2 \rightarrow (\omega_1 + \omega_2 - \omega) \omega / \omega_1$.

Воспользуемся симметрией и однородностью ядра T , тогда интегралы по областям II—IV можно выразить через интеграл по области I. В результате уравнение (1.70) запишем в виде

$$\int_I \frac{T_{\omega, \omega_1 + \omega_2 - \omega, \omega_1, \omega_2}}{(\omega_1 + \omega_2 - \omega)^{23+3s} \omega_1^{23+3s} \omega_2^{23+3s}} [\omega_1^s \omega_2^s (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^s + \omega^s \omega_1^s \omega_2^s - 2\omega^s \omega_1^s (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^s] \{[\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2 - \omega)]^{23+3s} + [\omega \omega_1 \omega_2]^{23+3s} - 2[\omega \omega_2 (\omega_1 + \omega_2 - \omega)]^{23+3s}\} d\omega_1 d\omega_2. \quad (1.72)$$

Подынтегральное выражение обращается в нуль при $s = -1$ и $s = -8$. Первое из найденных решений — это распределение Рэля — Джинса и при выполнении интегрирования оказывается, что интеграл расходится на больших k . Второе решение соответствует колмогоровскому спектру гидродинамической турбулентности и дает для поверхностных волн спектр энергии [36]

$$W_\omega = \omega^4 n_\omega = A' \omega^{-4}. \quad (1.73)$$

Преобразование интегрального уравнения к виду (1.72) может оказаться полезным при нахождении уровня турбулентности. Что же касается показателя степенного спектра, то, как и в задаче о колмогоровском спектре, его можно найти из соображений постоянства потока энергии по спектру в интервале равновесия, а также учитывая, что взаимодействие турбулентных масштабов можно описать в рамках теории слаботурбулентной среды.

Постоянство потока энергии по спектру запишем с помощью соотношения

$$W_k k / \tau_k = \text{const}, \quad (1.74)$$

где $W_k dk$ — поверхностная плотность энергии турбулентных пульсаций с масштабом k^{-1} в интервале волновых чисел dk ; τ_k — характерное время взаимодействия турбулентных пульсаций с масштабом k^{-1} . Поскольку для поверхностных волн взаимодействие появляется лишь в третьем порядке по энергии, то $\tau_k^{-1} = \omega U(k) (W_k k)^2$.

В случае, когда в задаче нет характерных величин размерности длины, функция $U(k)$ заведомо однородная. Степень ее однородности определяется из соображений размерности и поэтому функция $U(k)$ должна иметь размерность обратного квадрата плотности энергии, т. е. $U(k) = \{MN_0(\omega/k)^2 k^{-1}\}^{-2}$. Здесь $N_0 M \omega^2 / k^2$ — характерная объемная плотность гравитационной энергии жидкости относительно уровня невозмущенной поверхности воды. Множитель k^{-1} учитывает, что амплитуда поверхности волн затухает на глубине по-

рядка k^{-1} , и поэтому в задачу должна входить гравитационная энергия поверхностного слоя жидкости толщиной k^{-1} .

Таким образом, для τ_k получаем уравнение

$$\tau_k^{-1} \sim \sqrt{gk} \left(\frac{W_k k}{MN_0 g/k^2} \right)^2. \quad (1.75)$$

Из уравнений (1.74) и (1.75) находим спектр турбулентности

$$W_k \approx Ak^{-5/2}, \quad (1.73a)$$

что соответствует спектру $W_\omega \approx \omega^{-4}$.

Заметим, что весь вывод основывался не только на соображениях размерности, но и на предположении о применимости теории слабо-турбулентной среды. Поэтому нет ничего удивительного, что показатель спектра (1.73) отличается от полученного Филипсом [39] для случая, когда сильное волнение приводит к образованию барашков, и следовательно, теория слабой связи мод становится несправедливой.

Таким образом, мы показали, что соображений постоянства потока энергии по спектру в интервале равновесия и справедливости слабой связи мод (в известном порядке по энергии мод) достаточно для отыскания показателя спектра однородной изотропной турбулентности в тех случаях, когда в задаче нет параметра размерности длины. Если такой параметр l входит в задачу, то степень однородности ядра $U(k)$ только из соображений размерности найти не удается, так как умножение на любую функцию (kl) не меняет размерность ядра. В этом случае степень однородности надо найти прямым вычислением.

ЗАДАЧА

Найти спектр турбулентности капиллярных волн [40].

Спектр частот капиллярных колебаний описывается дисперсионной кривой типа I (см. рис. 7)

$$\omega(k) = \sqrt{\sigma k^3 / \rho}, \quad (1)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; $\rho \equiv N_0 M$. Поэтому в системе волн с таким спектром возможно трехволновое взаимодействие. В соответствии с этим характерное время взаимодействия оказывается обратно пропорциональным энергии волн (а не квадрату энергии волн, как в случае четырехволнового взаимодействия, рассмотренного в тексте) [29]

$$\tau_k^{-1} \sim \omega \left[\frac{W_k k}{\rho_0 (\omega/k)^2} \right]. \quad (2)$$

Комбинируя это уравнение с уравнением (1.74), получаем следующий спектр турбулентности:

$$W_k \sim k^{-11/4}. \quad (3)$$

§ 1.7. Неустойчивость мод с отрицательной энергией

В динамике плазмы имеется гораздо большее разнообразие физических явлений, чем в механике жидкостей. Одним из примеров, подтверждающих это, является возможность существования волн с отрицательной энергией. Термин отрицательная энергия имеет тот смысл, что суммарная (кинетическая и электромагнитная) энергия среды уменьшается с ростом амплитуды волны. На возможность появления в плазме волн с отрицательной энергией впервые обратили внимание Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский и А. В. Тимофеев [41]. Чтобы выяснить, какие причины могут привести к изменению знака энергии волн, рассмотрим известное выражение для энергии электромагнитного поля в диспергирующей среде

$$W = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{d}{d\omega} (\omega\epsilon) \langle \mathbf{E}^2 \rangle + \frac{d}{d\omega} (\omega\mu) \langle \mathbf{H}^2 \rangle \right], \quad (1.76)$$

где ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. Если ограничиться электростатическими волнами, то отсюда следует, что знак энергии зависит только от $d\epsilon/d\omega$ и может быть отрицательным в термодинамически неравновесной среде (в равновесном состоянии это исключается соотношениями Крамерса — Кронига). Неравновесность среды может быть вызвана ее неизотропностью или неоднородностью.

Для примера рассмотрим плазму с анизотропным распределением ионов по скоростям (а именно $T_{\parallel}/T_{\perp} \rightarrow 0$). Диэлектрическая проницаемость для случая волны с частотой вблизи ионной циклотронной частоты $\Omega_H = eH_0/MC$ дается следующим выражением:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} - \frac{\Omega_p^2 \Gamma_n}{(\omega - n\Omega_H)^2} \cdot \frac{k_{\parallel}^2}{k^2}, \quad (1.77)$$

где $\Gamma_n = I_n(b_{\perp}) \exp(-b_{\perp})$; $b_{\perp} = (k_{\perp}^2 T_{\perp})/M\Omega_H^2$; I_n — модифицированная функция Бесселя n -го порядка. Уже в рамках линейного рассмотрения такие волны обладают специфическими свойствами. Так, амплитуда волны, отраженной от области с отрицательной дисперсией ($d\omega/dk < 0$), больше амплитуды падающей волны. В обычной гидродинамике хорошо известно, что амплитуда волны, отражающейся от границы, движущейся со сверхзвуковой скоростью ($v > c_s$), возрастает по той же причине. В случае $v > 2c_s$ существует такой угол падения, что при бесконечно малой амплитуде падающей волны прошедшая и отраженная волны имеют конечную амплитуду. (Это, разумеется, обычное излучение Вавилова — Черенкова.) Аналогичным образом поглощение такой волны средой, по которой она распространяется [42], или уход ее через торцы системы [43] приводит к росту амплитуды.

В системе волн с разным знаком энергии возможна своеобразная нелинейная неустойчивость. Причина ее заключается в том, что если волна отрицательной энергии отдает энергию волне с положительной энергией, то амплитуды обеих волн нарастают. Про-

стейшим механизмом неустойчивости (в литературе она получила название *взрывной*) может служить процесс распада волны с отрицательной энергией на две волны каждого типа. Впервые такая неустойчивость была проиллюстрирована с помощью кинетического уравнения, корректно учитывающего взаимодействие волн со случайными фазами и с разным знаком энергии [44].

. Рассмотрим случай волн с фиксированными фазами, когда эволюция возмущений во времени описывается аналитически подобно тому, как это было сделано для взаимодействия волн с положительной энергией в § 1.2. Динамическое уравнение для волн получим, проведя замену:

$$\left. \begin{aligned} C_k(t) &= \left[\frac{k^2}{8\pi} \left| \frac{\partial \varepsilon(\omega)}{\partial \omega_k} \right| \right]^{1/2} \Phi_k(t); \\ \text{sign } \omega_k &\rightarrow \text{sign} [\omega_k (\partial/\partial \omega_k) \omega_k \varepsilon(\omega_k)] = \text{sign} (\partial \varepsilon / \partial \omega_k). \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

Отсюда вытекают следующие свойства симметрии для матричных элементов:

$$V_{k_2, -k_0, k_1} = V_{k_1, k_0, k_2} \text{sign} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_2} \right). \quad (1.79)$$

В результате вместо уравнений (1.39) получаем

$$\left. \begin{aligned} \partial a_1 / \partial t &= H a_0 a_2 \sin \Theta; \\ \partial a_2 / \partial t &= H a_0 a_1 \sin \Theta; \\ \partial a_0 / \partial t &= H a_1 a_2 \sin \Theta; \\ \partial \Theta / \partial t &= \text{ctg } \Theta \frac{\partial}{\partial t} \ln a_0 a_1 a_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

где волны (ω_0, k_0) и (ω_1, k_1) имеют отрицательную энергию. Соотношения Мэнли — Роу для рассматриваемого случая выглядят также симметрично:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= n_0 - n_1 = \text{const}; \\ m_2 &= n_0 - n_2 = \text{const}; \\ m_0 &= n_1 - n_2 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

Чтобы не усложнять вычисления, ограничимся рассмотрением частного случая, когда $\Theta = \pi/2$ (более общий случай разобран в работе [45]). Тогда, используя соотношения Мэнли — Роу, первое из уравнений (1.80) перепишем в виде

$$2Ht = \int_{(n_0)0}^{(n_0)t} dn_0 / \sqrt{n_0 (n_0 - m_1)(n_0 - m_2)}. \quad (1.82)$$

Полагая $n_0(0) > m_1 > m_2$ и вводя новые переменные

$$y(t) = [m_1/n_0(t)]^{1/2}, \quad \kappa = (m_2/m_1)^{1/2}, \quad (1.83)$$

преобразуем интеграл (1.82) к стандартной форме эллиптического интеграла:

$$H\sqrt{m_1}t = - \int_{y(0)}^{y(t)} dy / \sqrt{(1-y^2)(1-\kappa^2 y^2)}.$$

Следовательно,

$$n_0(t) = m_1 / [(m_1/n_0(0))^{1/2} - \operatorname{sn}(H\sqrt{m_1}t, \kappa)]^2. \quad (1.84)$$

Поскольку по условию волна с частотой ω_0 имела наибольшую амплитуду вероятности, т. е. $n_0(0) > m_1$, то это выражение обращается в бесконечность как $(t_\infty - t)^2$ при некотором конечном t_∞ . Иными словами, неустойчивость носит взрывной характер.

ЗАДАЧА

Найти решение кинетических уравнений, описывающих взаимодействие волн со случайными фазами и с различным знаком энергии в одномерном случае [44].

Воспользовавшись заменой (1.78), из уравнения (1.63) получаем кинетическое уравнение для чисел заполнения $n_k = |C_k|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_k = & 2 \int dk' dk'' |V_{kk'k''}|^2 \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \times \\ & \times \delta(k - k' - k'') \left[n_{k'} n_{k''} - \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{k'}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{k''}} \right) \times \right. \\ & \left. \times n_k n_{k''} - \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{k''}} \right) n_k n_{k'} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть имеются три ветви колебаний: две с положительной энергией и одна с отрицательной. Тогда в одномерном случае для каждого фиксированного k , как правило, существует лишь одна пара значений k' , k'' , для которых возможно выполнить резонансные условия. Поэтому система взаимодействующих волн разбивается на отдельные тройки. Рассмотрим три взаимодействующих волны, одна из которых имеет отрицательную энергию. Уравнение для чисел заполнения в этом случае принимает вид

$$\varepsilon_{12} \dot{n}_3 = \varepsilon_{31} \dot{n}_2 = \varepsilon_{23} \dot{n}_1 = |V_{123}|^2 (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3), \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial \omega(k_\alpha)}{\partial k_\alpha} - \frac{\partial \omega(k_\beta)}{\partial k_\beta} \right|, \quad V_{k_1 k_2 k_3} \equiv V_{123}.$$

С помощью вытекающих отсюда законов сохранения

$$m_1 = \varepsilon_{23} n_1 - \varepsilon_{12} n_3 = \text{const}, \quad m_2 = \varepsilon_{31} n_2 - \varepsilon_{12} n_3 = \text{const} \quad (3)$$

сводим систему уравнений (2) к одному уравнению для n_3

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_3 = & \frac{|V_{123}|^2}{\varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \varepsilon_{31}} \{ n_3^2 \varepsilon_{12} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}) + \\ & + n_3 [m_1 (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{12}) + m_2 (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{12})] + m_1 m_2 \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Общее решение этого уравнения выглядит слишком громоздко. Рассмотрим предельный случай, когда одна из величин $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (пусть это будет ε_{12}) много меньше двух других

$$\varepsilon_{12} \ll \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23}. \quad (5)$$

Тогда решение уравнения (4) принимает чрезвычайно простой вид

$$n_3 = n_3^{(0)} (A - 1) (\exp Bt) / (A - \exp Bt), \quad (6)$$

где

$$A = \varepsilon_{23} (n_1^{(0)} + n_2^{(0)}) / 2\varepsilon_{12} n_3^{(0)}, \quad B = |V_{123}|^2 n_3^{(0)} (A - 1) / \varepsilon_{23}.$$

Видим, что числа заполнения обращаются в бесконечность при некотором $t_\infty = B^{-1} \ln A$ по закону $n_3 \sim |t_\infty - t|^{-1}$, т. е. более медленное, чем в случае волн с фиксированными фазами [см. уравнение (1.84)].

§ 1.8. Адиабатическое приближение (взаимодействие между высокочастотными и низкочастотными волнами)

Вычисление ядра кинетического уравнения для волн даже с использованием ряда упрощающих задачу предположений (в § 1.1 это малость β) оказывается весьма сложной задачей. Поэтому полезно упростить схему вычислений. Одним из примеров, когда это удается сделать, может служить взаимодействие мод с существенно разными масштабами, исследованное впервые А. А. Веденовым и Л. И. Рудаковым [46]. Если рассматривать взаимодействие мод с частотами ω_k, Ω_q такими, что $\omega_k \gg \Omega_q$ и $|\mathbf{k}| \gg |\mathbf{q}|$, то применимо адиабатическое приближение. Термин «адиабатическое» здесь означает, что одна из мод распространяется в медленно меняющейся и слабо неоднородной среде. Изменение параметров среды обусловлено наличием второй (низкочастотной) моды. Последняя, конечно, испытывает реакцию со стороны высокочастотных мод, причем при рассмотрении этой реакции можно провести усреднение по быстрым колебаниям высокочастотных мод.

Для примера рассмотрим задачу о взаимодействии высокочастотных геликонов с низкочастотными звуковыми колебаниями. Эта задача исследовалась в § 1.1 и 1.2 для случая трех волн с фиксированными фазами.

Пусть основным уравнением будет уравнение Луивилля для чисел заполнения геликонов в фазовом пространстве координат и волновых векторов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial \omega_k}{\partial k_z} \cdot \frac{\partial n_k}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial n_k}{\partial k_z} = 0; \\ n_k = \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon(\omega) \right] \frac{|\mathcal{H}_k|^2}{8\pi k^2 c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

В однородной плазме изменение частоты ($\omega(z)$) как функции координат обусловлено наличием звуковых колебаний, которые мы по-

прежнему описываем гидродинамическими уравнениями типа использованных в § 1.1:

$$N \left(\frac{\partial v_{||}}{\partial t} + v_{||} \frac{\partial}{\partial z} v_{||} \right) = -c_s^2 \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{|\mathcal{H}_k|^2}{8\pi M}; \quad (1.86)$$

$$\partial N / \partial t + \partial N v_{||} / \partial z = 0. \quad (1.87)$$

Вводя новую переменную ξ — смещение элемента объема жидкости, уравнения (1.85)–(1.87) можно записать в симметричном виде:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial \omega_k}{\partial k_z} \cdot \frac{\partial n_k}{\partial z} - s \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial n_k}{\partial k_z} = 0; \quad (1.88)$$

$$N_0 M \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = -s \frac{\partial}{\partial z} \sum_k n_k, \quad (1.89)$$

где мы воспользовались дисперсионным соотношением k^2 — $(\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega, N) = 0$ для вычисления производной частоты по координате

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_k}{\partial z} &= \frac{\partial \omega^2 \varepsilon / \partial N}{\partial \omega^2 \varepsilon / \partial \omega} \cdot \frac{\partial N}{\partial z} = s \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}; \\ s &= [\partial \omega^2 \varepsilon(\omega) / \partial \omega]^{-1} k^2 c^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Затухание звуковых волн в газе геликонов. Эволюция малых звуковых возмущений в газе плазмонов описывается уравнениями (1.88) и (1.89), линеаризованными относительно ξ . Из уравнения (1.88) находим поправку к функции распределения геликонов из-за наличия малых возмущений

$$-\delta n_k = \frac{i s}{\Omega - q \partial \omega / \partial k} q^2 \xi \frac{\partial n_k}{\partial k}.$$

Подставляя этот результат в (1.89), получаем дисперсионное соотношение, связывающее частоту Ω и волновой вектор \mathbf{q} ионно-звуковой волны:

$$\Omega^2 - q^2 c_s^2 = \frac{q^2 s^2}{2\pi M N} \int \frac{q \frac{\partial n_k}{\partial k} dk}{\Omega - q \frac{\partial \omega}{\partial k} + i 0}. \quad (1.91)$$

При малой амплитуде геликонов декремент затухания звуковых колебаний мал и поэтому можно представить частоту Ω в виде

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \pm |q| c_s + i \Gamma_q^\pm; \\ \Gamma_q^\pm &= \frac{s^2 q}{4MN_0 c_s} \int dk q \frac{\partial n_k}{\partial k} \delta \left(\pm |q| c_s - q \frac{\partial \omega}{\partial k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

Аналогия с затуханием Ландау на частицах очевидна: здесь звуковые колебания затухают на квазичастицах, имеющих скорости

$d\omega/dk$ и функцию распределения n_k . Разумеется, что под действием звуковых волн данное распределение должно релаксировать (см. задачу к § 2—3).

Неустойчивость газа геликонов. Покажем теперь, что для системы, состоящей из газа геликонов с близкими частотами и звуковых волн, справедлив критерий неустойчивости Лайтхилла (см. § 1.1). В случае узкого спектра геликонов их можно рассматривать как монохроматическую волну:

$$n_k = 2\pi n_0 \delta(k - k_0). \quad (1.93)$$

Подставляя уравнение (1.93) в (1.91), получаем

$$\Omega^2 - q^2 c_s^2 = - \frac{q^4 s^2}{MN_0} \cdot \frac{n_0 \partial^2 \omega / \partial k^2}{(\Omega - q \partial \omega / \partial k)^2}. \quad (1.94)$$

Для возмущений нерезонансного типа ($\Omega \approx qd\omega/dk + iv$) отсюда находим инкремент модуляционной неустойчивости:

$$v^2 = \frac{q^2 s^2 n_0}{N_0 M (\partial \omega / \partial k)^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} > 0.$$

С учетом определения чисел заполнения (1.85) и того, что нелинейная поправка к частоте $\delta\omega_0 = -s^2 n_0 / N_0 M (d\omega/dk)^2$, полученный критерий сводится к критерию Лайтхилла. Однако в дисперсионном уравнении отсутствуют члены, описывающие стабилизацию неустойчивости при наличии групповой скорости (см. § 1.1).

ЗАДАЧА

Найти условия пересечения распадной и модуляционной ветвей неустойчивости плазменных колебаний (А. А. Ведынов, Л. И. Рудаков [46]).

Для системы газ плазмонов плюс звуковые возмущения справедливы уравнения (1.85)—(1.87) с той лишь разницей, что во второе из этих уравнений входит не сила магнитного давления, а динамическая сила $-(N_0 e^2 / 2m) \times \nabla \sum_k |\mathbf{E}_k|^2 / \omega_k^2$. Соответственно этому величина $s = \omega_p / 2$. Поскольку для плазменных колебаний $\partial^2 \omega / \partial k^2 > 0$, то согласно критерию Лайтхилла плазменные колебания неустойчивы относительно возмущений модуляционного типа, если нелинейная поправка к частоте отрицательна. Последнее имеет место при условии

$$\partial \omega / \partial k \ll c_s, \quad \text{т. е. } k^2 \lambda_D^2 \ll c_s / v_{Te}. \quad (1)$$

Малость групповой скорости плазменных волн обуславливает возможность пересечения ветвей распадной и модуляционной неустойчивостей ($c_s \approx \partial \omega / \partial k$), когда инкремент неустойчивости оказывается порядка корня четвертой степени из энергии исходной волны. При достаточно больших амплитудах такое пересечение может иметь место в широком интервале волновых чисел. Чтобы рассмотреть этот эффект, будем искать решение уравнения (1.94) в виде

$$\Omega = (q/2) \partial \omega / \partial k_0 + i v \gg q c_s. \quad (2)$$

В результате для v получаем дисперсионное уравнение

$$v^2 = - \frac{1}{4} \left(q \cdot \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^2 \pm q^2 c_s^2 \left[\frac{s^2 \int \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} n_k \frac{d^3 k}{(2\pi^3)}}{N_0 M c_s^4} \right]^{1/2}.$$

Отсюда находим критерий неустойчивости

$$\int \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} (d^3 k / (2\pi)^3) > (M/m) N_0 T_e (k\lambda_D)^4 \left[\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{(|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{q}|)} \right]^4 \quad (3)$$

и ее инкремент

$$\nu = qc_s \left[\frac{M}{m} \int \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} / N_0 T_e \right]^{1/4}. \quad (4)$$

Условие применимости приближения слаботурбулентной плазмы и неравенство (2) для инкремента неустойчивости налагают ограничения на интервал волновых векторов, в котором может иметь место неустойчивость $m/M > (k\lambda_D)^4 > (m/M)^2$.

Г Л А В А 2

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНА — ЧАСТИЦА

§ 2.1. Взаимодействие волна — частица в случае монохроматической волны

Рассмотрим линейное (или квазилинейное) взаимодействие волна—частица, связанное с условием резонанса. Когда частица и волна удовлетворяют такому условию, частица сохраняет постоянную фазу относительно волны и эффективно ускоряется в постоянном электрическом поле волны. Поскольку взаимодействие имеет место для резонансных частиц, его нельзя описать гидродинамическими уравнениями, а надо воспользоваться кинетическими уравнениями и уравнениями Максвелла для самосогласованного поля.

Рассмотрим относительно простую задачу о резонансном взаимодействии между электронами и монохроматической ленгмюровской волной (одномерная задача). Запишем систему уравнений, которая используется для решения этой проблемы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{dt} + v \frac{df}{dx} + (e/m)(\partial\Phi/\partial x)(df/dv) &= 0; \\ \partial^2\Phi/\partial x^2 &= 4\pi ne (1 - \int f dv). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь $f(x, v, t)$ — функция распределения электронов, $\Phi(x, t) = (1/2) \Phi \cos(kx - \omega t)$ — электрический потенциал в монохроматической волне. Единственный нелинейный член в этих уравнениях — это третье слагаемое в кинетическом уравнении $(df/dx)(df/dv)$. Это слагаемое можно линеаризировать, заменив df/dv на df_0/dv или, полагая амплитуду волны постоянной [т. е. заменяя $\Phi \cos(kx - \omega t)$ на $\Phi_0 \cos(kx - \omega t)$], Л. Д. Ландау [47] заменил df/dv на df_0/dv и получил хорошо известный результат: затухание амплитуд волны по закону $\exp(-\gamma_L t)$, где $\gamma_L = (\pi/2) (\omega_p^2 \omega / k^2) \times (df_0/dv)|_{v=\omega/k}$. При $(df_0/dv) > 0$ имеет место нарастание колебаний (неустойчивость так называемого «размытого» пучка).

Выясним, в чем заключается различие между двумя способами упрощения (линеаризации) задачи. Если заменить $\Phi \cos(kx - \omega t)$ на $\Phi_0 \cos(kx - \omega t)$, то можно проследить за поведением функции

распределения в области резонансных скоростей. Можно ожидать, что характерный временной масштаб существенного изменения функции распределения в этой области будет порядка периода колебаний резонансных электронов, захваченных электрическим полем волны $\tau_b = \sqrt{2m/ek^2\Phi_0}$.

Процедура линеаризации Ландау справедлива, если амплитуда волны меняется значительно быстрее, чем df/dv . Запишем это условие в следующей форме: $|\gamma_L \tau_b| \gg 1$. Иначе говоря, амплитуда волны должна быть меньше некоторого значения, т. е. $\Phi_0 \ll \gamma_L^2 m/k^2 e$. Противоположный предельный случай имеет место, когда df/dv меняется значительно быстрее, чем амплитуда волны. Это условие

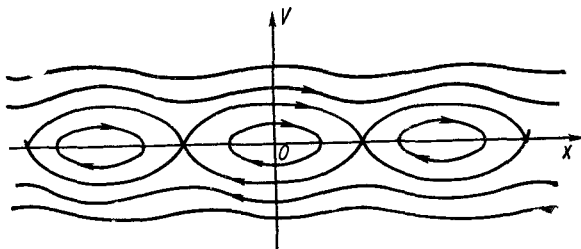


Рис. 12. Фазовые траектории частиц, движущихся в поле монохроматической волны.

можно записать так: $|\gamma_L \tau_b| \ll 1$ или $\Phi_0 \gg m\gamma_L^2/k^2 e$. Разумеется, если $\gamma_L \tau_b$, задача становится существенно нелинейной и не допускает линеаризации вообще.

Для исследования эволюции функции распределения удобно рассмотреть траектории электронов на фазовой плоскости. В системе отсчета, движущейся вместе с волной $\Phi_0 \cos(kx - \omega t)$ (рис. 12), эти траектории описываются уравнением $\mathcal{E} = mv^2/2 - (1/2) e\Phi_0 \cos kx$. Электроны с $\mathcal{E} < e\Phi_0/2$ захвачены волной, а электроны с $\mathcal{E} > e\Phi_0/2$ не захвачены. Удобно перейти к переменным энергия и угол (\mathcal{E}, ϑ) , где \mathcal{E} определяет некоторую траекторию, а ϑ — точку на этой траектории. Функция распределения в новых переменных есть $f(\vartheta, \mathcal{E})$. Она может не зависеть от времени лишь в том случае, если f не зависит от ϑ (иначе говоря, постоянная вдоль траекторий частиц). Если такую функцию распределения сделать самосогласованной с электрическим полем, то можно сконструировать стационарное решение системы уравнений (2.1), описывающее установившиеся нелинейные волны. Такие решения называются решениями Бернштейна — Грина — Крускала (сокращенно БГК) [48]. В рассматриваемой задаче f сначала зависит и от ϑ , и от \mathcal{E} , но со временем асимптотически стремится к одному из частных решений БГК. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим поведение захваченных частиц. Две частицы на близких траекториях, т. е. две частицы с несколько отличающимися энергиями \mathcal{E} имеют, вообще говоря, несколько отли

чающиеся частоты обращения в фазовом пространстве (см. рис. 12) $\omega_2 - \omega_1 = (d\omega/d\mathcal{E})(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)$. Если эти частицы начинают двигаться с одинаковыми фазами ϑ , через интервал времени $\Delta t \approx 1/(\omega_2 - \omega_1)$ фазы частиц разойдутся на $\Delta\vartheta \sim 1$. Так происходит размешивание фаз и f становится постоянной вдоль траектории, если рассматривать функцию распределения, усредненную даже по небольшим интервалам \mathcal{E} . Подобные аргументы можно отнести и к незахваченным частицам, если f является периодической в пространстве. В реальной плазме сглаживание мелкомасштабных флюктуаций функции распределения происходит само собой в результате столкновений между частицами. Когда фазы перемещаются, функция распределения становится очень шероховатой функцией \mathcal{E} или ϑ . Через достаточно большое время масштаб этих шероховатостей становится настолько мелким, что нельзя далее пренебрегать членом d^2f/dv^2 в интеграле столкновений Ландау, так что даже в бесстолкновительной плазме столкновения в конце концов сглаживают шероховатости функции распределения и она приближается к усредненной. Время, в течение которого происходит этот процесс, конечно и практически нечувствительно к частоте столкновений. Эти рассуждения показывают, как может увеличиваться энтропия в бесстолкновительной плазме (подобное «рождение» энтропии обсуждалось в работах [49, 50]).

Рассмотренная здесь картина качественно близка к ситуации в теории гидродинамической турбулентности: турбулентность сначала развивается в больших масштабах, а затем все в меньших и меньших. В конце концов, в достаточно малых масштабах включается настоящее затухание (из-за вязкости) и энергия турбулентного движения диссипирует. Отличие заключается в том, что дробление масштабов здесь происходит в пространстве скоростей ($f = f(v)$).

Задача об эволюции функции распределения в поле волны заданной амплитуды

$$\Phi = \Phi_0 (1 - \cos kx)/2 \equiv \Phi_0 \sin^2(kx/2) \quad (2.2)$$

(такую нормировку потенциала волны удобно ввести для дальнейших вычислений) решается методом интегрирования по траектории. Для волны не слишком большой амплитуды начальное распределение (при $t = 0$) в резонансной области можно разложить

$$f_0(v) = f_0(\omega/k) + (\partial f_0/\partial v)|_{v=\omega/k}(v - \omega/k) + \dots \quad (2.3)$$

Функцию распределения при $t > 0$ можно получить методом интегрирования по траекториям. Это сводится к замене в уравнении (2.3) скорости

$$(v - \omega/k) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma \sqrt{(2/m) \{ \mathcal{E} - e\Phi_0 [\sin(k/2)x_0(x, \mathcal{E}, t)]^2 \}},$$

где $x_0(x, \mathcal{E}, t)$ — начальная координата электрона с энергией \mathcal{E} , попадающего в момент времени t в точку x ; $\sigma = \pm 1$ определяет направление движения. Движение частиц в поле волны можно выра-

зять в терминах эллиптических функций с помощью замены $\sin \xi = \kappa \sin kx/2$, $\kappa^2 = e\Phi_0/\mathcal{E}$.

Интегрируя уравнение движения для запертых частиц

$$dx/[2/m(\mathcal{E} - e\Phi_0 \sin^2 kx/2)]^{1/2} = dt,$$

получаем

$$F(1/\kappa, kx_0/2) = F(1/\kappa, kx/2) - t/\tau_b,$$

где $F(\kappa, \varphi) = \int_0^\varphi d\xi (1 - \kappa^2 \sin^2 \xi)^{-1/2}$ — эллиптический интеграл первого рода

$$\tau_b = [2m/k^2 e\Phi_0]^{1/2}. \quad (2.4)$$

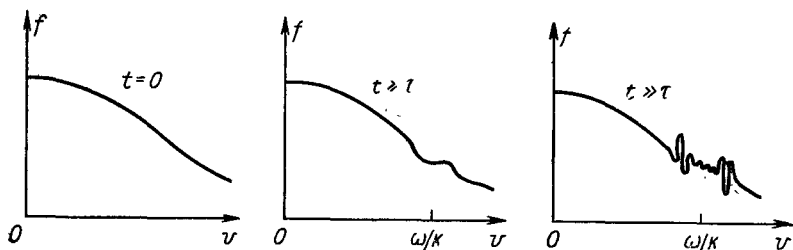


Рис. 13. Искажение функции распределения резонансных частиц в поле монохроматической волны.

Представим функцию распределения для запертых электронов $f(v, t)$ в виде

$$f(x, \mathcal{E}, t) = \left\{ f_0 \left(\frac{\omega}{k} \right) + f'_0 \sigma \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} \operatorname{cn} \left[F \left(\frac{1}{\kappa}, \frac{kx}{2} \right) - \frac{t}{\tau_b}, \frac{1}{\kappa} \right] \right\} / \left[2m \left(\mathcal{E} - e\Phi_0 \sin^2 \frac{kx}{2} \right) \right]^{1/2}.$$

Косинус эллиптический является осциллирующей функцией κ , причем период осцилляции по κ уменьшается с ростом t . Вследствие этого осциллирует и функция распределения. Качественный ход функции распределения изображен на рис. 13. После усреднения такой функции распределения второе слагаемое обращается в нуль. Усредненная функция распределения $\langle f(\mathcal{E}) \rangle$, таким образом, одинакова для всех траекторий (т. е. $\langle f \rangle = f(\omega/k)$). Иначе говоря, в области фазового пространства, соответствующей захваченным электронам (рис. 14), формируется плато. Образование такого плато — весьма общее следствие взаимодействия волна — частица и мы встретимся с ним и в случае многих волн (т. е. взаимодействия частиц с волновым пакетом). Для траекторий, соответствующих не за-

хваченным электронам, функцию распределения можно найти аналогично

$$f(x, \mathcal{E}, t) = \left\{ f_0 + f'_0 \sigma \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} dn \left[F\left(\kappa, \frac{kx}{2}\right) - \frac{t}{\kappa\tau_b}, \kappa \right] \right\} / \left[2m \left(\mathcal{E} - e\Phi_0 \sin^2 \frac{kx}{2} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Среднее значение эллиптической функции dn [...] отлично от нуля. Поэтому в результате усреднения выражения (2.5) получаем

$$\langle f \rangle \equiv f_{QL} = \left\{ f_0 \left(\frac{\omega}{k} \right) + \frac{df_0}{dv} \Big|_{v=\omega/k} \times \right. \\ \left. \times \frac{\pi}{k\kappa K(\kappa)\tau_b} \right\} / \left[2m \left(\mathcal{E} - e\Phi_0 \sin^2 \frac{kx}{2} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.6)$$

где $K(\kappa) = F(\kappa, \pi/2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

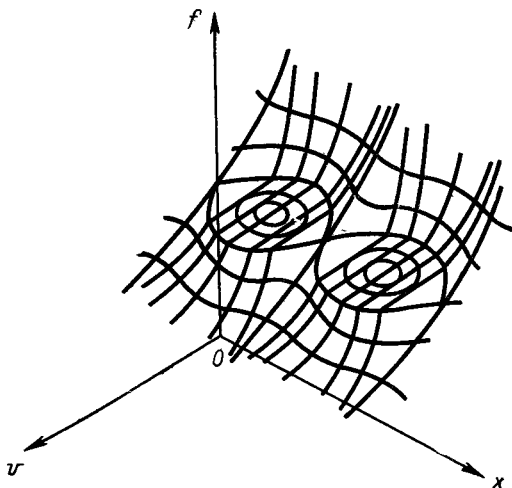


Рис. 14. Усредненная функция распределения, образующаяся в результате релаксации в поле монохроматической волны.

До сих пор амплитуду волны считали постоянной и вычисляли изменение функции распределения вследствие взаимодействия с такой волной. Теперь можно воспользоваться найденным изменением функции распределения и вычислить малую поправку к амплитуде волны. Эта поправка порядка $\Delta\Phi \sim \gamma_L \tau_b \Phi_0$, так что подобную процедуру можно рассматривать как разложение по малому параметру $\gamma_L \tau_b$. Введем зависящий от времени декремент затухания

$$\gamma(t) = dW/2Wdt, \quad (2.7)$$

где $W(t) = \int_0^{\lambda} (dx/\lambda)(d\Phi/dx)^2/4\pi$ — энергия волны.

Для нахождения dW/dt воспользуемся законом сохранения энергии.

$$dW/dt = ne \int_0^{\lambda} (dx/\lambda)(\partial\Phi/\partial x) \int_{-\infty}^{+\infty} dv f(x, v, t)v. \quad (2.8)$$

Выражение для функции распределения $f(x, v, t)$, зависящей от времени, нужно при вычислении интеграла в выражении (2.8), было найдено для двух различных типов профиля электрического потенциала волны. В простейшем случае, рассмотренном в работе [51], потенциал предполагался имеющим вид последовательности

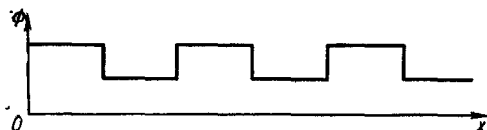


Рис. 15. Модель волны с потенциалом прямоугольной формы.

прямоугольных барьеров (рис. 15). Затухание такой волны начинается со значения γ_L , определяемого линейной теорией Ландау, а затем осциллирует с периодом, имеющим порядок τ_b среднего периода колебаний электронов, захваченных волной. Затухание исчезает, когда фазы захваченных электронов полностью перемещаются. Для такого идеализированного профиля волны вклад в затухание дают только захваченные электроны.

Случай синусоидальной волны был рассмотрен О'Нейлом [52]. Вклад в затухание такой волны вносят также незахваченные электроны. Коэффициент затухания можно найти, подставив в (2.8) найденные функции распределения (2.4) и (2.5):

$$\gamma(t) = \gamma_L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi} \int_0^1 d\kappa \left\{ \frac{2n\pi^2 \sin\left[\frac{\pi n t}{\kappa K \tau_b}\right]}{\kappa^5 K^2 (1+q^{2n})(1+q^{-2n})} + \frac{(2n+1)\pi^2 \kappa \sin\left[\frac{(2n+1)\pi t}{\kappa K \tau_b}\right]}{K^2(1+q^{2n+1})(1+q^{-2n-1})} \right\}, \quad (2.9)$$

где $K' \equiv K(\sqrt{1-\kappa^2})$ и $q = \exp[\pi K'/K]$. Зависимость коэффициента затухания от времени изображена на рис. 16. Как недавно было замечено Моралесом и О'Нейлом [53], в рассмотренном выше приближении, когда учитывалось лишь изменение амплитуды волны вследствие затухания Ландау, изменение энергии электронов из-за пере-

стройки функции распределения не компенсируется изменением энергии волны при изменении ее амплитуды. Это и не удивительно, так как, меняя лишь одну переменную (амплитуду), нельзя удовлетворить двум законам сохранения: импульса и энергии. Очевидно, что надо учитывать изменение частоты колебаний. Чтобы правильно описать изменение частоты, надо удержать следующие члены в разложении (2.3):

$$f_0(v) = f_0\left(\frac{\omega}{k}\right) + \left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k} \left(v - \frac{\omega}{k}\right) + \left.\frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}\right|_{v=\omega/k} \left(v - \frac{\omega}{k}\right)^2 + \dots \quad (2.3')$$

Оценку для нелинейного сдвига частоты нетрудно получить, зная изменение известного выражения для диэлектрической проницае-

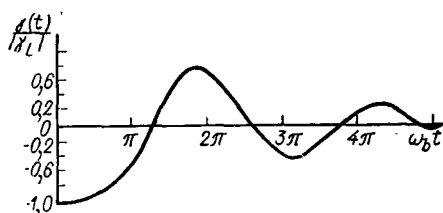


Рис. 16. Поведение во времени коэффициента затухания синусоидальной волны.

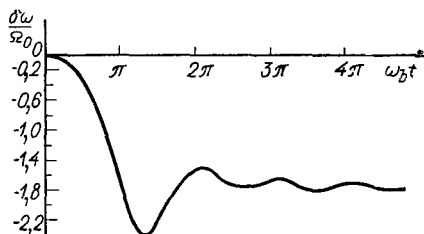


Рис. 17. Зависимость от времени сдвига частоты синусоидальной волны.

мости вследствие нелинейных эффектов, приводящих к образованию плато на функции распределения:

$$\delta\omega \Big|_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \approx \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial}{\partial v} [f_0(v) - f_{QL}(v)]}{\omega - kv} dv,$$

где f_{QL} — значение функций распределения (2.4) и (2.5), усредненных по быстрому движению частиц в волне (см. уравнение (2.6)). Из соображений четности изменение частоты обусловлено лишь последним членом в уравнении (2.3). Основной вклад в интеграл дает область частиц со скоростями $\Delta v \approx \sqrt{2e\Phi_0/m}$:

$$\delta\omega(t = \infty) \approx -\Omega_0 = -\left(\frac{2e\Phi_0}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega_p}{k}\right)^2 \left.\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}\right)\right|_{v=\omega/k} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}\right)^{-1}.$$

Более точные расчеты приводят к следующему ответу [53]:

$$\delta\omega(t = \infty) = -\Omega_0 \frac{16}{\pi} \int_0^1 dx \left[\frac{x}{K(x)} (2E(x) - K(x))^2 + \frac{[2(E - K) + x^2 K]^2}{x^6 K} \right].$$

Зависимость сдвига частоты от времени изображена на рис. 17.

Решение БГК, являющееся асимптотическим пределом в рассмотренной теории, в конце концов, может быть искажено за счет эффектов, не включенных в нашу теорию. Например, оно может быть неустойчиво по отношению к распаду из-за нелинейного взаимодействия волна — волна на другую плазменную волну и ионно-акустическую волну (см. § 1.1). Разумеется, решение БГК в конце концов искажается и из-за обычных столкновений. Влияние столкновений на взаимодействие волна — частица в некоторых случаях весьма важно.

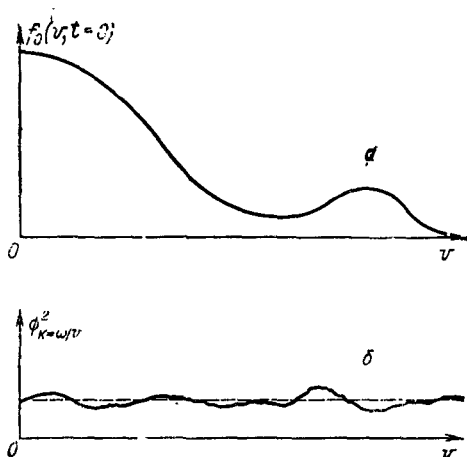


Рис. 18. Начальное распределение частиц (а) и спектр шумов (б) в случае размытого пучка.

В линейной теории (в приближении Ландау) задачи о затухании волны ($df_0/dv(v = \omega/k) < 0$) и нарастании: ($df_0/dv(v = \omega/k) > 0$) решаются одинаково. Но при попытке рассмотреть нелинейное искажение функции распределения в резонансной области $v \approx \omega/k$ для нарастающей (неустойчивой) волны ($df_0/dv(v = \omega/k) > 0$) мы сразу встретимся с трудностью, если захотим перенести на этот случай приближение Мазитова — О'Нейла. Действительно, исходная волна малой амплитуды в этом случае должна по определению нарастать, так что выражение для потенциала волны должно иметь вид

$$\Phi = (1/2)\Phi_0(t) \cos(kx - \omega t). \quad (2.10)$$

Движение частиц в поле меняющейся во времени потенциальной ямы усложняется. Один из наиболее важных эффектов здесь — это переход частиц из области с $\mathcal{E} > e\Phi_0/2$ через сепаратрису в область с $\mathcal{E} < e\Phi_0/2$, т. е. превращение незахваченных частиц в захваченные. В конце концов, в области захваченных частиц возникает распределение типа «плато». Это приводит к тому, что рост амплитуды

неустойчивой волны со временем должен прекратиться. Несмотря на сложность задачи мы можем получить количественную оценку порядка величины амплитуды насыщения при неустойчивости.

На рис. 18 для наглядности изображена неустойчивая функция распределения $f_0(v)$ с размытым пучком. Пусть в спектре начальных флюктуаций по какой-то причине выделено возмущение в виде монохроматической волны малой амплитуды $\Phi = (1/2)\Phi_0 \cos(kx - \omega t)$. Разложим начальную функцию распределения в резонансной области

$$f_0(v) = f_0(\omega/k) + (df_0/dv)|_{v=\omega/k}(v - \omega/k).$$

В конце концов, когда амплитуда волны достигнет максимального значения и установится плато ($f(v) = f_0(\omega/k)$) в резонансной области с шириной $\Delta v = \sqrt{2e\Phi_0/m}$, часть кинетической энергии частиц

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{mn}{2} \int_{\omega/k - \sqrt{2e\Phi_0/m}}^{\omega/k + \sqrt{2e\Phi_0/m}} v^2 f_0(v) dv - \frac{mn}{2} \int_{\omega/k - \sqrt{2e\Phi_0/m}}^{\omega/k + \sqrt{2e\Phi_0/m}} v^2 f_0\left(\frac{\omega}{k}\right) dv \quad (2.11)$$

перейдет в энергию волны

$$W = k^2 \Phi_0^2 / 16\pi. \quad (2.12)$$

Из закона сохранения энергии $\Delta \mathcal{E} = W$ следует ($\Delta \mathcal{E}$ вычисляем с помощью разложения для f_0 (2.3))

$$\frac{2}{3} mn \left(\frac{2e\Phi_0}{m}\right)^{3/2} \left(\frac{\omega}{k}\right) \frac{df_0}{dv} = \frac{k^2 \Phi_0^2}{16\pi}. \quad (2.13)$$

Отсюда для амплитуды волны находим

$$k \sqrt{\frac{e\Phi_0}{2m}} = \frac{16}{3} (\omega_p^2 \omega / k^2) \frac{df_0}{dv} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (2.14)$$

С помощью формулы, связывающей наклон начальной функции распределения df_0/dv с инкрементом нарастания в линейной теории γ_L , это соотношение можно представить в виде

$$\omega_b / \gamma_L = 32/3\pi, \quad (2.15)$$

где $\omega_b = k \sqrt{e\Phi_0/2m}$ — средняя частота осцилляций захваченных частиц в поле волны.

Таким образом, окончательный ответ принимает простой универсальный вид. Прделанная оценка не может, конечно, претендовать на большую точность.

В работе [54] приведено численное решение этой задачи с помощью быстродействующей ЭВМ (см. также работу [55]). При таком решении учитывалось совокупное движение всех электронов в поле

нарастающей волны. В результате оказалось, что численный коэффициент в правой части формулы (2.15) следует изменить примерно в 1,5 раза:

$$\omega_b/\gamma_L \approx 3,2. \quad (2.16)$$

Зависимость амплитуды волны от времени, полученная в работе [54], изображена на рис. 19. Осцилляция амплитуды происходит

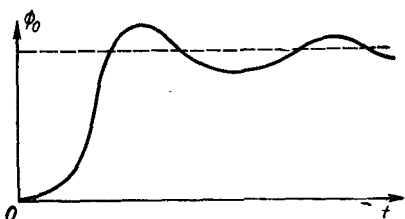


Рис. 19. Установление амплитуды неустойчивой волны в плазме с размытым пучком.

с частотой порядка ω_b (как и в задаче Мазитова — О'Нейла) и должна затухать при $t \rightarrow \infty$ из-за размешивания фаз частиц.

§ 2.2. Случай многих волн (одномерный спектр)

Рассмотрим сначала задачу с двумя волнами одинаковой амплитуды. Если эти волны имеют достаточно далеко разнесенные фазовые скорости, то они не взаимодействуют друг с другом и можно рассматривать возникающую здесь ситуацию как результат суперпозиции процессов, происходящих с каждой отдельной волной. Однако если фазовые скорости волн достаточно близки друг к другу $\Delta(\omega/k) \lesssim \lesssim (e\Phi/m)^{1/2}$, где Φ — потенциал волны, то картина становится совершенно другой. Можно ожидать перекрытия или, иначе говоря, коллективизации захваченных частиц. Экстраполируя на случай с тремя, четырьмя и т. д. волнами (строгий анализ становится безнадежно сложным), можно попытаться прийти к грубым качественным выводам. Тем не менее в предельном случае очень большого числа волн можно использовать статистический подход и приближение случайных фаз.

Предположим, что внутри интервала скоростей $(\omega/k)_{\text{макс}} > v > (\omega/k)_{\text{мин}}$ с волнами, фазовые скорости которых заполняют весь этот интервал, происходит коллективизация резонансных частиц между двумя любыми соединениями волн. Если фазы этих волн случайны, скорость любой частицы испытывает броуновское движение. В фазовом пространстве это броуновское движение по оси скорости складывается со свободным движением частиц, так что результирующие фазовые траектории частиц имеют вид, изображенный на рис. 20.

В предыдущем параграфе мы пришли к выводу, что асимптотическое во времени решение для функции распределения постоянно вдоль траектории частиц, по крайней мере, когда существует сглаживающий эффект кулоновских рассеяний на малые углы. Распро-

страня этот вывод на случай многих волн, можно сказать, что функция распределения асимптотически будет стремиться к постоянному значению на отрезке фазового пространства между $v = (\omega/k)_{\text{мин}}$ и $v = (\omega/k)_{\text{макс}}$, так как траектории частиц хаотически заполняют область между этими значениями скоростей (см. рис. 20). Следует отметить, что без сглаживающего эффекта кулоновских рассеяний функция распределения была бы чрезвычайно сложной и шероховатой. Сглаживание шероховатостей может быть достигнуто и в результате усреднения. Истинная (шероховатая) функция распределения, разумеется, сохраняет энтропию, а сглаженная — не сохраняет. Эволюция во времени сглаженной (усредненной) функции распределения определяется так называемым *квазилинейным уравнением диффузии* [2,56—58]. Наиболее строгий способ получения квазилинейного уравнения вместе с критерием перекрытия резо-

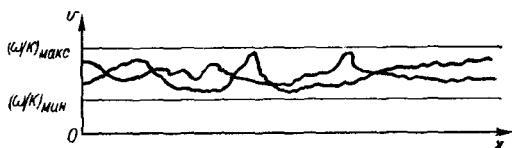


Рис. 20. Броуновское движение электронов в фазовом пространстве.

нансных областей соседних монохроматических волн был развит Альтшулем и Карпманом [59] (см. также работу [60]). Ниже мы ограничиваемся более простым выводом.

Произведем преобразование Фурье по пространственной координате одномерного кинетического уравнения без столкновений

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k + i v k f_k - \frac{i e}{m} k \Phi_k \frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{i e}{m} \sum' (k - q) \Phi_{k-q} \frac{\partial f_q}{\partial v}, \quad (2.17)$$

где штрих справа от знака суммы означает, что член с $q = 0$ выбрасывается из суммы. Для $k = 0$ это уравнение принимает вид

$$\partial f_0 / \partial t = -(i e / m) \sum' q \Phi_{-q} (\partial f_q / \partial v). \quad (2.18)$$

Для случая $k \neq 0$ члены правой части уравнения (2.18) описывают нелинейную связь между различными модами-волнами. Дальше учитывать эти эффекты не будем, поскольку речь идет лишь о линейном (или квазилинейном) взаимодействии волна — частица. Соответственно для $k \neq 0$ будем пользоваться линейным уравнением

$$\partial f_k / \partial t + i v k f_k - (i e / m) k \Phi_k (\partial f_0 / \partial v) = 0. \quad (2.19)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f_k(v, t) = (i e / m) k \int_0^t dt' \exp[i k v (t' - t)] \Phi_k(t') (\partial f_0(v, t') / \partial v). \quad (2.20)$$

Теперь подставим это решение в уравнение Пуассона

$$k^2 \Phi_k(t) = 4\pi en \int dv f_k(v, t) \quad (2.21)$$

и воспользуемся ВКБ приближением по времени [иначе говоря, предположим, что $f_0(v, t)$ слабо меняется за период колебаний ω_p^{-1}]:

$$\Phi_k(t) = \Phi_k(0) \exp \left\{ \int_0^t [-i\omega_k + \gamma_k(t')] dt' \right\}, \quad (2.22)$$

$$\omega_k = \omega_p (1 + 3k^2 \lambda_D^2 / 2), \quad \gamma_k(t) = (\pi/2) (\omega_k \omega_p^2 / k^2) (\partial f_0 / \partial v)|_{v=\omega/k}.$$

Чтобы найти зависимость функции распределения $f_0(v, t)$ от времени, подставим (2.20) и (2.22) в (2.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \int_0^t dt' \frac{e^2}{m^2} \sum_k k' |\Phi_k(t)|^2 \times \right. \\ \left. \times \exp \left[i(kv - \omega_k)(t' - t) + \int_i^{t'} \gamma_k(t'') dt'' \right] \frac{\partial f_0(v, t')}{\partial v} \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Если предположить, что ширина спектра волн достаточно велика, т. е. $\Delta(kv - \omega_k) \gg \gamma_k$, τ_R^{-1} (где τ_R — время релаксации для $f_0(v, t)$), то суммирование по k $\sum_k k^2 |\Phi_k(t)|^2 \exp [i(kv - \omega_k)(t' - t)]$ даст нуль вследствие размещения фазы при $(t' - t) > \omega_k^{-1}$. Поэтому можно положить $f_0(v, t') \approx f_0(v, t)$ и $\gamma_k(t'') \approx \gamma_k(t)$. Учитывая это и проводя интегрирование по t' , получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{e^2}{m^2} \sum_k k^2 |\Phi_k|^2 \frac{1 - \exp [i(kv - \omega_k)t + \gamma_k t]}{i(kv - \omega_k) + \gamma_k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (2.24)$$

Воспользовавшись асимптотическим соотношением

$$\frac{1 - \exp [i(kv - \omega_k)t + \gamma_k t]}{i(kv - \omega_k) + \gamma_k} = P \frac{1}{i(kv - \omega_k) + \gamma_k} + \pi \delta(kv - \omega_k)$$

и условием $\omega_{-k} = -\omega_k$, $\gamma_{-k} = \gamma_k$ (вытекающим из действительности электрического потенциала и функции распределения), можно привести уравнение (2.18) к виду

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (2.25)$$

где

$$D(v) = \frac{e^2}{m^2} \sum_k k^2 |\Phi_k(t)|^2 \left[P \frac{\gamma_k}{(kv - \omega_k)^2 + \gamma_k^2} + \pi \delta(kv - \omega_k) \right].$$

Разумеется, это уравнение диффузии следует дополнить уравнением для амплитуд волн:

$$\left. \begin{aligned} (\partial/\partial t) |\Phi_k|^2 &= 2\gamma_k |\Phi_k|^2, \\ \gamma_k &= (\pi/2) \omega_k (\omega_p/k)^2 (\partial f_0/\partial v)|_{v=\omega/k}. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Два слагаемых в коэффициенте диффузии (а именно, член с δ -функцией и член с главной частью) имеют различный физический смысл. Член с δ -функцией положительно определен и ответствен за сглаживание функции распределения в резонансной области. Это необратимый процесс. С другой стороны, член с главной частью описывает обратимый процесс (т. е. $2\gamma_k |\Phi_k|^2 \equiv \partial |\Phi_k(t)|^2 / \partial t$ меняет знак при обращении времени). Это «кажущаяся» (или «адиабатическая») диффузия описывает отклик нерезонансных частиц на изменение амплитуд волны. Например, когда амплитуда волны увеличивается, осцилляторная кинетическая энергия частиц, связанная с волной, также возрастает, и нерезонансные частицы как бы нагреваются (см. § 2.6). Естественно, этот кажущийся нагрев не приводит к изменению энтропии.

Компонента Фурье функции распределения с $k = 0$, $f_0(v, t)$ играет в этой теории особую роль, поскольку она представляет собой нулевое приближение к функции $f(x, v, t)$. Физически это естественно, так как $f_0(v, t)$ есть среднее от $f(x, v, t)$, взятое вдоль невозмущенных траекторий частиц, и движение частиц в действительности приводит к усреднению $f(x, v, t)$ вдоль этих траекторий. В тех случаях, когда присутствует внешнее поле и невозмущенные траектории частиц на фазовой плоскости имеют более сложный вид, для получения нулевого приближения к $f(x, v, t)$ следует производить усреднение вдоль этих сложных траекторий (усредненная функция распределения в этом случае не обязательно будет совпадать с компонентой Фурье с $k = 0$).

Если принять во внимание доплеровское смещение частиц, то можно убедиться, что условие на ширину спектра волн $\Delta(kv - \omega_k) \gg \gamma$, τ_R^{-1} эквивалентно условию о разложении движения каждого электрона на быстро и медленно меняющиеся части. Действительно, для оценки τ_R в случае спектра волн шириной $\Delta(\omega/k)$ воспользуемся уравнением диффузии. Тогда $\tau_R \sim (\Delta\omega/k)^2 / D(\omega/k) \approx k(\Delta\omega/k)^3 (e^2/m^2) \sum_k k^2 \Phi_k^2$. Отсюда следует, что неравенство $\Delta(kv - \omega_k) \gg \tau_R^{-1}$ эквивалентно условию, что ширина области захвата частиц незначительно меньше разброса фазовых скоростей $[\sum_k (e^2/m^2) \times |\Phi_k|^2]^{1/4} \ll \Delta(\omega/k)$. Теперь можно дать другой вывод квазилинейной теории, напоминающей известный метод Ван-дер-Поля, основанный на разделении этих двух процессов во времени (медленного и быстрого). Представим функцию распределения в виде суммы, медленно меняющейся и быстро меняющейся частей

$$f = \bar{f} + f'. \quad (2.27)$$

Для быстро меняющейся части можно пользоваться линеаризованным уравнением

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + v \frac{\partial f'}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = 0, \quad (2.28)$$

где мы пренебрегли произведением двух быстро меняющихся множителей $(\partial\Phi/\partial x)$ $(\partial f'/\partial v)$. За один период колебаний \bar{f} меняется незначительно, следовательно для нахождения \bar{f} можно воспользоваться приближением ВКБ по времени [см. уравнение (2.22)]. В уравнении для f мы проводим усреднение по быстрым движениям

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - \frac{e}{m} \left\langle \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial f'}{\partial v} \right\rangle = 0. \quad (2.29)$$

Подставляя сюда f' и усредняя полученное в результате выражение по невозмущенным траекториям, можно свести это уравнение к виду (2.25).

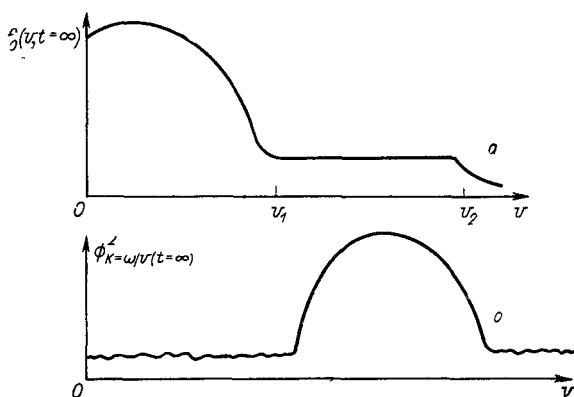


Рис. 21. Установившееся распределение частиц (а) и спектр воли (б) в случае размытого пучка.

С помощью уравнений квазилинейного приближения (2.25) и (2.26) была рассмотрена задача о релаксации неустойчивого распределения по скоростям с размытым пучком (см. рис. 17, а) [56—57]. Предположим, что начальный спектр воли представляет собой некоторую гладкую функцию ω/k (см. рис. 17, б). Волны с фазовыми скоростями, для которых $\partial f/\partial v > 0$, должны нарастать и через достаточное время амплитуды спектра таких волн становятся достаточно большими для того, чтобы привести к образованию плато на функции распределения. После образования плато рост волн прекращается (рис. 21). Заметим, что в пределе $t \rightarrow \infty$ нерезонансная (или главная) часть функции распределения несколько смещается вправо, как следует из сохранения количества движения. Импульс, первоначально связанный с размытым пучком, переходит в осцилляторное движение. В резонансной области асимптотическое распре-

деление однозначно определяется сохранением числа частиц

$$\left. \begin{aligned} \int_{v_1}^{v_2} \bar{f}(v, t=0) dv &= \bar{f}(t=\infty)(v_2 - v_1); \\ \bar{f}(v_1, t=0) &= \bar{f}(v_2, t=0) = \bar{f}(t=\infty). \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Для нахождения асимптотической формы спектра нужно подставить (2.26) в (2.25), сохраняя только член с δ -функцией:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{f}(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \frac{k^4}{\omega_p^3} \delta(kv - \omega_k) |\Phi_k|^2 \right] = 0. \quad (2.31)$$

Предполагая, что начальная энергия в спектре мала по сравнению с энергией размытого пучка, в результате интегрирования получаем

$$\begin{aligned} & \frac{e^2}{m^2} \sum_k k^4 |\Phi_k(t=\infty)|^2 \delta(kv - \omega_k) = \\ & = \omega_p^3 \int_{v_1}^v dv [\bar{f}(t=\infty) - \bar{f}(v, t=0)]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Разумеется, это еще не есть установившийся спектр: при выводе квазилинейного уравнения мы пренебрегли связью между модами (т. е. нелинейными взаимодействиями волна — волна и волна — частица). Через достаточно большой промежуток времени эти эффекты приведут к изменению спектра. Время квазилинейной релаксации и время нелинейного взаимодействия между модами, вообще говоря, обратно пропорционально энергии колебаний, поэтому надо иметь дополнительные малые параметры для того, чтобы можно было пренебречь взаимодействием между модами в процессе квазилинейной релаксации.

ЗАДАЧА

Найти автомодельное решение квазилинейных уравнений, описывающих релаксацию слабого размытого пучка электронов,двигающихся со скоростью много большей тепловой скорости электронов плазмы [61].

Рассмотрим процесс установления во времени «плато» на функции распределения и покажем, что в каждый данный момент времени распределение электронов пучка имеет вид ступеньки с крутым фронтом, движущимся в сторону меньших скоростей.

Вводя безразмерные переменные

$$F(V) = \frac{v_b}{n_b} f_c(v); \quad \omega = \frac{W_k \omega_p}{2\pi m n_b v_b^3}; \quad V = \frac{v}{v_b}; \quad \tau = \pi \omega_p \frac{n_b}{n_0} t, \quad (1)$$

где $W_k = k^2 |\Phi_k|^2 / 4\pi$ — спектральная плотность энергии колебаний на единичный интервал волнового числа k ; $f_b(v)$ — функция распределения электронов пучка, нормированная на плотность частиц в пучке, переписываем уравнения (2.25) и (2.26) в безразмерном виде

$$\partial F / \partial \tau = (\partial / \partial V) (\omega V^2 \partial F / \partial V); \quad (2)$$

$$\partial\omega/\partial\tau = \omega V^2 \partial F/\partial V; \quad (3)$$

$$\int F dV = 1. \quad (4)$$

Из уравнений (2) и (3) следует соотношение, связывающее функцию распределения и шумы [см. уравнение (2.31)]:

$$F(V, \tau) - F_0(V) = (\partial/\partial V)[\omega(V, \tau) - \omega_0], \quad (5)$$

где F_0 и ω_0 — функция распределения и функция ω в начальный момент времени. С помощью этого соотношения исключаем F из уравнения (3) и получаем уравнение, содержащее только ω

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = V^2 \omega \frac{\partial^2(\omega - \omega_0)}{\partial V^2} + V\omega \frac{\partial F_0}{\partial V}. \quad (6)$$

В области вне пучка, где $\partial F_0/\partial V = 0$, это уравнение напоминает уравнение, описывающее распространение тепла в пространстве, когда коэффициент теплопроводности есть степенная функция количества тепла. Как известно, в этом случае тепло распространяется в виде волны с крутым фронтом [24].

Будем искать автомодельное решение уравнения (6) и в области, где

$$\sqrt{T_b/mv_b^2} \ll 1 - V \ll 1. \quad (7)$$

Введем автомодельную переменную и новую функцию

$$\xi = 1 - V/\sqrt{\tau}; \quad \varphi = \omega(V, \tau) - \omega_0(V). \quad (8)$$

Тогда уравнения (5) и (6) в области слева от пучка примут вид

$$F = -\varphi'/\sqrt{\tau}; \quad (9)$$

$$-(\xi/2)\varphi' = (\varphi + \omega_0)\varphi''. \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (9) по V от точки перед передним фронтом ступеньки, где $\varphi = 0$ до точки вблизи пучка, где еще можно пренебречь F_0 , и воспользовавшись тем, что число частиц в ступеньке при условии (7) примерно равно полному числу частиц в пучке, получаем следующее граничное условие для φ

$$\varphi(0) = 1. \quad (11)$$

Граничное условие при $\xi \rightarrow \infty$, очевидно, есть

$$\varphi(\infty) = 0, \quad (12)$$

так как перед фронтом распространяющейся влево ступеньки шумов еще не narосли. Решение уравнения (10) при граничных условиях (11) и (12) в общем случае удается получить только численно. Однако в реальном случае, когда $\ln \varphi/\omega_0 \gg 1$, можно найти приближенное решение. Действительно, перепишем уравнение (10) в виде $d\varphi'/d\xi = -(1/2)\xi(d/d\xi)\ln(\varphi + \omega_0)$. Тогда на переднем фронте ступеньки ($\xi - \xi_0 \ll \xi_0$), где происходит резкое изменение φ , получаем следующее решение этого уравнения:

$$\varphi' = -(1/2)\xi_0 \ln(1 + \varphi/\omega_0). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что уровень шумов спадает в область перед ступенькой экспоненциально $\varphi \sim \exp[(-\xi_0/2\omega_0)\xi]$. Уравнение (13) справедливо и при $\xi - \xi_0 \sim \xi_0$, но с логарифмической точностью. Интегрируя его с учетом граничного условия (12), находим:

$$\varphi = (1/2)\xi_0 (\xi_0 - \xi) \ln(1/\omega_0). \quad (14)$$

Константу ξ_0 можно найти из второго граничного условия $\varphi(0) = 1$.

$$\xi_0 = \sqrt{2}/\sqrt{\ln(1/\omega_0)}. \quad (15)$$

Отсюда нетрудно оценить характерное время, за которое происходит квазилинейная релаксация пучка на интервале Δv

$$t = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1}{\omega_0}, \quad \gamma = \pi \omega_p \frac{n_b}{n_0} \left(\frac{v_b}{\Delta v} \right)^2. \quad (16)$$

§ 2.3. Случай многих волн (двух- и трехмерные спектры)

До сих пор мы рассматривали квазилинейную теорию лишь для одномерного случая. В двух- или трехмерном случаях квазилинейное уравнение диффузии внешне почти не отличается от своего одномерного аналога:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_\beta}; \\ D_{\alpha\beta} &= \frac{e^2}{m^2} \sum_k k_\alpha k_\beta |\Phi_k|^2 \times \\ &\times \left[P \frac{\gamma_k}{(k \cdot v - \omega_k)^2 + \gamma_k^2} + \pi \delta(k \cdot v - \omega_k) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Но решение становится значительно более сложным. Одномерную проблему в известном смысле можно рассматривать как выраженный случай, так как резонансные частицы ограничены в фиксированной области по переменной v .

В двух- или трехмерном случае даже для волнового пакета, локализованного в пространстве k , резонансная область существенно расширяется.

Рассмотрим двумерный случай. Линии уровня (равного значения) f , являющиеся, допустим, окружностями с центром в начале координат на плоскости (v_x, v_y) , изображены на рис. 22. Предположим, что в направлении x распространяется достаточно узкий волновой пакет. В результате образования квазилинейного плато внутри этой узкой резонансной области возникает новая система линий уровней (параллельных v_x). Они, разумеется, должны сшиваться с окружностями в области скоростей вне резонансной зоны. Нетрудно прийти к выводу, что для перестройки функции распределения таким образом, как показано на рис. 22, необходимо конечное количество энергии.

Допустим, имеются волновые пакеты, распространяющиеся под разными углами. На рис. 22 каждому пакету должна соответствовать своя система линий уровня. Так как линии уровня для разных пакетов пересекаются, для того чтобы сделать функцию распределения постоянной вдоль всех этих линий уровня, нужно чтобы f была постоянна в некоторой области пространства, простирающейся до бесконечности. Отсюда следует, что такая перестройка функции распределения потребовала бы бесконечного количества энергии. Таким образом, поскольку квазилинейное плато в двумерном случае не

является установившимся состоянием даже для узких волновых пакетов, имеет смысл говорить лишь о «квазиплате».

Предположим, что волновые пакеты распространяются во всех направлениях с фазовой скоростью, равной ω/k . Резонансная область на плоскости (v_x, v_y) расположена вне окружности с радиусом (ω/k) , поскольку любая часть этой области принадлежит, по крайней мере, двум разным резонансным полосам. Итак, для того чтобы линии

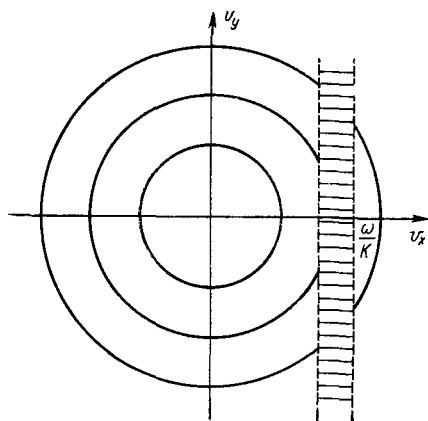


Рис. 22. Начальные и конечные линии уровня распределения частиц в случае одномерного пакета волн.

уровня удовлетворяли всем перекрывающимся резонансам с волновыми пакетами, функция распределения вне окружности $v_x^2 + v_y^2 = (\omega/k)^2$ должна быть постоянной. Но энергия такого распределения бесконечна. Отсюда можно сделать вывод, что установившееся решение, соответствующее волновому пакету конечной энергии, невозможно, и спектр волн должен затухать до нуля [III].

Для того чтобы проиллюстрировать, что в действительности происходит с функцией распределения, рассмотрим простейший дву-

мерный волновой пакет, обладающий цилиндрической симметрией в пространстве. Тогда f изотропна: $f = f(v_x^2 + v_y^2)$. Подставляя такой вид функции распределения в уравнение (2.27), находим:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \cdot |\Phi|^2 (\omega^2/k_0) \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 - (\omega/k_0)^2}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}, \quad (2.34)$$

где мы заменили суммирование по k интегрированием, и ограничились случаем достаточно узкого спектра $|\Phi_k|^2 = 2\pi |\Phi|^2 k^{-1} \delta(k - k_0)$. Квазилинейная теория остается справедливой, поскольку функция распределения размывается по скоростям из-за разброса по углам внутри волнового пакета.

Для $\omega/k > v$ имеем $\partial f/\partial t = 0$. Уравнение (2.34) вместе с уравнением (2.26) допускает отыскание точного решения, если ввести некоторое добавочное упрощение. Если начальная энергия волн достаточно велика, в результате диффузии в область больших скоростей в конце концов придем к состоянию, когда для основной части пространства скоростей будет выполняться неравенство $v \gg \omega/k$. Теперь, упростив уравнение (2.34), его можно решить. Примером такой ситуации, когда можно пренебречь ω/k по сравнению с v , является взаимодействие между электронами и ионно-звуковыми вол-

нами, так как $\omega/k = \sqrt{T_e/M} \ll \sqrt{T_e/m} \sim v$. Для ленгмюровских колебаний это справедливо лишь по истечении достаточного промежутка времени, когда функция распределения размажется до больших значений v .

Введем переменную

$$\tau = (25e^2/m^2) \int_0^t (\omega^2/k) |\Phi|^2 dt' \equiv \int_0^t D(t') dt',$$

тогда уравнение (2.28) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau} = \frac{4}{25} \cdot \frac{\partial}{\partial v^2} \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial v^2} f \right). \quad (2.35)$$

Для решения уравнения (2.35) при заданном начальном распределении \bar{f}_0 можно было бы воспользоваться преобразованием Лапласа и выразить решение с помощью функции Грина в терминах модифицированных функций Бесселя. Это решение не слишком удобно и его стоит упростить, рассмотрев асимптотику при $t \rightarrow \infty$. При больших временах \bar{f} не зависит от структуры функции \bar{f}_0 и имеет самоподобный (автомодельный) вид [62]:

$$\bar{f} = A \left[\int_0^t D(t') dt \right]^{-2/5} \exp \left[-v^5 / \int_0^t D(t') dt' \right], \quad (2.36)$$

где

$$A \approx (5/\Gamma(2/5)) \int_{\omega/k}^{\infty} f_0(v) v dv; \quad v > \omega/k.$$

Чтобы найти γ , воспользуемся формулой

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \omega_k \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_k - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^2 \mathbf{v}.$$

Подставляя сюда асимптотическое решение (2.36), находим

$$\gamma_k = - \frac{\beta_k}{\left[\int_0^t D(t') dt' \right]^{3/5}}; \quad \beta_k = A \frac{\omega_k^2 \omega_p^2 \Gamma(2/5)}{10k^3}. \quad (2.37)$$

Заметим, что ω/k не вошло в выражение (2.37) для γ_k , так как основной вклад в γ_k дают скорости $v \gg \omega/k$.

Итак, исходная система уравнений сведена к одному уравнению (2.37), которое можно привести к виду дифференциального уравнения второго порядка. Решение этого уравнения довольно громоздко. Но качественное поведение решетки достаточно очевидно. Энергия волн затухает и в конце концов при $t \rightarrow \infty$ образуется в нуль. Декремент затухания сначала есть не что иное, как декремент Лан-

дау, затем он претерпевает существенные изменения (убывает) вследствие изменения наклона функции распределения. При $t \rightarrow \infty \gamma_k \rightarrow \text{const}$, так как в конце концов будет исчерпана энергия, необходимая для дальнейшей перестройки f . Это существенно отличается от одномерного случая с образованием плато.

Рассмотренную картину можно применить в теории так называемого *турбулентного нагрева*. Предположим, что имеется система, в которой осуществляется турбулентный нагрев. Это означает, что ток, протекающий по плазме, генерирует некоторую неустойчивость вследствие относительного движения электронов и ионов. Если дрейфовая скорость относительного движения превышает $\sqrt{T_e/M}$, могут раскачиваться ионно-звуковые волны [VII]. Как было отмечено выше, ω/k выпадает из окончательного ответа, и даже не зная спектра возникающих вследствие неустойчивости волн, ясно, что спектр электронов после нагрева будет не максвелловским и его форма будет определяться уравнением (2.36). Возможно, форма спектра для очень больших скоростей будет отличаться от квазилинейного результата (2.36) вследствие неучтенных эффектов, таких как взаимодействие волна — волна и т. п.

Следует отметить, что в проделанных выше вычислениях спектр волн предполагался изотропным. В случае ионно-звукового турбулентного нагрева это не так, потому что имеется выделенное направление (вдоль тока). Предположим, что ток направлен перпендикулярно магнитному полю (часто встречающаяся ситуация): j вдоль направления x , H направлена вдоль z . При малых, но конечных значениях магнитного поля рассматриваемая задача в точности эквивалентна случаю с изотропным спектром. Вследствие вращения частиц в магнитном поле происходит перемешивание в плоскости (v_x, v_y) . Можно рассматривать это обстоятельство как вращение волнового пакета вместо вращения частиц и функция распределения электронов будет зависеть только от $v_x^2 + v_y^2$ даже для одномерного волнового пакета.

Таким образом, приходим к выводу, что имеется существенное различие даже в одномерной квазилинейной теории, если добавляется магнитное поле. Естественно, H должно быть не слишком велико, иначе простую картину динамики плазмы, описанную выше, необходимо существенно изменить. Магнитное поле здесь приводит лишь к перемешиванию частиц в плоскости (v_x, v_y) . Но влиянием H можно пренебречь при рассмотрении свойств продольных электронных колебаний, если $\omega_p^2 \gg \omega_H^2$, что обычно и имеет место в типичной ситуации с турбулентным нагревом.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что взаимодействие ионно-звуковых волн с частицами в 1-м порядке разложения по параметру $(\omega/kv) \ll 1$ приводит к изотропизации распределения частиц [63].

Преобразуем сначала квазилинейное уравнение (2.33) к сферическим координатам с осью вдоль направления внешнего электрического поля E , вызы-

вращающегося тока. Пусть (k, θ', φ') — сферические координаты волнового вектора, а (v, θ, φ) — скорости частицы. Интегрирование по разности азимутальных углов $(\varphi - \varphi')$, входящей в аргумент δ -функции в выражении для коэффициента диффузии, проводится в явном виде

$$\int_0^{2\pi} \pi \delta(k \cdot v) d\varphi' = \frac{2\pi}{kv} [1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta']^{-1/2}.$$

Оставшиеся угловые переменные входят лишь как $\xi = \cos \theta$, $x = \cos \theta'$, так что квазилинейное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_e + \frac{e}{m} E \frac{\partial}{\partial \xi} f_e + \frac{e}{m} E \xi \frac{\partial}{\partial v} f_e = \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) D_{\xi\xi} \frac{\partial f_e}{\partial \xi} + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{1 - \xi^2} D_{v\xi} v \frac{\partial f_e}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} v^3 \sqrt{1 - \xi^2} D_{v\xi} \frac{\partial f_e}{\partial \xi} + \\ + \frac{\partial}{\partial v} v^4 D_{vv} \frac{\partial f_e}{\partial v}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} = \frac{M}{4\pi^2 m N_0 v^3} \int_0^\infty dk k^3 \int_{-1}^{+1} d\eta \frac{W(k, \eta \sqrt{1 - \xi^2})}{\sqrt{1 - \eta^2}} A_{\alpha\beta} \left(\frac{s_k}{v}, \eta \right); \\ A_{\xi\xi} = \eta^2; \quad A_{\xi v} = A_{v\xi} = \eta (s_k/v); \quad A_{vv} = (s_k/v)^2; \\ W(k, x) = \omega \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \frac{k^2 |\Phi_k|^2}{8\pi} \approx \frac{\Omega_p^2}{s_k^3} \frac{|\Phi_k|^2}{4\pi}; \quad s_k \equiv \frac{\omega(k)}{k}. \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов диффузии мы отбросили малые члены порядка $(s/v) \ll 1$. Нетрудно видеть, что основной эффект здесь — квазилинейная диффузия по углам, приводящая к изотропизации распределения. Поэтому решение уравнения (1) можно искать в виде

$$f(v, \xi, t) = f_0(v, t) + f_1(v, \xi, t). \quad (2)$$

Подставляя решение в таком виде в уравнение (1) и удерживая лишь члены первого порядка, находим

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi} = - \frac{eE \sqrt{1 - \xi^2} / m + v D_{v\xi}}{D_{\xi\xi} \sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (3)$$

Во втором порядке разложения по малому параметру $(s/v) \ll 1$ из уравнения (1) получаем квазилинейное уравнение для $f_0(v, t)$, описывающее нагрев частиц

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^4 \int_{-1}^{+1} d\xi \left[D_{vv} - \frac{D_{v\xi}^2}{D_{\xi\xi}} + \frac{e^2 E^2 (1 - \xi^2)}{m^2 D_{\xi\xi}} \right] \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (4)$$

Выражение для инкремента нарастания колебаний в этом приближении принимает вид

$$\gamma(k, x) = \frac{2\pi M}{m} k s_k^3 \left\{ \int_0^\infty f_0 dv - x \int_0^\infty dv \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial f_{1e}}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \mu \sqrt{1 - x^2}} \right\}. \quad (5)$$

Решение этого уравнения в пределе $t \rightarrow \infty$ имеет тот же характер, что и в случае изотропного спектра волн ($\sim \exp(-\alpha v^5)$).

2. Получить релятивистское квазилинейное уравнение, описывающее релаксацию релятивистского пучка электронов при инжекции его в плазму [64, 65].

Квазилинейное уравнение для функции распределения электронов f_e и уравнение для спектральной плотности энергии плазменных колебаний W_k в релятивистском случае имеет следующий вид (пучок распространяется по оси z):

$$\frac{3v_T^2 k_z}{\omega_p} \cdot \frac{\partial W_k}{\partial z} - \frac{\partial \omega_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial W_k}{\partial k_z} = 2\gamma_k W_k; \quad (1)$$

$$c \frac{p_z}{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_\beta}, \quad (2)$$

где

$$D_{\alpha\beta} = \frac{m\omega_p^2}{N_0} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W_k;$$

$$\gamma_k = \frac{m\omega_p^2}{N_0} \int d^3 p k \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \pi \delta(\omega_p - k \cdot p c/p).$$

Так же, как и в предыдущей задаче, удобно использовать сферические координаты (p, Θ, Φ) в пространстве импульсов и (k, Θ', Φ') в пространстве волновых векторов (углы Θ и Θ' отсчитываются от оси z). Выражения для коэффициентов диффузии в сферических координатах несколько усложняются из-за того, что теперь фазовая скорость колебаний (ω_p/k) сравнима со скоростью частицы. Как и прежде, интегрирование по Φ' проводится в явном виде

$$\pi \int_0^{2\pi} d\Phi' \delta(\omega_p - kc [\sin \Theta \sin \Theta' \cos(\Phi' - \Phi) + \cos \Theta \cos \Theta']) =$$

$$= 2\pi/kc [(\cos \Theta'_1 - \cos \Theta')(\cos \Theta' - \cos \Theta'_2)]^{1/2}, \quad (3)$$

где

$$\cos \Theta'_{1,2} = (\omega_p/kc) \{ \cos \Theta \pm \sin \Theta \sqrt{k^2 c^2/\omega_p^2 - 1} \}.$$

Оператор дифференцирования с учетом условия резонанса в сферических координатах принимает вид

$$k \cdot \frac{\partial}{\partial p} \equiv \frac{\omega_p}{c} \left\{ \frac{\partial}{p \partial p} + \zeta \frac{\partial}{p \partial \Theta} \right\}, \quad \zeta \equiv \frac{\cos \Theta - kc \cos \Theta'/\omega_p}{\sin \Theta}. \quad (4)$$

Используя соотношения (3) и (4), переписываем уравнения (1) и (2) в вид

$$\frac{3kv_T^2}{\omega_p} \cos \Theta' \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial \omega_p}{\partial z} \left(\cos \Theta' \frac{\partial W}{\partial k} - \frac{\sin \Theta'}{k} \cdot \frac{\partial W}{\partial \Theta'} \right) = 2\gamma W, \quad (5)$$

$$c \frac{p_z}{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left(D_{Rp} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p} D_{p\Theta} \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{p \sin \Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \left(D_{p\Theta} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p} D_{\Theta\Theta} \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right), \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{matrix} D_{pp} \\ D_{p\Theta} \\ D_{\Theta\Theta} \end{matrix} \right\} = \frac{m\omega_p^4}{(2\pi)^3 N_0 c^3} \int_{\omega_p/c}^{\infty} \frac{dk}{k} \int_{\Theta'_1}^{\Theta'_2} \frac{\sin \Theta' W(k, \Theta') d\Theta'}{\sqrt{(\cos \Theta'_1 - \cos \Theta')(\cos \Theta' - \cos \Theta'_2)}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \end{matrix} \right\};$$

$$\gamma(k, \Theta) =$$

$$= - \frac{m\omega_p^4}{4\pi N_0 k^3 c^2} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{\sin \Theta d\Theta}{\sqrt{(\cos \Theta_1 - \cos \Theta)(\cos \Theta - \cos \Theta_2)}} \left(g - \frac{1}{2} \zeta \cdot \frac{\partial g}{\partial \Theta} \right);$$

$$\cos \Theta_{1,2} = \frac{\omega p}{kc} \left(\cos \Theta' \pm \sin \Theta' \sqrt{\frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} - 1} \right); \quad g \equiv 2\pi \int_0^\infty f p dp.$$

§ 2.4. Влияние столкновений на взаимодействие волна — частица

Одним из наиболее важных следствий взаимодействия волна — частица является деформация функции распределения частиц по скоростям, в особенности вблизи резонансной области $v = \omega/k$. Иногда искажение функции распределения настолько велико, что оказывается необходимым учитывать влияние столкновений. Интеграл столкновений $\text{St}\{f\}$ в форме Ландау содержит, в частности, член со второй производной от функции распределения. Именно этот член становится существенным, если взаимодействие волна — частица искажает функцию распределения в узкой резонансной области. Столкновения стремятся вернуть наклон функции распределения df/dv к равновесному значению. В результате возникает конкуренция между влиянием волн и влиянием столкновений. Для того чтобы проиллюстрировать это на количественном примере, рассмотрим задачу об одномерном волновом пакете, приводящем к коэффициенту квазилинейной диффузии в резонансной области

$$D(v) = (\pi e^2/m^2) \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \approx e^2 \langle E^2 \rangle / m^2 \omega.$$

В результате конкуренции между квазилинейным воздействием волн на частицы и столкновениями в резонансной области должно установиться некоторое квазистационарное распределение ($df/dt = 0$), подчиняющееся уравнению

$$(dD(v)/dv)(df/dv) = \text{St}\{f\}. \quad (2.38)$$

В выражении для $\text{St}\{f\}$ будем удерживать лишь член со старшей производной d^2f/dv^2 . Для простоты его можно представить в следующей интерполяционной форме: $v(\omega/k)^2(d^2/dv^2)(f_M - f)$, где v — средняя частота столкновений электронов со скоростями $v = \omega/k$. Такая упрощенная форма интеграла столкновений правильно учитывает релаксацию к локальному равновесию (с $f = f_M$, где f_M — максвелловское распределение). Интегрируя уравнение (2.38) один раз, находим

$$\frac{df}{dv} = \frac{df_M}{dv} \cdot \frac{1}{1 + e^2 \langle E^2 \rangle / m^2 \omega v (\omega/k)^2}.$$

Полученный наклон функции распределения подставим в формулу для декремента затухания $\gamma = (\pi/2) (\omega^3/k^2) (df/dv) (v = \omega/k)$. В ре-

зультате получим выражение для декремента затухания:

$$\gamma = \gamma_L / [1 + e^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle / m^2 \omega v (\omega/k)^2]. \quad (2.39)$$

Проанализируем это выражение в разных предельных случаях. Если амплитуда волн в пакете достаточно мала $e^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle \ll m^2 \omega v (\omega/k)^2$, декремент затухания приближается к γ_L — обычному декременту Ландау. Это связано с тем, что столкновения успевают выравнять функцию распределения в резонансной области, сохраняя максвелловский наклон df_M/dv . При больших амплитудах $e^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle \gg m^2 \omega v (\omega/k)^2$ декремент затухания становится существенно нелинейным и, как следует из формулы (2.39), убывает с амплитудой по закону $\sim 1/\langle \mathbf{E}^2 \rangle$.

Формулу (2.39) можно интерпретировать следующим образом. Представим декремент в виде

$$\gamma = \gamma_L / (1 + \tau_1/\tau_2), \quad (2.40)$$

где τ_1 — характерное время для установления локального максвелловского распределения; τ_2 — характерное время искажения функции распределения под действием волнового пакета. Если $\tau_1 \ll \tau_2$, т. е. столкновения важнее, получаем обычное затухание Ландау. С ростом амплитуды волны вносимые ею искажения в функцию распределения настолько велики, что соударений частиц оказывается недостаточно, чтобы функция распределения стала максвелловской, и декремент затухания падает.

Более сложная задача — учет влияния столкновений на взаимодействие с частицами монохроматической волны конечной амплитуды. Это связано с тем, что в отличие от уравнения (2.33), которое для стационарного случая $d/dt = 0$ является обыкновенным дифференциальным уравнением, при взаимодействии с монохроматической волной $\Phi = \Phi_0 \cos kx$ кинетическое уравнение — это уравнение в частных производных ($f = f(x, v)$). Однако декремент затухания в случае монохроматической волны можно получить из качественных соображений, пользуясь аналогией со случаем волнового пакета. В работе [2] считали, что формула вида (2.40) справедлива и для монохроматической волны при условии, что τ_1 и τ_2 выбраны разумно. В случае монохроматической волны ширина резонансной области, в которой функция распределения существенно искажается, по порядку величины равна $\Delta v \approx \sqrt{e\Phi}/m$. Кулоновские столкновения с рассеянием на малые углы восстанавливают локальное равновесие в такой области за время порядка $\tau_1 = v^{-1} e\Phi/m (\omega/k)^2$. С другой стороны, время нелинейного искажения функции распределения под действием поля волны (см. § 1.1) порядка $\tau_2 = \lambda/\sqrt{e\Phi}/m$, где λ — длина волны. Итак, из формулы (2.40) получаем

$$\gamma = \frac{\gamma_L}{1 + (e\Phi)^{3/2} / \sqrt{\lambda} m^{3/2} (\omega/k)^2}. \quad (2.41)$$

Для малых амплитуд $\tau_1 \ll \tau_2$ декремент затухания приближается к линейному, а с ростом амплитуды при $\tau_1 \gg \tau_2$ декремент падает

пропорционально $\Phi^{-3/2}$. Этот качественный вывод впоследствии был подтвержден непосредственным исследованием уравнения для функции распределения в поле монохроматической волны с учетом столкновений [66].

В известном смысле речь идет о видоизменении функции распределения в установившейся волне Бернштейна — Грина — Крускала. Затухание волны можно найти с помощью формулы $\gamma = -(1/2 W) (dW/dt) = -\langle \mathbf{jE} \rangle / 2W$, где \mathbf{j} — ток, вызываемый волной (в системе отсчета, где волна покоится); W — плотность энергии в волне. Усреднение проводится по периоду волны.

Итак, задача сводится к нахождению функции распределения электронов. Кинетическое уравнение для этой функции в системе отсчета, движущейся вместе с волной, имеет вид

$$u \frac{\partial f}{\partial y} - \Phi'(y) \frac{\partial f}{\partial u} = \nu' (\partial/\partial u) [\partial f/\partial u + (a + u)f]. \quad (2.42)$$

Здесь мы ввели следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= e\Phi/T; \quad y = kx, \quad \Phi(x) = \Phi_0 \sin^2 kx/2; \quad v_T = \sqrt{2T/m}; \\ u &= v\sqrt{2}/v_T; \quad a = \omega\sqrt{2}/kv_T; \quad \nu' = 3/\sqrt{2}kv_T\tau_D; \\ \tau_D &= m^2\omega^3/8\pi e^4 N_0 k^3 \text{Ln}, \end{aligned}$$

а интеграл столкновений приняли в форме Фоккера — Планка (Ln — кулоновский логарифм).

Введем следующее упрощение для того, чтобы получить облегчающий решение задачи малый параметр $\nu' \ll \phi_0 \ll 1$, что соответствует волне конечной, но небольшой амплитуды, и случаю редких соударений. Далее перейдем к переменной энергии $\varepsilon = u^2/2 + \Phi(y)$, где ε — безразмерная энергия частицы в поле волны. Теперь уравнение (2.42) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \sigma [\varepsilon - \Phi(y)]^{1/2} \left(f + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) + V_f f \right\}, \quad (2.43)$$

$$V_f = \alpha/\sqrt{2} = \omega/kv_T; \quad \nu = \nu'\sqrt{2} = 3/kv_T\tau_D,$$

где $\sigma = \pm 1$ соответствует различным направлениям движения электронов (знак «плюс» выбран для частиц, перегоняющих волну). Роль малого безразмерного параметра в данной задаче играет ν . Соответственно будем искать решение в виде

$$f(\varepsilon, y) = f_0(\varepsilon) + f_1(\varepsilon, y) + \dots \quad (2.44)$$

При решении уравнения (2.43) необходимо различать две области: $\varepsilon > \phi_0$ (внешняя область) и $\varepsilon < \phi_0$ (внутренняя область). Подставляя разложение (2.44) в уравнение (2.43), получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \sigma [\varepsilon - \Phi(y)]^{1/2} \left(f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) + V_f f_0 \right\}, \quad (2.45)$$

где $f_0(\varepsilon)$ — (нулевое приближение) для внешней области определяется из условия периодичности f_1 как функции координаты y ,

если считать, что при $\varepsilon \gg \varphi_0$ функция $f_0(\varepsilon)$ асимптотически приближается к распределению Максвелла. Интегрируя уравнение (2.45) по y с учетом периодичности, получаем уравнение для f_0 при $\varepsilon > \varphi_0$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \sqrt{\varepsilon} E \left(\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varepsilon}} \right) \left[f_0 + \frac{df_0}{d\varepsilon} \right] + \frac{\pi\sigma}{2} V_f f_0 \right\} = 0, \quad (2.46)$$

где $E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t} dt$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Запишем решение этого уравнения, переходящее в максвелловское распределение вдали от резонансной области:

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_T} \exp \left[-\varepsilon - 0,5\pi\sigma V_f \sqrt{\varphi_0} \int_1^{\varepsilon/\varphi_0} \frac{d\kappa^2}{\kappa E(1/\kappa)} - V_f^2 \right]. \quad (2.47)$$

Затем для получения решения нужно найти поправку из уравнения (2.45) и вычислить работу поля волны

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= e \int_0^\lambda \frac{dx}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \left(\frac{\omega}{k} \right) f_1 dv = \\ &= \frac{1}{2} \omega T v_T \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{\varphi(y)}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot f_1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \varphi(y)}}. \end{aligned}$$

Однако с помощью интегрирования по частям и дальнейшего использования уравнения (2.45) для определения df_1/dy удастся выразить работу поля через известную функцию $f_0(\varepsilon)$ и вычислить таким образом вклад от внешней области:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{\text{внеш}} &= -v\omega v_T T \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{\varphi_0}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \varphi(y)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \times \\ &\times \left\{ \sigma \sqrt{\varepsilon - \varphi(y)} \left(\frac{df_0}{d\varepsilon} + f_0 \right) + V_f f_0 \right\} = \\ &= -v\pi^{-3/2} V_f e^{-V_f^2} \omega N_0 T \sqrt{\varphi_0} \left[\int_1^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\kappa} \left(K \left(\frac{1}{\kappa} \right) - \frac{\pi^2}{4E(1/\kappa)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичную процедуру можно проделать для отыскания функции распределения во внутренней области $\varepsilon < \varphi_0$. Однако для частиц, осциллирующих внутри потенциальной ямы, функция распределения симметрична $f(\sigma = \pm 1) = f(\sigma = -1)$ с большой точностью. Это означает, что вклад внутренней области в затухание мал и им можно пренебречь. Более строгие вычисления подтверждают этот вывод.

Наконец, необходимо исследовать, что происходит с функцией распределения в узкой переходной области, лежащей между внеш-

ней и внутренней областями. Найдя функцию распределения в этой области, нужно вычислить и ее вклад в работу поля волны. Нахождение функции распределения в этой области оказывается самой сложной задачей. К счастью, как это обычно бывает в теориях, аналогичных теории пограничного слоя, окончательный ответ не зависит от детальной структуры переходной области. В рассматриваемой задаче работа поля волны, соответствующая этой области, также нечувствительна к деталям поведения функции распределения. Достаточно знать лишь значения $f_0(\varepsilon)$ по обе стороны от переходной зоны. Действительно,

$$\dot{W}_{\text{перех}} = -v\omega v_T T \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} \sum_{\sigma} \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \varphi(y)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \times \\ \times \left\{ \sigma \sqrt{\varepsilon - \varphi(y)} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + f_0 \right) + V_f f_0 \right\},$$

где δ — ширина переходной зоны. Интегрируя по частям и учитывая лишь старшие члены (по порядку производных функции распределения), получаем

$$\dot{W}_{\text{перех}} = -v\omega v_T T \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} \cos^2(y/2) \sum_{\sigma} \sigma \times \\ \times \left(\left. \frac{\partial f_0(\varepsilon, \sigma)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varphi_0 + \delta} - \left. \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varphi_0 - \delta} \right).$$

Теперь остается лишь подставить сюда значения $df_0/d\varepsilon$ во внешней ($\varepsilon = \varphi_0 + \delta$) и внутренней ($\varepsilon = \varphi_0 - \delta$) областях с помощью найденных для функции распределения в этих областях выражений (2.42). Окончательно имеем

$$\dot{W} \approx - \frac{V\pi}{4} \left[1 - \int_1^{\infty} \frac{dx^2}{x} \left(\frac{1}{E(1/x)} - \frac{4}{\pi^2} K(1/x) \right) \right] \times \\ \times v\varphi_0^{1/2} \omega N_0 T V_f e^{-V_f^2}. \quad (2.48)$$

Декремент затухания волны [66]

$$\gamma = \left[1 - \int_1^{\infty} \frac{dx^2}{x} \left(\frac{1}{E(1/x)} - \frac{4}{\pi^2} K(1/x) \right) \right] v\varphi_0^{-3/2} \gamma_L, \quad (2.49) \\ \gamma_L \approx \pi^{1/2} \omega V_f^3 e^{-V_f^2}$$

с точностью до коэффициента порядка единицы совпадает с формулой (2.41), полученной на основе качественных рассуждений из квазилинейной теории.

Эффекты такого рода, возникающие при учете столкновений в задачах о взаимодействии монохроматической волны с частицами, оказались важными в так называемой *неоклассической теории диффузии плазмы в магнитных ловушках* (см. наст. сб., стр. 205).

ЗАДАЧА

Для замедления растекания плазмы вдоль магнитного поля предлагается использовать гофрировку поля с периодом $l \ll \lambda$ (λ — длина свободного пробега) [67, 68]. Вычислить тормозящую силу и оценить время ухода плазмы из системы длиной $L \gg \lambda$.

Магнитное поле представляем в виде $H = H_0 + \Delta H \cos^2(\pi x/l)$. Работу плазмы над магнитным полем при вытекании со скоростью U находим из уравнения (2.43), заменяя в нем амплитуду поля Φ_0 на $\mu \Delta H$ ($\mu = mv_{\perp}^2/2H$), а фазовую скорость (ω/k) на U . Работа равна произведению силы трения $F_{\text{тр}}$ на скорость, так что из уравнения (2.48) получаем

$$F_{\text{тр}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[1 - \int_0^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\kappa} \left(\frac{1}{E(1/\kappa)} - \frac{4}{\pi^2} K(1/\kappa) \right) \right] v_{ii} \left(\frac{\Delta H}{H_0} \right)^{1/2} N_0 M U, \quad (1)$$

$$v_{ii} = N_0 e^4 L \ln / M^2 v_{Ti}^3.$$

Из уравнения баланса силы давления и силы трения определяем скорость растекания и время выхода из системы

$$U \sim (\lambda/L) (H_0/\Delta H)^{1/2} c_s, \quad \tau = (L^2/\lambda c_s) (\Delta H/H_0)^{1/2}. \quad (2)$$

§ 2.5. Квазилинейная теория электромагнитных мод

В этом разделе квазилинейная теория использована для рассмотрения взаимодействия частиц с электромагнитными модами в плазме, находящейся в однородном магнитном поле \mathbf{H}_0 . Для простоты ограничимся простейшими случаями таких мод, а именно, ионными и электронными циклотронными волнами (вистлерами), распространяющимися вдоль \mathbf{H}_0 [2, 69]. Ограничение случаем параллельного распространения упрощает алгебру, не внося существенных изменений в физическую картину.

Будем исходить из кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_j}{m_j c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_0] \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_j}{m_j} \left\{ \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp}] \right\} \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (2.50)$$

и уравнений Максвелла. Если представить функцию распределения в виде медленно и быстро меняющихся частей, то уравнение для медленно меняющейся части принимает вид

$$\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial t} = \left(\frac{e_j}{m_j} \right)^2 \sum_k \left[-\frac{kv_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} + \left(1 + \frac{kv_z}{\omega_k} \right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \right] \times$$

$$\times \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{(-i\omega_k \pm i\omega_{Hj} + ikv_z)} \left[\left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k} \right) \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v_z} \right]. \quad (2.51)$$

Здесь введены цилиндрические координаты в пространстве скоростей. Знак \pm в резонансном знаменателе относится к право- или левополяризованным волнам. В резонансной области это уравнение можно упростить следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial t} = \left(\frac{e_j}{m_j} \right)^2 \sum_k \left[\left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k} \right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} + \frac{kv_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] |\mathbf{E}_k|^2 \times$$

$$\times \pi \delta(\omega_k - kv_z \pm \omega_{Hj}) \left[\left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k} \right) \frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] \bar{f}_j. \quad (2.52)$$

Основной вклад дают частицы с резонансными скоростями $v_z = \omega \pm \omega_{Hj}/k$. Частота волны в системе координат, движущейся с такой скоростью, в результате эффекта Допплера равна гирочастоте. Поэтому резонансные частицы вращаются в магнитном поле H_0 с той же частотой, что и электрический вектор E_\perp волны, и ускоряются. В качестве первого примера применения уравнения (2.52) рассмотрим задачу с одномерным волновым пакетом. Резонансная область, соответствующая такому волновому пакету, изображена на рис. 23. Она лежит в левой полуплоскости, так как $\omega \pm \omega_{Hj}$ отрицательно для вистлеров. Окружности на этом рисунке изображают линии уровня для первоначально изотропного распределения по скоростям. Так же, как и в квазилинейной теории ленгмюровских колебаний, резонансные частицы диффундируют пока не достигаются установившееся состояние «плато». Для достаточно узкого волнового пакета ($\Delta(\omega/k) \ll \omega/k$) установившееся состояние таково, что

$$\left[\left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k} \right) \frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] \bar{f}_j = 0. \quad (2.53)$$

Это уравнение определяет «плато» для рассматриваемого случая по аналогии с $d\bar{f}/dv = 0$ (плато в квазилинейной теории ленгмюровских колебаний). Линии уровня установившегося распределения по скоростям, удовлетворяющего уравнению (2.53), даются уравнением

$$v_\perp^2/2 + v_z^2/2 - \omega v_z/k = \text{const}. \quad (2.54)$$

Они представляют собой также окружности, но их центры смещены вправо на расстояние ω/k (см. рис. 22, пунктирные кривые). В теории линейных колебаний плазмы в магнитном поле известно, что мнимая часть частоты для вистлеров обращается в нуль, если

$$\int dv_\perp v_\perp^2 \left[\left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k} \right) \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega_k} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v_z} \right] \Big|_{v_z = \frac{\omega \pm \omega_{Hj}}{k}} = 0. \quad (2.55)$$

Сравнивая условия «плато» (2.53) с уравнением (2.55), видим, что декремент затухания вистлеров в состоянии плато обращается в нуль (аналогично случаю ленгмюровских колебаний).

Чтобы развить эту аналогию дальше, приведем двухмерный оператор квазилинейной диффузии в уравнении (2.52) к одномерной форме. Если ввести переменную

$$\omega = v_\perp^2/2 + v_z^2/2 - \omega v_z/k, \quad (2.56)$$

то производная $d/d\omega$ исчезает и уравнение (2.52) в новых переменных ω и $v \equiv v_z$ принимает форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial t} &= \sum_k \left[\left(1 - \frac{kv}{\omega} \right) \frac{1}{v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right] \frac{e_j^2}{m_j^2} |E_k|^2 \pi \delta \times \\ &\times (\omega - kv \pm \omega_{Hj}) \frac{kv_{\perp}}{\omega} \cdot \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v}; \\ \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial t} &= \left(\frac{e_j}{m_j} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \left[v_{\perp}(\omega, v) \frac{|H_k|^2(v)}{|v - \frac{d\omega}{dk}|} \cdot \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

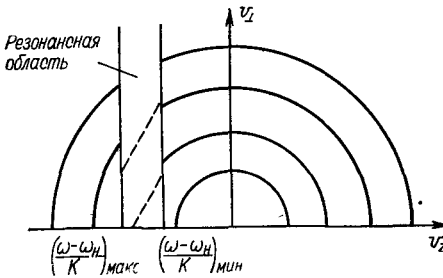


Рис. 23. Начальные и конечные линии уровня распределения частиц в случае пакета вистлеров.

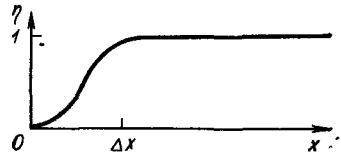


Рис. 24. Зависимость $\eta(x)$ в случае распределения с конусом потерь.

Интеграл (2.55), определяющий мнимую часть частоты, также приводится к одномерному виду в новых переменных (2.56) [1,69]:

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega &\sim \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 \left[\left(1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v_z} \right]_{v_z = \frac{\omega \pm \omega_{Hj}}{k}} \equiv \\ &\equiv \int_{\omega_{\text{мин}}(v)}^{\infty} v_{\perp}^2(\omega, v) \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial v} d\omega. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В плазме с анизотропным распределением по скоростям интегралы в уравнениях (2.55) и (2.58) могут быть положительными, что означает неустойчивость. Один из наиболее важных классов анизотропных распределений по скоростям — это распределение, обладающее конусом потерь. Такое распределение имеет место в магнитных ловушках для удержания плазмы с магнитными зеркалами (пробками). При наличии конуса потерь функцию распределения можно привести к виду

$$f = f_0(v_{\perp}^2 + v_z^2) \eta(\alpha v_{\perp}^2 - v_z^2), \quad (2.59)$$

где $\alpha \equiv H_{\text{макс}} - H/H$ и $\eta(x)$ изображена на рис. 24. Для заданного α линии уровня имеют вид, изображенный на рис. 25. Подставляя

функцию распределения (2.59) в критерий устойчивости для вистлеров (2.55), получаем

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_{\perp} \left[\left(1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\perp}} (f_0 \eta) + \frac{k}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial mv_z} (f_0 \eta) \right] d\varepsilon_{\perp} < 0, \quad (2.60)$$

где $\varepsilon_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$. Интегрируя первое слагаемое по частям и приводя выкладки в двух других слагаемых, находим

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} f_0 \eta d\varepsilon_{\perp} - \frac{2kv_z}{\omega m} \int_0^{\infty} \varepsilon_{\perp} \eta \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}^2} \right) d\varepsilon_{\perp} - \\ & - \frac{kv_z}{\omega} (\alpha + 1) \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\perp} \eta' f_0 < 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Второе слагаемое в этом выражении обращается в нуль тождественно. Предполагая, что область существенного изменения функции мала в сравнении с v_{Tj}^2 , заменим $\eta'(x)$ на $\delta(x)$ в третьем члене. Соответственно этому получаем

$$-f_{0j} v_{Ti}^2 \left[1 + \frac{kv_z^2 (\alpha + 1)}{\omega \alpha^2 v_{Tj}^2} \right] < 0, \quad (2.62)$$

где $v_z = (\omega \pm \omega_{Hj})/k$. Так как v_z отрицательна, согласно критерию (2.62) неустойчивость имеет место для достаточно больших v_z или достаточно малых α . С приближением к области с максимальным значением магнитного поля в пробке α стремится к нулю, так что всегда можно найти пусть малую, но неустойчивую область. Однако нарушение условий устойчивости в малой области вдоль силовой линии Δz еще не означает, что волны будут нарастать. Для того чтобы амплитуда первоначально малых флуктуаций выросла до существенных значений, прежде чем соответствующий им волновой пакет выйдет из этой неустойчивой зоны, необходимо, чтобы

$$\int_{\Delta z} dz \frac{1m\omega}{\partial\omega/\partial k_z} \gg 1.$$

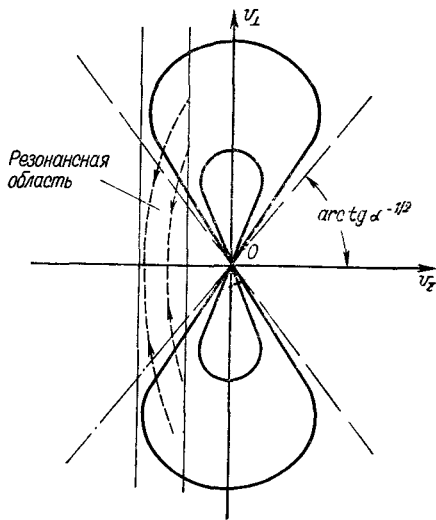


Рис. 25. Линии уровня для распределения с конусом потерь и квазилинейная диффузия в конус потерь.

Выполняя интегрирование, этот критерий можно переписать в виде неравенства

$$\Delta z \gg cF(\beta_j)/\omega_{pj},$$

где F — некоторая функция, зависящая от отношения давления данной компоненты плазмы к давлению магнитного поля, $\beta_j = 8\pi N_0 T_j / H_0^2$ и неограниченно растущая с уменьшением β_j до нуля. Можно показать, что в имеющихся сейчас экспериментальных установках этот критерий может быть выполнен лишь для электронных вистлеров в том случае, если только β_j не очень мало.

Согласно уравнению (2.61) плазма неустойчива также, если резонансная скорость значительно превышает тепловую. В более или менее термализованной плазме частиц с такими скоростями экспоненциально мало и соответствующая им неустойчивость имеет экспоненциально малый инкремент. В магнитосфере Земли существуют захваченные частицы с энергиями, значительно превышающими среднюю тепловую. Магнитное поле Земли обладает свойствами ловушки с магнитными зеркалами по отношению к таким частицам. Физика квазилинейного взаимодействия частиц с волновым пакетом вистлеров при наличии неустойчивости, изложенная выше, была применена к случаю магнитосферы Земли. Оказалось, что квазилинейная диффузия в конус потерь — это важный механизм, определяющий время жизни частиц в радиационных поясах в магнитном поле Земли [70—72].

ЗАДАЧА

Найти коэффициент квазилинейной диффузии электронов по питч-углу α ($\sin \alpha = v_{\perp}/v$) для случая взаимодействия с вистлерами [71].

Переходя к сферическим координатам (v, α, φ), переписываем уравнения (2.51) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} = & \omega_H^2 \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial v} v + \left(\cos^2 \alpha - \frac{(\omega - |\omega_H|)}{\omega} \right) \frac{1}{v \cos \alpha \sin \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \times \\ & \times \frac{\omega_k^2 |\mathbf{H}_k|^2}{k^2 H_0^2} \pi \sin^2 \alpha \delta(kv \cos \alpha - \omega \mp |\omega_H|) \times \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial v} + \left(\cos^2 \alpha - \frac{(\omega - |\omega_H|)}{\omega} \right) \frac{1}{v \cos \alpha \sin \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] f_e. \end{aligned}$$

Предположим, что диффузия происходит в основном по питч-углу, тогда это уравнение значительно упрощается ($\omega \ll \omega_H$)

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\omega_H^2 / v |\cos \alpha| \right) \frac{|\mathbf{H}(k \approx \omega_H/v)|^2}{H_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} f.$$

§ 2.6. Нерезонансное взаимодействие волна — частица

До сих пор мы рассматривали только резонансное взаимодействие волн с частицами. При рассмотрении нерезонансного (или адиабатического) взаимодействия необходимо учесть член с главной частью в квазилинейном уравнении диффузии (см. уравнение (2.25)). Как было отмечено выше при обсуждении уравнения (2.25), этот член в квазилинейном уравнении диффузии для случая ленгмюровских волн описывает отклик нерезонансных электронов (основной части функции распределения) на плазменные колебания. Например, увеличение осцилляторной кинетической энергии электронов, связанное с увеличением амплитуды волны, приводит к кажущемуся нагреву основной части функции распределения. Для количественного исследования запишем уравнение (2.25) с нерезонансной частью

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{(kv - \omega_{\mathbf{k}})^2 + \gamma_{\mathbf{k}}^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \approx \\ &\approx \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{\omega_p^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где $[(kv - \omega_{\mathbf{k}})^2 + \gamma_{\mathbf{k}}^2]$ приближенно заменено на ω_p^2 . Вместе с уравнением для нарастания волны уравнение (2.26) приводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{1}{N_0 m} \left(\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi} \right) \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (2.64)$$

Умножив обе части этого уравнения на $mv^2/2$ и проинтегрировав по скоростям, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv v^2 \bar{f}(v, t) = \frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi}. \quad (2.65)$$

Иными словами, кинетическая энергия электронов в основной части функции распределения увеличивается вместе с электростатической энергией колебаний. Разумеется, это всего лишь следствие хорошо известного результата, что полная энергия плазменной волны содержит две одинаковые части: электростатическую энергию и кинетическую энергию электронов. Чтобы убедиться в том, что увеличение кинетической энергии электронов, осциллирующих под действием поля колебаний, на языке квазилинейной теории выглядит как кажущийся нагрев, в уравнении (2.64) вместо t перейдем к переменной $\tau = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 / 4\pi N_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \quad (2.66)$$

Для начальных условий

$$f(v, \tau = 0) = \sqrt{m/2\pi T} \exp[-mv^2/2T]. \quad (2.67)$$

Это уравнение имеет решение

$$f(v, \tau) = \left[\frac{m}{2\pi(T+\tau)} \right]^{1/2} \exp[-mv^2/2(T+\tau)]. \quad (2.68)$$

Аналогичным образом можно показать, что основная часть распределения также переносит количество движения, связанное с волнами. Однако для этого нужно было бы сохранить зависимость от скорости в знаменателе $[(\omega_k - kv)^2 + \gamma_k^2]$ уравнения (2.63). Эта зависимость дает сдвиг максимума функции распределения в направлении распространения волны, что и соответствует учету количества движения. В отличие от неустойчивостей, до сих пор рассматривавшихся в этой главе, многие плазменные неустойчивости имеют алгебраическую природу и совершенно не связаны с резонансным взаимодействием волна — частица. В таких случаях необходимо пользоваться квазилинейной теорией с нерезонансной диффузией при описании релаксации неустойчивости. Для примера рассмотрим шланговую неустойчивость («центробежную») [73]. Для этой неустойчивости мнимая часть частоты оказывается равной

$$\gamma_k = kv_{Ti} \sqrt{(T_{\parallel} - T_{\perp})/T} \quad (2.69)$$

при $\beta \gg 1$. Действительная же часть частоты пренебрежимо мала, если длина волны возмущения превышает средний ларморовский радиус ионов $kv_{Ti} \ll \omega_{Hi}$. Если плазма находится в состоянии, близком к границе устойчивости ($\Delta T/T \ll 1$), то $\gamma_k \ll kv_{Ti}$ и можно воспользоваться квазилинейной теорией. Так как $\omega_{Hi} \gg kv_{Ti}$, в случае шланговой неустойчивости резонансные частицы не играют роли. Чтобы получить уравнение диффузии в соотношении (2.63), проведем замену $\omega_k \rightarrow i\gamma_k$ и воспользуемся условием $\gamma_{-k} = \gamma_k$. В результате получим [74]

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \frac{e_j^2 \sum_k \frac{d}{dt} |H_k|^2}{2m_j^2 \omega_{Hj}^2 c^2} \left(v_{\perp}^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_z^2} + v_z^2 \frac{1}{v_{\perp}} v_{\perp} \frac{\partial f_j}{\partial v_{\perp}} - 2v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_z} v_z \frac{\partial f_j}{\partial v_{\perp}} \right). \quad (2.70)$$

При выводе применено также соотношение

$$|E_k|^2 = (\omega^2/k^2 c^2) |H_k|^2. \quad (2.71)$$

Уравнение (2.70) можно приближенно решить следующим образом. Поскольку состояние плазмы близко к границе устойчивости ($\Delta T \ll T$), функцию распределения можно представить как $f = f_M + \Delta T f_1/T$, где f_M — максвелловская функция, f_1 — поправка,

дающая анизотропию. Если линеаризовать правую часть квазилинейного уравнения (2.70), получим

$$\frac{\partial f_{\mathbf{1}}}{\partial t} = \frac{(v_{\perp}^2/2 - v_{\parallel}^2)}{v_T^2} f_M \frac{d}{dt} \sum_k \frac{|\mathbf{H}_k|^2}{H_0^2}. \quad (2.72)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{f} = f_0(v_{\perp}^2, v_{\parallel}^2) + \frac{(v_{\perp}^2/2 - v_{\parallel}^2)}{v_T^2} f_M \sum_k \frac{|\mathbf{H}_k|^2}{H_0^2}. \quad (2.73)$$

Эту функцию распределения теперь можно подставить в выражение (2.69) для инкремента неустойчивости:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= k \left[\int d^3 v \bar{f}_i(v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2/2) \right]^{1/2} = \\ &= kv_{Ti} \left[(\Delta T/T)_0 - 3 \sum_k |\mathbf{H}_k|^2/H_0^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Таким образом, приходим к несложному нелинейному дифференциальному уравнению для амплитуды колебаний ($kr_{Hi} = \sqrt{\Delta T/T}$ [75]):

$$\frac{d}{dt} \sum_k |\mathbf{H}_k|^2 = \Omega_H \sum_k |\mathbf{H}_k|^2 \left[(\Delta T/T)_0 - 3H_0^{-2} \sum_k |\mathbf{H}_k|^2 \right]. \quad (2.75)$$

Решение этого уравнения имеет вид, изображенный на рис. 26 [74]. Квазилинейная релаксация рассмотренной неустойчивости, как видим, приводит к восстановлению изотропии распределения. Этому процессу можно приписать следующий простой физический смысл. Так как неустойчивость нарастает медленно, интеграл

$$\mathcal{Y} = \int v_{\parallel} dl \quad (2.76)$$

должен сохраняться (как адиабатический инвариант движения частицы в медленно меняющемся поле). Первоначально силовые линии представляли собой параллельные прямые, но по мере нарастания амплитуды возмущений силовые линии все более и более искривляются. Так как длина силовой линии (а вместе с ней и длина пути интегрирования в уравнении (1.76) увеличивается, то v_{\parallel} должно уменьшаться, что и приводит к уменьшению T_{\parallel} .

Хотя нерезонансная диффузия описывает взаимодействие волны со всеми частицами, эффективность этого взаимодействия может существенно отличаться для различных областей пространства скоростей. В таких ситуациях квазилинейная функция распределения может в процессе релаксации принимать весьма необычную форму. Для примера рассмотрим случай электромагнитной моды в плазме при отсутствии внешнего магнитного поля H_0 . Если функция распределения электронов (или ионов) неизотропна, такие моды могут оказаться неустойчивыми.

Рассмотрим неизотропную функцию распределения $f(v_z^2, v_x^2)$. Как это видно из рис. 27, эффективная температура в направлении x превышает температуру в направлении z . Нетрудно показать, что чисто поперечное возмущение неустойчиво даже для малой анизотропии [76—78]. В линейной теории поправка к функции распре-

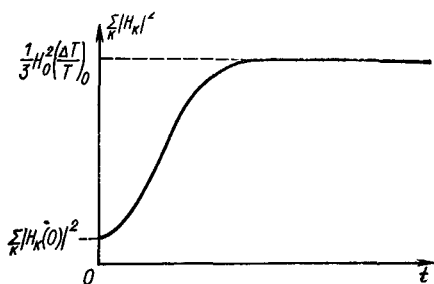


Рис. 26. Нелинейная эволюция спектральной плотности энергии в случае шланговой неустойчивости.

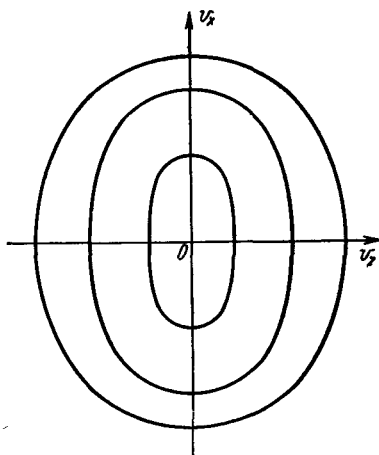


Рис. 27. Линии уровня для анизотропного распределения частиц.

деления для возмущения вида $\exp[i(k_z z - \omega t)]$ определяется уравнением

$$-i(\omega - k_z v_z) f_j + \frac{e_j}{m_j} \left\{ E_x - \frac{1}{c} v_z H_y \right\} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_x} + \frac{e_j}{m_j c} v_x H_y \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_z} = 0, \quad (2.77)$$

где поля E_x и H_y можно найти из уравнений Максвелла

$$-ik_z H_y = (4\pi e/c) \int (f_i - f_e) v_x d^3 v, \quad (2.78)$$

$$ik_z E_x = i\omega H_y/c. \quad (2.79)$$

Итак, имеется четыре уравнения для четырех величин f_i, f_e, H_y, E_x . Выражая поля с помощью H_y , получаем

$$f_j = \frac{1}{i(\omega - k_z v_z)} \cdot \frac{e_j H_y}{m_j c} - \left\{ v_x \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_x} + \frac{\omega}{k_z} \cdot \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_x} \right\}. \quad (2.80)$$

Предположим, что ионное распределение анизотропно (если f_{0i} изотропно, члены, соответствующие силе Лоренца, исчезают). Подставляя в уравнение (2.79) плотность тока, с помощью найденной поправки функции распределения имеем

$$ik_z H_y = -\frac{4\pi i}{c^2} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} H_y \int \frac{d^3 v}{\omega - k_z v_z + i0} \times \left(v_x f_j + v_x^2 \frac{\partial f_j}{\partial v_z} - \frac{\omega}{k_z} f_j \right). \quad (2.81)$$

Дисперсионное уравнение теперь принимает простую форму:

$$k_z^2 = \sum_j \frac{4\pi e_j^2}{m_j^2 c^2} \left(\int d^3 \mathbf{v} \frac{k_z v_x^2}{\omega - k_z v_z + i0} \frac{\partial f_j}{\partial v_z} - N_0 \right). \quad (2.82)$$

В изотропной плазме это соотношение превращается в известный закон дисперсии для электромагнитных волн в плазме в отсутствие внешнего электромагнитного поля. Если же распределение анизотропно, появляются новые корни этого уравнения, представляющие низкочастотные моды. Предположим, что $f \sim \exp[-(mv_x^2/2T_x - (mv_z^2/2T_z))]$. Отсюда видно, что если $(1 - T_x/T_z) < 0$, то для достаточно малых k_z^2 волна неустойчива. Для более общего вида функций распределения условие неустойчивости имеет вид

$$\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{c^2} \int d^3 \mathbf{v} \left(\frac{v_x^2}{v_z} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial v_z} + f_j \right) < 0. \quad (2.83)$$

Поскольку отсутствует действительная часть ω , неустойчивость апериодическая. В противоположном случае $T_x < T_z$, неустойчивость имела бы место для возмущения, распространяющегося в направлении оси x . Таким образом, мы имеем дело с абсолютно неустойчивой ситуацией даже для малой анизотропии. Для волнового вектора k_z на границе неустойчивости запишем следующее соотношение: $k_z^2 \leq \Delta T \omega_p^2 / T c^2$. Применим теперь к анализу этой неустойчивости квазилинейную теорию. Уравнение для усредненной функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \left\langle \frac{e}{m} \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}'] \right) \cdot \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0, \quad (2.84)$$

где штрихом отмечены быстро меняющиеся величины. Теперь подставим выражение для быстро меняющейся функции f' , найденное в линейной теории, и усредним, как обычно, при выводе квазилинейного уравнения:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2 c^2} \left\langle [\mathbf{v} \times \mathbf{H}'] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{i}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} (c\mathbf{E}' + [\mathbf{v} \times \mathbf{H}']) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle,$$

где угловые скобки обозначают операцию такого усреднения. Величину $\text{Im}[1/(\omega - k_z v_z)]$ можно представить как $(d/dt) (\omega^2 + k_z^2 v_z^2)^{-1}$ и пренебречь ω^2 в знаменателе, так как $\omega^2 \ll k_z^2 v_z^2$.

Теперь проделаем вычисления, аналогичные тем, с которыми мы имели дело при рассмотрении шланговой неустойчивости. В результате квазилинейное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2 c^2} \sum_k \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d}{dt} |\mathbf{H}_k|^2 \left(v_x \frac{\partial}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial}{\partial v_x} \right) \frac{v_x}{v_z^2} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_z}. \quad (2.85)$$

Физический смысл квазилинейной диффузии такого типа очевиден: неустойчивость приводит к нарастанию флуктуирующих магнитных

полей. Эти магнитные поля влияют на движение частиц (возникает рассеяние частиц на таких магнитных флюктуациях).

Хотя уравнение (2.85) описывает адиабатическое взаимодействие возмущений со всеми частицами, видно, что коэффициент квазилинейной диффузии особенно велик для частиц с малыми v_z . Поэтому можно ожидать, что заметная модификация распределения частиц возникает вначале только для $v_z \ll v_{Ti}$. Учитывая сказанное, можно пренебречь в этом уравнении производной по v_x . Вводя новую переменную $h = e^2/m^2c^2 \Sigma k^{-2} |H_k|^2$, сводим уравнение (2.85) к простому виду:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial v_z} \cdot \frac{v_x^2}{v_z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \bar{f}.$$

Это уравнение допускает аналитическое решение в терминах начальной функции распределения. Пусть начальное распределение является максвелловским с разными температурами. Тогда получаем следующее решение [79]:

$$\bar{f}(h) = \frac{\Gamma(3/4)}{(2\pi)^{3/2} 2^{1/4}} \frac{m^2 |v_z|^{3/2}}{T_z^{3/2} T_x^{1/2}} \exp(-mv_x^2/2T_x) \times \int_0^\infty \frac{\exp(-4v_x^2 \lambda^2 h) \lambda^{1/4} \mathcal{J}_{-3/4}(\lambda v_z^2) d\lambda}{(m/2T_z)^2 + \lambda^2}. \quad (2.86)$$

Нетрудно видеть, что упрощение распределения в области малых v_z (а не полное выравнивание температур) приводит к стабилизации неустойчивости при $h \sim (\Delta T/T)^4$.

ЗАДАЧИ

1. Оценить уровень флюктуаций магнитного поля вследствие неустойчивости нейтрального слоя в хвосте магнитосферы [79].

Пусть магнитное поле в хвосте магнитосферы направлено по оси z и неоднократно по вертикали (оси y)

$$H_z(y) = H_0 \operatorname{th}(y/L). \quad (1)$$

Неоднородность магнитного поля обусловлена протеканием электронного тока по оси x , так что распределение электронов описывается сдвинутым на величину токовой скорости u максвелловским распределением [80]

$$f_{oe} = \frac{N_0}{\pi^{3/2} v_{Te}^3} \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_{Te}^2} + 2u \left(v_x - \frac{e}{mc} A_{0x} \right) / v_{Te}^2 \right\}, \quad (2)$$

где A_{0x} — векторный потенциал невозмущенного магнитного поля. Как было впервые показано Лавалем и др. [81], такое состояние неустойчиво относительно электромагнитных возмущений, распространяющихся вдоль слабого магнитного поля. Поскольку основной вклад в инкремент дают электроны из узкой полосы вблизи нейтрального слоя ($|y| < d_e = \sqrt{r_{He} L}$), где можно пренебречь влиянием магнитного поля на траектории движения электронов, то уравнения для возмущений, а также квазилинейное уравнение для возмущенной функции распределения совпадают с уравнениями (2.77) и (2.85),

полученными для случая, когда избыточная энергия частиц по оси x была обусловлена не электронным током, а несколько большей температурой, чем по оси z . Для удобства линейного анализа устойчивости нейтрального слоя выразим напряженность полей через векторный потенциал A_x

$$H_y = ik_z A_x(y) \exp(i k_z z - i\omega t), \quad E_x = (i\omega/c) A_x(y) \times \exp(i k_z z - i\omega t). \quad (3)$$

Тогда уравнение Максвелла для A_x есть

$$-d^2 A_x/dy^2 - k^2 A_x = 4\pi/c \sum_j e_j \int d^3 v v_x f'_{kj}. \quad (4)$$

Быстроосциллирующая часть функции распределения содержит две части. Вне области нейтрального слоя ($|y| > d_e$) влиянием турбулентности на замагниченные электроны можно пренебречь и считать, что они находятся в магнитостатическом равновесии $f_{kj} = \partial f_{0j} A_x / \partial A_{0x}$. Внутри слоя ($|y| < d_e$) для функции распределения можно воспользоваться ранее найденным уравнением (2.81), в котором мы пренебрегли влиянием магнитного поля на движение частиц. В результате уравнение (4) принимает вид

$$-d^2 A_x/dy^2 + V(y) A_x = \lambda A_x, \quad (5)$$

где

$$V(y) = \begin{cases} V^>, & |y| > d_e, \\ V^< + |\omega/k|^2 Q, & |y| < d_e, \end{cases} \quad \lambda \equiv -k^2$$

$$V^> = \sum_j \frac{4\pi e_j}{c} \int d^3 v v_x \frac{\partial f_{0j}}{\partial A_{0x}} < 0;$$

$$V^< = \frac{4\pi e^2}{mc^2} \int d^3 v \left(\bar{f}_e \frac{v_x^2}{v_z} \cdot \frac{\partial \bar{f}_e}{\partial v_z} \right) > 0; \quad Q = - \frac{4\pi e^2}{mc^2} \int d^3 v \frac{v_x^2}{v_z^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{f}_e}{\partial v_z^2}.$$

Рост магнитных флуктуаций и релаксация распределения частиц прекращается тогда, когда плазма достигает порога устойчивости. При этом уравнение (5) не должно иметь решений с собственным значением $\lambda < 0$ и инкрементом $\omega = 0$ [82]. Так как $V^< > 0$, то это, очевидно, имеет место при $V^< d_e \sim 1$. Воспользовавшись выражением (2.86) для усредненной функции распределения, переписываем это условие в виде

$$d_e^2 V^< \approx \frac{\omega_p^2}{c^2} \cdot \frac{h^{1/4}}{v_{Te}^{1/2}} d_e^2 \sim 1. \quad (6)$$

Отсюда находим амплитуду флуктуирующих полей

$$\sum_k |H_k|^2 / H_0^2 \approx k^2 r_{He}^2 (r_{He}/L)^4. \quad (7)$$

2. Вычислить скорость распространения слабой ударной волны вдоль магнитного поля в плазме с холодными электронами в предположении, что диссипация энергии во фронте волны обеспечивается развитием шланговой неустойчивости [83].

Задача сводится к отысканию критической скорости движения возмущения конечной амплитуды ($-U_0$), при которой квазилинейная релаксация приводит к увеличению анизотропии давления на переднем фронте волны. Отличие от случая квазилинейной релаксации во времени заключается в том, что теперь перестройка распределения «резонансных» ионов, движущихся

с волной, дает основной вклад в изменение анизотропии давления. Вводя в уравнение (2.70) переменную $h = \sum_k |\mathbf{H}_k|^2 / H_0^2$ и оставляя в нем лишь член со второй производной по продольным скоростям, получаем

$$(v_{\parallel} - U_0) (\partial f / \partial h) = -U_0 v_{\perp}^2 (\partial^2 f / \partial v_{\parallel}^2). \quad (1)$$

В отличие от обычного «квазилинейного плато», параллельного оси абсцисс, это уравнение описывает установление «плато» с определенным наклоном к ней. Поэтому при малых скоростях волны частицы отдают ей часть своей продольной энергии, а при больших отнимают (разность $p_{\parallel} - p_{\perp}$ увеличивается). Воспользовавшись преобразованием Лапласа, можно найти искажение распределения в малой окрестности скоростей резонансных частиц и вычислить изменение анизотропии

$$p_{\parallel} - p_{\perp} \approx \frac{4p_0}{3\sqrt{V\pi}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{9hMU_0^2}{2T}\right)^{2/3} \exp\left(-\frac{MU_0^2}{2T}\right) \times \\ \times \left[\frac{MU_0^2}{2T} - \frac{5}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{\Gamma^3(1/3)}\right]. \quad (2)$$

Для скорости волны отсюда получаем

$$3p_{\parallel} / p_0 > U_0^2 \geq \left[\frac{5}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{\Gamma^3(1/3)}\right] p_0 / \rho_0 > \frac{5}{3} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (3)$$

Удержав члены следующего порядка ($\sim h^{4/3}$) в разложении анизотропии давления по амплитуде волны, можно убедиться, что с дальнейшим ростом амплитуды полей h анизотропия исчезает, так что за фронтом волны распределение частиц изотропно.

§ 2.7. Квазилинейная теория дрейфовой неустойчивости

Дрейфовая неустойчивость неоднородной плазмы, обнаруженная Л. И. Рудаковым и Р. З. Сагдеевым [84], приводит к аномальному увеличению потока частиц и тепла поперек магнитного поля и таким образом накладывает существенные ограничения на время удержания плазмы в ловушках. В связи с этим важное значение приобретает корректное описание нелинейной стадии развития неустойчивости и возникающего турбулентного состояния.

Рассмотрим лишь одну из многочисленных ветвей дрейфовых колебаний, которая развивается в плоском слое плазмы малого давления ($\beta \ll 1$) с инкрементом, много меньшим частоты колебаний. Отсылая за обоснованием и подробными ссылками к книге А. Б. Михайловского [VI], разложим потенциал электрического поля возмущений в ряд по сумме плоских волн

$$\Phi = \sum_{\mathbf{k}, \omega} \Phi(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.87)$$

и будем описывать частицы плазмы с помощью дрейфового кинетического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f_j + v_z \frac{\partial}{\partial z} f_j - \frac{c}{H_0} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x} - \frac{e_j}{m_j} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial v_z} = 0, \quad (2.88)$$

где ось z выбрана вдоль невозмущенного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$, а ось x — вдоль градиента плотности плазмы $n(x)$. Линеаризуя уравнения (2.88) относительно малых возмущений, находим быстроосциллирующую поправку к функции распределения частиц:

$$f_{1j} = -\frac{e_j \Phi}{m_j} \left[k_z \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_{Hj}} \cdot \frac{\partial f_{0j}}{\partial x} \right] (\omega_k - k_z v_z)^{-1}. \quad (2.89)$$

Для колебаний с фазовыми скоростями в интервале $v_{Ti} \ll \omega/k_z \leq \lesssim v_A \ll v_{Te}$. Электроны (за исключением резонансных) успевают распределиться по закону Больцмана в электростатическом поле волны. В результате возмущение плотности электронов можно представить в виде

$$n_{1,e} = \frac{e\Phi}{T_e} n_0 \left\{ 1 - \frac{i\pi T_e}{|k_z| m n_0} \left(k_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{0e}(v_z, x) \right\}, \quad (2.90)$$

где распределение нерезонансных электронов предполагается максвелловским с температурой T_e . В уравнении для ионов можно пренебречь членами, описывающими продольное движение, и учесть лишь электрический дрейф. Оставшиеся члены можно записать в форме уравнения непрерывности

$$\partial n_{1i} / \partial t - (c/H_0)(\partial \Phi / \partial y)(\partial n_0 / \partial x) = 0. \quad (2.91)$$

Используя условие квазинейтральности плазмы из уравнения (2.90) и (2.91), получаем дисперсионное уравнение для частоты и инкремента нарастания колебаний:

$$\omega = k_y v_*^e; \quad v_*^e \equiv -\frac{c T_e}{e H_0 n_0} \cdot \frac{dn_0}{dx}, \quad (2.92)$$

$$\gamma \approx \frac{\pi \omega T_e}{m n_0 |k_z|} \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{0e}(v_x, x). \quad (2.93)$$

Нетрудно видеть, что инкремент неустойчивости в плазме с максвелловским распределением электронов и однородной температурой обращается в нуль (безразличное равновесие). Эффект раскачки колебаний в этом случае обусловлен неучтенной здесь конечностью ларморовского радиуса ионов. В пределе, когда длина волны колебаний много больше ларморовского радиуса ионов, поправку к частоте, связанную с указанным эффектом, находим, добавляя в уравнение непрерывности дрейфы высших порядков (инерционные дрейфы)

$$\frac{\partial n_{1i}}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \left\{ -\frac{c}{H_0^2} [\nabla \Phi \times \mathbf{H}_0] - \frac{c}{\Omega_H H_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Phi + \frac{T_{0i}}{n_0 e} \nabla n_{1i} \right) \right\} = 0.$$

Отсюда и из уравнения (2.90) получаем

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= k_y v_*^e (1 - k^2 R_H^2); \\ \gamma_k^{(M)} &= \frac{\sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_{Te}} (\omega - k_y v_*^e), \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

где $\gamma_k^{(M)}$ — инкремент нарастания дрейфовых колебаний в случае максвелловского распределения электронов. Видим, что инкремент очень мал, так что уже небольшие нелинейные искажения функции распределения могут повлиять на устойчивость плазмы относительно конечных возмущений.

Рассмотрим два таких нелинейных эффекта. Первый из них связан с уширением области резонансных скоростей в поле монохроматической волны конечной амплитуды на величину $\sim \sqrt{e\Phi_0/m}$. Такое уширение способно ограничить рост дрейфовой волны. Затем рассмотрим самоподавление неустойчивости вследствие релаксации распределения резонансных электронов.

Нелинейная устойчивость монохроматической дрейфовой волны. Выберем потенциал электрического поля монохроматической волны в виде

$$\Phi(y, z, t) = -\Phi_0 [\cos(k_y y + k_z z - \omega t) + 0(e\Phi_0/T)],$$

полагая для простоты $k_x \equiv 0$. В системе координат, движущейся с волной, скорость уменьшения кинетической энергии резонансных частиц, равную инкременту нарастания волн, можно записать как

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{n_0 m}{2} \int_{-\lambda_z/2}^{\lambda_z/2} \frac{dz}{\lambda_z} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \left(v_z + \frac{\omega}{k_z} \right)^2 \frac{\partial f_e}{\partial t}. \quad (2.95)$$

В дрейфовом приближении общее решение кинетического уравнения имеет следующий вид:

$$f_e(\mathbf{r}, v_z, t) = f_e[\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, v_z, t), v_{z0}(\mathbf{r}, v_z, t), 0],$$

где $f_e(\mathbf{r}_0, v_{z0}, 0)$ — начальное распределение, а (\mathbf{r}_0, v_{z0}) — начальное положение частицы. Можно разделить функцию распределения на две части

$$f_e(\mathbf{r}_0, v_{z0}, 0) = f_0(x_0, v_{z0}) + f_1(x_0, v_{z0}, 0) \cos(k_y y_0 + k_z z_0), \quad (2.96)$$

где первая часть f_0 — локально максвелловская функция, а вторая часть описывает возмущение распределения частиц в присутствии волны. Вторая часть дает вклад только в генерацию гармоник, а при вычислении баланса энергии ею можно пренебречь. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} &= \frac{\partial f_e(x_0, v_{z0}, 0)}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial f_e(x_0, v_{z0}, 0)}{\partial v_{z0}} \cdot \frac{\partial v_{z0}}{\partial t} = \\ &= \frac{e}{m} \Phi_0 \sin(k_y y_0 + k_z z_0) \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_{z0}} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \right) f_e. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Здесь использованы дрейфовые уравнения движения частиц

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= 0; \\ \dot{x} &= c(k_y \Phi_0 / H_0) \sin(k_y y + k_z z); \\ \ddot{z} &= -(ek_z \Phi_0 / m) \sin(k_y y + k_z z). \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Эти уравнения имеют решения в терминах эллиптических интегралов. Введем сначала новую переменную $2\xi = k_y y + k_z z$ и перепишем уравнение сохранения энергии

$$1/2m\dot{z}^2 - e\Phi_0 \cos(k_y y + k_z z) = \mathcal{E} \quad (2.99)$$

в форме

$$\dot{\xi}^2 = 1/\kappa^2 \tau^2 (1 - \kappa^2 \sin^2 \xi), \quad (2.100)$$

$$\text{где } \kappa^2 = 2e\Phi_0 / (\mathcal{E} + e\Phi_0), \quad \tau = (m/e\Phi_0 k_z^2)^{1/2}.$$

В случае $\kappa^2 < 1$ решение уравнения (2.100)

$$F(\kappa, \xi_0) = F(\kappa, \xi) - t/\kappa\tau. \quad (2.101)$$

Для $\kappa^2 > 1$ воспользуемся следующей заменой:

$$\kappa \sin \xi = \sin \zeta, \quad \dot{\zeta}^2 = 1/\tau^2 (1 - 1/\kappa^2 \sin^2 \zeta).$$

Решение последнего уравнения есть

$$F(1/\kappa, \zeta_0) = F(1/\kappa, \zeta) - t/\tau. \quad (2.102)$$

Чтобы найти зависимость инкремента от времени, достаточно теперь подставить найденные решения в уравнения (2.95) и (2.97). Эта задача была решена О'Нейлом в таком приближении, что при $t = 0$ его результат сводится к линейному инкременту (см. § 2.1).

Мы хотим учесть нелинейные эффекты, присутствующие уже при $t = 0$, так что нам необходимо учесть больше членов, чем это сделал О'Нейл. После подстановки уравнения (2.97) в (2.95) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{16n_0 e\omega\Phi_0}{\pi k_z^2} \int_0^\infty d\xi \int_0^{\pi/2} d\xi \xi \left[k_z \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{z0}} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial x_0} \right] \Bigg|_{\substack{x_0=x \\ v_{z0}=0}} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} \left(k_z \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_{z0}} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial f_{0e}}{\partial x_0} \right) \Bigg|_{\substack{x_0=x \\ v_{z0}=0}} \xi^2 / 4k_z^2, \end{aligned} \quad (2.103)$$

где мы опустили четные степени по соображениям симметрии. Выполняя интегрирование и ограничиваясь для простоты пределом $t/\tau \ll 1$ (более общий случай изложен в работе [1]), находим инкремент неустойчивости

$$\gamma_h = - \frac{2T_e}{n_0 e^2 |\Phi_0|^2} \frac{dW}{dt} = \pi^{1/2} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}} \left(k_\perp^2 r_{Hi}^2 - \frac{4e\Phi_0}{T_e} \right). \quad (2.104)$$

Следовательно, волна конечной амплитуды может стать устойчивой в нелинейном режиме, если ее линейный инкремент был мал. Здесь рассмотрен лишь конкретный случай раскачки колебаний при учете конечного ларморовского радиуса, но эти результаты справедливы и для случая раскачки током или любым другим механизмом. Поэтому их можно было бы использовать при обсуждении неустойчивости щелочных плазм. Поскольку амплитуда колебаний, найденная из условия $\gamma_k = 0$, мала $e\Phi_0/T_e \approx \frac{1}{4} k^2 r_{Hi}^2 \ll 1$, то амплитуды высших гармоник, наблюдаемых в некоторых экспериментах, можно оценить простым разложением кинетического уравнения по отношению $e\Phi_0/T_e$. Для второй гармоники, например, таким способом получаем $e\Phi_{2k}^{(2)}/T_e \approx (1/2) (e\Phi_k^{(1)}/T_e)^2$. Следовательно, можно ожидать, что амплитуда гармоник убывает экспоненциально как функция частоты.

Описанная здесь картина имеет место лишь в случае узкого волнового пакета: $\Delta(\omega/k_z) \ll (e\Phi_0/m)^{1/2}$. Однако в экспериментах неустойчивость может развиваться в широком интервале фазовых скоростей и это условие нарушается. Тогда эффект стабилизации обусловлен релаксацией функции распределения электронов.

Квазилинейная релаксация распределения частиц и процессы переноса [85, 86]. Как обычно, функцию распределения частиц представим в виде суммы медленно и быстро меняющихся частей (т. е. $f_j = \bar{f}_j + \delta f_j$) и усредним кинетическое уравнение по быстрым осцилляциям, получим квазилинейное уравнение для медленно меняющейся функции распределения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}_j = \left\langle \frac{c}{H^2} [\nabla\Phi \times H] \cdot \nabla \delta f_j + \frac{e}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} \delta f_j \right\rangle.$$

Подставляя сюда ранее полученное выражение для быстро меняющейся части функции распределения (см. уравнение (2.89)), перепишем его в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_e}{\partial t} &= \text{St}_{QL}(\bar{f}_e); \\ \text{St}_{QL}(\bar{f}_e) &= \frac{e^2}{m^2} \sum_k \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) |\Phi_k|^2 \pi \delta \times \\ &\times (\omega_k - k_z v_z) \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{f}_e. \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Здесь мы пренебрегли главной частью оператора ($\omega_k - k_z v_z$), так как релаксация распределения нерезонансных электронов происходит гораздо медленнее, чем распределение резонансных. В квазилинейном уравнении для ионов, наоборот, можно пренебречь экспоненциально малой долей резонансных частиц и рассматривать

лишь адиабатическое изменение распределения нерезонансных частиц

$$\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t} = \frac{e^2}{M^2} \sum_{\mathbf{k}} \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\Omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\gamma_{\mathbf{k}} |\Phi_{\mathbf{k}}|^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\Omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{f}_i. \quad (2.106)$$

В коротковолновом пределе сюда следует подставить электрическое поле, усредненное по ларморовской орбите ионов ($|\langle \Phi_{\mathbf{k}} \rangle|^2 \approx |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 I_0^2 (k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_H)$).

Рассмотрим сначала процесс формирования плато. Для этого необходимо упростить уравнение диффузии в пространстве (x, v_z) , предположив, что основной вклад в коэффициент диффузии дадут колебания, имеющие максимальный инкремент (т. е. учесть лишь колебания с волновым вектором $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$, где $\bar{k}_z = \omega_{\mathbf{k}} / v_A$, а \bar{k}_y определяется, как будет показано ниже, конкуренцией эффектов формирования плато и установления максвелловского распределения из-за соударений). Если ввести новые переменные

$$\eta = v_z^2 / 2, \quad \xi = v_z^2 / 2 - \omega_{\mathbf{k}} \omega_H x / 2 \bar{k}_y, \quad (2.107)$$

то дифференциальный оператор в уравнении (2.105) сведется к виду

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \equiv \left(\frac{1}{v_z} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{\bar{k}_y}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

Следовательно, линии уровня, вдоль которых устанавливается плато, описываются уравнением $x - \bar{k}_y v_z^2 / 2 \omega_H \omega_{\mathbf{k}} \equiv \xi = \text{const}$. Так как $v_z \ll v_{Te}$ в резонансной области, то линии уровня максвелловского распределения приближенно определяются соотношением $x - v_z^2 / 2 \omega_H v_*^2 = \text{const}$. В случаях длинных волн $\omega_{\mathbf{k}} = k_y v_*^2 (1 - k_{\perp}^2 R_H^2)$ и два набора линий уровня отличаются друг от друга только вследствие эффекта конечности ларморовского радиуса ионов (рис. 28). Поэтому энергия, высвобождаемая в результате релаксации распределения электронов, в этом пределе также мала.

Если изобразить релаксировавшее распределение электронов по скоростям v_z при фиксированном x , то увидим, что наклон функ-

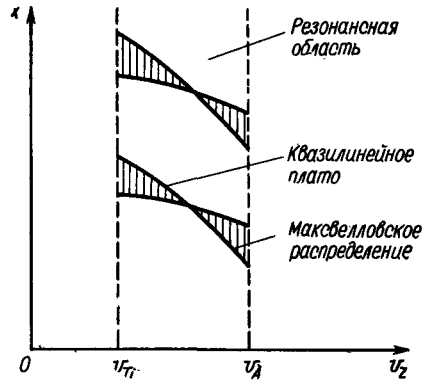


Рис. 28. Линии уровня для максвелловского распределения и распределения с квазилинейным плато в резонансной области.

ции распределения в резонансной области становится более крутым, благодаря чему затухание Ландау увеличивается и рост волн прекращается. В процессе релаксации электроны теряют энергию движения вдоль магнитного поля. Следовательно, можно сказать, что источник энергии нарастающих флуктуаций — энергия теплового движения электронов вдоль поля. Можно оценить смещение электронов в процессе релаксации из условия $\xi = \text{const}$

$$\delta x = \frac{\bar{k}_y}{\omega_k \omega_H} \cdot \frac{\delta v_z^2}{2}. \quad (2.108)$$

Так как $\delta v_z^2 \ll v_A^2$, то смещение резонансных электронов много меньше плазменного радиуса ($\delta x \sim n_0 v_A^2 / n_0' v_{Te}^2$). Иными словами, неустойчивость быстро самоподавляется, так что существенного изменения электронной плотности не происходит. Интегрируя квазилинейные уравнения для ионов и электронов, нетрудно убедиться, что обе компоненты плазмы диффундируют поперек магнитного поля с одинаковой скоростью. Например, для электронов из уравнения (2.105) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \sum_k \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} |\Phi_k|^2 \int d^3 v \pi \delta(\omega_k - k_z v_z) \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \right. \\ \left. + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_e = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{H_0^2} \sum_k k_y^2 |\Phi_k|^2 \frac{\gamma_k}{\omega_k k_y v_*^e} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.109)$$

где мы воспользовались уравнением (2.93) для инкремента неустойчивости γ_k . Если, кроме того, учесть, что $\omega_k \approx k_y v_*^e$, то обнаружим, что коэффициент резонансной диффузии электронов совпадает с коэффициентом диффузии нерезонансных ионов

$$D_{\perp} \approx \sum_k \frac{\gamma_k}{\omega_k^2} \cdot \frac{c^2}{H_0^2} k_y^2 |\Phi_k|^2.$$

Далее, поскольку в отсутствие соударений диффузии плазмы нет, то для получения эффекта диффузии следует учесть редкие соударения в правой части уравнения (2.105). Соударения стремятся установить распределение Максвелла и тем самым помешать формированию плато. Поэтому с учетом соударений мы уже вправе ожидать наличия диффузии. Электронное уравнение принимает вид

$$\partial f_e / \partial t = \text{St}_{QL} + \text{St}_{\text{coll}}, \quad (2.110)$$

где

$$\text{St}_{\text{coll}}(f_e) \equiv v_e v_{Te}^2 (\partial^2 (f_e - f_{Me}) / \partial v_z^2).$$

Так как нас интересует случай, когда соударения редки (т. е. $\text{St}_{\text{coll}} \ll \text{St}_{QL}$), то можно решать уравнение (2.110) методом последовательных приближений [86]. Представим функцию распре-

деления в виде $f_e = f_e^{(0)} + f_e^{(1)}$, где $f_e^{(0)}$ есть решение квазилинейного уравнения

$$\text{St}_{QL} [f_e^{(0)}] = 0. \quad (2.111)$$

Тогда для $f_e^{(1)}$ получаем уравнение

$$\text{St}_{QL} [f_e^{(1)}] + \text{St}_{\text{coll}} [f_e^{(0)}] = 0. \quad (2.112)$$

Уравнение (2.111) имеет простое решение с плато, так что

$$\frac{1}{v_z} \cdot \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial v_z} = - \frac{k_y}{\omega_k \omega_H} \cdot \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial x}. \quad (2.113)$$

Чтобы решить уравнение (2.112), проинтегрируем его по v_z :

$$\int_0^{v_z} dv_z \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) |\Phi_k|^2 \pi \delta(\omega_k - k_z v_z) \times \\ \times \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_e^{(1)} = v_e v_{Te}^2 \frac{\partial}{\partial v_z} (f_{Me} - f_e^{(0)}). \quad (2.114)$$

Поскольку $f_e^{(1)}$ зависит от v_z гораздо сильнее, чем от x , то можно пренебречь производной по x в первой скобке уравнения (2.114). Если, кроме того, использовать уравнение для плато (2.111), чтобы оценить второй член в правой части уравнения (2.114), то получим

$$\left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k |\Phi_k|^2 k_z \pi \delta(\omega_k - k_z v_z) \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_e^{(1)} = \\ = v_e v_{Te}^2 v_z \left(\frac{1}{v_z} \cdot \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_k \omega_H} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{Me}. \quad (2.115)$$

Интегрирование этого выражения по $\mu = mv_z^2/2H$ дает

$$\left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k k_z^2 |\Phi_k|^2 \gamma_k^{(1)} \pi \delta(\omega_k - k_z v_z) = v_e v_{Te}^2 \Phi_k^{(M)}, \quad (2.116)$$

где введен инкремент для релаксировавшего распределения в присутствии соударений $\gamma_k^{(1)}$ и инкремент для максвелловской плазмы $\gamma_k^{(M)}$ (см. уравнение (2.94)). Хотя это выражение нельзя использовать для оценки инкремента или энергии волн в отдельности, тем не менее оно позволяет оценить коэффициент диффузии, зависящий как раз от произведения этих величин. С помощью соотношения (2.116) и уравнения (2.109) получаем коэффициент диффузии

$$D_{\perp} = v_e \left(\frac{n_0}{\partial n_0 / \partial x} \right)^2 \frac{\gamma_k^{(M)}}{\bar{k}_y v_*^e} \left(\frac{\bar{k}_y v_*^e}{k_z v_{Te}} \right)^2. \quad (2.117)$$

Для оценки коэффициента диффузии следует найти характерное волновое число \bar{k} . В случае, когда соударения успевают установить

максвелловское распределение, спектр турбулентности имеет максимум при $kr_{Hi} \approx 1$. Это связано с тем, что индуцированное рассеяние волн на ионах быстро переводит частицы из коротковолновой области, где линейный инкремент значительно больше, в область $kr_{Hi} \sim 1$ [87]. В результате уменьшения частоты соударений происходит релаксация распределения электронов, инкремент неустойчивости для длин волн порядка ларморовского радиуса становится отрицательным (затухание). Для стабилизации коротковолновых колебаний требуется гораздо больший наклон функции распределения в области резонансных скоростей ($T_e df_e^{(0)}/dmv_z^2 \approx (k_y v_*^e/\omega_k \gg 1$). Поэтому в условиях, когда возмущения с длиной волны порядка ларморовского радиуса ионов застabilизированы, нелинейная откачка энергии из коротковолновой части спектра уменьшается и максимум спектральной плотности энергии смещается в эту область. Коэффициент пространственной диффузии можно оценить по формуле (2.117)

$$D_{\perp} \approx v_e \left[\frac{n_0}{\partial n_0 / \partial x} \right]^2 \left(\frac{m}{M\beta} \right)^{3/2} \bar{k}^2 r_{Hi}^2. \quad (2.118)$$

Соотношения (2.117) и (2.118) допускают простую интерпретацию. Оценим сначала энергию, высвобождающуюся в результате релаксации распределения частиц и идущего на увеличение энергии колебаний:

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{n_0 e^2 |\Phi_k|^2}{2T_e} &\approx \frac{1}{2} m \int v_z^2 [f^{(0)}(v_z) - f_M(v_z)] dv_z \sim \\ &\sim n T_e \left(\frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right)^4. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Электрический дрейф резонансных электронов приводит к их смещению на расстояние, совпадающее с ранее данной оценкой (2.108):

$$\delta x \approx \frac{c \bar{k}_y \varphi_{\infty}}{H_0 \omega_k} \approx \left[\frac{n_0}{\partial n_0 / \partial x} \right] \left(\frac{\omega_k}{k_z v_{Te}} \right)^2 \frac{k_y v_*^e}{\omega_k}. \quad (2.120)$$

Теперь диффузионный поток электронов (2.117) можно записать в виде

$$D_{\perp} \frac{dn_0}{dx} \equiv v_{eff} (\delta x)^2 \frac{d\delta n}{dx}, \quad (2.121)$$

где $v_{eff} = v_e \left(\frac{v_{Te}}{\omega/k_z} \right)^2$ — эффективная частота соударений частиц с резонансными скоростями $v_z \approx \omega/k_z$, а $\delta n = n_0 (\omega/k_z v_{Te})$ — плотность резонансных электронов [инкремент неустойчивости пропорционален числу резонансных электронов $\gamma_k \approx (\delta n/n_0) k_y v_*^e$].

В заключение несколько слов следует сказать о пределах применимости уравнения (2.118). Во-первых, при выводе его предполагалось, что неустойчивость слабая, т. е. $\gamma_k \ll \omega_k$ или $kr_{Hi} \ll \sqrt{M\beta/m}$.

Заметим, что в плазме конечного давления очень коротковолновые колебания ($k > k_c$) подавлены из-за резонанса между ионами, движущимися со скоростью диамагнитного дрейфа, и дрейфовой волной [VI]. Поэтому в пределе $v_e \rightarrow 0$ в уравнение (2.118) следует подставить $k_c(\beta)$. Во-вторых, считали, что $St_{coll} \ll St_{QL}$. Последнее условие, очевидно, совпадает с условием

$$D_{QL} = v_e \left(\frac{n}{\Delta n} \right)^2 \frac{\gamma_k k_y v_e^e}{k_z^2 v_{Te}^2} \ll D_{turb} = \frac{\gamma_k^2}{\omega_k k_x^2}, \quad (2.122)$$

где коэффициент турбулентной диффузии получен из уравнения (2.109) с учетом того, что спектральная плотность энергии дрейфовых колебаний ограничивается на уровне, пропорциональном линейному инкременту неустойчивости и, таким образом, содержит малый параметр γ_k/ω_k (более подробное обсуждение см. в обзоре [88] и книге [III]).

ЗАДАЧА

Оценить инкремент нелинейной неустойчивости плазмы с неоднородной температурой электронов относительно возмущений с конечной амплитудой и коэффициент диффузии вследствие развития неустойчивости [89].

Рассмотрение квазилинейной стабилизации дрейфовых волн, приведенное в тексте, показало, что соударения способны поддерживать нарастание флуктуаций дрейфовых волн. Инкремент такой нелинейной неустойчивости, оцененный из уравнения (2.16), есть (см. результаты § 1.3)

$$\gamma_k^{(1)} = \gamma_k^{(M)} / [1 + \tau_e / \tau_{QL}], \quad (1)$$

где $\tau_e = v_{eH}^{-1} = v_e^{-1} \left(\frac{\Delta v_z}{v_{Te}} \right)^2$ — время между соударениями резонансных частиц, а τ_{QL} — время квазилинейного искажения функции распределения. Как и в § 2.3 предположим, что эта формула справедлива и в случае конечного возмущения в виде монохроматической дрейфовой волны. Только теперь следует провести замену $\tau_e \rightarrow v_e^{-1} (e\Phi_0/T_e)$, а $\tau_{QL} \rightarrow \tau_b = \lambda_z / \sqrt{e\Phi_0/m}$ — время нелинейного искажения распределения электронов, запертых в волне. В пределе $\tau_b \ll \tau_e$ из уравнения (1) получаем

$$\gamma_k^{(1)} = -\gamma_e \left(\frac{T_e}{e\Phi} \right)^{1/2} \left[\frac{k_y v_e^e}{k_z (e\Phi/m)^{1/2}} \right]^2 \eta, \quad v_e \left(\frac{T_e}{e\Phi} \right) \ll k_z \sqrt{\frac{e\Phi}{m}}, \quad (2)$$

где мы воспользовались известной формулой для линейного инкремента $\gamma_k^{(M)} = -\omega^2 \eta / |k_z| v_{Te}$, $\eta \equiv d \ln T_e / d \ln n_0$. Энергия колебаний черпается из продольной энергии электронов, освобождающейся в результате релаксации все новых порций захватываемых в потенциальную яму электронов. Диффузию, сопровождающую процесс развития нелинейной неустойчивости, можно оценить из уравнения (2.121), где смещение в поле волны и число резонансных частиц есть

$$\delta x = \frac{ck_y \Phi}{H_0} \tau_b = r_{He} \left(\frac{k_y}{k_z} \right) \sqrt{\frac{e\Phi}{T_e}}; \quad \delta n = n_0 \sqrt{\frac{e\Phi}{T_e}}.$$

Оказывается, что диффузия слабо зависит от амплитуды поля

$$D_{\perp} = \sqrt{\frac{e\Phi}{T_e}} \cdot \frac{k_y^2}{k_z^2} v_e r_{He}^2. \quad (3)$$

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНА — ЧАСТИЦА

§ 3.1. Ленгмюровская турбулентность

Изложим последний механизм нелинейного взаимодействия волн и плазмы, причем для простоты ограничимся рассмотрением плазмы без магнитного поля.

Поскольку плазма — нелинейная среда, то при распространении в ней двух волн с частотами ω_1 , ω_2 возникают биения на смешанных частотах ($\omega_1 \pm \omega_2$) с волновыми векторами ($\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$). Резонанс между этим биением и третьей волной (ω_3 , \mathbf{k}_3) лежит в основе распадного взаимодействия волн и был описан в гл. 1. Кроме того, по аналогии с линейной теорией в резонанс с биением могут попасть частицы с такой скоростью \mathbf{v} , что

$$(\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v} = \omega_1 \pm \omega_2. \quad (3.1)$$

Такой процесс впервые был рассмотрен Драммондом и Пайнсом [57] для случая одномерного волнового пакета и Б. Б. Кадомцевым и В. И. Петвиашвили [34] в общем случае. На квантовом языке это процесс индуцированного рассеяния волн на частицах. Темп обмена энергией вследствие этого процесса поэтому оказывается пропорционален спектральной плотности энергии в падающей и рассеянной волнах. Следовательно, в рамках классической теории возмущений, использованной для описания процесса индуцированного рассеяния в работе [90], в разложении по амплитуде колебаний следует учесть члены вплоть до третьего порядка. Сам эффект при этом может быть существен, когда число частиц, резонирующих с одним колебанием, мало, а в резонанс с биением попадает много частиц.

В качестве первого примера рассмотрим волновой пакет ленгмюровских колебаний со случайными фазами. Частота ленгмюровских колебаний почти постоянна (т. е. $\omega^2 = \omega_p^2 (1 + 3k^2 \lambda_D^2 / 2)$, где $k \lambda_D \ll 1$). Следовательно, взаимодействие волн с волнами проявляется лишь в третьем порядке по энергии волн (только в этом порядке появляется взаимодействие с участием четырех волн, для которых можно выполнить условие резонанса $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$). Этим взаимодействием можно пренебречь по сравнению с процессом рассеяния плазмонов на частицах, который имеет место уже во втором порядке по энергии колебаний.

Рассмотрим процесс рассеяния на частицах со скоростями, удовлетворяющими условию резонанса: $\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}$. Для этого разложим сначала потенциал электрического поля колебаний в ряд Фурье как по времени, так и по пространству. Первое предполагает хорошее поведение потенциала при $t \rightarrow \infty$. Хотя это условие заведомо нарушается в линейном приближении, когда имеется раскачка или затухание колебаний, нелинейные эффекты, ограничивающие рост возмущений, могут оправдать такое предположе-

ние. Как обычно, разлагаем функцию распределения по степеням амплитуд волн, используя итерационную формулу

$$\left. \begin{aligned} f_j(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_j^{(n)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}), \\ \tilde{f}_j^{(n)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) &= \frac{ie_j}{m_j} \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\Phi} \times \\ &\times (\mathbf{k}', \omega') \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \tilde{f}_j^{(n-1)}(\mathbf{k}'', \omega'', \mathbf{v}) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Здесь \tilde{f}_j , $\tilde{\Phi}$ — компоненты Фурье, домноженные на $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$. Подставляя это выражение в уравнение Пуассона, получим динамическое уравнение для волн

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \Phi(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') \Phi(\mathbf{k}', \omega') \Phi(\mathbf{k}'', \omega'') + \\ + \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' + \omega''' = \omega}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''}^{(3)}(\omega', \omega'', \omega''') \Phi(\mathbf{k}', \omega') \Phi \times \\ \times (\mathbf{k}'', \omega'') \Phi(\mathbf{k}''', \omega''') + \dots, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\Phi(\mathbf{k}, \omega)$ — фурье-образ потенциала, а

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) &= 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int d^3 \mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \cdot (\partial f_{0j} / \partial \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \mp i0}; \\ \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'') &= - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{2(\mathbf{k}' \mp \mathbf{k}'')^2} \times \\ &\times \frac{e_j}{m_j} \int d^3 \mathbf{v} \frac{1}{\omega' \mp \omega'' - (\mathbf{k}' \mp \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{v} \mp i0} \left(\mathbf{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega'' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v} \mp i0} \mathbf{k}'' \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{k}'' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} \mp i0} \cdot \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_{0j}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Бесконечно малая положительная величина «+0» дает правило обхода полюсов при интегрировании по скоростям. Она не возникает естественным образом, как это было в линейной теории при использовании преобразования Лапласа для решения начальной задачи, а просто введена, чтобы соблюсти принцип причинности (обеспечивает медленное включение взаимодействия при $t = -\infty$). Решим динамическое уравнение, считая величины $|\Phi_{\mathbf{k}}|^2 \sim \gamma_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}}$ малым параметром. Очевидно, что $\Phi(\omega, \mathbf{k})$ имеет узкий пик вблизи собственных частот $\omega = \omega(\mathbf{k})$ с шириной порядка $\gamma_{\mathbf{k}}$, так что

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) \approx \Phi_{\mathbf{k}}^{(1)} \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})), \quad (3.5)$$

где $\omega(\mathbf{k})$ — решение уравнения $\text{Re}\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) = 0$. В следующем приближении уравнение (3.3) дает

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = - \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'')}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)} \Phi_{\mathbf{k}'}^{(1)} \Phi_{\mathbf{k}''}^{(1)} \delta(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega). \quad (3.6)$$

Чтобы вывести кинетическое уравнение для волн, домножим уравнение (3.3) на $\Phi^*(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \exp[i(\tilde{\omega} - \omega)t]$ и проинтегрируем по $d\omega d\tilde{\omega}$. Первый член в получающемся таким образом уравнении есть

$$\int d\omega \int d\tilde{\omega} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \Phi(\mathbf{k}, \omega) \Phi^*(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \exp[i(\tilde{\omega} - \omega)t]. \quad (3.7)$$

Поскольку $\Phi(\mathbf{k}, \omega)$ имеет пик вблизи $\omega_{\mathbf{k}}$, то можно переписать мнимую часть этого выражения в виде

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[\int d\omega \int d\tilde{\omega} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \Phi(\mathbf{k}, \omega) \Phi^*(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \exp[i(\tilde{\omega} - \omega)t] \right] \approx \\ \approx \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} \cdot \frac{d|\Phi_{\mathbf{k}}(t)|^2}{dt} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''}(\omega_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \equiv \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}(\omega) + i\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''}(\omega)$. Подставляя в оставшиеся члены выражения (3.5) и (3.6) и проводя усреднение по фазам (т. е. $\langle \Phi_{\mathbf{k}}^{(1)} \Phi_{\mathbf{k}'}^{(1)*} \rangle = |\Phi_{\mathbf{k}}^{(1)}|^2 \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$), получаем хорошо известное уравнение для волн [34, 57, 90, 91, V]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} \cdot \frac{\partial |\Phi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = -\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)''}(\omega_{\mathbf{k}}) |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 + \\ + \text{Im} \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \frac{2|\varepsilon_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})|^2 |\Phi_{\mathbf{k}'}|^2 |\Phi_{\mathbf{k}''}|^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}''}^{(1)*}(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}''})} + \\ + \text{Im} \sum_{\mathbf{k}'} \left[\frac{4\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \varepsilon_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}'})}{\varepsilon_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})} - \right. \\ \left. - 3\varepsilon_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}'}^{(3)} \right] |\Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}'}|^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где мы ограничились членами не старше второго порядка по энергии волн и опустили верхний индекс у амплитуд волн $\Phi_{\mathbf{k}}^{(1)}$. Первый член в правой части описывает линейное затухание (рост) колебаний. Во втором члене вклад дают полюса, возникающие при совпадении частот биений с какой-либо из собственных частот $\text{Im}[\varepsilon^{(1)}(\omega, \mathbf{k})]^{-1} \approx -\pi \delta(\varepsilon^{(1)}(\omega, \mathbf{k}))$. Очевидно, что этот член описывает слияние колебаний $\Phi_{\mathbf{k}'}, \Phi_{\mathbf{k}''}$ с образованием колебания $\Phi_{\mathbf{k}}$. Третий член дает вклад в процессы распада ($\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_{\mathbf{k}''}$) и в процесс индуцированного рассеяния ($\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$), который мы интерпретировали ранее как распад исходного колебания $\Phi_{\mathbf{k}}$ на колебание с близкой частотой $\Phi_{\mathbf{k}'}$ и на флуктуацию плотности, быстро затухающую из-за резонанса с ионами плазмы $(\omega - \omega')/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \approx v_{Ti}$ (§ 1.1 см. задачу 2). Четвертый член, очевидно, ответствен за комптоновское рассеяние лен-

гмюровских колебаний. (Подробнее о роли двух последних членов в индуцированном рассеянии на электронах см. § 3.3.)

Поскольку для трех ленгмюровских колебаний нельзя выполнить резонансное условие на частоты, то распадное взаимодействие здесь отсутствует. Кроме того, как было показано Драммондом и Пайнсом [57], вклад в индуцированное рассеяние колебаний электронами, описываемый двумя слагаемыми последнего члена в уравнении (3.9), мал из-за взаимной компенсации слагаемых. Физический механизм ослабления рассеяния заключается в экранировке заряда электрона ионной шубой. В случае узких волновых пакетов биения могут попасть в резонанс с тепловыми ионами и тогда основной вклад в правую часть уравнения (3.9) дает третий член, причем нелинейность диэлектрической проницаемости $\epsilon^{(2)}$ по-прежнему обусловлена нелинейностью уравнений движения электронов, а вклад в мнимую часть $\epsilon^{(1)}$ дают ионы. Чтобы оценить $\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(2)} \times \times (\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}'})$, разложим интеграл в уравнении (3.4) в ряд по малому параметру $(\omega - \omega')/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{Te}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}'}) &= \frac{\omega_p^2}{2(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2} \cdot \frac{e}{m} \int d^3\mathbf{v} [\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \\ &- (\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} + i0]^{-1} \left[\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{(\omega_{\mathbf{k}'} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})^2} \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}}{(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(\omega_{\mathbf{k}'} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \left(\mathbf{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_e \right] \approx \\ &\approx \frac{e}{2m} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} \cdot \frac{\omega_p^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2} \int d^3\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \partial f_e / \partial \mathbf{v}}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} + i0} = \\ &= \frac{e}{2m} \cdot \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(1)e*}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогичным образом находим

$$k^2 \epsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(2)} = \frac{e}{2m} \cdot \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} (\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(1)e*}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \quad (3.11)$$

и

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) &\approx 1 + \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 \lambda_{De}^2} - \frac{i\sqrt{\pi}}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 \lambda_{Di}^2} \times \\ &\times \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|v_{Ti}} W\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|v_{Ti}}\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $W(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{z-t+i0}$. В результате уравнение (3.9) принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^{(1)*}}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} k^2 |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 \right) = \sum_{\mathbf{k}'} \frac{e^2 |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 \cdot |\Phi_{\mathbf{k}'}|^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{m^2 \omega_{\mathbf{k}}^2 \omega_{\mathbf{k}'}^2} \times$$

$$\times (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \left| \frac{\varepsilon_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{(1) e}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})}{\varepsilon_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{(1) i}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})} \right|^2 \text{Im} \varepsilon_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{(1) i}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}). \quad (3.13)$$

Используя это уравнение, нетрудно убедиться в том, что число волн сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \equiv (\partial/\partial t) \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\omega_{\mathbf{k}} \partial \omega_{\mathbf{k}}} [\omega_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)'}(\omega_{\mathbf{k}})] \mathbf{k}^2 |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 / 8\pi = 0.$$

Последнее нетрудно понять, если заметить, что в случае колебаний, имеющих фазовую скорость, большую тепловой скорости частиц, условие резонанса $\omega_1 + \omega_2 = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}$ невозможно выполнить. Процесс, имеющий место при выполнении второго условия резонанса $\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}$, представляет собой рассеяние волн, причем условие резонанса обеспечивает сохранение энергии в этом процессе $\Delta \mathcal{E} = d\mathcal{E} \Delta \mathbf{p} / d\mathbf{p} \equiv h(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v} = h(\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2})$. Естественно, что число волн в процессе сохраняется, и это можно доказать в общем случае без привлечения квантовомеханических аргументов на основе свойств симметрии коэффициентов $\varepsilon^{(n)}$.

Уравнение (3.13) допускает аналитическое решение в случае, когда распределение волн в k -пространстве изотропно, а разброс фазовых скоростей волн много больше ионной тепловой скорости:

$$\Delta k/k \gg (m/M)^{1/2}. \quad (3.14)$$

В этом случае в спектре излучения интенсивно взаимодействуют лишь близкие друг к другу по частотам волны, так что подынтегральное выражение в (3.13) (мы переходим к непрерывному спектру) можно разложить по степеням разности частот взаимодействующих волн. Возникающие при этом интегралы по частотам представляют собой хорошо известные интегралы теории дисперсионных соотношений. Проводя интегрирование, сводим уравнение (3.13) к дифференциальному уравнению в \mathbf{k} -пространстве:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial \tau} + N_{\mathbf{k}} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial \chi} = 0, \quad (3.15)$$

$$\text{где } (2\pi)^3 N_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi k^2 k_0}{3} \cdot \frac{k^2 |\Phi_{\mathbf{k}}|^2}{4\pi N_{0e} T_e}; \quad \tau = \frac{4\pi m \omega_p}{9M k_0 \Delta k \lambda_{De}^2}; \quad \chi = \frac{k^2}{k_0^2 \Delta k}.$$

Индукцированное рассеяние волн в длинноволновую область спектра приводит к уменьшению энергии волн и укрупнению переднего фронта профиля линии излучения в \mathbf{k} -пространстве [90], причем уравнение (3.15) становится неприменимым, если в процессе укрупнения переднего фронта профиля линии образуется вертикальная стенка. Картину эволюции профиля линии проще всего проследить в случае, когда невысокая линия движется на фоне почти однородного спектрального распределения энергии волн. В этом случае уравнение (3.15) следует дополнить следующими членами разложения по параметру (3.14). Из соображений четности очевидно, что

в уравнении (3.15) появится член с третьей производной $N_k \partial^3 N_k / \partial \chi^3$ и задача о профиле линии станет аналогичной задаче об эволюции профиля начального возмущения в нелинейной среде с дисперсией. Как известно [11], «дисперсия» скорости движения линии в k -пространстве останавливает укрупнение фронта, но вместе с тем от переднего фронта отделяются солитоны и убегают вперед или назад, в зависимости от знака дисперсии.

Если нас интересует релаксация отдельной линии плазменных волн в k -пространстве, то образующиеся в k -пространстве градиенты не малы и малого параметра типа (3.14) уже нет. В том случае следует решать точное интегральное уравнение. Качественная картина релаксации при этом остается прежней: передний фронт линии становится круче и от него отщепляются солитоны [92].

ЗАДАЧИ

1. Вычислить интенсивность рассеяния плазменных волн на флуктуациях плотности электронов [VII—VIII].

Вычисления полностью аналогичны решениям, проделанным в задачах 1—3 в § 1.1, когда мы рассматривали рассеяние на звуковых колебаниях плотности электронов. Ток, возбуждающий рассеянную волну

$$j_{k, \omega} = \frac{ie^2}{m\omega_0} n_{\Delta\omega, \Delta k} E_{k_0}. \quad (1)$$

В случае, когда рассеянные волны продольные, их амплитуду находим из уравнения

$$-i\omega \epsilon(\omega, k) E_k = 4\pi k (k \cdot j_{k, \omega}) / k^2. \quad (2)$$

Вычисляя работу электронов в поле рассеянной волны, находим интенсивность излучения

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon] \frac{|E_k|^2}{8\pi} = \int \frac{d^3 k_0}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi e^4 (\delta n_e^2)_{\Delta\omega, \Delta k}}{m^2 \omega_0^2 \omega_k (\partial \epsilon / \partial \omega_k)} \cdot \frac{|(k \cdot E_{k_0})|^2}{k^2}. \quad (3)$$

В случае максвелловской плазмы с помощью уравнения (11) из приложения А переписываем уравнение (3) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{|E_k|^2}{4\pi} \approx \int \frac{d^3 k_0}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{m^2 \omega_0^2} \frac{|k \cdot E_{k_0}|^2}{k^2} \cdot \frac{(\Delta k)^2 \text{Im}}{\Delta\omega |\epsilon(\Delta\omega, \Delta k)|^2} \{ |1 + \epsilon_i|^2 T_e \epsilon_e + \epsilon_i |\epsilon_e|^2 T_i \epsilon_i \}. \quad (4)$$

2. Оценить уровень шумов и скорость нагрева плазмы с $T_i \approx T_e$ вследствие развития распадной неустойчивости сторонней волны [93].

Электрическое поле, вводимое в плазму извне, представим в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} E_0 \exp(-i\omega_0 t) + \text{c. c.} \quad (1)$$

Распад этой волны в почти изотермической плазме на ленгмюровскую волну и быстро затухающее звуковое возмущение является по существу процессом индуцированного рассеяния на ионах и описывается уравнением (3.13). Однако вместо этого точного выражения мы используем для простоты приближенное выражение для инкремента неустойчивости, полученное в рамках гидродинамического описания в задаче 3 к § 1.1.

В качестве механизма насыщения неустойчивости рассмотрим индуцированное рассеяние ленгмюровских колебаний на ионах. Как и в работе [93], будем считать, что возникающие ленгмюровские колебания имеют небольшой угловой разброс ($2 \sin \Theta/2 < 1$), так что доплеровское уширение частоты биений много меньше ширины спектра по частоте, и, следовательно, рассеяние можно описывать дифференциальным уравнением типа уравнения (3.15). Учитывая кроме этих двух процессов также и процесс рассеяния волны (1) на флуктуациях плотности электронов (см. задачу 1), получаем следующее приближенное уравнение для спектральной плотности ленгмюровских колебаний:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W(\Omega, \xi) = W(\Omega, \xi) \left\{ \frac{E^2 \xi^2}{1 + \Omega^2} - 1 - \frac{\partial}{\partial \Omega} \alpha \int_{-1}^{+1} d\xi' (1 - \xi\xi') \times \right. \\ \left. \times \left[\xi^2 \xi'^2 + \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \xi'^2) \right] W(\Omega, \xi') \right\} + \delta \xi^2, \quad (2)$$

где

$$W(\Omega, \xi) = |E_{\mathbf{k}}|^2 / 4\pi; \quad \Omega = (\omega_{\mathbf{k}} \mp \omega_s - \omega_0) / \nu_s; \quad \xi = \cos \Theta;$$

$$E^2 = (\omega_{\mathbf{k}} / 16\nu_e) (\omega_s / \nu_s) (E_0^2 / 4\pi N_0 T_e); \quad \alpha = \frac{m}{12\pi M} \cdot \frac{\omega_{\mathbf{k}}^e}{\nu_e \nu_s} \cdot \frac{k^3}{N_0 T_e};$$

$$\delta = \frac{\omega_p^4}{\omega_0^2 \nu_s \nu_e} \cdot \frac{E_0^2}{4\pi N_0}; \quad \tau = \nu_e t.$$

Здесь мы ввели поляриую систему координат с осью вдоль E_0 и воспользовались азимутальной симметрией задачи. Уравнение (2) имеет следующее формальное решение, четное по переменной ξ :

$$W = \delta \xi^2 / [a^2(\Omega) - b^2(\Omega) \xi^2]. \quad (3)$$

Интеграл этого решения по ξ сразу же берется

$$\bar{W} = \int_{-1}^{+1} W(\Omega, \xi) d\xi = \frac{\delta}{2ab} \ln \frac{a/b + 1}{a/b - 1}. \quad (4)$$

Так как спонтанное излучение электронов, движущихся в поле волны, мало ($E^2 - 1 \gg \alpha\delta$), то в уравнении (4) мы, очевидно, должны положить $a/b - 1 \approx \exp(-\bar{W}/\delta)$ и переписать уравнение (3) в виде

$$W(\Omega, \xi) = \delta \xi^2 / [1 - \xi^2 + 2 \exp(-\bar{W}/\delta)], \quad (5)$$

где

$$\bar{W} = (1/\alpha) \{ E^2 [\arctg \Omega + \arctg \sqrt{E^2 - 1}] - \Omega - \sqrt{E^2 - 1} \}.$$

С помощью полученных соотношений нетрудно оценить высокочастотную проводимость плазмы. Для эффективной частоты соударений имеем соотношение

$$\nu_{\text{эфф}} \frac{E_0^2}{4\pi} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \nu_e W(\Omega, \xi) \approx \frac{\pi \nu_e^2 N_0 T_e}{\omega_{\mathbf{k}}} E^4, \quad (6)$$

т. е. частота кулоновских соударений выпадает из ответа.

§ 3.2. Ионно-звуковая турбулентность

Одним из признанных механизмов возникновения аномального сопротивления плазмы (эту проблему мы подробно обсудим в следующей главе) является возбуждение током ионно-звуковой турбулентности.

Для ионно-звуковых волн с фазовыми скоростями между ионной и электронной тепловыми скоростями линейное дисперсионное соотношение имеет вид

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \equiv 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{k^2 c_s^2} \left[1 + i \sqrt{\frac{\pi m}{2M}} \left(\frac{\omega}{|k| c_s} - \frac{V_d}{c_s} \cos \Theta \right) \right], \quad (3.16)$$

где $c_s = \sqrt{T_e/M}$ — скорость звука; V_d — токовая скорость электронов и Θ — угол между направлением волнового вектора \mathbf{k} и направлением тока V_d . В длинноволновом пределе фазовая скорость колебаний совпадает со скоростью звука $\omega/k = c_s$, а в коротковолновом пределе падает с уменьшением длины волны, так как частота остается постоянной ($\omega = \Omega_p$, см. рис. 7, кривая 3). Для возбуждения длинноволновых колебаний токовая скорость должна превышать звуковую. Возбуждение коротковолновых возмущений в сильно неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) может происходить при меньших скоростях. Поскольку ионно-звуковая неустойчивость принадлежит к типу резонансных неустойчивостей с малым инкрементом, то возникающее в результате ее развития турбулентное состояние можно представить в виде газа взаимодействующих волн и описывать его с помощью кинетического уравнения для волн. В гл. 1 показано, что для волн с дисперсией аналогичной кривой 3 на рис. 7 невозможно резонансное взаимодействие трех волн. Следовательно, основной вклад в нелинейную релаксацию спектра турбулентности дает процесс рассеяния на частицах, описываемый последними двумя членами уравнения (3.9). Взаимодействием с электронами можно пренебречь, так как число частиц, попадающих в резонанс с биениями, мало ($\delta n \approx N_0(\omega \pm \omega')/|k + k'| v_{Te} \ll N_0$). Кроме того, поскольку фазовая скорость волн много больше ионной тепловой, ионы могут только рассеивать (но не поглощать) волны, так что число волн сохраняется. Считая $\omega'' = \omega_k - \omega_{k'} \sim kv_{Ti}$, $k'' \sim k$, в низшем порядке разложения по ω''/ω получаем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^{(1)}(\mathbf{k}'', \omega'') &= \frac{\Omega_p^2}{k''^2} \int \frac{\mathbf{k}'' (\partial f_i / \partial \mathbf{v})}{\omega'' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v} + i0} d^3 \mathbf{v}, \\ k^2 \epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(2)} &= k''^2 \epsilon_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}'}^{(2)} = \frac{M \omega_k \omega_{k'}}{e (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')} k^2 \epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(3)} = \\ &= \frac{e}{M} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')}{\omega_k \omega_{k'}} k''^2 \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(1)}(\omega''). \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Однако если подставить эти выражения в кинетическое уравнение для волн, то нелинейные члены сократятся. Следовательно, нужно

учесть члены более высокого порядка. Для $\varepsilon^{(3)}$ находим

$$\begin{aligned} \text{Im } \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{(3)} = & \frac{\pi \Omega_p^2}{k^2} \cdot \frac{e^2}{M^2} \cdot \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{\omega^2} \int d^3 \mathbf{v} \left[1 + \frac{4\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} + 10 \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}{\omega^2} \right] \times \\ & \times \mathbf{k}'' \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega'' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Чтобы выполнить интегрирование по скоростям, разделим $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ на две части:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'')/k''^2 + [\mathbf{k}'' \times \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{k}'' \times \mathbf{k}]/k''^2. \quad (3.19)$$

Первый член просто выражается через аргумент δ -функции, а второй не зависит от нее. Следовательно, интегрирование по скоростям в уравнении (3.18) не представляет труда; перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \text{Im } \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{(3)} \approx & -\frac{e^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{M^2 \omega^4} \left[1 + \frac{4(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'') \omega''}{k''^2 \omega} + \frac{10(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'')^2 \omega''^2}{k''^2 \omega^2} + \right. \\ & \left. + \frac{10[\mathbf{k} \times \mathbf{k}'']^2 v_{Ti}^2}{\omega^2 k''^2} \right] \text{Im } \varepsilon^{(1)}(\omega'', \mathbf{k}''). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Аналогичным образом вычислим

$$\begin{aligned} k^2 \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)} = & k''^2 \varepsilon_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{(2)} = \frac{e}{M} \cdot \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{k}')}{\omega^2} \times \\ \times & \left[1 + \frac{2(\mathbf{k} \times \mathbf{k}'') \omega''}{k''^2 \omega_k} + \frac{3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}'')^2 \omega''^2}{k''^4 \omega^2} + \frac{3[\mathbf{k} \times \mathbf{k}'']^2 v_{Ti}^2}{k''^2 \omega^2} \right] \varepsilon^{(1)}(\omega'', \mathbf{k}''). \end{aligned} \quad (3.21)$$

С помощью уравнений (3.20) и (3.21) кинетическое уравнение (3.8) перепишем в виде [94, III].

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega_p^2}{\omega_k^2} \cdot \frac{\partial |\Phi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial (\omega_{\mathbf{k}} t)} = & \frac{\Omega_p^2}{k^2 c_s^2} \sqrt{\frac{\pi m}{2M}} \left(\frac{V_d}{c_s} \cos \Theta - \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{k c_s} \right) |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 + \\ + & \frac{16\pi^2 e^4 n}{M^3 k^2} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2 [\mathbf{k} \times \mathbf{k}']^2 v_{Ti}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^3 \omega_{\mathbf{k}'}^3 k''^2} \int d^3 \mathbf{v} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k}'' \times \\ & \times \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 |\Phi_{\mathbf{k}'}|^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Как и предполагали, число волн сохраняется в учетных здесь нелинейных процессах:

$$\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \equiv \sum_{\mathbf{k}} (\Omega_p^2 / \omega_{\mathbf{k}}^3) (k^2 |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 / 4\pi) = \text{const.}$$

Следовательно, взаимодействие мод (рассеяние) не может остановить роста числа волн вследствие линейной неустойчивости, и поэтому необходимо учесть какой-либо дополнительный процесс, чтобы спектр турбулентности мог быть стационарным. В результате рассеяния на максвелловских ионах энергия перетекает по спектру от ее коротковолновой области к длинноволновой.

Предположим, что затухание длинноволновых колебаний вследствие ион-ионных соударений играет роль стока энергии и числа волн [III]. Такое предположение позволяет обрезать спектр в области длинных волн, а в остальном пространстве волновых векторов построить стационарное решение, в котором линейный рост неустойчивости сбалансирован оттоком энергии в длинноволновую часть спектра.

В качестве примера такого рода турбулентности рассмотрим случай, когда волновые векторы колебаний могут иметь только два выделенных направления. Тогда, переходя от дискретного набора волновых векторов к непрерывному, можно представить $|\Phi_{\mathbf{k}}|^2$ в виде

$$|\Phi_{\mathbf{k}}|^2 = I(k) \delta(\Phi) \delta(\cos \Theta - \cos \Theta_0), \quad k\lambda_D \ll 1, \quad (3.23)$$

где (k, Θ, Φ) — сферические координаты в \mathbf{k} -пространстве с полярной осью вдоль направления распространения тока.

Рассмотрим спектр турбулентности в длинноволновой области и будем считать, что токовая скорость незначительно превышает звуковую. Тогда в результате неустойчивости возбуждаются лишь волны, бегущие под небольшим углом к направлению тока (т. е. $\Theta_0 \ll 1$) и уравнение (3.22) значительно упрощается:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi m}{2M}\right)^{1/2} \left(\frac{V_d}{c_s} \cos \Theta_0 - 1\right) I(k) \approx -\frac{e^2}{T_e^2} \cdot \frac{T_i}{\pi^2} I(k) k \times \\ \times \frac{\partial}{\partial k} [k^3 I(k)] \cos^2(2\Theta_0) \sin^2(2\Theta_0), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где мы воспользовались соотношением

$$\int d^3 \mathbf{v} \mathbf{k}'' \cdot \frac{\partial f_{0j}}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v}) = -k'' \frac{\partial}{\partial \omega_{\mathbf{k}'}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})$$

и перешли от суммирования к интегрированию по k с помощью следующего правила:

$$\sum_{\mathbf{k}} = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} \sin \Theta d\Theta \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3}.$$

Общее решение уравнения (3.24) есть

$$\frac{e^2}{\pi^2 T_e^2} I(k) \approx -\sqrt{\frac{\pi m}{2M}} \left(\frac{V_d}{c_s} \cos \Theta - 1\right) \frac{T_e}{T_i \Theta_0^2 k^3} \ln kD. \quad (3.25)$$

В этом уравнении мы обрезаем спектр на некоторой длине волны D , т. е. $I(D) = 0$.

Полученное решение, конечно, не единственное. Более того, оно неустойчиво, так как любое возмущение, распространяющееся вдоль направления тока, имеет больший инкремент нарастания и меньше ограничено присутствием колебаний, распространяющихся

ся под углом Θ_0 . Высказанные соображения наводят на мысль, что такой спектр имеет тенденцию к схлопыванию.

Попытка построить более реальное решение уравнения (3.22) была предпринята И. А. Ахиезером [95], который нашел его автономное решение. Оказалось, что угловое распространение спектральной плотности энергии осциллирует между конусом Черенкова (т. е. $I(\Theta) \sim \delta(\cos \Theta - c_s/V_d)$) и линией тока, т. е. $I(\Theta) = \delta(1 - \cos \Theta)$ с периодом, пропорциональным энергии волн.

ЗАДАЧА

Найти спектр турбулентности в коротковолновой области [1].

В коротковолновой области уравнение (3.22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(k, \Theta, t)}{\partial (\Omega_p t)} &= \frac{\Omega_p^2}{k^2 c_s^2} \left(\frac{\pi m}{2M} \right)^{1/2} \left(\frac{V_d}{c_s} \cos \Theta - \frac{\Omega_p}{kc_s} \right) I(k, \Theta, t) \mp \\ &\mp \frac{e^2 I(k, \Theta, t)}{2\pi^2 T_e^2} \frac{T_i}{T_e} (k\lambda_D)^5 \frac{\partial}{\partial k} (k^7 \lambda_D^5) \int_0^{2\pi} d\Phi' \int_{-1}^+ d \cos \Theta I(k, \Theta', t) \times \\ &\times [I \times I']^2 (1 \cdot 1')^2, \quad 1 \equiv \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \end{aligned} \quad (1)$$

В стационарном случае это уравнение допускает степенное решение по k

$$e^2 k^3 I(k) / T_e^2 \approx \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{V_d}{v_{Te}} \right) (k\lambda_D)^{-10}. \quad (2)$$

§ 3.3. Индуцированное рассеяние света в плазме (основные уравнения)

Описание системы электромагнитное излучение + плазма дается совокупностью кинетических уравнений для функции распределения частиц и уравнений Максвелла для электрических и магнитных полей. В случае малых амплитуд колебаний электрических и магнитных полей, как и прежде, решение кинетического уравнения будем искать в виде разложения по амплитудам электрических полей [см. уравнение (3.1)]*:

$$f = f^{(0)}(v, t) + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_k^{(1)} + \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} f_{k, k'}^{(2)} + \dots \quad (3.26)$$

Функцию распределения в каждом следующем приближении по амплитуде волны можно найти из итерационной формулы

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f_{k, k', \dots, k}^{(n+1)} =$$

* Мы уже неоднократно отмечали, что нелинейное взаимодействие как ленгмюровских, так и электромагнитных волн описывается одним и тем же уравнением. Здесь приведен краткий вывод более полных уравнений, по сравнению с теми, которые были получены в § 3.1.

$$= -\frac{1}{(n+1)!} \sum \frac{e_j}{m_j} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(1)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{(1)}] \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_{\mathbf{k}', \dots, \mathbf{k}^{(n)}}^{i(n)}. \quad (3.27)$$

Здесь результат суммируется по всем возможным перестановкам индексов $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \dots, \mathbf{k}^{(n)}$. Индуцированное рассеяние световых волн со случайной фазой является эффектом второго порядка малости по энергии волн, поэтому для правильного описания его следует вычислить ток рассеяния с точностью до третьего порядка по амплитуде волны, что предполагает нахождение поправки к функции распределения $f^{(3)}$.

В линейном приближении задача о распространении электромагнитных волн в плазме сводится к определению диэлектрической проницаемости среды:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_j \varepsilon_j(\omega, \mathbf{k}); \quad \varepsilon_j = \frac{4\pi e_j^2}{m_j k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0}. \quad (3.28)$$

При вычислении $f^{i(2)}$ следует иметь в виду, что доплеровские поправки к частоте волны (но не биений!) в нерелятивистской плазме очень малы. Удерживая поправки не выше первого порядка по v/c , находим

$$f_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}'}^{j(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{ie_j}{m_j} \right)^2 \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} + i0} \cdot \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^*)}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}. \quad (3.29)$$

В выражении для $f^{(3)}$ выделен лишь член, дающий вклад в ток рассеяния волны с частотой $\omega_{\mathbf{k}}$:

$$f_{\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{j(3)} = -\frac{ie_j}{m_j} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}'}] \right\} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}'}^{j(2)}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.30)$$

Интенсивность излучения рассеянной волны равна работе частиц в поле рассеянной волны, взятой с обратным знаком. Однако вычисленный таким образом ток рассеяния определяет лишь часть полного эффекта рассеяния на свободных электронах. В плазме электроны окружены экранирующим облаком электронов и ионов. Очевидно, что колебания электрона и экранирующего его облака происходят в противофазе, и поэтому рассеяние на экранирующем облаке компенсирует рассеяние на рассматриваемом электроне.

Колебания экранирующего облака описываются с помощью электростатического потенциала $\Phi_{\Delta \mathbf{k}, \Delta \omega}^{(2)}$. Амплитуда колебаний находится из уравнения Пуассона для потенциала

$$\Delta k^2 \varepsilon(\Delta \omega, \Delta \mathbf{k}) \Phi_{\Delta \mathbf{k}, \Delta \omega}^{(2)} = -4\pi e \int f_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}'}^{e(2)} d^3 \mathbf{v}, \quad [(3.31)]$$

откуда с помощью уравнения (3.29) получаем

$$\Phi_{\Delta\mathbf{k}, \Delta\omega}^{(2)} = \frac{e}{2m_e} \cdot \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^*)}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} \cdot \frac{\varepsilon_e(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})}{\varepsilon(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})}, \quad (3.32)$$

$$\Delta\omega = \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}, \quad \Delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'.$$

Распределение электронов в поле виртуальной электростатической волны $\Phi^{(2)}$ есть

$$f_{\Delta\mathbf{k}}^{j(1)}(\Delta\omega) = \frac{e_j}{m_j} \Phi_{\Delta\mathbf{k}, \Delta\omega}^{(2)} \frac{\Delta\mathbf{k} \cdot (\partial f^{j(0)}/\partial\mathbf{v})}{\Delta\omega - \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \mp i0}. \quad (3.33)$$

Колебания электронов в поле падающей волны с плотностью, модулированной в поле виртуальной волны, дают вклад в ток рассеяния, сравнимый с ранее найденным. Этот эффект описывается поправкой второго порядка к функции распределения частиц, если в итерационное уравнение в качестве функции первого приближения подставить распределение (3.33):

$$f_{\mathbf{k}', \Delta\mathbf{k}}^{j(2)} = \frac{ie}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}'}] \right\} \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f_{\Delta\mathbf{k}}^{j(1)}. \quad (3.34)$$

Суммируя вклады в рассеивающий ток из-за колебаний электронов и экранирующей его шубы и вычисляя затем интенсивность излучения на частоте рассеянной волны, получаем уравнение для амплитуд колебаний [96, 97, V]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{4\pi} = \frac{e^2}{2m^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^*|^2}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} \times$$

$$\times \frac{\Delta\mathbf{k}^2}{4\pi |\varepsilon(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})|^2} \operatorname{Im} \{ |1 + \varepsilon_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})|^2 \varepsilon_e(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) +$$

$$+ |\varepsilon_e(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})|^2 \varepsilon_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) \}. \quad (3.35)$$

Уравнение для полей следует дополнить квазилинейным уравнением для усредненной функции распределения частиц. Последнее получается путем усреднения нелинейных членов в кинетическом уравнении по времени быстрых колебаний электрических и магнитных полей. Удерживая члены не старше второго порядка по энергии волны, получаем

$$\frac{\partial f^{j(0)}}{\partial t} = -\frac{e_j}{m_j} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^* + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}}^*] \right\} \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} (f_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{j(3)} + f_{\mathbf{k}', \Delta\mathbf{k}}^{j(2)}) -$$

$$- \frac{ie_j}{m_j} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Phi_{\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}}^{(2)*} \Delta\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} (f_{\Delta\mathbf{k}}^{j(1)} + f_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}^{j(2)}).$$

С помощью уравнений (3.29) — (3.34) находим

$$\partial f^{j(0)}/\partial t = (\partial/\partial v_{\alpha}) D_{\alpha\beta}^j (\partial f^{j(0)}/\partial v_{\beta}), \quad (3.36)$$

где

$$D_{\alpha\beta}^j = \frac{\pi e^4}{4m^2 m_j^2} \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{|\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'}^*|^2}{\omega_k^2 \omega_{k'}^2} \Delta k_\alpha \Delta k'_\beta \delta(\Delta\omega - \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \times \\ \times \{ \delta_{ji} |1 + \varepsilon_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})|^2 + \delta_{ji} | \varepsilon_e(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})|^2 \} / | \varepsilon(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})|^2.$$

Непосредственным вычислением с помощью уравнений (3.35), (3.36) нетрудно убедиться, что энергия и импульс в системе *частицы плазмы + излучение* сохраняются.

Приведенные выше уравнения получены интегрированием кинетических уравнений вдоль невозмущенных траекторий частиц. Поэтому они справедливы только при условии, что энергия частиц в высокочастотном поле значительно меньше, чем энергия теплового движения. Учитывая, что энергии ионов в высокочастотном поле равны потенциальной энергии ионов в электростатическом поле биений с потенциалом, определяемым уравнением (3.32), а к потенциальной энергии электронов в поле биений следует прибавить кинетическую энергию их колебаний в высокочастотном поле [97], записываем условие применимости уравнений (3.35) и (3.36) в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^6} \iint d^3 k d^3 k' \Phi_j(\mathbf{k}, \mathbf{k}') < T_j, \quad (3.37)$$

где

$$\Phi_i = \frac{e^2 (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'}^*)}{2m\omega_k \omega_{k'}} \cdot \frac{\varepsilon_e(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})}{\varepsilon(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})}, \quad \Phi_e = \frac{e^2 (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'}^*)}{2m\omega_k \omega_{k'}} \cdot \frac{1 + \varepsilon_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})}{\varepsilon(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k})}.$$

Со стороны малых интенсивностей область применения уравнения (3.35) ограничена из-за спонтанного рассеяния света на неоднородностях электронной плотности (см. задачу).

ЗАДАЧА

Вычислить интенсивность рассеяния света на флуктуациях плотности электронов [VII—VIII].

В отличие от спонтанного излучения продольных колебаний в излучение света дает вклад компонента тока рассеяния, перпендикулярная волновому вектору. Учитывая, кроме того, наряду с процессом прихода колебаний в данную моду из всех других мод также и обратный процесс вместо уравнения (3) (см. задачу 1 § 3.1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\omega_k \partial \omega_k} \cdot \omega_k^2 \varepsilon(\omega_k) \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{8\pi} \right) = \frac{4\pi e^4}{m^2} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} (\delta n_e^2)_{\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'} \times \\ \times \left\{ \frac{||[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{k'}]|^2 / k^2 \omega^2}{\frac{\partial}{\omega \partial \omega} \omega^2 \varepsilon(\omega)} - \frac{||[\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_k]|^2 / k'^2 \omega'^2}{\frac{\partial}{\omega' \partial \omega'} \omega'^2 \varepsilon(\omega')} \right\}. \quad (1)$$

Последний член здесь описывает хорошо известное томпсоновское рассеяние света с полным сечением $\sigma_T = (8\pi/3)(e^2/mc^2)^2$.

§ 3.4. Релаксация линии излучения в плазме

Полученные выше уравнения применим к задаче о релаксации линии излучения в плазме. Для упрощения будем считать излучение неполяризованным и проведем усреднение по поляризации, пользуясь соотношениями $\langle e_{\parallel} e_{\perp} \rangle = 0$, $\langle e_{\parallel} e_{\parallel} \rangle = \langle e_{\perp} e_{\perp} \rangle = 1/2$, где e_{\parallel} , e_{\perp} — проекции вектора поляризации на плотность рассеяния и нормаль к ней. Для величины $|\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^*|^2$ отсюда получаем

$$\langle |\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^*|^2 \rangle = (1/4) [1 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}')^2], \quad \mathbf{l} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|,$$

где \mathbf{l} — единичный вектор в направлении распространения волны. Кроме того, при рассмотрении неполяризованного излучения удобно ввести вместо амплитуд колебаний числа заполнения

$$n(\nu, \mathbf{l}) = |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 / 4\pi h\nu, \quad (3.38)$$

где $\nu = \omega/2\pi$ — частота световых колебаний; h — постоянная Планка. Определенные, таким образом, числа заполнения очень просто связаны со спектральной плотностью излучения

$$W_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^3} \int n(\nu, \mathbf{l}) d^2\mathbf{l}. \quad (3.39)$$

Наконец, будем считать, что частота излучения много больше плазменной $\nu \gg \nu_{pe} = \sqrt{N_0 e^2 / \pi m}$. В результате уравнение (2.35) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dn(\nu, \mathbf{l}, t)}{dt} = & \frac{3hN_0 \sigma_T}{16\pi^2 m c \nu_{pe}^2} n(\nu, \mathbf{l}, t) \int \nu'^2 d\nu' d^2\mathbf{l}' [1 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}')^2] (1 - \mathbf{l} \cdot \mathbf{l}') \times \\ & \times n(\nu', \mathbf{l}', t) \operatorname{Im} \{ |1 + \epsilon_i|^2 \epsilon_e(\Delta\nu, \Delta\kappa) + |\epsilon_e|^2 \epsilon_i(\Delta\nu, \Delta\kappa) \} / |\epsilon(\Delta\nu, \Delta\kappa)|^2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $\sigma_T = (8\pi/3)(e^2/mc^2)^2$ — томсоновское сечение рассеяния света, $\Delta\nu = \nu - \nu'$, $e\Delta\kappa = \nu\mathbf{l} - \nu'\mathbf{l}'$. Для коэффициента диффузии частиц соответственно получаем

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} = & \frac{3h^2 \sigma_T}{32\pi m_j^2 c^2} \int d^2\mathbf{l} d^2\mathbf{l}' \int \nu d\nu \nu' d\nu' [1 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}')^2] n(\nu, \mathbf{l}, t) \times \\ & \times n(\nu', \mathbf{l}', t) \Delta\kappa_{\alpha} \Delta\kappa_{\beta} \delta(\nu - \nu' - \Delta\kappa \cdot \mathbf{v}) \{ \delta_{je} |1 + \epsilon_i|^2 + \delta_{ji} |\epsilon_e|^2 \} / |\epsilon|^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Эти уравнения сильно упрощаются в двух предельных случаях, когда ширина линии излучения больше или меньше доплеровского уширения частоты биений:

$$\nu_{Dj} = 2\nu\nu' v_T^2 / c^2. \quad (3.42)$$

В случае наличия анизотропии излучения спектральную ширину следует сравнивать с эффективным доплеровским изменением частоты квантов при рассеянии $\Delta\nu_j = \nu_{Dj} \sqrt{1 - \cos\Theta}$ (Θ — угловая апертура пучка излучения).

Широкий спектр излучения. Поскольку в спектре излучения интенсивно взаимодействуют лишь близкие друг к другу компоненты излучения, то подынтегральное выражение в уравнении (3.40) можно разложить по степеням разности частот взаимодействующих компонент и свести его к дифференциальному уравнению подобно тому, как это сделано для плазмонов. В результате получаем [98]

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\nu, 1, t) = \frac{3hN_0 \sigma_T}{16\pi mc} h(\nu, 1, t) \sum_i \int d^2l' [1 + (1 \cdot l')^2] (1 - 1 \cdot l') \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial \nu'} \nu'^2 \omega_j n(\nu', 1', t) \right]_{\nu' = \nu}, \quad (3.43)$$

где

$$\omega_e = \frac{1}{\pi \nu_{pe}^2} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu d\nu}{1 + \varepsilon_e(\nu, \Delta\kappa)}, \\ \omega_i = \frac{|\varepsilon_e(0, \Delta\kappa)|^2}{\pi \nu_{pe}^2} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu d\nu}{1 + \varepsilon_e(0, \Delta\kappa) + \varepsilon_i(\nu, \Delta\kappa)}$$

интегралы берутся с помощью дисперсионных соотношений [14]

$$\left. \begin{aligned} \omega_e^{\text{tot}} &= 1; \\ \omega_i^{\text{tot}} &= (m/M) \nu_{pe}^4 / [\nu_{pe}^2 + \nu_{De}^2 (1 - \cos\Theta)]^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Величины ω_j характеризуют не само рассеяние, а эффективность передачи энергии при рассеянии. Именно поэтому эффективные сечения рассеяния на электронах и ионах не равны, а отличаются в m/M раз. Из соотношений (3.44) следует, что в случае широкого спектра эффектами экранировки можно пренебречь. Если, кроме того, $\nu_{pe} \ll \nu_{De}$, то эффекты экранировки отсутствуют и в рассеянии света на флуктуациях плотности заряда электронов. В этом случае в уравнении (3.43) можно проинтегрировать по углам и получить хорошо известное уравнение А. С. Компанеца [99]:

$$\frac{\partial n(\nu, t)}{\partial t} = \frac{\sigma_T N_{oe} h}{mc} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \nu^4 \left[n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial \nu} \cdot \frac{T_e}{h} \right], \quad (3.45)$$

где первый и последний члены обязаны рассеянию света на флуктуациях плотности электронов (см. § 3.3, задача 1). В данном случае равновесное распределение излучения, обращающее в нуль правую часть этого уравнения, подчиняется распределению Планка.

Широкая линия излучения ($\nu_{pe} > \delta > \nu_{De} \sqrt{1 - \cos\Theta}$). В этом случае из уравнения (3.43) следует исключить вклад процессов распада кванта падающего электромагнитного излучения на квант

плазменной волны и квант рассеянной. Как мы уже отмечали в § 3.1, последний определяется вкладом в интеграл (3.43) от полюсов в точках, где диэлектрическая проницаемость обращается в нуль,

$$\omega^{\text{col}} = (1/v_{pe}^2) \int v dv \delta [\varepsilon(v, \Delta\kappa)]. \quad (3.46)$$

Вычитая соотношение (3.46) из (3.44), находим эффективность передачи энергии при рассеянии на одних электронах (но не на коллективных колебаниях):

$$\omega_e^{\text{part}} = 6 (v_{De}/v_{pe})^4 (1 - \cos \Theta)^2, \quad v_{pe} > \delta > v_{De} \sqrt{1 - \cos \Theta}. \quad (3.47)$$

Аналогичным образом в неизотермической плазме с горячими электронами рассеяние линии излучения с шириной меньше ионно-звуковой частоты происходит только на ионах

$$\omega_i^{\text{part}} = 6 \frac{v_{pe}^4 T_i^2}{T_e^2} / [v_{pe}^2 + v_{De}^2 (1 - \cos \Theta)]^2, \quad 1 < \frac{\delta}{v_{Di}} < \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}. \quad (3.48)$$

Поскольку полученные уравнения совпадают по структуре с уравнениями, описывающими релаксацию пакета ленгмюровских колебаний в плазме, то качественная картина релаксации остается прежней: линия сдвигается в сторону низких частот, передний фронт ее профиля становится круче и от него отщепляются солитоны [92]. Характерное время релаксации профиля линии можно оценить из уравнения (3.46).

Релаксация спектрально узкой линии. Задачу о релаксации спектрально узкой линии рассмотрим в предположении об изотропности распределения частиц. Такое распределение часто реализуется по целому ряду причин. Так, в случае, когда время парных соударений много меньше времени квазилинейного искажения функции распределения, соударения успевают изотропизировать распределения. Мы уже показали ранее (см. § 2.3, задача 1), что квазилинейная диффузия в поле биений с малой фазовой скоростью, соответствующей случаю узкой линии, также приводит к изотропизации распределения даже при анизотропном спектре биений. Наконец, в поле узкого аксиально симметричного пучка излучения ($\Theta \ll 1$) распределение всегда изотропно в плоскости волновых векторов биений (именно такая симметрия обеспечивает справедливость полученных ниже формул). Наряду с изотропизацией распределения частиц по скоростям происходит нагрев плазмы (использование лазерного излучения для нагрева плазмы было предложено в работах [102, 103]). Причем в поле узкой спектральной линии фазовая скорость биений может стать порядка тепловой скорости ионов, так что появляется возможность нагрева ионов плазмы [104]. Распределение частиц, устанавливающееся в поле биений с малыми фазовыми скоростями, было найдено в § 2.3 и в пределе $t \rightarrow \infty$ не зависит от начального распределения. Средняя энергия частиц растет при этом

пропорционально энергии поля: $m \langle v^2 \rangle \sim [\sum_k E_k^2]^{4/5}$). Итак, в случаях, перечисленных выше (включая, очевидно, случай полностью изотропного излучения), в уравнении (3.36) можно провести усреднение по направлениям скоростей резонансных частиц (для узкого пучка излучения они лежат в плоскости, перпендикулярной пучку). Мнимые части диэлектрических проницаемостей, входящие в уравнение для волн, в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \text{Im } \epsilon_j &= \frac{v_{pi}^2}{\Delta v^2} \int d^3 v \pi \delta(\Delta v - \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \Delta \mathbf{k} \frac{\partial f_{oj}}{\partial v} \equiv \\ &\equiv - \frac{v_{pi}^2}{\Delta v^2} \cdot \frac{\Delta v \cdot (\partial f_{oj} / v_{\perp} \partial v_{\perp})}{\sqrt{(2v v' / c^2) v_{\perp}^2 (1 - \cos \Theta) - \Delta v^2}}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Запишем уравнение для чисел заполнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= - \frac{3h\sigma_T c}{32\pi^2 m v} \int d^2 l' \int v' dv' [1 + (l \cdot l')^2] n(v, l, t) n(v', l', t) \times \\ &\times \sum_j \omega_j \int \frac{\Delta v (\partial f_j / v_{\perp} \partial v_{\perp})}{\sqrt{v_{Dj}^2 v_{\perp}^2 |v_{Tj}^2 - \Delta v^2}} d^2 v, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где

$$w_e = \begin{cases} (1 - v_{pi}^2 / \Delta v^2)^2 / (1 + v_{pe}^2 / v_{De}^2 (1 - \cos \Theta) - v_{pi}^2 / \Delta v^2)^2, \\ \quad v_{De} > \frac{\Delta v}{\sqrt{1 - \cos \Theta}} > v_{Di}; \\ (1 - \cos \Theta + v_{pi}^2 / v_{Di}^2)^2 / (1 - \cos \Theta + v_{pi}^2 / v_{Di}^2 + v_{pe}^2 / v_{De}^2)^2, \\ \quad \Delta v < v_{Di} \sqrt{1 - \cos \Theta}; \end{cases}$$

$$w_i = \frac{m}{M} \left(\frac{v_{pe}}{v_{De}} \right)^4 / [1 - \cos \Theta + v_{pi}^2 / v_{Di}^2 + v_{pe}^2 / v_{De}^2]^2, \quad \Delta v < v_{Di} \sqrt{1 - \cos \Theta}.$$

Видим, что рассеяние волн в плазме, описываемое уравнениями (3.43) и (3.50), имеет весьма сложную зависимость от отношения спектральной ширины линии к доплеровскому уширению, а также от плотности плазмы. Качественный вид зависимости отношения интенсивности процесса рассеяния в плазме к интенсивности томсоновского сечения рассеяния незранированными электронами изображен на рис. 29. Для иллюстрации характера релаксации узкой линии в плазме ограничимся случаем достаточно плотной плазмы ($v_{pe} \gg v_{De}$), т. е. $N_e \gg m v^2 v_{Te}^2 / e^2 c^2$, и очень узкой линии изотропного излучения ($\delta \ll v_{Di}$), важным для приложений (см. задачу). Уравнение (3.50) в этом пределе принимает простой вид:

$$\partial n(v, t) / \partial t = -K'(0) n(v, t) \int v'^2 n(v', t) (v - v') dv',$$

где

$$K'(0) = 11 \sqrt{\pi} h N_{0i} \sigma_T / 5 M v_{Di}^3 c. \quad (3.51)$$

Следуя работе [100], запишем решение уравнения (3.51) через неизвестную энергию квантов $W(t)$, сохраняющееся полное число квантов N_ν и начальное распределение квантов $n(\nu, 0)$:

$$n(\nu, t) = n(\nu, 0) \exp \left\{ \frac{K'(0)}{h} \int_0^t [W(t') - h\nu N_\nu] dt' \right\}, \quad (3.52)$$

где

$$W(t) = (h/c^3) \int \nu^3 n(\nu, t) d\nu, \quad N_\nu = c^{-3} \int \nu^2 n(\nu, t) d\nu.$$

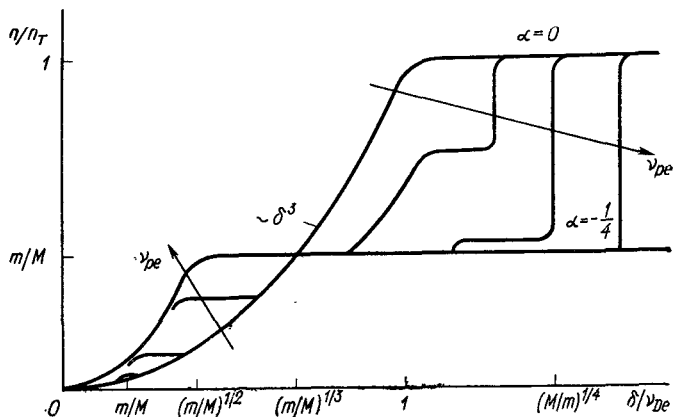


Рис. 29. Зависимость отношения интенсивности рассеяния света в плазме к интенсивности томпсоновского рассеяния от отношения спектральной ширины линии излучения и плазменной частоты к доплеровскому уширению частоты биений.

Пусть начальный профиль линии был гауссовым $n(\nu, 0) = (1/\sqrt{2\pi}\delta) \times \exp[-(\nu - \nu_0)^2/2\delta^2]$. В этом случае из уравнения (3.52) получаем

$$\left. \begin{aligned} n(\nu, t) &= (1/\sqrt{2\pi}\delta) \exp \left\{ -[\nu - \nu_0 + \delta^2 K' N_\nu t]^2 / 2\delta^2 + \varphi(t) \right\}, \\ \varphi(t)/K'(0) &= -\nu_0 N_\nu t + \delta^2 N_\nu^2 K' t^2 / 2 + \int_0^t W(t') dt' / h. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Видно, что гауссовый профиль линии не искажается в результате индуцированного рассеяния, а сдвигается как целое в сторону малых частот с постоянной скоростью. Оказывается, что гауссовый профиль — это выделенный частный случай вырожденного спектра, не искажающего формы со временем (все остальные профили претерпевают искажение). Если спад крыльев линии происходит медленнее, чем у гауссового профиля (примером может служить лоренцовский профиль), то линия расплывается из-за перевода квантов в низкочастотное крыло. Если же крылья сильно зарезаны (например, равны нулю для прямоугольного профиля), то низкочастот-

ный край линии останавливается, а сама линия сужается вследствие перевода квантов на край линии [100]*.

ЗАДАЧИ

1. Оценить предельную яркостную температуру насыщенного космического мазера [98].

Для простоты рассмотрим однородную изотропную среду, заполненную активными молекулами OH или H₂O, нейтральными атомами и молекулами, электронами и протонами. Предполагается существование механизмов накачки, обеспечивающих инверсную заселенность уровней молекул OH или H₂O. Учитывая, что доплеровское уширение линии излучения Δ_M из-за теплового движения тяжелых молекул меньше доплеровского уширения частоты биений на протонах плазмы, можно записать следующее уравнение для чисел заполнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\nu, t) = \frac{B\bar{n}_H}{\sqrt{2\pi}\Delta_M} \exp\left[-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\Delta_M^2}\right] - K'(0)n(\nu, t) \int (\nu-\nu')\nu'^2 n(\nu', t) d\nu', \quad (1)$$

где \bar{n}_H — число квантов, при котором мазер насыщается, а коэффициент B выражается с помощью вероятности спонтанного перехода A_{mn} заселенности уровней f_m с кратностью g_m , и плотности активных молекул N_M :

$$B_{mn} = (c^3/8\pi\nu^3) A_{mn} [f_m - (g_m/g_n) f_n] N_M. \quad (2)$$

Спонтанным излучением в уравнении (1) мы пренебрегли. Качественная картина релаксации линии излучения, описываемая уравнением (1), довольно проста. Интенсивность излучения растет линейно со временем до тех пор, пока в центре линии она не достигнет критического значения: $n \sim [B\bar{n}_H/\nu_0^2\Delta_M^2 K'(0)]^{1/2}$. При этом значении индуцированное комптоновское рассеяние на протонах плазмы приводит к дрейфу линии с доплеровским профилем в сторону меньших частот. Часть излучения по-прежнему присутствует на частоте ν_0 , оно связано с продолжающейся работой мазера. Интенсивность его падает, так как комптон-эффект быстро переводит рождающиеся кванты в дрейфующую линию. Когда линия сдвигается на расстояние порядка ν_{Di} , появляется возможность формирования новой линии вблизи частоты ν_0 , и весь процесс повторяется. Предположим, что мазер находится в сильно насыщенном режиме, так что излучение на частоте ν_0 даже уменьшаясь остается больше, чем пороговое: $n(\nu_0) \gg \bar{n}_H$ (общий случай рассмотрен в работе [98]). Число квантов в движущейся линии растет линейно со временем до тех пор, пока не уйдет на расстояние порядка ν_{Di}

$$\left. \begin{aligned} n(\nu, t) &\approx \frac{B\bar{n}_H t}{\sqrt{2\pi}\Delta_M} \exp\left[-\frac{(\nu-\nu_*)^2}{2\Delta_M^2}\right], \\ \nu_* &= \nu_0 - \Delta_M^2 \nu_0^2 K'(0) B\bar{n}_H t^2/2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

* Для очень узкой линии гораздо быстрее может произойти нарастание флуктуаций поля далеко от линии в области максимума-инкремента рассеяния волн. Такое скачкообразное смещение линии в низкочастотную сторону обсуждается в работе [101].

Введем специальное обозначение для плотности потока излучения на частоте ν_0 , при которой время индуцированного рассеяния на протонах плазмы $t_c^{-1} = \nu_0^2 \Delta_M^2 K'(0) n_*$ сравнивается с временем экспоненциального роста излучения t_M (конечно, для ненасыщенного мазера)

$$I_* \equiv 8\pi h \nu_0^3 n_* \Delta_M \approx \frac{T_{oi}}{t_M \sigma_T} \cdot \frac{\nu_{Di}/\Delta_M}{N_{oi} \lambda^3}; \quad t_M = \sqrt{2\pi} \Delta_M / B; \quad \lambda = c/\nu. \quad (4)$$

Тогда за время дрейфа линии

$$t_R = \left[\frac{2\nu_{Di}}{\nu_0^2 \Delta_M^2 K'(0) B \bar{n}_H} \right]^{1/2} \approx \left(\frac{\nu_{Di}}{\Delta_M} \right)^{1/2} \left(\frac{n_*}{\bar{n}_H} \right)^{1/2} t_M \quad (5)$$

дрейфующая линия нарастает до предельной величины

$$n = n_H t_R / t_M \approx (n_H n_*)^{1/2} (\nu_{Di} / \Delta_M)^{1/2}; \quad \bar{n}_H < n_* \left(\frac{\Delta_M}{\nu_{Di}} \right)^{3/2}. \quad (6)$$

Яркая температура связана с предельным числом заполнения соотношением $T_b \sim h\nu n$.

2. Вычислить силу индуцированного давления света в плазме в случае широкого спектра излучения [105], см. также работу [98].

Эту силу можно вычислить из квазилинейного уравнения (3.36) или по убыли импульса электромагнитных волн. В случае широкого спектра излучения, умножая уравнение (3.43) на ν/c и интегрируя по фазовому пространству, получаем

$$F_j = \frac{3h^2 N_{oe} \sigma_T}{32\pi mc^3} \int d^2 l d^2 l' \int \nu^2 d\nu \left\{ \nu^2 n(\nu, l, t) \omega_j(\nu, \nu; \Theta) \times \right. \\ \left. \times n(\nu, l', t) + n(\nu, l, t) \right\} \left[\frac{\partial}{\partial \nu'} \nu^2 \omega_j(\nu, \nu'; \Theta) n(\nu', l', t) \right]_{\nu' = \nu} \nu (l' - l).$$

ГЛАВА 4

АНОМАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В ПЛАЗМЕ

§ 4.1. Постановка задачи. Законы сохранения

Общая схема процессов, включающая все описанные выше нелинейные взаимодействия волн друг с другом и с частицами, реализуется в плазме, выведенной из ламинарного состояния вследствие неустойчивости и перешедшей в турбулентное состояние. Макроскопическим следствием подобного изменения состояния плазмы становится изменение ее транспортных свойств (коэффициентов переноса), таких как диффузия, теплопроводность, электрическое сопротивление и т. д. В этой связи говорят об аномальных коэффициентах переноса. Задача теории заключается в том, чтобы связать величину аномальных коэффициентов переноса с причиной, вызывающей исходную неустойчивость (иначе говоря, с источником «свободной энергии», питающим неустойчивость).

Аномальное электрическое сопротивление — наиболее важный пример задач такого типа. В настоящей главе мы покажем, как методы теории турбулентности плазмы, развитые в гл. 1—3, применяются к этой проблеме.

Аномальное сопротивление плазмы возникает тогда, когда величина электрического тока, протекающего по плазме, превышает некоторое критическое значение. Иногда это критическое значение, выше которого сопротивление плазмы резко возрастает, чрезвычайно мало. Плотность протекающего тока выразим с помощью так называемой дрейфовой скорости V_d . Если электронная функция рас-

Таблица неустойчивостей плазмы с электрическим током, относящихся к проблеме аномального сопротивления

Тип неустойчивости	Порог неустойчивости	Частота	Инкремент нарастания
Неустойчивость Бунемана Ионно-звуковая	$V_d \geq v_{Te}$ $V_d > c_s$	$\sim \Omega_p$ $\lesssim \Omega_p$	$\sim \Omega_p$ $\leq \Omega_p \frac{V_d}{v_{Te}}$
Неустойчивость Драммонда — Розенблюта	$V_d > c_s$	$\sim \Omega_H$	$\sim \Omega_H \frac{V_d}{v_{Te}}$
Электрические моды $k_{\perp}^2 \gg k_{\parallel}^2$	Очень низкий, иногда $< v_{Ti}$	$\ll \omega_H$	$\sqrt{\omega_H \Omega_H}$
Моды Бернштейна		$i\omega_H$	$\omega_H V_d / v_{Te}$

пределения имеет некоторую скорость V_d относительно ионной функции распределения, превышающую критическое значение, возникает неустойчивость. Вследствие такой неустойчивости электроны в дополнение к обычной потере импульса из-за парных столкновений теряют еще часть его с излучением колебаний и волн различного типа. Удобно начать с таблицы неустойчивостей такого типа, возникающих при превышении критического значения скорости (см. табл.). Здесь перечислены все основные неустойчивости, имеющие отношение к проблеме аномального сопротивления в плазме. Простейшая неустойчивость — это *неустойчивость Бунемана* [106, 107]. Исходные функции распределения электронов и ионов в этом случае имеют вид двух δ -функций, сдвинутых друг относительно друга на величину средней скорости V_d . Неустойчивость представляет собой раскачку продольных электростатических колебаний плазмы со скоростью нарастания порядка плазменной ионной частоты. Известное дисперсионное уравнение для бунемановской неустойчивости имеет вид

$$1 - (\Omega_p^2/\omega^2) - \omega_p^2/(\omega - \mathbf{kV}_d)^2 = 0. \quad (4.1)$$

Инкремент нарастания равен

$$\text{Im } \omega \approx \mathbf{kV}_d (m/M)^{1/2} \leq \Omega_p \quad (4.2)$$

при $\mathbf{kV}_d \ll \omega_p$ и достигает максимума

$$\text{Im } \omega = \left(\frac{M}{4m} \right)^{1/6} \Omega_p \quad (4.3)$$

при $\mathbf{kV}_d \approx \omega_p$.

Другой пример неустойчивости, которую практически можно считать модой того же типа, — это *неустойчивость ионно-звукового типа*. Эти колебания возникают при дрейфовых скоростях электронов, меньших тепловых скоростей. Дисперсионное уравнение для ионно-звуковой неустойчивости имеет вид

$$0 = 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{k^2 c_s^2} \left\{ 1 + i \left(\frac{\pi m}{2M} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{kc_s} - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d}{kc_s} \right) \right\}, \quad (4.4)$$

а инкремент

$$\gamma \approx \omega \sqrt{\frac{\pi m}{8M} \left(\frac{\omega}{kc_s} - \frac{\mathbf{kV}_d}{kc_s} \right) / \left(1 + \frac{k^2 c_s^2}{\Omega_p^2} \right)}. \quad (4.5)$$

Инкремент нарастания ионно-звуковых колебаний (мнимая часть частоты) — это плазменно-ионная частота, уменьшенная в отношении дрейфовой к тепловой скорости электронов. В предельном случае $V_d \rightarrow v_{Te}$ ионно-звуковая неустойчивость почти плавно переходит в бунемановскую неустойчивость.

При наличии магнитного поля появляются и другие типы неустойчивостей. Одна из неустойчивостей, которая возникает также вследствие электронной мнимой части (электронного полувычета) в ионно-циклотронных волнах, называется *неустойчивостью Драммонда—Розенблюта* [108]. Эта неустойчивость возникает тогда, когда ток протекает вдоль магнитного поля, в то время как первые две неустойчивости в известном смысле инвариантны по отношению к существованию магнитного поля, если магнитное поле является не очень большим ($\omega_H \ll \omega_p$). Неустойчивость Драммонда—Розенблюта значительно меньше обсуждается в связи с проблемой аномального сопротивления, потому что она приводит к небольшим скоростям нарастания флуктуаций и, по-видимому, легко подавляется простыми квазилинейными эффектами, типа эффекта образования плато.

Более важную роль играет класс неустойчивостей относительно электростатических возмущений с $k_{\perp}^2 \gg k_{\parallel}^2$. Иначе говоря, это волны, у которых волновой вектор вдоль магнитного поля значительно меньше поперечной составляющей волнового вектора, и частоты значительно меньше электронной ларморовской частоты, но больше

ионной. Эта мода напоминает известную моду Поста—Розенблюта, возникающую при наличии конуса потерь [109]

$$1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} + \frac{\Omega_p^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} d^3 \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0} + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \partial v_{\parallel}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d - k_{\parallel} v_{\parallel} + i0} = 0. \quad (4.6)$$

В приближении $\omega \gg kv_{Ti}$ и $\mathbf{kV}_d \gg k_{\parallel} v_{Te}$ уравнение (4.6) переходит в дисперсионное уравнение для так называемой *модифицированной неустойчивости* Бунемана [110]

$$1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2 k_{\parallel}^2 / k^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d)^2 - k_{\parallel}^2 v_{Te}^2} = 0. \quad (4.7)$$

Инкремент нарастания имеет вид

$$\gamma(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_H \Omega_H} \ll \Omega_p; \quad \bar{k}_{rH} \approx 1; \quad \bar{k}_{\parallel} = \bar{k}(V_d/v_{Te}). \quad (4.8)$$

Приближение (4.7) справедливо, если дрейфовая скорость заметно превышает v_{Ti} . Если это условие не выполнено, говорят о *неустойчивости типа «электронного звука»* ($\omega_p \gg \omega_H$):

$$\text{Re}(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d) \approx k_{\parallel} \left(\frac{T_i}{m} \right)^{1/2} / \left[1 + k^2 r_{H*}^2 \right], \quad \text{Im} \omega = \pi^{1/2} \frac{\omega}{2 |k| v_{Ti}} (\omega - \mathbf{kV}_d). \quad (4.9)$$

Неустойчивости такого типа имеют место, когда ток течет поперек магнитного поля. Неустойчивость (4.7) приводит к очень малым скоростям нарастания и проявляется существенно лишь при сравнительно небольших токах, когда более сильные неустойчивости, такие, например, как бунемановская или ионно-звуковая, не имеют значения.

И наконец, в последнее время обсуждается неустойчивость, возникающая на бернштейновских модах [111]. Эта неустойчивость имеет сравнительно большую скорость нарастания и возникает тогда, когда ток течет поперек магнитного поля. Дисперсионное уравнение для такой неустойчивости имеет довольно громоздкий вид.

Основное внимание до сих пор уделялось неустойчивостям первых двух типов: бунемановской и ионно-звуковой. Бунеман еще в своей первой работе предложил эвристическую формулу для нелинейной стадии неустойчивости. Он предположил, что эффективная частота соударений электронов должна быть порядка мнимой части частоты в линейной теории неустойчивости, т. е. порядка плазменной частоты ионов. Такая простая формула, в которой в закон Ома подставляется вместо v_{eff} плазменная частота ионов, называется формулой Бунемана для проводимости. Ясно, что эта формула не дает полного описания эксперимента; она дает только правильный порядок величины.

Строгая постановка задачи о проводимости σ должна проводиться с учетом обмена импульсом между электронами и колебаниями. Известная формула для проводимости плазмы

$$\sigma = Ne^2/mv \quad (4.10)$$

содержит частоту столкновений электронов v с рассеивающими центрами (ионами, нейтральными атомами) по отношению к потере импульса. Если электроны плазмы раскачивают некоторые типы колебаний или волн вследствие неустойчивости, то имеет место аномальная потеря импульса (передача колебаниям, т. е. коллективным движениям ионов). Для нахождения v_{eff} можно воспользоваться законом сохранения количества движения в системе *электроны + волны*. Средняя потеря импульса электронами за единицу времени равна

$$v_{\text{eff}} m N V_d \dot{\approx} -F. \quad (4.11)$$

Если этот импульс отдается волнам с плотностью энергии W , то изменение количества движения волн равно

$$\int \gamma_k^e W_k \frac{\mathbf{k}}{\omega_k} \cdot \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (4.12)$$

где γ_k^e — вклад электронов в мнимую часть частоты. Приравнивая (4.11) и (4.12), получаем

$$v_{\text{eff}} m N V_d \dot{\approx} \int \gamma_k^e W_k \frac{\mathbf{k}}{\omega_k} \cdot \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (4.13)$$

т. е.

$$v_{\text{eff}} = \frac{1}{m N V_d} \int \gamma_k^e W_k \frac{\mathbf{k}}{\omega_k} \cdot \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (4.14)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению W_k ; γ_k^e следует понимать в квазилинейном смысле.

В справедливости соотношения (4.13) можно убедиться с помощью квазилинейного уравнения диффузии для электронов. Например, для ионно-звуковых колебаний

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} |\Phi_k|^2 \pi \delta(\omega_k - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (4.15)$$

Умножая это уравнение на $m\mathbf{v}$ и интегрируя по скоростям, получаем

$$v_{\text{eff}} m N V_d = - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \gamma_k^e \frac{\partial \varepsilon(\omega)}{\partial \omega_k} \cdot \frac{\hbar^2 |\Phi_k|^2}{8\pi} \mathbf{k}; \quad (4.16)$$

так как $W_k = (\partial \omega \varepsilon / \partial \omega) (\hbar^2 |\Phi_k|^2 / 8\pi)$, то справедливость уравнения (4.13) доказана.

Наличие аномального сопротивления приводит к аномальному выделению джоулева тепла в плазме $j^2/\sigma_{\text{ан}}$. Такой нагрев плазмы

часто называют *турбулентным*, поскольку механизмом, определяющим природу аномального сопротивления плазмы, является турбулентность, вызванная неустойчивостью. При отсутствии парных соударений турбулентный нагрев неодинаков для электронной и ионной компонент плазмы. Более того, нельзя даже говорить о возрастании температур электронов и ионов, подразумевая температуры в традиционном смысле (максвелловского распределения частиц). Под температурой таких плазм обычно условно понимают средние хаотические энергии компонент.

Как правило, в процессе турбулентного нагрева плазмы быстрее увеличивается температура электронов. Можно установить простой критерий, связывающий скорость нагрева электронов со скоростью нагрева ионов. Вывод такого критерия основан на использовании законов сохранения количества движения и энергии при взаимодействии электронов и ионов с колебаниями. На электроны плазмы действует, как мы установили, сила трения

$$\mathbf{F} = -v_{\text{eff}} Nm \mathbf{V}_d. \quad (4.17)$$

Работа этой силы, очевидно, затрачивается на нагрев электронов плазмы

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \sim v_{\text{eff}} m N V_d^2 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d)}{\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (4.18)$$

В стационарном состоянии насыщения, достигаемого, когда рост неустойчивости ограничивается нелинейными эффектами, количество движения колебаний (а вместе с тем и их энергия) передается ионам. Таким образом, в состоянии насыщения ионы должны поглощать энергию колебаний со скоростью порядка $\int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d^3\mathbf{k}$. В результате нагрев ионов должен происходить со скоростью

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} \sim \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (4.19)$$

Теперь разделим уравнение (4.18) на (4.19):

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{d\mathcal{E}_i} \sim \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d)}{\omega_{\mathbf{k}}} d^3\mathbf{k} / \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d^3\mathbf{k}. \quad (4.20)$$

Если в формуле (4.20) положить

$$\int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d)}{\omega_{\mathbf{k}}} d^3\mathbf{k} \approx \frac{k V_d}{\omega_{\mathbf{k}}} \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d^3\mathbf{k},$$

то для отношения скорости нагрева электронов к скорости нагрева ионов нетрудно получить следующую оценку [112]:

$$d\mathcal{E}_e/d\mathcal{E}_i \sim V_d/\omega/k. \quad (4.21)$$

Это соотношение в том виде, в котором оно получено, не зависит от типа неустойчивости и поэтому носит универсальный характер.

Для большинства неустойчивостей оно действительно приводит к более быстрому нагреву электронов. Так, в ионно-звуковой и бунемановской неустойчивостях $V_d \gg \omega/k$ и, следовательно, $d\mathcal{E}_e/d\mathcal{E}_i \gg 1$. Особенно велико (порядка $\sqrt{M/m}$) отношение $d\mathcal{E}_e/d\mathcal{E}_i$ для неустойчивостей Бунемана.

Для ионно-звуковой и бунемановской неустойчивостей полезно привести выражение (4.14) к более наглядному виду. Подставим в (4.14) известную величину для максимума инкремента нарастания колебаний ионно-звукового типа (4.5). Максимум инкремента достигается при $k \sim \lambda_D^{-1}$. Подставляя $\gamma_k^e \approx \omega V_d/v_{Te}$, получаем следующее соотношение:

$$v_{eff} = \omega_p W/N_0 T_e. \quad (4.22)$$

Таким образом, зная плотность энергии колебаний W в режиме насыщения неустойчивости, можно было бы легко найти v_{eff} . Для нахождения W в нелинейной теории плазмы имеется регулярный метод — *теория слабой турбулентности*. Но этот метод не всегда применим. Даже простейший случай неустойчивости Бунемана следует рассматривать с позиций сильной турбулентности. Существующие теории сильной турбулентности могут претендовать лишь на оценки по порядку величины. В случае неустойчивости Бунемана подобную оценку можно было бы проделать, например, следующим образом. Перепишем соотношение между энергиями ионов и электронов в виде $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_e \sim \omega/kV_d$, где $\mathcal{E}_e \sim m\langle v^2 \rangle/2$, а плотность энергии колебаний $W \lesssim \mathcal{E}_i$. Поскольку $\omega/k \approx \sqrt{m/M}\langle v \rangle$, из (4.14) получаем $v_{eff} \sim \Omega_p$.

§ 4.2. Аномальное сопротивление вследствие ионно-звуковой неустойчивости

Ионно-звуковая неустойчивость представляет собой удобный пример исследования с помощью метода слабой турбулентности. Мнимая часть частоты в данном случае значительно меньше, чем ее действительная часть, поскольку дрейфовая скорость может быть много меньше средней тепловой скорости электронов. Нелинейной теории ионно-звуковой неустойчивости и вычислению аномального сопротивления посвящено много работ. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Плотность энергии W_k моды колебания с волновым вектором k нарастает при малых амплитудах экспоненциально. Затем при больших амплитудах должны включиться эффекты нелинейного насыщения и возможно возникнет установившееся или квазиустановившееся состояние. Тогда можно пренебречь левой частью и найти спектр W_k , приравняв линейное нарастание одному из эффектов, связанных с нелинейным насыщением. Нелинейные эффекты символически представим в следующем виде:

$$0 = \left\{ 2\gamma_k - A\omega_k \left(\frac{W}{N_0 T_e} \right) - B\omega_k \left(\frac{W}{N_0 T_e} \right)^2 \right\} W_k. \quad (4.23)$$

Квадратичные эффекты (пропорциональные квадратам амплитуд волн) — это эффекты взаимодействия волна — волна. Для ионно-звуковых колебаний запрещены резонансы трехволновых взаимодействий, поэтому единственным эффектом, который дает член порядка W^2 , может быть эффект нелинейного рассеяния волны на ионах [III]. Это эффект, который обусловлен наличием знаменателей типа $\omega - \omega' = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$, резонансов Ландау на нелинейных биениях, возникающих от каждой произвольно выбранной пары волн. Эти биения попадают в резонанс с ионами и часть энергии поглощается, а другая часть переходит в волну с меньшей частотой. На самом деле квадратичный член представляет собой некое довольно сложное интегральное выражение (см. § 3.2), в котором интеграл берется по всем волновым векторам. Величину этого члена оценим следующим образом: так как данный эффект связан с тепловым движением ионов, то оператор \mathbf{A} содержит малый количественный множитель T_i/T_e (поскольку речь идет о ионном звуке, то по определению необходимо, чтобы $T_i \ll T_e$).

Следующий эффект — кубический — относится уже к четырехволновому взаимодействию. Четырехволновое взаимодействие разрешено, и его учет приводит к довольно громоздкому нелинейному оператору, содержащему плотность энергии волн в третьей степени. В теории слабой турбулентности этот эффект слабее нелинейного ионного рассеяния. Таким образом, основная задача, которая решается, это — баланс между линейным нарастанием и первым (квадратичным) нелинейным членом. Задача подобного типа была приближенно решена Б. Б. Кадомцевым, который свел сложный интегральный оператор к дифференциальной форме, учитывая, что при таком нелинейном взаимодействии происходит лишь слабое изменение частоты (см. § 3.2). Решая уравнения баланса, Б. Б. Кадомцев обнаружил, что в области малых волновых чисел, существенно меньших дебаевского волнового числа (длин волн, значительно больших дебаевской), имеется простая зависимость: плотность энергии пропорциональна k^{-3} [III]. При $k\lambda_D \sim 1$ интегральные операторы, иначе говоря, член соударений между волнами, не приводится к простому виду. Но удается исследовать и обратный предельный случай больших волновых векторов, т. е. длин волн короче дебаевского радиуса (где закон дисперсии для ионного звука весьма прост: $\omega \approx \Omega_p$). Оказывается, спектр при $k\lambda_D > 1$ быстро падает ($\sim k^{-13}$), [IA]. Спектр Кадомцева обладает логарифмической расходимостью: полная энергия волн расходится для малых волновых векторов. Но эта логарифмическая расходимость не опасна, поскольку в выражение (4.14) для v_{eff} входит не плотность энергии, а потеря импульса электронами, т. е. в (4.14) берется уже другой интеграл (k и ω для длинных волн приблизительно пропорциональны друг другу). Имеется еще дополнительный множитель — мнимая часть γ_k — величина, пропорциональная частоте, т. е. еще раз входит k . Итак, теперь нет расходимости при малых k . Напротив, вклад в интеграл дает область больших $k\lambda_D \approx 1$. Далее естественно сделать предполо-

жение, что обрезание нужно проводить при волновых векторах порядка дебаевского (далее несправедлив спектр Кадомцева и начинается резкое затухание). Вычисление этого интеграла приводит к следующей формуле для эффективной частоты соударений [112]:

$$\nu_{\text{eff}} = 10^{-2} \Omega_p (V_d/c_s)(T_e/T_i)\Theta^{-2}. \quad (4.24)$$

Малый множитель 10^{-2} возникает при вычислениях (см. также работу [113]). Таким образом, если бы удавалось по плазме пропускать ток, существенно превышающий критическое значение, так что электроны теряли бы импульс из-за когерентного излучения фононов, т. е. ионно-звуковых колебаний, в конце концов установился бы некий стационарный спектр (вернее квазистационарный) и ν_{eff} определялось бы формулой (4.24). Эта формула имеет более глубокий смысл, чем выражение (4.22) для проводимости Бунемана, хотя бы по той причине, что она отражает специфику нелинейного насыщения неустойчивости. Тем не менее, она носит приближенный характер, связанный с тем, что стационарный спектр Кадомцева (3.25) — лишь приближенное решение задачи для установившихся ионно-звуковых колебаний. Подобное решение было бы строгим только при отсутствии угловой зависимости в выражении для инкремента ионно-звуковой неустойчивости. Такое приближение иногда называют *приближением изотропного инкремента*. В лучшем случае погрешность, допускаемая при использовании такого приближения, оставляет неопределенным численный множитель порядка единицы. Но существует опасность, что нелинейное установившееся решение Кадомцева может само оказаться неустойчивым по отношению к стягиванию конуса неустойчивых волн в \mathbf{k} -пространстве. Это могло бы привести к уменьшению угла Θ , квадрат которого входит в знаменатель формулы для эффективной частоты соударений (4.24). Этот вопрос остается до конца неясным и сейчас, хотя в работе [95] показано, что существуют решения, в которых угол Θ_0 пульсирует во времени около некоторого среднего значения.

В заключение укажем, что если по плазме с первоначально изотермическими ионами и электронами (ионно-звуковые колебания невозможны) протекает ток в режиме аномального сопротивления Бунемана, то рано или поздно этот режим должен смениться на ионно-звуковой. Это связано с тем, что при бунемановской неустойчивости электроны, как было отмечено, нагреваются в kV_d/ω раз быстрее, чем ионы, и плазма в конце концов становится неизотермической. Ионно-звуковая же неустойчивость в этом смысле является самоподдерживающейся, так как при $V_d > c_s$ электроны всегда получают больше тепла, чем ионы.

В. Н. Цытович [114] обратил внимание на то, что хотя спектр ионно-звуковых колебаний нераспадный, тем не менее в области малых волновых чисел, там, где закон дисперсии почти линейный, из-за небольшой мнимой части частоты, возникающей вследствие нелинейного уширения линии, можно выполнить условие трехволнового резонанса. Он включил в кинетическое уравнение для волн

в качестве нелинейного члена, приводящего к насыщению колебаний, трехволновой резонанс, т. е. распадный процесс, и решил кинетическое уравнение. Был получен спектр, близкий к спектру Кадомцева, так как нелинейность и здесь квадратичная, но отсутствует малый параметр T_i/T_e , входивший в нелинейное рассеяние на ионах. Естественно, что для W_k найдено несколько иное значение. Однако спектр Цытовича может иметь место только при достаточно малых волновых числах, где малой нелинейности достаточно для перекрытия резонансов и, следовательно, для того, чтобы могло осуществляться трехволновое взаимодействие. Но основной вклад в потерю импульса (в отличие от энергии колебаний) дают короткие волны. При коротких волнах (частотах порядка ионной плазменной) отклонение от линейного закона дисперсии очень велико, и нужна очень большая нелинейность для того, чтобы выполнялось условие трехволнового взаимодействия. Таким образом, модель Цытовича не имеет области применимости, тем более, что при больших нелинейностях мы вообще должны перейти в область сильной турбулентности.

Отметим, наконец, что формальное применение изложенной в § 3.1 теории возмущений для вычисления электронной функции распределения приводит к довольно парадоксальному выводу: линейную теорию раскачки ионно-звуковых колебаний следует пересмотреть при уровне турбулентности гораздо более низком, чем достигаемый в режиме установившейся турбулентности [115]. Дело в том, что основной вклад в нелинейную поправку к работе в поле волны, вычисленную с помощью функции распределения $f_{k', k, -k'}^{(3)}(v)$ (см. § 3.1), дают частицы со скоростями не выше фазовой скорости волн:

$$j^{(3)} E \approx \text{Im} \int d^3v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \left(\frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)^3 f_e^{(0)} \approx J^{(1)} \cdot \mathbf{E} \frac{E^2}{4\pi N_0 m (\omega/k)^2}.$$

Таким образом, согласно этой оценке нелинейная поправка к инкременту неустойчивости становится больше линейного инкремента при $W > mN_0 T_e / M$. Решение парадокса заключается в том, что на более ранней стадии развития неустойчивости следовало бы учесть нелинейное уширение резонансных скоростей до величины порядка $\Delta v \approx \sqrt{eE/mk}$. Допплеровское уширение резонанса вследствие этого эффекта начинает играть роль при $\sqrt{eE/mk} > \omega/k$, т. е. при $E^2/4\pi > mN_0 T_e / M$. Учитывая сказанное, нетрудно оценить нелинейную поправку к инкременту неустойчивости [115]:

$$\delta\gamma/\gamma^L \approx E^2/4\pi m N_0 \Delta v^2 \approx (E^2/4\pi N_0 T_e)^{1/2} \ll 1.$$

Таким образом, вывод о важности учета нелинейного вклада электронов в инкремент неустойчивости был поспешным.

§ 4.3. Квазилинейные эффекты в аномальном сопротивлении при ионно-звуковой неустойчивости

Имеются косвенные экспериментальные данные, может быть еще не очень надежные, в некоторых предельных случаях подтверждающие формулу (4.24) для сопротивления. Однако к этим экспериментальным данным нужно относиться с большой осторожностью. Дело в том, что ни одна из четырех величин, которые входят в эту формулу, V_d , c_s , T_e , i , в настоящей плазме при отсутствии реальных парных соударений, а только при наличии рассеяния на флуктуациях, уже не может иметь своего обычного смысла. Начнем с электронной температуры. Если нет парных соударений, то очень трудно ожидать, что функция распределения будет максвелловской. Даже

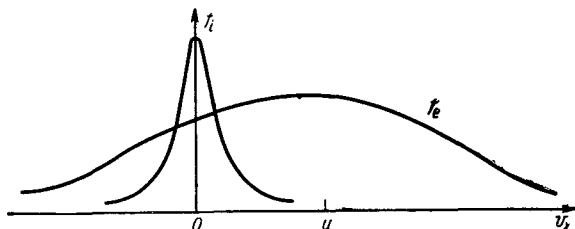


Рис. 30. Максвелловское распределение частиц в плазме с током.

если не требовать, чтобы функция распределения электронов была максвелловской и характеризовать ее неким средним тепловым разбросом, необходимо, чтобы f_e имела довольно быстро сходящиеся «хвосты». В этом случае можно говорить об однотемпературных электронах. Но с ионами ситуация еще более сложна, ведь с самого начала очевидно, что ионная функция распределения будет вести себя довольно экзотически, если ионы взаимодействуют только с волнами (нет парных соударений). И наконец, о средней скорости дрейфа. Обычно распределение частиц в плазме с током изображают так, как это сделано на рис. 30. Здесь имеются ионная функция распределения и смещенная относительно нее электронная функция распределения в предположении, что электронное распределение смещается относительно ионного как целое. Однако, в принципе, можно представить себе такую картину (рис. 31), когда электронное распределение сохраняет свой максимум там же, где и ионное, но какая-то часть электронного распределения деформируется таким образом, что возникает несимметричное электронное распределение (см. рис. 31).

Перейдем к обсуждению возможного вида функций распределений ионов и электронов. Удобно воспользоваться двумерной картиной, показанной на рис. 32. Здесь по оси абсцисс отложена компонента скорости частиц вдоль направления протекания тока, а по оси

ординат — поперечная компонента. Пусть первоначально имеется обычное максвелловское распределение электронов и ионов. Для максвелловского распределения линии равного значения функции распределения в этой плоскости являются окружностями. Взаимодействие волн с частицами особенно сильно тогда, когда осуществляется резонанс Ландау. Волна с фазовой скоростью ω/k взаимо-

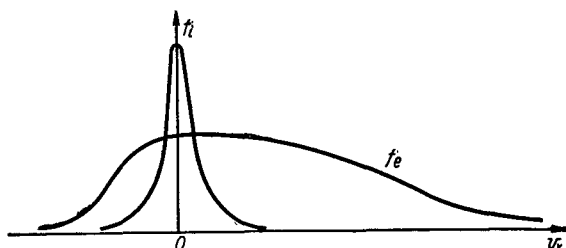


Рис. 31. Пример устойчивого распределения электронов в плазме с током.

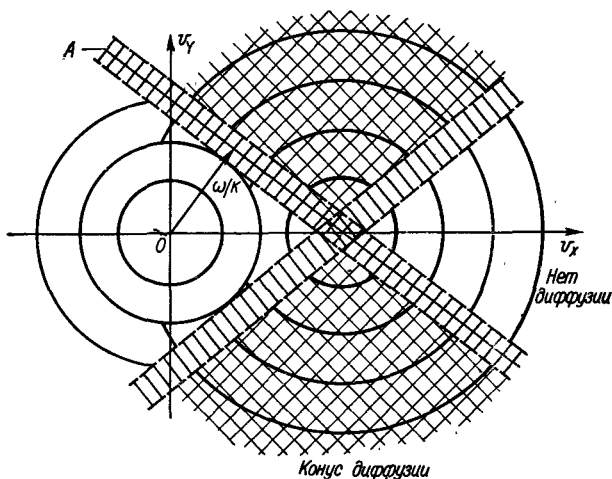


Рис. 32. Конус диффузии в случае ионно-звуковой турбулентности в плазме с током.

действует с частицами, находящимися вблизи прямой A (см. рис. 32). Именно для таких частиц осуществляется резонанс. Наконец, если рассмотреть волны всевозможных направлений и разных значений фазовых скоростей, то можно убедиться, что все частицы, находящиеся в той части плоскости (v_x, v_y) , где можно провести линию, соответствующую условию резонанса Ландау, испытывают действие случайного поля волн. Но в ионно-звуковом спектре отсутствуют волны со скоростями меньше некоторой ($\omega/k \leq v_{Ti}$). Такие частицы в квазилинейном приближении не взаимодействуют с волнами. Здесь

взаимодействие оказывается гораздо более слабым, оно связано с нелинейными эффектами следующего приближения. Ионов в области взаимодействия с волнами довольно мало, таким образом, лишь малая доля ионов подвергается мощному воздействию со стороны волн. В нулевом приближении функция распределения в основной области практически не деформируется. В резонансной же области возникает сильная деформация. Эта деформация на языке квазилинейной теории есть не что иное, как диффузия частиц в пространстве скоростей. Имеется большое количество промежуточных экспериментов, в которых такая диффузия происходит сравнительно медленно и парные столкновения частиц все-таки успевают создать некоторое подобие максвелловского распределения. Это относится к случаям, когда сопротивление плазмы незначительно превышает классическое. Здесь мы будем обсуждать лишь самые экстремальные случаи, когда парные столкновения не играют никакой роли. Тогда такое изменение функции распределения ионов очень существенно. Оно сильно меняет ионную мнимую часть (ионный полувычет, пропорциональный числу ионов, которые могут находиться в резонансе). Это, как правило, весьма малое число, очень чувствительное к тому, что происходит на «хвосте» ионного распределения. В настоящее время еще нет самосогласованной теории, которая бы описывала изменение ионной функции распределения при достаточно больших временах (исключение составляют лишь одномерные случаи, см. ниже). Можно сделать некоторые оценки, в частности, довольно эффективно использовать двухтемпературное приближение, т. е. условное разбиение ионов на две группы — холодные ионы, с которыми практически ничего не происходит, и горячие, находящиеся на хвосте функции распределения и имеющие достаточно большую температуру.

С электронами же происходит следующее: область запрещенных скоростей, внутри которой отсутствует резонанс между частицами и волнами, сравнительно невелика, потому что скорость звука в $\sqrt{M/m}$ раз меньше средней тепловой скорости электронов. В принципе можно пренебречь тем, что происходит внутри этого небольшого кружка. Но возникает другая сложность. Очень трудно представить себе такую ситуацию, когда ток, протекающий в этом направлении, раскачивал бы волны, почти поперечные направлению тока. Действительно, из теории ионно-звуковой неустойчивости известно, что волны с большим волновым вектором поперек направления тока имеют малую мнимую часть и практически такие волны можно считать устойчивыми. Таким образом, приходим к выводу, что здесь образуется небольшой конус в пространстве скоростей, в котором нет волн для резонанса с электронами. Эти электроны свободно ускоряются электрическим полем, вызывающим ток в плазме. Вклад таких электронов может сильно уменьшить сопротивление плазмы. Какая же доля электронов попадает в этот конус потерь и дальше свободно ускоряется? Задачу можно разбить на два предельных случая. Сначала целесообразно выделить более простой случай,

когда имеется хотя бы слабое магнитное поле H_0 в плоскости, перпендикулярной V_d . Такое магнитное поле медленно вращает электроны (медленно в сравнении с частотой плазменных колебаний). Но оно может быть достаточно быстрым в масштабе времени, в котором появилось бы убегание электронов в «конус потерь». И, таким образом, в среднем все электроны за один ларморовский оборот оказываются взаимодействующими с волнами. В этой задаче для электронов не возникает дополнительной трудности. Хотя f_e и не сводится к максвелловскому распределению, тем не менее можно говорить о средней электронной температуре. Более того, при довольно общих предположениях, считая лишь, что фазовая скорость возникающих колебаний много меньше средней тепловой скорости электронов, и не предполагая ничего о спектре колебаний, можно получить простую формулу для функции распределения электронов. Спустя некоторое время, когда энергия электронов станет существенно больше, чем их начальная тепловая энергия, возникнет универсальное распределение по закону $f_e \sim \exp(-\alpha v^3)$ (см. § 2.3). Близкое к этому распределение в некоторых экспериментах наблюдается. При таком распределении можно говорить о средней температуре, и все вычисления для электронов проводить практически так же, как и для максвелловского распределения, но с учетом небольших изменений численных коэффициентов. Таким образом, будем считать, что если имеется слабое поперечное магнитное поле, то все результаты для эффективного числа соударений можно переносить даже и на далекие моменты времени, когда могло бы существенно сказаться искажение электронного распределения, его отклонение от максвелловского распределения. Именно такая ситуация имеет место в экспериментах с бесстолкновительными ударными волнами поперек магнитного поля. В такой ударной волне ток течет поперек магнитного поля.

Однако неприятности, связанные с ионным распределением, остаются и в этом случае. Дело в том, что ионы не успевают перемешиваться под действием магнитного поля, и поэтому ионное распределение может приобрести довольно экзотическую форму и в конце концов станет сильно отличным от максвелловского. Можно ожидать, что основная часть ионов будет холодной, а какая-то часть ионов начиная от скоростей порядка скорости звука, будет нагреваться. По-видимому, нельзя в ближайшее время без использования численных методов найти вид такого сложного ионного распределения. В то же время из общих соображений можно ожидать следующее. Если в процессе протекания тока и возрастания энергии электронов и ионов нет взаимодействия со стенками, т. е. не происходит потерь тепла наружу, следует прийти к какому-то самоподобному виду и для функций распределения, и для спектров.

Более простыми должны быть закономерности при малой нелинейности, когда достаточно ограничиться только квазилинейным приближением. В таком приближении насыщение неустойчивости достигается вследствие квазилинейной деформации функции

распределения ионов, в результате которой даже в неизотермической плазме появляется группа ионов с большими скоростями $v \gtrsim c_s$. Такие ионы, резонансно поглощая ионно-звуковые волны, должны уравновешивать раскачку колебаний электронами.

Рассмотрим процесс нелинейного насыщения колебаний в этом случае. Пусть уравнение для спектра неустойчивых волн имеет символический вид [сравни с уравнением (4.23)]

$$dW_k/dt = 2\gamma_k^e W_k - 2\gamma_k^i W_k - A (W/N_0 T_e) W_k - B (W/N_0 T_e)^2 W_k. \quad (4.25)$$

Нарастание колебаний при $V_d > V_c$ приводит к увеличению сопротивления, т. е. возникает сила трения, действующая на электроны. Если приложенное электрическое поле, создающее ток, не слишком велико, то, как следствие реакции электронов на увеличившееся сопротивление, V_d должно уменьшаться до тех пор, пока плазма не окажется на пороге неустойчивости. Это означает, что нелинейные члены в уравнении (4.25) играют малую роль, а насыщение колебаний определяется условием $\gamma_k^e \approx \gamma_k^i$ для всех первоначально неустойчивых волн. Иначе говоря, для всех первоначально неустойчивых волн должно выполняться условие

$$\gamma_k = \gamma_k^e - \gamma_k^i \approx [df_e/dv + (m/M)(df_i/dv)] = 0. \quad (4.26)$$

Условие (4.25) в такой форме не содержит амплитуды установившихся колебаний W_k и, следовательно, с его помощью сразу нельзя вычислить v_{eff} . Эффективную частоту столкновений для такого режима насыщения неустойчивости (его иногда называют «пороговым» или квазилинейным) можно найти из закона Ома, подставив в него найденное выражение для $j = eNV_d \approx eNV_c$. Считая $j = eNV_c = \sigma E$, находим

$$v_{\text{eff}} = eE/mV_c. \quad (4.27)$$

Теперь с помощью соотношения (4.14), связывающего v_{eff} с энергией колебаний, можно найти W :

$$W/N_0 T_e \approx (eE\lambda_{De}/N_0 T_e)(v_{Te}/V_c). \quad (4.28)$$

С ростом E увеличивается W , и при достаточно больших полях E уже нельзя пренебречь нелинейными членами в уравнении (4.25). Кажущиеся простыми формулы для порогового (квазилинейного) режима на самом деле сложны. Казалось бы, для нахождения $V_d \approx V_c$ достаточно линейного выражения для мнимой части частоты (4.26). Однако γ_k^i очень чувствительно к виду ионного распределения при больших скоростях ионов, т. е. на хвосте функции распределения. Такие ионы, поглощая колебания, увеличивают энергию и быстро меняют (квазилинейным образом) вид своей функции распределения. В результате быстро меняется γ_k^i и, следовательно, V_c .

Если тепловая энергия, поглощаемая частицами плазмы, не отводится наружу, можно ожидать, что в конце концов установится универсальный самоподобный вид функции распределения ионов. Предположение о том, что такое автомодельное решение, соответствующее квазилинейному режиму, существует, проверено в работе [116]. В этой работе найдены автомодельные переменные, в которых уравнения теории слабой турбулентности принимают более простой вид; однако эти уравнения еще не удалось решить для общего случая. Тем не менее можно поступить следующим образом. Для случая, когда ток течет поперек магнитного поля и спектр волн трехмерен, ионное распределение надо разбить на группу холодных и горячих ионов. В таком двухгрупповом приближении можно найти величины, характеризующие протекание тока. Группа ионов, которые попадают в резонанс с ионно-звуковыми колебаниями и затем ускоряются, сравнительно невелика. Обозначим концентрацию таких горячих ионов X . Введем эффективную температуру таких резонансных ионов T_{hi} . Тогда из (4.21) имеем

$$T_e/T_{hi} \approx XV_d/c_s. \quad (4.29)$$

Оценивая ионный декремент как $\gamma_i \approx (\omega^3/k^3) (Xc_s/(T_{hi}/M^{3/2}))$ и сравнивая его с электронным (4.5), получаем

$$X = (m/M)^{1/4} (T_{hi}/T_e)^{1/4}, \quad (4.30)$$

$$V_d \approx c_s (M/m)^{1/4} (T_e/T_{hi})^{5/4}. \quad (4.31)$$

Далее рассмотрим импульс резонансных ионов. Импульс, теряемый электронами при рассеянии, переходит к ионам $\mathbf{P}_i = Nm\mathbf{V}_d v_{\text{eff}}$. Так как $T_{hi} \gg T_e$, функцию распределения ионов можно представить в виде $f_i(\mathbf{v}, \phi) = f_{0i}(\mathbf{v}) + f_{1i}(\mathbf{v}, \phi)$ (см. § 2.3), где анизотропная часть $f_{1i} \sim [c_s/(T_{hi}/M^{1/2})] f_{0i} \lesssim f_{0i}$. Таким образом, $|\mathbf{P}_i| \approx \int |\mathbf{M} \mathbf{v}_s t_{1i} d^3\mathbf{v}| \approx N_0 X M c_s$. Окончательно получаем

$$V_d \approx c_s (M/m)^{1/4}, \quad T_{hi} \approx T_e, \quad X \approx (m/M)^{1/4}. \quad (4.32)$$

Итак, средняя хаотическая энергия этих горячих ионов близка к средней хаотической энергии основной массы электронов. Соотношения (4.32) содержат, конечно, множители порядка единицы, определить которые, не зная точного решения, можно лишь сравнивая их с экспериментальными данными. Исключение составляет идеализованный случай одномерного спектра, допускающий точное аналитическое решение. Это решение представляет известный методический интерес и на нем следует остановиться подробнее.

Пусть имеются колебания, распространяющиеся только вдоль тока ($\parallel x$). Функция распределения ионов, взаимодействующих с такими колебаниями, также одномерна. Электронное же распределение вследствие влияния магнитного поля должно быть аксиально симметричным в плоскости v_x, v_y вокруг точки $V_d, 0$. Взаимодействие электронов с колебаниями в этой задаче соответствует случаю, рассмотренному в § 2.3. Электронная функция распределения имеет

вид $f_e \sim \exp(-\alpha v_{\perp}^2)$ с началом отсчета в точке $V_d, 0$. Однако не все электроны взаимодействуют с колебаниями. Это становится особенно наглядным, если обратиться к рис. 33. Например, если в плазме возбуждены лишь обычные ионно-звуковые колебания, фазовая скорость не может быть больше $\omega/k_{\text{макс}}$. Так как спектр одномерный, то при скорости дрейфа $V_d > \omega/k_{\text{макс}}$ часть электронов внутри круга (см. рис. 32) не будет взаимодействовать с колебаниями. Поэтому электроны в этой области остаются «холодными» и соответствующая величина функции распределения оказывается все больше

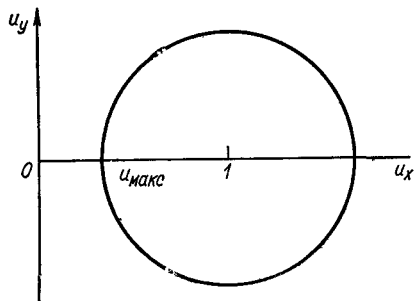


Рис. 33. Взаимодействие одномерных колебаний с электронами в магнитном поле.

и больше в сравнении с величиной f_e в резонансной области. Это будет происходить до тех пор, пока закон дисперсии для ионно-звуковых колебаний не изменится настолько, что появятся колебания с фазовыми скоростями в интервале от первоначального значения $\omega/k_{\text{макс}}$ до V_d . При этом круг (см. рис. 32) стягивается, а электроны внутри этого круга можно описывать распределением вида δ -функции $f_e \sim X_e \delta(v_x - V_d) \delta(v_y)$. Относительная доля таких нерезонансных электронов X_e будет найдена позднее.

Квазилинейное кинетическое уравнение для ионов в безразмерных переменных $u_x = v_x/V_d$ для функции распределения $f_i(v_x, t) = (N/V_d)g_i(u_x)$ можно привести к виду

$$-(d/du_x)u_x g_i = (m/M)^2 (d/du_x)D(u_x)(dg_i/du_x), \quad (4.33)$$

$$\text{где } D(v_x) = \frac{8\pi^2 e^2}{m^2} \int W_k \delta(\omega_k - kv_x) dk / (2\pi).$$

По аналогии с предыдущей задачей можно ожидать, что основная доля ионов не будет взаимодействовать с колебаниями. Обозначим относительную долю резонансных ионов, подчиняющихся уравнению (4.33), $(1 - X_i)$. Условие $\gamma_i + \gamma_e = 0$ в интервале фазовых скоростей от 0 до V_d ($0 < u_x < 1$) теперь имеет вид

$$dg_i/du_x = (M/m)(dh_e/du_x), \quad (4.34)$$

где $h_e(u_x)$ — электронное распределение (типа $\exp[-\alpha V_{\perp}^2]$) в автомодельных переменных, проинтегрированное по v_y . Систему уравнений (4.33) и (4.34) можно решить (см. задачу к наст. параграфу).

Интересно отметить, что отношение токовой скорости электронов V_d к их тепловой скорости v_{Te} и число резонансных ионов $1 - X_i$ можно оценить из простых соображений, основанных на законах сохранения. Из-за рассеяния электронов на колебаниях возникает сила электрон-ионного трения $F_{\text{тр}}$, передающая импульс от элек-

тронов к ионам. Обозначая импульс последних P_i , имеем: $dP_i/dt = F_{\text{тр}}$. Это равенство эквивалентно вычислению первого момента от кинетического уравнения для ионов. А так как $P_i \sim (1 - X_i) M V_d$, то $F_{\text{тр}} = (1 - X_i) M dV_d/dt$. Работа силы трения идет на нагрев электронов: $dT_e/dt \approx V_d F_{\text{тр}}$. Отсюда следует, что $v_e^2 \sim (1 - X_i) M V_d^2 / m$. Сравнивая электронный инкремент с ионным затуханием, находим, что равенство $(m/M) (1 - X_i) / V_d^2 \sim (V_d / v_e^2)$. Отсюда сразу получаем, что $1 - X_i \sim (m/M)^{1/5}$, $V_d / v_{Te} \sim (m/M)^{2/5}$. Этот результат естественно, подтверждается точным решением (см. задачу к наст. параграфу).

В таком рассмотрении не учитывались «косые» волны, распространяющиеся под углом к направлению тока. Нетрудно убедиться в том, что наличие резкого максимума у электронной функции распределения в точке $v_x = V_d$ приводит к неустойчивости ионно-звуковых волн с волновым вектором \mathbf{k} , направленным почти поперек тока. Керн в электронной функции распределения при этом размывается и, по-видимому, возникает ситуация подобная описанной в предыдущем разделе [см. формулы (4.29) и (4.32)].

Квазилинейное приближение, как уже отмечалось, можно применять при малой нелинейности. Это справедливо, если электрическое поле невелико, так что сила трения из-за когерентного излучения ионно-звуковых колебаний притормаживает электроны и запрещает им приобретать среднюю скорость, большую, чем критическая скорость при неустойчивости. Иначе говоря, плазма все время находится как бы на пороге неустойчивости. Тогда нелинейный режим, описанный в § 4.2, должен соответствовать случаю больших электрических полей. Величину E_c , т. е. границу, разделяющую два рассмотренных режима, можно найти следующим образом. Пусть V_c — скорость дрейфа электронов, соответствующая порогу неустойчивости ($\gamma_i + \gamma_e = 0$). Случай больших электрических полей (4.24) осуществляется, если V_d , вычисленное с помощью формулы $V_d = eE / m v_{\text{eff}}$, превышает V_c ($V_d \gg V_c$). С помощью выражения (4.24) для v_{eff} находим

$$E \gg 10^{-2} (mM^3)^{1/4} \Omega_p c_s / e. \quad (4.35)$$

В результате зависимость $j = j(E)$ можно качественно представить как показано на рис. 34. Здесь имеется классическая область при очень малых электрических полях, когда состояние плазмы далеко от неустойчивости; при умеренных электрических полях $j = eNV_c$ (квазилинейный режим); $j \sim E^{1/3}$ в нелинейном режиме, когда v_{eff} определяется формулой (4.24).

Все, о чем говорилось в этом параграфе, относится к случаю тока поперечного или почти поперечного магнитному полю. Представим себе теперь, что магнитное поле у нас либо совсем отсутствует, либо действует в направлении протекания тока. Тогда сразу исчезает тот механизм, который перемешивает все электроны, и задача об электронной функции распределения также усложняется. Как поступить в этом случае? Предположим, что и здесь через некоторое

время установится автомодельное распределение [117]. Функция распределения электронов примет некий универсальный вид: произойдет дальнейший нагрев электронов, увеличение их средней скорости, но вид функции остается самоподобным. Но с этими автомодельными переменными практически сделать ничего не удастся,

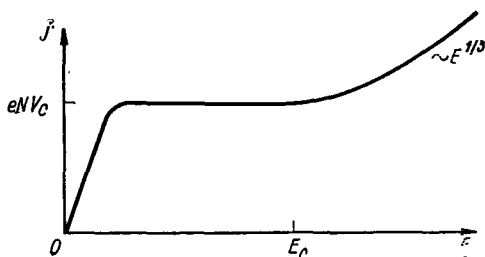


Рис. 34. Закон Ома в случае ионно-звуковой турбулентности.

по-видимому, невозможно ввести двухтемпературное распределение электронов, потому что нет явно выраженных двух групп электронов, как это было в случае с ионами. Наоборот, возникает плавный переход от медленных электронов ко все более быстрым, и в конце концов, с течением времени, как показывает качественный анализ уравнений в автомодельных переменных, значительная доля электронов попадает в область скоростей, где практически нет волн. Это явление напоминает убегание электронов в газе с лоренцовскими столкновениями, когда частота соударений падает со скоростью v^{-3} . Взаимодействие электронов с ионно-звуковыми волнами обладает именно такими свойствами [63].

Вопрос о том, какой вид в конце концов примет закон Ома в такой плазме, на сегодняшний день остается открытым. Одна из распространенных точек зрения такова: значительная доля электронов попадает в режим убегания, функция распределения электронов в проекции на параллельную скорость оказывается сильно вытянутой в направлении тока, отношение средней дрейфовой скорости электронов к средней тепловой скорости электронов может стать равным единице [117]. Точное численное значение трудно предсказать. Данные лабораторного эксперимента пока еще очень бедны. Дело в том, что большинство экспериментов, в которых исследовалось явление аномального сопротивления, относится к разрядам с так называемыми *открытыми концами*, т. е. к разрядам, в которых электроны плазмы могут свободно уходить вдоль силовых линий магнитного поля. Ясно, что в таких условиях невозможно получить далекий автомодельный режим, поскольку имеется непрерывный теплоотвод. Более того, так как длина пробега частиц с большими скоростями велика, то в первую очередь уходят быстрые частицы. Таким образом, происходит непрерывное обрезание хвоста электрон-

ного распределения. Задача чрезвычайно усложняется, очень сильно зависит от граничных условий и теряет универсальный интерес. Может оказаться, что в этом случае отношение V_d/v_{Te} будет оставаться много меньшим единицы. В принципе нельзя полностью исключить существование и других механизмов, приостанавливающих убегание электронов и тем самым ведущих к установлению $V_d/v_{Te} \ll 1$. Так, в работе [118] обсуждается комбинированное действие на электроны ионно-звуковой и циклотронной неустойчивостей. В работе [119] для аналогичной цели привлекается идея о возможности длительного существования в плазме так называемых *макрочастиц* [120]. Однако эти идеи еще носят феноменологический характер.

Существуют некоторые идеализированные предельные случаи, когда уравнения слабой турбулентности в задаче об аномальном сопротивлении для тока могут быть точно решены. Это одномерные случаи. Подобно тому как в статистической термодинамике имеется класс одномерных решаемых моделей, так и в теории слабой турбулентности одномерные модели оказываются значительно проще. В некоторых случаях одномерные модели могут иметь реальный физический смысл. Например, если магнитное поле настолько велико, что ларморова частота электронов значительно превышает их плазменную частоту, то движение электронов в направлении поперек силовых линий магнитного поля практически запрещено, и мы имеем дело с чисто одномерным движением. В таком случае одномерная теория может дать адекватное описание того, что здесь происходит. Автомодельные уравнения в одномерной постановке для квазилинейного режима решаются точно [117].

Пусть в однородной плазме имеется постоянное однородное электрическое поле, параллельное магнитному. Когда через достаточно большой промежуток времени среднеквадратическая скорость плазмы увеличится настолько, что плазма «забудет» о своем исходном состоянии, дальнейшая эволюция системы приобретает некоторый универсальный характер, не зависящий от начальных условий. Формально такому режиму соответствует возможность перехода в квазилинейных уравнениях к автомодельным переменным. Из простых размерных соображений следует, что скорости частиц должны измеряться в единицах eEt/m , а волновые векторы колебаний — в единицах $m\omega_p/eEt$.

Функции распределения электронов и ионов $f_{e, i}$ и спектральная плотность электростатической энергии колебаний W имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_e = mNg_e(u)/eEt; \quad f_i = mNg_i(u)/eEt; \quad W(k, t) = m\omega_p^4 t^2 U(q); \\ u = mv/eEt; \quad q = keEt/m\omega_p. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Подставляя эти функции в квазилинейные уравнения, записанные в системе отсчета, связанной со свободно ускоряющимися ионами, получаем

$$(-d/du)(u - 1 - \mu)g_e = (d/du)D(u)(dg_e/du); \quad (4.37)$$

$$-(d/du)ug_i = \mu^2 (d/du)D(u)(dg_i/du), \quad (4.38)$$

где $D(u)$ — квазилинейный коэффициент диффузии, а $\mu = m/M$. Вместе с условием равенства нулю инкремента колебаний

$$(d/du)(g_e + \mu g_i) = 0 \quad (4.39)$$

уравнения (4.37) и (4.38) образуют замкнутую систему, которая имеет следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} g_e = Cu/(u + \mu^2), \quad g_i = C\mu(1-u)/(u + \mu^2), \quad D = u^2(1-u)/\mu^2 \\ \text{при } 0 < u < 1; \\ g_e = g_i = D = 0 \quad \text{при } u < 0, u > 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

где C — произвольная положительная постоянная. К функциям $g_e(u)$ и $g_i(u)$ можно добавить некоторое число свободно ускоряющихся электронов и ионов, которым в автомодельном решении соответствуют δ -функции в точке $u = 1$ для электронов и $u = 0$ для ионов. Обозначая доли свободно ускоряющихся частиц X_e, X_i , из условия нормировки сразу находим, что $X_e + C = 1, X_i + 2C\mu \ln \mu^{-1} = 1$. Зная функции g_e и g_i , легко записать дисперсионное соотношение

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 - (1 - C)/(\omega - q)^2 - \mu/\omega^2 + C/\omega q - C/(\omega - q)q.$$

Функция $\varepsilon(q, \omega)$ должна удовлетворять следующим требованиям: все колебания должны быть устойчивыми; должны существовать колебания со всеми фазовыми скоростями в интервале $(0, 1)$. Из этих условий можно однозначно определить константу C (которая оказывается равной $2\mu^{1/2}$), и, тем самым, функции распределения $g_{e,i}$.

Итак, в конце концов устанавливается универсальный автомодельный вид электронного распределения. Здесь имеется область плато от $V = 0$ до скорости свободного ускорения, которую приобретает основная доля электронов.

Численные эксперименты в одномерном случае дают приблизительно такой вид функции распределения [121]. Но есть и некоторое отличие функции распределения в численных экспериментах от автомодельной. В частности, в автомодельной теории число электронов в области плато пропорционально $N_0 \sqrt{m/M}$. В численном же эксперименте в области плато находится заметная доля электронов. Это различие связано с тем, что квазилинейная теория игнорирует нелинейные эффекты.

ЗАДАЧА

Найти точное решение уравнений квазилинейного приближения (4.33), (4.34) для проблемы аномального сопротивления току, текущему поперек H в одномерной задаче [117].

Электронную функцию распределения $f_e(v_{\perp}, t) = (N/v)g_e(u_{\perp})$ можно выразить через квазилинейный коэффициент диффузии $g_e = C_1 \exp(-u_{\perp}^2/5D)$,

где $\bar{D} = \pi^{-1} \int_0^1 D(u_x) (u_x - 1)^2 du_x$, а константу C_1 найти из условия нормировки $2\pi \int_0^\infty u_\perp g_e du_\perp = 1$

$$C_1 = 1/\pi \Gamma(7/5) [5\bar{D}]^{2/5}.$$

Из условия $\gamma = 0$ в интервале фазовых скоростей $(0, 1)$ следует

$$\begin{aligned} \frac{dg_i}{du_x} &= -\frac{M}{m} \cdot \frac{dg_e}{du_x} \approx \frac{2M}{m} (1-u_x) \int_0^\infty \frac{du_\perp}{u_\perp} \cdot \frac{dg_e}{du_\perp} = \\ &= -\frac{M}{m} (1-u_x) (5\bar{D})^{-3/5} \frac{5\Gamma(9/5)}{2\pi\Gamma(7/5)} \end{aligned}$$

(при вычислении dg_e/du_x) мы учли, что тепловая скорость электронов много больше их дрейфовой скорости, которая в рассматриваемых переменных равна просто единице). Отсюда находим функцию распределения ионов

$$g_i = (M/m) (1-u_x)^2 (5\bar{D})^{-3/5} [5\Gamma(9/5)]/[4\pi\Gamma(7/5)]$$

и из уравнения (4.33) коэффициент диффузии $\bar{D} = 1/40\pi (m/M)^2$. Теперь из соотношения

$$\bar{u}_\perp^2 = \int_0^\infty u_\perp^3 g_e du_\perp \left/ \int_0^\infty u_\perp g_e du_\perp \right. = (5\bar{D})^{2/5} \Gamma(9/5)/2\Gamma(7/5)$$

можно найти среднеквадратичную скорость электронов $\sqrt{\bar{u}_\perp^2}$, которая оказывается равной $0,38 (M/m)^{2/5}$. Таким образом, отношение токовой скорости электронов к тепловой в рассматриваемой модели равно $2,65 (m/M)^{2/5}$.

Число ионов, взаимодействующих с колебаниями, по-прежнему мало

$$1 - X_i = \int_0^1 g_i(u_x) du_x = (m/M)^{1/5} \frac{10\Gamma(9,5)}{3(8\pi)^{2/5} \Gamma(7/5)} \approx 0,95 (m/M)^{1/5},$$

а для определения X_e следует воспользоваться дисперсионным соотношением

$$\varepsilon(\omega, q) = 1 - \frac{1}{q^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_x}{u_x} \cdot \frac{dg_e}{du_x} - \frac{X_e}{(\omega - q)^2} - \frac{mg_i(0)}{M\omega q} - \frac{mX_i}{M\omega^2} = 0$$

или

$$1 + \frac{8,2}{q^2} \left(\frac{m}{M}\right)^{4/5} = \frac{X_e}{(\omega - q)^2} + \frac{m}{M\omega^2} + \frac{2,86}{\omega q} \left(\frac{m}{M}\right)^{6/5}.$$

Из требования устойчивости и отсутствия колебаний со всеми фазовыми скоростями в интервале $(0, 1)$ совершенно аналогично случаю распространения тока вдоль \mathbf{H} [см. формулы (4.36)–(4.40)] находим число частиц в электронном корне $X_e \approx 8,2 (m/M)^{4/5}$.

§ 4.4. Аномальное сопротивление из-за других типов неустойчивости

Вернемся снова к таблице (см. § 4.1) и рассмотрим оставшиеся виды неустойчивости. Неустойчивость Драммонда—Розенблюта при-

водит к сравнительно слабым мнимым частям частоты и, кроме того, с точки зрения квазилинейного приближения — это одномерная неустойчивость. Поэтому возникающее электронное плато наподобие того, которое появляется в одномерной ионно-звуковой модели (4.3), должно быстро остановить развитие неустойчивости. Ток может нарастать и дальше, а в небольшой области пространства скоростей электронное распределение будет иметь плато и не будет неустойчивости.

Наиболее низким порогом возбуждения (малым значением) обладают электростатические неустойчивости с $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ в плазме с током, текущим поперек магнитного поля. При $\omega \gtrsim kv_{Ti}$, $V_d > k_{\parallel} v_{Te}/k$ это колебания типа (4.6). Нелинейное насыщение этого вида неустойчивости не поддается рассмотрению с помощью методов теории слабой турбулентности. Обратимся, например, к случаю модифицированной неустойчивости Бунемана [см. формулу (4.7)]. Дисперсионное уравнение (4.7) отличается от обычного уравнения Бунемана лишь заменой Ω_p на $\Omega_p/\sqrt{1 + \omega_p^2/\omega_H^2}$ и ω_p на $\omega_p k_{\parallel}/k\sqrt{1 + \omega_p^2/\omega_H^2}$. Можно оценить амплитуду колебаний в режиме насыщений так, как это часто делается в теории сильной турбулентности. Сравним линейный $\partial v/\partial t$ и нелинейный $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ члены в уравнении для электронов:

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = e \{ \mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \}.$$

В нелинейной стадии эти члены конкурируют друг с другом, что приводит к квазистационарному режиму насыщения неустойчивости. Приравнивая их по порядку величины, получаем $kV_d \sim \sim (kc/H_0) \sum_q \varphi_{\mathbf{q}}$. Отсюда можно сделать следующую оценку плотности энергии колебаний:

$$\sum_k N_0 e^2 |\Phi_k|^2 / 2T_e \approx mNV_d^2, \quad kr_{He} \approx 1. \quad (4.41)$$

Теперь с помощью формулы (4.14) получим [I]

$$v_{эфф} = \omega_H V_d / v_{Te}. \quad (4.42)$$

Полезно еще оценить отношения скоростей нагрева электронов и ионов при этой неустойчивости из соотношения (4.21)

$$\dot{T}_e / \dot{T}_i \approx V_d / v_{Ti}. \quad (4.43)$$

Эта неустойчивость, как правило, раскачивается медленнее ионно-звуковой (при $T_e \gg T_i$), но она может иметь место и в плазмах с большой ионной температурой ($T_i \sim T_e$), когда ионно-звуковой волны не существует. При уменьшении T_e/T_i ниже некоторого предела в дисперсионном уравнении (4.6) становится невозможным пренебрежение тепловым движением ионов. В этом предельном случае мы имеем дело с модой типа «электронного звука» [см. формулы (4.6) и (4.9)]. И здесь оценку для $v_{эфф}$ можно получить, действуя

аналогичным образом в соответствии со случаем сильной турбулентности.

Для $\omega_p \gg \omega_H$ неустойчивыми в плазме с током могут стать моды Бернштейна. Неустойчивость заключается в следующем. Моды Бернштейна — это колебания с волновым вектором, строго или почти строго поперечным магнитному полю, частоты группируются вблизи гармоник $l\omega_H$. Представим себе чисто электронные колебания, их частота довольно велика, никакого взаимодействия с ионами не происходит. Пусть по плазме протекает ток, и в системе отсчета, движущейся вместе с электронами, имеются такие колебания. Но из-за эффекта Доплера в лабораторной системе отсчета, где покоятся ионы, частота колебаний оказывается сдвинутой $l\omega_H - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d$. Если скорость дрейфа достаточно велика, при достаточно больших k (а k можно выбрать вплоть до дебаевского волнового вектора) можно существенно уменьшить частоту в системе отсчета ионов, так чтобы эти колебания взаимодействовали с ионами ($l\omega_H - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_d \sim \sim kv_{Ti}$). И тогда возникает эффект типа неустойчивости волн с отрицательной энергией. Обычное максвелловское распределение ионов, если учесть мнимую часть взаимодействия ионов с модами Бернштейна вследствие резонанса Ландау, дает нам неустойчивость. Оказывается, что эта неустойчивость имеет довольно большую мнимую часть, порядка ларморовской частоты электронов, уменьшенной в отношении дрейфовой скорости к тепловой скорости электронов. Более того, эта неустойчивость мало чувствительна к отношению температур. В отличие от ионного звука для этой неустойчивости не требуется условия, чтобы электронная температура существенно превышала ионную. Можно было бы ожидать большого аномального сопротивления. Но оказывается очень малой нелинейности (малой эффективной частоты соударений), возникающей в процессе развития неустойчивости, достаточно, чтобы полностью подавить эту неустойчивость. Действительно, в этих колебаниях существенна инерция электронов. Это значит, что столкновения электронов будут давать большой вклад в мнимую часть. Очевидно, что из инкремента неустойчивости будет вычитаться $\nu_{эфф}$. Казалось бы, приравнивая эти две величины, можно сразу найти $\nu_{эфф}$. Но на самом деле соударения дают еще больший вклад. Для этого нужно вспомнить, что осциллирующая часть функции распределения имеет множитель $\exp(i[\mathbf{k} \times \mathbf{v}]/\omega_H)$, поэтому $\nu_{эфф}$ будет входить с множителем Пятаевского $k^2 r_{He}^2$ [122]. Поскольку речь идет об очень больших $kr_{He} \approx v_{Te}/V_d$ (коротких волнах), то этот множитель играет важную роль. В результате малого уровня нелинейности достаточно, чтобы подавить неустойчивость на модах Бернштейна.

Эффективную частоту столкновений $\nu_{эфф}$ при неустойчивости на модах Бернштейна приближенно можно найти следующим способом. Видоизменим известное дисперсионное уравнение линейной теории неустойчивости таким образом, чтобы включить в него столкновения с искомой частотой $\nu_{эфф}$. Это можно сделать, добавив в линеаризованное кинетическое уравнение для поправки к электронной функции

распределения интеграл столкновений в форме Фоккера—Планка $\partial^2 f / \partial v_{\perp}^2$. В полученном дисперсионном уравнении будем считать, что нелинейные эффекты (учтенные введением $v_{эфф}$) приводят к насыщению неустойчивости:

$$\gamma_k - v_{эфф} k^2 r_{He}^2 = 0. \quad (4.44)$$

Подставляя сюда инкремент $\gamma = \omega_H V_d / v_{Te}$ волновое число $k \approx \omega_H / V_d$ нарастающих возмущений, получаем [123]

$$v_{эфф} = 10^{-1} \omega_H (V_d / v_{Te})^3. \quad (4.45)$$

Описанный подход, в котором влияние нелинейных процессов учитывается путем введения в линейную теорию устойчивости турбулентных коэффициентов переноса такой величины, что система возвращается к порогу устойчивости, уже неоднократно использовался в задачах об аномальной диффузии и теплопроводности неоднородной плазмы [X]. Соотношение (4.39) можно получить также на основе нелинейной теории устойчивости, использующей вместо невозмущенных траекторий частиц траектории, соответствующие блужданиям в турбулентных полях [124]. Формально это соответствует учету затухания из-за турбулентной диффузии частиц. В результате вместо (4.44) получаем

$$\gamma_k - k^2 \bar{D} = 0, \quad (4.46)$$

где

$$D \approx \frac{c^2}{H_0^2} \sum_k \gamma_k^{-1} |E_k|^2 \frac{1}{\sqrt{\pi} k r_{He}}.$$

Отсюда нетрудно оценить уровень возникающей турбулентности:

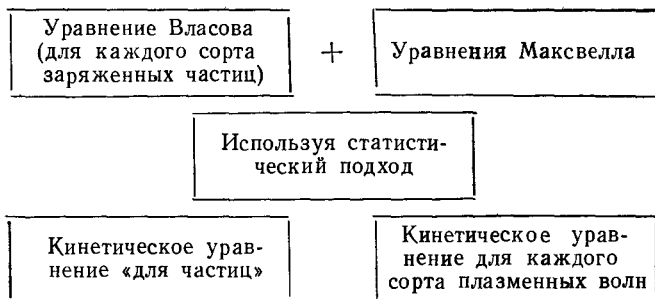
$$W / N_0 T_e \approx (\omega_H^2 / \omega_p^2) (V_d / v_{Te})^3. \quad (4.47)$$

Оценка для эффективной частоты соударений совпадает с уравнением (4.45), так как $D_{\perp} \approx v_{эфф} r_{He}^2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Соотношение между различными частями теории слаботурбулентной плазмы представим в виде общей схемы используемых уравнений.

Схема теории слаботурбулентной плазмы



Эти уравнения символически запишем в общей форме:

$$\boxed{\frac{df(\mathbf{v})}{dt} = \text{St}[f(\mathbf{v})]}$$

$$\boxed{\frac{dn(\mathbf{k})}{dt} = \text{St}[n(\mathbf{k})]}$$

Здесь столкновительный член имеет вид

В первом приближении

$$\boxed{\text{St} = \text{St}_{QL}[\bar{f}(\mathbf{v})]}$$

$$\boxed{\text{St}[n(\mathbf{k})] = 2\text{Im}\omega_{\mathbf{k}}[f(\mathbf{v})] \cdot n_{\mathbf{k}}}$$

Здесь $\text{Im}\omega_{\mathbf{k}}[f(\mathbf{v})]$ символически отражает зависимость инкремента от функции распределения $f(\mathbf{v})$. Это приближение соответствует квазилинейному приближению, изложенному во второй главе, и учитывает только линейное взаимодействие между волнами и резонансными частицами при выполнении условия резонанса $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Во втором приближении

а) Взаимодействие волна — волна (см. гл. 1)

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3,$$

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3.$$

Соударительный член в кинетическом уравнении для частиц описывает адиабатическое взаимодействие волн с частицами, участвующими в колебательном движении

$\text{St}(n) = n \cdot n$ — символическая запись, отражающая квадратичный характер трехволнового взаимодействия

б) Нелинейное взаимодействие волна — частица (см. гл. 3)

$$\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}.$$

Соударительный член по существу описывает резонансное взаимодействие частиц с бисониями на смешанных частотах

$\text{St}(n) = n \cdot n \cdot f$ — символическая запись, отражает тот факт, что частицы также участвуют во взаимодействии

В третьем приближении

Снова имеется только адиабатическое взаимодействие частиц с волнами

$\text{St}(n) = n \cdot n \cdot n$
Такие процессы важны в случае нераспадного спектра (см. § 1.3)

Описанный подход неприменим в случае сильной турбулентности, когда малый параметр по существу отсутствует и поэтому взаимодействия высших порядков дают такой же вклад, как и члены, удержанные здесь. Некоторые простые примеры оценок для этого случая приведены в задаче об аномальном сопротивлении плазмы (см. гл. 4).

В данном обзоре мы не рассматривали задач, связанных с эффектами типа плазменного эха, открытого Голдом, О'Нейлом и Малмбергом [127] (подробнее см. обзор Б. Б. Кадомцева [128]). Эффект эха — это нелинейный эффект типа смещения мод и наличие его обусловлено долго сохраняющейся модуляцией функции распределения частиц в поле волны типа $\exp(ikvt)$ (или, иначе говоря, наличием «памяти» в системе).

В последнее время эффекты, связанные с наличием памяти, интенсивно исследуются в приложении к задачам распространения волн в неоднородной плазме [129], эволюции волновых пакетов [130], нелинейного взаимодействия мод [120].

ПРИЛОЖЕНИЕ

УЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В МЕТОДЕ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

Итак, в методе слабой турбулентности плазму описывают как совокупность газов: частиц (зарядов плазмы) и «квазичастиц» (волн). Роль источника волн играют неустойчивости плазмы. Однако в плазме имеются колебания, возбужденные, правда, до малых амплитуд и при отсутствии неустойчивости. Это тепловые флуктуации (или равновесные шумы). Коль скоро имеются такие шумы, они также создают квазилинейную диффузию, и их легко учесть как добавочный эффект в общей схеме метода слабой турбулентности. Правильный учет равновесных колебаний требует рассмотрения спонтанного излучения и поглощения колебаний отдельными частицами [VII—VIII].

Введем флуктуирующую часть функции распределения $\delta f(r, v, t)$, удовлетворяющую закону корреляции идеального газа для случая плазмы без магнитного поля

$$\langle \delta f(r, v, t) \delta f(r', v, t') \rangle = \delta(v - v') \delta[r - r' - v(t - t')] f(v). \quad (\text{П.1})$$

В простейшем случае продольных колебаний

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(k, \omega) \Phi_{k\omega} &= \sum_j \frac{4\pi e_j}{k^2} \int \delta f_{k\omega}^j d^3 v; \\ \delta f_{k\omega} &= \int \delta f(r, v, t) \exp[i\omega t - ik \cdot r] dt d^3 r; \\ \varepsilon(k, \omega) &= 1 + \sum_j \frac{4\pi e_j^2}{k^2} \int \frac{k \cdot (\partial f_j / \partial v) d^3 v}{\omega - k \cdot v + i0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2})$$

Флуктуирующая часть δf — дополнительный источник электрического поля. Однако нас интересуют квадратичные флуктуации $|\Phi_{k\omega}|^2$. Умножая уравнение (П.2) на $\Phi_{k\omega}^*$, получаем

$$\varepsilon(k, \omega) |\Phi_{k\omega}|^2 \approx - \frac{4\pi e}{k^2} \Phi_{k\omega}^* \int \delta f_{k\omega}^e d^3 v \quad (\text{П.3})$$

или

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) |\Phi_{\mathbf{k}\omega}|^2 = \frac{(4\pi e)^2}{k^4 \varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \int \delta f_{\mathbf{k}\omega} d^3 \mathbf{v} \int \delta f_{\mathbf{k}\omega}^* d^3 \mathbf{v}. \quad (\text{П.4})$$

Используя символическую запись

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon[\mathbf{k}, \text{Re } \omega + i\partial/\partial t] \approx \varepsilon(\mathbf{k}, \text{Re } \omega) + i(\partial\varepsilon/\partial\omega)(\partial/\partial t)$$

и усредняя $\delta f \cdot \delta f^*$, согласно закону корреляции (П.1), нетрудно получить

$$\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})}{\partial\omega_{\mathbf{k}}} \cdot \frac{\partial|\Phi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = \text{Im} \frac{16\pi^2 e^2}{k^4} \int \frac{f_{0e}(\mathbf{v})}{\varepsilon^*(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}. \quad (\text{П.5})$$

Этот дополнительный член, описывающий спонтанное излучение волн плазмой, нужно добавить в правую часть кинетического уравнения для волн. Соответствующий ему эффект отдачи (реакция частиц на спонтанное излучение) даст дополнительный член в квазилинейном уравнении для функции распределения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{fluct}} = \left\langle \frac{e\nabla\delta\Phi}{m} \cdot \frac{\partial\delta f}{\partial\mathbf{v}} \right\rangle, \quad (\text{П.6})$$

где $\nabla\delta\Phi$ добавка к электрическому полю, возникающая из-за спонтанных флуктуаций. Усредняя $\delta\Phi\delta f$ с учетом уравнения (1) и (2), находим искомый дополнительный член в кинетическом уравнении

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{fluct}} = -\frac{\pi N e^4}{m^2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 k^4} \int d^3 \mathbf{v}' \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} f_e(\mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_e(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}. \quad (\text{П.7})$$

Разумеется, эти дополнительные члены [в кинетическом уравнении для волн (5) и в квазилинейном уравнении (7)] пренебрежимо малы, если речь идет о неустойчивой плазме. В устойчивой плазме баланс между членом (5) и затуханием Ландау определяет равновесный уровень тепловых флуктуаций волн. Этот равновесный уровень после подстановки в квазилинейное уравнение дает

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{QLA} = \frac{\pi N e^4}{m^2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 k^4} \int d^3 \mathbf{v}' \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} f_e(\mathbf{v}') \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (\text{П.8})$$

Вместе члены (П.7) и (П.8) представляют собой известную форму интеграла столкновений Ленарда—Балеску [125, 126]. Таким образом, видим, как из-за простого добавления эффектов бинарной функции распределения (f_2) из метода слабой турбулентности выводится обычное кинетическое уравнение для устойчивой плазмы. Наряду со спонтанным излучением волн плазмой в кинетическом уравнении для волн следует учесть черенковское излучение частиц, движущихся в поле волны, введенной в плазму извне (неравновесное излучение). В методе слаботурбулентной плазмы оно выглядит как рассеяние волны на тепловых флуктуациях электронной плотности. Поэтому для полноты необходимо вычислить величину

$$\langle \delta n_{\mathbf{k}\omega} \delta n_{\mathbf{k}'\omega'} \rangle = (2\pi)^4 \langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'). \quad (\text{П.9})$$

Флуктуирующую часть функции распределения электронов можно представить в виде

$$f_{k\omega}^e(v) = \delta f_{k\omega}^e + \frac{e}{m} \frac{k(\partial f_{0e}/\partial v)}{\omega_k - k \cdot v} \Phi_{k\omega}, \quad (\text{П.10})$$

где потенциал $\Phi_{k\omega}$ связан с $\delta f_{k\omega}^e$ соотношением (П.2), в котором теперь следует провести суммирование по сортам частиц. Подставляя (П.10) в (П.9), получаем хорошо известный результат

$$e^2 \langle \delta n_e^2 \rangle_{k\omega} = \frac{2k^2}{\omega |\varepsilon(k, \omega)|^2} \{A_e |1 + \varepsilon_i|^2 + A_i |\varepsilon_e|^2\}, \quad (\text{П.11})$$

где

$$A_j = \frac{\pi e_j^2 \omega}{k^2} \int f_{0j}(v) \delta(\omega - k \cdot v) d^3v.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

МОНОГРАФИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

- I. Sagdeev R. Z., Galeev A. A. Lectures on nonlinear plasma theory. ICTP Trieste, 1966. Preprint IC/66/64; Nonlinear plasma theory. Ed. by T. O'Neil, D. Book, Benjam., N. Y. — Amsterdam, 1969.
- II. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. В сб: Вопросы теории плазмы. В. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 20.
- III. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. Там же, с. 188.
- IV. Веденов А. А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. В сб: Вопросы теории плазмы. В. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 203.
- V. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.
- VI. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1, 2. М. Атомиздат, 1970, 1971.
- VII. Ахизер А. И. и др. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат 1964.
- VIII. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.
- IX. Веденов А. А., Рютов Д. Д. Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. В сб.: Вопросы теории плазмы. В. 6. М., Атомиздат, 1972.
- X. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Турбулентные процессы в тороидальных системах. В сб: Вопросы теории плазмы. В. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 209.

Оригинальные статьи

1. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», 1962, XXXII, 1291.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», 1961, 1, 82.
3. Галеев А. А., Ораевский В. Н. «Докл. АН СССР», 1962, 147, 71.
4. Lighthill M. J. J. Inst. Math. Appl., 1965, 1, 269.
5. Сагдеев Р. З. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 346.
6. Волков Т. Ф. Там же. Т. 3, с. 336; т. 4, с. 98.
7. Tanjuti T., Washimi H. Phys. Rev. Lett., 1968, 21, 209.
8. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1965, 48, 1679.
9. Du Bois D. F., Goldman M. V. Phys. Rev. Lett., 1965, 14, 544.
10. Гапоиов А. В., Миллер М. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1958, 34, 242.
11. Векслер В. И., Коврижных Л. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1958, 35, 1116.
12. Nishikawa K. J. Phys. Soc. Jap., 1968, 24, 916, 1152.
13. Андреев Н. Е., Кирий А. Ю., Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 57, 1024.

14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
15. Галеев А. А., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1963, 44, 592.
16. Armstrong I. A. e. a. Phys. Rev., 1962, 127, 1918.
17. Pierce J. R. Travelling wave tubes. Van Nostrand Co., N. Y., 1950.
18. Бломберген Н. Нелинейная оптика. Пер. с англ. М., «Мир», 1966.
19. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., ВИНТИ, 1964.
20. Louisell W. H. Coupled modes and parametric electronics. J. Wiley and Sons, N. Y., 1960.
21. Галеев А. А., Оравский В. Н. «Докл. АН СССР», 1964, 154, 1069.
22. Захаров В. Е. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 51, 1107; «Прикл. механ. и техн. физ.», 1968, 2, 86.
23. Benjamin T. B., Feir J. E. J. Fluid. Mech., 1967, 27, 417.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
25. Benney D. J. J. Fluid. Mech., 1962, 14, 577.
26. Леонтович М. А. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1944, 81, 16.
27. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1950, 20, 1064.
28. Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И. В сб: Нелинейная оптика. Новосибирск, «Наука», СО АН СССР, 1968.
29. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. «Успехи физ. наук», 1971, 103, 193.
30. Chiao R., Gardmire F., Townes C. Phys. Rev. Lett., 1964, 13, 479.
31. Аскарян Г. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1962, 42, 1567.
32. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 52, 1081.
33. Самас М., Kantrowitz A. R., Litvak M. e. a. Nucl. Fusion Suppl. 1, Part. 2, 423.
34. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1962, 43, 2234.
35. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
36. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. «Докл. АН СССР», 1966, 170, 1292.
37. Aamodt R., Drummond W. B. J. Nucl. Energy, 1964, 6, 147.
38. Захаров В. Е. «Прикл. механ. и техн. физ.», 1965, 4, 35.
39. Филиппс О. М. В сб.: Ветровые волны. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962, с. 219.
40. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. «Прикл. механ. и теор. физ.», 1967, 5, 62.
41. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 47, 2266.
42. Пистунович В. И., Тимофеев А. В. «Докл. АН СССР», 1964, 159, 779.
43. Berk N. L. e. a. Phys. Rev. Lett., 1969, 22, 876.
44. Дикасов В. М., Рудаков Л. И., Рютов Д. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1965, 48, 913.
45. Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. App. Phys., 1969, 55, 207.
46. Вединов А. А., Рудаков Л. И. «Докл. АН СССР», 1964, 159, 767.
47. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1946, 16, 574.
48. Bernstein I., Green J., Kruskal M. Phys. Rev., 1957, 108, 546.
49. Sagdeev R. Plasma Physics. IAEA, Виенна, 1965, p. 555.
50. Dungey J. J. Fluid. Mech., 1963, 15.
51. Мазитов Р. К. «Прикл. механ. и техн. физ.», 1965, 1, 27.
52. O'Neil T. Phys. Fluids., 1965, 8, 2255.
53. Morales G. J., O'Neil T. Phys. Rev. Lett., 1972, 28, 417.
54. Fried B., Liu C., Means R., Sagdeev R. Bull. Amer. Phys. Soc., 1970, 15, 142.
55. Онищенко И. Н., Лицкий А. Р., Мацборко Н. Г. и др. «Письма ЖЭТФ», 1970, 12, 407.

56. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», Приложение II, 1962, с. 465.
57. Dutton W. E., Pines D. Nucl. Fusion Suppl., 1962, 3, 1049.
58. Ромаиов Ю. А., Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1961, 10, 123.
59. Альтшуль Л. М., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 47, 1552.
60. Dupree T. Phys. Fluids, 1966, 9, 1773.
61. Иваиов А. А., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 51, 1522.
62. Galeev A., Kennel C., Sagdeev R. ICTP, Trieste 1966, rept. IC/66/83.
63. Рудаков Л. И., Кораблев А. Е. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 50, 220.
64. Файнберг Я. Б., Шапино В. Д., Шевченко В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 57, 967; Рудаков Л. И. Там же, 1970, 59, 2091.
65. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д. Там же, 1971, 60, 408.
66. Захаров В. Е., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1962, 43, 490.
67. Post R. Phys. Rev. Lett., 1967, 18, 232.
68. Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д. «Письма ЖЭТФ», 1971, 14, 320.
69. Роуландс Дж., Шапино В. Д., Шевченко В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 50, 979.
70. Андронов А. А., Трахтенгерц В. Ю. «Геомagnetизм и аэрономия», 1964, IV, 233.
71. Kennel C. F., Petshek H. J. Geophys. Res., 1966, 71, 1.
72. Kennel C. F. Rev. Geophys., 1969, 1, 379.
73. Веденов А. А., Сагдеев Р. З. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», 1953, 3, 278.
74. Шапино В. Д., Шевченко В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1968, 45, 1612.
75. Заславский Г. М., Моисеев С. С. «Прикл. механ. и техн. физ.», 1962, 6, 119.
76. Moiseew S., Sagdeev R. J. Nucl. Energy, 1963, C5, 43.
77. Fried B. Phys. Fluids, 1959, 2, 337.
78. Furth H. Phys. Fluids, 1963, 6, 48.
79. Biskamp D., Sagdeev R., Schindler K. Cosmic Electrodyn, 1970, 1, 297.
80. Coppi B., Laval G., Pellat R. Phys. Rev. Lett., 1966, 16, 1207.
81. Laval G., Pellat R., Vuillemin M. In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Res., v. 2, IAEA, Vienna, 1966.
82. Schindler K. Proc. of the Seventh Int. Conf. on Phenomena in Ionised Gases, Gradevinska Knigga, Belgrad 1966, Yugoslavia, v. 2, p. 736.
83. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 57, 1047.
84. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 1961, 138, 581.
85. Галеев А. А., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1963, 45, 647.
86. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 1963, 150, 775.
87. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1963, 45, 1231.
88. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», 1965, 5, 20.
89. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. «Докл. АН СССР», 1969, 188, 69; Pogutze O. P. Nucl. Fusion, 1972, 12, 39.
90. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 1964, 157, 1087.
91. Силин В. П. «Прикл. механ. и техн. физ.», 1964, 1, 31.
92. Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1972, 62, 158.
93. Valeo E., Oberman C., Perkins F. Phys. Rev. Lett., 1972, 28, 340.
94. Петвиашвили В. И. «Докл. АН СССР», 1963, 153, 1295.
95. Ахиезер И. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 47, 952; 47, 2269.
96. Коврижных Л. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1965, 48, 1114.
97. Литвак А. Г., Трахтенгерц Ю. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1971, 60, 1702.
98. Галеев А. А., Сюняев Р. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1972, 63, 1266.
99. Компанеев А. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1956, 31, 876.
100. Зельдович Я. Б., Левич Е. В., Сюняев Р. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1972, 62, 1392.

101. Кингесеп А. С., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1970, 58, 582.
102. Reugaud P. I. J. de Phys., 1968, 299, 88; 306, 872.
103. Зельдович Я. Б., Левич Е. В. «Письма ЖЭТФ», 1970, 11, 497.
104. Коврижных Л. М. «Письма ЖЭТФ», 1965, 2, 142.
105. Левич Е. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1971, 61, 112.
106. Вупетан О. Phys. Rev., 1959, 115, 603; Будкер Г. И. «Атомная энергия», 1956, 5, 9.
107. Гордеев Г. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1954, 27, 19.
108. Drummond W., Rosenbluth M. Phys. Fluids, 1962, 5, 1507.
109. Sizonenko V., Stepanov K. Nucl. Fusion, 1967, 7, 131.
110. Вупетан О. J. Nucl. Energy, 1962, C4, 111.
111. Курилко В. И., Мирошничейко В. И. Физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза. В. 3. Киев, 1963, с. 161. Wong H. V. Phys. Fluids, 1970, 13, 757; Gary S. P., Sanderson J. J. Plasma Phys. 1970, 4, 739; Lashmore C. N., Davies. J. Phys., 1970, A3, L40—45; Forslund D. e. a. Phys. Rev. Lett., 1970, 25, 1266; Lampe M. e. a. Phys. Rev. Lett., 1971, 26, 1221.
112. Sagdeev R. Z. Proc. Simp. in Appl. Math., 1967, 18, 281.
113. Gary S. P., Paul J. W. M. Phys. Rev. Lett., 1971, 26, 1097.
114. Tsyтович V. N. Culham Laboratory Rept. CLM — P244 (1970).
115. Сизоненко В. Л., Степанов К. Н. «Письма ЖЭТФ», 1969, 9, 282.
116. Векштейн Г. А., Сагдеев Р. З. «Письма ЖЭТФ», 1970, 11, 297.
117. Векштейн Г. А., Рютов Д. Д., Сагдеев Р. З. «Письма ЖЭТФ». 1970, 12, 419.
118. Рудаков Л. И. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., IAEA, Вiena, 1971, p. 235.
119. Bers A., Coppi B., Dupree T., Kulsrud R. Ibid., 1971, v. 3, p. 247.
120. Dupree T. H. Phys. Rev. Lett., 1970, 25, 789; Kadomtsev B. B., Pogutse O. P. Phys. Rev. Lett., 1970, 25, 1115.
121. Biskamp D. Chodura Lab. rept of Max-Planck Inst. fur Plasmaphysik. Garching, N IPP 6/97, 1971.
122. Питаевский Л. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1963, 44, 969.
123. Галеев А. А., Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. и др. «Письма ЖЭТФ» 1972, 15, 417.
124. Галеев А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 57, 1361; Phys. Fluids, 1967, 10, 1041.
125. Lenard A. App. Phys., 1960, 10, 390.
126. Balescu R. Phys. Fluids, 1960, 3, 52.
127. Gold R. W., O'Neil T. M., Malmberg J. H. Phys. Rev. Lett., 1967, 19, 219.
128. Кадомцев Б. Б. «Успехи физ. наук», 1968, 95, 111.
129. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Волновые процессы в неоднородной плазме. См. наст. сб., стр. 146.
130. Denavit J., Sudan R. Phys. Rev. Lett , 1972, 28, 404.

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев

ВВЕДЕНИЕ

Исследование влияния неоднородности плазмы на характер распространения и взаимодействия волн начато довольно давно (см. работы [1, 2] и литературу к ним). В последние годы этот раздел физики плазмы интенсивно развивается и его результаты имеют большое практическое применение [3—5]. Можно назвать следующие направления развития теории по интересующему вопросу: а) учет неоднородной неоднородности среды; б) исследование совместного влияния нелинейности и неоднородности (генерация гармоник, распадные процессы, трансформация нелинейных типов волн); в) трансформация волн в неравновесных средах; г) учет кинетических эффектов при преобразовании волн в неоднородной плазме (линейное и нелинейное нелокальные отражения волн, нелокальная трансформация волн); д) продолжение исследования вопросов распространения волн в средах с одномерной неоднородностью в линейном гидродинамическом приближении, по которым теория еще далека до завершения.

В неоднородной плазме свойства волновых движений во многих существенных чертах качественно отличаются от случая однородной плазмы. Так, в пространственно неоднородной плазме «завязываются» продольные и поперечные волны, а волновой вектор \mathbf{k} — это функция координаты; далее «распадная» область взаимодействующих волн пространственно ограничена, что может привести к срыву распадных неустойчивостей вследствие выноса энергии из области распада и сужения самой распадной области; наконец, возможна фазовая фокусировка частиц неоднородностью и появление вследствие этого дополнительных макроскопических токов и т. п. Указанные особенности, в свою очередь, вызывают некоторые новые явления.

В частности, физически очевидно, что если в некоторой области пространственно неоднородной среды фазовые скорости различных типов нормальных колебаний становятся близкими друг к другу, то следует ожидать интенсивного «взаимодействия» этих нормальных колебаний. В этом случае возникает вопрос о степени трансформации энергии падающей на область «взаимодействия» волны в энергию

других типов волн [1—3, 6—9]. В задачах теории устойчивости эквивалентным является вопрос о том, насколько сильно изменяется дисперсионное уравнение для частот собственных колебаний в результате учета указанного «взаимодействия» [10—13].

Зависимость волнового вектора \mathbf{k} от координаты приводит и к существенному изменению характера нелинейных явлений в неоднородных средах. Например, известно, что в нелинейной однородной среде генерация второй гармоники может происходить только при выполнении условий синхронизма $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_1$. В случае пространственно неоднородной среды условие $\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_1$ уже не должно выполняться точно, поэтому генерация второй гармоники возможна, вообще говоря, при любом законе дисперсии [5]. Хорошо известно утверждение, что электромагнитные волны проникают в плазму далеко не при всех значениях частоты ω . Вместе с тем «глубина проникновения» взаимодействующих с волнами частиц плазмы может заметно превышать глубину проникновения волн. Вследствие этого возможна передача информации о волновом движении в область пространства, недоступную исходной волне. Особое значение указанное аномальное проникновение волн приобретает в неоднородной плазме, где оно может проявляться уже в линейном по амплитуде волн приближении [14]. Приведем некоторые примеры.

1. Преобразование электромагнитных волн в плазменные (ионные или электронные) можно применить для нагрева плазмы до термоядерных температур, причем из теории и эксперимента следует, что нагрев возможен в устойчивой ламинарной плазме, если поле волны не превышает некоторого критического значения [3, 15—17]. Такой нагрев может оказаться особенно эффективным в СВЧ-диапазоне для крупномасштабных термоядерных реакторов [3, 18]. Он также весьма существен (при учете поверхностных явлений) в проблеме получения высоких температур с помощью фокусировки лазерного излучения на твердые мишени [19].

2. Трансформацию волн, а также их регенерацию, обусловленную кинетическими эффектами [14], можно использовать для «просветления» и диагностики плазмы.

3. Трансформация плазменных волн в электромагнитные может стать основой для создания плазменных источников электромагнитного излучения. Теория и первые эксперименты показывают возможность достижения оптимальных условий для излучения поперечных волн [1, 15, 20—24].

4. Трансформацию неустойчивых мод в устойчивые можно применить для стабилизации неустойчивостей [25—26]. Предварительные эксперименты находятся в согласии с теорией [22].

5. Эффект генерации гармоник в неоднородной плазме, по-видимому, представляет интерес для получения миллиметровых и субмиллиметровых волн.

Следует отметить, что теория волновых процессов в неоднородной плазме, имея важные «чисто плазменные» применения, вместе

с тем весьма нечувствительна к изменению объекта исследования. Так, многие результаты этой теории легко переносятся на колебания в других неоднородных средах (например, на случай неоднородного ферромагнетика), а также могут найти интересные применения в самых разнообразных областях физики. Например, теория «пересечения решений», которая используется при исследовании трансформации волн, начала развиваться в связи с изучением неупругих атомных столкновений [27], где с успехом применяется и поныне [28, 29]. С этой же математической теорией связан цикл вопросов по «магнитному пробоя» в металлах [30]. Кроме того, по-видимому, в силу относительной простоты и физического разнообразия особенностей плазмы, влияние неоднородности для нее в некоторых случаях исследовано полнее, чем в других средах. Так, в плазме обнаружено три типа пересечения решений, различающихся как с физической, так и с математической стороны (см. раздел I настоящего сборника). В то же время для «магнитного пробоя» и для случая атомных столкновений пока, насколько нам известно, обнаружен только один тип пересечения решений — так называемый надбарьерный. Важное значение для квантовых и статистических систем имеет теория «просветления» барьеров, интенсивно разрабатываемая в случае плазмы.

Настоящий обзор содержит некоторые результаты по линейным и кинетическим явлениям в неоднородной плазме, полученные в последние годы. Что же касается линейной теории распространения волн, то от аналогичных обзоров на эту тему [3, 12] он отличается более полным исследованием различных случаев «пересечения» решений и влияния неравновесности, а также неоднородности среды.

1. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

§ 1. Типы «пересечения» решений и особенностей поля электромагнитной волны в неоднородной плазме

1. Классификация пересечения решений в случае одномерной неоднородности. Рассмотрим в линейном приближении различные типы пересечения волновых решений для неоднородной среды. Поскольку весьма обычна ситуация, когда свойства среды изменяются мало на расстояниях порядка длины волны, можно применить метод ВКБ (приближение геометрической оптики)*. Если среда неоднородна вдоль оси x , возмущения выберем в виде $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x) \exp(i\omega t - ik_y y - ik_z z)$. Тогда для $\varphi(x)$ в общем случае получим уравнение

$$\sum_{m=0}^n \beta^m u_{m+1}(x) d^{2m} \varphi / dx^{2m} = 0, \quad (1.1)$$

* Именно в этом приближении имеет смысл говорить о нормальных колебаниях неоднородной среды, близких к нормальным колебаниям в однородной среде.

где β — малый параметр, характеризующий слабую неоднородность среды, а функции $u_m(x) \sim 1$ (исключая окрестности точек, в которых они обращаются в нуль). В уравнении (1.1) для простоты опущены нечетные производные, так как в приложениях теории они часто содержат производные от функций $u_m(x)$, которые дают лишнюю степень малого параметра β и поэтому не влияют на результаты нулевого приближения. Именно в этом случае особенно удобно классифицировать различные типы пересечения решений. Решение уравнения (1.1) ищем в приближении ВКБ, в виде $\varphi(x) \sim \Pi(x) \exp \times \times [\pm i\beta^{-1/2} \int_{x_0}^x k(x') dx']$, где $\Pi(x)$ — предэкспонента. Однако приближение ВКБ нарушается вблизи точек, в которых либо волновой вектор \mathbf{k} обращается в нуль (точка поворота), либо волновые векторы, соответствующие различным типам колебаний, совпадают, т. е. $\bar{k}_m = k_0$ (точка пересечения решений [10]).

Рассмотрим различные случаи пересечения решений на наглядном примере уравнения четвертого порядка. Представим выражение для $k_{1,2}(x, \omega)$ в виде

$$k_{1,2} = 1/2 (k_1 + k_2) \pm 1/2 (k_1 - k_2). \quad (1.2)$$

Можно указать на три наиболее характерных, качественно различных случая трансформации [16].

а) *Трансформация первого типа, или «надбарьерная» трансформация.* В этом случае вещественная ось x прозрачна для обоих типов колебаний, но в комплексной x -плоскости находятся комплексносопряженные точки пересечения решений, причем в области каждой пары таких точек одно из выражений $k_1 + k_2$, $k_1 - k_2$ многозначно.

б) *Трансформация второго типа (аномальный случай).* В области трансформации находятся две точки пересечения решений, а на вещественной оси x возникают вследствие этого барьеры непрозрачности. Наиболее часто этот тип трансформации встречается в случае, когда коэффициент при второй производной обращается в нуль в некоторой точке x_c . Как будет видно ниже, в области пересечения решений обе функции $k_1 + k_2$, $k_1 - k_2$ многозначны, а точки пересечения решений окаймляют точку x_c . Важный пример такого типа — это трансформация электромагнитных волн в плазменные в области гибридных резонансов, которая исследовалась теоретически и экспериментально в обзоре [3].

в) *Трансформация при наличии одной точки пересечения* решений встречается довольно редко, но с теоретической точки зрения она весьма любопытна. Если точка пересечения решений находится на вещественной оси x , области прозрачности для обеих волн расположены по одну сторону от нее (отражательный тип трансформации). В окрестности точки пересечения решений многозначна только функция $k_1 - k_2$. В настоящее время известен только один пример пересечения такого типа [11].

2. Об особенностях поля электромагнитной волны в холодной плазме с одномерной и двумерной неоднородностью параметров. Из физических соображений ясно, что в силу резкого различия длин волн трансформация электромагнитных волн в плазменные происходит в областях, где в холодной плазме показатель преломления обращается в бесконечность (так называемые *плазменные резонансы*; в магнитном поле их также называют *гибридными резонансами*). При этом, как оказывается, поле электромагнитной волны в холодной плазме также имеет особенность в таких областях и для дальнейшего интересно выяснить характер этой особенности [1, 3; 31, 32].

Рассмотрим одномерную неоднородность. В неоднородной по оси x плазме положение полюса показателя преломления определяется условием [3]

$$\epsilon_{xx}(x) = 0. \quad (1.3)$$

В малой окрестности корня x_0 этого уравнения можно аппроксимировать $\epsilon_{xx}(x)$ линейной зависимостью

$$\epsilon_{xx} = (x_0 - x)/l; \quad l^{-1} = d\epsilon_{xx}/dx|_{x=x_0} = d \ln n_0/d|_{x=x_0}, \quad (1.4)$$

а остальные компоненты тензора ϵ_{ik} считать постоянными. Поскольку показатель преломления в окрестности $x \approx x_0$ очень велик, то электрическое поле можно считать потенциальным $E_c = -\nabla\varphi$, $\varphi = \Phi(x) \exp(ik_y y + ik_z z)$. Сохраняя в уравнении Пуассона только члены, содержащие производные от быстро меняющейся функции Φ , имеем

$$(x - x_0)d^2\Phi/dx^2 + (1 - i\sigma)d\Phi/dx = 0, \quad (1.5)$$

откуда $\Phi \sim (x - x_0)^{i\sigma}$ [$k_{xc} = \sigma/(x - x_0)$ — проекция волнового вектора, для которого точка x_0 — полюс]. Остальные электромагнитные волны не имеют особенности в точке x_0 , их поле можно считать в малой окрестности этой точки постоянным. Таким образом, при $x \rightarrow x_0$

$$\left. \begin{aligned} E_{xc} &\rightarrow e_x + B[l/(x - x_0)] \exp\{-i\sigma \ln[l/(x_0 - x)]\}; \\ E_{yc} &\rightarrow e_y + B(k_y l/\sigma) \exp\{-i\sigma \ln[l/(x_0 - x)]\}; \\ E_{zc} &\rightarrow e_z + B(k_z l/\sigma) \exp\{-i\sigma \ln[l/(x_0 - x)]\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где B и e_s — постоянные, определяемые граничными условиями.

Рассмотрим теперь вопрос об особенностях поля электромагнитной волны в холодной плазме с двумерной неоднородностью. Ниже мы в основном будем следовать работе [31]. Используя уравнение Пуассона $\text{div} \hat{\epsilon} E_c = 0$ для потенциала φ , получаем

$$\epsilon_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \epsilon_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (1.7)$$

где $2\sigma = \epsilon_{zx} + \epsilon_{xz}$; $a_x = \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + ik_y(\epsilon_{xy} + \epsilon_{yx})$; $a_z = \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial x} + ik_y(\epsilon_{zy} + \epsilon_{yz})$.

Прежде всего исследуем возможные типы особенностей решений (1.7) качественно. Пусть некоторое решение $\varphi(x, z)$ обладает особенностью $|\partial\varphi/\partial n| \rightarrow \infty$ на гладкой кривой $x = x(z)$. Определим вид эквипотенциалей вблизи этой кривой. Поскольку $x(z)$ — гладкая кривая, эквипотенциали также будут гладкими и, следовательно, функция $\mu(x, z) = (\partial\varphi/\partial z)/(\partial\varphi/\partial x)$ должна быть конечной и непрерывной в рассматриваемой области. Тогда, используя тождество $(\partial\varphi/\partial z) = \mu(\partial\varphi/\partial x)$, из уравнения (1.7) приближенно находим $\varepsilon_{zz}\mu^2 + 2\sigma\mu + \varepsilon_{xx} = 0$. Таким образом, эквипотенциали удовлетворяют уравнению

$$dx/dz = A \pm \sqrt{B}, \quad (1.8)$$

где $A = \sigma/\varepsilon_{zz}$, $B = (\sigma^2 - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz})/\varepsilon_{zz}^2$ и совпадают с характеристиками уравнения (1.7), которое относится к смешанному типу [33]. Линия параболжности $B(x, z) = 0$ разделяет области эллиптичности $B < 0$ и гиперболичности $B > 0$ уравнения (1.7) и, вообще говоря, является особой, если характеристики (1.8) касаются ее [33]. Общий интеграл уравнения (1.7) зависит от двух произвольных функций, поэтому можно получить особенность на любой характеристике. Однако такие решения — это не аналоги особых решений, рассматриваемых в случае одномерной неоднородности, так как для них требуются специальные граничные условия, по-видимому, не реализуемые в физических задачах. Если же имеет место пересечение характеристик — эквипотенциалей, принадлежащих к одному семейству, то это должно приводить к возникновению особенности для широкого класса граничных условий. Указанное пересечение или сближение характеристик возможно при наличии особых точек уравнения (1.8) или асимптот его решений. Например, в плоском случае $\varepsilon_{xx}(d^2\varphi/dx^2) + (i\sigma + d\varepsilon_{xx}/dx)(d\varphi/dx) = 0$, [где $\varepsilon_{xx} = (x - x_0)/l$] линия $x = x_0$ — асимптота одного из семейств характеристик. Если область гиперболичности ограничена, то асимптотой может быть только замкнутая кривая [34]. Однако в физических задачах характеристики (1.8) не могут быть замкнутыми кривыми или спиралями и, следовательно, не могут иметь асимптот. Если к тому же компоненты тензора ε_{ik} не имеют особенностей, то особые точки характеристик могут находиться только на линии параболжности, причем в них характеристики должны касаться линии параболжности.

Таким образом, особые точки характеристик определяются из условий

$$B(x, z) = 0; \quad \partial B/\partial z + A \partial B/\partial x = 0. \quad (1.9)$$

Исследуем поведение характеристик вблизи особой точки (1.9), которую примем за начало координат. При малых x, z можно считать, что

$$\varepsilon_{xx} = (x/a_1) - (z^2/b_1^2); \quad \sigma = -z/b_2; \quad \varepsilon_{zz} = -\varepsilon_0 < 0. \quad (1.10)$$

Подставляя выражение (1.10) в формулу (1.8) и вводя безразмерные переменные $\xi = x/a_1$, $\zeta = z/4a_1\sqrt{\varepsilon_0}$, получаем

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = 16\alpha_1 \zeta \pm 4 \sqrt{\xi - 16\alpha_2 \zeta^2},$$

$$\alpha_1 = a_1/b_2; \quad \alpha_2 = (a_1/b_2)^2 - \varepsilon_0 (a_1/b_1)^2. \quad (1.11)$$

Общий интеграл уравнений (1.11) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u_1(\xi, \zeta) &= [\sqrt{\xi - \rho\zeta^2} + (1 + \gamma)\zeta]^{1+\gamma} / [\sqrt{\xi - \rho\zeta^2} + (1 - \gamma)\zeta]^{1-\gamma}, \\ u_2(\xi, \zeta) &= u_1(\xi, -\zeta); \quad u_{1,2} = \text{const}; \quad \gamma = \sqrt{1 - 16\alpha}, \end{aligned} \right\} (1.12)$$

где $\rho = 16\alpha_2$, $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1/2$. Из формул (1.12) видно, что поведение характеристик зависит от величины параметра α .

Если $\alpha > 1/16$, через точку $x = z = 0$ не проходит ни одна характеристика, точка является фокусом (рис. 1). При $1/16 > \alpha > 0$ в точке $x = z = 0$ оканчивается бесконечное число характеристик, а именно все характеристики, заключенные между параболой $\xi = \rho\zeta^2$ и $\xi = [\rho + (1 - \gamma)^2]\zeta^2$ (рис. 2). В этом случае вблизи начала координат указанные характеристики прижимаются к параболе $\xi = [\rho + (1 - \gamma)^2]\zeta^2$ и имеют вид

$$\xi \approx [\rho + (1 - \gamma)^2]\zeta^2 + 2(1 - \gamma)(2^{1+\gamma}/|u_2|^{-1})^{1/1-\gamma} |\zeta|^{2/1-\gamma}$$

$$(0 < \gamma < 1).$$

Особая точка — узел. Для $\alpha < 0$, когда $\gamma > 1$, через точку $x = z = 0$ проходит по одной характеристике каждого семейства, соответствующих половинам парабол $\xi = [\rho + (1 + \gamma)^2]\zeta^2$ при $\zeta \geq 0$ и $\xi = [\rho + (1 - \gamma)^2]\zeta^2$ при $\zeta \leq 0$. Особая точка — это седло, причем указанные полупараболы являются асимптотами характеристик соответственно при $\zeta \rightarrow \pm \infty$ (рис. 3). С помощью выражений (1.12) нетрудно показать, что в окрестности «седла» происходит сближение характеристик вблизи параболы $\xi = [\rho + (\gamma - 1)^2]\zeta^2$. Это должно привести к особенности на данной параболе, а также на характеристике, служащей ее продолжением. Если последняя при своем продолжении достигает границы гиперболической области в узловой особой точке, то должно происходить отражение особенности, т. е. особой должна быть и вторая характеристика, выходящая из точки встречи.

Кроме особенности на характеристиках, проходящих через седло, поле должно иметь особенность в узлах, а особая точка типа фокуса не должна приводить к особенности поля.

Рассмотрим решения уравнения

$$(x - \alpha z^2)\partial^2\varphi/\partial x^2 - \partial^2\varphi/\partial z^2 + \partial\varphi/\partial x = 0, \quad (1.13)$$

структура характеристик которого подобна исследованной выше. Уравнение (1.13) имеет частные решения вида

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1n}(u, z) &= u^\beta (zu^{2\beta})^n F[(1-n)/2, -n/2; 1 + \beta(2n+1); \zeta]; \\ \varphi_{2n}(u, z) &= z^n F[(1-n)/2, -n/2; 1 - \beta(2n+1)/(1+4\beta); \zeta]; \end{aligned} \right\} (1.14)$$

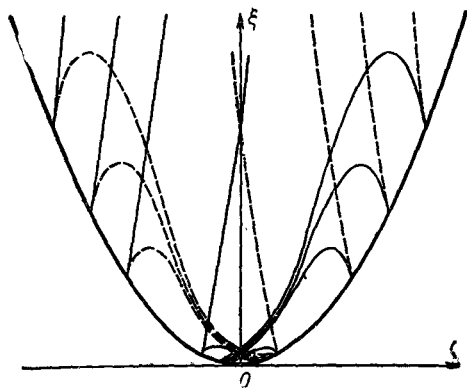


Рис. 1.

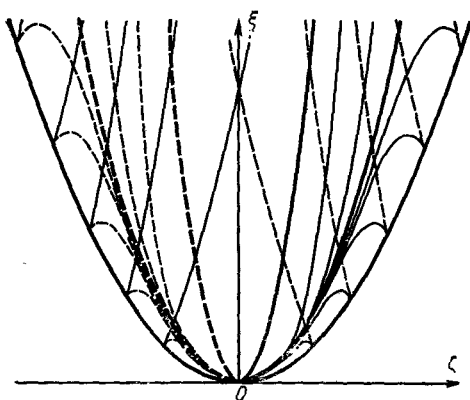


Рис. 2.

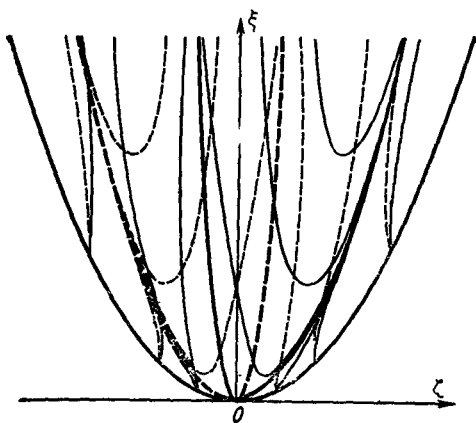


Рис. 3.

где

$1 + 4\beta = \sqrt{1 - 16\alpha}$; $u = x + 1/2\beta z^2$, $4u = (1 + 4\beta)z^2\xi$; F — гипергеометрические функции. Пусть $\beta > 0$ (седловая особая точка) и регулярные начальные данные Коши

$$\varphi(u_0, z) = \psi(z); \quad \partial\varphi/\partial u|_{u=u_0} = \Phi(z) \quad (1.15)$$

заданы на линии $u = u_0$. Ясно, что начальным данным (1.15) можно удовлетворить суперпозицией решений типа (1.14), где n — положительные целые числа. При этом решение имеет, вообще говоря, ветвление на линии $u = 0$ (особая парабола, рассмотренная выше), а поле $E_u = \partial\varphi/\partial u$ обращается на ней в бесконечность как $u^{\beta-1}$ ($0 < \beta < 1$). Кроме указанных, существуют решения, имеющие сколь угодно сильную особенность на линии $u = 0$, а также решения с особенностью на второй особой параболе $\xi = 1$, например решения (1.14), в которых n не является положительным целым числом. Используя общий интеграл уравнения (1.13), можно показать [31], что для узловой особой точки ($\beta < 0$) существуют решения, имеющие особенность только в точке $u = z = 0$, причем характер особенности зависит от направления подхода к началу координат.

Как будет видно из дальнейшего, с особенностью поля связано конечное поглощение энергии электромагнитной волны в области плазменных резонансов [1, 9, 31, 35—37].

§ 2. Надбарьерный тип трансформации

Пересечение указанного типа в случае, когда многозначно только $k_1 - k_2$, впервые исследовалось в работе [27] при изучении неупругих атомных столкновений. В работе [38] метод работы [27] был применен для решения задачи взаимной трансформации обыкновенной и необыкновенной волн в магнитоактивной плазме. Задача на собственные значения при таком типе пересечения рассматривалась в работе [25]. Случай, когда одновременно многозначны обе функции $k_1 \pm k_2$, впервые исследован в случае осцилляторов в работе [39].

Некоторые особенности данного пересечения удобнее всего рассмотреть на примере двух связанных осцилляторов [39, 40]. С формальной точки зрения такая модель мало чем отличается от задачи о трансформации волн в неоднородной плазме. Уравнения движения для рассматриваемого случая запишем в виде

$$\ddot{x} + \omega_1^2(t)x = \alpha(t)y; \quad \ddot{y} + \omega_2^2(t)y = \alpha(t)x. \quad (1.16)$$

Умножая каждое из уравнений (1.16) соответственно на x^* , y^* , складывая их, а затем вычитая из уравнения комплексно сопряженные (1.16), каждое из которых тоже умножено соответственно на x , y , получаем

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}x^* - \dot{x}^*x + \dot{y}y^* - \dot{y}^*y) = 0. \quad (1.17)$$

При постоянных $\omega_1, \omega_2, \alpha$ уравнения для нормальных координат имеют вид

$$\ddot{X} + \Omega_1^2 X = 0; \quad \ddot{Y} + \Omega_2^2 Y = 0 \quad (\Omega_1 \neq \Omega_2), \quad (1.18)$$

где Ω_1, Ω_2 — частоты нормальных колебаний, определяемые выражениями $\Omega_{1,2}^2 = 1/2 [\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{4\alpha^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}]$. Связь между x, y и нормальными координатами X, Y следующая:

$$X = \frac{(\Omega_1^2 - \omega_2^2)x - \alpha y}{\sqrt{\alpha^2 + (\Omega_1^2 - \omega_2^2)^2}}; \quad Y = \frac{\alpha x - (\Omega_2^2 - \omega_1^2)y}{\sqrt{\alpha^2 + (\Omega_2^2 - \omega_1^2)^2}}. \quad (1.19)$$

Преобразование (1.19) соответствует нормировке, при которой $X \rightarrow x, Y \rightarrow y$, если $\alpha \rightarrow 0$ и $\omega_1^2 > \omega_2^2$. При медленном изменении во времени коэффициентов системы уравнений (1.16) общее решение Z для нормальных координат можно представить в виде

$$Z = A_1 X_+ + A_2 Y_+ + A_3 X_- + A_4 Y_-,$$

$$X_{\pm} = \Omega_1 (t)^{-1/2} \exp [\pm i \int \Omega_1 (t') dt'];$$

$$Y_{\pm} = \Omega_2 (t)^{-1/2} \exp [\pm i \int \Omega_2 (t') dt'].$$

Тогда, подставляя в (1.17) x, y из (1.19), получаем

$$A^2 + B^2 = \text{const} = I. \quad (1.20)$$

Учитывая, что амплитуды a_i квазинормальных колебаний равны $a_i = A_i / \sqrt{\Omega_i}$, из (1.20) имеем

$$I = |a_1|^2 \Omega_1 + |a_2|^2 \Omega_2 = E_1 / \Omega_1 + E_2 / \Omega_2 \equiv I_1 + I_2,$$

где E_1, E_2 — соответственно энергии X, Y -колебаний. Таким образом, сохраняется сумма величин, каждая из которых — адиабатический инвариант для отдельного «квазинормального» колебания при отсутствии взаимодействия между колебаниями.

Обозначим \mathbf{A} и \mathbf{B} вектор-столбцы постоянных коэффициентов общего решения соответственно слева и справа от области пересечения решений (резонансной области). Тогда, используя аналитичность точного решения (1.16), нетрудно получить матрицу преобразования \hat{M} вектор-столбцов $\mathbf{B} = \hat{M}\mathbf{A}$. Поскольку такой вывод хорошо известен [2], приведем без доказательства вид матрицы \hat{M} для случая пересечения $\Omega_1 = \Omega_2$ [40]:

$$M_{11} = -M_{22}^* = i \sqrt{1 - \exp(-2\delta)} \exp(-i\psi);$$

$$M_{12} = M_{21} = \exp(-\delta), \quad (1.21)$$

где $2\delta = \oint_L dt \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)}{2} > 0$ (контур L охватывает обе точки пересечения), ψ — неизвестная в методе ВКБ фаза, которая не влияет на коэффициент трансформации Q между нормальными колебаниями

X_+, Y_+ и X_-, Y_- [$Q \sim \exp(-\delta)$]. Отметим, что инвариантность I следует также из унитарности матрицы \hat{M} .

В плазме полным аналогом уравнений (1.16) является, например, система уравнений, которая описывает поведение медленной и быстрой магнитозвуковых волн при медленном изменении во времени плотности плазмы. Вывод, весьма сходный с выводом уравнений для пространственно неоднородной плазмы [41], приводит к следующей системе уравнений:

$$\ddot{u}_1 + k_z^2 v_A^2 u_1 = -\theta k_z^2 v_0^2 u_2; \quad \ddot{u}_2 + k_z^2 c_s^2 u_2 = -\theta k_z^2 v_A^2 u_1. \quad (1.22)$$

Здесь v_A, c_s — соответственно альвеновская и звуковая скорости; θ — угол между волновым вектором и магнитным полем $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$; $v_0 = c_s(0)$; $h_y = H_0 u_1$; $\rho = \rho_0 u_2$; $\rho_0(t)$ — невозмущенная плотность; h_u, ρ — возмущения магнитного поля и плотности. Пересечение происходит в области $v_A \approx c_s$, при этом для малых углов θ имеем $\delta \approx \tau k_z v_0 \theta^2$, где τ — характерное время изменения ρ_0 . При $\delta \rightarrow 0$ коэффициент трансформации $Q \rightarrow 1$. Однако следует подчеркнуть, что речь идет о трансформации нормальных колебаний X, Y и в данном случае совсем не означает большого обмена энергией между осцилляторами x и y [42, 43]. В самом деле, пусть при $t \rightarrow -\infty$ будет

$y = 0, x = A \omega_1(t)^{-1/2} \exp[i \int_0^t \omega_1(t') dt']$ ($\alpha \ll \omega_{1,2}^2$). Тогда при

$t \rightarrow +\infty$ получим $y = B \omega_2(t)^{-1/2} \exp[i \int_0^t \omega_2(t') dt']$, где

$$B = \alpha / 2i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\omega_2(t)]^{-1/2} \exp \left[-i \int_0^t \omega_2(t') dt' \right] = \alpha A / \omega_0^2 (\pi/2 \omega_0 \tau)^{1/2} \times \\ \times \exp(-i\pi/4); \quad \omega_1(t) - \omega_2(t) = \omega_0 t / \tau.$$

Кроме того, в данном случае, как нетрудно видеть, $2\delta = = \pi/2 (\sqrt{\omega_0 \tau \alpha} / \omega_0^2)^2$. Отсюда следует, что уменьшение δ затрудняет перекачку энергии из колебания x в колебание y . Для примера (1.22) это означает, что если при $t \rightarrow -\infty$ энергия была сосредоточена в звуковых колебаниях, то она останется в них при $t \rightarrow +\infty$ для $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$. Следовательно, при малых α более эффективным оказывается адиабатический переход, когда $\delta \gtrsim 1$ из-за большого времени расхождения ветвей τ .

Не представляет труда найти матрицу перехода в случае резонанса $\Omega_1 = -\Omega_2$, а также при обходе области, в которой одновременно имеются резонансы $\Omega_1 = \Omega_2$ и $\Omega_1 = -\Omega_2$.

Рассмотрим некоторые примеры интересующего нас типа пересечения колебаний. Весьма важным для приложений является случай взаимной трансформации обыкновенной и необыкновенной волн в холодной плазме. Как уже отмечалось, нагрев плазмы при трансформации необыкновенной волны в плазменную весьма перспективен (этот тип трансформации рассмотрен в § 3 настоящего раздела).

Однако в крупномасштабных термоядерных установках ввод необыкновенной волны в плазму существенно затрудняется из-за наличия барьера непрозрачности и целесообразнее вводить энергию в виде обыкновенных волн, используя «трехступенчатую» трансформацию: обыкновенную волну преобразовать в необыкновенную, а последнюю в плазменную. Область отражения обыкновенной волны при малых углах θ и $\omega < \omega_{He}$ расположена в окрестности $\omega \approx \omega_{pe}(r)$, т. е. дальше от края плазмы, чем область отражения необыкновенной волны [1] (здесь ω_{He} , ω_{pe} ларморовская и ленгмюровская частота соответственно). Трансформация необыкновенной волны в обыкновенную существенна при выводе энергии из плазмы. Подробно различные случаи взаимодействия обыкновенных и необыкновенных волн рассмотрены в работе [2].

Для иллюстрации приведем один из случаев при $\omega_{He} < \omega$. На рис. 4 изображены квадраты показателей преломления необыкновенной и обыкновенной волн и амплитудные коэффициенты преобразования, считая амплитуду падающей волны единицей.

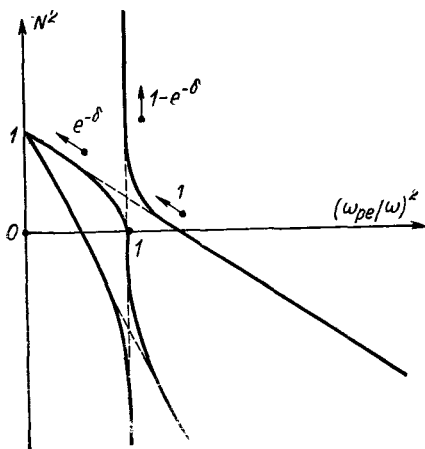


Рис. 4.

$$\text{Здесь } 2\delta_{01} = \frac{\pi\omega\theta^2}{2c\alpha(1+\omega/\omega_{He})^{3/2}}, \quad \alpha = \frac{dv}{dz} \Big|_{v=1},$$

$$v = \omega_{pe}^2(z)/\omega^2. \quad (1.23)$$

Интересно отметить, что при $\theta \rightarrow 0$ происходит полный переход необыкновенной волны в обыкновенную. Однако в этом случае свойства волн, соответствующих участкам ab и cd , мало отличаются друг от друга и в согласии со сказанным выше, переход с изменением физических свойств не происходит (при $\theta = 0$ ab и cd лежат на одной дисперсионной кривой). Приведем также уравнение, описывающее преобразование быстрых и медленных магнитозвуковых волн друг в друга [41]:

$$\Phi^{IV} + (\omega^2/v_A^2 + \omega^2/c_s^2 - k_y^2) \Phi^{II} + [\omega^2/v_A^2 (\omega^2/c_s^2 - k_y^2) - (\omega^2/c_s^2) k_y^2] \Phi = 0. \quad (1.24)$$

Здесь $v_A^2 = H_0^2/4\pi Mn_0$; $c_s^2 = T/M$; M — масса иона. При выводе (1.24) было сделано предположение, что плотность $n_0(z)$ неоднородна вдоль магнитного поля. Если коэффициент при Φ^{II} не обращается в нуль, то осуществляется надбарьерный тип пересечения в области $v_A \sim c_s$, как и в случае (1.22).

В заключение кратко обсудим вопрос о трансформации волн в среде со случайными неоднородностями. При прохождении волн через достаточно большой объем неоднородной среды число точек трансформации может быть очень большим. Естественно считать их распределение по объему хаотическим и заданным в виде некоторой случайной функции. Тогда возникает вопрос об эволюции волн в такой среде. Как и выше, удобнее, однако, исследовать аналогичную задачу о прохождении системы осцилляторов через резонансы в случайные моменты времени. Поскольку адиабатический инвариант каждого нормального колебания существенно изменяется только в узкой области резонанса, т. е. фактически скачкообразно, то в соответствии с работой [44] будем говорить о столкновениях нормальных колебаний. Направление эволюции (устойчивость или неустойчивость) зависит от вида инварианта дифференциального уравнения, описывающего систему осцилляторов в области резонанса [45, 46]. Если решение имеет вид $\sum_n A_n X_n$, где X_n — квазинормальные колебания, то инвариант является квадратичной формой из постоянных A_n

$$\sum_n s_n |A_n|^2 = \text{const} = \text{invar} \quad (s_n = \pm 1). \quad (1.25)$$

Допустим, что все s_n одного знака, тогда $|A_n|$ ограничен сверху, т. е. движение осцилляторов финитно в фазовом пространстве. В противном случае система может быть неустойчивой. Строгое доказательство этого положения в общем виде затруднительно, однако на частных примерах оно подтверждается.

Для одного осциллятора в случайном внешнем поле резонансами являются точки, в которых $\omega(t) = 0$. Инвариант имеет вид $|A_+|^2 - |A_-|^2 = \text{invar}$. Таким образом, можно ожидать, что движение будет неустойчиво. Решение задачи [44] подтверждает этот вывод.

В работе [47] рассматривалась трансформация волн в среде со случайными неоднородностями. Формально ситуация эквивалентна системе двух связанных осцилляторов с резонансами $\Omega_1 = \Omega_2$. Инвариант имеет вид $|A_1|^2 + |A_2|^2 = \text{invar}$. Найдено, что независимо от начальных условий система приближается к равновесию, в котором $A_1 = A_2$ (в соответствии со сказанным выше). В работе [45] исследовалась трансформация при случайных столкновениях, когда инвариант системы связанных осцилляторов имел вид $|A_1|^2 + |A_2|^2 - |A_3|^2 - |A_4|^2 = \text{invar}$. Система осцилляторов оказалась неустойчивой. Максимальное значение инкремента этой трансформационной неустойчивости порядка частоты прохождения резонансов (частоты столкновений). Отсюда следует важный вывод: если не все s_n одного знака, то каждое колебание при трансформации увеличивает свою амплитуду за счет энергии среды. Этот вывод может иметь существенное значение, в частности, для задач по устойчивости плазменных ускорителей.

§ 3. Аномальный тип трансформации волн

1. Аномальный тип пересечения. Вводные замечания. Второй тип пересечения волновых решений с математической точки зрения наиболее сложный, а кроме того, с ним связаны такие существенные физические приложения, как СВЧ-нагрев плазмы в крупномасштабных термоядерных установках [3, 18]. Отметим также, что указанным пересечением определяются многие из особенностей поведения пучково-плазменных разрядов (см. § 4 настоящего раздела).

Второй тип трансформации назовем также аномальным, поскольку, например, в случае гибридных резонансов, как уже отмечалось выше, электрическое поле и показатель преломления имеют особенность в резонансном слое холодной плазмы, а коэффициент трансформации может достигать единицы [8].

Исследованию трансформации второго типа посвящено большое число работ. Подробную библиографию по аномальной трансформации см. в работе [3]. Анализ работ по аномальному типу трансформации легко позволяет увидеть две тенденции при решении задач: использование метода «холодного» уравнения и построение теории при учете старшей производной. Метод холодного уравнения, получивший наиболее полное развитие в работе [9], основан на использовании замечательной особенности аномальной трансформации: равенстве коэффициента поглощения электромагнитной волны в холодной плазме коэффициенту трансформации электромагнитной волны в медленную плазменную волну в «горячей» плазме. Это обстоятельство позволяет существенно упростить задачу и часто ее удается свести к исследованию дифференциального уравнения второго порядка. С помощью указанной методики авторам работы [3] удалось проанализировать большое количество задач с теоретической и экспериментальной точек зрения. Поэтому возникает следующий вопрос, особенно важный с точки зрения будущих исследований: является ли анализ трансформации второго типа на основе дифференциального уравнения четвертого порядка нужным по существу дела или он интересен лишь с методической и математической сторон, как дополнительный способ доказательства? Назовем некоторые из причин, вследствие которых, по нашему мнению, важен анализ решений дифференциального уравнения четвертого порядка.

1. Эквивалентность поглощения волн в холодной плазме, описываемого уравнением вида $x^m (d^2\varphi/dx^2) + u(x)\varphi = 0$, их трансформации в тепловые колебания, описываемой уравнением $\alpha (d^4\varphi/dx^4) + x^m (d^2\varphi/dx^2) + u(x)\varphi = 0$, доказаны только для $m = 1$. В случае произвольного m эта эквивалентность не очевидна [48, 49].

2. Если параметр α в написанном выше уравнении четвертого порядка комплексный, то даже при $m = 1$ необходимо дополнительное исследование указанного уравнения для того, чтобы убедиться в равенстве коэффициента поглощения коэффициенту трансформации длинноволнового колебания $k_1 \approx \sqrt{u_1/u_2}$ в коротковолновое $k_2 \approx \sqrt{u_2/\alpha}$ [50].

3. Укороченное уравнение, из которого получается правильное выражение для коэффициента поглощения, равного коэффициенту трансформации длинноволновой моды в коротковолновую, совпадает с уравнением для волн в холодной плазме лишь в пределе достаточно слабого теплового движения [51].

4. Совместное исследование влияния диссипации, теплового движения (в рамках дифференциального уравнения четвертого порядка) и нелинейных процессов необходимо для выяснения характера распределения энергии электромагнитной волны, падающей на область с особенностью (сингулярностью) показателя преломления. В некоторых случаях ситуация проанализирована в основном с качественной стороны [5, 52].

5. Даже в тех случаях, когда исследование «холодного» уравнения дает правильную информацию о преобразовании длинноволновой моды в коротковолновую, исследование уравнения четвертого порядка может дать дополнительную информацию об особенностях пересечения решений [13].

6. Для некоторых задач, таких, например, как задача на собственные значения [10, 11] или задача об определении критических токов в пучково-плазменных разрядах [26], при наличии аномального пересечения, анализ полного уравнения для обеих пересекающихся мод вытекает из самой сущности проблемы.

7. Вопрос об эквивалентности теплового движения диссипации в холодной плазме для случая трансформации второго типа при двумерной начальной неоднородности в настоящее время является открытым [53].

Таким образом, как следует из сделанных замечаний, существует широкий круг вопросов в задачах аномального типа пересечения, при исследовании которых недостаточно ограничиться анализом «холодного» уравнения*. Учитывая это, а также то, что по методу «холодного» уравнения имеется подробный обзор [3], рассмотрим в следующем разделе некоторые результаты, вытекающие из решения дифференциальных уравнений четвертого порядка в интересующем нас случае. Одновременно проиллюстрируем сделанные выше замечания (см. также разделы 1 § 4 и 2 § 2).

2. Методы исследования аномального пересечения. В связи с многочисленными приложениями (см., например, работу [54] и приведенную там библиографию) важное значение имеет уравнение

$$\alpha\beta^2\varphi^{IV} + \beta u_2(x)\varphi^{II} + u_1(x)\varphi = 0 \quad (1.26)$$

с двумя малыми параметрами α и $\beta \sim (\lambda/L)^2$, где λ , L — соответственно длина волны и длина неоднородности ($x = x/L$). Дополнительный малый параметр α связан с конкретной физической ситуа-

* Разумеется, важность исследования трансформации первого и третьего типов на основе дифференциальных уравнений четвертого порядка очевидна ввиду отсутствия эквивалентности между тепловым движением и диссоциацией.

цией и характеризует, например, влияние малой вязкости, либо слабого теплового движения и т. д. Волновой вектор $k(x)$ удобно написать в следующем виде

$$k_{1,2}(x) = (1/2) (\sqrt{u_2/\alpha + 2\sqrt{u_1/\alpha}} \pm \sqrt{u_2/\alpha - 2\sqrt{u_1/\alpha}}). \quad (1.27)$$

Вблизи нуля функции $u_2(x)$ имеем $u_2(x) = Ux$, $u_1 = u_1(0)$. При этом из формулы (1.27) видно, что пересечение решений уравнения (1.26) происходит в точках $x_{1,2} = \pm (2/U)\sqrt{\alpha u_1(0)}$, в которых

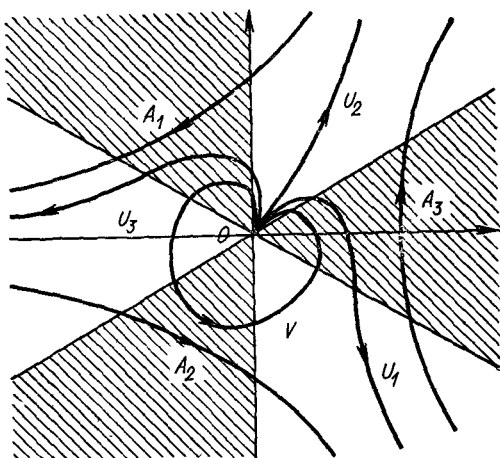


Рис. 5.

имеют ветвление соответственно функции $k_1 - k_2$ и $k_1 + k_2$. Расстояние между x_1, x_2 (размер особой области) $\Delta x \sim \alpha^{1/2}L \ll L$, а $k\Delta x \sim (\alpha/\beta^2)^{1/4}$. В работе [10] дифференциальное уравнение (1.26) исследовалось для случая, когда между точками пересечения решений $x = \pm (2/U)\sqrt{\alpha u_1(0)}$ укладывалось много длин волн пересекающихся решений, что позволяло воспользоваться методом фазовых интегралов при обходе каждой особенности в отдельности. При таком подходе приходится, однако, пользоваться методом неопределенных множителей Цваана (см., например, работу [40]), который в некоторых случаях приводит к определенной неоднозначности ответа [50]. Более удобным здесь оказывается метод Лапласа, позволяющий в сочетании с аналитическими свойствами решений с единой точки зрения провести исследование задачи при любых значениях α/β^2 [13]. После замены переменной $x = \beta y$ в окрестности нуля $u_2(x)$ из формулы (1.26) получим

$$\varphi^{IV} + \lambda^2(\gamma\varphi^{II} + \gamma\varphi) = 0, \quad (1.28)$$

где $\lambda^2 = \beta^2/\alpha$, $\gamma = u_1(0)$ и для простоты считаем $U = 1$. Таким образом, исходное уравнение (1.26) сведено к уравнению (1.28), кото-

рое исследовалось в работе [55] при больших значениях параметра λ . Решение (1.28) выражается в виде контурного интеграла

$$\Phi(y) = \int_C \frac{dt}{t^2} \exp\left(\frac{t}{3\lambda^2} + ty - \frac{\gamma}{t}\right). \quad (1.29)$$

Выберем контур c , как и в работе [55] (рис. 5); концы контуров, уходящих в бесконечность, лежат в секторах t -плоскости, где $\operatorname{Re} t^3 < 0$. Тогда, согласно теореме Коши, имеем следующую связь между решениями:

$$A_1 + A_2 + A_3 = V; U_3 - U_2 = A_1; U_1 - U_3 = A_2 - V. \quad (1.30)$$

Покажем теперь подобие асимптотических решений (1.28) для больших и малых λ . Рассмотрим решение V . Вычисляя вычет при $t = 0$, получаем

$$V = 2i\pi \sqrt{y/\gamma} \left[\mathcal{Y}_1(2\sqrt{\gamma y}) + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \mathcal{Y}_{3m-1}(2\sqrt{\gamma y}) \right], \quad (1.31)$$

где $a = \gamma^{3/2}/3\lambda^2 y^{3/2}$; $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_{3m-1}$ — функции Бесселя соответствующего индекса. Для достаточно больших значений y , когда $|a| \ll 1$; в выражении (1.31) можно пренебречь суммой, и оно переходит в соответствующее выражение, полученное в работе [55]. Рассмотрим теперь решения A_k . Сделав в (1.29) замену $t = \lambda\sqrt{ys}$, имеем

$$A_k = \frac{1}{\lambda \sqrt{y}} \int_{c(A_k)} \frac{ds}{s^2} \exp\left[\lambda y^{3/2} \left(s + \frac{s^3}{3}\right) \frac{\gamma}{\lambda \sqrt{ys}}\right]. \quad (1.32)$$

Из (1.32) видно, что (как и в случае $\lambda \gg 1$) для $|y| \gg \gamma^2/\lambda^2$ можно пренебречь членом $\gamma/\lambda\sqrt{ys}$ в показателе экспоненты и провести дальнейшие вычисления, как это сделано в работе [55]. Приведем здесь асимптотическое выражение решения A_3 :

$$A_3 \approx \begin{cases} \sqrt{\pi} \lambda^{-3/2} y^{-5/4} \exp\left(-i \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} i \lambda y^{2/3}\right); & 0 < \arg(y\lambda^{2/3}) < 2\pi, \\ V - (2i \sqrt{\pi}/\lambda^{3/2} y^{5/4}) \sin(\pi/4 + 2y^{3/2} \lambda/3); & \arg(y\lambda^{2/3}) = 0. \end{cases} \quad (1.33)$$

Как видно из формулы (1.33), в секторе $(2\pi/3) < \arg(y\lambda^{2/3}) < (4\pi/3)$ решение A_3 ведет себя как наиболее быстро спадающее и не содержит «примесей» других решений. В секторе $|\arg(y\lambda^{2/3})| < (\pi/3)$ (исключая линию: $\arg(y\lambda^{2/3}) = 0$) в пределах погрешности метода перевала решение V не влияет на поведение A_3 . Подобие асимптотик для U_k при больших и малых λ доказывается аналогично. Таким образом, правила одновременного обхода точек ветвления фазы $y_0 = \pm (2/\lambda)\sqrt{\gamma}$ не зависят от расстояния между точками ветвления, если нас интересует асимптотический вид решения для достаточно больших значений y . Отметим, что полученные выше значения y , начиная с которых справедливо отмеченное подобие, легко

вытекают из выражения для фазы асимптотических решений уравнения (1.28)

$$\theta_{\pm}(y) = (\lambda/3) [(y + y_0)^{3/2} \pm (y - y_0)^{3/2}] \quad (y_0 = 2\sqrt{\gamma/\lambda}). \quad (1.34)$$

В самом деле, разлагая выражение (1.34) по степеням y_0/y , получим

$$\theta_+ = 2\lambda y^{3/2}/3 + \gamma/\lambda \sqrt{y} + \dots; \quad \theta_- = 2\sqrt{\gamma y} - (\gamma/y)^{3/2}/3\lambda^2 + \dots \quad (1.35)$$

Требую малость фазовых добавок асимптотических решений по сравнению с единицей, приходим к уже известным условиям на y (разумеемся, сам характер связи между решениями требует анализа формул (1.29) и (1.30), что и было проведено в работах [13, 55] и частично проиллюстрировано выше. Главный член асимптотического разложения решения V (1.31), как нетрудно видеть, удовлетворяет также укороченному уравнению $y\varphi'' + \gamma\varphi = 0$ в полной окрестности $y = 0$. Приведем еще решение U_2 , совпадающее с решением укороченного уравнения лишь в части окрестности $y = 0$. Для вещественных y имеем [13, 55], [8, 15]:

$$U_2 \approx \begin{cases} -\pi |y/\gamma|^{1/2} H_1^1(2i\sqrt{|y\gamma|}) & \text{при } y < 0; \\ i\pi (y/\gamma)^{1/2} H_1^1(2\sqrt{\gamma y}) + (\sqrt{\pi}/\lambda^{3/2} y^{5/4}) \exp(i\pi/4 + & (1.36) \\ + 2i\lambda y^{3/2}/3) & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Здесь $H_1^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода. Решение U_2 описывает полный переход длинноволновой моды колебаний в коротковолновую и является наиболее существенным в теории трансформации волн [8]. Легко показать, что в зависимости от знака γ групповые скорости пересекающихся волн либо параллельны $\gamma < 0$, либо антипараллельны $\gamma > 0$ (при исследовании волновых процессов $u_{1,2}$ — это функции x , ω , k_y , k_z). Как следует из работ [8, 15], что также ясно из проведенного здесь рассмотрения, для стопроцентной трансформации колебаний, описываемых уравнением (1.26), помимо обращения в нуль коэффициента при второй производной ($u_2(x_0) = 0$, $u_1(x_0) \neq 0$) необходимо выполнение приведенных выше неравенств. В частности, из условия $|y\lambda^2| \gg 1$ и требования $|x| < L$, следует, что $\alpha < \beta$ (при этом, конечно, допустимо условие $\alpha > \beta^2$, т. е. $\lambda^2 < 1$). Как следует из формул связи (1.30) (см. также [55]), медленно меняющееся решение трансформируется в быстро меняющееся в так называемом вязком секторе $|\arg(x\lambda^{2/3})| < 2\pi/3$ (при выборе $\arg\sqrt{\gamma x} = 1/2 \arg(\gamma x)$, $0 \leq \arg(\gamma/\lambda^{2/3}) < 2\pi$). Если вязкий сектор не захватывает действительной оси, то характерный масштаб решения за особой областью остается прежним, а энергия волны целиком поглощается (см. замечание 2, стр. 159). Условия возникновения аномальной трансформации были недавно вновь определены в работе [56]. Необходимо сделать еще одно замечание относительно свойств уравнения (1.26). Из отмеченной выше многозначности $k_1 + k_2$, $k_1 - k_2$ в вытекает возможность появления отраженных волн

того же типа, что и падающая в окрестности особой области. Решения (1.31), (1.32), (1.36) не противоречат этому. Однако из этих решений следует, что при падении длинноволновой моды такое возможно в условиях, когда решение V приобретает физический смысл (т. е. когда возможно усиление волн).

Проведенное рассмотрение показывает, что уже в случае уравнения (1.28), для которого выполняется равенство между коэффициентом трансформации и коэффициентом поглощения длинноволнового колебания в холодной плазме (при $\alpha = 0$ волна полностью поглощается), несколько существенных особенностей можно получить из анализа уравнения четвертого порядка.

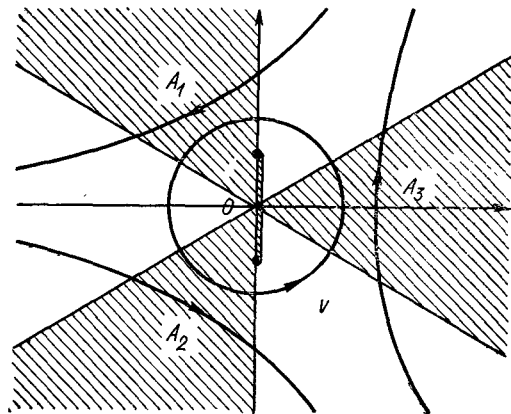


Рис. 6.

Выше исследовались асимптотические свойства решений уравнения (1.26) при отсутствии точек отражения, в которых $k_{1,2} = 0$. Существует, однако, много случаев, когда это не так. Подобное предположение недопустимо, например, в задаче о трансформации необыкновенной волны в плазменную при падении первой на неоднородную плазму, находящуюся в постоянном однородном магнитном поле [1]. Имея в виду такого типа задачи, рассмотрим в качестве модели уравнение

$$\varphi^{IV} + \lambda_1^2 [x\varphi^{II}] + (\beta_1 + \sigma^2 x)\varphi = 0, \quad (1.37)$$

где $\lambda_1, \sigma, \beta_1$ —произвольные комплексные параметры [51]. Исключая случай $\sigma = 0$, исследованный выше, сделаем замену $y = \sigma x$. Обозначив $\lambda^2 = \lambda_1^2/\sigma^3$, $\beta = \beta_1/\sigma$, окончательно получим

$$\varphi^{IV} + \lambda^2 [y\varphi^{II} + (\beta + y)\varphi] = 0. \quad (1.38)$$

Решая (1.38) методом Лапласа, получаем

$$\varphi(y; \mu, \lambda) = \int_{C(\varphi)} ds (s + i/s - i)^{\mu} \exp(\xi s + s^3/3\lambda^2), \quad (1.39)$$

где $\xi = y - \lambda^{-2}$; $2\mu = \beta + \lambda^{-2}$. Контур интегрирования C (φ) надо выбрать так, чтобы на его концах выражение под интегралом в формуле (1.39) имело одинаковое значение или обращалось в нуль. В отличие от (1.29) интегральное ядро имеет две точки ветвления $s = \pm i$. Проводя контуры C (φ) (рис. 6 и 7), получаем восемь решений (рисунки соответствуют $\arg \lambda = 0$). Согласно теореме Коши имеем следующие формулы для этих решений:

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 = V; \quad \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + A_3 = U_1 + U_2; \\ \bar{A}_1 = A_1 \exp(-2\pi\mu); \quad \bar{A}_1 = A_2 \exp(-2\pi\mu). \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

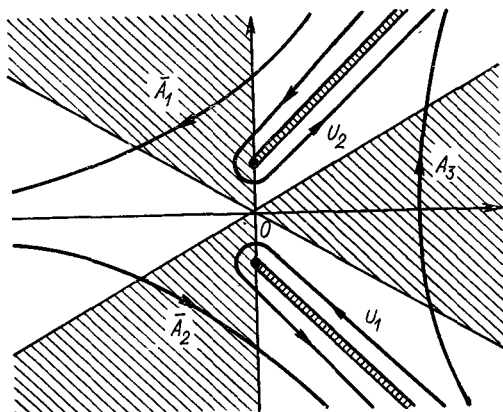


Рис. 7.

Решения A_k , V аналогичны A_k , V , изученным в работах [13, 55]. За фундаментальную систему решений уравнения (1.38) выберем U_1 , U_2 , A_1 , A_3 . Приведем для них асимптотические разложения*

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\approx \pi^{1/2} \lambda^{-3/2} \xi^{-5/4} \exp(i\pi/4 + 2i\lambda\xi^{3/2}/3), \\ &\quad -(2\pi/3 < \arg(\xi\lambda^{2/3}) < (4\pi/3); \\ A_3 &\approx \pi^{1/2} \lambda^{-3/2} \xi^{-5/4} \exp(-i\pi/4 - 2i\lambda\xi^{3/2}/3), \\ &\quad 0 < \arg(\xi\lambda^{2/3}) < 2\pi; \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

$$\left. \begin{aligned} U_2 &\approx [-2\pi i/\Gamma(1+i\mu)] \exp[i\xi - (i/3\lambda^2) - \pi\mu] \sum_{n=0}^N (\hat{L}_2^n/n! \lambda^{2n}) \times \\ &\quad \times \xi\Psi[1-i\mu, 2; 2\xi \exp(-i\pi/2)], \quad 0 < \arg(\xi\lambda^{2/3}) < 4\pi/3; \\ U_1 &\approx [-2\pi i/\Gamma(1-i\mu)] \exp(-i\xi + i/3\lambda^2 - \pi\mu) \sum_{n=0}^N (\hat{L}_1^n/n! \lambda^{2n}) \times \\ &\quad \times \xi\Psi[1+i\mu, 2; 2\xi \exp(i\pi/2)], \quad -(4\pi/3) < \arg(\xi\lambda^{2/3}) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

* Подробнее см. работу [51].

Здесь $L_{1,2} = 1/3 (d/d\xi)^3 \mp id^2/d\xi^2 - d/d\xi$; ψ — вырожденная гипергеометрическая функция, для которой при вычислении (1.42) использовано интегральное представление [57]. С помощью формул дифференцирования функции ψ [57] можно показать, что разложение в формулах (1.42) справедливо, если выполняется условие

$$|\xi| \gg \max \{ |\lambda|^{-2/3}; |1/\lambda|^2; |\mu/\lambda|^2 \}. \quad (1.43)$$

Для $\mu \lesssim 1$ и $|\lambda| \ll 1$ параметром разложения в (1.42) является $\mu/\lambda^2\xi$. При выполнении (1.43) малы также последующие члены асимптотических разложений в (1.41).

В секторе $|\arg(\xi\lambda^{2/3})| < 2\pi/3$, деформируя контуры $C(U_{1,2})$ в левую полуплоскость s , находим

$$U_{1,2} = A_{2,1} [\exp(-2\pi\mu) - 1] + \bar{U}_{1,2}, \quad (1.44)$$

где $U_{1,2}$ — ряды, заданные формулами (1.42). Обсудим вытекающие из формул (1.41)—(1.44) следствия для случая волны в неоднородной среде, не ограничиваясь конкретным примером. Пусть λ , $\mu > 0$. В этом случае коротковолновая мода уравнения (1.38) имеет аномальную дисперсию (фазовая и групповая скорости антипараллельны). Рассмотрим падение длинноволновой моды справа $\xi > 0$ на область взаимодействия. Граничные условия удовлетворяются решением U_2 , поэтому из (1.42), (1.44) имеем

$$\varphi \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{\Gamma(1+i\mu)} (2|\xi|)^{i\mu} \exp(i\xi - i/3\lambda^2 - \pi\mu/2) - \\ - A_1 [1 - \exp(-2\pi\mu)], \quad \xi > 0, \\ \frac{\pi}{\Gamma(1+i\mu)} (2|\xi|)^{i\mu} \exp(i\xi - i/3\lambda^2 - 3\pi\mu/2), \\ \xi < 0 \end{array} \right\} \quad (1.45)$$

Из (1.45) для коэффициента прохождения D (определяемого отношением квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн) получим $D = \exp(-2\pi\mu)$. Так как уравнение (1.38) имеет при вещественных β , λ интеграл

$$u^* d\varphi/dy - u d\varphi^*/dy + \varphi^* du/dy - \varphi du^*/dy + 3\lambda^2(\varphi d\varphi^*/dy - \varphi^* d\varphi/dy) = \text{const}, \quad \beta\lambda^2 \neq -1, \quad u \equiv d^2\varphi/dy^2, \quad (1.46)$$

то коэффициент трансформации длинноволновой моды в коротковолновую

$$Q = 1 - D = 1 - \exp(-2\pi\mu). \quad (1.47)$$

Если на область взаимодействия справа падает коротковолновая мода, то, выбирая решение в виде $\varphi = U_2 - A_3$, легко показать, что при этом возникает длинноволновая мода, просачивающаяся влево на бесконечность со стороны отрицательных значений. Коэффициент трансформации равен

$$Q_- = \exp(-2\pi\mu)[1 - \exp(-2\pi\mu)]. \quad (1.48)$$

Кроме того, коротковолновая мода частично отражается обратно сама, а также в виде длинноволновой моды. Коэффициенты отражения и трансформации равны соответственно

$$R = \exp(-4\pi\mu); \quad Q_+ = 1 - \exp(-2\pi\mu). \quad (1.49)$$

Таким образом, видим, что при падении справа как длинноволновой моды, так и коротковолновой происходит, в частности, отражение в виде другой моды с коэффициентом $[1 - \exp(-2\pi\mu)]$. Однако интересно отметить и определенную асимметрию в исследуемых случаях: при падении длинноволновой моды отсутствует отраженная мода того же типа.

Остановимся теперь на связи эффекта трансформации волн в уравнении четвертого порядка с конечным поглощением энергии волны в уравнении второго порядка. Выше приведены асимптотические ряды решений $U_{1,2}$ [см. формулу (1.42)]. Легко проверить, что главные члены асимптотических разложений (1.42), которые использовались при выводе формул (1.45)—(1.49), удовлетворяют укороченному уравнению

$$\xi\varphi'' + (\xi + 2\mu)\varphi = 0, \quad (1.50)$$

Последнее уравнение дает конечное поглощение энергии длинноволновой моды в окрестности точки $\xi = 0$ [1]. Причем коэффициент поглощения равен (как легко проверить) коэффициенту трансформации длинноволновой моды в коротковолновую (см. выше). Таким образом, для нахождения коэффициента трансформации достаточно исследовать более простое укороченное уравнение.

Однако следует обратить внимание на то, что величина μ в укороченном уравнении (1.50) содержит параметр λ [см. формулу (1.39)], который (например, в случае волн в неоднородной плазме) связан с учетом теплового движения. При условии $|\beta\lambda^2| \leq 1$, μ существенно зависит от λ (см. замечание 3, стр. 160). В пределе слабого теплового движения ($\lambda \rightarrow \infty$) уравнение (1.50) переходит в уравнение для поля электромагнитной волны в холодной плазме, поглощающие свойства которого исследовались, например, в работах [1, 9]. Зависимость μ от λ приводит к интересному выводу для случая, когда обе волны имеют нормальную дисперсию: $\lambda > 0$, $\mu < 0$. При этом в формулах для D , Q вместо 2μ стоит $2\mu_1 = |\beta| - 1/\lambda^2$. Поэтому даже при больших $|\beta|$ может быть $|2\mu_1| \lesssim 1$, если $|\beta\lambda^2| \approx 1$. Таким образом, зависимость μ от λ в данном случае может привести к значительному увеличению прозрачности барьера для волны.

3. Некоторые физические особенности и примеры аномальной трансформации волн. Необходимо теперь больше внимания уделить физическим свойствам аномального пересечения. Остановимся прежде всего на двух существенных вопросах: а) эквивалентности теплового движения диссипации в области гибридных резонансов неоднородной плазмы (в пределе слабого теплового движения), б) обоснования случая 100%-ного перехода длинноволновой моды в коротковолновую (и наоборот) с помощью закона сохранения энергии.

Предположим, что в плазме имеются редкие столкновения с частотой $\nu \ll \omega$, и вычислим энергию, которая поглощается при этом в слое холодной плазмы. Мощность, поглощаемая 1 см^2 поверхности слоя, определяется выражением

$$W = \frac{\omega}{8\pi} \int \epsilon''_{\alpha\beta} E_{\alpha} E_{\beta}^* dx,$$

где интегрирование ведется по всей толщине слоя, $\epsilon''_{\alpha\beta}$ — антиэрмитова часть тензора электрической проницаемости. Если ν стремится к нулю, основной вклад вносит член $\epsilon''_{xx} |E_x|^2$ [см. формулу (1.6)]. Учитывая, что $|\epsilon''_{xx}| \sim i|\nu/\omega$, подставляя для E_x выражение (1.6) и распространяя пределы интегрирования до бесконечности, находим

$$W = (\omega l |B|^2 / 16\pi\sigma) [1 - \exp(-2\pi\sigma)]. \quad (1.51)$$

Как видно, поглощаемая мощность не зависит от ν , что связано с ростом E_x при уменьшении ν . Здесь существенно то, что в известных пределах W оказалось не зависящим от конкретного механизма, «замывающего» особенность, и потому физически безразлична причина поглощения электромагнитной энергии. Дальнейшая «судьба» поглощенной энергии определяется конкурирующим влиянием диссипации, теплового движения и нелинейных процессов. Этот вопрос уже нельзя решить в рамках модели «холодного» уравнения (см. замечание 4, стр. 160, а также раздел 2, § 2). Интересно отметить, что если чисто формально рассмотреть случай $\nu < 0$, то вместо поглощения энергии получим генерацию энергии в резонансном слое $\epsilon_{xx} \approx 0$ [3, 58]. Можно ожидать, что этот эффект приобретает физический смысл в термодинамически неравновесных средах с отрицательной диссипацией [59]. Заметим еще, что, как следует, например, из формулы (1.51), точка x_0 — особая точка «холодного» волнового уравнения независимо от применимости приближения геометрической оптики. В то же время учет высшей производной снимает данную особенность [см. уравнение (1.26)].

Исследуем процесс аномальной трансформации с помощью закона сохранения энергии. В разделе 2 указаны условия 100%-ной трансформации колебаний. Следует подчеркнуть нетривиальность этого результата. Во-первых, как видно из формулы (1.32), в случае $\lambda \gg 1$ амплитуда быстроосциллирующего слагаемого содержит малый множитель. Во-вторых, как уже отмечалось выше, характер ветвления $k_{1,2}$ допускает появление волн с волновыми векторами $\mathbf{k} = -\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k} = -\mathbf{k}_2$ при падении на резонансную область моды $k = k_{1,2}$. Однако расчет для случая термодинамически равновесной плазмы дает только переход $k_1 \leftrightarrow k_2$. Поэтому целесообразно убедиться с помощью прямого расчета потоков энергии в падающей и «рожденной» волнах, что 100%-ный переход согласуется с энергетическими соображениями.

Рассмотрим для примера трансформации плазменной и необыкновенной волн в области частот верхнего гибридного резонанса. Для электронной компоненты плазмы имеем уравнения для возмущений:

$$\left. \begin{aligned} mn_0 \partial \mathbf{v} / \partial t &= -enE_0 - en_0 \mathbf{E} - T_e \nabla n - en_0 (\mathbf{v} / c \times \mathbf{H}_0); \\ \partial E / \partial t &= c \operatorname{rot} \mathbf{H} + 4\pi en_0 \mathbf{v}; \quad \partial \mathbf{H} / \partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= -4\pi en; \\ (\partial n / \partial t) + \operatorname{div} n_0 \mathbf{v} &= 0; \quad eE_0 + T_e \nabla \ln n_0 = 0. \end{aligned} \right\} (1.52)$$

Из (1.52) вытекает закон сохранения энергии

$$\left. \begin{aligned} (\partial W / \partial t) + \operatorname{div} \mathbf{S} &= 0; \\ W &= \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \frac{mn_0 v^2}{2} + \frac{T_e n^2}{2n_0}; \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + T_e n \mathbf{v} \end{aligned} \right\} (1.53)$$

При поперечном распространении волн

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(x) \mathbf{e}_z; \quad n_0 = n_0(x)$$

и возмущения можно представить в виде $f(x, t) = \operatorname{Re} f(x) \exp(i\omega t)$.

Введем обозначения

$$u = (\omega_{He}/\omega)^2, \quad v = (\omega_{pe}/\omega)^2, \quad \xi = \omega x/c, \quad \beta^2 = (T_e/mc^2) \ll 1.$$

Из (1.52) получаем для компонент электрического поля соотношения

$$\left. \begin{aligned} E_y'' + (1-v)E_y &= i\sqrt{u}E_x; \\ \beta^2(E_x'' - v'E_x'/v) + (1-u-v)E_x &= i\sqrt{uv}E_y. \end{aligned} \right\} (1.54)$$

Как следствие (1.53), система уравнений (1.54) имеет инвариант

$$E_y^* E_y' - E_y' E_y^* + (\beta^2/v)(E_x^* E_x' - E_x E_x'^*) = \text{const}. \quad (1.55)$$

В квазиклассическом приближении, отбрасывая члены порядка β^2 , для плазменной волны получаем

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A(v/k_1)^{1/2} \exp(i\theta_1), \quad E_y = E_x \sqrt{u}/k_1^2; \quad k_1^2 = (1-u-v)/\beta^2; \\ H_z &= -E_x \sqrt{u}/k_1; \quad v_x = ieE_x/m\omega v; \quad v_y = eE_x/m\omega v; \\ n &= \omega k_1 E_x / 4\pi i e c; \quad A = \text{const}; \quad \theta_1(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} k_1(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \right\} (1.56)$$

Из (1.56) для потока энергии в плазменной волне имеем $S_x^{(1)} = c\beta^2 |A|^2 / 8\pi$. Аналогично для необыкновенной волны следует

$$\left. \begin{aligned} E_y &= (B/\sqrt{k_2}) \exp(i\theta_2); \quad E_x = \frac{iv\sqrt{u}E_y}{1-u-v}; \quad k_2^2 = \frac{(1-v)^2 - u}{1-u-v}; \\ H_z &= -k_2 E_y; \quad v_x = \frac{e\sqrt{u}k_2 E_y}{m\omega(1-u-v)}; \quad v_y = \frac{ie(1-v)E_y}{m\omega(1-u-v)}; \\ n &= \frac{\omega v k_2 \sqrt{u} E_y}{4\pi e c(1-u-v)}; \quad B = \text{const}; \quad \theta_2(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} k_2(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \right\} (1.57)$$

Из (1.57) для потока энергии в необыкновенной волне получим $S_x^{(2)} = c|B|^2/8\pi$.

Таким образом, в данном приближении волны распространяются независимо. Для определения связи между постоянными A и B нужно решить (1.54) в области резонанса.

Пусть электромагнитная волна падает из вакуума в плазму. В однородном магнитном поле точка отсечки $v_- = 1 - \sqrt{u}$ расположена ближе точки резонанса $v_0 = 1 - u$ к краю плазмы и коэффициент трансформации, вообще говоря, экспоненциально мал. Однако в неоднородном магнитном поле, как впервые было указано в работе [60], они могут поменяться местами. Действительно, пусть u, v — линейные функции:

$$u = u_0(1 - \xi/\rho_1); \quad v = v_0(1 + \xi/\rho_2); \quad u_0 + v_0 = 1 \quad (\rho_1, \rho_2 \gg 1).$$

При условии $(u_0/\rho_1) > (v_0/\rho_2)$ в области между вакуумом и резонансным слоем отсечка отсутствует. Множитель \sqrt{uv} регулярен в области резонанса, поэтому, как видно из формул (1.56) и (1.57), нужно найти связь между B и $A\sqrt{u_0v_0}$. После этого из (1.54) получаем уравнение

$$\beta^2 E_y^{IV} + a\xi E_y^{II} - u_0 v_0 E_y = 0, \quad a = u_0/\rho_1 - v_0/\rho_2. \quad (1.58)$$

Используя асимптотические формулы [55], находим $B = -\beta A$. Отсюда $S_x^{(1)} = S_x^{(2)}$, т. е. потоки энергии в плазменной и необыкновенной волнах равны. Легко показать, что уравнение (1.58) [так же, как (1.54)] имеет инвариант

$$\beta^2 (\psi^* d\psi/d\xi - \psi d\psi^*/d\xi) + u_0 v_0 (E_y^* dE_y/d\xi - E_y dE_y^*/d\xi) = \text{const}; \quad \psi = d^2 E_y/d\xi^2. \quad (1.59)$$

Фактически уже из (1.59) можно определить $|B/A|$. Здесь, как и в общем случае, имеет место соответствие инварианта сохранению потока энергии. Действительно, в отсутствие диссипации справедлив закон сохранения энергии (1.53). Тогда в стационарном состоянии дивергенция потока энергии равна нулю. Следовательно, существует инвариантная билинейная форма возмущенных величин.

Для плоскостной неоднородной среды инвариантом является компонента потока энергии вдоль неоднородности. Таким образом, для получения правильных результатов необходимо, чтобы используемая в области трансформации упрощенная система уравнений обладала инвариантом. Разумеется, здесь предполагается регулярность полей волн, так как даже в отсутствие диссипации возможно конечное поглощение энергии в области особенности поля волны, о чем уже говорилось выше.

Рассмотрим теперь ситуацию для верхнего гибридного резонанса в случае однородного магнитного поля $H_0 = H_0 e_z$ и $n_0(x)$. Для компоненты E_y из формулы (1.54) с требуемой точностью можно записать уравнение

$$\beta^2 E_y^{IV} + (1 - u - v) E_y^{II} + [(1 - v)^2 - u] E_y = 0. \quad (1.60)$$

Для частот ω , достаточно близких к ω_{He} , так что выполняется неравенство $1 - u \ll 1$, точка отражения необыкновенной волны $v_- = 1 - \sqrt{u}$ близка к точке резонанса $v = 1 - u$. Полагая $v = 1 - (\xi/\rho) - u$, из (1.60) получаем

$$\rho\beta^2 E_y^{IV} + [\xi E_y^{II} + 2(\xi - \rho v_-)E_y] = 0. \quad (1.61)$$

Уравнение (1.61) вполне аналогично (1.37). Используя приведенный выше анализ решения (1.37) [51], получаем, что коэффициент прохождения электромагнитной волны в плазму равен $\exp(-2\pi\mu_1)$, где $\mu_1 = \rho\sqrt{2}(v_-/2 - \beta^2)$. Если $2\pi\mu_1 \lesssim 1$, то волна хорошо проникает в плазму.

Аномальная трансформация для случая гибридных резонансов подробно разбирается в работе [3]. Существуют и другие примеры этого типа пересечения волновых решений в плазме. Так, при трансформации магнитозвуковых волн в пространственно неоднородной плазме [см. уравнение (1.24)], наряду с надбарьерным типом трансформации, возможен и аномальный случай, если существует точка, в которой $\omega^2/v_A^2 + \omega^2/c_s^2 = k_y^2$ [8, 56].

Аномальная трансформация возможна также и в других неоднородных средах, например в неоднородном ферромагнетике [16, 35, 61].

Остановимся кратко на вопросе отыскания спектра собственных частот ω финитных решений. По сравнению со случаем осциллирующих решений на бесконечности, вопросу о спектре частот при аномальном пересечении решений посвящено значительно меньше работ [8—13, 25, 62]. Один из примеров подобного типа разобран в § 4 данного раздела. Здесь же приведем только удобный качественный критерий для получения сведений о спектре частот. Именно, если умножить (1.26) на φ^* и проинтегрировать вдоль вещественной оси, то для финитных решений имеем [8]

$$\alpha\beta^2 \int |d^2\varphi/dx^2|^2 dx + \int \beta u_2 |d\varphi/dx|^2 dx + \int u_1 |\varphi|^2 dx = 0. \quad (1.62)$$

Анализ (1.62) показывает, что существует точка x_0 в области локализации $\varphi(x)$ ($\text{Re } k_x^2(x_0) > 0$), где выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} \text{Im}(u_1 + |k|^2 u_2) &= 0, \\ \text{Re}[\alpha k_x^4 - k_x^2 u_2 + u_1] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

В формуле (1.63) вместо k_x берется k_1 или k_2 ($k_1 \sim \sqrt{\alpha}k_2$), в зависимости от интегрального вклада мод в критерий устойчивости. Уравнения (1.63) могут служить для определения знака и порядка величины инкремента $\text{Im } \omega$. Поскольку соотношения (1.63) получены в предположении финитности решения, то необходимо знать его поведение на бесконечности. Пусть нули $u_1(x)$, $u_2(x)$ расположены в комплексной плоскости (рис. 8) соответственно в точках A, B, C, D , а в секторах k_1AL, k_2BL φ_1 ведет себя как $\exp(-|\int k_1(x')dx'|)$

(соответственно φ_2 ведет себя как $\exp(-|\int^x k_2(x')dx'|)$) в секторах R_1CS_1 , R_2DS_2). Тогда задача о финитности решения при $x \rightarrow \pm \infty$ сводится к вопросу, охватывают ли указанные сектора обе действительные полуоси x .

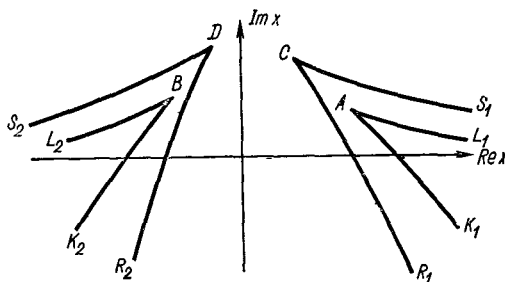


Рис. 8.

ЗАДАЧА

Показать, что для отражательного типа пересечения решений имеет место 100%-ная трансформация волн [16].

Учитывая уравнение (1.26), при $\alpha = 1$ надо воспользоваться выражением для $k_{1,2}(x)$ (1.27) и свойствами групповых скоростей пересекающихся мод.

§ 4. Некоторые особенности трансформации волн и переходного излучения при взаимодействии пучков и зарядов с плазмой

Хорошо известно, что плазма, пронизываемая пучком заряженных частиц, представляет собой простейший пример неравновесной неустойчивой среды [63—65]. В однородной плазме нерелятивистский пучок генерирует коротковолновые продольные колебания, не удовлетворяющие условиям распространения в вакууме. В случае неоднородной плазмы продольные и поперечные составляющие электромагнитных полей «зацеплены» и, следовательно, такая система значительно более удобна с точки зрения вывода энергии из плазмы вследствие возможности преобразования квазипродольных полей в квазипоперечные. Хотя исследование трансформации продольных колебаний в поперечные в системе плазма—пучок только начинается [20—24, 66], тем не менее уже сейчас выявлены некоторые особенности этого процесса, которые мы проиллюстрируем на характерных примерах.

1. Влияние пересечения колебаний на режим работы плазменно-пучкового разряда. Пересечение колебаний может существенно влиять на самые различные свойства системы. Так, например, возможна стабилизация неустойчивостей с помощью трансформации волн [25]. Часто пересекающиеся колебания k_1 и k_2 локализованы в одной

и той же области L , которая отделена барьером непрозрачности ширины Δ от области осцилляции моды k_2 , простирающейся до бесконечности. В этом случае, считая $k_2\Delta \gg 1$, условие развития неустойчивости из-за нарастающего во времени «пакета» волн с волновым вектором k_1 можно записать в виде

$$(\gamma_1' L'/v_{g1}) > (\gamma_1 L/v_{g1}) + (\gamma_2 L/v_{g2}). \quad (1.64)$$

Здесь γ_1' — инкремент нарастания моды k_1 в области неустойчивости L' ($L' < L$); $\gamma_{1,2}$, $v_{g1,2}$ — соответственно декременты и групповые скорости мод $k_{1,2}$.

Применяя (1.64) к случаю пучковой неустойчивости, можно в согласии со сказанным выше выделить три режима работы плазменно-пучкового разряда в зависимости от характера влияния пересечения волновых решений: а) ламинарный режим, когда выполняется условие, обратное (1.64); б) режим нагрева, когда (1.64) справедливо и область L достаточно велика; в) излучательный режим, когда при выполнении (1.64) L и барьер непрозрачности малы.

Рассмотрим прежде всего ламинарный режим, соответствующий токам пучка, меньшим критического. Отметим, что если $\gamma_2 \gg \gamma_1$, то критические токи из-за пересечения мод могут сильно возрасти. Это обстоятельство может оказаться существенным для работы плазменных ускорителей.

Исследуем несколько подробнее вопрос о критических токах для случая взаимодействия электронного пучка с высокочастотными колебаниями радиально неоднородной плазмы [26].

В плазме, находящейся в магнитном поле, в области частот $\omega \gtrsim \omega_{He}$ существует два типа потенциальных колебаний: длинноволновая мода с частотой

$$\omega_1^2 = 1/2 [\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2 + \sqrt{(\omega_{pe}^2 - \omega_{He}^2)^2 + 4\omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 \sin^2 \theta}] \quad (1.65)$$

(здесь θ — угол между волновым вектором k и магнитным полем H_0 , а $k_1 v_{Te} \ll \omega_{He}$) и медленная коротковолновая мода Бернштейна, распространяющаяся почти поперек магнитного поля, для которой

$$k_2^2 = 2/3 (4\omega_{He}^2 - \omega^2) (\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2 - \omega^2) / \omega_{pe}^2 v_{Te}^2. \quad (1.66)$$

При прохождении пучка через плазму в ней возбуждаются в основном длинноволновые колебания с частотой ω_1 . Для горячего однородного пучка радиусом r в однородном плазменном цилиндре с радиусом R неустойчивость развивается при условии $\gamma_b r/R > \gamma_c$, где $\gamma_b r/R$ — эффективный инкремент кинетической неустойчивости; γ_c — декремент затухания волны в отсутствие пучка. В радиально неоднородной плазме возбуждаемая пучком длинноволновая мода распространяется в сторону спада плотности плазмы и в области гибридного резонанса, где $\omega_{pe}^2(r) = \omega^2 - \omega_{He}^2$ отражается в виде моды Бернштейна вследствие эффекта линейной трансформации [8, 58]. В этом случае условие развития пучковой неустойчивости в согласии с (1.64) имеет вид $\gamma_{\phi\phi} > \gamma_B v_{g1}/v_{g2}$, где γ_B — декремент

затухания моды Бернштейна, а v_{g1} , v_{g2} — компоненты групповых скоростей соответственно длинноволновой и коротковолновой мод вдоль неоднородности; так как $\gamma_B > \gamma_c$ и $v_{g1} > v_{g2}$, то отсюда следует, что в неоднородной плазме для раскачки колебаний требуются большие $\gamma_{эфф}$.

Иными словами, пороговый ток пучковой неустойчивости в неоднородной плазме увеличивается [26]. Таким образом, трансформация неустойчивости моды в быстрозатухающую оказывает стабилизирующее действие на развитие пучковой неустойчивости.

Из сказанного выше следует, что увеличение порогового тока в неоднородной плазме примерно равно отношению декрементов пространственного затухания бернштейновской и длинноволновой мод $\kappa_{\perp B}/\kappa_{\perp c}$. Отсюда следует, что пороговый ток пучковой неустойчивости увеличивается для частот ω , близких к ω_{He} , в v_0/v_{Tp} раз, а для частот ω , близких к $2\omega_{He}$, в $(v_0/v_{Tp})^3$ раз, где v_0 , v_{Tp} — скорость пучка и тепловая скорость плазмы соответственно.

При вычислении величины порогового тока рассмотрим для простоты случай слабого и тонкого пучка, радиус которого мал по сравнению с радиусом плазмы R . Пучок предполагается горячим ($\gamma/\omega < (v_{Tb}/v_0)$) и, следовательно, неустойчивость — кинетическая. Постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0 = H_0 e_z$, плазма слабонеоднородна вдоль оси x , частоты возмущений находятся в области $\omega_{He} < \omega < 2\omega_{He}$.

Потенциал $E = -\nabla\phi$ высокочастотных электростатических колебаний плазмы подчиняется уравнению [65]

$$\int \int dk d\omega \cdot \phi_{k\omega} \exp(ikr - i\omega t) \left\{ k^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_n \int \frac{dv}{\omega - n\omega_{He} - k_z v_z} \times \right. \\ \left. \times \left[I_n^2 + \frac{I_n}{k_{\perp}} \left(\frac{nk_y}{k_{\perp}} I_n - i \frac{k_x v_{\perp}}{\omega_{He}} I_n' \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{n\omega_{He}}{v_{\perp}} - \right. \right. \right. (1.67) \\ \left. \left. \left. - \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_y}{\omega_{He}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] F(x, v_{\perp}, v_z) \right\} = 0,$$

где $I_n(k_{\perp} v_{\perp}/\omega_{He})$ — функция Бесселя; $F(x, v_{\perp}, v_z)$ — функция распределения электронов, которую используем в виде

$$F = (\pi v_{Tp}^2)^{-3/2} n_p(x) \exp\left(-\frac{v^2}{v_{Tp}^2}\right) + (\pi v_{Tb}^2)^{-3/2} n_b(x) \exp \times \\ \times \left[-\frac{v_{\perp}^2 + (v_z - v_0)^2}{v_{Tb}^2} \right]; \\ n_{p, b}(x) = n_{p, b}(-x).$$

Если частота волны не слишком близка к циклотронным гармоникам $k_z v_{Te} \ll |\omega - n\omega_{He}|$, а поперечная длина волны больше ларморовского радиуса электронов, то в формуле (1.67) можно про-

вести разложение по малым параметрам. В результате для $\varphi_\omega(x) = \int dk_x \cdot \varphi_{k\omega} \exp(i k_x x)$ получим уравнение

$$k_0^{-2} \left(\frac{d^4 \varphi_\omega}{dx^4} + \frac{2}{n_p} \cdot \frac{dn_p}{dx} \cdot \frac{d^3 \varphi_\omega}{dx^3} \right) - \frac{d}{dx} \left[\left(\varepsilon_\perp + 2 \frac{k_y^2}{k_0^2} \right) \frac{d\varphi_\omega}{dx} \right] + \left(k_y^2 \varepsilon_\perp + k_z^2 \varepsilon_{\parallel} + \frac{k_y^4}{k_0^2} \right) \varphi_\omega = -i \int dk_x \varphi_{k\omega} \exp(i k_x x) \operatorname{Im}(\mathbf{k}^2 \varepsilon_{k\omega}). \quad (1.68)$$

Здесь $k_0^2 = \frac{2}{3}(\omega^2 - \omega_{He}^2)(4\omega_{He}^2 - \omega^2)/\omega_{pe}^2(x) v_{Tp}^2$; $\varepsilon_\perp = 1 - (\omega_{pe}^2(x)/\omega^2 - \omega_{He}^2)$; $\varepsilon_{\parallel} = 1 - (\omega_{pe}^2(x)/\omega^2)$, $\varepsilon_{k\omega}$ — скалярная диэлектрическая проницаемость плазмы с пучком [26].

В слабонеоднородной плазме $k_x \gg \left| \frac{d}{dx} n_p(x) \right|$ и ВКБ-решения уравнения (1.68) имеют вид

$$\varphi_\omega^{(1,2)} = \frac{\exp \left\{ i \int_0^x [q_{1,2}(x') \mp i \kappa_{1,2}(x')] dx' \right\}}{\sqrt{n_p(x) q_{1,2}(x) [q_1^2(x) - q_2^2(x)]}}, \quad (1.69)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_{1,2}^2 &= -(k_y^2 + 1/2 k_0^2 \varepsilon_\perp) + \sqrt{(k_0^4 \varepsilon_\perp^2/4) - k_z^2 k_0^2 \varepsilon_{\parallel}} \\ \kappa_{1,2} &= \mp \frac{k_0^2 \operatorname{Im}(\mathbf{k}_{1,2}^2 \varepsilon_{k_{1,2}\omega})}{2q_{1,2} (q_1^2 - q_2^2)} \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Вне узкого слоя гибридного резонанса $\varepsilon_\perp \approx 0$ выражения (1.70) для $q_{1,2}^2$ упрощаются:

$$q_1^2 \approx -k_0^2 \varepsilon_\perp, \quad q_2^2 \approx -k_z^2 \varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_\perp. \quad (1.71)$$

Учитывая, что инкремент пучковой неустойчивости максимален для длинноволновой моды $q_2(x)$, потребуем, чтобы в области плазмы, занятой пучком $|x| < r$, мода q_2 могла распространяться: $\omega_{pe}^2 < \omega^2 < \omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2$. При этих условиях осциллирующие решения уравнения (1.68) существуют в центральной части слоя плазмы, ограниченной точками гибридного резонанса $x = \pm x_0$ [$\varepsilon_\perp(\pm x_0) = 0$]. Вблизи точек $x = \pm x_0$ ВКБ-приближение (1.69) нарушается $q_1^2 \approx q_2^2$, поэтому необходимошить приближенные решения (1.69) с точными решениями уравнения (1.68). Так как мы имеем дело с симметричным слоем $n_p, b(x) = n_p, b(-x)$, достаточно рассмотреть решение для $x \geq 0$. Полагая в резонансном слое $\varepsilon_\perp(x) = (x - x_0)/L$, из формулы (1.68) получаем

$$\lambda^2 \frac{d^4 \varphi_\omega}{d\xi^4} - \xi \frac{d^2 \varphi_\omega}{d\xi^2} - \frac{d\varphi_\omega}{d\xi} + \varphi_\omega = 0; \quad \lambda^2 = \frac{3(1+i\nu)^2(1 \mp i\mu)}{2(4 - \omega_{He}^2/\omega^2)} \times \left(\frac{k_z^3 L^2 \omega_{He}^2}{\omega^3 / v_{Tp}} \right)^2, \quad (1.72)$$

где $\xi = (1 + iv)(k_z L \omega_{He}/\omega)^2 \left(\frac{x-x_0}{L} + i\delta \right)$,

а параметры δ , μ , ν равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\sqrt{\pi}\omega(\omega^2 - \omega_{He}^2)}{2k_z v_{\Gamma p} \omega_{He}^2} \left[\exp(-\zeta_1) + \frac{k_y^2 v_{\Gamma p}^2}{4\omega_{He}^2} \exp(-\zeta_2) \right]; \\ \mu &= \frac{\sqrt{\pi}\omega(\omega^2 - \omega_{He}^2)(4\omega_{He}^2 - \omega^2)}{24k_z v_{\Gamma p} \omega_{He}^2} \exp(-\zeta_2); \\ \nu &= \frac{\sqrt{\pi}\omega^3(\omega^2 - \omega_{He}^2)k_y^2}{2\omega_{He}^4 k_z^3 v_{\Gamma p}} \left(\exp(-\zeta_1) + \frac{k_y^2 v_{\Gamma p}^2}{2\omega_{He}^2} \exp(-\zeta_2) \right) + \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}\omega^2 \omega_b^2 (\omega - k_z v_0)}{\omega_{He}^2 k_z^3 v_{\Gamma p}^2} \exp \left[-\left(\frac{\omega - k_z v_0}{k_z v_{\Gamma p}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} (1.73)$$

Здесь $\zeta_n = [(\omega - n\omega_{He})/k_z v_{\Gamma p}]^2$. Уравнение (1.72) подробно исследовано в работе [67]. Ограниченные решения (1.72) имеют вид

$$\varphi_\omega(\xi) = \text{const} \int_0^\infty (ds/s) \exp [(\lambda^2 s^3/3) - \xi s - (1/s)]. \quad (1.74)$$

Интеграл в (1.74) берется вдоль лучей $\arg s = \pm \pi/3$. Используя асимптотику интеграла (1.74) при $|\xi| \gg 1$ и сшивая решение $\varphi_\omega(\xi)$, получаем решение уравнения (1.68) вдали от области резонанса $\varphi_\omega(x) = \varphi_\omega^{(1)}(x) + \exp(in\pi) \varphi_\omega^{(2)}(x)$, а также правило квантования, определяющее спектр собственных значений:

$$\int_0^{x_0} dx [p_1(x) - p_2(x)] = \pi(n + 1/2); \quad p_{1,2} = q_{1,2} + ix_{1,2}. \quad (1.75)$$

Приравнивая мнимую часть интеграла (1.75) нулю

$$\int_0^{x_0} dx \frac{\text{Im} [k_{\perp 1}^2 \varepsilon_{k\omega}(k_1)]}{q_1(q_1^2 - q_2^2)} k_0^2 = - \int_0^{x_0} dx \frac{\text{Im} [k_{\perp 2}^2 \varepsilon_{k\omega}(k_2)]}{q_2(q_1^2 - q_2^2)} k_0^2, \quad (1.76)$$

находим пороговый ток пучковой неустойчивости в неоднородной

плазме $I_i = ev_0 \int_{-r}^r n_b(x) dx$:

$$\begin{aligned} I_i &\approx \frac{mv_0^2 v_{\Gamma b}^2 (\omega^2 - \omega_{He}^2)(4\omega_{He}^2 - \omega^2)}{12\pi\omega_{He}^2 v_{\Gamma p}^3} \sqrt{2e^1} |\varepsilon_\perp(0) q_2(0)| \times \\ &\times \int_0^{x_0} dx \frac{(k_y^2 + q_1^2)}{q_1(q_1^2 - q_2^2)} \left[\exp \left(-\zeta_{10} + \frac{(k_y^2 + q_1^2) v_{\Gamma p}^2}{8\omega_{He}^2} \exp(-\zeta_{20}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Здесь $\xi_{n0} = \left(1 - \frac{n\omega_{He}}{\omega}\right)^2 \frac{v_0^2}{v_{Tp}^2}$. При получении формулы (1.77) вместо k_z подставляли неравенство $\frac{\omega}{v_0 - v_{Tb}/\sqrt{2}} \approx \frac{\omega}{v_0}$, соответствующее максимуму пучкового инкремента.

Для плазменного цилиндра радиусом R из (1.77) с точностью до числового множителя имеем

$$I_i = \frac{m\omega R v_0 v_{Tb}^2 (\omega^2 - \omega_{He}^2) (4\omega_{He}^2 - \omega^2)}{6\pi e \omega_{He} q_1 v_{Tp}^3} \Big|_{\varepsilon_{\perp}(0)} \frac{q_2(0) v_0}{\omega} \Big| \times \\ \times \left(\exp(-\xi_{10}) + \frac{q_1^2 v_{Tp}^2}{8\omega_{He}^2} \exp(-\xi_{20}) \right). \quad (1.78)$$

Приведем для сравнения пороговый ток пучковой неустойчивости для однородной плазмы радиуса R

$$I_h = \frac{mR\omega^2 \omega_p^2 v_{Tb}^2 |\varepsilon_{\parallel}| e^1}{16\pi e v_{Tp} |\varepsilon_{\perp}| \omega_{He}^2} \left(\exp(-\xi_{10}) + \frac{\omega^2 v_{Tp}^2}{8\omega_{He}^2 v_0^2} \exp(-\xi_{20}) \right). \quad (1.79)$$

Учитывая, что $(q_1 v_{Tp}/\omega_{He}) \lesssim 1$, из формул (1.78), (1.79) видим, что пороговый ток пучковой неустойчивости в неоднородной плазме увеличивается по сравнению со случаем однородной плазмы примерно в v_0/v_{Tp} раз для волн с частотой, близкой к циклотронной, и в $(v_0/v_{Tp})^3$ раз для волн с частотой, близкой ко второй гармонике циклотронной частоты.

Отметим еще, что для релятивистского пучка $v_0 \approx c$ вследствие «утяжеления» пучковых электронов следует ожидать дополнительное увеличение порогового тока.

Рассмотрим два других режима работы плазменно-пучкового разряда. В режиме нагрева мода Бернштейна эффективно взаимодействует с плазмой на большом участке L ; при этом энергия от нее идет в основном на нагрев плазмы и на развитие низкочастотных колебаний. Возможность каскадного процесса развития неустойчивостей рассматривалась в работе [68]. Можно назвать следующие причины НЧ-неустойчивостей в системе плазма — пучок: а) рост эффективных электронных частот соударений при генерировании ВЧ-шумов в плазме [68]; б) пороговое возбуждение высокочастотными колебаниями низкочастотных [69, 70]; в) неустойчивость режима «плато» для ВЧ-неустойчивости в пространственно-неоднородной плазме [71].

Эксперименты показали, что при развитии НЧ-колебаний диффузия плазмы поперек магнитного поля является боровской; уменьшение плотности плазмы вследствие этого приводит к нежелательным релаксационным колебаниям в системе. При уменьшении L (область трансформации приближается к центру системы) и малой ширине барьера излучение энергии из плазмы должно расти, а низкочастотные неустойчивости могут быть сорваны. Это подтвердилось экспериментально: при создании разрядов с более крутым падением плот-

ности (поверхность трансформации расположена вблизи оси разряда) излучение из системы возрастало в 10—16 раз, а низкочастотные неустойчивости подавлялись [22].

Следует также заметить, что при $\omega \sim \omega_p \ll \omega_H$ холодная мода и мода Бернштейна в радиально неоднородной плазме не «зацепляются». В этом последнем случае рассмотрим влияние продольного градиента плотности плазмы на характер излучения поперечных волн ($\nabla n_0 \parallel \mathbf{v}_0$). Оказывается, что излучение поперечных волн обла-

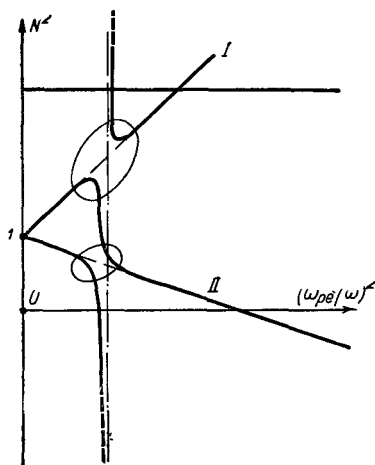


Рис. 9.

дает выраженной анизотропией в зависимости от того, движется ли пучок в сторону роста плотности или в обратную сторону [24]. Это хорошо видно на рис. 9. Пучок возбуждает «холодную» моду в окрестности точки x , где $\omega_p(x) \sim \omega/\cos \theta$ [65]. При движении пучка в сторону роста плотности усиливающееся возмущение «сносится» по движению пучка в сторону роста фазовой скорости (при $\omega_H > \omega_p$ групповая скорость параллельна фазовой [65]). В областях, заштрихованных на рис. 9, при малых углах θ происходит эффективная трансформация холодной моды I в моду II с большой фазовой скоростью, для которой, как известно, может быть получено хорошее

согласование с вакуумными условиями [1]. Коэффициент трансформации для этого процесса близок к единице в случае углов $\theta \sim (\lambda/L_{\parallel})^{1/2}$ [1] (λ — длина волны, L_{\parallel} — характерный размер изменения плотности). Если пучок движется в сторону спада плотности, то возникающее возмущение, распространяясь в ту же сторону в окрестности $\omega \sim \omega_p$, трансформируется в быстрозатухающую плазменную волну, для которой невозможно излучение в вакуум ($k_{\parallel} \gg \omega/c$). Указанный эффект наблюдался экспериментально [23].

2. Анизотропия переходного излучения заряда в слабонеоднородной изотропной плазме. Рассмотренная анизотропия излучения поперечных волн проявляется и в некоторых других случаях. Она связана с наличием областей непрозрачности, резонансных слоев, а также возникает при учете линейной трансформации волн. Проиллюстрируем этот эффект еще на примере переходного излучения заряда.

Предположим, что заряд движется вдоль направления неоднородности плазмы, которое примем за ось z , плотность плазмы монотонно нарастает от нуля до некоторого значения. Разлагая поле в интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iint d\omega d\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{E}(z; k_{\perp}, \omega) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}),$$

получаем уравнение для магнитного поля [72]

$$H'' = \varepsilon' H' / \varepsilon + k_z^2 H = (ek_{\perp} / 2i\pi^2 c) \exp(-i\omega z/v) \equiv F(z), \quad (1.80)$$

где $\varepsilon = 1 - (\omega_{pe}^2(z)/\omega^2) [1 + i(v/\omega)]$; v — частота столкновений; $k_z^2 = (\omega/c)^2 (\varepsilon - \alpha^2)$; $\alpha = ck_{\perp}/\omega$; v — скорость заряда. Амплитуда поля переходного излучения пропорциональна интегралу

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\varepsilon(z)} F(z) H_1(z). \quad (1.81)$$

Здесь H_1 — решение уравнения (1.80) без правой части. Согласно работе [72], величина интеграла (1.81) определяется вкладом ближайшей к вещественной оси z особенности подынтегрального выражения. Кроме того, могут быть вклады точек синхронизма $k_z = \omega/v$, расположенных в комплексной плоскости z . В рассматриваемом случае основной вклад в переходное излучение дают частоты $\omega < (\omega_{pe})$. При этом ближайшая к вещественной оси особенность — это точка резонанса, в которой $\varepsilon(\omega, z)$ обращается в нуль. Полагая в переходном слое

$$\omega_{pe}^2(z) = \omega_{pm}^2 z/L, \quad L_{\omega} = L\omega^2/\omega_{pm}^2, \quad \zeta = z - L_{\omega}$$

в окрестности точки резонанса, получаем $\varepsilon = -[(\zeta/L_{\omega}) + (iv/\omega)]$, т. е. особенность находится в нижней полуплоскости z на расстоянии $(L_{\omega}v/\omega) \ll L_{\omega}$ от вещественной оси. Отметим, что для слабонеоднородной плазмы $(\omega L/c) \gg 1$. Учитывая вид $F(z)$, нетрудно сделать вывод, что точка резонанса дает вклад в интеграл (1.84) только для $v > 0$, что соответствует движению заряда в сторону роста плотности плазмы. При движении заряда в направлении спада плотности плазмы интенсивность переходного излучения экспоненциально уменьшается [72]: $I \sim \exp(-\omega L/v)$. Таким образом, переходное излучение имеет максимальную интенсивность при влете заряда в слабонеоднородную плазму.

Спектральная плотность излучения в вакууме равна

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} &= \frac{2Le^2 \omega^3 \cos \theta}{\pi \omega_{pm}^2 c^2} \exp\left(-\frac{4L\omega^3}{3c\omega_{pm}^2} \sin^3 \theta - \frac{2vL\omega^2}{v\omega_{pm}^2}\right) \text{ при } \theta^3 \gg \frac{\omega_{pm}^2 c}{\omega^3 L}, \\ \frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} &= \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{\omega}{\omega_{pm}}\right)^5 \sin^2 \theta \cos \theta \left[\frac{\Gamma(2/3)}{3^{1/6}}\right]^2 \left(\frac{\omega_{pm} L}{c}\right)^{5/3} \exp\left(-\frac{2vL\omega^2}{v\omega_{pm}^2}\right) \\ &\text{при } \theta^3 \ll \frac{c\omega_{pm}^2}{L\omega^3}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

где θ — угол выхода волны из плазмы в вакуум. Для потерь энергии зарядом имеем

$$\Delta W \sim (e^2 \omega_{pm}/c)(\omega_{pm} L/c)^{2/3} \exp(-2vL/v). \quad (1.83)$$

Сравнивая выражение (1.83) с соответствующей формулой работы [73], видим, что для нерелятивистского заряда потери на переходное

излучение из окрестности точки резонанса слабонеоднородной плазмы могут превзойти уровень потерь на резкой границе плазма — вакуум. Это связано с резонансными свойствами слоя плазмы, в котором диэлектрическая проницаемость обращается в нуль. Отметим, что излучение имеет резкий максимум в области углов $\theta \approx (\omega_{pm}L/c)^{-1/3}$.

Наглядную физическую интерпретацию анизотропии переходного излучения можно дать при учете теплового движения частиц плазмы. В этом случае заряд, двигаясь в направлении роста плотности плазмы, возбуждает продольные плазменные волны, которые, распространяясь в том же направлении, достигают области резонанса и трансформируются в поперечные волны, выходящие в вакуум. При движении заряда в сторону спада плотности плазмы возбужденные им плазменные волны распространяются от точки синхронизма с зарядом, расположенной левее точки резонанса, к границе плазмы. При этом трансформация продольных плазменных волн в поперечные является надбарьерным эффектом, интенсивность переходного излучения экспоненциально уменьшается.

В заключение сделаем следующие замечания. 1. Анизотропия переходного излучения заряда сохраняется и в магнитоактивной плазме. 2. Анизотропия переходного излучения справедлива и для модулированного пучка частиц, причем вследствие эффектов когерентности излучения отдельных частиц потери энергии на переходное излучение могут быть порядка кинетической энергии пучка. Однако в этом случае необходимо учитывать нелинейные эффекты.

§ 5. Каналирование и поглощение электромагнитных волн в области особенности поля при двумерной неоднородности плазмы

1. О возможности одновременного поглощения и каналирования энергии в неоднородной среде. Распространение волн в среде, параметры которой зависят от нескольких координат, описывается дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами. Волновые уравнения такого типа исследовались, например, в работах [74—76]. Так, в работе [76] показано, что решения двумерного волнового уравнения, описывающего стационарное распределение поля, при определенных условиях могут быть локализованы вблизи некоторой «волноводной» оси. Однако условие волноводности [76] в приближении лучевой оптики нарушается в окрестности особых точек коэффициентов волнового уравнения. В то же время именно этот случай интересен для задач трансформации и поглощения электромагнитных волн в плазме. Как будет видно ниже, в среде с многомерной неоднородностью возможны эффекты поглощения и трансформации волн, распространяющихся в виде узких каналированных пучков, в окрестности особенностей решений волнового уравнения. Имея в виду этот случай, рассмотрим уравнение

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 + \omega^2\varphi/c^2(x, z) = 0. \quad (1.84)$$

Уравнение подобного типа можно получить, например, для электромагнитной волны в холодной неоднородной плазме. Очевидно, что поперечные размеры волны ограничены, если в этом направлении коэффициент при φ в (1.84) имеет характер «ямы». Для простоты рассмотрим его в виде $(\omega^2/c^2(x, z)) = k^2(x) - z^2/4a^4(x)$, соответствующем каналу с переменным сечением. Ограниченное в поперечном направлении решение (1.84) дается формулой

$$\varphi(x, z) = (2\pi)^{-1/4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) [n! a(x)]^{-1/2} D_n[z/a(x)], \quad (1.85)$$

где D_n — функция параболического цилиндра. Отметим, что $\int_{-\infty}^{+\infty} dz \varphi^2(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(x)$. Для коэффициентов $B_n(x) = A_n(x) \sqrt{n! \sqrt{2\pi}}$ из формул (1.84), (1.85) с точностью до членов, пропорциональных (в случае слабонеоднородного сечения канала) квадрату малого параметра da/dx , получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 B_n}{dx^2} + \left(k^2 - \frac{2n+1}{2a^2} \right) B_n = \\ & = \left[(n+2)(n+1) \frac{dB_{n+2}}{dx} - \frac{dB_{n-2}}{dx} \right] \frac{d \ln a}{dx}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Как видно из (1.86), в канале переменного сечения, возникающем из-за двумерной неоднородности среды, моды с различными номерами n «зацеплены». Поэтому при прохождении модой с заданным номером в канале переменного сечения генерируются «сопутствующие» волны. Однако учитывая формулы работы [78], в которой исследовались свойства волновода переменного сечения в однородной среде, можно сделать вывод, что интенсивность «сопутствующих» волн экспоненциально мала, если сечение канала на всем протяжении меняется медленно на расстояниях порядка длины волны основной моды.

Рассмотрим теперь поглощения волн в канале в окрестности полюса функции $k^2(x) = k_0^2(1 + b/x)$. Основная мода имеет номер n . С помощью уравнения (1.86) в ВКБ-приближении нетрудно показать, что в окрестности полюса $x = 0$ есть пересечение решений, т. е. совпадают волновые векторы мод с различными номерами и возможна сильная генерация сопутствующих волн. Однако если $|k_0^2 b n da^2/dx| > 1$, то этот эффект можно не учитывать, так как точки пересечения находятся достаточно далеко в области барьера $x < 0$. На положительной полусоси x , вдали от полюса

$$A_n = \frac{\text{const}}{\sqrt{q_n(x)}} \exp \left[i \int_0^x q_n(x') dx' \right]; \quad q_n = \sqrt{k_0^2(1 + b/x) - \frac{2n+1}{2a^2}}. \quad (1.87)$$

Так как поле (1.87) экспоненциально затухает в верхней полуплоскости x , то формула (1.87) остается справедливой и в области барьера $x < 0$ [79]. Следовательно, волна полностью поглощается в окрестности полюса. При этом для неоднородности рассмотренного типа волноводные свойства среды сохраняются и в окрестности полюса. При условиях $k_0^2 b^2 \gg 1$, $k_0^2 ab \gg 1$ траектории лучей в окрестности полюса идут почти параллельно оси x .

2. Поглощение электромагнитных волн в тороидальных системах. Рассмотрим теперь поглощение электромагнитных волн в окрестности особенности поля в тороидальных системах типов «Токамак» и «Левитрон» [53]. В этом случае реальную геометрию можно заменить более простой, в которой параметры плазмы зависят от координат x, y , а магнитное поле имеет параллельные силовые линии, лежащие в плоскости (y, z) под углом θ к оси z . При этом координаты x, y соответствуют малому радиусу тора к азимутальному углу в малом сечении тора, а z — направлению вдоль большого обхода тора. Плотность плазмы неоднородна по оси x , а внешнее магнитное поле равно $H^2 = H_0^2 (1 + a \cos \psi/R)^{-1}$, где $\psi = y/a$ и $a \ll R$. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &\equiv \epsilon = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{hs}^2}; & \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} &\equiv \eta = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}; \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &\equiv ig = -i \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 \omega_{hs}}{\omega(\omega^2 - \omega_{hs}^2)}; \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= 0; & \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= 0. \end{aligned} \right\} (1.88)$$

Подставляя выражения (1.88) в уравнение Пуассона $\text{div } \hat{\epsilon} \nabla \phi = 0$, находим уравнение для характеристик (см. 1, § 1)

$$(dx/dy)^2 = -\epsilon / (\epsilon \cos^2 \theta + \eta \sin^2 \theta). \quad (1.89)$$

Границы гиперболической области определяются уравнениями

$$\epsilon(x, y) = 0, \quad \epsilon(x, y) \cos^2 \theta + \eta(x) \sin^2 \theta = 0. \quad (1.90)$$

Для высокочастотных колебаний $\omega \gtrsim \omega_{He}$ и при $\theta \ll 1$ расстояние между кривыми (1.90) мало, поэтому двумерность неоднородности несущественна. В области частот нижнего гибридного резонанса $|\eta| \gg 1$ и расстояние между кривыми (1.90) может быть порядка малого радиуса тора.

Из формул (1.89), (1.90) следует, что в рассматриваемом случае особые точки характеристик могут быть только на линии параболичности $\epsilon(x, y) = 0$ в точках, где касательная к ней параллельна оси y .

Исследуем особые точки характеристик (1.89) для низких частот $\omega \ll \omega_{He} \sim \omega_{pe}$. Полагая, что поверхность $\epsilon = 0$ проходит не

слишком близко от оси системы, для $\varepsilon(x, y)$ вблизи линии параболическости можно написать

$$\varepsilon(x, y) = [(x - x_0)/b] + a\omega_{pe}^2(x_0) \cos \psi / R \omega_{He}^2. \quad (1.91)$$

Используя выражение (1.91), уравнение (1.89) представим в виде

$$\alpha (d\xi/d\psi)^2 = \xi + \cos \psi, \quad (1.92)$$

где $\xi = R\omega_{He}^2(x_0)(x - x_0)/ab\omega_{pe}^2(x_0)$;

$$\alpha = (b\theta/\omega\omega_{He})^2 (\omega_{pe}^2(x_0)/aR); \quad \omega_{pe}^2(x_0) = \omega^2\omega_{He}^2/(\omega_{He}\omega_{Hi} - \omega^2).$$

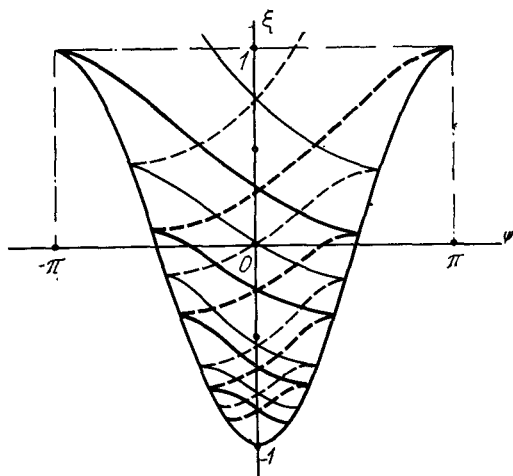


Рис. 10.

Семейства характеристик (1.92) схематически изображены на рис. 10 и 11. Точки $\xi = 1$, $\psi = \pm \pi$ — это седловые особые точки, проходящие через них характеристики образуют особую поверхность поля. Точка $-\xi = 1$, $\psi = 0$ является узлом при $\alpha < 1/8$ и фокусом при $\alpha > 1/8$. Так как особая характеристика «отражается» от границы гиперболической области, то при $\alpha > 1/8$ особая поверхность асимптотически приближается к фокусу после бесконечного числа отражений. При $\alpha < 1/8$ особая характеристика попадает в узел сразу или после конечного числа отражений. Поле вблизи особой поверхности ведет себя как $E_u \equiv \partial\varphi/\partial u = u^{\beta-1}\Phi(su^{2\beta})$, где $1 + 4\beta = \sqrt{1 - 8\alpha}$, s, u — координаты вдоль и поперек особой поверхности соответственно [53]. Заменяя u на $u + i\delta$, находим энергию, поглощаемую вблизи особой поверхности $W_\delta = \delta \iint dsdu |E_u|^2$. Нетрудно видеть, что при $\delta \rightarrow 0$ W_δ остается конечной.

Можно ожидать, что в случае многомерной неоднородности вблизи особых поверхностей в результате возрастания электрического поля, а значит и уменьшения длины волны электромагнитной моды происходит эффективная трансформация электромагнитных и плаз-

менных колебаний. Однако строгое решение задачи о трансформации при двумерной и тем более трехмерной неоднородности еще не получено. Правда, можно ожидать, что влияние двумерности на трансформацию несущественно при достаточно малых β , когда u^β — медленно меняющаяся функция на расстояниях от особой поверхности больших или порядка характерной длины волны плазменных колебаний.

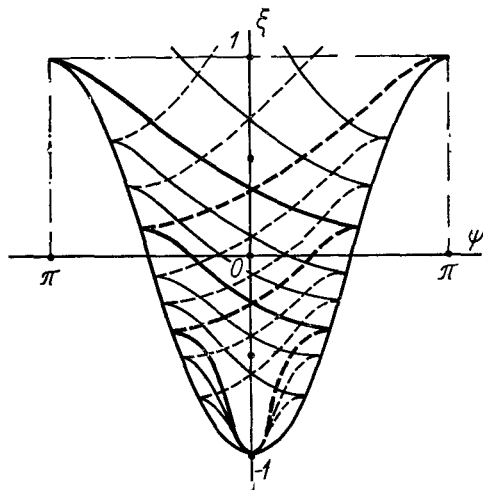


Рис. 11.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК, РАСПАДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СПЕКТРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

§ 1. Особенности нелинейного взаимодействия волн в неоднородной плазме

1. Нелинейное смешивание волн. Рассмотрим нелинейное смешивание волн малой амплитуды, частным случаем которого является генерация второй гармоники [5, 52]. В квазистационарном состоянии амплитуда возбуждаемой при смешивании волны $\psi_3(\mathbf{r})$ пропорциональна матричному элементу взаимодействия $V = \int d\mathbf{r} \psi_1 \psi_2 \psi_3^*$, в котором $\psi_{1,2}$ описывают поля исходных волн и считаются заданными. В квазиклассической области функции $\psi_n(z)$ имеют вид $\psi_n \sim \exp[\pm i \int^z k_n(z') dz']$, где волновой вектор $k_n(z)$ удовлетворяет дисперсионному уравнению $\omega = \omega_n(k_n)$. В слабонеоднородной плазме вопрос об оценке величины матричного элемента V вполне аналогичен вопросу об оценке величины квазиклассического матричного элемента в квантовой механике [80]. Рассматривая ψ_n, k_n в комплексной плоскости переменного z (как аналитическое продолжение с вещественной оси), получим, что величина матричного

элемента определяется конкуренцией вкладов в интеграл от особенностей функции $\psi_n(z)$ и вкладов точек z_0 , в которых выполняется условие распада $k_1(z_0) + k_2(z_0) = k_3(z_0)$. В последнем случае размер области генерации волны Δ можно оценить из условия $|\int_{\Delta} (k_1 + k_2 - k_3) dz| \sim 1$. Таким образом, распады, запрещенные в однородной плазме (распадное условие на вещественной оси z не выполняется), в неоднородной плазме происходят с экспоненциально малой вероятностью, если поля взаимодействующих волн не имеют особенностей на вещественной оси.

Следует обратить внимание на изменение самой постановки задачи об ограничении амплитуд волн, нарастающих в результате нелинейного взаимодействия, и установлении квазистационарных спектров колебаний [52]. В однородной плазме нелинейное взаимодействие волн идет одновременно во всем объеме плазмы и приводит к перераспределению энергии по спектру волновых чисел. В случае неоднородной плазмы каждый распад происходит во вполне определенной части объема, занятого плазмой. Поэтому области распада можно рассматривать, как набор локализованных источников излучения, и, очевидно, при достаточно малых амплитудах вынос энергии из области распада приведет к установлению квазистационарного состояния. Этим, в частности, распад в неоднородной плазме отличается от распадов в ограниченной плазме [81].

2. Распад волны конечной амплитуды. Рассмотрим теперь распад в слабонеоднородной среде волны большой амплитуды, называемой волной накачки. Задачи такого типа решались, например, в работах [82—85]. Так, в работе [85] изучалось распадное взаимодействие плазменной и ионно-звуковой волн в неоднородной плазме, находящейся в высокочастотном однородном электрическом поле. Основные черты этого распада можно проследить на следующем простом примере. Если точки отражения находятся далеко от области распада, уравнения для амплитуд $a_{1,2}(z)$ нарастающих волн можно взять в виде

$$da_{1,2}/dz = \kappa (a_0/a_c) a_{2,1}^* \exp(ik_0 z^2/L), \quad (2.1)$$

где a_0 — амплитуда волны накачки, которая считается неизменной; κ , a_c — положительные нормировочные постоянные, условие распада выполняется в точке $z = 0$, так что $k_0 z^2/L = \int_0^z [k_0(z') - k_1(z') - k_2(z')] dz'$. Для функции $b_1 = a_1 \exp(-ik_0 z^2/2L)$ из (2.1) получим уравнение

$$d^2 b_1/dz^2 + [(k_0 z/L)^2 + (ik_0/L) - \kappa^2 a_0^2/a_c^2] b_1 = 0. \quad (2.2)$$

Для уравнения (2.1) поставим следующие условия: $|a_1|^2 = 1$, $|a_2|^2 = 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Решая (2.2) при $z \rightarrow +\infty$, имеем

$$|a_1|^2 = \exp \mu, \quad |a_2|^2 = \exp(\mu) - 1; \quad \mu = (\pi L/k_0)(\kappa a_0/a_c)^2. \quad (2.3)$$

Из формул (2.2), (2.3) видно, что в неоднородной среде распад волны накачки приводит к конечному усилению волн $a_{1,2}$. Размер области распада, совпадающий с шириной барьера в (2.2) $\Delta z = L (\kappa a_0 / k_0 a_c)$, пропорционален амплитуде волны накачки a_0 и длине неоднородности L , а коэффициент усиления $\exp \mu$ зависит экспоненциальным образом от квадрата амплитуды волны накачки. Из формулы (2.3) следует условие срыва распадной неустойчивости $L < k_0 (\Lambda / \pi) (a_c / \kappa a_0)^2$, где $\Lambda \approx 5$.

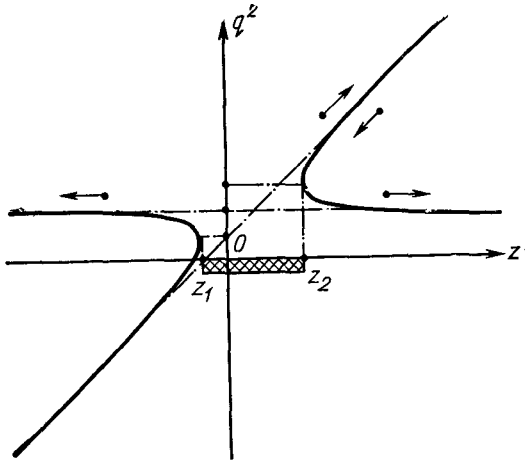


Рис. 12.

Рассмотрим еще случай, когда вблизи от области распада находится точка отражения одной из нарастающих при распаде волн. Для дальнейшего существования, чтобы компоненты фазовой и групповой скоростей нарастающих волн на направление неоднородности имели одинаковые знаки. Уравнения для амплитуд волн запишем в виде

$$(d^2 a_1 / dz^2) + k_1^2 a_1 = \alpha \cdot a_2; \quad (d^2 a_2 / dz^2) + k_2^2 a_2 / L = -\alpha \cdot a_1. \quad (2.4)$$

Здесь $k_{1,2} = \text{const}$, $\alpha = \kappa^2 a_0 / a_c$ и a_0 — амплитуда волны накачки. Из уравнений (2.4) следуют выражения для волновых векторов мод:

$$2q_{\pm}^2 = k_1^2 + k_2^2 z / L \pm \sqrt{(k_1^2 - k_2^2 z / L)^2 - 4\alpha^2}. \quad (2.5)$$

Ход функций $q_{\pm}^2(z)$ показан на рис. 12, где $z_{2,1} = (L/k_2^2) (k_1^2 \pm 2\alpha)$ — точки пересечения ветвей колебаний. Как видно из (2.5), связь волн a_1, a_2 через волну накачки (параметр α) приводит в данном случае к появлению области усиления колебаний (z_1, z_2) (см. рис. 12), ширина которой пропорциональна произведению длины неоднородности и амплитуды волны накачки. Интересно отметить, что в отличие от квантовомеханического случая [80] взаимодействие волн

приводит не к расталкиванию ветвей $q_{\pm}^2(z)$, а к их притяжению. Заменим переменную $k_1 z = \xi - k_1^3 L/k_2^2$. Тогда из системы (2.4) для амплитуды a_1 получим уравнение вида

$$(d^4 a_1/d\xi^4) + \lambda^2[(\xi d^2 a_1/d\xi^2) + (\xi + \beta)a_1] = 0, \quad (2.6)$$

подробно исследованное в работе [51]. Учитывая, что в данном случае компоненты фазовой и групповой скоростей на направлении неоднородности имеют одинаковые знаки, и используя результаты работы [51], нетрудно получить выражения для коэффициентов усиления волн. Например, при падении на область распада (z_1, z_2) моды с волновым вектором $\mathbf{q} \approx k_2(z/L)^{1/2}$ (см. рис. 12, стрелками указаны направления распространения мод), усиление ее по мощности равно $\exp(2\pi L\alpha^2/k_1 k_2^2)$, т. е. логарифм коэффициента усиления пропорционален квадрату амплитуды волны накачки.

§ 2. Генерация гармоник электромагнитной волны в неоднородной плазме

Покажем, что в неоднородной плазме возможна эффективная генерация гармоник электромагнитных волн даже при отсутствии синхронизма между гармониками. Рассмотрим прежде всего падение электромагнитной волны на холодную плазму без магнитного поля, неоднородную вдоль оси z . Вектор электрического поля находится в плоскости падения $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$, магнитное поле имеет компоненту H_x . Считая нелинейные эффекты малыми и представляя магнитное поле второй гармоники в виде

$$H_x^{(2)}(z, y, t) = H_2(z) \exp(2i\omega t - 2ik_{\perp}y),$$

получим для H_2 уравнение [5]

$$H_2'' + K_2^2 H_2 = F(z), \quad (2.7)$$

где $k_2^2 = (4\omega^2/c^2)(\epsilon_2 - \alpha^2)$, $\epsilon_2 = 1 - \omega_{pe}^2/4\omega^2$ — диэлектрическая проницаемость на второй гармонике, $\alpha = ck_{\perp}/\omega$, $F(z)$ — нелинейный источник, имеющий вид

$$F(z) = \frac{\epsilon_2}{mc\omega} \left[ik_1 E_1 \cdot \frac{d\epsilon_1}{dz} - \frac{2ik_1 E_z}{\epsilon_1 \epsilon_2} \cdot \frac{d\epsilon_1}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\frac{E_y E_z}{\epsilon_1 \epsilon_2} \cdot \frac{d\epsilon_1}{dz} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Здесь $\epsilon_1(\omega, z) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(z)}{\omega^2} \left(1 + i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right)$ — диэлектрическая проницаемость на основной частоте. Обратим внимание на то, что F пропорционален градиенту плотности и исчезает в однородной плазме, где индуцируемые падающей волной нелинейные токи — чисто продольные. Так как в рассматриваемом здесь случае слабонеоднородной плазмы без магнитного поля условия синхронизма не могут быть выполнены, то согласно развитой в § 1 идеологии поле излучения на второй гармонике будет определяться вкладом ближайшей к вещественной оси z особенности $F(z)$ — точки резонанса $\epsilon_1(\omega, z) =$

$= 0$. Вблизи точки резонанса $\epsilon_1 = -(z/L + i\nu_{\text{эфф}}/\omega) \equiv -\zeta/L$, а поля первой гармоники имеют вид

$$\left. \begin{aligned} H_x^{(1)} &= -\frac{\pi}{2} H(0) k_1 \zeta H_1^{(1)}(k_1 \zeta); \quad H_0 = H_x^{(1)}(0); \\ E_y^{(2)} &= i\rho\alpha^2 H(0) \left[C + \ln\left(\frac{k_1 \zeta}{2}\right) \right]; \quad E_z^{(1)} = -\frac{\alpha}{\zeta} [H(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Здесь C — постоянная Эйлера. Как видно из (2.9), компоненты электрического поля падающей волны при $\nu_{\text{эфф}} \rightarrow 0$ обладают особенностью в точке $z = 0$, происхождение которой связано с накоплением энергии падающей волны в области точки резонанса $\epsilon_1 \approx 0$. Для слабонеоднородной плазмы параметр квазиклассичности $\rho = \omega L/c$ велик, поэтому заметная генерация второй гармоники происходит при малых углах падения волны на плазму, когда $\alpha \ll 1$. При этом из формул (2.7), (2.9), считая, что $\rho\alpha^3 \gg 1$ и пренебрегая малыми слагаемыми, получаем

$$\frac{d^2 H_2}{dz^2} + k_2^2(0) H_2 = -\frac{e\alpha^3 L^2 H^2(0)}{mc^2} \cdot \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{1+C+\ln(k_1 \zeta/2)}{\zeta^2} \right]. \quad (2.10)$$

Решая уравнение (2.10) граничными условиями излучения $H_2(z) \rightarrow C_{\pm} \exp(\mp ik_2 z)$ при $z \rightarrow \pm \infty$ и учитывая, что особая точка $F(z)$ лежит в нижней полуплоскости z , нетрудно показать, что вторая гармоника излучается в области резонанса $\epsilon_1 \approx 0$ «назад» и присутствует только в отраженном сигнале с амплитудой

$$C_- = -\frac{\pi \sqrt{3} e \rho^2 \alpha^3 H^2(0)}{mc\omega} \left(2 + i \frac{\pi}{2} + \ln \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \right) \exp \left(-\rho \sqrt{3} \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right). \quad (2.11)$$

Эффективность генерации второй гармоники определяется отношением потоков энергии $Q = S_2^{(2)}/S_2^{(1)}$:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{4\sqrt{3}e\alpha LH_0}{mc^2} \right)^2 \left[\frac{\pi}{16} + \left(1 + \ln \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{3}}} \right)^2 \right] \times \\ &\times \exp \left(-\frac{8}{3} \rho\alpha^3 - 2\sqrt{3} \rho \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь H_0 — магнитное поле $H_x^{(1)}$ в вакууме.

Оценим в используемом здесь приближении малой нелинейности результат для максимально возможной генерации второй гармоники. Критерий малости нелинейности имеет вид [5] $|\alpha_e H(0)/\rho mc\omega| \ll \ll (\nu_{\text{эфф}}/\omega)^{5/2}$. Подставляя его в (2.12), получаем

$$Q \lesssim \alpha^2 \left(\rho \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right)^5 \exp \left(-\frac{4}{3} \rho\alpha^3 - 2\rho \sqrt{3} \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right). \quad (2.13)$$

Для сравнения укажем долю энергии W_v , поглощаемой в области резонанса. При $\nu_{\text{эфф}} \rightarrow 0$ и $\rho\alpha^3 \gg 1$ она равна $W_v = 2S_2^{(1)} \times$

$\times \exp\left(-\frac{4}{3}\rho\alpha^3\right)$. Таким образом, в исследованном случае во вторую гармонику преобразуется малая часть энергии, поглощаемой в области резонанса $\varepsilon_1 \approx 0$. Однако можно ожидать, что они становятся сравнимыми, когда $4\rho\alpha^3/3 \lesssim 1$ и $|H(0)| > (mc\omega\rho/\epsilon\alpha) (v_{эфф}/\omega)^{5/2}$.

В теплой плазме, когда столкновением достаточно редки, в области резонанса становятся существенными эффекты конечной температуры плазмы. При учете теплового движения в резонансном слое $\varepsilon_1 \approx 0$ в результате линейной трансформации падающей волны образуются плазменные колебания, которые уносят энергию из резонансного слоя, тем самым ограничивая продольное электрическое поле. Как указано в работах [1, 5], в этом случае можно ввести эффективную диссипацию, для которой $(v_{эфф}/\omega) = (r_D/L)^{2/3}$, где r_D , L — дебаевский радиус электронов и длина неоднородности плотности соответственно. Так как интенсивность излучения на второй гармонике не зависит от $v_{эфф}$ при $v_{эфф} \rightarrow 0$, то естественно ожидать, что в теплой бесстолкновительной плазме результат по генерации второй гармоники сохраняется. Прямое вычисление излучения на второй гармонике [43] подтверждает этот вывод. Таким образом, излучение второй гармоники происходит в области особенности поля волны и не зависит от конкретного вида механизма, ограничивающего электрическое поле. Иными словами, указанная выше эквивалентность теплового движения диссипации сохраняется и в нелинейном случае [5, 43]. Этот вывод остается в силе для неоднородной плазмы, находящейся в магнитном поле [86].

Из сказанного следует, что в области резонанса неоднородной плазмы энергия падающей электромагнитной волны рассеивается по следующим каналам: поглощение на столкновениях, линейная генерация продольных плазменных колебаний и генерация гармоник. В последнем случае можно также ввести эффективную диссипацию, для которой $v_{эфф}/\omega \sim |\epsilon\alpha H(0)/mc\omega\rho|^{2/5}$. Конкуренция различных процессов определяется сравнением соответствующих $v_{эфф}$.

В заключение сделаем несколько замечаний. 1. Генерация второй гармоники при нормальном падении необыкновенной волны на холодную неслнородную плазму, находящуюся в однородном магнитном поле, исследовалась в работе [87]. Результаты принципиально не отличаются от приведенных здесь. 2. В работе [88] исследовались гистерезисные явления, возникающие в области резонанса при наложении ВЧ-поля. В рассматриваемом случае, при выполнении указанного выше критерия малости нелинейности, они отсутствуют.

Необходимо также отметить, что в магнитоактивной плазме зависимость фазовой скорости волны от частоты, плотности плазмы и других параметров носит немонотонный характер, поэтому условия синхронизма гармоник могут выполняться. Например, при нормальном распространении необыкновенной волны в холодной магнитоактивной плазме синхронизм между первой и s -й гармониками выполняется вдоль кривой $\omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 = (s^2 \omega^2 - \omega_{pe}^2) (\omega_{pe}^2 - \omega^2)$ на плоскости параметров $(\omega_{pe}^2, \omega_{He}^2)$. Указанное обстоятельство должно

приводить к «рассыпанию» нелинейной волны, распространяющейся через область синхронизма неоднородной плазмы [20].

Приведем еще выражение для потока энергии на второй гармонике электромагнитной волны в неоднородной плазме, возникающей при падении плазменной волны на область $\omega_{pe} \approx \omega$ [52]:

$$S_z^{(2)}/S_z^{(1)} = (8/3) \rho \beta^2 (e\alpha A/m\omega v_{Te})^2; \quad (\rho \beta^2 \ll 1) \quad (2.14)$$

$$\frac{S_z^{(2)}}{S_z^{(1)}} = 2 \left(\frac{4e\alpha A}{9m\omega v_{Te}} \right)^2 \frac{1}{\rho \beta^2}; \quad (\rho \beta^2 \gg 1).$$

Здесь $\beta = v_{Te}/c$; $E_{z1} = A(\omega/c k_z)^{1/2} \exp \left[-i \int_0^z k_1(z') dz' \right]$ — поле падающей плазменной волны; $A = \text{const}$; $k_1 = \frac{\omega}{v_{Te}} \sqrt{-z/L}$; $S_z^{(1)} = c \beta^2 \frac{A^2}{8\pi}$ — поток энергии на плазменной волне.

Как следует из (2.14), генерация второй гармоники достигает максимума при $\rho \beta^2 \sim 1$; при этом по сравнению со случаем резкой границы [89, 90] поток энергии на второй гармонике содержит большой параметр ρ , что является следствием увеличения области взаимодействия волн.

§ 3. Спектр излучения, захваченного в плазменной полости

В результате качественного изменения нелинейного взаимодействия волн в неоднородной плазме (пространственная ограниченность области взаимодействия, появление новых типов генерации волн и др.) должен существенно меняться стационарный спектр волн, устанавливающийся в среде. Решение этой задачи требует одновременного учета перекачки энергии по спектру из-за взаимодействия волн, а также влияния неоднородности. Чтобы проиллюстрировать роль неоднородности, рассмотрим более простую задачу о спектре излучения, давление которого уравнивается давлением плазмы [91]. Отметим, что для случая монохроматического излучения такая задача исследовалась в работе [92].

Движение кванта в неоднородной плазме описывается уравнениями

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \omega_k}{\partial k}; \quad \frac{dk}{dt} = - \frac{\partial \omega_k}{\partial r} = - \frac{2\pi e^2}{m\omega_k} \nabla n(r), \quad (2.15)$$

где

$$\omega_k = \sqrt{\omega_0(r) + c^2 k^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n(r)}{m}.$$

Из последнего уравнения видно, что на все $N(\mathbf{r}) = \int \frac{dk}{8\pi^3} N_{\mathbf{k}}$ квантов в единице объема действует сила

$$\Sigma \hbar \frac{dk}{dt} = -V \nabla n(\mathbf{r}); \quad V = \frac{2\pi e^2 \hbar}{m} \int \frac{dk}{8\pi^3} \cdot \frac{N_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (2.16)$$

Кроме того, можно показать [93, 94], что при однородной температуре плазма в поле стационарных колебаний распределяется по закону Больцмана $n(\mathbf{r}) = n(\infty) \exp(-V/\theta)$, где $\theta = T_e + T_i$. Обозначив $g(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})/n(\infty) \leq 1$, имеем

$$\ln \frac{1}{g} = \frac{V}{\theta} = \frac{2\pi \hbar e^2}{m\theta} \int \frac{dk}{8\pi^3} \cdot \frac{N_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (2.17)$$

В одномерном случае $N_{\mathbf{k}} = N(k_x) \delta(k_y) \delta(k_z)$ и множитель $N(k_x)$ может зависеть лишь от единственного интеграла движения — частоты $\omega_{\mathbf{k}}$; обозначая $S = \omega^2/\omega_0^2(\infty)$ и учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} |k_x| &= \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2(r)} c^{-1} = (\omega_0(\infty)/c) \sqrt{s-g}, \\ (d|k_x|/ds) &= \frac{(\omega_0(\infty)/2c)}{\sqrt{s-g}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

представим (2.17) в виде

$$\ln \frac{1}{g} = \int_g^1 f(s) ds / \sqrt{s-g}; \quad f(s) = \frac{2\pi \hbar e^2 \omega_0(\infty) N(k_x)}{8\pi^3 m c \omega_{\mathbf{k}} \theta}. \quad (2.19)$$

Решение этого интегрального уравнения Абеля — функция

$$f(s) = (2/\pi \sqrt{s}) \arctg \sqrt{(1-s)/s}, \quad (2.20)$$

которая позволяет рассчитать все спектральные характеристики излучения, уравнивающего заданный конкретный профиль плотности $n(x)$.

Отметим, что выше вопрос о спектре решался в приближении геометрической оптики. Отказ от этого приближения хотя и усложняет задачу, однако может представлять интерес, поскольку дает возможность строго оценить роль диапазона длинных волн, областей отражения, а также резонансных слоев, в которых возможно образование плазменных волн (последнее, в частности, имело бы значение для выяснения вопроса о самоподогреве плазменной полости и времени жизни электромагнитного излучения в ней).

3. ПРОСВЕТЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ БАРЬЕРОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

§ 1. Вводные замечания

Одна из наиболее характерных особенностей неоднородной среды — это существование барьеров непрозрачности для распространяющихся волн. В конечном счете волна не проникает в какую-то область плазмы из-за того, что токи поляризации компенсируют токи смещения (а поле в результате затухает). Существует несколько возможностей избежать этого. Обсудим кратко некоторые из них, неявно предполагая справедливость гидродинамического приближения и откладывая исследование кинетических эффектов до следующего параграфа.

Проникновение поля в плазму из-за скин-эффекта связано с изменением в результате столкновений (обычных или эффективных) фазовых соотношений между токами поляризации и токами смещения; при этом амплитуда поля спадает в глубь плазмы. Более интересно создать условия проникновения поля в виде незатухающих волн. Существует возможность прорыва поля большой амплитуды через непрозрачную среду, если предельно возможные токи поляризации в ней $j = enc$ не могут компенсировать токи смещения. Очевидно, что это произойдет при амплитудах электромагнитного поля, удовлетворяющих условию

$$E > 4\pi enc/\omega. \quad (3.1)$$

Такая возможность уже обсуждалась, например, в работе [95]. Однако строгого анализа задачи пока нет. Качественно также понятно, что если нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости среды ϵ положительна, то возможно проникновение волны через область непрозрачности линейной среды. Действительно, если $\epsilon = \epsilon_0(z) + \alpha|E|^2$ и $\alpha > 0$, то волна проникает через барьер непрозрачности, если $\alpha|E|^2 > \max|\epsilon_0(z)|$ ($|E|^2$ — квадрат амплитуды поля). Отметим, что случай $\alpha > 0$ для однородной нелинейной среды соответствует хорошо известному явлению самофокусировки волны [96]. При выполнении написанного выше неравенства электромагнитное поле также нарастает и для неоднородной среды. Весьма эффективным способом просветления волновых барьеров является рассмотренная в предыдущих разделах трансформация волн.

Напомним, что в результате пересечения мод просветление плазмы происходит по следующим причинам: а) область плазмы, непрозрачная для падающей волны, является прозрачной для волны, образовавшейся в результате процесса трансформации; б) барьер непрозрачности уменьшается для пересекающихся мод с нормальной дисперсией [51]; в) барьер непрозрачности, существующий для «рожденной» волны, может исчезнуть в случае нелинейной трансформации энергии в гармоники этой волны (см. [52] и раздел 2, § 2).

Отметим, что вывод медленных волн из плазмы относится к тому же кругу вопросов (непрозрачным здесь является внешнее пространство). При этом, наряду с изученной выше трансформацией волн, причиной излучения энергии может служить образование так называемых вытекающих волн в неоднородных открытых волноводах [97]. Требуя, например, в случае двумерного поля, чтобы поле собственной волны было лишь ограничено на бесконечности, можно существенно расширить систему собственных волн и учесть поле излучения (к поверхностным волнам добавятся псевдоповерхностные волны). В результате и возникают вытекающие волны, энергия которых не концентрируется полностью в волноводе и вблизи него, а преобразуется в поле излучения, обычно с достаточно острой диаграммой направленности. Такая волна должна всегда поддерживаться источником. В случае, когда поле излучения возбуждается одной поверхностной волной, распространяющейся вдоль диэлектрической пластины переменной толщины и длины L , коэффициент трансформации оказывается порядка $(\lambda_{\perp}/L)^2$ (λ_{\perp} — эффективная протяженность поля поверхностной волны в поперечном направлении). (Подробное изложение вопроса о вытекающих волнах см. в работе [97].)

§ 2. Нелокальные эффекты в неоднородной плазме

Прежде всего необходимо указать, что под словом нелокальные здесь и ниже понимаются эффекты типа эха в однородной плазме. Обычно эффект эха рассматривают в связи с затуханием Ландау как проявление «памяти» в системе, оставленной исчезающими макроскопическими полями и содержащейся в микроскопических осцилляциях функции распределения [98], которые, например, в изотропной однородной плазме имеют вид $\delta f_h(x, v, t) = g(v) \exp(ikx - ikvt)$ или $\delta f_{\omega}(x, v, t) = p(v) \exp[i\omega(t - x/v)]$ и соответствуют наличию в плазме модулированных потоков частиц. В неоднородной плазме в результате фокусирующего действия неоднородности и вследствие неполного фазового перемешивания резонансных частиц появляется несколько новых (по сравнению со случаем однородной плазмы) эховых эффектов. В частности, в неоднородной плазме память системы может проявиться уже в линейных эффектах типа линейного нелокального отражения волн [99] и линейной регенерации волны за барьером непрозрачности или областью сильного беспотенциального затухания [14, 101, 102]. Кроме этого, в неоднородной плазме без магнитного поля возможно эхо на суммарной частоте внешних сигналов [14] и связанное с этим раздвоение эха, когда во втором порядке по амплитуде поля от двух источников одновременно возникают эховые сигналы на суммарной и разностной частотах.

1. Линейная регенерация и всплески поля необыкновенной волны в неоднородном магнитном поле. Исследование вопроса о линейной регенерации волны, распространяющейся в том же направлении, что и исходная, в результате фазовой фокусировки частиц неод-

нородностью плазмы было рассмотрено в работах [14, 100]. Здесь мы покажем, что наряду с переизлучающимися волнами могут существовать неизлучающиеся всплески поля, а также проанализируем различные ситуации, в которых возможно переизлучение.

Распространение высокочастотной $\omega \sim \omega_{He}$ необыкновенной циклотронной волны круговой поляризации вдоль неоднородного магнитного поля описывается следующим уравнением:

$$E_{\omega}(z) + (c^2/\omega^2)(d^2 E_{\omega}/dz^2) = (4\pi i/\omega)(j_p + j_{ext}), \quad (3.2)$$

полученным из уравнений Максвелла и Власова методом характеристик. Первое слагаемое в правой части уравнения (3.2) представляет ток электронов плазмы

$$4\pi j_p = -\omega_p^2 \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} F(v) \left[\int_{-\infty}^z dz' E_{\omega}(z') \exp(-i\psi) + \int_z^{\infty} dz' E_{\omega}(z') \exp(i\psi) \right], \quad (3.3)$$

где $F(v)$ — невозмущенная функция распределения по продольным скоростям; $\psi \equiv \bar{\psi}(z', z, v) = \int_{z'}^z [\omega - \omega_{He}(y)] (dy/v)$ — фаза возмущения функции распределения электронов плазмы; $\omega_{He}(z) = eH(z)/mc$. Неоднородностью плотности плазмы, а также изменением продольной скорости частиц вследствие неоднородности магнитного поля пренебрегаем. Как оказывается, эти ограничения не принципиальны. Второе слагаемое в уравнении (3.2) представляет возбуждающий волну сторонний ток $j_{ext} = j\delta(z - a)$.

При слабой неоднородности внешнего магнитного поля решение уравнения (3.3) ищем в ВКБ-приближении $E_{\omega}(z) = A(z) \times \exp[i \int_{z_0}^z k(y) dy]$. Плазменный ток j_p представим в виде суммы вкладов резонансных и нерезонансных частиц. Для нерезонансных частиц в уравнении (3.3) под интегралом появляются большие фазы $\theta_{\pm}(z', z; v) = \int_{z'}^z \alpha(y, \pm v) dy$, где $\alpha(y, \pm v) = k(y) - \omega - \omega_{He}(y)/\pm v$, а знаки плюс и минус указывают на знак скорости частиц.

Интегрируя в (3.3) для нерезонансных частиц по частям по z' и ограничиваясь членами нулевого и первого порядков малости по параметру ВКБ, получаем

$$A(z)\Lambda(\omega, k) - i\Lambda_k^{1/2} (d/dz)[A(z)\Lambda_k^{1/2}] = (4\pi i/\omega)(j_{res} + j_{ext}) \exp(-i \int_{z_0}^z k dz). \quad (3.4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Lambda(\omega, k) = \epsilon(\omega, k) - (c^2 k^2/\omega^2); \quad \epsilon(\omega, k) = 1 + (c^2/\omega_{pe}^2/\omega^2) \int [dv \cdot F(v)/v \alpha(z, v)]; \quad \Lambda_k \equiv \partial \Lambda(\omega, k)/\partial k.$$

Локальное волновое число $k \equiv k_\omega(z)$ найдем из дисперсионного уравнения $\Lambda(\omega, k_\omega) = 0$. Вычисляя ток резонансных частиц, учтем в выражении (3.3) при интегрировании по z' вклад точек циклотронного резонанса, в которых $\alpha(z', v) = 0$. Это уравнение представляет собой условие стационарности фаз θ_\pm по z' ; оно определяет в неоднородном магнитном поле $H_0(z)$, вообще говоря, неоднозначную зависимость $z' = z_r(v)$ координаты точки резонанса частицы с волной от значения ее скорости. Обратная зависимость имеет простой вид $v_r(z') = [\omega - \omega_{He}(z')]/k_\omega(z')$.

Кроме условия $\alpha(z', v) = 0$ потребуем стационарность фазы $\theta_+(z', z; v)$ по переменной v :

$$\frac{d}{dv} \theta_+(z_r, z; v) = \int_{z_r(v)}^z dy \frac{\partial \alpha(y, v)}{\partial v} = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) определяет зависимость $v = v_f(z)$ и удовлетворяется при наличии фазовой фокусировки для частиц, имеющих в точке z скорость $v_f(z)$ и находящихся в резонансе с волной в точке $z' = z_r(v_f(z)) \equiv \zeta(z)$. Условие фазовой фокусировки частиц (3.5) тождественно выполняется для $\zeta(z) = z$. В данном случае ток резонансных частиц (3.5) — это локальная функция амплитуды волны и параметров плазмы; он приводит к обычному локальному затуханию волны. В неоднородном магнитном поле условие (3.5) может выполняться для $\zeta(z) \neq z$, когда ζ и z расположены в различных областях плазмы, недоступных исходной волне вследствие непрозрачности или циклотронного затухания. В этом случае вблизи z возникает нелокальный макроскопический ток, который или переизлучает волну, или проявляется в виде всплесков поля. Исходя из этого, результат интегрирования для резонансных частиц представим суммой локального и нелокального токов:

$$j_{\text{res}}(z) \exp \left[-i \int_{z_0}^z k(y) dy \right] = i \frac{\kappa(z) A(z)}{\Pi^2(z)} + 2i \frac{\kappa(\zeta) E_\omega(\zeta)}{\Pi^2(\zeta)}, \quad (3.6)$$

где

$$\kappa(\zeta) = [\pi \omega_{pe}^2 \Pi^2(z) / \omega v_r(z)] F(v_r(z)) \frac{\partial \alpha(z, v_r(z))}{\partial v_r(z)};$$

$$\Pi^{-2}(z) = \partial \Lambda(\omega, k_\omega) / \partial k_\omega.$$

Частицы, создающие нелокальный ток, являются резонансными в области поглощения исходной волны, а их скорость определяется из условия фазовой фокусировки между точкой поглощения $\zeta(z)$ и данной точкой z . Очевидно, что $v_f(z)$ и $v_r(z)$ совпадают, если $\alpha[z, v_f(z)] = 0$. Отсюда находятся точка регенерации волны z_R , определяющая скорость переизлучающих частиц $v_0 = v_f(z_R)$, и точка поглощения волны этими частицами $z_i = z_r(v_0)$. В окрест-

ности точки $z = a$ сторонний ток возбуждает волну, амплитуда которой спадает по закону

$$A_i(z) = -(4\pi j/\omega)\Pi(z)\Pi(a)\exp[-\operatorname{sgn}(z-a)\int_a^z \kappa(y)dy]. \quad (3.7)$$

Подставим выражения (3.6) и (3.7) в уравнение (3.4). Учитывая, что основной вклад в поле регенерированной волны происходит от точки перевала $z = z_R$, в которой выполняется условие $\alpha[z, v_f(z)] = 0$ стационарности фазы $\theta_0(z) \equiv \theta_+[z, z, v_f]$ по z , после интегрирования получаем поле регенерированной волны:

$$A_R(z) = -\frac{2\Pi(z)\Pi_2}{\Pi_1^2} \sqrt{\frac{2\pi}{i\beta_2}} \kappa(z_1) A_i(z_1) I(z-z_2) \times \\ \times \exp\left[i\theta_0(z_2) - \operatorname{sgn}(z-z_2) \int_{z_2}^z \kappa(y) dy\right]. \quad (3.8)$$

Здесь

$$z_1 = \zeta(z_R); \quad z_2 = z_R; \quad \beta_2 = \left. \frac{d\alpha(z, v_f)}{dz} \right|_{z=z_2}; \quad \Pi_n \equiv \Pi(z_n).$$

Интеграл

$$I(z-z_2) = \left(\frac{i\beta_2}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{\pm\infty}^z dz' \exp\left[\frac{i\beta_2}{2}(z'-z_2)^2\right] \quad (3.9)$$

вместе с экспоненциальным множителем локального затухания описывает форму сигнала переизлученной волны. Знаки в пределах интегрирования в (3.9) зависят от знака скорости частиц, переизлучивших волну (случаю $v > 0$ соответствует знак минус, и наоборот). Форма сигнала асимметрична. Поле переизлученной волны простирается в одну сторону от точки регенерации z_2 на расстояние κ_2^{-1} , а в другую на расстояние $\beta_2^{-1/2} = (\lambda_2 L_2)^{1/2}$, где L_2, λ_2 — длина неоднородности и длина волны в точке z_2 соответственно. Используя (3.8), находим отношение потоков энергии в регенерированной и исходной волнах:

$$d(z, z_1) = \left| \frac{A_R(z)}{A_i(z)} \right|^2 = \frac{8\pi\kappa^2(z_1)\Pi^2(z)\Pi_2^2}{|\beta_2|\Pi_1^4} \exp\left[-2\int_{z_2}^z \kappa(y) dy\right]. \quad (3.10)$$

На рис. 13 схематически представлены некоторая конфигурация магнитного поля (кривая *I*) в безразмерной переменной $\omega_{He}(z)/\omega$, квадрат показателя преломления (кривая *II*) и отношение $v_r(z)/c$ (кривая *III*) для положительных k_ω при $\omega_{pe}^2 < 2\omega^2/3\sqrt{3}$. Области непрозрачности 2, 4, 6, 8 для необыкновенной волны заштрихованы и чередуются с областями прозрачности 1, 3, 5, 7, 9. Как нетрудно видеть, фазовая фокусировка для частиц может выполняться между двумя областями прозрачности. Если условие резонанса $\alpha = 0$ выполняется в обеих областях — волна переизлучается.

В работе [14] подробно рассмотрен случай переизлучения из области *I* в область *5* и проведен анализ условий переизлучения на конкретном примере параболического распределения магнитного поля между этими областями.

Выражение (3.8) для поля переизлученной волны описывает все указанные случаи. Отметим, что из-за различия направлений распространения волны и движения резонансных частиц имеются качественные различия в регенерации при $\omega_{He} > \omega$ и $\omega_{He} < \omega$. Например, из области *I* в область *3* возмущение переносит частицы с $v_z > 0$. Однако если исходная волна движется в положительном

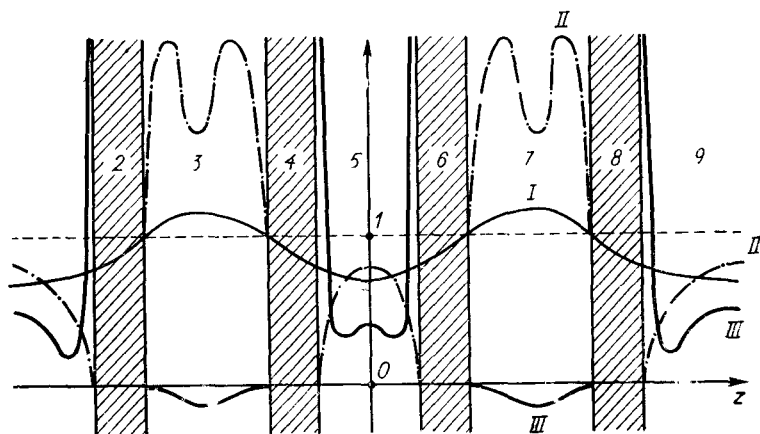


Рис. 13.

направлении, то переизлученная — в отрицательном (именно эта волна резонансна с частицами с $v_z > 0$ в области *3*). Из области *3* в область *7* возмущение переносится частицами с $v_z > 0$, но исходная и переизлученная волны распространяются в отрицательном направлении.

Если в данной точке z условие фазовой фокусировки выполнено для частиц со скоростью $v_f(z)$, а условие резонанса выполняется для другой группы частиц со скоростью $v_r(z)$ или область фазовой фокусировки непрозрачна для волны, то в этом случае макроскопический ток сфокусированных частиц (3.6) приводит к появлению всплесков поля типа несобственного эха в однородной плазме. Форма всплесков поля и размер занятой ими области определяются условиями резонансного поглощения поля исходной волны и параметрами плазмы в области появления всплесков. В этих всплесках проявляется остальная доля энергии исходной волны, поглощенной сфокусированными частицами и не переизлученной в волну регенерации.

Для вычисления поля всплеска необходимо проинтегрировать уравнение (3.4), учитывая, что основной вклад в данном случае

происходит от конечной точки интегрирования z . Поэтому поле всплеска повторяет поведение нелокального тока плазмы и его можно представить в виде

$$E_{\omega}(z) = - \frac{2i\kappa(\zeta) A_i(a)}{\Pi(a) \Pi(\zeta) \Lambda\left(\omega, \frac{\omega - \omega_{He}(z)}{v_f(z)}\right)} \times \\ \times \exp\left[i \int_a^z \frac{\omega - \omega_{He}(y)}{v_f(y)} dy - \int_a^{\zeta} \kappa(y) dy \right].$$

Для примера рассмотрим образование всплеска в области 3 (или 7) от источника, расположенного соответственно в области 1 (или 5). Если для $z \approx a$ выполняется условие $\kappa L_{\kappa} \gg 1$, где L_{κ} — длина неоднородности $\kappa(z)$, и исходная волна поглощается до точки отражения, то форма всплеска определяется фактором затухания исходной волны $\exp\left[-\int_a^{\zeta} \kappa(y) dy\right]$, а размер всплеска в переменной $\zeta(z)$ имеет порядок κ^{-1} . Форма и размер всплеска в области наблюдения получаются преобразованием $z = \varphi(\zeta)$, обратным $\zeta(z)$.

В случае, когда $\kappa L_{\kappa} \ll 1$, форма и размер всплеска определяются конкуренцией фактора затухания и изменением $\kappa(z)$.

2. Линейная регенерация волны при неполном фазовом перемешивании резонансных частиц. Для простоты рассмотрим нормальное падение плазменной волны на прямоугольный барьер плотности (рис. 14 [101]). Падающая волна вызывает в области I макроскопический ток частиц, который можно разделить на ток тепловых частиц и ток резонансных. Поле волны экранируется в области барьера II на расстоянии порядка дебаевского радиуса r_D , поэтому в случае барьера с шириной $\Delta > r_D$ волна в области III за барьером непрозрачности может возбуждаться только проникающим туда нелокальным током. В случае монохроматической волны $E \sim \sim \exp(ikz - i\omega t)$ возбуждаемые ею осцилляции функции распределения в области II имеют вид

$$f_{\omega}^{iI}(z, \varepsilon) = f_{\omega}^I(-a, \varepsilon) \exp\left[\frac{i\omega(z+a)}{v_T \sqrt{\varepsilon + \varepsilon_0}} \right], \quad (3.11)$$

где ε — безразмерная энергия частиц ($\varepsilon = 1$ соответствует тепловым частицам), v_T — тепловая скорость, а $f_{\omega}^I(-a, \varepsilon)$ можно представить в следующем виде:

$$f_{\omega}^I(-a, \varepsilon) = \frac{2ie}{mv_T^2} E_{\omega}(-a) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left[P \frac{1}{k - \omega/v_T \sqrt{\varepsilon}} - i\pi\delta\left(k - \frac{\omega}{v_T \sqrt{\varepsilon}}\right) \right]. \quad (3.12)$$

Здесь $f_0(\varepsilon)$ — невозмущенная функция распределения.

Макроскопический ток $j_\omega(z)$, вызываемый внутри барьера осцилляциями функции распределения (3.11), запишем в виде

$$j_\omega(z) = 1/2en_0 v_T^2 \int_0^\infty d\varepsilon f_\omega^I(-a, \varepsilon) \exp\left[i \frac{\omega(z+a)}{v_T \sqrt{\varepsilon + \varepsilon_0}}\right], \quad (3.13)$$

где ε_0 — безразмерный прирост энергии частиц в области барьера непрозрачности. Из соотношения (3.13) нетрудно видеть, что при ширине барьера $\Delta > (v_T/\omega)\sqrt{1 + \varepsilon_0}$ в результате фазового перемешивания ток тепловых частиц, связанный с главным значением в формуле (3.12), исчезает за барьером.

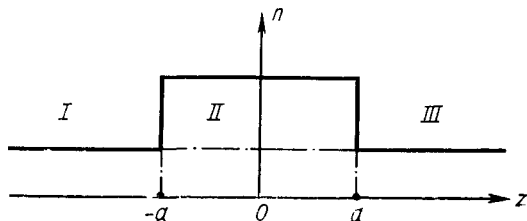


Рис. 14.

Однако вследствие почти монохроматичности резонансных частиц этого условия недостаточно для исчезновения тока резонансных частиц, который дается выражением

$$j_{\text{рез}} = \frac{\gamma\omega}{4\pi} \left(\frac{d\Lambda}{dk} \right) E_\omega(-a) \exp\left[\frac{ik(z+a)}{\sqrt{1 + \varepsilon_0 (kv_T/\omega)^2}} \right]. \quad (3.14)$$

Здесь $k = k_0 + i\gamma$ — корень дисперсионного уравнения $\Lambda(\omega, k) = 0$; Λ — продольная диэлектрическая проницаемость в области I. Из (3.14) следует, что ток резонансных частиц исчезает при условии

$$\Delta > \gamma^{-1} \sqrt{1 + \varepsilon_0 (kv_T/\omega)^2}.$$

Поэтому при ширине барьера Δ , определенной неравенствами $(v_T/\omega)\sqrt{1 + \varepsilon_0} < \Delta < \gamma^{-1}\sqrt{1 + \varepsilon_0 (kv_T/\omega)^2}$, резонансные частицы возбуждают в области III колебания электрического поля. Фактически задача сводится к нахождению поля в полупространстве $z > a$ при заданной на границе функции распределения входящих в это полупространство частиц. Соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$E_\omega(z) = g(z) + \int_a^\infty dy K(|z-y|) E_\omega(y), \quad (3.15)$$

где

$$K(\xi) = \frac{\omega_{pe}^2}{i\sqrt{\pi}\omega v_T} \int_0^\infty d\varepsilon \exp\left(\frac{i\omega\xi}{v_T\sqrt{\varepsilon}} - \varepsilon\right);$$

$$g(z) = \frac{2i\pi}{\omega} en_0 v_T^2 = \int_0^\infty d\varepsilon f_\omega^{(1)}(a, \varepsilon) \exp\left[\frac{i\omega(z+a)}{v_T\sqrt{\varepsilon}}\right].$$

В результате решения уравнения (3.15) методом, который описан в работе [101], для поля в области III получим

$$E_\omega(z) = i\frac{\gamma}{k} E_\omega(-a) \exp\left[ik(z-a) + \frac{ik\Delta}{\sqrt{1+\varepsilon_0(kv_T/\omega)^2}}\right].$$

Коэффициент прохождения волны через барьер

$$d = \left| \frac{E_\omega(a)}{E_\omega(-a)} \right|^2 = \left| \frac{\gamma}{k} \right|^2 \exp\left(-\frac{2\gamma\Delta}{\sqrt{1+\varepsilon_0(kv_T/\omega)^2}}\right). \quad (3.16)$$

Нетрудно видеть, что данный эффект существует для барьеров произвольной формы, так как физическая картина при этом не меняется.

3. Линейная нелокальная трансформация волн в неоднородной плазме. В случае нормального падения волны на барьер непрозрачности, как рассматривалось выше, резонансные частицы возбуждают за барьером волну того же типа, однако при падении волны на барьер под углом магнитному полю резонансные частицы могут возбуждать за ним волну другого типа, т. е. происходит линейная нелокальная трансформация [102]. Рассмотрим для примера нелокальную трансформацию необыкновенной поперечной волны E_+ в продольную E_l . Для этого подставим в уравнение (3.15) для поля продольной волны функцию распределения возмущения резонансных частиц $f_\omega^{(l)}(a, \varepsilon)$ от падающей на барьер под малым углом к магнитному полю поперечной волны:

$$f_\omega^{(l)}(a, \varepsilon) = \frac{e\sqrt{\pi}k_\perp E_l(-a)}{2m\omega_{He} v_T^2 \sqrt{\varepsilon}} \exp(-\varepsilon) \sum (-1)^n \delta\left(k_l - \frac{\omega - n\omega_{He}}{v_T\sqrt{\varepsilon}}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{2ia(\omega - n\omega_{He})}{v_T\sqrt{\varepsilon + \varepsilon_0}}\right],$$

где k_l , k_\perp — продольная и поперечная компоненты волнового вектора падающей волны ($k_\perp v_T \ll \omega_{He}$) и $n = 0, 1$. Тогда для коэффициента трансформации поперечной волны в продольную получим выражение

$$Q = |E_\omega^{(l)}(a)/E_\omega^{(l)}(-a)|^2 = \\ = \frac{\pi k_\perp^2 \omega_{pe}^2}{4\omega^2 \omega_{He}^2 k_l} \left| \frac{d\Delta}{dk} \right|_{k=k_l}^{-2} \sum (-1)^n \times$$

$$\times \left| \frac{1 - \exp \left[-i \Delta \left(k_l - \frac{\omega k_t}{\omega - n \omega_{He}} \right) \right]}{k_t v_T [(\omega - n \omega_{He}) k_l - \omega k_t]} \exp \left[\frac{2i a k_t}{\sqrt{1 + \varepsilon_0 (k_t v_T / \omega - n \omega_{He})^2}} - \left(\frac{\omega - n \omega_{He}}{k_t v_t} \right)^2 \right] \right|,$$

где $\Lambda = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \ln \Lambda(p, -\omega) / (p - k_l) \left(p - \frac{n k_t}{\omega - n \omega_{He}} \right) -$

волновой вектор продольной волны. Максимальный коэффициент трансформации соответствует случаю пространственного резонанса

$$\left. \begin{aligned} \omega k_t &= (\omega - n \omega_{He}) k_l, \quad n = 0, 1, \\ Q_{\text{макс}} &= \left(\frac{k_{\perp} k_l v_T^2 \gamma_l}{4 \omega \omega_{He} k_t} \right)^2 \exp \left[-4 a \gamma_l \left(1 + \varepsilon_0 \frac{k_l^2 v_T^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \right\} (3.17)$$

Отметим, что указанная трансформация может быть и в случае, когда волна одного типа падает на область непрозрачности, в которой выполняются условия распространения для волны другого типа, и, следовательно, она может возбуждаться резонансными частотами.

4. Нелинейная нелокальная трансформация поперечных волн в продольные. Для примера нелокальной нелинейной трансформации поперечных возмущений в собственные продольные колебания плазмы рассмотрим продольное эхо от двух поперечных источников

$$j(z, t) = e_y \sum_{s=1}^2 j_s \delta(z - a_s) \cos \omega_s t, \quad \omega_2 > \omega_1, \quad a_2 - a_1 = d > 0, \quad (3.18)$$

расположенных в области непрозрачности $\omega_{pe}(a_{1,2}) > \omega_{1,2}$ неоднородной изотропной плазмы [14]. В этом случае во втором порядке по амплитуде внешнего сигнала на разностной частоте $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ возникает продольный эховый ток, который в плазме со спадающей плотностью возбуждает вблизи точки $z_c = a_2 + d \omega_1 / \omega_3$ ленгмюровские колебания, если частота ω_3 больше ленгмюровской $\omega_{pe}(z_c)$.

Для упрощения выкладок будем считать основную часть плазмы с тепловой скоростью V_T и неоднородной плотностью $N(z)$ почти «холодной», к которой добавлена максвелловская «горячая» компонента с однородной плотностью $n_0 \ll N$ и тепловой скоростью $v_T \gg V_T$. При этих условиях создаваемый горячей компонентой эховый ток имеет вид

$$j_z^{(2)} = \frac{4\pi e^3 n_0 d j_1 j_2}{m^2 c^4 \omega_2} \delta(\omega - \omega_3) \int_0^{\infty} dv \exp \left(-\frac{v^2}{2} + i \frac{\xi}{v} \right), \quad (3.19)$$

где $\zeta = (\omega_3/v_T)(z - z_c)$. Продольное поле эха $E_z^{(2)}$ подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 E_z^{(2)}}{dz^2} + k_3^2(z) E_z^{(2)} = \frac{4\pi\omega}{iV_T^2} \left(j_z^{(2)} + \frac{V_T^2 d^2 j_z^{(2)}}{\omega^2 dz^2} \right). \quad (3.20)$$

Здесь $k_3^2(\zeta) = (\omega_3/V_T)^2 \varepsilon_3(z)$, $\varepsilon_3(z) = 1 - (\omega_{pe}^2(z)/\omega_3^2)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы на частоте ω_3 .

Решая уравнение (3.20) с учетом (3.19), находим электрическое поле ленгмюровской волны, которое при расположении точки эха $z = z_c$ вдали от точки поворота $k_3 = 0$ равно

$$E_z^{(2)}(z, t) = \frac{16\pi^4 e^3 n_0 N(z_c) j_1 j_2 d}{m^3 c^4 \omega_3^3 \omega_2 \varepsilon_3(z_c)} \frac{v_\Phi}{v_T} \exp\left(-\frac{v_\Phi^2}{2v_T^2}\right) \delta(\omega - \omega_3) \times \\ \times [\varepsilon_3(z_c)/\varepsilon_3(z)]^{1/4} \exp\left[i \int_{z_c}^z k_3(z') dz' - i\frac{\pi}{2} - i\omega_3 t\right], \quad (3.21)$$

где $v_\Phi = \omega_3/k_3(z_c)$.

Таким образом, вследствие неоднородности плотности, спадающей к границе плазмы, поперечные источники нелокально возбуждают ленгмюровские колебания. Необходимо отметить, что ленгмюровские волны, распространяющиеся почти нормально к резкой границе плазмы, излучаются в вакуум с коэффициентом трансформации порядка единицы [103].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
2. Железняков В. В. Радиоизлучение солнца и планет. М., «Наука», 1964.
3. Голанд В. Е., Пилия А. Д. «Успехи физ. наук», 1971, 104, 413.
4. Моисеев С. С. Доклад на конференции по теории плазмы. Киев, 1971. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1972, 62.
5. Ерохин Н. С., и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 56, 179.
6. Денисов Н. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1956, 31, 609.
7. Железняков В. В., Золотник Е. Я. «Изв. вузов. Сер. радиофизика», 1962, 5, 644.
8. Моисеев С. С. Proc. of the seventh Internat. Conf. on phenomena in Ionized Gases. Beograd, 1966, v. 2, p. 645.
9. Пилия А. Д., Федоров В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 57, 1198.
10. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 1964, 158, 1295.
11. Рухадзе А. А., Саводченко В. С., Тригер С. А. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1965, 6, 58.
12. Тимофеев А. В. «Успехи физ. наук», 1970, 102, 185.
13. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1966, 2, 25.
14. Водяницкий А. А., Ерохин Н. С., Моисеев С. С. «Письма ЖЭТФ», 1970, 12, 529.
15. Моисеев С. С. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1966, 3, 3.
16. Моисеев С. С. Автореферат диссертации. Харьков, УФТИ, 1969.
17. Геккер И. Р., Сизухин О. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 9, 408.
18. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Павлова И. Л. Баланс энергии и диффузии в тороидальных плазменных установках. М., Изд-во МГУ, 1970.

19. Виноградов А. В., Пустовалов В. В. «Письма ЖЭТФ», 1971, 13, 317.
20. Ерохин Н. С., Курилко В. И. и др. Доклад CN-28/E-13 на IV Международной конференции по исследованиям в области физики плазмы и управляемых термоядерных реакций. Мэдисон, Висконсин, 1971.
21. Александров В. О., Голант В. Е., Жилинский А. П. «Ж. техн. физ.», 1971, 41, 66.
22. Бакай А. С., Березин А. К. и др. Доклад CN-28/E-9 на IV Международной конференции по исследованиям в области физики плазмы и управляемых термоядерных реакций. Мэдисон, Висконсин, 1971.
23. Березин А. К., Березина Г. П., Ерохин Н. С. и др. «Письма ЖЭТФ», 1971, 14, 149.
24. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Доклад на конференции по теории плазмы, Киев, 1971.
25. Моисеев С. С. Труды международного симпозиума по проблеме многих тел и физике плазмы. М., «Наука», 1967, с. 183.
26. Korecky V. Czechosl. J. Phys., 1971, B21, 34.
27. Stuekelberg E. C. G. Helv. phys. acta, 1932, 5, 369.
28. Быховский В. И., Никитин Е. Е., Овчинникова М. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 47, 750.
29. Дубровский Г. В. «Вестн. Ленингр. ун-та (физика), 1967, 16, 24.
30. Слущки А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 53, 767.
31. Пиля А. Д., Федоров В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1971, 60, 389.
32. Долгорулов В. Б. «Ж. техн. физ.», 1966, 36, 273.
33. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., «Наука», 1966.
34. Трикоми В. Д. Дифференциальные уравнения. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
35. Гильденбург В. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1963, 45, 1978.
36. Омельченко А. Я., Степанов К. Н. «УФЖ», 1968, 13, 1552.
37. Dnestrovskii Yu. N., Kostomarov D. P., Pereverzev J. V. Tenth. Internat. Conf. on phenomena in Ionized Gases, Contr. papers, 1971, 343.
38. Денисов Н. Г. «Уч. зап. Горьковск. ун-та», 1957, 35, 3.
39. Заславский Г. М., Моисеев С. С. «Докл. АН СССР», 1965, 161, 318.
40. Заславский Г. М. Лекции по применению метода ВКБ в физике. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1965.
41. Моисеев С. С., Смилянский В. Р. «Магнитная гидродинамика», 1965, 2, 23.
42. Гребинский А. С. «Ж. техн. физ.», 1969, 39, 1166.
43. Ерохин Н. С. Автореферат диссертации. Харьков, УФТИ, 1970.
44. Заславский Г. М. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1966, 6, 76.
45. Ерохин Н. С. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1970, 6, 3.
46. Ерохин Н. С. «Дифференциальные уравнения», 1971, VII, 970.
47. Заславский Г. М., Филоненко Н. Н. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1967, 1, 21.
48. Кондратьев И. Г., Миллер М. А. «Изв. вузов. Сер. радиофиз.», 1968, 11, 885.
49. Федоров В. И. Автореферат диссертации. Л., ЛФТИ, 1971.
50. Timofeev A. V. Nucl. Fus., 1968, 8, 99.
51. Ерохин Н. С. «Укр. физ. ж.», 1969, 14, 2059.
52. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. «Ж. техн. физ.», 1970, 40, 1144.
53. Пиля А. Д., Федоров В. И. Доклад на конференции по теории плазмы. Киев, 1971.
54. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1964, 5, 44.
55. Wasow W. Ann. Math., 1950, 52, 350.
56. Давыдова Т. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1971, 69, 1001.
57. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В. 2. Пер. с англ. М., «Наука», 1966.
58. Стинк Т. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
59. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.

60. Wong A. Y., Kuckes A. F. Phys. Rev. Lett., 1964, 13, 306.
61. Недлин Г. М., Шапиро Р. Х. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 57, 1961.
62. Давыдова Т. А. Доклад на конференции по теории плазмы. Киев, 1971.
63. Ахизер А. И., Файнберг Я. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1951, 21, 1262.
64. Файнберг Я. Б. «Атомная энергия», 1961, 11, 313.
65. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. М., Атомиздат, 1970; т. 2, 1971.
66. Сахаров И. Е., Федоров В. И. «Ж. техн. физ.», 1971, 41, 1539.
67. Rabenstein A. L. Arch. Rational Mech. Analyses, 1958, 1, 418.
68. Коган Е. Я., Моисеев С. С., Ораевский В. Н. «Прикл. мех. и техн. физ.», 1965, 6, 41.
69. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», 1962, 32, 1291.
70. Бакай А. С. «Ядерный синтез», 1970, 10, 53.
71. Михайловский А. Б., Юнгвирт К. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 50, 1036.
72. Галеев А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 46, 1335.
73. Басс Ф. Г., Яковенко В. М. «Успехи физ. наук», 1965, 86, 189.
74. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., Изд-во МГУ, 1965.
75. Бабич В. М., Лазуткин В. Ф. В сб: Проблемы математической физики, № 2. Л., Изд-во ЛГУ, 1967.
76. Булдырев В. С. В сб: Проблемы математической физики, № 3. Л., Изд-во ЛГУ, 1968.
77. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Препринт ХФТИ 70/20. Харьков, 1970.
78. Каценеленбаум Б. З. «Докл. АН СССР», 1955, 102, 4, 711.
79. Fugly W. H. Phys. Rev., 1947, 71, 360.
80. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
81. Карплюк И. С., Ораевский В. Н. «Ж. техн. физ.», 1968, 38, 1214.
82. Grenz F. H., Kino G. S. J. Appl. Phys., 1965, 36, 2387.
83. Ромазашвили Р. Р. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 53, 2168.
84. Пилия А. Д. Доклад на конференции по теории плазмы. Киев, 1971.
85. Perkins F., Flick T. Phys. Fluids, 1971, 14, 2012.
86. Fidone T., Granata G., Teichmann I. Phys. Fluids, 1971, 14, 737.
87. Долгополов В. В., Демченко В. В., Омельченко А. Я. «Изв. вузов. Сер. радиофиз.», 1971, 14, 1321.
88. Гильденбург А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 46, 2156.
89. Аланакян Ю. Р. «Ж. техн. физ.», 1965, 35, 1552.
90. Аланакян Ю. Р. «Ж. техн. физ.», 1970, 40, 70.
91. Трубников Б. А. Доклад на конференции по теории плазмы. Киев, 1971. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1972, 62, 971.
92. Волков Т. Ф. В сб: Физика плазмы и проблемы УРТ, Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 336.
93. Гапонов А. В., Миллер М. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1958, 34, 242.
94. Аскарьян Г. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1962, 42, 1567.
95. Max C., Perkins F. Phys. Rev. Lett., 1971, 27, 1342.
96. Ахманов С. А., Сухоруков А. Г., Хохлов Р. Р. «Успехи физ. наук», 1967, 93, 19.
97. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. М., «Наука», 1969.
98. Кадомцев Б. Б. «Успехи физ. наук», 1968, 95, 112.
99. Berk H. L., Horton C. W. e. a. Phys. Fluids, 1968, 11, 367.
100. Водяницкий А. А., Ерохин Н. С., Моисеев С. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1971, 61, 629.
101. Лиситченко В. В., Ораевский В. Н. «Докл. АН СССР», 1971, 201, № 6, 1319.
102. Водяницкий А. А., Ерохин Н. С., Лиситченко В. В. и др. Доклад на конференции по теории плазмы. Киев, 1971.
103. Field G. B. J. Astrophys., 1956, 124, 555.

«НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ» ТЕОРИЯ ДИФФУЗИИ

А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев

ВВЕДЕНИЕ

При отсутствии конвективного движения и турбулентности утечка плазмы поперек удерживающего ее магнитного поля вызвана столкновениями между частицами плазмы и носит диффузионный характер. Коэффициент диффузии легко оценить, воспользовавшись классическим законом случайных блужданий $D \sim (\Delta r)^2/\tau$. Так, для простейшего случая, когда магнитное поле имеет лишь одну компоненту, за смещение Δr следует взять средний ларморовский радиус вращения частицы в магнитном поле $\Delta r \sim v_t/\omega_c$ (v_t — тепловая скорость $= \sqrt{2T/m}$, $\omega_c = eB/mc$), а τ выбрать равным времени соударения. Действительно, за каждое столкновение частица «перескакивает» на расстояние порядка ларморовского радиуса. Таким образом, легко получается известная зависимость $D \sim B^{-2}T^{-1/2}$, послужившая в свое время отправной точкой в термоядерных исследованиях магнитного удержания плазмы [1]. Более тонкий анализ, кроме уточнения численных множителей, показывает также, что столкновения между частицами одного сорта не приводят к такой диффузии. Это вытекает из того, что в промежутке времени между актами соударений сохраняется обобщенный импульс отдельных частиц, а столкновения сохраняют суммарный импульс, так что центр тяжести двух одинаковых частиц не смещается наружу. Например, в двухкомпонентной плазме из электронов и ионов одного сорта только перекрестные столкновения ионов и электронов приводят к диффузии, причем коэффициенты диффузии ионов и электронов автоматически оказываются одинаковыми (т. е. диффузия автоматически амбиполярна). Эта особенность диффузии плазмы в магнитном поле, не сразу вытекающая из закона случайных блужданий, легко получается из другого простого подхода. Движение заряженной частицы поперек силовой линии магнитного поля носит дрейфовый характер со скоростью $v_{др} = c \frac{[\mathbf{F} \times \mathbf{B}]}{eB^2}$, где F — сила, действующая на частицу. Плазма, удерживаемая магнитным полем $\text{grad } p = (-1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$, переносит ток $\mathbf{j} = -c \text{grad } p/B$, создаваемый относительным движением электронов и ионов со средней скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{j}/ne = -c \text{grad } p/nBe$. Это относительное движение должно

сопровождаться силой трения $F_{\text{тр}} = mu/\tau_{ei}$ (τ_{ei} — среднее время столкновения между электронами и ионами). Оказывается, именно дрейф под действием силы трения $cF_{\text{тр}}/eB$ и создает диффузионные потоки электронов и ионов, естественно оказывающиеся равными. Коэффициент такой диффузии

$$D_{\perp} = r_{ce}^2/\tau_{ei}, \quad (1)$$

получившей в свое время название *классической*, численно оказывается настолько малым, что описываемая им утечка плазмы не представляла бы никакой опасности в магнитной ловушке с термоядерными параметрами.

Однако уже первые модельные эксперименты, проводившиеся с плазмой газового разряда, показали, что утечка плазмы поперек магнитного поля значительно выше скорости классической диффузии. Вследствие различных неустойчивостей плазма легко переходит в турбулентное состояние, в котором диффузия носит турбулентный характер. Анализ ранних экспериментальных результатов привел Д. Боме в 1949 г. к постулированию эмпирического закона турбулентной диффузии плазмы в магнитном поле [2]

$$D_b = cT_e/16eB. \quad (2)$$

Столь большая аномальная диффузия была бы катастрофой для проблемы управляемого термоядерного синтеза. Хотя в большом количестве экспериментальных исследований «бомовская» диффузия и была подтверждена, она оказалась далеко не универсальным законом. Это стало совсем очевидным, когда была понята природа турбулентности, приводящей к бомовской диффузии: почти двумерная турбулентность в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Возникновение такой турбулентности связано с так называемой *дрейфовой неустойчивостью плазмы*. Повышение температуры плазмы ведет, как правило, к стабилизации дрейфовой неустойчивости, и вместе с тем исчезает источник турбулентности, ведущей к аномальной диффузии.

Работы последних лет, посвященные удержанию плазмы в тороидальных магнитных ловушках (особенно в «Токамаке»), подтвердили, что можно забыть о неустойчивостях, приводящих к катастрофически быстрому опустошению магнитных ловушек со скоростью «бомовской» диффузии (2). Но сравнительно медленная утечка плазмы, обнаруженная в этих ловушках, все же существенно превышает то, что следовало бы из простой формулы классической диффузии (1). Дело в том, что в простой модели (1) учитывалась лишь одна разновидность отклонения заряженной частицы от магнитной поверхности, связанная с быстрым ларморовским вращением. Если магнитные силовые линии не являются прямыми линиями (а так бывает в любой реальной магнитной ловушке), появляются еще

дополнительные смещения частицы, связанные с дрейфовым движением в неоднородном магнитном поле. Тогда Δr — смещение частицы в законе случайных блужданий — может существенно возрасти. В некоторых случаях Δr может оказаться порядка поперечных размеров самой магнитной ловушки.

Грубую оценку величины коэффициента диффузии можно получить, подставляя среднюю величину смещения Δr в закон случайных блужданий. Но здесь нужно проявлять известную осторожность, оценивая роль столкновений между одинаковыми частицами, вклад которых исчезает, если сохраняется соответствующая компонента обобщенного импульса. Так, в одном из наиболее интересных случаев тороидальных магнитных ловушек с аксиальной симметрией (а к ним относятся «Токамак» и «Левитрон») сохраняется аксиальная компонента обобщенного импульса, и для диффузии обязательно нужны перекрестные столкновения ионов и электронов. И в этом случае удобнее пользоваться другим подходом, основанным на рассмотрении дрейфа частиц наружу под действием усредненной силы трения.

Уже давно известно, что диффузия плазмы в тороидальном магнитном поле может значительно превышать таковую в магнитном поле с прямыми силовыми линиями. Дело в том, что для компенсации разделения зарядов, возникающего вследствие градиентного и центробежного дрейфов в тороидальном магнитном поле [3], необходимо протекание дополнительного (к диамагнитному) тока вдоль силовых линий магнитного поля. Сила трения, создаваемого этим током, и приводит в конечном итоге к более быстрой, чем в прямых системах, диффузии плазмы. Соответствующий коэффициент диффузии был найден Д. Пфиршем и А. Шлютером [4], использовавшими простую гидродинамическую модель. Магнитное поле в тороидальной ловушке с аксиальной симметрией в простейшем случае имеет вид (рис. 1):

$$\mathbf{B} = B_0[e_z + \Theta e_\phi]/(1 + \varepsilon \cos \vartheta),$$

$$\Theta = ir/2\pi R, \quad \varepsilon = r/R \ll 1.$$

Диффузионное равновесие плазмы описывается уравнениями двухжидкостной гидродинамики [5] (обозначение общепринятое):

$$0 = -\nabla n T_j + e_j n \{ -\nabla \Phi + (1/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{Q}] \} + \mathbf{R}_j + \text{div } \pi,$$

$$\text{div } n \mathbf{v} = 0.$$

Здесь $\mathbf{R}_j = -e_j n (j_{\parallel}/\sigma_{\parallel} + j_{\perp}/\sigma_{\perp})$ — сила электрон-ионного трения, а σ_{\parallel} , σ_{\perp} — проводимости плазмы вдоль и поперек силовых

линий соответственно*

$$\sigma_{\perp} = 0,51\sigma_{\parallel} = ne^2/m_e v_{ei}; \quad v_{ei} = 16\pi^{1/2}e^4 n/3m_e^2 v_{Te}^3.$$

Найдем скорости движения компонент плазмы из первого уравнения и подставим их в уравнение непрерывности. Линеаризуя затем последнее относительно тороидальных поправок, получаем

$$v_0 \frac{\partial}{r \partial \vartheta} n_1 - \frac{c \partial \Phi_1}{B_z r \partial \vartheta} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial r} + \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \theta n_0 v_{\parallel j} = (v_0 + U_p^j) n_0 \varepsilon \sin \vartheta,$$

где $v_0 = \frac{c}{B_z} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr}$ — скорость вращения в равновесном электрическом поле, $U_p = \frac{c}{enB_z} \cdot \frac{dp}{dr}$. Величины с индексом 1 представляют собой поправки к равновесным значениям из-за тороидальности магнитного поля. Как и в магнитном поле с прямыми силовыми линиями, дрейф вследствие градиента давления выпадает из уравнения непрерывности и остается только электрический дрейф. В тороидальном магнитном поле, кроме того, появляется вклад от тороидального дрейфа.

Из уравнений непрерывности для ионов и электронов находим величину равновесного продольного тока

$$j_{\parallel} = (-2\varepsilon/\Theta)(c/B_0)(dp/dr) \cos \vartheta. \quad (3)$$

Сила Лоренца, обязанная этому току, уравнивает избыток давления плазмы на внешнем обводе тора, возникающий из-за диамагнитного выталкивания ее в область слабого поля вследствие действия центробежной силы в тороидальном магнитном поле. Основная же часть давления, как обычно, уравнивается благодаря протеканию диамагнитного тока: $j_{\vartheta} = (c/B_0)(dp/dr)$. Знание равновесных токов позволяет определить диффузионные потоки частиц. Величину скорости диффузии проще всего вычислить из уравнения движения вдоль оси тороида:

$$0 = (e_j/c)n_0 v_r B_{\vartheta} + R_{zj}.$$

Усредняя значение потока по магнитной поверхности с весом $(1 + \varepsilon \cos \vartheta)$, учитывающим увеличение магнитной поверхности на внешнем обводе тора, получаем

$$\langle n v_r \rangle = (-nc^2/B_0^2)[1/\sigma_{\perp} + 2q^2/\sigma_{\parallel}]dp/dr, \quad (4)$$

где $q = \varepsilon/\Theta$ — так называемый коэффициент запаса устойчивости в системах типа «Токамак». При выводе этой формулы мы пренебре-

* В отличие от обзора С. И. Брагинского [5] здесь частоты ион-ионных и электрон-электронных соударений определены одинаково. (Значение v_{ii} в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в работе [5].) Кроме того, всюду ниже мы полагаем $Z = 1$ и, следовательно, $v_{ei} = v_{ee}$.

гли возмущениями температуры частиц. В действительности же это некорректно, и более детальный учет температурных эффектов приводит к увеличению классической диффузии не в q^2 раз, а в $1,31q^2$ [6]. Кроме того, теория диффузии Пфирша—Шлютера совсем недавно была пересмотрена некоторыми авторами с целью более корректного учета влияния самосогласованных электрических полей на диффузию плазмы. При этом весьма интересный эффект был обнаружен Стрингером [7]. Он заметил, что в системе координат, вращающейся со скоростью электрического дрейфа плазмы, тороидальное магнитное поле воспринимается как вынужденная сила с пространственными и временными периодами, соответствующими моде $m = 1$ с продольным волновым числом $k_{\parallel} = \Theta/r$ и частотой $\omega_0 = -v_0/r$. Отклик на это воздействие обратно пропорционален диэлектрической проницаемости плазмы $D(-v_0/r; \Theta/R)$ и быстро растет, если вынуждающая сила попадает в резонанс с дрейфовыми колебаниями неоднородной плазмы.

Розенблют и Тейлор [8] указали позднее, что величина электрического поля не является задаваемым извне параметром, а целиком определяется самим процессом диффузии. Наложение условия квази-

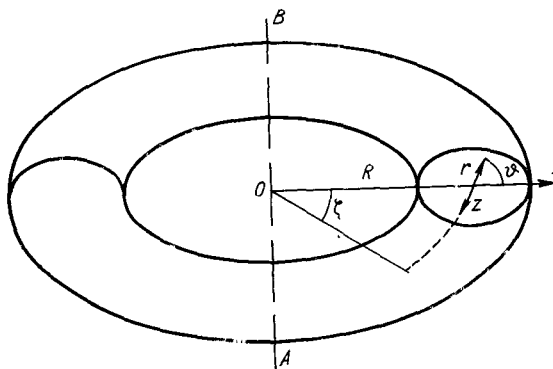


Рис. 1. Система тороидальных координат r, θ, ξ .

нейтральности позволило им получить уравнение для изменения электрического поля со временем, а уже из последнего найти величину равновесного электрического поля. При этом оказалось, что величина равновесной скорости вращения плазмы всегда далека от резонанса, так что диффузия никогда существенно не превышает найденную Пфиршем и Шлютером [6].

Поток тепла поперек тороидального магнитного поля также оказывается большим, чем в случае прямых силовых линий магнитного поля, и равен [9, 10]

$$\left. \begin{aligned} q_{\perp} &= -\kappa_{\perp}^i (dT_{0i}/dr)[1 + 1,6q^2], \\ \kappa_{\perp}^i &= \sqrt{2} (n_i T_i v_{ii}/m_i \omega_{ci}^2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ
В АКСИАЛЬНОСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ *

§ 1. Коэффициенты переноса разреженной плазмы
(сводка результатов)

Коэффициенты переноса разреженной плазмы в тороидальных системах, обладающих аксиальной симметрией, были впервые вычислены в 1967 г. [11]. Оказалось, что основной вклад в «перемешивание» плазмы вносит особая группа частиц, запертых в области слабого магнитного поля. Коэффициенты диффузии и теплопроводности плазмы при этом значительно превышают рассчитанные по формулам Пфирша — Шлютера и Шаfranова. Это позволяет выписать здесь только ту часть вклада в коэффициенты переноса, которая обязана наличию «запертых» частиц. Вклад же основной доли частиц, вычисленный в рамках гидродинамической теории, следует просто добавить к приведенным здесь.

Кроме выражения для потоков частиц и тепла выпишем также и выражение для тока проводимости (закон Ома), имея в виду небольшое увеличение сопротивления плазмы в неоднородном магнитном поле. Вычисления, проведенные в работах [11—13] для модели магнитного поля, описанной во введении, приводят к следующим результатам:

$$\left. \begin{aligned} \langle nv_r \rangle &= \langle nv_r \rangle^n + \langle nv_r \rangle^I + \langle nv_r \rangle^E; \\ \langle nv_r \rangle^n &= -\frac{\alpha_e D_e}{T_e} \sum_j n T_j \left[\frac{d \ln n}{dr} - \left(\frac{3}{2} - \gamma_j^n \right) \frac{d \ln T_j}{dr} \right]; \\ \langle nv_r \rangle^I &= -\frac{\alpha_I D_e}{T_e} \frac{I B_\theta}{c}; \quad \langle nv_r \rangle^E = -2\alpha_{ei} \varepsilon^{1/2} n \frac{c E_z}{B_\theta}; \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$q_j = T_j \sum_{\alpha=n, I, E} \gamma_j^{(\alpha)} \langle nv_r \rangle^\alpha - \chi_j D_j n \frac{dT_j}{dr}; \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} I_{\parallel} + \frac{2c}{B_\theta} \alpha_{ei} \varepsilon^{1/2} \sum_j n T_j \left[\frac{d \ln n}{dr} - \left(\frac{3}{2} - \gamma_j^E \right) \frac{d \ln T_j}{dr} \right] = \\ = \sigma_{\parallel} \left\{ E_z - \frac{\alpha_I D_e}{T_e} \frac{B_\theta}{c} \sum_j T_j \left[\frac{d \ln n}{dr} - \left(\frac{3}{2} - \gamma_j^I \right) \frac{d \ln T_j}{dr} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Входящие сюда коэффициенты зависят от частоты соударений:

а) при $v_{jj} \ll v_{Tj} \varepsilon^{3/2} \Theta / r$

$$\alpha_{ei} = 0,70; \quad \alpha_{ee} = 0,37; \quad \alpha_e = \sum_j \alpha_{ej} = 1,07; \quad \alpha_I = 0,23;$$

* В настоящей главе предполагается, что длина свободного пробега много больше пространственного периода силовой линии тороидального магнитного поля: $\lambda \gg L = r/\Theta$.

$$\gamma_i^{n, l, E} = 1,33; \gamma_e^n = 1,11; \gamma_e^E = 5/2; \gamma_e^l = 0,64; \kappa_e = 1,18; \kappa_i = 0,57;$$

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{sp} [1 - 2\alpha_{ei} \varepsilon^{1/2} / [1 + 0,35 \mathcal{E}^{1/2}]]; \sigma_{sp} = ne^2 / 0,51 m_e v_{ei};$$

$$D_j = v_{jj} r_{cj}^2 \varepsilon^{1/2} / \Theta^2.$$

б) при $v_{Tj} \Theta \varepsilon^{3/2} / r \ll v_{jj} \ll v_{Tj} \Theta / r$

$$\alpha_{ei} = 0; \alpha_{ee} = 1; \alpha_l = 1,15; \gamma_j^n = \kappa_j = \gamma_j^l = 3; \gamma_e^l = 3,8;$$

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{sp} / [1 + 1,5\pi^{1/2} v_{Te} |\Theta| \varepsilon^2 / v_{ei} r]; D_j = \frac{\pi^{1/2} \varepsilon^2 r_{cj}}{2 |\Theta| r} \cdot \frac{cT_j}{e_l B_z}.$$

§ 2. Коэффициенты переноса разреженной плазмы (качественное рассмотрение)

1. Диффузия очень разреженной плазмы [1]. Увеличение коэффициентов переноса разреженной плазмы связано с появлением особой группы частиц, запертых между участками силовых линий с большим значением напряженности магнитного поля. Поскольку пробочное отношение в тороидальных системах обычно близко к единице, то число запертых частиц оказывается малой величиной порядка $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{(B_{\max} - B_{\min}) / 2B_{\min}}$. Тем не менее разделение частиц на «пролетные» и «запертые» существенно влияет на диффузию плазмы поперек магнитного поля. Связано это с тем, что запертые ионы и электроны имеют гораздо большее смещение Δr от магнитной поверхности и создают большой дополнительный ток.

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим простейшее равновесие плазмы в тороидальном поле. Как известно, в аксиально симметричном поле сохраняются три величины: энергия \mathcal{E} , магнитный момент $\mu = mv_{\perp} / 2B$ и обобщенный импульс

$$J = mv_{\parallel} - (e/c) \int_0^r B_{\theta} dr; v_{\parallel} - \text{продольная скорость частиц в от-$$

сутствие электрического поля*. Поэтому функция распределения частиц зависит от координат только через эти инварианты и для плазмы с неоднородной плотностью ее нужно представить в виде

$$f(v, r, \vartheta) = N \{J(r, \vartheta; \mu, \mathcal{E})\} F(\mathcal{E}), \quad (1.4)$$

где $F(\mathcal{E}) = \left(\frac{m_j}{2\pi T_j}\right)^{3/2} \exp(-\mathcal{E}/T_j)$ — максвелловское распределение основной доли частиц по скоростям. Легко видеть, что у запертых частиц максвелловское распределение сдвинуто на величину, разную по знаку для электронов и ионов (рис. 2),

$$u_{\parallel j} = -\frac{cT_j}{e_j n_{0j} B_{\theta}} \cdot \frac{dn_{0j}}{dr}, \quad n_{0j} = N \left(\frac{e_j}{c} \int_0^r B_{\theta} dr \right).$$

* Для простоты рассуждений здесь мы ограничиваемся только этим случаем.

Физическую причину появления такого сдвига легко понять, если рассмотреть движение «запертых» частиц в плоскости (r, ϑ) . На рис. 3 изображено поперечное сечение тороидальной трубы. При направленном на нас магнитном поле B_z и расположении оси тора АВ слева тороидальный дрейф частиц направлен вниз. Поэтому для положительного значения величины поля B_ϑ ионы с положительной скоростью в точке 0 отклоняются внутрь магнитной поверхности, а с отрицательной — наружу. Оказывается, что все ионы с положительной скоростью приходят в точку 0 из внутренних областей с большей плотностью частиц и, следовательно, плотность этих ионов

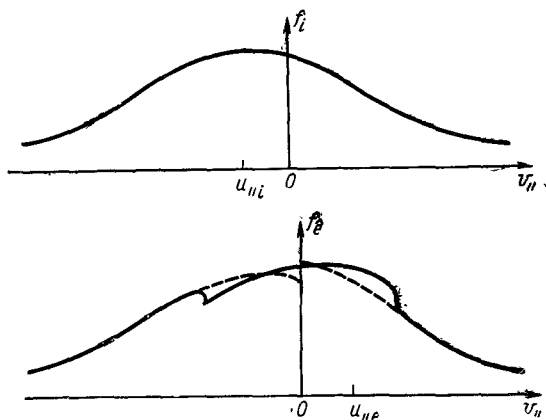


Рис. 2. Распределение электронов (нижний рисунок) и ионов (верхний) разреженной плазмы.

в точке 0 больше плотности ионов с отрицательной скоростью на величину (см. рис. 3) $\Delta n_i = - (dn_{0i}/dr) \Delta r_{ti}$, где Δr_{ti} — среднее отклонение запертых ионов от магнитной поверхности. По порядку величины это отклонение равно расстоянию, на которое смещается частица под действием тороидального дрейфа за время одного оборота в плоскости (r, ϑ) : $\Delta r_t \approx v_{др} 2\pi r / \Delta v_{||} \Theta \approx r \epsilon^{1/2} / \Theta$.

Средняя скорость запертых частиц относительно пролетных оказывается малой

$$n_0 \Delta U_{||}^{it} = \Delta n_j \Delta v_{||} \approx \epsilon (c T_j / e_j n_{0j} B_\vartheta) dn_{0j} / dr.$$

Тем не менее сила возникающего трения совпадает с ее оценкой для специального вида распределения (1.4), если учесть, что время рассеяния импульса частицы на величину $m \Delta v_{||}$ в (R/r) раз меньше времени, за которое устанавливается максвелловское распределение

$$R_i^i \approx \epsilon^{1/2} (v_{jj} / \epsilon) n_0 m_j \Delta U_{||}^{it} = \epsilon^{1/2} v_{jj} \dot{m}_j (c T_j / e_j B_\vartheta) (dn_{0j} / dr).$$

Здесь фактор $\epsilon^{1/2}$ учитывает малость числа запертых частиц.

В изотермической плазме основная доля частиц (пролетные электроны и ионы) движется вместе с запертыми ионами, так как наи-

более быстро происходит обмен импульсом между запертыми и пролетными ионами и пролетными электронами. Следует иметь в виду, что трение пролетных электронов о движущиеся сквозь них запертые электроны может быть сбалансировано только в результате протекания дополнительного тока пролетных электронов:

$$-(m_e/e)(\partial j_{\parallel}/\partial t) = v_{ee}\varepsilon^{1/2}nm_e(u_{\parallel e} - u_{\parallel i}) + v_{ei}m_e j_{\parallel}/e. \quad (1.5)$$

Протекание этого дополнительного тока, а также непосредственное трение запертых электронов обо все ионы и обуславливает в ко-

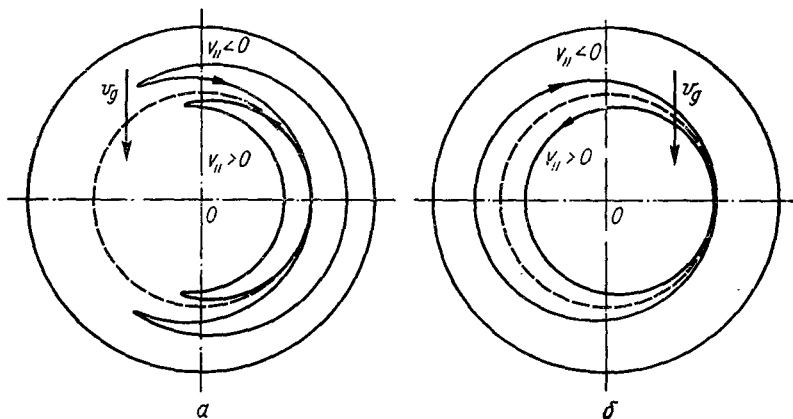


Рис. 3. Траектория «запертых» (а) и пролетных (б) частиц в плоскости (r, ϕ) :

нечном счете диффузию частиц поперек магнитного поля. Скорость такой диффузии найдем из баланса сил по оси z

$$0 = (e_j/c) \langle nv_r \rangle^j B_{\phi} - v_{ei}m_e n [j_{\parallel}/ne - \varepsilon^{1/2}(u_{\parallel i} - u_{\parallel e})] \text{sign } e_j.$$

Видим, что диффузия амбиполярна и зависит от электрон-ионных и электрон-электронных соударений:

$$\langle nv_r \rangle = -(v_{ei} + v_{ee})\varepsilon^{1/2} (r_{ce}^2/\Theta^2) (dn/dr). \quad (1.6)$$

В заключение отметим, что дополнительный ток имеется даже в отсутствие электрон-электронных соударений. Наличие тока в этом случае уже не связано с появлением каких-либо дополнительных сил, подобных трению пролетных электронов о движущиеся сквозь них запертые электроны, а целиком обусловлено процессом диффузии электронов по скоростям на неподвижных ионах. На рис. 2 пунктиром показано распределение пролетных электронов, образующихся в результате такой диффузии. Последнее представляет собой левую и правую части покоящегося максвелловского распределения, причем плотности электронов, движущихся в разных направлениях, отличаются равно настолько, чтобы распределение пролетных электронов непрерывно переходило в распределение запертых.

Таким образом, пролетные электроны покоятся относительно ионов и сила электрон-ионного трения отсутствует. Однако отличие

плотностей электронов, движущихся в разные стороны на величину порядка $\varepsilon^{1/2} (r_{ce}/\Theta) (dn/dr)$, приводит к возникновению дополнительного тока

$$I_{\parallel}^{e/i} = -\varepsilon^{1/2} (c/B_{\Phi})(dp/dr). \quad (1.7)$$

2. Диффузионно-электрические явления [13, 14]. Ранее было показано, что в плазме с неоднородной температурой и плотностью имеется дополнительный ток электронов относительно ионов, пропорциональный градиентам плотности и температуры. Теперь, применив принцип симметрии кинетических коэффициентов, можно предсказать, что в ловушках типа «Токамак» должны существовать вклады в потоки частиц и тепла, пропорциональные величине тороидального тока. Коэффициент пропорциональности, связывающий потоки частиц и тепла с величиной тока, найдем из принципа симметрии кинетических коэффициентов, из которого следует, что этот коэффициент совпадает по величине с коэффициентом, связывающим ток с градиентом химического потенциала. Для идеальной плазмы градиент химического потенциала следующим образом зависит от градиентов плотности и температур [15] $\nabla\zeta = \sum T_j \nabla \ln n/T_j^{3/2}$. Используя это соотношение, представляем закон Ома с учетом дополнительного тока (см. уравнения (1.5) и (1.7)) в форме

$$I_{\parallel} + \varepsilon^{1/2} \frac{c}{B_{\Phi}} n \frac{d\zeta}{dr} = \sigma_{\parallel} \left[E_{0z} - v_{ee} \frac{m_e c}{e^2 B_{\Phi}} \varepsilon^{1/2} \nabla\zeta \right]. \quad (1.8)$$

Мы не случайно выписали здесь отдельно вклад в дополнительный ток в результате искажения распределения пролетных частиц и дополнительную «движущую силу», приводящую в конечном счете к еще большему увеличению дополнительного тока. Дело в том, что это позволяет наиболее просто интерпретировать вклады в поток частиц из-за наличия электрического поля и тока в плазме. С помощью принципа симметрии кинетических коэффициентов [16] из уравнения (1.8) получаем поток частиц

$$\langle nv_r \rangle = -\frac{De}{T_e} \nabla\zeta - v_{ee} \frac{m_e c^2}{e^2 B_{\Phi}} \varepsilon^{1/2} I_{\parallel} - \varepsilon^{1/2} n \frac{c}{B_{\Phi}} E_{0z}. \quad (1.9)$$

Здесь поток частиц, пропорциональный величине тока, представляет собой дрейф центров «банановых» орбит под действием силы трения запертых частиц о движущиеся пролетные. Последний же член есть просто электрический дрейф банановых орбит. В этом легко убедиться, если воспользоваться дрейфовыми уравнениями движения:

$$\begin{aligned} dr/dt &= -\mu B_0 \sin \vartheta / \omega_{ce} R, \\ m (dv_{\parallel}/dt) &= -\mu B_0 \Theta \sin \vartheta / R + eE_z. \end{aligned}$$

Усредняя эти уравнения по времени и помня, что запертая частица совершает быстрое почти колебательное движение в потенциальной яме $\mu B_0 (1 - \varepsilon \cos \vartheta)$, получаем $\langle dv_{\parallel}/dt \rangle = 0$, $\langle dr/dt \rangle = -cE_{0z}/B_{\Phi}^{(0)}$.

Здесь нетрудно увидеть аналогию между дрейфом «ларморовского кружка» и дрейфом траектории запертой частицы («банана»), расположенной в плоскости (r, z) (рис. 4).

Вклад в поток частиц от прямого дрейфового движения пропорционален числу запертых частиц $\delta n_t \approx \varepsilon^{1/2} n$ и их скорости. Любопытно заметить, что в тороидальной системе с током даже наличие турбулентности только в электронной компоненте плазмы может приводить к диффузии (при этом, конечно, предполагается, что обмен импульсом между запертыми и пролетными ионами происходит достаточно эффективно).

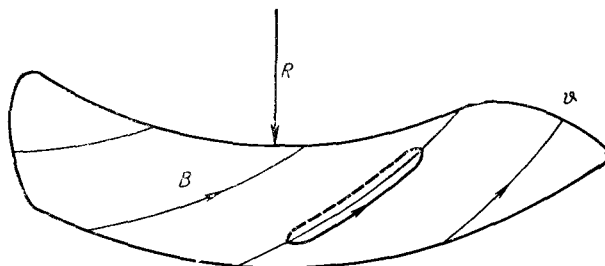


Рис. 4. Траектория ведущего центра («банан»).

3. Проводимость плазмы в слабо неоднородном магнитном поле. Проводимость плазмы в неоднородном магнитном поле ухудшается в силу двух обстоятельств. Во-первых, тороидальное электрическое поле приводит в движение вдоль поля лишь пролетные электроны. Запертые электроны, как мы видели, под действием этого поля просто дрейфуют внутрь плазменного столба и не приобретают импульса вдоль поля. Поэтому эффективное число носителей тока уменьшается на число запертых электронов, что приводит к уменьшению проводимости на величину $\Delta\sigma_{\parallel} \approx -\sigma_{\parallel} (\delta n_t/n)$.

Далее, в силу того, что запертые электроны в среднем стоят на месте, электроны проводимости (т. е. пролетные) испытывают, кроме трения о ионы, дополнительное трение о запертые электроны. Поэтому уравнение баланса импульса пролетных частиц принимает вид

$$m_e n_u (\partial u_0 / \partial t) = -e n_u E_z - v_{ee} m_e \delta n_t (u_{\parallel i} - u_{\parallel e} + u_0) - v_{ei} m_e n_u u_0,$$

где $n_u = n - \delta n_t$, $u_0 = I/n_u e$ — плотность и скорость пролетных частиц. Отсюда нетрудно найти проводимость плазмы:

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{\parallel}^{(0)} \frac{1 - (\delta n_t/n_0)}{1 + (v_{ee}/v_{ei}) (\delta n_t/n)}. \quad (1.10)$$

Заметим также, что из уравнения баланса импульса запертых электронов

$$0 = -e\delta n_t E_z - (e/c)\delta n_t v_r B_\theta + v_{ee}\delta n_t m_e (u_{\parallel i} - u_{\parallel e} + u_0) - v_{ei} m_e \delta n_t (u_{\parallel e} - u_{\parallel i})$$

можно легко получить величину электродиффузионного потока частиц, найденного ранее из других соображений.

4. Теплопроводность разреженной плазмы [11]. Оценку для величины коэффициента теплопроводности можно просто получить на основе соображений, изложенных в разделе 1. Важно только иметь в виду, что при не равном нулю градиенте температуры никаким сдвигом по оси z не удастся привести распределение запертых частиц к максвелловскому из-за наличия в распределении членов, пропорциональных произведению скорости v_{\parallel} на энергию:

$$f_i^{(0)} = n_0 F(\xi) \left\{ 1 + \frac{v_{\parallel}}{\omega_c \Theta T} \left(\frac{3}{2} - \frac{\xi}{T} \right) \frac{dT}{dr} \right\}, \quad n_0 = \text{const.}$$

Кроме того, частые ион-ионные соударения не позволяют распределению пролетных ионов отклоняться от максвелловского $f_u^{(0)} = n_0 F(\xi) [1 + \text{const } v_{\parallel}]$. Добавление члена, пропорционального скорости, позволяет сдвинуть распределение пролетных ионов таким образом, чтобы не было среднего движения пролетных ионов относительно запертых. В результате этого мы избегаем сильного обмена импульсом между двумя сортами ионов и, следовательно, быстрой диффузии. Однако с помощью одной постоянной нельзя обратить в нуль и трение (диффузию) и более высокие моменты, ответственные за теплопроводность ионов. Поэтому при равных температурах электронов и ионов теплопроводность ионов в корень квадратный из отношения масс превосходит теплопроводность электронов

$$\chi_i \approx v_{ii} \varepsilon^{1/2} r_{ci}^2 / \Theta^2. \quad (1.11)$$

5. Диффузия плазмы в промежуточной области частот соударений [11]. Для рассмотрения промежуточной области соударений частиц оказывается весьма полезной аналогия между «ларморовскими кружками» и дрейфовыми орбитами частиц в тороидальном магнитном поле. По аналогии со случаем диффузии ларморовских кружков можно сразу же написать следующее выражение для коэффициента диффузии дрейфовых орбит:

$$D_j \approx \int \frac{v_{j\text{эфф}}}{v_{j\text{эфф}}^2 + \Omega_j^2(v_{\parallel})} U_{\text{др}}^{j2} f_j(v) d^3 v, \quad (1.12)$$

где $v_{j\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений частиц сорта j , $\Omega(v_{\parallel}) = \Theta v_{\parallel} / r$ — частота оборота частицы в плоскости (r, θ) ; $U_{\text{др}}^j = -\frac{\mu B_0 \varepsilon}{m_j \omega_c j r} \sin \theta$ — дрейфовая скорость частиц сорта j по координате r . В частности, для запертых частиц эффективная частота соударений значительно больше кулоновской ($v_{j\text{эфф}} \approx v_j / \varepsilon$). Свя-

зано это с тем, что для превращения запертой частицы в пролетную достаточно изменить ее скорость малой величиной $\Delta v_{\parallel} \approx \varepsilon^{1/2} v_T$. Подставляя, кроме того, в выражение для коэффициентов диффузии частоту оборота запертой частицы по «банану» $\Omega \approx \Theta v_r \varepsilon^{1/2} / r$ и учитывая, что число запертых частиц мало $\delta n_t \approx \varepsilon^{1/2} n$, получаем следующую оценку для коэффициента диффузии (см. раздел 1):

$$D_{\perp e} \approx (v_{ee}/\varepsilon) (U_{др}^e/\Omega_e)^2 \varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{1/2} v_{ee} r_{ce}^2 / \Theta^2.$$

Для пролетных частиц период обращения по замкнутой орбите зависит лишь от продольной скорости. Вклад в интеграл дает область малых скоростей, а величина самого интеграла не зависит от частоты соударений:

$$D_{\perp j} = \pi \int \delta[\Omega(v_{\parallel})] U_{др}^2 f(v) d^3 v = \varepsilon^2 \frac{\pi^{1/2} r_{cj}}{4 |\Theta| r} \cdot \frac{v_{Tj}^2}{\omega_{cj}}. \quad (1.13)$$

В силу амбиполяльности диффузии частицы диффундируют со скоростью диффузии электронов.

Отметим, что изложенные соображения лишь иллюстрируют факт независимости коэффициентов переноса от частот соударений. Механизм диффузии в этом случае определяется более тонкими эффектами и будет описан ниже.

§ 3. Движение отдельных частиц

Поскольку равновесие разреженной плазмы существенно зависит от характера движения отдельных частиц, то до рассмотрения равновесия приведем описание траекторий отдельных частиц. По-прежнему будем пользоваться аксиально симметричной моделью магнитного поля. В этом случае достаточно рассмотреть проекцию траекторий на (r, ϑ) -плоскость. Уравнение для ведущего центра частицы в радиальном электрическом поле с потенциалом $\Phi_0(r)$ имеет следующий вид:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\mu B_0/m + v_{\parallel}^2}{\omega_c R} \sin \vartheta, \quad (1.14)$$

$$r \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\mu B_0/m + v_{\parallel}^2}{\omega_c R} \cos \vartheta + \frac{c}{B_z} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} + \Theta v_{\parallel}. \quad (1.15)$$

В правой части (1.15) кроме диамагнитного, центробежного и электрического дрейфов учтено вращение частицы вокруг основного магнитного поля при наличии вращательного преобразования. Используя постоянство энергии частицы \mathcal{E} , сохранение адиабатического инварианта $\mu = m v_{\perp}^2 / 2 B$, находим скорость частицы вдоль магнитного поля

$$v_{\parallel} = \sigma \sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E} - e\Phi_0 - \mu B_z(r, \vartheta)]}, \quad \sigma = \pm 1. \quad (1.16)$$

Далее, не решая уравнений (1.14) и (1.15), можно сразу же написать выражение еще одной сохраняющейся величины — обобщенного импульса частицы:

$$J = mv_{\parallel} (1 + \varepsilon \cos \vartheta) - \frac{e}{c} \int_0^r B_{\vartheta} dr. \quad (1.17)$$

В интересующем нас пределе малого ларморовского радиуса* разложим величину J вплоть до второго порядка малости по отклонению

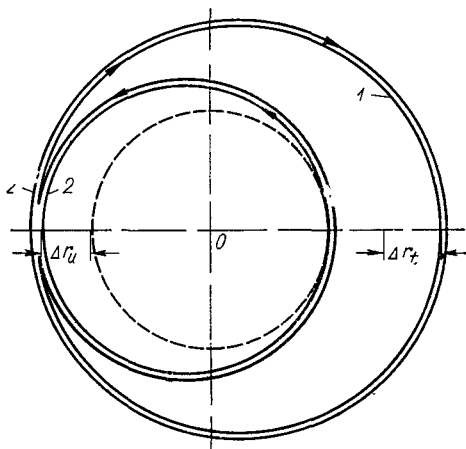


Рис. 5. Траектория едва запертых (1) и медленно пролетных (2) частиц:

Δr_u — максимальное смещение пролетных частиц;
 Δr_t — максимальное смещение запертых частиц.

от точки $(r_0, 0)$. В результате уравнение для траектории частиц принимает простой вид:

$$0,5\omega_c\Theta^2 (r - r_0)^2 + \Delta v_{\parallel}\Theta (r - r_0) - v_g r_0 (\cos \vartheta - 1) = 0, \quad (1.18)$$

где $\Delta v_{\parallel} = v_{\parallel}(r_0, 0) + v_0/\Theta$; $v_g = (\mu B_0 + mv_{\parallel}^2)/m\omega_c R$.

Если Δv_{\parallel} не очень мало, то смещение описывается уравнением

$$r - r_0 = [(\mu B_0 + mv_{\parallel}^2)/m\omega_c \Delta v_{\parallel} R] r_0 (\cos \vartheta - 1).$$

Таким образом, положительно заряженные пролетные частицы обходят магнитную поверхность против часовой стрелки и отклоняются внутрь от нее, если $\Delta v_{\parallel} > 0$, и, наоборот, наружу от нее, если $\Delta v_{\parallel} < 0$ (см. рис. 4). В общем случае решение уравнения (1.18) имеет следующий вид [17]:

$$r - r_0 = \frac{1}{\omega_c \Theta} \left[-\Delta v_{\parallel} \pm \sqrt{\Delta v_{\parallel}^2 + 2\omega_c v_g r_0 (\cos \vartheta - 1)} \right].$$

* Более общий случай изложен в работе [17].

Отсюда следует, что частицы оказываются запертыми при выполнении условия $\Delta v_{\parallel}^2 < 4\omega_{cg} r_0$. Появление таких частиц связано с тем, что силовая линия магнитного поля в результате вращательного преобразования переходит с внутренней части тороидальной трубы на внешнюю, и наоборот. Поэтому величина магнитного поля оказывается переменной вдоль силовой линии (на внутренней части тороида больше, а на внешней меньше). Наибольшее смещение от магнитной поверхности имеют слабо захваченные частицы (рис. 5). Такое же смещение имеют пролетные частицы, близкие к границе захвата. Смещение пролетных частиц со скоростью $\Delta v_{\parallel} \approx v_{\tau}$ оказывается малым, порядка $\varepsilon^{1/2}$ по сравнению со смещением запертых частиц. Качественно характер отклонения частиц от магнитной поверхности объясняется тороидальным дрейфом, направленным для положительно заряженной частицы при рассматриваемых условиях вниз. Действительно, когда такая частица обходит магнитную поверхность, то она движется от поверхности, если она имеет $\Delta v_{\parallel} < 0$ и находится в нижней полуплоскости (r, ϑ) и снова приближается к ней, когда переходит в верхнюю полуплоскость. Максимальное отклонение имеют частицы, которые тратят больше всего времени на этот обход.

В дальнейшем кроме траектории частицы нам понадобится также и закон ее движения во времени. Разлагая правую часть уравнения (1.15) вблизи точки $(r_0, 0)$ и используя уравнение для траектории частицы (1.18), переписываем его в безразмерных переменных [18]

$$\left. \begin{aligned} rd\vartheta/dt &= \sigma\Theta v\varepsilon^{1/2} [2\kappa^2 - 1 + \cos\vartheta]^{1/2}; \\ v^2 &= 2[\mathcal{E} - e\Phi_0(r_0)]/m, \\ 2\kappa^2 &= |\Delta v_{\parallel}(r_0, 0)|^2/v^2\varepsilon, \quad \sigma = \pm 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Это уравнение пригодно лишь для описания запертых и медленно пролетных частиц, так как здесь использовано разложение всех величин по малому отклонению скорости частиц от величины $-v_0/\Theta$ ($\Delta v_{\parallel} \ll v_{\tau}$).

Из уравнения (1.19) следует, что движение запертых частиц можно описать в терминах эллиптических функций с модулем $\kappa^2 < 1$. Период колебания их вдоль замкнутой траектории

$$\tau = \frac{4r}{\Theta v (2\varepsilon)^{1/2}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{[\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2}} = \frac{4\sqrt{2} r K(\kappa)}{\Theta v \sqrt{\varepsilon}}, \quad (1.20)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а ϑ_0 — нуль подкоренного выражения.

Следует иметь в виду, что частицы совершают усредненный по периоду τ дрейф вдоль малой оси тороида z . Скорость этого дрейфа находим из условия неподвижности траектории в целом в пло-

скости (r, ϑ) . А именно, усредним по периоду движения уравнение (1.15)

$$\langle \dot{\vartheta} \rangle \equiv -\frac{\mu B_0}{m\omega_c R} \left\langle \frac{\cos \vartheta}{r_0} \right\rangle + \frac{v_0(r_0)}{r_0} + \frac{d}{dr} \left(\frac{v_0}{r} \right) \langle (r-r_0) \rangle + \frac{1}{qR} \langle v_{\parallel} \rangle + \langle v_{\parallel} (r-r_0) \rangle \frac{d}{dr} \frac{1}{q(r)R} = 0, \quad (1.21)$$

где $q(r) = e/\Theta(r)$ — так называемый коэффициент запаса, а угловые скобки означают усреднение по периоду τ .

В силу периодичности переменных $(r-r_0)$ и ϑ левая часть и третий член в правой части (1.21) обращаются в нуль. Кроме того, последний член с помощью уравнения (1.18) можно переписать в виде, удобном для усреднения:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_{\parallel} (r-r_0) \rangle &= - \left\langle \Delta v_{\parallel} (r, \vartheta) \frac{\Delta v_{\parallel}(r_0, 0) - \Delta v_{\parallel}(r, \vartheta)}{\omega_c \Theta} \right\rangle = \\ &= \frac{2\mu B_0}{m\omega_c} q(r) [\langle \cos \vartheta \rangle - 1 + 2\kappa^2]. \end{aligned}$$

Усреднение по времени здесь удобно заменить усреднением по угловой координате в соответствии с уравнением (1.19)

$$\langle F(\vartheta) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F[\vartheta(t)] dt = \frac{1}{K(\kappa)} \int_0^{\vartheta_0/2} \frac{F(\vartheta) d\vartheta/2}{\sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2}}.$$

В результате из (1.21) получаем [18]

$$\langle v_{\parallel} \rangle = -\frac{v_0}{\Theta} + \frac{2\mu B_0}{m\omega_c R\Theta} \left[\left(\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - \frac{1}{2} \right) + 2 \frac{d \ln q}{dr} \left(\frac{E}{K} - 1 + \kappa^2 \right) \right], \quad (1.22)$$

где $E(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Таким образом, радиальное электрическое поле, центробежная и диамагнитные силы по оси r вызывают прецессионное движение запертых частиц вдоль тороида (здесь очевидна аналогия с прецессией волчка). Кроме того, наложение тороидального электрического поля должно тогда приводить к движению банана по оси r со скоростью

$$v_r = -cE_z/B_{\vartheta}. \quad (1.23)$$

Что касается пролетных частиц, то они просто разгоняются в таком поле вдоль тороида и их энергия более не сохраняется.

§ 4. Простая модель равновесия плазмы в торе

Чтобы проиллюстрировать метод вычисления коэффициентов переноса разреженной плазмы в тороидальных системах и избежать излишних усложнений, рассмотрим сначала идеализированную модель равновесия плазмы. Предположим, что: 1) температура частиц

обоих сортов одинакова и постоянна по сечению шнура; 2) электрон-электронные соударения пренебрежимо малы по сравнению с электрон-ионными. Последние, как обычно, описываются интегралом соударений Ландау [19]

$$\text{St}_{ei} \{f_e\} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \frac{2\pi e^4 n Z^2 \ln \Lambda}{m_e^2} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{v} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^3} \right) \left(\frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} - \frac{v_\beta}{T} f_e \right). \quad (1.24)$$

Причины, по которым распределение ионов почти максвелловское, обсудим позднее.

Функция распределения электронов подчиняется дрейфовому кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \Theta v_{\parallel} \frac{\partial f_e}{r \partial \theta} + \nabla_r (v_{\text{др}} f_e) + \nabla v_{\parallel} \left(-\frac{\mu \nabla_{\parallel} B_z}{m_e} f_e \right) = \text{St}_{ei} (f_e). \quad (1.25)$$

Рассмотрим решение этого уравнения в пределе очень редких соударений, когда за период обращения запертой частицы по замкнутой траектории распределение даже в узкой области с размерами $\Delta v_{\parallel} \sim v_{Te} \varepsilon^{1/2}$ не успевает релаксировать к максвелловскому. Время установления равновесия можно оценить из выражения для соударительного члена (1.24), по порядку величины оно имеет следующее значение:

$$\tau_p = \varepsilon v_{ei}^{-1}, \quad v_{ei} = 16 \sqrt{\pi n e^4 Z^2 \ln \Lambda / 3 m_e^2 v_{Te}^3}.$$

В результате ограничения на частоту соударений запишем

$$\tau_p \gg \tau_e = r / \Theta v_{Te} \varepsilon^{1/2}. \quad (1.26)$$

В этом случае в первом приближении можно пренебречь столкновениями вообще и сразу написать решение кинетического уравнения в виде функции от интегралов движения [20]

$$f_{ij} = f_{ij}^{(0)}(\mu, \mathcal{E}, J(r, \theta)); \quad f_{uj} = f_{uj}^{(0)}(\mu, \mathcal{E}, J; \sigma),$$

где f_{ij}, f_{uj} — функции распределения запертых и пролетных частиц. Таким образом, как и в хорошо известной задаче Бернштейна—Грина — Крускала о распределении частиц в поле плазменной волны, в отсутствие соударений имеется большой произвол в выборе распределения. Однако нас будет интересовать эффект диффузии частиц поперек магнитного поля, обусловленный парными соударениями частиц. Поэтому будем искать истинное распределение частиц с учетом соударений. Математически задача сводится к решению уравнения с малым параметром при старшей производной. Процедура решения подобного рода уравнений путем итераций хорошо разработана и не раз применялась в задачах с пограничными слоями. Воспользуемся здесь аппаратом, изложенным в обзоре [21] и примененным затем в работе В. Е. Захарова и В. И. Карпмана [22] к задаче Бернштейна — Грина—Крускала.

Процедура итерации применима лишь в области вне пограничного слоя, разделяющего фазовое пространство запертых и пролетных частиц. Решение задачи представим в виде

$$f_j = f_j^{(0)}(\mu, \mathcal{E}, J; \sigma) + f_j^{(1)}(\mu, \mathcal{E}, J; \sigma; \vartheta). \quad (1.27)$$

Здесь поправка $f_j^{(1)}$ описывает перераспределение запертых и пролетных частиц из-за редких соударений. Условие разрешимости уравнения для поправки значительно сужает класс функций, которыми можно использовать в качестве нулевого приближения. Получим это условие.

Предварительно упростим уравнение для поправки к функции распределения. Поскольку искажение распределения в основном происходит по продольным скоростям и в малой окрестности вблизи переходного слоя, то в члене, описывающем соударения, можно пренебречь всеми производными, кроме $\partial/\partial v_{\parallel}$, и пренебречь квадратичными поправками по продольной скорости в коэффициенте диффузии соударительного члена. Кроме того, перейдем к новым переменным, используя соотношение

$$v_{\parallel} = -v_0/\Theta + \sigma\sqrt{2x_e \varepsilon} v_{Te} [\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2}.$$

Этот шаг необходим потому, что невозмущенное распределение частиц является функцией инвариантов μ , \mathcal{E} , κ^2 , σ , а не скоростей частиц. В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma v_{Te} \theta \sqrt{2x_e \varepsilon} [\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2} \partial f_e^{(1)}/r \partial \vartheta &= St; \\ St &= \frac{3\pi^{1/2}}{4} \frac{v_{ei}}{\varepsilon} x_e^{-3/2} \sigma [\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2} \frac{\partial}{\partial \kappa^2} \times \\ \times \left\{ \sigma [\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial \kappa^2} + 2x_e \varepsilon \right) - \frac{v_0}{\Theta v_{Te}} \sqrt{2x_e \varepsilon} \right\} f_e; \\ x_e &= v^2/v_{Te}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Условие разрешимости этого уравнения получается в результате интегрирования его по углу ϑ в пределах $[0, 2\pi]$ с весом $[\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{-1/2}$. Из периодичности всех физических величин по угловой координате ϑ следует, что

$$\int_0^{2\pi} [\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{-1/2} St \, d\vartheta = 0.$$

Физический смысл условия разрешимости заключается в том, что соударения частиц не приводят к дивергенции потока частиц в пространстве скоростей. Будем искать стационарное решение кинетического уравнения и поэтому потребуем также отсутствия потока частиц или

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \left\{ \sigma [\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2} \left(\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial \kappa^2} + 2x_e \varepsilon f_e^{(0)} \right) - \right.$$

$$-\frac{\tau_0}{\theta v_{Te}} \sqrt{2x_e \varepsilon} f_e^{(0)} \Big\} = 0. \quad (1.29)$$

В установлении определенного распределения частиц по скоростям конкурируют два фактора. С одной стороны, соударения электронов с ионами стремятся установить максвелловское распределение, покоящееся относительно ионов. С другой, наличие отражающих магнитных пробок приводит к появлению запертых частиц, роль соударений для которых относительно мала, и они распределяются в поле внешней силы по закону Больцмана. Поэтому наиболее просто можно найти функцию распределения запертых частиц. Последняя должна зависеть лишь от трех интегралов движения μ , \mathcal{E} , J и соответствовать распределению Больцмана. Выбор такой функции однозначен

$$f_{ie}^{(0)} = n_{0e} (r - \Delta v_{\parallel} / \omega_c \Theta) \pi^{-3/2} v_{me}^{-3} \exp(-\mathcal{E}/T_e). \quad (1.30)$$

Плотность частиц зависит лишь от положения центра траектории запертой частицы, инвариантность которого следует из сохранения J . В пределе малого ларморовского радиуса ее можно разложить в ряд по отклонению частиц от магнитной поверхности. В переменных \mathcal{E} , μ , κ^2 распределение принимает простой вид:

$$f_{ie}^{(0)} = \frac{n_{0e}(r)}{\pi^{3/2} v_{Te}^3} \left[1 + \frac{\sigma \sqrt{2x_e \varepsilon}}{\Theta} \cdot \frac{d \ln n_{0e}}{dr} \times \right. \\ \left. \times [\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2} \right] \exp(-\varepsilon/T_e). \quad (1.31)$$

Что касается распределения пролетных частиц, то в пределе больших продольных скоростей, когда влияние неоднородности магнитного поля на движение частиц становится несущественным, оно должно переходить в покоящееся распределение Максвелла. Нетрудно видеть, что интегральному условию (1.29) удовлетворяет лишь одно распределение такого рода:

$$f_{ue}^{(0)} = \frac{n_{0e}(r) \exp(-\mathcal{E}/T_e)}{\pi^{3/2} v_{Te}^3} \left\{ 1 - \frac{\sigma \sqrt{2x_e \varepsilon}}{\Theta} r_{ce} \frac{d \ln n_{0e}}{dr} \times \right. \\ \left. \times \left([\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2} - \frac{\pi}{4} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} E(t^{-1/2})} \right) \right\}. \quad (1.32)$$

Итак, мы определили функцию распределения, которую можно использовать в качестве нулевого приближения и найти следующее приближение с помощью уравнения для поправки. Нас, однако, интересует не явный вид этой поправки, а диффузионные потоки, выражающиеся через определенные моменты от этой функции. Покажем теперь, что для вычисления последних уже достаточно знания функции нулевого приближения.

Диффузионный поток частиц, усредненный по магнитной поверхности, представляется следующим интегралом:

$$\langle nv_r \rangle_e = - \sum_{\sigma = \pm 1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{\sin^2 \vartheta/2}^{\infty} \frac{\mu B_0}{m_e \omega_{ce} R} \sin \vartheta [f_e^{(0)} + f_e^{(1)}] \times \\ \times \frac{\sqrt{\varepsilon} d\kappa^2}{[\kappa^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2}} \left(\frac{\mu B_0}{m} \right)^{1/2} d \frac{\mu B_0}{m} d\vartheta. \quad (1.33)$$

Мы пренебрегли здесь центробежным дрейфом, так как основной вклад в интеграл дают частицы из переходного слоя, продольная скорость которых очень мала.

Нетрудно видеть, что первый член в квадратных скобках представляет полную производную по углу и при интегрировании в указанных пределах исчезает. Таким образом, как и следовало ожидать, в отсутствие соударений диффузии нет. Второй член можно проинтегрировать по углу ϑ по частям. Воспользовавшись уравнением (1.28) для вычисления производной $\partial f_e^{(1)}/r\partial\vartheta$, выразим весь интеграл через силу электрон-ионного трения:

$$\langle nv_r \rangle = \frac{c}{eB_0} \left\langle \int m_e v_{\parallel} \text{St}_{ei}(f_e) d^3 v \right\rangle. \quad (1.34)$$

Здесь угловые скобки означают интегрирование по ϑ с весом $(1/2)\pi$.

Чтобы применять оператор соударений к функции $f_e^{(0)}$, имеющей разрывы в производных, нужно соблюдать известную осторожность. Разобьем область интегрирования по κ^2 на три интервала: $[0, 1 - \delta]$, $[1 - \delta, 1 + \delta]$ и $[1 + \delta, \infty]$. В первом и последнем интервалах можно подставлять в оператор соударений найденную нами функцию $f_e^{(0)}$. При этом вклад от первого интервала оказывается малым, порядка ε по сравнению со вкладом от последнего, величина которого

$$\langle nv_r \rangle_e^{(3)} = - \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1/2}} \times \\ \times \left(\frac{1}{E(t^{-1/2})} - \frac{4}{\pi^2} K(t^{-1/2}) \right) v_{ei} \frac{r_{ce}^2}{\Theta^2} \cdot \frac{dn_{0e}}{dr}.$$

При интегрировании по области переходного слоя можно пренебречь всеми производными, кроме производных от той части функции распределения, которая терпит разрыв. В результате интеграл выражается через разность значений производных по обе стороны от переходного слоя

$$\langle nv_r \rangle_e^{(2)} = \frac{3\pi^{1/2}}{8} \cdot \frac{v_{ei} v_{Te}^4}{\Theta \omega_{ce}} \int_0^{\infty} x_e^{-1/2} dx_e \int_0^{2\pi} d\vartheta \cos^2 \vartheta/2 \sum \sigma \left[\frac{\partial f_{ie}^{(0)}}{\partial \kappa^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial f_{ie}}{\partial \kappa^2} \right]_{\kappa^2=1} = - \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} v_{ei} \frac{r_{ce}}{\Theta^2} \cdot \frac{dn_{0e}}{dr}.$$

Суммируя вклады от пролетных частиц и частиц из переходного слоя, получаем следующее выражение для диффузионного потока:

$$\left. \begin{aligned} \langle n v_r \rangle &= -\alpha_{ei} D_e \frac{dn_{0e}}{dr}; \\ \alpha_{ei} &= \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \left[1 - \int_1^\infty \frac{dt}{t^{1/2}} \left(\frac{1}{E(t^{-1/2})} - \frac{4}{\pi^2} K(t^{-1/2}) \right) \right] \approx 0,70; \\ D_e &= \varepsilon^{1/2} v_{ei} r_{ce}^2 / \Theta^2. \end{aligned} \right\} (1.35)$$

Найденное равновесие имеет две характерные особенности: 1) электроны движутся относительно ионов и создают дополнительный ток, пропорциональный градиенту давления; 2) распределение ионов по скоростям — локально максвелловское.

Величину дополнительного тока можно вычислить, умножая распределение (1.32) на продольную скорость и интегрируя по пространству скоростей*. При этом следует переписать выражение (1.32) в форме, пригодной для интегрирования по всему пространству скоростей. Последнее нетрудно сделать, если учесть, что рассеяние электронов на ионах — почти упругое и все производные в уравнении (1.29) берутся при постоянной энергии. В результате получаем

$$\begin{aligned} f_{ue}^{(0)} &= \frac{n_{0e}}{\pi^{3/2} v_{Te}^3} \exp(-\mathcal{E}/T_e) \left[1 + \frac{\sigma v \sqrt{2\varepsilon}}{\omega_{ce} \Theta} \cdot \frac{d \ln n_{0e}}{dr} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{[\kappa^2 - \sin^2 \Phi/2]^{1/2}}{(1+2\kappa^2 \varepsilon)^{1/2}} - \frac{\pi}{4} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} (1+2\varepsilon t)^{3/2} E} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Умножая это выражение на продольную скорость и интегрируя по скоростям, находим величину дополнительного тока

$$J_{ei} = -(2c/B_\Phi) \alpha_{ei} \varepsilon^{1/2} T_e (dn_{0e}/dr). \quad (1.37)$$

Вторая особенность связана с тем, что ион-ионные соударения являются доминирующими. Интересно отметить, что в процессе релаксации распределения ионов к максвелловскому устанавливается следующее соотношение между электрическим потенциалом и величиной макроскопической скорости ионов вдоль тора [12]:

$$U_{||} = U_{*i} - v_0/\Theta, \quad U_{*i} = -(cT/eZB_\Phi) (d \ln n/dr).$$

В использованном нами дрейфовом приближении с учетом только электрон-ионных соударений диффузия, очевидно, амбиполярна. Учет конечности ларморовского радиуса, вязкости ионов и др. не-

* В работе [13] дополнительный ток, описываемый невозмущенным распределением $f_{ue}^{(0)}$, не был учтен, что привело автора к утверждению о невыполнении принципа симметрии кинетических коэффициентов. Мы благодарны Розенблюту и Тейлору, обратившим наше внимание на этот факт.

сколько изменяет диффузионный поток [24]. Диффузия с учетом указанных эффектов амбиполярна лишь при определенном значении электрического поля. Подставляя найденное из этих соображений значение потенциала в соотношение для $U_{||}$, вычисляем скорость ионов. Очевидно, что скорость ионов вдоль тороида не обязательно равна нулю. Вместо того, чтобы вычислять неамбиполярные поправки к диффузии частиц, можно сразу написать уравнение баланса сил в направлении малой оси тора. Достаточно учесть лишь две силы: силу вязкости ионов и потерю продольного импульса при уходе частиц из ловушки. Скорость переноса продольного импульса плазмы поперек шнура определяется тензором

$$\pi_{rz} = m_i \int v_{||} v_r f_i(\mathbf{v}) d^3v.$$

а. Если температура ионов постоянна по сечению шнура, то распределение ионов отклоняется от максвелловского ровно настолько, чтобы обеспечить поток запертых ионов наружу со скоростью электронной диффузии. Учитывая, что запертые частицы уносят с собой продольный импульс $m_i v_0 / \Theta$, сразу можно найти величину всего переносимого импульса

$$\pi_{rz} |_{\Delta T_i \equiv 0} = m_i (v_0 / \Theta) \langle n v_r \rangle_e.$$

Баланс импульса в этом случае запишем в виде

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r n \chi \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \pi_{rz},$$

где $\chi = (1/10) (\epsilon / \Theta)^2 v_{ii} r_{ci}^2$ — коэффициент вязкости ионов.

В изотермической плазме, удерживаемой в крутой ловушке ($\epsilon > (m_e / m_i)^{1/3}$), вязкость ионов в этом уравнении доминирует и поэтому равновесная скорость ионов равна нулю. В стеллараторе с большим тороидальным отношением и, следовательно, малым вращательным преобразованием частицы могут уходить на стенку за время одного оборота по банану. В этом случае поток на стенку оказывается большим, что в свою очередь приводит к вращению плазмы вдоль тора*.

б. В случае неоднородной температуры ионов распределение ионов сильно отклоняется от максвелловского (см. §6) и появляется дополнительный вклад в тензор вязкости, пропорциональный градиенту температуры ионов. Величину эффекта нетрудно оценить из следующих соображений. В первом порядке разложения по ларморовскому радиусу ионов и частоте соударений функция оказывается четной по продольной скорости и поэтому вклада в тензор вязкости не дает. В следующем приближении по ларморовскому радиусу, но

* Бережецкий М. С., Гребенщиков С. Е., Косый И. А. и др. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., v. 3, IAEA, Vienna, 1971, p. 49.

по-прежнему в первом порядке разложения по частоте соударений поправку к функции распределения можно оценить из уравнения

$$v_{\parallel} \Theta \frac{\partial f_i}{r \partial \theta} = \frac{\mu B_0 e}{m_i \omega_{ci}} \sin \theta \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial r}.$$

Подставляя $f_i^{(2)}$ в выражение для π_{r_z} , находим

$$\pi_{r_z} = k \frac{1}{r \Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} \frac{n \chi}{e B_0} \cdot \frac{\partial T_i}{\partial r}.$$

Более аккуратные расчеты дают $k = 3,5$ [23].

§ 5. Учет электрон-электронных соударений

Учет электрон-электронных соударений приводит к возрастанию дополнительного тока из-за увеличения пролетных электронов банановым током запертых частиц. Следует иметь в виду, что сечение соударений очень чувствительно к энергии частиц и поэтому увлечение электронов не сводится к простому перемещению максвелловского распределения частиц. Как и в известной задаче об ускорении электронов в электрическом поле, их распределение имеет слегка приподнятые «хвосты». Чтобы количественно рассчитать эффект, разложим поправку к функции распределения в ряд по обобщенным полиномам Лягерра:

$$\delta f_e^U = \frac{m_e}{T_e} U v_{\parallel} \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} a_q L_q^{3/2} \left(\frac{m_e v^2}{2T_e} \right) \right) f_{0e}(\mathcal{E}).$$

В области малых скоростей распределение электронов искажается, кроме того, из-за наличия запертых частиц. Величину поправки мы вычислили ранее:

$$\begin{aligned} \delta f_e^n = & - \frac{\sigma v \sqrt{2} e}{\Theta \omega_{ce}} \left([\kappa^2 - \sin^2 \theta / 2]^{1/2} - \right. \\ & \left. - \frac{\pi}{4} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} E(t-1/2)} \right) \frac{\partial}{\partial r} f_{0e}(r, \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Именно трение о шероховатости распределения, описываемые этой поправкой, и увлекает пролетные электроны. Поведение увлекаемых электронов описывается кинетическим уравнением

$$\partial f_{ue} / \partial t + v_{\parallel} \Theta (\partial f_{ue} / r \partial \theta) \approx St_{ue, te} + St_{ei} + St_{ee}.$$

Здесь интеграл соударений линеаризован относительно малых отклонений от максвелловского распределения

$$St_{ue, te} = St_{ee} \{ f_{0e}(\mathcal{E}); \delta f_e^n \};$$

$$\begin{aligned} St_{ee} &= St_{ee} \{f_{0e}(\mathcal{E}), \delta f_e^U\} + St_{ee} \{\delta f_e^U, f_{0e}(\mathcal{E})\}; \\ St_{ei} &= St_{ei} \{\delta f_e^U, f_{0i}(\mathcal{E})\}. \end{aligned}$$

В области скоростей $v_{\parallel} \gg v_T \varepsilon^{1/2}$, для которых только и справедливо это уравнение, можно усреднить это уравнение по углу ϑ . В результате из него выпадает левая часть (вернее главный член $v_{\parallel} \partial \delta f_e / r \partial \vartheta$) и оно сводится к уравнению для токовой скорости $St_{ee} + St_{ei} = -\langle St_{ue, te} \rangle_{\vartheta}$ или в матричном виде

$$\left[\alpha_{p0} Z^2 - \sum_{q=1}^{\infty} (\alpha_{pq} + \alpha'_{pq} Z^2) a_q \right] U = \alpha_{p0}^{ue, te} \varepsilon^{1/2} \frac{2cT_e}{eB_{\Phi}} \frac{d \ln n_{0e}}{dr},$$

где

$$\alpha'_{pq} = -\frac{m_e}{2\nu_{ei} T_e} \int v_{\parallel} L_p^{3/2} St_{ei} \{f_{0e} L_q^{(3/2)} v_{\parallel}, f_{0i}\} d^3 v;$$

α_{pq} — аналогичным образом выражается через St_{ee} ;

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{E}} \alpha_{pq}^{ue, te} &= -\frac{m_e}{\nu_{ee} T_e} \int d^3 v v_{\parallel} L_p^{3/2} St_{ee} \times \\ &\times \left\{ f_{0e}, \sigma v \sqrt{2\mathcal{E}} \left([\chi^2 - \sin^2 \vartheta / 2] - \frac{\pi}{4} \int_1^{\chi^2} \frac{dt}{t^{1/2} E} \right) L_q^{3/2} f_{0e} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование по скоростям для удобства вычислений распространяется также и на область малых скоростей, что не приводит к погрешности в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Матрицы α_{pq} , α'_{pq} были вычислены в работе [5], а $\alpha_{pq}^{ue, te}$ в работе [13]. Необходимые для целей вычисления (с точностью $2 \div 3\%$) первые девять матричных элементов каждой из матриц приведены в приложении 1. После несложных алгебраических выкладок получаем (для $Z = 1$)

$$I_{ee} = -neU = -0,9\varepsilon^{1/2} (c/B_{\Phi}) (dp/dr). \quad (1.38)$$

Теперь уже нетрудно вычислить диффузионный поток. Так как все силы, действующие на пролетные электроны, находятся в равновесии, то вклад в поток дают только запертые и медленнопролетные частицы. Соответственно с этим выражение для потока (1.34) перепишем в виде

$$\langle n v_r \rangle = \frac{c}{eB_{\Phi}} \left\langle \int m_e v_{\parallel} \sum_i St_{te, ui} d^3 v \right\rangle_{\vartheta}. \quad (1.39)$$

Амбиполярность диффузии следует из того, что диффузионный поток можно выразить через силу трения запертых электронов о ионы и силу трения, обусловленную токовым движением электронов относительно ионов

$$\langle n v_r \rangle = -\frac{c}{eB_{\Phi}} \left\langle \int m_e v_{\parallel} (St_{te, ui} + St_{ei}) d^3 v \right\rangle_{\vartheta}. \quad (1.40)$$

Однако величину потока удобнее вычислять по формуле (1.39), так как для этого не нужно предварительно искать поправку к распределению, связанную с током. Сила трения запертых электронов о пролетные вычисляется совершенно так же, как и трение запертых электронов о ионы. Следует только иметь в виду, что частота электрон-электронных соударений имеет более сложную зависимость от энергии

$$v_{ee}(v) = v_{ee}(\eta + \eta' - \eta/2x_e)x_e^{-3/2}; \quad \eta(x_e) = \frac{2}{V\pi} \int_0^{x_e} \exp(-t) \sqrt{t} dt$$

(сравните $v_{ei}(v) = v_{ei}x_e^{-3/2}$). Повторяя вычисления предыдущего раздела, получаем

$$\begin{aligned} \langle nv_r \rangle &= -(\alpha_{ei} + \alpha_{ee}) D_e (1 + T_i/T_e) (dn/dr), \\ \alpha_{ee} &= \alpha_{ei} [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

§ 6. Неоклассическая теплопроводность ионов

Вычисление коэффициента теплопроводности ионов упрощается в результате того, что релаксация ионного распределения происходит в основном за счет ион-ионных соударений, что позволяет вообще исключить из рассмотрения электронную компоненту плазмы.

Естественным обобщением формулы (1.30) для распределения запертых частиц на случай неоднородной по сечению плазменного шнура температуры служит выражение

$$f_{ti} = \frac{n_{0i}(r_b) m_i^{3/2}}{[2\pi T_i(r_b)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mathcal{E}}{T_i(r_b)}\right],$$

где $r_b = r - \Delta v_{||}/\omega_c \Theta$ — ведущий центр банана. Разлагая это выражение по малому отклонению запертой частицы от магнитной поверхности, переписываем его в виде

$$\begin{aligned} f_{ti} &= \frac{n_{0i}(r)}{\pi^{3/2} v_{Ti}^3} \exp(-\mathcal{E}/T_i(r)) \left\{ 1 - \frac{\Delta v_{||}}{\omega_{ci} \Theta} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{d \ln n_{0i}}{dr} + \left[\frac{\mathcal{E}}{T_i} - \frac{3}{2} \right] \frac{d \ln T_i}{dr} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Для пролетных ионов соответственно получаем

$$\begin{aligned} f_{ui} &= \frac{n_{0i}(r)}{\pi^{3/2} v_{Ti}^3} \exp(-\mathcal{E}/T_i) \left\{ 1 - \frac{\sigma \sqrt{2\epsilon x_i}}{\Theta} r_{ci} \left(\frac{d \ln n_{0i}}{dr} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left[\frac{\mathcal{E}}{T_i} - \frac{3}{2} \right] \frac{d \ln T_i}{dr} \right) \left([\chi^2 - \sin^2 \vartheta/2]^{1/2} - \frac{\pi}{4} \int_1^{\chi^2} \frac{dt}{t^{1/2} E(t^{-1/2})} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Нетрудно видеть, что теперь уже никаким выбором параметра $n_{oi}(r)$ (а только он и является свободным) не удастся свести распределение ионов к максвелловскому. Поэтому в области малых скоростей ионов оно будет иметь особенность, и при решении задачи о диффузии и дополнительном токе мы должны были бы учесть трение пролетных электронов о запертые ионы, пропорциональное частоте электронных соударений и градиенту температуры. Если же интересоваться только теплопроводностью ионной компоненты, то в изотермической плазме (а точнее при $T_i < T_e (m_i/m_e)^{1/3}$) можно пренебречь передачей импульса при соударениях ионов с электронами. В результате закон сохранения импульса представляет собой дополнительное условие, из которого мы получаем величину равновесного электрического поля в системе координат, где ионы покоятся

$$\int m v_{\parallel} St_{ii, ui} d^3 v \equiv \\ \equiv -2\alpha_{ii} m_i n e^{1/2} \frac{c T_i}{e B_{\Phi}} \left(\frac{d \ln n_{oi}}{dr} - \left(\frac{3}{2} - \gamma \right) \frac{d \ln T_i}{dr} \right) = 0.$$

Это уравнение представляет собой обобщение уравнения (1.36) на случай плазмы с неоднородной температурой. Обращение в нуль передачи импульса от запертых к пролетным ионам не означает, что все остальные моменты от интеграла соударений $St_{ii, ui}$ равны нулю. Поэтому в общем случае соударения пролетных ионов с запертыми приводят к отклонению их распределения от максвелловского. Величину отклонения δf_{ui}^T можно найти из уравнения

$$St_{ui, ii} + St_{ii} \{ \delta f_{ui}^T, f_{oi} \} + St_{ii} \{ f_{oi}, \delta f_{ui}^T \} = 0.$$

Так же, как и в случае пролетных электронов, функцию δf_{ui}^T можно разложить в ряд по обобщенным полиномам Лягерра и написать матричное уравнение для коэффициентов. Однако здесь в этом нет необходимости, ибо поток тепла можно выразить через первый момент от соударительного члена $St_{ii, ui}$. Преобразуя выражение для потока тепла так, как мы это делали в случае потока частиц, можно свести его к выражению

$$q_i = \frac{c}{e B_{\Phi}} \int m v_{\parallel} \mathcal{E} St_{ii, ui} d^3 v. \quad (1.44)$$

После элементарных вычислений, аналогичных ранее изложенным (см. вычисление потока частиц), окончательно получаем

$$q_i = -\kappa_i D_i n d T_i / dr, \quad \kappa_i = (9/4 - \gamma) \alpha_{ei} 2^{-1/2}. \quad (1.45)$$

§ 7. «Пинчевание» запертых частиц

Трудности расчета потока частиц, обусловленного наличием тока в плазме, носят чисто вычислительный характер и состоят в том, что оператор соударений приходится применять к функции

весьма сложного характера. Действительно, уже в однородной плазме увлечение электронов в электрическом поле не сводится к простой сдвигке максвелловского распределения на величину токовой скорости U , а описывается более сложной функцией скоростей

$$\delta f_e^U = (m_e/T_e) U v_{\parallel} (1 + \Psi(\mathcal{E}/T_e)) f_{0e}(\mathcal{E}).$$

В неоднородном магнитном поле, когда существенно разделение частиц на запертые и пролетные, добавка, связанная с током, имеется только у пролетных электронов. Кроме того, она является функцией только интегралов движения. Условие разрешимости кинетического уравнения с учетом соударений однозначно определяет вид такой добавки

$$\sqrt{\mathcal{E}} \delta f_{ue}^U = \frac{\pi m_e}{4 T_e} \sigma U v \sqrt{2\varepsilon} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} E (t^{-1/2})} \left[1 + \Psi\left(\frac{m_e v^2}{2 T_e}\right) \right] f_{ue}^{(0)}.$$

Если, наконец, воспользоваться известным разложением функции $\Psi(x_e)$ в ряд по обобщенным полиномам Лягерра $\Sigma a_q L_q^{3/2}(x_e)^*$, то нахождение коэффициентов переноса сводится к вычислению интегралов вида

$$\sqrt{\mathcal{E}} \alpha_{pq}^{te, uj} = \frac{\pi m_e}{4 v_{ej} T_e} \int v_{\parallel} L_p^{3/2}\left(\frac{mv^2}{2 T_e}\right) St_{ej} \left\{ \sigma v \sqrt{2\varepsilon} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{V t E} L_q f_{0e}, f_{0j} \right\} d^3 v. \quad (1.46)$$

Знание матричных элементов от интегралов соударений (см. приложение 1) позволяет выразить численные коэффициенты в потоках частиц и тепла в виде линейной комбинации от коэффициентов разложения. Поток частиц, например, записывается в виде

$$\langle n v_r \rangle = -2 \alpha_{ei} e^{1/2} n c E_z B_{\Phi}^{-1} - (\alpha_I D_{ee}/T_e) (I B_{\Phi}/c), \quad (1.47)$$

где мы воспользовались известным соотношением, связывающим величину тока в плазме с амплитудой приложенного электрического поля:

$$0 = -en \dot{E}_z - v_{ei} m_e n U \left[\alpha'_{00} - \sum_{q=1}^{\infty} \alpha'_{0q} a_q \right].$$

Кроме того $\alpha_I = \alpha_{00}^{te, ue} - \Sigma \alpha_{0q}^{te, ue} a_q$. Поток тепла, в свою очередь, выражается через следующий момент от соударительного члена и может быть записан в виде

$$q_e = -2 \gamma_e^E \alpha_{ei} \sqrt{\varepsilon} c E_z T_e B_{\Phi}^{-1} - \alpha_I \gamma_e^I D_{ee} I B_{\Phi} c^{-1};$$

$$\gamma_e^E = 5/2; \quad \alpha_I \gamma_e^I = \alpha_{ee} \gamma - \sum_{q=1}^{\infty} (5 \alpha_{0q}^{te, ue} / 2 + \alpha_{ei} \alpha_{1q} - \alpha_{1q}^{te, ue}) a_q. \quad (1.48)$$

* Коэффициенты a_q вычислены в работе [5] (см. также раздел 3). Для первых значения $a_1 = 0,287$; $a_2 = 0,033$.

§ 8. Термоэлектрические и термодиффузионные явления

В случае неоднородной температуры ионной и электронной компонент плазмы отклонение функции распределения от максвелловской в области малых продольных скоростей δf_j^T можно разложить в ряд по первым двум обобщенным полиномам Лягерра. В соответствии с этим потоки тепла и частиц, выражающиеся только через интегралы соударений запертых и медленнопролетных частиц с тепловыми (St_{ij}, u_j^T), с помощью матриц α_{pq}^{ij, u_j^T} сразу же записываются в виде линейной комбинации коэффициентов разложения [см. уравнения (1.39) и (1.44)]. Коэффициенты γ_j^n, κ_j , с помощью которых записываем диффузионные потоки в стандартной форме, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \gamma_j^n &= (\delta_{je} + 1/\sqrt{2}) (\delta_{je} + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))^{-1}, \\ \kappa_j &= \alpha_{ei} [(2 - \gamma_j^n) \delta_{je} + (1/\sqrt{2})(9/4 - \gamma_j^n)]. \end{aligned}$$

Вычисление же эффекта Нернста в двухтемпературной плазме требует некоторого уточнения функции распределения частиц с тепловыми скоростями. Уравнение для тепловых электронов включает интегралы соударений как с ионами, так и с электронами

$$\begin{aligned} St_{ue, te} \{f_{0e} \delta f_e^T\} + St_{ue, ti} \{f_{0e} \delta f_i^T\} + St_{ei} \{f_{0e}, \delta f_{ui}^T\} = \\ = - [St_{ei} \{\delta f_{ue}^T, f_{0i}\} + St_{ee} \{\delta f_{ue}^T, f_{0e}\} + St_{ee} \{f_{0e}, \delta f_{ue}^T\}], \end{aligned}$$

где $\delta f_e^T, \delta f_{ue}^T$ — искажение распределения частиц малых и тепловых скоростей соответственно, причем в функцию δf_{ue}^T включена также часть, описывающая дополнительный ток в отсутствие электрон-электронных соударений (см. § 4). Разлагая все функции в ряды по обобщенным полиномам Лягерра, сводим уравнение для поправки к коэффициентам разложения невозмущенной функции распределения электронов в электрическом поле к виду

$$\begin{aligned} \left[\alpha'_{p0} - \sum_{q=1}^{\infty} (\alpha'_{pq} + \alpha_{pq}) a_q \right] U = - \frac{e}{m_e v_{ei}} E_z \delta p_0 + \\ + \left(\frac{5}{2} \alpha_{p0}^{ue, te} + \alpha_{ei} \alpha_{p1} - \alpha_{p1}^{ue, te} \right) \sqrt{\varepsilon} \frac{2c}{eB_0} \frac{dT_e}{dr} - \\ - \left[\alpha_{p0}^{ue, te} - \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq}^{ue, te} a_q \right] \sqrt{\varepsilon} U. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Из этого уравнения была вычислена дополнительная сила трения, приводящая к появлению дополнительного тока и уменьшающая проводимость плазмы. Выражение для этой силы выписано в сводке результатов § 1 отдельно и, как легко видеть, удовлетворяет принципу симметрии Онсагера.

§ 9. Коэффициент переноса в не очень разреженной плазме

В промежуточном интервале частот соударений $v_{Tj}\Theta\varepsilon^{3/2}/r \ll \ll v_j \ll v_{Tj}\Theta/r$ распределение запертых и медленнопролетных частиц сглаживается. Тем не менее и здесь существует аналог силы трения, действующий на тепловые частицы со стороны частиц с малыми скоростями. Это хорошо известное трение резонансных частиц о горбы потенциального поля, ответственное за эффект беспостолкновительного затухания Ландау и учитываемое в кинетических уравнениях для частиц «квазилинейным соударительным членом». Для описания этого эффекта соударения, как известно, не играют особой роли и поэтому при рассмотрении резонансных частиц и их диффузии соударениями вообще можно пренебречь.

Решение кинетического уравнения удобно искать в виде разложения по амплитуде потенциального поля. Последнее фактически эквивалентно разложению по величине, обратной тороидальному отношению.

В первом, линейном приближении кинетическое уравнение принимает вид:

$$(\Theta v_{\parallel} + v_0) \frac{\partial f_j^{(1)}}{r \partial \vartheta} = \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \left[\frac{e_j}{m_j} \Phi^{(1)}(r, \vartheta) - \left(\frac{\mu B_0}{m_j} + v_{\parallel}^2 \right) \varepsilon \cos \vartheta \right] \left(\Theta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{cj}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) f_j^{(0)}.$$

Сходство этого уравнения с уравнением для малых колебаний плазмы с азимутальным волновым числом $m = 1$ и частотой $\omega_0 = -v_0/r$ отмечалось неоднократно. Воспользуемся этой аналогией, чтобы найти решение этого уравнения, правильно описывающее трение резонансных частиц о «волну» (затухание Ландау). Это решение есть

$$f_j^{(1)} = \left[P \frac{1}{v_0 + \Theta v_{\parallel}} + \pi \delta(v_0 + \Theta v_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] \left[\frac{e_j}{m_j} \Phi^{(1)}(r, \vartheta) - \left(\frac{\mu B_0}{m_j} + v_{\parallel}^2 \right) \varepsilon \cos \vartheta \right] \left(\Theta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{cj}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) f_j^{(0)}. \quad (1.50)$$

Нетрудно видеть, что плотность резонансных ионов в общем случае больше плотности резонансных электронов в соответствии с тем, что траектория запертых ионов сильнее отклоняется от магнитной поверхности. Это приводит к возникновению разности потенциалов вдоль магнитной поверхности, обеспечивающей перетекание частиц с тепловыми скоростями и компенсацию разделения зарядов. Однако возникающее таким образом электрическое поле оказывается малым и не изменяет распределения резонансных частиц, а следовательно, и коэффициенты переноса в предельном случае малого ларморовского радиуса.

Знание функции распределения позволяет вычислить потоки тепла и частиц. Для потока частиц, например, имеем

$$\langle nv_r \rangle^j = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{\mu B_0 / m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj} R} \sin \theta f_j^{(1)} d^3 v. \quad (1.51)$$

Величину потока можно представить также в виде дрейфа под действием силы трения резонансных частиц о волну

$$\langle nv_r \rangle^j = - \frac{c}{e_j B_{\theta}} \int m_j v_{\parallel} \text{St}_{QL} (f_j^{(0)}) d^3 v, \quad (1.52)$$

где

$$\text{St}_{QL} = \left(\Theta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{cj}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\pi e^2}{2r} \times \\ \times \left(\frac{\mu B_0}{m_j} \right)^2 \delta(v_0 + \Theta v_{\parallel}) \left(\Theta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{cj}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) f_j^{(0)}$$

— квазилинейный «соударительный член», который получается усреднением по пространству квадратичных по амплитуде «волны» членов.

Результат интегрирования представим в виде линейной комбинации коэффициентов разложения функции распределения (вернее предэкспоненциального фактора) в ряд по обобщенным полиномам Лягерра. Выражения для потока тепла и частиц представляется при этом в стандартном виде уравнений (1.1) и (1.2) с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} D_j &= \frac{e^2 \sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{r_{cj}}{r |\Theta|} \cdot \frac{c T_j}{e_j B_0}; \\ \alpha_l &= \alpha_{00}^{QL} - \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{0q}^{QL} \alpha_q^{(0)} = 1,15; \\ \gamma_e^l &= \frac{5}{2} - \left[\alpha_{10}^{QL} - \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{1q}^{QL} \alpha_q^{(0)} \right] \approx 3,8; \\ \alpha_e &= 1; \quad \alpha_{ei} = 0; \quad \gamma_i^n = \gamma_i^l = \kappa_j = 3, \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

где

$$\alpha_{pq}^{QL} = \frac{m_e}{T_e} \tau_e^{QL} \int v_{\parallel} L_p^{3/2} \text{St}_{QL} (v_{\parallel} L_q^{3/2} f_{0e}) d^3 v$$

(см. приложение 1). При отыскании величины дополнительного тока, как и в разреженной плазме, можно пренебречь линейной поправкой $f^{(1)}$ к распределению тепловых частиц. В результате уравнение для усредненной функции распределения принимает вид

$$0 = \text{St}_{QL} (f_j^{(0)}) + \sum_{j'} \text{St}_{j'j} \{ f_j^{(0)}, f_{j'}^{(0)} \}.$$

Поскольку матричное представление квазилинейного оператора известно (см. приложение 1), то решение этого уравнения не представляет труда. В отличие от случая разреженной плазмы здесь принцип симметрии кинетических коэффициентов проверить легко (так как нет дрейфового движения в тороидальном электрическом поле).

Всюду в настоящей главе мы учитывали лишь магнитное запы- рание частиц (на неоднородности магнитного поля). Однако даже в спокойной плазме в тороидальной ловушке могут существовать электрические поля вдоль магнитной поверхности. Тогда запы- рание частиц будет зависеть не только от неоднородностей магнитного поля. Но следует иметь в виду, что заметные электрические ямы могут появиться только в торе с малым углом вращательного пре- образования. Это легко увидеть из следующих простых оценок. Больше по сравнению с электронами смещение ионов относительно магнитной поверхности $\Delta r_{ii} = r_{ci} \sqrt{\epsilon} \Theta^{-1}$ должно привести к избыточной плотности запертых ионов $n_{1i} \approx \sqrt{\epsilon} dn/dr \Delta r_{ii}$ (такой же по величине вклад дают и пролетные ионы) на внешнем обводе тора. Этот избыток заряда должен нейтрализоваться электронами, перетекающими вдоль силовых линий. Чтобы скомпенсировать такой заряд, электроны должны испытывать действие разности потенциа- лов $\varphi^{(1)}$, величину которой легко оценить с помощью формулы рас- пределения Больцмана $n_e = n_0 \exp \left[\frac{e\varphi^{(1)}}{T_e} \right]$. Действительно, $n_0 e \varphi^{(1)} \approx n_{1e} T_e$ и из $n_{1e} \approx n_{1i}$ получаем порядок величины электрической ямы $e\varphi^{(1)}/T_e \approx \epsilon r_{ci} \Theta^{-1} d \ln n/dr$. Таким образом, видим, что при $r_{ci} \Theta^{-1} d \ln n/dr < 1$ можно пренебречь захватом частиц в электриче- ской яме.

В противоположном предельном случае обязателен учет электри- ческого поля. Однако по порядку величины коэффициенты переноса не меняются, потому что в самом худшем случае электрическая яма имеет примерно такую же глубину, как и магнитная (в итоге сум- марная яма для ионов становится мельче, чтобы уменьшить смещение ионов, а яма для электронов примерно вдвое глубже). Самосогла- сованное решение этой задачи было дано Стрингером [24]. В прин- ципе можно вообразить и запы- рание частиц, почти целиком обусловленное электрическим полем. В таких случаях говорят о *E*-бананах. Это могли бы быть электрические поля, возникшие из-за неустойчивостей или конвективных ячеек. Со времени публи- каций первой работы по неоклассической теории диффузии в печати появился ряд статей, в которых критиковался метод вычислений работы [11] и предлагались другие численные коэффициенты в форму- лах для диффузии [25, 26, 35]. Как сейчас стало ясно, отличие чис- ленных коэффициентов этих работ является следствием неучета [25] или приближенного учета [26, 35] соударений одноименных частиц. Когда данный обзор уже был закончен, авторы получили работу Розенблюта, Хазелтайна и Хинтона*, в которой с помощью вариационного принципа найдены те же аналитические выражения для

* Коэффициент диффузии L_{11} в уравнении (1.11) упомянутой работы Ро- сенблюта и др. (Phys. Fluids, 1972, 15, 116) совпадает с уравнениями (38) и (40) работы [11]. Выражения (1.11), (1.72) и (1.73) для теплопроводности и термодиффузии после интегрирования сводятся к формуле (12) работы [12]. И, наконец, коэффициент электродиффузии L_{13} , L_{23} уравнения (1.11) совпа- дает с уравнениями (24) и (25) работы [13].

коэффициентов диффузии, теплопроводности, электродиффузии и дополнительного тока (с учетом примечания к § 5), что и ранее опубликованные в работах [11—13]. Естественно, поэтому, что численные коэффициенты также совпали в пределах точности расчета (погрешность наших расчетов порядка 10%).

Наконец, несколько замечаний следует сделать об установившейся терминологии. В разреженной плазме диффузию частиц можно представить как случайные скачки траекторий запертых частиц, имеющих форму банана, под действием электрон-ионных соударе-

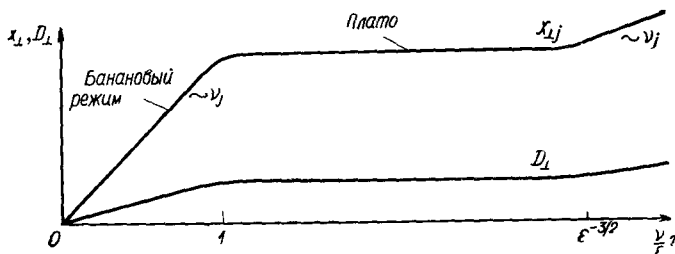


Рис. 6. Классификация режимов диффузии.

ний. Этот режим получил название бананового. Коэффициенты переноса в банановом режиме растут с увеличением соударений. Затем мы переходим в область промежуточных частот соударений, где рост всех коэффициентов переноса насыщается и они выходят на плато (рис. 6). Отсюда этот режим называют режимом плато.

§ 10. Равновесие разреженного плазменного шнура в «Токамаке» и предельное давление плазмы

Равновесие плазменного шнура в «Токамаке» в модели идеальной магнитной гидродинамики к настоящему времени изучено довольно детально, а результаты исследований изложены в работах [27, 28]. В области высоких температур плазмы, где становится существенным разделение частиц плазмы на запертые и пролетные, МГД не работает. Поэтому напомним здесь хорошо известные результаты МГД-теории и укажем на те изменения, которые вносит учет запертых частиц.

Следуя Шафранову, будем пользоваться системой координат, изображенной на рис. 7 (см. обзор [28], где вычислен метрический тензор выбранной системы координат). При большом тороидальном отношении магнитное поле с точностью до малых порядка ϵ равно

$$B_z = B_0 (1 - \epsilon \cos \vartheta), \quad B_\vartheta = B_\vartheta^{(0)} (1 - \Lambda(r) \cos \vartheta), \quad (1.54)$$

где B_0 — значение тороидального магнитного поля на магнитной оси, B_ϑ — поле собственного тока I_z .

Входящий сюда параметр $\Lambda(r)$ нетрудно выразить с помощью распределения давления плазмы и плотности тока, если воспользоваться уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} B = (4\pi/c) I (\nabla p). \quad (1.55)$$

Здесь функциональная зависимость тока в плазме от градиентов давления считается известной. В идеальной магнитной гидродинамике последняя опеределается уравнением баланса сил

$$\nabla p = c^{-1} \mathbf{I} \times \mathbf{B}. \quad (1.56)$$

Пренебрегая сначала тороидальностью системы из соотношений (1.55)—(1.56), получаем уравнение равновесия плазменного шнура по малому радиусу

$$c^{-1} I_{0\phi}(r) B_{0z} = \frac{dp}{dr} + \frac{B_{0\phi}}{4\pi r} \cdot \frac{d}{dr} r B_{0\phi}, \quad (1.57)$$

где ларморовский ток $I_{0\phi}$ зависит только от магнитной поверхности. В экспериментах на «Токамаке» с помощью этого уравнения связывают измеряемую величину изменений магнитного потока продольного поля $\delta\Phi_z$ при возникновении разряда со средним давлением плазмы $\langle p \rangle$, полным током J и токовым радиусом шнура a . Для вычисления ротора магнитного поля с точностью до величин порядка ϵ следует воспользоваться значениями метрического тензора, найденного в обзоре [28]. В этом приближении уравнение Максвелла можно записать в виде

$$-\left[\frac{1}{r B_{\phi}^{(0)}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r B_{\phi}^{(0)} (\Lambda(r) - \epsilon) + \frac{B_{\phi}}{R} \right] \cos \vartheta = \frac{4\pi}{c} I_{\sim}(r, \vartheta). \quad (1.58)$$

Если подставить в правую часть ток Пфирша—Шлютера, необходимый для замыкания тороидального дрейфа частиц

$$I_{ps} = -(2c\epsilon/B_{\phi}^{(0)})(dp/dr) \cos \vartheta,$$

то уравнение (1.58) совпадает с уравнением, полученным В. Д. Шафрановым. Величина смещения плазменного шнура $\Delta(r)$ связана с параметром Λ следующим соотношением:

$$\Delta(r) = - \int_r^b [\Lambda(r) - r/R] dr. \quad (1.59)$$

В разреженной плазме кроме ларморовского тока появляется банановый. В отличие от ларморовского тока, текущего строго поперек магнитного поля, последний направлен вдоль силовых линий. Величина бананового тока собственно запертых частиц пропорциональна разнице числа частиц, охватываемых траекториями запертых частиц: $d\delta n_t \Delta r_t / dr$ и скорости частиц $\Delta v_{\parallel} \approx \sqrt{\epsilon v_T}$ (рис. 8) $I_{bt} \approx -\epsilon^{3/2} (c/B_{\phi}) (dp/dr)$.

Как видно, эта величина меньше, чем ток Пфирша—Шлютера. Однако ввиду большой частоты соударений запертых электронов

с пролетными сила трения между ними настолько велика, что увлекает за собой огромную массу пролетных частиц и создает гораздо больший ток. Величину последнего находим из баланса сил трения, действующих на пролетные электроны со стороны запертых электронов и со стороны ионов $v_{ei}m_e I_b \approx v_{ee}e^{-1}m_e I_{bt}$. Эта оценка хорошо согласуется с точными расчетами, выполненными в § 5. Если принять во внимание экспериментально обнаруженный закон подобия профилей плотности и температур $n(r) \sim T_j(r)$, и, кроме того,

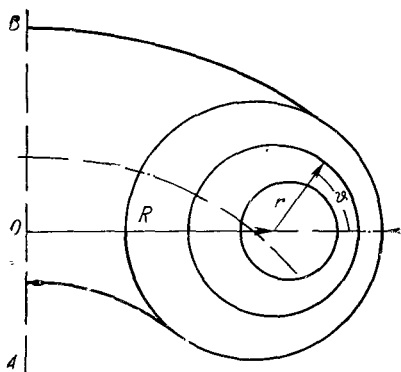


Рис. 7. Система координат.

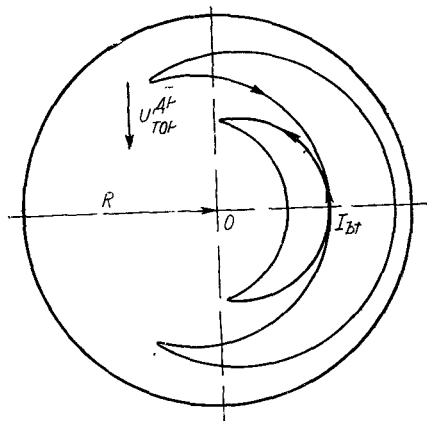


Рис. 8. Проекция двух соседних траекторий запертых частиц на плоскость (r, θ) ($U_{\text{тор}}^{\text{др}}$ — скорость тороидального дрейфа).

считать, что $T_e \gg T_i$, то выражение для дополнительного тока сильно упрощается

$$I_b \approx -1,46\sqrt{\epsilon} (c/B_{\Phi}^{(0)}) (dp/dr).$$

Из рассмотрения рис. 7 может создаться впечатление, что банановый ток имеет переменную по магнитной поверхности составляющую вследствие явной асимметрии внешнего и внутреннего обводов тора для запертых частиц. Однако хотя сам по себе банановый ток запертых частиц действительно имеет максимум на внешней поверхности тора, тем не менее при учете тока медленнопролетных частиц переменная составляющая полного тока отличается от тока Пфирша—Шлютера лишь на величину порядка ϵ (а не $\sqrt{\epsilon}$, как это было бы, если бы банановый ток запертых частиц не сокращался с током медленнопролетных). Имеющаяся неоднородность силы трения пролетных частиц о запертые в горячей плазме также не приводит к неоднородному по магнитной поверхности току электронов, а компенсируется вследствие свободного перетекания пролетных электронов вдоль силовых линий магнитного поля и установления бальцовского распределения в эффективном потенциале. Составляющие бананового тока по малому и большому азимутам следует рассматривать

раздельно, так как они входят в существенно различные условия удержания плазмы в «Токамаке». Составляющая бананового тока по малому азимуту соответствует парамагнитному увеличению магнитного потока и вычитается из диамагнитного тока частиц. В результате несколько изменяется выражение для продольного магнитного потока, используемое для определения параметров плазмы в Токамаке [29]:

$$\delta\Phi = (2\pi/B_0)\{I^2/c^2 - 2\pi a^2\langle\rho\rangle[1 - 1,46\sqrt{\epsilon}]\}.$$

Более существенным наличие дополнительного тока оказывается для «Токамака» без омического тока [30—32]. Прежде всего в отсутствие омического тока в горячей плазме обнаруженный нами дополнительный ток обеспечивает вращательное преобразование магнитного поля и, следовательно, равновесие плазмы. Поэтому кажется, что если воспользоваться подходящим методом нагрева (например, адиабатическим сжатием плазмы по малому и большому радиусам, как это предложено Л. А. Арцимовичем), то можно достичь значений β_I более высоких, чем в «Токамаке» с джоулевым нагревом.

В действительности выигрыш в величине β_I получается небольшим, так как увеличение давления плазмы и вместе с этим дополнительного тока приводит к нарушению критерия Крускала—Шафранова $q = (B_{0z}r/B_0\Phi R) > 1$, где магнитное поле B_Φ теперь вычисляется по величине дополнительного тока I_b

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} rB_\Phi = 4\pi I_b/c. \quad (1.60)$$

Численное значение β , получающееся при подстановке, найденной из уравнения (1.60) величины B_Φ в критерий Крускала—Шафранова, зависит от деталей распределения плазмы по сечению шнура [30]. Приведем здесь результаты расчета для случая неизотермической плазмы ($T_e \gg T_i$) с подобными профилями плотности и температур ($n(r) \sim T_e(r)$).

1. Параболическое распределение давления $p = p(0)(1 - r^2/a^2)$. Решение уравнения Максвелла (1.60) дает следующий профиль магнитного поля тока: $B_\Phi^2 = 1,3\sqrt{\epsilon_a} 4\pi p(0)(r/a)^{5/2}$. Подставляя это значение в критерий Крускала—Шафранова, получаем следующее ограничение на давление плазмы:

$$\beta < 1,54\epsilon_a^{3/2}q^{-2}, \quad \epsilon_a = a/R.$$

2. Однородное распределение тока по сечению плазмы:

$$B_\Phi = B_\Phi(a) r/a, \quad 4\pi p(0)\sqrt{\epsilon_a} = 0,9B_\Phi^2(a)[1 - (r/a)^{3/2}],$$

$$\beta < 1,8\epsilon_a^{-3/2} q^{-2}.$$

При однородной температуре $T = \text{const}$ предельное давление в обоих случаях уменьшается в три раза.

§ 11. Тепловой баланс плазмы в «Токамаке»

Успехи удержания плазмы в установках типа «Токамак» [33, 34] позволили поставить вопрос о применимости «неоклассической» теории процессов переноса для описания поведения плазмы в этих ловушках. Ю. Н. Днестровский и Д. П. Костомаров пытались рассчитать тепловой баланс плазмы в «Токамаке», пренебрегая процессами диффузии плазмы и теплопроводности электронов. Последнее оправдано, поскольку коэффициенты диффузии и электронной теплопроводности значительно меньше коэффициента ионной теплопроводности. Система использованных уравнений включала в себя уравнение баланса энергии ионов и электронов, а также уравнение диффузии магнитного поля и уравнение Максвелла:

$$n \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \chi_{\perp i} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + Q_{ie}; \quad (1.61)$$

$$n \frac{\partial T_e}{\partial t} = \gamma \frac{I^2}{\sigma} - Q_{ie}; \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial B_{\Phi}}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r D_0 \frac{\partial B_{\Phi}}{\partial r}; \quad (1.63)$$

$$I = \frac{c}{4\pi r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r B_{\Phi}; \quad (1.64)$$

$$Q_{ie} = \frac{3m_e}{m_i} v_{ei} n (T_e - T_i); \quad D_0 = c^2/4\pi\sigma_{\perp}.$$

Здесь $\chi_{\perp i}$ — коэффициент ионной теплопроводности, вычисленный ранее; Q_{ie} — количество тепла, передаваемое электронами ионам при кулоновских соударениях; σ — классическая проводимость, параметр γ учитывает увеличение сопротивления в экспериментальных условиях; D_0 — коэффициент диффузии магнитного поля. Система уравнений дополнялась граничными условиями $B_{\Phi}(a, t) = 2\mathcal{I}/ca$; $T_i(a, t) = T_{i0}$, где \mathcal{I} — полный ток в плазменном шнуре. Начальное распределение плотности, температуры и величины q^{-1} выбиралось параболическим.

Кроме температуры обеих компонент плазмы в рамках указанной модели рассматривались также энергетическое время жизни плазмы τ_a и энергетическое время жизни ионов τ_{oi} . Эти две величины уже давно использовались для оценки эффективности удержания плазмы в «Токамаке» и определяются из соотношений

$$\tau_a = \frac{W}{Q_{дж} - \partial W / \partial t}, \quad \tau_{oi} = \frac{W_i}{q_{\perp i}},$$

где $W = W_i + W_e$ — тепловая энергия плазмы; $Q_{дж} = \gamma I^2 / \sigma_{\parallel}$ — джоулево тепло, выделяемое током; $q_{\perp i}$ — поток тепла ионов на стенку.

Расчеты показали, что хотя выбранная система уравнений далека от совершенства, результаты численного расчета и экспериментальных измерений совпадают с удовлетворительной точностью.

Совсем недавно Фюрс и др. [35] снова вернулись к рассмотренной задаче и построили стационарное решение указанных уравнений (1.61)—(1.64). При этом вместо задачи о диффузии начального профиля тока (магнитного поля B_Φ) они предпочли сразу же положить ток равным стационарному

$$I_z = \gamma^{-1} \sigma E_z. \quad (1.65)$$

Далее вместо предположения о параболическом профиле плотности они использовали факт подобия профилей плотности и электронной температуры $n(r) \sim T_e(r)$, обнаруженный эксперименталь-

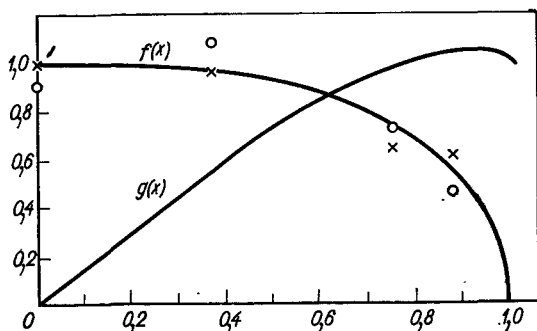


Рис. 9. Радиальный профиль плотности и температуры $f(x)$ и магнитного поля собственного тока $g(x)$:

○ — T_e/T_{e0} ; × — n/n_0 .

но [34]. Предполагая, кроме того, что параметр зависит лишь от отношения токовой скорости к тепловой $\gamma = \gamma(I_z/n e v_{Te})$, они получили из закона Ома (2.95) соотношение $I \sim [T_e(r)]^{3/2}$. Аналогично из (2.92) следует, что $T_i(r) \sim T_e(r)$. Таким образом, задача сводится к определению профиля любой из функций вида $f(r/a) = T_e/T_{e0} = T_i/T_{i0} = n/n_0 = I_z^{2/3}/I_{0z}^{2/3}$ и профиля магнитного поля $g(r/a) = B_\Phi(r)/B_{\Phi a}$. Для нахождения этих функций имеются два уравнения (1.61) и (1.64), вид которых существенно зависит от того, находимся ли мы в режиме банановой диффузии или плато.

Для конкретных значений параметров плазмы в установке «Токамак Т-3» в большей части плазменного шнура осуществляется банановый режим. В этом случае в уравнение (1.61) мы подставляем значение коэффициента теплопроводности из уравнения (1.2), а затем приводим уравнения (1.61) и (1.64) к безразмерному виду:

$$x^{1/2} f^{3/2} (df/dx) + \lambda_b g^3 = 0; \quad (1.66)$$

$$(1/x)(d/dx)(xg) = \mu_b f^{3/2}, \quad (1.67)$$

где $\lambda_b = 0,5 E_z B_{\Phi a}^3 a / 8 \pi c \sqrt{n_0} e^2 m_i^{1/2} \ln \Lambda$;

$\mu_b = 0,29 E_z T_{e0}^{3/2} a 8 \pi / \gamma B_{\Phi a} e^2 m_e^{1/2} \ln \Lambda$.

Дополняя эту систему уравнений граничными условиями $df/dx = 0$, $g = 0$ при $x = 0$; $f = 0$, $g = 1$ при $x = a$, получаем кривые, изображенные на рис. 9, и значения параметров $\lambda_b = 0,7$, $\mu_b = 3$. На этом же рисунке нанесены экспериментальные точки из работы [34]. Мы видим, что согласие с экспериментом отличное.

Равновесная величина β_I — функция неизотермичности плазмы $\tau = T_{e0}/T_{i0}$. Эту зависимость $\beta_I(\tau)$ получаем в явном виде, исключив неизвестную величину электрического поля из формул для λ_b и μ_b :

$$\beta_I = (2,75\sqrt{\gamma/M})\tau^{1/4} (1 + 1/\tau), \quad M = (am_i/Rm_e)^{1/4}. \quad (1.68)$$

Степень неизотермичности плазмы определяем из закона Ома (1.65) и уравнения для μ_b

$$(1 - 1/\tau)\tau^{1/4} = \sqrt{\gamma M/11,5N}, \quad N = ne^2a^2/m_i c^2. \quad (1.69)$$

Для $\tau = 1$ отсюда получаем $\beta_I = 5,5\sqrt{\gamma/M}$, а для $\tau \gg 1$, $\beta_I = 0,24\gamma/N$. Таким образом, при сравнимых температурах ионов и электронов величина β_I оказывается порядка единицы и не зависит от параметров разряда.

Авторы работы [35] исследовали также устойчивость полученного ими стационарного решения уравнений (1.61)—(1.64) относительно «перегретых» процессов. Они показали, что разряд при постоянном электрическом поле $E_z = \text{const}$ оказывается неустойчивым относительно низшей моды. Так что за времена порядка наибольшего из времен — времени скин-эффекта $\tau_s = 4\pi a^2\sigma/\gamma$ или времени нагрева $\tau_n \sim \beta_I \tau_s$ — происходит самосжатие токового шнура. Механизм неустойчивости, заключающийся в перегреве тех участков шнура, где температура выше и, следовательно, сам ток подрастает, был известен давно [29]. Его использовали для объяснения экспериментально обнаруженного уменьшения токового радиуса.

Особо был исследован случай, когда плазменный ток, состоящий из тока проводимости плазмы и тока убегающих электронов, является постоянным. Развитием тепловой неустойчивости, способной перевести часть тока проводимости в ток убегающих электронов, авторы объясняют быстрые выбросы плазменного шнура на стенку [33].

Как машинные расчеты, так и более простые оценки времени удержания плазмы уже неоднократно использовались для сравнения наблюдаемых величин коэффициентов переноса плазмы с предсказаниями неоклассической теории. Неоклассические времена удержания впервые были достигнуты в токамаках [33]. Однако конструктивные особенности токамаков таковы, что плотность и температура плазмы связаны в них с величиной собственного тока, создающего вращательное преобразование магнитного поля, соотношением джоулевого нагрева. Поэтому менять эти параметры независимо нельзя и это не позволяет исследовать экспериментальную зависимость коэффициента диффузии от длины свободного пробега. Впервые

такая зависимость была получена для случая режимов Пфирша—Шлютера и «плато» на стеллараторе «Proto—Cleo» [36]. Результаты экспериментов оказались в прекрасном соответствии с неоклассической теорией. Анализ применимости неоклассической теории для объяснения потерь по ионному каналу был дан Л. А. Арцимовичем с сотрудниками [37]. Считая, что ионы получают тепло от электронов посредством парных кулоновских соударений [38], а теряют его из-за неоклассической теплопроводности, они установили линейную зависимость температуры ионов от параметра $\sqrt[3]{T_e B_e n R^2} A^{-1/2}$ (A — атомное число используемого в экспериментах газа).

Более сложно обстоит дело с потерями по электронному каналу. Л. А. Арцимович [39] дает следующую эмпирическую формулу для электронной теплопроводности, получившую название псевдоклассической:

$$\chi_e = 5v_{эфф} r_{ce}^2 / \Theta^2,$$

где $v_{эфф}$ — эффективная частота соударений, вычисляемая из экспериментально измеренной проводимости плазмы $\sigma = ne^2/mv_{эфф}$. Можно думать, что этот результат является следствием развития дрейфовых неустойчивостей плазмы. В пределе редких соударений коэффициент квазилинейной диффузии в турбулентном электростатическом поле с потенциалом φ , так же как и коэффициент неоклассической диффузии E — бананов, пропорционален частоте соударений и слабо зависит от параметра захвата. Величину коэффициента диффузии можно оценить из уравнения (1), полученного на основе соображений о случайном шаге диффузии. В отличие от диффузии в тороидальном магнитном поле захват теперь происходит не в магнитной, а в электрической яме, и мы полагаем $\varepsilon = e\varphi/T_e$. Смещение частиц вследствие электрического дрейфа со скоростью $ck_{\perp}\varphi/B_0$ за время пролета частиц в поле волны $\tau = 1/k_{\parallel} (e\varphi/m)^{1/2}$ оказывается в $(k_{\perp}/k_{\parallel})\sqrt{\varepsilon}$ раз больше ларморовского радиуса. Подставляя в уравнение (1) найденное смещение, получаем:

$$D \approx \left(\frac{e\varphi}{T_e}\right)^{1/2} v_e r_{ce}^2 \left\langle \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \right\rangle, \quad v_e \frac{T_e}{e\varphi} \left\langle k_{\parallel} \left(\frac{e\varphi}{m}\right)^{1/2} \right\rangle.$$

Наиболее вероятным кандидатом является дрейфово-температурная неустойчивость «запертых» электронов (см. приложение 2). Квазилинейная теория позволяет оценить отношение потока тепла к термодиффузионному потоку частиц (обычная диффузия при этом отсутствует) и дает для него значение, равное 5.

§ 12. Неоклассическая диффузия в «Токамаке» с магнитными поверхностями произвольной формы

Оценка коэффициента диффузии в режиме плато в «Токамаке» с эллиптическим сечением магнитных поверхностей показала, что диффузия уменьшается с увеличением отношения полуосей эллипса

[40]. В этой связи представляет интерес рассчитать диффузию плазмы в поле общего вида (система координат является цилиндрической с осью z , совпадающей с осью тора):

$$B_z = B_0 R_0 / R, \quad B_R = -\frac{B_0 R_0}{R} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{B_0 R_0}{R} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial R},$$

где R_0 — радиус кривизны магнитной оси.

Рассмотрим сначала банановый режим. Воспользуемся новыми переменными χ^2, x :

$$v_{||} = \sigma v [\varepsilon (2\chi^2 - 1 + x/r_+)]^{1/2}, \quad x = R - R_0,$$

$$\text{где} \quad \chi^2 = [\varepsilon - \mu B_0 (1 + \varepsilon)] / 2\mu B_0 \varepsilon, \quad \varepsilon = r_+ / R_0, \quad (1.70)$$

$R_+ = R_0 + r_+$ — координата дальней от оси тора точки магнитной поверхности, которая предполагается симметричной относительно плоскости (R, ζ) . Тогда кинетическое уравнение для функции распределения принимает вид, аналогичный уравнению (1.28). Условие разрешимости полученного таким образом уравнения позволяет найти функцию распределения пролетных электронов:

$$f_{ue}^0 = \frac{n(\psi) \exp(-\varepsilon/T_e)}{\pi^{3/2} v_{Te}^3} \left\{ 1 + \frac{\sigma v R \sqrt{\varepsilon}}{\omega_{ce} R_0} \cdot \frac{d \ln n}{d\psi} \left([2\chi^2 - 1 + x/r_+]^{1/2} - \oint \frac{dx}{\nabla_z \psi} \int_{(R_+ - R_-)/2}^{\chi^2} dt \left[\oint dx' \sqrt{2t - 1 + x/r_+} / \nabla_z \psi \right]^{-1} \right) \right\}.$$

Поток частиц, усредненный по магнитной поверхности, выражается через значение скачка производной функции распределения на граничной поверхности, разделяющей фазовое пространство запертых и пролетных электронов:

$$\langle n v_r \rangle = -\alpha_e v_{ei} r_{ce}^2 \sqrt{\varepsilon} \oint \frac{dx}{\nabla_z \psi} \left[\oint \frac{dx |\nabla \psi|}{\nabla_z \psi} \right]^{-1} \frac{dn}{d\psi}, \quad (1.71)$$

$$\text{где} \quad \alpha_{ei} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \left[\frac{4}{\pi} - \right.$$

$$\left. - \int_{(R_+ - R_-)/2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \left\{ \frac{\oint dx / \nabla_z \psi}{\oint dx \sqrt{1 - (1 - x/r_+)/2t} / \nabla_z \psi} - \frac{2}{\pi} \right\} \right].$$

В области промежуточных соударений

$$1 \gg (v_e/v) \oint dx / \nabla_z \Psi \gg \varepsilon^{3/2}.$$

В кинетическом уравнении удобно перейти к переменным «действие—фаза» (Ψ, ϑ) и разложить составляющую скорости диамагнитного дрейфа вдоль магнитной поверхности в ряд Фурье по фазе:

$$v_{||} \omega(\Psi) \partial f_{1e} / R_0 \partial \vartheta \approx (\mu B_0 / m \omega_{ce} R_0) \frac{\partial f_0}{\partial \Psi} \text{Im} \sum_{m=1}^{\infty} (\nabla_z \Psi)_m \exp(im\vartheta).$$

Здесь коэффициенты разложения $(\nabla_z \Psi)_m$ являются функцией «действия» Ψ , а величина $d\vartheta/d\varphi = \omega(\Psi)$ связана с вращательным преобразованием магнитного поля таким образом, что для $\Delta\varphi = 2\pi/\omega$ силовая линия возвращается в исходную точку в плоскости (R, z) . Решение этого уравнения и вычисление потока частиц фактически повторяет содержание § 9 и дает результат

$$\langle nv_r \rangle = -\frac{\pi^{1/2} v_{Te}^4}{4\omega_{ce}^2 R_0^2} \times \\ \times \frac{dn}{d\Psi} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^{\infty} \oint \frac{(\nabla_z \Psi)_m}{|m\omega(\Psi)|} \exp(im\vartheta) dx(\Psi, \vartheta) \left[\oint \frac{dx |\nabla \Psi|}{\nabla_z \Psi} \right]^{-1}.$$

Из последних уравнений следует, что отношение коэффициента диффузии плазмы в случае эллиптического сечения магнитной поверхности к коэффициенту диффузии в «Токамаке» с круглым сечением магнитных поверхностей как в банановом режиме, так и в режиме плато оказывается одинаковым:

$$\frac{D(b/a)}{D(1)} = \frac{\pi b^2}{2a^2 E(1 - b^2/a^2)}.$$

Г Л А В А 2

ТОРОИДАЛЬНЫЕ СТЕЛЛАРАТОРЫ

§ 1. Дрейфовые траектории «запертых» частиц вблизи оси стелларатора

Траектории дрейфа частиц плазмы в тороидальных ловушках, как правило, образуют поверхности, достаточно близкие к магнитным [41]. Однако дрейфовые поверхности частиц, движущихся с малыми скоростями вдоль силовых линий магнитного поля, могут испытывать довольно сильные отклонения от магнитных поверхностей. В аксиально симметричных тороидальных ловушках такие частицы «заперты» на внешнем обводе тора, где магнитное поле имеет минимум, и отклоняются от магнитной поверхности на величину, пропорциональную ларморовскому радиусу (см. § 2 настоящей главы). Тороидальный стелларатор не обладает аксиальной симметрией. Орбиты частиц в стеллараторе совершают довольно сложную процессию и отходят от магнитных поверхностей на расстояние, конечное даже при $r_c \rightarrow 0$ [42—47]. Картина движения частиц весьма запутана из-за того, что они находятся в поле, представляющем собой суперпозицию двух потенциальных ям, во-первых, связанной с тороидальностью (как в аксиально симметричном случае) и, во-вторых, возникающей от винтового магнитного поля. Поэтому описать траектории частиц во всех деталях не представляется возможным, и мы воспользуемся методом усреднения, аналогичным усреднению

по ларморовским кружкам. Рассмотрим здесь предельный случай стелларатора с малой тороидальностью. Если совсем пренебречь тороидальностью, то в l -заходном прямом стеллараторе имеются l минимумов магнитного поля на одной и той же магнитной поверхности. Поэтому частицы с малой продольной скоростью будут заперты вблизи этих минимумов. Движение запертых частиц при учете тороидальности можно представить теперь как медленный дрейф замкнутых дрейфовых траекторий, имевшихся в прямом стеллараторе (везде далее мы их называем банановыми по аналогии с ларморовскими кружками в прямолинейном магнитном поле).

Вычисление траекторий частиц значительно упрощается вблизи оси стелларатора с заходностью $l \geq 3$, где справедливы следующие предположения: а) сечения магнитных поверхностей представляют собой концентрические окружности; б) вклад поперечных составляющих винтового магнитного поля в диамагнитный дрейф частиц пренебрежимо мал по сравнению с вкладом из-за неоднородности продольного поля B_z .

Рассмотрим вначале в качестве модели l -заходный стелларатор. Вблизи магнитной оси можно воспользоваться следующим выражением для величины B_z [43]:

$$B_z = B_0 [1 - \varepsilon_h \cos l(\vartheta - \alpha z) - \varepsilon_t \cos \vartheta], \quad l \geq 3, \quad (2.1)$$

где $\varepsilon_h = [b/(l-1)!] (\alpha r/2)^l$, $L = 2\pi/\alpha$ — шаг винтового поля, а последнее слагаемое в правой части представляет собой тороидальную поправку, так что

$$\varepsilon_t \ll \varepsilon_h. \quad (2.2)$$

Уравнение движения заряженной частицы с энергией \mathcal{E} и адiabатическим инвариантом μ в дрейфовом приближении представим в следующем виде:

$$r \frac{d(\vartheta - \alpha z)}{dt} = -\alpha r \left[v_{\parallel} - \frac{c}{\alpha r B_0} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} \right] - \frac{\mu B_0}{m_j \omega_j r} \times \\ \times [l \varepsilon_h \cos l(\vartheta - \alpha z) + \varepsilon_t \cos \vartheta]; \quad (2.3)$$

$$dr/dt = -(\mu B_0 / m_j \omega_j r) [l \varepsilon_h \sin l(\vartheta - \alpha z) + \varepsilon_t \sin \vartheta]; \quad (2.4)$$

$$dz/dt = v_{\parallel}; \quad v_{\parallel} = \pm \sqrt{(2/m_j) [\mathcal{E} - e_j \Phi_0 - \mu B_0] \times} \\ \times (1 - \varepsilon_h \cos l(\vartheta - \alpha z) - \varepsilon_t \cos \vartheta)} \quad (2.5)$$

В первом из этих уравнений пренебрегли членом, пропорциональным ($\sim B_0 v_{\parallel} / B_0$). Для запертых частиц, рассмотрению которых посвящена большая часть данного параграфа, такое пренебрежение справедливо вблизи магнитной оси. Для пролетных частиц этот член отвечает за корректный учет движения по координате ϑ вследствие наличия вращательного преобразования силовых линий магнитного поля и не может быть отброшен. Кроме того, при рассмотрении движения запертых частиц с малым v_{\parallel} мы отбросили центробежный дрейф в этих уравнениях.

Систему уравнений (2.3)–(2.5) в нулевом приближении ($\varepsilon_t = 0$) с помощью замены $\varphi = l(\vartheta - \alpha z)$ можно привести к виду, напоминающему уравнения движения частиц в аксиально симметричном торе, и если пренебречь отклонением частиц Δr_t от магнитной поверхности (Δr_t — действительно малая величина, пропорциональная ларморовскому радиусу), то вместо указанной системы уравнений можно записать одно, описывающее движение по координате φ :

$$r_0 \frac{d\varphi}{dt} = -l\alpha r_0 \sigma v \sqrt{\varepsilon_h [2\kappa^2 - 1 + \cos \varphi]}, \quad (2.6)$$

где

$$\kappa^2 = \left\{ \sqrt{(2/m_j) [\mathcal{E} - e_j \Phi_0 - \mu B_0 (1 - \varepsilon_h)]} - \frac{c}{\alpha B_0 r} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} \right\}^2 / 2v^2 \varepsilon_h.$$

Отсюда следует, что как и в аксиально симметричном торе, движение запертых частиц можно описать в терминах эллиптических функций с модулем:

$$\kappa^2 \leq 1. \quad (2.7)$$

Период колебания запертых частиц равен

$$\tau = \frac{4}{\alpha l v \sqrt{2\varepsilon_h}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \varphi/2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\alpha l v \sqrt{\varepsilon_h}} K(\kappa), \quad (2.8)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интервал первого рода; φ_0 — нуль подкоренного выражения. Соответствующие орбиты (бананы) в плоскости $(r, \vartheta, \alpha, z)$ изображены на рис. 10. Запертые частицы движутся в интервалах углов

$$(2\pi/l)(m - 1/2) \leq \vartheta \leq (2\pi/l)(m + 1/2), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Орбиты частиц в среднем дрейфуют вдоль z . Скорость этого дрейфа можно найти из очевидного условия

$$(d/dt)\langle \varphi \rangle = 0, \quad (2.9)$$

откуда

$$\left\langle \frac{d\vartheta}{dt} \right\rangle = \alpha \left\langle \frac{dz}{dt} \right\rangle = -\frac{c}{r B_0} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} - \frac{l \mu B_0}{m_j \omega_{cj} r^2} \left[\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right], \quad (2.10)$$

где угловые скобки обозначают операцию усреднения по периоду колебания запертых частиц согласно правилу

$$\langle A(\varphi) \rangle = \frac{1}{2K(\kappa)} \int_0^{\varphi_0} \frac{A(\varphi) d\varphi}{[\kappa^2 - \sin^2(\varphi/2)]^{1/2}}. \quad (2.11)$$

При наличии слабой тороидальности $\varepsilon_t \neq 0$, очевидно, можно считать, что быстрое бананообразное движение запертых частиц между магнитными пробками сохраняется, но координата банана r так же, как и $\langle \vartheta \rangle$, будет медленно меняться.

Уравнение, описывающее это медленное движение, можно найти усреднением уравнения (2.4):

$$\langle dr/dt \rangle = -(\mu B_0 \varepsilon_t / m_j \omega_{cj} r) \langle \sin \vartheta \rangle. \quad (2.12)$$

Но в использованном нами приближении $B\vartheta/B_z \ll \alpha$ (т. е. в пренебрежении вращательным преобразованием) быстрое движение по ϑ отсутствует и, следовательно, $\langle \sin \vartheta \rangle = \sin \langle \vartheta \rangle$. Заметим, что

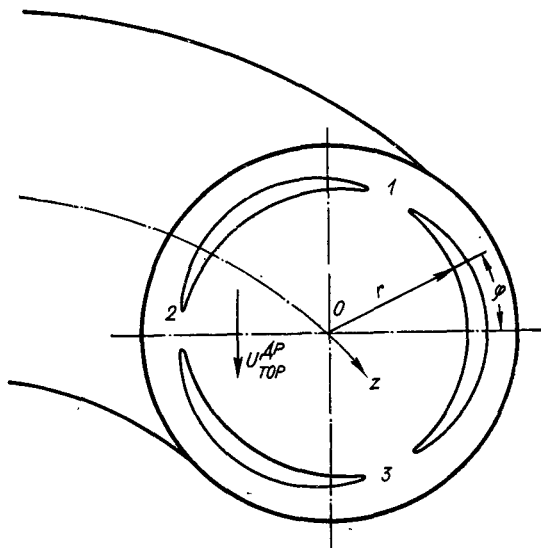


Рис. 10. Траектории запертых частиц в стеллараторе.

уравнения движения (2.10) и (2.12) можно было бы также получить из закона сохранения второго адиабатического инварианта [48]:

$$J = \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} \oint ds [\mathcal{E} - e\Phi(r) - \mu B_z]^{1/2} = \\ = \frac{16}{c l} \left(\frac{\mu B_0 \varepsilon_h}{m} \right)^{1/2} \left[E(\kappa) - (1 - \kappa^2) K(\kappa) + \frac{\varepsilon_t}{2\varepsilon_h} K(\kappa) \cos \langle \vartheta \rangle \right].$$

В терминах сохраняющегося адиабатического инварианта J уравнения движения по координатам r и $\langle \vartheta \rangle$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{eB_0} \cdot \frac{\partial J / r \partial \langle \vartheta \rangle}{\partial J / \partial \mathcal{E}}; \quad r \frac{d \langle \vartheta \rangle}{dt} = - \frac{c}{eB_0} \cdot \frac{\partial J / \partial r}{\partial J / \partial \mathcal{E}}.$$

Из уравнения (2.12) видно, что вследствие тороидальности банан дрейфует поперек магнитной поверхности. В процессе колебаний частицы между областями с сильным винтовым магнитным полем тороидальный дрейф по радиусу сохраняет свой знак до тех пор, пока вследствие медленного движения по азимуту $\langle \vartheta \rangle$ частица не попадает в область тороидального дрейфа противоположного знака.

Чем медленнее движется банан по $\langle \vartheta \rangle$ (и соответственно по z), тем большим будет его отклонение от первоначальной магнитной поверхности. Движение же по $\langle \vartheta \rangle$ в приближении малой тороидальности описывается уравнением (2.10).

Рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле $d\Phi_0/dr = 0$. Тогда при $\kappa^2 = \kappa_0^2 = 0,83$ дрейфовая скорость банана вдоль оси z обращается в нуль [обращается в нуль правая часть уравнения (2.10)]. Такие бананы в процессе медленного дрейфового движения оказываются запертыми в пределах ограниченных участков силовых линий и имеют аномально большое отклонение от магнитной поверхности. Разложим выражение для скорости дрейфа $d\langle \vartheta \rangle / dt$ по малым отклонениям от точки (κ_0, r_0) :

$$\frac{d\langle \vartheta \rangle}{dt} = - \frac{l\mu B_0 \varepsilon_h}{m_j \omega_{cj} r_0^2 K(\kappa_0)} \cdot \frac{d}{d\kappa_0^2} [2E(\kappa_0) - K(\kappa_0)] \times \\ \times \left(\kappa^2 - \kappa_0^2 + (r - r_0) \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right). \quad (2.13)$$

В переменных

$$\tau = \mu B_0 t / m_j \omega_{cj} r_0^2; \quad x = (r/r_0) - 1 \quad (2.14)$$

система уравнений движения дрейфовых орбит (бананов) (2.10) и (2.12) имеет простую форму:

$$\dot{x}_\tau = - \varepsilon_t \sin \langle \vartheta \rangle; \quad | \quad (2.15)$$

$$\langle \dot{\vartheta} \rangle_\tau = 1,8 l \varepsilon_h [\kappa^2 - \kappa_0^2 - x]. \quad (2.16)$$

Решая систему уравнений (2.15), (2.16) при начальном условии $x(\vartheta = \pi) = 0$, находим, что в процессе движения сохраняется величина

$$J = x + \frac{\sigma}{2} \left[\frac{\varepsilon_t}{0,45 l \varepsilon_h} (2\eta^2 - (1 + \cos \vartheta)) \right]^{1/2}, \quad (2.17)$$

а изменение $\langle \vartheta \rangle$ описывается уравнением

$$r \frac{d\langle \vartheta \rangle}{dt} = \frac{2\mu B_0 \sigma}{m_j \omega_{cj} r} [0,9 l \varepsilon_h \varepsilon_t (2\eta^2 - 1 - \cos \vartheta)]^{1/2}, \quad (2.18)$$

где $2\eta^2 = 0,9 l \varepsilon_h \varepsilon_t^{-1} [\kappa^2 - \kappa_0^2]^2$. Отсюда видно, что дрейфовые орбиты частиц с параметром $0 < \eta \leq 1$ прецессируют в пределах ограниченных участков силовых линий с периодом

$$T_{ij} = \frac{2m_j \omega_{cj} r^2 K(\eta)}{\mu B_0 \sqrt{0,9 l \varepsilon_h \varepsilon_t}}. \quad (2.19)$$

На рис. 11 изображен график максимального удаления $(r - r_0)$ от магнитной поверхности в зависимости от κ^2 . Наибольшее смещение имеют бананы на границе захвата $\eta^2 = 1$:

$$\Delta r_t / \eta^2 = 1 = r_0 \sqrt{\varepsilon_t / 0,45 l \varepsilon_h}. \quad (2.20)$$

Дрейфовые орбиты, которые в процессе дрейфа обходят вокруг всего тороида (назовем их *пролетными бананами*), удаляются от магнитной поверхности гораздо меньше:

$$\Delta r_u |_{x^2=0; 1} = 2\varepsilon_t r / \varepsilon_h. \quad (2.21)$$

Период прецессии таких бананов равен

$$T_{uj} = \frac{2\pi m_j \omega_{cj} r^2}{I \mu B_0 \varepsilon_h} \left[\frac{2E(x)}{K(x)} - 1 \right]^{-1}. \quad (2.22)$$

При наличии достаточно сильного электрического поля

$$\frac{c}{B_0} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} = v_0 \gg \frac{\mu B_0 \varepsilon_h}{m_j \omega_{cj} r} \quad (2.23)$$

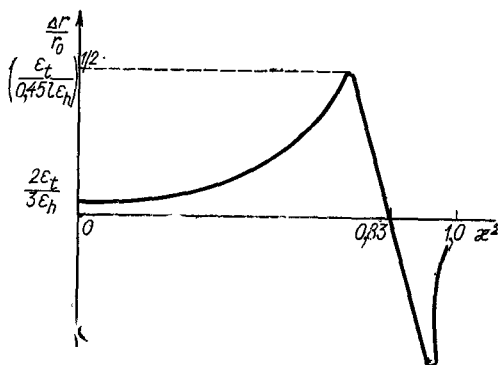


Рис. 11. Зависимость смещения запертых частиц от их скорости.

скорость дрейфа $d\langle\vartheta\rangle/dt$ нигде не обращается в нуль. Вследствие этого дрейфовые орбиты движутся вдоль тора с почти постоянной скоростью и постепенно обходят участки с различными знаками тороидального дрейфа. Траекторий же, заключенных в ограниченной области силовых линий магнитного поля, в этом случае не существует вообще. Решая уравнение

$$rd\langle\vartheta\rangle/dt = v_0 \quad (2.24)$$

совместно с уравнением (2.12), получаем

$$r(\langle\vartheta\rangle) - r_0 = (\mu B_0 \varepsilon_t / m_j \omega_{cj} v_0) (1 + \cos \langle\vartheta\rangle). \quad (2.25)$$

§ 2. Численный расчет движения отдельных частиц в стеллараторе

Приближение малости тороидального отношения ($\varepsilon_t \ll \varepsilon_h$), использованное при аналитическом расчете траектории частиц, строго не выполняется ни в одном из существующих стеллараторов. Поэтому траектории частиц в этих установках можно рассчитать

только с помощью ЭВМ. Впервые такой расчет был проделан Гибсоном и Тейлором для весьма идеализированной модели магнитного поля [46]. По виду траекторий они разбили все частицы на три основные группы: пролетные, запертые на тороидальном поле (траектории типа «серп») и запертые на винтовом поле (локализованные частицы или бананы). Однако уже из аналитического рас-

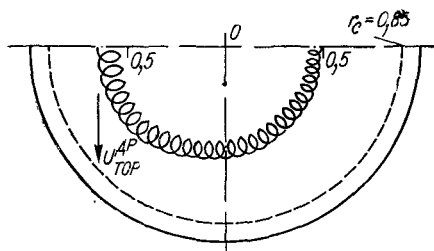


Рис. 12. Траектория пролетной частицы.

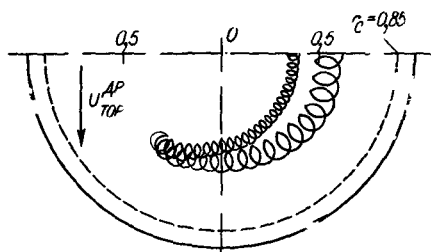


Рис. 13. Типичная серповидная траектория.

чета видно, что такое разбиение — весьма грубое. Так, кроме указанных трех групп (рис. 12—14) следует различать пролетные бананы и запертые («супербананы») (рис. 14). Более детальные расчеты, проведенные для стелларатора Института ядерной физики А. В. Коминым, К. М. Лобановым и В. Г. Устюжаниновым [49], обнаружили несколько сложных переходных форм, которые могут играть определяющую роль в процессах переноса в плазме. Так, в частности, в очень разреженной плазме необходимо отдельно рассматривать частицы, превращающиеся из пролетных в запертые на неоднородностях винтового поля. На рис. 15 изображена траектория пролетной частицы, которая по мере смещения наружу, в область более сильного винтового поля, становится запертой.

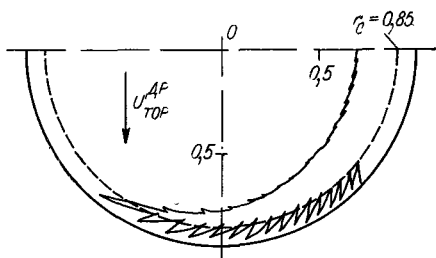


Рис. 14. Бананообразная траектория частицы, отражающейся от неоднородности тороидального поля.

Знание топологии траектории позволяет оценить коэффициенты переноса в плазме, пользуясь простыми соображениями о случайном шаге диффузии. Однако не менее важно знать, какая доля частиц, находящихся сначала внутри сепаратрисы, вообще не удерживается в ловушке из-за конечных размеров орбит. В приближении усредненного магнитного поля, совпадающего с полем аксиальной симметричной ловушки, такая задача была решена Бишопом и Смитом [50]. Более детально эта проблема исследовалась для реаль-

ной модели магнитного поля Новосибирского стелларатора А. В. Коминым и др. [49]. Они нашли область удержания частиц с малым ларморовским радиусом $r_c/r_s = 0,0013$ в зависимости от параметров (v_{\perp}^2/v^2 , r/r_s ; r_s — радиус сепаратрисы) (рис. 16).

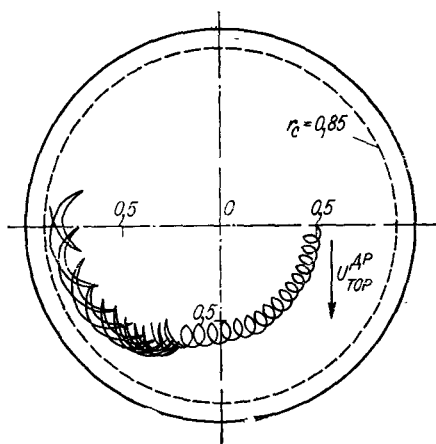


Рис. 15. Траектория частицы, превращающейся из пролетной в запертую на неоднородностях винтового поля.

В согласии с аналитическими расчетами легче всего уходят из стелларатора частицы со скоростями в интервале $0,85 \leq v_{\perp}^2/v^2 \leq 0,95$. Эти же авторы изучали влияние электрического поля на удержание частиц. Было показано, что область потерянных частиц в плоскости (v_{\perp}^2/v^2 , r/r_s) по мере увеличения электрического поля смещается вниз по оси v_{\perp}^2/v^2 в соответствии с ростом продольной скорости запертых частиц $v_{\perp}^2/v^2 \approx 1 - v_0^2/\Theta^2 v^2$. Размеры области при этом несколько увеличиваются. Однако при достаточно боль-

шом поле $e\Phi_0 \approx 3\pi v^2/2$ можно превратить все бананы в пролетные и удержать в системе.

§ 3. Супербанановая диффузия в стеллараторе с малой тороидальностью (качественное рассмотрение)

Прежде всего следует иметь в виду, что режим супербанановой диффузии осуществляется только в достаточно разреженной плазме. В плазме с «частыми» соударениями запертая частица переходит в пролетную раньше, чем ее бананообразная траектория сместится от магнитной поверхности на величину, большую чем толщина банана. Для качественных оценок оказывается полезным ввести понятие длины свободного дрейфа банана между соударениями:

$$\lambda_j = (\mu B_0 \epsilon_i / m_j \omega_{cj} r) (v_{jj} / \epsilon_h)^{-1}.$$

Тогда условие разрушения супербананового движения запишется в виде

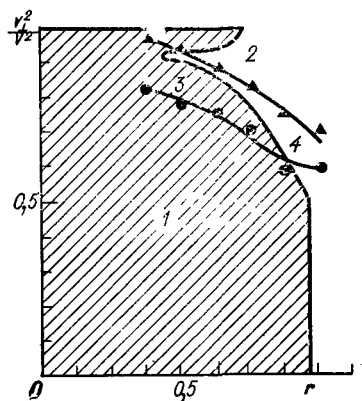
$$\lambda_j < \Delta_b = (r_{cj} / \alpha r) \sqrt{\epsilon_h},$$

где справа стоит величина порядка толщины банана в винтовом поле, имеющем шаг $L = 2\pi/\alpha$. Соударения, при которых последнее условие выполнимо, будем считать частыми. В режиме частых соударений тороидальность стелларатора не сказывается на движении частиц и ею можно вообще пренебречь. Таким образом, задача вычисления коэффициентов переноса в магнитном поле с винтовой

симметрией сводится к аналогичной задаче для аксиально симметричного поля. Соответствующие формулы § 1 гл. I остаются справедливыми для прямолинейного стелларатора, если сделать в них следующую замену: $\Theta \rightarrow \alpha r$, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_h$.

Рис. 16. Область удержания частиц с отношением $r_c/\rho_s = 0,0013$ при направленной начальной скорости, соответствующей отклонению пролетных частиц от магнитной оси:

1 — область пролетных частиц; 2 — область частиц, имеющих бананообразующую траекторию; 3 — область частиц, имеющих серповидную траекторию; 4 — переходная область. Область удержания заштрихована.



1. Режим редких соударений [47, 51]. Как следует из предыдущей главы, коэффициенты переноса плазмы запертых частиц в аксиально симметричном магнитном поле можно оценить с помощью соотношения

$$D_{\perp} \approx (\Delta r)^2 / \tau_{\text{соуд}}, \quad (2.26)$$

где Δr — величина «случайного шага» частиц между двумя соударениями; τ — характерное время соударений запертых частиц. Это соотношение справедливо и в тороидальном стеллараторе, если подставить сюда соответствующие значения (Δr) и τ .

Нарушение винтовой симметрии, как показано в § 2, приводит к значительному дрейфу запертых частиц от начальной магнитной поверхности. Если соударения не очень редки (частота соударений больше частоты обращения банана вокруг малой магнитной оси), то запертая частица превращается в пролетную из-за соударений с другими частицами раньше, чем успевает отклониться от магнитной поверхности на максимальное расстояние. В этом случае в формулу для диффузии, величина которой определяется скоростью ухода электронов, следует подставить вместо случайного шага диффузии длину свободного дрейфа λ_j :

$$D_{\perp e} = \sqrt{\varepsilon_h} \left(\frac{v_{ee}}{\varepsilon_h} \right) \lambda_j^2 = \sqrt{\varepsilon_h} \varepsilon_i^2 \left(\frac{v_{Te} r_{ce} \varepsilon_h}{r^2 v_{ee}} \right) \frac{c T_e}{e B_0}. \quad (2.27)$$

Здесь коэффициент диффузии запертых электронов мы домножили на их долю в общем числе $\sqrt{\varepsilon_h}$ и учли, что для рассеяния запертой частицы в пролетную достаточно лишь небольшого изменения скорости $\Delta v_{\parallel} \approx v_T \sqrt{\varepsilon_h}$, поэтому частота таких соударений оказывается порядка $\nu_{\text{эфф}} = v_{ee} / \varepsilon_h$.

Хотя коэффициент диффузии ионов в корень из отношения масс больше, чем у электронов, диффузионные потоки обоих компонент плазмы сравниваются при определенном значении радиального электрического поля

$$e (d/dr)\Phi_0 (r) \approx (1/n)(d/dr)nT_i. \quad (2.28)$$

Поток тепла ионов при этом остается по-прежнему большим.

$$\chi_{\perp i} = \sqrt{\epsilon_h} \epsilon_i^2 \left(\frac{v_{Ti} r_{ci} \epsilon_h}{r^2 v_{ii}} \right) \frac{c}{e} \cdot \frac{T_i}{B_0}. \quad (2.29)$$

Таким образом, нарушение винтовой симметрии магнитного поля приводит к значительному увеличению коэффициентов переноса в пределе очень редких соударений. Причем по мере уменьшения частоты соударений коэффициенты переноса растут до тех пор, пока длина свободного дрейфа банана не достигнет своего максимального значения $\epsilon_i r$. Комбинируя последнее условие с условием сосуществования супербанановой диффузии, получаем условие применимости полученного выражения для ионной температуропроводности:

$$\alpha v_{Ti} \epsilon_h^{1/2} (\epsilon_i / \epsilon_h) > (v_{ii} / \epsilon_h) > (1/T_{ui}) \approx c\Phi_0 / B_0 r. \quad (2.30)$$

Выражение для коэффициента диффузии остается справедливым для более разреженной плазмы, а именно до тех пор, пока растущая (с уменьшением частоты соударений) диффузия электронов не сравняется с диффузией ионов (см. § 4).

2. Случай очень редких соударений [48, 52, 53]. В пределе очень редких соударений, когда запертая частица успевает между двумя последовательными соударениями совершить полный оборот вокруг магнитной оси, коэффициент диффузии запертых частиц пропорционален частоте соударений и квадрату максимального отклонения от первоначальной магнитной поверхности.

Строгий расчет коэффициентов переноса плазмы в магнитном поле, обладающем аксиальной или винтовой симметрией, согласуется с этой простой оценкой. Если же симметрия нарушена (в рассматриваемом случае нарушение винтовой симметрии происходит из-за малой тороидальности системы), то наибольший вклад в коэффициенты переноса дают не запертые частицы, а частицы с бананообразными траекториями, переходящими в пролетные (см. рис. 15). Разницу между этими двумя случаями легко понять, если сравнить зависимость отклонения от магнитной поверхности от величины продольной скорости на границе фазового пространства запертых и пролетных частиц в обоих случаях.

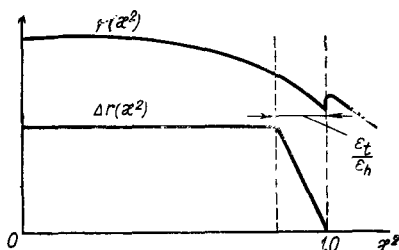
В аксиально симметричном магнитном поле траектории запертых и пролетных частиц отличаются по топологии, но непрерывно переходят друг в друга (см. рис. 5). Следовательно, малое изменение скорости частицы вдоль поля, переводящее частицу из запертой в пролетную, изменяет отклонение частицы от магнитной поверхности также на малую величину. Распределение частиц, являясь функ-

цией отклонения от магнитной поверхности, при этом оказывается непрерывным (см. рис. 2).

С другой стороны, частицы, запертые в области слабого винтового поля в стеллараторе — бананы — способны смещаться под действием тороидального дрейфа на конечное расстояние от магнитной поверхности, а пролетные строго следуют ей. Изменение отклонения от магнитной поверхности от конечной величины до нуля происходит в узком интервале скоростей $\Delta v_{\parallel} \approx \sqrt{\epsilon_h} \epsilon_t v_T / \epsilon_h$, соответствующем частицам с переходным типом траекторий.

Если соударения, выводящие частицы из этого слоя, происходят очень часто $v_{эфф} = (v/\epsilon_h) (\epsilon_t/\epsilon_h)^2 > \omega_0$, то между запертыми и пролетными частицами образуется переходной слой с толщиной, пре-

Рис. 17. Распределение частиц и смещение их от магнитной поверхности, как функция параметра.



вышающей указанный интервал скоростей. В переходном слое происходит более плавное изменение смещения частиц от магнитной поверхности в отсутствие соударений (рис. 17). Ширина его устанавливается такой, чтобы супербанановое движение в переходном слое успевало разрушаться в результате соударений. Последнее имеет место при

$$v_{эфф} = v (v_T / \Delta v_{\parallel})^2 [\ln (v_T \sqrt{\epsilon_h} / \Delta v_{\parallel})]^{-1} \approx \omega_0.$$

Подставляя в соотношение (2.26) эффективную частоту соударений, величину смещения частиц $\Delta r \approx \epsilon_t r$ и учитывая, наконец, что число частиц в пограничном слое порядка $(\Delta v_{\parallel} / v_T) \ln v_T \sqrt{\epsilon_h} / \Delta v_{\parallel}$, получаем следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D_{\perp j} = \left(\frac{v_j \Lambda}{\epsilon_h \omega_0} \right)^{1/2} \sqrt{\epsilon_h} \epsilon_t^2 \frac{c T_j}{e B_0}; \quad \Lambda = \ln \frac{\omega_0 \epsilon_h}{v_j};$$

$$(\epsilon_t / \epsilon_h)^2 < \frac{v_j \Lambda}{\omega_0 \epsilon_h} < 1. \quad (2.31)$$

По мере нагрева плазмы предел очень редких соударений раньше достигается для ионов, а соударения электронов по-прежнему можно считать просто редкими. Поэтому диффузия частиц будет определяться формулой (2.27), а выражение (2.31) следует использовать для оценки ионной теплопроводности. При более редких соударениях

$$(v/\epsilon_h) (\Lambda_*/\omega_0) < (\epsilon_t/\epsilon_h)^2, \quad \Lambda_* = \ln (\epsilon_h/\epsilon_t). \quad (2.32)$$

Следует учесть, что существует промежуточный класс частиц с бананообразными траекториями, переходящими в пролетные. Для таких частиц отклонение от магнитной поверхности тем меньше, чем меньшую часть траектории они заперты в области слабого винтового поля (см. рис. 15). Малое изменение скорости из-за соударений для

$$D_{\perp} \approx (v/\omega_0 \epsilon_h) \sqrt{\epsilon_h \epsilon^2 t} (cT/eB_0). \quad (2.33)$$

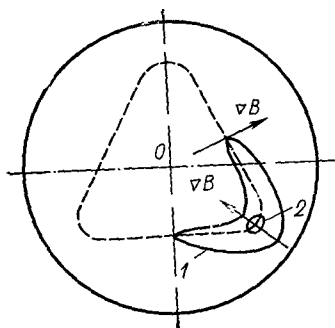


Рис. 18. Траектории едва запертой частицы (1) и частицы на дне потенциальной ямы (2):
 --- магнитная поверхность;
 ————— стенки камеры.

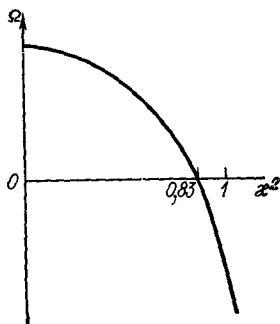


Рис. 19. Частота обращения банана вокруг магнитной оси.

них приводит к малому изменению отклонения. Вследствие этого коэффициент диффузии, как и в аксиально симметричных системах, оказывается пропорциональным частоте соударений

3. Возможность супербананового плато [47]. Хотя случай нулевого радиального электрического поля реализуется только при весьма специальных условиях, рассмотрение его представляет весьма определенный интерес. Особенность его заключается в том, что скорость вращения бананов вокруг магнитной оси определяется теперь средним значением диамагнитного дрейфа и существенно зависит от предельной энергии запертой частицы. Действительно, рассмотрим среднее значение диамагнитной скорости частицы (частота оборота банана как целого вокруг магнитной оси)

$$\Omega_j = \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = - \left\langle c \frac{\mu \nabla B \cdot \mathbf{B}}{e_j B_0^2 r} \right\rangle,$$

где усреднение проводится по бананообразной траектории частицы. При очень малых скоростях частица заперта на самом дне потенциальной ямы, где градиент магнитного поля направлен внутрь, а едва запертые частицы большую часть времени проводят вблизи точек поворота, где градиент магнитного поля направлен наружу (рис. 18). Поэтому частота оборота банана должна проходить при некотором промежуточном значении продольной энергии запертой частицы через нулевое значение (рис. 19). Именно частицы с такой

энергией дают основной вклад в коэффициент диффузии разреженной плазмы. Суммируя вклады от запертых частиц различных энергий, получаем

$$D_{\perp j} = \int \frac{v_j \varepsilon_h^{-1}}{v_j^2 \varepsilon_h^{-2} + |\Omega(v_{\parallel})|^2} \left(\frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{c j} r} \right)^2 f_j(v) d^3 v. \quad (2.34)$$

В области частых соударений запертых частиц с пролетными ($v_j \varepsilon_h^{-1} \gg \Omega_{\text{макс}}$) это выражение переходит в полученное ранее уравнение (2.27).

При более редких соударениях основной вклад в интеграл дают частицы со скоростями, удовлетворяющими уравнению $\Omega(v_{\parallel}) = 0$. Действительно, аппроксимируя первый множитель в подынтегральном выражении δ -функций, легко проводим интегрирование и получаем

$$D_{\perp j} = \left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{[d\Omega/dv_{\parallel}]} \left(\frac{cT_j \varepsilon_t}{e_j B_0 r} \right)^2 f_j(v_{\parallel} = 0) \approx \frac{\varepsilon_t^2}{\sqrt{\varepsilon_h}} \cdot \frac{cT_j}{e_j B_0}; \\ & \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_h} \right)^{3/2} \frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{c j} r^2} < \frac{v_j}{\varepsilon_h} < \frac{\mu B_0 \varepsilon_h}{m_j \omega_{c j} r^2}. \end{aligned} \right\} (2.35)$$

В плазме с очень редкими соударениями этот результат перестает быть справедливым. Действительно, в этом случае при вычислении коэффициента диффузии становится существенным детальное поведение функции $\Omega(v_{\parallel})$ вблизи нулевого значения. Расчеты показывают (см. § 2), что медленные бананы ($\Omega(v_{\parallel}) \approx 0$) оказываются запертыми в области слабого тороидального поля. Пользуясь аналогией со случаем запертых частиц, можно сразу написать коэффициент диффузии для запертых бананов с размерами орбиты $\Delta r \approx (\varepsilon_t/\varepsilon_h)^{1/2} r$ и эффективной частотой соударения $\nu_{\text{эфф}} = \nu/\varepsilon_t$:

$$D_{\perp j} \approx \sqrt{\varepsilon_t \varepsilon_h^{-1}} v_j r^2, \quad v_j \varepsilon_h^{-1} < \frac{\mu B_0 \varepsilon_h^{1/2} \varepsilon_t^{1/2}}{m_j \omega_{c j} r^2}.$$

§ 4. Коэффициенты переноса в тороидальном стеллараторе (расчеты частных случаев)

1. Банановое кинетическое уравнение. При вычислении коэффициентов переноса в тороидальном стеллараторе будем следовать работе [47] и воспользуемся кинетическим уравнением, описывающим усредненное движение бананов. Уравнение для бананов получается в результате усреднения обычного дрейфового кинетического уравнения по периоду быстрого движения запертых частиц в магнитном поле. Введем функцию распределения для бананов $\mathcal{F}(r, \langle \vartheta \rangle, \mu, \kappa^2, t)$. Она подчиняется кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial t} + \frac{d\langle \vartheta \rangle}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_j}{d\langle \vartheta \rangle} + \frac{dr}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial r} + \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial \kappa^2} \right] = \langle \text{St } \mathcal{F}_j \rangle, \quad (2.36)$$

где для $d\langle\vartheta\rangle/dt$ и dr/dt следует воспользоваться уравнениями дрейфа бананов (2.10) и (2.12), а

$$\frac{d\kappa^2}{dr} = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{m_j}{4\mu B_0 \varepsilon_n} \left[\frac{2}{m_j} (\mathcal{E} - e_j \Phi_0 - \mu B_0 (1 - \varepsilon_n)) \right]^{1/2} - \frac{c}{\alpha r B_0} \frac{d\Phi_0}{dr} \right\}.$$

Элемент фазового объема для бананов после интегрирования по периоду имеет вид

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{d\mu B_0}{m_j} d\oint v_{\parallel} \frac{d\varphi}{2\pi} &= \frac{d\mu B_0}{m_j} d \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} [2\varepsilon_n \mu B_0 m_j^{-1} (2\kappa^2 - 1 + \cos \varphi)]^{1/2} d\varphi = \\ &= 8 \sqrt{\varepsilon_n} \left(\frac{\mu B_0}{m_j} \right)^{1/2} d \frac{\mu B_0}{m_j} K(\kappa^2) d\kappa^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Интеграл столкновений в (2.36) для бананов можно получить из следующих соображений. При $\varepsilon_n \ll 1$ число бананов мало по сравнению с прелетными частицами. И, следовательно, интеграл столкновений можно линеаризовать, пренебрегая столкновениями бананов с бананами. Будем исходить из известного выражения для линеаризованного интеграла столкновений [54]

$$\begin{aligned} \text{St}(\mathcal{F}_j) &= \sum_{j'} \frac{2\pi e_j^2 e_{j'}^2 \ln \Lambda}{m_j} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left\{ \left(\eta_{j'} + \eta_{j'}' - \frac{\eta_{j'}}{2x_{j'}} \right) \times \right. \\ &\times \left[\frac{\delta_{\alpha, \beta}}{v} - \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{v^3} \right] + \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{v^3} \frac{\eta_{j'}}{x_{j'}} \left. \right\} \left(\frac{\partial f_j}{m_j \partial v_{\beta}} + \frac{2v_{\beta}}{m_j v_{Tj}^2} f_j^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $x_j = v^2/v_{Tj}^2$; $\eta_j = (2/\pi) \int_0^{x_j} \exp(-t) \sqrt{t} dt$. Это выражение можно

еще более упростить, если учесть, что распределение запертых частиц наиболее чувствительно к изменениям продольной скорости и поэтому в уравнении (2.38) можно пренебречь всеми остальными производными. Переходя, кроме того, к новым переменным μ , κ^2 , ϑ согласно соотношению, следующему из уравнений (2.3) и (2.6),

$$v_{\parallel} = \frac{c}{\alpha B_0 r} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} + 2\sigma \left[\mu B_0 \varepsilon_n m_j^{-1} \left(\kappa^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.39)$$

переписываем (2.38) в форме

$$\begin{aligned} \text{St}(\mathcal{F}_j) &= \frac{v_j}{\varepsilon_n} \sum_{j'} A(x_{j'}) x_j^{-3/2} \sigma \left[\kappa^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial \kappa^2} \left\{ \sigma \left[\kappa^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]^{1/2} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial \kappa^2} + 2x_j \varepsilon_n \mathcal{F}_j \right) + c_j \sqrt{2x_j \varepsilon_n} \mathcal{F}_j \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{где } c_j = \frac{c}{\alpha r B_0 v_{Tj}} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr}; \quad A(x_j) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\eta_j + \eta_j' - \frac{\eta_j}{2x_j} \right).$$

Наконец, чтобы получить отсюда интеграл соударений для бананов, это выражение следует усреднить по периоду быстрого дви-

жения запертых частиц в магнитном поле согласно правилу (2.11). В результате находим

$$\langle \text{St}(\mathcal{F})_j \rangle = \frac{v_j}{\varepsilon_h} \sum_{j'} A(x_{j'}) x_j^{-3/2} \frac{1}{K(x) \partial x^2} \int_0^{x^2} K(\sqrt{t}) dt \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + 2x_j \varepsilon_h \right) \mathcal{F}_j. \quad (2.40)$$

Следует иметь в виду, что банановое кинетическое уравнение (2.36) справедливо лишь тогда, когда за период быстрого движения запертая частица совсем не испытывает соударений:

$$v_{jj}/\varepsilon_h \ll 1/\tau_{hj} = \alpha v_{Tj} \sqrt{\varepsilon_h}. \quad (2.41)$$

В противном случае само понятие банан не имеет смысла.

2. Частные соударения. Рассмотрим сначала случай частых соударений, когда дрейфовые орбиты (бананы) не успевают совершить полный оборот по супербанановой траектории за время между двумя последовательными соударениями, т. е.

$$v_{jj}/\varepsilon_h > T_E^{-1} = \omega_0. \quad (2.42)$$

В этом случае характерный масштаб размешивания плазмы равен длине свободного пробега дрейфовой орбиты до столкновения:

$$\lambda_j \approx \frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} r} \left(\frac{v_{jj}}{\varepsilon_h} \right)^{-1}.$$

С уменьшением частоты столкновений этот масштаб размешивания растет и соответственно коэффициенты переноса уменьшаются. Для численного расчета последних ищем решение кинетического уравнения (2.36) в виде разложения по малости длины свободного пробега. В первом приближении функцию распределения частиц можно считать максвелловской*, а затем искать малую добавку к ней $\mathcal{F}_j^{(1)}$ из-за тороидальности, т. е.

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j^{(0)}(r, \mathcal{E}) + \mathcal{F}_j^{(1)}(r, \vartheta, \mu, x^2), \quad (2.43)$$

где

$$\mathcal{F}_j^{(0)} = \frac{n_{0j}(r)}{\pi^{3/2} v_{Tj}^3} \exp[-\mathcal{E}/T_j(r)].$$

Кинетическое уравнение для $\mathcal{F}_j^{(1)}$ принимает вид

$$\langle \text{St}(\mathcal{F}_j^{(1)}) \rangle = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{F}_j^{(0)}(r, \mathcal{E}). \quad (2.44)$$

Далее, в силу малости смещения пролетных частиц от магнитной поверхности поправка к максвелловской функции распределения

* Движение запертых частиц по банану приводит к искажению этой функции. Однако если длина свободного дрейфа λ_j больше толщины банана, то этим искажением можно пренебречь.

также оказывается значительно меньше, чем для бананов. Поэтому требование непрерывности функции распределения представляет собой условие обращения в нуль поправки $\mathcal{F}_j^{(1)}$ для бананов на границе их фазового объема:

$$\mathcal{F}_j^{(1)}|_{x^2=0} = 0. \quad (2.45)$$

Используя граничное условие, находим решение линеаризованного уравнения (2.44):

$$\mathcal{F}_j^{(1)} = -\frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} r} \cdot \frac{\varepsilon_h x_j^{3/2}}{\nu_{jj} \sum_{j'} A(x_{j'})} (\chi^2 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial r} \sin \theta.$$

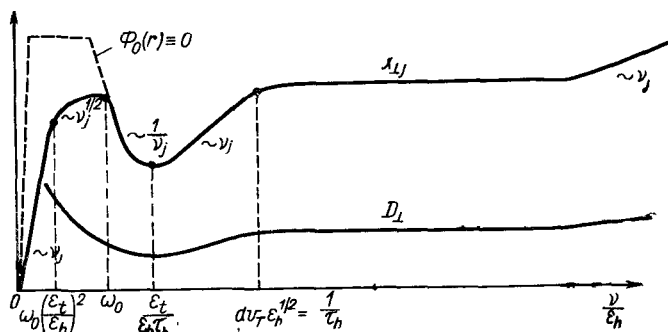


Рис. 20. Зависимость коэффициентов переноса от частоты соударений в тороидальном стеллараторе.

Домножая эту функцию на дрейфовую скорость банана dr/dt и интегрируя его по фазовому объему, находим поток плазмы поперек магнитного поля:

$$\begin{aligned} \langle n v_r \rangle^i &= -8 \sqrt{\varepsilon_h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\mu B_0}{m_j} \right)^{1/2} d\chi \frac{\mu B_0}{m_j} \int_0^1 d\chi^2 K(\chi) \mathcal{F}_j^{(1)} \frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} r} \sin \theta = \\ &= \frac{\sqrt{8\varepsilon_h \varepsilon_t^2}}{9\pi^{3/2}} \left(\frac{r_{cj} \nu_{Tj} \varepsilon_h}{\nu_{jj} r^2} \right) \frac{\nu_{Tj}^2}{\omega_{cj}} \int_0^\infty e^{-x_j} \left[\frac{dn}{dr} - \frac{2e_j n}{m_j \nu_{Tj}^2} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3}{2} - x_j \right) n \frac{d \ln T_j}{dr} \right] \frac{x_j^4 dx_j}{\sum_{j'} A(x_{j'})}, \\ &\varepsilon_t / \varepsilon_h \tau_h > \nu_{jj} / \varepsilon_h > \omega_0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Здесь левое неравенство на частоту соударений отражает тот факт, что прецессия бананов становится существенной только в достаточно редкой плазме, когда длина свободного тороидального дрейфа банана превышает толщину самого банана. В противном случае

размешивание плазмы в процессе быстрого движения запертой частицы по банану (см. гл. 2) дает больший вклад в коэффициенты переноса, чем слабая прецессия банана (рис. 20).

Оценивая входящий в уравнение (2.46) интеграл методом перевала (погрешность 10%), представляем ответ в стандартной форме:

$$\langle nv_r \rangle = -\frac{\alpha_e D_e}{T_e} \sum n T_j \left[\frac{d \ln n}{dr} - \left(\frac{3}{2} - \gamma_j \right) \frac{d \ln T_j}{dr} \right], \quad (2.47)$$

где $D_j = \frac{64 \sqrt{2}}{9\pi^2} \cdot \frac{v_{Tj} r_{cj} e_h}{v_{jj} r^2} D_{0j}$; $D_{0j} = \sqrt{\varepsilon_h} \varepsilon_i^2 \frac{c T_j}{e_j B_0}$;

$$\gamma_j = 5 \frac{\delta_{je} + (7/8) \eta(4) + \eta'(4)}{\delta_{je} + (9/10) \eta(5) + \eta'(5)} \approx 5; \quad \alpha_j = \frac{1}{\delta_{je} + (7/8) \eta(4) + \eta'(4)}.$$

Кроме того, мы считали, что температура ионов не превышает электронную, а точнее, $T_i/T_e < (m_i/m_e)^{1/7}$. В этом случае коэффициент диффузии ионов больше электронного и условие амбиполярности сводится к следующему уравнению для электрического поля:

$$\frac{d \ln n}{dr} - \frac{e}{T_i} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} - \left(\frac{3}{2} - \gamma_i \right) \frac{d \ln T_i}{dr} = 0. \quad (2.48)$$

Найденное отсюда значение электрического поля мы использовали при вычислении диффузионного потока электронов.

Поток тепла частиц находится аналогичным методом и имеет следующее значение:

$$q_j = \gamma_j \langle nv_r \rangle T_j - \alpha_j \kappa_j D_j n \frac{dT_j}{dr}; \quad \kappa_j \approx 5. \quad (2.49)$$

3. Редкие соударения. Получим приближенное решение бананового кинетического уравнения в пределах редких соударений, когда частота соударений заключена в интервале

$$(\varepsilon_i/\varepsilon_h)^2 \omega_0 < v_{jj}/\varepsilon_h < \omega_0. \quad (2.50)$$

На основании качественных соображений, изложенных в предыдущем параграфе, ищем решение типа пограничного слоя между запертыми и пролетными частицами. Поэтому коэффициент при старшей производной в уравнении (2.36) будем считать постоянным и равным его значению в центре пограничного слоя, что справедливо с логарифмической точностью. Кроме того, пренебрежем диамагнитным дрейфом по сравнению с электрическим. В результате это уравнение примет вид

$$-\frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} r} \sin \vartheta \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial \vartheta} = \frac{2v_{jj}}{\varepsilon_h \Lambda} \frac{\partial^2}{[\partial \kappa^2]} \mathcal{F}_j^{(1)} \equiv \langle \text{St} \mathcal{F}_j^{(1)} \rangle; \quad (2.51)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{8\omega_0 \varepsilon_h}{v_{jj}} \right).$$

Представляя далее зависимость поправки к максвелловской функции распределения от угловой координаты ϑ в явном виде

$$\mathcal{F}^{(1)} = X(\kappa^2) \cos \vartheta + Y(\kappa^2) \sin \vartheta, \quad (2.52)$$

сводим банановое кинетическое уравнение к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 X + \langle \text{St} Y \rangle &= -\frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{\mu_j \omega_{cj} r} \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial r}; \\ \langle \text{St} X \rangle - \omega_0 Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Решение типа пограничного слоя должно удовлетворять условию непрерывности на границе запертых частиц с пролетными

$$X|_{\kappa^2=1} = 0; \quad Y|_{\kappa^2=1} \equiv \frac{1}{\omega_0} \langle \text{St} X \rangle|_{\kappa^2=1} = 0 \quad (2.54)$$

и переходить в решение укороченного уравнения без учета соударений:

$$X|_{\kappa^2=0} = -\frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} r \omega_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial r}; \quad Y|_{\kappa^2=0} \equiv \frac{1}{\omega_0} \langle \text{St} X \rangle|_{\kappa^2=0} = 0. \quad (2.55)$$

Нетрудно увидеть, что этим условиям удовлетворяет следующее решение:

$$X(\kappa^2) = -\frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{m_j \omega_{cj} \omega_0 r} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial r} \left[1 - e^{-\kappa'^2/2\Delta_j} \cos \frac{\kappa'^2}{2\Delta_j} \right]; \quad (2.56)$$

$$Y(\kappa^2) = \frac{\mu B_0 \varepsilon_t}{2m_j \omega_{cj} \omega_0 r} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial r} e^{-\kappa'^2/2\Delta_j} \sin \frac{\kappa'^2}{2\Delta_j}; \quad (2.57)$$

$$\kappa'^2 = 1 - \kappa^2; \quad \Delta_j = \frac{2\nu_j}{\omega_0 \varepsilon_h \Lambda}.$$

Подставляя найденную диффузию в выражение для потока частиц и тепла (см. уравнение (2.46)), записываем последние в стандартной форме (2.47) со следующими коэффициентами:

$$D_j = \frac{15}{4} D_{0j} \left(\frac{\nu \Lambda}{\omega_0 \varepsilon_h} \right)^{1/2} \left(\frac{e_j r}{T_j} \cdot \frac{d\Phi_0}{dr} \right)^{-1} \quad (2.58)$$

при $\alpha_j = 1$, $\gamma_j = 7/2$, $\kappa = \kappa_j$.

Как и в предыдущем случае, диффузия становится амбиполярной только при определенном значении радиального электрического поля, которое можно найти из уравнения (2.48) с новыми коэффициентами.

4. Коэффициенты переноса плазмы в отсутствие электрического поля. В общем случае коэффициенты диффузии ионов и электронов

отличаются друг от друга и поэтому для того, чтобы диффузионные потоки были равны, необходимо радиальное электрическое поле. Сравнивая кривые зависимости от частоты соударений коэффициентов диффузии, вычисленных в предположении наличия радиального электрического поля, видим, что в изотермической плазме имеется только одна точка пересечения этих кривых (см. рис. 19). Однако в этой точке наши вычисления уже несправедливы, и мы должны преодолеть их в новом предположении:

$$\omega_0(r) \equiv 0. \quad (2.59)$$

При этом может оказаться, что вновь вычисленные коэффициенты диффузии одинаковы в широком интервале частот соударений, и, следовательно, условие отсутствия электрического поля выполнено не в точке, а во всем этом интервале.

Для изотермической плазмы ($T_e = T_i$), которую мы сейчас рассмотрим, равенство коэффициентов диффузии справедливо, если для ионов и для электронов одновременно выполнены неравенства

$$T_{ii}^{-1} \gg \nu_{jj}/\epsilon_h \gg (\epsilon_i/\epsilon_h) T_{ij}^{-1}.$$

Воспользовавшись определениями периодов оборота запертых (T_{ij}) и пролетных (T_{uj}) бананов (см. § 1), находим, что эти интервалы могут перекрываться при условии

$$(\epsilon_i/\epsilon_h)^{3/2} (\epsilon_h/\tau_B) > \nu_{ii}/\epsilon_h > \sqrt{m_e/m_i} (\epsilon_h/\tau_B); \quad \tau_B^{-1} = cT/eB_0 r^2. \quad (2.60)$$

В этом случае в малой окрестности «энергий» κ^2 запертых бананов в результате столкновений успевает установиться максвелловское распределение запертых частиц и поэтому полное решение бананового кинетического условия (2.36) можно искать в виде разложения по малому параметру ϵ_i/ϵ_h . Для этого выпишем функцию распределения \mathcal{F}_j в виде максвелловской функции $\mathcal{F}_j^{(0)}$ и малой добавки к ней $\mathcal{F}_j^{(1)}$ из-за тороидальности системы [см. уравнение (2.43)].

В уравнении (2.36) для $\mathcal{F}_j^{(1)}$ ограничимся τ -приближением для интеграла столкновений и подставим явные выражения для скоростей дрейфа бананов из уравнений (2.10) и (2.12). Полученное уравнение

$$-\frac{l\mu B_0}{m_j \omega_{cj} r^2} \epsilon_h \left(\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right) \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial \vartheta} + \frac{\nu_{jj}}{\epsilon_h} \mathcal{F}_j^{(1)} = \frac{\mu B_0 \epsilon_i}{m_j \omega_{cj} r} \sin \vartheta \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial r}$$

при выполнении условий (2.60) имеет следующее решение:

$$\mathcal{F}_j^{(1)} = \frac{r\epsilon_i}{l\epsilon_h} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_j^{(0)}}{\partial r} \left\{ P \frac{\cos \vartheta}{2E/K - 1} - \pi \sin \vartheta \delta \left(\frac{2E}{K} - 1 \right) \right\},$$

где символ P используется для обозначения главного значения сингулярного выражения.

$$D_j = \kappa_0^2 (1 - \kappa_0^2) K(\kappa_0) \frac{3\varepsilon_i^2}{l \sqrt{2\varepsilon_h}} \cdot \frac{v_{Tj}^2}{|\omega_{cj}|} = 1,38 \frac{\varepsilon_t}{l \sqrt{\varepsilon_h}} \cdot \frac{cT}{eB_0};$$

$$\alpha_j = 1; \quad \gamma_j = \kappa_j = 5/2.$$

Умножая функцию (2.60) на дрейфовую скорость банана dr/dt и интегрируя по фазовому объему запертых частиц [см. уравнение (2.46)], находим выражение для потока частиц и тепла в стандартной форме уравнения (3.47) с коэффициентами

В заключение следует заметить, что нагревая или охлаждая плазму в «Токамаке» и тем самым меняя частоту соударений частиц, мы не можем перейти в режим $\omega_0(r) \equiv 0$, описанный здесь. Действительно, перейти в режим можно лишь в точке $D_e \approx D_i$. Однако при выполнении условия $(\varepsilon_t/\varepsilon_h) < (m_e/m_i)^{1/3}$ [см. уравнение (2.60)] коэффициенты диффузии ионов и электронов сравниваются в области редких соударений в точке $v_{ii}/\varepsilon_h \omega_0 \approx [0,07 m_e/m_i \Lambda]^{1/3}$, которая не находится в интервале (2.60). Поэтому следует считать, что в указанном интервале могут осуществляться устойчиво оба режима диффузии.

§ 5. Диффузия в стеллараторе с разрушенными магнитными поверхностями

До сих пор речь шла о диффузии частиц плазмы в идеальных ловушках, т. е. в таких ловушках, где частицы в отсутствие соударений удерживаются бесконечно долго. Реальные ловушки можно считать идеальными лишь приближенно. Так, хорошо известно, что сгибание магнитного поля с винтовой симметрией в тор (торсидальный стелларатор) приводит к разрушению магнитных поверхностей вблизи сепаратрисы [55]. Силовая линия магнитного поля области, раздвигаясь вдоль таких силовых линий, попадает на стенку. В ловушках с внутренними проводниками частицы, двигающиеся вдоль некоторых силовых линий (а иногда и все), рано или поздно попадают на поддержки и также гибнут.

Оценим темп ухода плазмы из ловушек с такими изъянами. Рассмотрим сначала ловушку с разрушенными магнитными поверхностями. Поскольку тепловая скорость электронов намного больше таковой для ионов, то они покидают ловушку быстрее. Остающиеся в ловушке ионы удерживают электроны из-за электрического поля пространственного заряда [56]. Величину радиальной компоненты поля легко оценить из уравнения баланса электрической силы вдоль разрушенных силовых линий магнитного поля и продольной компоненты силы давления электронов:

$$b_{\perp} (en \nabla \Phi_0 - T_e \nabla n) / B_0 = 0, \quad (2.61)$$

где b_{\perp} — компонента магнитного поля поперек разрушенных поверхностей. При написании этого уравнения мы учли, что вследствие свободного движения электронов их температура быстро выравнивается по всему объему.

Темп ухода частиц из ловушки целиком определяется скоростью диффузии ионов [см. уравнения (2.47) и (2.58)]:

$$\langle nv_r \rangle = -\frac{D_i}{T_i} \left[\frac{dp}{dr} - n \left(\frac{5}{2} - \gamma_i \right) \frac{dT_i}{dr} \right]. \quad (2.62)$$

При этом, разумеется, мы считали, что диффузионная скорость заключена в интервале между ионной и электронной скоростями ухода вдоль силовых линий:

$$b_{\perp} nv_{Ti}/B_0 \ll \langle nv_r \rangle \ll b_{\perp} nv_{Te}/B_0. \quad (2.63)$$

§ 6. Процессы переноса в крутом стеллараторе

Рассмотрим, наконец, случай крутого стелларатора: $\varepsilon_t \gg \varepsilon_h$. В качестве модели используем здесь конфигурацию магнитного поля вблизи оси от двухзарядного стелларатора [43]:

$$B = B_0 (1 - \varepsilon_t \cos \vartheta) \mathbf{e}_z + \alpha r b \left\{ \cos 2(\vartheta - \alpha z) - \frac{b}{2B_0} \right\} \mathbf{e}_{\vartheta} + \\ + \alpha r b \sin 2(\vartheta - \alpha z) \mathbf{e}_r; \\ \varepsilon_t \gg \varepsilon_h = b(\alpha r)^2/2B_0; \quad b/B_0 \ll 1.$$

В этой модели магнитные поверхности сильно искажены, несмотря на то, что величина винтового поля меняется вдоль поверхности на величину меньшую, чем тороидальная добавка к основному магнитному полю B_0 . Для любого крутого стелларатора это справедливо по крайней мере вдали от оси и поэтому наши результаты следует применить именно к этой области. Необходимо различать два сорта запертых частиц. Одни из них имеют достаточно большую продольную скорость и свободно проходят сквозь локальные магнитные пробки, возникающие из-за быстрых колебаний силовых линий около ее среднего положения. Поэтому в процессе движения таких частиц происходит усреднение по периоду винтового поля и этот случай сводится к уже рассмотренному случаю аксиально симметричного поля со средним вращательным преобразованием (см. гл. 1): $\Theta = \alpha r b^2/2B_0^2$.

Однако существует также группа частиц с очень малой продольной скоростью $v_{\parallel} \ll v_{\perp} (bet/2B_0)^{1/2}$, которые оказываются запертыми в пределах периода винтового поля. Причина этого заключается в том, что силовая линия за период дважды пересекает поверхность постоянного магнитного поля, на которой достигается максимальное значение поля для данного участка силовой линии (на рис. 21 траектория запертой частицы изображена тонкой линией, а ее проекция на плоскость (r, ϑ) — жирной линией). Так же, как и раньше, разбиваем движение на быстрые колебания вдоль силовой линии и дрейф в тороидальном магнитном поле

$$r = \langle r \rangle + r_{\infty}, \quad \vartheta = \langle \vartheta \rangle + \vartheta_{\infty}, \quad (2.64)$$

где

$$\begin{aligned} r_{\infty} &= r (b/2B_0) \cos 2[\langle \vartheta \rangle - \alpha z]; \\ \vartheta_{\infty} &= (rb/2B_0) \sin 2[\langle \vartheta \rangle - \alpha z]. \end{aligned}$$

Тогда уравнение для быстрых колебаний сводится к стандартному виду:

$$daz/dt = \sigma \alpha [\varepsilon_t b B_0^{-1} (\kappa^2 - \sin^2 [az - \langle \vartheta \rangle / 2])]^{1/2}, \quad (2.65)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= (\mathcal{E} - e\Phi_0 - \mu B_0 [1 - \langle \varepsilon_t \rangle \cos \langle \vartheta \rangle] + \\ &+ \mu b \langle \varepsilon_t \rangle / 2) / \mu b \langle \varepsilon_t \rangle. \end{aligned}$$

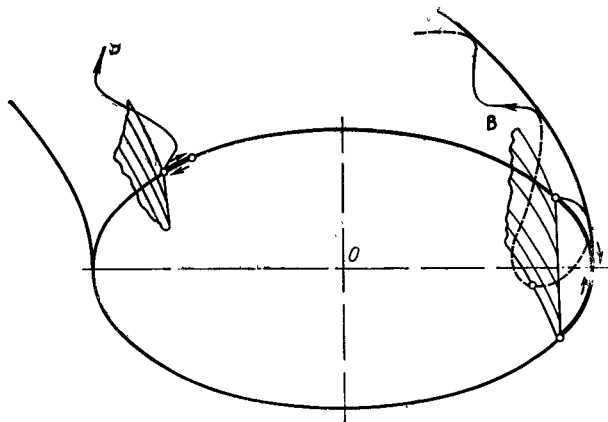


Рис. 21. Траектории запертых частиц в крutom стеллараторе.

Усредняя далее уравнение дрейфа в плоскости (r, ϑ) , нетрудно убедиться, что в процессе дрейфа сохраняется величина

$$e\Phi_0(r) - \mu B_0 \langle \varepsilon_t \rangle \cos \langle \vartheta \rangle - \mu b \langle \varepsilon_t \rangle [E(\kappa)/K(\kappa) - 1/2], \quad (2.66)$$

а следовательно, остается постоянной и κ^2 .

Уравнение (2.66) по существу представляет собой уравнение для проекции траектории частицы на плоскость (r, ϑ) . При наличии электрического поля последнее совпадает с траекторией частиц в случае некрутого стелларатора. Поэтому и коэффициенты переноса можно получить простой заменой:

$$v/\varepsilon_h \rightarrow (v/\varepsilon_t)(2B_0/b); \quad \delta n_t/n = \sqrt{\varepsilon_h} \rightarrow \sqrt{\varepsilon_t b/2B_0}. \quad (2.67)$$

В результате находим коэффициенты переноса в области частых соударений:

$$\begin{aligned} D_j &= \frac{r_{cj} v_{Tj} \varepsilon_t b}{2v_{jj} B_0 r^2} D_{0j}; \quad D_{0j} = \varepsilon_t^{5/2} \left(\frac{b}{2B_0} \right)^{1/2} \frac{cT_j}{e_j B_0}, \\ \omega_0 B_0/b &< v_{jj}/\varepsilon_t < \Theta v_{Tj} \sqrt{\varepsilon_t} (b/B_0)^{3/4}/r. \end{aligned} \quad (2.68)$$

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРОВ СОУДАРЕНИЙ

Решение интегральных уравнений для функции распределения частиц в неоднородном магнитном и электрических полях мы получаем методом разложения в ряд по обобщенным полиномам Лягерра. В соответствии с этим операторы соударений записываются в матричном виде.

Элементы матриц от операторов соударений частиц с тепловыми скоростями были вычислены С. И. Брагинским [57]. Для целей данного обзора достаточно знать следующие матрицы:

$$\alpha_{pq} = -\frac{m_e}{2T_e \nu_{ee}} \int v_{\parallel} L_p^{(3/2)} \{ \text{St}_{ee} (v_{\parallel} L_q^{(3/2)} f_{0e}, f_{0e}) + \text{St} (f_{0e}, v'_{\parallel} L_q f_{0e}) \} d^3 v;$$

$$\alpha'_{pq} = -\frac{m_e}{2T_e \nu_{ei}} \int v_{\parallel} L_p^{(3/2)} \text{St}_{ei} (v_{\parallel} L_q^{(3/2)} f_{0e}, f_{0i}) d^3 v;$$

$$\alpha''_{pq} = -\frac{m_i}{2T_e \nu_{ei}} \int v_{\parallel} L_p^{(3/2)} \text{St}_{ei} (f_{0e}, v'_{\parallel} L_q f_{0i}) d^3 v.$$

Первые девять элементов каждой из этих матриц есть

$$(\alpha) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 45/16 \end{pmatrix}; \quad (\alpha') = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 15/8 \\ 3/2 & 13/4 & 69/16 \\ 15/8 & 69/16 & 433/64 \end{pmatrix};$$

$$\alpha''_{pq} = 2\alpha'_{p0} \delta_{q0}/3.$$

Операторы соударений запертых и медленнопролетных частиц с тепловыми определены несколько иначе

$$V \bar{\varepsilon} \alpha_{pq}^{ij, u j'} = -\frac{m_j}{T_j \nu_{jj'}} \int v_{\parallel} L_p^{(3/2)} \text{St}_{jj'} \times$$

$$\times \left\{ \sigma v \sqrt{2\varepsilon} \left(\left[\chi^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]^{1/2} - \frac{\pi}{4} \int_1^{\chi^2} \frac{dt}{E\sqrt{t}} \right) L_q^{(3/2)} f_{0j}, f_{0j'} \right\} d^3 v;$$

$$V \bar{\varepsilon} \alpha_{pq}^{uj, t j'} = -\frac{m_j}{T_j \nu_{jj'}} \int v_{\parallel} L_p^{(3/2)} \text{St}_{jj'} \times$$

$$\times \left\{ f_{0j}, \sigma' v' \sqrt{2\varepsilon} \left(\left[\chi^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]^{1/2} - \frac{\pi}{4} \int_1^{\chi^2} \frac{dt}{E\sqrt{t}} \right) L_q^{(3/2)} f_{0j'} \right\} d^3 v.$$

Запишем первые девять матричных элементов, необходимых для получения результатов § 4—8 первой главы

$$(\alpha^{ij, u j}) = \alpha_{jj} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} - \gamma & \frac{35}{8} - \frac{19\gamma}{8} \\ \frac{5}{2} - \gamma & \frac{25}{4} - \frac{11\gamma}{4} & \frac{175}{16} - \frac{193\gamma}{32} \\ \frac{35}{8} - \frac{19\gamma}{8} & \frac{175}{16} - \frac{193\gamma}{32} & \frac{1225}{64} - \frac{2893\gamma}{256} \end{pmatrix};$$

$$\alpha_{pq}^{te, ui} = \alpha_{ei} \alpha'_{pq};$$

$$\alpha^{ul, ii} = \alpha_{jj} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} - \gamma & \frac{35}{8} - \frac{19\gamma}{8} \\ 3\gamma - 1 & \frac{27\gamma}{4} - \frac{15}{2} & \frac{357\gamma}{32} - \frac{105}{8} \\ \frac{5\gamma}{8} & \frac{35\gamma}{32} & \frac{373\gamma}{256} \end{pmatrix};$$

$$\alpha_{pq}^{ue, ii} = (2m_e/3m_i) \alpha_{ej} \alpha'_{p0}.$$

Наконец, нам следует привести выражение для матричных элементов от квазилинейного соударительного члена, описывающего резонансное взаимодействие частиц с потенциальным силовым полем:

$$e^2 \alpha_{pq}^{QL} = -\frac{m_e}{T_e} \tau_e^{QL} \int v_{\parallel} L_p^{(3/2)} \text{St}_{QL} \{v_{\parallel} L_q^{(3/2)} f_{0e}\} d^3v,$$

где квазилинейный интеграл соударений на однородных функциях определен следующим образом [см. уравнение (1.52)]

$$\text{St}_{QL} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \cdot \frac{\pi e^2}{2r} \left(\frac{\mu B_{\Phi}}{m_e} \right)^2 \delta(\Theta v_{\parallel} \mp v_0) \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} f_e,$$

а время $\tau_e^{QL} = \pi^{1/2} v_{Te} \Theta/r$ имеет порядок величины времени оборота тепловых частиц вокруг малой оси тора.

Несложные вычисления дают

$$(\alpha^{QL}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{4} & -\frac{23}{16} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{23}{16} & \frac{433}{64} \end{pmatrix}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

КРИТЕРИИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИССИПАТИВНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ЗАПЕРТЫХ ЧАСТИЦ

Возмущения, накладываемые на равновесное состояние плазмы, выберем в виде электростатических колебаний с потенциалом

$$\varphi^{(l)}(r, \mathbf{t}) = \varphi^{(l)}(\Phi) \exp(-i\alpha \mathbf{t} + i l \xi), \quad l=0, \pm 1, \pm 2. \quad (\text{П2.1})$$

1. Рассмотрим сначала плазму с однородной температурой частиц. В этом случае в плазме возбуждаются дрейфовые колебания запертых ионов с частотой, много меньшей частоты обращения запертых ионов по банану

$$\omega \ll \tau_{bi}^{-1} = v_{Ti} \Theta \sqrt{2\varepsilon}/r. \quad (\text{П2.2})$$

Для описания таких колебаний можно воспользоваться линеаризованным банановым кинетическим уравнением (2.36), которое в присутствии возмущенного электрического поля принимает вид

$$(\omega - l \langle v_{\parallel} \rangle / R) \Delta f_{ij}^{(1)} - i \langle \text{St} \Delta f_{ij}^{(1)} \rangle =$$

$$= (e_j f_{ij}^{(0)} / T_j) \{ \omega - (lq/r) v_0 - (lq/r) v_*^i \} \langle \varphi(\theta) \exp(-ilq\theta) \rangle,$$

$$v_*^i = \frac{cT_j}{e_j B_0 n_{0j}} \cdot \frac{\partial n_{0j}}{\partial r}, \quad (\text{П2.3})$$

где усреднение по углу θ проводится согласно уравнению (2.11), а выражение для средней скорости тороидального дрейфа и соударительного члена описываются соответственно уравнениями (1.22) и (2.40). Нас будет интересно рассмотреть случай частых электронных и редких ионных соударений

$$v_e / \varepsilon \gg \omega \gg v_j / \varepsilon. \quad (\text{П2.4})$$

Решение уравнения для ионов с подходящими граничными условиями (2.54) и (2.55) дается формулами (2.56), (2.57), которые в рассматриваемом случае принимают вид [60]

$$\Delta f_{ii}^{(1)} = X + iY$$

$$X = \frac{ef_{ii}^{(0)}}{T_i} \frac{\omega - lq(v_0 + v_*^i)/r}{\omega} \exp(ilq\theta) \langle \varphi(\theta) \exp(-ilq\theta) \rangle \times \\ \times [1 - \exp(-\kappa'^2/2\Delta) \cos(\kappa'^2/2\Delta)]; \quad (\text{П2.5})$$

$$Y = \frac{ef_{ii}^{(0)}}{T_i} \frac{\omega - lq(v_0 + v_*^i)/r}{\omega} \exp(ilq\theta) \langle \varphi(\theta) \exp(-ilq\theta) \rangle \times \\ \times \exp(-\kappa'^2/2\Delta) \sin(\kappa'^2/2\Delta); \\ \kappa'^2 = 1 - \kappa^2; \Delta^2 = 2v_{ii} A_i / \omega \varepsilon \ln \Lambda; \quad (\text{П2.6})$$

$$\ln \Lambda = \ln \sqrt{8\omega \varepsilon / v_{ii} A_i}.$$

В уравнении для электронов соударения играют доминирующую роль. Учитывая, что распределение пролетных электронов в поле медленной волны (с фазовой скоростью, много меньше тепловой скорости электронов) является бальцмановским, решаем уравнение (П2.1) при граничных условиях

$$\Delta f_{ie}^{(1)} |_{\kappa^2=1} = 0, \quad \partial \Delta f_{ie}^{(1)} / \partial \kappa^2 |_{\kappa^2=0} = 0. \quad (\text{П2.7})$$

В результате находим

$$f_{ie}^{(1)} = \frac{ef_{ie}^{(0)}}{T_e} \left\{ \varphi^{(1)}(\theta) - \frac{\omega - \frac{lq}{r}(v_0 + v_*^e)}{iv_e A_e(x)} \varepsilon \exp(ilq\theta) \right\} \times \\ \times \int_{\kappa^2}^1 \frac{d\alpha^2}{2[E(\alpha) - (1 - \alpha^2)K(\alpha)]} \int_0^{\alpha^2} d\kappa^2 \langle \exp(-ilq\theta) \varphi(\theta) \rangle. \quad (\text{П2.8})$$

Подставляя найденное решение (П2.5)–(П2.6) и (П2.8) в уравнение квазинейтральности и разлагая, кроме того, функцию $\varphi^{(1)}(\theta)$ в ряд Фурье

$$\varphi^{(1)}(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m \exp(im\theta),$$

получаем уравнение для коэффициентов

$$\sum_{s'} \left\{ \delta_{ss'} - \frac{\omega_{*t}^e}{\omega'} \left(H_{ss'} - i \frac{\langle \Delta \rangle}{2} \ln \Lambda I_{ss'} \right) - i\omega_{*t}^e \varepsilon \langle v_e^{-1} \rangle v_{ss'}^{(1)} - \right.$$

$$-i2 \sqrt{\pi} \omega_{*t}^e \omega^2 \tau_{bi}^3 |s'|^{-3} A_{ss'} \left. \right\} \varphi_{s'} = 0, \quad (\text{П}2.9)$$

где

$$\omega' = \omega - lq v_0/r, \quad \omega_{*t}^l = \frac{2\sqrt{2\varepsilon}}{\pi} (v_*' \nabla v_0) (1 \mp T_e/T_i)^{-1};$$

$$s = m - lq; \quad \langle v_e^{-1} \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-x) \frac{\sqrt{x} dx}{v_e A_e(x)} \approx 1, 2 v_{ee}^{-1};$$

$$v_{ss'}^{(1)} = \frac{\pi^2}{16} \int_0^1 d\kappa^2 \left[\int_0^{\kappa^2} P_{s-1/2}(1-2t) dt \right] \frac{1}{E - (1-\kappa^2)K} \left[\int_0^{\kappa^2} P_{s'-1/2}(1-2t) dt \right];$$

$$H_{ss'} = \frac{\pi^2}{8} \int_0^1 \frac{dt}{K(\sqrt{t})} P_{s-1/2}(1-2t) P_{s'-1/2}(1-2t);$$

$$A_{ss'} = \frac{\pi^2}{8} \int_1^\infty \frac{d\kappa^2}{\kappa^4} K^2 \left(\frac{1}{\kappa} \right) \Pi_s(\kappa) \Pi_{s'}(\kappa) f_i^{(0)} \left(\frac{\omega' \tau_{bi} K \left(\frac{1}{\kappa} \right)}{|s'| \kappa} \right);$$

$$I_{ss'} = \frac{\pi}{4} \lim_{t \rightarrow 1} [P_{s-1/2}(1-2t) P_{s'-1/2}(1-2t) / K^2(t)];$$

$$P_{s-1/2}(1-2\kappa^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \frac{\cos 2s\alpha}{\sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \alpha}} d\alpha; \quad \Pi_s(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2s\alpha}{\sqrt{1 - \kappa^{-2} \sin^2 \alpha}} d\alpha.$$

Здесь последний член учитывает резонансное взаимодействие пролетных ионов с медленными колебаниями, причем фазовая скорость длинноволновых колебаний оказывается настолько малой, что в резонанс с волной попадает лишь небольшое число медленных ионов со скоростями $v \sim \omega \tau_{bi} v_{Ti} / |s|$. Ограничившись при решении уравнения (П2.9) системой уравнений третьего порядка (для $\Phi_0, \pm 1$) и воспользовавшись численными значениями матричных элементов для $m = m^{(0)} \approx lq, m = m^{(0)} \pm 1$

$$H_{00} = 1, \quad H_{01} = 1/3, \quad H_{11} = 0,28, \quad I_{00} = 1; \quad I_{01} = -1/2; \quad I_{11} = 1/4; \\ v_{00} = 4/9, \quad v_{01} \approx 0,142, \quad v_{11} \approx 0,132; \quad A_{00} \approx 9,1; \quad A_{01} \approx 1,9; \quad A_{11} = 0,68,$$

находим собственное значение частоты колебаний

$$\omega = 1, 3 \omega_{*t}^e \left\{ 1 \mp i \left[0,96 \frac{\omega_{*t}^e}{v_e} \varepsilon - 1,8 \frac{\omega_{*t}^e \tau_{bi}^3}{|s^{(0)}|^3} - \left(\frac{v_{ii}}{2\omega_{*t}^e \varepsilon \ln \Lambda} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (\text{П}2.10)$$

Мы видим, что затухание Ландау оказывает наиболее слабое стабилизирующее действие на длинноволновые колебания, которые, однако, подавляются слабыми соударениями запертых ионов. Критерий стабилизации всех мод колебаний выглядит следующим образом:

$$v_i \tau_i / \varepsilon > 0,4 (m_e/m_i)^{7/18} (T_e/T_i)^{7/6} |m^{(0)} - lq| \ln^2 / 9 \Lambda. \quad (\text{П}2.11)$$

Таким образом, совместное действие затухания Ландау на пролетных ионах [59] и ион-ионных соударений [60] способно стабилизировать неустойчивость при не слишком малой плотности плазмы.

2. В системах типа «Токамак» касание плазменного шнура стенок лайнера или диафрагмы приводит к появлению градиента температуры ионов и элект-

ронов. В такой плазме обычно дрейфовые колебания пролетных нонов могут раскачиваться из-за взаимодействия с запертыми электронами [58]. Дисперсионное уравнение для дрейфовых колебаний хорошо известно [61]

$$0 = r_{ci}^2 \frac{d^2 \Phi_0}{dx^2} - \left\{ \left[1 - \frac{\omega_e^*}{\omega} - \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{r_{Ti}}{r_n} \right) \frac{m^2 \Theta'^2 v_{Ti}^2}{2r^2 \omega^2} \right] x^2 \right\} \times \\ \times \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{r_{Ti}}{r_n} \right)^{-1} - i \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\pi} \left[\alpha \left\langle \frac{(x-3/2)x^{3/2}}{1+\eta+\eta'-\eta/2x} \right\rangle v_{00}^{(1)} - \right. \\ \left. - \alpha^3 \left\langle \frac{x^{9/2}(x-3/2)}{(1+\eta+\eta'-\eta/2x)^3} \right\rangle v_{00}^{(3)} \right] \frac{r_{Te}}{r_n} \Phi_0, \quad (\text{П2.12})$$

где $\Theta' = (r/q^2 R) (dq/dr)$ — величина shear'a* в системах типа «Токамак»,
 $r_{Tj}^{-1} = \frac{d \ln T_j}{dr}$; $r_n^{-1} = \frac{d \ln n}{dr}$;

$$\alpha = \frac{4\omega_e^* \varepsilon}{3\sqrt{\pi} v_{ee}}, \quad v_{00}^{(3)} \approx 0, 1.$$

Для простоты мы здесь сохранили лишь первый член разложения потенциала в ряд Фурье и получили следующий член разложения функции распределения запертых электронов по параметру $\alpha \ll 1$. Хотя представленные здесь два члена разложения относятся к асимптотическому ряду, учет их позволяет получить разумную оценку сверху на инкремент неустойчивости

$$\gamma < 0, 1 \sqrt{\varepsilon} \left| \omega_e^* r_{Te} / r_{ne} \right|. \quad (\text{П2.13})$$

Наличие shear'a оказывает стабилизирующее влияние на неустойчивость. Наиболее трудно подавать решение в виде убегающих в обе стороны волновых возмущений. Критерий стабилизации для них можно получить, сравнивая притоки энергии из-за неустойчивости и оттока ее на бесконечность [62].

В результате находим

$$|(\varepsilon/q) (d \ln q / d \ln T_e)| > 0, 1 \sqrt{\varepsilon} T_e / T_e \left(1 + r_{Ti} / r_n \right) T_i. \quad (\text{П2.14})$$

Выполнить это условие для реальных токамаков довольно просто.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1960.
2. Guthrie A., Wakerling R. The Characteristic of Electrical Discharge in Magnetic Field. N. Y., 1949.
3. Спитцер Л. Физика полностью ионизированного газа. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
4. Pfirsch D., Schlüter A. Max-Planck Institute, München, Rept. MPI/PA/62, 1962.
5. Брагинский С. И. В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, с. 183.
6. Галеев А. А. «Письма ЖЭТФ», 1969, 10, 353.
7. Stringer T. Phys. Rev. Lett., 1969, 22, 770.
8. Rosenbluth M. N., Taylor J. B. Phys. Rev. Lett., 1969, 23, 367.

* shear — перекрещенность силовых линий магнитного поля.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЫХОДА ЦИКЛОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Б. А. Трубников

В данной статье проведен анализ численных расчетов по циклотронному излучению плазмы и предложена «универсальная» аппроксимационная формула, описывающая излучение плоского слоя, цилиндра и тора.

В энергетическом балансе будущих термоядерных установок довольно важную роль будет играть циклотронное излучение. Для одиночного электрона в магнитном поле B энергия убывает по закону

$$-d\varepsilon_{\perp}/dt = I = 2e^2 \dot{v}^2/3c^3 = 2e^2 \omega_B^2 v_{\perp}^2/3c^3 = \varepsilon_{\perp}/\tau \quad (1)$$

или $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{\perp}(0) \exp(-t/\tau)$, где $\omega_B = eB/mc$, а $\tau = 3 mc^3/4e^2 \omega_B^2 = 250/B^2$ сек (B в кГс) — время высвечивания ($\approx 0,1$ сек при $B = 50$ кГс). При отсутствии поглощения n_e электронов в единице объема излучают энергию

$$Q_0 = n_e \langle I \rangle = n_e \frac{2e^2}{3c^3} \omega_B^2 \langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{\omega_0^2 \omega_B^2}{3\pi c^3} T; \quad \left(\omega_0^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m} \right) \quad (2)$$

и это излучение, как правило, превышает выделение энергии в результате термоядерных реакций. Однако в действительности значительная доля излучения (2) поглощается в самой плазме.

В работе [1] был введен удобный для расчетов «фактор Φ » — интегральный коэффициент выхода, показывающий, какая доля суммарного циклотронного излучения электронов $W_0 = Q_0 V$ реально выходит наружу из сгустка плазмы с объемом V . Для плоского слоя плазмы толщиной a (рис. 1) коэффициент выхода зависит лишь от двух безразмерных и не зависящих друг от друга параметров:

$$\Phi = \Phi(p_a, t), \quad p_a = a\omega_0^2/c\omega_B, \quad t = T/mc^2, \quad (3)$$

и в наиболее интересной для «термоядерной» проблемы области их значений величину Φ целесообразно выражать в процентах. В случае произвольной конфигурации плазменного сгустка (слоя, цилиндра или тора) величина Φ равна

$$\Phi = \frac{1}{Q_0 V} \oint dS \int_0^{\infty} d\omega \int_{\Omega \rightarrow} d\Omega \cos(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N}) \mathcal{I}\omega(\theta), \quad (4)$$

где $\oint dS$ означает интегрирование по всей плазменной поверхности (для слоя — двусторонней, см. рис. 1), $\int d\Omega$ со значком $|\Theta$ — есть интеграл по полусфере телесных углов, $(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N})$ — угол между выходящим лучом $\hbar \mathbf{k}$ и нормалью к поверхности \mathbf{N} , а $\mathcal{J}_\omega(\theta)$ — спектральный поток излучения с единицы поверхности, вычисленный с учетом поглощения и наличия отражателей на границе плазмы. Поскольку Φ зависит от формы сгустка, иногда для краткости будем называть его просто *форм-фактором* (для излучения).

Перечислим пять основных свойств коэффициента выхода Φ , которые придают ему некий «универсальный» характер и делают весьма удобным для проведения конкретных расчетов.

1. Φ — *безразмерный* коэффициент, и поскольку $\Phi < 1$, его удобно выражать в процентах.

2. Цилиндр радиусом a и слой толщиной a обладают *одинаковыми* форм-факторами Φ .

3. Φ — это *монотонная* функция двух безразмерных параметров $t = T/mc^2$ и $p_a = a\omega_0^2/c\omega_B$; Φ возрастает при увеличении температуры T и падает при увеличении параметра p_a (толщины или плотности).

4. Учет *отражателей* с коэффициентом отражения r , расположенных на границе плазмы, эквивалентен замене $a \rightarrow a/(1 - r)$, осуществляемой именно в аргументе форм-фактора Φ (а не в полном излучении, например).

5. Учет *неоднородности* магнитного поля в торе эквивалентен для форм-фактора замене аргумента $a \rightarrow a/(1 + \chi)$, где χ — параметр неоднородности, который для тора равен

$$\chi = \frac{2a}{R} / \sqrt{2\pi t}.$$

Эти свойства доказываются в приложениях. Заметим, что хотя величину Φ можно подсчитать лишь численными методами, однако поскольку $\Phi = W_{\text{real}}/W_0$, причем $W_0 \sim V \sim a$, то для предельных случаев имеем

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \text{при } a \rightarrow 0; \\ \sim 1/a & \text{при } a \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Последнее вытекает из того, что при $a \rightarrow \infty$ истинное излучение W_{real} должно быть чисто поверхностным и не должно зависеть от толщины a .

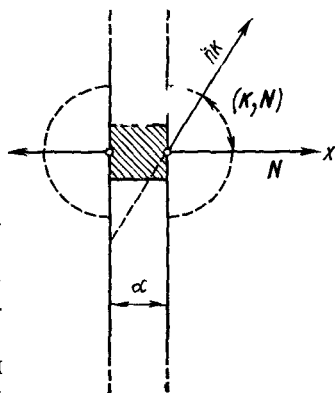


Рис. 1. Излучение плоского слоя плазмы.

Учитывая предельные случаи (5), можно для наиболее интересной области промежуточных значений параметров ожидать «промежуточной» зависимости $\Phi \sim 1/\sqrt{a}$.

В настоящее время опубликовано три цикла [1—3] численных расчетов магнито-тормозного излучения термоядерной плазмы. Проведенный в приложениях анализ этих данных показывает, что с достаточной точностью ($\sim 50\%$) для всей области температур $5 < T < 100$ кэВ, представляющих интерес для термоядерной проблемы, для коэффициента выхода можно пользоваться простейшей аппроксимационной формулой

$$\Phi \approx 60t^{3/2}/\sqrt{\rho_a}, \quad (6)$$

в которой заменой $a \rightarrow a/(1-r)(1+\chi)$ можно учесть наличие отражателей и неоднородность магнитного поля в торе. Причем оказалось, что для согласования «универсальной» формулы (6) с данными Розенблюта [3], вычислявшим излучение в тороидальном Токамаке, требуется некоторое уточнение расчетов Розенблюта (см. приложения).

Заметим, что выделение термоядерной энергии в реакции на смеси 1 часть дейтерия и 1 часть трития будет превышать циклотронное излучение, если коэффициент выхода $\Phi \lesssim 8\beta_e$, где $\beta_e = 8\pi r_e/B^2$. Это, по-видимому, достижимо даже без применения отражателей. Для реакторов на чистом дейтерии циклотронное излучение является более опасным фактором и оно делает их менее перспективными.

Автор признателен Л. А. Арцимовичу, М. А. Леонтовичу, В. Д. Шафранову, Л. С. Соловьеву и В. С. Муховатову за ценные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМ-ФАКТОРОВ СЛОЯ И ЦИЛИНДРА И УЧЕТ ОТРАЖАТЕЛЕЙ

При максвелловском распределении электронов спектральный поток, выходящий с единицы поверхности плазмы, равен ($i = 1, 2$ — две поляризации)

$$\mathcal{J}_\omega(\theta) = \mathcal{J}_{R,J}^0 \sum_{i=1,2} (1 - \exp(-\alpha_i s)), \quad (П1.1)$$

где $\mathcal{J}_{R,J} = \omega^2 T / 8\pi^3 c^2$ — поток Рэлея—Джинса; $\alpha_{1,2}$ — коэффициенты поглощения; s — путь луча в плазме. Из рис. 2 видно, что $\cos(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N}) = \sin \theta \cos \beta$, и путь луча в слое и цилиндре соответственно равен

$$s_{\text{сл}} = a / \cos(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N}) = a / \sin[\theta \cos \beta]; \quad s_{\text{ц}} = s_{\perp} / \sin \theta = 2a \cos \beta / \sin \theta. \quad (П1.2)$$

Подставляя поток (П1.1) в формулу (4), имеем

$$\Phi_{\text{сл.ц}} = \frac{3/4\pi^2}{\rho_a} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_B^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \sum_i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1 - \exp(-\alpha_i s_{\text{сл.ц}})) \cos \beta d\beta. \quad (П1.3)$$

При этом мы считали поле однородным и учли, что как для слоя, так и для цилиндра отношение поверхности (для слоя — двусторонней) к объему равно $V^{-1} \oint dS = 2/a$. Коэффициенты поглощения $\alpha_{1,2}(\theta)$ зависят, очевидно, лишь от угла между лучом \vec{hk} и полем \mathbf{B} , которое направлено по оси z . Обозначая $A = \alpha_i(\theta a/\sin\theta)$ и учитывая (П1.2), рассматриваем в (П1.3) последний интеграл

$$\mathcal{I}_{\text{сл.ц}}(A) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ 1 - \exp \left[-A \left(\frac{1}{\cos\beta}, \text{ или } 2 \cos\beta \right) \right] \right\} \cos\beta d\beta. \quad (\text{П1.4})$$

При $A \ll 1$ экспоненту можно разложить, взяв первый не исчезающий член ($1 - \exp(-\alpha s) \rightarrow \alpha s$), а при $A \gg 1$ можно, вообще, пренебречь экспонентой, тогда как для слоя, так и для цилиндра находим

$$\mathcal{I}_{\text{сл.ц}}(A) = 2 \begin{cases} \pi A/2 & \text{при } A \ll 1, \\ 1 & \text{при } A \gg 1 \end{cases} \approx 2 [1 - \exp(-\pi A/2)]. \quad (\text{П1.5})$$

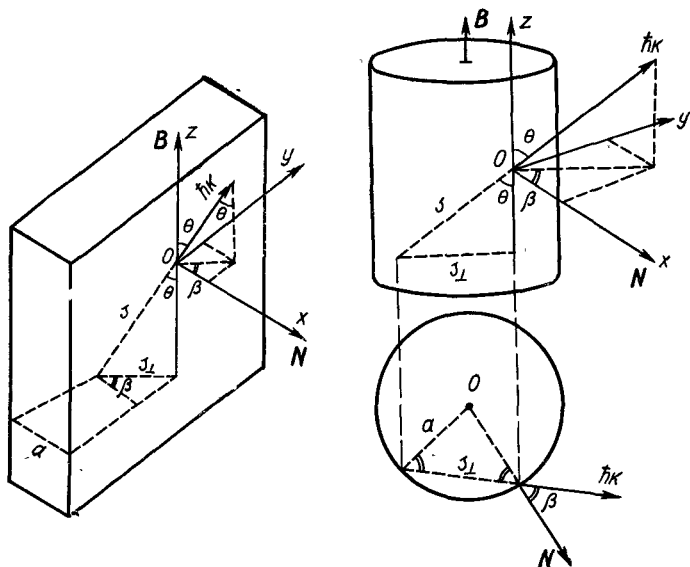


Рис. 2. Плоский слой плазмы толщиной d и плазменный цилиндр радиуса a .

Поскольку в промежуточной области ($A \sim 1$) функции, определяемые интегралами (П1.4), являются плавными и монотонно изменяются от одного предела (при $A \ll 1$) до другого ($A \gg 1$), то последнее приближенное объединение двух предельных случаев в (П1.5) обладает точностью около 20%. Именно с этой точностью форм-факторы слоя и цилиндра можно считать одинаковыми и равными

$$\Phi(p_a, t) = \frac{3}{2\pi^2 p_a} \int_0^\infty v^2 dv \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \sum_{i=1,2} \left[1 - \exp \left(-\frac{\pi a \alpha_i(\theta)}{2 \sin \theta} \right) \right], \quad (\text{П1.6})$$

где $v = \omega/\omega_B$, $p_a = a\omega_B^2/c\omega_B$. Поскольку $\alpha_{1,2}(\omega, \theta)$ имеют довольно сложный вид, погрешность всех численных расчетов вряд ли может превысить принятую оценку (примерно 20%).

Рассмотрим случай, когда на границах слоя или цилиндра имеются отражатели с коэффициентом отражения r . Из рис. 3 видно, что в этом случае выходящий поток излучения равен $\mathcal{J}_{\text{out}} = (1-r)\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_2 = r\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1$, причем

$$\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 \cdot \exp(-\alpha s) + \mathcal{J}_{R,J}^0 [1 - \exp(-\alpha s)]. \quad (\text{П}1.7)$$

Из этих соотношений найдем

$$\mathcal{J}_{\text{out}} = \mathcal{J}_{R,J}^0 (1 - \exp(-\alpha s))(1-r)/(1-r \exp(-\alpha s)). \quad (\text{П}1.8)$$

Последняя дробь учитывает наличие отражателей. Далее воспользуемся приближенной эквивалентностью двух функций

$$1 - \exp(-x) \approx x/(1+x), \quad (\text{П}1.9)$$

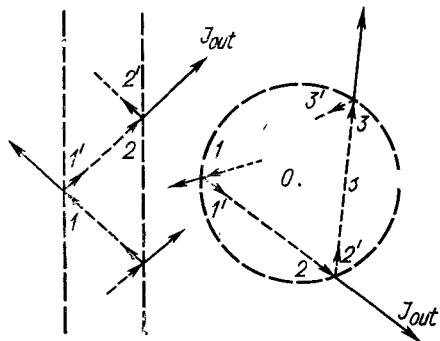


Рис. 3. Ход лучей в плоском слое и в цилиндре при наличии отражателей на границе плазмы:

1, 2, 3 — падающие лучи; 1' 2' 3' — отраженные.

предельные значения которых совпадают как при $x \ll 1$, так и при $x \gg 1$, а наибольшее отличие составляет 20% (при $x = 2,5$), что соответствует принятой точности расчетов.

Тогда приближенно находим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{out}} &= \mathcal{J}_{R,J}^0 / \left(\frac{1}{1 - \exp(-\alpha s)} + \frac{r}{1-r} \right) \approx \\ &\approx \mathcal{J}_{R,J}^0 / \left(\frac{1 + \alpha s}{\alpha s} + \frac{r}{1-r} \right) = (1-r) \mathcal{J}_{R,J}^0 \left(\frac{\alpha s}{1-r} \right) / \left(1 + \frac{\alpha s}{1-r} \right) \approx \\ &\approx (1-r) \mathcal{J}_{R,J}^0 \{ 1 - \exp[-\alpha s/(1-r)] \}, \end{aligned} \quad (\text{П}1.10)$$

причем первый множитель $(1-r)$ можно отнести к параметру a (радиус цилиндра или толщина слоя), стоящему в знаменателе форм-фактора (П1.6). Таким образом, именно для форм-фактора учет отражателей эквивалентен замене аргумента $a \rightarrow a/(1-r)$. В соответствии с универсальной аппроксимационной формулой (6) $\Phi(a) \sim 1/\sqrt{a}$, и поэтому

$$\Phi_r(a) = \Phi_0(a/(1-r)) \approx \sqrt{1-r} \Phi_0(a). \quad (\text{П}1.11)$$

Таким же образом, очевидно, отражатели будут ослаблять и полное излучение плазмы

$$W_r = V Q_0 \Phi_r \approx \sqrt{1-r} (W)_{r=0}. \quad (\text{П}1.12)$$

Например, при коэффициенте отражения $r = 90\% = 0,9$ полное излучение будет примерно в три раза меньше, чем без отражателей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

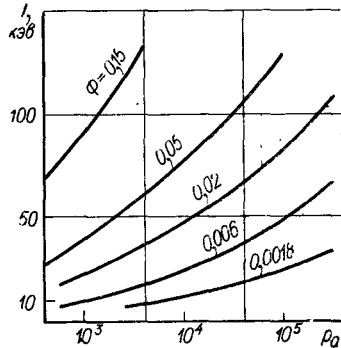
Коэффициент выхода Φ для слоя был впервые введен и численно подсчитан в работе [1], где для него были получены кривые $\Phi(p_a, T) = \text{const}$ (рис. 4). На рис. 5 те же зависимости показаны сплошными кривыми [1], в то время как пунктирные кривые соответствуют зависимости

$$T = 511 (\Phi/60)^{2/3} p_a^{1/3} \text{ кэв} \quad (\Phi = \text{const}, 511 = mc^2), \quad (\text{П}2.1)$$

вытекающей из аппроксимационной формулы (6). Штрих-пунктирные кривые построены согласно соотношению

$$T^* = 511 (\Phi^*/120)^{4/7} p_a^{2/7} \text{ кэв} \quad (\text{П}2.2)$$

Рис. 4. Зависимости коэффициента выхода излучения $\Phi(T, p_a) = \text{const}$ от температуры и параметра непрозрачности [1].



и соответствующим аппроксимации

$$\Phi^* = 120 t^{7/4} / \sqrt{p_a}, \quad (\text{П}2.3)$$

которая несколько лучше описывает численные данные [1]. Полагая, однако, что достоинство аппроксимационных формул заключается в их простоте (при необходимости более точных цифр можно обратиться непосредственно к численным данным) и считая показатель степени $7/4$ «менее удобным», чем $3/2$ [см. формулу (6)], мы будем пользоваться аппроксимацией (6), эквивалентной формуле (П. 2.1). Из рис. 5 видно, что в области температур $10 < T < 100$ кэв пунктирные кривые отклоняются от сплошных не более чем на 20–30%.

Следующей теоретической работой, в которой рассчитывалось циклотронное излучение, была работа Драммонда и Розенблюта [2]. Авторы этой работы не вводили коэффициент выхода Φ , а представили истинное излучение с единицы поверхности слоя и цилиндра в виде

$$\begin{aligned} W_1 &= W_+ + W_- = 2 \int_0^{\omega^*} d\omega \int_{|\ominus \rightarrow} \mathcal{J}_R^0 \cdot \mathcal{J} \cos(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N}) d\Omega = \\ &= \frac{T}{12\pi^2 c^2} \omega^{*3}, \quad \omega^* = \omega_B m^*. \end{aligned} \quad (\text{П}2.4)$$

Здесь множитель 2 учитывает две поляризации, при наличии отражателей нужно еще ввести множитель $1 - r$. Таким образом, величина m^* указывает усредненный по двум поляризациям эффективный номер максимальной вы-

свечиваемой гармонике. Зная величину (П2.4), можно найти форм-фактор слоя или цилиндра по формуле

$$\Phi = (1/W_0) \oint W_1 dS = (W_1/Q_0) (1/V) \oint dS = m^{*3}/2\pi\rho_a, \quad (\text{П2.5})$$

где $\rho_a = a\omega_0^2/c\omega_B$ — введенный ранее параметр непрозрачности. Хотя расчеты Драммонда и Розенблюта [2], по-видимому, более точны, чем результаты работы [1], поскольку они более детально учитывали распределение излучения по углам (различие поляризаций однако также учитывалось в работе [1]), их конечные результаты весьма близки к результатам работы [1].

На рис. 6 приведены полученные в работе [2] графики зависимостей

$$m^{*3} = f(x_{DR}), \quad x_{DR} = \beta_e BL \quad (B, \text{ эс}; L, \text{ см}). \quad (\text{П2.6})$$

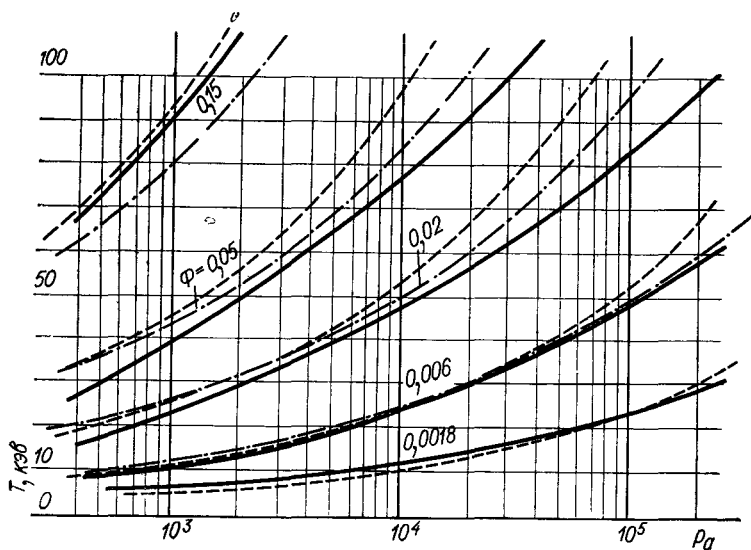


Рис. 5. Коэффициент выхода излучения $\Phi(T\rho_a) = \text{const}$ и его аналитические приближения.

Переменная $x_{DR} = \beta_e Ba = (20/3)\rho_a T$ кэв, так что, пользуясь рис. 6 и формулой (П2.5), нетрудно найти значения форм-фактора $\Phi(\rho_a, T)$. Заметим, что различие двух рис. 6 в значительной степени обусловлено тем случайным обстоятельством, что в то время как для слоя авторы [2] полагают $L = a$, для цилиндра же принято $L = D = 2a$. Таким образом, $(\beta_e BL)_{\text{ц}} = 2(\beta_e BL)_{\text{сл}}$, и если сдвинуть ось абсцисс на правом рисунке для цилиндра вправо на множитель 2, то оба рисунка оказываются практически неотличимыми, что подтверждает эквивалентность форм-факторов (и значений m^*) слоя и цилиндра (см. приложение 1). С учетом этой эквивалентности на рис. 7 приведены графики $m^{*3} = f(\beta_e BL)$ для слоя (сплошные линии). Пунктирными линиями изображены зависимости

$$m^{*3} = 2\pi 60t^{3/2} \sqrt{\rho_a} = (T \text{ кэв}/80) \sqrt{x_{DR}}, \quad (x_{DR} = \beta_e BL), \quad (\text{П2.7})$$

построенные по аппроксимационной формуле (6).

Из рис. 7 видно, что пунктирная прямая $T = 25$ кэв весьма близка к своему численному прообразу, $T = 50$ кэв — идет всюду несколько выше, а $T =$

$= 75$ и $T = 100$ кэв — в основном ниже соответствующих им численных кривых.

Можно сделать вывод, что формула (6) примерно с точностью 50% соответствует численным кривым m^{*3} во всей области параметров, рассмотренной Драммондом и Розенблютом.

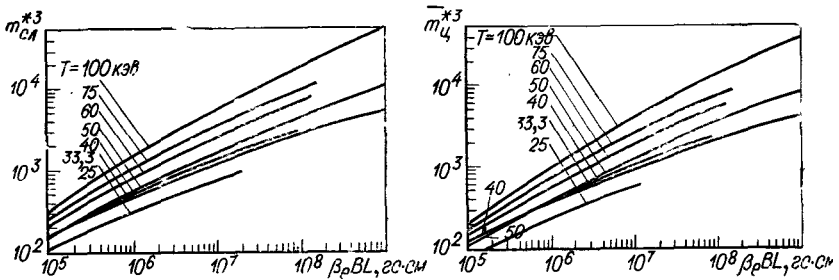


Рис. 6. Зависимости $m^{*3}=f(T, \beta_e BL)$ для числа высвечиваемых гармоник m^* при разных температурах и параметрах $\beta_e BL$ [2], для слоя $L=a$ (слева) и для цилиндра $L=2a$ (справа).

Наибольшие отклонения формулы (6) от численных зависимостей наблюдаются для промежуточной области температур 30—50 кэв (см. рис. 5 и 7).

Заметим, что в книге Бекефи [4] для температур, близких к 50 кэв, предложена аппроксимация $m^{*6} = 0,57x_{DR}$ по данным [1] и $m^{*6} = 0,25x_{DR}$ по данным Драммонда и Розенблюта [2], что неплохо передает численные ре-

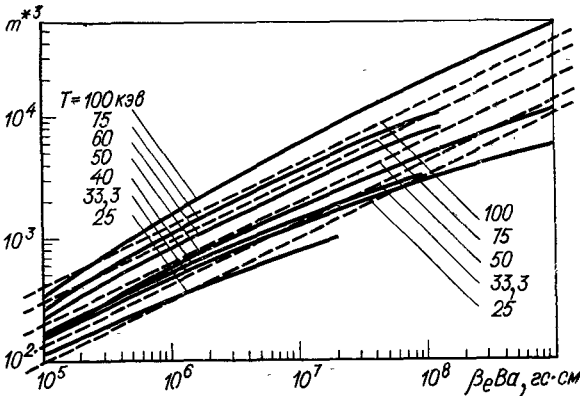


Рис. 7. Зависимость $m^{*3}=f(\beta_e Va)$ для слоя и аппроксимационные прямые.

зультаты для $T = 50$ кэв, однако не охватывает всей области «термоядерных» температур $10 < T < 100$ кэв.

Другая работа, содержащая численные расчеты циклотронного излучения в Токамаке для области «предтермоядерных» температур $1 < T < 10$ кэв, — это работа Розенблюта [3], в которой, однако, совершенно не учитывается доплеровское уширение линий спектра, что затрудняет прямое сравнение его данных с результатами работ [1—2]. Тем не менее в дальнейшем (см. при-

ложение 4) мы установим «правила соответствия» расчета, проведенного в работе [3], с результатами работ [1, 2], и покажем, что они отличаются примерно в два раза, причем это расхождение уже нельзя приписать неточности численного счета и оно может быть исправлено физически обоснованным способом.

Наконец, отметим работу Каноббио и Гюффри [5], где рассмотрена область температур $25 < T < 200$ кэВ. Авторы, однако, не проводили численного интегрирования по углам и частотам, а определяли величину ω^* для слоя из приближенной формулы $\alpha \alpha_{\perp}^2(\omega^*) = 1$, подставляя затем ω^* в (П2.4) (формула (3) в работе [5]). Вследствие этих достаточно грубых оценок найденные ими значения Φ (K_L в работе [5]) в 2—4 раза отличаются как от результатов работы [1], так и от значений Φ , которые можно найти из работы [2].

В работе [6] автор учел зависимость коэффициента отражения r от углов, частоты и поляризации. Полученные результаты близки к результатам работы [2].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОГЛОЩЕНИЯ

Для температур $T \geq 25$ кэВ линии спектра в области частот $\omega^*/\omega_B \sim \sim m^* \sim 10 \div 20$ можно считать эффективно перекрывающимися в результате доплеровского уширения и образующими сплошной спектр.

В этом случае практически наиболее удобными для численных расчетов выражениями для коэффициентов поглощения являются интегральные представления, полученные в работе [7], которые имеют следующий вид:

$$\alpha_{1,2}(\omega, \theta) = \frac{\omega_0^2}{c\omega_B} \frac{\mu^2}{2K_2(\mu)} \int_0^{+\infty} \left[\frac{K_2(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^2} a_{1,2} + \frac{K_3(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^3} b_{1,2} \right] dz, \quad (\text{П3.1})$$

где $\mu = mc^2/T$, $\nu = \omega/\omega_B$; $a_1 = 1 + \cos^2\theta (\cos z - 1)$; $b_1 = -[\nu \sin\theta \cos\theta (z - \sin z)]^2$; $a_2 = \cos z$; $b_2 = [\nu \sin\theta (1 - \cos z)]^2$; $R(z) = \mu^2 - 2i\mu\nu z + \nu^2 \sin^2\theta (2 - 2\cos z - z^2)$, при $R \gg 1$, $\mu \gg 1$ для функций Макдональда можно использовать асимптотику $K_n(x) \approx \exp(-x) \sqrt{\pi/2x}$, и тогда

$$\alpha_{1,2} \approx \frac{\omega_0^2}{c\omega_B} \frac{\mu^{5/2}}{2} \int_0^{+\infty} \exp(\mu - \sqrt{R}) \Psi_{1,2} \frac{dz}{R^{7/4}}; \quad \Psi_{1,2} = a_{1,2} \sqrt{R} + b_{1,2}.$$

Вычисляя интеграл методом перевала (при $\nu = \omega/\omega_B \gg 1$), получаем

$$\alpha_{1,2} \approx \frac{\omega_0^2}{c\omega_B} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\sqrt{\tau f(\tau)}} \frac{\lambda_{1,2}}{(f^2(\tau) - \cos^2\theta)^{3/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{t} \left(\frac{1}{\sin\theta} \sqrt{f^2(\tau) - \cos^2\theta} - 1\right)\right], \quad (\text{П3.2})$$

где $t = T/mc^2 = 1/\mu$; $\tau = t\nu \sin^2\theta$;

$$\lambda_1 = \left(1 + \frac{f}{\tau} \cos^2\theta\right) \sqrt{f^2 - \cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{t \sin\theta};$$

$$\lambda_2 = \left(1 + \frac{f}{\tau}\right) \sqrt{f^2 - \cos^2\theta} + \frac{f^2}{t \sin\theta},$$

причем функция $f(\tau)$ определяется из уравнений $f(\tau) = (\text{ch } y - 1)\tau$, $\text{Sh } y - y = 1/\tau$.

Таким образом, зависимость $\alpha_{1,2}$ от частоты ω входит в формулу (ПЗ.2) лишь через параметр $\tau = tv \sin^2 \theta$.

Коэффициент выхода можно записать в виде

$$\Phi = \frac{3}{2\pi^2 \rho_a} \int_0^\infty v^2 dv \int_0^\pi \sin^2 \theta \sum_i [1 - \exp(-\gamma_i)] d\theta, \quad (\text{ПЗ.3})$$

где

$$\gamma_{1,2} = \frac{\pi \rho_a}{2 \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi t}{\tau f} \frac{\lambda_{1,2} \sin^2 \theta}{(f^2 - \cos^2 \theta)^{3/2}}} \times \exp \left[-\frac{1}{t} \left(\frac{1}{\sin \theta} \sqrt{f^2 - \cos^2 \theta} - 1 \right) \right]. \quad (\text{ПЗ.4})$$

Хотя эти выражения содержат лишь элементарные функции, их не удается проинтегрировать, не прибегая к численным методам.

В двух предельных случаях $\tau = tv \sin^2 \theta \gg 1$ и $\tau \ll 1$ из формулы (ПЗ.2) для $\alpha_{1,2}$ можно получить более простые асимптотические выражения. Например, при $\tau \ll 1$ найдем

$$\alpha_{1,2} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_B} \frac{\sqrt{\pi/2v}}{t \sin^2 \theta} \{ \cos^2 \theta + t \sin^4 \theta; 1 \} \left(\frac{e}{2} \tau \right)^v, \quad (\text{ПЗ.5})$$

Случай $\tau \gg 1$ рассмотрен в работе [7]. Заметим, что Драммонд и Розенблют использовали для численных расчетов [2] в области сплошного спектра ($25 < T < 100$ кэв) выражения (ПЗ.1). В работе [1], однако, была численно рассчитана и область $T \gg 10$ кэв, где начальные линии спектра еще не перекрываются, так что рис. 4 и 5 содержат как сплошной спектр, так и спектр с разрешенными линиями.

Отдельные линии спектра не перекрывают друг друга, если $n \sqrt{2\pi t} |\cos \theta| < 1$. Например, для углов $\theta \sim 60^\circ$, $|\cos \theta| \sim 1/2$, при $t = 10$ кэв это справедливо для начальных гармоник с $n \lesssim 6$. Тогда коэффициенты поглощения α_i удобно представить в виде суммы по отдельным гармоникам [см. работу [7], и в ней формулы (3.3) и (3.11)]

$$\alpha_i \approx \sum_n \alpha_i^{(n)}; \quad \alpha_i^{(n)} = \frac{c\omega_0^2}{T\omega_B} \text{Im} \left\langle \frac{\chi_i^{(n)}/\varepsilon}{n-a} \right\rangle^{(0)}. \quad (\text{ПЗ.6})$$

Здесь $\varepsilon = mc^2\gamma$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$; $a = (\gamma/\omega_B) (\omega + i0 - k_{\parallel} v_{\parallel})$, так что мнимая часть

$$\text{Im} \lim (1/(n-a)) = \pi (\omega_B/\gamma) \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\omega_B/\gamma),$$

а $\chi_i^{(n)}$ согласно работе [7] имеют вид (\mathcal{J}_n — функции Бесселя)

$$\chi_1^{(n)} = (\cos \theta (p_{\perp} n/b) - p_{\parallel} \sin \theta)^2 \mathcal{J}_n^2(b); \quad \chi_2^{(n)} = [p_{\perp} \mathcal{J}_n^1(b)]^2; \quad b = p_{\perp} k_{\perp}/m\omega_B.$$

Скобки $\langle \dots \rangle^{(0)}$ в (ПЗ.6) означают усреднение по максвелловскому распределению (вообще говоря, релятивистскому). Считая, что показатель преломления равен единице ($N = kc/\omega \rightarrow 1$ при $\omega \gg \omega_0$ — «вакуумное приближение»), можно формулу (ПЗ.6) представить в соответствии с законом Кирхгофа в виде

$$\alpha_i = \eta_i / \mathcal{J}_{R,J}^2, \quad \eta_i = \langle P_i(\omega, \theta) \rangle n_e. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Здесь η — излучательная способность среды, а P_i оказываются равными соответственно

$$P_{1;2} = (e^2 \omega^2 / 2\pi c) \sum_n \{ ((\cos \theta - \beta)_{\parallel} / \sin \theta)^2 \mathcal{J}_n^2(n\tilde{\beta}); \beta_{\perp}^2 \mathcal{J}_n'^2(n\tilde{\beta}) \} \delta_n. \quad (\text{ПЗ.8})$$

$$\text{где } \tilde{\beta} = \beta_{\perp} \sin \theta / (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta); \delta_n = \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B / \gamma)$$

и совпадают со спектральными мощностями (а не интенсивностями) волн двух линейных поляризаций, излучаемых индивидуальным зарядом в поле. Интеграл от суммы величин (ПЗ.8) определяет полную мощность излучения

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_B^2 \frac{v_{\perp}^2}{1 - \beta^2} = \int d\omega \int (P_1 + P_2) d\Omega. \quad (\text{ПЗ.9})$$

Заметим, что эта мощность, вообще говоря, не совпадает (при $\beta_{\parallel} \neq 0$) с полной интенсивностью излучения, которую зарегистрировали бы удаленные наблюдатели (см. приложение 7).

Таким образом, величины α_i можно было бы в «вакуумном приближении» найти, зная излучение индивидуального релятивистского заряда и спектральные мощности (ПЗ.8).

В случае с неперекрывающимися линиями β мало (например, при $T = 10$ кэВ, $\beta \sim \sqrt{3T/mc^2} \sim 1/5$), поэтому в формуле (ПЗ.8) пренебрежем величиной β_{\parallel} всюду, кроме аргументов δ -функций, так что

$$P_{1;2} \approx \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \sum_n \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \mathcal{J}_n^2(nx); \frac{x^2}{\sin^2 \theta} \mathcal{J}_n'^2(nx) \right\} \times \\ \times \delta \left(v_{\parallel} \frac{\omega}{c} \cos \theta - \omega + n\omega_B \right), \quad (\text{ПЗ.10})$$

где $x = \beta_{\perp} \sin \theta$. При усреднении в формуле (ПЗ.7) по нерелятивистскому максвелловскому распределению δ -функций, которые содержат лишь v_{\parallel} , и функции Бесселя, которые содержат лишь v_{\perp} , усредняются независимо. Таким образом,

$$\alpha_i = \sum_n \alpha_i^{(n)}, \quad \alpha_i^{(n)} = \frac{\pi \omega_0^2}{ct \sin^2 \theta} \left\langle \begin{array}{l} \cos^2 \theta \mathcal{J}_n^2(nx) \\ \text{или } x^2 \mathcal{J}_n'^2(nx) \end{array} \right\rangle_{\perp}^{(0)} \Delta_n, \quad (\text{ПЗ.11})$$

где Δ_n — гауссовский профиль n -й линии

$$\Delta_n = \left\langle \delta \left(v_{\parallel} \frac{\omega}{c} \cos \theta - \omega + n\omega_B \right) \right\rangle_{\parallel}^{(0)} = \frac{1/\sqrt{\pi}}{|\Delta\omega_n|_T} \exp \left[- \left(\frac{\omega - n\omega_B}{|\Delta\omega_n|_T} \right)^2 \right] \quad (\text{ПЗ.12})$$

с полушириной $|\Delta\omega_n|_T = n\omega_B \sqrt{2t} |\cos \theta|$. Средние от функций Бесселя также вычисляются в конечном виде

$$\left\langle \mathcal{J}_n^2 \left(n \frac{v_{\perp}}{c} \sin \theta \right) \right\rangle_{\perp}^{(0)} = \exp(-\xi_n) I_n(\xi_n); \quad \xi_n = n^2 t \sin^2 \theta; \\ \left\langle x^2 \mathcal{J}_n'^2(nx) \right\rangle_{\perp}^{(0)} = \exp(-\xi_n) I_n(\xi_n) \left\{ 1 + 2 \frac{\xi_n^2}{n^2} \left[1 - \frac{I_n'(\xi_n)}{I_n(\xi_n)} \right] \right\} \approx \\ \approx \exp(-\xi_n) I_n(\xi_n). \quad (\text{ПЗ.13})$$

Здесь I_n — модифицированные функции Бесселя.

Считаем, что $\xi_n \ll 1$, $n \sim 1$ или $\xi_n \sim 1$, $n \gg 1$, так что

$$\alpha_i^{(n)} = \Gamma_i^{(n)} \Delta_n; \quad \Gamma_i^{(n)} \approx \pi \frac{\omega_0^2}{c} \{ \cos^2 \theta; 1 \} \frac{n^2}{\xi_n} \exp(-\xi_n) I_n(\xi_n). \quad (\text{П3.14})$$

Гауссовский профиль (П3.12) заменим прямоугольной площадкой той же высоты и площади

$$\Delta_n \rightarrow \frac{1}{|\Delta\omega_n|_{ef}^D} \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega - n\omega_B| \leq (1/2) |\Delta\omega_n|_{ef}^D; \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases} \quad (\text{П3.15})$$

Здесь $|\Delta\omega_n|_{ef}^D = n\omega_B \sqrt{2\pi t} |\cos \theta|$ — эффективная ширина n -й линии, уширенной по Допплеру. Окончательно получим, что

$$\alpha_i = \sum_n \alpha_i^{(n)}, \quad \alpha_i^{(n)} \approx \frac{\Gamma_i^{(n)}}{|\Delta\omega_n|_{ef}^D} = \frac{\pi\omega_0^2 |\cos \theta|^{\pm 1}}{c\omega_B \sqrt{2\pi t}} \times \\ \times \exp(-\xi_n) \frac{n}{\xi_n} I_n(\xi_n) \quad (\text{П3.16})$$

в случае спектра с неперекрывающимися линиями.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ФОРМ-ФАКТОР ДЛЯ ТОРА

В работе Розенблюта [3] рассмотрено циклотронное излучение плазмы в тороидальном «Токамаке» (рис. 8) для области «предгермоядерных» температур $1 < T < 10$ кэв. Автор работы не учитывал доплеровского уширения линий, а принял во внимание лишь уширение, обусловленное неоднородностью тороидального магнитного поля

$$B(x) = \text{const}/(R+x) \approx B(0)(1-x/R). \quad (\text{П4.1})$$

Поэтому его расчеты не допускают прямого сравнения с коэффициентом выхода Φ , найденным выше для цилиндра с однородным полем, где существенно лишь доплеровское уширение.

Уширение n -й гармоники, обусловленное неоднородностью поля (П4.1), по порядку величины равно

$$|\Delta\omega_n|_x = n\omega_B (\Delta\omega_B/\omega_B) = n\omega_B \frac{\Delta x}{R} \approx n\omega_B a/R \quad (\text{П4.2})$$

и не приводит к перекрытию линий, если $|\Delta\omega_n|_x < \omega_B$, т. е. при $n < R/a$. Кроме того, доплеровским уширением $|\Delta\omega_n|_{ef}^D = n\omega_B \sqrt{2\pi t} |\cos \theta|$ можно пренебречь по сравнению с неоднородным (П4.2) только лишь при $|\Delta\omega_n|_x > > |\Delta\omega_n|_{ef}^D$, иначе говоря при $a/R > \sqrt{2\pi t} |\cos \theta|$. Найденные условия

$$n < (R/a) < \sqrt{mc^2/2\pi T} (1/|\cos \theta|) (\approx 3/|\cos \theta| \text{ при } T=10 \text{ кэв}) \quad (\text{П4.3})$$

ограничивают применимость расчетов Розенблюта в области $T \approx (5 \div 10)$ кэв. Кроме того, вместо использования формул (П3.13) Розенблют ограничился первым членом разложения функций Бесселя

$$\langle \mathcal{J}_n^2(n\beta_{\perp} \sin \theta) \rangle_{\perp}^{(0)} \approx \frac{(n \sin \theta)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \langle \beta_{\perp}^{2n} \rangle = \frac{(\xi_n/2)^n}{n!}, \quad (\text{П4.4})$$

что соответствует первому члену разложения функций (ПЗ.13) и допустимо лишь при $\xi \ll 1$, в то время как в (ПЗ.13) $\exp(-\xi)/n(\xi) \approx 1/\sqrt{2\pi\xi}$ для $\xi = n^2 t \sin^2 \theta \gg 1$.

Использование приближения (П4.4) привело к появлению в результатах работы [3] расходящихся рядов, которые нужно обрывать после того, как последовательные члены перестанут убывать (обычная процедура для асимптотических рядов). Пытаясь уточнить расчеты Розенблюта [3], будем вместо формулы, которой он фактически пользовался

$$\alpha_i^{(\text{Ros})} \approx \pi \frac{\omega_0^2 (\cos^2 \theta; 1)}{c t \sin^2 \theta} \sum_n \frac{(\xi n/2)^n}{n!} \delta[\omega - n\omega_B(x)], \quad (\text{П4.5})$$

применять для коэффициентов поглощения более точные формулы (ПЗ.16). Если поле неоднородно, то α зависят от координат, и тогда выходящий с по-

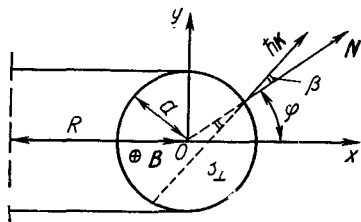


Рис. 8. Излучение плазмы в тороидальном «Токамаке».

верхности плазмы поток излучения $\mathcal{J}_\omega(\theta)$ [см. формулу (4)] следует считать равным

$$\mathcal{J}_\omega(\theta) = \mathcal{J}_{R,J}^0 \sum_{i=1,2} (1 - \exp(-\int \alpha_i ds)), \quad (\text{П4.6})$$

где $\int \alpha_i ds$ означает интегрирование по пути луча в плазме. Кроме того, при отсутствии перекрытия линий $\alpha = \sum \alpha_i^{(n)}$, причем суммирование по n можно опустить из экспоненты вниз, полагая

$$1 - \exp(-\int \alpha_i ds) = \sum_n (1 - \exp(-\int \alpha_i^{(n)} ds)). \quad (\text{П4.7})$$

Учитывая формулы (П4.6—П4.7), для форм-фактора (6) в случае тора получаем

$$\Phi_{\text{тор}} = \frac{3}{8\pi^3 \rho_a} \oint d\varphi \int_{\ominus \rightarrow} d\Omega \cos(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N}) \sum_i \sum_n \int (1 - \exp(-\int \alpha_i^{(n)} ds)) \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_B^3}. \quad (\text{П4.8})$$

где $\rho_a = a\omega_0^2/c\omega_B$ — обычный «параметр непрозрачности».

Следуя работе [3], заменим тор цилиндром с высотой $2\pi R$, сохраняя неоднородность поля (П4.1), однако считая теперь силовые линии прямыми. Если бы поле можно было считать однородным, то уширение было бы чисто доплеровским и тогда [см. формулу (П1.2)]

$$\int \alpha_i^{(n)} ds = \alpha_i^{(n)} s = \alpha_i^{(n)} 2a \frac{\cos \beta}{\sin \theta}, \quad \text{при } |\Delta\omega_n|_{ef}^D \gg |\Delta\omega_n|_x, \quad (\text{П4.9})$$

где для $\alpha_i^{(n)}$ можно использовать формулу (П3.16) $\alpha_i^{(n)} = \Gamma_i^{(n)} / |\Delta\omega_n|_{ef}^D$. В противоположном пределе $|\Delta\omega_n|_{ef}^D \ll |\Delta\omega_n|_x$ имеем случай [3], когда (см. рис. 8)

$$ds = \frac{dx}{\sin \theta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{R/\sin \theta}{|\cos(\varphi + \beta)|} \frac{dx}{R}, \quad \frac{dx}{R} = \frac{d[n\omega_B(x)]}{n\omega_B}, \quad (\text{П4.10})$$

причем

$$\int \alpha_i^{(n)} ds = \Gamma_i^{(n)} \int \delta(\omega - n\omega_B(x)) ds = \frac{\Gamma_i^{(n)}}{n\omega_B} \cdot \frac{R/\sin \theta}{|\cos(\varphi + \beta)|}, \quad (\text{П4.11})$$

если ω попадает в промежуток между значениями $n\omega_B(x)$ на входе и выходе луча в плазме, или $\int \alpha_i^{(n)} ds = 0$, если не попадает. Интервал частот этого промежутка равен (см. рис. 8)

$$|\Delta\omega_n|_x = \frac{n\omega_B}{R} (x_{\text{out}} - x_{\text{in}}) = n\omega_B \frac{2a}{R} \cos \beta |\cos(\varphi + \beta)|. \quad (\text{П4.12})$$

Таким образом, для двух предельных случаев (П4.9) и (П4.11) имеем

$$\int \alpha_i^{(n)} ds = \Gamma_i^{(n)} 2a \frac{\cos \beta}{\sin \theta} \begin{cases} 1/|\Delta\omega_n|_{ef}^D & \text{при } |\Delta\omega_n|_{ef}^D \gg |\Delta\omega_n|_x, \\ 1/|\Delta\omega_n|_x & \text{при } |\Delta\omega_n|_{ef}^D \ll |\Delta\omega_n|_x, \end{cases} \quad (\text{П4.13})$$

или приближенно для общего случая

$$\int \alpha_i^{(n)} ds \approx \frac{2a\Gamma_i^{(n)} \cos \beta / \sin \theta}{|\Delta\omega_n|_{ef}^D + |\Delta\omega_n|_x}, \quad (\text{П4.14})$$

причем уширения линий также должны складываться, если учитываются одновременно оба фактора — неоднородность поля и эффект Допплера:

$$\begin{aligned} |\Delta\omega_n|_+ &= |\Delta\omega_n|_{ef}^D + |\Delta\omega_n|_x = \\ &= n\omega_B \sqrt{2\pi t} (|\cos \theta| + \chi \cos \beta |\cos(\varphi + \beta)|). \end{aligned}$$

Здесь $\chi = \frac{2a}{R} / \sqrt{2\pi t}$ — параметр неоднородности.

Таким образом, формулу (П4.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{тор}} &= \frac{3}{8\pi^3 \rho_a} \oint d\varphi \int_{|\ominus \rightarrow} d\Omega \cos(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N}) \sum_i \sum_n n^2 \frac{|\Delta\omega_n|_+}{\omega_B} \times \\ &\times \left(1 - \exp\left(-\int \alpha_i^{(n)} ds\right)\right) = \frac{3\sqrt{2\pi t}}{8\pi^3 \rho_a} \int_{|\ominus \rightarrow} d\Omega \cos(\angle \mathbf{k}, \mathbf{N}) \sum_i \sum_n n^3 \oint \times \\ &\times (1 - \exp_i[-\gamma/C(\varphi)]) C(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{П4.15})$$

где введены следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{2a\Gamma_i^{(n)} \cos \beta}{n\omega_B \sqrt{2\pi t} \sin \theta}, \quad C(\varphi) = |\cos \theta| + \chi \cos \beta |\cos(\varphi + \beta)|. \quad (\text{П4.16})$$

Для последнего интеграла (П4.15) в предельных случаях $\chi \ll 1$ и $\chi \gg 1$ имеем (заменяя $\varphi + \beta \rightarrow \psi$)

$$A_1 = \begin{cases} (1 - \exp(-\gamma/|\cos \theta|)) 2\pi |\cos \theta| & \text{при } \chi \ll 1, \\ \chi \cos \beta \oint (1 - \exp(-\tilde{\gamma}/|\cos \psi|)) |\cos \psi| d\psi & \text{при } \chi \gg 1, \end{cases} \quad (\text{П4.17})$$

где $\tilde{\gamma} = \gamma/\chi \cos \beta$. Далее найдем для произвольных $\tilde{\gamma}$

$$\oint (1 - \exp(-\tilde{\gamma}/|\cos \psi|)) |\cos \psi| d\psi = 4 \begin{cases} \pi\tilde{\gamma}/2 & \text{при } \tilde{\gamma} \ll 1 \\ 1 & \text{при } \tilde{\gamma} \gg 1 \end{cases} \approx 4 \frac{\pi\tilde{\gamma}/2}{1 + \pi\tilde{\gamma}/2},$$

и, следовательно, интеграл (П4.17) приближенно равен

$$A_1 \approx 2\pi\gamma \begin{cases} \left(1 + \frac{\gamma}{|\cos \theta|}\right)^{-1} & \text{при } \chi \ll 1 \\ \left(1 + \frac{\gamma}{\frac{2}{\pi} \chi \cos \beta}\right)^{-1} & \text{при } \chi \gg 1 \end{cases} \approx \frac{2\pi\gamma}{1 + \frac{\gamma}{|\cos \theta| + \frac{2}{\pi} \chi \cos \beta}} \quad (\text{П4.18})$$

при любых χ . Тогда (П4.15) можно представить в виде

$$\Phi_{\text{тор}} = \frac{3\sqrt{2\pi t}}{4\pi^2 \rho_a} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \sum_i \sum_n n^3 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\gamma^* \cos^2 \beta d\beta}{1 + \frac{\gamma^* \cos \beta}{|\cos \theta| + 2\chi \cos \beta/\pi}}, \quad (\text{П4.19})$$

где $\gamma^* = 2a\Gamma_i^{(n)}/n\omega_B \sqrt{2\pi t} \sin \theta$ — не зависит от угла β . Аналогично предыдущему, рассматривая предельные случаи $\chi \ll 1$ и $\chi \gg 1$ и объединяя их, для последнего интеграла (П4.19) находим

$$A_2 \approx \frac{\pi\gamma^*/2}{1 + \frac{\pi\gamma^*/2}{\chi + 2|\cos \theta|}}$$

Тогда (П4.19) принимает вид

$$\Phi_{\text{тор}} \approx \frac{3}{4\tilde{\rho}_a} \sum_i \sum_n n^3 \int_0^\pi \frac{\tilde{\rho}_a g_i^{(n)}(\theta) \sin^2 \theta d\theta}{1 + \frac{\tilde{\rho}_a g_i^{(n)}(\theta)}{\chi + 2|\cos \theta|}}, \quad (\text{П4.20})$$

где обозначено

$$\tilde{\rho}_a = \frac{\pi^2 \rho_a}{\sqrt{2\pi t}}; \quad g_i^{(n)}(\theta) = \{\cos^2 \theta, 1\} \frac{n \exp(-\xi_n)}{\xi_n \sin \theta} I_n(\xi_n); \quad \xi_n = n^2 t \sin^2 \theta.$$

Здесь мы уже подставили явные выражения для $\Gamma_i^{(n)}$ из (П3.14). Для последнего интеграла (П4.20) при $\chi \ll 1$ и $\chi \gg 1$ имеем

$$A_3 = \begin{cases} F(\tilde{\rho}_a) & \text{при } \chi \ll 1 \\ \chi G(\tilde{\rho}_a/\chi) & \text{при } \chi \gg 1, \end{cases} \quad (\text{П4.21})$$

где функции $F(y)$ и $G(z)$ равны соответственно

$$F(y) = \int_0^\pi \frac{y g_i^{(n)}(\theta) \sin^2 \theta d\theta}{1 + (y g_i^{(n)}(\theta)/2) |\cos \theta|} \approx \frac{4}{3} \left\{ y \varphi_i^{(n)}(t); (y \ll 1) \right\} \approx \frac{\frac{4}{3} y \varphi_i^{(n)}(t)}{1 + y \varphi_i^{(n)}(t)};$$

$$G(z) = \int_0^\pi \frac{z g_i^{(n)}(\theta) \sin^2 \theta d\theta}{1 + z g_i^{(n)}(\theta)} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{8}{3\pi} z \varphi_i^{(n)}(t); (z \ll 1) \right\} \approx \frac{\frac{4}{3} z \varphi_i^{(n)}(t)}{1 + \frac{8}{3\pi} z \varphi_i^{(n)}(t)},$$

а

$$\varphi_i^{(n)}(t) = \frac{3}{4} \int_0^\pi g_i^{(n)}(\theta) \sin^2 \theta d\theta = \frac{3}{4n!} \int_0^1 \exp(-n^2 t x) I_n(n^2 t x) (1-x)^{\pm \frac{1}{2}} \frac{dx}{x}. \quad (\text{П4.22})$$

Для (П4.21), следовательно, имеем

$$A_3 = \frac{4}{3} \tilde{\rho}_a \Phi \left\{ \begin{array}{l} (1 + \tilde{\rho}_a \Phi)^{-1} \text{ при } \chi \ll 1 \\ \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_a \Phi}{3\pi\chi/8}\right)^{-1} \text{ при } \chi \gg 1 \end{array} \right\} \approx \frac{\frac{4}{3} \tilde{\rho}_a \varphi_i^{(n)}}{1 + \frac{\tilde{\rho}_a \varphi_i^{(n)}}{1 + 3\pi\chi/8}}$$

и форм-фактор (П4.20) можно записать в виде

$$\Phi_{\text{тор}} = U(A, t) \Big|_{A \rightarrow \frac{\tilde{\rho}_a}{1 + 3\pi\chi/8}}; \quad U(A, t) = \sum_i \sum_n n^3 \frac{\varphi_i^{(n)}(t)}{1 + A \varphi_i^{(n)}(t)}. \quad (\text{П4.23})$$

Если обозначить $n^2 t = \alpha$, то для интегралов (П4.22) можно получить разложения в ряд по α :

$$\int_0^1 \exp(-\alpha x) I_n(\alpha x) (1-x)^{\frac{1}{2}} \text{ или } -1/2 \frac{dx}{x} = \frac{(\alpha/2)^n}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^s}{s!} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2(n+s)+1} \text{ или } 1 \right\} \frac{n!(n+s-1)! 2^{2n+s}}{(2n+s)!} = (2\alpha)^n \frac{(n-1)!}{(2n+1)!} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{(-\alpha)^1}{1!} \frac{n}{n+3/2} + \frac{(-\alpha)^2}{2!} \frac{n}{n+5/2} + \frac{(-\alpha)^3}{3!} \frac{n}{(n+3/2)(n+7/2)} + \dots \right\},$$

или

$$= (2\alpha)^n \frac{(n-1)!}{(2n)!} \left\{ 1 + \frac{(-\alpha)^1}{1!} \frac{n}{n+1/2} + \frac{(-\alpha)^2}{2!} \frac{n}{n+1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-\alpha)^3}{3!} \frac{n(n+2)}{(n+1/2)(n+3/2)} + \dots \right\}.$$

Фигурные скобки эквивалентны $\exp(-\alpha)$ как при $\alpha = n^2 t \ll 1$, так и при $\alpha \sim 1$, $n \gg 1$, и, следовательно, функции (П4.22) приближенно можно считать равными

$$\varphi_i^{(n)}(t) \approx (\varphi_i^{(n)})_{\text{Ros}} \exp(-n^2 t) \cong \frac{3(n^2 t)^{n-1}}{4(2n \pm 1)!} \exp(-n^2 t), \quad (\text{П4.24})$$

где φ_{Ros} — значения, которые бы мы получили, если, следуя Розенблюту [3], ограничиться первым членом разложения функций Бесселя (П4.4), а не использовали более точные формулы (П3.13).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

СРАВНЕНИЕ $\Phi_{\text{гор}}$ С ДАННЫМИ РОЗЕНБЛЮТА [3]

В работе [3] численно рассчитано циклотронное излучение в тороидальном «Токамаке» для области температур от 1 до 10 кэВ в предположении, что уширение линий, обусловленное неоднородностью поля, превосходит доплеровское уширение, однако линии не перекрываются. Для эффективного излучения в расчете на один электрон получена формула [см. [3], формула (15)]

$$L_{\text{Ros}} = \frac{2.5 \cdot 10^{-16} n T^3}{\beta_e (\beta_e R B)} \sum_i \sum_n n^3 \frac{z_n \Lambda_n^i}{1 + z_n \Lambda_n^i} \text{ кэВ/сек} \quad (\text{П5.1})$$

и приведены графики функции (рис. 9)

$$y(T) = \frac{10^{17} \beta_e \sqrt{\beta_e R B}}{n T^3} L_{\text{Ros}} = \frac{25}{\sqrt{\beta_e R B}} \sum_i \sum_n n^3 \frac{z \Lambda_n^i}{1 + z \Lambda_n^i}. \quad (\text{П5.2})$$

Для области $1 < T < 5$ кэВ и параметров $\beta_e R B$, не слишком сильно отличающихся от 10^4 , Розенблют указывает аппроксимационную формулу (точность ее около 50%) [см. [3], формула (18)]

$$L_{\text{Ros}} = 3 \cdot 10^{-17} \frac{n T^{7/2}}{\beta_e \sqrt{\beta_e R B}} = 0,8 \cdot 10^{-9} \frac{T^{5/2} B^2}{\sqrt{\beta_e R B}} \text{ кэВ/сек}, \quad (\text{П5.3})$$

которая означает зависимость $y_R(T) = 3,25 \sqrt{T}$.

Поскольку Розенблют [3] не учитывал доплеровское уширение линий, прямое сравнение его данных с ранее полученными результатами работ [1, 2] невозможно, однако «универсальная» формула (П4.23) позволяет установить определенное соответствие результатов указанных работ.

В самом деле, при $\chi \ll 1$ формула (П4.23) должна давать форм-фактор цилиндра с однородным полем при учете лишь доплеровского уширения

$$\Phi_{\text{тор}}(\chi \ll 1) = U(A \rightarrow \tilde{p}_a) = \Phi_{\text{ц}}(p_a, t), \quad \tilde{p}_a = \frac{\pi^2 p_a}{\sqrt{2\pi t}}, \quad (\text{П5.4})$$

а при $\chi \gg 1$ должен получаться форм-фактор тора при учете лишь неоднородного уширения

$$\Phi_{\text{тор}}(\chi \gg 1) = U\left(A \rightarrow \frac{8\tilde{p}_a}{3\chi} = \frac{4\pi}{3} p_R\right); \quad p_R = p_{a \rightarrow R} = \frac{R\omega_0^2}{c\omega_B}. \quad (\text{П5.5})$$

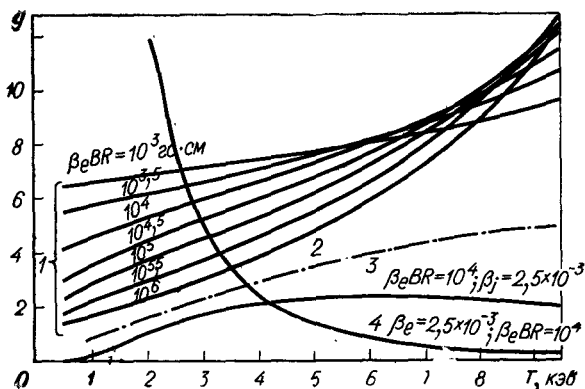


Рис. 9. Потери на циклотронное излучение:

- 1 — результаты работы [3]; 2 — аппроксимация $y_T = T^{3/4}$;
3 — выделение энергии на α -частицах в реакции $d+t$;
4 — тормозное излучение.

Между тем (см. приложение 2), для цилиндра в области температур $10 < T < 100$ кэв можно пользоваться аппроксимацией

$$\Phi_{\text{ц}}(p_a) \approx 60t^{3/2} \sqrt{p_a},$$

которая в соответствии с формулой (П5.4) означает аппроксимацию для универсальной функции

$$U(A, t) = \Phi_{\text{ц}}\left(p_a \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi t}}{\pi^2} A\right) = \frac{60\pi}{(2\pi t)^{1/4}} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{A}}, \quad (\text{П5.6})$$

что в свою очередь ввиду (П5.5) означало бы для случая Розенблута

$$\Phi_{\text{тор}}(\chi \gg 1) \cong U\left(A \rightarrow 4\pi p_R/3\right) \approx 30(9\pi/2)^{1/4} t^{5/4} / \sqrt{p_R} \approx 60t^{5/4} / \sqrt{p_R}. \quad (\text{П5.7})$$

Наконец, для величины $y = 5\pi\Phi\sqrt{\beta_e R B}/T$ формула (П5.7) означала бы аппроксимацию $y_T \approx T^{3/4}$ (см. рис. 9). Видно, что вблизи $T \sim 10$ кэв кривая $y_T \approx T^{3/4}$ проходит ниже численных кривых [3], которые слишком быстро

Вклад отдельных гармоник в излучение при $\beta_e B a = 10^6$ [гс·см], $T = 10$ кэв

n	Результаты работы [3]		Расчет по формуле (П5.9)	
	Ω_n	$n^2 \Omega_n^*$	Ω_n	$n^2 \Omega_n^{**}$
1	1,000	1,00	1,000	1,000
2	0,997	7,98	0,997	7,98
3	0,960	25,9	0,957	25,8
4	0,777	49,7	0,728	46,6
5	0,487	60,8	0,400	50,0
6	0,267	57,6	0,168	36,2
7	0,129	44,2	0,057	19,5
8	0,064	33,0	0,020	10,2
9	0,032	23,3	0,007	5,0
10	0,019	18,9	0,003	2,8

* $\sum_1^{10} n^2 \Omega_n = 322,4.$

** $\sum_1^{10} n^2 \Omega_n = 205,0.$

поднимаются в области $5 < T < 10$ кэв. Это расхождение можно частично уменьшить, если вместо формул Розенблюта использовать более точные формулы (П4.23, П4.24).

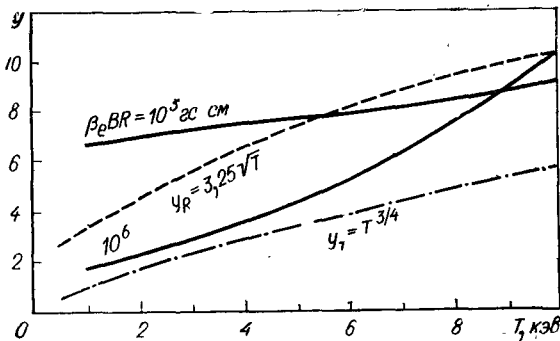


Рис. 10. Циклотронные потери:

— кривые, построенные по формуле (П5.8) для крайних значений параметров $\beta_e B R$ — аппроксимация Розенблюта (П5.3); — аппроксимация, вытекающая из формул (6) и (П4.23).

На рис. 10 приведены кривые $y(T)$, вычисленные по этим формулам

$$y(T) = \frac{25}{\sqrt{\beta_e R B}} \sum_i \sum_n n^3 \frac{(z\Lambda)_{\text{Ros}} \exp(-n^2 t)}{1 + (z\Lambda)_{\text{Ros}} \exp(-n^2 t)}, \quad (\text{П5.8})$$

Можно видеть, что теперь аппроксимация $y_T \approx T^{3/4}$ несколько лучше соответствует результатам расчета*, чем на рис. 9. В области $5 < T < 10$ кэв точность формулы $y_T \approx T^{3/4}$ составляет примерно 50%.

Ниже, в табл. 1, иллюстрирующей роль множителя $\exp(-n^2t)$, указаны «статистические веса» [см. (П5.8)]

$$\Omega_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \frac{(z\Lambda)_{\text{Ros}} \exp(-n^2t)}{1 + (z\Lambda)_{\text{Ros}} \exp(-n^2t)} \quad (\text{П5.9})$$

и величины $n^3\Omega_n$, характеризующие вклад отдельных гармоник в излучение при параметре $x_R = \beta_e R B = 10^6$.

Таким образом, аппроксимационная формула $\Phi \approx 60 t^{3/2} \sqrt{p_a}$ с точностью до 50% применима для всей термоядерной области температур от 5 до 100 кэв. При необходимости иметь более точные значения Φ следует обратиться непосредственно к численным результатам и графикам.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Для реактора на смеси 1 часть дейтерия и 1 часть трития ($d + t$) выделение термоядерной энергии в плазме (на заряженных продуктах реакции)

$$W_{dt} = V \cdot 10^{-22} n_e^2 F_{dt}(T_i) \text{ эрг/сек}, \quad (\text{П6.1})$$

где функция $F_{dt}(T)$ определяется в приведенной ниже табл. 2 [8].

Т а б л и ц а 2

Выделение энергии в системе $d + t$ и значения Φ , необходимые для самоподдерживания

$T_e = T_i, \text{ кэв}$	3	5	10	15	20	30	40	50
F_{dt}	0,017	0,124	1,2	3,0	5,4	8,9	11,0	12,0
Φ/β_e	1,2	3,1	7,5	8,0	8,5	6,0	4,5	3,0

Потери на циклотронное излучение

$$W = V n_e \frac{2e^2}{3c^3} \langle \dot{v} \rangle \Phi = V \cdot 10^{-22} n_e^2 F_m^0 \Phi, \quad F_m^0 = (T/25)^2 / \beta_e \quad (\text{П6.2})$$

меньше ядерного выделения (П6.1) при условии

$$W \ll W_{dt} \text{ или } \Phi \ll F_{dt}/F_m = F_{dt} (25/T)^2 \cdot \beta_e = K_{dt} \beta_e. \quad (\text{П6.3})$$

Значения множителя K_{dt} для случая $T_e = T_i$ приведены в табл. 2.

Таким образом, для системы с малым β_e коэффициент выхода Φ должен быть достаточно мал.

* По-видимому, учет перекрытия линий, уширенных по Допплеру (для $T \sim 5-10$ кэв), улучшил бы это соответствие.

В экспериментах на «Токамаках» достигнуты [9] параметры $n_e \approx 10^{13}$, $T_e \approx 1$ кэВ, $B \approx 50$ кГс. При этом $\beta_e \approx 10^{-4}$. Для эффективной термоядерной реакции плотность и температура должны быть выше примерно в 10 раз. Пусть, например, $n_e = 10^{14}$, $T_e = T_i = 10$ кэВ, $B = 50$ кГс. При этом $\beta_e = 1,6 \cdot 10^{-2}$ и для самоподдерживания реакции необходимы $\Phi < 12\%$, что может быть достигнуто при вполне разумных размерах плазменного тора.

Менее перспективны реакторы на чистом дейтерии, ядерное выделение в котором существенно меньше, чем в смеси дейтерия и трития. В этом случае большое значение имеет также обычное тормозное излучение W_{br} электронов на ионах, с учетом которого условие самоподдержания запишем в виде

$$W < W_{dd} - W_{br} \text{ или } \Phi < \frac{F_{dd} - F_{br}}{F_m^0} = (F_{dd} - F_{br}) (25/T)^2 \beta_e = K_{dd} \cdot \beta_e. \quad (\text{Пб.4})$$

Соответствующие значения функций и коэффициентов K_{dd} приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Выделение энергии в чистом дейтерии и значения коэффициента Φ

$T_e = T_i$, кэВ	10	20	30	40	50	60	80	100
F_{dd}	0,12	0,51	1,0	1,5	2,1	2,7	4,0	5,2
F_{br}	0,17	0,24	0,29	0,34	0,4	0,44	0,54	0,63
$\Phi < \beta_e K_{dd}$	K_{dd}	0,42	0,5	0,45	0,43	0,4	0,34	0,29

Здесь F_{dd} рассчитано по оптимальному варианту с учетом второй ветви медленной реакции $d + d \rightarrow \text{He}^3 + n$, $\text{He}^3 + d \rightarrow \text{He}^4 + p$ [7]. Рассмотрим конкретный пример реактора, обсуждаемого в работе [9] в качестве «промышленного Токамака» на смеси dt с полной тепловой мощностью $5 \cdot 10^9$ вт. Предполагается, что в нем может быть достигнуто устойчивое удержание плазмы в торе с параметрами

$$R = 520 \text{ см}; R/a = 3,5; B = 40 \text{ кГс}; n_e = 3 \cdot 10^{14}; T_e = T_i = 15 \text{ кэВ}. \quad (\text{Пб.5})$$

Здесь $\beta_e = n_e T_e 8\pi / B^2 = 0,11$ и для поддержания реакции необходимы [см. (Пб.3)] $\Phi < 8\beta_e \approx 90\%$, что легко выполняется. В самом деле, при $T = 15$ кэВ доплеровское уширение линий составит $\Delta\omega/\omega = \sqrt{2\pi t} = 0,428$, так что параметр неоднородности равен $\chi = 2a/R\sqrt{2\pi t} = 1,34$, а параметр непрозрачности ($a = 520/3,5 = 148$ см)

$$p_a = a\omega_0^2/c\omega_B = 4\pi e a n / B = 6 \cdot 10^{-12} a n / B = (2/3) 10^4. \quad (\text{Пб.6})$$

По универсальной формуле (6) находим коэффициент выхода $\Phi \approx \sqrt{1+\chi} \times 60 (t^{3/2}/\sqrt{p_a}) \approx 0,5\% \ll 90\%$. Как видно, для реактора с параметрами (Пб.5) циклотронное излучение не опасно.

Рассмотрим далее реактор на чистом дейтерии с параметрами $T = 50$ кэВ $n_e = 10^{14}$ см $^{-3}$; $B = 50$ кГс; $a = 2$ м; $R/a = 3$.

Здесь $\beta_e = 8 \cdot 10^{-2}$ и для поддержания реакции необходимы $\Phi < K_{dd}\beta_e = 3,44\%$. Между тем имеем $t = 50/511 = 0,1$; $p_a = 2400$; $\chi = 0,85$ и коэффициент выхода равен $\Phi = \sqrt{1+\chi} 60 (t^{3/2}/\sqrt{p_a}) \approx 5\%$. Эту цифру можно

снизить до требуемого значения 3,44%, если ввести отражатели с коэффициентом отражения $r = 0,6$. Повышение величины β_e ведет к снижению относительной роли циклотронных потерь.

Необходимо, однако, отметить, что условия равновесия и устойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем от контакта со стенками камеры, накладывают определенные ограничения на величину β_e . В тороидальной геометрии основные характеристики плазменной конфигурации — это «запас устойчивости» $q = aB_{\parallel}/RB_{\perp}$, величина $\beta_{\perp} = 8\pi p/B_{\perp}^2$ и «аспектовое число» $A = R/a$. В проведенных экспериментах на токамаках [9] достигнуты значения $\beta_{\perp} < 1 (\approx 1/2)$; $q \geq 3$; $A \geq 4$. Полная величина $\beta = 8\pi p/B^2$ ввиду того, что $B_{\parallel} \gg B_{\perp}$, равна $\beta = 2\beta_e = \beta_{\perp} (B_{\perp}/B_{\parallel})^2 = \beta_{\perp}/q^2 A^2$ (при $T_e = T_i$) и растет при уменьшении q и A . Так, идеализированный пример (Пб.5) соответст-

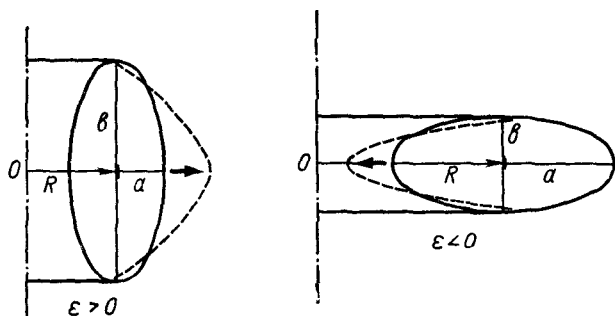


Рис. 11. Плазменный тор с эллипсоидальным сечением, вытянутый по вертикали (слева) и по горизонтали (справа). Стрелки указывают направление дальнейшей деформации, повышающей устойчивость плазмы.

вует $\beta_{\perp} = 3$; $q = 1$; $A = 3,5$, т. е. в нем принято минимальное значение q , допускаемое критерием Крускала—Шафранова $q > 1$, однако, неясно, можно ли достигнуть $\beta_{\perp} \approx 3$.

В частности, из работы [11] следует, что общегеометрический необходимый критерий Мерсье [12] можно представить для тороидальных систем с эллиптическими магнитными поверхностями (рис. 11) в виде

$$\beta_{\max} < f(a, b)/A^2; f(a, b) = (b(b+a)/(b-a)^2) \{ [1 + 3(\epsilon/4)(1+\Delta)]^2 + \epsilon \}. \quad (\text{Пб.7})$$

Здесь b и a — полуоси эллипсоидального сечения; $\epsilon = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2)$; Δ — параметр, показывающий целесообразность дальнейшей деформации вертикального эллипса наружу от оси, а горизонтального — внутрь к оси (см. рис. 11). При $\Delta = 0$ для эллипса, сильно вытянутого в вертикальном направлении ($b \gg a$; $\epsilon \rightarrow 1$), из (Пб.7) имеем $\beta_{\max} \leq 1/A^2$. Для чисто круговых сечений ($b = a$, $\epsilon \rightarrow 0$) критерий (Пб.7) не ограничивает β_{\max} , однако в той же работе [11] был получен еще один достаточный критерий, из которого следует ограничение

$$\beta_{\max} < \frac{1}{A^2} \frac{b^2}{b^2 + a^2} \frac{\left[1 + \frac{3\epsilon}{4}(1+\Delta) \right]^2}{2 + \epsilon}. \quad (\text{Пб.8})$$

В частности, для круглых сечений ($a = b$, $\epsilon = 0$, $\Delta = 0$) $\beta_{\max} < 1/4A^2$, и хотя это условие является лишь достаточным, а не необходимым, оно, види-

мо, близко соответствует значениям β , полученным в экспериментах. Наконец, циклотронное излучение $W = \langle I_1 \rangle n_e V \Phi$ полезно сравнить с выделением джоулева тепла в токамаках

$$W_J = \frac{j^2}{\sigma} V \alpha, \quad \sigma = 2 \frac{ne^2 \tau}{m} = \frac{3}{2} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{2\pi} e^2 \lambda}, \quad (\text{П6.9})$$

где $\lambda = 15$ — кулоновский логарифм; $\alpha \approx 2$ — экспериментальный фактор аномальности. Полагая $j = I/\pi a^2$, $B_{\perp} = 2I/ca$ и пользуясь аппроксимационной формулой для Φ , находим отношение мощностей

$$W/W_J = \sqrt{\pi/2} \left(\frac{a\omega_B}{c} \right)^2 \Phi \frac{\beta_{e\perp} t^{3/2}}{\alpha \lambda} \approx 10 \sqrt{1+\chi} \sqrt{1-r} \frac{t^5 p_a^{3/2}}{\beta_{e\perp}} (qA)^4. \quad (\text{П6.10})$$

В современных экспериментах ($\beta_{e\perp} = 1/2$, $T \approx 1$ кэВ, $q \approx 3$, $A \approx 4$, $p_a \approx 100$, $\chi \approx 5$) имеем $W/W_J \sim 10^{-4}$, однако уже при температурах порядка $T \approx 5$ кэВ джоулев нагрев оказывается малоэффективным и необходимо использовать отражатели или применять другие способы нагрева. Эти оценки совпадают с выводами работы [3].

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Этот случай ($v \gg mc^2$) не имеет отношения к термоядерной проблеме, но рассмотрен здесь для полноты картины, поскольку излучение космических туманностей, например Крабовидной, также обусловлено циклотронным механизмом, о чем свидетельствует высокая степень поляризации излучения, испускаемого отдельными участками туманности. Наблюдаемый спектр обычно охватывает и радиодиапазон, и оптический, так что электроны должны быть ультрарелятивистскими. В этих условиях нет оснований считать функцию распределения максвелловской, и ее обычно аппроксимируют степенной зависимостью

$$dN = f(p) dp \rightarrow f(\varepsilon) d\varepsilon = K \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^s} = N \frac{d\gamma}{\gamma^s} \quad | \varepsilon_{\text{мин}} < \varepsilon < \varepsilon_{\text{макс}} |, \quad (\text{П7.1})$$

где $N \text{ см}^{-3} = \text{const}$. Излучательные способности среды для обыкновенной и необыкновенной волн можно найти по формуле (П3.7), интегрируя мощности (П3.8) по функции распределения (П7.1)

$$\eta_s^i = \int P^i f(p) dp = \int \bar{P}^i N d\gamma / \gamma^s. \quad (\text{П7.2})$$

Здесь черта означает усреднение по направлениям скорости электронов. Коэффициенты поглощения для ультрарелятивистского случая впервые были рассмотрены в работах [13] и определяются формулами

$$\alpha^i = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2} \int P^i \left(-\frac{\partial f(p)}{\partial \varepsilon} \right) dp. \quad (\text{П7.3})$$

Так как для степенного распределения (П7.1) имеем $-\partial f(p)/\partial \varepsilon = (s \mp 2) N d\gamma / mc^2 \gamma^{s+1}$, то

$$\alpha_s^i = \frac{8\pi^3}{m\omega^2} (s \mp 2) \int \bar{P}^i N \frac{d\gamma}{\gamma^{s+1}} = \frac{8\pi^3}{m\omega^2} (s \mp 2) \eta_{s \rightarrow s+1}^i. \quad (\text{П7.4})$$

Если исходить из картины излучения индивидуального заряда, то на первый взгляд могло бы показаться, что в формулах (П7.2), (П7.3) должны

присутствовать не излучаемые мощности P^i , а наблюдаемые интенсивности $I_{\text{набл}}^i$ излучения отдельного электрона. Такая ошибка допущена, например, в работе [13].

Различие величин P^i и $I_{\text{набл}}^i$ было детально проанализировано в работах [14], а рассмотрение указанных тонкостей, связанных с использованием этих формул, проведено в работах [15].

Если функция распределения $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ явно зависит от времени (нестационарная плазма), то в формулах (П7.2) и (П7.3) необходимо учитывать запаздывание. В частности, для одного электрона

$$f d\mathbf{p}' d\mathbf{r}' = \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)] \delta(p'_{\parallel} - p_{\parallel}) \delta(p'_{\perp} - p_{\perp}) dp'_{\parallel} dp'_{\perp} d\mathbf{r}' \quad (\text{П7.5})$$

с нормировкой $\int f d\mathbf{p}' d\mathbf{r}' = \int \delta[\mathbf{z}' - \mathbf{z}_0(t)] dz' = 1$.

Тогда наблюдаемая интенсивность излучения отдельного электрона в соответствии с (П7.2)

$$\begin{aligned} I_{\text{набл}}^i &= \int P^i f(t \rightarrow t' = t - R/c, \bar{\mathbf{p}}', \bar{\mathbf{r}}') d\mathbf{p}' d\mathbf{r}' = \\ &= P^i \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) d\mathbf{r}' = P^i \int \delta(\mathbf{z}' - \mathbf{z}_0(t')) dz', \end{aligned} \quad (\text{П7.6})$$

где $\mathbf{z}_0(t') = \mathbf{z}_0(0) + v_{\parallel} t'$, $t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, \mathbf{r}' — точка наблюдения. Замечая далее, что $\partial t' / \partial z' = \frac{1}{c} (z - z') / |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'| = \frac{1}{c} \cos \theta$, и обозначая $\varphi(z') = z' - \mathbf{z}_0(t')$, имеем

$$\int \delta[\varphi(z')] dz' = \frac{1}{\partial \varphi(z') / \partial z'} = \frac{1}{1 - v_{\parallel} \partial t' / \partial z'} = \frac{1}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}.$$

Следовательно, из (П7.6) находим

$$I_{\text{набл}}^i = P^i / (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta), \quad (\text{П7.7})$$

так что $I_{\text{набл}}^i \neq P^i$, если $\beta_{\parallel} \neq 0$ и $\theta \neq \pi/2$. Этот пример, а также кинетическое рассмотрение, проделанное как в работах [6, 12], так и во многих других (см. например [16]), показывает, что в формулах (П7.2), (П7.3) фигурируют именно мощности P^i , определяемые формулами (П3.8)*, в которых для ультрарелятивистского случая можно сумму по n заменить интегралом ($\Sigma \rightarrow \int dn$), вычисляемым с помощью δ -функций, так что имеем

$$P_{\text{ультра}}^i = \frac{e^2 \omega^2 \gamma}{2\pi c \omega_B} [\xi^2 J_n^2(n\tilde{\beta}); \beta_{\perp}^2 J_n^2(n\tilde{\beta})]_{n \rightarrow \frac{\gamma \omega}{\omega_B} (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)} \quad (\text{П7.8})$$

где $\xi = (\cos \theta - \beta_{\parallel}) / \sin \theta$; $\tilde{\beta} = \beta_{\perp} \sin \theta / (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)$.

* Любопытно, что этот факт (справедливость формул (П7.2), (П7.3)) некоторые авторы, использовавшие формулы излучения индивидуального заряда в качестве исходных, склонны интерпретировать как «счастливое обстоятельство» (см., например [4, 16]). При кинетическом подходе оно возникает вполне закономерно вследствие кинетического рассмотрения.

Для функций Бесселя вида $J_n(n\tilde{\beta})$ существуют приближения трех типов, которые можно назвать соответственно «нерелятивистским» $J_n(n\tilde{\beta}) \approx (n\tilde{\beta})^{(n)} / 2^n n!$, при $n\tilde{\beta} \ll 1$, «слаборелятивистским»

$$J_n(n\tilde{\beta}) \sim \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{2\pi n}} \left(\frac{\tilde{\gamma}-1}{\tilde{\gamma}+1} \right)^{n/2} \exp(n/\tilde{\gamma}) \text{ при } n/\tilde{\gamma}^3 \gg 1, \quad (\text{П7.9})$$

и «ультрарелятивистским»

$$J_n(n\tilde{\beta}) \approx \frac{1}{\pi\tilde{\gamma}\sqrt{3}} K_{1/3} \left(\frac{n}{3\tilde{\gamma}^3} \right); \quad J'_n(n\tilde{\beta}) \approx \frac{1}{\pi\tilde{\gamma}^2\sqrt{3}} K_{2/3} \left(\frac{n}{3\tilde{\gamma}^3} \right) \quad (\text{П7.10})$$

при $n \gg 1$, $\tilde{\gamma} \gg 1$, где

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\parallel}^2}} = \gamma \frac{\sin \theta}{\kappa} (1 + \xi \operatorname{ctg} \theta), \quad \xi = \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta}, \quad \kappa = \sqrt{1 + \xi^2 \gamma^2}.$$

Полагая $\beta_{\parallel} = \beta \cos \theta$, можно видеть, что при $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \gg 1$ в (П7.10) важны малые ξ и тогда приближенно $\xi = \theta - \theta \ll 1$, $\tilde{\gamma} = \gamma \sin \theta / \kappa$, а формулы (П7.8) принимают вид

$$P^{1,2} = A\gamma x^2 \{ x^2 (x^2 - 1) K_{1/3}^2(x\kappa^3/2); x^4 K_{2/3}^2(x\kappa^3/2) \}, \quad (\text{П7.11})$$

где $A = 3e^2 \omega_B / 8\pi c^3$, $x = 2\omega / 3\omega_B \gamma^2 \sin \theta$. Если частицы распределены сферически симметрично, то мощности (П7.11) можно усреднить по углу θ , и тогда

$$\bar{P}^i = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} P^i 2\pi \sin \theta d\theta \approx \frac{\sin \theta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P^i d\xi = A \sin \theta F^i(x); \quad (\text{П7.12})$$

$$F^{1,2}(x) = \frac{\pi x}{2\sqrt{3}} \left[\int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz \mp K_{2/3}(x) \right].$$

Наконец, для степенного распределения электронов (П7.1) из формулы (П7.2), (П7.3) и (П7.12) находим

$$\eta^i(s) = \int \bar{P}^i N \frac{d\gamma}{\gamma^s} = AN \lambda_s^i \sin \theta \left(\frac{\sin \theta}{\omega / \omega_B} \right)^{\frac{s-1}{2}}, \quad (\text{П7.13})$$

где численные множители

$$\lambda_s^{1,2} = \frac{\pi 3^{s/2}}{24(s+1)} \left(\frac{s}{4} - \frac{13}{12} \right)! \left(\frac{s}{4} - \frac{5}{12} \right)! \left[\left(s + \frac{7}{3} \right) \pm (s+1) \right].$$

Коэффициенты поглощения в соответствии с формулой (П7.4) равны

$$\alpha^i(s) = \frac{8\pi^3}{m\omega_B^2} \frac{NA}{\sin \theta} (s+2) \lambda_{s+1}^i \left(\frac{\sin \theta}{\omega / \omega_B} \right)^{\frac{s+4}{2}}. \quad (\text{П7.14})$$

Поток излучения, выходящий из слоя плазмы с однородным полем, равен

$$I^i = \frac{\eta^i}{\alpha^i} (1 - \exp(-\alpha^i L)) = \begin{cases} \eta^i L & \text{при } \alpha^i L \ll 1, \\ \eta^i / \alpha^i & \text{при } \alpha^i L \gg 1. \end{cases}$$

Таким образом, для высоких частот, где поглощение не играет роли, имеем спектр $I^i \sim \eta^i \sim \omega^{\frac{1-s}{2}}$ со степенью поляризации

$$\rho(\omega \gg \omega^*) = \frac{I^{(2)} - I^{(1)}}{I^{(2)} + I^{(1)}} = \frac{\lambda_s^{(2)} - \lambda_s^{(1)}}{\lambda_s^{(2)} + \lambda_s^{(1)}} = \frac{s+1}{s+7/3}, \quad (\text{П7.15})$$

в то время как для запертых частот имеем спектр

$$I^i(\omega \ll \omega^*) = \frac{\eta^i}{\alpha^i} = \frac{m\omega^2}{8\pi^3} \frac{\lambda_s^i}{(s+2)\lambda_{s+1}^i} \sqrt{\frac{\omega/\omega_B}{\sin\theta}} \sim \omega^{5/2} \quad (\text{П7.16})$$

со степенью поляризации

$$\rho(\omega \ll \omega^*) = \frac{I^{(1)} - I^{(2)}}{I^{(1)} + I^{(2)}} = \frac{\lambda_s^{(1)}\lambda_{s+1}^{(2)} - \lambda_s^{(2)}\lambda_{s+1}^{(1)}}{\lambda_s^{(1)}\lambda_{s+1}^{(2)} + \lambda_s^{(2)}\lambda_{s+1}^{(1)}} = \frac{3}{6s+13}. \quad (\text{П7.17})$$

Приведенные формулы определяют основные закономерности циклотронного излучения в ультрарелятивистском случае. Заметим, что спектр запертых гармоник (П7.16), полученный впервые в работе [13], играет, по-видимому, важную роль в формировании спектра космических лучей, которые по современным представлениям образуются в плазменных туманностях путем ускорения частиц при их взаимодействии с волнами [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трубников Б. А., Бажаиова А. Е. В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М., Изд-во АН СССР, 1958, т. III, с. 121; Trubnikov B. A., Kudryavtsev V. S. Proc. II U. N. Conf. in Geneva, 1958, v. 31, p. 93.
2. Drummond W. E. Rosenbluth M. N. Phys. Fluids, 1963, 6, 276.
3. Rosenbluth M. N. Nucl. Fusion, 1970, 10, 340.
4. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. Пер. с англ. М., «Мир», 1971, с. 253.
5. Capobbio E., Giuffre S. Nucl. Fusion, 1970, 10, 189.
6. Крајсік R. A. Nucl. Fusion, 1973, 13, 7.
7. Трубников Б. А. В сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М., Изд-во АН СССР, 1958, т. III, с. 104.
8. Зубарев Д. Н. Климов В. Н. В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М., Изд-во АН СССР, 1958, т. I, с. 249.
9. Арцимович Л. А. и др. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., IAEA, Вienna, 1969, v. 1, p. 172.
10. Golovin I. N. e. a. Proc. Nucl. Fusion Reactors Conf., Culham, 1969, p. 194
11. Соловьев Л. С., «Атомная энергия», 1971, 30, 14.

12. **Mercier C.** Int. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961, p. 95.
13. **Трубников Б. А.** В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М., Изд-во АН СССР, 1958, т. IV, с. 305; «Докл. АН СССР», 1958, **118**, 913.
14. **Kawabata K.** Publ. Astron. Soc. Japan, 1964, **16**, 30.
15. **Мычелки Э. Г.** «Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.», 1967, № 4, с. 83; «Астрономический журнал», 1968, **45**, 408.
16. **Гиизбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И.** «Успехи физ. наук», 1968, **94**, 63; **Scheuer P. A. G.** Astrophys J. 1968, 151, L, 139; см. также [4], с. 224.
17. **Сазонов В. Н., Цытович В. Н.** «Изв. вузов. Сер. радисфиз.», 1968, 11.
18. **Цытович В. Н.** Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.

СОДЕРЖАНИЕ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЫ. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев	3
Введение	3
Глава 1. Взаимодействие волиа—волна	6
§ 1.1. Резонансное взаимодействие плазменных волн	6
§ 1.2. Взаимодействие волн конечной амплитуды	18
§ 1.3. Параметрические неустойчивости высших порядков	24
§ 1.4. Приближение геометрической оптики	27
§ 1.5. Взаимодействие волн в приближении хаотических фаз	28
§ 1.6. Слабая турбулентность в терминах кинетического уравнения для волн	34
§ 1.7. Неустойчивость мод с отрицательной энергией	39
§ 1.8. Адиабатическое приближение (взаимодействие между высокочастотными и низкочастотными волнами)	42
Глава 2. Взаимодействие волиа—частица	45
§ 2.1. Взаимодействие волна — частица в случае монохроматической волны	45
§ 2.2. Случай многих волн (одномерный спектр)	54
§ 2.3. Случай многих волн (двух- и трехмерные спектры)	61
§ 2.4. Влияние столкновений на взаимодействие волна—частица	67
§ 2.5. Квазилинейная теория электромагнитных мод	72
§ 2.6. Нерезонансное взаимодействие волна — частица	77
§ 2.7. Квазилинейная теория дрейфовой неустойчивости	84
Глава 3. Нелинейное взаимодействие волна—частица	94
§ 3.1. Ленгмюровская турбулентность	94
§ 3.2. Ионно-звуковая турбулентность	101
§ 3.3. Индуцированное рассеяние света в плазме (основные уравнения)	104
§ 3.4. Релаксация линии излучения в плазме	108
Глава 4. Аномальное сопротивление в плазме	114
§ 4.1. Постановка задачи. Законы сохранения	114
§ 4.2. Аномальное сопротивление вследствие ионно-звуковой неустойчивости	120
§ 4.3. Квазилинейные эффекты в аномальном сопротивлении при ионно-звуковой неустойчивости	124
§ 4.4. Аномальное сопротивление из-за других типов неустойчивости	135
Заключение	138
Приложение	140
Список литературы	142

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев	146
Введение	146
1. Линейная трансформация воли в неоднородной плазме	148
§ 1. Типы «пересечения» решений и особенностей поля электромагнитной волны в неоднородной плазме	148
1. Классификация «пересечения» решений в случае одномерной неоднородности	148
2. Об особенностях поля электромагнитной волны в холодной плазме с одномерной и двумерной неоднородностью параметров	150
§ 2. Надбарьерный тип трансформации	154
§ 3. Аномальный тип трансформации волн	159
1. Аномальный тип пересечения. Вводные замечания	159
2. Методы исследования аномального пересечения	160
3. Некоторые физические особенности и примеры аномальной трансформации волн	167
§ 4. Некоторые особенности трансформации волн и переходного излучения при взаимодействии пучков и зарядов с плазмой	172
1. Влияние «пересечения» колебаний на режим работы плазменно-пучкового разряда	172
2. Анизотропия переходного излучения зарядов в слабонеоднородной изотропной плазме	178
§ 5. Каналирование и поглощение электромагнитных волн в области особенности поля при двумерной неоднородности плазмы	180
1. О возможности одновременного поглощения и каналирования энергии в неоднородной среде	180
2. Поглощение электромагнитных волн в торондальных системах	182
2. Генерация гармоник, распадные процессы и спектры излучения в неоднородной плазме	184
§ 1. Особенности нелинейного взаимодействия волн в неоднородной плазме	184
1. Нелинейное смешивание волн	184
2. Распад волны конечной амплитуды	185
§ 2. Генерация гармоник электромагнитной волны в неоднородной плазме	187
§ 3. Спектр излучения захваченного в плазменной полости	190
3. Просветление волновых барьеров в неоднородной плазме	192
§ 1. Вводные замечания	192
§ 2. Нелокальные эффекты в неоднородной плазме	193
1. Линейная регенерация и всплески поля необыкновенной волны в неоднородном магнитном поле	193
2. Линейная регенерация волны при неполном фазовом перемешивании резонансных частиц	198
3. Линейная нелокальная трансформация волн в неоднородной плазме	200
4. Нелинейная нелокальная трансформация поперечных волн в продольные	201
Список литературы	202
«НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ» ТЕОРИЯ ДИФфуЗИИ. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев	205
Введение	205
Глава 1. Кинетическая теория равновесия плазмы в аксиально симметричных системах	210
§ 1. Коэффициенты переноса разреженной плазмы (сводка результатов)	210

§ 2. Коэффициенты переноса разреженной плазмы (качественное рассмотрение)	211
§ 3. Движение отдельных частиц	217
§ 4. Простая модель равновесия плазмы в торе	220
§ 5. Учет электрон-электронных соударений	227
§ 6. Неоклассическая теплопроводность ионов	229
§ 7. «Пинчевание» запертых частиц	230
§ 8. Термоэлектрические и термодиффузионные явления	232
§ 9. Коэффициенты переноса в не очень разреженной плазме	233
§ 10. Равновесие разреженного плазменного шнура в Токамаке и предельное давление плазмы	236
§ 11. Тепловой баланс плазмы в «Токамаке»	240
§ 12. Неоклассическая диффузия в «Токамаке» с магнитными поверхностями произвольной формы	243
Глава 2. Тороидальные стеллараторы	243
§ 1. Дрейфовые траектории «запертых» частиц вблизи осн стелларатора	245
§ 2. Численный расчет движения отдельных частиц в стеллараторе	250
§ 3. Супербанановая диффузия в стеллараторе с малой тороидальностью (качественное рассмотрение)	252
§ 4. Коэффициенты переноса в тороидальном стеллараторе (расчеты частных случаев)	257
§ 5. Диффузия в стеллараторе с разрушенными магнитными поверхностями	264
§ 6. Процессы переноса в крутом стеллараторе	265
Приложение 1	267
Приложение 2	268
Список литературы	271

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЫХОДА ЦИКЛОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ. Б. А. Трубииков 274

Приложение 1	276
Приложение 2	279
Приложение 3	282
Приложение 4	285
Приложение 5	290
Приложение 6	293
Приложение 7	296
Список литературы	299

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ



АТОМИЗДАТ · 1973