

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

ВЫПУСК

8

Под редакцией академика
М. А. ЛЕОНТОВИЧА



АТОМИЗДАТ · МОСКВА · 1974

Вопросы теории плазмы. Сб. статей. Вып. 8. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1974, с. 384.

В восьмом выпуске серии сборников «Вопросы теории плазмы» представлены четыре статьи, в которых рассматриваются различные аспекты магнитогидродинамических течений плазмы. С одной стороны, это теория симметричных стационарных течений идеальной плазмы и плазмооптика, где с использованием некоторых идеализаций получено много общих результатов аналитическими методами. С другой стороны, это расчет двумерных течений в каналах и двумерная магнитогидродинамическая модель плазменного фокуса Z-пинча, в которых численными методами исследованы некоторые течения в плазме с весьма полным учетом физических процессов. Все работы данного выпуска объединены тем, что предметом исследования служат течения плазмы с принципиальной ролью двумерных эффектов.

Таблиц 1, рисунков 115, библиография 190.

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. И. Морозов, Л. С. Соловьев

ВВЕДЕНИЕ

С момента возникновения проблемы магнитного термоядерного реактора (МТР) основные исследования посвящены разработке «высокотемпературной плазмостатики» — теории равновесия и устойчивости конфигураций горячей плазмы, удерживаемых магнитным полем. Однако наряду с этим непрерывно растет интерес к плазмодинамике, т. е. к теории сильных нелинейных волн и течений плазмы. Нелинейным волнам, а также низкотемпературной плазмодинамике, развитой главным образом применительно к проблеме МГД-генераторов, посвящено много обзоров. Поэтому в данной статье рассмотрены лишь течения полностью ионизованной хорошо проводящей плазмы. Разумеется, множество возможных течений такой плазмы необозримо. В связи с этим рассмотрим лишь простейшие случаи, представляющие интерес для ускорения сравнительно плотной ($n \sim 10^{14} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$) плазмы до энергий порядка $0,1 \div 10 \text{ кэВ}$.

Плазменные ускорители [1—5] имеют много общего с ускорителями заряженных частиц и с газодинамическими ускорителями — соплами Лавала. С ускорителями заряженных частиц их роднит использование электрических и магнитных полей, благодаря чему энергии ионов на выходе могут достигать больших значений, существенно превышающих тепловой уровень. В то же время ускоряемая среда, как в газодинамике, остается квазинейтральной и взаимодействие частиц в ней принципиально сильное*, тогда как в обычных ускорителях оно в идеале сколь угодно мало.

Сильное взаимодействие частиц приводит к возможности распространения различных типов волн в плазменном потоке и, кроме того, исключает возможность непосредственного воздействия с помощью внешних полей на частицы, находящиеся внутри потока [6]. Задачи ускорения плазмы оказываются существенно более сложными, чем задачи газодинамики или обычной ускорительной техники.

* Об этом говорит хотя бы сам факт квазинейтральности.

Ускорение плазмы может происходить как стационарно, так и в результате короткого переходного процесса*. В данной работе рассмотрены только стационарные ускорители, т. е. принято, что в каждой точке потока $\partial/\partial t = 0$. Таким образом, не рассматриваются системы, использующие для ускорения стоячие и бегущие волны, а также различного типа неустойчивости.

Возможны различные принципы работы стационарных плазменных ускорителей. Выбор того или иного принципа определяется скоростью истечения плазмы из ускорителя v (и соответственно кинетической энергией частиц на выходе) и расходом массы m за секунду.

ГЛАВА I

МЕХАНИЗМЫ УСКОРЕНИЯ

§ 1. Микроскопическая картина ускорения плазмы [2, 3, 6]

В выходящем из ускорителя плазменном потоке ионы и электроны имеют одну и ту же направленную скорость. Однако энергия ионов на три-четыре порядка превосходит энергию электронов. Поэтому, пока речь идет о скоростях около 10^8 см/сек, говорить о необходимости ускорять электроны вообще не приходится. Следовательно, ускорение плазмы — это ускорение ионов при сохранении квазинейтральности. Предполагая, что ускорение всех частиц ионной компоненты плазмы происходит практически одинаково^{2*}, напишем следующее уравнение для движения «типичного» иона:

$$M \frac{dv_i}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right) + \mathbf{F}_{ii} + \mathbf{F}_{ie}. \quad (1.1)$$

Здесь M и e — масса и заряд иона; \mathbf{F}_{ii} , \mathbf{F}_{ie} — силы, действующие на данный ион в результате столкновений с ионами и электронами соответственно; \mathbf{E} и \mathbf{H} — средние микроскопические поля, действующие на рассматриваемый ион.

Из четырех сил, входящих в уравнение (1.1), непосредственно ускорять, т. е. увеличивать, энергию ионов могут лишь три силы, так как магнитное поле не влияет на энергию ионов.

Столкновения ионов с ионами (сила \mathbf{F}_{ii}) могут приводить лишь к перераспределению энергии по степеням свободы и, в частности, к переходу тепловой энергии в направленную. В рамках гидродинамической модели [7]

$$(\mathbf{F}_{ii})_\alpha = - \left(\frac{1}{n_i} \nabla p_i \right)_\alpha - \frac{1}{n_i} \cdot \frac{\partial \pi_{i\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \quad (1.2)$$

* Сравним, например, истечение из сопла и взрыв в обычной газодинамике.

^{2*} Как отмечалось выше, не рассматриваются системы, в которых из-за «турбулентности» ускоряются отдельные группы частиц, как, например, в быстрых пинчах.

где $\pi_{i\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений, а p_i — ионное давление. Для того чтобы сила F_{ii} играла существенную роль в разгоне, необходимо, чтобы на входе в систему ионы обладали высокой температурой или в процессе ускорения существовали некоторые механизмы подогрева ионов.

Первый случай не интересен, поскольку при этом система работает как обычное газодинамическое сопло. Второй случай требует быстрого протекания следующей цепочки процессов:

$$\begin{aligned} \text{Нагрев электронов джоулевым} &\rightarrow \text{Нагрев ионов электронами} \rightarrow \\ &\text{теплом} \\ \rightarrow \text{Переход тепловой энергии ионов в направленную.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Такие процессы реализуются в плазматронах.

Оценим область параметров, при которых цепочка (1.3) эффективна, предполагая допустимость расчета в рамках теории парных столкновений. В этом случае наиболее медленным будет процесс передачи энергии от электронов к ионам, поскольку он идет с характерным временем [7]

$$\tau_{ie} \sim \tau_e M/m, \quad (1.4)$$

где τ_e — время электрон-электронных столкновений;

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m}(kT_e)^{3/2}}{4\sqrt{2}\pi\lambda e^4 Z^2 n_i} = \frac{3,5 \cdot 10^4}{(\lambda/10)} \frac{(T_e)^{3/2}}{Zn}, \quad (1.5)$$

m — масса электрона; Z — заряд иона ($Zn_i = n_e = n$); λ — кулоновский логарифм. Время τ_{ie} необходимо сравнить с пролетным временем

$$\tau_0 \sim L/v_{\text{макс}}, \quad (1.6)$$

в течение которого ион проходит ускоряющую систему длиной L . Если $\tau_{ie} \ll \tau_0$, то цепочка процессов (1.3) может быть существенной для ускорения. Рассмотрим, например, водород, для которого $L = 10$ см; $Z = 1$; $v_{\text{макс}} = 10^7$ см/сек*; $n = 10^{16}$ 1/см³. При $T_e = 1$ эв

$$\tau_0/\tau_{ie} \approx 100. \quad (1.7)$$

При этих условиях сила F_{ii} уже может быть эффективна, поскольку минимально необходимое значение $\tau_0/\tau_{ie} \approx \mathcal{E}_i/kT_e$, где \mathcal{E}_i — энергия иона.

Сила F_{ie} возникает из-за столкновений электронов с ионами («электронный ветер»). В рамках гидродинамической модели плазмы эта сила [7]

$$F_{ie} = -en\mathbf{j}/\sigma \equiv -en\mathbf{E}^*, \quad \mathbf{E}^* \equiv \mathbf{j}/\sigma, \quad (1.8)$$

* Что соответствует энергии ионов порядка 50 эв.

где j — плотность тока, а σ — проводимость. Если относительная скорость электронов $|v_i - v_e| \gg v_{\text{макс}}$, то эта сила существенна, уже при $\tau_0 \sim \tau_{ie}$, поскольку характерным временем опять является τ_{ie} . Если же скорость электронов существенно больше скорости $v_{\text{макс}}$, то влияние электронного ветра может стать существенным при более низких плотностях. Следует отметить, что при большой относительной скорости может начаться развитие различного рода «турбулентных» процессов, резко увеличивающих увеличение ионов электронами.

Об эффективности электронного ветра в условиях кулоновской, а не турбулентной проводимости, говорят следующие числа. Пусть $j = 300 \text{ а/см}^2$, $T_e = 1 \text{ эв}$ и, следовательно, $\sigma = 10^{13}$ абс. ед. Тогда эффективная напряженность поля $E^* = j/\sigma \sim 30 \text{ в/см}$. Если же T_e возрастает, то $E_{\text{кул}}^*$ быстро спадает и на ее место может выступить $E_{\text{турб}}^*$.

Кроме двух столкновительных механизмов ускорения имеется еще механизм ускорения ионов под действием существующего внутри плазмы электрического поля (сила eE). Этот механизм можно использовать для ускорения плазмы любой плотности. Задача ускорения в таких системах сводится к созданию в объеме электрического поля нужной величины и конфигурации.

§ 2. Условия существования электрического поля в плазменном объеме

Трудность получения в плазме достаточно высокой напряженности электрического поля в первую очередь связана с большой подвижностью электронов. Поэтому для выяснения условий, необходимых для поддержания электрического поля в плазме, нужно рассматривать уравнение, описывающее динамику электронной компоненты [6].

Благодаря высокой подвижности электронов в широком диапазоне параметров их можно считать имеющими максвелловское распределение. Таким образом, пренебрегая электронной вязкостью, приходим к следующему упрощенному гидродинамическому уравнению [7]:

$$m \frac{dv_e}{dt} = -\frac{1}{n} \nabla p_e - e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right) + e \frac{\mathbf{j}}{\sigma}. \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.9) видно, что если отбросить член, описывающий инерцию электронов и существенный лишь при наличии каких-либо разрывов (в частности, в пристеночных слоях), то поддержание электрического поля в плазме возможно из-за электронной температуры, трения электронов о ионы и силы Лоренца

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{en} \nabla p_e + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}]. \quad (1.10)$$

Рассмотрим каждую возможность в отдельности.

1. Если $j/\sigma \approx 0$, $\mathbf{H} \approx 0$, то

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{en} \nabla p_e, \quad (1.11)$$

где $p_e = nkT_e$. В этом случае можно получить высокоэнергетичные ионы лишь при наличии высокой электронной температуры. Подставляя (1.11) в уравнение движения холодных ионов

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}, \quad (1.12)$$

получаем обычное газодинамическое уравнение

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p, \quad (1.13)$$

где $\rho = Mn$; $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$; $p = p_e$.

Таким образом, рассматриваемый случай эквивалентен классическому газодинамическому течению [8] с электронным давлением и ионной инерцией.

Использовать плазму с высокой электронной температурой, повидимому, целесообразно лишь для водорода, поскольку в других газах будут большие потери на излучение. При анализе этого случая необходимо знать поведение T_e , что требует учета диссипативных процессов.

2. Если электрическое поле в плазме поддерживается омическим трением (1.10), а $T_e \rightarrow 0$ и $[\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \rightarrow 0$, то ускорения ионов не происходит. Действительно, как видно из уравнений (1.1), (1.8) и (1.10), одна и та же комбинация членов

$$\mathbf{E}_{\text{эфф}} = \mathbf{E} + \mathbf{j}/\sigma \quad (1.14)$$

входит как в ионное, так и в электронное уравнение. И, следовательно, если она равна нулю в электронном уравнении (1.10), то она равна нулю и в ионном. Последнее обстоятельство связано с тем, что ускорение ионов электрическим полем компенсируется противоположно направленным ускорением под действием электронного ветра*.

Из уравнения (1.10) видно, что ускорение ионов под действием \mathbf{E} или \mathbf{j}/σ будет лишь в том случае, если отличны от нуля либо ∇p_e , либо \mathbf{H} .

3. Наконец, электрическое поле в плазме может существовать и при $T_e \rightarrow 0$, $\mathbf{j}/\sigma \rightarrow 0$. В этом случае

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}]. \quad (1.15)$$

Ускорители плазмы, использующие электрическое поле (1.15), мы будем называть лоренцовыми.

* Некоторое ускорение ионов тем не менее происходит, но оно имеет порядок m/M .

Уравнение (1.15) показывает, что для таких ускорителей принципиально необходимо магнитное поле, силовые линии которого играют роль своеобразных сеток, мешающих электронам двигаться вдоль электрического поля (рис. 1). Скорость дрейфа электронов поперек полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , как это следует из (1.15),

$$v_{e\perp} = c/[\mathbf{E}\mathbf{H}]/H^2. \quad (1.16)$$

Из формулы (1.15) вытекают два важных следствия.

1. Силовые линии магнитного поля являются эквипотенциалами, так как

$$\mathbf{E}\mathbf{H} = 0. \quad (1.17)$$

Этот вывод справедлив с точностью до отброшенных членов в формуле (1.15). В частности [9], силовая линия маг-

нитного поля является эквипотенциалью с точностью до величин порядка электронной температуры*.

2. Дрейф электронов происходит вдоль эквипотенциальных поверхностей, так как

$$\mathbf{E}\mathbf{v}_e = 0 \quad (1.18)$$

или

$$(\mathbf{v}_e \nabla)\varphi = 0, \quad (1.18a)$$

где φ — потенциал электрического поля.

Лоренцовы системы по характеру дрейфа электронов можно разбить на системы с замкнутым и с разомкнутым дрейфом электронов. Первый тип систем подробно рассмотрен в статье [9]. В настоящей статье рассматриваются главным образом аксиально симметричные системы с разомкнутым дрейфом (рис. 2). В таких системах существуют продольное электрическое и азимутальное магнитное поля, приводящие к радиальному дрейфу электронов, который обрывается на электродах 1 и 2.

* Подробнее см. статью А. И. Морозова, С. В. Лебедева (стр. 247 наст. сб.).

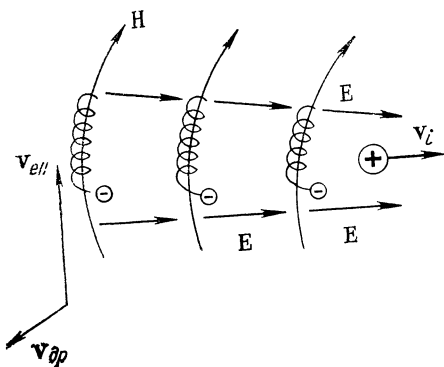


Рис. 1.

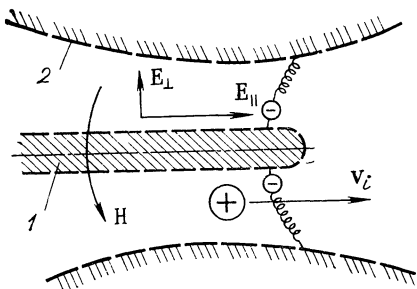


Рис. 2.

§ 3. Основные уравнения и параметр обмена ξ

Будем рассматривать лишь бездиссипативные процессы, пренебрегая не только вязкостью и теплопроводностью, но и омическим сопротивлением. Для описания процессов используем упрощенную систему уравнений двухжидкостной гидродинамики:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i &= 0 \text{ (а); } & \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e &= 0 \text{ (б); } \\ \frac{M}{e} \cdot \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} &= -\frac{\nabla p_i}{en_i} + \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right) \text{ (в); } \\ \frac{m}{e} \cdot \frac{d_e \mathbf{v}_e}{dt} &= -\frac{\nabla p_e}{en_e} - \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right) \text{ (г); } \\ d_e S_e / dt &= 0 \text{ (д); } & d_i S_i / dt &= 0 \text{ (е). } \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Эту систему необходимо дополнить уравнениями Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} e (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \text{ (а); } \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \text{ (б); } & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \text{ (в); } \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e (n_i - n_e) \text{ (г). } \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Здесь S_e , S_i — энтропия электронов и ионов соответственно.

При выборе для расчетов уравнений гидродинамического типа мы предполагали, что плазма достаточно плотная, т. е. свободные пробеги как ионов, так и электронов малы. В диапазоне плотностей $n > 10^{15} \text{ см}^{-3}$ это допущение достаточно разумно при тех T_i и T_e , которые наблюдаются в эксперименте (см. наст. сб., стр. 88).

Разумеется, в случае достаточно редкой плазмы последовательное описание возможно только в рамках кинетических уравнений. Однако, если считать ионы достаточно холодными и пренебречь разбросом их скоростей, то система уравнений (1.19 б, в) эквивалентна бесстолкновительному кинетическому уравнению для ионов.

Наряду с двухжидкостной моделью будем использовать также одножидкостную модель плазмы. Переход от двухжидкостной модели к одножидкостной происходит при следующих упрощениях:

$$\left. \begin{aligned} m \rightarrow 0; & \quad n_i \rightarrow n_e; \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_i & \rightarrow \mathbf{v}_e, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

так что остается лишь одно уравнение непрерывности. Складывая уравнения (1.19в) и (1.19г), получаем уравнение Эйлера

$$Mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}], \quad p = p_i + p_e. \quad (1.22a)$$

Уравнение (1.19г) превращается в обычный закон Ома:

$$\frac{\nabla p}{en} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = 0. \quad (1.22б)$$

Кроме того, получается одно уравнение для суммарной энтропии:

$$dS/dt = 0, \quad S = S_i + S_e. \quad (1.22в)$$

Часто используемой моделью полностью ионизованной плазмы является модель, которая получается из (1.19) с помощью не двух, как в случае (1.21), а одного предельного перехода:

$$m \rightarrow 0, \quad n_i \rightarrow n_e. \quad (1.23)$$

Такую модель часто называют «одножидкостной с учетом эффекта Холла»:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} &= 0 & (а); \\ Mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p_i + en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right) & (б); \\ 0 &= \frac{\nabla p_e}{en} + \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right) & (в); \\ \frac{d_e S_e}{dt} &= 0 & (г); \quad \frac{d_i S_i}{dt} = 0 & (д). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Из системы (1.24) вытекает следующее важное следствие: магнитное поле заморожено не в ионы, а в электроны [10—13]. Действительно, возьмем ротор от уравнения закона Ома (1.24в) и учтем уравнение (1.24г) и условие

$$\partial n / \partial t + \operatorname{div} n\mathbf{v}_e = 0, \quad (1.25)$$

тогда получим искомое уравнение замороженности*

$$\frac{d_e}{dt} \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = (\mathbf{v}_e \nabla) \frac{\mathbf{H}}{\rho}. \quad (1.26)$$

Уравнения одножидкостной газодинамики (1.22) не учитывают этого обстоятельства и явления переноса энтропии как вдоль электронных, так и вдоль ионных траекторий.

Как видно из (1.21), реальный критерий малости эффекта Холла—выполнение неравенства

$$\frac{|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e|}{|\mathbf{v}_i|} \ll 1. \quad (1.27)$$

* Действительно, вычитая (1.25) из (1.24а), получаем уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, справедливое при квазистационарных (в электродинамическом смысле) процессах.

Этот локальный критерий можно заменить интегральным [14]:

$$\xi = \frac{I_p}{I_{\dot{m}}} \ll 1. \quad (1.28)$$

Здесь I_p — разрядный ток, а $I_{\dot{m}} = em/M$ — расход вещества с атомной массой M в токовых единицах. Подробное обоснование именно такого определения величины ξ дано ниже (см. гл. 4 § 3) [15].

Параметр ξ называем параметром обмена, поскольку он показывает, сколько раз ионы, проходящие канал ускорителя, меняют компенсирующие их объемный заряд электроны. Целесообразность введения параметра обмена достаточно хорошо иллюстрируется рис. 3, на котором показано, что к работающему плазменному ускорителю подходят два материальных потока I_p и $I_{\dot{m}}$. Поэтому естественно ввести безразмерный параметр как отношение величин этих потоков.

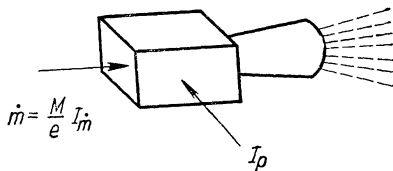


Рис. 3.

В заключение отметим одну полезную формулу, выражающую связь напряжения V , приложенного к ускорителю, с энергией частиц, выходящих из ускорителя ($Mv_{\text{макс}}^2/2$). Эта формула вытекает из закона сохранения энергии $m\dot{v}_{\text{макс}}^2/2 = IV\eta$

и имеет вид

$$\frac{Mv_{\text{макс}}^2}{2} = eV\xi\eta. \quad (1.29)$$

Здесь η — коэффициент полезного действия ускорителя; величина $\xi\eta$ называется «коэффициентом трансформации».

§ 4. Возмущения плазменного потока

В обычных ускорителях заряженных частиц поля, действующие на отдельную частицу, определяются внешними токами и внешними зарядами и поэтому могут считаться заданными. Некоторое искажение этих полей, обязанное взаимодействию частиц, рассматривают обычно как малое возмущение, или некое досадное обстоятельство, вызванное просто «перегрузкой» ускорителя. В теории плазменных ускорителей картина качественно иная, здесь взаимодействие частиц настолько сильное, что учет этого взаимодействия должен быть заложен уже в исходные уравнения в виде самосогласованной системы уравнений Максвелла и уравнений движения. Соответственно воздействовать на частицу в плазменном потоке можно, только возмущая все течение потока. Поэтому создание ускорителя плазмы —

это прежде всего создание таких условий на поверхности плазменного потока, которые, возмущая все течение, приводят внутри объема к полям обеспечивающим нужное ускорение ионов.

Общее исследование этого цикла вопросов только начинается и потому рассмотрим лишь качественную картину.

Как известно, в газодинамике для получения сверхзвукового потока газа с нужным распределением скоростей необходимо специальным образом подобрать профиль сопла, чтобы воздействие стенок на поток формировало нужную картину течения. Наиболее четкая картина газодинамических течений получается при рассмотрении стационарных сверхзвуковых течений с помощью так называемого метода характеристик [6].

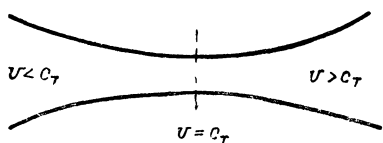


Рис. 4.

Характеристиками называются линии, по которым передаются возмущения. Заметим, что на опыте их можно наблюдать различными способами. Пока мы далеки от этого

в плазменных ускорителях, однако подобная программа с теми или иными особенностями должна быть реализована.

1. Закон обращения воздействий. Еще в прошлом веке было замечено [17], что изменение геометрии канала по-разному влияет на звуковой и сверхзвуковой потоки. Этим, например, обусловлен тот факт, что для плавного перехода дозвукового течения в сверхзвуковое, каналу необходимо придать вид сопла (рис. 4). Поясним сказанное элементарным расчетом. Уравнения, описывающие стационарное течение идеального газа в узком канале, можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho v f &= \text{const}; & \frac{v^2}{2} + W(\rho) &= \text{const}; \\ S &= \text{const}; & W(\rho) &= \int \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (1.30a)$$

Здесь f — сечение канала; S — энтропия; W — энтальпия. Продифференцируем эти уравнения и введем скорость звука $c_T^2 = (\partial p / \partial \rho)_{S = \text{const}}$. Тогда после исключения $d\rho$ получим связь dv и df^* :

$$(1 - v^2/c_T^2)(dv/v) = -df/f. \quad (1.30b)$$

Отсюда непосредственно видно, что для ускорения дозвукового потока сечение канала должно уменьшаться, а для ускорения сверхзвукового потока — расширяться. Обобщение этого закона на случай произвольных воздействий на поток в узком канале дано в работах [18].

Сформулируем теперь закон обращения воздействий применительно к потоку произвольной природы и покажем, что обращение

* Уравнение (1.30b) называют уравнением Гююнио.

воздействий имеет резонансный характер и аналогично изменению фазы колебаний маятника под действием внешней периодической силы при переходе через резонанс.

Начнем с простого примера, когда на однородный газ действует малая периодическая сила

$$F = A \sin \omega (t - x/v_0), \quad (1.31)$$

связанная с волной, бегущей с некоторой скоростью v_0 .

Линейная система уравнений, описывающая соответствующий одномерный процесс,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -c_T^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + F \quad (1.32)$$

имеет решение

$$\left. \begin{aligned} v &= -\frac{A}{\omega \rho_0} \cdot \frac{\cos \omega (t - x/v_0)}{1 - c_T^2/v_0^2}; \\ \rho &= -\frac{\rho_0}{v_0} \cdot \frac{A}{\omega} \cdot \frac{\cos \omega (t - x/v_0)}{1 - c_T^2/v_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Отсюда видно, что при переходе фазовой скорости возмущения v_0 через скорость звука знак возмущения меняется на противоположный. При этом одинаковые по абсолютной величине силы F приводят к тем большим возмущениям, чем ближе фазовая скорость v_0 к скорости звука. Таким образом, влияние имеет явно резонансный характер.

Для того чтобы установить связь рассматриваемого простого примера с принципом обращения воздействий, достаточно перейти в систему отсчета, связанную с силой F , т. е. в «неподвижную» систему координат*: $x \rightarrow x - v_0 t$, $t \rightarrow t$. В этом случае уравнения (1.32) перепишем в виде:

$$v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \rho_0 v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -c_T^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + F. \quad (1.34a)$$

Отсюда

$$(v_0^2 - c_T^2) \partial v / \partial x = v_0 F / \rho_0, \quad (1.34b)$$

а это не что иное, как уравнение Гюгонио для рассматриваемого случая.

Перейдем к общей формулировке принципа обращения воздействий. Рассмотрим медленно изменяющееся в пространстве и во времени течение, на которое действует достаточно высокочастотное возмущение

$$F \sim \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1.35)$$

Здесь буквой F обозначено некое n -компонентное возмущение.

* Силу F естественно считать неподвижной по отношению к стенкам канала, в котором течет газ.

Систему линеаризованных уравнений движения среды, описывающих влияние возмущений, запишем в виде

$$L (\partial/\partial t, \partial/\partial x)u = F, u = (\rho, v_x, \dots). \quad (1.35б)$$

В пределах сравнительно небольшой части потока коэффициенты в системе уравнений (1.35б) можно считать постоянными.

Если $F = 0$, то уравнение

$$L (\partial/\partial t, \partial/\partial x)u = 0 \quad (1.36)$$

описывает собственные колебания среды. Полагая

$$u \sim \exp (i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

получаем дисперсионное уравнение

$$D (\omega, \mathbf{k}) \equiv \text{Det } L = 0, \quad (1.37а)$$

которое имеет n корней

$$\omega_i = \omega_i (\mathbf{k}), i = 1, \dots, n. \quad (1.37б)$$

В том случае, когда заданному \mathbf{k} отвечает вещественное значение ω , волну можно рассматривать как стационарное течение жидкости. Действительно, переходя в систему координат, движущуюся относительно среды со скоростью \mathbf{v}_0 , получаем вместо частоты ω

$$\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 \quad (1.37в)$$

и при вещественном ω можно подобрать* такое $\mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{k}$, чтобы возмущение стало стационарным, т. е. $\omega' = 0$. Если ω — комплексная величина, то с помощью преобразования (1.37в) можно исключить только вещественную часть и тогда в этой системе отсчета волна будет монотонно затухать или нарастать.

Пусть теперь $F \neq 0$. Полагая все величины пропорциональными $\exp (i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$, получаем

$$LU = \mathcal{F}, \quad (1.38)$$

где U и \mathcal{F} — амплитуды, а $L = L (\omega, \mathbf{k})$. Решение уравнения (1.38) относительно какой-либо компоненты u_α , имеет вид

$$u_\alpha = \text{Det } (L, \mathcal{F})_\alpha / \text{Det } L. \quad (1.39)$$

Здесь $\text{Det } (L, \mathcal{F})_\alpha$ — детерминант, полученный из $\text{Det } L$ заменой α -столбца правой частью уравнения (1.38). Очевидно,

$$\text{Det } L = \prod_{i=1}^n (\omega_1 - \omega_i (\mathbf{k})), \quad (1.40)$$

* Предполагаем, что фазовая скорость v_ϕ меньше скорости света.

где $\omega_i(\mathbf{k})$ — корни дисперсионного уравнения. В неподвижной системе отсчета $\omega = 0$, $\omega_i = \omega_i(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}_0$.

Если для данного \mathbf{k} все ω_i различны и вещественны, то при изменении \mathbf{v}_0 можно последовательно перейти n критических скоростей и, следовательно, $\text{Det}L$ n раз изменит знак.

При переходе через критическую скорость детерминант $\text{Det}(L\mathcal{F})_\alpha$, вообще говоря, не изменяет знака и поэтому u_α имеют разные знаки в зависимости от того, является течение по отношению к данной гармонике (\mathbf{k}) докритическим или закритическим.

Если среда обладает достаточно сильной дисперсией, то для каждого $|\mathbf{k}|$ «обращение воздействий» имеет место при своей скорости потока \mathbf{v}_0 , даже если направление \mathbf{k} остается неизменным. Если же дисперсией можно пренебречь (как в случае звуковых волн), то для всех $|\mathbf{k}|$ при фиксированных $\mathbf{k}^0 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ обращение воздействия будет иметь место при одной и той же скорости \mathbf{v}_0 . В связи с этим заметим, что для потока идеального газа в канале обращение воздействий вовсе не обязано происходить при $v_0 = c_T$, как это вытекает из уравнения Гюгонио. Действительно, если \mathbf{k}^0 направлено не по потоку, а под углом, то для обращения воздействия необходимы скорости $v_0 > c_T$, где

$$v_0 = \frac{c_T}{\cos(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{v}}_0)}. \quad (1.41)$$

Уравнение Гюгонио (1.30б) выведено для узких каналов, в которых вектор \mathbf{k} направлен по потоку.

2. Ускорение на разных модах. В плазме могут распространяться различные типы колебаний, называемые также ветвями или модами. Поэтому можно пытаться создавать такие граничные условия, чтобы в объеме плазмы генерировались возмущения лишь одной моды и обеспечивался процесс ускорения. Такие ускорители естественно называть ускорителями на одной моде. Например, в рамках одножидкостной магнитной гидродинамики возможны следующие ускорители на одной моде: альфвеновские (A -ускорители), быстрые магнитозвуковые (R -ускорители) и медленные магнитозвуковые (S -ускорители) (см. гл. 2 и 3). Можно также рассматривать и «гибридные» ускорители, в которых процесс ускорения задается действием определенного набора возмущений, относящихся к разным модам.

Придадим изложенным соображениям более конкретную форму и укажем возможную принципиальную схему построения ускорителей на заданных модах. Пусть имеется канал, в котором с постоянной скоростью \mathbf{v}_0 движется однородный поток плазмы. Пусть, начиная с $x = 0$, необходимо обеспечить возрастание скорости потока на оси x по известному закону

$$\mathbf{v}|_{y=z=0} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}(x). \quad (1.42)$$

Пусть возрастание скорости происходит очень медленно, так что $(V/v_0) \ll 1$. При этом условии изменение всех величин в потоке можно найти с помощью теории возмущений

$$L((v_0 \nabla), \nabla)u = 0, \quad u = (\rho, v, \dots). \quad (1.43)$$

Дисперсионное уравнение системы (1.43) имеет вид*

$$D(\mathbf{k}v_0, \mathbf{k}) = 0. \quad (1.44)$$

Если течение трехмерное, то в общем случае могут быть заданы две компоненты k , а третья определяется уравнением (1.44). В случае плоского течения произвольной является только одна компонента k , а это означает, что в трехмерном случае можно задавать закон изменения скорости (1.42) на какой-либо плоскости (например x, z), тогда как в плоском случае только на оси x .

Выберем решение дисперсионного уравнения, соответствующее интересующей нас моде, и найдем изменение v_1 во всем канале. Кроме того, с помощью системы (1.43) можно выразить возмущения всех остальных величин потока через изменения v_1 .

Действительно, переписав уравнение (1.43) в виде

$$(L(\mathbf{k})u)_i = \mathbf{q}_i \mathbf{V}_i, \quad i = 1, \dots, n-3, \quad (1.45)$$

получим систему $(n-3)$ -линейных уравнений, которую при отсутствии вырождения можно решить. В (1.45) $L(\mathbf{k})$ обозначена матрица $L((v_0 \nabla), \nabla)$ после замены ее аргументов на $i(v\mathbf{k})$ и $i\mathbf{k}$.

Зная изменение всех величин в объеме потока, а следовательно, и на его границе, можно обратить задачу, т. е., задав найденные условия на границе, получим ускорение потока на одной моде.

Приведенные рассуждения показывают возможность лишь малого увеличения скорости в определенной части потока с помощью заданной моды. По-видимому, при достаточно общих предположениях о свойствах моды можно осуществить последовательность подобных малых возмущений, с тем чтобы получить изменения скорости на нужную величину по крайней мере в основной части потока.

ГЛАВА 2

АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ $\xi = 0$

§ 1. Законы сохранения и уравнения для функций потока

В этой и следующих главах рассматривается аксиально симметричное течение идеальной (невязкой, нетеплопроводной и обладающей бесконечной проводимостью) плазмы без учета эффекта Холла, т. е. при равном нулю параметре обмена ξ . Хотя подобная модель

* Эта запись соответствует замене ω на $\mathbf{k}v_0$.

достаточно далека от реальности (см. подробнее работу [15] гл. 1, § 3), тем не менее теоретический анализ стационарных течений целесообразно начинать именно с такой простой модели.

Это объясняется тремя причинами. Во-первых, уже идеальная схема и физически и математически оказывается весьма нетривиальной. Во-вторых, многие методические вопросы, которые играют большую роль в более реалистических моделях, возникают уже в рамках данной простой схемы. В-третьих, некоторые выводы, полученные ниже, остаются справедливыми и в более сложных схемах и находят подтверждение в экспериментах. К такого рода эффектам можно отнести существование стационарных ускорительных и компрессионных режимов, существование петель тока и др.

В рамках одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики движение плазмы описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0; & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \nabla p + [\mathbf{j}\mathbf{H}]; & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}]; \\ \frac{dS}{dt} &= 0; & \mathbf{j} &= \operatorname{rot} \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; \mathbf{v} — скорость; $\mathbf{H} \sqrt{4\pi}$ — магнитное поле; $(c/\sqrt{4\pi})\mathbf{j}$ — плотность электрического тока; S — энтропия. Первые два уравнения — это уравнения непрерывности для жидкости и магнитного поля, третье — уравнение движения, четвертое — уравнение магнитного поля, а пятое — уравнение энтропии. К уравнениям (2.1) следует добавить еще уравнение состояния. Полная производная по времени имеет смысл материальной производной

$$d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}\nabla). \quad (2.2)$$

Уравнение «вмороженности» совместно с уравнением непрерывности потока жидкости удобно представить в форме

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (2.3)$$

Если ввести векторный потенциал магнитного поля \mathbf{A} , определяющийся равенством $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, то уравнение вмороженности запишется в виде $\operatorname{rot} \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\} = 0$, откуда следует, что

$$\partial \mathbf{A} / \partial t - [\mathbf{v}\mathbf{H}] = \nabla \Phi. \quad (2.4)$$

Величина Φ пропорциональна потенциалу электрического поля \mathbf{E} .

Введем теперь предположение об аксиальной симметрии задачи, т. е. будем считать, что в цилиндрической системе координат r, φ ,

z производные всех величин по φ равны нулю. Как известно, функция потока магнитного поля в аксиально симметричном случае

$$\psi(r, z, t) = rA_{\varphi}. \quad (2.5)$$

При этом компоненты поля \mathbf{H} , лежащие в меридиональных плоскостях, выражаются только с помощью ψ :

$$H_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad H_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2.6)$$

а азимутальная компонента \mathbf{H} определяется r - и z -компонентами \mathbf{A} :

$$H_{\varphi} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (2.7)$$

Нетрудно убедиться, что магнитные силовые линии лежат на магнитных поверхностях $\psi(r, z, t) = \text{const}$. Поскольку $\partial \Phi / \partial \varphi = 0$, то φ -я компонента уравнения замороженности (2.4) дает

$$d\psi/dt = 0. \quad (2.8)$$

Сохранение ψ означает, что аксиально симметричные магнитные поверхности $\psi = \text{const}$ в идеально проводящей среде движутся вместе с веществом.

Равенство нулю полной производной от энтропии означает, что энтропия также заморожена в вещество и, следовательно,

$$S = S(\psi). \quad (2.9)$$

Азимутальные компоненты уравнения замороженности (2.3) и уравнения движения запишем соответственно в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{I}{\rho r^2} = \frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla \frac{I_0}{r^2}; \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} I_0 = \frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla I, \quad (2.11)$$

где I и I_0 — функции потока для $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$ и $j_0 = \text{rot } v$, равные $I = H_{\varphi}$ и $I_0 = rv_{\varphi}$.

Уравнение замороженности (2.3) для r - и z -компонент магнитного поля и скорости записывается в виде, аналогичном (2.10)—(2.11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \cdot \frac{H_r}{\rho} &= \frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla v_r; \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{H_z}{\rho} &= \frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla v_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Оставшиеся два уравнения для r - и z -компонент уравнения движения представим в форме:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_r}{dt} - \rho \frac{I_0^2}{r^3} + \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{\partial I^2}{\partial r} - \frac{1}{r} j_\varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \\ \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{\partial I^2}{\partial z} - \frac{1}{r} j_\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где

$$j_\varphi = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -r \Delta^* \psi \equiv - \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (2.14)$$

Получившаяся система уравнений для нестационарного аксиально симметричного движения достаточно сложна для анализа, поэтому далее будем рассматривать лишь стационарные течения плазмы [26].

При условии стационарности ($\partial/\partial t = 0$) уравнение непрерывности потока $\text{div } \rho \mathbf{v} = 0$ позволяет ввести функцию потока ψ_0 , с помощью которой выражаются продольные компоненты скорости

$$v_z = \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial r}; \quad v_r = - \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial z}, \quad (2.15)$$

так что линии тока жидкости лежат на поверхностях $\psi_0 = \text{const}$. Из уравнения (2.8) следует, что $\psi_0 = \psi_0(\xi)$, и к этому же результату приводят уравнения (2.12). Для симметрии введем новую функцию потока ξ , в качестве которой можно выбрать как ψ , так и ψ_0 , а также любой другой интеграл движения, зависящий только от ψ . Будем считать, что

$$\psi = \psi(\xi); \quad \psi_0 = \psi_0(\xi). \quad (2.16)$$

Продольные составляющие скорости и магнитного поля

$$\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\varphi; \quad \mathbf{H}_\parallel = \mathbf{H} - \mathbf{H}_\varphi$$

параллельны друг другу, а их отношение, очевидно, равно

$$\frac{v_\parallel}{H_\parallel} = \frac{v_r}{H_r} = \frac{v_z}{H_z} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\psi_0}{d\psi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\psi'_0(\xi)}{\psi'(\xi)}. \quad (2.17)$$

Используя условия стационарности ($\partial/\partial t = 0$) и аксиальной симметрии ($\partial/\partial \varphi = 0$), запишем уравнения (2.10) и (2.11) в виде:

$$v_\parallel \nabla \frac{I}{\rho r^2} - \frac{H_\parallel}{\rho} \nabla \frac{I_0}{r^2} = 0; \quad (2.18)$$

$$v_\parallel \nabla I_0 - \frac{H_\parallel}{\rho} \nabla I = 0. \quad (2.19)$$

Так как $\mathbf{v}_{\parallel} \parallel \mathbf{H}_{\parallel}$, то согласно (2.17) из этих уравнений получим интегралы момента и вмороженности:

$$I_0 \psi'_0 - I \psi' = A(\xi); \quad (2.20)$$

$$\frac{I}{\rho r^2} \psi'_0 - \frac{I_0}{r^2} \psi' = B(\xi). \quad (2.21)$$

Четвертое из уравнений (2.1) для стационарных течений запишем в виде

$$[\mathbf{v}\mathbf{H}] = -\nabla\Phi. \quad (2.22)$$

Умножим это уравнение скалярно на \mathbf{v} и убедимся, что $\Phi = \Phi(\xi)$, причем подстановка выражений для \mathbf{v} и \mathbf{H} через I_0 , I и ξ приводит к равенству

$$\Phi'(\xi) = B(\xi). \quad (2.23)$$

Следовательно, интеграл (2.21) можно рассматривать как выражение эквипотенциальности магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$.

Для получения интеграла энергии воспользуемся термодинамическим соотношением

$$\nabla p / \rho = \nabla W - T \nabla S, \quad (2.24)$$

где W — энтальпия. С учетом этого соотношения, а также равенств $\mathbf{v}\nabla S = 0$ и (2.22), умножая уравнения движения (2.1) на \mathbf{v} , получаем

$$\rho \mathbf{v} \nabla \left(\frac{v^2}{2} + W \right) = \mathbf{j} \nabla \Phi. \quad (2.25)$$

Подставим сюда выражения для \mathbf{v} и \mathbf{j} через ψ_0 и I , тогда уравнение (2.25) сведется к якобианному уравнению $D(U, \xi)/D(r, z) = 0$, в котором $U = U(\xi)$ — искомый интеграл энергии:

$$\frac{v^2}{2} + W + \frac{I\Phi'(\xi)}{\psi'_0(\xi)} = U(\xi). \quad (2.26)$$

Систему уравнений (2.20) — (2.21) можно разрешить относительно I_0 и I :

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{s} \left(A \frac{\psi'_0}{\rho} + r^2 B \psi' \right); \\ I &= \frac{1}{s} (A \psi' + r^2 B \psi'_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

где

$$s = \psi_0'^2 / \rho - \psi'^2. \quad (2.28)$$

Уравнения (2.13) после подстановки в них выражений (2.27) преобразуются к одному уравнению [26] для функции ξ , содержащему ρ :

$$\frac{s}{\rho} \Delta^* \xi + \frac{1}{2\rho r^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{\rho^3 r^2} (\nabla \rho \nabla \xi) + \frac{1}{2\rho r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \times \\ \times \frac{A^2}{s} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi'}{s\psi_0'} + TS' - U' = 0. \quad (2.29)$$

Здесь оператор Δ^* определен выражением (2.14), а частная производная по ξ берется при фиксированной плотности ρ . Уравнение (2.29) содержит интегралы движения ψ , ψ_0 , A , B , U и S , которые можно задать в виде произвольных функций от ξ . Его надо решать совместно с уравнением (2.26) и уравнением состояния.

Полученные выше формулы можно обобщить на случай, когда система обладает винтовой симметрией. Не приводя выкладок, напомним окончательный результат [26] [см. формулу (П.41)]:

$$\frac{1}{\rho r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{rs}{\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2\rho\beta} \cdot \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{2\alpha A}{\beta^2 \rho} + \\ + \frac{1}{2\rho\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{A^2}{s} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi_0'}{\rho s\psi'} + TS' - U' = 0; \quad (2.30)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\beta B^2}{s} + \frac{AB\psi_0'}{\rho s\psi'} = U; \quad (2.31)$$

$$\begin{pmatrix} \rho v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \theta}; \quad \alpha r \begin{pmatrix} \rho v_z \\ H_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = (\psi_0') \frac{\partial \xi}{\partial r}; \quad (2.32)$$

$$\begin{pmatrix} \rho v_z \\ H_z \end{pmatrix} + \alpha r \begin{pmatrix} \rho v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} + \frac{\beta B}{s} \begin{pmatrix} \rho \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Здесь ξ — функция, зависящая от двух координат r и θ , причем $\theta = \varphi - \alpha z$, $\alpha = 2\pi/L$, $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, L — шаг винта.

§ 2. Аксиально симметричные течения поперек азимутального магнитного поля

Важный частный случай магнитогидродинамических течений — течения поперек азимутального магнитного поля, когда скорость $\mathbf{v} = v_{\parallel}$, а поле $\mathbf{H} = H_{\varphi}$. Соотношения, описывающие такие течения, можно получить из уравнений (2.20)—(2.29), если положить $\psi = 0$ и $A = 0$. При этом, выбирая $\xi = \psi_0$, получаем следующее условие вмерзженности магнитного поля*:

$$\frac{H_{\varphi}}{\rho r} = \sqrt{4\pi} B(\xi). \quad (2.34)$$

* Здесь и ниже \mathbf{H} и \mathbf{j} — «истинная» напряженность магнитного поля и плотность тока (без множителей $\sqrt{4\pi}$ и $\sqrt{4\pi/c}$ соответственно).

В этом случае сохраняется энтропия $S = S(\xi)$, а также обобщенный интеграл Бернулли

$$v^2/2 + W(S, \rho) + \rho r^2 B^2(\xi) = U(\xi). \quad (2.35)$$

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае уравнение Эйлера (2.1) можно записать в виде

$$[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = -\rho r^2 \nabla \frac{B^2}{2} + \nabla U - T \nabla S. \quad (2.36)$$

Отсюда следует, что если поток изэнтропичен и изомагнитен (т. е. $S = \text{const}$ и $B = \text{const}$), то он может быть потенциальным, если интеграл Бернулли U постоянен во всем потоке. Этот вывод — обобщение теоремы Крокко [21] для течения поперек магнитного поля. Аксиально симметричное изомагнитное течение характеризуется тем, что во всем потоке остается постоянной величина отношения магнитного потока, проходящего внутри кольцевой силовой трубки, к массе этой трубки. В дальнейшем поток всюду считаем изэнтропическим, и, следовательно, $W = W(\rho)$.

Функция ξ удовлетворяет при этом уравнению [19, 20]

$$\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\rho z^2}{2} \cdot \frac{dB^2}{d\xi} - \frac{dU}{d\xi} = 0. \quad (2.37)$$

Уравнения (2.35) и (2.37) надо решать совместно относительно ρ и ξ , причем должны быть заданы функции $U(\xi)$ и $B(\xi)$ и уравнения граничных поверхностей. При известном поле \mathbf{H}_Φ плотность тока \mathbf{j} выражается через H_Φ формулами

$$\begin{aligned} r j_z &= \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\Phi); \\ r j_r &= -\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (r H_\Phi). \end{aligned} \quad (2.38)$$

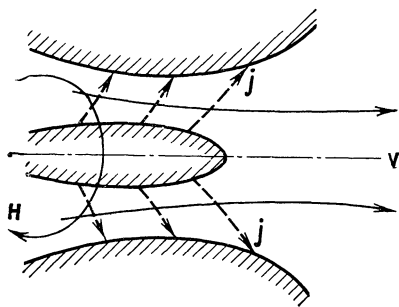


Рис. 5.

(рис. 5). Если при течении в такой системе плотность плазмы ρ на выходе стремится к нулю, то из уравнения Бернулли (2.35) вытекает, что максимальная скорость на выходе

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{2U(\xi)}. \quad (2.39)$$

Следовательно, если на входе $U = \text{const}$, то скорость плазмы на выходе (т. е. при $\rho \rightarrow 0$) будет одинаковой независимо от расстояния линии тока до оси. Кроме скорости истечения $v_{\text{макс}}$ необходимо знать такие параметры ускоряющей системы, как расход массы \dot{m} , тяга F , энергетическая мощность потока N , а также напряжение U

и ток \mathcal{J} , протекающий через систему. Все эти величины можно найти с помощью ξ $U(\xi)$, $B(\xi)$ и H_ϕ . Действительно, используя написанные выше соотношения, получаем:

$$\dot{m} = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z 2\pi r dr = 2\pi (\xi_2 - \xi_1); \quad (2.40)$$

$$N = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{v^2}{2} v_z 2\pi r dr \Big|_{z=L} = 2\pi \int_{\xi_1}^{\xi_2} U(\xi) d\xi; \quad (2.41)$$

$$F = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z^2 2\pi r dr \Big|_{z=L} = 2\pi \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_z d\xi. \quad (2.42)$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 — значения ξ на электродах $r = r_1(z)$ и $r = r_2(z)$. Если расходимость потока на выходе мала, т. е. $v_z \approx v$, то с учетом уравнения (2.35) запишем

$$F = 2\pi \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{2U(\xi)} d\xi. \quad (2.43)$$

Напряжение между электродами $\xi_1 = \text{const}$ и $\xi_2 = \text{const}$

$$V = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} v_z H_\phi dr = \frac{1}{c} \int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi) d\xi, \quad (2.44)$$

а общий ток, протекающий через систему, определяется формулой

$$\mathcal{J} = \int_0^{r_2} j_z 2\pi r dr = \frac{c}{2} r_2 H_\phi(r_2, 0), \quad (2.45)$$

где H_ϕ берется во входном сечении $z = 0$.

§ 3. Течение плазмы в узкой трубке потока ($H_{\parallel} = 0$)

1. Два типа течений. Многие свойства течения плазмы в аксиально симметричных каналах можно понять, если разбить поток на узкие коаксиальные трубки, ограниченные линиями тока $\xi = \text{const}$ (рис. 6). Эти трубки характеризуются шириной $f(z)$ и средним радиусом $r(z)$. В пределах трубки все параметры следует считать не зависящими от поперечной к ее стенкам координаты n . Уравнения, описывающие течения в такой трубке, как это следует из уравнений (2.9), (2.16), (2.34) и (2.35), сводятся к следующим алгебраическим уравнениям:

$$\rho v r f = \delta \xi = \text{const}; \quad (2.46)$$

$$W(\rho) + \frac{v^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U = \text{const}; \quad (2.47)$$

$$\frac{H}{\rho r} = \sqrt{4\pi} B = \text{const}; \quad (2.48)$$

$$S = \text{const}. \quad (2.49)$$

Первое из них выражает закон сохранения вещества, второе — энергии, третье — магнитного потока, четвертое — энтропии. Постоянство энтропии учтено в (2.47) введением энтальпии $W(\rho)$.

Поскольку мы пренебрегаем изменением параметров плазмы поперек трубки, уравнение (2.37) просто отбрасывается.

Система алгебраических уравнений (2.46)—(2.48) содержит три уравнения для определения пяти неизвестных функций $r(z)$, $f(z)$, $v(z)$, $\rho(z)$ и $H(z)$. Поэтому две функции, например $\rho(z)$ и $H(z)$, можно задать произвольно.

Рассмотрим подробнее уравнение Бернулли (2.47). Из него видно, что возможны два крайних типа процессов в потоке: либо процесс

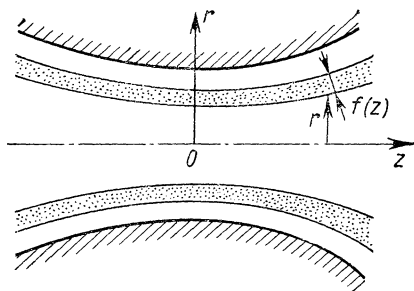


Рис. 6.

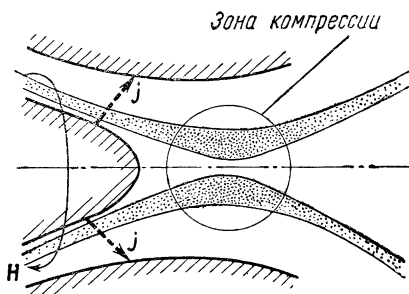


Рис. 7.

идет так, что плотность среды неограниченно падает, а скорость стремится к некоторому пределу $v_{\text{макс}}$

$$\rho \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \sqrt{2U} = v_{\text{макс}}, \quad (2.50)$$

либо, наоборот, к нулю стремится скорость, а плотность стремится к некоему максимальному значению $\rho_{\text{макс}}$

$$v \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \rho_{\text{макс}}, \quad (2.51)$$

где

$$W(\rho_{\text{макс}}) = U. \quad (2.52)$$

Первый режим течения назовем чисто ускорительным, а второй — чисто компрессионным [15, 21].

Рассмотрим несколько подробнее условия реализации каждого из этих режимов. Очевидно, ускорительный режим реализуется в том случае, если на выходе из канала радиус потока r остается ограниченным, а плотность $\rho \rightarrow 0$. При этом магнитное поле $\mathbf{H} \rightarrow 0$, а в силу уравнения непрерывности сечение трубки f неограниченно возрастает.

В случае чисто компрессионного режима (рис. 7) должен стремиться к нулю радиус трубки r . В этом случае, как следует из уравнения замороженности (2.48), напряженность магнитного поля также стремится к нулю, поскольку ρ остается конечным

Как видно из уравнения непрерывности (2.46), в зоне компрессии ширина потока f должна неограниченно возрастать. Учитывая, что $f \leq r$, а $r \rightarrow 0$, для строгости приведенных рассуждений необходимо рассматривать бесконечно узкие трубки. Это обстоятельство требует исследования зоны компрессии в целом (см. раздел 3, § 4, наст. гл.).

2. Уравнения Гюгонио. Чтобы получить уравнение Гюгонио для рассматриваемого течения в узкой трубке, продифференцируем уравнения (2.46)—(2.48). В результате имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{df}{f} + \frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} = 0; \quad (2.53)$$

$$c_T^2 \frac{d\rho}{\rho} + v dv + c_A^2 \frac{d\rho}{\rho} + 2c_A^2 \frac{dr}{r} = 0; \quad (2.54)$$

$$\frac{dH}{H} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dr}{r}. \quad (2.55)$$

Здесь введены обозначения для квадрата скорости звука и альфвеновской скорости:

$$c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s; \quad c_A^2 = \frac{H^2}{4\pi\rho}. \quad (2.56)$$

Исключая из соотношений (2.53)—(2.55) величины dH и $d\rho$, после простых преобразований получаем [20]

$$(v^2 - c_s^2) \frac{dv}{v} = c_T^2 \frac{d(fr)}{fr} + c_A^2 \frac{d(f/r)}{f/r}. \quad (2.57)$$

Уравнение (2.57) показывает, что обращение воздействия происходит при скорости v , равной скорости распространения сигнала $c_s = \sqrt{c_T^2 + c_A^2}$ поперек магнитного поля. При $c_A \rightarrow 0$ переход через скорость сигнала осуществляется в минимуме сечения канала fr , тогда как при $c_T \rightarrow 0$ этот переход осуществляется в минимуме f/r .

Уравнение (2.57) описывает особенности изменения скорости плазмы в трубке потока. Аналогичные уравнения можно написать и для других параметров потока. В частности, для плотности получаем

$$(v^2 - c_s^2) \frac{d\rho}{\rho} = -v^2 \frac{d(rf)}{rf} + 2c_A^2 \frac{dr}{r}. \quad (2.58)$$

Сравнивая (2.47) и (2.58), видим, что при газодинамическом течении ($c_A = 0$) величины $d\rho$ и dv всегда имеют различные знаки, т. е. при ускорении плотность падает, а при торможении возрастает. Однако если $c_A \neq 0$, то при определенных условиях знаки dv и $d\rho$ совпадают. Такого рода явление аномального изменения плотности впервые обнаружено при численном расчете двумерных течений на ЭВМ К. В. Брушлинским, Н. И. Герлах, А. И. Морозовым [23]. Рассмотр-

рим это явление подробнее. Пусть течение досигнальное ($v^2 < c_s^2$). Тогда в режиме $dp > 0$, $dv > 0$ должны выполняться неравенства

$$\left. \begin{aligned} c_T^2 \frac{d(fr)}{fr} + c_A^2 \frac{d(f/r)}{f/r} < 0; \\ -v^2 \frac{d(fr)}{fr} + 2c_A^2 \frac{dr}{r} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Если течение сверхсигнальное и $dv > 0$ и $dp > 0$, то знаки неравенств в (2.59) обратные. Запишем неравенства (2.59) в виде

$$\left. \begin{aligned} c_s^2 \frac{df}{f} < (c_A^2 - c_T^2) \frac{dr}{r}; \\ (2c_A^2 - v^2) \frac{dr}{r} < v^2 \frac{df}{f}. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Перемножив эти неравенства, получим условие их совместимости $(c_s^2 - v^2)drdf < 0$ или, так как течение предполагается досигнальным, $drdf < 0$.

Заметим, что если бы мы взяли ускоренное сверхсигнальное течение, то опять получили бы такое же условие. Однако если течение было бы замедленным, то требование $dpdv > 0$ привело бы к условию $drdf > 0$.

Используя (2.60), получаем условия аномального поведения плотности. В досигнальном режиме:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } dr < 0, \quad df > 0; \quad \text{б) } c_A^2 < c_T^2; \\ \text{в) } \frac{|dr|}{r} > \frac{df}{f} \cdot \frac{c_A^2 + c_T^2}{c_T^2 - c_A^2}, \quad \text{если } 2c_A^2 > v^2; \\ \frac{df}{f} \cdot \frac{v^2}{|2c_A^2 - v^2|} > \frac{|dr|}{r} > \frac{c_A^2 + c_T^2}{c_T^2 - c_A^2} \cdot \frac{df}{f}, \quad \text{если } 2c_A^2 < v^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Таким образом, в этом случае необходимо, чтобы магнитное давление было мало по сравнению с газовым.

В сверхсигнальном режиме аномальное изменение плотности реализуется при

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } dr > 0, \quad df < 0; \quad \text{б) } 2c_A^2 < v^2; \\ \text{в) } \frac{|2c_A^2 - v^2|}{v^2} \cdot \frac{dr}{r} > \frac{|df|}{f}, \quad \text{если } c_A^2 > c_T^2; \\ \frac{|2c_A^2 - v^2|}{v^2} \cdot \frac{dr}{r} > \frac{|df|}{f} > \frac{|c_T^2 - c_A^2|}{c_s^2} \cdot \frac{dr}{r}, \quad \text{если } c_A^2 < c_T^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

3. Ускорительные режимы. Пусть при $z = 0$ в канал, точнее в данную выделенную трубку, поступает плазма с малой скоростью $v_0 \rightarrow 0$, с плотностью ρ_0 и температурой T_0 . Магнитное поле в этом сечении трубки обозначим H_0 , а ее параметры r и f — как r_0 и f_0 .

Граничные поверхности канала (не трубки) должны быть электродами, поскольку азимутальное магнитное поле должно спадать вдоль канала, что возможно только в случае протекания тока между его внутренней и внешней стенками.

Как отмечалось выше, мы не рассматриваем собственно приэлектродных процессов, так как для этого нужно явно учитывать конечную проводимость и массу электрона.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда радиус выделенной трубки остается постоянным (рис. 8) $r = \text{const}$. В этом случае система уравнений (2.46)—(2.48) заметно упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho v f &= \text{const} \text{ (а);} \\ W(\rho) + v^2/2 + \rho k^2 &= \text{const} \text{ (б);} \\ H/\rho &= k = \text{const} \text{ (в).} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Аналогично в уравнении Гюгонио исчезает зависимость от соотношения альфвеновской и звуковой скоростей:

$$(v^2 - c_s^2) \frac{dv}{v} = c_s^2 \frac{df}{f}. \quad (2.64)$$

Если обозначить показатель адиабаты ускоряемой плазмы буквой γ и считать, что

$$p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma, \quad (2.65)$$

то

$$W(\rho) = \frac{c_p T}{\gamma - 1} = \frac{c_T^2}{\gamma - 1}. \quad (2.66)$$

Здесь c_p — теплоемкость при постоянном давлении. В таком случае максимальная скорость истечения, как видно из (2.47) и (2.50), равна

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{2 \left(\frac{c_{T0}^2}{\gamma - 1} + c_{A0}^2 \right)}. \quad (2.67)$$

Следовательно, если $c_{A0}^2 \gg c_{T0}^2$, т. е. параметр $\beta = 8\pi\rho/H^2$ много меньше единицы ($\beta \ll 1$), то $v_{\text{макс}} \approx c_{A0} \sqrt{2}$. Если же $\beta \gg 1$, то скорость истечения из канала определяется обычной формулой газодинамики:

$$v_{\text{макс}} = c_{T0} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

Рассмотрим теперь уравнение непрерывности (2.63а). Учитывая, что на входе в канал $v \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \rho_0$, на выходе $\rho \rightarrow 0$, $v \rightarrow v_{\text{макс}}$, приходим к выводу, что ширина канала должна неограниченно возрастать как вблизи входа, так и вблизи выхода. Таким образом, при постоянном радиусе трубки r регулярное течение возможно только в случае, когда трубка имеет вид сопла (см. рис. 8).

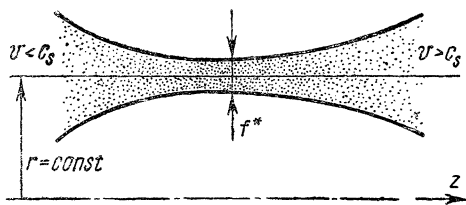


Рис. 8.

Минимальное сечение f^* , как видно из уравнения Гюгонно (2.64), обладает тем замечательным свойством, что в нем местная скорость плазмы v^* равна местной скорости сигнала $v^* = c_s^*$.

Таким образом, в данном случае (при $r = \text{const}$) сохраняется свойство обычных газодинамических сопел, в которых равенство скорости звука и скорости потока также реализуется в критическом сечении. Если же $r \neq \text{const}$, то, как видно из формулы (2.58), переход через скорость сигнала может не совпадать с минимумом f .

Для получения потоков с большими скоростями основной интерес представляет режим, когда $c_A^2 \gg c_T^2$. В этом случае уравнение Бернулли (2.63б) принимает простой вид:

$$v^2/2 + \rho k^2 = \rho_0 k^2. \quad (2.68)$$

Отсюда, согласно (2.63в), следует связь v и H с ρ :

$$v = v_{\text{макс}} \sqrt{1 - \rho/\rho_0}; \quad H = H_0 \rho/\rho_0. \quad (2.69)$$

Подставляя эти выражения в уравнения непрерывности (2.63а), получаем

$$f = \text{const}/\rho \sqrt{1 - \rho/\rho_0}. \quad (2.70)$$

Как видно из написанных формул, если скорость в канале монотонно нарастает, то монотонно уменьшаются ρ и H . Если задать какой-либо конкретный закон зависимости $v(z)$, то получим однозначную зависимость от координаты z и других параметров. В частности, если $\rho = az$, то плотность тока ($j \sim \partial H/\partial z$) в объеме плазмы постоянна.

Рассмотрим теперь общий случай, когда изменяются f и r . Если $\beta \gg 1$, то изменение ρ и v , как это видно из уравнений (2.46)—(2.48), в пренебрежении членом β^{-2} описывается уравнениями обычной гидродинамики и определяется только площадью канала, которая пропорциональна rf .

Если $\beta \ll 1$, то газовым давлением, т. е. членом $W(\rho)$ в уравнении (2.47), можно пренебречь, а процесс ускорения плазмы определяется магнитным полем. В этом случае геометрический фактор, определяющий течение, — это отношение f/r [см. формулу (2.57)].

Таким образом, можно ускорять плазму в каналах с постоянной величиной f . Причем в случае $\beta \gg 1$ должен расти радиус канала r , тогда как при $\beta \ll 1$ радиус r должен непрерывно уменьшаться. Последнее обстоятельство объясняется тем, что магнитное поле \mathbf{H} совершает работу не только при своем расширении, а это соответствует члену $\nabla H^2/8\pi$ в уравнении Эйлера, но и при сокращении длины силовых линий, которое описывается членом $(1/4\pi)(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}$.

4. Компрессионные режимы. Пусть, как и в предыдущем случае, при $z = 0$ скорость плазмы пренебрежимо мала. Тогда постоянную интеграла Бернулли запишем в виде

$$U = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} (1 + \mu), \quad \mu = \frac{W_0}{c_{A0}^2}. \quad (2.71)$$

Для того чтобы осуществить компрессию, радиус r должен стремиться к нулю (см. рис. 7). Как при этом будет изменяться скорость, несущественно, важно только, чтобы она не превысила скорости сигнала (в противном случае возможно образование ударных волн). Если мы хотим получить максимальное сжатие при $r=0$, то скорость в зоне компрессии должна снова стать пренебрежимо малой. В таком случае плотность определяется соотношением (2.52). Подставляя в (2.52) выражение (2.71) и предполагая процесс политропическим [см. формулу (2.66)], получаем формулу для максимальной степени сжатия [22]

$$v_{\text{макс}} \equiv \frac{\rho_{\text{макс}}}{\rho_0} = \left[(\gamma - 1) \frac{c_{A0}^2}{c_{T0}^2} (1 + \mu) \right]^{1/(\gamma - 1)}. \quad (2.72)$$

Отсюда следует, например, что при адиабатическом ($\gamma = 5/3$) сжатии водорода и при $c_{A0} = 10^8$ см/сек, $c_{T0} = 10^6$ см/сек

$$v_{\text{макс}} \equiv \frac{\rho_{\text{макс}}}{\rho_0} \approx 5,5 \cdot 10^5. \quad (2.72a)$$

Из формулы (2.72) для коэффициента сжатия видно, что при заданных H_0 и ρ_0 он неограниченно возрастает по мере того, как $\gamma \rightarrow 1$, $c_{T0}^2/c_{A0}^2 \rightarrow 0$.

Таким образом, при изотермическом процессе, когда $\gamma = 1$, сжатие очень велико:

$$v_{\text{макс}} = \rho_{\text{макс}}/\rho_0 = \rho_0 \exp \frac{c_{A0}^2}{c_{T0}^2} (1 + \mu), \quad (2.73)$$

поскольку в этом случае энтальпия

$$W(\rho) = c_{T0}^2 \ln(\rho/\rho_0). \quad (2.74)$$

Отметим еще одно важное следствие формулы (2.72). Если H_0 и c_{T0} постоянны, то зависимость $\rho_{\text{макс}}$ от ρ_0 имеет вид

$$\rho_{\text{макс}} \sim \rho_0^{(\gamma - 2)/(\gamma - 1)}, \quad (2.75)$$

т. е. при $1 < \gamma < 2$ уменьшение начальной плотности приводит к росту абсолютного значения максимальной плотности. Наоборот, при $\gamma > 2$ $\rho_{\text{макс}}$ убывает с уменьшением ρ_0 .

В реальных условиях значение γ не будет равно показателю адиабаты, поскольку излучение плазмы способствует уменьшению γ , а джоулев нагрев, наоборот, увеличению. Эти факторы действуют в противоположные стороны и поэтому трудно оценить реальную величину γ .

В процессе компрессии происходит не только сжатие плазмы, но и ее нагрев. Если процесс политропический, то

$$W(\rho) = \frac{k}{M} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} T. \quad (2.76)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, а M — масса иона. В случае полностью ионизованной плазмы с $z = 1$ $T = T_i + T_e$. Подставляя (2.76) в (2.52), получаем формулу для максимальной температуры при $\gamma = \text{const}$:

$$T_{\text{макс}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \cdot \frac{M}{k} (1 + \mu). \quad (2.77)$$

Для численных значений (2.72a) при сжатии водорода $T_{\text{макс}} \approx 5$ кэв.

В заключение рассмотрим напряженности магнитных полей, сопровождающие компрессию, при условии, что проводимость бесконечна, т. е. в рамках рассматриваемой модели. Следует, однако, подчеркнуть, что предположение об идеальной проводимости в зоне компрессии достаточно жесткое, поскольку при малом диаметре сжатого плазменного шнура требуется очень высокая проводимость, для того чтобы поле не вышло из плазмы. Тем не менее при температурах, сравнимых с термоядерными, предположение о том, что $\sigma = \infty$, оказывается разумным. Оценим достижимые величины магнитных полей. Если процесс происходит таким образом, что $v \rightarrow 0$, то

$$\frac{c_{T0}^2}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma - 1} + \frac{H^2}{4\pi\rho} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} (1 + \mu). \quad (2.78)$$

Отсюда видно, что при $\rho \sim \rho_{\text{макс}}$ и

$$\frac{H^2}{4\pi\rho} \sim \frac{c_{T0}^2}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma - 1} \quad (2.79)$$

получаем

$$H_{\text{макс}} \sim H_0 \sqrt{\frac{\rho_{\text{макс}}}{\rho_0}}. \quad (2.80)$$

Точное выражение для максимального магнитного поля приведено в работе [22].

§ 4. Интегрируемые случаи течений, медленно изменяющихся вдоль оси z

1. Общие формулы. Рассмотрим класс приближенных решений системы уравнений (2.35) и (2.37), когда имеет место слабая зависимость от координаты z , т. е. $\xi = \xi(r, \varepsilon z)$, $\rho = \rho(r, \varepsilon z)$, где ε — малый параметр. Пренебрегая в уравнениях (2.35) и (2.37) членами, квадратичными по ε , получаем упрощенную систему дифференциальных уравнений [20]:

$$\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\rho r^2}{2} \cdot \frac{dB^2}{d\xi} - \frac{dU}{d\xi} = 0; \quad (2.81)$$

$$W(\rho) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 + \rho r^2 B^2 = U. \quad (2.82)$$

Здесь, как отмечалось выше, B и U — произвольные функции, зависящие только от ξ . В уравнениях (2.81)—(2.82) содержатся частные производные только по r . Решение такой системы в общем случае зависит от двух произвольных функций $c_1(z)$ и $c_2(z)$, так что $\xi = \xi(r, c_1, c_2)$, $\rho = \rho(r, c_1, c_2)$. При интегрировании уравнений (2.81)—(2.82) могут быть поставлены различные задачи. Если задать геометрию электродов $r = r_1(z)$ и $r = r_2(z)$, то, поскольку на электродах $\xi = \xi_1 = \text{const}$ и $\xi = \xi_2 = \text{const}$, мы приходим к задаче, являющейся нелинейным аналогом задачи типа Штурма — Лиувилля. Если же мы зададим один из электродов $\xi = \xi_1 = \text{const}$ при $r = r_1(z)$ и поток вблизи него, т. е. $\partial\xi/\partial n$ при $r = r_1(z)$, то получим аналог задачи Коши.

Практически значения $B(\xi)$ и $U(\xi)$ можно определить из условий на входе и выходе ускорителя. Если на входе при $z = 0$ заданы значения $\rho(r)$, $v(r)$ и $H_\varphi(r)$, то можно найти ξ из уравнений (2.15)

$$(\xi = \psi_0) : \xi = \int_{r_1}^r \rho v r dr |_{z=0} = \xi(r, 0) \text{ а тем самым и значения } B(\xi)$$

и $U(\xi)$. Однако, задав на входе все указанные выше величины и геометрию электродов, мы, вообще говоря, не получим решения*. Поэтому в дальнейшем в конкретных примерах будем ставить задачу Коши, т. е. задавать один из электродов и $\partial\xi/\partial r$ на нем, а также будем задавать v , ρ , p , H_φ на входе в ускоритель и затем искать ξ и геометрию второго электрода в виде $\xi(r, z) = \xi_2 = \text{const}$.

Уравнения (2.81)—(2.82) назовем уравнениями приближения «плавного течения», поскольку они описывают медленно изменяющиеся вдоль оси z течения. Если умножить уравнение (2.81) на $\partial\xi/\partial r$ и вычесть из него уравнение (2.82), продифференцированное по r , то получим

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{2\rho r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 B)^2 = 0. \quad (2.83)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{H^2}{4\pi r} = 0 \quad (2.83a)$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c} [jH]_r. \quad (2.83b)$$

Таким образом, в рассматриваемом адиабатическом приближении в радиальном направлении выполняется условие равновесия.

Уравнение (2.83) или (2.83a) можно проинтегрировать, причем можно рассмотреть три случая: 1) $W = 0$; 2) $B = \text{const}$ и 3) $r \rightarrow \infty$ (плоский случай). Если плазма холодная и газовым давлением можно пренебречь, первый интеграл уравнения (2.83) имеет вид

$$\rho r^2 B(\xi) = c_1(z), \quad (2.84)$$

* Связано это с тем, что течение сопровождается переходом через скорость сигнала.

где $c_1(z)$ — произвольная функция. Определив отсюда ρ и подставив его в уравнение (2.82), получим

$$\int_0^{\xi} \frac{B(\xi) d\xi}{\sqrt{U(\xi) - c_1(z) B(\xi)}} = \sqrt{2} c_1(z) \ln \frac{r}{c_2(z)}, \quad (2.85)$$

где $c_2(z)$ — вторая произвольная функция, причем $c_1(z)$ и $c_2(z)$ должны быть достаточно медленными функциями.

В случае, когда $B = \text{const}$, т. е. течение изомагнитно, интегралом уравнения (2.83) является соотношение

$$W(\rho) + \rho r^2 B^2 = c_3(z), \quad (2.86)$$

которое определяет ρ как неявную функцию от r и $c_3(z)$. Подставляя $\rho(r, c_3)$ в уравнение (2.82), находим

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi) - c_3(z)}} = \sqrt{2} \int_{c_4(z)}^r \rho r dr. \quad (2.87)$$

Вычислить интеграл в первой части не трудно при специальных значениях показателя политропы, например, при $\gamma=2$.

Наконец, в случае плоской задачи, когда $(H/\rho) = \sqrt{4\pi} B(\xi)$, $\rho v_z = \partial \xi / \partial x$, $\rho v_x = (-\partial \xi / \partial z)$, уравнения медленно меняющегося течения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{dB^2}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi}; \\ W(\rho) + v_z^2/2 + \rho B^2 = U \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

имеют первый интеграл

$$\rho + H^2/8\pi = P(z), \quad (2.89)$$

где $P(z)$ — медленная функция. Полагая для простоты $\gamma = 2$, $\rho = \rho_0 (\rho/\rho_0)^2$, получаем явное выражение для квадрата плотности

$$\rho^2(\xi, z) = \frac{P(z)}{\rho_0 / \rho_0^2 + B^2/2}. \quad (2.89a)$$

Подставляя это выражение в интеграл Бернулли (2.88), аналогично предыдущему находим

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\rho} \sqrt{U(\xi) - W(\rho) - \rho B^2(\xi)}} = \sqrt{2} x. \quad (2.89b)$$

Отсюда можно определить функцию потока $\xi(x, z)$ плоского течения при $H = H_y$, $(\partial/\partial y) = 0$.

2. Течения холодной плазмы в каналах медленно меняющегося сечения. Рассмотрим более подробно течение холодной плазмы $W =$

$= 0$, описываемое интегралами (2.84), (2.85) [20]. Различным функциям $B(\xi)$ и $U(\xi)$ соответствуют различные течения. Вид этих функций можно определить, если задать распределение $\rho(r)$ и $v(r)$ на входе $z = 0$ или в каком-либо другом сечении $z = \text{const}$. Проще всего задать начальные значения $\rho(r)$ и $v(r)$ в виде степенных функций

$$\rho = \rho_0 (r/R_0)^\nu; \quad v = v_0 (r/R_0)^\mu, \quad (2.90)$$

где ρ_0 и v_0 — плотность и скорость в точке $r = R_0, z = 0$, лежащей на некоторой средней линии тока $\xi = 0$, уравнение которой $r = R(z)$ будем считать заданным (см. рис. 1), а ν и μ — произвольные числа. С учетом соотношения $(\partial\xi/\partial r) = \rho v$ и формул (2.90) получаем при $z = 0$

$$\xi = \xi_0 \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\mu+\nu+2} - 1 \right], \quad \xi_0 = \frac{\rho_0 v_0 R_0^2}{\mu+\nu+2}. \quad (2.91)$$

Подставив эти выражения в уравнения (2.82) и (2.84), получим следующие выражения для искомых функций $B(\xi)$ и $U(\xi)$ при $W = 0$:

$$B(\xi) = \frac{c_1(0)}{\rho_0 R_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{-\frac{\nu+2}{\mu+\nu+2}}; \quad (2.92)$$

$$U(\xi) = \frac{v_0^2}{2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{\frac{2\mu}{\mu+\nu+2}} + \frac{c_1^2(0)}{\rho_0 R_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{-\frac{\nu+2}{\mu+\nu+2}}. \quad (2.93)$$

Общей для рассматриваемого случая течений холодной плазмы является зависимость

$$H_\varphi(r, z) = c_1(z)/r, \quad (2.94)$$

вытекающая из определения $B(\xi)$ и формулы (2.84) и показывающая, что продольный ток течет только по электродам. Величины же ρ и v в потоке зависят от выбора функций $B(\xi)$ и $U(\xi)$.

Будем считать заданной скорость $v_R(z)$ при $r = R(z)$. Учитывая, что $r = R(z)$ — линия тока и, следовательно, величины $B(\xi)$ и $U(\xi)$ постоянны при $r = R(z)$, определим из уравнений (2.82) и (2.84) введенную выше функцию $c_1(z)$:

$$c_1(z) = c_1(0) \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2(z)}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2}; \quad c_1^2(0) = \frac{\rho_0 R_0^2}{2} (v_{\text{макс}}^2 - v_0^2). \quad (2.95)$$

Используя полученные соотношения, записываем следующие формулы для ρ и v^2 :

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{r^2} \cdot \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2(z)}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{\frac{\nu+2}{\mu+\nu+2}}; \quad (2.96)$$

$$v^2 = v_0^2 \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{\frac{2\mu}{\mu+\nu+2}} + [v_R^2(z) - v_0^2] \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{-\frac{\nu+2}{\mu+\nu+2}}. \quad (2.97)$$

Остановимся более подробно на случае изомагнитного и изобернуллиевого течения, когда $B = \text{const}$ и $U = \text{const}$. Этот случай — вырожденный* и приводит не к степенной, а к логарифмической зависимости ξ от r . Согласно уравнению (2.87) получим $\xi(r, z)$ в виде

$$\xi(r, z) = \rho_0 R_0^2 v_R(z) \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2(z)}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2} \ln \frac{r}{R(z)}. \quad (2.98)$$

Приравнивая ξ постоянной, найдем форму электродов. В случае, когда $v_0 \rightarrow 0$, из выражения (2.98) следует, что уравнения электродов $r_1(z)$ и $r_2(z)$ имеют вид

$$\frac{r_{1,2}(z)}{R} = \left(\frac{r_{1,2}^*}{R} \right)^{\frac{2}{3\sqrt{3}}} x(1-x^2); \quad x = \frac{v_R(z)}{v_{\text{макс}}}. \quad (2.99)$$

Если за один из электродов принять $r = R = \text{const}$, то форма канала будет иметь вид, изображенный на рис. 9, а в случае $r_2^* > R$

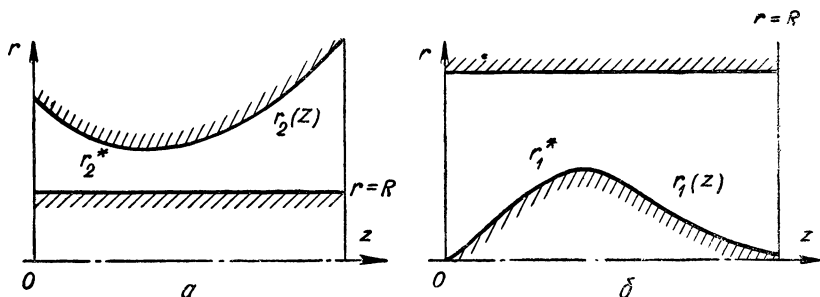


Рис. 9.

или на рис. 9, б для $r_1^* < R$. Критическое сечение, которое совпадает в данном случае с минимумом расстояния между электродами, определяется равенством $v_R^2(z^*) = v_{\text{макс}}^2/3$.

Плотность ρ пропорциональна r^{-2} :

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{r^2} \cdot \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2(z)}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2}, \quad (2.100)$$

а скорость $v_R(z)$ зависит только от z .

Заметим, что если бы мы задали профили обоих электродов, а не $v_R(z)$, то нам пришлось бы решать относительно v_R кубическое уравнение (2.99), корни которого могли бы оказаться комплексными. Это поясняет высказанное выше предложение о несуществовании в общем случае решения задачи типа Штурма—Лиувилля для нелинейных уравнений.

Среди множества течений холодной плазмы изомагнитные течения ($B = \text{const}$) отличаются тем, что в процессе течения радиальный

* Формально он соответствует $\mu = 0$, $\nu = -2$.

градиент плотности остается небольшим. Совсем иначе обстоит дело в существенно неизомагнитных течениях (т. е. когда $|v + 2| > 1$). Здесь при $v_0 \rightarrow 0$ радиальные градиенты плотности неограниченно возрастают.

Рассмотрим для примера течение при $\mu = -1$, $\nu = 0$, когда во входном сечении $z = 0$ плотность постоянна, а скорость пропорциональна r^{-1} . В этом случае величина U пропорциональна B , а для ξ имеем

$$\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{v_R}{v_0}} \cdot \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2}; \quad \xi_0 = \rho_0 v_0 R_0^2. \quad (2.101)$$

Как видно, в данном случае форма электродов такая же, как и при $B = \text{const}$, $U = \text{const}$ (см. выше). Зависимость ρ и v от координат имеет вид

$$\rho = \rho_0 \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2v_R}{v_0}} \cdot \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2};$$

$$v = v_R \left(\frac{r}{R}\right)^{-\frac{v_R}{v_0}} \cdot \frac{v_{\text{макс}}^2 - v_R^2}{v_{\text{макс}}^2 - v_0^2}. \quad (2.102)$$

Здесь имеет место резкая зависимость ρ и v от r , если v_0 достаточно мало и r заметно отличается от R , что указывает на сильное влияние начального распределения плотности на характеристики течения в каналах большого сечения.

Отметим в заключение, что в неизомагнитных течениях такие характеристики, как ток \mathcal{I} и тяга F , не имеют аномалий при $v_0 \rightarrow 0$, в то время как расход массы $\dot{m} \rightarrow \infty$, а напряжение $V \rightarrow 0$. Например, для течения, описываемого уравнениями (2.101)—(2.102), эти характеристики соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{c}{2} \sqrt{2\pi\rho_0} R v_{\text{макс}}; & F &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \rho_0 R^2 v_{\text{макс}}^2 \ln \frac{r_2^*}{R}; \\ \dot{m} &= 2\pi\rho_0 R^2 v_0 \left(\frac{r_2^*}{R}\right)^{\frac{2v_{\text{макс}}}{3\sqrt{3}v_0}}; & V &= \frac{\sqrt{2\pi\rho_0}}{c} R v_{\text{макс}} v_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Здесь $R = \text{const}$ — радиус внутреннего электрода, r_2 — радиус внешнего, и принято, что $v_0 \ll v_{\text{макс}}$. Очевидно, обнаруженные особенности связаны с допущением $W = 0$.

3. Изомагнитные течения, медленно изменяющиеся вдоль оси z . Рассмотрим случай, когда $B = \text{const}$, но плазма не холодная, т. е. $W \neq 0$. Из уравнений (2.82) и (2.86) следует, что

$$(v^2/2) = U(\xi) - c_3(z). \quad (2.104)$$

Отсюда видно, что если во входном сечении $z = 0$ скорость $v \rightarrow 0$, то $U = \text{const}$. Таким образом, при $v_0 \rightarrow 0$ изомагнитные течения, медленно изменяющиеся вдоль оси z , являются одновременно и изобернуллиевыми ($U = \text{const}$). Зависимость U от ξ определяется здесь только распределением по радиусу начальных скоростей.

Ограничимся рассмотрением течений при $U = \text{const}$. При этом в предельном случае холодной плазмы, когда $W \rightarrow 0$, мы, очевидно, получим течение (см. выше), для которого $\rho \sim r^2$, $rH_\phi = \text{const}$, т. е. весь ток входит через центральный электрод. Если же плазма горячая, так что $W \gg B^2 r^2 \rho$, то согласно уравнениям (2.34) и (2.86) $\rho \approx \rho(z)$, $H_\phi \sim r$. Следовательно, j_z -компонента плотности тока постоянна во всем входном сечении, и этот случай может быть реализован вообще без центрального электрода.

Запишем уравнение (2.86) в виде

$$\omega_0 \rho^{\gamma-1} + \rho r^2 B^2 = c_3(z), \quad (2.105)$$

где $\omega_0 = \text{const}$. Для явного вычисления ξ с помощью уравнения (2.87) необходимо разрешить уравнение (2.105) относительно ρ . Поскольку для реальных γ это нельзя сделать в простой форме*, ограничимся анализом модели с $\gamma = 2$. Введем обозначения

$$c_3 = \frac{1+\mu}{4\pi} \cdot \frac{H_0^2}{\rho_0} \eta(z); \quad \mu = \frac{c_{T0}^2}{c_{A0}^2}, \quad (2.106)$$

очевидно, $\eta(0) = 1$, $\eta_{\text{мин}} = 0$, а

$$\eta_{\text{макс}} = \frac{4\pi\rho_0 U}{(1+\mu)H_0^2} = \frac{1+\mu+n}{1+\mu}; \quad n = \frac{2\pi\rho_0 v_0^2}{H_0^2}. \quad (2.107)$$

Используя эти обозначения, перепишем (2.105) в виде, разрешенном относительно ρ :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1+\mu}{(r/r_0)^2 + \mu} \eta(z). \quad (2.108)$$

Подставляя найденное выражение в формулу (2.87), получаем

$$\xi = r_0^2 \rho_0 (1+\mu) \eta(z) v(z) \ln \frac{\mu + (r/r_0)^2}{\mu + [a(z)/r_0]^2}. \quad (2.109)$$

Здесь r_0 и ρ_0 — соответственно радиус и плотность на входе в систему, взятые на поверхности внутреннего электрода, причем $v(z)$ — скорость плазмы в данном сечении; при сделанных предположениях эта скорость не зависит от ξ^2 *. Конкретная картина течения определяется заданием явной зависимости $v(z)$ или $\eta(z)$, а также геометрии внутреннего электрода $a(z)$. Уравнение внешнего электрода $b(z)$ определяется из условия $\xi(b(z), z) = \xi_0 = \text{const}$.

* Уравнение (2.88) при произвольном γ легко решается только в крайних случаях $B \gg 1$ и $\beta \ll 1$ [20].

2* Очевидно $\eta(z)$ и $v(z)$ связаны соотношением, $v^2(z) = \frac{H_0}{2\pi\rho_0} [(1+\mu+n) - (1+\mu)\eta(z)]$.

Наибольший интерес рассматриваемая модель представляет для анализа компрессионного режима [22]. Пусть, например, профиль внутреннего электрода изменяется по закону $a = r_0(1 - z/l)$ при $z < l$ и $a = 0$ при $z > l$.

Максимальная плотность достигается на оси z при $z \geq l$:

$$\frac{\rho_{\text{макс}}}{\rho_0} = \left(\frac{1+\mu}{\mu} \right) \eta(z). \quad (2.110)$$

Это выражение находится в согласии с (2.72), если подставить туда $\gamma = 2$ и учесть, что $\eta(z) = \eta_{\text{макс}}$. Максимальная напряженность магнитного поля достигается при $r^* = r_0\sqrt{\mu}$

$$H|_{r=r^*} = H_0 \left(\frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}} \right) \eta(z). \quad (2.111)$$

В зависимости от того, происходит ли компрессия со скоростью $v \rightarrow 0$, с постоянной или с возрастающей скоростью, геометрия наружного электрода будет изменяться. Линии электрического тока определяются уравнением

$$Hr = \text{const}. \quad (2.112)$$

§ 5. Переход течения через скорость сигнала

Рассмотрим вопрос о переходе скорости течения через скорость сигнала. Оказывается критическая поверхность, где $v = v_s$, обладает некоторыми особенностями и, в частности, следующей. Если существует такое плоское сечение канала $z = z^* = \text{const}$, где скорость имеет только одну составляющую v_z , то критическая скорость, равная скорости распространения сигнала, достигается в этом сечении [20]. Действительно, беря частную производную по z от уравнения $\rho v v_z = \partial \xi / \partial r$ и интеграла Бернулли (2.35) и полагая $v = v_z$, $\partial \xi / \partial z = 0$, получаем

$$v \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (c_T^2 + c_A^2) \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} - v \frac{dv}{dz} = 0, \quad (2.113)$$

где c_T — скорость звука, а c_A — альфвеновская скорость. Если при $z = z^*$ скорость продолжает нарастать, т. е. в рассматриваемом сечении $(\partial v / \partial z) \neq 0$, то согласно уравнениям (2.113) находим для v выражение

$$v^* = \sqrt{c_T^2 + c_A^2}, \quad (2.114)$$

совпадающее со скоростью распространения сигнала c_s .

Однако обычно переход через критическую скорость происходит не в плоскости, а на некоторой поверхности. Этот вывод можно получить и в рамках рассматриваемого здесь приближения «плавного» течения.

А. Пусть $U = \text{const}$ и $B = \text{const}$, тогда, как указывалось выше, в случае «плавного» течения $v = v(z)$. Используя известную формулу $c_T^2 = (\gamma - 1)W$ и уравнение Бернулли (2.35), запишем величину $c_s^2 = c_T^2 + c_A^2$ в виде

$$c_s^2 = (\gamma - 1) \left(U - \frac{v^2(z)}{2} \right) - (\gamma - 2) r^2 B^2 \rho. \quad (2.115)$$

Для горячей плазмы при $\beta \gg 1$ в нулевом приближении по параметру β^{-1} плотность $\rho = \rho_0(z)$ определяется равенством $W(\rho_0) = U - v^2/2$ и в первом приближении в уравнение (2.115) вместо ρ можно

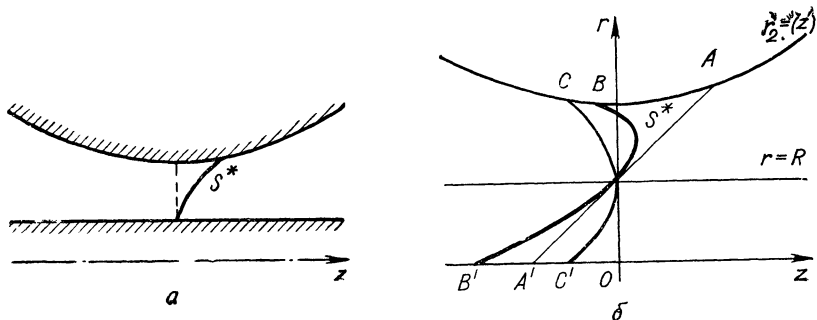


Рис. 10.

подставить величину $\rho_0(z)$. Приравнявая скорость потока $v(z)$ критической скорости c_s , получаем уравнение поверхности перехода через критическую скорость:

$$(1 + \gamma) \frac{v^2(z)}{2} - (2 - \gamma) B^2 r^2 \rho_0(z) = (\gamma - 1) U. \quad (2.116)$$

Поскольку $v(z)$ — возрастающая функция, а $\rho_0(z)$ — убывающая, то поверхность перехода с возрастанием радиуса проходит через большие значения z (рис. 10, а).

Б. В другом предельном случае $\beta \ll 1$, когда плазма холодная, плотность нулевого приближения по параметру β : $\rho_0(r, z) = (U - v^2/2)/r^2 B^2$. Запишем c_s^2 теперь в виде

$$c_s^2 = U - v^2/2 + (\gamma - 2)W(\rho). \quad (2.117)$$

В уравнении (2.117) мал последний член, поэтому можно в первом приближении по β положить в нем $\rho = \rho_0(r, z)$. Приравнявая $c_s^2 = v^2$, получаем уравнение критической поверхности:

$$(3/2)v^2(z) + (2 - \gamma)W(\rho_0) = U. \quad (2.118)$$

Отсюда следует, что и в этом случае критическая поверхность наклонена в сторону возрастания скорости (см. рис. 10, а)*.

* Известный в обычной гидродинамике [17] эффект наклона критической поверхности S^* в противоположную сторону (см. рис. 10, б) имеет порядок ϵ^2/β по отношению к описанному здесь (см. стр. 46).

В рассмотренных предельных случаях малых и больших β критическая поверхность имеет малые углы с поверхностью $r = \text{const}$. Очевидно, что максимальный наклон критической поверхности будет при $\beta \sim 1$.

§ 6. Токовые вихри и критические поверхности

При численных расчетах двумерных течений в коаксиальных ускорителях на ЭВМ К. В. Брушлинским, Н. Н. Герлах и А. И. Морозовым обнаружено возникновение петель тока [23]. Ток, выходящий из первого электрода, возвращался на тот же электрод, не доходя до второго электрода. Ниже мы проанализируем условия образования соответствующих токовых вихрей и приведем пример аналитического расчета картины в целом [24], используя при этом математический аппарат медленно меняющихся течений. Кроме того, в настоящем параграфе тот же аппарат используется для более подробного, чем это было сделано выше, вычисления формы критических поверхностей, на которых скорость течения переходит через местную скорость распространения сигнала.

1. Линии электрического тока. Если скорость плазмы имеет две компоненты v_r и v_z , а магнитное поле — только одну $H = H_\phi$, то при условии аксиальной симметрии задачи уравнения идеальной одножидкостной гидродинамики для изэнтропичного $S = \text{const}$ течения согласно (2.34)—(2.37) сводятся к системе уравнений:

$$\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\rho r^2}{2} \cdot \frac{dB^2}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi}; \quad (2.119)$$

$$W(\rho) + v^2/2 + \rho r^2 B^2 = U(\xi); \quad (2.120)$$

$$\frac{1}{\rho r} H_\phi = 4\pi I / c \rho r^2 = \sqrt{4\pi B(\xi)}. \quad (2.121)$$

При этом линии потока плазмы определяются уравнением $\xi(r, z) = \text{const}$, а линии электрического тока — уравнением $I(r, z) = \text{const}$. Компоненты скорости и плотности тока выражаются с помощью ξ и I формулами (2.15) и (2.38) при $\xi = \psi_0$.

В окрестности особой точки линий электрического тока, которая может быть как эллиптической, так и гиперболической, должны обращаться в нуль обе компоненты плотности тока \mathbf{j} . Заметим, что обращение в нуль нормальной к линиям потока компоненты \mathbf{j} может быть только в точке, в которой выполняется соотношение

$$r \frac{dv^2}{ds} - 4\rho W'(\rho) \frac{dr}{ds} = 0. \quad (2.122)$$

Это равенство получается из условия $j_\perp \sim \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial I}{\partial s} = 0$, если продифференцировать (2.120) и (2.121) вдоль линии потока $r = r(s)$. Согласно (2.122) при условии ускорения потока $(dv^2/ds) > 0$ ток может образовать петлю только при $(dr/ds) > 0$, т. е. на расширяющейся части электрода.

При расчете картины течения в целом ограничимся случаем $U = \text{const}$ и предположим, что магнитное давление мало по сравнению с газовым ($\beta = 8\pi\rho/H^2 \gg 1$). Рассматривая течения, медленно изменяющиеся вдоль оси z , и соответственно пренебрегая в (2.119) и (2.120) величинами порядка B^2 , $(\partial\xi/\partial z)^2$ и $\partial^2\xi/\partial z^2$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0; \quad W(\rho) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 = U. \quad (2.123)$$

Результат интегрирования этих уравнений представим в виде

$$\xi = \frac{\rho V}{2} (r^2 - R^2); \quad W(\rho) + \frac{1}{2} V^2 = U. \quad (2.124)$$

Здесь $V(z)$ и $R(z)$ — произвольные медленно изменяющиеся функции переменной z , задавая которые, мы получаем различные конфигурации поверхностей $\xi(r, z) = \text{const}$. Из второго уравнения (2.124) следует, что в рассматриваемом приближении $\rho = \rho(z)$.

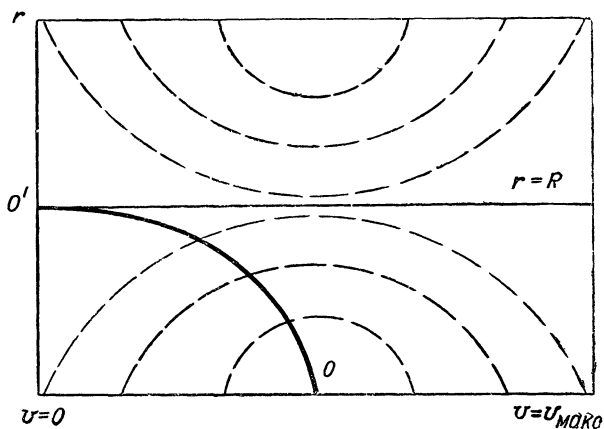


Рис. 11.

Положим $R = \text{const}$, т. е. среди линий потока $\xi(r, z) = \text{const}$ должна быть прямая линия $r = R$. Соответствующая картина линий потока изображена на рис. 11, где по оси z отложена скорость $V(z)$. Линии потока — эквипотенциальные и поэтому любую пару из них можно принять за электроды. В окрестности плоскостей $z = z_0$ и $z = z_{\text{макс}}$, где скорость $V(z) = 0$ и максимальному значению $V_{\text{макс}} = \sqrt{2U}$, течение не удовлетворяет критерию медленности и, следовательно, найденные результаты применимы лишь в средней части сопла, где линии потока достаточно плавные.

Для нахождения особой точки семейства линий электрического тока $I(r, z) = \text{const}$ приравняем нулю производные I_r и I_z :

$$\frac{\partial I}{\partial r} \sim \rho r [2B + \rho r^2 V B'] = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial z} \sim r^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} B + \rho \frac{r^2 - R^2}{2} \cdot \frac{d(\rho V)}{dz} B' \right] = 0. \quad (2.125)$$

Отсюда видно, что для существования особой точки необходимо $BB' < 0$, и в изомагнитном случае, когда $B = \text{const}$, особых точек не существует. Исключая из равенств (2.125) величину B' (ξ) и используя второе уравнение (2.124), продифференцированное по z , а также соотношение $\rho W'(\rho) = c_T^2$, где $c_T = \sqrt{\gamma p/\rho}$ — скорость звука, получаем

$$r^2 = R^2 (1 - V^2/c_T^2). \quad (2.126)$$

Это уравнение определяет кривую OO' (см. рис. 11), на которой обращается в нуль нормальная к линиям потока компонента плотности тока j_{\perp} . Согласно (2.126) эта кривая соединяет точку ($r = 0, V = c_T$), находящуюся в критическом сечении сопла, и точку ($r = R, V = 0$). Особые точки семейства линий тока $I = \text{const}$ могут лежать только на кривой OO' и, следовательно, расположены ниже прямой $r = R$ на линиях потока с $(dr/ds) > 0$.

Для определения типа особой точки вычислим вторые производные от $I(r, z)$. Учитывая, что

$$W'' = \frac{\gamma - 2}{\rho} W' = \frac{\gamma - 2}{\rho^2} c_T^2,$$

где γ — показатель адиабаты, и используя уравнения (2.124) — (2.126), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial r^2} &\sim -8\rho B + \rho^3 r^4 V^2 B''; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial r \partial z} &\sim -\frac{2\rho r V' B}{V} \left(1 - \frac{2V^2}{c_T^2}\right) - \frac{\rho^3 r^5 V^3}{2c_T^2} V' B''; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &\sim -\frac{\rho R^2 V'^2 B}{c_T^2} \left[1 + (\gamma + 2) \frac{V^2}{c_T^2} - \frac{2V^4}{c_T^4}\right] + \\ &\quad + \frac{\rho^3 r^6 V^4}{4c_T^4} V'^2 B''. \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

Знак инварианта $\Sigma = I_{rr}I_{zz} - I_{rz}^2$ определяет тип особой точки. Ограничиваясь случаем линейной зависимости $B(\xi)$, находим, что знак инварианта совпадает со знаком выражения $(-1 + 7V^2/c_T^2 + 2(\gamma - 2)V^4/c_T^4)$. Следовательно, если особая точка лежит на участке кривой OO' , расположенном ниже точки $r_c = 0,92R, V_c = 0,22V_{\text{макс}}$, то она эллиптического типа, если же она находится выше r_c — гиперболического типа (см. рис. 11).

Отметим, что в рассматриваемом случае

$$B = b (\xi + c); I = \rho r^2 b (\xi + c) \quad (2.128)$$

одна из линий потока $\xi = -c$ — это одновременно и линия тока. На этой линии обращается в нуль магнитное поле $H = H_\phi$. Если подставим в (2.128) выражения для ρ и ξ , то получим уравнение семейства линий электрического тока:

$$V (V_{\text{макс}}^2 - V^2)^{\frac{2}{\nu-1}} r^2 (r^2 - R^2) + c (V_{\text{макс}}^2 - V^2)^{\frac{1}{\nu-1}} r^2 = \text{const}, \quad (2.129)$$

которое можно разрешить относительно r^2 .

Таким образом, в данном случае при отрицательных значениях постоянной c семейство линий тока имеет две особые точки — эллиптическую и гиперболическую (рис. 12). Если $c = 0$, гиперболическая точка сдвигается ко входу в канал, где $V = 0$, а эллиптическая точка находится при $r = R/\sqrt{2}$ (рис. 13). Если $c > 0$, остается только особая точка эллиптического типа (рис. 14).

На рис. 12—14 показаны линии электрического тока для линейной зависимости $B = b (\xi + c)$. Пунктиром изображены линии потока плазмы, каждую из которых можно принять за электрод. Жирными линиями изображены линии потока $\xi = -c$, на которых магнитное поле меняет знак.

Следует отметить, что токовые петли наблюдаются экспериментально в условиях, близких к предсказываемым данной теорией.

2. Критические поверхности. Теорию медленно меняющихся течений можно эффективно использовать для исследования формы критической поверхности, т. е. поверхности перехода скорости через скорость сигнала. Наиболее просто рассчитываются предельные случаи слабого $\beta \gg 1$ и сильного $\beta \ll 1$ магнитных полей. Соответствующий расчет при учете только первых производных по z был проведен выше (см. также работу [24]). Мы видели, что критическая поверхность расположена в наиболее узкой части сопла и наклонена в сторону движения вещества (см. рис. 10, б, кривая СА). Ниже мы покажем, что учет членов основных уравнений (2.119)—(2.120), содержащих $(\partial \xi / \partial z)^2$ и $\partial^2 \xi / \partial z^2$, приводит к отклонению «звуковой поверхности» при больших r в противоположную сторону.

Ограничиваясь предельными случаями слабого и сильного магнитных полей, рассмотрим течения с $U = \text{const}$, учитывая в первом приближении непостоянство $B(\xi)$. Как это видно из (2.119), в рассматриваемом случае $U = \text{const}$, при $B = \text{const}$ течения безвихревые ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$). Для медленно меняющихся течений решение системы (2.119)—(2.120) ищем в виде

$$\xi = \xi_0(r, ez) + \xi_1(r, ez) + \dots (\xi_1 \sim \varepsilon^2 \ll 1). \quad (2.130)$$

Соответственно $v_r \sim \varepsilon$, а $v_z = V + v_{1z}$, где $v_{1z} \sim \varepsilon^2$. Кроме того, считаем $B = B_0 + B' \xi$, где $B' \xi \ll B_0$, и будем учитывать только величины первого порядка по B' и отбрасывать члены, содержащие

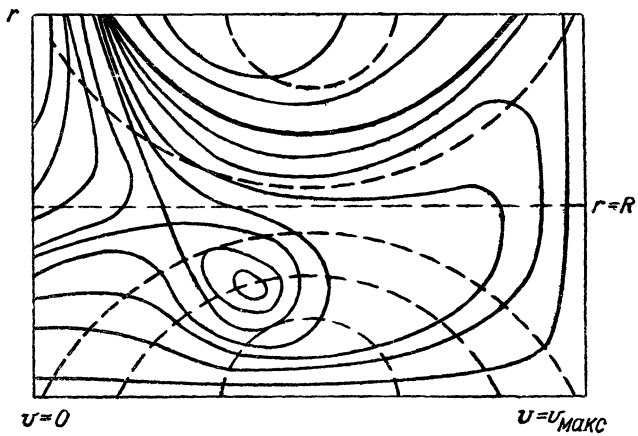


Рис. 12.

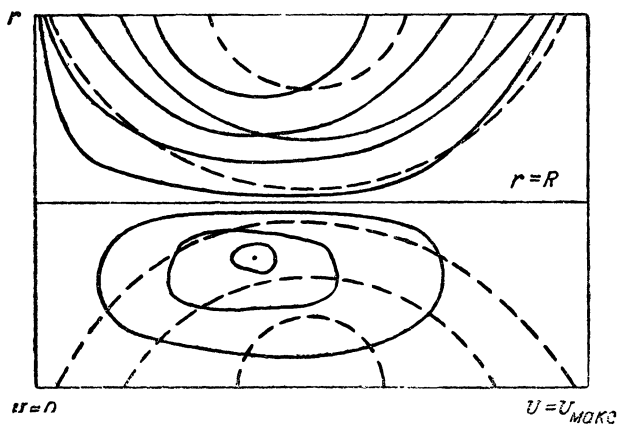


Рис. 13.

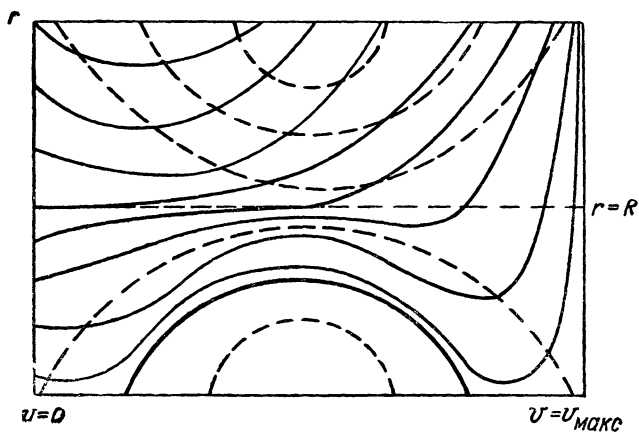


Рис. 14.

произведения B' , на другие малые параметры. В первом приближении, пренебрегая членами порядка ϵ^2 , в уравнении (2.119) получаем $V = V(z)$.

Будем считать $V(z)$ заданной скоростью на электроде $r = R = \text{const}$. Решая уравнения (2.119) — (2.120), можно найти с заданной точностью функцию $\xi(r, z)$ и из условия $\xi = \text{const}$ определить систему электродов, соответствующую заданной скорости $V(z)$. Ограничимся лишь определением звуковых поверхностей, а для этого достаточно знать только скорость v , т. е. надо найти первый интеграл уравнений (2.119) и (2.120). В первом приближении

$$\xi_0 = \int_R^r \rho V(z) r dr. \quad (2.131)$$

Подставляя это выражение в (2.119), находим поправку* к продольной скорости, пропорциональную ϵ^2 :

$$v_{1z} = - \int_R^r dr' \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho r'} \int_R^{r'} \frac{\partial}{\partial z} (\rho V) r dr \right]. \quad (2.132)$$

Квадрат радиальной скорости v_r с нужной точностью определяется дифференцированием (2.131). Определим теперь функцию $\rho(r, z)$, которая различна для случаев слабого ($\beta \gg 1$) и сильного ($\beta \ll 1$) магнитных полей. В нулевом приближении имеем

$$W(\rho) + \frac{V^2}{2} = U; \quad \rho = \rho(z) \quad (\text{при } B^2 \rightarrow 0); \quad (2.133)$$

$$\frac{V^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U; \quad \rho r^2 = \left(U - \frac{V^2}{2} \right) \frac{1}{B^2} \equiv f(z) \quad (\text{при } W \rightarrow 0). \quad (2.134)$$

Подставляя эти выражения в (2.131) и (2.132) соответственно, находим

$$v_r = - \frac{(\rho V)'}{\rho} \cdot \frac{r^2 - R^2}{2r}; \quad v_{1z} = - \frac{1}{4} \left(\frac{(\rho V)'}{\rho} \right) \times \\ \times \left(r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right); \quad (2.133a)$$

$$v_r = - \frac{(fV)'}{f} r \ln \frac{r}{R}; \quad v_{1z} = \frac{1}{4} \left(\frac{(fV)'}{f} \right)' \left(r^2 - R^2 - r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (2.134a)$$

Поверхность перехода скорости v через местную скорость распространения сигнала $c_s = \sqrt{c_T^2 + c_A^2}$ ($c_A^2 = H_\phi^2/4\pi\rho$) находим из уравнения $v^2 = c_s^2$. Учитывая, что $c_s^2 = (\gamma - 1)W + \rho r^2 B^2$ и урав-

* Поправки к ξ и ρ , обусловленные B' , учитываются позднее [см. формулу (2.138) и далее].

нение (2.120), получаем уравнения критических поверхностей $v^2 = c_s^2$ для случаев слабого и сильного магнитных полей

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\text{макс}}^2 + 2 \frac{2-\gamma}{1+\gamma} \rho r^2 B^2; \\ v^2 &= \frac{V_{\text{макс}}^2}{3} - 2 \frac{2-\gamma}{3} W(\rho). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Здесь в обоих выражениях вторые члены — малые, и в них можно подставлять ρ из (2.133) и (2.134).

В первом приближении по ϵ в предельных случаях $B^2 \rightarrow 0$ и $W \rightarrow 0$ критическая поверхность является плоскостью и определяется соответственно уравнениями

$$V^2(z) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\text{макс}}^2; \quad V^2(z) = \frac{V_{\text{макс}}^2}{3}. \quad (2.136)$$

Члены порядка B^2 в первом равенстве (2.135) и порядка W во втором обуславливают наклон этой поверхности (при $r > R$) в сторону увеличения $W(z)$.

Для определения эффекта, связанного с учетом величин порядка ϵ^2 , необходимо в левые части равенств (2.135) подставить v^2 из (2.134). Заметим, что согласно (2.133) — (2.134) для случаев $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$ можно записать соответственно:

$$\frac{(\rho V)'}{\rho} = \left(1 - \frac{V^2}{c_T^2}\right) V'; \quad \frac{(fV)'}{f} = \frac{V_{\text{макс}}^2 - 3V^2}{V_{\text{макс}}^2 - V^2} V'. \quad (2.137)$$

Эти величины, а следовательно, и радиальные компоненты скорости обращаются в нуль на критической поверхности нулевого приближения. Последнее очевидно, так как критическая поверхность нулевого приближения совпадает с плоскостью минимального сечения сопла.

Получим теперь полное выражение для скорости, учитывая поправку к V , связанную с переменностью B (§). Согласно (2.120) эта поправка $\delta V = -BB' \int_R^r \rho^2 r^3 dr$, где вместо ρ можно подставлять выражения из соотношений (2.133) и (2.134). Таким образом, уравнения критических поверхностей для $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$ принимают вид:

$$\begin{aligned} V^2 + \frac{\gamma+1}{2} V'^2 \left(r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) &= \\ = c_T^{*2} + 2 \frac{2-\gamma}{1+\gamma} \rho r^2 B^2 - \frac{BB' \rho^2 V}{2} (r^4 - R^4); \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} V^2 - \frac{3}{2} V'^2 \left(r^2 + R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) &= \\ = c_A^{*2} - 2 \frac{2-\gamma}{1+\gamma} W - \frac{B' c_A^3}{2B^3} \ln \frac{r^2}{R^2}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Если ограничиться разложением $V(z)$ с точностью до линейного члена в окрестности звуковой поверхности нулевого приближения $z = 0$ и разложить функции от r по степеням $(r - R)$, то получим

$$V'z = \frac{2-\gamma}{1+\gamma} \cdot \frac{2\rho B^2 R}{c_T} (r-R) - \\ - \frac{1+\gamma}{2c_T} V'^2 (r-R)^2 + BB' \rho^2 R^3 (r-R); \quad (2.140)$$

$$V'z = \frac{2-\gamma}{3} \cdot \frac{\gamma-1}{c_A} \cdot \frac{2W_R}{R} (r-R) - \\ - \frac{3V'^2}{2c_A} (r-R)^2 + \frac{B' c_A^2}{2B^3 R} (r-R). \quad (2.141)$$

Здесь члены порядка V'^2 как для (2.140), так и для (2.141) дают искривление звуковой поверхности в сторону, противоположную движению вещества ($z < 0$), причем влияние этих членов возрастает при удалении от линии потока $r = R$. Члены порядка B' частично компенсируют основные линейные по $(r-R)$ члены, если $BB' < 0$, и усиливают их при $BB' > 0$.

Таким образом, в обоих случаях как слабого, и сильного магнитного поля звуковые поверхности имеют вид, схематически показанный на рис. 10, б, где линия AA' соответствует пренебрежению членами порядка V'^2 , а линии BB' и CC' показывают форму звуковой поверхности для случаев предельно слабого и предельно сильного магнитных полей. При $B = 0$ из (2.140) получаем известное выражение для звуковой поверхности в обычной газодинамике [16].

ГЛАВА 3

ТЕЧЕНИЕ В АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Интегральные характеристики

Выше был рассмотрен случай ускорения азимутальным полем невращающейся плазмы ($\psi' = 0$, $A = 0$). Очевидно, в присутствии продольного магнитного поля плазма, вообще говоря, будет вращаться вокруг оси z , и поэтому в данном случае следует рассматривать течения с $v_\varphi \neq 0$. Более того, если ввести вместо $U(\xi)$ функцию $U_1(\xi) = U + AB/\psi'_0\psi'$, то уравнение Бернулли (2.26) можно представить в виде

$$W(\rho, S) + \frac{v^2}{2} + \frac{rv_\varphi B}{\psi'} = U_1(\xi), \quad (3.1)$$

откуда следует, что в случае отличного от нуля продольного поля ($\psi' \neq 0$) ускорение вдоль линии потока при $v_\varphi = 0$ может быть только результатом использования тепловой энергии.

Величины ψ_0 и ψ пропорциональны потокам жидкости и магнитного поля между аксиально симметричными поверхностями $\xi(r, z) = \text{const}$. Используя соотношение (2.22) и равенства

$$d\psi_0/d\psi = \rho v_z/H_z = \rho v_z/H_r, \quad (3.2)$$

которые из него вытекают, можно записать интеграл Бернулли в двух формах, соответствующих выражениям (2.26) и (3.1):

$$\begin{aligned} W + \frac{v^2}{2} + \frac{[\mathbf{H}[\mathbf{vH}]]_q}{4\pi \rho v_q} &= U(\xi); \\ W + \frac{v^2}{2} + \frac{[\mathbf{v}[\mathbf{vH}]]_q}{H_q} &= U_1(\xi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$(q = r, z).$

Если выбрать $\xi = \psi_0$, то интегралы A и B можно представить в виде

$$A = r \left(v_\varphi - \frac{H_\varphi H_q}{4\pi \rho v_q} \right); \quad B = \frac{1}{\rho r} \left(H_\varphi - \frac{v_\varphi H_q}{v_q} \right) \frac{1}{4\pi}. \quad (3.4)$$

Эти выражения можно записать также и в других эквивалентных формах, если использовать соотношения (3.2).

Выражения (2.26) и (3.1) показывают, что в случае, когда на выходе из ускорителя $H_\varphi \rightarrow 0$, максимальная скорость, соответствующая $\rho \rightarrow 0$, $v_{\text{макс}} = \sqrt{2U}$, если же $v_\varphi \rightarrow 0$, то $v_{\text{макс}} = \sqrt{2U_1}$.

Выходные параметры ускорителя, так же как в случае ускорения азимутальным полем, просто выражаются с помощью интегралов ψ_0 , U и B . Действительно, например, расход массы

$$\dot{m} = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z 2\pi r dr = 2\pi \{ \psi_0(\xi_2) - \psi_0(\xi_1) \}. \quad (3.5)$$

Теперь вычислим энергетический поток N и тягу F . Заметим, что согласно уравнению (2.26) $v \rightarrow v_{\text{макс}}$ при $\rho \rightarrow 0$, $H_\varphi \rightarrow 0$, и поэтому из уравнения Бернулли (2.26) следует, что на выходе ускорителя $v^2 \rightarrow 2U(\xi)$. Отсюда, интегрируя по выходному сечению, получаем

$$N = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{v^2}{2} v_z 2\pi r dr = 2\pi \int_{\psi_0(\xi_1)}^{\psi_0(\xi_2)} U d\psi_0; \quad (3.6a)$$

$$F = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z^2 2\pi r dr = 2\pi \int_{\psi_0(\xi_1)}^{\psi_0(\xi_2)} v_z d\psi_0. \quad (3.6b)$$

При $v_z \approx v$ последнее равенство можно переписать в виде

$$F = 2\pi \int_{\psi_0(\xi_1)}^{\psi_0(\xi_2)} \sqrt{2U} d\psi_0. \quad (3.6в)$$

Далее, напряжение между электродами равно:

$$U = \frac{1}{c} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (v_z H_\varphi - v_\varphi H_z) dr = \frac{V\sqrt{4\pi}}{c} \int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi) d\xi, \quad (3.7a)$$

а ток, протекающий через систему, выражается интегралом от j_z по входному сечению:

$$\mathcal{I} = \int_0^{r_2} j_z 2\pi r dr = cr_2 H_\varphi(r_2, 0). \quad (3.7б)$$

§ 2. Течения в узких аксиально симметричных каналах

1. Уравнение Гюгонио. Если разбить поток на узкие коаксиальные трубки, то течение в такой трубке можно описать, как и при $\mathbf{H}_\parallel = 0$, системой алгебраических уравнений [25]. Обозначим $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\varphi$ и $\mathbf{H}_\parallel = \mathbf{H} - \mathbf{H}_\varphi$ — составляющие скорости и поля в меридиональном сечении соответственно, а

$$c_\parallel = H_\parallel / \sqrt{4\pi\rho}, \quad c_\varphi = H_\varphi / \sqrt{4\pi\rho} \quad (3.8)$$

— компоненты альфвеновской скорости $c_A = \mathbf{H} / \sqrt{4\pi\rho}$. Очевидно, что

$$\rho r v_\parallel = \psi'_0 \partial \xi / \partial n, \quad r H_\parallel = \psi' \partial \xi / \partial n, \quad (3.9)$$

где производная берется по нормали n к линии потока, изображенной на рис. 15. Если умножить уравнения (3.9)

на расстояние f между двумя близкими линиями потока и заменить $\partial \xi / \partial n$ на приращение $\delta \xi = \text{const}$, а в уравнениях (2.20), (2.21) и (2.26) считать интегралы $U(\xi)$, $A(\xi)$ и $B(\xi)$ постоянными величинами, равными их значениям на некоторой средней линии потока $\xi = \text{const}$, уравнение которой есть $r = r(z)$, то получим

$$\rho r v_\parallel f = \alpha = \text{const}; \quad (3.10a)$$

$$\sqrt{\rho} r c_\parallel f = \beta = \text{const}; \quad (3.10б)$$

$$r (\alpha v_\varphi - \beta \sqrt{\rho} c_\varphi) = a = \text{const}; \quad (3.10в)$$

$$\frac{1}{r} \left(\alpha \frac{c_\varphi}{\sqrt{\rho}} - \beta v_\varphi \right) = b = \text{const}; \quad (3.10г)$$

$$W(\rho) + \frac{v^2}{2} + \frac{b}{\alpha} \sqrt{\rho} r c_\varphi = U = \text{const}. \quad (3.10д)$$

Здесь первые два уравнения выражают сохранение продольных потоков плазмы и магнитного поля, а остальные уравнения выте-

кают из законов сохранения момента, вмороженности магнитного поля и сохранения энергии. Уравнения (3.10), очевидно, являются точными, если считать бесконечно малым расстояние f между соседними линиями потока. В результате введения величины f при исследовании течений с помощью системы (3.10) можно избежать интегрирования уравнения (2.29), которое, по существу, служит для определения возможных конфигураций линий потока между двумя неблизкими электродами. Поскольку система (3.10) содержит пять уравнений с семью неизвестными: f , r , ρ , $v_{||}$, v_{ϕ} , $c_{||}$ и c_{ϕ} , то две из этих величин, например r и f , можно задать произвольно.

Дифференцируя уравнения (3.10) и исключая $d\rho$, получаем уравнение Гюгонио

$$\left(v_{||}^2 - c_T^2 - \frac{c_{\phi}^2}{1 - c_{||}^2/v_{||}^2} \right) \frac{dv_{||}}{v_{||}} = \left(c_T^2 + \frac{c_{\phi}^2}{1 - c_{||}^2/v_{||}^2} \right) \frac{d(rf)}{rf} + \left(v_{\phi}^2 - \frac{2c_{\phi}}{v_{||}} \cdot \frac{[c_A v]_n}{1 - c_{||}^2/v_{||}^2} \right) \frac{dr}{r}. \quad (3.11)$$

Здесь множитель при $dv_{||}/v_{||}$ обращается в нуль при скорости $v_{||}$, которую можно найти из уравнения

$$v_{||}^4 - \left(c_T^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right) v_{||}^2 + c_T^2 \frac{H_{||}^2}{4\pi\rho} = 0, \quad (3.12)$$

т. е. $v_{||} = c_s$, а скорость распространения сигнала

$$c_s^{\pm} = \frac{1}{2} \left(c_T^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(c_T^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right)^2 - \frac{c_T^2 H_{||}^2}{4\pi\rho}}. \quad (3.13)$$

Здесь c_s^+ и c_s^- — скорости быстрой и медленной магнитозвуковых волн соответственно. Следовательно, в канале постоянного среднего радиуса $r = \text{const}$ критическая скорость $v_{||} = c_s$ достигается в минимуме площади сечения канала $2\pi r f$, а в канале постоянного сечения — в минимуме $r(z)$. В цилиндрическом коаксиале, когда r и f постоянны, $dv_{||} = 0$ и плазма не ускоряется.

Уравнения (2.27) показывают, что при $s = (\psi_0'/\rho) - \psi'^2 = 0$ азимутальные компоненты скорости и магнитного поля обращаются в бесконечность. Это происходит, когда плотность достигает критического значения

$$\rho_{кр} = (d\psi_0/d\psi)^2 = \rho \cdot v_{||}^2 / c_{||}^2. \quad (3.14)$$

Как видно, плотность плазмы равна $\rho_{кр}$ в том случае, когда местная продольная скорость плазмы равна местной альфвеновской скорости, соответствующей полю $H_{||}$. Непрерывное течение может существовать лишь при условии, что ρ не переходит через $\rho_{кр}$, или, иными словами, $v_{||}$ остается везде или больше $c_{||}$, или меньше $c_{||}$, или равной $c_{||}$. В первом случае ($\rho < \rho_{кр}$, $v_{||} > c_{||}$) назовем течение докритическим, во втором случае ($\rho > \rho_{кр}$, $v_{||} < c_{||}$) — закрити-

чекским, а в третьем ($\rho = \rho_{кр}$, $v_{||} = c_{||}$) — критическим. Очевидно, при ускорении азимутальным полем ($c_{||} = 0$) всегда имеет место докритический режим ускорения.

2. Течения с бесконечно малой начальной скоростью при $r = \text{const}$. Рассмотрим сначала частный случай течения в канале с постоянным средним радиусом r при условии, что скорость на входе в систему пренебрежимо мала. Полагая, что начальные значения v_{ϕ} и $v_{||}$ равны нулю, а $r = \text{const}$, запишем систему уравнений (3.10) в виде

$$\rho v_{||} f = \alpha_1; \quad \sqrt{\rho} c_{||} f = \beta_1; \quad (3.15a)$$

$$\alpha_1 v_{\phi} - \beta_1 \sqrt{\rho} c_{\phi} = -\beta_1 \sqrt{\rho_0} c_{\phi_0}; \quad \alpha_1 \frac{c_{\phi}}{\sqrt{\rho}} - \beta_1 v_{\phi} = \alpha_1 \frac{c_{\phi_0}}{\sqrt{\rho_0}}; \quad (3.15б)$$

$$W(\rho) + \frac{v_{\phi}^2 + v_{||}^2}{2} + c_{\phi_0} c_{\phi} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = U, \quad (3.15в)$$

где индексом нуль обозначены значения соответствующих величин на входе в систему.

Из уравнений (3.15б) следует, что

$$c_{\phi} = c_{\phi_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \cdot \frac{1 - \rho_0/\rho_{кр}}{1 - \rho/\rho_{кр}}; \quad v_{\phi} = -c_{\phi_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{кр}}} \cdot \frac{1 - \rho/\rho_0}{1 - \rho/\rho_{кр}}. \quad (3.16)$$

Подставляя эти выражения в интеграл Бернулли (3.15в), получаем зависимость $v_{||}$ от ρ :

$$v_{||}^2 = 2 \{W(\rho_0) - W(\rho)\} + c_{\phi_0}^2 G(\rho), \quad (3.17)$$

где

$$G(\rho) = \frac{\rho_{кр}}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{1 - \rho_0/\rho_{кр}}{1 - \rho/\rho_{кр}} \right)^2 \right] \quad (\rho_{кр} = \alpha_1^2/\beta_1^2). \quad (3.18)$$

Полученные уравнения (3.16) и (3.17) явно показывают появление особенностей при приближении плотности ρ к критической плотности $\rho_{кр}$.

а. Рассмотрим сначала случай критического течения. В этом случае $\rho = \rho_{кр} = \text{const}$ и $v_{||} = c_{||}$. Уравнения (3.15б) сводятся к одному уравнению

$$c_{\phi} = c_{||} - c_{\phi_0}, \quad (3.19)$$

а из уравнения Бернулли (3.15в) вытекает, что

$$v_{||}^2 = c_{\phi_0}^2 - c_{\phi}^2. \quad (3.20)$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением (3.15а), находим профиль канала

$$f = f_1 c_{\phi_0} / \sqrt{c_{\phi_0}^2 - c_{\phi}^2}, \quad (3.21)$$

где f_1 — сечение канала на выходе системы, а $c_{\phi} \rightarrow 0$.

В режиме критического течения плотность вещества остается постоянной. Поэтому его ускорение может осуществляться только из-за альфвеновских волн. Это дает право называть критический режим также «альфвеновским».

б. Рассмотрим докритическое течение ($\rho < \rho_{кр}$). Если $r = \text{const}$, то уравнение Гюгонио (3.11) принимает вид

$$\left(v_{\parallel}^2 - c_T^2 - \frac{c_{\Phi}^2}{1 - c_{\parallel}^2/v_{\parallel}^2} \right) \frac{dv_{\parallel}}{v_{\parallel}} = \left(c_T^2 + \frac{c_{\Phi}^2}{1 - c_{\parallel}^2/v_{\parallel}^2} \right) \frac{df}{f}. \quad (3.22)$$

В случае докритического течения $v_{\parallel}^2 > c_{\parallel}^2$ и коэффициент при df/f всегда положителен и в нуль не обращается. Выражение, стоящее в круглых скобках в левой части равенства (3.22) можно записать в виде

$$(v_{\parallel}^2 - c_{s+}^2)(v_{\parallel}^2 - c_{s-}^2)/(v_{\parallel}^2 - c_{\parallel}^2). \quad (3.23)$$

Поскольку согласно соотношению (3.13) c_{s-}^2 всегда меньше c_{\parallel}^2 , то в случае, когда $v_{\parallel}^2 > c_{\parallel}^2$, переход выражения (3.23) через нуль

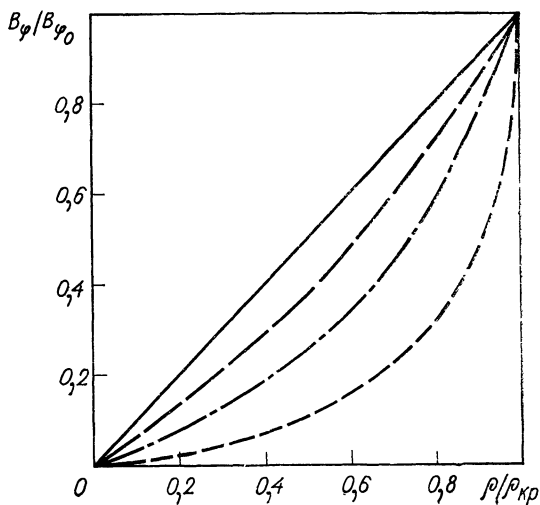


Рис. 16.

происходит только при $v_{\parallel} = c_{s+}$. Таким образом, при докритическом течении канал имеет только одну перетяжку, где скорость переходит через скорость быстрой магнитозвуковой волны и, следовательно, имеет вид обычного сопла.

Зависимость отношения V_{Φ}/V_{Φ_0} от $\rho/\rho_{кр}$, построенная с учетом первого уравнения (3.16), изображена на рис. 16.* Из рисунка видно, что при $\rho_{кр} \rightarrow \infty$, т. е. $H_{\parallel} \rightarrow 0$, справедливо обычное условие вмороженности $V_{\Phi}/\rho = V_{\Phi_0}/\rho_0$. При уменьшении $\rho_{кр}$ график зависимости все более прогибается, так что при $\rho_{кр} = \rho_0$ все измене-

* На рис. 16 и 17 параметром кривых является величина $\kappa = \rho_0/\rho_{кр}$. Кривые на рисунках соответствуют значениям $\kappa = 0; 0,3; 0,6; 0,9$ (сверху вниз).

ние $V\Phi$ происходит при постоянной плотности (ускорение на альфвеновских возмущениях).

Далее, считая плазму холодной, рассмотрим изменение продольной скорости ускоряемой плазмы. В случае $W \rightarrow 0$ из уравнения 3.17) следует

$$v_{\parallel}^2 = c_{\Phi_0}^2 G = c_{\Phi_0}^2 \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{1 - \rho_0/\rho_{\text{кр}}}{1 - \rho/\rho_{\text{кр}}} \right)^2 \right]. \quad (3.24)$$

Функция G — монотонно возрастающая функция $\rho/\rho_{\text{кр}}$, ее частные значения равны

$$G = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho = \rho_0; \\ 2 - \rho_0/\rho_{\text{кр}} & \text{при } \rho = 0; \\ 1 & \text{при } \rho_0 = \rho_{\text{кр}}; \\ 2(1 - \rho/\rho_0) & \text{при } \rho_{\text{кр}} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.25)$$

Отсюда видно, что максимальная скорость достигается при $\rho \rightarrow 0$,

$$(v_{\parallel})_{\text{макс}} = c_{\Phi_0} \sqrt{2 - \rho_0/\rho_{\text{кр}}}. \quad (3.26)$$

Уменьшение скорости на выходе из ускорительной системы связано с тем, что часть подводимой энергии идет на сообщение потоку азимутального вращения [см. выражение (3.16)].

Азимутальная скорость монотонно возрастает вдоль канала и на выходе при $\rho = 0$ стремится к

$$(v_{\Phi})_{\text{макс}} = -c_{\Phi_0} \sqrt{\rho_0/\rho_{\text{кр}}}. \quad (3.27)$$

Зависимость отношения $v_{\Phi}/(v_{\Phi})_{\text{макс}}$ от ρ/ρ_0 изображена на рис. 17.

Зная $v_{\parallel} = v_{\parallel}(\rho)$, можно построить зависимость $f(\rho)$, определяющуюся формулой

$$f = \frac{\alpha_1}{\rho v_{\parallel}} = \frac{\alpha_1}{\rho c_{\Phi_0} \sqrt{G}}. \quad (3.28)$$

Величина f достигает минимума при $\rho^*/\rho_{\text{кр}} = 1 - (1 - \rho_0/\rho_{\text{кр}})^{2/3}$ причем скорость v_{\parallel}^* в этом критическом сечении равна

$$v_{\parallel}^* = c_{\Phi_0} \sqrt{G^*} = c_{\Phi_0} \sqrt{\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{2/3}}. \quad (3.29)$$

Используя полученные результаты, можно получить удобную формулу для расхода массы за 1 сек $\dot{m} = 2\pi r \alpha_1$ в виде

$$\dot{m} = 2\pi r f^* \rho_0 c_{\Phi_0} \left[\frac{1 - (1 - \rho_0/\rho_{\text{кр}})^{2/3}}{\rho_0/\rho_{\text{кр}}} \right]^{3/2}. \quad (3.30)$$

Если $\rho_0/\rho_{\text{кр}} \rightarrow 0$, то формулы (3.29) и (3.30) переходят в соответствующие выражения, полученные в предыдущей главе.

Приведем в заключение формулу для тангенса угла θ между скоростью и осью системы

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{\varphi}}{v_{\parallel}} = - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{\text{кр}}}} \frac{1 - \rho/\rho_0}{(1 - \rho/\rho_{\text{кр}}) \sqrt{G}}. \quad (3.31)$$

На выходе из ускорителя

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{макс}} = - \sqrt{\frac{\rho_0/\rho_{\text{кр}}}{2 - \rho_0/\rho_{\text{кр}}}}.$$

в. Рассмотрим закритический режим, когда $\rho/\rho_{\text{кр}} > 1$, $v_{\parallel} < c_{\parallel}$. Отметим, прежде всего, что рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем пункте (б) и основывающиеся на выражениях (3.22) и (3.23), приводят для закритического течения к выводу о том, что в данном случае ускоритель также имеет форму обычного сопла, но в критическом сечении происходит переход не через быструю, а через медленную магнитозвуковую скорость.

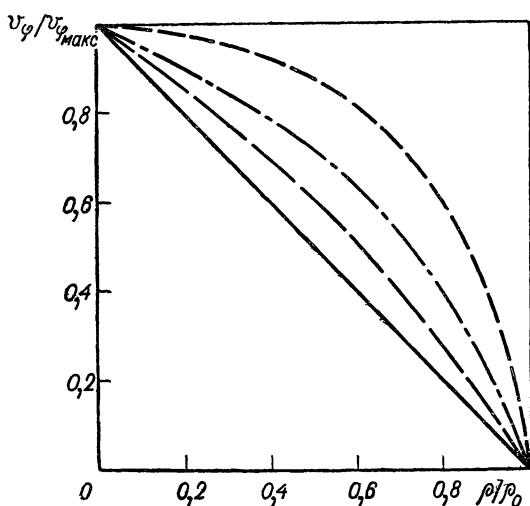


Рис. 17.

Проанализируем сначала течение холодной плазмы. Из формулы (3.24) следует, что для разгона плазмы необходимо, чтобы ρ возрастало, тогда скорость v_{\parallel} также монотонно растет и при $(\rho/\rho_{\text{кр}}) \rightarrow \infty$ стремится к пределу:

$$(v_{\parallel})_{\text{макс}} = c_{\varphi_0} \sqrt{\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0}}. \quad (3.32)$$

Это выражение показывает, что чем меньше отношение $\rho_0/\rho_{кр}$, тем больше скорость v_{\parallel} при данном c_{Φ_0} на выходе системы. Уравнения (3.16) позволяют найти B_{Φ} и v_{Φ} при $\rho \rightarrow \infty$:

$$B_{\Phi} \rightarrow B_{\Phi_0} \frac{\rho_0/\rho_{кр} - 1}{\rho_0/\rho_{кр}}; \quad v_{\Phi} \rightarrow -c_{\Phi_0} \sqrt{\frac{\rho_{кр}}{\rho_0}}. \quad (3.33)$$

В рассматриваемом течении B_{Φ} на выходе из ускорителя не стремится к нулю и поэтому скорости оказываются сравнительно небольшими. В то же время сечение канала f , очевидно, монотонно стремится к нулю в силу возрастания плотности и скорости потока.

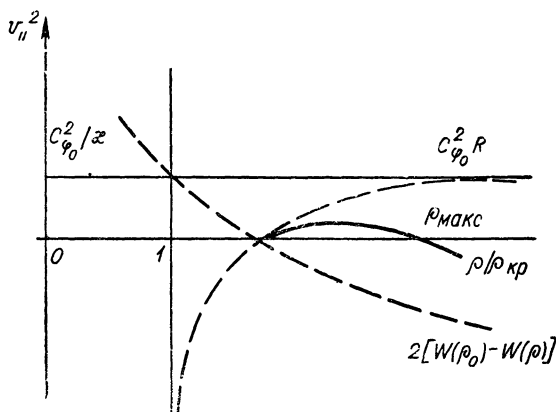


Рис. 18.

Картина оказывается более сложной, если учесть температуру плазмы. Этот учет в закритическом режиме принципиально необходим, поскольку плотность плазмы при разгоне возрастает и роль энтальпии становится существенной. При учете энтальпии в правой части уравнения Бернулли (3.17) мы имеем два члена $2 \{W(\rho_0) - W(\rho)\}$ и $c_{\Phi_0}^2 G(\rho)$. Первый из этих членов убывает при увеличении плотности ρ , а второй возрастает. Вычисляя производную от скорости по плотности, получаем

$$v_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{d\rho} = -\frac{c_T^2}{\rho} - \frac{c_{\Phi}^2}{\rho_0} \cdot \frac{(1 - \rho_0/\rho_{кр})^2}{(1 - \rho/\rho_{кр})^3}. \quad (3.34)$$

Отсюда видно, что в закритическом режиме ($\rho > \rho_{кр}$) плазма ускоряется в результате потребления тепловой или магнитной энергии в зависимости от того, какой из членов в правой части этого уравнения больше. Если

$$c_T^2 > \frac{c_{\Phi}^2}{\rho_0/\rho_{кр} - 1}, \quad (3.35)$$

то ускорение происходит вследствие расхода тепловой энергии с уменьшением ρ (рис. 18), а при обратном знаке неравенства уско-

рение происходит с увеличением ρ (рис. 19), т. е. из-за магнитной энергии. Очевидно, плотность не может ни перейти через $\rho_{кр}$, ни уйти в бесконечность, так как при некотором значении плотности ρ , когда правая часть уравнения (3.35) обращается в нуль, скорость перестает изменяться.

Как уже отмечалось выше, при закритическом течении канал может иметь только одну перетяжку, соответствующую замедленной

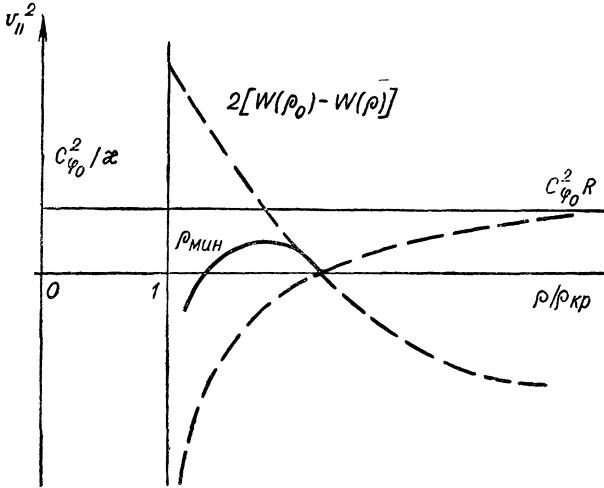


Рис. 19.

звуковой волне. Переход через скорость сигнала происходит при плотности ρ^* , удовлетворяющей условию $v_{||}^2 = c_{s-}^2$ или

$$W(\rho_0) - W(\rho) + c_{\phi_0}^2 G(\rho) = \frac{c_T^2 + c_{||}^2 + c_{\phi}^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_T^2 + c_{||}^2 + c_{\phi}^2}{2}\right)^2 - c_{||}^2 c_T^2}.$$

Если $v_{||}^2 = c_{s-}^2$, то написанное уравнение можно приближенно представить в виде $c_{\phi_0}^2 G(\rho) = \left(\frac{c_{||}^2 c_T^2}{c_{||}^2 + c_{\phi}^2}\right)_0$, откуда для ρ^* получаем

$$\rho^* = \rho_0 \left\{ 1 + \frac{\rho_0/\rho_{кр} - 1}{3} \left[\frac{c_{||}^2 c_T^2}{c_{\phi}^2 (c_{||}^2 + c_{\phi}^2)} \right]_0 \right\}. \quad (3.36)$$

3. Течения с бесконечно малой начальной скоростью при $r \neq \text{const}$. Остановимся теперь на случае, когда радиус средней линии канала не является постоянным, но также будем считать, что на входе в систему $v_{\phi} \rightarrow 0$, $v_{||} \rightarrow 0$. Если вместо ρ_0 ввести $\rho_{\phi\phi}$ согласно равенству

$$\rho_{\phi\phi} = \rho_0 (r_0/r)^2, \quad (3.37)$$

то уравнения течения в узком канале (3.10) можно записать в виде, аналогичном уравнениям (3.15) для случая течения в канале постоянного среднего радиуса $r = r_0$:

$$\rho v_{\parallel} r f = \alpha; \quad \sqrt{\rho} c_{\parallel} r f = \beta; \quad (3.38a)$$

$$c_{\varphi} = c_{\varphi_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\text{эфф}}} \cdot \frac{1 - \rho_{\text{эфф}}/\rho_{\text{кр}}}{1 - \rho/\rho_{\text{кр}}}}; \quad (3.38б)$$

$$v_{\varphi} = -c_{\varphi_0} \sqrt{\frac{\rho_{\text{эфф}}}{\rho_{\text{кр}}} \cdot \frac{1 - \rho/\rho_{\text{эфф}}}{1 - \rho/\rho_{\text{кр}}}};$$

$$v_{\parallel}^2 = 2 \{W(\rho_0) - W(\rho)\} + c_{\varphi_0}^2 R, \quad (3.38в)$$

где

$$R = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{эфф}}} \left[1 - \left(\frac{1 - \rho_{\text{эфф}}/\rho_{\text{кр}}}{1 - \rho/\rho_{\text{кр}}} \right)^2 \right],$$

а $\rho_{\text{кр}} = \rho v_{\parallel}^2 / c_{\parallel}^2 = \alpha^2 / \beta^2$. Отличие формул для c_{φ} , v_{φ} и v_{\parallel} от соответствующих формул предыдущего случая состоит в том, что вместо начальной плотности ρ_0 в них входит эффективная плотность $\rho_{\text{эфф}}$.

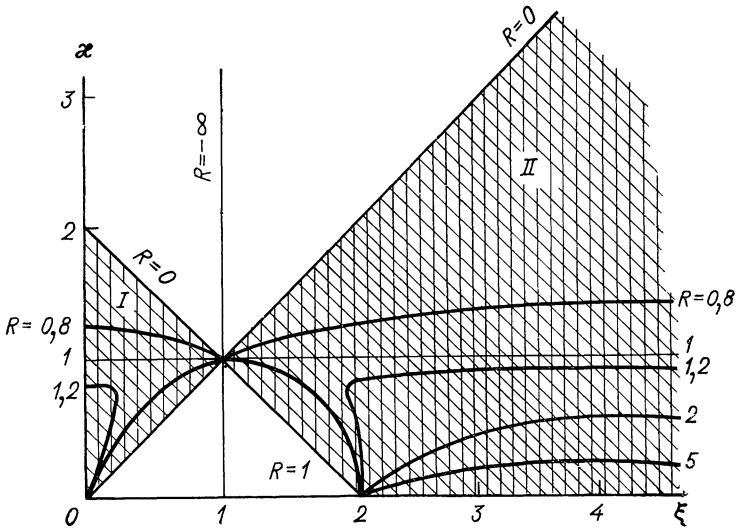


Рис. 20.

Очевидно, остается в силе деление течений на докритические, критические и закритические, а также вывод о существовании только одного перехода через скорость сигнала в докритическом и закритическом режимах. Однако в рассматриваемом случае появляется новый переменный параметр $\rho_{\text{эфф}}$, что позволяет получать течения с новыми свойствами.

На рис. 20 изображены области положительных и отрицательных значений $R(\xi, \kappa)$, где $\xi = \rho/\rho_{кр}$ и $\kappa = \rho_{эфф}/\rho_{кр}$, а также некоторые линии уровня $R = \text{const}$.

а. Если течение докритическое, то изображающая точка течения, выходя из биссектрисы $\kappa - \xi = 0$, может произвольно двигаться в области I (см. рис. 20). При движении этой точки к оси ординат скорость течения возрастает, и наибольшую скорость $(v_{||})_{\text{макс}} = \sqrt{2} \sqrt{W(\rho_0) + c_{\phi_0}^2}$ течение приобретает в том случае, когда изображающая точка приходит в начало координат, прижимаясь к оси ординат.

б. В случае критического течения плотность ρ должна оставаться постоянной. Однако система уравнений (3.10в) и (3.10г) совместна лишь при $r = r_0 = \text{const}$, а это соответствует рассмотренному выше течению.

в. Рассмотрим теперь особенности закритического течения при переменном $r(z)$, предполагая, что роль тепловых процессов относительно невелика. В этом случае допустимой областью положений изображающей точки оказывается область II (см. рис. 20). Выходя из точек биссектрисы $\kappa - \xi = 0$, при $\kappa > 1$ изображающая точка должна двигаться в направлении к оси ξ , если мы хотим, чтобы скорость нарастала, а плотность существенно не изменялась. При переходе через линию $\kappa = 1$ компонента поля V_{ϕ} обращается в нуль, а компоненты скорости становятся равными друг другу $v_{||} = v_{\phi} = c_{\phi_0}$. Если мы будем двигаться в сторону еще меньших значений κ , то $V_{\phi} \rightarrow -\infty$, а компоненты скорости v_{ϕ} и $v_{||}$ неограниченно возрастают. Это противоположно тому, что мы имели в докритическом случае.

Физически возрастание $v_{||}$ при отрицательном V_{ϕ} связано с уменьшением κ при увеличении r , причем продольное ускорение плазмы в результате действия центробежной силы оказывается больше, чем электромагнитное торможение. Схематически характер распределения токов изображен на рис. 21.

4. **Общий случай течений в узких каналах.** В заключение остановимся вкратце на общем случае магнитогидродинамических течений в узких каналах. Если считать заданными уравнение средней линии канала $r(z)$ и расстояние между электродами $f(z)$, то все величины, входящие в уравнение (3.10), можно выразить с помощью ρ :

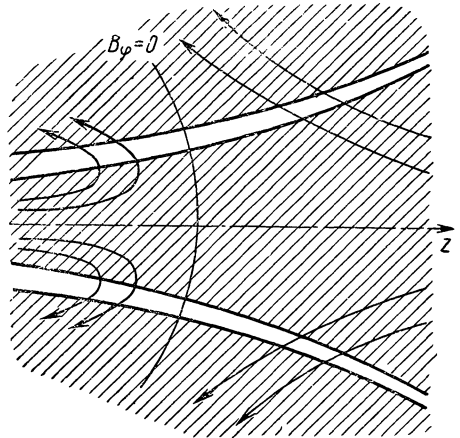


Рис. 21.

$$\left. \begin{aligned} c_{\varphi} &= \frac{\sqrt{\rho}}{r} \cdot \frac{\beta a + \alpha b r^2}{\alpha^2 - \beta^2 \rho}; & v_{\varphi} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\alpha a + \beta b r^2 \rho}{\alpha^2 - \beta^2 \rho}; \\ c_{\parallel} &= \frac{\beta}{\sqrt{\rho} r f}; & v_{\parallel} &= \frac{\alpha}{\rho r f}. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Плотность ρ определяется при этом из уравнения

$$W(\rho) + \frac{\alpha^2}{2\rho^2 f^2 r^2} + \frac{\alpha^3 a^2 + \rho b r^2 (2\alpha^2 - \beta^2 \rho) (2\beta a + \alpha b r^2)}{2(\alpha^2 - \beta^2 \rho)^2 \alpha r^2} = U. \quad (3.40)$$

Для течений холодной плазмы, когда $W \rightarrow 0$, уравнение (3.40) является алгебраическим уравнением четвертой степени относительно ρ . В этом случае, если задать скорость $v_{\parallel}(z)$ и радиус $r(z)$, то для f мы получим квадратное уравнение, решение которого при $a = 0$, например, имеет вид

$$f_{\pm} = \frac{1}{\alpha v_{\parallel}} \left\{ \beta^2 + \frac{b^2 r^2}{2U - v_{\parallel}^2} \pm \sqrt{\left(\beta^2 + \frac{b^2 r^2}{2U - v_{\parallel}^2} \right) \frac{b^2 r^2}{2U - v_{\parallel}^2}} \right\}. \quad (3.41)$$

Если продольное поле мало, то при $\beta^2 \rightarrow 0$ величины f_+ и f_- оказываются:

$$f_+ \approx \frac{2b^2 r}{\alpha v_{\parallel} (2U - v_{\parallel}^2)}; \quad f_- \approx \frac{\beta^2}{2\alpha v_{\parallel} r}. \quad (3.42)$$

§ 3. Течения холодной плазмы в каналах медленно меняющегося сечения

Рассмотрим простейшее решение уравнений (2.26), (2.29), обязанное медленности изменения параметров вдоль оси системы. Запишем уравнение (2.26) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - \frac{\partial s}{\partial \xi} \cdot \frac{(\nabla \xi)^2}{2\rho r^2} + \frac{1}{2\rho r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{A^2}{s} + \\ + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi'}{s\psi'_0} + TS' - U' = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В случае, когда все интегралы ψ'_0, ψ', A, B, S и U постоянны, это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0. \quad (3.44)$$

Отсюда видно, что в адиабатическом приближении, отбрасывая члены второго порядка малости $\partial^2 \xi / \partial z^2$ и $(\partial \xi / \partial z)^2$, получаем интеграл

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} = F(z), \quad (3.45)$$

где $F(z)$ — произвольная медленно меняющаяся функция z .

Ограничиваясь случаем $W = 0$, из уравнения Бернулли (2.26) имеем

$$(\rho s)^2 = \psi_0'^2 \frac{F^2 \psi'^2 + \left(rB\psi_0' + \frac{1}{r} A\psi' \right)^2}{2U\psi'^2 + r^2 B^2}. \quad (3.46)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.45), найдем функцию потока

$$\xi = \frac{F}{\psi'^2} \left\{ \psi_0' \int_R^r r^2 dr \sqrt{\frac{2U\psi'^2 + r^2 B^2}{r^2 F^2 \psi'^2 + (B\psi_0' r^2 + A\psi')^2} - \frac{r^2 - R^2}{2}} \right\} \quad (3.47)$$

Здесь $r = R(z)$ — уравнение линии тока жидкости, которая считается заданной. Полученный интеграл (3.47) выражается через эллиптические функции, однако в представляющем интерес случае $A = 0$ функция потока ξ выражается в элементарных функциях. При этом, полагая $\xi = \psi_0$, находим

$$\xi = \frac{F}{2\psi'^2} \left\{ \sqrt{(r^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2} - \sqrt{(R^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2} - \right. \\ \left. - (r^2 - R^2) + \gamma_- \ln \frac{r^2 + \gamma_+ + \sqrt{(r^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2}}{R^2 + \gamma_+ + \sqrt{(R^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2}} \right\}, \quad (3.48)$$

где

$$\gamma_{\pm} = \left(U \pm \frac{1}{2} F^2 \right) \frac{\psi'^2}{B^2}. \quad (3.49)$$

Продольная скорость v_z определяется формулой

$$v_z = F \sqrt{\frac{r^2 B^2 + 2U\psi'^2}{r^2 B^2 + F^2 \psi'^2}}. \quad (3.50)$$

Если считать скорость $v_z(z)$ при $r = R(z)$ заданной величиной, то

$$F^2 = \frac{v_z^2}{1 + \frac{1}{r^2 B^2} (2U - v_z^2) \psi'^2}. \quad (3.51)$$

С помощью $F(z)$ и $v_z(z)$ можно выразить и все остальные характеристики течения, которые оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\psi'^2} \left(1 - \frac{F}{v_z} \right); & H_z &= \frac{F}{\psi'} \left(\frac{v_z}{F} - 1 \right); \\ v_\varphi &= \frac{rB}{\psi'} \left(\frac{v_z}{F} - 1 \right); & H_\varphi &= \frac{rB}{\psi'^2} \left(\frac{v_z}{F} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

Здесь $\psi' = d\psi/d\psi_0$ — это отношение продольных потоков магнитного поля и жидкости. В случае, когда ψ' мало, отбрасывая квадраты этой величины, получаем:

$$\left. \begin{aligned} F &\approx v_z; \quad \xi \approx \frac{F}{B^2} \left(U - \frac{F^2}{2} \right) \ln \frac{r}{R}; \\ \rho &\approx \frac{U - \frac{1}{2} F^2}{r^2 B^2}; \quad H_\varphi \approx \frac{U - \frac{1}{2} F^2}{rB}; \\ v_\varphi &\approx \frac{U - \frac{1}{2} F^2}{rB} \psi'; \quad H_z \approx \frac{U - \frac{1}{2} F^2}{r^2 B^2} F \psi'. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Отсюда следует, что в первом порядке по ψ' геометрия электродов остается той же самой, как и при $\psi' = 0$. Величины ρ и H_φ также не меняются, а v_φ и H_z пропорциональны ψ' и для рассматриваемого течения исчезают при $v \rightarrow v_{\max} = \sqrt{2U}$.

ГЛАВА 4

АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

§ 1. Законы сохранения и интегральные параметры

В лабораторных условиях параметр обмена не всегда является пренебрежимо малым*. Более того, для получения экстремальных скоростей или сжатий выгодно иметь большой параметр обмена. Но в таком случае одножидкостная модель, рассмотренная выше, оказывается, вообще говоря, неприменимой и возникает проблема построения теории течений двухкомпонентной плазмы.

1. Законы сохранения. Если течение стационарно, то наиболее общую систему уравнений идеальной двухжидкостной гидродинамики (1.19) можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = 0 \text{ (а); } \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = 0 \text{ (б);} \quad (4.1)$$

$$M(\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = -\frac{\nabla p_i}{n_i} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right); \quad (4.2)$$

$$m(\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{\nabla p_e}{n_e} - e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right); \quad (4.3)$$

$$p_i = p_i(n_i, S_i) \text{ (а); } (\mathbf{v}_i \nabla) S_i = 0 \text{ (б);} \quad (4.4)$$

$$p_e = p_e(n_e, S_e) \text{ (а); } (\mathbf{v}_e \nabla) S_e = 0 \text{ (б);} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \text{ (а); } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \text{ (б);} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \text{ (а); } \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e) \text{ (б).} \quad (4.7)$$

* Подробный анализ экспериментов дан в статье [15].

В том случае, когда течение обладает аксиальной симметрией, систему (4.1)—(4.7) можно существенно упростить.

Для этой цели введем три функции потока ψ_i , ψ_e , ψ с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} r(nv_r)_{i,e} &= -\frac{\partial\psi_{i,e}}{\partial z}; & r(nv_z)_{i,e} &= \frac{\partial\psi_{i,e}}{\partial r}; \\ rH_r &= -\frac{\partial\psi}{\partial z}; & rH_z &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

и тем самым тождественно удовлетворим уравнениям непрерывности (4.1), (4.6б).

Далее, вводя функции Бернулли

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_i^2}{2} + W_i + \frac{e\Phi}{M} &= U_i; & \frac{v_e^2}{2} + W_e - \frac{e\Phi}{m} &= U_e; \\ W_{i,e} &= \int \frac{d\rho_{i,e}}{m_{i,e} n_{i,e}} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

и эффективные магнитные поля

$$\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H} + \frac{Mc}{e} \operatorname{rot} \mathbf{v}_i; \quad \mathbf{H}_e^* = \mathbf{H} - \frac{mc}{e} \operatorname{rot} \mathbf{v}_e, \quad (4.10)$$

перепишем, предполагая изэнтропичность, уравнения движения (4.2) и (4.3) в виде

$$\nabla U_i = \frac{e}{Mc} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}_i^*]; \quad \nabla U_e = -\frac{e}{mc} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}_e^*]. \quad (4.11)$$

Умножая соотношения (4.11) соответственно на \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e и учитывая (4.8), получаем

$$U_i = U_i(\psi_i); \quad U_e = U_e(\psi_e). \quad (4.12)$$

Это означает, что полная энергия U как электронов, так и ионов сохраняется вдоль их траекторий движения.

Замечая, что

$$rH_z^{*i,e} = \frac{\partial D_{i,e}}{\partial r}; \quad rH_r^{*i,e} = -\frac{\partial D_{i,e}}{\partial z}, \quad (4.13)$$

где

$$D_i = \psi + \frac{Mc}{e} r v_\varphi^i; \quad D_e = \psi - \frac{mc}{e} r v_\varphi^e, \quad (4.14)$$

и подставляя эти выражения в φ -компоненты уравнений (4.11), получаем законы сохранения моментов

$$D_i = D(\psi_i); \quad D_e = D_e(\psi_e). \quad (4.15)$$

Далее из r -компонент* уравнений (4.11) и законов сохранения (4.12) следуют уравнения для функций ψ_i и ψ_e :

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_i c}{e} U'_i &= \frac{v_\varphi^i D'_i}{r} - \frac{1}{rn_i} H_\varphi^{*i}; \\ -\frac{mc}{e} U'_e &= \frac{v_\varphi^e D'_e}{r} - \frac{1}{rn_e} H_\varphi^{*e}; \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

$$U'_{i,e} \equiv \frac{dU}{d\psi_{i,e}}; \quad D'_{i,e} \equiv \frac{dD}{d\psi_{i,e}}. \quad (4.17)$$

Отсюда, в частности, видно, что при $D = 0$, $m = 0$ и $n_i = n_e$ течение ионной компоненты безвихревое, если $M_i U'_i = -U'_e m_e$. Наконец, используя уравнения Максвелла (4.6) и (4.7), получаем

$$I = 2\pi e (\psi_i - \psi_e); \quad I = \frac{cr}{2} H_\varphi; \quad (4.18a)$$

$$\Delta^* \psi = -\frac{4\pi e}{c} r (n_i v_\varphi^i - n_e v_\varphi^e); \quad (4.18б)$$

$$\Delta \Phi = -4\pi e (n_i - n_e); \quad (4.18в)$$

$$\Delta^* \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для большей наглядности выпишем все механические уравнения вместе, исключив из уравнений (4.16) и (4.17) величины $\text{rot}_\varphi v_{i,e}$ с помощью (4.8). В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_i^2}{2} + W_i + \frac{e}{M} \Phi &= U_i(\psi_i); \quad \frac{v_e^2}{2} + W_e - \frac{e}{m} \Phi = U_e(\psi_e); \\ \psi + \frac{Mc}{e} r v_\varphi^i &= D_i(\psi_i); \quad \psi - \frac{mc}{e} r v_\varphi^e = D_e(\psi_e); \\ \frac{c}{e} \left(\frac{1}{rn_i} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{rn_i} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{1}{rn_i} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{1}{rn_i} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \frac{H_\varphi}{Mrn_i} + \frac{v_\varphi^i D'_i}{Mr} = \frac{c}{e} U'_i(\psi_i); \\ -\frac{c}{e} \left(\frac{1}{rn_e} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{rn_e} \cdot \frac{\partial \psi_e}{\partial r} + \frac{1}{rn_e} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{1}{rn_e} \cdot \frac{\partial \psi_e}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \frac{H_\varphi}{mrn_e} + \frac{v_\varphi^e D'_e}{mr} = -\frac{c}{e} U'_e(\psi_e). \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

В эти уравнения для 6 величин ψ_i , ψ_e , n_i , n_e , v_φ^i , v_φ^e входят четыре функции $U_i(\psi_i)$, $U_e(\psi_e)$, $D_i(\psi_i)$, $D_e(\psi_e)$, которые можно задать произвольно.

* Или z -компонент.

2. Интегральные параметры ускорителя. Зная законы сохранения, можно найти параметры, характеризующие работу ускорителя в целом. Отметим основные из них.

1. Скорость ионов на выходе [т. е. при $I = 2\pi e (\psi_i - \psi_e) \rightarrow 0$] определяется интегралом Бернулли (4.9) и при условии, что $W_{i,e} \rightarrow 0$:

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{2 \left[U_i(\psi_i) + U_e(\psi_i) \frac{m}{M} \right]}. \quad (4.20)$$

Действительно, при $m \rightarrow 0$, $I \rightarrow 0$, $W_{i,e} \rightarrow 0$ потенциал точки выхода равен $\Phi_{\text{вых}}(\psi_i) = -m/e U(\psi_i)$.

2. Расход массы

$$\dot{m} = 2\pi M \psi_{\text{макс}}. \quad (4.21)$$

Считаем, что ψ_i заключено в пределах $0 < \psi_i < \psi_{i \text{ макс}}$.

3. Импульс, уносимый в единицу времени струей, выходящей из ускорителя, очевидно, равен

$$\begin{aligned} P = \dot{m} (v_z)_{\text{макс}} &= \int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} v_{\text{макс } z}(r) 2\pi r M n v_{\text{макс } z} dr \Big|_{z \rightarrow \infty} = \\ &= 2\pi \int_{\psi_{\text{мин}}}^{\psi_{\text{макс}}} M v_{\text{макс } z}(\psi_i) d\psi_i. \end{aligned} \quad (4.22a)$$

Если на выходе $v_{\text{макс } z} \approx v_{\text{макс}} = \sqrt{2 \left(U_i + U_e \frac{m}{M} \right)}$, то

$$F = 2 \sqrt{2} \pi M \int_{\psi_{\text{мин}}}^{\psi_{\text{макс}}} \sqrt{U_i(\psi_i) + U_e(\psi_i) \frac{m}{M}} d\psi_i. \quad (4.22b)$$

4. Мощность ускоренной струи

$$N = \int \frac{v_{\text{макс}}^2}{2} d\dot{m} = 2\pi M \int_{\psi_{i \text{ мин}}}^{\psi_{i \text{ макс}}} \left[U_i(\psi_i) + U_e(\psi_i) \frac{m}{M} \right] d\psi_i. \quad (4.23)$$

5. Азимутальный момент, уносимый потоком,

$$P_{\phi} = \int r v_{\phi} d\dot{m} = 2\pi \frac{e}{c} \int_{\psi_{i \text{ мин}}}^{\psi_{i \text{ макс}}} [D_i(\psi_i) - D_e(\psi_i)] d\psi_i. \quad (4.24)$$

6. Напряжение $\delta\Phi$ между электродами не является, вообще говоря, определенной величиной, так как потенциал различных точек электрода в общем случае величина переменная (см. ниже § 2).

В случае холодной плазмы при $m \rightarrow 0$ напряжение между электродами

$$\delta\Phi = -\frac{M}{e} \delta\dot{U}_e(\psi_e), \quad \dot{U}_e \equiv \lim_{m \rightarrow 0} \frac{m}{M} U_e \quad (4.25)$$

причем разность берется при $\psi_{e \text{ мин}}$ и $\psi_{e \text{ макс}}$, соответствующих данному z .

7. Разрядный ток, протекающий через всю систему,

$$\mathcal{J} = 2\pi e |\psi_{i \text{ макс}} - \psi_{e \text{ мин}}|_{z=0}. \quad (4.26)$$

Считаем, что весь ток входит в систему (плазма + электроды) при $z = 0$ и нет добавочных подводов, т. е. $I_{\text{макс}}(z)$ — монотонная функция z .

§ 2. Качественный анализ системы уравнений (4.18) и (4.19)

1. Холодная плазма. Предположим, что плазма холодная ($W_i = W_e = 0$), инерцией электронов можно пренебречь ($m = 0$) и что можно считать плазму квазинейтральной. Тогда уравнения движения (4.19) принимают вид [10]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_i^2}{2} + \frac{e}{M} \Phi = U_i(\psi_i) \quad (\text{а}); \quad -\frac{e}{M} \Phi = \dot{U}_e(\psi_e) \quad (\text{б}); \\ \psi + \frac{Mc}{e} r v_\Phi^i = D_i(\psi_i) \quad (\text{в}); \quad \psi = D_e(\psi_e) \quad (\text{г}); \\ \frac{Mc}{enr^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{rn} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) = \frac{cM}{e} U_i' + \frac{H_\Phi}{rn} - \frac{v_\Phi^i D_i}{r} \quad (\text{д}); \\ 0 = -\frac{cM}{e} \dot{U}_e'(\psi_e) + \frac{H_\Phi}{rn} - \frac{v_\Phi^e D_e'}{r} \quad (\text{е}). \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Из уравнений (4.27б) и (4.27г) видно, что магнитные силовые линии эквипотенциальные и электроны «привязаны» к силовым линиям.

Следует различать аксиально симметричные системы, в которых: а) имеется только азимутальное (ϕ - e) магнитное поле и плазма не вращается ($D = 0, \psi = 0$) (рис. 22, а); б) поле имеет все компоненты, но силовые линии не пересекают стенок канала (рис 22, б); в) силовые линии пересекают стенки канала (рис. 22, в).

Рассмотрим особенности каждого класса.

а. Уравнение (4.27 б) показывает, что электроны движутся по эквипотенциалам. Этот простой факт приводит к весьма важному выводу, что в системе со сплошными проводящими коаксиальными электродами при отсутствии неустойчивостей или диссипативных процессов разгон плазмы сильно затруднен.

Действительно, поскольку поверхность электродов эквипотенциальна, то не может существовать ни регулярного поступления электронов из катода в плазму, ни из плазмы на анод. В этом слу-

чае должны возникнуть какие-то сингулярности в распределении токов на обоих электродах, одна из которых обеспечивает эмиссию электронов, а другая — их сток. Это действительно наблюдается на опыте [15]. Поэтому для поступления электронов со всего катода и равномерного выделения их на всем протяжении анода необходимо сделать электроды неэквипотенциальными, например, с помощью секционирования или изготовления электродов из плохопроводящего материала.

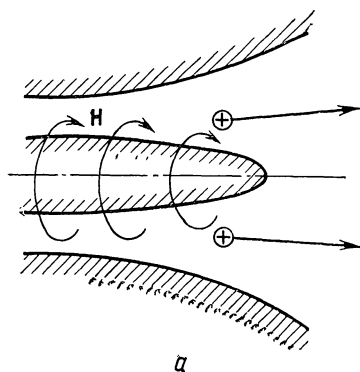
В рассматриваемом случае, когда $H_r = H_z = 0$, нельзя ничего априори сказать о распределении потенциала в системе, поскольку потенциал каждой кольцевой силовой линии не связан непосредственно с граничными условиями. Он определяется всем процессом разряда в целом. В этом случае, как следует из (4.27),

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi(\psi_e); \\ H_\varphi/rn &= -c d\Phi/d\psi_e. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

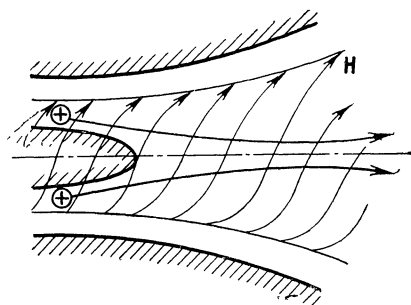
Последнее уравнение показывает, что в аксиально симметричном случае без продольного поля отношение H_φ/rn постоянно вдоль электронной траектории. Это — хорошо известный интеграл замороженности. Однако очень существенно, что магнитное поле заморожено именно в электронную компоненту.

Это обстоятельство (см. ниже) позволяет при достаточно больших параметрах обмена ξ выводить из магнитного поля ионы, не выводя из него электронов.

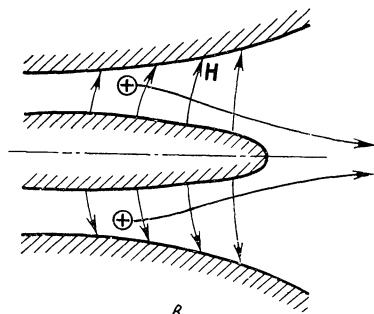
б. Случай, изображенный на рис. 22, б, описывается полной системой (4.27). Он характерен наличием магнитных поверхностей



а



б



б

Рис. 22.

$\psi = \text{const}$, идущих параллельно «боковым» стенкам ускорительного канала. Эти поверхности пересекают входную поверхность ускорителя и поэтому распределение потенциала в принципе определяется его распределением на входе*. Поскольку магнитные поверхности являются эквипотенциалами, ускорение в этом случае может осуществляться лишь в результате пересечения ионами магнитных поверхностей. Такие ситуации могут быть интересны для «торцевых» систем с достаточно сильно расходящимся продольным полем, в которых основное ускорение осуществляется за пределами электродов. В этом случае магнитная ось системы должна иметь наименьший в системе потенциал, а геометрические размеры должны быть такими, чтобы ионный ларморовский радиус, рассчитанный по полной энергии частицы, был больше радиуса системы:

$$R_{i\text{л}} > a. \quad (4.29)$$

При этом ускоренные ионы могут свободно выйти из ускорителя, в то время как электроны при отсутствии диссипации жестко связаны со своими магнитными поверхностями. Чтобы обеспечить компенсацию объемного заряда ионов, выходящих из ускорителя, необходимо вблизи выхода поместить источник электронов (нейтрализатор или компенсатор). В противном случае работа таких систем принципиально будет связана с развитием мощных колебательных и диссипативных процессов.

в. Третий тип ускорителей (см. рис. 22, в) также описывается полной системой уравнений (4.28). В этом случае распределение потенциала в объеме плазмы фиксируется распределением потенциала на тангенциальных стенках и в какой-то степени распределением потенциала на входе.

К этим системам применимы почти все рассуждения, относящиеся к предыдущему типу, и для них также должно выполняться условие (4.29). Подробно такого рода системы рассматриваются в работе [9].

2. Эпюры ускорителей с азимутальным магнитным полем. Характеристики коаксиальных ускорителей с азимутальным магнитным полем можно наглядно представить на эпюрах [10]. Для этого изобразим ускорительный канал в виде прямоугольника^{2*} и проведем линии $\psi_i = \text{const}$, $\psi_e = \text{const}$, $I = \text{const}$. Полученную таким образом диаграмму назовем эпюрой ускорителя (рис. 23).

Предположим сначала, что электроды рассечены. В этом случае не возникает трудностей с размазыванием тока по электродам, и линии $I = \text{const}$ можно изобразить системой равноотстоящих вертикальных линий. При этом линия I_0 соответствует общему току, протекающему через ускоритель, а $I = 0$ — выходу из уско-

* Вид поверхностей $\psi = \text{const}$ в большой степени определяется токами, текущими в плазме.

^{2*} Для определенности мы рассматриваем течения между электродами.

рителя. Если считать, что ионы не высаживаются на электродах, то линии ψ_i можно изобразить горизонтальными прямыми, причем линии $\psi_i = 0$, $\psi_i = \psi_{i \text{ макс}}$ совпадают соответственно с анодом и катодом.

В выбранных координатах траектории электронов $\psi_e = \psi_i$ — $1/2\pi e$ изобразятся наклонными прямыми. Если пренебречь инер-

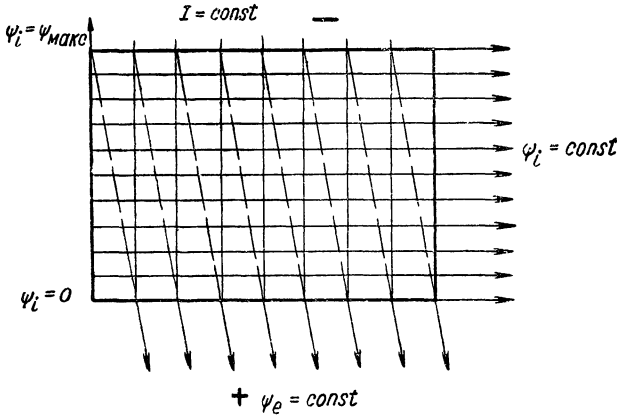


Рис. 23.

цией электронов, то «термализованный потенциал» $\Phi^* = \Phi - mW_e/e$ и параметр замороженности $H_\phi/rn = -c\Phi^{*'}(\psi_e)$ сохраняются вдоль линий $\psi_e = \text{const}$, тогда как U_i сохраняется вдоль линии $\psi_i = \text{const}$.

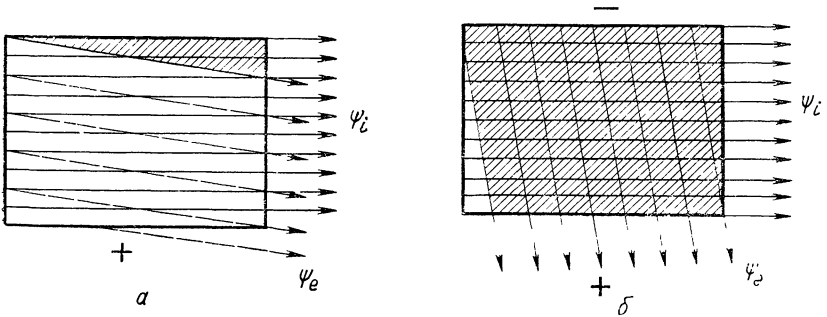


Рис. 24.

Очевидно, следует различать два типа эпор, которые можно называть гидродинамическими и холловскими. Эти эпоры изображены на рис. 24, а, б. В первом случае (а) основная часть электронов, выходящих из ускорителя, вошла в него вместе с ионами.

Во втором случае (б) электроны, входящие в ускоритель, «высаживаются» на анод в начале канала и дальше компенсация объемного заряда осуществляется электронами, вышедшими с катода. В первом случае величина параметра «вмороженности» не изменяется по длине ускорителя, а во втором она легко может измениться.

Переход от одного режима к другому, очевидно, определяется величиной $I_0/2\pi e\psi_{i \text{ макс}}$ (см. рис. 23), т. е. параметром обмена $\xi = (I_0/2\pi e\psi)_{\text{макс}} = (I_p/I_m)$.

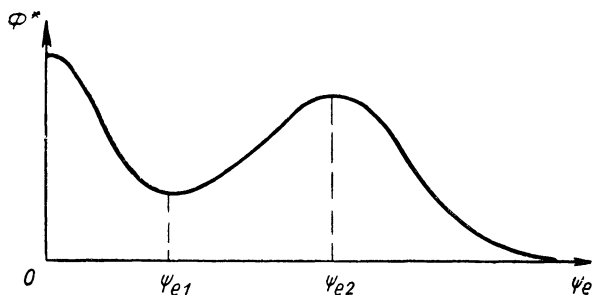


Рис. 25.

Рассмотрим теперь распределение потенциала в системе. Отметим, что зависимость $\Phi^*(\psi_e)$ нельзя задать произвольно, поскольку функция $\Phi^*(\psi_e)$ должна быть монотонной, а наличие максимумов и минимумов приводит к появлению нерегулярностей в течении. Действительно, пусть, например, функция

$\Phi^*(\psi_e)$ имеет вид, изображенный на рис. 25. Тогда при ψ_{e1} и ψ_{e2} параметр вмороженности Φ^* обращается в нуль, а на отрезке между ними становится отрицательным. Поскольку H_Φ не меняется на рассматриваемом участке скольнибудь существенно (I — независимая переменная), то это означает, что плотность обращается в бесконечность и даже меняет знак. Это и указывает на возникновение каких-то скачков, кото-

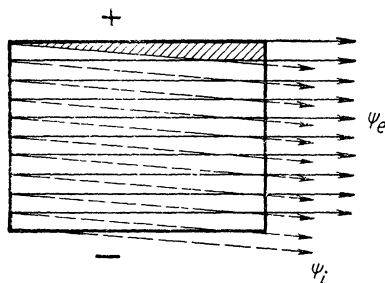


Рис. 26.

рые должны так изменить энтальпию электронов, чтобы потенциал Φ^* стал монотонной функцией ψ_e .

Разобранные выше эпюры описывали системы, в которых ток переносился только электронами. Однако в том случае, когда электроды сплошные, т. е. являются эквипотенциальными, могут реализовываться режимы с переносом тока ионами (рис. 26). В этом случае траектории электронов ψ_e изображаются горизонтальными линиями, а ионные траектории ψ_i — наклонными. Для реализации регулярных режимов такого рода, очевидно, необходима подача веществ-

ва через анод. Однако, учитывая потерю части ионов на катоде, использование ионного токопереноса целесообразно лишь при $\xi \ll 1$.

3. Термическое ускорение. Рассмотрим теперь другой крайний случай. Пусть мы имеем плазму с высокой температурой T_e и разгон происходит в результате изменения энтальпии электронов W_e [8]. Энтальпию ионов по-прежнему считаем равной нулю. Пренебрежем также инерцией электронов. В этом случае система уравнений (4.29) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Mv_i^2}{2} + e \frac{\Phi}{M} &= U_i(\psi_i) \quad (\text{а}); & \hat{W}_e - e \frac{\Phi}{M} &= \hat{U}_e(\psi_e) \quad (\text{б}); \\ \psi + \frac{Mc}{e} r v_\varphi^i &= D_i(\psi) \quad (\text{в}); & \psi &= D_e(\psi_e) \quad (\text{г}); \\ \frac{Mc}{e} \left(\frac{1}{rn} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{rn} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{1}{rn} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) &= \frac{cM}{e} U_i'(\psi_i) + \\ &+ \frac{H_\varphi}{rn} - \frac{v_\varphi^i}{r} D_i' \quad (\text{д}); \\ \frac{H_\varphi}{rn} - \frac{v_\varphi^e}{r} D_e' &= \frac{cM}{e} \hat{U}_e'(\psi_e) \quad (\text{е}); \\ \hat{W}_e &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{m}{M} W_e \quad (\text{ж}). \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Из уравнений (4.30) видно, что и в этом случае электроны «привязаны» к магнитным поверхностям $\psi = \text{const}$, однако теперь магнитные поверхности не эквипотенциальные.

Одно из простейших решений системы (4.30) — течение, при котором $\psi_i = \psi_e$, т. е. потоки ионов и электронов вдоль системы равны и течение происходит вдоль магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$. Если $D_i = D_e$, то

$$v_\varphi^i = 0; \quad H_\varphi = 0. \quad (4.31)$$

Это режим чисто термического ускорения. Подставляя (4.31) в (4.30е), находим скорость вращения электронов

$$v_\varphi^e = -\frac{c}{e} r \frac{dU_e}{dD_e} m. \quad (4.32)$$

В общем случае движение ионов происходит не по магнитным поверхностям и они вращаются по азимуту со скоростью, определяемой формулой (4.30в).

Необходимо отметить, что благодаря большой величине электронной теплопроводности вдоль магнитных силовых линий в основной части ускорения следует считать постоянной температуру электронов $T_e = \text{const}$.

Проблема выхода плазмы из магнитного поля в таких системах та же, что и в рассмотренных ранее случаях при $\psi \neq 0$.

§ 3. Течения двухкомпонентной плазмы в узких трубках при $H_{\parallel} = 0$

Пусть в системе существует только азимутальное магнитное поле и вращение плазмы отсутствует. Разобьем весь поток, заключенный между электродами, на систему концентрических узких трубок, поверхности которых образованы ионными траекториями, т. е. линиями $\psi_i = \text{const}$ (рис. 27). Тогда, как видно из системы уравнений (4.18) и (4.19), течение в такой трубке описывается следующей совокупностью алгебраических уравнений:

$$nrnf = \text{const}; \quad (4.33a)$$

$$H/rn = -c d\Phi^*/d\psi_e; \quad (4.33b)$$

$$\Phi^* = \Phi^*(\psi_e); \quad \Phi^* = \Phi - W_e \frac{m}{e}; \quad (4.33 \text{ в, г})$$

$$\frac{v^2}{2} + W_i(\rho) + \frac{e}{M} \Phi = U = \text{const}; \quad (4.33d)$$

$$rH = \frac{4\pi e}{c} (\psi_i - \psi_e) + (rH)^0 \approx -\frac{4\pi e}{c} \psi_e + (rH)^0. \quad (4.33e)$$

В последнем равенстве, учитывая узость трубки, считаем $\psi_i = 0$; $(rH)^0$ — возможная постоянная составляющая.

Если в одножидкостной модели течение плазмы в узком канале всегда было изомагнитным, то при учете эффекта Холла, т. е. конечности параметра обмена, течение в узкой трубке становится, вообще говоря, неизомагнитным. Иными словами, параметр вмороженности может теперь существенно изменяться с координатой z .

Изомагнитные течения возможны и в двухжидкостном случае, причем свойства их оказываются тождественными свойствам изомагнитных течений в одножидкостной модели*.

Полная формальная эквивалентность изомагнитных течений в обоих случаях наглядно иллюстрируется следующим образом. Из условия изомагнитности $(d\Phi^*/d\psi_e) = k = \text{const}$ вытекает с учетом (4.33б) и (4.33д) соотношение

$$\Phi^* = k\psi_e = -\frac{kc}{4\pi e} Hr = \frac{H^2}{4\pi ne}, \quad (4.34)$$

но так как $\Phi = \Phi^* + W_e m/e$, то уравнение Бернулли (4.33г) принимает обычный «одножидкостный» вид [см. формулу (2.120)]:

$$\frac{v^2}{2} + W + \frac{H^2}{4\pi nM} = U = \text{const}; \quad W = W_i + W_e \frac{m}{M}.$$

* Разумеется, мы не рассматриваем проблему согласования потока с электродами, которая совершенно различна для одножидкостной и двухжидкостной моделей.

Поэтому полученные в гл. 2 результаты относительно изомагнитных течений остаются справедливыми. В частности, сохраняется вывод о существовании ускоренных и компрессионных течений.

Для того чтобы ион двигался по средней поверхности трубки $r = r(z)$, сумма действующих на него сил в направлении, перпендикулярном скорости, должна быть равна нулю. Поэтому в случае холодной плазмы ($W_i = W_e = 0$) должно выполняться следующее уравнение равновесия (рис. 28):

$$\frac{Mv_i^2}{\rho} - \frac{e}{c} v_i H_\Phi + eE_\perp = 0. \quad (4.35)$$

Здесь ρ — радиус кривизны линии $r(z)$; v_i — полная скорость иона. С другой стороны, уравнение движения электронов (4.3) при $m = 0$ приводит к равенству

$$-\frac{1}{c} v_e H_\Phi + E_\perp = 0. \quad (4.36)$$

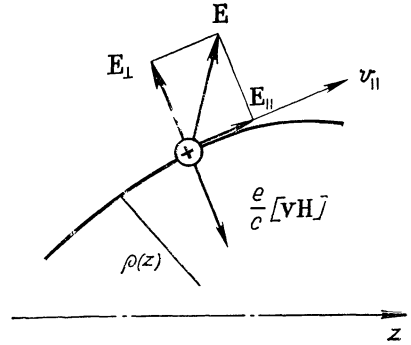


Рис. 28.

Отсюда видно, что в случае, когда основная траектория — прямая линия ($R = \infty$), продольные скорости электронов и ионов совпадают и продольный ток в трубке равен нулю. В противном случае возникает продольный ток, уравновешивающий центробежную силу

В заключение выведем уравнение Гюгонио для системы (4.33) Для этого напишем вариации уравнений (4.33), предполагая, что $W_e = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{n} + \frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} + \frac{df}{f} = 0; \quad \frac{dH}{H} - \frac{dr}{r} - \frac{dn}{n} - \frac{\Phi''}{\Phi'} d\psi_e = 0; \\ vdv + c_{Ti}^2 \frac{dn}{n} + \frac{e}{M} \Phi' d\psi_e = 0; \quad rdH + Hdr + \frac{4\pi e}{c} d\psi_e = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Исключая отсюда dn , dH , $d\psi_e$, получаем искомое уравнение [10]

$$(v^2 - c_s^2) \frac{dv}{v} = c_s^2 \frac{df}{f} + (c_{Ti}^2 - c_s^2) \frac{dr}{r}, \quad c_s^2 = c_{Ti}^2 + \frac{c_A^2}{1 - (\Phi_e'' / \Phi')}. \quad (4.38)$$

Отсюда видно, что особенность течения в узких трубках при учете эффекта Холла — это зависимость критической скорости от второй производной потенциала Φ'' . Если течение изомагнитное ($\Phi'' = 0$), то (4.38) совпадает с аналогичным соотношением для одножидкостной модели (2.57).

§ 4. Течения в плавных каналах при $H_{\parallel} = 0$

Если параметры течения быстро меняются вдоль r и медленно вдоль z , то в уравнениях (4.18) и (4.19) можно пренебречь членами, пропорциональными $(\partial/\partial z)^2$. Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую, например, можно просто решить численно. В данном параграфе, ограничившись случаем течений невращающейся квазинейтральной плазмы при $H_{\parallel} = 0$ и $m_e = 0$, мы выделим некоторые классы течений, расчет которых сводится к квадратурам. Отбрасывая в системе (4.18), (4.19) члены, пропорциональные $(\partial/\partial z)^2$, и учитывая сделанные ограничения, получаем основную систему уравнений:

$$\frac{1}{2n^2 r^2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right)^2 + W_i(n) + \frac{e\Phi}{M} = U_i(\psi_i); \quad (4.39a)$$

$$W_e(n) - \frac{e\Phi}{m} = U_e(\psi_e); \quad (4.39б)$$

$$\frac{1}{rn} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rn} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right) = U_i' + \frac{eH}{Mcnr}; \quad (4.39в)$$

$$0 = -\frac{c}{e} U_e' + \frac{H}{mnr}; \quad (4.39г)$$

$$rH = \frac{4\pi e}{c} (\psi_i - \psi_e) + (rH)_0. \quad (4.39д)$$

Если сложить попарно первые четыре уравнения (4.39)

$$\frac{1}{2n^2 r^2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right)^2 + W_i(n) = U_i(\psi_i) + U_e(\psi_e) \frac{m}{M}; \quad (4.40a)$$

$$\frac{1}{nr} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{nr} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right) = U_i'(\psi_i) + U_e'(\psi_e) \frac{m}{M}; \quad (4.40б)$$

$$W = W_i(n) + W_e(n) \frac{m}{M}, \quad (4.40в)$$

продифференцировать первое уравнение по r , а второе умножить на $\partial \psi_i / \partial r$ и затем вычесть из первого второе, то получим

$$\frac{\partial W}{\partial r} = U_e'(\psi_e) \frac{\partial}{\partial r} (\psi_e - \psi_i) \frac{m}{M}. \quad (4.41)$$

Уравнение (4.41) заменяет второе из уравнений (4.40), и полученная таким образом система из (4.40a) и (4.41) оказывается более удобной, поскольку она содержит только уравнения первого порядка. Уравнение (4.41) — это уравнение радиального равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\frac{H^2}{4\pi r}, \quad (4.42)$$

что непосредственно следует из соотношений (4.39г) и (4.39д) и определения энтальпии. Уравнение (4.41) для плоской задачи интегрируется в общем виде

$$p + (H^2/8\pi) = P(z). \quad (4.43)$$

При наличии аксиальной симметрии оно интегрируется в двух случаях:

$$W = 0; \quad (4.44)$$

$$U'_e(\psi_e) = \text{const}. \quad (4.45)$$

Таким образом, аналогично одножидкостному течению система уравнений (4.39) сводится к квадратурам, когда: а) течения плоские; б) плазма холодная и в) течения изомагнитные. В приложениях 1 и 2 соответствующие задачи рассматриваются в произвольной криволинейной системе координат.

Приложение 1

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ГИДРОМАГНИТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Исследование магнитогидродинамических течений значительно упрощается, если течение можно считать не зависящим от одной из пространственных координат. Такие течения называются симметричными течениями. Простейшая симметрия — трансляционная, когда физические величины не меняются при смещении вдоль оси z ; в случае аксиальной симметрии нет зависимости от поворота системы координат вокруг оси z . Наконец, общий случай пространственной симметрии — это винтовая симметрия, когда все физические величины инвариантны относительно сдвига вдоль оси z при одновременном повороте вокруг этой же оси. В первом случае течение не зависит от координаты z , во втором случае — от азимута φ , а в третьем случае — от криволинейной координаты, отсчитываемой вдоль винтовых линий $\theta = \varphi - \alpha z = \text{const}$ с постоянным шагом $L = 2\pi/\alpha$. Уравнения симметричных стационарных течений в цилиндрической системе координат получены в работе [26]. При выводе соответствующих уравнений в произвольной криволинейной системе координат обнаруживаются некоторые геометрические свойства вводимых потенциалов и получающихся интегралов движения, что позволяет записать уравнения симметричных течений в общей форме, справедливой при любом выборе наиболее подходящей координатной системы*.

Используя термодинамическое соотношение

$$dW = (dp/\rho) + TdS, \quad (\text{П}1.1)$$

где ρ — плотность, p — давление, T — температура, S — энтропия, W — энтальпия, можно записать систему уравнений магнитной гидродинамики

* Развиваемый ниже математический аппарат, очевидно, можно использовать и для рассмотрения стационарных волн.

для стационарных бездиссипативных течений в рационализованной системе единиц в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \quad (\text{П1.2})$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0; \quad (\text{П1.3})$$

$$[\mathbf{vH}] = -\nabla \Phi; \quad (\text{П1.4})$$

$$\mathbf{v} \nabla S = 0; \quad (\text{П1.5})$$

$$[\mathbf{j}_0 \mathbf{v}] - \frac{1}{\rho} [\mathbf{jH}] = -\nabla w + T \nabla S. \quad (\text{П1.6})$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}; \quad (\text{П1.7})$$

$$\mathbf{j}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{v}; \quad (\text{П1.8})$$

$$w = W + (v^2/2) + G; \quad (\text{П1.9})$$

\mathbf{v} — скорость; \mathbf{H} — напряженность магнитного поля; Φ — функция, пропорциональная потенциалу электрического поля; G — потенциал сил неэлектромагнитного происхождения.

Будем производить вычисления в криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 , квадрат элемента длины в которой равен*

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (\text{П1.10})$$

где g_{ik} — метрический тензор. Для вычислений используются следующие формулы векторного анализа:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \varphi)_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}; \quad \mathbf{ab} = a^i b_i; \\ \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} a^i); \quad [\mathbf{ab}]_j = \varepsilon_{ijk} \sqrt{g} a^i b^k; \\ (\operatorname{rota})^j &= \frac{\varepsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x^i}; \quad a_i = g_{ik} a^k; \quad a^i = g^{ik} a_k. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.11})$$

Индексом снизу обозначены ковариантные компоненты векторов; индексом сверху — контрвариантные компоненты; ε^{ijk} — полностью антисимметричный единичный тензор; $g^{ik} = G^{ik}/g$, где G^{ik} — миноры g_{ik} ; g — детерминант g_{ik} .

Предположим, что все физические величины, а также компоненты метрического тензора g_{ik} не зависят от координат x^3 . Уравнения непрерывности (П1.2) и (П1.3) позволяют ввести векторные потенциалы для \mathbf{H} и $\rho \mathbf{v}$:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad \rho \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0. \quad (\text{П1.12})$$

Выберем \mathbf{A} и \mathbf{A}_0 не зависящими от x^3 , тогда контрвариантные компоненты \mathbf{H} и $\rho \mathbf{v}$, имеющие индексы 1 и 2, можно представить через ковариантные компоненты A_3 и A_{03} . Введем обозначения

$$\psi = A_3; \quad \psi_0 = A_{03}. \quad (\text{П1.13})$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g} H^1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x^2}; \quad \sqrt{g} H^2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x^1}; \\ \rho \sqrt{g} v^1 &= \frac{\partial \psi_0}{\partial x^2}; \quad \rho \sqrt{g} v^2 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x^1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.14})$$

* По повторяющимся индексам далее предполагается суммирование от 1 до 3.

Согласно формулам (П1.7) и (П1.8) мы имеем аналогичные выражения для контрвариантных компонент векторов \mathbf{j} и \mathbf{j}_0 :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g} \bar{j}^1 &= \frac{\partial H_3}{\partial x^2}; & \sqrt{g} \bar{j}^2 &= -\frac{\partial H_3}{\partial x^1}; \\ \sqrt{g} \bar{j}_0^1 &= \frac{\partial v_3}{\partial x^2}; & \sqrt{g} \bar{j}_0^2 &= -\frac{\partial v_3}{\partial x^1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.15})$$

В дальнейшем будем в основном оперировать с компонентами векторов a^1 , a^2 и a_3 . Нетрудно убедиться, что остальные компоненты произвольного вектора \mathbf{a} выражаются через a^1 , a^2 , a_3 формулами:

$$\left. \begin{aligned} g_{33} a_1 &= g g^{22} a^1 - g g^{12} a^2 + g_{13} a_3; \\ g_{33} a_2 &= -g g^{12} a^1 + g g^{11} a^2 + g_{23} a_3; \\ g_{33} a^3 &= -g_{31} a^1 - g_{32} a^2 + a_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.16})$$

Уравнения (П1.2) и (П1.3) удовлетворяются после введения функций ψ и ψ_0 . Запишем теперь уравнение (П1.4) в компонентах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} &= \sqrt{g} (v^2 H^3 - v^3 H^2); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} &= \sqrt{g} (v^3 H^1 - v^1 H^3); \\ 0 &= v^1 H^2 - v^2 H^1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.17})$$

При подстановке сюда выражений (П1.14) третье из соотношений (П1.17) дает якобианное равенство

$$\partial(\psi, \psi_0) / \partial(x^1, x^2) = 0. \quad (\text{П1.18})$$

Отсюда следует, что $\psi = \psi(\psi_0)$. При решении различных задач удобно за основную функцию выбирать как ψ , так и ψ_0 , поэтому мы введем для симметрии новую искомую функцию ξ , функционально связанную с ψ и ψ_0 , и будем далее везде считать, что

$$\psi = \psi_0(\xi); \quad \psi_0 = \psi_0(\xi), \quad (\text{П1.19})$$

причем функцию ξ можно выбрать произвольно. В этом случае первые два уравнения (П1.17) записываются в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \left(\frac{H^3}{\rho} \psi'_0 - v^3 \psi' \right) \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \equiv B \frac{\partial \xi}{\partial x^i}. \quad (\text{П1.20})$$

Здесь штрихи означают полные производные по ξ . Из уравнений (П1.20) вытекает якобианное равенство $\partial(B, \xi) / \partial(x^1, x^2) = 0$ и, следовательно, $B = B(\xi)$, $\Phi = \Phi(\xi)$, причем $B(\xi) = \Phi'(\xi)$. Записывая H^3 и v^3 с помощью ковариантных компонент, получаем

$$B = \frac{1}{\rho} H^3 \psi'_0 - v^3 \psi' = \left(\frac{1}{\rho} H_3 \psi'_0 - v_3 \psi' \right) \frac{1}{g_{33}}. \quad (\text{П1.21})$$

Из уравнения (П1.5) следует, что энтропия S — функция ψ_0 , так что

$$S = S(\xi). \quad (\text{П1.22})$$

Если уравнение (П1.6) расписать по компонентам, то получим

$$\left. \begin{aligned} T \frac{\partial S}{\partial x^1} - \frac{\partial w}{\partial x^1} &= \sqrt{g} (j_0^3 v^3 - j_0^3 v^2) - \frac{V \bar{g}}{\rho} (j^2 H^3 - j^3 H^2); \\ T \frac{\partial S}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x^2} &= \sqrt{g} (-j_0^3 v^3 + j_0^3 v^1) - \frac{V \bar{g}}{\rho} (-j^1 H^3 + j^3 H^1); \\ 0 &= (j_0^1 v^2 - j_0^2 v^1) - \frac{1}{\rho} (j^1 H^2 - j^2 H^1). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.23})$$

Последнее из этих уравнений приводит к равенству $\partial(A, \xi)/\partial(x^1, x^2) = 0$, где

$$A = v_3 \psi'_0 - H_3 \psi' \quad (\text{П1.24})$$

и, следовательно, $A = A(\xi)$.

Таким образом, как следствие уравнения вмороженности (П1.4) силовых линий магнитного поля мы получили интегралы (П1.19), показывающие, что жидкость течет по магнитным поверхностям $\Phi = \text{const}$, а также интегралы $B = B(\xi)$ и $\Phi = \Phi(\xi)$, означающие, что магнитные поверхности — это эквипотенциалы электрического поля. Наконец, интеграл $A = A(\xi)$ является выражением сохранения импульса, соответствующего циклической координате x^3 .

Нам надо получить еще один интеграл — аналог интеграла Бернулли в обычной гидродинамике — и найти уравнение, которому удовлетворяет функция ξ . Для этого преобразуем первые два уравнения (П1.23) с учетом соотношений (П1.15) и (П1.22):

$$-\frac{\partial w}{\partial x^i} = -v^3 \frac{\partial v_3}{\partial x^i} + \frac{H^3}{\rho} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x^i} + \left(\frac{j_0^3 \psi'_0 - j^3 \psi'}{\rho} - TS' \right) \frac{\partial \xi}{\partial x^i}. \quad (\text{П1.25})$$

Используя выражения (П1.21) и (П1.24), уравнение (П1.25) приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{B v_3}{\psi'} + w \right) &= \left\{ v_3 \left(\frac{B}{\psi'} \right)' + \frac{H^3}{\rho} \left(\frac{A}{\psi'} \right)' - \frac{v_3 H^3}{\rho} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right)' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{j_0^3 \psi'_0 - j^3 \psi'}{\rho} + TS' \right\} \frac{\partial \xi}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (\text{П1.26})$$

Рассуждая аналогично предыдущему, убедимся в том, что выражение в круглых скобках слева — это функция от ξ . Обозначим ее $U(\xi)$. Следовательно, получаем два уравнения:

$$w + \frac{B v_3}{\psi'} = U(\xi); \quad (\text{П1.27})$$

$$\frac{1}{\rho} (j_0^3 \psi'_0 - j^3 \psi') - v_3 \left(\frac{B}{\psi'} \right)' - \frac{H^3}{\rho} \left(\frac{A}{\psi'} \right)' + \frac{v_3 H^3}{\rho} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right)' - TS' + U' = 0. \quad (\text{П1.28})$$

Первое из них — искомый интеграл Бернулли, а второе — уравнение для ξ , которое, однако, надо еще преобразовать таким образом, чтобы в него в явном виде входили частные производные от ξ .

Выражения (П1.27) и (П1.28) содержат в знаменателе величину ψ' . Это представляет неудобство при переходе к предельному случаю $\psi = 0$. Легко,

однако, аналогичным образом получить из уравнений (П1.26) эквивалентные уравнения, содержащие в знаменателе не ψ' , а ψ'_0 :

$$\omega + \frac{BH_3}{\psi'_0} = U_1(\xi); \quad (\text{П1.27}')$$

$$\frac{1}{\rho} (j_0^3 \psi'_0 - j^3 \psi') - H_3 \left(\frac{B}{\psi'_0} \right)' - v^3 \left(\frac{A}{\psi'_0} \right)' - v^3 H_3 \left(\frac{\psi'}{\psi'_0} \right)' - TS' + U'_1 = 0. \quad (\text{П1.28}')$$

Преобразуем уравнения (П1.28) и (П1.28'). Используя соотношения (П1.4) — (П1.6), получаем

$$j_0^3 \psi'_0 - j^3 \psi' = -\frac{g_{31}}{\sqrt{g} g_{33}} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} \psi'_0 - \frac{\partial H_3}{\partial x^2} \psi' \right) + \frac{g_{32}}{\sqrt{g} g_{33}} \times \\ \times \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^1} \psi'_0 - \frac{\partial H_3}{\partial x^1} \psi' \right) + \frac{j_{03} \psi'_0 - j_3 \psi'}{g_{33}}.$$

С другой стороны, с учетом (П1.24) имеем

$$\left[-\left(\frac{A}{\psi'} \right)' + v_3 \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right)' \right] \frac{\partial \xi}{\partial x^i} = \frac{\partial H_3}{\partial x^i} - \frac{\psi'_0}{\psi'} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x^i}$$

или эквивалентное равенство, содержащее в знаменателе ψ'_0 ,

$$\left[\left(\frac{A}{\psi'_0} \right)' + H_3 \left(\frac{\psi'}{\psi'_0} \right)' \right] \frac{\partial \xi}{\partial x^i} = \frac{\partial v^3}{\partial x^i} - \frac{\psi'}{\psi'_0} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x^i}.$$

Таким образом, в качестве промежуточных соотношений получаем

$$v_3 \left(\frac{B}{\psi'} \right)' + \frac{H_3}{\rho g_{33}} \left[-\left(\frac{A}{\psi'} \right)' + v_3 \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right)' \right] + \frac{j_{03} \psi'_0 - j_3 \psi'}{\rho g_{33}} - TS' + U' = 0;$$

$$H_3 \left(\frac{B}{\psi'_0} \right)' - \frac{v_3}{g_{33}} \left[\left(\frac{A}{\psi'_0} \right)' + H_3 \left(\frac{\psi'}{\psi'_0} \right)' \right] + \frac{j_{03} \psi'_0 - j_3 \psi'}{\rho g_{33}} - TS' + U'_1 = 0.$$

Для преобразования найденных уравнений используем равенство

$$j_{03} = -\frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\sqrt{g} g^{ik}}{\rho g_{33}} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial x^k} \right) + \frac{g_{33} v_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{g_{23}}{g_{33}} - \frac{\partial}{\partial x^2} \cdot \frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \quad (\text{П1.29a})$$

и аналогичное равенство для j_3 , получающееся отсюда при замене $\psi_0 \rightarrow \psi'$, $\rho \rightarrow 1$, $v_3 \rightarrow H_3$:

$$\frac{j_{03} \psi'_0 - j_3 \psi'}{\rho g_{33}} = -\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \left\{ s \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\sqrt{g} g^{ik}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x^k} + \frac{\sqrt{g} g^{ik}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x^k} \times \right. \\ \left. \times \left(\psi'_0 \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\psi'_0}{\rho} - \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial x^i} \right) \right\} + \frac{A}{\rho \sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{g_{23}}{g_{33}} - \frac{\partial}{\partial x^2} \cdot \frac{g_{13}}{g_{33}} \right). \quad (\text{П1.29б})$$

Здесь введена величина

$$s = \frac{\psi_0'^2}{\rho} - \psi^{12}, \quad (\text{П1.30})$$

которая возникает при разрешении уравнений (П1.21) и (П1.24) относительно v_3 и H_3 :

$$v_3 = \frac{1}{s} \left(A \frac{\psi'_0}{\rho} + g_{33} B \psi' \right); \quad H_3 = \frac{1}{s} (A \psi' + g_{33} B \psi'_0). \quad (\text{П1.31})$$

Далее, имея в виду выражения (П1.31), где v_3 и H_3 зависят от трех переменных g_{33} , ρ и ξ , и обозначая временно штрихом частную производную по ξ при фиксированных g_{33} и ρ , находим

$$\begin{aligned} v_3 \left(\frac{v_3}{g_{33}} - \frac{H_3 \psi'_0}{\rho g_{33} \psi'} \right)' + \frac{H_3}{\rho g_{33}} \left[H'_3 - \left(\frac{v_3 \psi'_0}{\psi'} \right)' + v_3 \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right)' \right] = \\ = \frac{\rho v_3 v'_3 + H_3 H'_3}{\rho g_{33}} - \frac{1}{\rho g_{33}} \left(v_3 H_3 \frac{\psi'_0}{\psi'} \right)' = -\frac{1}{2\rho g_{33}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{A^2}{s} - \\ - \frac{g_{33}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} - \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi'_0}{\rho s \psi'} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} H_3 \left(-\frac{H_3}{\rho g_{33}} + \frac{v_3 \psi'}{g_{33} \psi'_0} \right)' + \frac{v_3}{g_{33}} \left[-v'_3 + \left(\frac{H_3 \psi'}{\psi'_0} \right)' - H_3 \left(\frac{\psi'}{\psi'_0} \right)' \right] = \\ = -\frac{1}{2g_{33}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(v_3^2 + \frac{H_3^2}{\rho} - \frac{2v_3 H_3 \psi'}{\psi'_0} \right) = -\frac{1}{2\rho g_{33}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{A^2}{s} - \frac{g_{33}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} - \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi'}{s\psi'_0}, \end{aligned}$$

где $\partial/\partial\xi$ означает производную по ξ при фиксированном ρ .

Таким образом, окончательно полную систему уравнений, описывающих двухпараметрические течения идеально проводящей среды в магнитном поле, запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho \sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\sqrt{g} g^{ik} s}{g_{33}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x^k} - \frac{|\nabla \xi|^2}{2\rho g_{33}} \cdot \frac{\partial s}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{g_{23}}{g_{33}} - \frac{\partial}{\partial x^2} \cdot \frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \frac{A}{\rho \sqrt{g}} + \\ + \frac{1}{2\rho g_{33}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{A^2}{s} + \frac{g_{33}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi'_0}{\rho s \psi'} + TS' - U' = 0; \quad (\text{П1.32}) \end{aligned}$$

$$W + \frac{v^2}{2} + G + \frac{g_{33} B^2}{s} + \frac{AB\psi'_0}{\rho s \psi} = U; \quad (\text{П1.33})$$

$$\left(\frac{\rho v^1}{H^1} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) \left(\frac{\rho v^2}{H^2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x^1}; \quad (\text{П1.34})$$

$$\left(\frac{\rho v_3}{H_3} \right) = \frac{A}{s} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) + \frac{g_{33} B}{s} \left(\frac{\rho \psi'}{\psi'_0} \right); \quad s = \frac{\psi'^2}{\rho} - \psi'^2. \quad (\text{П1.35})$$

Здесь штрихом обозначена полная производная по ξ , частная производная по ξ берется при фиксированной плотности ρ , функции ψ_0 , ψ , A , B , S и U — произвольные функции переменной ξ . Уравнение (П1.32) и уравнение Бернулли (П1.33) используются для определения функций ξ и ρ . Уравнения (П1.34) и (П1.35) позволяют по известным ξ и ρ найти компоненты скоростей и магнитного поля. Для полноты системы уравнений к соотношениям (П1.32) — (П1.35) следует еще добавить уравнение состояния.

Для перехода к эквивалентной форме, содержащей в знаменателе не ψ' , а ψ'_0 , достаточно в уравнениях (П1.32) и (П1.33) произвести следующие замены:

$$\frac{AB\psi'_0}{\rho s \psi'} \rightarrow \frac{AB\psi'}{s\psi'_0}; \quad U \rightarrow U_1 = U + \frac{AB}{\psi' \psi'_0}. \quad (\text{П1.36})$$

Система уравнений (П1.32)—(П1.35) в ортогональных координатах имеет вид:

$$\frac{1}{\rho h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{h_2 s}{h_1 h_3} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{h_1 s}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right) - \frac{|\nabla \xi|^2}{2\rho h_3^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial \xi} +$$

$$+ \frac{1}{2\rho h_3^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{A^2}{s} + \frac{h_3^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi'_0}{\rho s\psi'} + TS' - U' = 0; \quad (\text{П1.37})$$

$$W + \frac{v^2}{2} + G + \frac{h_3^2 B^2}{s} + \frac{AB\psi'_0}{\rho s\psi'} = U; \quad (\text{П1.38})$$

$$\left(\frac{\rho v_{x_1}}{H_{x_1}} \right) = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_2}; \quad \left(\frac{\rho v_{x_2}}{H_{x_2}} \right) = -\frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_1}; \quad (\text{П1.39})$$

$$\left(\frac{\rho v_{x_3}}{H_{x_3}} \right) = \frac{A}{h_3 s} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) + \frac{h_3 B}{s} \left(\frac{\rho \psi'}{\psi'_0} \right); \quad s = \frac{\psi_0'^2}{\rho} - \psi'^2. \quad (\text{П1.40})$$

Для случая винтовой симметрии, когда все величины зависят только от $x^1 = r$ и $x^2 = \theta = \varphi - \alpha z$, а третья координата $x^3 = z$ является циклической, система уравнений (П1.32)—(П1.35) принимает вид:

$$\frac{1}{\rho r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{rs}{\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) - \frac{|\nabla \xi|^2}{2\rho\beta} \cdot \frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{2\alpha A}{\beta^2 \rho} + \frac{1}{2\rho\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{A^2}{s} +$$

$$+ \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{AB\psi'_0}{\rho s\psi'} + TS' - U' = 0; \quad (\text{П1.41})$$

$$W + \frac{v^2}{2} + G + \frac{\beta B^2}{s} + \frac{AB\psi'_0}{\rho s\psi'} = U; \quad (\text{П1.42})$$

$$\left(\frac{\rho v_r}{H_r} \right) = \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \theta}; \quad \alpha r \left(\frac{\rho v_z}{H_z} \right) - \left(\frac{\rho v_\varphi}{H_\varphi} \right) = \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r}; \quad (\text{П1.43})$$

$$\left(\frac{\rho v_z}{H_z} \right) + \alpha r \left(\frac{\rho v_\varphi}{H_\varphi} \right) = \frac{A}{s} \left(\frac{\psi'_0}{\psi'} \right) + \frac{\beta B}{s} \left(\frac{\rho \psi'_0}{\psi'} \right); \quad \beta = 1 + \alpha^2 r^2, \quad (\text{П1.44})$$

а интегралы момента и вмерозженности $A(\xi)$ и $B(\xi)$ согласно выражениям (П1.21) и (П1.24)—это следующие комбинации компонент магнитного поля, скорости и плотности:

$$A(\xi) = I_0 \psi'_0 - I \psi'; \quad B(\xi) = I \frac{\psi'_0}{\rho} - I_0 \psi', \quad (\text{П1.45})$$

где $I = H_z + \alpha r H_\varphi$; $I_0 = v_z + \alpha r v_\varphi$. Уравнения (П1.41)—(П1.45) совпадают с соответствующими уравнениями выведенными в статье [26] непосредственно в цилиндрических координатах. Случаи аксиальной и трансляционной симметрий получаются из (П1.41)—(П1.45) предельными переходами $\alpha \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$.

СТАЦИОНАРНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

1. Течения электронной и ионной жидкостей

Аналогично одножидкостному случаю наличие стационарности и симметрии позволяет получить ряд интегралов движения и с их помощью упростить систему уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики.

Предполагая отсутствие диссипативных процессов, запишем уравнения для электронной и ионной жидкостей в виде:

$$m_\alpha \frac{d_\alpha v_\alpha}{dt} = e_\alpha \mathbf{E} + \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}] - \frac{\nabla p_\alpha}{n_\alpha}; \quad (\text{П2.1})$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div } n_\alpha \mathbf{v}_\alpha = 0; \quad (\text{П2.2})$$

$$\frac{d_\alpha S_\alpha}{dt} = 0; \quad (\text{П2.3})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (e_i n_i \mathbf{v}_i + e_e n_e \mathbf{v}_e); \quad [\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}]; \quad (\text{П2.4})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0; \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi (e_i n_i + e_e n_e). \quad (\text{П2.5})$$

Здесь m_α , e_α , n_α — масса, заряд и концентрация электронов или ионов соответственно; $d_\alpha/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_\alpha \nabla$ ($\alpha = i, e$); \mathbf{B} — магнитное поле, а остальные обозначения те же, что и выше.

Если вместо $\nabla p_\alpha/n_\alpha$ подставить его выражение через энтальпию W_α и энтропию S_α

$$(\nabla p_\alpha/n_\alpha) = \nabla W_\alpha - T_\alpha \nabla S_\alpha, \quad (\text{П2.6})$$

а \mathbf{E} и \mathbf{B} выразить через скалярный и векторный потенциалы Φ и \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (\text{П2.7})$$

то уравнения движения (П2.1) для электронов и ионов можно записать в виде

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \nabla \left(-e_\alpha \Phi + \frac{e_\alpha}{c} \mathbf{v}_\alpha \mathbf{A} - W_\alpha \right) + T_\alpha \nabla S_\alpha, \quad (\text{П2.8})$$

где

$$\mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (\text{П2.9})$$

канонический импульс иона или электрона, а оператор ∇ берется при фиксированных \mathbf{v}_α . Для вычислений в произвольных криволинейных координатах x^i уравнения (П2.8) можно представить в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L_\alpha}{\partial v^k} - \frac{\partial L_\alpha}{\partial x^k} = T_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial x^k} \quad (\text{П2.10})$$

с лагранжианом $L_\alpha(x^k, v^k)^*$:

$$L_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} v_\alpha^k v_{\alpha k} - e_\alpha \Phi + \frac{e_\alpha}{c} v_\alpha^k A_k - W_\alpha. \quad (\text{П2.11})$$

Если физические величины, а также компоненты метрического тензора g_{ik} не зависят от одной из координат x^k , то сохраняется соответствующий обобщенный импульс $P_{\alpha k} = \partial L_\alpha / \partial v_\alpha^k = m_\alpha v_{\alpha k} + e_\alpha / c A_k$. Таким образом, в случае отсутствия зависимости от x^3 находим два интеграла

$$m_\alpha v_{\alpha 3} + \frac{e}{c} A_3 = P_{\alpha 3}, \quad (\text{П2.12})$$

которые выражают сохранение обобщенных импульсов ионов и электронов. Как видно из вывода, эти интегралы существуют как в стационарном, так и в нестационарном случаях и связаны только с пространственной симметрией задачи.

Для получения интегралов энергии предположим, что процесс стационарный. В этом случае, умножая уравнение (П2.1) скалярно на v_α и используя уравнения (П2.3), (П2.6) и (П2.7), получаем еще два интеграла

$$(1/2) m_\alpha v_\alpha^2 + e_\alpha \Phi + W_\alpha = U_\alpha, \quad (\text{П2.13})$$

выражающие сохранение энергии ионов и электронов. Существование интегралов (П2.13) в отличие от (П2.12) не связано с пространственной симметрией, а есть следствие стационарности, т. е. временной симметрии.

Отметим, что закон сохранения энергии — импульса системы заряженных частиц и электромагнитного поля — справедлив также и в общем случае для релятивистских частиц и переменных во времени полей.

Ограничимся случаем симметричных стационарных течений. Интегралы $P_{\alpha 3}$ и U_α сохраняются вдоль траекторий жидких частиц ионной или электронной жидкости и поэтому являются функциями от соответствующих функций потоков ψ_α , которые вводятся с помощью соотношений

$$v_\alpha^1 = \frac{1}{\sqrt{g n_\alpha}} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^2}; \quad v_\alpha^2 = -\frac{1}{\sqrt{g n_\alpha}} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^1}. \quad (\text{П2.14})$$

Выражая v_α^1 и v_α^2 через ψ_α , мы тем самым удовлетворяем уравнениям $\text{div } n_\alpha \mathbf{v}_\alpha = 0$. Нетрудно убедиться, что $\psi_\alpha = \text{const}$ — это интегралы уравнений $dx^1/v_\alpha^1 = dx^2/v_\alpha^2 = dx^3/v_\alpha^3$ для линий тока соответствующих жидкостей. Вводя обозначения

$$\text{rot } \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{j}_\alpha; \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (\text{П2.15})$$

и используя выражение (П2.13) для U_α , преобразуем уравнения движения (П2.1) к виду

$$\left[\mathbf{v}_\alpha, m_\alpha \mathbf{j}_\alpha + \frac{e_\alpha}{c} \mathbf{B} \right] = \nabla U_\alpha - T_\alpha \nabla S_\alpha. \quad (\text{П2.16})$$

* По повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Согласно соотношениям (П2.7), (П2.12) и (П2.15) имеем

$$\left. \begin{aligned} \left(j_{\alpha}^1 \right) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^2} \left(A_3 \right); \quad \left(j_{\alpha}^2 \right) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} \left(A_3 \right); \\ m_{\alpha} \left(j_{\alpha}^1 \right) + \frac{e_{\alpha}}{c} \left(B^1 \right) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial P_{\alpha 3}}{\partial x^1} \\ \frac{\partial P_{\alpha 3}}{\partial x^2} \end{array} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.17})$$

Подстановка этих выражений в уравнение (П2.16) с учетом того, что $P_{\alpha 3} = P_{\alpha 3}(\psi_{\alpha})$; $U_{\alpha} = U_{\alpha}(\psi_{\alpha})$ и $S_{\alpha} = S_{\alpha}(\psi_{\alpha})$, приводит к равенству

$$\frac{m_{\alpha}}{n_{\alpha}} j_{\alpha}^3 + \frac{e_{\alpha}}{n_{\alpha} c} B^3 - v_{\alpha}^3 P'_{\alpha 3} + U'_{\alpha} - T_{\alpha} S'_{\alpha} = 0, \quad (\text{П2.18})$$

где штрихами обозначены производные по аргументу.

Полученные соотношения — это уравнения для определения ψ_{α} . Преобразуем их с помощью формул (П1.16):

$$\frac{m_{\alpha}}{n_{\alpha} g_{33}} j_{\alpha 3} + \frac{e_{\alpha}}{n_{\alpha} g_{33} c} B_3 - \frac{v_{\alpha 3}}{g_{33}} P'_{\alpha 3} + U'_{\alpha} - T_{\alpha} S'_{\alpha} = 0. \quad (\text{П2.19})$$

Здесь $j_{\alpha 3}$ выражается через ψ_{α} и $v_{\alpha 3}$ оператором [см. формулу (П1.29a)]

$$j_{\alpha 3} = -\frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\sqrt{g} g^{ik}}{n_{\alpha} g_{33}} \cdot \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x^k} \right) + \frac{g_{33} v_{\alpha 3}}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{g_{23}}{g_{33}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{g_{13}}{g_{33}} \right). \quad (\text{П2.20})$$

Если обозначить $A_3 = \psi$, то получим аналогичное выражение для j_3 через ψ и B_3 :

$$j_3 = -\frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\sqrt{g} g^{ik}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) + \frac{g_{33} B_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{g_{23}}{g_{33}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{g_{13}}{g_{33}} \right). \quad (\text{П2.21})$$

Из соотношений (П2.4) можно найти еще два уравнения, связывающих B_3 и j_3 с ψ_{α} и $v_{\alpha 3}$:

$$B_3 = \frac{4\pi}{c} (e_i \psi_i + e_e \psi_e); \quad (\text{П2.22})$$

$$j_3 = \frac{4\pi}{c} (e_i n_i v_{i3} + e_e n_e v_{e3}). \quad (\text{П2.23})$$

Полагая далее $e_i = -e_e = e$, где e — заряд электрона, и используя условие квазинейтральности $n_i e_i = n_e e$, записываем полученную систему уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_\alpha}{n g_{33}} j_{3\alpha} + \frac{e_\alpha B_3}{g_{33} n c} - \frac{v_{3\alpha} P'_{3\alpha}}{g_{33}} + U'_\alpha - T_\alpha S'_\alpha &= 0; \\ \frac{1}{n} j_3 - \frac{4\pi e}{c} (v_{i3} - v_{e3}) &= 0; \\ \frac{4\pi e}{c} (\psi_i - \psi_e) &= B_3; \\ m_\alpha v_{\alpha 3} + \frac{e_\alpha}{c} \psi &= P_{\alpha 3}(\psi_\alpha); \\ \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + W_\alpha + e_\alpha \Phi &= U_\alpha(\psi_\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.24})$$

В случае $n_i \neq n_e$ к этим уравнениям следует добавить уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi e (n_i - n_e).$$

В совокупности с уравнениями состояния и адиабаты идеального газа

$$p_\alpha = n_\alpha T_\alpha; \quad p_\alpha n^{-\gamma} = \exp [(\gamma - 1) S] \quad (\text{П2.25})$$

система (П2.24) — полная система уравнений для определения функции потока магнитного поля ψ , функций потоков ионной и электронной жидкости ψ_i и ψ_e и концентрации частиц n . Полученная система уравнений содержит шесть произвольных функций $P_{\alpha 3}(\psi_\alpha)$, $U_\alpha(\psi_\alpha)$, $S_\alpha(\psi_\alpha)$.

В ортогональных криволинейных координатах с элементом длины, определяющимся соотношением $dl^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2$, уравнения (П2.24) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_\alpha}{n h_3} j_{\alpha x_3} + \frac{e_\alpha}{n c h_3} B_{x_3} - \frac{v_{\alpha x_3}}{h_3} P'_{\alpha 3} + U'_\alpha - T_\alpha S'_\alpha &= 0; \\ \frac{1}{n} j_{x_3} - \frac{4\pi e}{c} (v_{ix_3} - v_{ex_3}) &= 0; \\ \frac{4\pi e}{c} (\psi_i - \psi_e) &= h_3 B_{x_3}; \\ m_\alpha h_3 v_{\alpha x_3} + \frac{e_\alpha}{c} \psi &= P_{\alpha 3}(\psi_\alpha); \\ \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + W_\alpha + e_\alpha \varphi &= U_\alpha(\psi_\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.26})$$

где $j_{\alpha x_3}$ и j_{x_3} равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} j_{\alpha x_3} &= -\frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{h_2}{h_1 h_3 n_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{h_1}{h_2 h_3 n_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_2} \right); \\ j_{x_3} &= -\frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{h_2}{h_1 h_3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{h_1}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.27})$$

Важный частный случай — это течение поперек магнитного поля. Если в уравнениях (П2.25) положим $\psi = 0$ и $P_{\alpha 3} = 0$, то получим, что $v_{\alpha x_3} = 0$, и уравнения (П2.26) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_\alpha}{nh_3} j_{\alpha x_3} + \frac{e_\alpha}{nch_3} B_{x_3} + U'_\alpha(\psi_\alpha) - T_\alpha S'_\alpha(\psi_\alpha) &= 0; \\ B_{x_3} &= \frac{4\pi e}{ch_3} (\psi_i - \psi_e); \\ (1/2) m_\alpha v_\alpha^2 + W_\alpha + e_\alpha \Phi &= U_\alpha(\psi_\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.26}')$$

Здесь магнитное поле \mathbf{B} имеет только одну компоненту B_{x_3} , а скорости ионной и электронной жидкости \mathbf{v}_α ($\alpha = i, e$) перпендикулярны к \mathbf{B} .

2. Симметричные течения двухжидкостной магнитной гидродинамики в случае медленного изменения вдоль одной из координат

Мы рассмотрели течения, зависящие от двух координат x^1 и x^2 . Если зависимость от одной из этих координат, скажем x^2 , можно считать слабой, то, пренебрегая членами, содержащими вторые производные и квадраты первых производных по x^2 , можно упростить уравнения двухпараметрических течений. Полученная таким образом упрощенная система уравнений содержит в некоторых случаях еще один «адиабатический» интеграл, что позволяет проинтегрировать ее до конца.

Запишем систему уравнений двухпараметрических течений (П2.24) (не предполагая условия квазинейтральности) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g_{33}} \left(\frac{m_\alpha}{n_\alpha} j_{\alpha 3} + \frac{e_\alpha B_3}{n_\alpha c} - v_{\alpha 3} P'_{\alpha 3} \right) + U'_\alpha - T_\alpha S'_\alpha &= 0; \\ j_3 &= \frac{4\pi}{c} (e_i n_i v_{i3} + e_e n_e v_{e3}); \\ B_3 &= (4\pi/c) (e_i \psi_i + e_e \psi_e); \\ m_\alpha v_{\alpha 3} + \frac{e_\alpha}{c} \psi &= P_{\alpha 3}; \\ \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + e_\alpha \Phi + W_\alpha &= U_\alpha; \\ \Delta \Phi &= -4\pi (e_i n_i + e_e n_e). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.27}')$$

Рассматриваемое ниже «адиабатическое» приближение сводится к пренебрежению членами порядка второй производной и квадрата первой производной по x^2 от величин n_α , ψ_α , ψ , Φ , так что в ортогональных криволинейных координатах входящие в систему (П2.27') члены $j_{\alpha 3}$, j_3 , v_α и $\Delta \Phi$ в первом приближении можно заменить выражениями

$$\left. \begin{aligned} j_{\alpha 3} &\approx -\frac{h_3}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1 h_2 n_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_1} \right); & j_3 &\approx -\frac{h_3}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \times \\ & & & \times \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right); \end{aligned} \right\}$$

$$v_{\alpha}^2 \approx v_{\alpha x_3}^2 + \left(\frac{1}{h_1 h_2 n_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_1} \right)^2; \quad \Delta \Phi \approx \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \times \left. \begin{array}{l} \\ \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right), \end{array} \right\} \quad (\text{П2.28})$$

где h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламэ.

Если умножить первое из уравнений (П2.27') на $\partial \psi_{\alpha} / \partial x_1$ и затем сложить его с пятым уравнением (П2.27'), продифференцированным по x_1 , то получим

$$m_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{v_{\alpha x_3}^2}{2} + \frac{e_{\alpha} B_3}{n_{\alpha} c g_{33}} + \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_1} - \frac{v_{\alpha x_3}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial p_{\alpha 3}}{\partial x_1} + e_{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial x_1} - T_{\alpha} \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial x_1} = 0. \quad (\text{П2.29})$$

Умножая ионное уравнение (П2.29) на n_i , а электронное на n_e , и складывая с учетом оставшихся уравнений (П2.27'), находим

$$\frac{1}{8\pi g_{33}} \cdot \frac{\partial B_3^2}{\partial x_1} - \frac{1}{2g_{33}} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} (n_i m_i v_{ix_3}^2 + m_e n_e v_{ex_3}^2) - \frac{j_3}{4\pi g_{33}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\Delta \Phi}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} (p_i + p_e) = 0. \quad (\text{П2.30})$$

После подстановки сюда формул (П2.28) получаем окончательное выражение в криволинейных ортогональных координатах

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_3^2 B_{x_3}^2}{8\pi} \right) + \frac{h_3^2}{h_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2^2 B_{x_2}^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{h_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2^2 h_3^2 E_{x_1}^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial h_3^2}{\partial x_1} (n_i m_i v_{ix_3}^2 + n_e m_e v_{ex_3}^2) + h_3^2 \frac{\partial}{\partial x_1} (p_i + p_e) = 0. \quad (\text{П2.31})$$

Полученное «адиабатическое» уравнение (П2.31), очевидно, точно для одномерной задачи, когда $\partial / \partial x_2 = \partial / \partial x_3 = 0$. Оно выражает локальный баланс давлений вдоль координаты x_1 .

Для плоской задачи в декартовых координатах $x_1 = -x$, $x_2 = z$, $x_3 = y$ уравнение (П2.31) для течений, медленно изменяющихся вдоль z и не зависящих от y , принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{8\pi} (B_y^2 + B_x^2 - E_x^2) + p_i + p_e \right] = 0, \quad (\text{П2.32})$$

а его интеграл определяется соотношением

$$\frac{1}{8\pi} (B_y^2 + B_x^2 - E_x^2) + p_i + p_e = P(z), \quad (\text{П2.33})$$

где $P(z)$ — произвольная медленно изменяющаяся функция z .

Соответствующее уравнение для аксиально симметричного течения в цилиндрических координатах $x_1 = r$, $x_2 = z$, $x_3 = -\varphi$ можно записать в виде

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{B_{\varphi}^2 - E_r^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_z^2}{8\pi} + p_i + p_e \right) - \frac{1}{r} (n_i m_i v_{i\varphi}^2 + n_e m_e v_{e\varphi}^2) = 0. \quad (\text{П2.34})$$

Это уравнение справедливо, когда течение не зависит от азимута φ и медленно изменяется вдоль оси z .

В общем виде оно не интегрируется, однако в некоторых случаях можно получить первый интеграл аналогично плоской задаче. Например, при $B_z = 0$, а также $v_{i\varphi} = v_{e\varphi} = 0$, пренебрегая давлениями p_i и p_e , имеем

$$r^2 (B_\varphi^2 - E_r^2) = Q(z), \quad (\text{П2.35})$$

где $Q(z)$ — произвольная медленно изменяющаяся функция z .

Для соответствующих одномерных задач значения P и Q , очевидно, постоянны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю., Подгорный И. М., Чуватин С. А. Электродинамическое ускорение сгустков плазмы. — «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1957, 33, с. 3.
2. Морозов А. И. Об ускорении плазмы магнитным полем. — «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1957, 32, с. 305.
3. Вуд Г. П., Картер А. Ф. Соображения NASA относительно конструкции плазменного ускорителя непрерывного действия с постоянными магнитными полями. — В сб.: Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели. Пер. с англ. М., Госатомиздат, 1961.
4. Морозов А. И. Теория сверхзвуковой части бездиссипативного коробчатого ускорителя. — «Ж. прикл. механ. и техн. физ.», 1966, № 2, с. 30.
5. Жаринов А. В., Попов Ю. С. Об ускорении плазмы замкнутым холловским током. — «Ж. теор. физ.», 1967, 37, № 2, с. 294.
6. Морозов А. И., Артющков Е. В., Соловьев Л. С., Шубин А. П. Некоторые свойства течений проводящего газа в магнитном поле. — В сб.: Низкотемпературная плазма. М., «Мир», 1967.
7. Брагинский С. И. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, с. 183.
8. Плазменные ускорители. Под ред. Л. А. Арцимовича. М., «Машиностроение», 1972.
9. Морозов А. И., Лебедев С. В. Плазмооптика. См. с. 247 наст. сб.
10. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Плоские течения идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла. — «Ж. теор. физ.», 1964, 34, № 7, с. 1141—1153.
11. Морозов А. И., Шубин А. П. К теории электромагнитных процессов при наличии эффекта Холла. — «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, 46, с. 710.
12. Брызгалов В. И., Морозов А. И. Стационарное протекание тока в аксиально симметричном проводящем теле при сильном эффекте Холла. — «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1965, 49, № 6, 1789.
13. Морозов А. И., Шубин А. П. Течения плазмы между электродами, обладающими слабой продольной проводимостью. — «Теплофизика высоких температур», 1965, 3, № 6, с. 827—837.
14. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Об одном параметре подобия в теории плазменных течений. — «Докл. АН СССР», 1965, 164, № 1, с. 80—83.
15. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах. См. с. 88 наст. сб.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1954.
17. Зауер С. Р. Течения сжимаемой жидкости. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит. 1954.
18. Вулис Л. А. Термодинамика газовых потоков. М., Госэнергоиздат, 1950.
19. Морозов А. И., Соловьев Л. С. О симметричных течениях проводящей жидкости поперек магнитного поля. — «Докл. АН СССР», 1964, 154, № 2, с. 306—309.

20. **Морозов А. И., Соловьев Л. С.** Стационарные аксиально симметричные течения плазмы поперек азимутального магнитного поля. — «Ж. теор. физ.», 1964, **34**, № 3, с. 429—443.
21. **Srokko L.** Zs. angay. Math. Mech., 1937, **17**, p. 1—7, см также 17.
22. **Морозов А. И.** Стационарные течения плазмы, сопровождающиеся ее сжатием. — «Ж. теор. физ.», 1967, **37**, с. 2147.
23. **Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И.** Двумерное стационарное течение плазмы в коаксиальной системе. — «Механика жидкостей и газа», 1966, № 2, с. 189—192.
24. **Алексеева Л. М., Соловьев Л. С.** Токовые вихри и критические поверхности в магнитогидродинамическом потоке. — «Прикл. матем. и механ.», 1964, **28**, № 6, с. 987—995.
25. **Морозов А. И., Соловьев Л. С.** Об ускорении вращающейся плазмы в аксиально симметричных каналах. — «Ж. теор. физ.», 1964, **34**, № 7, с. 1154—1169.
26. **Соловьев Л. С.** Симметричные гидромагнитные течения и винтовые волны в круговом плазменном цилиндре. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 3, М., Госатомиздат, 1963, с. 245.
27. **Морозов А. И., Соловьев Л. С.** Об ускорении плазмы в коаксиале. — «Ж. теор. физ.», 1964, **34**, с. 1154.

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ

К. В. Брушлинский, А. И. Морозов

Введение

Расчеты, выполняемые с помощью электронно-вычислительных машин, становятся равноправным методом исследования в современной физике наряду с теорией и экспериментом. Численное интегрирование сложных нелинейных уравнений математической физики позволяет получить подробную информацию об их решениях там, где традиционные теоретические методы довольствовались в лучшем случае грубыми качественными соображениями. Достаточно полная серия расчетов может заменить громоздкий, дорогостоящий, а иногда и принципиально невыполнимый эксперимент.

Сказанное хорошо иллюстрируется многочисленными расчетами в газодинамике, которые способствовали многим техническим достижениям, а также привели к созданию новых интересных разделов науки в области механики, нелинейных дифференциальных уравнений и разностных методов их решения.

Численные методы находят все большее применение и в физике плазмы. Здесь расчеты связаны как с кинетическими уравнениями (для разреженной плазмы), так и с уравнениями магнитной газодинамики (для относительно плотной плазмы). В первом из этих направлений отметим интересную работу И. М. Гельфанда и др. [28], где изучались одномерные нелинейные колебания разреженной плазмы. С зарубежными работами по численному решению кинетического уравнения можно познакомиться в сборнике [69] и в трудах Лос-Аламосской конференции по численному моделированию плазмы [73]. Ввиду громоздкости кинетического описания плазмы речь идет пока об одномерных задачах.

Магнитогидродинамический подход позволяет рассчитать как одномерные, так и двумерные процессы. Расчеты проводятся в связи с изучением течений плазмы в плазменных ускорителях, МГД-генераторах, в исследованиях по термоядерному синтезу, астрофизике и т. д. Наибольшее число расчетов здесь также выполнено в рамках одномерных моделей. Одной из первых работ такого рода был расчет одномерного пинч-эффекта, сделанный С. И. Брагинским, И. М. Гельфандом и Р. П. Федоренко [12] в 1958 г.

Расчеты в рамках двумерных уравнений магнитной газодинамики представляют собой, вообще говоря, следующую ступень исследования. Они сложнее, но технические трудности явно перекрываются полученными при этом качественно новыми результатами. Хотя первые двумерные расчеты плазменных течений проведены в начале 60-х годов (К. В. Брушлинский, Н. И. Герлах, А. И. Морозов [18]), тем не менее к настоящему моменту их опубликовано сравнительно немного. Кроме задач, составляющих содержание данной статьи, укажем еще несколько циклов работ советских авторов. Расчеты двумерной модели пинч-эффекта, проведенные В. Ф. Дьяченко и В. С. Имшенником [32], дали удовлетворительное разъяснение ряда особенностей известных экспериментальных результатов Н. В. Филиппова [66]. Свойства двумерного сверхзвукового течения плазмы в канале МГД-генератора исследованы в работах А. В. Губарева, Л. М. Дегтярева, А. А. Самарского и А. П. Фаворского [29]. Нелинейные стадии ионизационной неустойчивости численно анализировались Е. П. Велиховым и др. [25]. Двумерные расчеты стационарных течений плазмы в торцевых ускорителях выполнены И. Н. Острцовым, В. А. Петросовым, А. А. Поротниковым, И. Б. Сафоновым и С. Д. Цейтлиным [54].

Работы зарубежных авторов связаны в основном с экспериментами по пинчам и ускорителям. Заслуживает внимания двумерный расчет z -пинча, включая стадию плазменного фокуса, проведенный Поттером и др. [70, 72, 74]. Осесимметричная модель θ -пинча рассчитывалась Фрименом и Лейном [65], а динамика его вращения в азимутальном направлении — Дюхсом [64]. Численный анализ течения плазмы в коаксиальной пушке Маршалла выполнен в работах [63, 71]. Содержательный обзор вычислительных работ по магнитной газодинамике за рубежом имеется в статье [74].

Настоящая статья представляет собой обзор расчетов течения плазмы в коаксиальных каналах в собственном азимутальном магнитном поле. Эта работа выполнялась авторами совместно с Н. М. Зуевой, Н. И. Герлах и В. В. Палейчик в течение нескольких лет, и ее результаты публиковались в работах [15—23].

Постановка задачи о таком течении связана с разработкой сильноточных стационарных плазменных ускорителей. Проводя расчеты, авторы хотели выяснить новые качественные особенности рассматриваемых процессов, а не получить их количественные характеристики. Такой подход диктовался тем, что существующие теоретические методы малоэффективны в столь сложных условиях и поэтому роль «подсказок» со стороны численных исследований при построении теории оказалась очень большой. В то же время рассчитываемые модели все же были слишком упрощенными, чтобы на их основе можно было делать далеко идущие количественные выводы.

В настоящее время течение плазмы в каналах привлекает внимание многих авторов и является темой огромного числа аналитических исследований. Результаты последних наиболее полно изложены

в ранее вышедшей монографии [24]. Там же имеется библиография, содержащая четырехзначное число названий. Однако трудности, которые возникают при аналитических методах решения нелинейных уравнений, оставляют в теории течений много невыясненных вопросов. Это и побудило нас провести изложенную здесь программу расчетов. В основу расчетов положено численное решение нестационарных двумерных уравнений магнитной газодинамики. Рассмотрены как классическая одножидкостная, так и двухжидкостная (с учетом эффекта Холла) модели среды. Стационарные режимы течения находятся методом установления.

Первая глава содержит предварительные соображения на основе экспериментальных данных, подробную физическую постановку задачи и ее математическое описание с помощью уравнений переноса двухкомпонентной плазмы. Затем в результате некоторых естественных упрощающих предположений задача сводится к серии более простых, в частности, к решению уравнений магнитной газодинамики. Выбраны единицы измерения искомых величин и указаны все безразмерные параметры, от которых зависят свойства течения. Часть материала носит справочный характер и приводится для полноты освещения всех вопросов, связанных с логикой расчетов. В конце главы дано описание численных методов, использованных при решении задачи. Сюда входят различные способы выбора системы криволинейных пространственных координат в канале и разностная схема решения уравнений.

Во второй главе сделан обзор физических результатов, полученных в расчетах течений полностью ионизованной плазмы. Серии расчетов проведены при различных предположениях о свойствах плазмы, при различных формах канала и различных значениях безразмерных параметров задачи. Они позволили установить зависимость свойств течения от указанных причин, а также обнаружить несколько новых свойств: немонотонность изменения плотности вдоль сопла, токовые вихри, неустойчивость течения вблизи анода при значительном влиянии эффекта Холла. Представляет интерес явление компрессии плазмы на оси канала в стационарном течении, также впервые обнаруженное численно.

Третья глава посвящена течениям, включающим в себя процесс ионизации газа в канале. Основной результат здесь — это обнаружение нестационарных пульсирующих режимов течения при высокой проводимости плазмы после ионизации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РАСЧЕТОВ

§ 1.1. Физическая постановка задачи

Описываемые ниже расчеты течений плазмы в коаксиальных системах были выполнены в связи с проводившимися в ИАЭ им. И. В. Курчатова экспериментальными исследованиями стационарных (точнее квазистационарных) коаксиальных плазменных ускорителей с собственным магнитным полем [1, 36—38, 44, 46].

На рис. 1 изображена схема такого ускорителя. Он состоит из двух коаксиальных электродов — внутреннего 3 и профилированного внешнего 2, разделенных диэлектрической вставкой 1, через отверстия в которой подается рабочее вещество в межэлектродный зазор. Ускоритель питается конденсаторной батареей 5, соединенной с затягивающей индуктивностью 6 и разрядником 4. Длительность импульса тока $t_{и} \approx 1$ мсек, что по крайней мере на два порядка превосходит величину пролетного времени

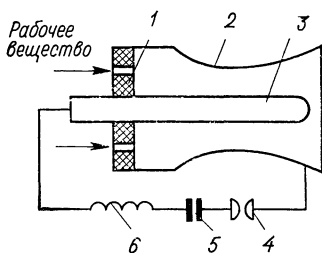


Рис. 1.

$$t_0 = L/v. \quad (1.1)$$

Здесь L — длина системы; v — характерная скорость течения. Большая величина отношения $t_{и}/t_0$ позволяет рассматривать процесс в основном как стационарный.

Разрядные токи меняются в пределах от 20 до 60 ка. Подача рабочего вещества осуществляется с помощью импульсной системы напуска и составляет около 10 см^3 азота или водорода при нормальных условиях. Напряжение на разряде составляет несколько сот вольт. Скорость истечения из ускорителя лежит в пределах $10^6 \div 10^7 \text{ см/сек}$.

Приступая к экспериментам, их авторы ориентировались на предложенную А. И. Морозовым в 1959 г. квазиодномерную теорию течений плазмы в узком плоском канале под действием поперечного магнитного поля (рис. 2). В этом случае уравнения идеальной магнитной газодинамики сводятся, как известно [52], к трем законам сохранения:

$$\rho v f = \text{const}; \quad (1.2a)$$

$$H/\rho = \text{const}; \quad (1.2б)$$

$$v^2/2 + i + H^2/4\pi\rho = U = \text{const}; \quad (1.2в)$$

$$p = p(\rho).$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; v — скорость; $i = \int dp/\rho$ — энтальпия плазмы; H — напряженность магнитного поля; $f(x)$ — площадь поперечного сечения канала. Уравнение (1.2а) означает сохранение вещества вдоль канала, (1.2б) — сохранение магнитного потока, (1.2в) — сохранение энергии*. Число интегралов (1.2) на единицу меньше числа входящих в них переменных величин ρ , v , H , f , что позволяет выразить три из этих величин через четвертую, например, через сечение канала f . Отсюда, в частности, следует, что в узком канале постоянного сечения непрерывное ускорение невозможно. Можно показать, что для непрерывного ускорения плазмы профиль канала должен иметь форму сопла

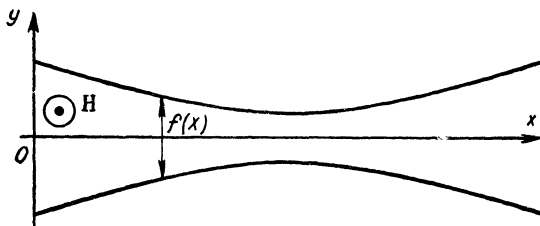


Рис. 2.

(см. рис. 2). В его минимальном сечении имеет место переход скорости плазмы через местное значение скорости магнитного звука [52].

Из уравнения энергии (1.2в) следует, что максимально возможным значением скорости плазмы на выходе из канала является

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{2U} = \sqrt{\frac{H_0^2}{2\pi\rho_0} + 2i_0}. \quad (1.3)$$

Здесь нулем отмечены значения соответствующих величин на «входе» в ускоритель, а под «входом» понимается такое сечение канала, где можно пренебречь величиной v_0^2 по сравнению, например, с квадратом альфвенвской скорости $C_{A0}^2 = H_0^2/4\pi\rho_0$. Для получения плазменных потоков с большими скоростями особый интерес представляет частный случай, когда магнитное давление существенно преобладает над газовым, и величиной i_0 в формуле (1.3) можно пренебречь. В этом случае максимальная скорость истечения равна

$$v_{\text{макс}} \approx \sqrt{2} C_{A0}. \quad (1.4)$$

Так, разрядному току 100 кА в канале среднего радиуса 5 см при концентрации ионизованного водорода на входе около 10^{16} см⁻³ соответствует $v_{\text{макс}} \approx 10^7$ см/сек. Эта заманчивая возможность получения мощных высокоскоростных стационарных потоков плаз-

* Его называют также обобщенным интегралом Бернулли.

мы послужила стимулом для проведения указанных выше экспериментальных исследований. Заметим, что оценка (1.4) есть следствие закона сохранения энергии. Эксперименты в основном подтвердили ее [1,37].

Выбор модели среды и постановка задачи основаны на некоторых соображениях, вытекающих из экспериментальных данных. Изложим их.

Уравнения (1.2) не содержат зависимости от поперечной координаты, и поэтому в описываемой ими простейшей модели течения анод и катод, образующие канал, выступают симметрично. Инвариантность процессов в канале относительно изменения полярности электродов есть общее свойство уравнений магнитной газодинамики:

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0; \\ \rho d\mathbf{v} / dt &= -\nabla p + [\mathbf{j}, \mathbf{H}] / c; \\ \partial \mathbf{H} / \partial t &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= (4\pi / c) \mathbf{j}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Они, очевидно, не меняются при замене $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$, $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$, которая эквивалентна изменению полярности электродов. Отсюда следует, что течение может описываться уравнениями (1.5) только в том случае, если картина разряда не меняется* при изменении полярности электродов.

Первые же эксперименты показали, что это не так. Изменение полярности не только приводит к изменению собственно приэлектродных процессов (что видно по следам эрозии), но и существенно перестраивает картину течения во всем объеме канала. Внешне это проявляется в том, что плазменный поток всегда прижимается к катоду независимо от того, является ли катодом центральный электрод или наружный. Особенно отчетливо выступила несимметрия разряда по отношению к аноду и катоду на экспериментально снятых распределениях электрического потенциала [36] и линиях электрического тока [38] в объеме канала. Эти данные приведены на рис. 3 и 4, где значения потенциала указаны в вольтах. Здесь обращают на себя внимание большой прианодный скачок потенциала и четко выраженное «скольжение» тока вдоль анода. Наличие продольной составляющей электрического тока и приводит к прижатию плазмы к катоду, а также к появлению значительных токов «выноса», текущих за срезом ускорителя. Перекос токов в канале делает картину течения принципиально двумерной. Априори возможны два крайних объяснения наблюдаемого перекоса: либо это объемный процесс, обязанный эффекту Холла, либо следствие возникновения вблизи анода слоя, очень плохо проводящего ток.

* Хотя бы с точностью до тонких приэлектродных слоев, которые заведомо не подчиняются уравнениям (1.5).

Рассмотрим первую возможность. Закон Ома с учетом эффекта Холла имеет вид:

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \frac{1}{enc} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \frac{\nabla p_e}{en}. \quad (1.6)$$

При изменении полярности электродов, т. е. при замене $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$, $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$, уравнение (1.6) существенно изменяется из-за наличия холловского слагаемого и градиента электронного давления в правой части. В реальных условиях эксперимента роль ∇p_e в законе Ома мала и перекокс тока связан эффекту Холла. На-

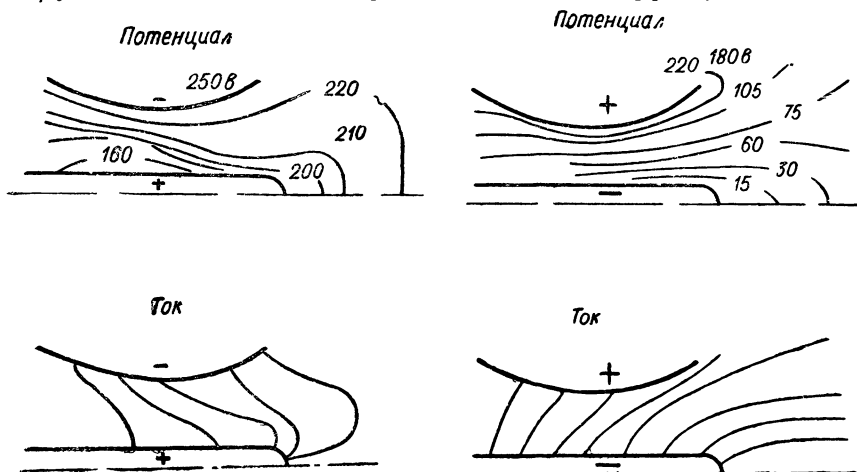


Рис. 3.

Рис. 4.

правление перекокса, предсказываемое уравнением (1.6), совпадает с тем, которое наблюдается на опыте. Более подробный анализ течений с учетом эффекта Холла содержится в работе [52].

Другая возможность — образование прианодных скачков. Если в силу каких-либо причин нормальная к аноду составляющая тока встречает большое сопротивление, а на катоде не возникает никаких осложнений, то перекокс тока неизбежен. Встает вопрос о природе «запирающего» прианодного скачка. Покажем, что его весьма вероятное объяснение также связано с эффектом Холла. В обсуждаемых экспериментах применяются сплошные медные электроды, на поверхности которых с большой степенью точности выполняется условие равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля

$$E_{\tau} = 0. \quad (1.7)$$

Если учесть, что магнитное поле в ускорителе имеет только азимутальное направление, то условие (1.7) означает, что в скрещенных \mathbf{E} - и \mathbf{H} -полях электроны дрейфуют не на анод, а вдоль

анода. Попадание же электронов на анод — это результат конечной проводимости (кулоновской или аномальной) плазмы. Предположим, что проводимость обычная кулоновская. Тогда плотность тока на анод

$$j_{\perp} = \frac{\sigma E_{\perp}^*}{1 + (\omega\tau)_e^2}; \quad (\omega\tau)_e = \frac{\sigma H}{enc}; \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]. \quad (1.8)$$

В результате указанного выше объемного проявления эффекта Холла (наличие продольного тока) плазма отжимается от анода. Уменьшение концентрации плазмы приводит к росту $(\omega\tau)_e$ и тем самым к росту сопротивления в прианодном слое. В свою очередь, рост сопротивления усиливает скольжение тока вдоль анода и способствует дальнейшему отжатию плазмы от анода и т. д.*

Таким образом, в непосредственной близости от анода возникает, по-видимому, слой толщиной порядка электронного ларморовского радиуса [53], в пределах которого сосредоточивается основной скачок потенциала δU . В нем электроны, имеющие энергию порядка $l\delta U$, дрейфуют вдоль анода почти без столкновений. Этот дрейф продолжается до некоторой особой точки, где и происходит выделение электронов на анод. Если анодом является центральный электрод, такой особой точкой будет его конец. Поэтому неудивительно, что после каждого разряда на конце центрального электрода — анода — остается круглое пятно [38], которого нет при обратной полярности электродов.

Рассмотрим результаты исследования поверхностей анода и катода после разряда. Если анод обладает заметной шероховатостью, то после разряда на нем заметны в отдельных местах глубоко проплавленные борозды. Если же анод перед опытом тщательно отполирован, то борозды не возникают, а поверхность анода после разряда имеет под микроскопом такой вид, как будто она подвергалась химическому травлению [9], т. е. на поверхности четко выступают границы кристалликов в линии скольжения. Наблюдаемые особенности анодных поверхностей, очевидно, объясняются тем, что дрейфующий вдоль анода горячий (с температурой порядка прианодного скачка потенциала) поток электронов испаряет мелкие неровности анода. Столкнувшись с крупными дефектами поверхности, электронный поток вызывает интенсивное испарение вещества. В результате в таких местах резко возрастает плотность плазмы, уменьшается сопротивление и благодаря этому возникает мощная привязка, создающая глубокую борозду. В то же время на поверхности катода видны обычно многочисленные, но не глубокие следы эрозии [9, 38], которые характерны для большинства сильноточных дуговых разрядов с холодным катодом. Детальное исследование этих процессов проведено И. Г. Кесаевым [35]. Указанные результаты говорят о том, что выбираемая модель течения должна учитывать эффект Холла.

* Можно показать, что этот процесс должен сопровождаться также ростом электронной температуры.

Замечательной особенностью рассматриваемых разрядов при указанных токах является постоянство электронной температуры в объеме всего канала и в области токов выноса. С точностью до нескольких процентов она всюду одна и та же и равна примерно 2 эв [1,37]. Этот факт до сих пор не нашел полного объяснения. По-видимому, он обязан крутому росту мощности излучения с ростом электронной температуры. В то же время ионная температура в несколько раз превосходит электронную. Систематического изучения зависимости ионной температуры от параметра разряда, к сожалению, не проводилось.

Следующее соображение относится к ионизации газа в канале. Рабочее вещество подается в разрядный промежуток в виде нейтрального газа (азот, аргон, водород). Эксперименты показали, что ионизация вещества происходит в тонком слое (шириной не более нескольких миллиметров), и при указанных величинах разрядного тока и подачи вещества нейтральный газ практически полностью ионизируется: на спектрограмме перед фронтом ионизации не видны линии ионов, а после фронта не видны линии нейтралов [1,37]. Обнаружена любопытная зависимость положения фронта ионизации от разрядного тока и подачи рабочего вещества: при возрастании тока и уменьшении подачи фронт уходит в глубь ускорителя; при уменьшении тока и увеличении подачи фронт смещается к входу в ускоритель [1,37].

Присутствие нейтральной компоненты в разрядном промежутке наблюдается только в тонком ($3 \div 5 \text{ мм}$) слое вблизи катода. Она состоит из азота и атомов меди.

Из сказанного следует, что достаточно полный расчет течения плазмы в ускорителе должен учитывать процесс ионизации нейтрального газа. Модель течения должна описывать динамику трех компонент плазмы: нейтралов, ионов и электронов. Однако трехкомпонентная задача не рассматривается в данной работе. Расчеты проведены в двух более простых случаях. В первом — плазма полностью ионизирована. К этому случаю относятся задачи, сформулированные в этой главе, и результаты расчетов, изложенные в гл. 2. Во втором случае степень ионизации может изменяться в канале. Эффект ионизации моделируется резким возрастанием проводимости при переходе температуры через заданное критическое значение. При этом плазма считается однокомпонентной и задача решается в квазидномерном приближении. Соответствующие уточнения постановки задачи и результаты расчетов изложены в гл. 3.

Перейдем к описанию модели течения плазмы, в рамках которой проведены все двумерные расчеты (см. гл. 2), и к постановке задачи.

Рассмотрим течение плазмы в канале, образованном двумя коаксиальными сплошными металлическими* электродами доста-

* Точнее, предположим, что омическим сопротивлением электродов можно пренебречь.

точно произвольной формы, схематически изображенном на рис. 5. Плазма считается полностью ионизированной, состоящей из двух компонент: электронов и однозарядных ионов. В соответствии с указанными выше экспериментами, в которых концентрация частиц лежит в пределах от 10^{14} до 10^{16} $см^{-3}$, предположим, что плазма квазинейтральна

$$n^i = n^e. \quad (1.9)$$

При описании динамики обеих компонент будем исходить из уравнений С. И. Брагинского [13]. При этом в уравнении движения электронной компоненты мы пренебрежем инерцией электронов

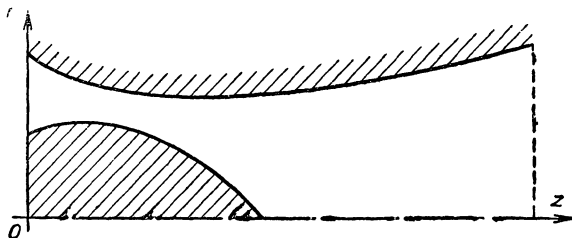


Рис. 5.

$m^e dv^e/dt$. Это равносильно игнорированию процессами, имеющими частоты порядка плазменной и электронно-циклотронной*, что, безусловно, разумно при численном изучении картины течения в целом. Однако инерция электронов определяет не только временные, но и пространственные масштабы: дебаевский и электронный ларморовский радиусы, которые играют важную роль в структуре прианодного и прикатодного слоев (см. работу [53]). В этой связи пренебрежение инерцией электронов может оказаться далеко не безобидным предположением, поскольку, как сказано выше, изменение сопротивления прианодного слоя влияет на картину течения в объеме. Кроме того, пренебрежем током смещения $(1/c) (\partial E/\partial t)$ в уравнениях Максвелла. Тогда течение будет описываться уравнениями магнитной газодинамики с учетом эффекта Холла. Конкретная дискуссия относительно этих уравнений приведена ниже. Здесь же отметим, что уравнения газодинамики строго применимы только в случае, когда длина свободного пробега частиц много меньше характерных масштабов неоднородности потока. Правда, при наличии магнитного поля этот критерий, по-видимому, заменяется менее жестким.

Для электронов безусловно выполнен и точный критерий. Действительно, при $T^e \approx 2$ эв кулоновские сечения столкновений $\sigma_{кул} \approx 3 \cdot 10^{-14}$. Поэтому при $n^e \approx 10^{15}$ свободный пробег состав-

* При средней концентрации $n \approx 10^{15}$ $см^{-3}$ и магнитном поле $H \approx 2$ кэ плазменная частота $\omega_0 \approx 1,5 \cdot 10^{12}$ $сек^{-1}$, а циклотронная частота $\omega_{eH} \approx 3,5 \cdot 10^{10}$ $сек^{-1}$.

ляет величину $\lambda^e \approx 0,5$ мм, в то время как характерный масштаб неоднородности потока по порядку не менее 1 см.

Сложнее обстоит дело с ионами. Во-первых, поскольку ионная температура выше электронной, свободный пробег ионов может быть на порядок больше свободного пробега электронов, т. е. составлять заметную часть от масштаба неоднородности. Во-вторых, ионы, попавшие на электрод и так или иначе отразившиеся снова в канал, имеют скорость относительно частиц потока, сравнимую со скоростью потока, т. е. относительную энергию порядка нескольких десятков электронвольт. При такой энергии кулоновское сечение равно 10^{-16} — 10^{-17} см² и для тяжелых частиц сравнимо с газокINETическим сечением. Поэтому взаимодействие «выпавших» из ускорения ионов с ионами, нормально ускоряющимися («основными»), оказывается очень слабым.

Эти оценки указывают на ограниченную точность описания ионов газодинамическим способом. Однако мы вынуждены ограничиться такой моделью, так как кинетический расчет динамики ионов оказывается, к сожалению, весьма сложным.

При выборе математической модели процесса необходимо учитывать особенности колебаний, наблюдаемых в ускорителе. Специальные измерения показали, что в достаточно широких пределах экспериментов колебания параметров потока сравнительно невелики (от 10 до 20%). Разряд в целом можно считать аксиально симметричным. При малых подачах рабочего вещества, в особенности при работе с водородом, наблюдаются аксиально симметричные продольные колебания фронта ионизации*.

Указанные экспериментальные данные говорят о целесообразности рассмотрения аксиально симметричной модели течения. Это означает, что в цилиндрических координатах (z, r, φ) можно считать:

$$\mathbf{v} = (v_z, v_r, 0); \quad \mathbf{H} = (0, 0, H_\varphi); \quad \partial/\partial\varphi \equiv 0. \quad (1.10)$$

Второе из этих равенств связано также с тем, что в задаче отсутствует внешнее магнитное поле, а собственное поле направлено поперек течения. Кроме того, из (1.10) следует, что векторы электрического поля \mathbf{E} и электрического тока \mathbf{j} лежат в плоскости (z, r).

Чтобы в расчете обеспечить течение плазмы в нужном направлении (см. рис. 5 слева направо), в начальный момент времени в канале задается такое распределение массы, температуры и магнитного поля, при котором суммарное давление (газовое плюс магнитное) убывает слева направо. В дальнейшем подачу вещества

* В некоторых промежуточных режимах возникает аксиально несимметричная неустойчивость фронта ионизации, которая названа спиновой. Она характеризуется возникновением излома на фронте ионизации, вращающегося по азимуту с частотой порядка 20—30 кГц. Такая неустойчивость сильно модулирует плотность вещества непосредственно за фронтом и сравнительно слабо в выходной части канала.

в канал можно реализовать в виде задания на левой его границе постоянных концентраций n_0 (или плотности ρ_0) и температуры T_0 . Следовательно, на входе в канал задано также газовое давление. Итак, при $z = 0$

$$n = n_0; \rho = \rho_0; T = T_0; p = p_0 = kn_0T_0 = (c_p - c_v)\rho_0T_0. \quad (1.11)$$

Такого рода граничные условия можно интерпретировать с помощью бесконечного резервуара с плазмой, имеющей заданные плотность и давление, и который присоединен к входной части канала.

Далее, предположим, что весь ток I , который протекает через систему, подается только через электроды и поддерживается постоянным. Это требование порождает граничное условие на входе для создаваемого током азимутального магнитного поля $H = H_\phi$

$$H_\phi(0, r) = 2I/cr.$$

Обозначим $H_0 = 2I/cr_0$, где r_0 — характерная величина радиуса во входном сечении канала. Тогда H_0 — характерная величина магнитного поля на входе, и упомянутое выше граничное условие имеет вид

$$H(0, r) = H_0r_0/r. \quad (1.12)$$

Иными словами, при $z = 0$

$$j_z = (c/4\pi r)(\partial Hr/\partial r) = 0, \quad (1.13)$$

т. е. ток на входе направлен строго по радиусу. Условие (1.13) носит в большой степени формальный характер, поскольку, как видно из рис. 6, фронт ионизации наклонен, и во всем объеме ускорителя существует продольная компонента электрического тока.

Из сказанного видно, что течение плазмы в канале поддерживается заданием на входе газового давления и магнитного поля. Правый конец ускорителя в реальных условиях бывает обращен в достаточно большой вакуумный объем, внутри которого поток расширяется (в идеальном случае — неограниченно) и теряет выносимое из ускорителя магнитное поле.

Рассмотрим граничные условия на стенках канала. По-видимому, в рамках гидродинамического описания безупречная их формулировка вообще невозможна для интересующего нас диапазона плотностей. Действительно, для того чтобы замкнуть задачу, следует наложить условие на скорость каждой компоненты плазмы на электродах или поставить некое эквивалентное ему условие.

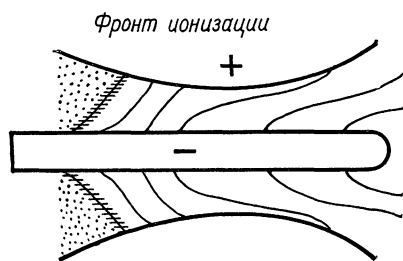


Рис. 6.

Однако, учитывая сравнительно большую величину свободного пробега ионов внутри потока, для них, очевидно, нельзя считать точным традиционное для газовой динамики равенство нулю нормальной скорости

$$v_n = 0. \quad (1.14)$$

Ионы, безусловно, имеют возможность выпадать на катод и тем самым они вносят вклад в перенос тока между электродами. Выпадение же ионов на анод кажется маловероятным в связи с наличием прианодного скачка потенциала, и поэтому условие (1.14) для ионной скорости на аноде, по-видимому, весьма точное.

В гидродинамике условие (1.14) связано с тем, что поток частиц, падающих на стенку, компенсируется потоком, идущим от стенки. В рассматриваемом случае упавшие на катод ионы в основном отражаются в виде нейтралов, которые затем ионизируются в потоке. Длина пробега нейтралов до ионизации, очевидно, равна

$$\lambda_{\text{ион}} = v^{\text{н}}/n^e \langle \sigma v^e \rangle_{\text{ион}},$$

где $v^{\text{н}}$ — скорость нейтральной компоненты. Подставляя сюда характерные числа, приведенные выше, получаем значение пробега нейтрала до ионизации порядка нескольких миллиметров, что согласуется с наблюдаемой в опытах толщиной прикатодного слоя, содержащего нейтралы.

Но, ионизовавшись, отраженная от катода частица слабо взаимодействует с основным потоком, так как сечение кулоновского столкновения между нею и «основными» ионами очень мало (см. выше). Частицы, претерпевшие столкновение с катодом, имеют тенденцию оставаться* вблизи катода, образуя своеобразный слой прикатодной плазмы, медленно вытекающей из ускорителя. Изложенная схема, хотя непосредственно и не проверена экспериментально, не противоречит наблюдаемым фактам и представляется достаточно правдоподобной. В таком случае мы имеем вблизи катода по крайней мере двухскоростной поток ионов, который трудно описать гидродинамически.

Желая все-таки остаться в рамках гидродинамического описания ионов, мы вынуждены ставить достаточно произвольное граничное условие, руководствуясь уже чисто формальными соображениями. Самое простое из них — это условие (1.14). Оно и фигурирует во всех расчетах, правильно отражая по существу лишь тот факт, что частицы не попадают в канал и не уходят из него через электроды.

* Это связано с тем, что ион притягивается к катоду. Более подробный анализ поведения заторможенных ионов приведен в работе [44].

Те же самые трудности относятся к формулировке второго граничного условия для ионной скорости, которого требует учет вязкости. В тех расчетах, где в уравнение движения включена вязкость, условие скольжения (1.14), заменяют более жестким условием прилипания плазмы к электроду.

$$v = 0. \quad (1.15)$$

Хочется выразить надежду, что выполненный кем-нибудь в будущем аккуратный кинетический анализ прикатодного слоя и подробные экспериментальные исследования позволят поставить граничное условие для ионной скорости с помощью менее формальных соображений.

Что касается электронной компоненты плазмы, то после того как мы пренебрегли инерцией электронов и нарушением квазинейтральности, достаточно иметь одно граничное условие на стенках, содержащее тангенциальную компоненту электрического поля E_{τ} .

Из соображений формальной простоты в расчетах требуется, чтобы E_{τ} обращалось в нуль на электродах, т. е. ставится граничное условие (1.7). В пользу такого условия говорит высокая продольная проводимость медных электродов, в результате чего можно пренебречь падением потенциала вдоль их поверхностей. Однако этот аргумент хорошо работает лишь на катоде, вблизи которого, как показывает эксперимент [36], отсутствуют значительные скачки потенциала. Вблизи анода из-за больших скачков потенциала условие (1.7) явно спорное. Здесь также потребуется развитие соответствующей теории и постановка специальных опытов, чтобы уточнить граничное условие (1.7).

Наконец, в расчетах, учитывающих теплопроводность плазмы, электроды предполагаются либо теплоизолированными, либо поглощающими поток тепла, пропорциональный граничной температуре.

Наряду с расчетом течений в коаксиальном ускорителе авторы занимались численным анализом течений в магнитоплазменном компрессоре (МПК). Идея МПК родилась именно в процессе проведения первых двумерных расчетов. Основные черты модели в случае МПК те же, что и в случае ускорителя, поэтому здесь мы не останавливаемся на нем специально.

Такова в общих чертах физическая постановка задачи, численному решению которой посвящена эта работа.

§ 1.2. Математические модели задачи

Основные уравнения. Математическое описание сформулированной выше задачи опирается на двухжидкостную модель плазмы. В основу дальнейших рассуждений положены уравнения переноса для ионов и электронов, взятые из работы С. И. Брагинского [13]. В рассматриваемом случае течения поперек магнитного поля

эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial n^i}{\partial t} + \operatorname{div} n^i \mathbf{v}^i = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} m^i n^i \frac{d^i \mathbf{v}^i}{dt} &= -\nabla p^i + \operatorname{Div} \mathbf{\Pi}^i + en^i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^i, \mathbf{H}] \right) - \mathbf{R}; \\ \frac{kn^i}{\gamma - 1} \cdot \frac{d^i T^i}{dt} + p^i \operatorname{div} \mathbf{v}^i &= \operatorname{div} (\kappa^i \nabla T^i) + \sum_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta}^i \frac{\partial v_\alpha^i}{\partial x_\beta} + Q; \\ \frac{\partial n^e}{\partial t} + \operatorname{div} n^e \mathbf{v}^e &= 0; \\ m^e n^e \frac{d^e \mathbf{v}^e}{dt} &= -\nabla p^e + \operatorname{Div} \mathbf{\Pi}^e - en^e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^e, \mathbf{H}] \right) + \mathbf{R}; \\ \frac{kn^e}{\gamma - 1} \cdot \frac{d^e T^e}{dt} + p^e \operatorname{div} \mathbf{v}^e &= \operatorname{div} (\kappa^e \nabla T^e) + \\ &+ \sum_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta}^e \frac{\partial v_\alpha^e}{\partial x_\beta} - Q + \frac{j^2}{\sigma}, \end{aligned} \right\} (1.16)$$

где $p^{i,e} = kn^{i,e} T^{i,e}$; $\mathbf{j} = e(n^i \mathbf{v}^i - n^e \mathbf{v}^e)$;

$$\mathbf{R} = \frac{e^2 n^i n^e}{\sigma} (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e); \quad Q = B(T^e - T^i);$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{i,e} = \eta^{i,e} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^{i,e} + \left(\zeta^{i,e} - \frac{2}{3} \eta^{i,e} \right) \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{v}^{i,e};$$

$$\frac{d^{i,e}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}^{i,e}, \nabla).$$

Здесь приняты следующие обозначения: n — концентрация частиц данного сорта; m — масса частицы; p — давление; T — температура; \mathbf{v} — скорость; \mathbf{H} и \mathbf{E} — напряженности магнитного и электрического полей; \mathbf{j} — плотность электрического тока; σ — проводимость; κ — коэффициент теплопроводности; k — постоянная Больцмана; e — заряд электрона; c — скорость света. Кроме того, \mathbf{R} — сила взаимного трения ионов и электронов; Q — тепло, передаваемое электронами ионам при взаимном столкновении. Тензор вязких напряжений $\mathbf{\Pi}$ имеет вид, принятый в обычной гидродинамике [41] и часто используемый в магнитогидродинамических задачах [24, 74]. Его выражение в уравнениях (1.16) написано в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) . Коэффициенты η и ζ характеризуют первую и вторую вязкости. Индексы i, e относятся к ионам и электронам соответственно. Первые три уравнения (1.16) описывают непрерывность, динамику и энергию ионной компоненты, последующие три — то же самое для электронной компоненты.

Векторы электромагнитного поля \mathbf{H} , \mathbf{E} , \mathbf{j} подчиняются уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &= \operatorname{rot} \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Уравнения (1.16) и (1.17) образуют замкнутую систему, т. е. их число равно числу неизвестных. При этом имеется в виду, что коэффициенты переноса η , ζ , κ , σ , B известным образом [13] выражаются через искомые функции.

Единицы измерения. Безразмерные уравнения и параметры. В качестве единиц измерения всех величин в уравнениях (1.16)—(1.17) выбраны их характерные значения. При этом использованы размерные физические параметры, участвующие в постановке задачи: заданные на входе в канал концентрации n_0 ионов и электронов, температуры T_0^i и T_0^e (следовательно, давления p_0^i и p_0^e) и характерная величина магнитного поля H_0 , длина канала L , а также известные константы m^i , m^e , e , c .

Примем m^i за единицу массы; L — длины; n_0 — концентрации, H_0 — напряженности магнитного поля и $T_0 = T_0^i + T_0^e$ — температуры. Из них же образуем единицы скорости $v_0 = H_0 / (4\pi m^i n_0)^{1/2}$ (характерная величина скорости альфвеновских волн); времени $t_0 = L/v_0$; давления* $H_0^2/4\pi$, напряженности электрического поля $E_0 = H_0 v_0/c$ и плотности электрического тока $j_0 = cH_0/4\pi L$. Кроме того, в некоторых вариантах (упрощенных) уравнений участвует энтропия, за единицу измерения которой принимается теплоемкость при постоянном объеме c_v .

В указанных единицах уравнения (1.16)—(1.17) становятся безразмерными^{2*}:

$$\frac{\partial n^i}{\partial t} + \operatorname{div} n^i \mathbf{v}^i = 0; \quad (1.18a)$$

$$\begin{aligned} n^i \frac{d^i \mathbf{v}^i}{dt} &= -\nabla p^i + \operatorname{Div} \mathbf{\Pi}^i + \\ &+ \frac{n^i}{\xi} \left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}^i, \mathbf{H}] - \frac{v}{\xi} n^e (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e) \right); \end{aligned} \quad (1.18б)$$

* Здесь единицей давления служит характерное магнитное давление на входе в канал. Другая возможность — принять за единицу давления $p_0 = p_0^i + p_0^e$ [19, 20]. Кроме того, можно принять величину порядка $\sqrt{p_0}$ за единицу измерения магнитного поля [17, 18].

^{2*} В дальнейшем уравнения будем использовать только в безразмерном виде, поэтому для всех величин сохраним их обозначения. В тех редких случаях, когда в тексте встретится размерная величина, она будет снабжена специальной оговоркой или индексом.

$$\begin{aligned} & \frac{\beta n^i}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{dT^i}{dt} + p^i \operatorname{div} \mathbf{v}^i = \\ & = \frac{\beta}{2(\gamma-1)} [B(T^e - T^i) + \operatorname{div}(\kappa^i \nabla T^i)] + \sum_{\alpha, \beta} \Pi_{\alpha\beta}^i \frac{\partial v_{\alpha}^i}{\partial x_{\beta}}; \end{aligned} \quad (1.18\text{В})$$

$$\frac{\partial n^e}{\partial t} + \operatorname{div} n^e \mathbf{v}^e = 0; \quad (1.18\text{Г})$$

$$\begin{aligned} & \mu n^e \frac{d^e \mathbf{v}^e}{dt} = -\nabla p^e + \operatorname{Div} \mathbf{\Pi}^e - \\ & - \frac{n^e}{\xi} \left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}^e, \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{v}}{\xi} n^i (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e) \right); \end{aligned} \quad (1.18\text{Д})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta n^e}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{d^e T^e}{dt} + p^e \operatorname{div} \mathbf{v}^e = \\ & = \frac{\beta}{2(\gamma-1)} [-B(T^e - T^i) + \operatorname{div}(\kappa^e \nabla T^e)] + \sum_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta}^e \frac{\partial v_{\alpha}^e}{\partial x_{\beta}} + \nu \mathbf{j}^2; \end{aligned} \quad (1.18\text{Е})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad (1.18\text{Ж})$$

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}; \quad (1.18\text{З})$$

$$p^{i, e} = \frac{\beta}{2} n^{i, e} T^{i, e}; \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\xi} (n^i \mathbf{v}^i - n^e \mathbf{v}^e);$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{i, e} = \eta^{i, e} \left(\frac{\partial v_{\alpha}^i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}^i}{\partial x_{\alpha}} \right)^{i, e} + \left(\zeta^{i, e} - \frac{2}{3} \eta^{i, e} \right) \delta_{\alpha, \beta} \operatorname{div} \mathbf{v}^{i, e}.$$

Исходные размерные константы входят в уравнения (1.18) и, следовательно, участвуют в задаче только в составе следующих безразмерных параметров:

$$\beta = 8\pi p_0 / H_0^2 \quad (1.19)$$

— отношение задаваемых на входе газового и магнитного давлений (здесь $p_0 = p_0^i + p_0^e$);

$$\xi = \frac{c}{eL} \sqrt{\frac{m^i}{4\pi n_0}} \quad (1.20)$$

— безразмерная константа, величина которой соответствует так называемому параметру обмена [51], характеризующему влияние эффекта Холла (для краткости будем называть ее параметром обмена, см. подробнее § 2.5); $\mu = m^e/m^i$ — отношение масс электрона и иона; $\varepsilon = v_0^2/c^2$ — квадрат отношения характерной скорости течения к скорости света. Кроме того, уравнения (1.18) содержат

безразмерные коэффициенты переноса, которые связаны с соответствующими размерными величинами в (1.16) следующим образом:

$$\eta^{i,e} = \frac{\eta_{\text{разм}}^{i,e}}{L m^i n_0 v_0}; \quad \zeta^{i,e} = \frac{\zeta_{\text{разм}}^{i,e}}{L m^i n_0 v_0}, \quad (1.21)$$

где $\eta^{i,e}$ — первый, а $\zeta^{i,e}$ — второй коэффициенты вязкости;

$$\chi^{i,e} = \frac{\chi_{\text{разм}}^{i,e}}{L m^i n_0 v_0 c_v} \quad (1.22)$$

— коэффициенты теплопроводности;

$$\nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma L v_0} = \frac{1}{\text{Re}_m} \quad (1.23)$$

— безразмерная магнитная вязкость, величина, обратная характерному значению магнитного числа Рейнольдса Re_m или безразмерной проводимости;

$$B = \frac{L B_{\text{разм}}}{m^i n_0 v_0 c_v}$$

— коэффициент теплообмена между ионами и электронами.

Эти коэффициенты выражаются через искомые функции и в нужном для расчетов виде приведены ниже.

Уравнения (1.18) образуют, вообще говоря, квазилинейную систему параболического типа. Ее частный случай — в отсутствие вязкости и теплопроводности ($\Pi^{i,e} = 0$; $\chi^{i,e} = 0$) — гиперболическая система с тремя типами характеристик: ионные, электронные и световые. Отвечающие им скорости распространения малых возмущений относительно среды равны соответственно

$$C^i = \sqrt{\frac{\gamma p^i}{n^i}}; \quad C^e = \sqrt{\frac{\gamma p^e}{\mu n^e}}; \quad C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

Эти скорости сильно отличаются друг от друга. В интересующих нас явлениях параметры μ и ϵ очень малы, и поэтому решение или исследование уравнения (1.18) связано с большими трудностями. Численное интегрирование их потребовало бы расчетной сетки с чрезвычайно мелкими шагами. Тем не менее уравнения (1.18) с конечным μ представляют интерес в теории течений плазмы в канале, поскольку они достаточно полно описывают течения. Они могут сыграть роль при изучении явлений в приэлектродных слоях, так как искусственное увеличение μ означает модель, в которой эти слои увеличиваются. Другие вопросы также имеет смысл моделировать с помощью «утяжеления» электрона или «замедления» скорости света, т. е. увеличения μ и ϵ . Таким образом, расчет задачи в рамках полной системы уравнений (1.18) привел бы к содержательным результатам, и построение эффективного метода ее приближенного решения остается интересной проблемой.

Уравнения магнитной газодинамики. Учет эффекта Холла.

Для численного решения задачи использованы уравнения, полученные из (1.18) в результате некоторых упрощений, главные из которых связаны с отмеченными выше трудностями, остальные отражают пренебрежение теми эффектами, которые в конкретных задачах можно считать второстепенными. Перечислим возможные упрощения системы уравнений (1.18).

1. Основное из них

$$\mu = 0; \varepsilon = 0. \quad (1.24)$$

Это соответствует отмеченному в § 1.1 пренебрежению инерцией электронов $m^e d^e \mathbf{v}^e / dt$ и током смещения $\partial \mathbf{E} / \partial t$ в (1.16) и (1.17). Из предположения (1.24) вытекает несколько следствий.

а. Уравнение (1.18з) при $\varepsilon = 0$ превращается в уравнение

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad (1.25)$$

а из (1.18а, г) и (1.25) следует

$$\partial (n^i - n^e) / \partial t = \xi \text{ div } \mathbf{j} = 0.$$

Это означает тождественную нейтральность плазмы ($n^i \equiv n^e$), если потребовать таковую в начальный момент времени. В дальнейшем будем считать $n^i = n^e = \rho$, что соответствует традиционному обозначению плотности в газодинамике: при $\mu = 0$ безразмерная концентрация ионов является безразмерной плотностью плазмы (т. е. отнесенной к единице измерения $\rho_0 = m^i n_0$).

б. Пренебрегая массой электрона m^e , естественно считать электронную вязкость $\Pi^e = 0$. Это оправдано также тем, что отношения коэффициентов электронной и ионной вязкостей — величина порядка $\sqrt{\mu}$ [13, 59]. Обозначив теперь $\mathbf{v}^i = \mathbf{v}$; $p^i + p^e = p$; $\Pi^i = \Pi$ и сложив соотношения (1.18б, д), получим уравнение движения в магнитной газодинамике

$$\rho \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + [\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \text{Div } \Pi. \quad (1.26)$$

в. Уравнение (1.18д) превращается при $\mu = 0$ и $\Pi^e = 0$ в обобщенный закон Ома, связывающий электрическое поле \mathbf{E} с током \mathbf{j} . Если принять во внимание, что при $n^i = n^e$

$$\mathbf{v}^e = \mathbf{v} - \xi \mathbf{j} / \rho, \quad (1.27)$$

то он имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \mathbf{j} - [\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{\xi}{\rho} ([\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \nabla p^e) \quad (1.28)$$

и отличается от обычного закона Ома в магнитной газодинамике в основном тем, что учитывает конечное, а не бесконечно малое различие в скоростях ионов и электронов, т. е. эффект Холла.

При $\xi = 0$ уравнение (1.28) — обычный закон Ома.

г. Уравнения (1.18ж) и (1.28) позволяют исключить электрическое поле \mathbf{E} из основной системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \text{rot} \mathbf{v} \mathbf{j} - \xi \text{rot} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \nabla p^e}{\rho}, \quad (1.29)$$

где $\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H}$. Соотношение (1.29) — это уравнение диффузии магнитного поля. Последнее слагаемое в его правой части с коэффициентом ξ соответствует эффекту Холла.

д. Наконец, уравнение (1.18е) с учетом (1.27) и $\mathbf{P}^e = 0$ имеет вид

$$\frac{\beta \rho}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{dT^e}{dt} + p^e \text{div} \mathbf{v} = \frac{\beta}{2(\gamma-1)} [\text{div} (\kappa^e \nabla T^e) - B (T^e - T^i)] + \\ + \mathbf{v} \mathbf{j}^2 + \xi \left[\frac{\beta}{2(\gamma-1)} (\mathbf{j}, \nabla T^e) + p^e \text{div} \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right]. \quad (1.30)$$

Последнее слагаемое, содержащее ξ , опять обязано эффекту Холла.

Таким образом, в результате обращения в нуль параметров μ и ε и вытекающего отсюда пренебрежения \mathbf{P}^e задача описывается уравнениями (1.18а, в), (1.26), (1.29), (1.30) с шестью неизвестными функциями: ρ , T^i , T^e , v_z , v_r , H . Это уравнения магнитной газодинамики для двухтемпературной плазмы с учетом эффекта Холла. Они являются первой ступенью перехода от строго двухжидкостной модели (1.18) к классической магнитной газодинамике и могут служить основой расчета конкретных задач. Например, расчеты пинч-эффекта [31, 74] проведены в двухтемпературной постановке задачи.

Задачи, составляющие данный обзор, не предусматривают двух температур и связаны с дальнейшими упрощениями.

2. Следующая возможность упростить задачу — отказаться от двухтемпературной модели и задать какую-нибудь связь между T^i и T^e :

$$T^i = f_i(T); \quad T^e = f_e(T); \quad T = T^i + T^e,$$

где f_i и f_e — заданные функции. Сложив теперь (1.18в) с (1.30), получим уравнение энергии для суммарной температуры:

$$\frac{\beta \rho}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{dT}{dt} + p \text{div} \mathbf{v} = \frac{\beta}{2(\gamma-1)} \text{div} (\kappa \nabla T) + \sum_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta} \times \\ \times \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \mathbf{v} \mathbf{j}^2 + \xi \left[\frac{\beta}{2(\gamma-1)} f'_e(T) (\mathbf{j}, \nabla T) + f_e(T) \frac{p}{T} \text{div} \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right], \quad (1.31)$$

где $\kappa = \kappa^i f'_i(T) + \kappa^e f'_e(T)$. В дальнейшем изложении и в проведенных расчетах указанная зависимость предполагается простейшей:

$$T^i = T^e = T/2, \quad (1.32)$$

откуда следует $p^i = p^e = p/2$. Такое предположение, безусловно, оправдано, например, при рассмотрении изотермических течений, а в общем случае вызвано только соображениями простоты. В этом случае описание задачи сводится к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0; \\ \rho \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + [\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \operatorname{Div} \mathbf{\Pi}; \\ \frac{\beta \rho}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{\beta}{2(\gamma-1)} \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \sum_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \\ &+ v_j^2 + \frac{\xi}{2} \left[\frac{\beta}{2(\gamma-1)} (\mathbf{j}, \nabla T) + p \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}}{\rho} \right]; \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \operatorname{rot} v \mathbf{j} - \xi \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{1}{2} \nabla p}{\rho}, \end{aligned} \right\} (1.33)$$

где $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}$; $p = \frac{\beta}{2} \rho T$; $\kappa = \frac{1}{2} (\kappa^i + \kappa^e)$, а $\Pi_{\alpha\beta}$ определяются согласно (1.18).

Система уравнений (1.33) в дальнейшем участвует в некоторых вариантах расчета задачи (см. § 2.6). Это уравнения магнитной газодинамики с учетом трех типов диссипативных процессов — вязкости, теплопроводности и электропроводности, а также эффекта Холла. Последний входит в уравнения энергии и диффузии магнитного поля в виде слагаемых с коэффициентом ξ и является наименее традиционным элементом уравнений (1.33). Преобразуем эти слагаемые с учетом аксиальной симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2(\gamma-1)} (\mathbf{j}, \nabla T) + p \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}}{\rho} &= \left(\mathbf{j}, \frac{\beta}{2(\gamma-1)} \nabla T + p \nabla \frac{1}{\rho} \right) = \\ &= \frac{\beta T}{2(\gamma-1)} \left(\mathbf{j}, \frac{\nabla T}{T} - (\gamma-1) \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) = \frac{\beta T}{2(\gamma-1)} (\mathbf{j}, \nabla s) = \\ &= \frac{\beta T}{2(\gamma-1)} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H r}{\partial r} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial s}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $s = \ln (T/\rho^{\gamma-1}) = \ln (2p/\beta\rho^\gamma)$ — безразмерная энтропия;

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{1}{2} \nabla p}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \left[\nabla \frac{1}{\rho}, [\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{1}{2} \nabla p \right] = \\ &= \frac{1}{\rho} [(\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{j} - (\mathbf{j}, \nabla) \mathbf{H}] + \left(\nabla \frac{1}{\rho}, \mathbf{H} \right) \mathbf{j} - \left(\nabla \frac{1}{\rho}, \mathbf{j} \right) \mathbf{H} + \\ &+ \frac{\beta}{4\rho} [\nabla \rho, \nabla T]. \end{aligned}$$

Последнее выражение содержит, вообще говоря, вторые производные по координатам, однако в рассматриваемом случае двумерного течения поперек магнитного поля (1.10) оно вырождается и упрощается:

$$\operatorname{rot} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{1}{2} \nabla p}{\rho} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H}{\rho r} \right) \frac{\partial H r}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H}{\rho r} \right) \frac{\partial H r}{\partial r} + \\ + \frac{\beta}{4\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (1.35)$$

Уравнения (1.33) образуют в общем случае квазилинейную параболическую (из-за наличия диссипативных членов) систему. Эффект Холла вносит дополнительную нелинейность (1.34), (1.35) в младшие члены уравнений. Однако, если пренебречь диссипативными процессами, то эти выражения становятся главными членами и сильно влияют на природу уравнений и их решения (см. подробнее § 2.5).

3. Далее возможны очевидные упрощения задачи и уравнений (1.33), связанные с пренебрежением эффектом Холла и диссипативными процессами. Не предписывая им строгой очередности*, укажем на следующие возможности: а) пренебречь эффектом Холла, т. е. положить $\xi = 0$ в (1.33); оставшиеся уравнения относятся к одножидкостной модели плазмы, т. е. обычной магнитной газодинамике вязкой, теплопроводной среды с конечной проводимостью; б) пренебречь вязкостью: $\Pi_{\alpha\beta} = 0$ ($\eta = \zeta = 0$); в) пренебречь теплопроводностью: $\kappa = 0$; г) считать проводимость плазмы бесконечной, т. е. пренебречь магнитной вязкостью: $\nu = 0$.

Если пренебречь всеми перечисленными явлениями, то уравнения (1.33) превращаются в систему уравнений идеальной (бездиссипативной) магнитной газодинамики:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0; \\ \rho \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + [\mathbf{j}, \mathbf{H}]; \\ \frac{\beta \rho}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]; \\ p &= \frac{\beta}{2} \rho T; \quad \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

* Каждое такое упрощение осуществляется независимо от других, согласуясь с физическими соображениями и конкретными целями решения задачи.

Это опять гиперболическая система. В рассматриваемом случае (1.10) течения она обладает (кроме тривиальных энтропийной и вихревой) магнитозвуковыми характеристиками, которым соответствует скорость распространения малых возмущений относительно среды $C_m = \sqrt{C^2 + \frac{H^2}{\rho}}$, где $C^2 = \gamma p/\rho$ — квадрат газодинамической скорости звука.

4. Следующая возможность упрощения — исключить из (1.33) или (1.36) уравнение энергии, заменив его предположением об изэнтропичности $s = \text{const}$; $p = \beta \rho^{\gamma/2}$ или изотермичности течения $T = \text{const}$; $p = \beta T/2$. Это уменьшает еще на единицу число уравнений и неизвестных функций.

5. В задачах, где процесс слабо зависит от радиуса, можно вести расчеты в квазиодномерном (гидравлическом) приближении. При этом сечение канала задается медленно меняющейся функцией $f(x)$, где x — координата вдоль канала. Все величины усредняются по поперечному сечению и зависят только от переменных t и x . Вектор скорости \mathbf{v} направлен вдоль оси x , а магнитное поле \mathbf{H} — по-прежнему перпендикулярно к потоку.

Течение плазмы описывается в этом случае уравнениями [4, 17, 24]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho v f}{\partial x} &= 0; \\ \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \frac{\beta \rho f}{2(\gamma-1)} \frac{dT}{dt} + p \frac{\partial v f}{\partial x} &= \frac{\beta}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa f \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ &+ f \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \frac{\partial H f}{\partial t} + \frac{\partial H v f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu f \frac{\partial H}{\partial x} \right); \\ p &= \frac{\beta}{2} \rho T. \end{aligned} \right\} (1.37)$$

Квазиодномерное описание задачи (1.37) не содержит эффекта Холла ввиду его принципиально двумерной природы. Диссипативные члены и уравнение энергии можно отбросить, как и выше, полностью или частично в каждом конкретном варианте задачи.

Коэффициенты переноса. Параметр $\omega^{e\tau e}$. Коэффициенты переноса η , ζ , κ и ν в уравнениях (1.33), (1.36) и (1.37) задаются согласно С. И. Брагинскому [13] в виде известных функций от T , ρ и H . Эти функции содержат безразмерный параметр $\chi = \omega^{e\tau e}$, который характеризует «замагниченность» электронной компоненты плазмы и часто используется для количественных оценок роли

эффекта Холла. Здесь τ^e — среднее время между столкновениями, ω^e — циклотронная частота электронов. В размерных величинах

$$\omega^e = eH/m^e c; \quad \tau^e = 3\sqrt{m^e} (kT^e)^{3/2} / 4\sqrt{2\pi} \lambda e^4 n^i,$$

где λ — кулоновский логарифм*. Переходя к выбранным выше единицам измерения, получаем безразмерное выражение

$$\chi = \omega^e \tau^e = X \frac{H (T^e)^{3/2}}{\lambda \rho}, \quad (1.38)$$

где X — безразмерная константа:

$$X = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{H_0 (kT_0)^{3/2}}{\sqrt{m^e n_0 e^3 c}}. \quad (1.39)$$

Аналогичным параметром для ионов $\omega^i \tau^i$ можно пренебречь, так как

$$\omega^i \tau^i = \sqrt{2\mu} (T^i/T^e)^{3/2} \omega^e \tau^e \ll \omega^e \tau^e.$$

В случае течения поперек магнитного поля и в предположении (1.32) безразмерные коэффициенты переноса (1.21)—(1.23) выражаются следующим образом:

$$\text{Re}_m = \frac{1}{\nu} = \frac{X}{\xi \lambda \alpha_0(\chi)} \left(\frac{T}{2} \right)^{3/2}; \quad (1.40)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \kappa^e = \frac{(\gamma-1) \beta \xi X \gamma_0(\chi)}{4\lambda} \left(\frac{T}{2} \right)^{5/2}; \quad (1.41)$$

$$\eta = \frac{0,96 \beta \xi \sqrt{\mu} X}{\nu \sqrt{2\lambda}} \left(\frac{T}{2} \right)^{5/2}. \quad (1.42)$$

В формуле (1.41) учтено, что ионная теплопроводность

$$\kappa^i \approx \sqrt{\mu} \kappa^e \ll \kappa^e,$$

и ее можно отбросить. Функции $\alpha_0(\chi)$ и $\gamma_0(\chi)$ довольно медленно меняются в рассматриваемом диапазоне температур, причем $\alpha_0(\chi)$ никогда не обращается в нуль:

$$\alpha_0(\chi) = 1 - \frac{1,837 + 6,416\chi^2}{3,77 + 14,79\chi^2 + \chi^4}; \quad \gamma_0(\chi) = \frac{11,92 + 4,664\chi^2}{3,77 + 14,79\chi^2 + \chi^4}.$$

Второй коэффициент вязкости ζ чаще всего выбирается равным первому: $\zeta = \eta$. В программе расчетов коэффициенты переноса

* См. работы [13,59]. В рассматриваемых задачах $\lambda \approx 10$.

участвуют в несколько упрощенной форме:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 T^{5/2}; \quad (1.43)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 T^{5/2}; \quad (1.44)$$

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 T^{5/2}; \quad (1.45)$$

$$\text{Re}_m = (1/\nu) = \sigma_1 + \sigma_2 T^{3/2}, \quad (1.46)$$

где все восемь коэффициентов постоянны.

Если аппроксимировать λ , α_0 и γ_0 константами, то зависимости (1.40)—(1.42) превращаются, очевидно, в частный случай формул (1.43)—(1.46).

С другой стороны, можно при решении задачи считать коэффициенты переноса постоянными. Это имеет смысл при изучении качественных вопросов о роли диссипативных процессов.

Наконец, первые слагаемые в формулах (1.43)—(1.45) позволяют сохранить некоторый минимум диссипативных явлений при малых значениях T , что может оказаться полезным при расчете ударных волн.

Граничные и начальные условия. Уравнения (1.33) в предположении осевой симметрии (1.10) рассматриваются в области цилиндрических переменных (z, r) , соответствующей геометрии канала (см. рис. 5). Форма электродов, образующих канал, задается кривыми

$$r = r_1(z); \quad r = r_2(z). \quad (1.47)$$

Приведем полный список краевых условий на границах области в соответствии с их обсуждением в § 1.1.

1. На входе в канал при $z = 0$ заданы

$$\rho = 1; \quad T = 1; \quad H = r_0/r, \quad (1.48)$$

где r_0 — характерное значение радиуса во входном сечении канала, например $r_0 = (1/2)[r_1(0) + r_2(0)]$. Если вязкость $\Pi = 0$, то условий (1.48) достаточно, ввиду того что скорость на входе дозвуковая*.

Наличие вязкости требует также граничных условий для скорости. В расчетах они заданы в виде

$$\partial(\rho v_z f)/\partial z = 0; \quad v_r = (dr/dz)v_z, \quad (1.49)$$

где $f(z)$ — площадь поперечного сечения координатной трубки, а dr/dz — наклон координатной линии (см. § 1.3) к оси z . Смысл первого условия (1.49) в том, что течение на входе близко к стационарному, а второго — в том, что плазма втекает в канал по естественным направлениям, принятым за координатные линии.

* В противном случае нужно дополнительно к соотношениям (1.48) задать скорость при $z = 0$.

2. На электродах (1.47), как правило, заданы:

$$\mathbf{v} = 0; E_{\tau} = 0; \partial T / \partial n = 0, \quad (1.50)$$

где \mathbf{n} — нормаль, а τ — касательная к поверхности электрода. В некоторых случаях вместо третьего условия (1.50) ставится условие отвода тепла через стенку канала

$$\partial T / \partial n = -kT. \quad (1.51)$$

Следует заметить, что уравнения (1.33) нуждаются в условиях (1.50) только при наличии диссипативных членов. Если $\mathbf{P} = 0$, то условие $\mathbf{v} = 0$ заменяется условием скольжения $v_n = 0$. Если $\kappa = 0$, то отпадает третье граничное условие (1.50) или условие (1.51). Если же $\xi = 0$, $\mathbf{v} = 0$, то отпадает второе условие (1.50).

Таким образом, если задача решается с помощью идеальных уравнений (1.36), граничные условия (1.50) на стенках заменяются единственным условием $v_n = 0$.

3. Если внутренний электрод короче внешнего (см. рис. 5), то часть границы области лежит на оси канала. Здесь ставятся очевидные условия осевой симметрии:

$$v_r = 0; H = 0; \partial \rho / \partial r = \partial T / \partial r = \partial v_z / \partial r = 0. \quad (1.52)$$

4. Менее очевидны граничные условия на выходе из канала при $z = z_1$, где физические соображения не подсказывают каких-либо определенных соотношений. Поэтому требуемые в расчетах условия ставятся более или менее искусственно.

Уравнения идеальной магнитной газодинамики (1.36) требуют здесь одного дополнительного условия при дозвуговой скорости $v < C_m$ на выходе и ничего не требуют при $v > C_m$. Если же задача включает в рассмотрение вязкость, теплопроводность и конечную проводимость, то уравнения (1.33) нуждаются в граничных условиях соответственно для v , T и H .

Один из возможных типов граничных условий

$$\partial v_z / \partial z = \partial v_r / \partial z = 0; \partial T / \partial z = 0; \partial H / \partial z = 0 \quad (1.53)$$

соответствует существующим традициям в газодинамике (например, работа [8]). Если в расчете учитывается только часть диссипативных процессов, то следует отбросить лишние из соотношений (1.53).

В расчетах, связанных с работами [17—20], без вязкости и теплопроводности вместо третьего условия (1.53) использовано

$$\partial H f / \partial z = 0. \quad (1.54)$$

Оно подобрано в результате серии расчетов в квазиодномерном варианте задачи [17], в которых канал искусственно удлинялся

трубами разных сечений. Создается впечатление, что результаты расчета вообще мало зависят от граничного условия для H на выходе. Оно ставится в связи с магнитной вязкостью ν и поэтому должно было бы играть особенно существенную роль при больших значениях ν . Однако в этом случае, как видно из расчетов, магнитное поле слабо проникает в канал и на выходе близко к нулю: условия (1.53) и (1.54) становятся равноценными и их можно заменить условием $H = 0$. Наоборот, при малых значениях ν магнитное поле проникает на всю длину канала и его распределение близко к распределению плотности*.

Одна из главных целей, которую преследует решение рассматриваемых задач, это изучение стационарных, т. е. не зависящих от времени, режимов течения плазмы в каналах. Формально ее можно достичь, решая задачу в стационарном варианте, т. е. положив в уравнениях (1.33) $\partial/\partial t \equiv 0$. Перечисленные выше граничные условия не противоречат этому, так как все они носят стационарный характер. Однако такой путь связан с существенными трудностями. Дело в том, что стационарные течения в соплах, как правило, дозвуковые на входе в канал и сверхзвуковые на выходе. Линия перехода через скорость магнитного звука C_m располагается вблизи минимального сечения сопла. Стационарные уравнения идеальной магнитной газодинамики меняют на этой линии свой тип: они образуют эллиптическую систему слева от нее и гиперболическую справа, причем само положение линии нужно определить в расчетах. Введение диссипативных членов в уравнения, хотя и делает последние однотипными, по существу, не спасает положения, так как в реальных задачах коэффициенты переноса часто бывают очень малыми. Таким образом, расчеты стационарной модели задачи весьма сложны^{2*}.

Кроме того, процесс установления стационарного режима течения представляет самостоятельный физический интерес, и его изучение привело в некоторых случаях к полезным результатам. В силу указанных причин задача решается в нестационарной модели (1.33) методом установления. Начальные условия при $t = 0$ можно задать достаточно произвольно, лишь бы они обеспечили разгон плазмы в направлении слева направо. Для этого, например, достаточно положить $v = 0$, а ρ , T , H сделать монотонно убывающими функциями z , согласованными с граничными условиями (1.48).

Таким образом, задача состоит в решении уравнений (1.33) в области переменных (z, r) , схематически изображенной на рис. 5. при граничных условиях (1.48)—(1.54) и только что указанных начальных условиях.

* Магнитное поле «вморожено» в плазму при $\nu = 0$ (1.26). В этом случае граничное условие вообще не нужно.

^{2*} Их можно осуществить при очень сильных ограничениях, например, при изучении сверхзвуковых течений.

§ 1.3. Метод численного решения задачи

Системы пространственных координат. Цилиндрические координаты (z, r) , участвующие в постановке задачи в § 1.2, не являются, вообще говоря, удобными для ее численного решения: границы расчетной области — криволинейны и это неизбежно усложняет логику вычислительного процесса и расчетных формул на границах. Расчеты, составляющие данный обзор, проведены в криволинейных координатах, более соответствующих форме области и превращающих ее в прямоугольник со сторонами, параллельными осям. На разных этапах работы использовались три типа таких координат.

1. Гиперболические координаты $(\xi, \eta)^*$, связанные с (z, r) соотношениями

$$r = a + \frac{1}{b} |\xi| \eta; \quad z = \frac{\text{sign } \xi}{b} \sqrt{(b^2 - \eta^2)(\xi^2 - b^2)}. \quad (1.55)$$

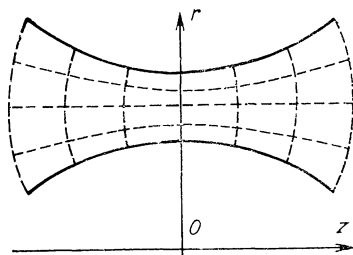


Рис. 7.

Координатная сетка состоит из гипербол $\eta = \text{const}$ и ортогональных к ним эллипсов $\xi = \text{const}$ (рис. 7). Координаты (1.55) применимы в тех случаях, когда электроды удастся включить в систему координатных гипербол с помощью выбора констант a и b . Левую и правую границы области нужно задать не в виде прямых отрезков $z = \text{const}$, а в виде дуг эллипсов $\xi = \text{const}$, что можно без труда отразить в исходной постановке задачи. Расчетная область превращается в два прямоугольника $\xi_0 \leq \xi \leq -b$; $b \leq \xi \leq \xi_1$; $\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1$, которые следует рассматривать как склеенные в один по линиям $\xi = -b$ и $\xi = b$, соответствующим $z = 0$.

Достоинство системы координат (1.55) состоит в ее ортогональности и обязанной ей относительной простоте и естественности уравнений. В то же время она ограничивает свободу в выборе формы электродов: в частности, интересный случай укороченного центрального электрода (см. рис. 5) не попадает в сферу ее применения. Уравнения магнитной газодинамики в гиперболических координатах приведены^{2*} в работе [18].

2. Другой тип координат основан на «распрямлении» границ (электродов) и построении равномерной по радиусу сетки между ними. Кроме того, сетку можно при желании сделать неравномерной

* Обозначения гиперболических координат (ξ, η) взяты из работы [18]. Поскольку они нигде, кроме этого пункта, не упоминаются, нет опасности спутать их с параметром обмена ξ и коэффициентом вязкости η , и, следовательно, нет необходимости вводить для них другие обозначения.

^{2*} В упрощенной форме $s = \text{const}$, $\Pi = 0$, $\kappa = 0$, $\xi = 0$.

по z с изменяющейся вдоль канала величиной шага Δz . Координаты (α, λ) введены следующим образом:

$$z = z(\alpha); r = (1 - \lambda)r_1(\alpha) + \lambda r_2(\alpha); 0 \leq \alpha; \lambda \leq 1. \quad (1.56)$$

Здесь $z(\alpha)$ — монотонная функция от α . В простейшем случае равномерной по z сетки $z(\alpha) \equiv \alpha$. Функции $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$ описывают форму электродов в соответствии с (1.47). Если внутренний электрод короче внешнего (см. рис. 5), то полагаем $r_1(\alpha) = 0$ при $1 \leq z \leq z_1$. Обе функции достаточно произвольны и позволяют охватить разнообразные формы электродов. Требуется только их однозначность и отсутствие вертикальных касательных. В проведенных расчетах функции $z(\alpha)$, $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$ заданы в виде многочленов.

Координата λ осуществляет равномерное распределение расчетных точек вдоль радиуса: очевидно, что линии $\lambda = \text{const}$ получаются в результате линейной интерполяции между электродами.

Результаты решения задачи в координатах (1.56) приведены в работах [19—21] и в §§ 2.4—2.6 настоящей статьи.

3. Две предыдущих системы координат — эйлеровы, т. е. неподвижно привязанные к фиксированным точкам пространства. Следующая система — смешанного типа: эйлерова по направлению оси канала и лагранжева по радиусу. Потребность в таких координатах возникает тогда, когда в процессе течения в канале образуются зоны сильно неравномерного по радиусу распределения плотности плазмы: в этом случае желательно иметь сетку с относительно равномерным шагом по массе. Эйлерово-лагранжевы координаты применяются в вычислительных задачах двумерной газодинамики [26]. В рассматриваемом цикле работ их использовали при расчете задач о магнитоплазменном компрессоре (см. § 2.6 и работу [23]).

В качестве одной координаты сохраним* эйлерову координату z . Другую — лагранжеву — обозначим q и потребуем, чтобы координатная линия $q(t, z, r) = \text{const}$ перемещалась со временем только вместе с плазмой, т. е. чтобы нормальная к этой линии компонента скорости \mathbf{v} совпадала со скоростью движения самой линии в направлении своей нормали в каждой точке и в каждый момент времени. Нормируем q так, чтобы $q = 0$ соответствовала бы центральному электроду, а $q = 1$ — внешнему. Тогда областью изменения координат (z, q) будет прямоугольник $0 \leq z \leq z_1; 0 \leq q \leq 1$. Предъявленные выше требования, как нетрудно показать, сводятся к тому, что эйлерова координата $r(t, z, q)$ определяется из дополнительного уравнения**

$$(\partial r / \partial t) + u (\partial r / \partial z) = v, \quad (1.57)$$

* Можно заменить z на любую монотонную функцию α , как в предыдущем случае.

** Его, очевидно, нужно дополнить начальным распределением r и граничным условием при $z = 0$.

где $u = v_z$, $v = v_r$, а преобразование уравнений (1.33) к новым координатам осуществляется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \partial/\partial t &\rightarrow \partial/\partial t - (r_t/r_q)(\partial/\partial q); \\ \partial/\partial z &\rightarrow \partial/\partial z - (r_z/r_q)(\partial/\partial q); \\ \partial/\partial r &\rightarrow (1/r_q)(\partial/\partial q), \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

где r_t , r_z и r_q — частные производные r по t , z и q . Из (1.57) и (1.58), в частности, следует, что

$$d/dt \equiv \partial/\partial t + u (\partial/\partial z) + v (\partial/\partial r) \rightarrow \partial/\partial t + u (\partial/\partial z). \quad (1.59)$$

Такое упрощение оператора переноса (1.59) есть проявление лагранжевой природы новой координаты q .

Разностная схема. Приступая к численному решению задачи, заметим, что уравнения (1.33) двумерного течения плазмы поперек магнитного поля (1.10) близки по своей природе к уравнениям газодинамики: магнитное поле H и формально, и по существу играет роль некоторого добавочного давления. Поэтому при разработке методики численного интегрирования уравнений можно использовать большой вычислительный опыт, накопленный в подобных задачах газодинамики с теплопроводностью.

Ниже приводится схематическое описание методики расчетов, которая использована авторами в обсуждаемых здесь работах. В применении к упрощенному варианту уравнений она изложена в работе [15]. Разностная схема строится одинаково для всех указанных выше систем координат, и при ее описании обозначим временно пространственные координаты (x, y) . Чтобы изложить процесс аппроксимации дифференциальных уравнений (1.33) разностными, выделим из них три различных элемента и разберем каждый отдельно.

1. Основу системы уравнений (1.33) составляют уравнения (1.36) магнитной газодинамики идеальной среды. Перепишем их в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} dv/dt &= -(1/\rho) \nabla p + (1/\rho)[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]; \\ d\rho/dt &= -\rho \text{ div } \mathbf{v}; \\ dT/dt &= -(\gamma - 1) T \text{ div } \mathbf{v}; \\ dH/dt &= -\mathbf{H} [\text{div } \mathbf{v} - (v/r)]; \\ d/dt &= \partial/\partial t + a (\partial/\partial x) + b (\partial/\partial y), \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

где a и b выражаются с помощью z , r , u и v и являются проекциями скорости \mathbf{v} на направления, ортогональные координатным линиям (x, y) .

Введем расчетные точки двух типов, расположенные в шахматном порядке друг относительно друга (рис. 8). Искомые функции делятся на две группы. Значения функций первой группы u , v

(и, если нужно, z , r) вычисляются только в точках первого типа (кружочки), а функций второй группы ρ , T , H (следовательно, ρ и, если нужно, энтропия s) — в точках второго типа (крестики). Крестики смещены относительно кружочков также на полшага по времени. Поэтому припишем кружочкам целые индексы, а крестикам — полуцелые. Например, u_{lm}^n означает вычисленное значение u в точке с координатами $t = n\Delta t$, $x = l\Delta x$, $y = m\Delta y$, а $\rho_{l+1/2, m+1/2}^{n+1/2}$ — значение ρ в точке с координатами $t = (n + 1/2)\Delta t$, $x = (l + 1/2)\Delta x$, $y = (m + 1/2)\Delta y$.

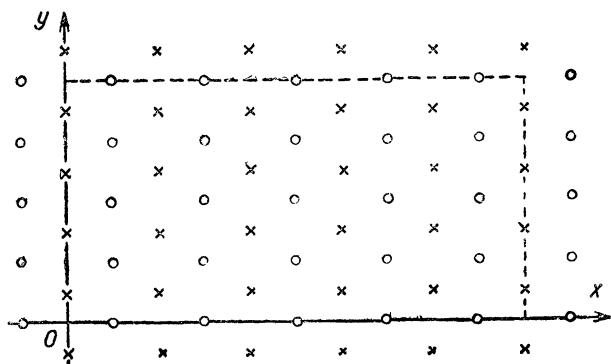


Рис. 8.

Оператор d/dt в левых частях всех уравнений (1.60) аппроксимируем разностным оператором

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} \sim & \frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^n}{\Delta t} + \frac{a + |a|}{2} \cdot \frac{u_{lm}^n - u_{l-1, m}^n}{\Delta x} + \frac{a - |a|}{2} \cdot \frac{u_{l+1, m}^n - u_{lm}^n}{\Delta x} + \\ & + \frac{b + |b|}{2} \cdot \frac{u_{lm}^n - u_{l, m-1}^n}{\Delta y} + \frac{b - |b|}{2} \cdot \frac{u_{l, m+1}^n - u_{lm}^n}{\Delta y}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где значения функций a , b взяты в точке (l, m, n) . Смысл формулы (1.61) состоит в том, что производные по x и y в операторе d/dt заменены односторонними разностями с той или другой стороны в зависимости от направления скорости. Так же аппроксимируем dv/dt и аналогично, только для полуцелых точек, $d\rho/dt$, dT/dt и dH/dt . В последнем случае в качестве a и b берут их средние значения по четырем ближайшим целым точкам. Правые части уравнений (1.60) содержат производные первого порядка по x и y только от функций противоположной* группы. Их аппроксимируем разностями с помощью четырех ближайших точек промежуточного

* Относительно левых частей уравнений.

слоя, например, производную, входящую в ∇p в первом уравнении,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{p_{l+1/2, m+1/2}^{n+1/2} + p_{l+1/2, m-1/2}^{n+1/2} - p_{l-1/2, m+1/2}^{n+1/2} - p_{l-1/2, m-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta x}, \quad (1.62)$$

а входящую в $\operatorname{div} \mathbf{v}$ в трех последних уравнениях

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_{l+1, m}^n + u_{l+1, m+1}^n - u_{lm}^n - u_{l, m+1}^n}{2\Delta x}. \quad (1.63)$$

Построенная для уравнений (1.60) разностная схема обобщает известную схему в задачах одномерной газодинамики [56].

2. Следующий элемент уравнений (1.33) — производные второго порядка по x и y в диссипативных слагаемых

$$\operatorname{Div} \Pi; \operatorname{div} (\kappa \nabla T); -\operatorname{rot} (\nu \operatorname{rot} \mathbf{H}). \quad (1.64)$$

Заметим, что сюда входят вторые производные только от той функции, которая дифференцируется по t в левой части уравнения, т. е. каждое уравнение, содержащее выражения (1.64), есть уравнение типа теплопроводности. Хорошо известно, что решение его с помощью простейшей явной разностной схемы требует весьма сильного ограничения на шаг по времени* Δt . Поэтому явную схему можно рекомендовать лишь при очень малых значениях соответствующего коэффициента диссипации: η , ζ , κ или ν . В противном случае вторые производные (1.64) лучше аппроксимировать неявными разностными выражениями.

В расчетах применен метод расщепления, подробно изложенный в книге Н. Н. Яненко [62]: при переходе от каждого слоя по времени к следующему делают две «прогонки» — горизонтальную и вертикальную, а смешанные вторые производные аппроксимируют явными разностными выражениями. Здесь же уточним, что в вязком случае уравнения для каждой компоненты скорости \mathbf{v} содержат вторые производные от другой компоненты. Их также аппроксимируем явными выражениями.

В проведенных авторами расчетах использованы как явные схемы (см. § 2.3), так и неявные (см. § 2.4—2.6).

3. Третий элемент уравнений (1.33) — квадратические по первым производным слагаемые, обязанные диссипативным процессам

$$\sum_{\alpha, \beta} \Pi_{\alpha, \beta} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \nu (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2$$

и эффекту Холла (1.34) и (1.35). Они играют второстепенную роль в уравнениях, так как при наличии вязкости и конечной проводимости подчинены главным членам — производным второго поряд-

* $\Delta t \sim \min [(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$ [62].

ка, а при $\Pi = 0$, $\nu = 0$ отсутствуют*. Поэтому их можно аппроксимировать разностями достаточно произвольно. В рассматриваемом случае все указанные первые производные заменены центральными разностями с помощью ближайших точек: $\partial v_\alpha / \partial x_\beta$ — по четырем точкам аналогично (1.63), а производные ρ , T , H — по двум точкам, например,

$$\frac{\partial H}{\partial x} \sim \frac{1}{2\Delta x} (H_{l+3/2}^{n+1/2}, m+1/2 - H_{l-1/2}^{n+1/2}, m+1/2).$$

Их берем с уже известного слоя по времени, т. е. они составляют явную часть разностной схемы.

Граничные условия, перечисленные в конце § 1.2, без труда можно записать для разностных уравнений. Границы области удобно сделать состоящими внизу и вверху из целых точек, а слева и справа — из полужелых (см. рис. 8). Для удобства записи граничных условий слева, внизу и вверху дополнительно введены фиктивные точки, выходящие на полшага за пределы области. Тогда граничные условия, записанные в конечной форме, легко перенести в нужные точки границы, а входящие в них производные заменить разностными отношениями.

Несколько слов о выборе шагов расчетной сетки. Шаги Δx , Δy по пространству выбирают фиксированными для каждого варианта расчетов в соответствии с уровнем точности, требуемой в данном варианте. Один из критериев точности полученного результата — это его совпадение в заданных пределах точности с результатом расчетов с более мелкими шагами.

Шаг Δt по времени определяется требованием устойчивости разностной схемы. Если уравнения содержат диссипативные члены (1.64) и решение ведется по неявным схемам, то устойчивость имеет место при любых значениях Δt [62]. В противном случае задача решается в терминах уравнений (1.60) по явной схеме, для устойчивости которой необходимо выполнение условия Куранта

$$\max_{(z, r)} (|\mathbf{v}| + C_m) \Delta t \leq \min(\Delta z, \Delta r), \quad (1.65)$$

которое обобщает известное условие в одномерных задачах газодинамики [56].

Однако некоторые варианты задачи могут учитывать не все диссипативные эффекты или иметь дело с малыми значениями коэффициентов диссипации. Поэтому желательно, чтобы схема оставалась устойчивой в любом случае и, следовательно, условие (1.65) применено во всех расчетах. Оно и является правилом для выбора шага Δt на каждом расчетном слое по времени.

* В § 2.5 показано, что при $\nu = 0$ учет эффекта Холла, вообще говоря, встречает принципиальные трудности.

ТЕЧЕНИЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

§ 2.1. Установление стационарного режима
и устойчивость течения

Предложенный выше способ расчета позволяет наблюдать эволюцию течения, начиная от того или иного начального состояния. При этом в зависимости от выбранной модели в расчетах наблюдаются три разных случая:

1) течение становится стационарным («устанавливается») спустя некоторое время $\tau_{уст}$, так что при $t \gg \tau_{уст}$ зависимость функций от времени практически исчезает. Это всегда имеет место в случае течения хорошо проводящей плазмы ($Re_m \gg 1$) без учета эффекта Холла ($\xi = 0$);

2) течение не устанавливается: характеризующие его функции непрерывно изменяются со временем неким квазипериодическим образом. Такого рода «пульсирующие» течения наблюдаются при малой проводимости плазмы ($Re_m \ll 1$) на входе в канал без эффекта Холла (см. подробнее гл. 3);

3) решение задачи о течении «не существует». Это значит, что спустя некоторое время решение неограниченно растет в окрестности какой-то точки потока. Такое явление наблюдается в двумерных течениях с учетом эффекта Холла, если при заданной проводимости плазмы параметр обмена ξ достаточно велик. В частности, при идеальной проводимости течения с эффектом Холла всегда «не существуют»: в конце § 2.5 показано, что в этом случае уравнения магнитной газодинамики неустойчивы по отношению к как угодно быстро растущим возмущениям, т. е. неэволюционны*. Физически это означает, что здесь принципиально необходимо учитывать инерцию электронов и, возможно, кинетические эффекты. Можно думать, что наблюдаемое в расчетах «несуществование» решений связано с образованием в течении прианодных привязок (см. § 1.1 и 2.5).

Рассмотрим подробнее устанавливающиеся течения. Они выходят на стационарный режим за время $\tau_{уст}$ порядка пролетного времени системы $\tau_0 = L/v$, где L — длина канала, а v — характерная скорость установившегося потока^{2*}. Точная формулировка этого факта следующая. Решение нестационарной задачи при достаточно произвольных начальных условиях приходит за время $\tau_{уст}$ в состояние так называемого квазиустановления, после которого (при $t > \tau_{уст}$) функции, описывающие течение, меняются лишь незначительно, в пределах нескольких процентов. Окончательное установление со всеми участвующими в расчете значащими цифрами происходит позже, а время, требуемое для него, зависит от конкрет-

* Рассматриваемая для них задача Коши некорректна.

^{2*} При выбранных в § 1.2 единицах измерения $\tau_0 \approx 1$.

ного варианта задачи и меняется в широких пределах. Зависимость процесса полного установления от параметров течения указана ниже.

Установление или неустановление течения в расчетах имеет прямое отношение к очень серьезной и трудной проблеме устойчивости течения плазмы в каналах. Заметим, что задача об устойчивости, т. е. о поведении со временем различных возмущений, по существу трехмерна, независимо от наличия симметрии в основном течении. Однако ее упрощенные двумерные и одномерные варианты, доступные нашим расчетам, представляют определенный интерес в связи с тем, что двумерные возмущения, вытянутые вдоль силовых линий магнитного поля, как правило, наиболее опасны с точки зрения устойчивости. Это магнитогидродинамический аналог теоремы Сквайра [5,55]. Указанное обстоятельство резко повышает ценность расчетов нестационарных двумерных течений как средства выявления неустойчивостей потока.

Наиболее распространенный метод исследования устойчивости — метод линейных возмущений*. Задача сводится к решению линеаризованных уравнений для малых возмущений или по крайней мере к оценке поведения их решений со временем. Этот метод дает результаты в некоторых относительно простых задачах. В частности, представляют интерес возмущения в виде плоских волн с длиной волны $l \rightarrow 0$. В этом случае задача сводится к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Одна из таких задач решена в § 2.5. Устойчивость течения хорошо проводящей плазмы в каналах относительно одномерных (продольных) мелкомасштабных колебаний доказана в работе [4].

При исследовании устойчивости стационарного течения коэффициенты линеаризованных уравнений не зависят от времени. В этом случае поведение решения со временем определяется множителем вида $e^{\lambda t}$, где показатель λ находится в результате решения задачи на собственные значения^{2*}. При анализе равновесных плазменных конфигураций ($\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{v} = 0$) широко используется вариационный (энергетический) принцип, который позволяет не искать отдельные собственные значения, а сразу получить критерии устойчивости в терминах положительности потенциальной энергии малых колебаний [33, 58].

Исследование устойчивости течения численными методами последнее время часто применяется в гидродинамике. Многочисленные работы, подытоженные в монографии [11], показывают их эффективность. Этому же следует ожидать и при изучении течений плазмы. И хотя излагаемые ниже работы проводились с целью изучить общую картину течения, а не специально исследовать устойчивость, полученные результаты способствуют такому исследованию.

* Обоснование применимости метода линеаризации дано в работе [61].

^{2*} В работе [14] обосновано применение этого метода к задачам об устойчивости независимо от полноты собственных функций.

Установление стационарного режима в расчетах означает, что в соответствующих задачах двумерное стационарное течение плазмы в канале устойчиво относительно двумерных возмущений конечной или низкой частоты. Расчеты не обнаружили колебаний, препятствующих установлению течения, длина волны которых была бы соизмерима с шагом расчетной сетки или превышала бы его. В то же время установление течения ничего не говорит о мелкомасштабных колебаниях, так как, если бы они и имелись, они могли бы быть погашены стабилизирующими диссипативными свойствами самого вычислительного процесса.

Таким образом, численные методы, хотя и не являются универсальным способом исследования устойчивости течения плазмы, приводят в определенном классе задач к определенным результатам об устойчивости, в том числе и количественным (см. рис. 20 в § 2.5).

§ 2.2. Квазиодномерное течение

Некоторые свойства течения плазмы в канале — интегральные характеристики и простейшие закономерности — удается выяснить в результате решения задачи в одномерной постановке. Существует два типа одномерных стационарных задач о течении.

Первый тип — ламинарное течение вязкой проводящей жидкости в бесконечно длинном канале постоянного сечения. Функции, характеризующие течение, зависят только от одной координаты в поперечном направлении. Задача описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, интегрируя которые, можно получить известные решения задач Пуазейля, Куэтта, Гартмана и др. для несжимаемой среды (см. например, книги [5, 24, 57]).

Другой тип задач предполагает усреднение характеристик течения по поперечному сечению. В результате исчезает зависимость функций от координат в поперечных направлениях, и единственная нетривиальная пространственная координата направлена вдоль канала. Обычно такая ситуация связана с тонким каналом конечной длины и разумно отражает реальную картину течения в том случае, когда в основной части канала поперечные градиенты параметров очень малы, а вкладом от скачков параметров вблизи стенок можно пренебречь. В газодинамике широко используют приближение узкого канала, например, при грубом расчете сопел, так как толщина пограничного слоя в них мала. Применение этой модели в случае течений плазмы менее удачно (см. § 1.1*).

Задачи второго типа обычно имеют дело с каналами переменного сечения. Течение описывается уравнениями (1.37). Стационарная квазиодномерная задача сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые в бездиссипативном случае содержат

* О применимости одномерного приближения см. также работу [42].

особенности в точках, где скорость течения равна скорости магнитного звука. Различные случаи течения в зависимости от соотношения между скоростями плазмы и звука качественно исследованы многими авторами и представляют собой магнитогазодинамическое обобщение теории сопла Лавала [5, 24, 34, 39, 57]. Известно решение некоторых задач о квазиодномерном течении, в которых часть функций предполагается заданной. Примером может служить задача об индукции токов при известном течении проводящей жидкости в заданном магнитном поле [39, 57]. Некоторые вопросы

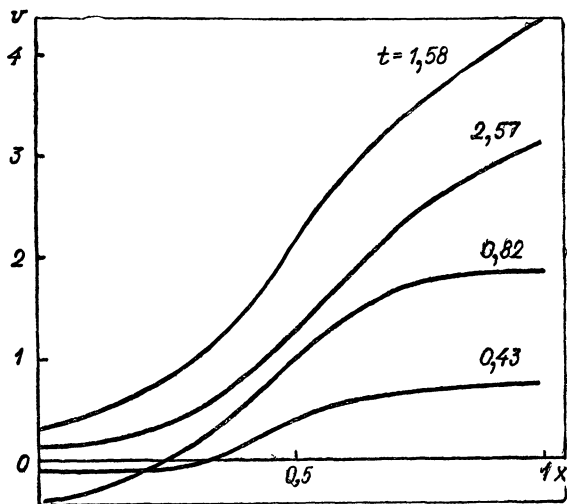


Рис. 9.

удачно решаются при дополнительных упрощающих предположениях. Укажем, например, на цикл работ Г. М. Бам-Зеликовича [6]. В них автор пренебрегает силами давления по сравнению с электромагнитными силами и предполагает проводимость постоянной, достаточно малой величиной. В результате удается расщепить систему уравнений на более простые и рассчитать течение.

В общем случае задача (стационарная и нестационарная) требует численного решения. Такое решение — первое в рассматриваемой серии работ — изложено в заметке [17] для течения невязкой нетеплопроводной плазмы конечной проводимости в канале типа сопла (см. рис. 2)

$$f(x) = 0,3 - 0,8x(1 - x); \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (2.1)$$

В результате расчета прослежен процесс установления и изучена зависимость свойств установившегося стационарного течения от определяющих его безразмерных параметров: β и коэффициентов σ_1 , σ_2 в формуле (1.46) для проводимости. Расчеты показали, что

при всех $Re_m > 0,1$ течение устанавливается за время порядка пролетного. На рис. 9 видно, как это происходит на примере эволюции распределения скорости. Последняя по времени кривая ($t = 2,57$) соответствует практически стационарному режиму течения.

Стационарные решения обладают следующими свойствами. Течение происходит с дозвуковой скоростью на входе и с сверхзвуковой на выходе: переход через скорость магнитного звука осуществляется вблизи минимального сечения канала. Скорость и

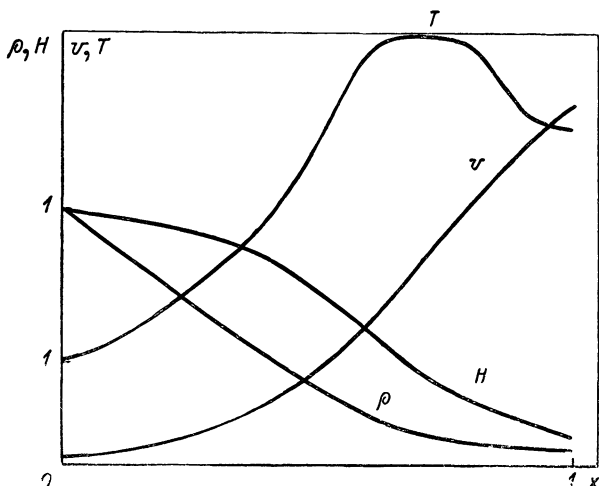


Рис. 10.

энтропия монотонно возрастают, плотность и магнитное поле убывают вдоль канала. На рис. 10 приведены для примера графики этих функций, соответствующие значениям $\beta = 0,84$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$. Зависимость скорости v на выходе из канала от проводимости при $\beta = 0,84$ показана на рис. 11. Кривая на рис. 11, а изображает зависимость скорости от постоянной проводимости $Re_m = \sigma_1$ ($\sigma_2 = 0$). На рис. 11, б проводимость переменная [см. формулу (1.46)] с равными друг другу коэффициентами $\sigma_1 = \sigma_2$, значения которых отложены на оси абсцисс. Как видно из рисунка, при уменьшении проводимости Re_m скорость течения на выходе из сопла возрастает: это объясняется тем, что уменьшение Re_m при заданном разрядном токе увеличивает нагрев плазмы. Скорость на выходе возрастает также при уменьшении β , т. е. при увеличении магнитного поля на входе и вклада энергии на единицу массы.

При достаточно больших значениях Re_m стационарное решение задачи быстро стремится к решению для случая бесконечно про-

дующей плазмы. Уравнения (1.37) при $\eta = \kappa = \nu = 0$, $\partial/\partial t = 0$ легко интегрируются и сводятся к алгебраическим

$$\begin{aligned} \rho v f &= \text{const}; \quad v^2/2 + \gamma p/(\gamma - 1)\rho + H^2/\rho = \text{const}; \\ H/\rho &= \text{const}; \quad s = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

которые представляют собой безразмерную форму уравнений (1.2).

Одномерный расчет преследовал еще одну цель — экспериментально подобрать граничное условие для магнитного поля на правом конце канала (см. § 1.2). Для этого канал удлиняли при $x > 1$ трубами разной длины и разных сечений: постоянного ($f = \text{const}$)

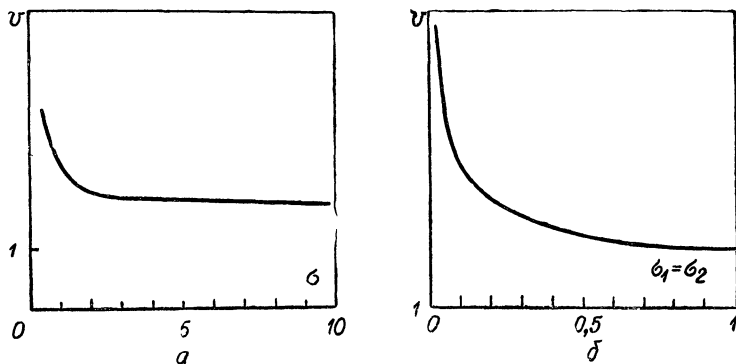


Рис. 11.

и линейно возрастающего ($f = ax + b$). Оказалось, что в основной части канала ($0 \leq x \leq 1$) течение очень мало зависит от формы трубы, а магнитное поле с хорошей точностью удовлетворяет условию $\partial Hf/\partial x = 0$ при $x = 1$. В результате этого исследования граничное условие (1.54) использовалось при расчетах двумерных задач.

Процесс установления течения в узком канале можно охарактеризовать так. Квазистационарное состояние, как указано выше, наступает за пролетное время, а установление в точном смысле слова сильно зависит от проводимости. При хорошей проводимости процесс устанавливается быстро, а при уменьшении Re_m замедляется: появляются мелкие колебания, соизмеримые по масштабу с шагом расчетной сетки. При достаточно малых Re_m (в рассмотренном случае при $Re_m < 0,1$) течение вообще не устанавливается: в расчетах появляются резкие колебания температуры. Таким образом, при плохой проводимости течение теряет устойчивость. Одной из причин этого явления может быть граничное условие на правом конце, к которому нужно относиться с большей осторожностью при малых Re_m . Это подтверждается также тем, что процесс окончательного установления несколько зависит от трубы,

приставленной справа к каналу: чем шире ее раствор, тем быстрее течение устанавливается.

Заметим, что при $Re_m = 0$ магнитное поле становится постоянным, электрический ток исчезает, а уравнения (1.37) превращаются в уравнения газовой динамики (см. § 3.1). Указанная выше неустойчивость не позволяет, таким образом, осуществить в расчетах предельный переход к этому случаю.

§ 2.3. Двумерные течения идеальной плазмы

В случае двумерных течений аналитические методы еще менее эффективны, чем в одномерном случае. Они в лучшем случае дают решение в виде рядов по какому-либо малому параметру, например $Re_m \ll 1$. Некоторые частные решения двумерных задач можно получить в предположении, что часть величин, описывающих течение, задана. Такого рода методы и примеры решения разных магнитогазодинамических задач изложены в монографиях [5, 24, 34, 39, 57]. Важный параметр малости во многих случаях — это отношение масштабов неоднородности поперек течения и вдоль него $\delta = (l_{\perp}/l_{\parallel}) \ll 1$. Разлагая функции ρ , v и т. д. в ряды по степеням δ , можно проанализировать ряд свойств течения (метод канала с медленно меняющимся сечением). Таким способом изучались качественная картина распределения плотности, скорости и электрического тока в коаксиальном канале [49], влияние эффекта Холла на течение [50] и сделаны некоторые оценки сжатия плазмы на оси магнитоплазменного компрессора [43] (см. также [52]).

Квазиодномерное рассмотрение задачи о течении плазмы в канале (см. § 1.1 и 2.1) позволяет сделать вывод о том, что для ускорения плазмы канал должен иметь форму сопла, и получить оценку скорости на выходе в идеальном случае. Этого недостаточно для систем, в которых расстояние между электродами соизмеримо с длиной канала, где разброс магнитного поля по радиусу порождает интересные особенности течения. Важно знать также, как влияют на двумерное течение эффекты, отличающие плазму от идеальной.

Первый расчет двумерного течения плазмы в коаксиальном канале был проведен авторами совместно с Н. И. Герлах в 1962 г. и его результаты опубликованы в заметке [18]. Основная цель этой работы — почувствовать роль геометрии канала и связанные с ней двумерные детали течения. Задача рассматривается в простейшей постановке: изэнтропическое течение однокомпонентной бездиссипативной* плазмы. Здесь изучается зависимость течения от формы канала и от единственного безразмерного параметра β .

Результаты двух вариантов расчетов, в которых обнаруживаются принципиально двумерные эффекты, приведены на рис. 12 и 13, где изображены форма канала (a) (сплошные стрелки означа-

* Точнее говоря, проводимость считают постоянной и достаточно большой ($Re_m \gg 1$).

ют линии электрического тока $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$, а пунктиром обозначены координатные линии); графики плотности ρ (б) и скорости v_r (в) вдоль координатных линий в установившемся течении. Здесь v_r — проекция скорости на координатные линии. Ее графики полностью характеризуют течение, так как перпендикулярная ей компонента скорости очень мала, и координатные линии почти совпадают с траекториями частиц плазмы.

Цифры у кривых означают «номер» координатной линии на рисунках, а. Значения β на рис. 12 и 13 равны 1,84 и 0,034 соответственно.

Результаты расчета серии такого типа вариантов привели к следующим выводам.

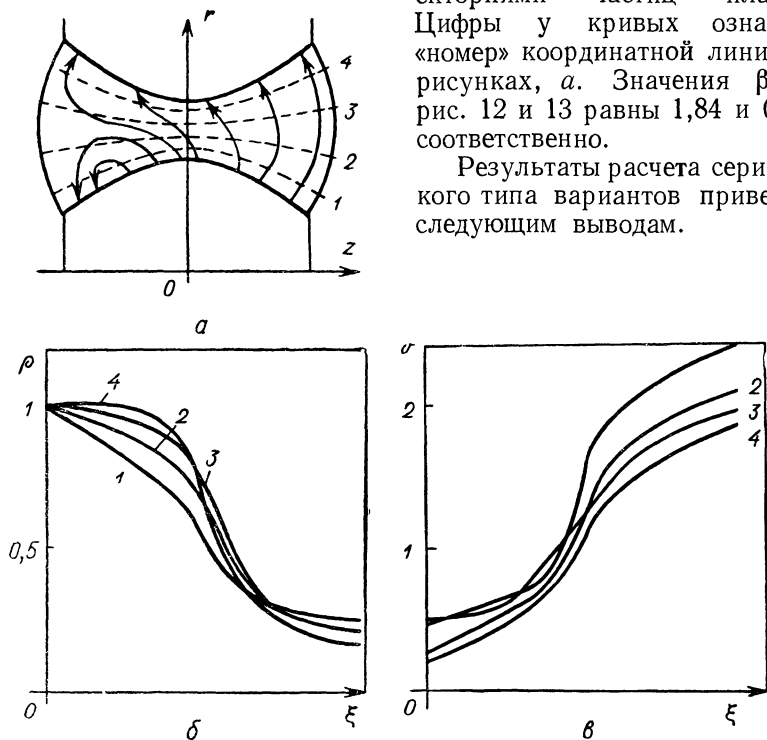


Рис. 12.

1. Течение устойчиво выходит на стационарный или близкий к нему квазистационарный режим за пролетное время.

2. Зависимость магнитного поля от радиуса приводит к тому, что скорость зависит от радиуса, в частности, на выходе из канала скорость непостоянна. Величина скорости v_r , а также характер ее зависимости от r на выходе, вообще говоря, меняются с изменением β . Если β велико, то течение носит газодинамический характер и близко к одномерному: в этом случае зависимость $v(r)$ очень слабая. Уменьшение β , т. е. увеличение роли магнитного поля в задаче, увеличивает разброс скоростей на выходе. При достаточно сильных магнитных полях ($\beta < 0,3$) качественная картина распределения скоростей на выходе практически перестает зависеть

от β . Наконец, при всех значениях β зависимость выходных скоростей от r оказывается слабее, чем $1/r$, т. е. чем заданная на входе зависимость $H(r)$.

Заметим, что в вопросах, связанных с плазменными ускорителями, знание зависимости $v(r)$ на выходе из канала весьма существ-

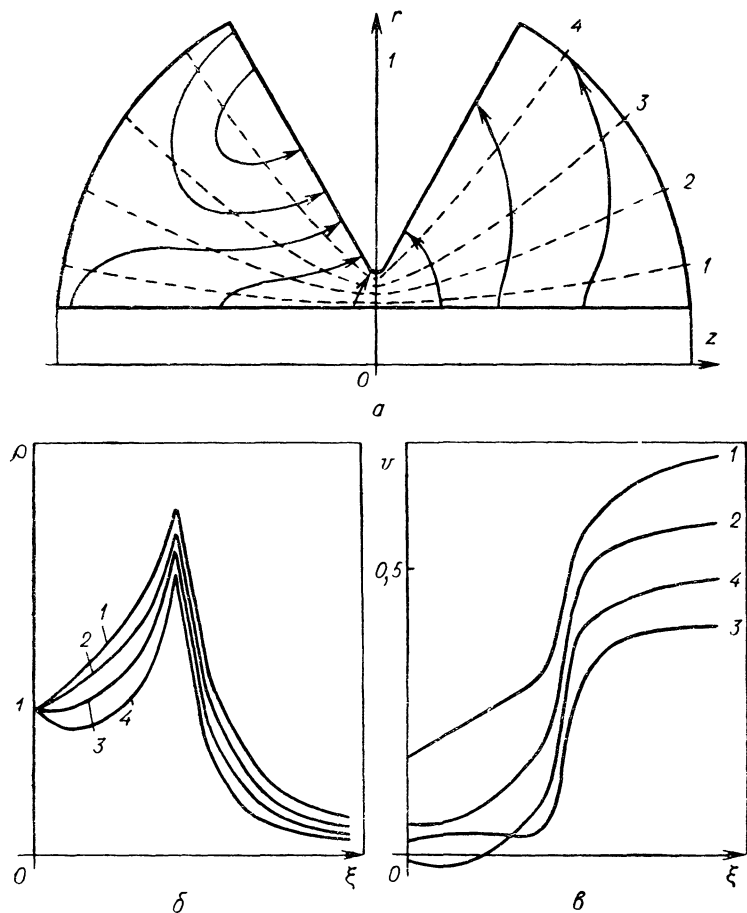


Рис. 13.

венно, так как разброс скоростей по радиусу снижает энергетические показатели ускорителя. В некоторых вариантах расчета предприняты попытки улучшить (т. е. сделать более постоянным) распределение $v(r)$ на выходе с помощью неравномерной подачи плотности ρ на входе в канал. Оказалось, что в случае линейно возрастающей $\rho(r)$ на входе скорость на выходе более равномерна, однако при этом в части канала она направлена вертикально или даже в обратную сторону. Кроме того, наблюдается появление

сильных вихрей электрического тока (см. ниже), что снижает качество ускорителя.

3. В газодинамических соплах разгон газа происходит в результате падения давления вдоль канала и поэтому (в адиабатическом течении) плотность монотонно убывает по оси z . Расчеты показали, что в случае течения плазмы в достаточно сильном магнитном поле в канале круто меняющегося профиля (см. рис. 13) плотность не всегда монотонна вдоль траектории потока (при монотонном изменении скорости), т. е. во входном участке канала наблюдается сжатие плазмы: рост ρ при увеличении z . Это объясняется тем, что согласно уравнению Эйлера (1.26), которое можно написать в виде

$$\rho (dv/dt) = -\nabla[p + H^2/2] + (\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{H},$$

на плазму наряду с градиентом суммарного давления действует сила $(\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{H}$, обязанная «стремлению» силовой линии сжаться. В связи с обнаруженным в расчетах явлением сжатия плазмы его исследование проведено в рамках приближения узкого канала [49, 52] и указаны условия, при которых сжатие имеет место.

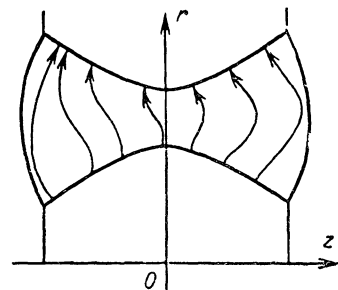


Рис. 14.

Например, при линейном возрастании скорости внутри узкой трубки постоянного сечения, искривленной по закону $r = r_0(1 - z^2)^\alpha$, плотность ρ и магнитное поле H возрастают слева направо, если $\alpha > 1$. Магнитное поле при этом предполагается сильным, т. е. $\beta \ll 1$.

Эффект немонотонного изменения плотности плазмы при ее течении в канале привел в дальнейшем к созданию теории компрессионных течений (см. § 2.6).

4. В расчетах некоторых вариантов течения были обнаружены вихри электрического тока \mathbf{j} (см. рис. 12 и 13, линии тока \mathbf{j} обозначены сплошными стрелками). Вихри расположены в дозвуковой части течения вблизи электродов: это значит, что на некоторых участках электродов наблюдаются токи обратного направления. Распределение токов на электродах оказывается сильно неравномерным. Влияние вихрей на течение проявляется в том, что обратные токи в плазме порождают силу, направленную против потока.

Расчеты показали, что вихри тока возникают лишь при сильно искривленных формах канала и при слабых магнитных полях. При возрастании поля (уменьшении β) в одном и том же канале вихри уменьшаются и в конце концов исчезают. Линии тока на рис. 14 соответствуют значению $\beta = 0,0754$.

Обнаруженные в расчетах токовые вихри также были исследованы позже в приближении узкого канала [2, 49, 52]. Оказывается, что возникновение вихрей связано с преобразованием тепловой

энергии в магнитную и поэтому может наблюдаться лишь при больших значениях β .

Наконец, как немонотонное изменение плотности, так и вихри тока были впоследствии обнаружены экспериментально в согласии с теми представлениями, которые сложились в результате указанных выше расчетов.

Таким образом, уже первые простейшие расчеты позволили обнаружить несколько принципиально двумерных эффектов, которые стимулировали дальнейшее развитие теории и эксперимента.

§ 2.4. Влияние конечной проводимости на течение

В последующих расчетах вводились различные усложнения задачи. В этом параграфе рассмотрена роль конечной проводимости плазмы. При этом задача остается еще сильно упрощенной: уравнение энергии заменено условием изотермичности ($T = \text{const}$), вследствие чего проводимость считается постоянной ($Re_m = \text{const}$), а вязкость, теплопроводность и эффект Холла по-прежнему не рассматриваются. Таким образом, течение характеризуется двумя безразмерными параметрами β и $\nu = 1/Re_m$ и геометрией канала.

Расчеты показали, что решение выходит на квазистационарный режим за пролетное время. Окончательное установление зависит от обоих параметров и происходит тем быстрее, чем больше β (магнитное поле слабее) и чем меньше ν (проводимость выше). При уменьшении β и Re_m процесс полного установления замедляется аналогично тому, как это происходит в квазиодномерной модели задачи (см. § 2.2).

Стационарное двумерное течение характеризуется следующими свойствами.

1. В случае слабого магнитного поля ($\beta \sim 10$) газовое давление преобладает над магнитным. Течение носит газодинамический характер, и его параметры, за исключением магнитного поля H , почти не меняются при изменении проводимости в широком диапазоне ее значений. Зависимость газодинамических величин от радиуса r крайне незначительна, т. е. течение почти одномерно. Таким образом, при больших значениях β проводимость плазмы можно не учитывать, если не интересоваться поведением магнитного поля и электрического тока.

2. С ростом магнитного поля (уменьшением β) двумерный характер течения проявляется более заметно: усиливается зависимость всех величин от радиуса r . Немонотонность плотности в сужающейся части канала, замеченная в § 2.3 в идеальной плазме, в случае конечной проводимости выражена сильнее: теперь ее можно наблюдать даже в канале более плавной формы. На рис. 15 показаны линии уровня плотности в канале при $\beta = 0,0754$ и трех разных значениях проводимости. Из рисунка следует, что при заданной геометрии канала и $\nu = 0,001$ явление сжатия почти отсутствует. Оно становится заметным при возрастании ν . Наиболее

резко выраженный максимум плотности соответствует значению $\nu = 1$ и расположен посредине между электродами. В приэлектродных слоях плотность убывает монотонно. При дальнейшем возрастании электрического сопротивления ν плотность становится всюду монотонно убывающей. Она сильно зависит от радиуса и вдали от электродов заметно выше, чем около них. Это объясняется тем,

что плотность тока в канале перпендикулярна к электродам и поэтому вблизи электродов вещество ускоряется по касательной к ним, т. е. по направлению к середине зазора. При $\nu \rightarrow \infty$ вклад электромагнитных сил мал, а при $\nu \rightarrow 0$ сжимается не только плазма, но и поле, и это меняет картину.

3. Влияние проводимости сказывается и на поведении скорости течения, в частности, на характере распределения скорости на выходе из канала. Тот

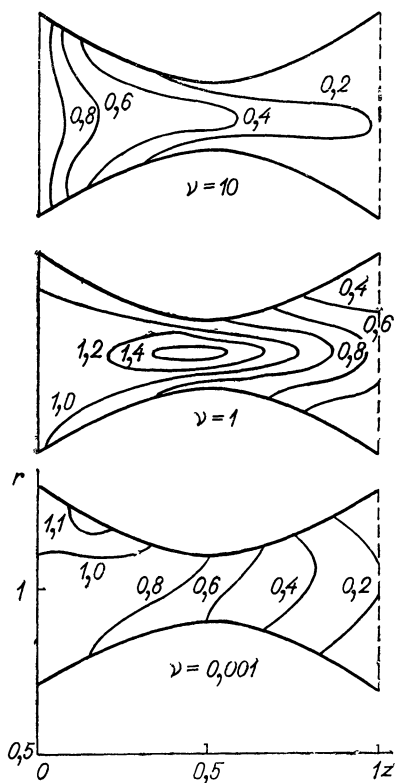


Рис. 15.

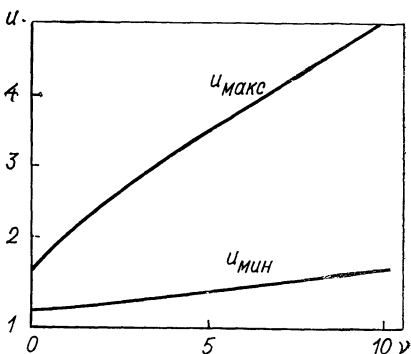


Рис. 16.

факт, что величина выходной скорости растет с увеличением ν (убыванием проводимости), установлен еще в квазиодномерной модели (см. § 2.2). Двумерный анализ течения показывает, кроме этого, что так же, как и в случае идеальной проводимости, скорость на выходе при всех значениях ν монотонно убывает вдоль радиуса, т. е. она максимальна на внутреннем электроде и минимальна около внешнего. С возрастанием ν поток, ускоряясь, становится более неравномерным: скорость центральных струй растет быстрее скорости на периферии канала. Это видно на рис. 16, где приведены зависимости скорости $u = v_z$ на выходе из канала от электрического сопротивления ν . Верхняя кривая

соответствует наибольшей (центральной) скорости, нижняя — наименьшей (внешней). Форма канала — та же, что на рис. 15, $\beta = 0,0754$. Таким образом, при изменении ν от 0 до 10 отношение максимальной скорости к минимальной, характеризующее неравномерность течения на выходе, возрастает примерно от 1,5 до 3.

4. Распределение магнитного поля, а следовательно, и электрического тока в идеальной плазме характеризуется двумя крайними случаями: при сильных полях ($\beta \ll 1$) напряженность поля зависит от радиуса как $1/r$, т. е. ток между электродами течет в основном вертикально, а при слабых полях ($\beta \gg 1$) возрастает неравномерность распределения поля по r и наблюдается немотонность его зависимости от z , проявляющаяся в виде токовых вихрей.

Конечная проводимость сглаживает распределение магнитного поля. При возрастании сопротивления ν неравномерности становятся слабее, область, занимаемая вихрем тока, сокращается в размерах, вырождается в точку на электроде и совсем исчезает. На рис. 17 приведены линии электрического тока $Hr = \text{const}$ (с указанием значения Hr на каждой линии) при $\beta = 7,54$ и разных значениях сопротивления. В данном варианте геометрии исчезновение вихря происходит вблизи значения $\nu = 0,1$. При значениях ν , близких к единице и больше, зависимость поля от радиуса близка к $1/r$, и ток направлен перпендикулярно течению.

Из рис. 17 видно также, что при дальнейшем возрастании ν уменьшается глубина проникновения магнитного поля в канал: H быстрее падает вдоль оси z и линии $Hr = \text{const}$ при $\nu = 10$ группируются ближе к середине канала*, чем при $\nu = 1$.

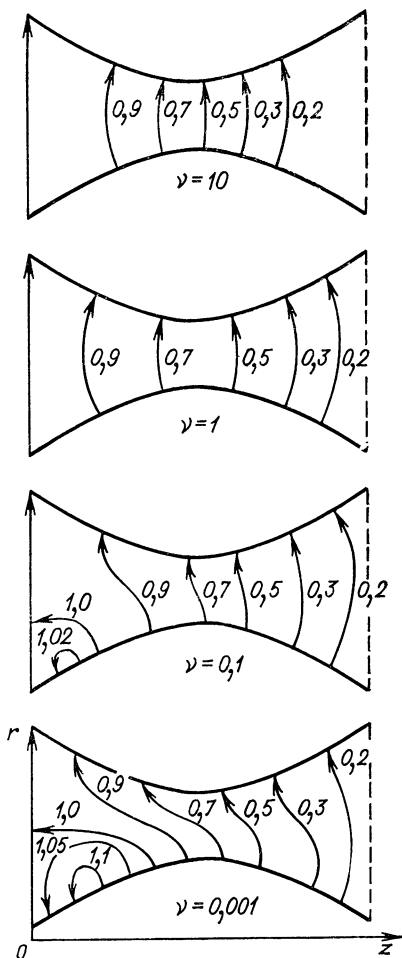


Рис. 17.

* Это связано с тем, что при $\nu \rightarrow \infty$ $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, т. е. плотность тока максимальна в критическом сечении канала, так как $\sigma = \text{const}$, и разность потенциалов между электродами постоянна.

В случае сильного магнитного поля (малые β) зависимость H от радиуса близка к $1/r$, и вихри тока отсутствуют при всех рассмотренных значениях проводимости. Влияние последней сказывается только на глубине проникновения поля в канал: эта глубина тем больше, чем выше проводимость. Результаты, изложенные в данном параграфе, опубликованы в работе [20].

§ 2.5. Течения с учетом эффекта Холла

Параметр обмена. Предварительные соображения. Течение плазмы, учитывающее эффект Холла, описывается уравнениями (1.33). Мерой эффекта Холла в таком описании является параметр обмена ξ (1.20). Он характеризует отношение третьего слагаемого в правой части закона Ома (1.28) ко второму:

$$\xi \sim \xi[\mathbf{j}, \mathbf{H}]/\rho[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \sim |\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e|/v^i.$$

Последнее выражение следует из того, что согласно (1.18) $\xi \mathbf{j} = \rho(\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e)$, а также из ортогональности поля \mathbf{H} векторам \mathbf{v} и \mathbf{j} . Оно означает, что параметр обмена является также мерой угла между электронными и ионными траекториями.

Кроме того, параметр ξ можно трактовать как отношение $\xi \sim I_p/I_m$ разрядного тока I_p , протекающего через систему, к массовому расходу в токовых единицах $I_m = em/m^i$ [51].

Укажем связь параметра обмена с другими безразмерными параметрами, также оценивающими эффект Холла: параметром Холла $\chi = \omega^e \tau^e$ и «погонным ионом» Π [13, 51]. Из формул (1.38)–(1.40) следует, что $\chi/\alpha_0(\chi) = \xi \operatorname{Re}_m H/\rho$, т. е. по порядку величины $\chi \approx \xi \cdot \operatorname{Re}_m$, и $\Pi = 4\pi e^2 n L^2/m^i c^2 = \rho \xi^2$, где левое выражение Π состоит из размерных величин, а правое — из безразмерных. Сравнивая погонный ион Π с параметром обмена ξ , отмечаем, что первый, по-видимому, удобнее использовать при анализе равновесных конфигураций, а второй — при анализе течений, так как он легко измеряется по интегральным характеристикам.

Знак параметра ξ позволяет задавать полярность электродов. Действительно, согласно формальному определению (1.20) $\xi \geq 0$. Изменение полярности электродов означает изменение знака магнитного поля H . Однако легко видеть, что уравнения (1.33) не меняются при одновременной смене знаков H и ξ . Это значит, что полярность $H \leq 0$ при $\xi \geq 0$ формально можно заменить более удобными в расчетах $H \geq 0$, $\xi \leq 0$. Таким образом, ниже всегда предполагается $H \geq 0$, а центральный электрод при $\xi > 0$ является анодом, а при $\xi < 0$ — катодом*. Если $\xi = 0$, то уравнения (1.33) инвариантны относительно изменения знака H и полярности

* Смена знака ξ означала бы согласно определению (1.20) смену знака элементарного заряда e , что опять можно трактовать как изменение полярности электродов.

электродов, о чем уже говорилось в § 1.1. Общие соображения и экспериментальные данные, касающиеся роли эффекта Холла в течении плазмы в ускорителях, изложены там же.

Некоторые свойства стационарных течений, связанных с влиянием эффекта Холла, установлены в работах А. И. Морозова, Л. С. Соловьева и А. П. Шубина [50—53]. Это в первую очередь «вмороженность» магнитного поля в электронную компоненту плазмы и образование прианодного скачка потенциала. Последнее связано с тем, что в стационарном случае потенциал электрического поля постояен вдоль электронных траекторий и, следовательно, при больших значениях параметра ξ (угла между траекториями) потенциал катода распространяется электронами практически на весь объем канала.

Предсказать свойства нестационарных течений сложнее, особенно, если принять во внимание конечную проводимость и другие отличия плазмы от идеальной. Следует отметить, что задача с эффектом Холла существенно двумерна, т. е. не имеет содержательных одномерных аналогов. Дальнейшее ее исследование проводится численно, ибо, по мнению авторов, только таким путем можно избежать лишних упрощений.

Расчеты течения с эффектом Холла. Расчет двумерного течения плазмы в канале с учетом эффекта Холла проведен впервые в 1966 г., и его результаты опубликованы в работах [19, 46]. Он основан на решении уравнений (1.33) в простейших предположениях: плазма считается невязкой ($\Pi = 0$) и нетеплопроводной ($\kappa = 0$), течение предполагается изотермическим, что согласуется с экспериментально установленным фактом постоянства электронной температуры (см. § 1.1). Проводимость постоянна в силу изотермичности. Таким образом, задача содержит три безразмерных параметра β , ξ , ν , зависимость течения от которых установлена с помощью расчетов. Основной результат численного решения задачи состоит в том, что расчет течения удается довести до установления стационарного режима не при всех значениях параметра обмена ξ , а лишь в том случае, когда они принадлежат некоторому интервалу

$$\xi_- (\beta, \nu) < \xi < \xi_+ (\beta, \nu), \quad (2.3)$$

где $\xi_- < 0$, $\xi_+ > 0$. Это значит, что при каждой полярности электродов существует критическое значение параметра ξ (ξ_+ , если центральный электрод — анод, и $|\xi_-|$ в противоположном случае), зависящее от β и ν , за пределами которого течение не устанавливается. Более того, при значениях ξ вне интервала (2.3) решение задачи не существует в указанном выше смысле (см. § 2.1). Расчет нестационарного течения прекращается в какой-то момент времени из-за потери устойчивости течения: резко возрастает магнитное поле и плотность тока в окрестности некоторой точки анода. В этих зонах падает плотность и возрастает скорость частиц, направленная во все стороны от особой точки течения. На рис. 18 приведены гра-

фики функций ρ , H , v_z и v_r от z вблизи центрального электрода (анода) в момент времени $t = 1,54$, незадолго до прекращения счета. Результат относится к каналу, изображенному на рис. 17, и следующим значениям параметров: $\beta = 7,54$; $\nu = 1$; $\xi = 0,5$. При удалении от анода картина течения сглаживается. На рис. 19 приведены зависимости тех же величин вблизи катода.

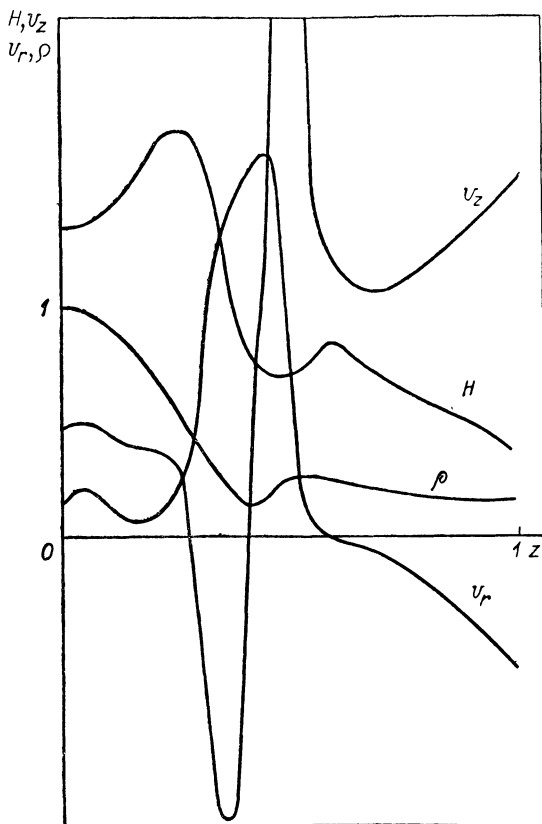


Рис. 18.

Таким образом, вблизи анода наблюдается своеобразный «взрыв», играющий роль генератора быстрых частиц. Эти явления всегда получаются в расчетах при разных геометриях канала, разных значениях параметров и разных полярностях электродов, но всегда на аноде. Анодные «взрывы», полученные здесь численно, возможно, имеют связь с некоторыми результатами экспериментов, указанными в § 1.1: речь идет о прианодной неустойчивости течения, так называемых «привязках» тока и сильной эрозии анода. Создается впечатление, что то же явление может привести к образованию быстрых частиц в рельсотронах и пушках Маршалла [60].

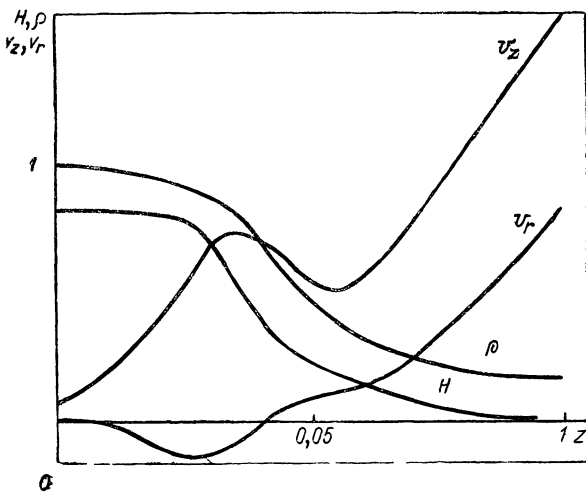


Рис. 19.

Критические значения ξ_+ и ξ_- получены в результате расчетов при разных значениях β и ν . На рис. 20 показана зависимость ξ_+ от ν при трех разных значениях β (геометрия канала — та же, что на рис. 17). Другое критическое значение $|\xi_- (\beta, \nu)|$ ведет себя таким же образом. Из кривых видно, что $\xi_+ (\beta, 0) = 0$, т. е. что нельзя рассчитать течение идеально проводящей плазмы с эффектом Холла. Наоборот, возрастание магнитной вязкости ν увеличивает зону допустимых значений ξ . Зависимость кривых от β показывает, что при более сильных магнитных полях (малые β) эффект Холла проявляется сильнее: критическое значение ξ_+ убывает вместе с β .

Определенные численно значения $\xi_+ (\beta, \nu)$ можно аппроксимировать следующей формулой:

$$\xi_+ \approx 0,3\beta^{1/4} \nu^{1/2}. \quad (2.4)$$

Отсюда, в частности, следует, что без потери ламинарности получить большие скорости истечения трудно. Действительно, скорость истечения* $v_{\text{макс}} = P/m$, где P — импульс, уносимый потоком за единицу времени, а m — расход рабочего вещества за единицу времени. Очевидно, $P = aI^2$, поэтому

$$v_{\text{макс}} = b\xi I. \quad (2.5)$$

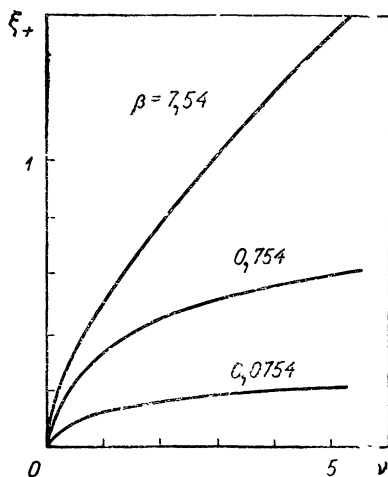


Рис. 20.

* Все величины, о которых здесь идет речь, размерные.

Здесь a и b — константы, зависящие от геометрии системы и вида рабочего тела. В предположении изотермичности ($T = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$)

$$\left. \begin{aligned} \beta &\sim 1/v_{\text{макс}}^2 \text{ (так как } v_{\text{макс}}^2 \sim H^2/\rho); \\ 1/\nu &= \text{Re}_m \sim v_{\text{макс}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) и (2.6) в формулу (2.5), получаем $v_{\text{макс}} \sim I/v_{\text{макс}}$, откуда следует

$$v_{\text{макс}} \sim I^{1/2}. \quad (2.7)$$

В настоящее время нет оснований утверждать, что последнее выражение подтверждено экспериментами, но оно во всяком случае не противоречит им, так как пока никому не удалось получить сильное возрастание скорости всей массы газа, а не отдельных быстрых частиц, при $\xi \sim 1$.

В случае, когда параметр обмена заключен в пределах (2.3), течение выходит на стационарный режим, и установление в существенной своей части происходит за пролетное время; расчеты не обнаруживают препятствующих ему колебаний. Рассмотрим теперь, как влияет эффект Холла на полученные в этих условиях стационарные режимы.

Общим свойством течений является их сильно выраженный двумерный характер. Все величины распределены по радиусу более неравномерно, чем в аналогичных задачах чистой магнитной газодинамики (см. § 2.3 и 2.4). Плотность плазмы ρ возрастает около катода и падает у анода по сравнению с течением при $\xi = 0$. В результате проявления эффекта Холла происходит отжатие плазмы к катоду, причем тем больше, чем сильнее магнитное поле, т. е. чем меньше β (при одних и тех же ξ и ν).

Особенно заметно эффект Холла влияет на неравномерность распределения магнитного поля. При увеличении ξ поле возрастает у анода и падает у катода. В результате искажается картина электрических токов в канале. В частности, в тех вариантах, где при $\xi = 0$ ток был направлен в основном перпендикулярно к течению, он отклоняется при $\xi \neq 0$ в сторону и скользит вдоль анода.

На рис. 21 приведено распределение токов в канале при $\beta = 7,54$; $\nu = 1$ и при трех разных значениях ξ : $\xi = 0$ (течение без эффекта Холла); $\xi = 1/3$ (центральный электрод — анод); $\xi = -1/3$ (т. е. центральный электрод — катод, а значение параметра обмена то же). При дальнейшем возрастании ξ и его приближении к критическому значению* картина токов еще более искажается: вблизи анода образуется токовый вихрь, который и приводит при критическом значении ξ к анодному взрыву.

Наконец, укажем на роль омического сопротивления ν в рассматриваемых задачах. Помимо указанного выше свойства расширять область допустимых значений ξ сопротивление вообще ослаб-

* В данном случае $\xi_+ \approx 0,5$ (см. рис. 20) и $\xi_- \approx -0,5$.

ляет влияние эффекта Холла в этой области. Если в расчете течения с фиксированными значениями β и ξ увеличить ν , то отмеченные выше неравномерности в распределении плотности и магнитного поля в стационарном режиме, обязанные эффекту Холла, становятся менее заметными: например, линии электрического тока (см. рис. 21, $\xi = \pm 1/3$) стремятся иметь более вертикальное направление.

Таким образом, серия расчетов позволила проанализировать зависимость течения от всех трех параметров. И хотя некоторые результаты можно было качественно предвидеть в приближенных теоретических рассмотрениях, например, отклонение тока или отжатие плазмы к катоду, ценность расчетов состоит в том, что в каждом конкретном случае они давали картину течения в целом. Наконец, расчеты привели к новому результату: они позволили обнаружить в рамках решения уравнений (1.33) существование анодных взрывов. Соответствующий анализ уравнений магнитной газодинамики с учетом эффекта Холла проведен ниже.

Об эволюционности уравнений магнитной газодинамики с учетом эффекта Холла. Неустойчивый характер течения плазмы при наличии эффекта Холла, обнаруженный как при численном решении задачи, так и в экспериментах, ставит вопрос об устойчивости такого течения. Полное аналитическое исследование устойчивости даже в линейном приближении связано с решением трудной задачи. Однако легко получить следующий важный результат: задача Коши для уравнений магнитной газодинамики с эффектом Холла и без диссипативных членов в случае плоского двумерного течения поперек магнитного поля некорректна. Это значит, что решение задачи Коши неустойчиво относительно мелко-

масштабных колебаний, которые растут, как угодно быстро, со временем. Такие уравнения называют неэволюционными [27]. Очевидно, что сформулированный результат справедлив и для обсуждаемых здесь осесимметричных течений с азимутальным магнитным полем, поскольку мелкомасштабные колебания рассматри-

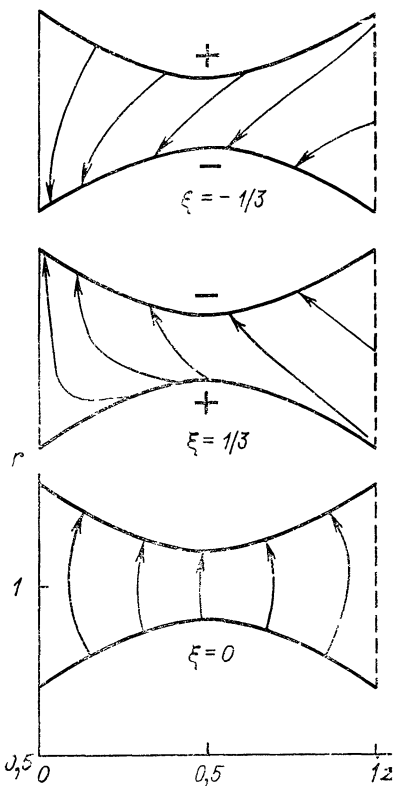


Рис. 21.

ваются локально, а с локальной точки зрения такие течения не отличаются от плоских течений поперек магнитного поля.

Неэволюционность уравнений — факт более сильный, чем обычная неустойчивость, так как задача об устойчивости бездиссипативного течения с эффектом Холла тем самым оказывается решенной.

Перейдем к исследованию эволюционности уравнений. Бездиссипативное течение плазмы с учетом эффекта Холла описывается уравнениями (1.33), в которых $\Pi = 0$, $\kappa = 0$, $\nu = 0$. Отбросим для простоты уравнение энергии, предположив адиабатичность ($p = \beta \rho^{1/2}$) или изотермичность ($\gamma = 1$) течения. Рассмотрим плоские двумерные течения в плоскости декартовых координат (x, y) , считая, что магнитное поле направлено вдоль оси z . Таким образом, аналогично (1.10) имеем $v_z = 0$; $H_x = H_y = 0$; $\partial/\partial z = 0$, а уравнения (1.33) при сделанных предположениях имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0; \\ \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H^2}{2} \right); \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{H^2}{2} \right); \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial x} + \frac{\partial H v}{\partial y} + \xi \frac{H}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где

$$u = v_x; \quad v = v_y; \quad H = H_z; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Особенностью двумерного течения поперек магнитного поля является вырожденный характер эффекта Холла (см. § 1.2): в написанных уравнениях члены, обязанные эффекту Холла, содержат лишь первые производные по координатам, тогда как в общем трехмерном случае они содержат вторые производные. Заметим также, что холловские члены всегда нелинейны по первым производным в отличие от всех остальных слагаемых уравнений (2.8). Оба указанных обстоятельства играют роль в дальнейшем рассуждении: вырождению обязана простота получения основного результата, а нелинейность является, по-видимому, причиной неэволюционности уравнений.

Для исследования устойчивости течения линеаризуем уравнения (2.8). Коэффициенты полученной системы линейных уравнений положим постоянными, поскольку речь идет о мелкомасштабных возмущениях, которые можно рассматривать локально, в малой окрестности любой точки, «заморозив» в этой точке значения коэффициентов. При линеаризации нелинейных холловских слагаемых в (2.8) производные невозмущенного решения играют роль коэффициентов и их также следует считать постоянными.

Если отметить малые возмущения индексом «1» (ρ_1, u_1, v_1, H_1), то после линеаризации уравнений (2.8) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{du_1}{dt} + \frac{C^2}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{H}{\rho} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x} &= 0; \quad C^2 = \gamma p / \rho; \\ \frac{dv_1}{dt} + \frac{C^2}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{H}{\rho} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} &= 0; \\ \frac{dH_1}{dt} + H \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \xi \frac{H}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Здесь все коэффициенты, включая $\partial \rho / \partial x$, $\partial \rho / \partial y$, $\partial H / \partial x$, $\partial H / \partial y$, считаются постоянными.

Решение системы уравнений (2.9) ищем в виде плоских волн $\exp(i\omega t + ik_1 x + ik_2 y)$ с постоянными множителями, где k_1 и k_2 — произвольные действительные числа [27]. Обозначим $k^2 = k_1^2 + k_2^2$; $\omega = k\lambda$; $k_1 = kl_1$; $k_2 = kl_2$. Тогда направление плоской волны определяется единичным вектором $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$, поэтому можно записать

$$l_1 u + l_2 v = v; \quad l_1 \partial / \partial y - l_2 \partial / \partial x = \partial / \partial \tau,$$

где τ — направление вдоль фронта волны, ортогональное \mathbf{l} . Наконец, если положить $\lambda + v_i = z$, то характеристическое уравнение, связывающее ω , k_1 и k_2 , принимает вид:

$$z \left(z^3 - \frac{\xi H}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} z^2 - C_m^2 z + \frac{\xi H}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (2.10)$$

где $C_m^2 = C^2 + H^2 / \rho$; $\mathcal{P} = p + H^2 / 2$.

Условием корректности задачи Коши для систем (2.8) и (2.9) является, очевидно, неравенство

$$\text{Im} \omega = k \text{Im} \lambda = k \text{Im} z \geq \text{const} \quad (2.11)$$

при любых действительных l_1, l_2 ($l_1^2 + l_2^2 = 1$) и $k > 0$. При конечных значениях k решения z всегда конечны, поэтому практически нужно требовать выполнения условия (2.11) при $k \rightarrow \infty$. Коэффициенты уравнения (2.10) действительны и не зависят от k . Если уравнение имеет два комплексно сопряженных корня, то для одного из них $\text{Im} z < 0$ и $\text{Im} \omega \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$, т. е. условие (2.11) не выполняется. Отсюда следует, что корректность задачи Коши эквивалентна действительности всех трех корней уравнения (2.10).

Известно, что все корни уравнения $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ с действительными коэффициентами действительны тогда и только тогда, когда дискриминант

$$D \equiv p^2q^2 + 18pqr - (4p^3r + 4q^3 + 27r^2) \geq 0.$$

В применении к уравнению (2.10)

$$D = 4gY^2 + (C_m^4 + 18C_m^2g - 27g^2)Y + C_m^6, \quad (2.12)$$

где

$$Y = [(\xi H/\rho^2)(\partial\rho/\partial\tau)]^2; \quad g = (\partial\mathcal{P}/\partial\tau)/(\partial\rho/\partial\tau).$$

Элементарное исследование квадратного трехчлена (2.12) показывает, что $D \geq 0$ при всех $Y \geq 0$ в том и только в том случае, если

$$0 \leq g \leq C_m^2. \quad (2.13)$$

Это значит, что система уравнений (2.8) эволюционна, если условие (2.13) выполнено для всех возможных направлений вектора τ . Если оно нарушено, то уравнение (2.10) имеет комплексные корни в следующих случаях; 1) $g < 0$, $Y > Y_2$; 2) $g > C_m^2$, $Y_1 < Y < Y_2$, где Y_1 , Y_2 — корни трехчлена D .

В реальных течениях плазмы условие (2.13), как правило, нарушается. Действительно, если градиенты ρ и $\mathcal{P} = p + H^2/2$ не коллинеарны (т. е. ρ и H функционально независимы), то всегда найдется такое направление \mathbf{l} волны, что $g < 0$. Таким образом, уравнения (2.8) неэволюционны. Этот результат хорошо согласуется с тем, что расчеты течения плазмы с эффектом Холла есобще не удалось провести в случае идеальной проводимости ($\nu = 0$). По-видимому, он же является ответственным за неустойчивость, проявляющуюся в расчетах течения тем сильнее, чем меньше ν и больше ξ .

При наличии конечной магнитной вязкости $\nu > 0$ уравнения эволюционны. Этот вывод легко получить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше, и его нельзя считать неожиданным: при $\nu \neq 0$ четвертое уравнение (2.8) — второго порядка, и холловские члены играют в нем второстепенную роль при изучении мелкомасштабных возмущений [16].

В заключение еще раз подчеркнем, что результаты обязаны вырожденному характеру эффекта Холла в уравнениях (2.8) плоского течения поперек магнитного поля. В общем трехмерном случае уравнения не удается исследовать методом плоских волн. Повторение проведенных рассуждений в этом случае (или даже для трехмерных возмущений рассмотренного здесь течения) приводит лишь к следующим результатам.

1. При конечной проводимости ($\nu > 0$) уравнения по-прежнему эволюционны.

2. При идеальной проводимости ($\nu = 0$) характеристическое уравнение, обобщающее (2.10), имеет часть корней вида $z = ak + +O(1)$, т. е. $\omega = ak^2 + O(k)$ с действительным a . Главный член

этого выражения «нейтрален» и выполнение условия (2.11) при $k \rightarrow \infty$ зависит от следующего слагаемого. В то же время в методе плоских волн, предполагающем постоянство коэффициентов, имеют смысл только главные члены асимптотики.

§ 2.6. Компрессионные течения плазмы

Простейшие течения, сопровождающиеся сжатием. Явление возрастания плотности под действием собственного магнитного поля, указанное в § 2.3, наблюдается в гораздо более сильной форме при течении плазмы в канале, где внутренний электрод короче внешнего (см. рис. 5). Первые же расчеты течения в этом случае привели к тому, что на оси канала вблизи конца внутреннего электрода образуется область с весьма большими значениями плотности плазмы, которые сильно растут с увеличением магнитного поля. Особенно высокая плотность наблюдается в расчетах, использующих предположение изотермичности. Результаты опубликованы в заметке [21]. Эти результаты привлекли к себе внимание в связи с успешными экспериментами Н. В. Филиппова [66], Майзера [67] и др. со сверхсжатыми образованиями плазмы, называемыми плазменным фокусом*. Основное отличие рассчитанных течений от указанных экспериментов состоит в том, что здесь рассматриваются стационарные течения в канале, а в системах типа плазменного фокуса речь идет о единовременном сжатии фиксированной массы плазмы.

Анализ явления сильного сжатия, проведенный для идеальной плазмы в рамках приближения узкого канала [43], позволил объяснить его и доказать возможность существования качественно нового класса стационарных течений, получивших название компрессионных течений. Этот анализ привел А. И. Морозова к идее магнито-плазменного компрессора [44, 45].

Для стационарного течения идеальной плазмы справедлива обобщенная теорема Бернулли

$$U \equiv i + v^2/2 + H^2/\rho = \text{const} \quad [i = \int (dp/\rho)] \quad (2.14)$$

вдоль траектории частиц плазмы. Действительно, из уравнений магнитной газодинамики (1.36) следует

$$\rho \left[\partial U / \partial t + (\mathbf{v}, \nabla) U \right] = (\partial / \partial t) [p + H^2/2].$$

Если течение стационарно, то $(\mathbf{v}, \nabla) U = 0$, что и означает постоянство U вдоль траекторий^{2*}.

Если характерное магнитное поле достаточно велико (β мало), а скорость на входе небольшая, то на начальном участке каждой траектории главным членом в интеграле Бернулли U является

* См. также двумерные расчеты плазменного фокуса [32, 74].

^{2*} См. аналогичные интегралы (1.2в) и (2.2) в одномерном случае.

«магнитная энтальпия» H^2/ρ . В процессе течения она может перейти либо в $v^2/2$, в этом случае имеет место ускорение плазмы электромагнитными силами, либо в $i(\rho)$, что соответствует компрессионному режиму течения. Системы, в которых реализуются компрессионные течения такого типа, названы магнитоплазменным компресором (МПК).

Для того чтобы реализовался любой из двух указанных режимов, нужно, чтобы на соответствующем ему участке траектории магнитная энтальпия H^2/ρ была мала по сравнению с остальными слагаемыми (2.14). В канале с укороченным внутренним электродом (см. рис. 5) это заведомо достигается на оси, где $H = 0$. В применении к траектории, выходящей на ось канала, интеграл (2.14) означает:

$$i + v^2/2 = i(0) + v^2(0)/2 + H^2(0)/\rho(0), \quad (2.15)$$

где аргумент нуль в правой части относится к входному сечению канала $z = 0$. Отсюда легко получить простые оценки для сжатия на оси*, если предположить течение изэнтропическим или изотермическим^{2*}. В случае изэнтропического течения

$$i(\rho) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma\beta}{2(\gamma-1)} \rho^{\gamma-1}. \quad (2.16)$$

В силу граничных условий (1.48) $\rho(0) = 1$, $H(0) = r_0/r$ — величина порядка единицы. Положим для простоты $H(0) = 1$. Тогда из (2.15) и (2.16) следует

$$\frac{\gamma\beta}{2(\gamma-1)} \rho^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma\beta}{2(\gamma-1)} + \frac{v^2(0) - v^2}{2}.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение плотности на оси достигается там, где скорость невелика, т. е. $v \approx v(0)$. В этом случае

$$\rho_{\text{макс}} = \left(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma\beta} + 1 \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (2.17)$$

Поскольку единицей измерения плотности является ее значение на входе, полученная величина $\rho_{\text{макс}}$ представляет собой наибольшее относительное сжатие плазмы.

В случае изотермического течения $i(\rho) = (\beta/2) \ln \rho$, и аналогичное рассуждение приводит к формуле

$$\rho_{\text{макс}} = e^{2/\beta}. \quad (2.18)$$

* Аналогично оценивалась скорость (1.4) на выходе из ускорителя в § 1.1.

^{2*} Это довольно грубое допущение, так как сжатие плазмы в принципе может быть связано с ударной волной, на которой энтропия, вообще говоря, не сохраняется. Поэтому приводимые оценки и расчеты [21], сделанные при тех же предположениях, следует трактовать как первое приближение к изучению явления компрессии. Однако расчеты, проведенные в последнее время, подтвердили в общих чертах эту схему, даже при наличии ударной волны в канале.

Таким образом, в случае изэнтропического (изотермического) течения идеальной плазмы на оси канала с укороченным внутренним электродом (см. рис. 5) может происходить сильное сжатие плазмы, если скорость течения невелика. Оценки (2.17) и (2.18) показывают, что при возрастании магнитного поля максимально возможные значения сжатия растут вместе с отношением $1/\beta$ по степенному (показательному) закону.

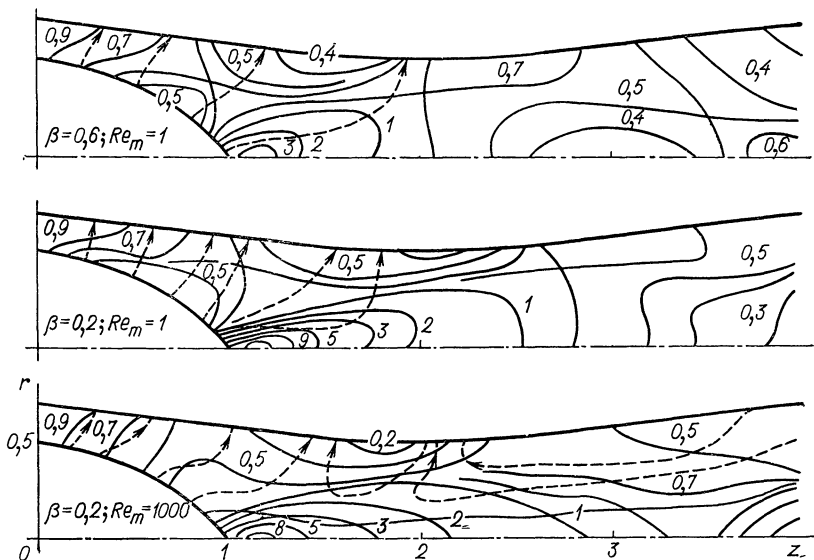


Рис. 22.

Проведенный анализ лишь проясняет возможность существования компрессионных течений, не делая никаких более категорических утверждений. Из него, однако, уже видно, что попытки реализовать эти решения могут сводиться к поискам таких режимов течения, в которых скорость у конца центрального электрода не слишком велика по сравнению со скоростью на входе. Наконец, анализ проведен для идеальной плазмы и, следовательно, говоря о реальных течениях, необходимо учесть отброшенные до сих пор эффекты.

Вернемся к упомянутым расчетам [21]. Они проведены для изэнтропического ($\gamma = 5/3$) и изотермического ($\gamma = 1$) течения невязкой и нетеплопроводной плазмы в канале, изображенном на рис. 22. Течение характеризуется параметром β , проводимостью (постоянной) Re_m и параметром обмена ξ .

В результате расчетов оказалось, что при идеальной проводимости и без учета эффекта Холла на оси канала действительно наблюдается зона компрессии, величина сжатия в которой при разных

значениях β и при обоих указанных выше значениях показателя адиабаты γ очень хорошо согласуется с оценками (2.17) и (2.18).

Кроме того, сжатие плазмы на оси проявилось и при конечных значениях проводимости. Величина наибольшего сжатия и место, где оно происходит, почти не зависят от проводимости в широком диапазоне ее значений: $0,1 \leq \text{Re}_m \leq 1000$. Учет эффекта Холла также не изменил величины сжатия по крайней мере в тех пределах значений параметра ξ , в которых наблюдается установление стационарного режима*. Таким образом, явление сжатия на оси канала и величина сжатия в случае невязкой нетеплопроводной плазмы и

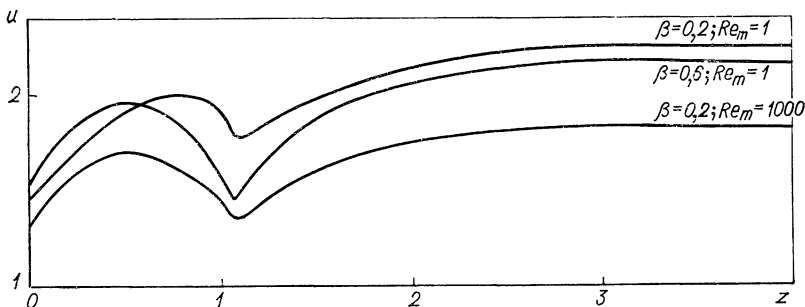


Рис. 23.

при адиабатическом (или изотермическом) течении определяются только значением параметра β . Максимальное значение плотности близко к оценкам (2.17) и (2.18).

На рис. 22 приведены линии уровня плотности (сплошные) в канале для установившегося течения при $\gamma = 5/3$, $\xi = 0$ и разных значениях β и проводимости. Вблизи конца центрального электрода отчетливо видна зона компрессии, в которую сходится и из которой затем расходится плазменный поток. На некотором расстоянии от него на оси иногда образуется второй, но существенно более слабый максимум плотности.

Расчеты показали, что в районе зоны компрессии течение плазмы замедляется, и разность $v - v^2(0)$, действительно, невелика, что и приводит к почти максимальному сжатию. Графики скорости $u(z)$ вдоль центрального электрода и оси канала приведены на рис. 23. Влияние проводимости и эффекта Холла на скорость течения качественно описано в § 2.4 и 2.5, а количественно проявляется в данной геометрии довольно слабо (см. рис. 23 — верхняя и нижняя кривые). Проводимость сильно сказывается лишь на распределении магнитного поля и электрического тока в канале. В случае идеальной проводимости поле вморожено в плазму и распределено в канале в соответствии с плотностью. При возрастании омического

* Например, при значениях $\gamma = 5/3$, $\beta = 0,6$, $\text{Re}_m = 1$ этими пределами являются $0,5 < \xi < 0,5$ (см. § 2.5).

сопротивления ν поле все меньше проникает в глубь канала и при больших значениях ν плазма в зоне компрессии оказывается практически полностью обесточенной. На рис. 22 линии электрического тока изображены штриховыми кривыми. Обращает на себя внимание образование токовых вихрей вблизи внешнего электрода при больших значениях Re_m .

Эффект Холла также влияет в первую очередь на поле и электрический ток, отклоняя линии тока в ту или иную сторону в зависимости от полярности электродов.

После того как расчеты и их анализ были выполнены, А. И. Морозов, П. Е. Ковров и А. К. Виноградова экспериментально подтвердили существование компрессионных течений. Эксперименты проводились в 1967 г. на азоте при разрядных токах от 200 до 400 *ка*. Установлено [47], что при токах порядка 300 *ка* и больше удается получить компрессионный режим с $\rho_{\max} \approx 100$ и $T_e \approx 2-3$ эв, существующий практически в течение всего разряда (70 *мксек*). Течение оказалось весьма устойчивым. В 1968 г. начались эксперименты на водороде. В них также получено стационарное компрессионное течение, соизмеримое по длительности с периодом разряда батареи (100 *мксек*). При токах порядка 300 *ка* получены $\rho \approx 30$ и $T_i \approx T_e \approx 10$ эв [45]. Более подробные экспериментальные результаты изложены в работе [48].

Влияние вязкости и теплопроводности на течение. Полученные выше результаты следует рассматривать как предварительные, так как они связаны с излишне упрощенной моделью течения. Дальнейшее изучение компрессионных течений требует уточнения постановки задачи и самих расчетов. Эксперименты указывают на то, что сжатие плазмы на оси сопровождается, как правило, ее нагреванием. Кроме того, в канале могут образоваться ударные волны, как способствующие сжатию, так и препятствующие ему. Например, в иллюстрациях к опубликованным расчетам Морса [68, 71] течения между цилиндрическими электродами хорошо видна ударная волна, ограничивающая область горячей, но разреженной плазмы на оси канала, что обычно характеризует обтекание затупленного тела.

Таким образом, предположение изэнтропичности нельзя считать оправданным, и последующие расчеты проведены на основе полной системы уравнений (1.33), включая уравнение энергии и все диссипативные процессы — вязкость, теплопроводность и проводимость.

Числовые значения коэффициентов переноса оцениваются, как указано в § 1,2, с учетом используемых в экспериментах следующих размерных величин, заданных на входе в канал: $n_0 \approx 2 \cdot 10^{16}$ *см*⁻³; $T_0 \approx 5$ эв; $H_0 \approx 10^4$ э; $L \approx 30$ *см*. Отсюда с помощью формул (1.40) — (1.46) следует, что

$$\eta_2 \approx 10^{-5} \div 10^{-6}; \quad \kappa_2 \approx 10^{-3} \div 10^{-4}; \quad \sigma_2 \approx 10^3. \quad (2.19)$$

Эти оценки показывают, что сделанное ранее предположение $\Pi = 0$, $\kappa = 0$ не является слишком грубым. Вязкость и теплопровод-

ность могут заметно влиять на течение только в области высокой температуры. Однако в программе расчетов они несколько завышены из-за введения в формулы (1.43) — (1.45) первых слагаемых η_1 , ζ_1 и κ_1 . Это позволяет рассчитать течение с ударными волнами, которые могут возникнуть при малых и конечных значениях T , не прибегая к специальным вычислительным методам*. Кроме того, таким образом сглаживается возникающее противоречие между малой вязкостью (2.19) и граничным условием прилипания плазмы ($v = 0$) к стенкам канала^{2*}.

Рассмотрим два типа результатов расчетов.

Во-первых, проведена серия расчетов с постоянными значениями коэффициентов переноса для того, чтобы выяснить качественный характер зависимости течения от диссипативных эффектов. Форма канала и основные параметры ($\beta = 0,2$, $\xi = 0$, $\nu = 0,001$) те же, что и на рис. 22 внизу, коэффициенты вязкости $\eta = \zeta$ и теплопроводности κ варьируются в широких пределах.

В результате получено установление стационарного режима (в первом приближении — за пролетное время). Свойства установившегося течения зависят от диссипативных процессов следующим образом.

Введение вязкости резко меняет характер течения даже при небольших значениях коэффициентов η и ζ . Основную роль в этом случае играет первая вязкость η , а добавление второй почти не сказывается на результатах. Поток резко тормозится и нагревается в результате трения о стенки канала. При значениях $\eta \sim (0,01 \div 0,05)$ и больше вязкое трение является определяющим фактором всего течения. Скорость течения — дозвуковая, и ее характерная величина почти линейно зависит от $Re = 1/\eta$, т. е. быстро убывает с ростом η . Температура плазмы растет вдоль стенок и достигает величины порядка 30—40 значений на входе. Сильно разогретые приэлектродные слои обладают малой плотностью, поэтому вдоль оси канала расположена узкая зона разреженной плазмы. Область сжатия, о которой говорилось выше, расплывается и приобретает форму достаточно широкой и длинной трубки, внутри которой плазма разрежена. Величина наибольшего сжатия теперь значительно меньше и так же, как размеры трубки, очень медленно меняется при изменении η .

При $\eta < 0,01$ скорость на выходе из канала уже оказывается сверхзвуковой. Она по-прежнему растет вместе с Re , но медленнее, чем в предыдущем случае: при уменьшении η в 10 раз от 0,01 до 0,001 скорость увеличивается меньше, чем втрое. Часть энергии все еще переходит в тепло: при $\eta = 0,001$ максимальная температура на внутреннем электроде равна 20, на внешнем — 10 значениям на входе. Разреженные приэлектродные слои становятся тоньше.

* Например, к введению дополнительной искусственной вязкости [56].

^{2*} По-видимому, оптимальная программа расчетов должна отбрасывать вязкость, если она меньше некоторого минимума, и заменять граничное условие прилипания условием скольжения.

Зона компрессии имеет форму трубки, но сокращается в поперечных размерах, сжимается к оси.

Теплопроводность, как и следует ожидать, сглаживает температуру в канале и тем самым влияет на свойства течения, обязанные неравномерному нагреву плазмы. Уже при значениях κ , соизмеримых с η , нагретые зоны у электродов исчезают. Зона компрессии

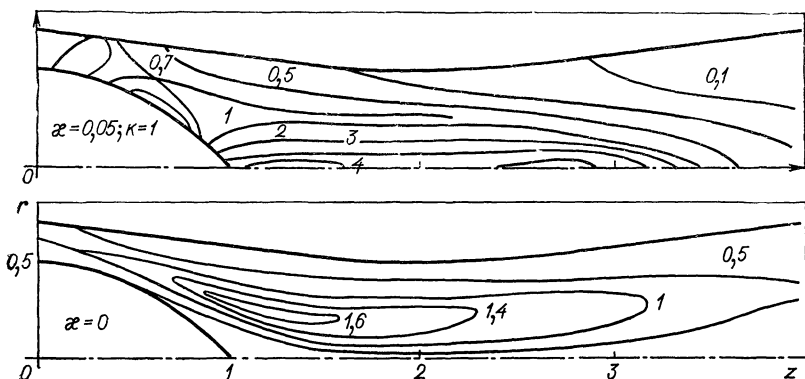


Рис. 24.

снова расположена на оси, но по сравнению с расчетом идеальной модели она занимает больший объем, а максимальное сжатие вдвое меньше.

Восстановление такой картины можно ускорить, если наряду с теплопроводностью ввести в задачу «отсос» тепла через стенки канала по закону $\partial T/\partial n = -kT$ вместо условия теплоизоляции стенок. Скорость течения плазмы в канале почти не зависит от теплопроводности и определяется в основном значениями β , ν и η . На рис. 24 изображены линии уровня плотности при $\beta = 0,2$, $\nu = 0,001$, $\eta = \xi = 0,05$ в теплопроводном и нетеплопроводном случаях. На рис. 25 показана зависимость максимальной скорости течения на оси при выходе из канала от коэффициента вязкости η (при тех же значениях β и ν , что и на рис. 24).

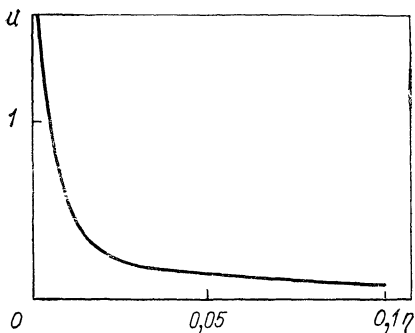


Рис. 25.

Во-вторых, приведем результаты расчета течения плазмы с переменными коэффициентами переноса, близкими к оценкам (2.19), а именно со значениями: $\beta = 0,2$; $\xi = 0$; $\eta = \xi = 0,001 + 10^{-5} T^{5/2}$; $\kappa = 0,001 + 10^{-4} T^{5/2}$; $Re_m = 100T^{3/2}$. Граничное условие на электродах предполагает отвод тепла по закону (1.51) при $k = 1$.

На рис. 26 изображены линии уровня плотности ρ , температуры T и функции Hr , т. е. линии электрического тока. Распределение плотности испытывает на себе влияние обеих отмеченных выше тенденций; область незначительного сжатия имеет форму трубки и в то же время сжатие наблюдается на оси вплотную у центрального электрода. Температура в этой последней зоне сжатия выше, чем на поверхности внутреннего электрода, т. е. она связана не только с тре-

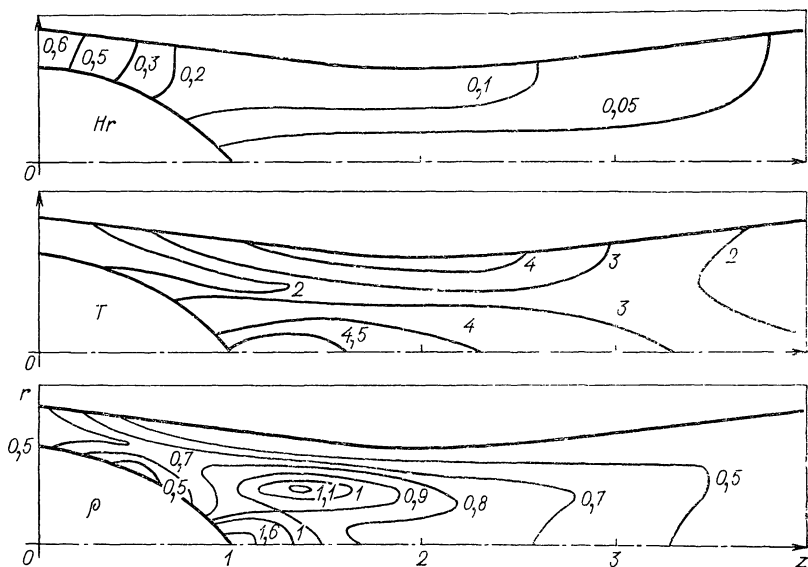


Рис. 26.

нием, но и с явлением компрессии. У более длинного внешнего электрода хорошо виден слой относительно разреженной плазмы, нагретой до $T \approx 4$.

Подводя итог полученным результатам, следует прежде всего подчеркнуть трудность их сравнения с экспериментами. В первой главе уже отмечалось, что граничное условие $v = 0$ не соответствует реальным условиям, поскольку ничто не мешает ионам достигать электрода и просто гибнуть на нем. В этих условиях картина течения вблизи катода, а также в зоне компрессии может существенно отличаться от того, что получается при расчетах.

Поэтому результаты расчетов без вязкости, по-видимому, лучше соответствуют реальным условиям. Тем не менее проведенные расчеты с учетом вязкости представляют бесспорный методический интерес и полезны при обсуждении особенностей реальных физических процессов.

ТЕЧЕНИЯ ГАЗА, ИОНИЗИРУЮЩЕГОСЯ В КАНАЛЕ

§ 3.1. Процесс ионизации в рассматриваемой модели течения

В настоящей главе сделана попытка рассчитать течения плазмы с учетом процесса ионизации в канале. В реальных условиях эксперимента, как указывалось в § 1.1, на входе в канал подается нейтральный газ, который затем практически полностью ионизируется в процессе ускорения и нагревания в сужающейся части сопла. При этом в установившемся течении можно, как правило, наблюдать отчетливо выраженный фронт ионизации, т. е. поверхность, слева от которой течет газ, а справа — плазма.

Течение газа слева от фронта описывается уравнениями газовой динамики, а течения плазмы справа от фронта — уравнениями (1.33). Задача свелась бы к их численному интегрированию, если указать правило расчета границы раздела двух сред. Однако известно [40], что обычные законы сохранения не образуют, вообще говоря, полного набора граничных условий на ударной волне ионизации. Недостающие условия следует подбирать с учетом структуры волны*. Число недостающих условий определяется в конечном счете требованием эволюционности разрыва, т. е. отношениями скоростей газа, магнитного звука и ударной волны [7]. Поэтому включение процесса ионизации в рассматриваемую математическую модель течения желательнее осуществить так, чтобы избежать непосредственного расчета положения фронта ионизации. Можно считать, что ионизация происходит при достижении газом некоторого критического значения температуры T^* , т. е. границей раздела является поверхность $T = T^*$.

Нейтральный газ характеризуется отсутствием проводимости, т. е. ему соответствует значение $Re_m = 0$ ($\nu = \infty$). При этом условии из уравнений (1.33) следует $j = 0$, а уравнения (1.33) автоматически превращаются в уравнения газовой динамики. В ионизированном газе проводимость отлична от нуля, ее значения определяются формулой (1.46) и течение описывается уравнениями (1.33).

Таким образом, процесс ионизации газа в канале укладывается в предложенную в гл. 1 модель задачи и схему расчетов, если проводимость Re_m сделать скачкообразно зависящей от температуры: при $T < T^*$ нужно положить $Re_m = 0$, а при $T > T^*$ использовать формулу (1.46). После этого остаются некоторые вычислительные трудности, связанные с обращением в бесконечность магнитной вязкости ν . Их в принципе можно преодолеть, например, решив уравнение диффузии магнитного поля методом потоковой прогонки [30], который используют иногда при решении подобных задач в их одномерной постановке [10], а в программу решения уравнения энер-

* Физически это означает, что фронт ионизации принципиально толстый.

гии достаточно внести дополнительное условие, обращающее в нуль джоулево тепло, если $Re_m = 0$.

Можно обойти это обстоятельство другим способом, который и реализован в предлагаемой модели. Задача ставится несколько менее точно, но более единообразно. Нейтральному газу приписана малая, но отличная от нуля проводимость, и тем самым течение всей среды можно описывать уравнениями магнитной газодинамики (1.33). Такая постановка вполне согласуется с условиями эксперимента: сильноточный разряд сопровождается мощным ультрафиолетовым излучением заметно ионизирующим поступающий газ и, следовательно, сообщаящим ему конечную проводимость.

Таким образом, рассмотрение процесса ионизации в данной модели задачи сводится к тому, что формула (1.46) заменяется следующей зависимостью проводимости от температуры:

$$Re_m = \frac{1}{v} = \begin{cases} \sigma_0, & T < T^*; \\ \sigma_1 + \sigma_2 T^{3/2}, & T > T^*, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\sigma_0 \ll 1$. Аналогично можно поступить и с коэффициентом теплопроводности (1.45). Кроме того, в процессе ионизации расходуется тепло. Чтобы отразить это в расчетах, в правую часть уравнения энергии (1.33) или (1.37) добавляется слагаемое

$$-I_0 \rho \exp[-\alpha (T - T^*)^2], \quad (3.2)$$

соответствующее потере тепла при $T = T^*$. Экспонента в (3.2) с достаточно большим α обладает тем свойством, что ее влияние сказывается только вблизи значения $T = T^*$, соответствующего ионизации. Формулами (3.1) и (3.2) и ограничиваются уточнения постановки задачи, связанные с рассмотрением явления ионизации.

Предлагаемые ниже (см. § 3.3) расчеты проведены в квазиодномерной постановке задачи, т. е. в терминах уравнений (1.37), и без вязкости: $\eta = 0$.

§ 3.2. О стационарных течениях со скачком проводимости в канале постоянного сечения

Прежде чем перейти к результатам расчетов рассмотрим следующую простейшую задачу.

В бесконечном канале постоянного сечения рассмотрим одномерное стационарное течение невязкой и нетеплопроводной плазмы с проводимостью, изменяющейся каким-то образом от постоянного значения σ_Δ слева до постоянного значения σ_Π справа, причем $\sigma_\Delta < \sigma_\Pi$. Предположим, что достаточно далеко от области изменения σ свойства течения постоянны, т. е. не зависят от координаты x вдоль канала. Ось x направлена в сторону течения, т. е. скорость $v > 0$. Наконец, будем считать, что достаточно далеко слева течение дозвуковое.

Пусть $\rho_0, T_0, p_0, H_0, v_0$ — постоянные значения плотности, температуры и т. д., заданные слева (при $x \rightarrow -\infty$), и примем их, а также какую-нибудь характерную длину L (например, длину, на которой происходит изменение σ) за единицы измерения соответствующих величин, аналогично тому, как это было сделано в § 1.2. Тогда безразмерными уравнениями, описывающими течения, будут уравнения* (1.37), в которых нужно положить $f(x) = \text{const}$, $\eta = \kappa = 0$, $\partial/dt = 0$. После взятия интегралов они принимают следующий вид:

$$\rho v = C_1; \quad (3.3a)$$

$$\rho v^2 + p + H^2/2 = C_2; \quad (3.3б)$$

$$C_1 (i + v^2/2) + EH = C_3; \quad (3.3в)$$

$$-v dH/dx + Hv = C_4, \quad (3.3г)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p &= (\beta/2) \rho T; \quad i = \int (dp/\rho) = (\gamma\beta/2 (\gamma-1)) T; \\ C_1 &= v_\Lambda; \quad C_2 = v_\Lambda^2 + (\beta+1)/2; \quad C_3 = (v_\Lambda/2)[\gamma\beta/(\gamma-1) + v_\Lambda^2]; \\ C_4 &= E, \end{aligned} \right\} (3.4)$$

а $v_\Lambda = v_0 (4\pi\rho_0)^{1/2}/H_0$ — скорость слева в выбранной системе единиц. Поскольку течение слева постоянно ($dH/dx = 0$) из (3.3г) следует, что $E = v_\Lambda$.

Первые три уравнения (3.3) после исключения из них ρ и T сведем к одному соотношению, связывающему H и v :

$$v^2 + [\gamma v/(\gamma+1)v_\Lambda](H^2 - 2C_2) - 2[(\gamma-1)/(\gamma+1)](H - 1) = 0. \quad (3.5)$$

Отсюда можно выразить v через H и подставить в уравнение (3.3г), которое нужно решить при начальном условии $H(-\infty) = 1$. Этот подход хорошо известен при изучении ударных волн и волн ионизации в магнитной газодинамике [3, 40].

Уравнение (3.5) описывает кривую в плоскости (H, v) , схематически изображенную на рис. 27. Точное положение ее зависит от двух параметров: β и v_Λ . На основании уравнения (3.3г) постоянным участкам течения слева и справа соответствуют точки пересечения кривой (3.5) с гиперболой

$$Hv = E = v_\Lambda. \quad (3.6)$$

Координаты этих точек определяются уравнением

$$F(v) \equiv (v - v_\Lambda) F_1(v) \equiv (v - v_\Lambda) \left[v^2 - \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} C_2 - v_\Lambda^2 \right) \frac{v}{v_\Lambda} - \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \right] = 0. \quad (3.7)$$

* Здесь для простоты опущено конечное слагаемое (3.2).

Отсюда видно, что в полуплоскости $v > 0$ кривые (3.5) и (3.6) пересекаются в двух точках: $v = v_{\Lambda}$ и $v = v_{\Pi}$, где v_{Π} — положительный корень квадратного трехчлена $F_1(v)$. Очевидно, точка Λ ($v = v_{\Lambda}$, $H = 1$) соответствует течению слева ($x \rightarrow -\infty$), а точка Π ($v = v_{\Pi}$, $H = v_{\Lambda}/v_{\Pi}$) представляет единственную возможность для постоянного течения справа ($x \rightarrow +\infty$). Точка Π лежит выше точки Λ (см. рис. 27) в силу предположения о дозвуковой скорости слева. Действительно, если $v_{\Lambda}^2 < [C^2 + H^2/\rho]_{\Lambda} = \gamma\beta/2 + 1$, то $F_1(v_{\Lambda}) = [2/(\gamma + 1)]\{v_{\Lambda}^2 - \gamma\beta/2 - 1\} < 0$, откуда следует, что $v_{\Lambda} <$

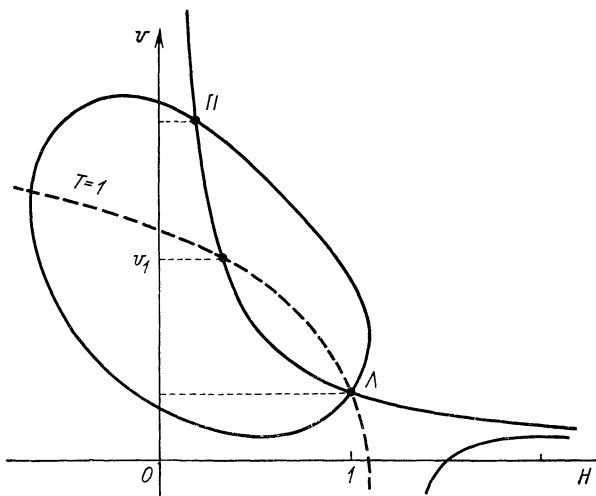


Рис. 27.

$< v_{\Pi}$. Это значит, что в процессе течения происходит ускорение от v_{Λ} до v_{Π} и соответствующее ему разрежение плазмы от $\rho = 1$ слева до $\rho = v_{\Lambda}/v_{\Pi} < 1$ справа.

Если предположенный тип непрерывного течения существует, то решение задачи представляется частью кривой (3.5), соединяющей точки Λ и Π (см. рис. 27). Переход из Λ в Π может формально осуществляться или по часовой стрелке (ниже гиперболы $Hv = v_{\Lambda}$), или против часовой стрелки (выше гиперболы). В первом случае имеет место немонотонное изменение H с обязательным выходом в область отрицательных H [видно, что кривая (3.5) пересекает полуось $v > 0$ в двух точках при всех рассматриваемых значениях β и v_{Λ}], т. е. течение сопровождается переворачиванием магнитного поля ($H < 0$) и отрицательным электрическим током ($dH/dx > 0$). Во втором случае $Hv > E = v_{\Lambda}$, что возможно лишь при $vdH/dx > 0$. Это значит, что на участке убывания магнитного поля сопротивление ν должно быть отрицательным и по этой причине второй тип решения нужно сразу отбросить. Первый тип с полученными выше свойствами также нельзя считать естественным в рассматриваемой задаче.

Наконец, есть еще одна причина, делающая непригодными оба решения. Повышение проводимости связано с повышением температуры, поэтому решению можно попытаться придать физический смысл, если температура справа выше, чем слева, т. е. $T_{\Pi} > 1$. Однако здесь всегда имеет место противоположное неравенство, в чем легко убедиться следующим образом.

Из уравнения (3.3в) следует, что постоянным значениям температуры T соответствуют параболы

$$v^2/2 + H = C_3/v_{\Lambda} - [\gamma\beta/2(\gamma-1)]T$$

в плоскости (H, v) , которые при возрастании T сдвигаются влево как целое. При значении $T = 1$ эта парабола проходит точку Λ (см. рис. 27), а другая точка ее пересечения с гиперболой (3.6) определяется положительным корнем v_1 уравнения

$$F_2(v) \equiv v^2 + v_{\Lambda}v - 2 = 0. \quad (3.8)$$

Сравнивая уравнения (3.7) и (3.8), убедимся, что графики $F_1(v)$ и $F_2(v)$ (рис. 28) пересекаются в точке $v_2 = 3v_{\Lambda}/2C_2$, и $F_2(v_2) < 0$. Отсюда следует, что $v_1 < v_{\Pi}$, т. е. кривая $T = 1$ пересекает гипер-

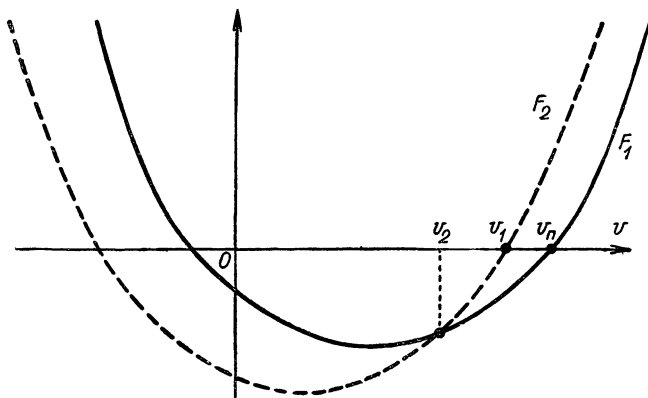


Рис. 28.

болу $Hv = v_{\Lambda}$ второй раз ниже точки Π , и точка Π лежит в области $T < 1^*$ (см. рис. 27). Это обстоятельство исключает также и третью возможность: допустить скачок проводимости и построить разрывное решение, содержащее точки Λ и Π .

Таким образом, не существует имеющего физический смысл стационарного режима течения плазмы в канале постоянного сечения с непрерывным или скачкообразным возрастанием проводимости и сопровождающегося ускорением и нагреванием. Этот результат

* Более того, при некоторых значениях β и v_{Λ} не исключено попадание точки Π в область $T < 0$, и тогда решение вообще лишено смысла.

можно поставить рядом с известным фактом о несуществовании ударных волн разрежения в обычной и магнитной газодинамиках идеальной среды.

Проведенное рассуждение, строго говоря, не переносится на каналы переменного сечения. Тем не менее полученный результат указывает, что и здесь может не существовать стационарных разрывных решений с ускорением и нагреванием.

Однако в экспериментах, как говорилось выше, наблюдается скачкообразный переход от газа к плазме, сопровождаемый ускорением, нагреванием и разрежением. Несоответствие между этими фактами и нашим результатом говорит лишь о том, что явление ионизации значительно сложнее, чем рассмотренная простейшая модель. Трудности, связанные с более тонким теоретическим подходом к нему, еще раз вынуждают уделить внимание численному решению задачи.

§ 3.3. Расчеты течений ионизирующегося газа

Расчеты течения, включающие в рассмотрение процесс ионизации в соответствии с указанной в § 3.1 схемой, проведены в квазиодномерном приближении в канале типа сопла. Чтобы иметь возможность сравнивать результаты с известными данными о течении плазмы (см. § 2.2), приведем их для канала этой же формы сечения (2.1):

$$f(x) = \begin{cases} 0,3 - 0,8x(1-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ 1,5x - 1,2, & 1 \leq x \leq 5. \end{cases} \quad (3.9)$$

Проведены две серии расчетов в связи с двумя возможными толкованиями зависимости проводимости от температуры. Если формулу (3.1) понимать буквально, то она означает, что при охлаждении уже ионизированного газа до температуры ниже T^* вновь происходит переход к неионизованному состоянию $Re_m = \sigma_0$. Такую модель можно реализовать при ускорении плотной плазмы, что представляет интерес для создания, например, аэродинамических труб.

Второе толкование формулы (3.1) предполагает, что газ после ионизации остается ионизированным уже независимо от дальнейшей температуры, т. е. здесь вводится дополнительный запрет рекомбинации. Иначе говоря, изменение состояния Re_m для каждой частицы происходит по формуле (3.1) лишь при возрастании температуры.

Результаты расчетов качественно очень похожи друг на друга, поэтому дальнейшие количественные результаты приводятся в качестве примера только для первой серии расчетов.

В результате всех расчетов установлено, что течение не выходит на стационарный режим с разрывным решением. Это согласуется с выводом, полученным в конце § 3.2. Рассмотрим подробнее, как выглядит решение.

В случаях, когда проводимость ионизованного газа конечна, т. е. коэффициенты σ_1 и σ_2 в формуле (3.1) порядка единицы, течение устанавливается за время порядка пролетного. Стационарный режим характеризуется не разрывными, а достаточно гладкими функциями: T и v монотонно возрастают, ρ и H монотонно убывают

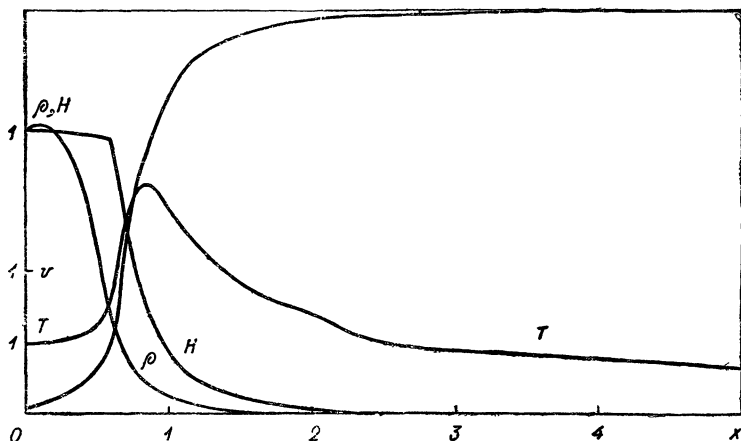


Рис. 29.

вдоль канала. Температура непрерывно переходит через критическое значение T^* в окрестности минимального сечения канала. Наиболее резко реагирует на процесс ионизации магнитное поле H , которое круто падает сразу после перехода T через T^* , что соответствует резкому возрастанию электрического тока в этом месте. На рис. 29 показана зависимость ρ , T , v и H от расстояния вдоль канала формы (3.9) в установившемся течении при значениях параметров

$$\left. \begin{aligned} \beta = 0,2; \sigma_0 = 0,05; \sigma_1 = \sigma_2 = 1; \kappa = 0; T^* = 1,5; \\ I_0 = 0,3. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Существует следующая зависимость этого режима от проводимости σ_0 перед фронтом ионизации и от формы канала. При уменьшении значения σ_0 (в расчетах от 0,05 до 0,01) происходит незначительное (до 20—30%) возрастание температуры T и скорости v , уменьшение плотности ρ (соответствующее возрастанию скорости), а также смещение положения фронта ионизации (точки, где $T = T^*$) вправо (от $x = 0,55$ до $x = 0,75$). Кроме того, режим начинает терять устойчивость с уменьшением σ_0^* : при $\sigma_0 = 0,01$ наблюдаются

* При этом подразумевается, что разрядный ток I остается постоянным.

незатухающие колебания температуры (с амплитудой до 20%) в выходной части канала, т. е. на нисходящей ветви графика $T(x)$.

Если изменить форму канала, уменьшив его минимальное сечение относительно максимального [в расчетах оно уменьшено, в 4 раза по сравнению с сечением (3.9)], то течение с параметрами (3.10) изменяется следующим образом: скорость уменьшается (до 30%), плотность возрастает, фронт ионизации смещается влево ($x = 0,45$ при $\sigma_0 = 0,05$ и $x = 0,55$ при $\sigma_0 = 0,01$). Кроме того, сужение канала повышает устойчивость течения: колебаний температуры не наблюдается при всех рассмотренных значениях σ_0 .

Такова картина течения при конечных, небольших значениях σ_1 и σ_2 . Если же проводимость ионизированного газа достаточно высокая, то течение вообще не устанавливается и носит квазипериодический пульсирующий характер. В этом случае имеет место следующее явление.

За время порядка пролетного в канале устанавливается распределение плотности, близкое к стационарному, и дальнейшие отклонения от него незначительны. Плотность при этом оказывается на 30% ниже плотности, полученной при расчете течения полностью ионизированной плазмы (см. § 2.2).

В то же время наблюдаются резкие колебания температуры. Положение фронта ионизации колеблется во времени вблизи минимального сечения сопла ($x \approx 0,5$). Состояние перед фронтом близко к стационарному. За фронтом находится узкая нагретая область с колеблющейся величиной максимума температуры. Нагретые проводящие слои плазмы периодически отделяются от фронта и движутся вправо, остывая и размазываясь по ширине. Напряженность магнитного поля спадает слева направо практически до нуля, причем почти все падение приходится на пульсирующую прогретую область за фронтом ионизации. Это соответствует тому, что электрический ток «пробивает» канал в нагретом, т. е. наиболее проводящем, месте. Скорость в канале в основном монотонно возрастает слева направо, а колебания ее согласованы с колебаниями температуры. Амплитуда колебаний не превышает 25—30% среднего значения скорости за фронтом ионизации.

Картина течения представляется таким образом: порция газа, быстро ускоряясь, способствует повышению напряжения

$$U = Ef = (-v\partial H/\partial x + vH)f$$

на электродах, образующих стенки канала. Это ведет к очередному пробою газа электрическим током.

На рис. 30 показана зависимость ρ , T , v , H от расстояния вдоль канала для типичного момента времени $t = 16,75$, большего, чем пролетное. На рис. 31 изображены зависимость температуры T в точке $x = 0,7$ и положения $x_{\text{фр}}$ фронта ионизации от времени в ин-

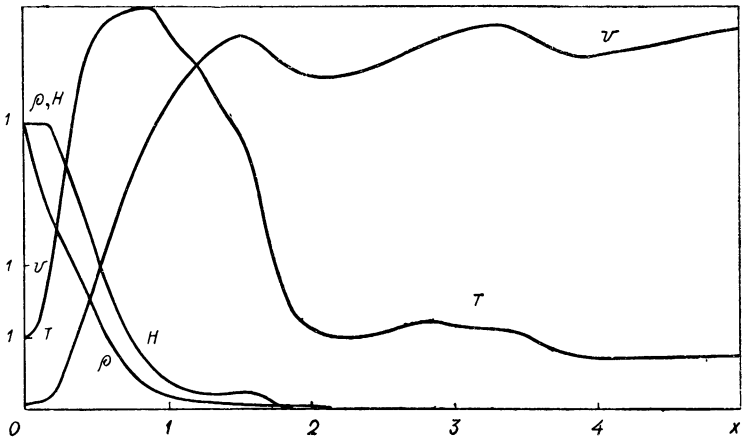


Рис. 30.

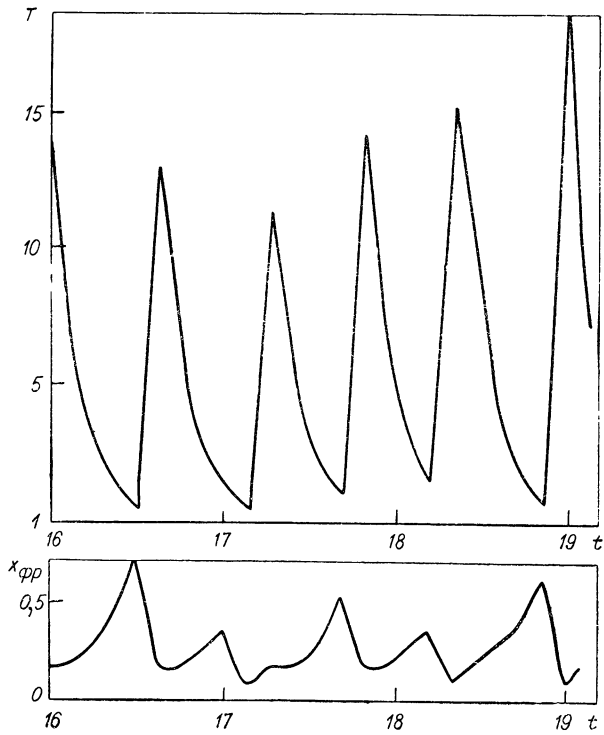


Рис. 31.

тервале $16 < t < 19$. Оба рисунка соответствуют той же форме канала (3.9) и тем же параметрам (3.10), за исключением проводимости за фронтом ионизации: здесь $\sigma_1 = \sigma_2 = 100$. На рис. 31 отчетливо виден пульсирующий характер течения с периодом $\Delta t \approx 0,6$.

Амплитуда колебаний температуры растет при возрастании σ_1 и σ_2 , а также при фиксированных σ_1 и σ_2 , если уменьшить проводимость σ_0 на входе. При изменении β меняются границы значений параметров σ_0 , σ_1 , σ_2 , отделяющие стационарные течения от пульсирующих. Так, если в установившемся варианте с параметрами (3.10) увеличить β в 4 раза, то течение будет квазипериодическим, правда, с небольшими амплитудой и частотой колебаний. Расчет течения в этом случае опубликован в заметке [22]. При дальнейшем увеличении β колебания исчезают, как и следует ожидать, и стационарные режимы приближаются к газодинамическим.

Отсутствие стационарного режима течения в случае $Re_m \rightarrow \infty$ при $T > T^*$ также можно объяснить с помощью результатов § 3.2. Если течение стационарно, то в малой окрестности фронта ионизации справедливы уравнения (3.3). В частности, (3.3г) при $Re_m = \infty$ означает:

$$\left. \begin{aligned} -v dH/dx + vH = E, & \quad x < x_{\text{фр}}; \\ vH = E, & \quad x > x_{\text{фр}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Поскольку при малых σ_0 слева от фронта выражение $vj = -vdH/dx$ отлично от нуля (это подтверждается расчетами), из соотношений (3.11) следует, что произведение vH не является непрерывным при $x = x_{\text{фр}}$ (см. § 3.2).

Существование колеблющегося фронта ионизации говорит о принципиальной роли инерционных эффектов и лишней раз подтверждает, что фронт имеет конечную толщину.

Важно подчеркнуть, что полученные при расчетах колебания температуры относятся к нетеплопроводной модели плазмы. При анализе явления это нельзя упускать из вида, так как в реальных течениях с нагревом и ионизацией теплопроводность безусловно играет роль. Конечная (даже небольшая) теплопроводность стабилизирует течение. Так, например, течение при $\beta = 0,2$, $\sigma_0 = 0,01$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 100$, колеблющееся при $\kappa = 0$ с амплитудой порядка $T = 100$, превращается в стационарное, если ввести в расчет постоянную теплопроводность $\kappa = 0,2$. Температура становится гладкой монотонно растущей функцией x .

В заключение отметим, что пульсирующий характер течения ионизирующегося газа наблюдался также авторами работы [10]. В ней проведен расчет (в лагранжевых координатах) одномерного течения плазмы в импульсном ускорителе рельсового типа и обнаружено квазипериодическое возникновение узких нагретых слоев в результате начального температурного возмущения непроводящего газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамов В. А.** и др. Доклад № 3.1.11.8. В кн.: VIII Международная Конференция по явлениям в ионизованных газах. Вена, 1967.
2. **Алексеева Л. М., Соловьев Л. С.** «Прикл. матем. и механ.», 1964, **28**, 6, с. 987—995.
3. **Андерсон Э.** Ударные волны в магнитной гидродинамике. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1968.
4. **Артюшков Е. В., Морозов А. И.** «Теплофизика высоких температур», 1964, **2**, № 4, с. 525—534.
5. **Бай-Ши-И.** Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
6. **Бам-Зеликович Г. М.** «Изв. АН СССР, Сер. механ. и машиностр.», 1963, № 2, с. 3—10; там же, 1964, № 5, с. 9—15; «Прикл. матем. и механ.», 1964, **28**, № 4, с. 664—669; «Прикл. механ. и техн. физ.», 1968, № 6, с. 36—40.
7. **Бармин А. А., Куликовский А. Г.** «Докл. АН СССР», 1968, **178**, № 1, с. 55—58.
8. **Батлер Т. Д.** «Механика», 1968, № 4, с. 91—108.
9. **Башаров Р. Б.** и др. В сб.: Физика газоразрядной плазмы. В. 2. М., Атомиздат, 1969, с. 161—184.
10. **Беляев С. А.** и др. Расчет нестационарного ускорения плазмы в одномерном приближении. Препринт ИПМ АН СССР, М., 1969.
11. **Бегчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.
12. **Брагинский С. И., Гельфанд И. М., Федоренко Р. П.** В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 201—221.
13. **Брагинский С. И.** В сб.: Вопросы теории плазмы. В. 1. М., Атомиздат, 1963, с. 183—272.
14. **Брушлинский К. В.** «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, **23**, № 6, с. 893—912.
15. **Брушлинский К. В.** «Ж. вычислит. матем. и матем физ.», 1968, **8**, № 5, с. 1039—1048.
16. **Брушлинский К. В., Морозов А. И.** «Прикл. матем. и механ.», 1968, **32**, 5, с. 957—959.
17. **Брушлинский К. В., Зуева Н. М., Морозов А. И.** «Изв. АН СССР. Сер. механика», 1965, № 5, с. 3—6.
18. **Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И.** В кн.: IV Рижское совещание по МГД, июнь 1964. Тезисы докладов. Рига, Изд-во АН Латв. ССР, 1964; «Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа», 1966, № 2, с. 189—192.
19. **Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И.** «Магнитная гидродинамика», 1967, № 1, с. 3—8.
20. **Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И.** Там же, 1967, № 2, с. 31—34.
21. **Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И.** В кн.: Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. М., Изд-во АН СССР, 1968, с. 50; «Докл. АН СССР», 1968, **180**, № 6, с. 1327—1330.
22. **Брушлинский К. В., Морозов А. И., Палейчик В. В.** «Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа», 1970, № 5, с. 29—32.
23. **Брушлинский К. В., Морозов А. И., Палейчик В. В.** В сб.: Плазменные ускорители. Под ред. Л. А. Арцимовича, М., «Машиностроение», 1973, с. 251—254.
24. **Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.** Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
25. **Велихов Е. П.** и др. «Докл. АН СССР», 1969, **184**, № 3, с. 578—581.
26. **В сб.:** Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Олдера, Фернбаха, Ротенберга. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.

27. Гельфанд И. М. «Успехи матем. наук», 1959, XIV, 2 (86), с. 87—158.
28. Гельфанд И. М. и др. «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1967, 7, № 2, с. 322—347.
29. Губарев А. В., Дегтярев Л. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. «Докл. АН СССР», 1970, 192, 3, с. 520—524; в сб.: Труды V Международной конференции по МГД-преобразованию энергии. Мюнхен, 1971.
30. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1968, 8, 3, с. 679—684; там же, 1969, 9, 2, с. 211—218.
31. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 5, М., Атомиздат, 1967, с. 394—438.
32. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. См. наст. сб., с. 164.
33. Кадомцев Б. Б. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 2, М., Госатомиздат, 1963, с. 132—176.
34. Калихман Л. Е. Элементы магнитной гидродинамики. М., Атомиздат, 1964.
35. Кесаев И. Г. Катодные процессы электрической дуги. М., «Наука», 1968.
36. Кислов А. Я., Морозов А. И., Тилинин Г. Н. «Ж. технич. физ.», 1968, 38, 6, с. 975—978.
37. Кислов А. Я. и др. Доклад № 3.1.11.9. В кн.: VIII Международная конференция по явлениям в ионизованных газах. Вена, 1967.
38. Ковров П. Е. и др. «Докл. АН СССР», 1967, 172, 6, с. 1305—1308.
39. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
40. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. «Докл. АН СССР», 1959, 129, 1, с. 52—55.
41. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.
42. Любимов Г. А. «Изв. АН СССР. Серия механ. жидкости и газа», 1966, 3, с. 3—11.
43. Морозов А. И. «Ж. техн. физ.», 1967, 37, 12, с. 2147—2159.
44. Морозов А. И. Ядерный синтез. Специальное приложение. Вена, 1969. с. 111—120.
45. Морозов А. И. «Вест. АН СССР», 1969, № 6, с. 28—36.
46. Морозов А. И., Брушлинский Қ. В., Герлах Н. И., Шубин А. П. Доклад № 3.1.11.7. В кн.: VIII Международная конференция по явлениям в ионизованных газах. Вена, 1967.
47. Морозов А. И., Ковров П. Е., Виноградова А. К. «Письма ЖЭТФ», 1968, 7, 8, с. 257—260.
48. Морозов А. И. и др. Экспериментальное исследование течения в МПК. Препринт ИАЭ им. И. В. Курчатова, № 2275, М., 1973.
49. Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Ж. техн. физ.», 1964, 34, 3, с. 429—443.
50. Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Ж. техн. физ.», 1964, 34, 7, с. 1141—1153.
51. Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Докл. АН СССР», 1965, 164, 1, с. 80—83.
52. Морозов А. И., Соловьев Л. С. См. наст. сб., с. 3.
53. Морозов А. И., Шубин А. П. «Теплофизика высоких температур», 1965, 3, 6, с. 827—837.; «Приклад. механ. и техн. физ.», 1967, 5, с. 14—20.
54. Острцов И. Н., Петросов В. А., Порогников А. А., Сафонов И. Б., Цейтлин С. Д. В сб.: Плазменные ускорители. Под ред. Л. А. Арцимовича. М., «Машиностроение», 1973, с. 254—257.
55. Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах и трубах. Итоги науки. Сер. механика. М., ВИНТИ, 1966.
56. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
57. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.
58. Соловьев Л. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1967, 53, 6 (12), с. 2063—2069.
59. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
60. Федоров В. М. «Магнитная гидродинамика», 1965, № 2, с. 44—54.
61. Юдович В. И. «Докл. АН СССР», 1965, 161, 5, с. 1037—1040.

62. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
63. Butler T. D., Cook J. L., Morse R. L. Proc. APS Topical Conference on Numerical Simulation of Plasma. Los Alamos, 1968, N C6.
64. Düchs D. Phys. Fluids, 1968, **11**, 9, p. 2010—2018.
65. Freeman J. R., Lane F. O. Proc. APS Topical Conference on Numerical Simulation of Plasma. Los Alamos, 1968, N C7.
66. Filippov N. V., Filippova T. J. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Res. (Proc. Conf. Culham, 1965) **2**, p. 405, IAEA, Vienna, 1966.
67. Mather J. W. Там же, p. 389.
68. Linhart J. G. Nucl. Fusion, 1970, **10**, 3, p. 211—234.
69. Methods in Computational Physics. V. 9 (Plasma Physics) Academic Press, 1970.
70. Morgan P. D., Peacock N. J., Potter D. E. III European Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion, Utrecht, June, 1969.
71. Morse R. L. Methods Comp. Phys. V. 9. Academic Press, 1970, p. 213—239.
72. Potter D. E. Phys. Fluids, 1971, **14**, 9, p. 1911—1924.
73. Proceedings of the APS Topical Conference on Numerical Simulation of Plasma. Sept. 18—20, Los Alamos, 1968.
74. Roberts K. V., Potter D. E. Methods Comp. Phys. V. 9. Academic Press, 1970, p. 339—420.

ДВУМЕРНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЕННОГО ФОКУСА Z-ПИНЧА

В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник

Введение

Теоретическое исследование нестационарного процесса сжатия плазмы в Z-пинче раньше проводилось в одномерном приближении [1]. Все МГД-величины считались функциями цилиндрического радиуса r и времени t . Учет диссипативных процессов, следующих из классической теории явлений переноса в плазме, позволил детально описать кумулятивные эффекты схождения ударной волны и токовой оболочки и получить максимальные значения температур и плотности плазмы в окрестности оси пинча. Сравнение количественных данных одномерной теории с экспериментальными результатами в нецилиндрическом Z-пинче привело к важному выводу. Высокие скорости схождения плазмы к оси системы и соответствующие им большие температуры достигаются в эксперименте только в результате действия эффективного механизма выброса плазмы из области, где плазменные параметры оказываются наивысшими. Сравнение показало, что типичен выброс не менее 90% погонной массы плазмы. Такой вывод, очевидно, говорит о значительных отклонениях пинча от цилиндрической симметрии, положенной в основу одномерной задачи. Отклонения от цилиндрической симметрии наблюдались, начиная с самых первых экспериментов. Они были преднамеренно созданы Н. В. Филипповым и сотр. для повышения параметров сжимаемой плазмы и увеличения нейтронного выхода [2]. Термин «нецилиндрический Z-пинч» для названия этих экспериментов введен еще до начала теоретического рассмотрения проблемы. Сделанный выше вывод о выбросе значительной доли массы плазмы из области самого тесного схождения токовой оболочки к оси системы более точно отражает существо происходящего процесса, нежели просто свидетельство об отклонении формы пинча от цилиндрической симметрии. Отметим, что экспериментальное измерение выброса массы весьма сложно, хотя косвенные заключения об этом эффекте (например, наблюдение осевой струи плазмы) существовали давно [3]. Таким образом, стремление к более адекватному теоретическому описанию реальных процессов в нецилиндрическом Z-пинче требует перехода к неодномерной МГД-теории.

Следующий важный вопрос заключался в том, зависимость от какой из двух оставшихся пространственных координат — z или φ (в цилиндрической системе отсчета) — необходимо в первую очередь учесть при постановке задачи? Априори адекватная задача могла быть трехмерной, где зависимости от обеих оставшихся координат играли бы существенную роль. К счастью, на основе экспериментальных данных в теоретической задаче можно ограничиться учетом зависимости всех величин от координаты z , постулируя независимость от φ , т. е. аксиальную симметрию плазмы. Достаточно указать в этой связи на то, что всякое улучшение симметрии пинча в азимутальном направлении закономерно повышает нейтронный выход, т. е. максимальные параметры плазмы [4]. Для обеспечения аксиальной симметрии пинча в начальной стадии разряда предпринимались большие усилия [5]. Напротив, в отклонении начальных условий от цилиндрической симметрии в z -направлении эмпирически существует некоторый, так сказать, оптимум. Имеются и независимые теоретические соображения о различной роли z и φ координат в пинче. Можно ставить вопрос о том, какие возмущения преимущественно разовьются в первоначально цилиндрически симметричном Z -пинче. В линейном приближении возникает задача о неустойчивости границы плазмы с магнитным полем при ускорении границы в сторону плазмы. Используя результаты, полученные еще Крускалом и Шварцшильдом [6], можно прийти к выводу, что возмущения границы в φ -направлении, происходящие вдоль магнитного поля, всегда практически подавлены [7]. Возмущения в z -направлении поперек магнитного поля беспрепятственно развиваются, пока их длина волны достаточно велика, чтобы еще не сказывалось подавляющее воздействие диссипативных процессов, в первую очередь вязкости плазмы [8].

Принимая во внимание изложенные соображения, мы приходим к постановке двумерной МГД-задачи, где все величины зависят от координат r , z и времени t . Такая постановка задачи и некоторые результаты ее численного решения впервые приведены в докладе [4] и затем более полно изложены в статье [9]. Впоследствии близкая по постановке задача применительно к коаксиальному варианту нецилиндрического Z -пинча, разработанному Мейсером [10], решалась Поттером [11]. Отметим также, что в упрощенной модели «снежного плуга» данная задача была сформулирована и решена Ватто и др. [12], а потом Робушем и Дикола [13]*.

В идеализированной теоретической модели нецилиндрического Z -пинча, рассмотренной ниже, будем с самого начала предполагать, что: 1) применимо МГД-описание плазмы; 2) можно не учитывать процессы ионизации, рекомбинации, излучения и отклонения от идеального уравнения состояния, свойственные низкотемпературной плазме; 3) справедлива аксиальная симметрия пинч-эффекта.

* Можно показать, что модель «снежного плуга» следует из МГД-уравнений при профилировании течения перпендикулярно к границе плазмы.

Этим трем основным предположениям сопутствует еще несколько второстепенных идеализаций, связанных с конкретным представлением граничных и начальных условий задачи, а также диссипативных процессов в системе уравнений магнитной гидродинамики. Следует специально подчеркнуть, что в отличие от одномерной теории [1] здесь для определения зависимости полного тока через плазму от времени использовалось электротехническое уравнение, в котором тоже допущены некоторые приближения. Все дополнительные предположения четко оговорены при рассмотрении соответствующих вопросов.

В гл. 1 данной работы изложена постановка двумерной МГД-задачи применительно к идеальной полностью ионизованной дейтериевой плазме. В гл. 2 описан численный метод решения сформулированной задачи. Наконец, в гл. 3 представлены наиболее существенные результаты расчетов, а также сделаны определенные физические выводы и проведено сопоставление с аналогичными расчетами других авторов.

ГЛАВА I

ПОСТАНОВКА МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОМ Z-ПИНЧЕ

§ 1. Описание диссипативных процессов

а. Структура скин-слоя и проводимость плазмы. Классическая проводимость плазмы поперек сильного магнитного поля уменьшается по сравнению с проводимостью вдоль поля, но количественно это уменьшение несущественно из-за эффектов компенсации [14, 15] (σ_{\perp} всего в два раза меньше величины изотропной проводимости плазмы). Однако есть серьезные основания сомневаться в применимости классической теории проводимости при рассматриваемых условиях. Для бесстолкновительных Z-пинчей анализ экспериментальных результатов, данный Л. В. Дубовым и сотр. [16, 17], показал, что токовая скорость электронов в плазме не превышает ионно-звуковой скорости $c_S = (kT_e/m_i)^{1/2}$, умноженной на некоторый коэффициент k_T , зависящий от отношения температур T_e/T_i . В хорошем соответствии с теорией ионно-звуковой неустойчивости в бесстолкновительной плазме коэффициент k_T возрастает с уменьшением отношения T_e/T_i . В работе [17] подобрана аппроксимация этой зависимости: $k_T \approx 75 (T_e/T_i)^{-3/2}$. Отсюда видно, что при равенстве температур токовая скорость электронов может достигать величины тепловой скорости электронов.

Для столкновительной высокотемпературной плазмы не было проведено экспериментальных исследований токовых скоростей электронов и распределений токов. Но теоретически показано [18] (см. также работу [19]), что ограничения токовой скорости могут быть

в этом случае даже более жесткими, чем в отсутствие столкновений электронов. При этом нужно сперва показать, что бесстолкновительное приближение неприменимо в рассматриваемых условиях. В книге [19] приведены соответствующие критерии. Для ионно-звуковой неустойчивости этот критерий имеет вид:

$$d_e^3 n_e m_e / m_i \ll 1,$$

где d_e — дебаевский радиус электронов с концентрацией n_e . Если учесть, что число электронов внутри дебаевской сферы в типичных условиях равно $n_e d_e^3 \approx 10^3$ (например, при $T_e = 10^{6\circ}$ К, $n_e = 6 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$, $d_e = 2 \cdot 10^{-5}$ см, а при $T_e = 10^{7\circ}$ К, $n_e = 6 \cdot 10^{18}$ см $^{-3}$, $d_e = 6 \cdot 10^{-6}$ см), то указанный критерий выполнен. Далее, при равенстве электронной и ионной температур раскочка ионно-звуковых колебаний наступает согласно результатам работы [18] уже при токовой скорости электронов, превышающей всего в несколько раз ионно-звуковую скорость ($k_T \sim 1$). Даже в отсутствие отрыва температур, что ближе всего к рассматриваемой здесь ситуации (см. ниже), следовательно, можно принять, что токовая скорость электронов $v_e = j/n_e e$ нигде и никогда не должна превосходить величину $k_T c_s = k_T (kT/m_i)^{1/2}$, где $k_T \geq 1$. Выполнение требуемого неравенства $v_e \lesssim k_T c_s$ можно обеспечить, вводя эффективную проводимость плазмы $\sigma_e = k_e \sigma_{\perp}$ с некоторым коэффициентом k_e , определяемым сравнением с экспериментом.

Оценим величину k_e применительно к дейтериевой плазме $m_i = m_D = 2m_p$. Токовая скорость $v_e = \frac{j}{n_e e} = \frac{J m_D}{2\pi R \rho e d}$, где толщина скин-слоя $d = \left(\frac{c^2}{4\pi k_e \sigma_{\perp}} \cdot \frac{R}{v} \right)^{1/2}$. Время роста магнитного поля

в оценке d считали равным R/v , что, строго говоря, верно при постоянной скорости границы плазмы v . В интересующих нас условиях скорость границы изменяется достаточно мало (см., например, результаты расчетов работы [1]). Приравнивая скорость v_e величине $k_T c_s$ и подставляя известную формулу для проводимости σ_{\perp} [14], получаем, что*

$$k_e = 14k_T^2 \cdot \frac{c^2 e^4 m_e^{1/2}}{m_p^3} \cdot \frac{R^3 \rho^2}{J^2 (kT)^{1/2} v}. \quad (1.1)$$

Подставим в соотношение (1.1) константы и следующие величины, характерные для плазменного фокуса [7]: $J = 0,7$ ма; $T = 1,2$ кэв; $R = 0,65$ мм; $\rho = 2,4 \cdot 10^{-4}$ э/см 3 ; $v = 3,5 \cdot 10^7$ см/сек. Тогда получим

$$k_e = 10^{-2} k_T^2. \quad (1.2)$$

Интересно отметить, что в правой части соотношения (1.1) стоит величина, пропорциональная $(\rho R^2)^3 R^{-1} J^{-4}$, поскольку по порядку величин в пинче выполняются условия $T \sim J^2 (\rho R^2)^{-1}$, $v \sim (T)^{1/2}$.

* Величина кулоновского логарифма принята постоянной $\lambda_K = 10$.

Здесь ρR^2 — погонная плотность плазмы, которая известна, если определен выброс массы из области фокуса. Кроме того, в формуле для k_e имеется малочувствительная функция радиуса плазмы $J^4 R$, так как ток J в момент наибольшего сжатия снижается с ростом индуктивного сопротивления при уменьшении радиуса R . Согласно (1.2) можно сделать вывод, что в области плазменного фокуса при классической проводимости плазмы ($k_e = 1$) токовая скорость электронов должна на порядок превышать ионно-звуковую ($k_T \approx 10$). Вряд ли это осуществляется в действительности, если принять во внимание указанные выше неустойчивости [18, 19]*.

Пока токовая оболочка находится вдали от оси системы и ударная волна не достигла оси, введение коэффициента k_e излишне. Токовая скорость существенно ниже критического значения. Если подставить в соотношение (1.2) характерные параметры плазмы $J = 1$ ма, $T = 10$ эв, $R = 10$ см, $\rho = 1,2 \cdot 10^{-6}$ г/см³ и $v = 3,5 \cdot 10^6$ см/сек [7], то при $k_e = 1$ получим $k_T \approx 0,10$. Тем не менее основной интерес представляет стадия максимального сжатия плазмы с образованием плазменного фокуса. Именно на этой стадии толщина скин-слоя становится (точнее говоря, до проведения расчетов может стать) сравнима с радиусом плазмы. А в процессе схождения оболочки к оси она заведомо мала по сравнению с характерным расстоянием от внешней границы до фронта ударной волны даже при снижении проводимости на два порядка в соответствии с соотношением (1.2). Нужно также учесть, что энергетический вклад джоулеа нагрева по сравнению с работой пондеромоторных сил чрезвычайно невелик (в оболочке джоулев нагрев зависит от коэффициента k_e следующим образом: $j^2 d/k_e \sigma_{\perp} \sim k_e^{-1/2}$). Поэтому можно утверждать, что введение эффективной проводимости плазмы σ_e с коэффициентом k_e из соотношения (1.2) при $k_T \geq 1$ мало повлияет на процесс схождения токовой оболочки к оси системы. Зато на наиболее важной стадии образования плазменного фокуса использование эффективной проводимости плазмы σ_e ограничит токовую скорость электронов ионно-звуковой скоростью, помноженной на k_T . Тем самым будет учтена роль потенциально возможных неустойчивостей плазмы. В результате расчетов появится возможность уточнить, в какой мере было выполнено условие ограничения токовой скорости электронов.

б. Влияние магнитного поля на вязкость и теплопроводность плазмы. Отрыв температур. Запишем выражение для эффективной проводимости плазмы σ_e :

$$\sigma_e = k_e \sigma_{\perp}. \quad (1.3)$$

Если подставить постоянный множитель k_e из (1.2), приняв для определенности $k_T = 1$, то получим

$$\sigma_e = 10^{-2} \sigma_{\perp}. \quad (1.3')$$

* Сюда еще можно добавить возможность градиентной неустойчивости по аналогии с бесстолкновительной ситуацией, рассмотренной в работе [20].

Не следует все же думать, что обоснованное физическими соображениями снижение проводимости плазмы согласно (1.3) сильно повлияет на основные результаты расчетов, в частности, на вычисление максимальных параметров плазменного фокуса. В действительности рассматриваемая область физических условий такова, что даже проводимость σ_e из (1.3') весьма велика. Это подтверждается непосредственным сравнением результатов последующих расчетов с данными, полученными ранее [9] в предположении бесконечно большой проводимости плазмы. Вплоть до начала второго сжатия можно говорить о совпадении основных характеристик обоих расчетов. Наиболее существенную роль учет конечной проводимости играет для второго (и последующих с течением времени) сжатия плазмы, когда бездиссипативная модель уже утрачивает смысл [9]. Но нельзя забывать, что здесь где-то нарушаются границы применимости МГД-описания плазмы.

Сравним толщину скин-слоя с ларморовским радиусом ионов $r_{\Lambda i} = v_{Ti}/\omega_{\Lambda i}$. Используя в (1.3') выражение для σ_{\perp} , как при получении (1.1), запишем отношение для дейтронов:

$$\frac{r_{\Lambda i}^2}{d^2} = \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{\Lambda i}^2} \cdot \frac{4\pi\sigma_e}{c^2} \cdot \frac{v}{R} = 5,4 \cdot 10^{-3} \frac{c^2 m_p}{m_e^{1/2} e^4} \cdot \frac{(kT)^{5/2} v R}{J^2}. \quad (1.4)$$

Здесь $v_{Ti} = (3kT/2m_D)^{1/2}$ — тепловая скорость дейтронов; $H_{\phi} = 2J/cR$ — напряженность магнитного поля на границе; $\omega_{\Lambda i} = eH_{\phi}/m_D c$ — ларморовская частота дейтронов. Если ввести в формулу (1.4) приведенный выше набор параметров плазменного фокуса, то получим $r_{\Lambda i}^2/d^2 \approx 0,4$. Для стадии схождения токовой оболочки также с указанным выше набором величин соответственно имеем $r_{\Lambda i}^2/d^2 = 3 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, сначала толщина скин-слоя намного превосходит ионный ларморовский радиус, а потом обе величины становятся сравнимыми друг с другом. Последний результат совершенно естествен, если вспомнить условие равенства магнитного и газового давлений $(H_{\phi}^2/8\pi) = (2\rho kT/m_i)$, которое приближенно выполняется на всех стадиях процесса. Легко проверить, что равенство величин $d = Jm_i/2\pi R e v_{Ti}$, где подставлено $v_e = v_{Ti}$, и $r_{\Lambda i} = v_{Ti}/\omega_{\Lambda i}$ практически равнозначно условию равенства давлений. Заметим, что правая часть (1.4) при $v \sim (T)^{1/2}$ и $T \sim J^2 (\rho R^2)^{-1}$ пропорциональна $RJ^4 (\rho R^2)^{-3}$, т. е. изменяется в точности обратно пропорционально правой части соотношения (1.1).

Основной характеристикой влияния магнитного поля на процессы переноса является произведение $\omega_{\Lambda i} \tau_i$, где $\tau_i = l_i/v_{Ti}$ — среднее время свободного пробега, выраженное с помощью известной длины пробега $l_i = (kT)^2/2 n_e e^4 \lambda_K$. Если температура дейтериевой плазмы, в которой выполнено условие равенства магнитного и газового давлений, удовлетворяет неравенству $T > T_{cr}$, где

$$kT_{cr} = 2,2 c^{1/2} e^{3/2} \rho^{1/4}, \quad (1.5)$$

то влияние магнитного поля на процессы переноса в ионной компоненте существенно, так как при этом $\omega_{\Lambda i} \tau_i > 1$. Для значения плотности в плазменном фокусе $\rho = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$ из (1.5) найдем $T_{cr} = 0,31 \text{ кэВ}$. На стадии схождения оболочки, когда $\rho = 1,2 \times 10^{-6} \text{ г/см}^3$, $T_{cr} = 80 \text{ эВ}$.

Отсюда следует, что влияние магнитного поля на процессы переноса в ионной компоненте плазмы может быть значительным на поздней стадии процесса, когда $\omega_{\Lambda i} \tau_i \gg 1$. Однако ранее было показано [при обсуждении формулы (1.4)], что в этом случае $r_{\Lambda i} \sim d$. Строго говоря, для ионов в скин-слое создается кинетическая ситуация. Действительно, давление плазмы, а следовательно, плотность или (и) температура существенно изменяются на расстоянии d , которое по сделанным оценкам удовлетворяет условию

$$d \sim r_{\Lambda i} \ll l_i. \quad (1.6)$$

В рамках гидродинамического приближения тогда представляется наиболее естественным вообще не учитывать замагниченность ионов в коэффициентах переноса. Остается только обсудить некоторую возможную промежуточную стадию процесса, когда одновременно справедливы условия $d \gg r_{\Lambda i}$ и $r_{\Lambda i} \ll l_i$. Формально этот случай осуществляется для проводимости σ_e из (1.3'), но достаточно вспомнить, что на ранних стадиях до образования плазменного фокуса при введении σ_e происходит искусственное завышение толщины скин-слоя. В самом деле, можно сделать следующую оценку для случая классической проводимости дейтериевой плазмы: $d > r_{\Lambda i}$, если $T < T'_{cr}$, где [аналогично (1.5) принято $\rho_{gas} = \rho_{mag}$ и $v = v_{Ti}$

$$kT'_{cr} = 3,1 m_e^{1/4} m_p^{-3/4} e^2 \rho^{1/2} R^{1/2}. \quad (1.7)$$

Если $T'_{cr} < T_{cr}$, данного в (1.5), то обсуждаемая промежуточная область вообще отсутствует. Сравнивая (1.5) и (1.7), получаем условие, при котором $T'_{cr} < T_{cr}$:

$$(\rho R^2)^{1/4} < 0,7 c^{1/2} m_e^{-1/4} m_p^{3/4} e^{-1/2}. \quad (1.8)$$

Левая часть неравенства (1.8) имеет тенденцию уменьшаться в процессе схождения оболочки к оси в результате эффекта выброса массы. Поэтому произведение ρR^2 максимально на ранних стадиях процесса. Подстановка соответствующих параметров $\rho = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^3$ и $R = 10 \text{ см}$ приводит к примерному совпадению обеих частей неравенства (1.8). В результате полученной оценки приходим к заключению, что нет смысла принимать во внимание зависимость коэффициентов переноса ионов от магнитного поля и на отмеченной выше возможной промежуточной стадии процесса. В случае классической проводимости плазмы такая стадия не реализуется.

Если провести аналогичное рассмотрение для электронной компоненты, то можно убедиться, что вся интересующая нас область попадает в интервал неравенств:

$$r_{\Lambda e} \ll l_e; \quad r_{\Lambda e} \ll d, \quad (1.9)$$

которые обеспечивают применимость классической теории диссипативных процессов в сильном магнитном поле. Поэтому для электронной теплопроводности (вклад электронов в вязкость плазмы пренебрежимо мал) можно было бы использовать выражения, полученные в работе [21]. Но электронной теплопроводностью в данной задаче также пренебрежем. Это можно до некоторой степени обосновать. В токовой оболочке произведение $\omega_{\Delta e} \tau_e$ столь велико, что коэффициент электронной теплопроводности практически обращается в нуль. При этом длина δ_e , определяемая как расстояние от внешней границы плазмы до той точки, где $\omega_{\Delta e} \tau_e \sim 1$, во всяком случае на поздней стадии процесса фактически равна радиусу плазмы ($R - \delta_e \ll R$).

Эффект отрыва электронной и ионной температур исследован в одномерной теории [1]. Для наиболее интересующей нас приосевой области этот отрыв не имеет существенного значения. Он уменьшается по мере улучшения условий применимости МГД-приближения описания плазмы. По-видимому, нет смысла принимать во внимание отрыв температур ионов и электронов для весьма малого значения параметра $\alpha = \rho_0^2 / \rho_0^2 R_0$ в рассматриваемой ниже задаче, характеризующего «гидродинамичность» плазмы [1]. Тем более бессмысленно учитывать эффект отрыва в задаче с нулевой электронной теплопроводностью. В общем представляется, что использование однетемпературного приближения не приведет к заметным погрешностям в определении температуры плазмы вне скин-слоя. Внутри скин-слоя однетемпературное приближение имеет более грубый смысл. Тем не менее значительного отрыва температур в токовом слое согласно одномерным расчетам [1] при наличии джоулева нагрева не образуется. Итак, в последующей задаче ограничимся такой моделью плазмы, в которой не различаются обе температуры:

$$T_i = T_e = T. \quad (1.10)$$

Отметим, что возможна более точная постановка задачи в отношении учета диссипативных процессов в электронной компоненте плазмы. В более точной модели необходимо одновременно учитывать отрыв температур и электронную теплопроводность.

Сделаем выводы из сказанного выше. Во-первых, из сравнения с экспериментом была выбрана эффективная проводимость плазмы, меньшая классической величины на два порядка. Этим выбором обеспечено ограничение токовой скорости электронов ионно-звуковой скоростью на наиболее важной стадии образования плазменного фокуса. Во-вторых, было показано, что в вязкости и теплопроводности ионной компоненты плазмы нет смысла учитывать влияние магнитного поля, полученное в классической теории переноса. В-третьих было аргументировано, почему следует пренебречь электронной теплопроводностью и отрывом температур на первом этапе решения задач. В заключение во избежание недоразумений подчеркнем, что нет «жесткой привязки» сделанных выводов к использованному конкретному набору параметров плазмы в пинче, так что эти выводы сохраняются во всей типичной области эксперимента.

§ 2. Двумерные уравнения магнитной гидродинамики (МГД-модель)

а. Уравнение магнитного поля в плазме. Запишем уравнения Максвелла в квазистационарном приближении:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (2.1)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad (2.2)$$

и обобщенный закон Ома в виде [14, 15]

$$\mathbf{j} = \sigma_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \chi [\mathbf{j}\mathbf{H}] + \chi c \operatorname{grad} p_e \right), \quad (2.3)$$

где σ_e — эффективная проводимость плазмы в сильном магнитном поле [см. формулы (1.3) и (1.3')]; $\chi = \frac{1}{n_e e c} = \frac{2m_p}{\rho e c}$ — коэффициент Холла; $p_e = n_e kT = \rho kT / 2m_p$ — электронное давление*.

Примем во внимание в последующих преобразованиях зависимость σ_e и χ от координат и времени. Обозначим

$$\lambda = c^2 / 4\pi \sigma_e; \quad \kappa_c = c^2 \chi / 4\pi. \quad (2.4)$$

Подставляя \mathbf{E} из (2.3) в уравнение (2.1) и исключая плотность тока \mathbf{j} с помощью (2.2), получаем векторное уравнение для магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = & -\operatorname{rot} (\lambda \operatorname{rot} \mathbf{H}) + \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \operatorname{rot} \{ \kappa_c [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \} + \\ & + 4\pi \operatorname{rot} (\kappa_c \operatorname{grad} p_e). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя тождества векторного анализа:

$$\operatorname{rot} (\lambda \operatorname{rot} \mathbf{H}) = \lambda \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + [\operatorname{grad} \lambda \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}];$$

$$\operatorname{rot} (\kappa_c \operatorname{grad} p_e) = [\operatorname{grad} \kappa_c \cdot \operatorname{grad} p_e];$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \{ \kappa_c [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \} = & \kappa_c \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] + [\operatorname{grad} \kappa_c \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]] = \\ = & \kappa_c \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] + \operatorname{rot} \mathbf{H} (\operatorname{grad} \kappa_c \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{grad} \kappa_c), \end{aligned}$$

запишем (2.5) в более удобной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = & -\lambda \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - [\operatorname{grad} \lambda \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}] + \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \kappa_c \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] - \\ & - \operatorname{rot} \mathbf{H} (\operatorname{grad} \kappa_c \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{grad} \kappa_c) + 4\pi [\operatorname{grad} \kappa_c \cdot \operatorname{grad} p_e]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

* Огрубление процессов диссипации в электронной компоненте плазмы, принятое в § 1, продолжается, коль скоро используется обобщенный закон Ома (2.3). Действительно, сравнивая (2.3) с соответствующим выражением, полученным в работе [21], видим, что в (2.3) имеет место округление нескольких численных коэффициентов из более строгого выражения.

Последние четыре члена в уравнении (2.6) назовем холловскими, поскольку они исчезают при условии $\kappa_c = 0$.

Отметим следующее свойство рассматриваемых в цилиндрической системе координат уравнений поля. Пусть в какой-либо момент времени t тождественно равны нулю компоненты поля H_r и H_z . Тогда из (2.2) сразу следует, что $j_\varphi = 0$. Согласно (2.3) также обращается в нуль азимутальная компонента электрического поля E_φ , если только дополнительно предполагается аксиальная симметрия задачи, $\partial/\partial\varphi = 0$ (для исчезновения градиента давления). Наконец, рассматривая уравнение (2.1), заключаем, что $(\partial H_r/\partial t) = (\partial H_z/\partial t) = 0$. Итак, если при задании начальных условий в момент $t = 0$ $H_r = H_z = 0$, то при наличии аксиальной симметрии задачи эти компоненты поля (H_r , H_z) тождественно равны нулю в любой последующий момент времени $t > 0$ (также $j_\varphi \equiv E_\varphi \equiv 0$).

Ограничиваясь классом решений аксиально симметричной задачи с нулевыми значениями величин H_r и H_z , выпишем азимутальную компоненту уравнения (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (v_r H_\varphi) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z H_\varphi) + \\ & + H_\varphi \left(\frac{2\kappa_c}{r} - \frac{\partial \kappa_c}{\partial r} \right) \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + H_\varphi \frac{\partial \kappa_c}{\partial z} \left(\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \right) + \\ & + 4\pi \left(\frac{\partial \kappa_c}{\partial z} \cdot \frac{\partial p_e}{\partial r} - \frac{\partial \kappa_c}{\partial r} \cdot \frac{\partial p_e}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как видно, холловские члены сохранились в уравнении (2.7) только в результате учета переменности коэффициента κ_c и цилиндрической поправки, тогда как остальные члены, включая старшие производные поля второго порядка [см. формулу (2.6)], выпали из окончательного уравнения. Такой случай можно трактовать как вырожденный по отношению к эффекту Холла, а оставшиеся в уравнении (2.7) второстепенные члены без существенной с физической точки зрения погрешности совсем выбросить. Таким образом ($\kappa_c \equiv \equiv 0$), от уравнения (2.7) перейдем к окончательному уравнению для единственной ненулевой компоненты магнитного поля H_φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial r} (v_r H_\varphi) - \frac{\partial}{\partial z} (v_z H_\varphi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

В заключение запишем остальные ненулевые характеристики электромагнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} E_r = & \frac{1}{c} \left(v_z H_\varphi - \lambda \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right); & E_z = & \frac{1}{c} \left[\frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - v_r H_\varphi \right]; \\ j_r = & -\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}; & j_z = & \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Рассмотрим далее уравнения движения.

б. Уравнения движения плазмы. Уравнение движения плазмы с учетом пондеромоторной и вязкой сил имеет вид

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] + \text{Div } \sigma. \quad (2.10)$$

Дивергенция вязкого тензора σ в ортогональных криволинейных координатах ξ^i дается формулой [22]

$$(\text{Div } \sigma)_k = \frac{1}{h_k} \left[\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3 h_k}{h_i} \sigma_{ik} \right) - \sigma_{ii} \frac{\partial \ln h_i}{\partial \xi^k} \right], \quad (2.11)$$

т. е. выражается с помощью коэффициентов Ламэ, квадраты которых

$$h_i^2 = (\partial x / \partial \xi^i)^2 + (\partial y / \partial \xi^i)^2 + (\partial z / \partial \xi^i)^2. \quad (2.12)$$

Здесь x, y, z — прямоугольные декартовы координаты. В формуле (2.11) правая часть суммируется по индексу i . Компоненты симметричного вязкого тензора σ с изотропным коэффициентом ионной вязкости η в свою очередь выражаются через компоненты скорости v_{ξ^i} и их производные следующим образом [22, 23]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = \eta \left[\frac{1}{h_k} \cdot \frac{\partial v_{\xi^i}}{\partial \xi^k} + \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial v_{\xi^k}}{\partial \xi^i} - \frac{1}{h_i h_k} \left(v_{\xi^i} \frac{\partial h_i}{\partial \xi^k} + v_{\xi^k} \frac{\partial h_k}{\partial \xi^i} \right) + \right. \\ \left. + 2\delta_{ik} \frac{v_{\xi^\lambda}}{h_\lambda} \cdot \frac{\partial \ln h_\lambda}{\partial \xi^\lambda} \right] - \frac{2}{3} \eta \delta_{ik} \left[\frac{v_{\xi^\lambda}}{h_\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} \ln (h_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} \left(\frac{v_{\xi^\lambda}}{h_\lambda} \right) \right], \quad (2.13) \end{aligned}$$

причем в (2.13) нужно суммировать по индексу λ . Вторая квадратная скобка в (2.13) появляется при учете сжимаемости плазмы, тогда как выражение в первой квадратной скобке соответствует несжимаемому случаю. В прямоугольных декартовых координатах из (2.13) следует хорошо известное выражение тензора вязкости идеального газа с равным нулю вторым коэффициентом вязкости [24].

Применим общие формулы (2.11) — (2.13) к цилиндрической системе координат, т. е. при $\xi^1 = r$, $\xi^2 = \varphi$, $\xi^3 = z$. Тогда согласно (2.12) $h_1 = 1$, $h_2 = r$ и $h_3 = 1$. Запишем при помощи (2.11) компоненты вязкой силы сразу в случае аксиальной симметрии:

$$(\text{Div } \sigma)_r = \frac{\partial \sigma_{ir}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}; \quad (2.14)$$

$$(\text{Div } \sigma)_\varphi = \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r}; \quad (2.15)$$

$$(\text{Div } \sigma)_z = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r}. \quad (2.16)$$

Из формулы (2.13) находим компоненты вязкого тензора:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \eta \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) \right]; \\ \sigma_{zz} &= \eta \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) \right]; \\ \sigma_{rz} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \eta \left[2 \frac{v_r}{r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) \right]; \\ \sigma_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right); \quad \sigma_{z\varphi} = \eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

Азимутальная компонента пондеромоторной силы исчезает, потому что тождественно равны нулю составляющие поля H_r и H_z . Поэтому скорость вращения плазмы v_φ удовлетворяла бы уравнению, которое получается, если в соотношении (2.10) раскрыть слева полную производную по времени и подставить в правую часть вязкую силу из (2.15) и (2.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (r v_\varphi) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \left[\eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Вязкие силы естественно исчезают при твердотельном законе вращения $v_\varphi = \omega_0 r$. Во всех остальных случаях они приводят к перераспределению начального момента вращения $r v_\varphi$. Однако если в начальный момент времени $t = 0$ предположить отсутствие вращения плазмы ($v_\varphi = 0$), то согласно (2.19) компонента скорости v_φ тождественно исчезает и для произвольного момента времени $t > 0$. Здесь имеется полная аналогия с компонентами поля H_r и H_z . При $v_\varphi \equiv 0$ в радиальной составляющей уравнения движения равна нулю центробежная сила. Запишем теперь оставшиеся уравнения движения (2.10), раскрывая в них полные производные по времени и пондеромоторную силу с учетом (2.9), а также подставляя вязкую силу из соотношений (2.14) и (2.16):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{H_\varphi}{4\pi r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \\ &+ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{H_\varphi}{4\pi} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{aligned} \quad (2.21)$$

При подстановке в (2.20), (2.21) четырех компонент вязкого тензора σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} и σ_{rz} из (2.17) необходимо учесть зависимость коэффициента ионной вязкости от координат r, z , весьма существенную для полностью ионизованной плазмы. Чтобы избежать громоздких формул, не будем делать эту подстановку и рассмотрим последнее энтропийное уравнение плазмы (обычные уравнения непрерывности и уравнения состояния плазмы также появятся на этом этапе).

в. Энтропийное уравнение плазмы. Для определения общей температуры ионов и электронов T (приняв во внимание вязкость и теплопроводность ионной компоненты, а также джоулев нагрев с эффективной проводимостью) запишем энтропийное уравнение

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}) - \mathbf{v} \operatorname{Div} \sigma - \operatorname{div} \mathbf{F} + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma_e} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2. \quad (2.22)$$

В этом уравнении фигурирует поток энергии из-за ионной теплопроводности \mathbf{F} , который в случае изотропного коэффициента теплопроводности ν имеет вид

$$\mathbf{F} = -\nu \operatorname{grad} T. \quad (2.23)$$

Правую часть (2.22) необходимо записать в цилиндрической системе координат с учетом аксиальной симметрии. По правилам тензорного дифференцирования в любых ортогональных криволинейных координатах диссипацию энергии из-за вязкости можно представить в виде [22, 23]

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}) - \mathbf{v} \operatorname{Div} \sigma = \sigma_{ik} \frac{h_k}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{v_{\xi^k}}{h_k} \right) + \frac{v_{\xi^k}}{h_k} \sigma_{ii} \frac{\partial \ln h_i}{\partial \xi^k} \quad (2.24)$$

с суммированием по обоим индексам i и k . В цилиндрической системе координат из (2.24) получим

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}) - \mathbf{v} \operatorname{Div} \sigma = \sigma_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma_{rz} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{v_r}{r}, \quad (2.25)$$

причем компоненты тензора σ_{ik} определены соотношениями (2.17).

Воспользуемся термодинамическим тождеством

$$T dS = d\mathcal{E} + p d(1/\rho), \quad (2.26)$$

где \mathcal{E} — внутренняя энергия на единицу массы плазмы, и уравнением непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) = 0, \quad (2.27)$$

тогда левую часть (2.22) можно преобразовать к виду

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} - \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} + p \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right). \quad (2.28)$$

При преобразовании (2.28) энтропийное уравнение (2.22) становится уравнением для определения температуры T , если еще присоединить уравнения состояния полностью ионизованной идеальной дейтериевой плазмы:

$$\rho = (k/m_p)\rho T; \mathcal{E} = (3/2)(k/m_p)T. \quad (2.29)$$

Подставляя (2.23), (2.25) и (2.28) в уравнение (2.22) и учитывая определение (2.4), получаем уравнение для температуры в координатном виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & -p \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) + \sigma_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma_{rz} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \\ & + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r v \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\lambda}{4\pi} \left[-\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

причем оператор $d/dt = \partial/\partial t + v_r \partial/\partial r + v_z \partial/\partial z$ (от любой скалярной функции).

Таким образом, в этом параграфе сформулирована полная система дифференциальных уравнений МГД-модели для рассматриваемой задачи. В нее входят: уравнение магнитного поля (2.8) (вырожденный эффект Холла игнорируется и введена эффективная проводимость плазмы); уравнения движения (2.20), (2.21) вместе с компонентами вязкого тензора (2.17) (учтена изотропная вязкость ионной компоненты плазмы); энтропийное уравнение (2.30) (изотропные ионные вязкость и теплопроводность, а также джоулев нагрев дают вклад в неадиабатические члены уравнения); наконец, уравнение непрерывности (2.27) и уравнения состояния (2.29). Существенное значение имеет предположение о том, что в начальный момент времени равны нулю компоненты поля H_r и H_z и компонента скорости v_φ .

§ 3. Закон сохранения энергии и электротехническое уравнение

а. Интегральный закон сохранения энергии в плазме. Энтропийное уравнение (2.22) эквивалентно локальному закону сохранения энергии [25]. Большое значение при численном решении задачи имеет интегральный закон сохранения энергии, когда интегрирование проведено по всей области пространства, занятой плазмой. В движущейся плазме эта область с течением времени изменяется. Ниже приведен вывод интегрального закона в объеме плазмы, ограниченной движущимися внешними границами. Для более общего случая различных температур ионов и электронов этот вывод дан

в работе [26]. Из уравнений (2.22), (2.26), (2.27) и (2.10) выводится локальный закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(\mathcal{E} + \frac{v^2}{2} \right) = \operatorname{div} [(\sigma - p) \mathbf{v} - \mathbf{F}] + \\ + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{v} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]) + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma_e} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Проинтегрируем уравнение (3.1) по всему объему плазмы. Для этого введем лагранжеву переменную $dm = \rho dV$ и предположим сохранение полной массы плазмы:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} \left(\mathcal{E} + \frac{v^2}{2} \right) \rho dV = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathcal{E} + \frac{v^2}{2} \right) dm = \frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{E} + \frac{v^2}{2} \right) dm = \\ = - \oint [(\sigma - p) \mathbf{v} + \mathbf{F}] d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{v} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]) dV + \\ + \frac{c^2}{16\pi^2} \int \frac{(\operatorname{rot} \mathbf{H})^2}{\sigma_e} dV. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Кроме того, для изменения энергии магнитного поля в квазистационарном случае в соответствии с уравнениями поля (2.1) и (2.2) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H^2}{8\pi} \right) = -(\mathbf{jE}) - \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \quad (3.3)$$

Проинтегрируем (3.3) по переменному объему плазмы и добавим для получения полной производной по времени с обеих сторон член

$$\int \left(\mathbf{v} \operatorname{grad} \frac{H^2}{8\pi} \right) dV.$$

Используя уравнение непрерывности (2.27) и вводя лагранжеву переменную m , находим:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} \left(\frac{H^2}{8\pi\rho} \right) \rho dV - \int \frac{H^2}{8\pi} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \frac{d}{dt} \int \frac{H^2}{8\pi\rho} dm - \int \frac{H^2}{8\pi} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \\ = - \int (\mathbf{jE}) dV - \oint \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] d\mathbf{S} + \int \left(\mathbf{v} \operatorname{grad} \frac{H^2}{8\pi} \right) dV. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда выражаем изменение полной энергии магнитного поля в переменном объеме, занятом плазмой:

$$\frac{d}{dt} \int \frac{H^2}{8\pi\rho} dm = - \int (\mathbf{jE}) dV - \oint \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] d\mathbf{S} + \oint \mathbf{v} \frac{H^2}{8\pi} d\mathbf{S}. \quad (3.5)$$

При помощи закона Ома (2.3) (при $\chi = 0$) исключим из (3.5) вектор электрического поля \mathbf{E} и введем обозначение (2.4). Затем сло-

жим интегральные соотношения (3.2) и (3.5). В этом случае обращается в нуль сумма всех объемных интегралов*:

$$\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{v} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]) dV + \frac{c^2}{16\pi^2} \int \frac{(\text{rot } \mathbf{H})^2}{\sigma_e} dV - \int (\mathbf{jE}) dV = 0. \quad (3.6)$$

В результате сокращения (3.6) в правой части суммарного уравнения остаются лишь поверхностные интегралы по всей внешней границе плазмы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{E} + \frac{v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi\rho} \right) dm = - \oint [p - \sigma] \mathbf{v} + \mathbf{F} d\mathbf{S} - \\ - \frac{1}{4\pi} \oint \lambda [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \oint (\mathbf{vH}) \mathbf{H} d\mathbf{S} - \oint \mathbf{v} \frac{H^2}{8\pi} d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В рассматриваемом случае граница плазмы представляет собой аксиально симметричную поверхность $R(z, t)$, а функции $v_\varphi \equiv H_r \equiv H_z \equiv 0$ (с учетом начальных условий). Запишем теперь интегральный закон сохранения энергии (3.7) в цилиндрической системе координат, учитывая, что вектор $d\mathbf{S}$ имеет компоненты:

$$d\mathbf{S} = \left\{ R d\varphi dz, 0, -R dz \frac{\partial R}{\partial z} dz \right\}. \quad (3.8)$$

Интегрируя сразу по углу φ , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{E} + \frac{v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{H_\varphi^2}{8\pi\rho} \right) \rho r dr dz = - \int_{(z)} \left[(pv_r - \sigma_{rr} v_r - \sigma_{rz} v_z + F_r) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{4\pi} \cdot \frac{H_\varphi}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi)_{r=R} + v_r \frac{H_\varphi^2}{8\pi} \right] R dz + \int_{(z)} \left[(pv_z - \sigma_{rz} v_r - \right. \\ \left. - \sigma_{zz} v_z + F_z) - \frac{\lambda}{4\pi} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + v_z \frac{H_\varphi^2}{8\pi} \right] R \frac{\partial R}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Криволинейный интеграл по z распространяется вдоль всей границы плазмы от $z_{\text{мин}}$ до $z_{\text{макс}}$. Отметим, что третий поверхностный интеграл в (3.7) равен нулю, так как силовые линии поля в данном случае параллельны поверхности плазмы.

В заключение отметим, что потоки электромагнитной энергии через границу плазмы в (3.7) нельзя разделить на две части, соответствующие джоулеву нагреву и работе пондеромоторных сил, хотя в предельных случаях ($\lambda \rightarrow 0$ или $v \rightarrow 0$) существует лишь тот или иной эффект. Как видно из соотношения (3.5), только сумму джоулева нагрева и работы пондеромоторных сил внутри плазмы, равную согласно (3.6) интегралу $\int (\mathbf{jE}) dV$, можно представить в виде суммы потоков в (3.7).

* Дополнительная работа электрического поля в движущемся проводнике из-за присутствия члена $(1/c) [\mathbf{v} \mathbf{H}]$ равна работе пондеромоторной силы, взятой с обратным знаком [25].

б. Полный закон сохранения энергии электромагнитного поля и электротехническое уравнение. Электротехническое уравнение можно вывести из энергетических соображений, распространенных на всю систему, включающую газовый проводник и внешнюю электрическую цепь. Для объема, первоначально заполненного дейтериевым газом с постоянной плотностью и ограниченного металлическими электродами и изоляторами, согласно (3.3) справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\int_{(V_0)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H^2}{8\pi} \right) dV = \frac{d}{dt} \int_{(V_0)} \frac{H^2}{8\pi} dV = - \int_{(V_0)} (\mathbf{jE}) dV - \oint_{(S_0)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}, \quad (3.10)$$

где объемные интегралы берутся по всему постоянному объему (V_0), а поверхностный интеграл ($\mathbf{\Pi}$ — плотность потока электромагнитной энергии) распространяется на все твердые поверхности (электроды и изолятор), ограничивающие газовый объем (S_0). Если принять, что вся энергия магнитного поля тока в плазме сосредоточена внутри газового объема, то интеграл $\oint_{(S_0)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}$ можно выразить через изменение энергии во внешней электрической цепи. В квазистационарном приближении для цепи имеем [25]:

$$\oint_{(S_0)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L_0 J^2}{2c^2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C_0} \right) + R_{\Omega_0} J^2. \quad (3.11)$$

Здесь L_0 — самоиндукция; C_0 — емкость; R_{Ω_0} — сопротивление. Величина заряда на конденсаторах Q связана с полным током J соотношением

$$J = - \frac{dQ}{dt}; \quad Q = Q_0 - \int_0^t J dt' = C_0 U_0 - \int_0^t J dt', \quad (3.12)$$

поскольку начальный заряд конденсаторов Q_0 можно выразить через их начальное напряжение U_0 . Подставляя величину Q из (3.12) в соотношение (3.11), получаем скорость потерь энергии из газового объема:

$$\oint_{(S_0)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \frac{L_0 J}{c^2} \cdot \frac{dJ}{dt} - J \left(U_0 - \frac{1}{C_0} \int_0^t J dt' \right) + R_{\Omega_0} J^2. \quad (3.13)$$

Кроме того, используя закон Ома с $\chi = 0$, исключим электрическое поле \mathbf{E} и перейдем от (3.10) к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{(V_p)} \frac{H^2}{8\pi} dV + \int_{(V_a)} \frac{H^2}{8\pi} dV \right) = - \int_{(V_p)} \frac{j^2}{\sigma_e} dV + \frac{1}{c} \times \\ \times \int_{(V_p)} (\mathbf{j} [\mathbf{vH}]) dV - \oint_{(S_0)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = - \int_{(V_p)} \frac{j^2}{\sigma_e} dV - \frac{1}{c} \int_{(V_p)} (\mathbf{v} [\mathbf{jH}]) dV - \oint_{(S_0)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

С левой стороны соотношения (3.14) интеграл разбит на два слагаемых: первый интеграл берется по объему, занятому плазмой (V_p), а второй — по оставшейся вакуумной части газового объема (V_B). Очевидно, что в гидродинамической модели происходит полное сгребание плазмы токовой оболочкой. Два интеграла по объему V_p в правой части (3.14) имеют смысл джоулева нагрева и работы пондеромоторных сил, взятых с обратными знаками [по поводу преобразования второго интеграла см. соотношение (3.6) и примечание на стр. 179]. Интеграл по вакуумной части газового объема можно вычислить по r , так как величина поля в вакууме для рассматриваемой задачи равна $H = H_\varphi = 2J/cr$:

$$\int_{(V_B)} \frac{H_\varphi^2}{8\pi} 2\pi r dr dz = \frac{J^2}{c^2} \int_{z_{\text{мин}}}^{z_{\text{макс}}} \sum_j \ln \frac{R_{ex}^j(z)}{R_{in}^j(z)} dz, \quad (3.15)$$

где R_{ex}^j — радиус внешней границы вакуумного промежутка при данном значении z , а R_{in}^j — радиус внутренней границы. Суммирование по j под интегралом проводится по всем участкам вакуума при данном z , разделенным участками плазмы. Для самого наружного участка внешняя граница совпадает с R_{ex}^o — радиусом газового объема. Суммирование по j в интеграле (3.15) допускает возможность такой сложной конфигурации плазмы, что появляются точки поверхности с $\left| \frac{dR}{dz} \right| \rightarrow \infty$ (при $\frac{d^2R}{dz^2} \neq 0$). Можно сказать, что интегрирование в (3.15) проведено по всему объему, где справедливо указанное выше выражение для магнитного поля H_φ . В соответствии с (3.15) введем внешнюю самоиндукцию плазменного проводника:

$$L_p = 2 \int_{z_{\text{мин}}}^{z_{\text{макс}}} \sum_j \ln \frac{R_{ex}^j(z)}{R_{in}^j(z)} dz. \quad (3.16)$$

В действительности, электромагнитная энергия, введенная внутрь плазмы, все же мала по сравнению с энергией поля, заключенной в вакуумной части газового объема и в элементах внешней цепи. Поэтому в первом приближении можно пренебречь в уравнении (3.14) всеми интегралами по плазменному объему (V_p). Тогда из (3.14) после подстановки поверхностного интеграла из (3.13) и использования соотношений (3.15) и (3.16) выведем электротехническое уравнение в простейшем виде:

$$\frac{L_p + L_0}{c^2} \cdot \frac{dJ}{dt} + \frac{J}{2c^2} \cdot \frac{dL_p}{dt} - \left(U_0 - \frac{1}{C_0} \int_0^t J dt' \right) + R_{\Omega 0} J = 0. \quad (3.17)$$

Это уравнение учитывает изменение со временем внешней самоиндукции плазменного проводника L_p .

в. Учет в электротехническом уравнении вклада энергии внутрь плазмы. С учетом электромагнитной энергии, вкладываемой в плазму, электротехническое уравнение запишем в форме:

$$\frac{L_p + L_0}{c^2} \cdot \frac{dJ}{dt} + \frac{J}{2c^2} \cdot \frac{dL_p}{dt} - \left(U_0 - \frac{1}{C_0} \int_0^t J dt' \right) + R_{\Omega 0} J = -\frac{W_p}{J}, \quad (3.18)$$

где скорость изменения энергии из-за присутствия плазмы W_p согласно соотношениям (3.14) и (3.17) равна:

$$W_p = \frac{d}{dt} \int_{(V_p)} \frac{H^2}{8\pi} dV + \int_{(V_p)} \frac{j^2}{\sigma_e} dV + \frac{1}{c} \int_{(V_p)} (\mathbf{v} [\mathbf{jH}]) dV. \quad (3.19)$$

В цилиндрических координатах для рассматриваемой задачи выражений для W_p с учетом (2.4) и (2.9) имеет вид

$$\begin{aligned} W_p = & \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{dt} \int_{(V_p)} H_\varphi^2 r dr dz + \frac{1}{2} \int_{(V_p)} \lambda \left[\left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{H_\varphi}{r} \left(2 \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right) \right] r dr dz - \frac{1}{4} \int_{(V_p)} \left[v_z \frac{\partial H_\varphi^2}{\partial z} + v_r \left(\frac{\partial H_\varphi^2}{\partial r} + 2 \frac{H_\varphi^2}{r} \right) \right] r dr dz. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Правую часть соотношения (3.19) можно записать иначе. Если при помощи уравнения (3.2) ввести характеристики плазмы, то получим из (3.19) альтернативное представление для W_p :

$$W_p = \frac{d}{dt} \int_{(V_p)} \left(\frac{H^2}{8\pi} + \mathcal{E}\rho + \frac{\rho v^2}{2} \right) dV + \int_{(S_p)} [(p - \sigma) \mathbf{v} + \mathbf{F}] dS. \quad (3.21)$$

Отметим, что при подстановке (3.21) в (3.18) приходим к тривиальному закону сохранения энергии для всей системы. На основе интегрального закона сохранения энергии в плазме (3.7) скорость изменения энергии W_p из (3.21) теперь можно выразить только через интегралы по поверхности S_p :

$$W_p = -\frac{1}{4\pi} \oint_{(S_p)} \lambda [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] dS + \frac{1}{4\pi} \oint_{(S_p)} (\mathbf{vH}) \mathbf{H} dS - \oint_{(S_p)} \mathbf{v} \frac{H^2}{8\pi} dS. \quad (3.22)$$

Аналогично (3.20) выражение (3.22) можно представить в координатном виде как криволинейный интеграл вдоль границы плазмы z_p :

$$\begin{aligned} W_p = & \int_{(z_p)} \left[\frac{\lambda}{4\pi} \cdot \frac{H_\varphi}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi)_{r=R} - v_r \frac{H_\varphi^2}{8\pi} \right] R dz - \\ & - \int_{(z_p)} \left(\frac{\lambda}{4\pi} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - v_z \frac{H_\varphi^2}{8\pi} \right) R \frac{\partial R}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Это выражение, естественно, совпадает с (3.9), если в последнем опустить газовые составляющие потоков.

До сих пор при выводе полного электротехнического уравнения (3.18) предполагалось, что весь ток из внешней цепи проходит через плазму. Однако реально положение, когда нарушается контакт внешней цепи и плазмы. Такой разрыв всей цепи может наступить вследствие вторичного пробоя газового промежутка [27] или же в результате захвата магнитного поля при замыкании движущихся отдельных частей токовой оболочки. Явление захвата поля приводит к тому, что вакуумная область газового объема становится многосвязной. Магнитное поле в плазменной перемычке диссипирует за некоторое время, так что внутри плазмы после завершения переходного процесса возникает новый контур тока тороидальной формы, потерявший электромагнитную связь с внешней цепью. При повторном пробое газового промежутка получается тот же результат. Только частично новый контур может проходить в поверхностном слое металлических электродов или в остаточном ионизированном газе объема. Вдоль границы возникшего тороида будет протекать полный ток J' , равный в момент разрыва цепи полному току J . В последующие моменты времени ток J' должен определяться уравнением (3.10), в котором положено $\Pi = 0$. Для тока J' после проведения необходимых преобразований в полном соответствии с (3.18) запишем уравнение

$$\frac{L'_p}{c^2} \cdot \frac{dJ'}{dt} + \frac{J'}{2c^2} \cdot \frac{dL'_p}{dt} = -\frac{W'_p}{J'}. \quad (3.24)$$

Самоиндукция тороида вне проводника L'_p определяется формулой (3.16), а скорость изменения энергии в результате потерь в плазму — соотношением (3.19) [в координатном виде — (3.20)]. В этом случае интегрирование в (3.16) распространяется на объем вакуума, охватываемый тороидальной поверхностью, а интегрирование в (3.19) проводится в объеме плазмы V'_p , непосредственно прилегающем к той же поверхности*. Уравнение (3.24) описывает процесс затухания тока в отсоединенном контуре в результате джоулевых потерь и работы пондеромоторных сил (впрочем, второй фактор может приводить и к генерации тока). К рассматриваемому случаю неприменимы преобразования формулы (3.19), использующие закон сохранения энергии во всей плазме (3.21) — (3.23).

В § 3 выведен интегральный закон сохранения энергии внутри плазмы (3.9), который, в частности, полезен при численном решении задачи. Полный закон сохранения энергии электромагнитного поля всей системы (3.10) использовался для вывода электротехнического уравнения для полного тока J в различных видах: от его

* Определение объема V'_p , относящегося к новому контуру тока, конечно, носит условный характер. Фактически этот объем ограничен некоторой поверхностью, на которой всюду почти равно нулю магнитное поле H_Φ .

простейшей формы (3.17), в которой не учитывается поток электромагнитной энергии в плазму, до уравнения (3.24), где рассмотрен отсоединенный от внешней цепи контур. Поток электромагнитной энергии в плазму W_p [см. правую часть полного электротехнического уравнения (3.18)] был представлен в нескольких эквивалентных видах, в частности, в соотношении (3.22) он выражен только через поверхностные интегралы. Проблема возникновения отсоединенного контура тока весьма сложна; здесь рассмотрен только закон изменения тока в отсоединенном контуре.

§ 4. Начальные и граничные условия МГД-задачи

а. Выбор начальных условий. В выборе начальных и граничных условий будем исходить из соображений простоты и удобства, совместимых с реальными условиями в нецилиндрическом Z-пинче и смыслом МГД-модели (см. § 1—3). На начальной стадии разряда, стадии электрического пробоя, формирования токовой оболочки вблизи изолятора и отрыва от изолятора [28] не выполняются свойства МГД-модели, в частности, предположения о полной ионизации плазмы и о полном сгребании ее токовой оболочкой. Процесс выхода оболочки в верхнюю часть камеры, хотя уже удовлетворяет свойствам МГД-модели, связан со сложной геометрией камеры. При попытке теоретического описания этого процесса пришлось бы включить в расчетную область нижнюю часть камеры, окружающую изолятор, и рассматривать движение расходящейся части токовой оболочки, не играющей существенной роли для конечной стадии разряда. Кроме того, процесс выхода оболочки, несомненно, удовлетворительно описывается упрощенной моделью снежного плуга [12], с помощью которой недавно проведены расчеты для данной геометрии [7]. Конечно, этап появления токовой оболочки в верхней части камеры очень важен, потому что именно на нем создаются непосредственные начальные условия для образования плазменного фокуса. Экспериментально известно, что характер отклонения формы токовой оболочки от цилиндрической симметрии определяет параметры плазменного фокуса. К счастью, положение оболочки над анодом, когда она еще находится вдали от оси камеры, достаточно надежно фиксируется с помощью магнитных и оптических измерений (помимо возможности определить это положение при помощи модели снежного плуга). Таким образом, можно прийти к разумному выводу, что трудоемкий расчет МГД-задачи для описания начальной стадии разряда с выходом токовой оболочки в верхнюю часть камеры совершенно неэффективен и частично необоснован. Примем за начальные условия некоторое положение токовой оболочки, известное или из эксперимента или из приближенного расчета. При этом расходящейся частью оболочки и наличием нижней части камеры вообще пренебрежем. Соответственно при подсчете самоиндукции L_p будем считать, что извне вакуум ограничен плоскостями $z_{\text{мин}} = 0$ и $z_{\text{макс}} =$

z_0 , где z_0 — постоянное расстояние от анода до верхней металлической крышки камеры, и R_{ex}^0 — внешним радиусом камеры. Если начальное положение токовой оболочки достаточно удалено от оси системы (скажем, ее радиус — половина от радиуса анода), то вполне можно пренебречь всей энергией, запасенной в плазме к этому моменту времени ($t = 0$), по сравнению с энергией конечной стадии разряда. В этом же смысле надо понимать и пренебрежение расходящейся частью оболочки и наличием нижней части камеры (их вклад в энергию конечной стадии очень мал).

Итак, сформулируем начальные условия МГД-задачи для расчета конечной стадии разряда. Естественно обобщить соответствующие условия одномерной теории [1]. Пусть в момент $t = 0$ задана произвольная внешняя граница плазмы $\bar{R} = R(z, 0)$, так что область, занятая плазмой, имеет вид:

$$z_0 \geq z \geq 0; R(z, 0) \geq r \geq 0. \quad (4.1)$$

В этой области плазма при $t = 0$ считается неподвижной, немагнитной, холодной и имеющей постоянную плотность:

$$v_r = v_z = 0; H_\varphi = 0; T = 0; \rho = \rho_0. \quad (4.2)$$

Значение ρ_0 совпадает с начальной плотностью газа в камере, если пренебречь захваченной из внешнего объема массой, которая, впрочем, может быть одного порядка с заданной по условиям (4.1) и (4.2). Эффект «сгребания» массы на ранней стадии разряда не очень существен, но в принципе его можно учесть соответствующим увеличением значения ρ_0 . Для решения электротехнического уравнения требуется еще задать ток и убыль заряда конденсаторов в момент $t = 0$:

$$J = J_0; \Delta Q = \int_{-\infty}^0 J dt. \quad (4.3)$$

Рассчитывать начальную самоиндукцию L_p нужно по формуле (3.16) с учетом сделанных выше замечаний о форме и величине вакуумной части газового объема ($t = 0$), так что $L = L_0 + L_p$:

$$L = L_0 + 2 \int_0^{z_0} \ln \frac{R_{ex}^0}{R(z, 0)} dz, \quad (4.4)$$

если ограничиться начальными конфигурациями $R(z, 0)$, у которых всюду $\left| \frac{dR}{dz} \right| < \infty$.

б. Выбор граничных условий. Часть граничных условий является обобщением одномерной задачи, но, кроме того, включаются условия на аноде и верхней крышке камеры, которые совпадают с торцовыми плоскостями рассматриваемой цилиндрической области ($z = 0, z = z_0$). Условия на них, очевидно, можно выбрать разными способами. На границе металла и высокотемпературной плазмы про-

исходят очень сложные физические процессы. Плавление и испарение металла вызываются прогревом его поверхностного слоя джоулевым теплом, ионной и электронной теплопроводностями плазмы, пучками быстрых электронов, излучением и другими возможными механизмами. Однако ясно, что на состояние достаточно отдаленной от электродов плазмы эти явления в пограничном слое могут влиять очень слабо, поскольку речь идет о быстром процессе. Экспериментально подтверждается [27], что скорость распространения паров металла примерно на порядок меньше характерных скоростей плазмы. Поэтому пары успевают заполнить незначительную долю объема камеры, к тому же они отстают от токовой оболочки. Толщина пограничного слоя в самой плазме должна быть порядка длины свободного пробега частиц, что в условиях применимости МГД-приближения весьма мало. Достаточно полное описание реального пограничного слоя плазма — металл далеко выходит за рамки данной задачи. Поэтому правильнее всего так сформулировать граничные условия, чтобы вообще предотвратить возникновение какого-либо пограничного слоя около электродов. В рамках МГД-уравнений с учетом диссипативных процессов это можно сделать, в частности, задав зеркальные условия. При $z = 0$ и $z = z_0$ положим:

$$\left. \begin{aligned} v_z = 0; \quad \partial v_r / \partial z = 0; \quad \partial T / \partial z = 0; \\ \partial \rho / \partial z = 0; \quad \partial H_\phi / \partial z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Симметрия давления с учетом (4.5) следует из уравнения состояния. Заметим, что обычное условие для вязкой жидкости $v = 0$ привело бы в соответствии со сказанным к иллюзорному уточнению задачи, а в практическом смысле оказалось бы крайне неудобным из-за возникновения узкого пограничного слоя.

На внешней границе плазмы прежде всего запишем условие обращения в нуль обеих компонент плотности потока импульса. В системе отсчета, движущейся с веществом, это является условием отсутствия действующей силы [24], что должно выполняться на свободной внешней границе плазмы с вакуумом [1]:

$$pn_r - \sigma_{ri}n_i = 0; \quad pn_z - \sigma_{zi}n_i = 0. \quad (4.6)$$

В (4.6) входит единичный вектор внешней нормали к поверхности плазмы \mathbf{n} с компонентами n_r и n_z , которые, очевидно, выражаются с помощью компонент $d\mathbf{S}$ из (3.8):

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|} = \frac{d\mathbf{S}}{Rd\varphi dz \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2}} \times \left\{ 1, 0, -\frac{\partial R}{\partial z} \right\}. \quad (4.7)$$

При подстановке вектора \mathbf{n} из (4.7) в соотношения (4.6) получаем два условия при $r = R(z, t)$:

$$(p - \sigma_{rr}) + \sigma_{rz} \frac{\partial R}{\partial z} = 0; \quad (p - \sigma_{zz}) \frac{\partial R}{\partial z} - \sigma_{rz} = 0. \quad (4.8)$$

К соотношениям (4.8) на внешней границе плазмы нужно добавить условия для температуры и магнитного поля. С учетом (4.7) имеем:

$$\left. \begin{aligned} n_r \frac{\partial T}{\partial r} + n_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \\ H_\varphi = \frac{2J}{cR(z, t)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

С учетом соотношений (4.8) и (4.9) в законе сохранения энергии (3.9) остаются только члены, обусловленные потоком электромагнитной энергии через границу плазмы. На границах плазмы $z = 0$ и $z = z_0$ исчезают вообще все потоки энергии, если принять во внимание условия (4.5). Следовательно, закон сохранения энергии (3.9) при выбранных граничных условиях (4.5), (4.8) и (4.9) приобретает простой вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{E} + \frac{v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{H_\varphi^2}{8\pi\rho} \right) \rho r dr dz = \\ & = - \int_{(z_p)'} \left[-\frac{\lambda}{4\pi} \cdot \frac{H_\varphi}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi)_{r=R} + v_r \frac{H_\varphi^2}{8\pi} \right] R dz + \\ & + \int_{(z_p)'} \left(-\frac{\lambda}{4\pi} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + v_z \frac{H_\varphi^2}{8\pi} \right) R \frac{\partial R}{\partial z} dz, \end{aligned} \quad (4.10)$$

причем интеграл берется только вдоль свободной границы плазмы с вакуумом [по области $(z_p)'$]. Этот выбор граничных условий не отражается на выражениях W_p (3.20) и (3.23) [просто отождествляются $(z_p)'$ и (z_p)].

Осталось записать граничные условия при $r = 0$, вытекающие из ограниченности всех величин на оси системы:

$$v_r = 0; \quad \partial v_z / \partial r = 0; \quad \partial T / \partial r = 0; \quad \partial \rho / \partial r = 0; \quad H_\varphi = 0. \quad (4.11)$$

По сравнению с одномерным случаем [1] здесь дополнительно должно выполняться равенство $\partial v_z / \partial r = 0$, чтобы обратилась в нуль величина σ_{rz} из (2.17) при $r = 0$. Этого достаточно для ограниченности правой части уравнения движения (2.21).

Наиболее интересно применить МГД-модель для рассмотрения конечной стадии разряда, тогда как начальную стадию при необходимости можно описать упрощенной моделью снежного плуга. В соответствии с этим в начальный момент для МГД-задачи считается, что положение токовой оболочки в верхней части камеры известно, например, из эксперимента. При формулировке начальных условий

делается существенное упрощение: не учитываются энергия плазмы и распределение ее плотности внутри токовой оболочки. Граничными условиями задачи игнорируются сложные физические процессы на границе металл — плазма. Таково условие зеркальной симметрии, которое предотвращает возникновение пограничного слоя в плазме. Внешняя граница плазмы считается свободной границей с вакуумом, так что на ней исчезают извне приложенная сила и поток теплопроводности. Магнитное поле на внешней границе плазмы связано с полным током, для определения которого решается электротехническое уравнение с подходящими начальными данными. Выбор начальных и граничных условий в целом обеспечивает корректное описание процесса образования плазменного фокуса.

§ 5. Безразмерная форма уравнений и завершение постановки МГД-задачи

а. Безразмерная форма МГД-уравнений. Коэффициенты вязкости, теплопроводности и коэффициент диффузии магнитного поля дейтериевой плазмы запишем в следующем виде [1] (см. также § 1):

$$\eta = B(kT)^{5/2}; \quad \nu = D(kT)^{5/2}; \quad \lambda = E(kT)^{-3/2}. \quad (5.1)$$

Постоянные B и D определяются в классической теории ионной вязкости и теплопроводности для изотропного случая. Постоянная E согласно соотношению (1.3') дается формулой $E = 10^2 E_{cl}$, где E_{cl} соответствует классической проводимости σ_{\perp} . Таким образом, имеем

$$B = 1,4 \cdot 10^{24}; \quad D = 2,4 \cdot 10^{32}; \quad E = 1,7 \cdot 10^{-9}. \quad (5.2)$$

Запишем все физические величины в безразмерном виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} &= r/R_0; \quad \tilde{z} = z/R_0; \quad \tilde{t} = t/t_0; \quad \tilde{v}_r = v_r/v_0; \\ \tilde{v}_z &= v_z/v_0; \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_0; \\ \tilde{p} &= p/p_0; \quad \tilde{T} = T/T_0; \quad \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0; \quad \tilde{H}_{\varphi} = H_{\varphi}/H_0; \\ \tilde{J} &= J/J_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

при этом независимыми будут только R_0 , ρ_0 и J_0 , а остальные единицы связаны с ними соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 2J_0/cR_0; \quad p_0 = H_0^2/4\pi; \\ v_0 &= (p_0/\rho_0)^{1/2}; \quad t_0 = R_0/v_0; \quad T_0 = (m_p/k) \cdot (p_0/\rho_0); \\ \mathcal{E}_0 &= p_0/\rho_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Запишем теперь, используя соотношения (5.3) и (5.4), всю систему МГД-уравнений, включающую согласно § 2 уравнение магнитного поля (2.8), уравнения движения (2.20), (2.21) вместе с определениями (2.17), энтропийное уравнение (2.30), уравнения непрерыв-

ности (2.27) и состояния (2.29). Так как далее в основном фигурируют безразмерные величины из (5.3), для простоты записи опустим волнистые черточки над ними. В указанной выше последовательности запишем МГД-уравнения:

$$\frac{dH_\Phi}{dt} + H_\Phi \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rH_\Phi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial H_\Phi}{\partial z} \right); \quad (5.5)$$

$$\rho \frac{dv_r}{dt} + \frac{H_\Phi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rH_\Phi) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\Phi\Phi}}{r}; \quad (5.6)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} + H_\Phi \frac{\partial H_\Phi}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r}; \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & -p \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) + \sigma_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma_{rz} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \\ & + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \sigma_{\Phi\Phi} \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r\nu \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + \lambda \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} rH_\Phi \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\Phi}{\partial z} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) = 0; \quad (5.9)$$

$$p = \rho T; \quad \mathcal{E} = 3T/2, \quad (5.10)$$

причем компоненты вязкого тензора в полном соответствии с соотношениями (2.17) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{4}{3} \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_r}{r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right); \\ \sigma_{zz} &= \frac{4}{3} \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_r}{r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right); \\ \sigma_{\Phi\Phi} &= \frac{4}{3} \eta \left(\frac{v_r}{r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right); \\ \sigma_{rz} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Безразмерные коэффициенты диссипации λ , ν и η в уравнениях (5.5), (5.8) и (5.11) определяются в соответствии с (5.1) выражениями:

$$\lambda = E^* T^{-3/2}; \quad \nu = D^* T^{5/2}; \quad \eta = B^* T^{5/2}, \quad (5.12)$$

где постоянные численные множители равны:

$$E^* = (E/m_p^{3/2}) (1/\alpha\beta); \quad D^* = (Dm_p^{7/2}/k) \alpha; \quad B^* = Bm_p^{5/2} \alpha. \quad (5.13)$$

В последние выражения вошли две характерные комбинации из основных единиц измерения:

$$\alpha = \rho_0^2 / \rho_0^3 R_0; \quad \beta = \rho_0 R_0^2, \quad (5.14)$$

физический смысл которых был указан раньше [1] ($\alpha \sim \frac{l_{i,e}}{R_0}$;

$$\alpha\beta \sim \frac{R_0}{r_{\Lambda i, \Lambda e}} \cdot \frac{l_{i,e}}{r_{\Lambda i, \Lambda e}},$$

где $l_{i,e}$ и $r_{\Lambda i, \Lambda e}$ — пробег и ларморовский радиус ионов или электронов соответственно).

б. Начальные и граничные условия в безразмерном виде. Начальные условия (4.2) запишем в безразмерном виде:

$$v_r = v_z = 0; H_\varphi = 0; T = 0; \rho = 1; R = R(z, 0)(t = 0). \quad (5.15)$$

Соответственно начальные условия электротехнического уравнения (4.3) и (4.4) имеют вид:

$$J = 1; \Delta Q = \int_{-\infty}^0 J dt; L = \frac{L_0}{R_0} + 2 \int_0^{z_0} \ln \frac{R_{ex}^0}{R(z, 0)} dz. \quad (5.16)$$

Задача решается в области $z_0 \geq z \geq 0; R(z, t) \geq r \geq 0$ с граничными условиями на внешней границе (4.8) и (4.9):

$$\left. \begin{aligned} (p - \sigma_{rr}) + \frac{\partial R}{\partial z} \sigma_{rz} = 0; \quad (p - \sigma_{zz}) \frac{\partial R}{\partial z} - \sigma_{rz} = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} = 0; \quad H_\varphi = \frac{J}{R(z, t)} \\ [r = R(z, t)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Функции σ_{rr} , σ_{zz} и σ_{rz} берутся из соотношений (5.11). На границе с электродами выполняются условия симметрии (4.5):

$$v_z = 0; \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, z_0), \quad (5.18)$$

а на оси системы согласно (4.11) имеем:

$$v_r = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0; \quad H_\varphi = 0 \quad (r = 0). \quad (5.19)$$

Закон сохранения энергии (4.10) в выбранной системе единиц принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{E} + \frac{v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{H_\varphi^2}{2\rho} \right) \rho r dr dz = - \int_{(z_p)'} \left[-\lambda \frac{H_\varphi}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi)_{r=R} + v_r \frac{H_\varphi^2}{2} \right] R dz + \int_{(z_p)'} \left(-\lambda H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + v_z \frac{H_\varphi^2}{2} \right) R \frac{\partial R}{\partial z} dz, \quad (5.20)$$

где безразмерный коэффициент диффузии магнитного поля λ дан в (5.12).

в. Безразмерный вид электротехнического уравнения. Получим безразмерный вид уравнения тока (3.17), сперва не учитывая потери энергии в плазме:

$$L^{1/2} \frac{d}{dt} (L^{1/2} J) + \Omega J + \Phi + \Psi \left(\int_0^t J dt' + \Delta Q \right) = 0, \quad (5.21)$$

где полная безразмерная индукция L согласно соотношениям (3.16), (4.4) и (5.16)

$$L = \frac{L_0}{R_0} + 2 \int_0^{z_0} \sum_j \ln \frac{R_{ex}^j(z)}{R_{in}^j(z)} dz, \quad (5.22)$$

а новые постоянные коэффициенты Ω , Φ и Ψ выражаются с помощью основных единиц и электротехнических констант цепи (все — в единицах СГСЭ):

$$\Omega = c^3 R_{\Omega 0} \frac{R_0}{J_0} (\pi \rho_0)^{1/2}; \quad \Phi = -c^3 U_0 \frac{R_0}{J_0^2} (\pi \rho_0)^{1/2}; \quad \Psi = \frac{c^4}{C_0} \cdot \frac{R_0^3}{J_0^2} \pi \rho_0. \quad (5.23)$$

Постоянная ΔQ задана в начальных условиях (5.16).

При учете потерь энергии в плазме необходимо воспользоваться полным электротехническим уравнением (3.18), так что в правой части безразмерного уравнения (5.21) вместо нуля согласно (3.20) будет стоять выражение

$$\begin{aligned} -\frac{W_p}{J} = & -\frac{1}{J} \cdot \frac{d}{dt} \int_{(V_p)} H_{\varphi}^2 r dr dz - \frac{2}{J} \int_{(V_p)} \lambda \left[\left(\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{H_{\varphi}}{r} \left(2 \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial r} + \frac{H_{\varphi}}{r} \right) \right] r dr dz + \frac{1}{J} \int_{(V_p)} \left[v_z \frac{\partial H_{\varphi}^2}{\partial z} + \right. \\ & \left. + v_r \left(\frac{\partial H_{\varphi}^2}{\partial r} + 2 \frac{H_{\varphi}^2}{r} \right) \right] r dr dz. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Итак, математическая задача заключается в решении системы уравнений (5.5) — (5.10) и (5.21) с начальными условиями (5.15) и (5.16) при граничных условиях (5.17) — (5.19) в области $z_0 \geq z \geq 0$ и $R(z, t) \geq r \geq 0$.

г. Конкретный вариант МГД-задачи. Дальнейшее определение параметров системы безразмерных уравнений связано с конкретным заданием основных единиц измерения R_0 , ρ_0 , J_0 и других по формулам (5.4). Пусть $R_0 = 13$ см; $\rho_0 = 2,4 \cdot 10^{-7}$ г/см³; $J_0 = 1$ ма; $H_0 = 1,54 \cdot 10^4$ гс; $p_0 = 1,88 \cdot 10^7$ дин/см²; $v_0 = 8,8 \cdot 10^6$ см/сек; $t_0 = 1,47 \cdot 10^{-6}$ сек; $T_0 = 82$ эв; $\mathcal{E}_0 = 7,7 \cdot 10^{13}$ эрг/г. Найдем параметры α и β из (5.14) и E^* , D^* и B^* из (5.13): $\alpha = 1,98 \times 10^{33}$; $\beta = 4,06 \cdot 10^{-5}$; $E^* = 1,0 \cdot 10^{-2}$; $D^* = 2,0 \cdot 10^{-2}$; $B^* = 1,0 \cdot 10^{-2}$.

Зададим электротехнические параметры внешней цепи: $U_0 = 24$ кВ; $R_{\Omega_0} = 0$; $C_0 = 180$ мкФ; $L_0 = 50$ см. Тогда из соотношений (5.23) находим $\Omega = 0$; $\Phi = -2,72$; $\Psi = 0,92$; $L_0/R_0 = 3,84$. Для определения значения ΔQ из (5.21) воспользуемся экспериментальными данными и формулой (5.16). Пусть ток достигает максимума $1,05$ ма при $t_{\text{макс}} = 4 \cdot 10^{-6}$ сек, а начальный момент расчета $t_{in} = 5 \cdot 10^{-6}$ сек. Типичная осциллограмма тока хорошо аппроксимируется функцией $J = 4J_{\text{макс}}t/t_1(1-t/t_1)$, где $t_1 = 8 \cdot 10^{-6}$ сек (например, при $t = t_{in}$, $J = 0,985$ ма), а $J_{\text{макс}} = 1,05$ ма. Найдем, что убыль заряда конденсаторов

$$\Delta Q = \int_0^{t_{in}} 4 \frac{J_{\text{макс}} t}{J_0 t_1} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \frac{dt}{t_0} = \int_0^{t_{in}/t_0} 4 \frac{J_{\text{макс}} t_0}{J_0 t_1} \times \\ \times \tau \left(1 - \frac{t_0}{t_1} \tau\right) d\tau = 0,775 \int_0^{3,40} \tau (1 - 0,184\tau) d\tau = 2,59,$$

где подставлены значения тока J_0 и времени t_0 .

В начальные условия задачи (5.15) еще входит форма границы $R(z, 0)$, которая задается, например, графически, причем $R(0, 0) = 1$, а $R(z, 0) \geq 1$. Расстояние от анода до верхней крышки камеры $z_0 = 0,54$.

Приведенные здесь конкретные значения всех параметров системы уравнений, граничных и начальных условий можно рассматривать как пример завершения постановки задачи для численного счета. В этом параграфе показано, что решение безразмерной задачи зависит от двух параметров в системе МГД-уравнений (α и β), пяти параметров в электротехническом уравнении (Ω , Φ , Ψ , ΔQ и L_0/R_0). Кроме того, в начальные и граничные условия входит еще один параметр (z_0), а также форма оболочки $R(z, 0)$. Следует, однако, заметить, что при вычислении параметров плазменного фокуса наиболее существенную роль играет параметр α , в то время как все электротехнические параметры обуславливают лишь некоторое отклонение тока от значения $J = 1$, а параметр β только влияет на структуру токовой оболочки. Следует полагать, что форма токовой оболочки $R(z, 0)$ и расстояние между электродами z_0 , изменяющиеся в небольших пределах, не влияют на максимальные параметры плазменного фокуса.

ГЛАВА 2

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ МГД-ЗАДАЧИ

§ 6. Общие замечания

Для приближенного решения задач, связанных с интегрированием систем дифференциальных уравнений в частных производных, обычно используются конечно-разностные методы. Основа лю-

бого из них — это тот или иной способ замены непрерывных объектов исходной задачи дискретными: область изменения независимых переменных заменяется множеством расчетных точек, искомые функции — таблицами, дифференциальные уравнения — конечно-разностными уравнениями, т. е. алгебраическими соотношениями между значениями функций в соседних расчетных точках. Полученная таким образом задача содержит некоторые параметры дискретизации, характеризующие множество расчетных точек — количество и плотность расположения их.

Разумеется, указанный переход от функциональной задачи к арифметической имеет смысл только в том случае, если соответствующий вычислительный алгоритм практически реализуем, а результаты расчета могут удовлетворить нас как источник информации о точном решении. Теоретическое рассмотрение вопроса о близости решений этих двух задач сводится лишь к анализу асимптотики численного решения, исследованию сходимости его к точному при неограниченном увеличении плотности расположения расчетных точек. Хотя строго математически доказать факт сходимости удается редко, уверенность в справедливости его обычно бывает обоснована достаточно. Следовательно, в принципе можно подойти к точному решению как угодно близко, а сравнивая результаты, отвечающие различному числу точек, оценить отклонение от него.

Мощности современных вычислительных машин кажутся огромными. Однако при решении сложных многомерных задач объем перерабатываемой информации столь велик, что достигнуть значений параметров алгоритма, при которых указанная асимптотика реализуется, невозможно. Тем не менее конечно-разностные методы применяются и в этой ситуации. Обоснованием обычно является следующее рассуждение: сколько-нибудь «точное» решение не нужно, а для выявления и оценки интересующих нас эффектов достаточно небольшого числа расчетных точек. Это вполне разумное рассуждение не учитывает одного существенного момента. Уменьшение плотности расположения расчетных точек приводит не только к снижению точности типа «замазывания» локальных, острых деталей решения, но и может качественно изменить свойства самой разностной задачи. Применение любого численного метода обосновывается лишь асимптотикой его. В этом смысле они все эквивалентны дифференциальной задаче и друг другу, все хороши, если точек достаточно много. Напротив, при дефиците расчетных точек, отрываясь от породившей их дифференциальной задачи, каждый метод начинает проявлять свою индивидуальность, по-разному реагируя на специфику конкретных задач, становясь, по существу, дискретной моделью физического процесса. Этим, в частности, объясняются непрекращающиеся попытки математиков в создании все новых и новых численных алгоритмов, пригодных для сколько-нибудь широкого класса задач.

Остановимся коротко на некоторых характерных особенностях рассматриваемой в данной работе задачи, существенных для выбора

расчетного метода. Прежде всего — это колоссальные деформации объема плазмы в процессе ее движения к оси системы, приводящие к изменению некоторых размеров на два-три порядка.

В таких условиях естественно применять расчетные сетки, основанные на системе координат Лагранжа, т. е. перемещать расчетные точки конечно-разностной схемы вместе с движущимися элементами массы плазмы. Этот подход полностью оправдывает свое назначение в одномерных задачах. Однако в двумерных задачах использование лагранжевых сеток наталкивается на значительные трудности. Дело в том, что в одномерной задаче элементарной расчетной ячейкой, объединяющей точки, значения в которых непосредственно влияют друг на друга, является отрезок. В двумерной задаче — это плоская фигура, как правило, четырехугольник. В процессе движения вещества ячейки деформируются. Отрезок может лишь сжиматься или растягиваться, у четырехугольника степеней свободы гораздо больше. Даже при сравнительно регулярном течении четырехугольник, вытягиваясь, например, вдоль одной из своих диагоналей, может стать фактически «одномерной» фигурой. Но он является расчетной ячейкой, и форма его существенно влияет на качество аппроксимации дифференциальных уравнений конечно-разностными. Естественно, деформации ячейки приводят к падению точности аппроксимации. Это, в свою очередь, порождает нерегулярные, паразитические деформации, и т. д. В результате расчет может потерять всякий смысл.

Причины указанного дефекта неясны. Отсутствие удовлетворительной математической теории нелинейных задач не позволяет проникнуть в существо вопроса и, возможно, вскрыть какие-то несовершенства гидродинамического описания сплошной среды. Ограничимся констатацией факта, что для конечно-разностных схем, основанных на лагранжевых расчетных сетках, потеря аппроксимации довольно быстро приводит к «вычислительной катастрофе». Обычно такие схемы оснащают различными средствами исправления сеток, отражающими специфику задач и вкусы их авторов.

Второй существенной особенностью рассматриваемой задачи является разномасштабность процесса. Хотя все участки плазмы, конечно, взаимосвязаны, наиболее важны параметры плазменного фокуса — ничтожной по объему области на оси системы. В то же время процессы, происходящие на периферии, практически не представляют интереса. Однако при построении расчетной сетки мы не можем произвольно сгущать ее в отдельных областях, не вставляя «лишних» координатных линий и, следовательно, расчетных точек в других, поскольку сетка должна быть в какой-то степени регулярной. В результате приходится увеличивать объем вычислительной работы в несколько раз.

Использованный нами конечно-разностный метод (метод свободных точек) позволяет учесть обе отмеченные особенности задачи и в то же время избежать связанных с этим затруднений.

§ 7. Метод свободных точек

Как было отмечено выше, источником, порождающим катастрофические искажения элементарной лагранжевой расчетной ячейки, являются ее деформации, вызываемые относительными перемещениями масс. Эти деформации вполне закономерны и обусловлены. Не обусловленным представляется использование сильно деформированных лагранжевых ячеек в качестве расчетных. Они отражают лишь отношение соседства точек, имевшее место в начальный момент и со временем перестающее быть естественным. Поэтому выход из положения состоит в отказе от фиксированного отношения соседства точек, диктуемого координатной сеткой, и в использовании естественных расчетных ячеек, отражающих фактическое расположение точек в каждый момент времени. В этом и заключается основная идея метода свободных точек. Чтобы ее реализовать, необходимо решить два вопроса. Во-первых, указать способ отбора соседних точек, т. е. построения расчетной ячейки. Во-вторых, дать конечно-разностные формулы, пригодные для расчетной ячейки произвольной формы.

В любой отдельной конкретной ситуации указать точки, являющиеся соседними к данной, и тем самым построить расчетную ячейку труда не составляет. Задача состоит в реализации нашего здравого смысла в виде алгоритма, который был бы, с одной стороны, универсален, а с другой — достаточно экономичен и прост по логике, чтобы его можно было осуществить на вычислительной машине.

Информация о взаимном расположении расчетных точек содержится в таблице их координат. Очевидно, алгоритм должен заключаться в сравнении относительных координат точек и отборе ближайших. Последний термин подлежит точному определению. Поместим начало координат (полярных R, φ) в точку M_0 , для которой строится расчетная ячейка. Если какие-нибудь две точки $M_1(R_1, \varphi_1)$ и $M_2(R_2, \varphi_2)$ располагаются на одном луче, выходящем из M_0 , т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$, то выбор ближайшей из них тривиален. Если φ_1 и φ_2 близки, а R_1 и R_2 различны, то вопрос решается аналогично, одна из точек закрывает другую своей «тенью». Придадим этому рассуждению точный смысл.

Назовем тенью данной точки $M_1(R_1, \varphi_1)$ область плоскости, расположенную с точки зрения M_0 вне некоторой кривой:

$$F\left(\frac{R}{R_1}, |\varphi - \varphi_1|\right) = 0. \quad (7.1)$$

Использование именно таких комбинаций аргументов диктуется требованиями симметричности кривой относительно луча $\varphi = \varphi_1$ и инвариантности ее относительно выбора начала отсчета угла φ , а также линейного масштаба. Процесс отбора сводится к построению тени каждой точки, выбрасыванию точек, попавших в чью-либо тень, и выделению тем самым последовательности соседних с M_0 точек.

Прежде чем говорить о конкретном виде функции F , остановимся на некоторых общих требованиях, которым должен удовлетворять результат отбора. Очевидно, в число соседних не нужно включать слишком далекие точки, так как это будет эквивалентно увеличению шага разностной схемы и, следовательно, уменьшению точности расчета и, кроме того, потребует лишней вычислительной работы. Тем не менее стремиться к минимальности общего числа соседних точек тоже не следует, поскольку это привело бы к необходимости выбора между приблизительно равноценными по расположению точками, увеличению веса каждой точки в расчетной схеме и потому более резким возмущениям при смене соседней вследствие их перемещения. Эти пожелания слишком неопределенны и фактически мы имеем один критерий качества метода отбора (также не очень определенный): в частных случаях регулярного, закономерного расположения расчетных точек метод должен давать естественную расчетную ячейку.

Одним из признаков последней является достаточно плотное распределение соседних точек по углу φ . Потребуем того же и в общем случае: любой угол некоторого заданного раствора (порядка $\pi/2$) должен содержать хотя бы одну соседнюю точку.

Второе требование столь же естественно: результат отбора не должен зависеть от случайных причин (порядка, в котором испытываются точки, и т. п.).

Из изложенного ясно, что наиболее существенная характеристика области тени — это ее эффективный угловой размер. Если тень будет узка, то среди соседних окажутся далекие точки, если широка, то точек останется мало и некоторые направления φ будут плохо представлены. Избежать обеих крайностей в общем случае нельзя. Поэтому мы остановились на следующей циклической процедуре отбора.

Производим отбор, используя тень с угловым размером порядка заданного $\Delta\varphi$ (это гарантирует закрытие далеких точек), и проверяем угловую плотность выделенной последовательности точек. Если некоторые направления φ оказались пусты, то среди точек, расположенных в этих пустых углах, проводим отбор заново, уменьшив угловой размер тени. После нескольких циклов выделится искомая последовательность соседних точек (если она существует). При таком способе построения расчетной ячейки имеется известная неравноправность направлений φ , но она лишь отражает особенности конкретного распределения расчетных точек.

С точки зрения результата другие характеристики области тени играют меньшую роль. Однако важен не только результат, но и средства, которыми он достигнут, т. е. объем вычислительной работы, необходимый для построения расчетной ячейки. В основном этот объем определяется количеством пар точек, координаты которых подлежат сравнению. Каков бы ни был механизм сравнения, применять его, просматривая все имеющиеся расчетные точки, слишком расточительно. Простой перебор требует количества операций по-

рядка квадрата числа точек (на одну ячейку). Поэтому ясно, что прежде всего надо рассмотреть вопрос об экономичности алгоритма отбора.

§ 8. Организация отбора точек

Как было отмечено, множество точек, подлежащих просмотру, должно быть как можно меньше, но в то же время содержать искомые соседние точки. Поэтому алгоритм отбора разбивается на два этапа: набор указанного множества (окрестности) и собственно отбор соседних точек.

Если, кроме координат точек, никакая дополнительная информация об их взаимном расположении не используется, то всеобщий перебор необходим. Эта дополнительная информация обычно дается упорядоченностью точек, например, записью их координат в виде таблицы, положение в которой соответствует действительному местонахождению точки. Для одномерного массива точек это полностью снимает вопрос. В случае произвольного двумерного массива упорядочение, да еще с позиций каждой точки—задача, полностью лишенная смысла. Однако возможно частичное упорядочение, и это позволяет при наборе окрестностей ограничиться просмотром сравнительно небольшого, во всяком случае не зависящего от общей величины массива, числа точек.

Пусть r, z — декартовы координаты расчетных точек. Разобьем плоскость r, z на полосы, например, линиями $z = \text{const}$. Точки, попавшие в каждую данную полосу, упорядочим по координате r , а полосы — по z . Ширина полос является параметром такого упорядочения, и она должна быть согласована с фактически имеющейся плотностью расположения расчетных точек. Если полосы будут слишком узки или широки, то упорядочение выродится в одномерное по z или r соответственно, и его эффективность резко упадет.

Размеры окрестности определим в терминах $\Delta r, \Delta z$ и при наборе будем оценивать только разности координат. Размер Δz укажет на необходимое количество полос, а Δr — точки этих полос, которые следует включить в окрестность. Отметим, что к моменту начала набора окрестности данной точки мы вследствие упорядоченности точек уже имеем некоторую информацию о ней — окрестность расчетной точки, обработанной ранее. Поэтому район данной расчетной точки хорошо локализован и исходные данные для набора у нас есть. Существенен вопрос тактики набора, т. е. выбора значений $\Delta r, \Delta z$, определяющих окрестность. Дело в том, что мы хотим добиться минимальности набранного множества при достаточности его, т. е. эквивалентности всему массиву расчетных точек. Если стремиться еще и к простоте технологии набора, то ясно, что чем-то придется жертвовать. Изберем следующую процедуру.

Сначала рассмотрим только полосу, к которой принадлежит данная расчетная точка $M_0(r_0, z_0)$. Значение Δr выберем порядка

ширины полосы, например, равной половине ширины. Среди точек этой одной полосы отберем те, координата r которых отличается от r_0 не более чем на Δr . Набранное множество упорядочим по углу φ вокруг M_0 и проверим выполнение условия достаточной угловой плотности точек. Если оно не выполнено, то набранное множество заведомо не содержит искомой последовательности соседних точек. В этом случае определим (грубо) направление незаполненного угла и в соответствии с этим произведем дополнительный набор, либо рассмотрев еще одну полосу, либо изменив параметр Δr для одной из сторон окрестности. Затем опять проверим условия угловой плотности, и т. д.

На каждом шаге набираемая окрестность характеризуется всего четырьмя параметрами: по z — количеством полос с той и другой стороны, по r — значениями Δr^+ , Δr^- соответственно. На каком-то шаге будет получено множество, содержащее последовательность соседних точек.

Нетрудно заметить, что описанная тактика продиктована заботой о максимальной экономичности алгоритма и в некоторых случаях может дать множество точек, не эквивалентное всему массиву (в основном из-за того, что набор ведется в терминах r , z , а последующий отбор соседних точек — в терминах R , φ). Этого можно было бы избежать, усложнив алгоритм, или заведомо завысив размеры окрестности.

При наборе существенно используется упорядоченность точек в плоскости r , z . Так как расчетные точки со временем перемещаются (переходят из одной полосы в другую, меняются местами в полосе), то при оценке объема работы необходимо учитывать и затраты на систематическое переупорядочивание точек. Сведем их к минимуму, допуская произвольное расположение точек в таблице (в памяти машины) и указывая места (адреса) двух соседей по r каждой точки. Такая реализация упорядоченности позволяет, в частности, легко добавлять или ликвидировать расчетные точки без перестроек всего массива информации.

Перейдем к рассмотрению второго этапа алгоритма — отбору соседних точек. Принципиальная сторона этого процесса (сравнение относительных координат точек построением области тени каждой из них) изложена в предыдущем пункте. Рассмотрим вопрос о рациональной организации соответствующего алгоритма отбора.

Прежде всего отметим, что исходные данные для отбора представляют последовательность точек, уже упорядоченную по углу φ вокруг центральной точки. Поэтому, учитывая угловой размер области тени, легко выделить точки, которые могут, вообще говоря, закрыть друг друга, и избежать тем самым сравнения координат всех пар точек, что значительно уменьшает объем работы.

Сравнение заключается в определении знака функции F из (7.1) при подстановке в нее координат данной пары точек. Естественно,

вид F должен быть как можно проще. Мы использовали следующий (рис. 1)

$$F\left(\frac{R}{R_1}, |\varphi - \varphi_1|\right) = \begin{cases} \frac{R}{R_1} \cos(\varphi - \varphi_1) - 1, & |\varphi - \varphi_1| < \frac{\pi}{4}; \\ |\varphi - \varphi_1| - \frac{\pi}{4}, & \frac{R}{R_1} \cos(\varphi - \varphi_1) > 1. \end{cases} \quad (8.1)$$

Такой выбор функции F удобен тем, что в нее входят лишь величины R , $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, которые легко вычисляются по разностям $r - r_0$ и $z - z_0$. При использовании других функций φ было бы необходи-

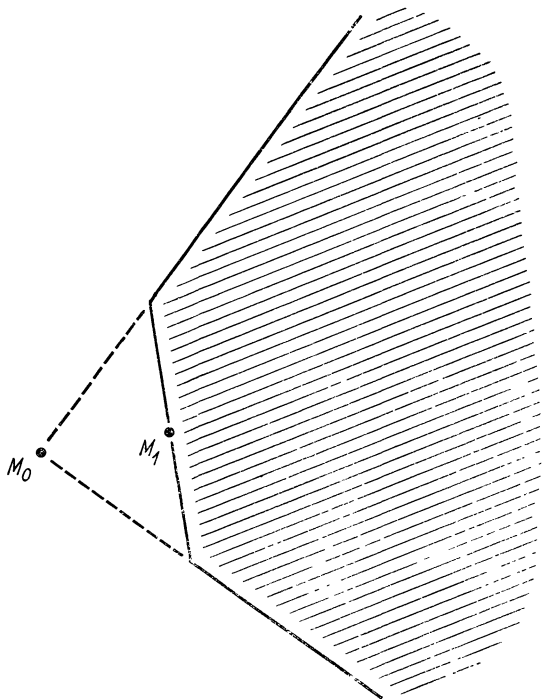


Рис. 1. Тень точки M_1 .

мо применение операций \arcsin и т. п., очень трудоемких для вычислительной машины. Укажем, что для упорядочения набранного множества по углу φ мы также использовали лишь эти величины, не вычисляя самого φ .

Процесс отбора ясен. Имеем пару точек $M_1(R_1, \varphi_1)$ и $M_2(R_2, \varphi_2)$ таких, что $|\varphi_2 - \varphi_1| < \pi/4$ [фактически $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0,7$]. Если $\frac{R_2}{R_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 1$, то M_2 согласно (8.1) лежит в тени M_1 , если $\frac{R_1}{R_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 1$, то, наоборот, M_2 закрывает M_1 .

Отметим один существенный момент. Факт закрытия точки не означает исключения ее из дальнейших сравнений, хотя в число соседних она и не включается. В противном случае может быть нарушено одно из условий отбора — независимость результата его от порядка обработки точек. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть ситуацию, изображенную на рис. 2. Очевидно, в число соседних из указанной тройки точек должна попасть лишь M_1 . Однако

если M_2 исключить из алгоритма вследствие закрытия ее точкой M_1 , то точка M_3 также может оказаться соседней. Для этого нужно обрабатывать M_3 после сравнения M_2 с M_1 и исключения M_2 .

Чтобы указанное выбрасывание точки из алгоритма было допустимо (а это дало бы существенную экономию вычислений), области тени должны удовлетворять следующему условию: если точка M_2 принадлежит области тени точки M_1 , то тень M_2 целиком содержится в области тени M_1 . Построение соответствующих функций F вполне возможно, однако это приводит либо к вычислительно сложным алгоритмам, либо к неестественным расчетным ячейкам. Но самое главное — можно показать, что в этом случае граница области тени данной точки M_1 [кривая $R(\varphi)$] удовлетворяет условию

$$R_1 \leq R(\varphi) \leq R_1 \exp k |\varphi - \varphi_1|,$$

т. е. угловой размер тени неограничен. А это лишает нас возмож-

ности использовать упорядоченность точек по φ для сокращения объема вычислений.

Заканчивая это краткое описание алгоритма отбора, коснемся вопроса о построении расчетной ячейки для точек, расположенных около границы рассчитываемой области. Он в значительной степени связан с видом имеющегося здесь граничного условия, которое и диктует те или иные требования к форме расчетной ячейки. В то же время набор окрестности и отбор соседних точек отличаются в данном случае от описанных выше лишь деталями: разрешением иметь незаполненные секторы по φ , обязательным включением некоторых точек в число соседних и т. д.

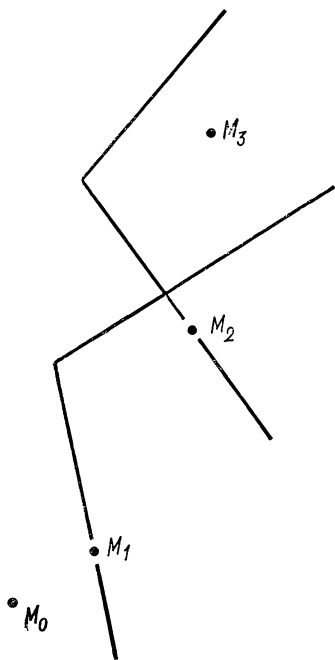


Рис. 2. Исключение точки M_2 из соседних с сохранением ее для сравнения.

§ 9. Метод получения разностных соотношений

Мы исходим из принципа асимптотической сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной, поэтому построение численного метода должно проводиться с соблюдением требований аппроксимации и устойчивости. Не углубляясь в точный математический смысл этих терминов, скажем следующее. Условие аппроксимации означает, что асимптотически при сгущении расчетных точек разностные формулы переходят в дифференциальные уравнения исходной задачи. Проверка этого условия обычно не составляет труда. Условие устойчивости связано с необходимостью правильного учета области зависимости решения, являясь по существу условием корректности разностной задачи. Полное математическое исследование этого вопроса для реальных задач провести не удастся. Поэтому обычно ограничиваются проверкой устойчивости упрощенных линейных моделей разностных задач, позволяющих достаточно уверенно судить о свойствах последних. Расчет по неустойчивой разностной методике невозможен, так как довольно быстро приводит к бессмысленным результатам. Поэтому расчет всегда является проверкой условия устойчивости.

Итак, в данный момент времени t имеем некоторую расчетную ячейку, т. е. точку M_0 , окруженную соседними точками $M_1, M_2, \dots, \dots, M_N$. Значение каждой из функций $f\{=u, v, T, \dots\}$ в точке M_n обозначим f_n . Пусть f^0 — это значение f в момент $t + \tau$ в точке, куда перемещается M_0 за время τ . Именно f^0 надо вычислить.

Систему дифференциальных уравнений запишем коротко в виде

$$d\mathcal{F}/dt = \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad (9.1)$$

где \mathcal{F} — набор функций f , т. е. вектор-функция, а \mathcal{D} — дифференциальный (по r, z) оператор, т. е. комбинация производных $\partial f/\partial r$, $\partial f/\partial z$, $\partial^2 f/\partial r^2$ и т. д.

Наиболее естественным способом получения разностных формул представляется следующий. Очевидно, можно положить

$$df/dt \approx (f^0 - f_0)/\tau. \quad (9.2)$$

Далее, представим каждую функцию $f(t, r, z)$ в окрестности M_0 в виде

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_r(r - r_0) + f_z(z - z_0) + f_{rr} \frac{(r - r_0)^2}{2} + f_{rz}(r - r_0)(z - z_0) + \dots = \\ &= f_0 + R(f_r \cos \varphi + f_z \sin \varphi) + \frac{R^2}{2} f_{rr} \cos^2 \varphi + R^2 f_{rz} \cos \varphi \sin \varphi + \dots, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где R, φ — полярные координаты ($r - r_0 = R \cos \varphi$, $z - z_0 = R \sin \varphi$), а f_r, f_z, f_{rr}, \dots — неопределенные коэффициенты. Ограничимся в разложении (9.3) конечным числом членов и потребуем, чтобы полученный полином (по степеням $r - r_0, z - z_0$) принимал

В нескольких соседних точках M_k соответствующие значения f_k , т. е. чтобы он был интерполяционным полиномом. Это приведет к системе линейных уравнений относительно f_r, f_z, f_{rr}, \dots вида

$$f_r \cos \varphi_k + f_z \sin \varphi_k + \frac{R_k}{2} f_{rr} \cos^2 \varphi_k + \\ + R_k f_{rz} \cos \varphi_k \sin \varphi_k + \dots = \frac{f_k - f_0}{R_k}. \quad (9.4)$$

Если число используемых соседних точек M_k совпадает с числом неизвестных, то последние определяются однозначно, и мы выражаем все коэффициенты f_r, f_z, f_{rr} и т. д. через величины R_k, φ_k, f_k . Очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial r} \sim f_r; \quad \frac{\partial f}{\partial z} \sim f_z; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sim f_{rr}, \dots, \quad (9.5)$$

поэтому, заменив в (9.1) производные соответствующими выражениями согласно (9.4) и (9.5), приходим к некоторым разностным формулам. При таком подходе все проблемы сводятся к выбору степени интерполяционного полинома и определению роли каждой из соседних точек в построении его, поскольку этих точек, как правило, больше, чем нужно. Так, для аппроксимации первых производных, очевидно, достаточно построения линейной по $r - r_0, z - z_0$ интерполяционной функции

$$f = f_0 + R (f_r \cos \varphi + f_z \sin \varphi). \quad (9.6)$$

Используя любую пару соседних точек $M_1 (R_1, \varphi_1), M_2 (R_2, \varphi_2)$ и решая систему двух уравнений, находим коэффициенты f_r, f_z по формулам:

$$f_r = \frac{\begin{vmatrix} \delta f_1 \sin \varphi_1 \\ \delta f_2 \sin \varphi_2 \end{vmatrix}}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad f_z = \frac{\begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \delta f_1 \\ \cos \varphi_2 \delta f_2 \end{vmatrix}}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (9.7)$$

где

$$\delta f_{1,2} = (f_{1,2} - f_0) / R_{1,2}. \quad (9.8)$$

Каждая пара M_1, M_2 дает свои значения f_r, f_z . Отдавать предпочтение каким-либо из них у нас нет оснований в согласии с принципом априорной равноправности соседних точек, используемым при построении расчетной ячейки. Поэтому, чтобы учесть все точки, нужно либо увеличить степень полинома, либо как-то усреднить значения f_r, f_z , полученные для различных пар M_1, M_2 .

Первый путь дает некоторое увеличение порядка аппроксимации, но оно будет неконтролируемым и случайным, так как количество соседних точек произвольно. Кроме того, возникает бессмысленный вопрос о том, какие именно степени $r - r_0, z - z_0$ в разложении (9.3) должны присутствовать. Наконец, необходимость решать системы линейных уравнений высокого порядка намного усложнит вычислительный алгоритм.

Выбор способа усреднения значений f_r, f_z также не всегда тривиален. Нужно определить, какие точки следует объединить в пары, какой вес придать каждой паре и т. п. То или иное решение этих вопросов, не влияя на аппроксимацию, отразится на устойчивости метода. Последняя связана с эффективным учетом области зависимости решения и, следовательно, будет определяться именно этими факторами.

Нетрудно видеть, что аналогичные проблемы возникают и при аппроксимации вторых производных.

Чтобы иметь единый принцип решения всех этих вопросов и тем самым существенно облегчить задачу, мы для построения разностных формул использовали следующий прием.

Вернемся к системе уравнений (9.1) и локально, в пределах одной расчетной ячейки, аппроксимируем ее системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\partial \mathcal{F} / \partial t = D \mathcal{F} + C, \quad (9.9)$$

где D — линейный дифференциальный оператор. В коэффициенты D , как и в C , входят значения не только функций f , но и их производных. Все эти значения возьмем в центральной точке ячейки M_0 , вычислив их любым способом, например, описанным выше, заботясь лишь об аппроксимации. Таким образом, значения C и коэффициенты оператора D можно считать известными.

Переход от (9.1) к (9.9) неоднозначен. Разбиение $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ на части можно делать не однозначно, выделяя из $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ разные дифференциальные выражения $D \mathcal{F}$. Цель этого разбиения и разумность того или иного способа его станут ясны из дальнейшего.

Для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (9.9), как это следует из теории таких уравнений, можно получить формулы, дающие явное выражение решения через начальные данные. В частности, решение в момент $t + \tau$ в точке M^0 можно выразить через значения решения в момент t , т. е. $\mathcal{F}(R, \varphi)$, формулой

$$\mathcal{F}^0 = \iint Q(\tau, R, \varphi) \mathcal{F}(R, \varphi) dR d\varphi + C\tau, \quad (9.10)$$

где Q (матрица функций) полностью определяется оператором D .

Непосредственно применить эту интегральную формулу мы не можем, так как функции $\mathcal{F}(R, \varphi)$ у нас нет. Имеется лишь дискретный набор значений ее в точках M_0, M_1, \dots, M_N , образующих данную расчетную ячейку. Естественно использовать в качестве $\mathcal{F}(R, \varphi)$ интерполяционную функцию, построенную по этим точкам. Если записать ее в виде

$$P(R, \varphi) = \sum_{i=0}^N a_i(R, \varphi) \mathcal{F}_i, \quad (9.11)$$

где \mathcal{F}_i — значение \mathcal{F} в точке M_i , то, подставив это выражение в (9.10), получим разностную формулу

$$\mathcal{F}^0 = \sum_{i=0}^N A_i \mathcal{F}_i + C\tau, \quad (9.12)$$

где, очевидно,

$$A_i := \iint a_i(R, \varphi) Q(\tau, R, \varphi) dRd\varphi. \quad (9.13)$$

Вопрос о построении интерполяционной функции встает и здесь. Однако требования к ней и способ использования ее на этот раз совсем другие. Она не обязана быть дифференцируемой и даже непрерывной, она должна быть «просто» интерполяционной функцией, которую можно проинтегрировать. А это позволяет применить простейшие, естественные способы интерполяции.

Выделение из $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ линейного оператора D существенно облегчает решение многих вопросов, в основном вследствие того, что формула (9.10) явно указывает область зависимости решения и «вес» различных участков плоскости R, φ . Однако очевидно, что эти указания представляют ценность лишь в том случае, если линейный оператор D хорошо моделирует исходный оператор \mathcal{D} . Под $D\mathcal{F}$ мы будем понимать старшие члены $\mathcal{D}(\mathcal{F})$, т. е. главную линейную часть оператора.

§ 10. Расчетные формулы

Перейдем к выводу расчетных формул для конкретной задачи (см. § 5). Мы не будем педантично проводить принцип, изложенный в предыдущем пункте, а поступим так. Разобьем систему на части, соответствующие тому или другому физическому процессу (магнитная гидродинамика, различные диссипативные процессы). Для каждой из частей построим расчетные формулы, а затем объединим их вместе.

Начнем с магнитной гидродинамики и рассмотрим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + H \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0; \\ \rho \frac{dv}{dt} + H \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0; \\ \rho \frac{d\mathcal{G}}{dt} + p \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0; \\ \frac{dH}{dt} + H \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0; \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Можно считать, что остальные опущенные здесь члены исходной системы (5.5)—(5.9) включены в правую часть C (9.9), а выписанные соответствуют оператору \mathcal{D}^* . Наличие C добавит в разностную формулу (9.12) только член $C\tau$. Способ фактического вычисления части C , которая содержит и старшие (вторые) производные, определится после рассмотрения всех частей исходной системы. Правомерность выделения системы (10.1) можно обосновать, например, тем, что в задаче могут встретиться ситуации, когда диссипативные эффекты ничтожны и, следовательно, старшинство описывающих их членов будет формальным.

Обозначим

$$\omega = p + \frac{H^2}{2}; \quad c^2 = \frac{5}{3} T + \frac{H^2}{\rho} \quad (10.2)$$

и преобразуем систему (10.1) к следующему виду (учитывая, что $p = \frac{2}{3}\rho g = \rho T$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} &= 0; \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} &= 0; \\ \frac{d\omega}{dt} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0; \\ \frac{1}{H} \cdot \frac{dH}{dt} = \frac{3}{2T} \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c^2} \cdot \frac{d\omega}{dt}; \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Будем считать коэффициенты этой системы постоянными и равными их значениям в центральной точке расчетной ячейки M_0 . Тогда первые три уравнения (10.3) образуют замкнутую систему с постоянными коэффициентами вида (9.9), причем $\mathcal{F} = \{u, v, \omega\}$, а $C = 0$. Соответствующая этой системе матрица Q (τ, R, φ) получена в работе [29]. Здесь она не приведена, так как мы используем формулу (9.10), несколько преобразовав ее, интегрируя по частям. А именно, выпишем соответствующие рассматриваемому случаю интегральные формулы в виде

$$\left. \begin{aligned} u^0 = u_0 - \frac{1}{2\pi\rho_0 c_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\tau c_0} \frac{\partial \omega}{\partial r} \cdot \frac{RdR}{\sqrt{\tau^2 c_0^2 - R^2}} + \\ + \frac{\tau c_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\tau c_0} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{dR}{\sqrt{\tau^2 c_0^2 - R^2}}; \end{aligned} \right\}$$

* Для удобства дальнейшего рассмотрения здесь несколько изменены обозначения: $v_r \rightarrow u$, $v_z \rightarrow v$, $H_\varphi \rightarrow H$.

$$\left. \begin{aligned}
 v^0 &= v_0 - \frac{1}{2\pi\rho_0 c_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\tau c_0} \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{RdR}{\sqrt{\tau^2 c_0^2 - R^2}} + \\
 &+ \frac{\tau c_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\tau c_0} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{dR}{\sqrt{\tau^2 c_0^2 - R^2}}; \\
 \omega^0 &= \omega_0 - \frac{\rho_0 c_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\tau c_0} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{RdR}{\sqrt{\tau^2 c_0^2 - R^2}} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi c_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\tau c_0} (\omega - \omega_0) \frac{RdR}{\sqrt{\tau^2 c_0^2 - R^2}},
 \end{aligned} \right\} (10.4)$$

где по-прежнему R, φ — полярные координаты с центром в точке M_0 ; $\rho_0, c_0, u_0, v_0, \omega_0$ — значения в точке M_0 , а u^0, v^0, ω^0 — значения этих функций в момент $t + \tau$ в точке M^0 с координатами

$$r^0 = r_0 + u_0\tau; \quad z^0 = z_0 + v_0\tau, \quad (10.5)$$

куда перемещается M_0 за шаг τ . Отличие (10.4) от (9.10) состоит в том, что здесь под интегралами стоят не сами функции, а их производные по r и z , но, очевидно, это несущественно.

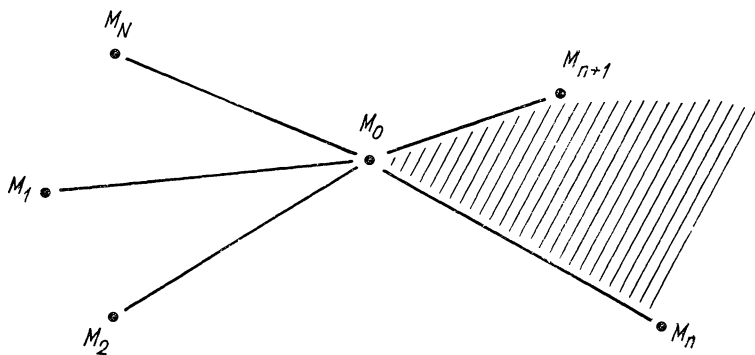


Рис. 3. Расчетная ячейка для точки M_0 .

Теперь необходимо выбрать способ интерполяции для вычисления правой части (10.4). Простейшим нам представляется следующий. По каждой паре соседних точек M_n и M_{n+1} с последовательными номерами и центральной точке M_0 построим линейные функции типа (9.6) (где f означает u, v или ω), которые используем только в секторе $M_n M_0 M_{n+1}$ (рис. 3). Формулы для определения коэффициентов этих функций у нас уже есть (9.7)—(9.8) (вместо индексов

1, 2, очевидно, нужно писать $n, n + 1$). Подставляя (9.6) в (10.4) и производя интегрирование, получаем разностные формулы:

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= u_0 - \frac{\tau}{2\pi\rho_0} \sum \omega_r \Delta\varphi + \frac{\tau c_0}{4} \sum (u_r + v_z) \Delta \sin \varphi; \\ v^0 &= v_0 - \frac{\tau}{2\pi\rho_0} \sum \omega_z \Delta\varphi - \frac{\tau c_0}{4} \sum (u_r + v_z) \Delta \cos \varphi; \\ \omega^0 &= \omega_0 - \frac{\tau\rho_0 c_0^2}{2\pi} \sum (u_r + v_z) \Delta\varphi + \\ &+ \frac{\tau c_0}{4} \sum (\omega_r \Delta \sin \varphi - \omega_z \Delta \cos \varphi), \end{aligned} \right\} (10.6)$$

где суммирование проводится по всем секторам; $\Delta\varphi$, $\Delta \cos \varphi$, $\Delta \sin \varphi$ означают приращения φ , $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ соответственно для каждого сектора; f_r, f_z вычисляются с помощью (9.7)—(9.8), меняясь от сектора к сектору.

Анализируя формулы (10.6), нетрудно обнаружить, что первые суммы каждой из них — это очевидные аппроксимации соответствующих дифференциальных выражений системы (10.3). При этом усреднение f_r, f_z проводится с «весами», равными угловым растворам $\Delta\varphi$ соответствующих им секторов. Вторые суммы в (10.6) не имеют дифференциальных прообразов в (10.3). Однако говорить о том, что они лишние, преждевременно. С одной стороны, при стремлении размеров ячейки и τ к нулю эти члены «исчезают» раньше других, т. е. они более высокого порядка по τ, R_n и аппроксимации не мешают. С другой стороны, оказывается, что они существенно влияют на устойчивость разностных формул (10.6). Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть частный случай

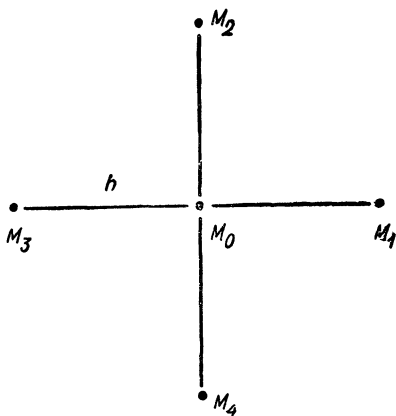


Рис. 4. Расчетная ячейка при регулярной сетке.

(10.6), когда массив расчетных точек образует регулярную сетку с шагами h по r и z , а расчетной ячейкой оказывается пятерка точек, образующая фигуру, изображенную на рис. 4. В этом случае (10.6) вырождается в разностную схему, устойчивость которой исследуется обычными способами и приводит к условию

$$2\tau c_0 \leq h. \quad (10.7)$$

В то же время, если вторые суммы отбросить, аналогичное исследование приведет к условию $\tau < \text{const } h^2$, что существенно ограничит применение этой схемы.

Разностные формулы (10.6) можно получить, и непосредственно аппроксимируя (10.3), если «догадаться» дописать «лишние» вторые суммы. При использовании приема, описанного в § 9, этот результат, как мы видели, достигается автоматически.

Остальные не рассмотренные до сих пор уравнения системы (10.3) можно, очевидно, заменить разностными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} H^0 &= H_0 + \frac{H_0}{\rho_0 c_0^2} (\omega^0 - \omega_0); \\ T^0 &= T_0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{T_0}{\rho_0 c_0^2} (\omega^0 - \omega_0); \\ \rho^0 &= \rho_0 - \frac{\tau \rho_0}{2\pi} \sum (u_r + v_z) \Delta \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Итак, разностные формулы для гидродинамической части (10.3) рассматриваемой системы построены. То, что формулы (10.6) и (10.8) вместе с (10.5) аппроксимируют систему дифференциальных уравнений (10.3), почти очевидно, во всяком случае, это проверить нетрудно.

В то же время аналитических способов исследования устойчивости разностной задачи (10.6) мы указать не можем. Приходится ограничиться рассмотрением частных случаев, когда расположение расчетных точек — регулярное. Простейший из них дает условие (10.7), другие приводят к аналогичным. Будем рассуждать так. Поскольку способ построения расчетной ячейки, используемый нами, дает (в силу условия $\Delta \varphi \leq \pi/2$) ячейки, которые «не хуже», чем изображенная на рис. 4, с точки зрения учета областей зависимости решения, то следует ожидать, что условие устойчивости разностной задачи (10.6) можно получить простым обобщением условия (10.7), а именно, потребовав выполнения неравенства

$$2\tau c_0 \leq R_n \quad (10.9)$$

для каждой соседней точки.

Обратимся теперь к исходной системе (5.5)—(5.9) и рассмотрим ту ее часть, которая описывает диссипативные эффекты, вызванные вязкостью. Оставляя только старшие члены, получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z}; \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{3} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

где, как обычно, $\rho = \rho_0$, $\eta = \eta_0$ — константы. Можно показать, что соответствующая этой системе интегральная формула типа (9.10) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= u_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \left(\cos \varphi \exp \left(-\frac{3\rho R^2}{16\eta\tau} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \exp \left(-\frac{\rho R^2}{4\eta\tau} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) dR; \\ v^0 &= v_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \left(\sin \varphi \exp \left(-\frac{3\rho R^2}{16\eta\tau} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \varphi \exp \left(-\frac{\rho R^2}{4\eta\tau} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) dR. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Попытка применить тот же способ интерполяции, что и при рассмотрении гидродинамической части системы, не приводит к успеху, так как получающиеся разностные формулы не аппроксимируют систему дифференциальных уравнений (10.10). Это неудивительно, поскольку необходимо аппроксимировать вторые производные, а при использовании линейной интерполяционной функции эти производные входят в пренебрегаемую погрешность интерполяции. Следовательно, мы должны применить как минимум квадратичную интерполяцию, т. е. строить функции вида

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_r(r-r_0) + f_z(z-z_0) + f_{rr} \frac{(r-r_0)^2}{2} + \\ &\quad + f_{rz}(r-r_0)(z-z_0) + f_{zz} \frac{(z-z_0)^2}{2} \end{aligned} \quad (10.12)$$

с пятью неопределенными коэффициентами $f_r, f_z, f_{rr}, f_{rz}, f_{zz}$. Для определения последних нужны значения f в пяти соседних точках, которые дадут пять соотношений вида

$$\begin{aligned} f_r \cos \varphi_n + f_z \sin \varphi_n + \frac{R_n}{2} (\cos^2 \varphi_n f_{rr} + \sin 2\varphi_n f_{rz} + \\ + \sin^2 \varphi_n f_{zz}) = \frac{f_n - f_0}{R_n}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

т. е. уравнений относительно $f_r, f_z, f_{rr}, f_{rz}, f_{zz}$. Отсюда ясно, что число соседних точек N , образующих данную расчетную ячейку, должно быть не меньше пяти. Допустим сначала, что их ровно пять. Тогда полином (10.12) определяется однозначно. Подставляя (10.12) в (10.11) и производя интегрирование, получаем:

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= u_0 + \frac{1}{\rho} \tau \left(\frac{4}{3} \eta u_{rr} + \eta u_{zz} + \frac{1}{3} \eta v_{rz} \right); \\ v^0 &= v_0 + \frac{1}{\rho} \tau \left(\frac{1}{3} \eta u_{rz} + \eta v_{rr} + \frac{4}{3} \eta v_{zz} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

т. е. очевидный и тривиальный результат. Каждая производная системы (10.10) заменяется соответствующим коэффициентом интерполяционного полинома. Причина этого — использование одного и того же выражения (10.12) во всем диапазоне φ от 0 до 2π . Заметим, кстати, что поскольку f_r и f_z в формулах (10.14) не участвуют, то при решении системы пяти линейных уравнений (10.13) можно сначала исключить f_r, f_z , что упрощает дело.

Очевидно, разностные формулы (10.14) аппроксимируют систему дифференциальных уравнений (10.10). Исследование устойчивости, проведенное для вырожденного случая (регулярная прямоугольная сетка с шагом h), приводит к условию

$$\frac{16}{3} \frac{\eta}{\rho} \tau \leq h^2.$$

Для расчетной ячейки общего вида естественно потребовать выполнения неравенств

$$\frac{16}{3} \frac{\eta}{\rho} \tau \leq R_n^2 \quad (10.15)$$

и достаточной угловой плотности соседних точек

$$\Delta\varphi < \pi/2. \quad (10.16)$$

Последнее, кроме того, обеспечит выполнение условия $N \geq 5$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда число соседних точек произвольно (и, разумеется, больше или равно пяти). Для того чтобы множество соседних точек можно было разбить на последовательные пятерки, N должно быть кратно четырем (или равно пяти). Мы из этого исходить не можем. Также нет оснований для неравноправного учета точек, при котором строятся особые формулы для некоторых из них. Не останавливаясь на всех имеющихся здесь возможностях, опишем алгоритм, избранный нами.

Пятерка соседних точек необходима для построения интерполяционной функции и в то же время достаточна, если они образуют фигуру, охватывающую со всех сторон центральную точку ячейки. Разобьем все множество соседних точек на такие допустимые пятерки, чтобы каждая точка попала хотя бы в одну из них. По каждой пятерке вычислим свои f_{rr}, f_{rz}, f_{zz} , а затем усредним их. Полученные средние значения f_{rr}, f_{rz}, f_{zz} используем в формулах (10.14).

Известная неравноправность соседних точек, конечно, будет иметь место, но она будет определяться конкретной геометрией их расположения. Так, «дефицитные» точки, в одиночестве представляющие свое направление φ , войдут в большее число пятерок и, следовательно, будут иметь больший относительный вес. Но это естественно и оправдано.

Наконец, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{3}{2} \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

и уравнение диффузии магнитного поля

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right).$$

Соответствующие им интегральные формулы (9.10) даются известным интегралом Пуассона. Что же касается вопросов интерполяции, то они решаются совершенно аналогично только что рассмотренным и приводят к разностным формулам

$$T^0 = T_0 + \tau \frac{2\nu}{3\rho} (\bar{T}_{rr} + \bar{T}_{zz});$$

$$H^0 = H_0 + \tau \lambda (\bar{H}_{rr} + \bar{H}_{zz}),$$

где \bar{f}_{rr} и \bar{f}_{zz} — средние значения коэффициентов интерполяционных полиномов, и условиям устойчивости

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{\nu}{\rho} \tau \leq R_n^2; \quad 4\lambda\tau \leq R_n^2. \quad (10.17)$$

Итак, все части исходной системы дифференциальных уравнений (5.5)—(5.9), которые можно считать главными, рассмотрены. Все остальные, содержащие младшие члены, аппроксимируются одночленно. Значения функций берутся в точке M_0 , значения производных заменяются средними по секторам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &\sim \bar{f}_r = \frac{1}{2\pi} \sum f_r \Delta\varphi; \\ \frac{\partial f}{\partial z} &\sim \bar{f}_z = \frac{1}{2\pi} \sum f_z \Delta\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

где f_r, f_z для каждого сектора вычисляются по формулам (9.7), (9.8).

Объединяя полученные расчетные формулы, окончательно запишем:

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= u + \frac{\tau}{\rho} \left[-\omega_r + \rho \sum_1 + \eta \left(\frac{4}{3} u_{rr} + u_{zz} + \frac{1}{3} v_{rz} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{H^2}{r} + \eta_r \left(\frac{4}{3} u_r - \frac{2}{3} v_z - \frac{2}{3} \cdot \frac{u}{r} \right) + \eta_z (u_z + v_r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \cdot \frac{\eta}{r} \left(u_r - \frac{u}{r} \right) \right]; \\ v^0 &= v + \frac{\tau}{\rho} \left[-\omega_z + \rho \sum_2 + \eta \left(\frac{1}{3} u_{rz} + v_{rr} + \frac{4}{3} v_{zz} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_z \left(\frac{4}{3} v_z - \frac{2}{3} u_r - \frac{2}{3} \cdot \frac{u}{r} \right) + \eta_r (u_z + v_r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta}{r} \left(v_r + \frac{1}{3} u_z \right) \right]; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 T_0 &= T + \tau \frac{2}{3\rho} \left[-\rho T (u_r + v_z) + \frac{T}{c^2} \Sigma_3 + v (T_{rr} + T_{zz}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho u}{r} + T_r \left(v_r + \frac{v}{r} \right) + T_z v_z + \lambda \left(\left(H_r + \frac{H}{r} \right)^2 + H_z^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\eta \left(u_r^2 + v_z^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} \eta \left(u_r + v_z + \frac{u}{r} \right)^2 + \eta (u_z + v_r)^2 \right]; \\
 H^0 &= H + \tau \left[-H (u_r + v_z) + \frac{H}{\rho c^2} \Sigma_3 + \lambda (H_{rr} + H_{zz}) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_r \left(H_r + \frac{H}{r} \right) + \lambda_z H_z + \frac{\lambda}{r} \left(H_r - \frac{H}{r} \right) \right]; \\
 \rho^0 &= \rho - \tau \rho \left(u_r + v_z + \frac{u}{r} \right); \\
 r^0 &= r + \tau u; \\
 z^0 &= z + \tau v.
 \end{aligned} \right\} (10.19)$$

Здесь для сокращения записи опущены индексы и знаки усреднения. Под $f^0 (=u^0, v^0, \dots)$ понимается значение в точке $M^0 (r^0, z^0)$ в момент $t + \tau$. В правых частях: f означает f_0 , т. е. значение в точке M_0 ; \bar{f}_r и \bar{f}_z — средние по секторам значения \bar{f}_r и \bar{f}_z (10.18), а f_{rr} , f_{rz} и f_{zz} — средние по сериям из пяти точек \bar{f}_{rr} , \bar{f}_{rz} и \bar{f}_{zz} . Наконец, $\Sigma_{1,2,3}$ в соответствии с (10.6) вычисляются как суммы по секторам

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma_1 &= \frac{c}{4} \sum (u_r + v_z) \Delta \sin \varphi; \\
 \Sigma_2 &= -\frac{c}{4} \sum (u_r + v_z) \Delta \cos \varphi; \\
 \Sigma_3 &= \frac{c}{4} \sum (\omega_r \Delta \sin \varphi - \omega_z \Delta \cos \varphi),
 \end{aligned} \right\} (10.20)$$

а ω и c определяются соотношениями (10.2).

§ 11. Разностная реализация граничных условий

Если граничное условие прямо дает значение искомой функции, то вопроса нет. Но в большинстве случаев оно — лишь дополнительная информация к дифференциальным уравнениям задачи. С точки зрения используемого здесь принципа получения расчетных формул отличие внутренних точек от граничных сводится к отсутствию у последних достаточного набора соседних точек, достаточного для корректного построения интерполяционного полинома и учета области зависимости. Восполним этот недостаток использованием граничных условий.

Граничные условия (4.5) при $z = 0$ и $z = z_0$ являются условиями симметрии. Введем в рассмотрение фиктивные точки M' , являющиеся отражением относительно указанных границ действительных расчетных точек M . В фиктивной точке

$$u' = u; v' = -v; T' = T; \rho' = \rho; H' = H, \quad (11.1)$$

а координаты точки

$$r' = r, z' = -z \quad (11.2)$$

при отражении относительно $z = 0$ и

$$r' = r, z' = 2z_0 - z \quad (11.3)$$

при отражении относительно $z = z_0$. Построив для каждой расчетной точки, находящейся около границы, соответствующую фиктивную, сделаем все действительные точки формально внутренними. Этот же прием позволяет просто реализовать граничные условия на оси z (4.11). В этом случае отражение производится по формулам:

$$r' = -r; z' = z; u' = -u; v' = v; T' = T; \rho' = \rho; H' = -H. \quad (11.4)$$

Если точка попадает непосредственно на ось z , то возникает необходимость в вычислении отношений \dot{f}/r при $f = 0, r = 0$. Неопределенности такого типа мы раскрываем, полагая

$$\frac{\dot{f}}{r} \Big|_{r=0} = \bar{f}_r, \quad (11.5)$$

где \bar{f}_r вычисляется стандартным способом (усреднением по секторам).

Итак, введением фиктивных точек решается вопрос о граничных условиях при $r = 0, z = 0, z = z_0$. Обратимся теперь к условиям на внешней границе $r = R(z, t)$ (4.8), (4.9). Для их реализации используем фактически тот же принцип, но в другой форме.

Прежде всего отметим, что внешняя граница перемещается во времени и в каждый момент представлена последовательностью расчетных точек. Очевидно, эта последовательность должна быть достаточно густой, чтобы, во-первых, обеспечить соседними внутренние расчетные точки и, во-вторых, удовлетворительно описать граничную кривую.

Пример нарушения первого условия представлен на рис. 5. Точки M_1, M_2 — граничные, M_0 — внутренняя. Очевидно, между M_1 и M_2 следует вставить еще одну граничную точку M_{12} (интерполяцией по M_1, M_2).

Второе условие сформулируем в виде ограничения на, так сказать, разностную кривизну границы. Рассмотрим три последовательные граничные точки M_1, M_2, M_3 (рис. 6), образующие угол $\Delta\phi$. Потребуем выполнения неравенства

$$|\Delta\phi - \pi| < \Delta\Gamma\phi, \quad (11.6)$$

где $\Delta\Gamma\Phi$ задано (в расчете мы полагали $\Delta\Gamma\Phi \sim \pi/10$). Если условие (11.6) не выполнено, то будем считать, что разностная кривизна велика, и для уменьшения ее «разгладим» границу, заменив точку M_2 парой точек M_{12} и M_{32} , которые получим интерполяцией по M_1 , M_2 и M_3 соответственно. В результате $\Delta\Phi$ всегда будет близко к π .

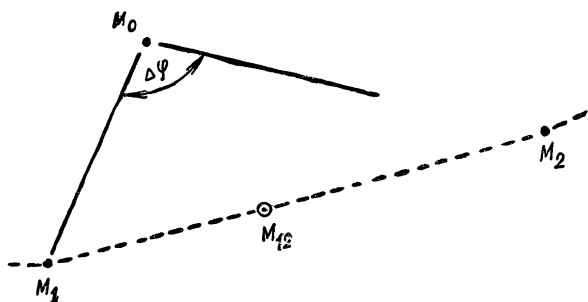


Рис. 5. Вставка граничной точки.

Способ построения расчетной ячейки для граничной точки отличается от стандартного лишь деталями. А именно, отбор проводится только среди точек, расположенных внутри угла $M_1M_2M_3$, причем M_1 и M_3 обязательно включаются в число соседних. Так как $\Delta\Phi \sim \pi$, то построенная расчетная ячейка содержит как минимум три соседние точки.

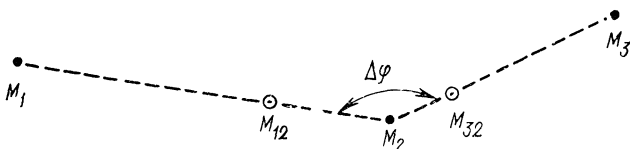


Рис. 6. Сглаживание границы.

Граничные условия реализуем наложением соответствующих требований на интерполяционные полиномы. Пусть n , s — направления нормали и касательной к границе соответственно. Условие (4.9)

$$\partial T / \partial n = 0 \quad (11.7)$$

и следующее из него

$$\partial^2 T / \partial n \partial s = 0 \quad (11.8)$$

дают два соотношения, которым должен удовлетворять интерполяционный полином для T . Следовательно, мы имеем два уравнения для определения пяти коэффициентов полинома T_r , T_z , T_{rr} , T_{rz} , T_{zz} . Еще два уравнения дадут соседние граничные точки M_1 , M_3 . Используя одну из внутренних точек, замкнем систему. Таким образом, в данном случае пятерка определяется внутренней точкой.

В качестве окончательных значений коэффициентов интерполяционного полинома, естественно, возьмем средние по всем используемым пятеркам.

Тот же принцип используется при построении интерполяционных полиномов для функций u и v . Граничные условия (4.8) (и следствия из них) дают четыре соотношения

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ns} = 0; \quad (11.9)$$

$$\partial\sigma_{nn}/\partial s = \partial\sigma_{ns}/\partial s = 0 \quad (11.10)$$

на десять коэффициентов $u_r, v_r, u_z, \dots, v_{zz}$. Пара соседних граничных точек $M_1 M_3$ дает еще четыре соотношения, а любая внутренняя точка позволяет замкнуть систему.

Вычисление значений \bar{f}_r, \bar{f}_z , отвечающих младшим членам системы, проводится усреднением по секторам (как и для внутренних расчетных точек). В качестве f_r, f_z для внешнего сектора $M_1 M_2 M_3$ берем средние значения этих величин по внутренним секторам.

При решении систем пяти и десяти уравнений, связанных с (11.7)—(11.10), сначала исключаем f_r, f_z и лишь затем вычисляем f_{rr}, f_{rz}, f_{zz} — это упрощает дело.

Итак, для вычисления значений f в граничных точках (кроме H , которое задается) используем те же расчетные формулы (10.19). Отличие заключается только в способе получения значений $\bar{f}_{rr}, \bar{f}_{rz}, \bar{f}_{zz}$.

§ 12. Постановка расчетной задачи

Для расчета ударной волны, идущей по плазме с нулевой температурой, использовалась искусственная вязкость: в коэффициент вязкости η из соотношения (5.12) ввели постоянную поправку:

$$\eta = B^* T^{5/2} + B_1^*. \quad (12.1)$$

Кроме того, чтобы устранить особенность $\lambda \rightarrow \infty$, при $T \rightarrow 0$ вместо λ согласно (5.12) использовалось выражение

$$\lambda = E^*/(T^{3/2} + E_1^*). \quad (12.2)$$

Условия устойчивости (10.9), (10.15) и (10.17) накладывают ограничения на соотношение между шагом по времени τ и расстояниями до соседних точек, образующих расчетную ячейку, R_n . Формально используемый нами метод позволяет вести расчет с любым заданным τ , если отказаться от учета «слишком» близких точек. Для этого достаточно в условия отбора ввести дополнительное требование

$$R_n \geq h, \quad (12.3)$$

где

$$h = 2 \max \left(c\tau, \sqrt{\frac{2v}{3\rho}} \tau, \sqrt{\frac{4\eta}{3\rho}} \tau, \sqrt{\lambda\tau} \right), \quad (12.4)$$

и точки, не удовлетворяющие (12.3), в число соседних не включать.

Наличие у каждой расчетной точки «слепой» h -окрестности может привести к недоразумениям лишь в следующих двух случаях.

Во-первых, может оказаться, что расчетная ячейка внутренней точки не замыкается из-за попадания граничной точки в ее h -окрестность. Если место, где это произошло, не представляет особого интереса, то такую внутреннюю точку просто выбросим, в противном случае — уменьшим h (т. е. τ).

Во-вторых, может случиться, что на расстоянии меньше чем h (12.4) окажутся две граничные точки. Если разрешить граничной точке свободный проход сквозь h -окрестность другой, то различные вопросы, связанные с определением разностной кривизны границы, существенно усложнятся. Поэтому мы такую пару точек уничтожим, заменив одной, средней (либо уменьшим h , τ). Иногда этот процесс укрупнения граничного шага вступает в конфликт с процессом мелчения его, вызванным необходимостью сглаживания границы (см. рис. 6). Борьба этих процессов приводит эффективно к срезанию высоких гармоник в граничной кривой.

Во всех других случаях наличие h -окрестностей может сделать некоторые расчетные точки фактически лишними, но никак не затруднит расчет.

Шаг по времени τ выбираем из условия, чтобы значение h (12.4) не превосходило заданного $h_{\text{макс}}$. А именно, на каждом временном слое вычисляем

$$m_1 = 2 \max_M c; \quad (12.5)$$

$$m_2 = 4 \max_M (\lambda, 2\nu/3\rho, 4\eta/3\rho), \quad (12.6)$$

где \max берутся по всем расчетным точкам, и для расчета следующего слоя используем

$$\tau = \min \left(\frac{h_{\text{макс}}}{m_1}, \frac{h_{\text{макс}}^2}{m_2} \right). \quad (12.7)$$

Такой способ позволяет держать шаг τ под контролем и выбирать его, исходя из параметров в наиболее важной области.

ГЛАВА 3

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МГД-МОДЕЛИ Z-ПИНЧА

§ 13. Некоторые замечания

В этой главе изложены результаты расчетов задачи об образовании плазменного фокуса при пинч-эффекте в МГД-приближении, учитывающем диссипативные процессы, анализ и отбор которых сделаны в § 1. Используемая численная методика описана в гл. 2. Упрощенная, фактически бездиссипативная модель плазменного фоку-

са построена авторами ранее [9], для сравнения мы иногда будем ссылаться на нее. Напомним, что решаемая задача, постановка которой дана в § 4 и 5, описывает основную, кумулятивную стадию разряда. Для начальной стадии рассматриваемая теоретическая модель не представляет особого интереса.

Кроме того, обсуждаются некоторые сопутствующие физические вопросы, выходящие за рамки поставленной МГД-задачи. Излагаются выводы линейной теории неустойчивости границы плазма—вакуум, в том числе касающиеся сохранения аксиальной симметрии пинча. Оказывается, что в этой проблеме существенную роль играют диссипативные эффекты, в первую очередь вязкость плазмы. Рассматривается также вопрос об объемном излучении плазмы с учетом дозированных многозарядных примесей типа С и Аг. Полученные оценки свидетельствуют о довольно заметных интегральных потерях энергии при характерных значениях параметров плазменного фокуса. Высказываются некоторые соображения, отчасти приведенные в работе [9], относительно механизма образования нейтронов. Хотя количественные оценки нейтронного выхода, полученные на основе термоядерного механизма, приблизительно соответствуют экспериментальным данным, этот сложный вопрос требует дальнейшего изучения, особенно если учесть, что на стадии плазменного фокуса МГД-модель становится неприменима.

Как показали расчеты, образование фокуса не приводит к возникновению какой-либо равновесной МГД-конфигурации. Непрерывающееся истечение плазмы в аксиальном направлении сопровождается постепенным уменьшением радиуса плазменного облака, и, в конце концов, расчетные параметры фокуса становятся такими, что МГД-модель в этой области теряет смысл. По-видимому, можно говорить, что МГД-приближение, даже с учетом диссипативных эффектов, не в состоянии дать полное теоретическое описание явления плазменного фокуса, хотя вне области фокуса оно остается правомерным. По указанной причине не удастся получить расчетным путем время жизни фокуса. Однако другие важные характеристики процесса определяются в МГД-теории достаточно полно. Сюда относятся динамика кумуляции ударной волны и токовой оболочки, аксиальное истечение плазмы из области перетяжки, многократный, каскадный характер сжатий плазменного облака вблизи оси, формирование фокуса и его параметры на этой стадии.

Проведенный цикл численных исследований с включением в него расчетов [9, 30] практически исчерпал возможности МГД-модели в истолковании изучаемого явления. Дальнейшее уточнение теории фокуса нуждается в построении адекватной кинетической модели плазмы, в первую очередь для ее ионной компоненты. В настоящее время таких расчетов нет. Отметим лишь предпринятую недавно Поттером и Хайном [31] интересную попытку построить одномерную кинетическую модель процесса, однако в рамках одномерной задачи невозможно корректно учесть аксиальное истечение плазмы из области фокуса.

Излагая результаты расчетов, мы не проводим систематического сравнения их с экспериментальными данными. Эта сторона дела освещена в работах [4], [7], [27], [28].

Мы будем параллельно описывать два расчета, отличающиеся в основном лишь определением эффективной проводимости плазмы. В первом из них (вариант А, кратко изложенный в работе [7]) $\sigma_e = 10^{-2}\sigma_{\perp}$ в соответствии с анализом, проведенным в § 1. Во втором расчете (вариант В) $\sigma_e = \sigma_{\perp}$, т. е. проводимость плазмы равна классической поперечной проводимости в сильном магнитном поле. Заметим, что результаты варианта В оказались довольно близкими к полученным в расчете бездиссипативной модели [9], тогда как в варианте А отличие от этих результатов весьма существенно.

Все константы, входящие в постановку физической задачи, и единицы измерения даны в § 5. Кроме того (см. § 12), $B_1^* = 0,003$, $E_{1A}^* = 0,1$, $E_{1B}^* = 0,01$. Начальную форму токовой оболочки, соответствующую экспериментальным данным, мы задавали в виде

$$R = 1 + 0,312 \sin^2 (\pi z / 2z_0). \quad (13.1)$$

Общее число расчетных точек было порядка 1000. В начальный момент точки располагались равномерно, сгущаясь к нижнему электроду. К концу расчета их число возросло примерно до 1500, что объясняется усложнением формы оболочки и необходимостью детализации расчетной картины в области фокуса.

§ 14. Схождение ударной волны и токовой оболочки к оси системы

Первый этап кумуляции — это довольно регулярный процесс сжатия плазменного облака, преимущественно около нижнего электрода, с образованием здесь узкой перетяжки. Общее представление об этом процессе дает рис. 7, где изображены положения внешней границы для начального и позднейших моментов времени в обоих вариантах А и В.

На рис. 8 приведены профили величин ρ , v_r , T , H_{ϕ} при $z \approx 0$ для трех моментов времени. Здесь представлен только вариант В, который больше отвечает реальности на этом этапе процесса. В целом результаты расчета хорошо совпадают с выводами одномерной теории [1]. Ударная волна формируется при $r \gtrsim 0,76$, скорость ее в среднем равна 1,3 (т. е. $1,1 \cdot 10^7$ см/сек) и почти постоянна. Начальное магнитное поле проникает глубоко внутрь плазмы. Однако вклад его здесь невелик, на фронте ударной волны магнитное давление составляет около 0,2 газового давления (при $t = 0,2475$). У производной магнитного поля ярко выражены два пика. Расстояние между ударным фронтом и токовым скин-слоем весьма мало меняется и не превышает 0,1 (т. е. 1,3 см). Толщина же того и другого по крайней мере в пять раз меньше.

В варианте А имеются следующие естественные отличия. Примерно в три-четыре раза возрастает толщина скин-слоя (а не в десять

раз, так как одновременно усиливается джоулев нагрев скин-слоя). Магнитное поле нельзя считать «замороженным». Весь процесс сжатия носит более вялый характер, особенно к концу.

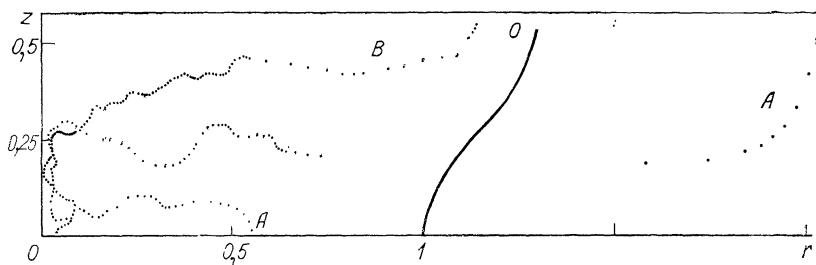


Рис. 7. Конфигурация границы в разные моменты времени:
 O — начальный ($t=0$); A — почти конечный варианта A ($t_A=1,29$); B — почти конечный варианта B ($t_B=0,83$).

Отметим качественное отличие этих результатов от результатов Поттера [30], где вплоть до самой кумуляции не приходится говорить о формировании стационарного фронта ударной волны. Внешне

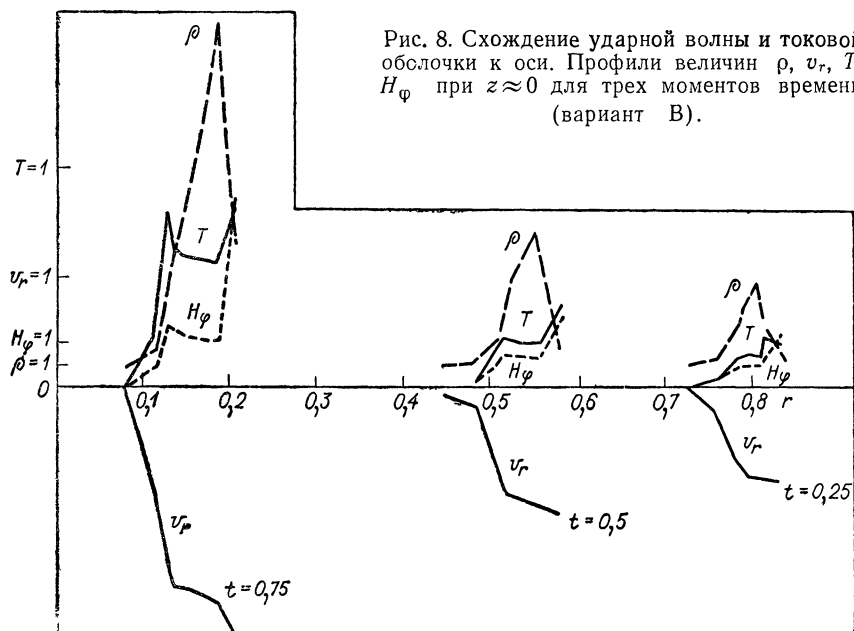


Рис. 8. Схождение ударной волны и токовой обложки к оси. Профили величин ρ , v_r , T , H_φ при $z \approx 0$ для трех моментов времени (вариант B).

это проявлялось в слабом сжатии плазмы внутри токового слоя (все-го в несколько раз) и в так называемом сверхзвуковом характере движения слоя (отношение скорости плазмы к скорости звука в работе [30] равно шести, здесь же при $t = 0,7457$ отношение $v/c_s =$

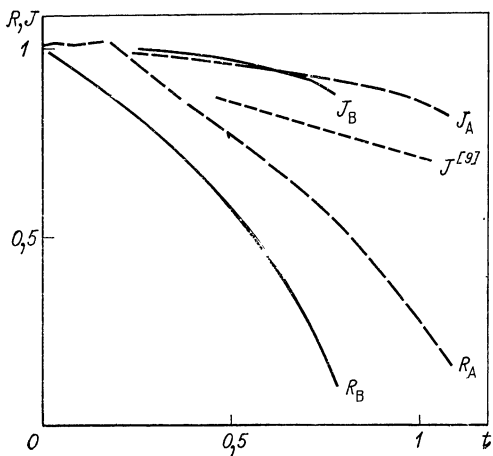


Рис. 9. Зависимости $R(t)$ при $z=0$ в вариантах А и В. Здесь же представлены соответствующие кривые $J(t)$, в том числе аппроксимация тока в бездиссипативном расчете J [9].

$= v(5T/3)^{-1/2} = 1,56$, для предельно сильной ударной волны $v/c_s \approx 1,34$. Основная причина указанного отличия, по-видимому, в разной геометрии задач.

Продолжительность первого этапа в вариантах А и В различна ($1,1 - 0,8 = 0,3$). Чтобы понять причину этого, обратимся к рис. 9, где изображена зависимость от времени радиуса внешней границы $R(t)$ при $z=0$ для обоих вариантов. Здесь же даны графики полного тока. Видно, что основная часть разницы времен кумуляции связана с начальными моментами. При уменьшенной проводимости плазмы (вариант А) токовая оболочка фактически начинает движение внутрь только через время $\Delta t \approx 0,2$, которое уходит на формирование скин-слоя и ударной волны. Таким образом, полученная разновременность в значительной степени объясняется упрощенным выбором начальных условий, в частности, отсутствием движения токовой оболочки при $t=0$. С физической точки зрения эффект задержки движения токовой оболочки внутрь плазмы, обусловленный

вариант А) токовая оболочка фактически начинает движение внутрь только через время $\Delta t \approx 0,2$, которое уходит на формирование скин-слоя и ударной волны. Таким образом, полученная разновременность в значительной степени объясняется упрощенным выбором начальных условий, в частности, отсутствием движения токовой оболочки при $t=0$. С физической точки зрения эффект задержки движения токовой оболочки внутрь плазмы, обусловленный

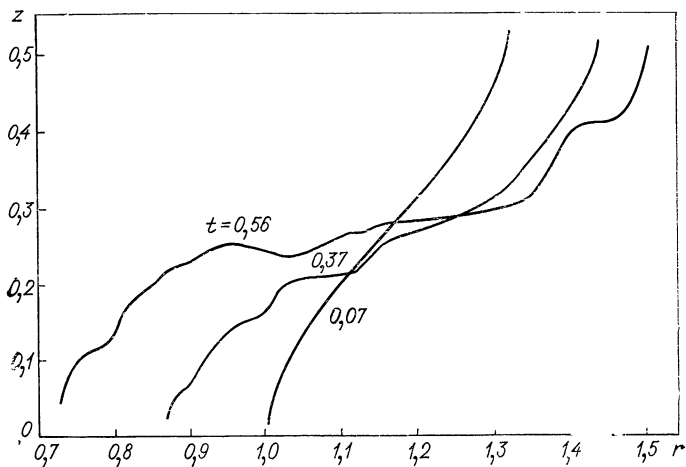


Рис. 10. Конфигурация границы для нескольких ранних моментов времени в варианте А.

уменьшением проводимости, в данной постановке задачи (с «промежуточным стартом») не следует понимать слишком буквально (качественно он должен был бы приниматься во внимание при рассмотрении отрыва токовой оболочки от изолятора в нижней части камеры; см. по этому поводу [1]).

Время кумуляции в бездиссипативной модели $t_{[9]} = 1,05$ в принятых здесь единицах, т. е. практически совпадает с $t_A = 1,1$, хотя по физическому смыслу ему следовало быть ближе к $t_B = 0,8$. Это совпадение случайно и объясняется занижением тока в расчетах работы [9] (см. рис. 9), более грубой методикой этого расчета и др.

Образование скин-слоя и ударной волны сопровождается движением границы оболочки наружу, что показано на рис. 10, соответствующем ранним моментам варианта А. В этом варианте для $z > 0,3$ внешняя граница и для поздних времен двигается наружу (см. рис. 7). Наблюдаемый на рис. 7 и 10 волнообразный характер границы свидетельствует о ее неустойчивости. На первой стадии процесса наиболее быстро растут волны вдоль границы с характерной длиной порядка 0,1 (1,3 см). При этом имеются большие различия в форме границы для обоих вариантов.

§ 15. Первое сжатие плазмы

Этот этап процесса достаточно подробно обсуждался в бездиссипативной модели плазмы [9]. Поэтому здесь мы приведем только дополнительные данные, полученные в вариантах А и В.

Проследим процесс кумуляции ударной волны. На рис. 11 изображены профили ρ , v_r , T при $z = 0$ для трех моментов времени (вариант В). Первый момент $t_1 = 0,784$ соответствует выходу ударного фронта на ось системы. Так как $\partial v_z / \partial z > 0$ (рис. 12), то имеется, в том числе и при $z = 0$, отток плазмы вверх (в работе [30] он ошибочно характеризуется величиной v_z). Это приводит к отличиям от результатов в расчетах одномерной теории. Вполне понятно, что двумерный эффект вытеснения плазмы приводит к усилению кумуляции. На рис. 11 хорошо видно дожатие плазмы до $\rho \gtrsim 100$, при этом $T \approx 5$, а радиус оболочки $R \lesssim 0,05$. Напомним, что в расчете по одномерной теории [1] мы имели $\rho \lesssim 80$, $T \lesssim 2$, $R \approx 0,14$. Характерные значения параметров, полученных на этом этапе (первое сжатие) во всех трех двумерных расчетах, приведены в таблице.

Разница во времени обуславливается (см. § 14) упрощенным выбором начальных условий и грубой аппроксимацией зависимости полного тока от времени в [9]. По-видимому, не следует придавать значения и разнице в месте образования максимального сжатия плазмы (вторая строка таблицы), которая во многом объясняется характером неустойчивости границы (см. рис. 7 и 10). Различия же в R_{\min} , T_{\max} , ρ_{\max} достаточно обоснованы.

В варианте А, как показывает расчет, толщина скин-слоя одного порядка с радиусом перетяжки. Она добавляется к радиусу плот-

ной сердцевин (плотность плазмы в скин-слое на порядок меньше осевой плотности), что и увеличивает $R_{\text{мин}}$. Соответственно в варианте А значения температуры и плотности на оси уменьшаются.

На рассматриваемой стадии процесса роль вязких сил невелика и условие динамического равновесия магнитного и газового давлений выполняется очень точно. Отношение газовых давлений

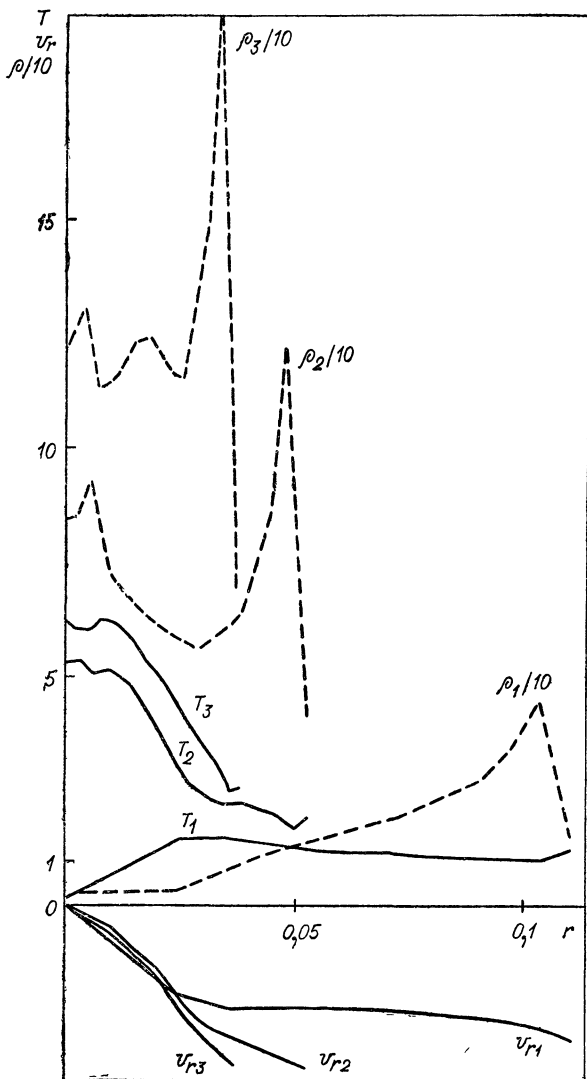


Рис. 11. Процесс кумуляции ударной волны на оси. Профили величин ρ , v_r и T при $z=0$ для трех моментов времени $t_1=0,784$; $t_2=0,802$ и $t_3=0,806$ (вариант В).

$(\rho T)_A/(\rho T)_B \approx 17$, тогда как $R_A^2/R_B^2 \approx 25$. Если еще учесть, что $J_B < I_A$ (см. рис. 9), то получаем почти точное соответствие в изменении магнитного и газового давлений.

В работе [9] рассматривалась средняя по сечению перетяжки температура как более реальная из-за неучтенного там эффекта ионной теплопроводности. Однако вариант В показал, что выравнивания температуры из-за теплопроводности не происходит. Поэтому в таблице в качестве $T_{\text{макс}}$ из расчета [9] указана температура на оси.

Таблица параметров первого сжатия плазмы

Параметры	А	В	[9]
Время первого сжатия t	1,12	0,81	1,05
Высота над анодом z	0,15	0,15	0,06
Минимальный радиус оболочки $R_{\text{мин}}$	0,075	0,015	0,02
Максимальная температура на оси $T_{\text{макс}}$. .	3,4	13,0	15,0
Максимальная плотность на оси $\rho_{\text{макс}}$	100	450	180

Итак, параметры первого сжатия, полученные в расчетах В и в работе [9] (которые на этом этапе больше соответствуют реальности), довольно близки между собой. Пинч с радиусом 2—3 мм имеет плотность, в несколько сот раз большую первоначальной, и температуру около 1 кэВ. Эти значения параметров близки к данным Поттера [30]. Однако трудно согласиться с его наивной интерпретацией относительной роли вязкого нагрева ионов плазмы, будто бы возрастающей с увеличением коэффициента вязкости. При нелинейной диссипации на стадии схождения ударной волны к оси доля кинетической энергии, превращенной в тепловую, зависит не только от величины коэффициента вязкости, но и от характера течения позади ударного фронта (для автомодельного случая [32] нагрев плазмы вблизи оси определен, например, в работе [33]; при заданной скорости ударной волны максимальная температура на оси $T \sim \alpha^{-0,237}$ снижается с ростом коэффициента вязкости $\eta \sim \alpha T^{5/2}$, параметр α определен в § 5).

Оценим токовую скорость электронов v_e в вариантах А и В. Выразим отношение v_e к ионно-звуковой скорости c_s через безразмерные величины (см. § 5):

$$\frac{v_e}{c_s} \approx \frac{J}{n_{\text{еп}} [R^2 - (R-d)^2]} \left(\frac{m_i}{kT} \right)^{1/2} \approx \frac{2,16 \cdot 10^{-2}}{\rho T^{1/2} d (2R-d)}. \quad (15.1)$$

Подставляя для варианта А $\rho = 20$; $T = 3,4$; $d = 0,025$ и $R = 0,075$, получаем $v_e/c_s \approx 0,2$. В варианте В структура скин-слоя описывает-

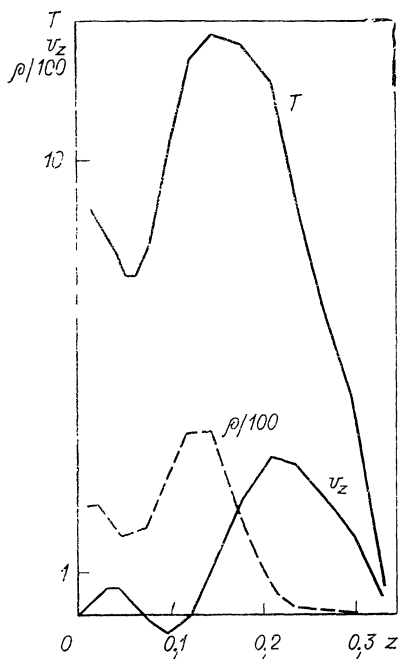


Рис. 12. Аксиальные зависимости величин.

Профили величин ρ , T , v_z при $r=0$ в момент времени $t=0,8108$ (вариант В).

фронтом. Осевая скорость в момент первого сжатия и при $z = 0,15$ составляет $v_z \approx 1,3$. Эти результаты хорошо согласуются с данными работы [9].

§ 16. Второе сжатие плазмы

Под этим термином мы понимаем сложный процесс, протекающий в приосевой области плазмы после того, как рассмотренный выше этап (первое сжатие) заканчивается остановкой или попятным движением токовой оболочки. Это второе сжатие обладает менее регулярным характером, и на самом деле нужно говорить о многократных, повторных сжатиях, происходящих в разных местах приосевой области. Пока нас интересует широкая окрестность вдоль оси, естественнее использовать результаты варианта В. Поэтому обсудим в основном второе сжатие по данным варианта В. Рис. 13 дает представление о геометрии этого процесса. Здесь изображены положения расчетных точек на завершающем этапе расчетов обоих вариантов (заметим, кстати, что большинство этих точек появилось в конце расчета). Из рис. 13, как и из рис. 7, видно, что упомянутая ранее неустойчивость границы развивается с уменьшением харак-

ся очень грубо, даже в ранние моменты (см. рис. 8). Возьмем соответствующие значения $\rho \approx 80$; $T \approx 4$; $d \approx 0,003$ и $R \approx 0,015$ и тогда получим, что отношение $v_e/c_s \approx 1$. Отсюда делаем вывод, что для первого сжатия модель с классической проводимостью (вариант В) все еще применима.

На рис. 12 представлены профили величин ρ , T , v_z на оси при $r=0$ в момент времени $t=0,8108$, близкий к первому сжатю. При этом фронт ударной волны достиг оси в точке $z \approx 0,33$, причем здесь можно говорить уже не о сходящейся волне, а об аксиальной. Ширина фронта здесь велика (около 0,1), что соответствует высоким температурам за фронтом (порядка 10). На рисунке хорошо видно, как область плотного пинча ($\rho \approx 400$) сменяется при $z > 0,2$ областью аксиальной струи плазмы ($\rho \leq 10$), следующей за ударным

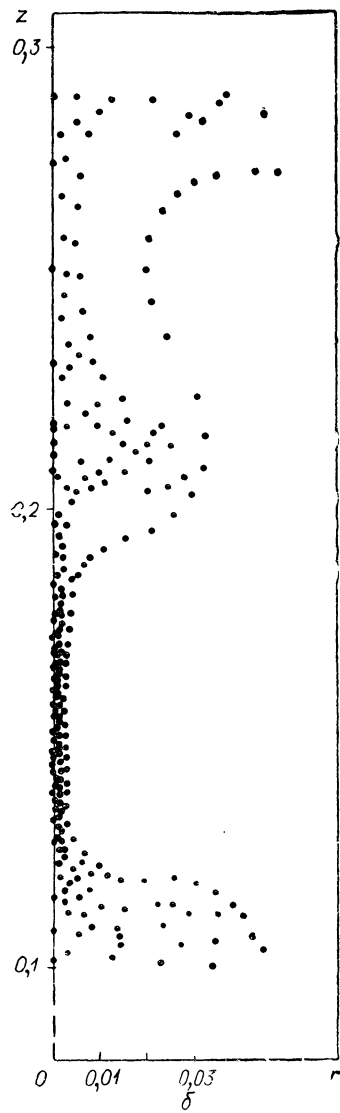
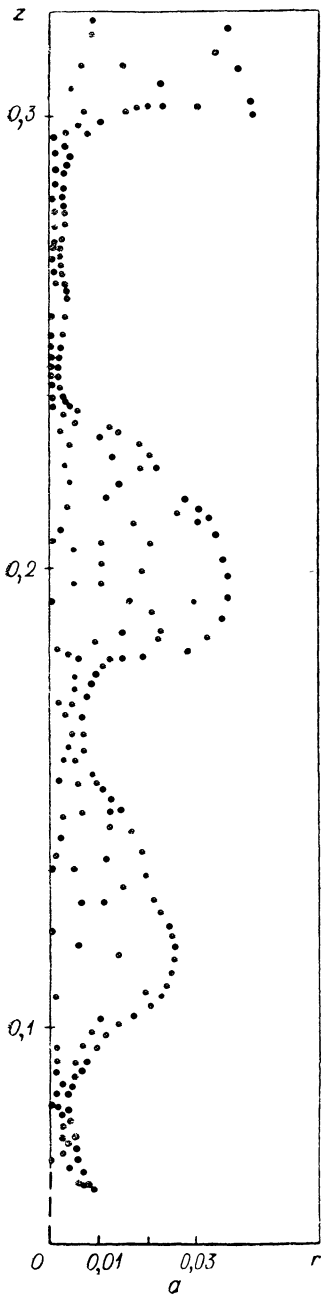


Рис. 13. Конфигурация плазмы при втором сжатии. Расположение расчетных точек на завершающем этапе расчета:

вариант А в момент $t_A=1,297$ (а);
 вариант В в момент $t_B=0,83$ (б).

терной длины волны до 0,05. Это приводит к сокращению осевой протяженности областей кумуляции при втором сжатии более чем в два раза.

Наблюдаемому плазменному фокусу соответствует именно второе сжатие. Это утверждение, неоднократно высказывавшееся и ранее [4, 7, 9], отличает наше рассмотрение от выводов Поттера [30],

который только упоминает об эффекте репинча (что, по-видимому, отвечает описанному здесь второму сжатию), но в качестве характеристик плазменного фокуса использует параметры первого сжатия. Эксперимент [7, 28, 34] определенно указывает на преимущественное значение второго сжатия.

На рис. 14 показано распределение ρ , T , v_z вдоль оси z для варианта В в тот же момент времени, что и на рис. 13, б. При $z \approx 0,17$ быстро развивается мощный максимум ρ и T . Несколько выше ($z \approx 0,21 - 0,24$) возникает одновременно второй более слабый максимум, но его развитие приостанавливается по мере роста главного. Подавляющую роль, как видно, выполняет струя плазмы от главного максимума. Конфигурация токовой оболочки на рис. 13, б соответствует этому распределению. Напротив главного максимума радиус оболочки доходит до $R = 0,003$, а около второго — лишь до 0,02.

Осевая скорость v_z в максимуме параметров проходит через нуль, как только он становится доминирующим среди соседних (см. рис. 14). Струя плазмы выбрасывается не только вверх по оси z , но и вниз. Скорость истечения плазмы из-под главной пере-

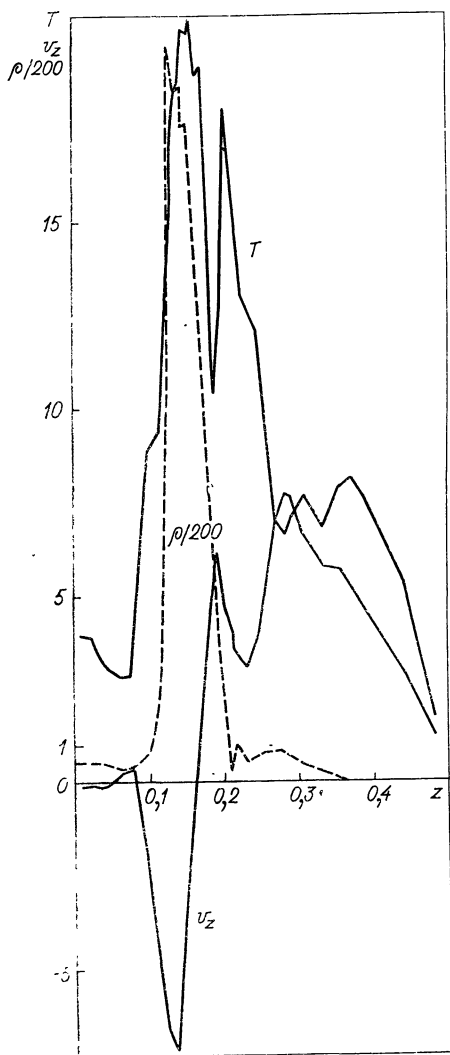


Рис. 14. Аксиальные зависимости величин во время второго сжатия плазмы. Профили величин ρ , T , v_z при $r \approx 0$ в момент $t = 0,83$ (вариант В).

тяжки имеет тенденцию к усилению, поскольку возрастает градиент $\partial v_z / \partial z$. Нельзя утверждать, что максимум ρ , T совпадает с точкой остановки $v_z = 0$. Можно допустить, что максимум перемещается со скоростью v_z от 1 до 3. На рис. 14 хорошо видна большая скорость аксиальной струи плазмы, которая достигает $v_z = 7-8$ (в первом сжатии было 4—5, см. рис. 12), что почти соответствует $v_z \approx 7 \cdot 10^7$ см/сек [9, 30].

Остальные характеристики струи (температура, эффективный радиус и др.) совпадают с приведенными в работе [9]. Отметим, что, как и в работе [9], температура за фронтом аксиальной ударной волны получается в расчетах в два раза меньше, чем по условию Гюгонио ($T = v_z^2/3$). Нельзя утверждать, как это сделано в работе [9], что это отклонение связано со случайными причинами. По-видимому, оно объясняется эффектами нестационарности и другими. Этот вопрос имеет важное значение для проблемы нейтронного выхода. Фронт ударной волны находится за пределами рис. 14. Примерно при $t = 0,83$ он достигает верхнего электрода ($z = z_0 = 0,54$).

В варианте А процесс второго сжатия несколько запаздывает, но развитие главного максимума параметров происходит аналогично. Два других максимума постепенно подавляются эффектом аксиальной струи. Скорость последней в этом варианте оказалась примерно в полтора раза меньше ($4-5 \cdot 10^7$ см/сек). Трудно сказать, вызвано это изменением конфигурации оболочки или уменьшением скорости кумуляции. Заметно сместилось вверх положение главного максимума ($z \approx 0,28$). Складывается впечатление, что моменты и места образования максимумов параметров определяются во многом действиями различных случайных факторов, порождающих ту или иную детальную геометрию оболочки в процессе соревнования нескольких развивающихся перетяжек.

Описывая структуру главного максимума параметров второго сжатия, будем (по соображениям § 1) иметь в виду вариант А. На рис. 15 представлена зависимость от времени величин ρ , T , R , соответствующих двум максимумам: первому — около $z \approx 0,18$ (индекс 1), второму — $z \approx 0,28$ (индекс 2). В результате соревнования перетяжек в момент $t \approx 1,283$ роль главного переходит от первого максимума ко второму. Такая нерегулярность поведения параметров типична для второго сжатия и в конечном счете является следствием сокращения характерной длины волны возмущения внешней границы плазмы.

Как видно из рис. 15, уменьшение радиуса оболочки R_2 продолжается и после того, как его отношение к длине свободного пробега ($l_i \approx 1,7 \cdot 10^{-2} T^2 / \rho$) становится меньше единицы. Следовательно, расчет демонстрирует нарушение условия применимости МГД-приближения для плазмы в области главного максимума параметров. [Другое отношение, характеризующее МГД-приближение, (r_{A12}/R_2) ~ 1 , поскольку $d_2 \sim R_2$, см. § 1.] Проблема безостановочного сжатия плазмы в перетяжке сформулирована еще в работе [9]. На основе представленных здесь расчетов можно сделать вывод,

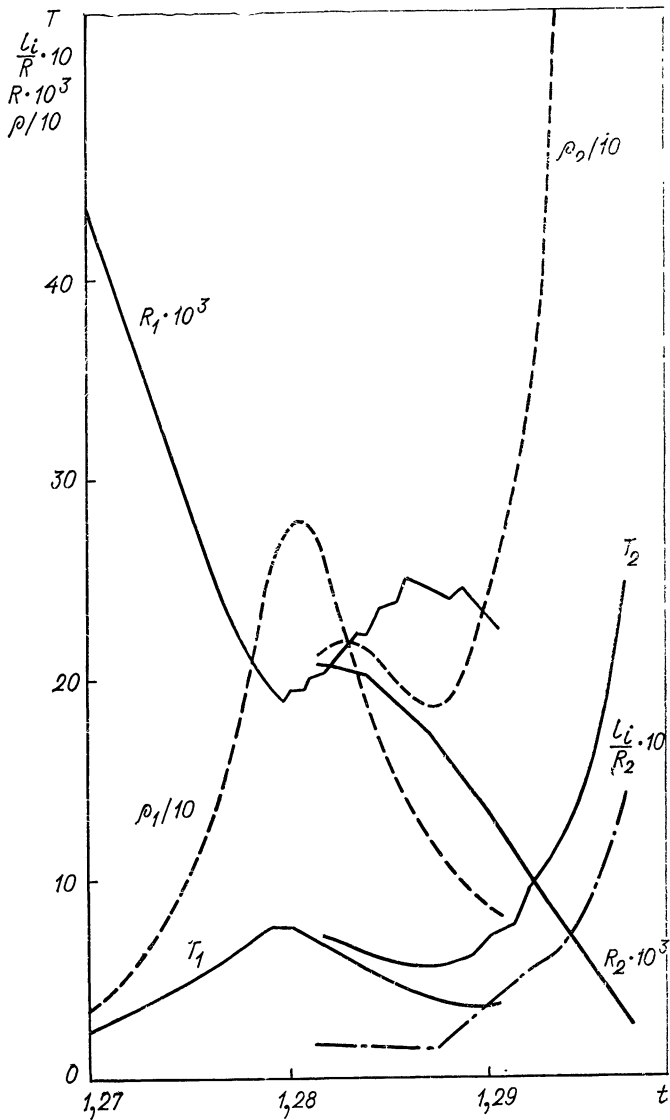


Рис. 15. Временные зависимости максимальных параметров плазмы во втором сжатии.

Индексом 1 обозначены величины при $z \approx 0,18$, 2 — при $z \approx 0,28$ (варианта А). Здесь же дан график отношения li/R .

что учет диссипативных процессов и изменения тока не приводят к остановке сжатия плазмы в области главного максимума. Вопрос о дальнейшей судьбе плазменной перетяжки, параметры которой определяются в рамках МГД-приближения, полностью может быть решен только с учетом кинетических эффектов.

Относительно роли диссипативных процессов в замедлении сжатия заметим следующее. Джоулев нагрев в соответствии с оценкой, указанной в работе [9], дает рост электронного давления $p_e \sim R^{-2}$.

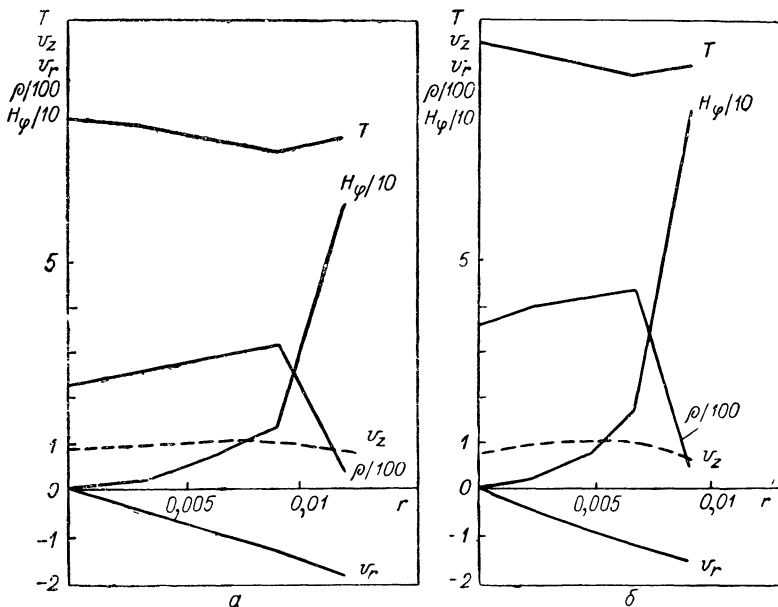


Рис. 16. Радиальные зависимости величин во втором сжатии.

Профили величин T , v_z , v_r , ρ и H_φ при $z=0,25$ и для двух моментов времени $t_1=1,2905$ (а) и $t_2=1,2923$ (б) (вариант А)

Но при этом не учитываются отвод тепла из скин-слоя и обмен тепловой энергии с ионами. Поэтому в данном случае, когда указанные эффекты снижения p_e существенны, остановка из-за джоулева нагрева невозможна. Вязкие силы замедляют темп сжатия плазмы (они играют все возрастающую роль на последних этапах сжатия), но остановить сжатие не могут, поскольку они автоматически выключаются при

$$v_r = ar; \quad v_z = b(z - z_{pf}), \quad (16.1)$$

где a , b зависят только от t . Но именно зависимости (16.1) соответствуют второму сжатию в области главного максимума, что можно видеть на рис. 14 и 16. Изображенные здесь моменты соответствуют началу очередного сжатия, так как в самом максимуме мы не можем

говорить об удовлетворительной точности результатов (см. рис. 13). Что касается теплопроводности, то она может даже ускорять сжатие (при заданном вытекании). Как видно из рис. 16, температура выравнивается вдоль радиуса. Наконец, рост индуктивного сопротивления плазмы оказался количественно неэффективным, в частности, из-за малой осевой протяженности области главного максимума. Отметим, что от момента $t = 1,280$ до $t = 1,297$ ток упал всего с $0,76$ до $0,70$ ма.

В итоге никаких эффективных факторов остановки сжатия плазмы в данной постановке задачи выделить не удастся. Это согласуется с непосредственными результатами расчетов.

Факт безостановочного сжатия плазмы не был установлен в расчетах Поттера [30] скорее всего вследствие эйлерова характера расчетного метода. В работе [30] тем не менее отмечено, что при измельчении расчетной сетки происходит увеличение плотности плазмы в несколько раз, что прямо указывает на ненадежность количественных данных о параметрах плазмы в стадии фокуса. Поэтому объяснение Поттера, что стабилизация радиуса пинча обеспечивается осевым потоком плазмы через область фокуса, неудовлетворительно. В наших расчетах такой поток также наблюдался (см. рис. 12), однако сжатие плазмы вскоре возобновилось. О роли вязкости в устойчивости пинча будет еще сказано ниже.

Заканчивая обсуждение структуры плазменного фокуса (см. рис. 16), отметим, что трубчатая структура пинча во втором сжатии выражена слабо, а скинирование магнитного поля можно считать умеренным — толщина скин-слоя несколько меньше половины радиуса, т. е. оценки § 1 подтвердились в расчетах.

При сравнении вариантов А и В обращает на себя внимание большая разница в интервалах времен и между первым и вторым сжатиями. Если в варианте А этот интервал равен $0,175$ (250 нсек), то в варианте В он такой же, как в бездиссипативной модели [9], и равен $0,02$ (30 нсек). Возможные причины различия уже обсуждались выше. В этом параметре следует отдать предпочтение варианту В, лучше описывающему стадию первого сжатия плазмы. Чрезвычайная малость этого интервала — одно из основных проявлений двумерного характера процесса (в одномерной теории этот интервал порядка 1). Несмотря на большую разницу в расположении и моменте образования главного максимума, его параметры T , R в обоих вариантах расчета хорошо согласуются. Несколько хуже совпадают плотности ρ — в этом проявляется разный вклад вязких сил.

В рамках МГД-модели естественно принять за параметры плазменного фокуса значения расчетных величин в момент, когда $(l_i/R) \sim 1$. Следовательно (см. рис. 15), $T = 18$; $\rho = 1050$; $R = 0,004$ (в варианте В значению $T = 18$ соответствует $\rho = 3000$, $R = 0,004$). Кроме того, $\Delta z = 0,06$ (см. рис. 13). Итак, $T = 1,5$ кэв; $n = 7,5 \times 10^{19}$ см⁻³; $R = 0,5$ мм; $\Delta z = 8$ мм. Значения, близкие к этим, уже упоминались в докладе [7].

§ 17. Неустойчивость границы плазмы с магнитным полем

а. Линейная теория неустойчивости. Расчеты показали, что граница плазмы приобретает волнообразную форму, детали которой имеют довольно случайный нерегулярный характер, свойственный развитию неустойчивости. О влиянии неустойчивости границы на важнейшие характеристики процесса, особенно во время второго сжатия, уже говорилось раньше (см. § 14—16). Здесь рассмотрен конкретный механизм неустойчивости, который может быть ответствен за полученный в расчетах эффект. Сначала мы представим некоторые выводы линейной теории неустойчивости (ЛТН), а потом сопоставим их с МГД-расчетом. В заключение параграфа обсуждается вопрос об аксиальной симметрии пинча с точки зрения ЛТН.

В процессе быстрого сжатия плазмы характерно ускоренное движение границы плазмы с магнитным полем. Если при этом ускорение направлено в сторону плазмы, то в неинерциальной системе координат такая ситуация эквивалентна присутствию силы тяжести, действующей вовне плазмы. В подобных условиях, как известно, развивается неустойчивость границы типа Рэля — Тейлора. Для идеальной несжимаемой плазмы анализ неустойчивости в МГД-приближении дан Крускалом и Шварцшильдом [6]. Изложение этого анализа в изящной форме с некоторыми обобщениями представлено Стиксом [35]. Для возмущений с волновым вектором \mathbf{k} , направленным поперек магнитного поля, инкремент неустойчивости неограниченно возрастает с ростом $|\bar{k}|$, $\gamma \sim \sqrt{\bar{k}}$. В этом случае имеется полное совпадение с классическим результатом Рэля и Тейлора для несжимаемой жидкости [36]. Неограниченный рост инкремента следует трактовать как следствие физически неполной постановки задачи. В анализе роста возмущений с короткими длинами волн естественно расширить исходную модель идеальной МГД-жидкости включением диссипативных эффектов, в первую очередь вязкости плазмы. Роль вязкости в обычной жидкости исчерпывающим образом рассмотрена Чандрасекаром [37]. В работе [8] исследовано влияние вязкости на неустойчивость границы плазмы с магнитным полем в МГД-случае. При этом плазма предполагалась однородной и несжимаемой, граница ее — плоской, вязкость — изотропной, а остальные диссипативные эффекты не учитывались. Заметим, что оценка роли вязкости в случае стационарной цилиндрической геометрии пинча ранее сделана Тэйлером [38], но там даже не было получено общего дисперсионного уравнения*.

Мы здесь не будем приводить вывод дисперсионного соотношения [8]. Ограничимся частным случаем, наиболее подходящим к условиям плазменного фокуса, когда внутри плазмы магнитное по-

* Хорошо известно, что гравитационное поле моделирует эффекты кривизны силовых линий магнитного поля. Поэтому анализ стационарных цилиндрических конфигураций пинча во многих отношениях аналогичен данной задаче [6, 36, 39].

ле отсутствует ($\mathbf{H}_0^p \equiv 0$). Тогда соответствующее дисперсионное соотношение примет вид

$$\omega^2 - \kappa + \kappa^2 \mu^2 - 4\kappa^3 (\kappa^2 + \omega)^{1/2} + 4\omega\kappa^2 + 4\kappa^4 = 0, \quad (17.1)$$

где введены безразмерные величины κ , ω и безразмерный параметр μ :

$$k = \kappa \left(\frac{g\rho^2}{\eta^2} \right)^{1/3}; \quad \gamma = \omega \left(\frac{g^2\rho}{\eta} \right)^{1/3}; \quad \mu = \frac{k_{\parallel}}{k} \cdot \frac{H^v}{(4\pi\rho)^{1/2}} \left(\frac{\rho}{\eta g} \right)^{1/3}. \quad (17.2)$$

Возмущения вдоль границы плазмы характеризуются волновым вектором \mathbf{k} с компонентой вдоль поля k_{\parallel} (единственная компонента \mathbf{H}^v — H^v , геометрия задачи — плоская), инкрементом γ (возмущения растут пропорционально $\exp \gamma t$). Уравнение (17.1) является однопараметрическим: единственный параметр μ зависит от комбинации из величин H^v , ρ , η , g , а также от косинуса угла между векторами \mathbf{H}^v и \mathbf{k} . В случае $\mu = 0$ из (17.1) получается уравнение для вязкой жидкости [37], а в другом пределе, $\eta \rightarrow 0$, легко понять, что обращаются в нуль три последних слагаемых в (17.1) и остается известное уравнение идеальной МГД-модели [35]:

$$\omega' = (\kappa - \mu^2 \kappa^2)^{1/2}. \quad (17.3)$$

Численное решение соотношения (17.1) $\omega = \omega(\kappa, \mu)$ при различных значениях параметра μ представлено на рис. 17. Для сравнения на рисунке даны также кривые ω' из (17.3), соответствующие отсутствию вязкости. Отметим, что граница обращения инкремента в нуль не зависит от наличия вязкости [это непосредственно видно из сравнения уравнений (17.1) и (17.3) при $\omega = \omega' = 0$]. Из рис. 17 видно, что вязкость снижает величину инкремента, пока параметр μ не становится слишком большим (попарно сравним кривые ω и ω'), а также, как магнитное поле подавляет неустойчивость (сравнение кривых ω по мере увеличения параметра μ).

б. О природе возмущений границы плазмы в МГД-модели. Сопоставим выводы ЛТН с численными результатами МГД-модели. Поскольку МГД-задача аксиально симметрична, в ЛТН нужно положить $k_{\parallel} = 0$, т. е. согласно (17.2) параметр $\mu = 0$. Верхняя сплошная кривая на рис. 17 представляет собой инкремент неустойчивости в этом случае, полностью совпадающем со случаем Чандрасекара [37]. Прежде всего сформулируем несколько условий, при которых выводы ЛТН можно применять к МГД-задаче. Качественный характер последующего сравнения позволяет записать эти условия в виде простых неравенств.

Пренебрежение цилиндричностью и магнитным полем внутри плазмы возможно при следующем ограничении на волновое число k :

$$R > k^{-1} > d, \quad (17.4)$$

где d — толщина скин-слоя. Заметим, что возмущения в ЛТН убывают в глубь плазмы экспоненциально с показателем $k_p^2 \gg k$, а вне ее с $k^v = k$ [8]. Условие несжимаемости плазмы представим в виде

$$c_s^2 > (\gamma/k)^2. \quad (17.5)$$

Оно следует из энтропийного уравнения, которое, естественно, не входило в исходную систему ЛТН. Нетрудно записать условия пренебрежения ролью теплопроводности и проводимости плазмы:

$$t_i \gamma > 1 (i = \bar{T}, \bar{\Pi}); t_\tau \approx C_v \rho / \nu k^2; t_\Pi \approx 1/k^2 \lambda, \quad (17.6)$$

где использованы известные обозначения (см. гл. 1) для коэффициентов теплопроводности ν и диффузии магнитного поля λ . Остается еще

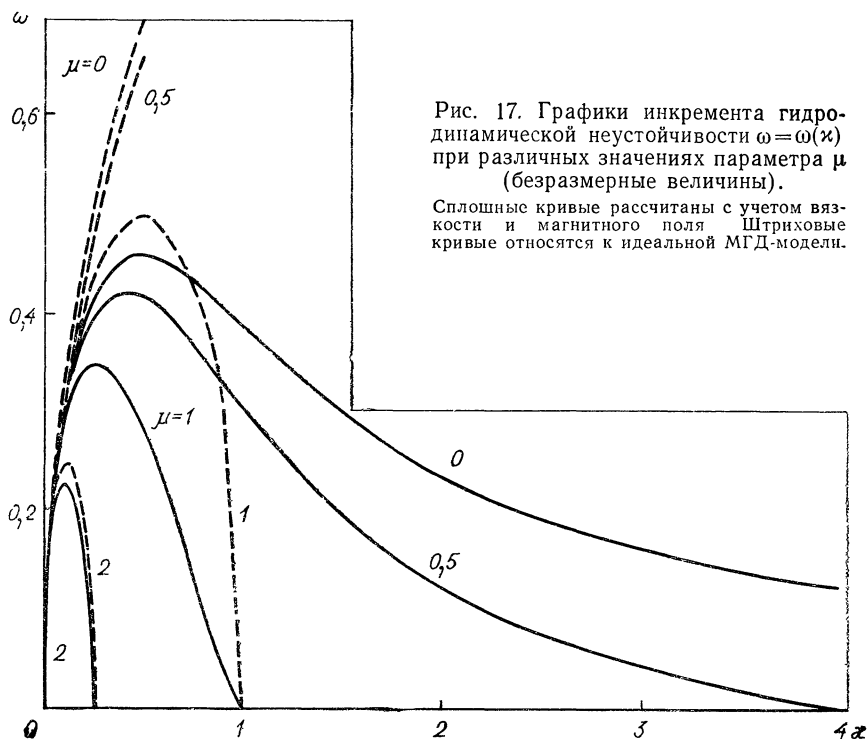


Рис. 17. Графики инкремента гидродинамической неустойчивости $\omega = \omega(x)$ при различных значениях параметра μ (безразмерные величины).

Сплошные кривые рассчитаны с учетом вязкости и магнитного поля. Штриховые кривые относятся к идеальной МГД-модели.

добавить тривиальные ограничения на масштабы пространственного (r_j) и временного (t_j) изменений величин плотности, скорости и ускорения в МГД-задаче:

$$r_\rho, r_v, r_g > k^{-1}, t_\rho, t_v, t_g > \gamma^{-1}. \quad (17.7)$$

Неравенства (17.4)—(17.7) обеспечивают применимость ЛТН к МГД-задаче.

В дальнейшем для сравнений нам понадобятся конкретные значения ускорения g и коэффициента вязкости η из МГД-расчета. Единица ускорения (см. § 5)

$$g_0 = \frac{v_0}{t_0} = \frac{v_0^2}{R_0} = \frac{p_0}{\rho_0 R_0} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 R_0} = \frac{J_0^2}{\pi c^2 \rho_0 R_0^3}. \quad (17.8)$$

В качестве значений g , по всей вероятности, лучше всего использовать сумму:

$$g \approx g_{\kappa} + g_c = g_{\kappa} + H^2/4\pi\rho R, \quad (17.9)$$

где g_{κ} — расчетное ускорение границы плазмы, а второе слагаемое качественно описывает зависимость магнитного поля от радиуса границы плазмы. Нетрудно показать, что изменение магнитного поля постоянного тока при возмущении границы плазмы по своему действию эквивалентно некоторому дополнительному ускорению g_c [см. (17.9)]. Понятно, что формула (17.9) несколько изменяется при переходе к безразмерным единицам. Соответственно (12.1) и выбору постоянных множителей B^* в § 5 и B_1^* в § 13 коэффициент вязкости в безразмерных переменных

$$\tilde{\eta} = 10^{-2} \tilde{T}^{5/2} + 3 \cdot 10^{-3}. \quad (17.10)$$

Рассмотрим возмущения, имеющие максимальный инкремент. Понятно, что если нет каких-либо специальных условий возбуждения [7], то преимущественно должны развиваться возмущения с максимальным инкрементом. На основании формул (17.2) (см. также рис. 17) заключаем, что

$$\gamma_{\max} = 0,46 (g^2 \rho / \eta)^{1/3}; \quad k_{\max} = 0,50 (g \rho^2 / \eta^2)^{1/3}. \quad (17.11)$$

Переходя к безразмерным единицам § 5 с учетом (17.8), из формул (17.11) получаем:

$$\tilde{\gamma}_{\max} = 0,46 (\tilde{g}^2 \tilde{\rho} / \tilde{\eta})^{1/3}; \quad \tilde{k}_{\max} = 0,50 (\tilde{g} \tilde{\rho}^2 / \tilde{\eta}^2)^{1/3}. \quad (17.12)$$

На раннем этапе процесса сжатия положим в (17.12) $\tilde{\rho} \approx 4$; $\tilde{T} \approx 0,2$; $\tilde{g} \approx 3$ (см. § 14), найдем $\tilde{\gamma}_{\max} \approx 10$, $\tilde{k}_{\max} \approx 10^2$. Эти характеристики, и прежде всего длина волны возмущения, качественно соответствуют расчету (см. § 14, рис. 10). На этапе образования плазменного фокуса, когда в интервале между первым и вторым сжатием плазмы возникает значительное ускорение границы плазмы, можно считать $\tilde{\rho} \approx 10^2$; $\tilde{T} \approx 6,5$; $\tilde{g} \approx 5 \cdot 10^2$ (см. рис. 15). Тогда из (17.12) следует, что $\tilde{\gamma}_{\max} \approx 1,5 \cdot 10^2$, $\tilde{k}_{\max} \approx 10^2$. Значение $\tilde{k}_{\max} \approx 10^2$ соответствует длине волны, которая меньше 0,1, что уже отмечалось ранее при обсуждении расчетов (см. § 16, рис. 13). Непосредственная проверка условий (17.4)—(17.7) дает в общем удовлетворительный результат. Для волн, более длинных по срав-

нению с $k_{\text{макс}}^{-1}$, нарушаются условия (17.4), (17.5), (17.7), а для более коротких волн — условия (17.4) и (17.6).

Таким образом, можно заключить, что полученные в расчетах МГД-задачи волнообразные возмущения границы плазмы — результат развития неустойчивости типа Рэлея—Тейлора, в которой учтена стабилизирующая роль вязкости [8, 37]. Количественное сравнение результатов ЛТН и МГД-задачи вряд ли правомерно из-за указанных выше сильных ограничений (17.4)—(17.7), неопределенности выбора значений ρ , T и g в (17.9) и (17.11) и существенной роли нелинейных эффектов в МГД-модели. Остается еще отметить вывод ЛТН: короткие волны, длина которых порядка пространственного шага в расчетах, не играют роли в развитии неустойчивости границы. Это обстоятельство означает, что разностный метод не вносит искажений в описание неустойчивости границы.

в. Вопрос аксиальной симметрии пинча. На основе ЛТН рассмотрим развитие возмущений границы плазмы, имеющих азимутальную компоненту $k_{\parallel} \neq 0$. В работе [7] объяснено, почему неустойчивость, развивающаяся в плоскости rz , не проявляется (точнее говоря, слабо проявляется) в азимутальном направлении. Если $k_{\parallel} \neq 0$, то параметр $\mu \neq 0$, и следует пользоваться общим решением дисперсионного соотношения (17.1). Компонента k_{\parallel} в цилиндрической геометрии, очевидно, может принимать только дискретный ряд значений:

$$k_{\parallel}^m = m/R, \quad (17.13)$$

где m — номер моды. С точки зрения ограничения (17.4) ЛТН, строго говоря, будет справедлива при достаточно большом числе m . Но, имея в виду только качественные результаты, применим теорию к $m \geq 2$. Опасными для симметрии являются моды возмущения начиная со второй (мода $m = 1$ только смещает ось фокусировки). Магнитное поле стабилизирует все моды возмущения с $m' \geq m$, направленные точно по азимуту ($k \equiv k_{\parallel}$), если $k_{\parallel}^{ub} \leq k_{\parallel}^m$, где k_{\parallel}^{ub} — граница неустойчивости со стороны коротких волн, следующая из (17.1) или из (17.3):

$$k_{\parallel}^{ub} = 4\pi\rho g / (H^v)^2. \quad (17.14)$$

Из (17.13) и (17.14) получим условие устойчивости возмущений по азимуту, приняв в (17.13) $m = 2$:

$$g \leq (H^v)^2 / 2\pi\rho R. \quad (17.15)$$

Грубая проверка условия (17.15) для реального эксперимента приводилась в работе [7], но в начале процесса она дала, по-видимому, отрицательный результат [особенно, если бы эффективное ускорение g определялось на основе соотношения (17.9)]. Тем не менее из этого сравнения еще не следует вывод о возможности реальной неустойчивости в азимутальном направлении, так как играет роль величина инкремента. Оценим $\gamma_{\text{макс}}^{\mu}$ при $\mu \neq 0$. По порядку ве-

личины $g \sim H^2/4\pi\rho R$, $\eta \sim l_i v_T \rho$, $v_T \sim H/(4\pi\rho)^{1/2}$, так что согласно (17.2)

$$\mu \sim \frac{k_{\parallel}}{k} \left(\frac{R}{l_i} \right)^{1/3}, \quad (17.16)$$

где l_i — длина свободного пробега ионов. В условиях применимости МГД-приближения $R \gg l_i$, и поэтому из (17.16) для возмущений в азимутальном направлении имеем $\mu \gg 1$. В этом случае роль вязкости пренебрежимо мала, и из (17.3) находим $\gamma_{\text{макс}}^{\mu} \approx \gamma_{\text{макс}} \mu^{-1} \ll \ll \gamma_{\text{макс}}$, где $\gamma_{\text{макс}}$ определено в (17.11). Таким образом, максимальный инкремент неустойчивости очень мал ($\gamma_{\text{макс}}^{\mu} < 1$ при $\gamma_{\text{макс}} \approx 10$, $R > 10^3 l_i$), и неустойчивость не проявляется за характерные времена порядка 1.

Все же остается вопрос о возможности нарушения аксиальной симметрии из-за возмущений смешанного типа, когда компонента k_{\parallel} удовлетворяет (17.13), а k_r и k_z не равны нулю, а так велики, что μ из (17.16) становится порядка 1 ($\mu \lesssim 1$). Для этого, очевидно, необходимо, чтобы отношение $k_{\parallel}/k \sim (l_i/R)^{1/3} \ll 1$. Инкремент неустойчивости для таких возмущений по порядку величины определяется снова верхней кривой на рис. 17, даже при некоторой комбинации условий возможно $\gamma \approx \gamma_{\text{макс}}$. Стабилизация магнитным полем не играет большой роли. Но если принять во внимание ограничение ЛТН нелинейными эффектами, то и здесь не приходится говорить о нарушении аксиальной симметрии. Нелинейные эффекты скажутся при амплитуде возмущения границы $\Delta R \sim k^{-1}$. Поэтому относительная величина отклонения от аксиальной симметрии имеет следующий порядок: $\Delta R/R \sim k_{\parallel}/k \sim (l_i/R)^{1/3} \ll 1$, поскольку $k_{\parallel} \sim \sim R^{-1}$. Можно сделать вывод, что ЛТН и в случае возмущений смешанного типа не предсказывает существенных отклонений от аксиальной симметрии пинча.

§ 18. Энергетический баланс и нейтронный выход плазменного фокуса

а. Радиационные потери в плазме. В расчетах потери энергии плазмы на излучение не учитывались. Имеет смысл сделать оценку эффекта потерь на излучение, исходя из характерных параметров плазмы, в том числе полученных в расчетах. Величина радиационных потерь в реальных условиях возрастает из-за специальных добавок некоторых тяжелых примесей, а также случайных загрязнений, попавших в разряд. Важно сделать следующее предварительное замечание. Экспериментально установлено, что добавки тяжелых примесей (типичны добавки N_2 или Xe с относительной концентрацией около 1%) заметно влияют на процесс сжатия плазмы, в частности, усиливают или ослабляют нейтронный выход [7]. Хотя полностью роль тяжелых примесей в развитии процесса еще не ясна, можно полагать, что вероятнее всего она связана с самой начальной стадией разряда, когда происходят начальная ионизация, скиниро-

вание тока и формирование токовой оболочки. Здесь мы оценим только радиационные потери на конечной стадии нецилиндрического Z-пинча, учитывая вклад в излучение тяжелых примесей.

В работе Ю. И. Галушкина [40] (см. также [41]) подробно изучен вопрос об излучении типичных тяжелых примесей в условиях, характерных для нецилиндрического Z-пинча. В предположении объемного характера излучения и на основе обобщенной радиационно-столкновительной модели [42] рассчитаны распределения многозарядных

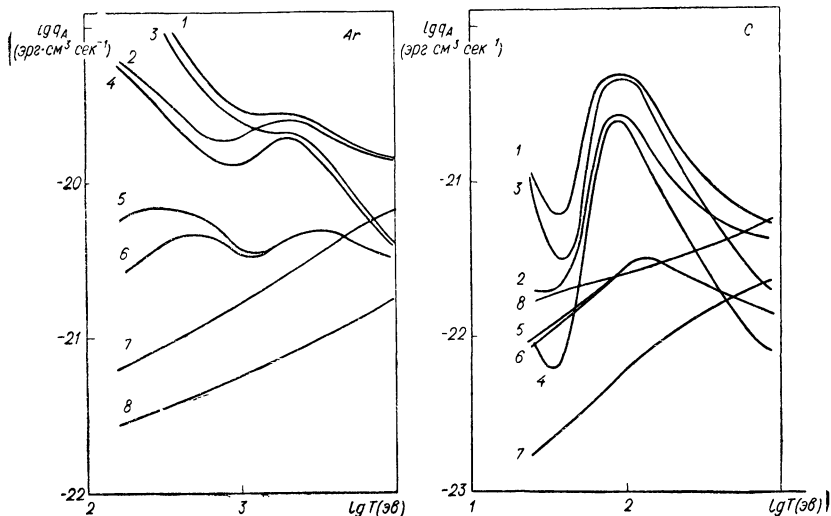


Рис. 18. Зависимость радиационных потерь плазмы q_A из-за тяжелых примесей углерода и аргона с концентрацией 1% (по числу атомов) от температуры плазмы, рассчитанные на один электрон и один атом примеси. Кривые 1, 3, 5 — при концентрации электронов $n_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$; 2, 4, 6 — при $n_e = 10^{20} \text{ см}^{-3}$; 7, 8 — при любом значении n_e . Кривые 1, 2 — суммарное излучение всех механизмов; 3, 4 — линейчатое излучение, 5, 6 — рекомбинационное; 7 — тормозное; 8 — излучение водорода, увеличенное в 10^2 раз.

ионов по состояниям ионизации (от голых ядер до бериллиевоподобных ионов) и по состояниям возбуждения (со значениями главных квантовых чисел $n \lesssim n_{\text{макс}} \gtrsim 10$; выше $n_{\text{макс}}$ населенность уровней считалась болъцмановской). Из-за больших электронных плотностей ($n_e \approx 10^{16} \div 10^{20} \text{ см}^{-3}$) нельзя было использовать простое корональное приближение. В условиях пинча осуществляется сложный для вычислений случай, промежуточный между корональным и болъцмановским. На рис. 18 изображены радиационные потери плазмы q_A из-за наличия тяжелых примесей для углерода С и аргона Аг (1% по числу атомов), рассчитанные на один электрон и один атом примеси. Для сравнения дан график суммарного (тормозного и рекомбинационного) излучения водорода $10^2 q_H$. Видно, что в случае примеси аргона $10^2 q_H \ll q_A$ во всей области температур и электронных концентраций пинча и $10^2 q_H \gtrsim q_A$ в случае углеро-

да для достаточно высоких температур. Таким образом, в условиях пинча радиационные потери практически определяются тяжелыми примесями. На рис. 18 показан также вклад различных механизмов излучения: линейчатого, рекомбинационного и тормозного. В условиях пинча даже в случае углерода линейчатое излучение оказывается доминирующим, уступая ведущую роль тормозному только при высоких температурах. Отметим, что в работе [40] дана также подробная информация о спектральном составе излучения.

Оценим вклад радиационных потерь в энергетический баланс пинча (см. рис. 18). Для этого составим отношение потерь к тепловой энергии электронов:

$$\delta = \frac{q_A \langle t \rangle \langle n_A \rangle}{1,5 \langle T \rangle} = \frac{q_A \langle t \rangle \langle n_D \rangle}{1,5 \cdot 10^2 \langle T \rangle}, \quad (18.1)$$

в котором участвуют характерные параметры плазмы для некоторого этапа процесса, время $\langle t \rangle$, концентрации примеси и дейтерия $\langle n_A \rangle$ и $\langle n_D \rangle$, температура $\langle T \rangle$. Оценка (18.1) на этапе плазменного фокуса ($\langle n_D \rangle_{pf} \approx 10^{20} \text{ см}^{-3}$, $\langle T \rangle_{pf} \approx 1,2 \text{ кэВ}$, $\langle t \rangle_{pf} \approx 10^{-7} \text{ сек}$) дает $\delta_{pf} \approx 1$ (аргон), $\delta_{pf} \approx 0,03$ (углерод). На этапе схождения токовой оболочки ($\langle n_D \rangle \approx 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $\langle T \rangle \approx 0,1 \text{ кэВ}$, $\langle t \rangle \approx 10^{-7} \text{ сек}$) $\delta \approx 1$ (аргон), $\delta \approx 0,03$ (углерод), т. е. относительная роль радиационных потерь почти такая же, как и при характерных параметрах плазменного фокуса. Следует отметить, что на выходы о радиационных потерях могут повлиять следующие неучтенные выше факторы [40]: нестационарность распределения ионов по состояниям ионизации (времена релаксации населенности основных уровней ионов сравнимы с временами образования плазменного фокуса), вклад ионизационных потерь (особенно для случая азота), неопределенность в скоростях элементарных процессов. Тем не менее сделанная оценка показывает, что дополнительный учет радиационных потерь в МГД-модели не привел бы к качественному изменению результатов рассматриваемых расчетов, поскольку отношение δ все же незначительно превышает единицу. Можно полагать, что радиационные потери привели бы в расчете к относительному увеличению плотности плазмы. Непосредственное включение радиационных потерь в уравнение МГД-модели пока представляется необоснованным.

б. Энергетический баланс плазмы. Большое значение среди характеристик плазменного фокуса имеет энергетический баланс. В ходе расчета МГД-задачи подсчитывались значения различных видов энергии внутри плазмы. В безразмерных единицах вычислялись как функции времени следующие интегралы (см. § 5):

$$\left. \begin{aligned} E_K &= \int_{(V_p)} \frac{v_r^2 + v_z^2}{2} \rho r dr dz; & E_T &= \int_{(V_p)} \frac{3}{2} T \rho r dr dz; \\ E_H &= \int_{(V_p)} \frac{H_\Phi^2}{2} r dr dz; & E_\Sigma &= E_K + E_T + E_H, \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

где E_{Σ} — полная энергия внутри плазмы в момент времени t . Для варианта В на рис. 19 представлены графики всех величин из (18.2). Вариант В кажется предпочтительнее в описании интегралов энергии, так как вклад в них ближайшей окрестности плазменного фокуса, где лучше подходит вариант А, довольно мал (см. ниже). График полной энергии E_{Σ} показывает, как после первого сжатия (небольшой максимум энергии при $t = 0,813$) наступает второе сжа-

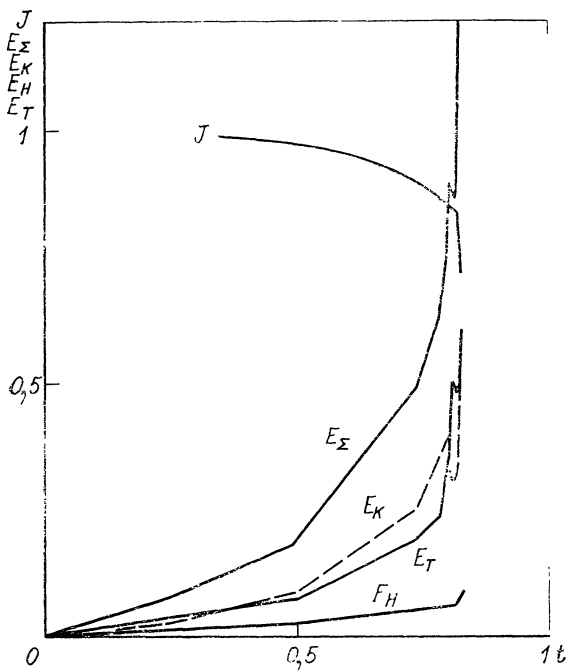


Рис 19. Изменения интегралов энергий и полного тока со временем (вариант В).

тие с интенсивным ростом энергии. Тепловая (E_T) и кинетическая (E_K) энергии в течение всего процесса близки друг другу. Во время первого сжатия, когда $E_T \approx 1,5E_K$, достигается состояние с наименьшей долей кинетической энергии. Затем с началом второго сжатия возобновляется движение плазмы к оси и развивается аксиальная струя, при этом $E_T \approx 1,2E_K$. Доля магнитной энергии E_H в варианте В весьма мала, за исключением самого раннего этапа сжатия $E_H \leq 0,1E_{\Sigma}$. В варианте А доля E_H , естественно, возрастает, причем в соответствии с изменением толщины скин-слоя (см. § 14) она увеличивается примерно в три раза. Чтобы перевести все числа рис. 19 в размерные величины, их нужно умножить на коэффициент (см. § 5) $2\pi\epsilon_0\rho_0R_0^3 = 2,55 \cdot 10^{11} \text{ эрг} = 25,5 \text{ кДж}$. Следовательно, результаты расчета показывают, что во время образования плазмен-

ного фокуса больше половины энергии батареи ($1/2 C_0 U_0^2 \approx 52 \text{ кдж}$) вложено внутрь плазмы. На рис. 19 приведен также график тока J , который вычислялся из простейшего электротехнического уравнения, полученного без учета потерь энергии в плазме W_p (см. §§ 3,5). Из расчета следует ($E_\Sigma \geq 0,5C_0 U_0^2/2$), что ток J завышен, так как условие $W_p = 0$ оказалось довольно грубым приближением.

Интересно оценить, какую часть полной энергии плазмы составляет энергия внутри плазменного фокуса в собственном смысле слова. Конечно, весьма условно можно выделить собственную область плазменного фокуса, как ту часть объема, где параметры плазмы близки к своим максимальным значениям (см. рис. 15). Для последних моментов времени $T \approx 18$; $\rho \approx 3000$; $R \approx 0,004$ и $\Delta z = 0,06$ (см. § 16). Тогда безразмерная тепловая энергия $E_{Tpf} \approx 1,5\rho T \cdot 0,5R^2 \Delta z \approx 4 \cdot 10^{-2}$. Даже с учетом удвоения энергии плазменного фокуса из-за добавки E_{Kpf} и E_{Hpf} получаем довольно малое отношение к полной энергии плазмы: $E_{\Sigma pf} \approx 0,06E_\Sigma$. В варианте А находится близкое отношение $E_{\Sigma pf}/E_\Sigma$ из-за некоторого перераспределения энергии и уменьшения значения E_Σ . Таким образом, можно сделать вывод, что в собственно плазменный фокус вкладывается не более 3% энергии батареи.

в. Нейтронный выход плазменного фокуса. Высокий нейтронный выход — одно из важнейших физических свойств нецилиндрического Z-пинча. Наибольшие выходы нейтронов в дейтериевом газе превышают 10^{11} за один разряд [5,43]. В экспериментах надежно установлена анизотропия в энергетическом распределении нейтронов [4, 43]. Грубое объяснение анизотропии нейтронов получается, если предположить, что термоядерные реакции происходят в плазме, движущейся от анода к катоду с довольно высокой скоростью около 10^8 см/сек . Такая интерпретация этого эффекта появилась под названием модели «движущегося котла», впервые предложенной в работе [27]. Детальное исследование нейтронного выхода, по-видимому, не согласуется с моделью движущегося котла.

Здесь мы оценим нейтронный выход на основе расчетов МГД-модели плазмы. Сразу ясно, что оценка нейтронного выхода за весь разряд невозможна, потому что не определено время жизни плазменного фокуса (см. § 16). Можно считать, что основную часть времени своего существования, измеренного в работе [44], плазменный фокус находится в негидродинамическом состоянии*. Поскольку измеренное время (порядка 10^{-7} сек) намного превышает пролетное время ($R_{pf}/v_T \lesssim 10^{-9} \text{ сек}$), нужно предположить возникновение некоторой почти равновесной негидродинамической конфигурации плазмы в фокусе. Исходя из этого соображения, можно прос-

* Эта точка зрения согласуется с результатами лазерной диагностики плазменного фокуса [7, 34]. Качественная модель процесса, развитая в последнее время Мазонье и др. [46], также исходит из негидродинамической концепции плазменного фокуса. Однако здесь опять нельзя согласиться с непониманием роли второго сжатия плазмы, создающего начальные условия для плазменного фокуса.

то оценить время существования плазменного фокуса, так как в равновесном случае искомое время можно приравнять времени затухания тока [45]. Есть основания полагать, что на стадии плазменного фокуса образуется отсоединенный контур тока, величина тока J' в котором описывается согласно § 3, уравнением (3.24). Для грубой оценки времени затухания тока в (3.24) примем во внимание только джоулев нагрев, а в величине интеграла джоулева нагрева учтем только главный вклад приосевой области в окрестности плазменного фокуса. Из (3.16) и (3.19) приближенно найдем индуктивность плазмы L'_p и джоулев нагрев W'_p :

$$\left. \begin{aligned} L'_p &\approx 2z_{pf} \ln \frac{R_{ex}}{R_{pf}}; \\ W'_p &\approx \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \frac{\pi H_\Phi^2}{\sigma_e d^2} (2R_{pf} - d) dz_{pf}, \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

где R_{ex} — внешний радиус тороида с магнитным полем ($R_{ex} \gg R_{pf}$). В соответствии с расчетом (вариант А) можно принять для толщины скин-слоя $d \approx R_{pf}$. Из уравнения (3.24) найдем порядок величины времени существования плазменного фокуса:

$$t_{pf} \approx \frac{4\pi\sigma_e}{c^2} R_{pf}^2 \ln \frac{R_{ex}}{R_{pf}}. \quad (18.4)$$

Подставляя в (18.4) эффективную проводимость плазмы σ_e , так что $\lambda^{-1} = 4\pi\sigma_e c^{-2} = 5,9 \cdot 10^8 (kT_{pf})^{3/2}$ (см. § 5), и характерные параметры плазменного фокуса $kT_{pf} \approx 1,2 \text{ кэВ}$, $R_{pf} \approx 0,65 \text{ мм}$, находим $t_{pf} \approx 10^{-6} \text{ сек}$. Это значение несколько превышает экспериментальное время, но без учета коэффициента k_e в σ_e она была бы еще больше на два порядка. Найденное время t_{pf} можно уменьшить, если предположить, что радиус R_{pf} меньше взятой выше величины. Зависимость t_{pf} от R_{pf} получается из (18.4), если использовать следующие соотношения:

- 1) $\rho \sim R_{pf}^{-6/5}$ в равновесной конфигурации [9];
- 2) $T \sim \rho^{2/3} \sim R_{pf}^{-4/5}$ в адиабатическом случае;
- 3) коэффициент $k_e \sim (\rho R_{pf}^2)^3 R_{pf} \sim R_{pf}^{7/5}$ (см. § 1).

Тогда $t_{pf} \sim R_{pf}^{11/5}$. При радиусе $R_{pf} \approx 0,2 \text{ мм}$, что не противоречит измерениям, $t_{pf} \approx 10^{-7} \text{ сек}$. Оценка времени затухания тока сделана в предположении, что за это время в области плазменного фокуса макроскопическая турбулентность еще не развивается, но микротурбулентность проявляется до такой степени, что реальная проводимость плазмы снизилась в k_c^{-1} раз по сравнению с классической величиной.

Далее, для оценки нейтронного выхода примем термоядерный механизм образования нейтронов. Хотя таким путем нельзя полностью объяснить наблюдаемую анизотропию, самую грубую характеристику эффекта, полное количество нейтронов за весь разряд

можно оценить при помощи термоядерных формул. В этой связи отметим, что при температуре плазмы, превышающей несколько килоэлектронвольт, эффективная энергия дейтонов, участвующих в термоядерной реакции, сравнивается с их средней тепловой энергией [1]. Поэтому интегральный выход нейтронов малочувствителен к деталям функции распределения нейтронов, если последняя не имеет, конечно, экзотических особенностей. Запишем интегральную формулу для выхода нейтронов, используя безразмерные переменные [1]:

$$W_n = 10^{-50} \frac{1}{2(2\pi)^{5/2}} \cdot \frac{m_D^2}{k^4 c^7} \cdot \frac{J_0^7}{\rho_0^{3/2} R_0^3} \int_0^\infty dt \int_{(V_p)} T^4 \rho^2 r dr dz. \quad (18.5)$$

Функция $f(t) = \int_{(V_p)} T^4 \rho^2 r dr dz$ рассчитывалась теоретически (только в варианте В проведен расчет $f(t)$; для варианта А оценка сделана ниже). Имеется небольшой максимум $f(t)$ вблизи первого сжатия, но он намного уступает величинам $f(t)$ в ходе второго сжатия. В соответствии со сказанным выше возьмем в качестве $f(t)$ ее значение в момент времени $t^* = 0,829$, когда достигаются принятые выше параметры плазменного фокуса, $f(t^*) \approx 3 \cdot 10^5$. Подставляя в (18.5) все единицы из § 5 и $t_{pf} \approx 10^{-6}$ сек, получаем, что $W_n = 6 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^5 \approx 10^{11}$ нейтрон/разряд. Учитывая, что плотность в варианте А примерно втрое меньше, чем плотность в варианте В (см. § 16), а оценка времени завышена на порядок, можно снизить величину W_n на два порядка. Таким образом, $W_n \approx 10^9$ нейтрон/разряд, что вполне соответствует эксперименту.

В заключение скажем несколько слов по поводу реальных механизмов выхода нейтронов в плазменном фокусе. Несомненно, определенный вклад (по-видимому, небольшой по абсолютной величине) дает мишенный механизм, причем движущейся мишенью является фронт аксиальной ударной волны [9, 30]. Этот эффект может объяснить большую протяженность источника нейтронов вдоль оси и частично анизотропию выхода. Тем не менее полное объяснение анизотропии нужно искать в кинетических свойствах плазменного фокуса. Анизотропия функции распределения дейтонов может дать основной вклад в наблюдаемые большие скорости нейтронного источника. Значение этого эффекта для объяснения выхода нейтронов уже показано в работе [31]. Роль прямого ускорения дейтонов в индукционных электрических полях, ответственного за нейтронный выход в линейных Z-пинчах, в условиях нецилиндрического Z-пинча, по-видимому, незначительна. Отметим, что разность потенциалов электрического поля на поверхности плазменного фокуса в направлении вдоль оси теоретически оценена в 10^6 в [47], в результате чего, вероятно, образуются очень быстрые дейтоны, регистрируемые ядерными фотоэмульсиями. Количество их при этом оказывается небольшим, так что вклад в нейтронный выход несуществен.

Заключение

Наибольший интерес, несомненно, представляют пространственная и временная структуры плазменного фокуса, под которым следует понимать чрезвычайно плотное и высокотемпературное образование, возникающее в процессе второго сжатия плазмы в приосевой области. Как показали описанные здесь расчеты, это образование — плазменный фокус — имеет нерегулярную природу: его параметры определяются неустойчивостью границы плазмы с магнитным полем, которая в нелинейной стадии проявляется как конкуренция соседних перетяжек пинча. В одной из конкурирующих перетяжек в конце концов достигаются максимальные параметры (плотность и температура). Расчеты убедительно продемонстрировали, что как раз в этой доминирующей перетяжке происходит безостановочное уменьшение радиуса плазмы, при котором нарушаются условия применимости МГД-приближения.

Главная задача будущих теоретических исследований плазменного фокуса (или в более общей постановке задачи — плазменной перетяжки в пинче) — это разработка и исследование кинетической модели процесса. В связи с этим нам кажутся не очень существенными некоторые возможные уточнения диссипативных эффектов в МГД-модели. Вспомогательный расчет, упомянутый в работе [30], где была изменена полярность электродов, до некоторой степени подтвердил такой взгляд.

Для использованной нами системы уравнений вместе с начальными и граничными условиями (см. гл. 1) полярность электродов, очевидно, не играет роли, но почти все дополнительные члены в уравнениях электронной компоненты из работы [30] (члены Холла в законе Ома, поправка к средней скорости электронов, поперечные члены в теплопроводности) дают противоположный вклад при изменении полярности электродов. Фактически этот вклад оказался незначительным в пределах погрешности расчетов [30] (около 1,5%). Необоснованность учета замагниченности ионов в коэффициентах переноса ионной компоненты плазмы уже была указана раньше (см. § 1), хотя трудно дать количественную оценку влияния разного описания эффектов диссипации в ионах на результаты расчетов.

Важный шаг в постановке кинетической задачи сделали Поттер и Хайн [31]. В частности, они отметили, что сначала условия МГД-описания нарушаются только в ионной компоненте плазмы. Действительно, в области плазменного фокуса становится $l_i \gtrsim R_{pf}$, $r_{\Lambda i} \sim d \lesssim R_{pf}$, где по-прежнему l_i — длина свободного пробега, $r_{\Lambda i}$ — ларморовский радиус ионов, а d и R_{pf} — толщина скин-слоя и радиус пинча соответственно. Одновременно для электронов, которые сильно замагничены, $l_e \sim l_i \gg r_{\Lambda e}$, выполнено условие адиабатичности движения $r_{\Lambda e} \ll d$. Следовательно, электронная компонента ведет себя в поперечном отношении как сплошная среда (за исключением очень тонкой приосевой области). Электроны

также обеспечивают ток через плазму, подчиняясь закону Ома, куда в общем случае может входить эффективная проводимость σ_e , отличная от своего классического значения σ_{\perp} . Итак, в первую очередь целесообразно рассмотреть смешанную модель плазмы: кинетическую относительно ионов и магнитогидродинамическую в отношении электронов. При этом для выяснения динамики плазменного фокуса принципиальное значение имеет учет эффекта двумерности. В самом деле, кинетическая задача должна быть продолжением МГД-расчетов, так что начальные условия для кинетической задачи оказываются двумерного характера. Кроме того, кинетическая модель должна быть способна описывать эффект вытекания плазмы из перетяжки, который на МГД-стадии процесса привел к безостановочному уменьшению радиуса плазмы. Важное значение в смешанной модели имеет вопрос о квазинейтральности плазмы. При движении плазмы с нерелятивистскими скоростями условие квазинейтральности в плазменном фокусе, по-видимому, выполняется. Нетрудно показать, что $\Delta n/n \sim v_e v_z/c^2$, где Δn — избыток частиц одного заряда; v_e — токовая скорость электронов; v_z — осевая скорость плазмы. Вполне возможно, что на некотором этапе надо будет учесть кинетические эффекты и в электронной компоненте плазмы. Наконец отметим, что последний эксперимент [34] создает оптимизм в постановке кинетической задачи.

Но как бы то ни было в будущем, двумерная МГД-модель плазмы уже обеспечила существенный прогресс в теоретическом понимании сложных физических процессов в нецилиндрическом Z-пинче (см. гл. 3). Удовлетворительное соответствие теории и эксперимента позволило составить прогноз оптимального изменения параметров экспериментального устройства с увеличением нейтронного выхода [45]. Этот прогноз, естественно, опирается на соотношения подобия в рамках МГД-модели и отчасти подтверждается измеренной ранее зависимостью нейтронного выхода от энергии конденсаторной батареи [7]. (Измерения [7, 28] проведены, к сожалению, в узком интервале изменения энергии.)

Тщательные и многосторонние экспериментальные исследования Н. В. Филиппова и сотр., а также работы наших иностранных коллег открыли широкое поле деятельности для приложения теории плазмы. Действительно, как у нас в стране, так и за рубежом плазменный фокус в последнее десятилетие закономерно стал замечательным объектом теоретического и математического анализа. Принципиально интересные и трудные проблемы двумерной кумуляции в плазме потребовали разработки и реализации новых численных методов решения МГД-задач, тщательного изучения разнообразных физических эффектов. Можно надеяться, что и в будущем в этой области физики плазмы эксперимент и теория будут плодотворно дополнять друг друга.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность В. В. Палейчик, оказавшей большую помощь в проведении численных расчетов на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. В. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 394.
2. Филиппов Н. В., Филиппова Т. И., Виноградов В. П. Nucl. Fusion Suppl., 1962, 2, 571.
3. Петров Д. П., Филиппов Н. В., Филиппова Т. И., Храбров В. А. В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 170.
4. Агафонов В. И. и др. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1969, 2, p. 21.
5. Maisonnier Ch., Samuelli M., Linhart J. G., Gourlan C. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1969, 2, p. 77.
6. Kruskal M., Schwarzschild M. Proc. Roy. Soc., A., 1954, 223, p. 348.
7. Филиппов Н. В. и др. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1971, 1, p. 573..
8. Имшенник В. С. «Докл. АН СССР», 1972, 204, с. 1335.
9. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, 56, с. 1766.
10. Mather J. W. Phys. Fluids, 1965, 8, p. 366.
11. Roberts K. V., Potter D. E. Methods in Computational Phys. Ed. Aldel B., Fernbach S., Rotenberg M., Academic., N. Y. 1970, 9, p. 339.
12. Vasque G., Jolas A., Watteau J. P. Phys. Fluids., 1968, 11, 1384; 1969, 12, p. 1529.
13. Robuoch V. V., DiCola G. A one-dimensional model of a two dimensional snow — plough Mirapri focus discharge, Frascati LG1, 70/5/E, 1970.
14. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
15. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
16. Дубовой Л. В., Федяков В. П., Федякова В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1970, 59, с. 1475.
17. Дубовой Л. В., Комин А. В., Федяков В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1972, 62, с. 1335.
18. Kuckes A. Phys. Fluids, 1964, 7, p. 511.
19. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. М., Атомиздат, 1970.
20. Чудин Н. В. «Ж. техн. физ.», 1971, 41, с. 60.
21. Брагинский С. И. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, с. 183.
22. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1951.
23. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1963, 3, с. 915.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехтеориздат, 1954.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1957.
26. Имшенник В. С., Отрощенко И. В., Палейчик В. В., Ходатаев К. В. Магнитогиродинамические пульсации в плазме при воздействии высокочастотного электромагнитного поля большой амплитуды. Препринт ИПМ АН СССР, № 35, М., 1970.
27. Филиппов Н. В., Филиппова Т. И. Явления, сопровождающие образование плотного плазменного фокуса при кумуляции нецилиндрического Z-пинча. Препринт ИАЭ, им. И. В. Курчатова, № 913, М., 1965.
28. Агафонов В. И. и др. Работа по исследованию и повышению параметров плазмы на установке «Нецилиндрический Z-пинч». Препринт ИАЭ, им. И. В. Курчатова, № 2017, М., 1970.
29. Дьяченко В. Ф. «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1965, 5, с. 680.
30. Potter D. E. Phys. Fluids; 1971, 14, p. 1911.

31. **Potter D. E., Haines M. G.** Fourth Conf. on Plasma Phys. Controlled Nucl. Fus. Res. Madison (USA), CN-28/D-8, 1971.
32. **Guderley G.** Luftfahrtforschung, 1942, **19**, p. 302.
33. **Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С.** «Прикл. матем. и механ.», 1965, **29**, с. 993.
34. **Грибков В. А.** и др. «Письма ЖЭТФ», 1972, **15**, с. 329.
35. **Стикс Т.** Теория плазмсных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
36. **Михайловский А. Б.** Теория плазменных неустойчивостей. Т. II. Неустойчивости неоднородной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
37. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford, At the Clarendon Press, 1961, Chap. 10.
38. **Taylor R. J.** Proc Phys. Soc. B, 1957, **70**, p. 31.
39. **Шафранов В. Д.** В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций Т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 130.
40. **Галушкин Ю. И.** Излучение многозарядных примесей в плазменном фокусе. Диссертация. МФТИ, 1971.
41. **Галушкин Ю. И., Коган В. И.** Nucl. Fusion., 1971, **11**, p. 597.
42. **McWhirter R. W. P., Hearn A. G.** «Proc. Phys. Soc. B», 1963, **82**, p. 641; **Макуиртер Р.** В сб.: Диагностика плазмы. Пер. с англ. М., «Мир», 1967, с. 165.
43. **Bottoms R. J.** e. a. Plasma Phys. Controlled Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1969, **2**, p. 67.
44. **Morgan P. D., Peacock H. J., Speer R. J., Wilcock P. D.** Plasma Phys. Controlled Nucl. Fus. Res., 1969, **2**.
45. **Имшенник В. С., Филиппова Т. И., Филиппов Н. О.** Nucl. Fusion. In press.
46. **Maisonnier Ch., Pecorella F., Rager J. P., Samuelli M.** Fifty European Conf. Controlled Fus. Plasma Phys. Paper «A Model for the Dense Plasma Focus.» Grenoble, 1972.
47. **Имшенник В. С., Осовец С. М., Отрощенко И. В.** «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1973, **64**, с. 2057.

ПЛАЗМООПТИКА

А. И. Морозов, С. В. Лебедев

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Понятие о плазмооптике

По-видимому, простейшая плазмодинамическая система — это поток незамагниченных ионов с малым разбросом скоростей, объемный заряд которых компенсирован электронами [1]. Такие потоки будем называть компенсированными ионными пучками (КИП).

Слово «незамагниченный» означает, что ионный ларморовский радиус ρ_i больше или порядка характерных размеров системы

$$\rho_i \gtrsim \Lambda. \quad (1.1)$$

Предположение о малом разбросе скоростей эквивалентно утверждению, что в лабораторной системе координат справедливо неравенство

$$\langle |\mathbf{v}| \rangle = \frac{1}{n} \int |\mathbf{v}| f_i d\mathbf{v} \gg \frac{1}{n} \int |\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle| f_i d\mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Здесь f_i — функция распределения ионов по скоростям. Наконец, компенсация объемного заряда означает, что поток можно считать квазинейтральным

$$n_i \equiv \int f_i d\mathbf{v} \approx n_e. \quad (1.3)$$

Всюду ниже мы будем считать, что ионы однократно заряжены. Ту часть раздела физики плазмы, которая изучает свойства компенсированных ионных пучков (КИП), назовем плазмооптикой [2—4], если а) столкновениями ионов между собой, а также с другими частицами в первом приближении можно пренебречь; б) электронная температура T_e много меньше средней кинетической энергии ионов

$$kT_e \ll M \langle v^2 \rangle / 2. \quad (1.4)$$

Здесь k — постоянная Больцмана. В данной статье рассмотрены только те плазмооптические системы, в которых в первом приближении можно пренебречь собственным магнитным полем движущихся частиц как ионов, так и электронов.

Выбранное название для рассматриваемого класса явлений объясняется тем, что в подавляющей массе практических задач, связанных с КИП, необходимо обращать внимание на те же самые проблемы, что и в обычной ионной оптике некомпенсированных редких потоков. Классическую ионную оптику некомпенсированных потоков мы назовем вакуумной, или классической, оптикой.

Как правило, в классической корпускулярной оптике основной является проблема «фокусировки» пучка. Наглядно под фокусировкой понимают такую трансформацию потока, при которой частицы, вышедшие из одной точки P_0 источника, после прохождения оптической системы снова собираются в одну точку P_1 (рис. 1).

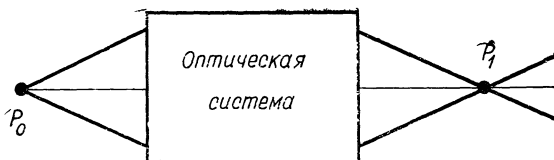


Рис. 1.

Проблему фокусировки, за единичными исключениями, пока удается решить только в том случае, если разброс частиц по тем или иным параметрам не слишком велик. Такими параметрами, очевидно, будут: полная скорость частицы; углы, составляемые скоростью с неким фиксированным направлением; отношение массы частицы к ее заряду.

В зависимости от задачи мы требуем фокусировки по одним параметрам и размытия (дисперсии) изображения по другим. Так, например, в классических корпускулярных системах (электронной и ионной), предназначенных для получения изображения (микроскопы, кинескопы и т. д.), необходимо, чтобы дисперсия по всем параметрам, за исключением может быть массы, была предельно малой. Наоборот, в энергоанализаторах требуется большая дисперсия по энергии и по возможности малая по остальным параметрам.

В плазмооптике также необходимо фокусировать и сепарировать ионный поток, но в отличие от классической оптики при этом не должна нарушаться квазинейтральность. Это обстоятельство требует существенного пересмотра классических схем.

Очевидно, что если компенсированный ионный пучок движется в магнитном поле и электронная температура очень мала, то с точностью до возможной раскачки колебаний такой пучок ведет себя так же, как и поток отдельных ионов. Это со всей убедительностью показано на так называемых электромагнитных разделительных установках изотопов. В этих установках использовалось только внешнее магнитное поле [1].

Значительно сложнее в тех случаях, когда компенсированный ионный пучок надо подвергнуть действию также внешнего электри-

ческого поля. Очевидно, что электростатические приборы (линзы, энергоанализаторы и т. п.) вакуумной ионной оптики, предназначенные для работы с пучками частиц одного знака, при наличии квазинейтральности вообще действовать не будут, так как электронная компонента будет стремиться экранировать электрическое поле в объеме пучка. Здесь нужны новые подходы, которые и рассматриваются в настоящей статье*.

Плазмооптика представляет интерес с разных точек зрения. Физически ее системы привлекательны своей простотой и доступностью для экспериментального исследования. К сожалению, эти возможности до сих пор по-настоящему не использованы^{2*}, хотя КИП легко создается с помощью обычных ионных источников. Физически плазмооптика близка к плазменной электронике, которая исследует процессы, происходящие при движении электронных пучков сквозь ионный или плазменный фон.

В плазмооптике мы имеем обратную ситуацию: здесь ионы движутся сквозь электронный фон. В силу конечных размеров КИП задачи об электронных и ионных пучках оказываются неэквивалентными. Это определяет физическую самостоятельность как плазменной электроники, так и плазмооптики.

Плазменной электронике посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ, которые сыграли существенную роль в развитии общей физики плазмы [8—10].

Развитие плазмооптики связано со все возрастающей потребностью в сильноточных ионных пучках. Такие пучки энергично порождают и впитывают в себя электроны, компенсируя объемный заряд. Генерация электронов может осуществляться в результате ионизации быстрыми ионами и электронами остаточного газа, а также вследствие выбивания вторичных электронов из стенок канала, в котором распространяется пучок. Для того чтобы почувствовать тенденцию пучка к компенсации объемного заряда, оценим напряженность электрического поля E_0 на поверхности пучка и длину L , на которой некомпенсированный круглый пучок в результате саморасталкивания под действием объемного заряда удваивает свой радиус.

Напряженность поля на поверхности пучка

$$E_0 = \frac{2\pi R^2 cn}{R} = \frac{2}{R} \cdot \frac{\mathcal{I}}{v} = \frac{2}{R} \cdot \frac{\mathcal{I}}{(Mv^2/2e)^{1/2}} \left(\frac{M}{2e}\right)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что длина L , на которой радиус пучка удваивается,

$$L = N2R \approx 2R \frac{(Mv^2/2e)^{3/4}}{\sqrt{\mathcal{I}}} \left(\frac{e}{2M}\right)^{1/4} = \frac{2v}{\omega_{0i}}; \quad (1.6)$$

$$\omega_{0i}^2 = 4\pi e^2 n/M.$$

* Впервые излагаемые ниже принципы плазмооптики в общем виде были сформулированы в работе [2]. Среди предшествовавших работ следует отметить [21—23].

^{2*} Исключение составляют немногие работы и в их числе [4—7].

Здесь N — число диаметров пучка, укладываемых на длине L ; J — ток ионов в пучке; M — масса иона; v — скорость; n — плотность ионов.

Пусть энергия ионов равна 1 кэв, а ток в пучке равен 1 ма. Тогда радиус пучка удвоится в случае водородных ионов при $N \approx 5$, а в случае ионов аргона при $N \approx 12$.

При этом на поверхности пучка для водорода $E_0 \approx 45$ в/см, а для аргона $E_0 \approx 290$ в/см. Отсюда видно, что уже при токах порядка 1 ма пучок энергично расширяется и создает вблизи себя сильное электрическое поле. В то же время современная наука и техника для очень многих задач требуют ионных потоков, измеряемых единицами, десятками и сотнями ампер. Такие пучки могут существовать только в компенсированном состоянии.

Ионные токи порядка единиц и десятков миллиампер легко получить с помощью обычных ионных источников. В этих приборах ионы создаются либо в результате поверхностной ионизации, либо в некотором газовом разряде [11]. Образующиеся ионы вытягиваются через узкую щель разностью потенциалов, приложенной между генератором ионов и специальным электродом. Ионы не только вытягиваются, но и ускоряются приложенной разностью потенциалов. Поскольку в зоне ускорения объемный заряд ионов не компенсирован электронами, предельная величина тока с единицы площади эмиттера ограничена законом «трех вторых» Ленгмюра:

$$j_i = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{M}} \cdot \frac{U^{3/2}}{d^2}. \quad (1.7)$$

Здесь U — вытягивающее напряжение; d — расстояние между эмиттером и вытягивающим электродом. Компенсация объемного заряда ионного пучка, вышедшего из ионного источника, происходит уже вне источника. В отдельных случаях были созданы ионные источники с током около 1 а, но это достигалось использованием высоких ускоряющих напряжений (порядка нескольких десятков киловольт) и длинных вытягивающих щелей.

Недостатки ионных источников стимулировали работы по плазменным ускорителям, в которых ионы ускоряются без нарушения квазинейтральности. Наиболее близки к плазмооптическим системам ускорители с замкнутым дрейфом, описанные в § 2. В настоящее время такие ускорители позволяют получать практически неограниченные токи (сейчас получены токи до 1000 а с энергией от 100 эв и выше) в широком диапазоне энергий. С появлением плазменных ускорителей возникла проблема управления и преобразования этих больших потоков. Всем этим и должна заниматься плазмооптика.

В данной статье основное внимание обращено на проблему трансформации уже имеющегося компенсированного ионного потока. Поэтому источник КИП мы считаем заданным.

Для удобства чтения дадим здесь определения некоторых используемых ниже терминов.

1. В статье рассматриваются либо точечные источники, либо бесконечно узкие кольцевые источники. Последние будем именовать просто кольцевыми источниками.

2. Пучок, созданный кольцевым источником, назовем трубчатым (рис. 2, *а*). Пучок, созданный точечным источником, — осевым (рис. 2, *б*). Соответствующие плазмооптические системы — кольцевыми или осевыми.

3. В аксиально симметричном случае поперечные размеры осевого пучка однозначно характеризуются его радиусом r . В случае круглого трубчатого пучка необходимы две геометрические характе-

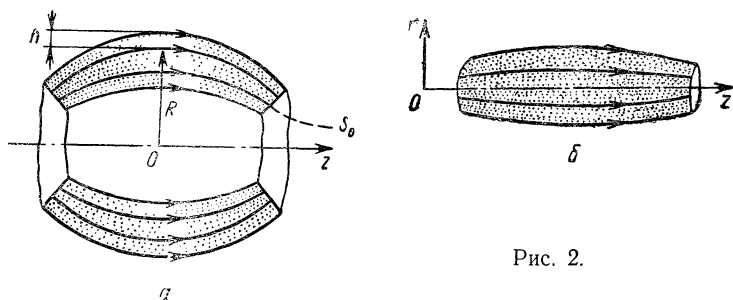


Рис. 2.

ристики: радиус пучка R и его полуширина h (см. рис. 2, *а*). В случае осевого пучка, очевидно, $R = h$. Стрелками на рис. 2 показаны траектории ионов.

4. Минимальное по ширине сечение пучка назовем изображением источника. Явление уширения изображения бесконечно узкого источника — абберацией.

5. Под квазиодночастичной моделью или «скелетом» плазмооптической системы (ПОС) понимается совокупность полей и траекторий, решающих поставленную задачу в предположении, что $T_e = 0$.

6. КИП, параметры которого в квазиодночастичном приближении можно искать в виде разложения по степеням поперечной координаты, назовем параксиальным, независимо от того, осевой пучок или трубчатый. Заметим, что в этом случае плазменную конфигурацию (т. е. модель КИП, которая учитывает конечность T_e), соответствующую параксиальному пучку, вообще говоря, нельзя рассчитать разложением в ряд.

7. Если при описании параксиального пучка можно ограничиться первыми неисчезающими членами разложения по поперечным координатам, то такой пучок назовем узким. В противном случае пучок считаем широким.

8. Выделенная по тем или иным признакам траектория иона в осевых системах (в рамках квазиодночастичной модели) называется

ся основной. В простейшем случае аксиальной симметрии такой траекторией является геометрическая ось системы.

В кольцевых системах мы часто будем выделять множество траекторий, образующих основную поверхность (ОП). Эта поверхность, оставаясь аксиально симметричной, может иметь достаточно сложную форму. Вводя систему координат в канале для расчета полей и траекторий, за одну из координатных поверхностей естественно было бы брать ОП, но в кольцевых системах это часто нецелесообразно по двум причинам: во-первых, приступая к расчетам, мы обычно не знаем априори размеров и формы ОП, а во-вторых, форма ОП, как правило, слишком сложна для того, чтобы ее использовать в качестве координатной поверхности. Поэтому в качестве «опорной» координатной поверхности выберем цилиндрическую поверхность радиуса R_0 и назовем ее исходной поверхностью (ИП).

9. Расчет равновесной конфигурации КИП предполагает не только учет конечности T_e в области, занятой быстрыми ионами, но и решение уравнений плазмодинамики в промежутке между ядром КИП (под ядром мы понимаем область, занятую быстрыми частицами) и стенкой канала.

Если в этом промежутке находится плазма, то будем говорить, что КИП имеет плазменную оболочку.

Плазменная оболочка может возникать по разным причинам, например, в результате ионизации остаточного газа и выталкивания образующихся ионов из ядра КИП в направлении стенок. Другой важный способ создания плазменной оболочки — использование таких источников ионов, при которых часть пучка гибнет на стенках канала. Эти режимы работы ПОС назовем «лижущими». Наконец, возможно построение таких режимов, при которых существованием ионов между ядром КИП и стенкой можно пренебречь. В этом случае будем говорить об электронной оболочке КИП и назовем такие режимы «оторванными».

§ 2. Электрическое поле в плазме при $T_e=0$

1. Эквипотенциальность магнитных силовых линий. Основной фактор, разрушающий электрическое поле в плазме, — большая подвижность электронной компоненты. Поэтому, для того чтобы выяснить условия, при которых может существовать электростатическое поле в объеме КИП, необходимо рассмотреть динамику электронной компоненты. Опишем поведение этой компоненты с помощью уравнений гидродинамики:

$$\frac{m_e}{e} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \left(\frac{\nabla p_e}{en} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{H}] + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right); \quad (1.8a)$$

$$(\partial n / \partial t) + \operatorname{div} n\mathbf{u} = 0. \quad (1.8б)$$

Здесь m_e — масса электрона; \mathbf{u} — его упорядоченная скорость; σ — проводимость; $p_e = kT_e n$ — давление электронной компоненты.

При написании уравнений (1.8) мы пренебрегли рождением и гибелью электронов, а также их столкновениями с нейтралами. Здесь учтены только столкновения электронов с ионами, которые охарактеризованы коэффициентом кулоновской проводимости σ .

Из уравнения (1.8а) видно, что существуют четыре фактора, которые могут обеспечить существование электрического поля в плазме [12]. Это инерционные эффекты $(m_e/e)(d\mathbf{u}/dt)$, давление электронной компоненты $(-\nabla p_e/en)$, лоренцева сила $(1/c)[\mathbf{u}, \mathbf{H}]$ и, наконец, трение электронов об ионы (\mathbf{j}/σ) . Инерционный член и член, обязанный омическому сопротивлению в условиях КИП, весьма малы. Действительно, при характерных скоростях электронной компоненты $u \approx 10^7$ см/сек и масштабах неоднородности около 1 см эквивалентная напряженность электрического поля, обязанная инерционным эффектам, будет порядка 0,1 в/см.

Если температура электронов порядка 1 эв, то при плотности тока в КИП порядка 0,1 а/см² напряженность электрического поля, обязанная конечной проводимости, будет также порядка 0,1 в/см. Поэтому, отбрасывая указанные малые члены, можно написать следующее уравнение динамики электронной компоненты:

$$\mathbf{E} = -(1/c)[\mathbf{u}, \mathbf{H}] - (\nabla p_e/en). \quad (1.9)$$

Таким образом, в условиях КИП электрическое поле в плазме существует либо в результате действия лоренцевой силы, либо благодаря градиенту электронного давления.

Выше, давая определение КИП, мы отмечали, что электронная температура в рассматриваемых условиях предполагается достаточно малой. Это позволяет в первом приближении во многих случаях вообще пренебречь электронным давлением. Тогда

$$\mathbf{E} = -(1/c)[\mathbf{u}, \mathbf{H}]. \quad (1.10)$$

Отсюда видно, что для существования электрического поля в холодной плазме необходимо наличие поперечного магнитного поля и дрейфа электронов поперек \mathbf{H} .

Уравнение (1.10) — основное уравнение электрического поля при $T_e = 0$, т. е. по введенной ранее терминологии для квазиодночастичного приближения. Действительно, как видно из (1.10), в это выражение не входит явно концентрация частиц и поэтому расчет динамики ионов можно вести как бы для одной частицы.

Дальнейшее изложение станет более наглядным, если мы каждой магнитной силовой линии присвоим некий индекс γ . Предполагая электрическое поле потенциальным, что заведомо справедливо в условиях равновесия, на основании (1.10) можно написать [2]

$$\Phi = \Phi(\gamma). \quad (1.11)$$

Эта формула отражает при сделанных предположениях важную особенность электрического поля в плазме — эквипотенциальность магнитных силовых линий* (рис. 3).

Уравнение (1.11) играет в плазмооптике при $T_e = 0$ ту же роль, что и уравнение Лапласа $\Delta\Phi = 0$ в вакуумной ионной оптике. Можно сказать, что плазмооптика при $T_e = 0$ — это корпускулярная оптика систем с эквипотенциальными магнитными силовыми линиями.

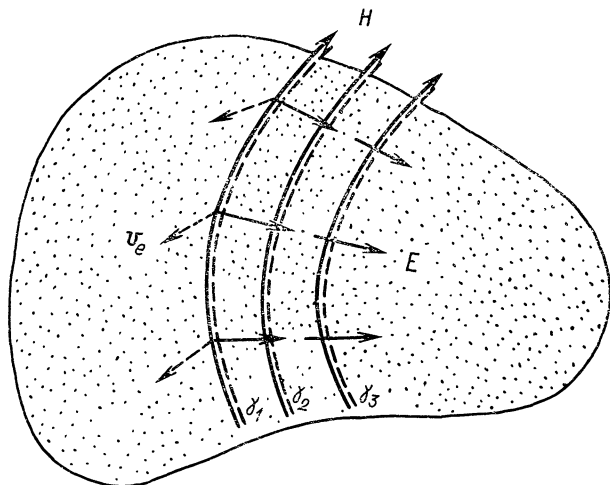


Рис. 3.

Выбирая различную геометрию магнитного поля и разные виды зависимости $\Phi(\gamma)$, можно создавать в объеме электрические поля самой различной структуры. Поверхности $\Phi = \text{const}$ — это поверхности, вдоль которых происходит дрейф электронов.

В принципе могут существовать два класса систем, различающихся характером дрейфа электронов или, что то же самое, видом поверхностей $\Phi = \text{const}$. Одни системы будем называть системами с разомкнутым дрейфом, а вторые — системами с замкнутым дрейфом. В первом случае электроны, стартуя с эмиттера — катода 2, движутся в плазменном объеме и затем высаживаются на некий приемник — анод 1 (рис. 4, а). Во втором случае электроны, попав в плазменный объем, в идеальном случае неограниченно долго остаются в нем (рис. 4, б). Применительно к задачам с КИП наибольший интерес представляет второй случай^{2*}. Оба случая дрейфа

* Если учесть ∇p_e , то в случае $T_e = T_e(\gamma)$ вместо (1.11) будем иметь [2]:

$$\Phi - [kT_e(\gamma)/e] \ln(n/n_0) = \Phi^*(\gamma). \quad (1.11a)$$

Величину Φ^* назовем термализованным потенциалом (подробнее см. гл. 5).

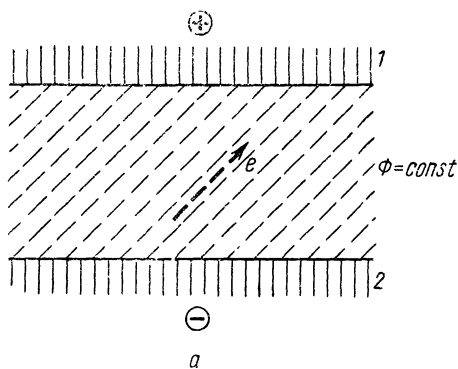
^{2*} Теория идеальных систем с разомкнутым дрейфом рассмотрена в работе [13].

электронов наиболее естественно реализуются в аксиально симметричных системах.

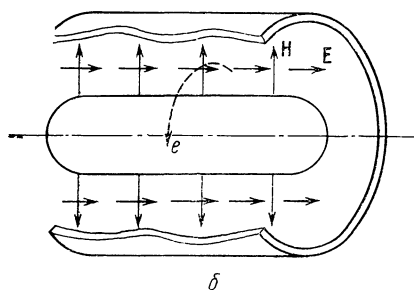
Простейший пример аксиально симметричных систем с замкнутым дрейфом — устройства, в которых магнитные силовые линии лежат в меридиональных плоскостях. В статических режимах электрическое поле, очевидно, также не имеет азимутальной составляющей. Поэтому дрейф электронов происходит по азимуту. При этом, разумеется, электронный ларморовский радиус $R_{e\Lambda}$ должен быть много меньше размеров системы Λ

$$R_{e\Lambda} \ll \Lambda, \quad (1.12)$$

тогда как ионный ларморовский радиус $R_{i\Lambda}$ в силу условия (1.1) больше или порядка Λ .



а



б

Рис. 4.

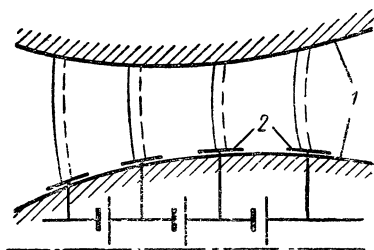


Рис. 5.

До сих пор мы рассматривали зависимость $\Phi(\gamma)$ априори. На самом деле эта зависимость определяется конкретными свойствами системы и происходящими в ней процессами. В принципе простейший мыслимый способ задания $\Phi(\gamma)$ — это применение системы электродов 2, покрывающих стенки канала 1 (рис. 5). Потенциал электрода с точностью до приэлектродного скачка при $T_e \rightarrow 0$ «распространяется» вдоль всей силовой линии, пересекающей его.

Эксперимент в общем подтверждает эффективность этого метода задания зависимости $\Phi(\gamma)$ в реальных условиях (см. § 1 гл. 5). Если же стенки канала покрыты диэлектриком, то зависимость определяется проводимостью плазменного объема для электронной компоненты (кулоновской, пристеночной, аномальной). Подробнее этот вопрос рассмотрен в гл. 5.

2. Картина полей в осевой линзе. Для того чтобы наглядно представить себе физические следствия, вытекающие из уравнения (1.11),

рассмотрим осевую линзу [3] (рис. 6). Если по кольцу радиуса R , образующему линзу, пропустить электрический ток \mathcal{I} , то получим так называемую тонкую магнитную линзу, силовые линии которой

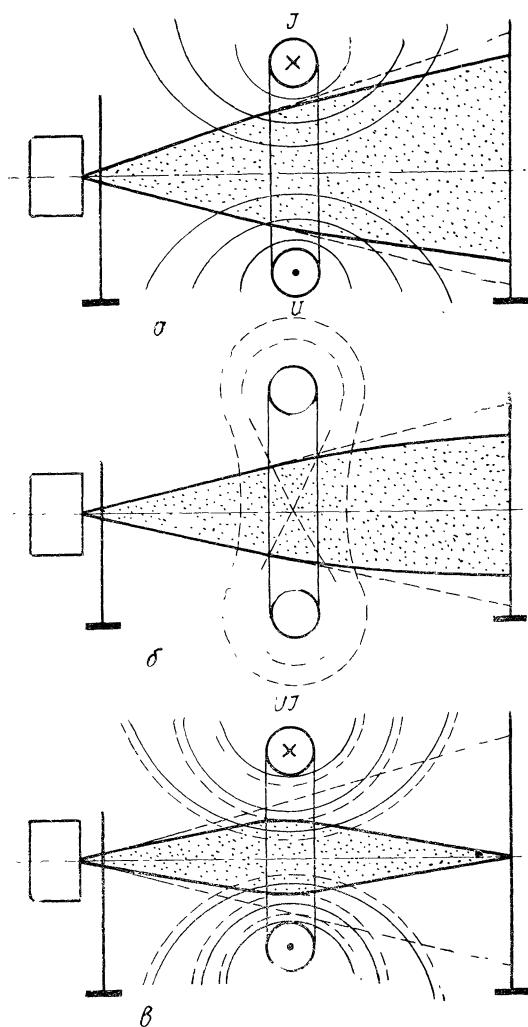


Рис. 6.

изображены на рис. 6, а. Ниже мы покажем (см. гл. 3, § 1), что фокусное расстояние ее определяется формулой

$$\frac{1}{F_H} = \frac{3\pi^3}{16} \cdot \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{E}} \cdot \frac{\mathcal{I}^2}{c^2 R}. \quad (1.13)$$

Здесь $\mathcal{E} = mv^2/2$ — энергия ионов.

Это кольцо можно превратить и в электростатическую линзу (вакуумную), подав на него некий потенциал U . Возникающая картина эквипотенциалей изображена на рис. 6, б. Характерная особенность движения частиц в этом поле — то, что на одних участках они фокусируются, т. е. отклоняются к оси, а на других — дефокусируются.

В результате фокусное расстояние такой линзы оказывается квадратичным по U и выражается формулой

$$\frac{1}{F_E} = \frac{3e^2}{16 (\mathcal{E})^2} \cdot \frac{\pi U^2}{8R}. \quad (1.14)$$

Пропорциональность F квадрату U означает, что независимо от знака поданного потенциала линза будет собирающей. Если теперь в кольцо подать ток и в то же время сообщить ему прежний потенциал U , то в вакуумном случае качественно ничего не изменится в том смысле, что фокусирующие действия магнитного и электрического полей сложатся и общее фокусное расстояние будет равно

$$F_0 = F_E F_H / (F_E + F_H). \quad (1.15)$$

Однако ситуация будет качественно иной, если через такую линзу пропустить достаточно плотный ионный пучок, способный обеспечить компенсацию своего объемного заряда. В этом случае в объеме КИП благодаря высокой подвижности электронов произойдет перестройка электрического поля в соответствии с условием эквипотенциализации магнитных силовых линий (1.11). Возникающая при этом картина электрического поля изображена на рис. 6, в. Очевидно, в объеме КИП электрическое поле направлено либо к оси, либо от нее, в зависимости от того, подан ли на кольцо положительный или отрицательный потенциал по отношению к земле. В результате получившаяся «плазменная линза» может как фокусировать, так и рассеивать ионный пучок. Таким образом, в отличие от своего вакуумного аналога плазменная линза имеет качественное преимущество. Более того, ее преломляющая способность оказывается несравненно больше, чем вакуумной:

$$1/F_{E_p} = (2U/\mathcal{E}) \cdot (\theta/R). \quad (1.16)$$

Безразмерный параметр $\theta \approx 1$ и зависит от геометрии системы.

Например, пусть фокусируются ионы аргона с энергией 10 кэв. Магнитное поле возьмем равным 400 э, а потенциал $U = 1$ кэв, тогда фокусные расстояния, найденные соответственно с помощью формул (1.13), (1.14) и (1.16), будут равны: $F_0 = 10^4$ см, $F_{E_p} = 50$ см.

Эксперименты, проведенные В. В. Жуковым [4], подтвердили и приведенные рассуждения, и формулу (1.16). Он же доказал возможность управления Φ (γ) с помощью пристеночных электродов (см. гл.5).

3. Плазменные ускорители с замкнутым дрейфом. К плазмооптическим системам следует с небольшими оговорками отнести и

плазменные ускорители с замкнутым дрейфом. Простейшая так называемая однолинзовая модель [14—16] такого ускорителя изображена на рис. 7. В этом ускорителе магнитопроводом 1 и катушками 3 создается меридианальное магнитное поле, которое на основной поверхности близко к радиальному. Напряженность магнитного поля на этой поверхности имеет максимум вблизи среза канала. В результате в канале магнитные силовые линии имеют линзоподобную геометрию.

Электрическое поле прикладывается между анодом 2, находящимся в глубине канала из диэлектрика 4, и неким эмиттером электронов 5, расположенным вне канала. Обычно анод — это одновременно и газораспределитель, подающий рабочее вещество в канал. В силу отмеченной выше эквипотенциализации магнитных силовых линий электрическое поле в канале не зависит от места положения катода. Таким образом, в канале возникает дрейф электронов в скрещенных E - и H -полях.

Нейтральные атомы, вышедшие из анода, попадают в облако вращающихся электронов и ионизируются. Образующийся электрон благодаря

классической и аномальной проводимости попадает на анод, тогда как ион, ускоряясь продольным электрическим полем, покидает канал. Параметры ускорителя выбирают таким образом, чтобы электроны были замагничены* $R_{e\Delta} \ll \Lambda$, а ионы не замагничены $R_{i\Delta} \gg \Lambda$. Здесь R_{Δ} — ларморовский радиус частицы, а Λ — длина канала.

Наряду с однолинзовыми ускорителями большой интерес представляют двухлинзовые [19, 40—42] и многолинзовые ускорители [20] (см. гл. 3, § 3, 4, гл. 4, § 1). Именно на двухлинзовых ускорителях впервые были получены ионные токи в сотни ампер при энергии в несколько киловольт. Квазиодночастичную модель ускорителя с очень большим числом линз мы рассмотрим ниже (см. гл. 3, § 3).

Некоторые экспериментальные данные о процессах в ускорителях с замкнутым дрейфом приведены в гл. 5.

4. Транзитивные и нетранзитивные системы. Разобранный выше пример плазменной линзы весьма наглядно поясняет специфику плазмооптики. Здесь хорошо видно, что переход от вакуумного режима к плазменному, вообще говоря, приводит к существенной перестройке свойств системы. В дальнейшем такие «перестраивающиеся» системы назовем «нетранзитивными».

* Следует отметить, что существует особый вид плазменных ускорителей с замкнутым дрейфом, в которых зона ускорения порядка $R_{e\Delta}$ [17, 18, 42].

Однако представляют значительный интерес также оптические системы, которые не меняют в первом приближении своих оптических свойств при компенсации объемного заряда пучка ионов. Такие системы назовем «транзитивными». Проанализируем условие транзитивности.

В вакуумном случае при наличии аксиальной симметрии электрическое поле описывается потенциалом $\Phi(r, z)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.17)$$

В плазменном режиме потенциал Φ удовлетворяет уравнению (1.11), которое в аксиально симметричном случае можно записать в виде*

$$\Phi = \Phi(\psi). \quad (1.18)$$

Здесь ψ — функция магнитного потока.

Учитывая, что ψ удовлетворяет модифицированному уравнению Лапласа (2.9), после подстановки (1.18) в (1.17) получим общее условие транзитивности в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi'' \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 \right] + \Phi' \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0; \end{array} \right. \quad (1.19a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^* \psi = 0; \Delta^* = r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{array} \right. \quad (1.19б)$$

Здесь штрихами обозначены производные по ψ . Выписанная система уравнений (1.19) имеет одно приближенное, но очень общее решение

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = k\psi, \quad r \rightarrow \infty; \\ \partial^2 \psi / \partial r^2 + \partial^2 \psi / \partial z^2 = 0. \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Оно соответствует плоским полям, т. е. случаю, когда ширина канала много меньше его расстояния до оси системы. Точные же решения системы уравнений (1.19) ограничены двумя очень частными случаями [2]:

$$\psi = -(H_0 r^2 / 2); \quad \Phi = -E_0 a \ln(r/a); \quad (1.21a)$$

$$\psi = -H_0 z a; \quad \Phi = -E_0 z, \quad (1.21б)$$

где H_0 , E_0 , a — произвольные постоянные.

Геометрия систем, в которых реализуются поля (1.21, а и б), изображена на рис. 8, а и б соответственно.

Покажем, что решения (1.21) исчерпывают класс точных решений системы (1.19). Действительно, первое уравнение системы (1.19) — это нелинейное уравнение первого порядка в частных производных

* См. подробнее гл. 2, § 1.

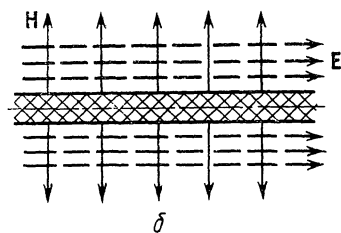
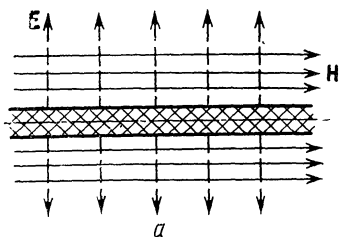


Рис. 8.

относительно функции ψ . Решая это уравнение методом Лагранжа—Шарпи, получим характеристическую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr}{2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{r} f(\psi)} &= \frac{dz}{2 \frac{\partial z}{\partial y}} = \\ &= \frac{dy}{2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} f(\psi)} = \\ &= \frac{d \frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{f(\psi)}{r} \right)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь

$$f = - \frac{2}{(d/d\psi) \ln [d\Phi(\psi)/d\psi]}. \quad (1.23)$$

Отсюда дополнительное уравнение можно записать в виде

$$\partial z / \partial y = Cf(\psi); \quad C = \text{const.} \quad (1.24)$$

Отметим, что решения типа (1.21) — вырожденные в смысле метода Лагранжа — Шарпи, так как в случае независимости решения от одной из координат дополнительное уравнение лишено смысла. Таким образом, решения (1.21) в общее решение уравнения (1.19а), полученного этим способом, не входят. Определив из уравнения (1.22) величину $(\partial z / \partial x)$ и подставив $\partial z / \partial x$ и $\partial z / \partial y$ в уравнение Пфафа, получим решение в квадратурах

$$\begin{aligned} \int \frac{d\psi}{f(\psi)} &= \frac{1}{2} \ln r \pm \frac{1}{4} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 4C^2 r^2}}{1 + \sqrt{1 - 4C^2 r^2}} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4C^2 r^2} + Cz + \text{const.} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Подставив в (1.25) вместо $f(\psi)$ его выражение (1.23), найдем

$$d\Phi(\psi)/d\psi = F(r, z) = F(\psi), \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} F(r, z) &= \frac{\text{const}}{\sqrt[4]{r}} \left| \frac{1 + \sqrt{1 - 4C^2 r^2}}{1 - \sqrt{1 - 4C^2 r^2}} \right|^{\pm \frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp\left(\pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4C^2 r^2}\right) \exp(-2Cz). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Для того чтобы получить отсюда явную зависимость $\psi(r, z)$, необходимо задать зависимость $\Phi(\psi)$. Однако функция ψ , определенная соотношениями (1.26), (1.27), должна удовлетворять уравнению (1.196). Из (1.26) следует, что

$$\psi = \psi(F). \quad (1.28)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.196), получаем для определения функции ψ уравнение

$$d \ln(d\psi/dF)/dF = \Delta^*F/(\nabla F)^2, \quad (1.29)$$

где

$$(\nabla F)^2 \equiv (\partial F/\partial r)^2 + (\partial F/\partial z)^2.$$

Очевидно, правая часть уравнения (1.29) также должна быть функцией F . Из уравнений (1.26) и (1.29) получаем

$$\Delta^*F/(\nabla F)^2 = 1/F. \quad (1.30)$$

Уравнение (1.20) можно решать методом разделения переменных, представив функцию $F(r, z)$ в виде

$$F(r, z) = R(r)Z(z).$$

Подставляя это произведение в уравнение (1.30), получаем

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 = \\ = \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \cdot \frac{1}{Z^2} = \mu = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Заменяя $Z(z)$ его выражением $Z = e^{-2Cz}$ найдем, что $\mu = 0$. Таким образом, функция $R(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$R(r) (d^2R/dr^2) - (1/r)R (dR/dr) - (dR/dr)^2 = 0. \quad (1.32)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция $R(r)$ из (1.27) уравнению не удовлетворяет. Следовательно, при использовании безвихревых магнитных полей класс транзитивных систем ограничен зависимостями (1.21).

Если характеристики транзитивных систем не меняются при переходе от редкого некомпенсированного ионного пучка к плотному КИП, то характеристики нетранзитивных систем устанавливаются лишь при плотности КИП, большей некоторой критической плотности n^* . Найдем выражение для этой плотности. В нетранзитивном случае потенциал $\Phi(\psi)$ удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\Phi(\psi) = -4\pi e v. \quad (1.33)$$

Здесь $v \equiv n_i - n_e$ — плотность некомпенсированных частиц.

Очевидно, критическая плотность n^* должна по крайней мере на порядок превосходить величину ν . Поэтому можно написать следующий критерий плазмооптического режима:

$$n > n^* \approx 10\nu. \quad (1.34)$$

Здесь n — плотность ионов в КИП.

Используя уравнения (1.17), (1.18), (1.33), получаем

$$\nu = \frac{1}{4\pi e} \left| \Phi'' \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \Phi' \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right| \lesssim \frac{n}{10}. \quad (1.35)$$

В случае, когда Φ линейно зависит от ψ , величина ν равна

$$\nu = - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{1}{4\pi e} = \frac{2Er}{r} \cdot \frac{1}{4\pi e}. \quad (1.36)$$

По порядку величин выражение (1.36) эквивалентно оценке

$$\nu/n \approx (D/\Lambda)^2. \quad (1.37)$$

Здесь D — дебаевский радиус, рассчитанный по скорости ионов; Λ — характерный масштаб системы. Разумеется, приведенная оценка справедлива лишь при малых T_e .

5. Аксиально симметричные системы с азимутальным магнитным полем. Если электрическое и магнитное поля не имеют азимутальных компонент и отсутствует стекание электронов вдоль магнитных силовых линий, то единственное макроскопическое движение электронов — это дрейф со скоростью

$$\mathbf{u}_{др} = c [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] / H^2, \quad (1.38)$$

направленный строго по азимуту системы.

Оказывается, что замкнутое движение электронов может существовать и при отличном от нуля азимутальном магнитном поле. Физическую сущность этого явления можно проиллюстрировать следующим простым примером. Возьмем ускоритель однолинзового типа, описанный выше, и будем считать, что электрическое поле постоянно и направлено вдоль оси z : $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$, а магнитное поле имеет радиальную и азимутальную компоненты $\mathbf{H} = (H_{01}(a/r), H_{02}(a/r), 0)$; $H_{01} = \text{const}$; $H_{02} = \text{const}$. Стенки канала считаем диэлектрическими.

Наличие азимутального магнитного поля вместе с однородным электрическим полем, казалось бы, должно привести к радиальному дрейфу. Однако это не обязательно. Действительно, электроны, дрейфуя в радиальном направлении, имеют в то же время возможность «скатываться» по силовым линиям назад (рис. 9). В результате суммарное радиальное смещение может оказаться равным нулю.

Для строгого доказательства этого факта используем систему уравнений для электронной компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} n \mathbf{u} &= (1/r) (\partial/\partial r) r n u_r = 0; \\ E_0 + (1/c) (u_r H_\theta - u_\theta H_r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Из уравнения непрерывности следует, что режим существует, когда $u_r = 0$. Подставляя это значение во второе уравнение (1.39), получаем

$$u_\theta = c E_0 / H_r. \quad (1.40)$$

Теперь определим скорости электронов вдоль силовой линии u_{\parallel} :

$$u_{\parallel} = \frac{c E_0}{H_r} \cdot \frac{H_{02}}{\sqrt{H_{01}^2 + H_{02}^2}}. \quad (1.41)$$

Из формул (1.40) и (1.41) видно, что при стремлении к нулю азимутального магнитного поля ($H_{02} \rightarrow 0$) компоненты скорости $u_{\parallel} \rightarrow 0$, $u_\theta \rightarrow (c E_0 / H_r)$. Если же к нулю стремится радиальное магнитное поле ($H_{01} \rightarrow 0$), то $u_{\parallel} \rightarrow \infty$, $u_\theta \rightarrow \infty$. Полученные качественные результаты будут справедливы, если учесть электронную температуру и зависимость радиального поля от z .

Действительно, рассмотрим систему уравнений

$$\operatorname{div} n \mathbf{u} = 0; (\nabla p_e / e n) + \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{u}, \mathbf{H}] = 0; p_e = p_e(n) \quad (1.42)$$

и введем функции потока электронов χ и меридианального магнитного поля ψ :

$$\left. \begin{aligned} r n u_r &= -\partial \chi / \partial z; & r n u_z &= \partial \chi / \partial r; \\ r H_r &= -\partial \psi / \partial z; & r H_z &= \partial \psi / \partial r. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Тогда, учитывая, что $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, можно переписать систему (1.42) в виде

$$\left. \begin{aligned} W_e - e \Phi &= U(\psi); & \chi &= \chi(\psi); \\ u_\theta &= \left[\frac{H_\theta}{n} \chi'(\psi) - r U'(\psi) \frac{c}{e} \right]; & W_e &= \int \frac{d p_e}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Здесь p_e — электронное давление.

Второе из уравнений (1.44) означает, что при аксиальной симметрии электроны могут двигаться лишь вдоль магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$. Если потребовать, чтобы и в общем случае $u_r = 0$ (т. е. дрейф был замкнут), то необходимо положить $\chi = 0$.

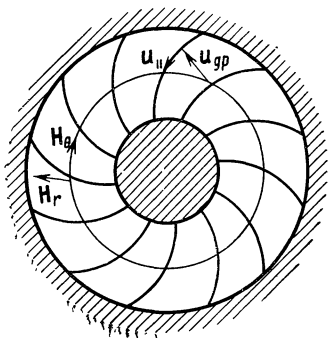


Рис. 9.

Тогда получим $u_z = 0$ и

$$u_\theta = -(rc/e)U'(\psi). \quad (1.45)$$

Нетрудно убедиться, что из соотношения (1.45) следует в частном случае (1.40). Действительно, полагая $W_e = 0$, $\Phi = -Ez$, находим

$$U'(\psi) = \frac{dU}{d\psi} = \frac{1}{d\psi/dz} \cdot \frac{dU}{dz} = -\frac{eE}{rH_z}, \quad (1.46)$$

и подставляя (1.45) в третье уравнение (1.44), получаем (1.40).

Системы с замкнутым дрейфом и азимутальным магнитным полем, безусловно, конструктивно более сложны. В частности, в ускорителе с $H_\theta \neq 0$ замыкание продольного тока можно обеспечить с помощью проводников, помещенных в выходящем плазменном потоке. Однако все это окупается новыми возможностями. Так, например, без принципиальных изменений* существующие схемы масс-сепараторов с тройкой взаимно перпендикулярных векторов \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{H} можно сделать пригодными для сепарации мощных ионных токов по крайней мере при $T_e \rightarrow 0$.

§ 3. Схема анализа плазмооптических систем

В заключение остановимся на последовательности анализа плазмооптических систем. Этот анализ должен выполняться в четыре этапа.

На первом этапе строится квазиодночастичная модель (скелет) ПОС. Очевидно, в классической ионной оптике весь расчет состоит только из этого этапа с той только разницей, что вместо условия эквипотенциальности магнитных силовых линий используется уравнение Лапласа. В процессе расчета квазиодночастичной модели рассматриваются три вопроса:

1. «Угадывается» общая схема системы, способная решить поставленную задачу.

2. Выбираются оптимальная основная траектория и оптимальные поля $\psi(r, z)$, $\Phi(\psi)$ в пределах угаданной схемы.

3. Анализируются aberrации системы и методы их коррекции.

Такой подход к построению корпускулярной оптической системы объясняется тем, что в настоящее время мы не имеем сколь угодно общего метода выбора исходной принципиальной схемы, способной решить поставленную задачу. Поскольку общие контуры оптической системы приходится угадывать, важно иметь некое количество «заготовок». Выработке таких заготовок для плазмооптических систем и посвящены гл. 2—4 настоящей работы.

Второй этап расчета ПОС состоит в построении равновесной плазменной конфигурации. Это означает, что необходимо: а) учесть конечность электронной температуры T_e ; б) «привязать»

* Для этого достаточно их «сделать» аксиально симметричными подобно тому, как это делалось в работе [2] с цилиндрическим конденсатором.

КИП к стенкам канала; в) явно учесть механизмы, приводящие к установлению зависимости Φ^* (γ).

Учет конечности T_e в простейшем случае, как мы видели [см. формулу (1.11a)], сводится к тому, что на магнитной силовой линии постоянным является не электрический потенциал Φ (γ), а термализованный потенциал

$$\Phi^* (\gamma) = \Phi - (kT_e/e) \ln (n/n_0).$$

Зависимость Φ^* от плотности ясно показывает, что при конечном T_e свойства системы не могут быть определены в квазиодночастичном приближении. Поэтому на втором этапе необходимо знать распределение плотности частиц вплоть до стенок. Учет конечной величины T_e и «привязка» КИП к стенкам будут проведены в гл. 5.

Следует подчеркнуть необходимость анализа объемных и пристеночных процессов, определяющих зависимость Φ^* (γ). Как уже отмечалось выше, здесь рассматриваются лишь такие ПОС, в которых все магнитные силовые линии пересекают стенки, в результате чего открывается реальная возможность воздействовать на объем КИП с помощью пристеночных электродов, поглощающих или эмитирующих электроны. Тем самым, по-видимому, можно не только обеспечить требуемое поле в объеме КИП, но и стабилизировать колебания как пассивными, так и активными системами (кибернетическими или, как их чаще называют, системами с обратными связями, предложенными А. И. Морозовым и Л. С. Соловьевым [19]).

В этих условиях большое значение имеет расчет пристеночных скачков потенциала, которые рассмотрены в гл. 5.

Наряду с воздействием на Φ^* (γ) со стороны стенок в реальных условиях на распределения потенциала могут влиять объемные процессы. Если $\Lambda \gg \rho_{e\Lambda}$, то их роль существенна лишь при условии, что в системе присутствуют колебания, способные создать аномальную проводимость. Роль этого эффекта, как показывают эксперименты, может быть определяющей, например, в ускорителях с замкнутым дрейфом при использовании простых диэлектрических стенок (подробнее см. в работах [15, 20]). Если же $\Lambda \approx \rho_{e\Lambda}$, то большое значение приобретают парные столкновения [17]. В данной работе мы ограничились рассмотрением только пристеночных способов фиксации зависимости Φ^* (γ).

Все сказанное указывает на то, что проблема равновесных конфигураций КИП достаточно сложна. Поэтому здесь необходимы широко поставленные эксперименты. Имеющиеся данные пока касаются очень конкретных систем и не дают картины в целом.

Третий этап анализа ПОС состоит в исследовании устойчивости КИП, а также в разработке методов поддержания устойчивости.

Исследование устойчивости опять-таки можно выполнить лишь в условиях тесного контакта с экспериментом. Это утверждение справедливо для большинства плазменных систем, а для ПОС, по-видимому, в особенности. Действительно, как видно из сказанного

выше, плазменная конфигурация в ПОС принципиально двумерная, причем существенно зависит от характера пристеночных процессов.

Аналитический расчет устойчивости двумерных систем удается выполнить в единичных случаях. Здесь же в связи с необходимостью учитывать пристеночные процессы возможности аналитического исследования, по-видимому, весьма ограничены. Поэтому в данной работе мы не будем исследовать поведение возмущений в ПОС.

Наконец, последний этап исследования ПОС, до которого мы также не дойдем в данном обзоре, должен содержать два момента: а) построение равновесной картины с учетом турбулентных процессов, которые по тем или иным причинам не удается стабилизировать; б) вычисление окончательных оптических характеристик рассматриваемой системы.

Резюмируя, можно сказать, что в данной работе подробно рассмотрено построение квазиодночастичных моделей ПОС и проанализированы некоторые особенности равновесных конфигураций КИП.

Г Л А В А 2

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАКСИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ В КВАЗИОДНОЧАСТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

§ 1. Задание магнитных полей

В основе всех плазмооптических систем лежит магнитное поле той или иной конфигурации. Пусть КИП движется внутри некоторого канала, а все магнитные силовые линии пересекают стенки этого канала. Магнитное поле считаем аксиально симметричным (см. рис. 2, а и б). Поскольку собственными магнитными полями токов, текущих в плазменном объеме, можно пренебречь, будем описывать магнитное поле скалярным магнитным потенциалом Ω

$$\mathbf{H}_\pi = \nabla\Omega, \quad (2.1)$$

который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = 0. \quad (2.2)$$

Разобьем аксиально симметричное поле на две компоненты:

$$\mathbf{H}_\pi = \mathbf{H} + \mathbf{H}_\theta. \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{H}_π — напряженность полного поля в канале; \mathbf{H} — меридианальная составляющая поля, лежащая в плоскостях (r, z) ;

$$\mathbf{H} = H_r(r, z)\mathbf{r}_0 + H_z(r, z)\mathbf{z}_0; \quad (2.4)$$

\mathbf{H}_θ — азимутальная составляющая магнитного поля;

$$\mathbf{H}_\theta = [H_\theta(R/r)]\theta_0; H_\theta = \text{const}. \quad (2.5)$$

В формулах (2.4) и (2.5) \mathbf{r}_0 , θ_0 , \mathbf{z}_0 — единичные векторы, направленные вдоль соответствующих координат. Если формулы (2.1), (2.2) записать для меридианальной компоненты поля, то

$$\Omega = \Omega(r, z). \quad (2.6)$$

Наряду со скалярным потенциалом Ω часто бывает удобно использовать функцию магнитного потока ψ , которая связана с компонентами магнитного поля соотношениями

$$H_r = -(1/r)(\partial\psi/\partial z); \quad H_z = (1/r)(\partial\psi/\partial r). \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что линии

$$\psi(r, z) = \text{const} \quad (2.8)$$

есть уравнения проекции магнитных силовых линий на меридианальные плоскости r, z . Функция ψ удовлетворяет модифицированному уравнению Лапласа

$$\Delta^* \psi = r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.9)$$

Очевидно, в осевых системах внешнее азимутальное поле с необходимостью равно нулю. В кольцевых системах внешнее азимутальное магнитное поле может быть отличным от нуля. При расчете осевых плазмооптических систем часто из тех или иных соображений известно магнитное поле на оси:

$$H_r|_{r=0} = 0; \quad H_z|_{r=0} = H_0(z). \quad (2.10)$$

Это позволяет с помощью уравнений (2.2) и (2.9) представить Ω и ψ на любых расстояниях от оси в виде рядов по степеням r :

$$\Omega = \Omega_0(z) - \frac{r^2}{4} \cdot \frac{\partial^2 \Omega_0(z)}{\partial z^2} + \frac{r^4}{8} \cdot \frac{\partial^4 \Omega_0(z)}{\partial z^4} + \dots = \mathcal{Y}_0 \left(r \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_0; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{r^2}{2} H_0(z) - \frac{3}{2} \cdot \frac{r^4}{4!} \cdot \frac{\partial^2 H_0(z)}{\partial z^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{r^6}{6!} \cdot \frac{\partial^4 H_0(z)}{\partial z^4} + \dots = \\ &= r \mathcal{Y}_1 \left(r \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_0; \quad \Omega_0 \equiv \int H_0(z) dz. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $\mathcal{Y}_0(\alpha)$ и $\mathcal{Y}_1(\alpha)$ — бесселевы функции нулевого и первого порядков.

Задание магнитного поля с помощью скалярного потенциала особенно удобно в тех случаях, когда нужно определить геометрию полюсов железного сердечника, создающего это поле. Поскольку магнитное поле входит в ненасыщенный сердечник практически по нормали, уравнение полюсов в первом приближении имеет вид

$$\Omega(r, z) = \text{const}. \quad (2.13)$$

Наоборот, если магнитное поле создается одновитковой сверхпроводящей катушкой, то уравнение сечения катушки плоскостью $\theta = \text{const}$ будет совпадать с уравнением силовых линий (2.8). При расчете кольцевых плазмооптических систем магнитное поле задаем компонентами H_{r0} и H_{z0} на исходной поверхности (ИП), которую, как отмечалось выше, выбираем в виде некоторой цилиндрической поверхности с радиусом R . Зная

$$H_{r0} = H_r(R, z); H_{z0} = H_z(R, z), \quad (2.14)$$

можно с помощью уравнений (2.2) и (2.9) найти магнитное поле в объеме канала в виде рядов по степеням $y = r - R$:

$$\begin{aligned} \Omega = & \Omega_0 + y\Omega_1 + \frac{y^2}{2} \left(-\Omega_0'' - \frac{1}{R} \Omega_1 \right) + \\ & + \frac{y^3}{3!} \left(-\Omega_1'' + \frac{1}{R} \Omega_0'' + \frac{1}{R^2} \Omega_1 \right) + \\ & + \frac{y^4}{4!} \left(\Omega^{(IV)} + \frac{2}{R} \Omega_1'' + \frac{3}{R^2} \Omega_0'' - \frac{5}{R^3} \Omega_1 \right) + \dots; \end{aligned} \quad (2.15a)$$

$$\begin{aligned} \psi = & \psi_0(z) + \psi_1(z)y + \frac{1}{2} y^2 \left(-\psi_0'' + \frac{\psi_1}{R} \right) + \frac{y^3}{3!} \left(-\psi_1'' - \frac{1}{R} \psi_0'' \right) + \\ & + \frac{y^4}{4!} \left(\psi_0^{(IV)} + \frac{\psi_0''}{R^2} - 2 \frac{\psi_1''}{R} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.15b)$$

Здесь $\Omega_0 = \int H_{z0} dz$; $\Omega_1 = H_{r0}$; $\psi_0 = -R \int H_{r0} dz$; $\psi_1 = RH_{z0}$.

С учетом сказанного выше нетрудно построить катушки и сердечники, реализующие требуемые магнитные поля.

Рассмотрим еще один вариант создания требуемого поля в кольцевом зазоре с помощью двух бесконечно тонких коаксиальных катушек [24].

Предположим для определенности, что на ИП

$$H_{z0} = 0; H_{r0} = H_0 f(z/\Lambda). \quad (2.16)$$

Здесь $f(z/\Lambda)$ — некоторая заданная гладкая функция. Общее решение уравнения Лапласа $\Delta\Omega = 0$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \Omega = & \int d\lambda [(b_1(\lambda) \cos \lambda z + b_2(\lambda) \sin \lambda z) I_0(\lambda r) + \\ & + (c_1(\lambda) \cos \lambda z + c_2(\lambda) \sin \lambda z) K_0(\lambda r)], \end{aligned} \quad (2.17)$$

где I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя. Из условий (2.16) на ИП находим коэффициенты в $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} b_1(\lambda) &= H_r^{(s)}(\lambda) K_0(\lambda R) \lambda R; & b_2(\lambda) &= H_r^{(a)}(\lambda) K_0(\lambda R) \lambda R; \\ c_1(\lambda) &= -H_r^{(s)}(\lambda) I_0(\lambda R) \lambda R; & c_2(\lambda) &= -H_r^{(a)}(\lambda) I_0(\lambda R) \lambda R. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Здесь $H_r^{(s)}(\lambda)$ и $H_r^{(a)}(\lambda)$ — симметричная и антисимметричная части фурье-компонент соответственно, а

$$H_0 f(z/\Lambda) = (2/\pi) \int_0^\infty d\lambda [H_r^{(s)}(\lambda) \cos \lambda z + H_r^{(a)}(\lambda) \sin \lambda z].$$

Предположим теперь, что магнитное поле создается двумя бесконечно тонкими коаксиальными катушками неограниченной длины с радиусами a_1 и a_2 , причем $a_1 < R < a_2$. Плотности токов в этих катушках представим в виде

$$j_{\theta 1} = j_1(z) \delta(r - a_1); \quad j_{\theta 2} = j_2(z) \delta(r - a_2). \quad (2.19)$$

Нам нужно определить функции $j_1(z)$ и $j_2(z)$, исходя из предположения, что между катушками поле имеет вид (2.17), а вне катушек регулярно: $\Omega \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0, \infty$. Это означает, что при $r < a_1$

$$\Omega = \int (B_1(\lambda) \cos \lambda z + B_2(\lambda) \sin \lambda z) I_0(\lambda r) d\lambda, \quad (2.20a)$$

а при $r > a_2$

$$\Omega = \int (C_1(\lambda) \cos \lambda z + C_2(\lambda) \sin \lambda z) K_0(\lambda r) d\lambda. \quad (2.20б)$$

При переходе через токовые слои при $r = a_1$ и $r = a_2$ должны выполняться условия

$$[H_r] = 0; \quad [H_z] = (4\pi/c) j_\theta(z). \quad (2.21)$$

Из первого условия можно найти связь коэффициентов $B(\lambda), C(\lambda)$ с коэффициентами $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} B_1(\lambda) &= b_1(\lambda) + c_1(\lambda) \frac{K'_0(\lambda a_1)}{I'_0(\lambda a_1)}; \\ B_2(\lambda) &= b_2(\lambda) + c_2(\lambda) \frac{K'_0(\lambda a_1)}{I'_0(\lambda a_1)}; \\ C_1(\lambda) &= b_1(\lambda) \frac{I'_0(\lambda a_2)}{K'_0(\lambda a_2)} + c_1(\lambda); \\ C_2(\lambda) &= b_2(\lambda) \frac{I'_0(\lambda a_2)}{K'_0(\lambda a_2)} + c_2(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Из второго условия (2.21) найдем фурье-компоненты плотности токов $j_{\theta 1}(\lambda)$, $j_{\theta 2}(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} j_{\theta 1}^{(a)}(\lambda) &= \frac{c}{4\pi} H_r^{(s)}(\lambda) \frac{R}{a_1} \cdot \frac{I_0(\lambda R)}{K_1(\lambda a_1)}; \\ j_{\theta 1}^{(s)}(\lambda) &= \frac{c}{4\pi} H_r^{(a)}(\lambda) \frac{R}{a_1} \cdot \frac{I_0(\lambda R)}{K_1(\lambda a_1)}; \\ j_{\theta 2}^{(a)}(\lambda) &= \frac{-c}{4\pi} H_r^{(s)}(\lambda) \frac{R}{a_2} \cdot \frac{K_0(\lambda R)}{I_1(\lambda a_2)}; \\ j_{\theta 2}^{(s)}(\lambda) &= \frac{-c}{4\pi} H_r^{(a)}(\lambda) \frac{R}{a_2} \cdot \frac{K_0(\lambda R)}{I_1(\lambda a_2)}. \end{aligned} \right\} (2.23)$$

Здесь индекс s относится к симметричной части $j_{\theta}(\lambda)$, а индекс a — к антисимметричной.

По известным фурье-компонентам токов можно рассчитать плотность токов в катушках:

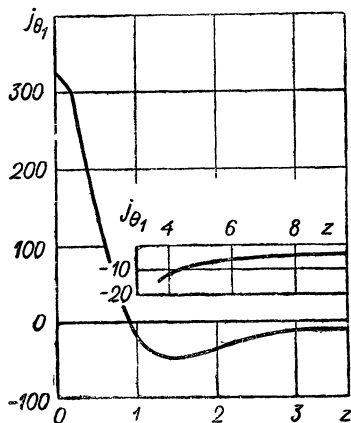


Рис. 10.

$$j_i(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (j_{\theta i}^{(a)} \sin \lambda z + j_{\theta i}^{(s)} \cos \lambda z) d\lambda, \quad i = 1, 2. \quad (2.24)$$

Если для примера взять функцию $f(z/\Lambda)$ в виде

$$f(z/\Lambda) = \exp(-z^2/\Lambda^2), \quad (2.25a)$$

то

$$\begin{aligned} H^{(s)}/H_0 &= \int_0^{\infty} f(k/\Lambda) \cos \lambda k dk = \\ &= (\sqrt{\pi}/2) \exp(-\lambda^2 \Lambda^2/4), \quad H^{(a)} = 0. \end{aligned} \quad (2.25b)$$

Подставляя (2.25б) в (2.23) и (2.24), получаем формулы для распределения токов в катушках. Зависимость $j_{\theta 1}(z)$ для случая $a_2 = 2a_1$, $R = 3/2$, $a_1 = 1$, найденная численным счетом на ЭВМ, показана на рис. 10. Обращает на себя внимание знакопеременность $j_{\theta 1}$: значения плотностей токов быстро спадают при $|z| \rightarrow \infty$ и поэтому коаксиальные катушки можно сделать конечных размеров, не искажая существенно форму поля.

§ 2. Уравнения параксиального приближения

Параксиальное приближение — это удобный метод расчета многих оптических систем. При использовании параксиального приближения достаточно произвольным образом выбирается некоторая опорная линия (или поверхность), которая, вообще говоря,

может и не совпадать с реальной траекторией (траекторной поверхностью, образованной семейством траекторий), а фокусирующие поля и положение реальных траекторий определяются разложением по поперечной координате относительно этой опорной поверхности. Опорную поверхность, совпадающую с траекторной, назовем основной поверхностью (ОП), а в случае несовпадения — исходной поверхностью (ИП).

Если $\mathbf{r}_0(s)$ — радиус-вектор опорной поверхности, то радиус-вектор траектории частицы, идущей вблизи опорной поверхности, можно представить в виде $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0(s) + p\mathbf{n}_0$. Здесь \mathbf{n}_0 — единичный вектор нормали к опорной поверхности, а $p(s)$ — отклонение траектории от этой поверхности. Все характеристики пучка в параксиальном приближении ищутся в виде рядов по степеням p .

Изображением источника будем считать сечение пучка в минимуме* его ширины $d = \min(p_{\max} - p_{\min})$. В рассматриваемом случае фокусировки аксиально симметричных потоков величина d — функция восьми аргументов:

$$d = d(v_{\min}, v_{\max}, \alpha_{\min}, \alpha_{\max}, D_{\min}, D_{\max}, M_{\min}, M_{\max}). \quad (2.26a)$$

Здесь v — полная скорость частицы на выходе из источника ($z = z_0$); α — угол наклона траектории при $z = z_0$, $\operatorname{tg} \alpha = r/z|_{z=z_0}$; D — угловой момент частицы на выходе из источника, $D = MRv_\theta$; R — радиус источника; v_θ — угловая скорость; M — масса ионов. Индексы в формуле (2.26a) характеризуют крайние пределы, в которых варьируются соответствующие параметры.

Пусть параметры «основной» частицы на выходе из источника равны $v = v_0$; $\alpha = \alpha_0$; $D = D_0$; $M = M_0$.

Предполагая, что параметры остальных частиц не очень сильно отличаются от параметров основных частиц, можно представить d в виде ряда

$$d = \delta\alpha \frac{\partial d_0}{\partial \alpha} + \delta D \frac{\partial d_0}{\partial D} + \delta v \frac{\partial d_0}{\partial v} + \delta M \frac{\partial d_0}{\partial M} + \\ + \frac{(\delta D)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 d_0}{\partial D^2} + \frac{(\delta v)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 d_0}{\partial v^2} + \dots \quad (2.26б)$$

Здесь $\delta D \equiv |D_{\max} - D_{\min}|$; $\delta\alpha = |\alpha_{\max} - \alpha_{\min}|$, ...

Когда мы говорим, что система фокусирует поток, то это означает, что одна из первых производных равна нулю. Обычно считают, что равна нулю производная

$$\partial d_0 / \partial \alpha = 0. \quad (2.26в)$$

Конкретный вид зависимости функции d от α , D , M , v связан с особенностями фокусирующей системы. В частности, если для фокуси-

* Напомним, что источник предполагается либо точечным, либо бесконечно узким.

ровки частиц с начальной скоростью v применяется только магнитное поле, то

$$d(M, v) = f \left(M|v|, \frac{v}{|v|} \right). \quad (2.26\text{г})$$

Если фокусировка осуществляется одним электрическим полем, то

$$d(M, v) = g \left(Mv^2, \frac{v}{|v|} \right). \quad (2.26\text{д})$$

Если кроме коэффициента $\partial d_0 / \partial \alpha$ обращается в нуль еще один из членов ряда (2.26б), то мы говорим о двойной, или двухпараметрической, фокусировке. Аналогично определяются системы с тройной и т. д. фокусировками.

При изменении параметра пучка может изменяться не только ширина изображения, но и его координата z . Очевидно, координата изображения z_1 есть также функция восьми аргументов:

$$z_1 = z_1(v_{\text{макс}}, v_{\text{мин}}, \alpha_{\text{макс}}, \alpha_{\text{мин}}, D_{\text{макс}}, D_{\text{мин}}, M_{\text{макс}}, M_{\text{мин}}). \quad (2.27)$$

Поэтому можно говорить не только о «поперечных» абберациях системы, связанных с величиной d , но и о «продольных» абберациях, являющихся следствием зависимости z_1 от указанных выше аргументов. В каждой реальной системе существуют свои специфические абберации, наиболее сильно ухудшающие решение поставленной задачи и требующие специального анализа с целью их устранения или сведения к минимуму.

Ясно, что для уничтожения абберационных членов, т. е. обращения в нуль членов ряда (2.26б), необходимо специальным образом подбирать поля в фокусирующей системе. Так как величины d и z_1 — функционалы от вида фокусирующих полей, то обращение производных в нуль равносильно наложению некоторых дополнительных условий на вид фокусирующих полей. Поскольку априори поля определяются бесконечным числом параметров, то, по-видимому, могут быть сделаны системы со сколь угодно слабыми абберациями. Несколько примеров систем с коррекцией отдельных типов аббераций помещено в гл. 3 и 4.

При расчете движения параксиального пучка необходимо задавать вид магнитного поля либо на ИП, либо на ОП в зависимости от постановки задачи. В § 1 настоящей главы приведен способ расчета конфигураций магнитного поля в пространстве при известном распределении напряженности поля на цилиндрической поверхности (ИП). Расчет конфигурации магнитного поля по его компонентам, заданным на аксиально симметричной поверхности произвольной формы (ОП), описан в работе [27] и на нем здесь мы останавливаться не будем.

1. Уравнения траекторий вблизи ОП. Для расчета траекторий ионов в оптической системе необходимо решить уравнение Ньютона

$$\frac{M}{e} \cdot \frac{dv}{dt} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]. \quad (2.28)$$

Возможны два различных подхода к решению оптических задач. В первом случае рассматривают движение пучка частиц в заранее заданных (фактически угаданных или эмпирически подобранных) электромагнитных полях. Во втором случае задают форму фокусирующего пучка, т. е. его геометрические параметры — «вид фокусирующей», а затем рассчитывают вид фокусирующих электромагнитных полей, в которых пучок формируется нужным образом.

В вакуумной оптике в наиболее общем случае обе эти задачи в параксиальном приближении исследованы Г. А. Гринбергом [25] для узких пучков и Ю. В. Вандакуровым [26] для широких пучков. Метод Г. А. Гринберга можно непосредственно перенести на задачи плазмооптики, если учесть влияние объемного заряда в форме (1.11).

Покажем это на примере параксиальных аксиально симметричных систем. Уравнения движения иона в аксиально симметричном поле сводятся к двум уравнениям [27]:

$$\left. \begin{aligned} Mr'' &= -(\partial U/\partial r) - (e/c) z \dot{H}_\theta; \\ Mz'' &= -(\partial U/\partial z) + (e/c) r \dot{H}_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.29a)$$

Здесь U — обобщенный потенциал;

$$U(r, z) = \frac{[D - (e/c)\psi]^2}{2Mr^2} + e\Phi(\psi). \quad (2.29b)$$

Движение в азимутальном направлении описывается законом сохранения момента количества движения

$$Mr^2 \dot{\theta} + (e/c)\psi = D = \text{const}, \quad (2.29b)$$

где D — обобщенный импульс. Уравнения (2.29) можно записать также в виде

$$(M/2)(v_r^2 + v_z^2) + U = \mathcal{E}; \quad (2.30a)$$

$$(M/\rho)(v_r^2 + v_z^2) = -(\partial U/\partial n) - (e/c)vH_\theta. \quad (2.30b)$$

Здесь \mathcal{E} — полная энергия частицы; v — полная скорость в плоскости r, z .

Уравнение (2.30a) выражает закон сохранения энергии; (2.30b) — равенство центробежной и центростремительных сил; $\partial/\partial n$ — производная по нормали к траектории; ρ — ее радиус кривизны. Знак ρ выбирается в соответствии с формулами Френэ

$$\partial \mathbf{r}/\partial s = \mathbf{t}; \quad dn/ds = -\mathbf{t}/\rho; \quad dt/ds = \mathbf{n}/\rho. \quad (2.31)$$

Здесь \mathbf{t} и \mathbf{n} — единичные векторы касательной и нормали, причем переход от \mathbf{t} к \mathbf{n} происходит против часовой стрелки; ds — элемент

дуги. Систему уравнений (2.30) можно свести к одному уравнению

$$2u/\rho = (du/\partial n) - (e/c) \sqrt{-(2/M)u} H_\theta, \quad (2.32a)$$

где $u = U - \mathcal{E}$. Уравнение (2.32a) принимает особенно простой вид, если $H_\theta = 0$:

$$2u/\rho = du/\partial n. \quad (2.32б)$$

Выделим среди множества возможных траекторий пучка траекторию $\mathbf{r}_0(s)$, которую назовем основной (рис. 11). Все остальные

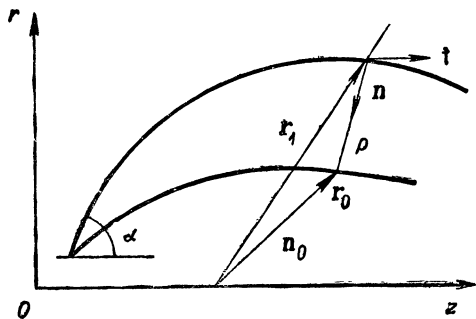


Рис. 11.

будем называть смежными $\mathbf{r}_1(s)$ и характеризовать величиной ρ — отклонением по нормали смежной траектории от основной:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \rho \mathbf{n}_0. \quad (2.33a)$$

Считая величины порядка ρ малыми и пренебрегая членами высших порядков малости, находим связь параметров смежной траектории с па-

раметрами основной траектории. Учитывая, что $ds_0^2 = (d\mathbf{r}_0)^2$, $ds_1^2 = (d\mathbf{r}_1)^2$, с помощью формул Френэ и (2.33a) получаем

$$ds_1^2 = [1 + (p/\rho_0)]^2 ds_0^2 + dp^2 \approx [1 + (p/\rho_0)]^2 ds_0^2,$$

т. е.

$$ds_1 = [1 + (p/\rho_0)] ds_0. \quad (2.33б)$$

Теперь с той же степенью точности можно получить связь \mathbf{t}_0 и \mathbf{t}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 = d\mathbf{r}_1/ds_1 &= d(\mathbf{r}_0 - \rho \mathbf{n}_0)/[ds_0(1 + p/\rho_0)] \approx \\ &\approx \mathbf{t}_0 - \mathbf{n}_0 (dp/ds_0). \end{aligned} \quad (2.33в)$$

Аналогично находим

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_0 + \mathbf{t}_0 (dp/ds_0); \quad (2.33г)$$

$$1/\rho_1 = 1/\rho_0 [1 - (p/\rho_0) - \rho_0 (d^2 p/ds_0^2)]. \quad (2.33д)$$

Теперь можно определить связь u и $du_1/\partial n_1$ с u_0 и $du_0/\partial n_0$.

Учитывая (2.32) и (2.33), получаем

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0 (\mathbf{r}_0 - p\mathbf{n}_0) = u_0 - p (\mathbf{n}_0 \nabla) u_0 = \\
 &= u_0 - p \left[\frac{2u_0}{\rho_0} + \frac{e}{c} \sqrt{-\frac{2u_0}{M}} H_\theta \right] = \\
 &= u_0 \left(1 - \frac{2p}{\rho_0} \right) - p \frac{eH_\theta}{c} \sqrt{-\frac{2u_0}{M}}. \quad (2.34a)
 \end{aligned}$$

Подобным же образом находим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} &\approx \left[\left(\mathbf{n}_0 + \mathbf{t}_0 \frac{dp}{ds_0} \right) \nabla \right] u_1 (\mathbf{r}_0 - p\mathbf{n}_0) = \\
 &= (\mathbf{n}_0 \nabla) u_0 + \frac{dp}{ds_0} (\mathbf{t}_0 \nabla) u_0 - p (\mathbf{n}_0 \nabla) u_0 = \\
 &= \frac{2u_0}{\rho_0} + \frac{du_0}{ds_0} + \frac{du_0}{ds_0} \cdot \frac{dp}{ds_0} - p \frac{\partial^2 u_0}{\partial n_0^2} + \frac{e}{c} \sqrt{-\frac{2u_0}{M}} H_\theta. \quad (2.34б)
 \end{aligned}$$

В некоторых случаях удобно выразить $\partial^2 u_0 / \partial n_0^2$ с помощью «плоского» лапласиана

$$\Delta u = (\partial^2 u / \partial r^2) + (\partial^2 u / \partial z^2). \quad (2.34в)$$

Если параметры s и p рассматривать как ортогональные координаты, то можно написать

$$\begin{aligned}
 \Delta u_0 &= \frac{1}{1+(p/\rho)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{1}{1+(p/\rho)} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{1+(p/\rho)} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left(1 + \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial p} = \\
 &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial n_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial s_0^2} - \frac{2u_0}{\rho_0^2} + 0(p^2). \quad (2.34г)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\partial^2 u_0 / \partial p^2 \equiv \partial^2 u_0 / \partial n^2$, $du_0 / \partial n \equiv -du_0 / \partial p$. Подставляя полученные выражения (2.34а), (2.34б), (2.33д) и (2.34г) для u_1 , $du_1 / \partial n_1$, p и Δ в (2.32), после простых преобразований получаем искомое уравнение Гринберга для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned}
 (\rho u')' - \Delta u p + 2u \left(p'' - \frac{2p}{\rho^2} \right) + \frac{2p}{\rho} \cdot \frac{e}{c} \sqrt{-\frac{2}{M}} u H_\theta + \\
 + \frac{e^2}{Mc^2} H_\theta^2 p + \frac{e}{c} \sqrt{-\frac{2}{M}} u H_0 \frac{\cos \alpha}{r} p = 0. \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

В уравнении (2.35) все величины относятся к основной траектории. Индекс нуль опущен. При написании (2.35) было также учтено, что $v = \sqrt{-2u/M}$.

Уравнение (2.35) совместно с геометрическими уравнениями

$$\partial \alpha / \partial s = 1/\rho; \quad \partial r / \partial s = \sin \alpha; \quad \partial r / \partial n = \cos \alpha \quad (2.36)$$

и уравнением равновесия (2.32), написанным для основной траектории, полностью определяют движение параксиального пучка в аксиально симметричных электромагнитных полях. В уравнении (2.36) α — угол между касательной к основной траектории и осью.

Если $H_\theta = 0$, то уравнения (2.35) и (2.36) фактически расщепляются. Уравнение (2.35) при $H_\theta = 0$ содержит четыре величины $p(s)$, $u(s)$, $\dot{\Delta}u(s)$, $\rho(s)$, три из которых в условиях плазмосптики можно задавать независимо.

То что $\dot{\Delta}u$ так же как и u , можно рассматривать как независимую функцию s , объясняется тем, что в u входят две величины $\psi(s)$ и $\Phi(\psi)$.

Таким образом, при $H_\theta = 0$ можно ставить четыре класса задач в зависимости от того, какую из величин считать искомой. Следовательно, с помощью уравнения типа Г. А. Гринберга можно решать и задачу о нахождении параметров пучка (p или ρ) при движении в заданных полях (u , $\dot{\Delta}u$ — известны), и задачу определения вида электромагнитных полей ($\dot{\Delta}u$ или u) при заданной геометрии пучка (p , ρ).

В уравнении (2.35) избавимся от членов с p' , введя функцию ξ соотношением

$$p = \xi (u/u_0)^{-1/4}. \quad (2.37)$$

Тогда (2.35) можно переписать в более симметричном виде (при $H_\theta = 0$)

$$\begin{aligned} (\xi''/\xi) + (1/4)(u''/u) - (1/2)(\dot{\Delta}u/u) + \\ + (3/16)(u'^2/u^2) + (2/\rho^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Очевидно, системы, описываемые уравнением (2.38), будут фокусирующими в том случае, когда выполняются граничные условия

$$\xi(0) = \xi(L) = 0, \quad (2.39a)$$

где L — длина фокусировки.

Кроме граничных условий (2.39a) и естественного требования гладкости на функцию $\xi(s)$ никаких ограничений не накладывается, т. е. вид смежных траекторий (вид фокусировки) может быть задан произвольным образом. В частности, если

$$\xi = \sin(\pi n/L)s, \quad (2.39b)$$

где n — целое, то такие системы в дальнейшем будем называть «гармоническими». В случае $H_\theta \neq 0$ в уравнение (2.35) входят явно величины r и α , поэтому система уравнений (2.35) и (2.36) должна решаться одновременно.

2. Уравнения траекторий около ИП. В предыдущем параграфе мы рассмотрели уравнения типа Гринберга, описывающие смежные траектории около некоторой основной траектории. Однако, как отмечалось уже во введении, в кольцевых системах ОП, образованная совокупностью основных траекторий, может обладать весьма сложной геометрией, что затрудняет использование ее в качестве координатной поверхности. Поэтому разложение магнитного поля по степеням поперечной координаты мы искали не около ОП, а около вспомогательной цилиндрической поверхности ИП.

Естественно рассмотреть также уравнения траектории параксиального пучка не около ОП, а около ИП. За основу по-прежнему берем систему уравнений (2.29). Поскольку нас интересуют только геометрические свойства ионных траекторий, в уравнениях движения (2.29) целесообразно перейти от переменной t к переменной z . В результате получим

$$r'' + r' \left(\frac{\dot{z}}{z^2} \right) = - \frac{1}{Mz^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{e}{Mc} \cdot \frac{H_\theta}{z}. \quad (2.40a)$$

Здесь $r' \equiv dr/dz$. Уравнение для \dot{z} просто получить из закона сохранения энергии

$$\frac{M}{2} \dot{z}^2 (1 + r'^2) = -u. \quad (2.40б)$$

Исключая \ddot{z} и \dot{z} с помощью (2.40б), систему (2.40) можно свести к одному уравнению

$$r'' = - \frac{1+r'^2}{(-2u)} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + r' \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \left(\frac{eH_\theta}{Mc} \right)^2 \frac{(1+r'^2)^{3/2}}{(-2u/M)^{1/2}}. \quad (2.41)$$

Пусть известно разложение (2.12), (2.15):

$$\psi = \psi_0(z) + y \psi_1(z) + (y^2/2) \psi_2(z) + \dots, \quad (2.42)$$

где $y = r$ в случае осевых и $y = r - R$ в случае кольцевых систем. Тогда можно написать также разложения $\Phi(\psi)$ по степеням y :

$$\Phi(\psi) = \Phi(\psi_0) + y \left(\frac{d\Phi}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi_1 \right) + \dots. \quad (2.43)$$

Разложение U по степеням y требует отдельного рассмотрения осевых и кольцевых систем. Действительно, в первом случае необходимо положить $H_\theta = 0$ и, кроме того, считать, что $D = 0$. Если $D \neq 0$, то расчет движения частиц нельзя провести с помощью системы уравнений (2.40) методами разложения по степеням r . Это связано с тем, что при $r \rightarrow 0$ и $D \neq 0$ обобщенный потенциал неограниченно возрастает:

$$U|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \frac{D^2}{2Mr^2} \rightarrow \infty.$$

Если же $D = 0$, то разложение u по степеням r — регулярно, так как

$$\psi = (r^2/2)\psi_2(z) + (r^4/4!)\psi_4(z) + \dots, \quad (2.44)$$

и при всех условиях (как в вакуумном, так и плазменном режиме)

$$\Phi = \Phi_0 + (r^2/2)\Phi_2 + (r^3/3!)\Phi_3 + (r^4/4!)\Phi_4 + \dots \quad (2.45)$$

В вакуумном режиме, когда Φ удовлетворяет уравнению Лапласа ($\Delta\Phi = 0$), коэффициенты разложения (2.45) равны

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3(z) &= 0; & \Phi_{2n+1}(z) &= 0; \\ \Phi_2(z) &= -\frac{1}{2^2} \Phi_0''(z); & \Phi_4(z) &= \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \Phi_0^{IV}(z); \\ \Phi_{2n}(z) &= -\frac{1}{(2n)^2} \Phi_{2n-2}''(z) & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

В плазменном случае $\Phi = \Phi(\psi)$ и поэтому все члены, содержащие нечетные степени r , за исключением Φ_1 , могут быть отличны от нуля. Однако если предположить, что зависимость $\Phi(\psi)$ аналитична в окрестности $\psi = 0$, то и в плазменном случае коэффициенты Φ_{2n+1} равны нулю. Тогда $\Phi_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} \Phi &= k_1 \psi + k_2 \psi^2 + \dots = \\ &= \frac{r^2}{2} (k_1 \psi_2) + r^4 \left(\frac{k_1 \psi_4}{4!} + k_2 \frac{1}{4} \psi_2^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

Итак, при условии, что $\Phi_{2n+1} = 0$, потенциал u в окрестности оси z равен

$$u = -\mathcal{E} + (r^2/2)U_2 + (r^4/4!)U_4 + \dots \quad (2.48)$$

Входящие в (2.48) коэффициенты U_2, U_4 имеют вид

$$U_2 = (e^2/Mc^2)(\psi_2^2/4) + e\Phi_2 = U_{2H} + U_{2E}; \quad (2.49a)$$

$$U_4 = (e^2/2Mc^2)\psi_2\psi_4 + e\Phi_4 = U_{4H} + U_{4E}. \quad (2.49b)$$

В случае кольцевых систем разложение u по степеням r не имеет особенностей. К сожалению, получающиеся при этом формулы оказываются достаточно громоздкими. Поэтому мы ограничимся явным выписыванием лишь членов, пропорциональных $y = r - R$. Учитывая, что $y' = r'$ и полагая $U = U_0 + yU_1 + (y^2/2)U_2 + \dots$, можно переписать (2.41) в следующем виде:

$$\begin{aligned} y'' + y' \left(\frac{1}{(-2U_0)} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{U_1 + yU_2}{(-2U_0 - 2U_1 y)} \right) + \\ + \left(\frac{eH_{\theta 0}}{Mc} \right)^2 \frac{1 - 2 \frac{y}{R}}{\left(-\frac{2U_0}{M} - y \frac{2U_1}{M} \right)^{1/2}} = P(y). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Здесь $P(y)$ — совокупность нелинейных по y членов; $H_{\theta 0} = H_{\theta}(R)$.
 Линеаризируя левую часть (2.50), получаем

$$y'' + ay' + by + c = 0, \quad (2.51)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a = & -\frac{1}{M} \cdot \frac{U'_0}{\left(-\frac{2}{M} u_0\right)}; \quad b = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{2}{M} u_0\right)} \left(U_2 - \frac{U_1^2}{u_0}\right) + \\ & + \left(\frac{eH_{\theta 0}}{Mc}\right)^2 \frac{1}{\left(-\frac{2u_0}{M}\right)^{1/2}} \left(-\frac{2}{R} - \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1}{u_0}\right); \\ c = & \frac{1}{M} \cdot \frac{U_1}{\left(-\frac{2}{M} u_0\right)} + \frac{\left(\frac{eH_{\theta 0}}{Mc}\right)^2}{\left(-\frac{2u_0}{M}\right)^{1/2}}. \end{aligned} \right\} (2.52)$$

В формуле (2.52) введены обозначения $u_0 \equiv -\mathcal{E} + U_0$; $U'_0 \equiv \equiv dU_0/dz$. Входящие сюда величины U_0 , U_1 , U_2 , очевидно, равны:

$$U_0 = \frac{(D - (e/c)\Psi_0)^2}{2MR^2} + e\Phi(\Psi_0) = U_{0H} + U_{0E}; \quad (2.53a)$$

$$\begin{aligned} U_1 = & \frac{(D - (e/c)\Psi_0)^2}{MR^3} - \frac{e}{Mc} \cdot \frac{\Psi_1(D - (e/c)\Psi_0)}{R^2} + \\ & + e \frac{d\Phi}{d\Psi} \Big|_{\Psi_0} \Psi_1 = U_{1H} + U_{1E}; \end{aligned} \quad (2.53b)$$

$$\begin{aligned} U_2 = & 3 \frac{(D - (e/c)\Psi_0)^2}{MR^4} + \frac{1}{MR^2} \cdot \frac{e^2}{c^2} \Psi_1^2 + \frac{e}{c} \cdot \frac{D - (e/c)\Psi_0}{MR^2} \times \\ & \times \left(\frac{4\Psi_1}{R} - \Psi_2\right) + e \left(\frac{d\Phi}{d\Psi} \Big|_{\Psi_0} \Psi_2 + \frac{d^2\Phi}{d\Psi^2} \Big|_{\Psi_0} \Psi_1^2\right) = U_{2H} + U_{2E}. \end{aligned} \quad (2.53b)$$

Для удобства последующего изложения U_0 , U_1 и U_2 разделены на две части, отмеченные индексами H и E и относящиеся к членам, связанным с магнитным и электрическим полями соответственно. Приведем явный вид квадратичных членов в $P(y)$, которые понадобятся нам в дальнейшем. При $H_{\theta} = 0$

$$\begin{aligned} P_{\text{квадр}} = & \frac{y^2}{2} \left[-\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{2}{M} u_0\right)} \left(U_3 - 3 \frac{U_1 U_2}{u_0} + 2 \frac{U_1^3}{u_0^2}\right) \right] + \\ & + y'y \left[\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{2}{M} u_0\right)} \left(U'_1 - \frac{U'_0 U_1}{u_0}\right) \right] - y'^2 \frac{1}{M} \frac{1}{\left(-\frac{2}{M} u_0\right)} U_1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 U_3 = & \frac{3}{MR^2} \cdot \frac{e^2}{c^2} \psi_1 \psi_2 - 12 \frac{(D - (e/c) \psi_0)^2}{MR^5} - \frac{e}{MR^3} \cdot \frac{e^2}{c^2} \psi_1^2 + \\
 & + \frac{D - (e/c) \psi_0}{MR^2} \cdot \frac{e}{c} \left(6 \frac{\psi_2}{R} - \psi_3 - 18 \frac{\psi_1}{R^2} \right) + e \left(\frac{d\Phi}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi_3 + \right. \\
 & \left. + 3 \frac{d^2 \Phi}{d\psi^2} \Big|_{\psi_0} \psi_1 \psi_2 + \frac{d^3 \Phi}{d\psi^3} \Big|_{\psi_0} \psi_1^3 \right) = U_{3H} + U_{3E}. \quad (2.53г)
 \end{aligned}$$

3. Диоптрика Гаусса. Прежде чем переходить к рассмотрению методов решения уравнений (2.49) и (2.51), остановимся на геометрическом анализе траекторий в том частном, но весьма интересном случае, когда протяженность электромагнитных полей ограничена вдоль траектории пучка, а источник и приемник частиц находятся вне области, занятой полем. К системам такого рода относятся электромагнитные линзы. Их можно рассматривать как аналоги «толстых» оптических линз и описывать с позиции диоптрики Гаусса, вводя кардинальные элементы — фокусные расстояния, узловые точки и т. д. Для общности будем иметь в виду кольцевые линзы. Переход к осевым системам будет очевидным.

Для нахождения кардинальных элементов в (2.49) или (2.51) следует пренебречь квадратичными по y членами. Тогда функцию, которая служит решением линеаризованного уравнения (2.51), можно представить в виде

$$y(z) = Aq_1(z) + Bq_2(z) + y_{cp}, \quad (2.55)$$

где y_{cp} — частное решение неоднородного уравнения (2.51); q_1, q_2 — линейно независимые решения однородного уравнения (2.51) при $c = 0$; A, B — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий. Граничные условия функции y_{cp} выберем следующим образом:

$$\frac{dy_{cp}}{dz} \Big|_{-\infty} = \frac{dy_{cp}}{dz} \Big|_{+\infty} = 0. \quad (2.56a)$$

Тогда поверхность, определяемая линией y_{cp} , будет аналогом оптической оси в обычной ионной оптике. Очевидно, поверхность y_{cp} есть основная поверхность (ОП).

Функции $q_1(z)$ и $q_2(z)$ удобно выбрать в виде базисных функций относительно ОП, задавая граничные условия

$$q_1 \Big|_{-\infty} = 1; \quad \frac{dq_1}{dz} \Big|_{-\infty} = 0; \quad q_2 \Big|_{+\infty} = 1; \quad \frac{dq_2}{dz} \Big|_{+\infty} = 0. \quad (2.566)$$

Оптические свойства толстой линзы полностью определяются асимптотическим видом функций q_1, q_2 и y_{cp} . Точки старта и фокусировки являются в этом случае сопряженными точками (в смысле Гаусса), что следует из линейности уравнений (2.51). Если ввести

фокусные расстояния F_1 и F_2 (рис. 12), то асимптотика функций $q_1(z)$ и $q_2(z)$ имеет вид:

$$q_1 = \begin{cases} 1 & z \ll -\Lambda; \\ g[1 - (z/F_1)] & z \gg \Lambda; \end{cases} \quad (2.57a)$$

$$q_2 = \begin{cases} l[1 + (z/F_2)] & z \ll -\Lambda; \\ 1 & z \gg \Lambda, \end{cases} \quad (2.57b)$$

где Λ — характерный размер фокусирующих полей вдоль ИП; F_1 , F_2 отсчитываются от точки $z = 0$.

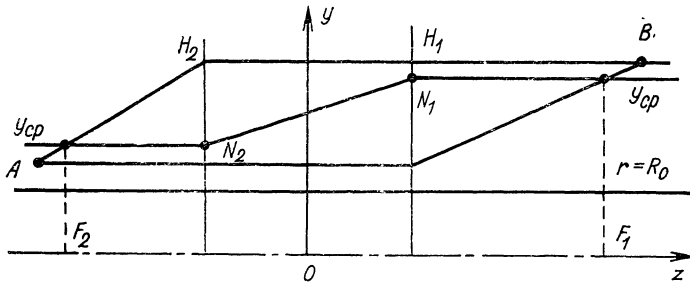


Рис. 12.

Если найти из решения уравнения (2.57) вид g , l и F_1 , F_2 , то легко определить остальные кардинальные элементы линзы, например, координаты основных плоскостей H_1 и H_2 :

$$H_1(z) = (g - 1)(F_1/g); \quad (2.58a)$$

$$H_2(z) = -(l - 1)(F_2/l). \quad (2.58b)$$

Главные точки N_1 , N_2 лежат на пересечении основных плоскостей с «линиями» $y_{cp}(-\infty)$ и $y_{cp}(+\infty)$.

На рис. 12 показано построение изображения в толстой линзе с помощью кардинальных элементов. Часто удобнее находить не величины F_1 , F_2 , g , l , а асимптотику функций $q_1(z)$, $q_2(z)$ и $y_{cp}(z)$. Тогда величины g , l находятся по точкам пересечения линий $q_1(-\infty)$, $q_1(+\infty)$ и $q_2(-\infty)$, $q_2(+\infty)$, а фокусное расстояние равно

$$1/F_1 = -q'_1(+\infty)/g; \quad 1/F_2 = -q'_2(-\infty)/l. \quad (2.59)$$

§ 3. Учет aberrаций в схеме Гринберга

Для нахождения величины aberrаций в уравнении (2.35) необходимо учитывать высшие члены разложения по r , т. е. ширину пучка. Кроме того, при выводе уравнения (2.35) учитывалась только зависимость u от координат r , z , т. е. M, D, \mathcal{E} для всех частиц

предполагались одинаковыми. В реальном случае из-за нестабильности источников ионов, магнитного поля, наличия ионов разных сортов и т. д. необходимо учитывать явную зависимость u от величин $e, M, D, H_{\theta 0}, \mathcal{E}, \psi, \Phi$ и т. д. Если эти величины могут отклоняться от своих основных значений $e_0, M_0, D_0, \mathcal{E}_0, \psi_0, \Phi_0 \dots$ на величины $\delta e, \delta M, \delta \mathcal{E}, \delta \psi \dots$, то функцию u удобно представить в виде ряда Тейлора

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=1}^l \delta \lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right)^i u_0, \quad (2.60)$$

где $\delta \lambda_1 = \delta v$; $\delta \lambda_2 = \delta D$ и т. д.

В том случае, когда величины $\delta M/M_0, \delta D/D_0$ достаточно малы, можно ограничиться первыми членами ряда (2.60).

Подставив потенциал u в виде (2.60) в уравнение (2.32) и повторив описанную ранее процедуру вывода, удерживая члены до второго порядка малости включительно, получим уравнение Г. А. Гринберга с учетом аббераций первого и второго порядков. После замены переменных (2.37) это уравнение запишем в виде*

$$\begin{aligned} \zeta'' + \omega^2 \zeta = & \frac{u^{-3/4}}{2} \left(\frac{2}{\rho} - \frac{\partial}{\partial n} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k + \frac{1}{2u} \left[\zeta f_1 - 2\zeta'' \frac{u'}{u} - \right. \\ & \left. - \zeta' \left(\frac{d}{ds} - \frac{1}{4} \cdot \frac{u'}{u} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k \right] + \frac{u^{-5/4}}{2} \left[\zeta^2 f_2 + \frac{\delta u}{\rho} \zeta \zeta'' + \right. \\ & \left. + \zeta \zeta' f_3 + \zeta'^2 \frac{2u}{\rho} \right] + \frac{u^{-3/4}}{2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right) \left(\frac{2u}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right] \delta \lambda_i \delta \lambda_k. \quad (2.61) \end{aligned}$$

Здесь

$$\zeta = \left(\frac{u}{u_0} \right)^{1/4} \rho; \quad \omega^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{u''}{u} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta u}{u} + \frac{3}{16} \cdot \frac{u'^2}{u^2} + \frac{2}{\rho^2}; \quad (2.62a)$$

$$f_1 = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{u''}{2u} - \frac{2}{\rho^2} - \frac{5}{8} \cdot \frac{u'^2}{u^2} - \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial n}; \quad (2.62б)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & \frac{\Delta u}{\rho} - 3 \frac{u''}{\rho} + \frac{8u}{\rho^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial n^3} + \frac{19}{8} \cdot \frac{u'^2}{u\rho} - \\ & - \frac{1}{4} \cdot \frac{u'}{u} \cdot \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho} u'; \quad (2.62в) \end{aligned}$$

$$f_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} - \frac{4u}{\rho} - \frac{2\rho'}{\rho} u. \quad (2.62г)$$

В уравнении (2.61) предполагается суммирование по одинаковым индексам.

* Для простоты полагаем $H_{\theta} = 0$.

Решение уравнения (2.61) ищем в виде ряда членов первого и второго порядков малости

$$\zeta = \zeta_i \delta \lambda_i + \zeta_{ij} \delta \lambda_i \delta \lambda_j, \quad (2.63)$$

где $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$; ζ_i, ζ_{ij} — величины нулевого порядка. Члены с $i, j = 0$ соответствуют разбросу радиальной компоненты скорости, т. е. $\delta \lambda_0 \approx \delta v_{r0}$, а значения $i, j \neq 0$ — значениям $\delta \lambda_i \approx \delta m, \delta \mathcal{E}, \dots; \delta \lambda_{ij} \approx \delta m p, \delta m \delta \mathcal{E}, \delta \mathcal{E}^2, \dots$

Подставляя (2.63) в уравнение (2.61) и собирая члены одного порядка, получаем цепочку зацепляющихся уравнений типа

$$\zeta_i'' + \omega^2 \zeta_i = F_i, \quad (2.64a)$$

$$\zeta_{ij}'' + \omega^2 \zeta_{ij} = F_{ij}, \quad (2.64б)$$

где $i, j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$;

$$F_0 = 0; F_i = \frac{u^{-3/4}}{2} \left(\frac{2}{\rho} - \frac{\partial}{\partial n} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda_i} \text{ при } i \neq 0; \quad (2.65a)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} = & \frac{1}{2u} \left[\zeta_i f_1 - 2\zeta_i'' \frac{u'}{u} - \zeta_i' \left(\frac{d}{ds} - \frac{1}{4} \cdot \frac{u'}{u} \right) \frac{du}{d\lambda_i} \right] + \\ & + \frac{u^{-5/4}}{2} \left\{ (2 - \Delta(i-j)) \zeta_i \zeta_j f_2 + \left[\frac{8u}{\rho} (\zeta_i \zeta_j'' + \zeta_i'' \zeta_j) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\zeta_i \zeta_j' + \zeta_i' \zeta_j) f_3 \right] \frac{1}{1 + \Delta(i-j)} + (2 - \Delta(i-j)) \zeta_i' \zeta_j' \frac{2u}{\rho} \right\} + \\ & + \frac{u^{-3/4}}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \right] \left(\frac{2u}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial n} \right). \quad (2.65б) \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее систему уравнений (2.64). Первое уравнение системы ($F_0 = 0$) определяет геометрическую фокусировку первого порядка. Это уравнение однородное, и если можно найти его линейно независимые решения η_1, η_2 , то решение остальных уравнений можно записать в виде

$$\zeta_i = -\eta_2 \int_0^s ds \eta_1 F_i + \eta_1 \int_0^s ds \eta_2 F_i; \quad (2.66a)$$

$$\zeta_{ij} = -\eta_2 \int_0^s ds \eta_1 F_{ij} + \eta_1 \int_0^s ds \eta_2 F_{ij}. \quad (2.66б)$$

Решение (2.66a) дает значения аббераций первого порядка. Очевидно, абберации первого порядка полностью определены, если известны решения однородного уравнения и функция F_i . При вычислении аббераций второго порядка необходимо учитывать, что функции F_{ij} содержат ζ_i для аббераций первого порядка, т. е. уравнения аббераций второго порядка связаны с уравнениями аббераций первого порядка. Таким образом, цепочка уравнений (2.64) является зацепляющейся.

§ 4. Гармонические системы с эквипотенциальной основной траекторией

1. Вид основных траекторий. Для примера использования уравнений типа Г. А. Гринберга (2.35) рассмотрим гармонические фокусирующие системы, для которых справедливо условие (2.39б).

Из уравнения (2.35) следует, что задание величин $u(s)$ и $\Delta u(s)$ позволяет найти кривизну основной траектории $\rho(s)$. Затем с помощью (2.36) можно определить явный вид основной траектории, т. е. функцию $r(z)$. В общем случае для определения $\rho(s)$ при заданных полях необходимо решать дифференциальное уравнение. Однако существуют два частных случая, когда дифференциальное уравнение для определения $\rho(s)$ вырождается в алгебраическое. Первый случай описан в [28] и относится к задаче о движении пучка частиц в «плоских» магнитных полях ($\mathbf{E} = 0$). Второй случай реализуется при движении пучка частиц с основной траекторией, совпадающей с эквипотенциалью $u = \text{const}$ [29]. Разберем эту задачу подробнее.

Так как при движении по эквипотенциали скорость частиц не меняется, то можно без ограничения общности считать, что $u = -\mathcal{E}_0$, $\psi = 0$. Чтобы найти величину Δu , предположим, что

$$\Phi = (\kappa/R)\psi + 0(\psi^2), \quad (2.67)$$

где κ — безразмерная постоянная; R — характерное расстояние от оси симметрии до основной траектории. Тогда, полагая $H_\theta = 0$ и пользуясь уравнением равновесия (2.32), получаем

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\frac{e^2}{2Mc^2} \cdot \frac{\psi^2}{r^2} + e \frac{\kappa}{R} \psi \right] = \frac{4\mathcal{E}_0^2 R^2}{Mc^2 r^2 \rho^2 \kappa^2} - \frac{\cos \alpha}{r\rho} 2\mathcal{E}_0. \quad (2.68)$$

Считая систему гармонической, т. е. $\zeta = \sin(\pi/L)s$, и полагая $L = 1$, после подстановки (2.68) в (2.33) получаем алгебраическую связь ρ , r , α :

$$\pi^2 = \frac{2}{\rho^2} + \frac{v_0^2}{r^2 (\kappa^2/R^2) c^2 \rho^2} - \frac{\cos \alpha}{r\rho}. \quad (2.69)$$

Если учесть, что

$$eE = -\frac{c\kappa}{R} rH = \frac{Mv_0^2}{\rho}, \quad (2.70)$$

где v_0 — скорость движения иона по основной траектории, соотношения (2.69) можно записать в более компактном виде

$$\pi^2 = \frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{R_{\Lambda i}^2} - \frac{\cos \alpha}{r\rho}; \quad R_{\Lambda i} = \frac{v_0 Mc}{eH}. \quad (2.71)$$

Совместно с геометрическими уравнениями (2.36) уравнение (2.71) полностью определяет вид основной траектории. В правую часть (2.71) входят три члена разного физического происхождения. Первый из них связан с фокусировкой во внешнем электрическом поле (фокусировка Юза — Рожанского), второй — в магнитном (фокусировка Буша), третий — с фокусировкой в поле объемного заряда. Таким образом, выражение (2.71) определяет вид основной траектории при некотором «смешанном» типе фокусировки, переходящем в пределе в известные случаи.

Проследим трансформацию вида основной траектории при изменении соотношения величин указанных трех членов уравнения (2.71). Решая уравнение (2.69) относительно ρ , получаем

$$\frac{1}{\rho_{\pm}} = \frac{\frac{\cos \alpha}{r} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{r^2} + 4\pi^2 \left(2 + \frac{v_0^2 R^2}{r^2 \kappa^2 c^2} \right)}}{2 \left(2 + \frac{v_0^2 R^2}{r^2 \kappa^2 c^2} \right)}. \quad (2.72)$$

Знак (\pm) в индексе у ρ соответствует знаку перед корнем. Видно, что при заданных α , v_0 , κ , R через каждую точку плоскости проходят две кривые ρ_+ и ρ_- , отличающиеся при $\cos \alpha > 0$ величиной и знаком радиуса кривизны. Однако заметим, что

$$\rho_+(\alpha, r) = -\rho_-(\alpha + \pi, r), \quad (2.73)$$

и можно заключить, что оба множества кривых тождественны, но отличаются направлением обхода.

Переходя к расчету основных траекторий, рассмотрим сначала предельный случай $H \rightarrow 0$ ($R_{\Delta i} \rightarrow \infty$), предполагая, что магнитное поле все же достаточно велико для удержания объемного заряда. Как мы уже отмечали, в предельном случае $r \rightarrow \infty$ осуществляется фокусировка Юза — Рожанского с $\rho_0 = \sqrt{2}/\pi$. При больших, но конечных r отношение ρ_0/R можно считать малой величиной. Тогда

$$\rho = \rho_+ = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\pi 2\sqrt{2}R} \right). \quad (2.74)$$

Подставив (2.74) в (2.36) и проинтегрировав, найдем явный вид основной траектории в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} r &= R + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{8\pi^2 R}; \\ z &= -\frac{\alpha}{4\pi^2 R} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{8\pi^2 R}. \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Видно, что траектория имеет трохоидаальный характер.

Кривые с произвольными значениями r рассчитаны на ЭВМ. Они изображены на рис. 13, а. Для сравнения здесь же показаны основные траектории для случая фокусировки некомпенсированного пучка, т. е. для потенциала Φ , удовлетворяющего уравнению Лапласа (рис. 13, б).

В общем случае, когда магнитное поле велико и его влиянием пренебречь нельзя, исследование вида основной траектории также

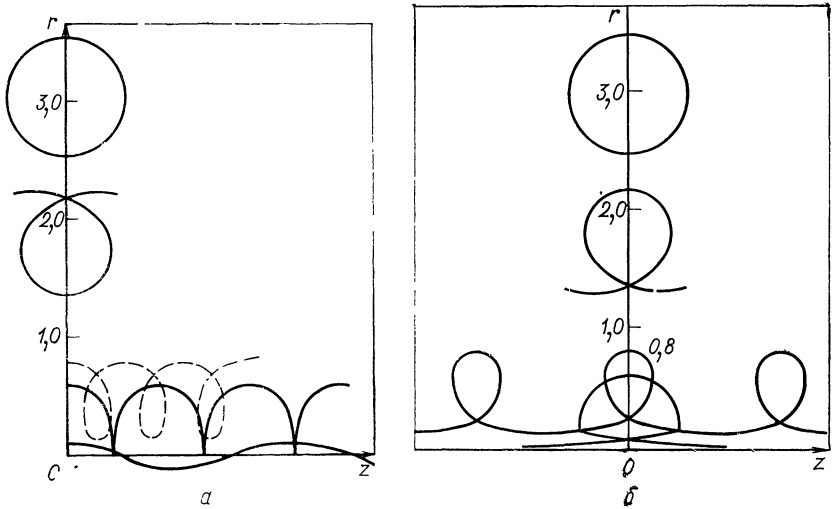


Рис. 13.

можно сделать в предельном случае аналитически. Например, возьмем в качестве нулевого приближения ρ_0 , определенное соотношением ($R \rightarrow \infty$)

$$\rho_0^2 = \frac{1}{\pi^2} \left(2 + \frac{v_0^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\kappa^2} \right), \quad (2.76)$$

и предположим, что

$$r = R - \rho_0 \cos \alpha, \quad (2.77)$$

тогда получим

$$\rho = \frac{\cos \alpha}{2\pi^2 R} \left[2 \frac{v_0^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\kappa^2} - 1 \right] + \rho_0 = \frac{\cos \alpha}{2\pi^2 R} \left[2 \frac{v_0^2}{v_{др}^2} - 1 \right] + \rho_0, \quad (2.78)$$

где $v_{др}$ — дрейфовая скорость $|v_{др}| = c |\kappa|$.

Таким образом, при больших r имеем три случая, показанные на рис. 14, а. Эти случаи соответствуют соотношениям

$$v_0/v_{др} = 1/\sqrt{2}; \quad v_0/v_{др} < 1/\sqrt{2}; \quad v_0/v_{др} > 1/\sqrt{2}.$$

Кривые при конечных значениях r , как и раньше, рассчитывались на ЭВМ (рис. 14, б).

2. Аберрации гармонических систем. Найдем значения аберраций первого порядка гармонических систем с эквипотенциальной основной траекторией. Так как $u = -\mathcal{E}_0$, то величина ζ совпадает

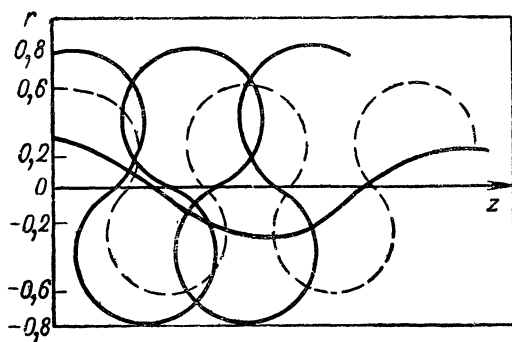
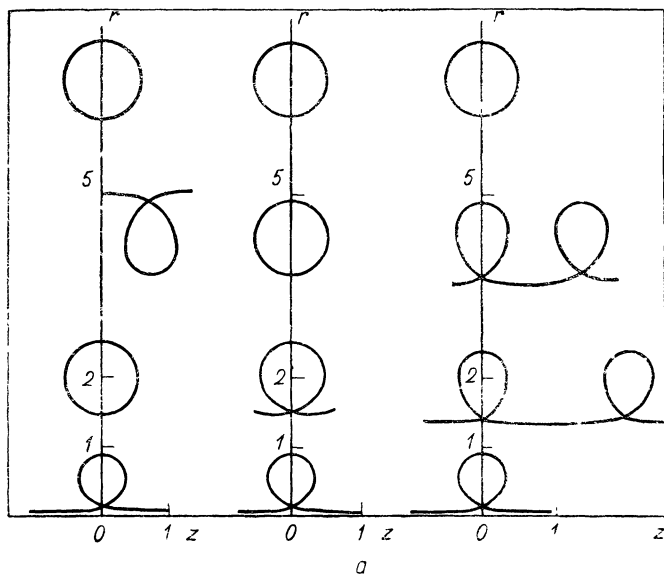


Рис. 14.

с p [см. формулу (2.37)]. В этом случае первое уравнение системы (2.64) имеет вид

$$p_0'' + (\pi^2/L^2)p_0 = 0, \quad (2.79a)$$

а его решения (при $L = 1$)

$$\eta_1 = \sin \pi z; \quad \eta_2 = \cos \pi z. \quad (2.79б)$$

Тогда aberrации первого порядка в точке фокусировки будут в соответствии с (2.66) равны

$$\delta p_k = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\mathcal{E}_0} \int_0^1 \left(\frac{2}{\rho} - \frac{\partial}{\partial n} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k \sin \pi s ds. \quad (2.80)$$

Остановимся сначала на моментной aberrации, обязанной разбросу величины момента D . Полагая $D = D_0 + \delta D$ и учитывая, что D_0 можно без ограничения общности считать равным нулю, получаем с точностью до членов, линейных по δD ,

$$\frac{\partial u}{\partial D} = -\frac{e}{c} \cdot \frac{\Psi}{Mr^2} \Big|_{\Psi=0} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{\partial u}{\partial D} = \frac{2e}{c} \cdot \frac{R}{Mr^2} \cdot \frac{\mathcal{E}_0}{e\rho\kappa}. \quad (2.81)$$

Подставив (2.81) в (2.80), найдем

$$\delta p_D = \frac{R\delta D}{\pi M c \kappa} \int_0^1 \frac{\sin \pi s}{r^2 \rho} ds. \quad (2.82)$$

В общем случае этот интеграл вычислить трудно, так как нет явного выражения для $r(s)$ и $\rho(s)$. Поэтому запишем его значение для окружности ($r \rightarrow \infty$) и квазитрохоидальной траектории. Учитывая, что $\delta D = Mr_0 v_{\theta 0}$, $v_{др} = -\kappa$, и полагая начальный радиус $r_0 = R$, имеем

$$\delta p_D = -\frac{v_{\theta 0}}{v_{др}} \cdot \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{2}{\pi^2} \left[1 + \left(2 \frac{\rho_0}{R} - a \right) \pi^2 \frac{1 + \cos \frac{1}{\rho_0}}{\pi^2 - \frac{1}{\rho_0^2}} \right], \quad (2.83a)$$

где $a = \frac{1}{2\pi^2 R \rho_0} \left[2 \frac{v_0^2}{v_{др}^2} - 1 \right]$, а ρ_0 определено формулой (2.76).

Если же $R \rightarrow \infty$, то

$$\delta p_D = -\frac{v_{\theta 0}}{v_{др}} \cdot \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{2}{\pi^2}. \quad (2.83b)$$

Перейдем теперь к расчету хроматической aberrации, обязанной разбросу продольной компоненты скорости. В этом случае

$$\partial u / \partial \mathcal{E}_0 = -1 = \text{const}; \quad (\partial / \partial n)(\partial u / \partial \mathcal{E}_0) = 0. \quad (2.84)$$

Подставляя эти выражения в (2.80), находим

$$\delta p_{\mathcal{E}} = \frac{\delta \mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \pi s}{\rho} ds. \quad (2.85)$$

В тех же частных случаях, что и ранее рассмотренные, получим:

$$\delta p_{\mathcal{E}} = \frac{\delta \mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0} \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\rho_0} \left[1 - \frac{\pi^2}{2} a \frac{1 + \cos(1/\rho_0)}{\pi^2 - (1/\rho_0^2)} \right]; \quad (2.86a)$$

$$\delta p_{\mathcal{E}} = \frac{\delta \mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0} \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\rho_0}, \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.86b)$$

Если поток частиц при одинаковой энергии и нулевой азимутальной скорости содержит отличные по массе ионы, то при небольшой разнице масс частиц основная траектория не изменится. Это очевидно, если учесть, что

$$\frac{\partial u}{\partial M} = -\frac{1}{M} \cdot \frac{\psi^2}{2Mr^2} \Big|_{\psi=0} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{\partial u}{\partial M} \Big|_{\psi=0} = 0. \quad (2.87)$$

Таким образом, поперечная aberrация по массам пренебрежимо мала. В то же время длина фокусировки изменится, т. е. продольная aberrация конечна.

При корректном расчете изменения длины фокусировки необходимо учитывать не только aberrации первого порядка, но и второго. Поясним это на простом примере цилиндрического конденсатора

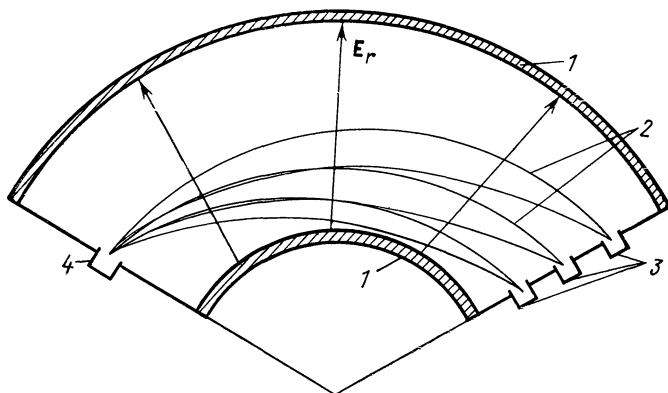


Рис. 15.

тора (фокусировка Юза — Рожанского), который является, как отмечалось выше, частным случаем изучаемых гармонических систем. На рис. 15 показаны траектории ионов 2 различных энергий, выходящих из источника 4 и фокусирующихся в приемниках 3. Электрическое поле создается разностью потенциалов на обкладках 1.

Уравнения движения частиц в цилиндрическом конденсаторе имеют вид

$$\vec{r} = (v_{\theta}^2/r) + (e/M) E_0 (R_0/r); \quad (2.88a)$$

$$Mrv_{\theta} = MR_0v_{\theta 0} = \text{const}, \quad (2.88b)$$

где R_0 — радиус основной траектории; E_0 — напряженность электрического поля при $r = R_0$.

Очевидно, круговая траектория радиуса R_0 будет основной если выполнено условие равновесия

$$(v_{\theta 0}^2/R_0) + (e/M)E_0 = 0. \quad (2.89)$$

Здесь $v_{\theta 0}$ — скорость частиц на равновесной траектории.

Будем считать, что существует разброс по начальной скорости, пропорциональный δv_{θ} , и найдем величины сферической и хроматической аббераций первого и второго порядков. Для параксиального пучка представим r в виде

$$r = R_0 + y, \quad (2.90)$$

где y — величина первого порядка малости.

Заменив производные по времени в (2.88) на производную по полярному углу θ и разложив входящие в уравнение величины, зависящие от r и v_{θ} , по степеням y и δv_{θ} , удержим члены до второго порядка малости включительно. В результате получим уравнение движения с учетом аббераций второго порядка

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + 2y = 2\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{R_0} - 3\frac{y^2}{R_0} + 2\frac{\delta\lambda_1}{v_{\theta 0}} R_0 + 6y \frac{\delta\lambda_1}{v_{\theta 0}} - 3\frac{R_0}{v_{\theta 0}^2} \delta\lambda_1^2. \quad (2.91)$$

Здесь $\delta\lambda_1$ обозначена величина δv_{θ} (см. гл. 2, § 3). Как и в § 3, будем искать решение в виде ряда

$$y = y_0\delta\lambda_0 + y_1\delta\lambda_1 + y_{00}\delta\lambda_0^2 + y_{01}\delta\lambda_0\delta\lambda_1 + y_{11}\delta\lambda_1^2, \quad (2.92)$$

где $\delta\lambda_0$ — величина первого порядка малости (пропорциональная y или p). Подставляя (2.92) в (2.91), получаем, собирая члены одного порядка, цепочку уравнений:

$$y_0'' + 2y_0 = 0; \quad (2.93a)$$

$$y_1'' + 2y_1 = 2R_0; \quad (2.93б)$$

$$y_{00}'' + 2y_{00} = 2(y_0')^2(1/R_0) - 3y_0^2(1/R_0); \quad (2.93в)$$

$$y_{01}'' + 2y_{01} = 4y_0'y_1(1/R_0) - 6y_0y_1(1/R_0) + 6y_0; \quad (2.93г)$$

$$y_{11}'' + 2y_{11} = 2(y_1')^2(1/R_0) - 3y_1^2(1/R_0) + 6y_1 - 3R_0. \quad (2.93д)$$

Структура уравнений здесь та же, что и в системе (2.64) (см. § 3).

Решая систему (2.93) с учетом формул (2.66), находим величину y с точностью до членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned} y = & R_0 \delta\lambda_0 \sin\sqrt{2}\theta + R_0 v_{\theta 0} \delta\lambda_1 (1 - \cos\sqrt{2}\theta) + \\ & + R_0 v_{\theta 0}^2 \delta\lambda_1^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{2} \cos 2\sqrt{2}\theta \right) - \frac{7}{6} R_0 v_{\theta 0} \delta\lambda_0 \delta\lambda_1 \sin\sqrt{2}\theta + \\ & + R_0 \delta\lambda_0^2 \frac{8}{3\sqrt{2}} (\cos\sqrt{2}\theta - 1 - \frac{1}{16} \sin\sqrt{2}\theta \sin 2\sqrt{2}\theta). \quad (2.94) \end{aligned}$$

Из (2.94) следует, что изменение начальной скорости приводит к появлению поперечных aberrаций, но не меняет длину фокусировки в первом порядке по $\delta\lambda_1$. Заметим, что при выводе уравнения (2.93г) необходимо в уравнении (2.91) учитывать члены порядка $\delta\lambda_0^2$, которые, на первый взгляд, не влияют на величину хроматической aberrации. Однако если мы запишем уравнение движения (2.91) без учета квадратичных по $\delta\lambda_0$ членов, то получим

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} - \left(1 + 3 \frac{e}{M} \cdot \frac{E_0 R_0}{v_{\theta 0}^2} \right) y = 0.$$

В этом уравнении специально не использованы еще условия равновесия и нет разложения по степеням $\delta\lambda_1$. Из уравнения следует, что изменение v_0 приводит к изменению длины фокусировки, а это противоречит полученному выше результату.

Таким образом, при вычислении aberrаций второго порядка и длины фокусировки необходимо учитывать члены порядка $\delta\lambda_0^2$.

§ 5. Приближение «слабых» полей для линз

1. Общие соотношения. Диоптрика Гаусса описывает свойства линз с ограниченной по z протяженностью полей, если известны кардинальные элементы линзы. В нашем случае для этого достаточно знать асимптотику функций $q_1(z)$, $q_2(z)$ и $y_{ср}$, однако поскольку эти функции определены граничными условиями, для нахождения асимптотики этих функций необходимо знать решение уравнения (2.57) при всех z . К сожалению, найти точное решение уравнения (2.57), как правило, не удастся. Поэтому при исследовании фокусирующих свойств приходится прибегать к какому-либо способу приближенного вычисления. Воспользуемся приближением «слабых» полей. В этом методе в качестве малого параметра выступает отношение изменения скорости частицы δv в линзе к ее полной скорости v_0 :

$$\mu = (\delta v/v_0) \ll 1. \quad (2.95)$$

Поэтому можно искать решение уравнения (2.41) или его упрощенных вариантов (2.50) и (2.51) в виде рядов по обратным степеням v_0 :

$$r = r_0 + (1/v_0)r_1 + (1/v_0^2)r_2 + \dots \quad (2.96)$$

Если записать уравнение (2.41) в интегро-дифференциальной форме

$$r(z) = r(z_0) + r'(z_0)(z - z_0) - \int_{z_0}^z dz_1 \int_{z_0}^{z_1} \left[\frac{1+r'^2}{(-2u)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r' \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \left(\frac{eH_\theta}{Mc} \right)^2 \frac{(1+r'^2)^{3/2}}{\left(\frac{-2u}{M} \right)^{1/2}} \right] dz_3 \quad (2.97a)$$

и учесть, что

$$\frac{1}{\left(-\frac{2u}{M}\right)} = \frac{1}{v_0^2 - \frac{2}{M}U} = \frac{1}{v_0^2} \left(1 + \frac{2U}{Mv_0^2} + \dots\right), \quad (2.97б)$$

то при условии (2.95) видна малость поправки к прямолинейному движению, обязанной взаимодействию с полем линзы. Нетрудно видеть, что поправка будет пропорциональна $1/v_0^2$, если $H_\theta = 0$, и пропорциональна $\frac{1}{v_0}$, если $H_\theta \neq 0$. Ниже мы рассмотрим случай $H_\theta = 0$.

Уравнение (2.97а) имеет вид

$$y(z) = y(z_0) + y'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon \int_{z_0}^z dz_1 \int_{z_0}^{z_1} dz_2 f(y, z_2), \quad (2.98)$$

где ε — малый параметр. Подставляя сюда $y(z)$ в виде ряда

$$y(z) = y_1(z) + \varepsilon y_2(z) + \varepsilon^2 y_3(z) + \dots, \quad (2.99а)$$

где $y_1(z) = y(z_0) + y'(z_0)(z - z_0)$, находим выражения для $y_n(z_0)$:

$$\left. \begin{aligned} y_2(z) &= \int_{z_0}^z dz_1 \int_{z_0}^{z_1} dz_2 f(y_1, z_2); \\ y_3(z) &= \int_{z_0}^z dz_1 \int_{z_0}^{z_1} dz_2 \frac{\partial f(y_2, z_2)}{\partial y_2} y_2(z_2); \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.99б)$$

Таким образом, в приближении «слабого» поля решение уравнения (2.97а) сводится к квадратурам.

Применим метод «слабого» поля для определения функций q_1 , q_2 , $y_{ср}$, входящих в (2.55), взяв за основу линеаризованное уравнение (2.51)* при $H_\theta = 0$.

В этом случае коэффициенты a , b , c [см. формулу (2.52)] можно с учетом (2.97б) записать в виде

$$a = \frac{a_1}{v_0^2} + \frac{a_2}{v_0^4} + \dots = \frac{1}{v_0^2} \left(-\frac{1}{M} \frac{dU_0}{dz}\right) + \frac{1}{v_0^4} \left(-\frac{2U_0}{M^2} \cdot \frac{dU_0}{dz}\right) + \dots; \quad (2.100а)$$

$$b = \frac{b_1}{v_0^2} + \frac{b_2}{v_0^4} + \dots = \frac{1}{v_0^2} \left(\frac{U_2}{M}\right) + \frac{1}{v_0^4} \left(\frac{2}{M^2} (U_1^2 + U_0 U_2)\right) + \dots; \quad (2.100б)$$

$$c = \frac{c_1}{v_0^2} + \frac{c_2}{v_0^4} + \dots = \frac{1}{v_0^2} \left(\frac{1}{M} U_1\right) + \frac{1}{v_0^4} \left(\frac{2}{M^2} U_1 U_0\right) + \dots \quad (2.100в)$$

* Уравнение для осевых линз (2.49) является по форме частным случаем (2.51) при $a = 0$.

Функции q_1 и q_2 представляют собой решение однородного уравнения (2.51)

$$q'' + aq' + bq = 0, \quad (2.101)$$

удовлетворяющего граничным условиям (2.56b).

Для того чтобы воспользоваться формулами (2.99), запишем уравнение (2.101) в виде

$$q_1 = 1 - \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 \left[\left(\frac{a_1}{v_0^2} + \frac{a_2}{v_0^4} + \dots \right) q_1' + \left(\frac{b_1}{v_0^2} + \frac{b_2}{v_0^4} + \dots \right) q_1 \right]. \quad (2.102a)$$

Это выражение написано для q_1 . Для q_2 оно будет аналогичным с точностью до пределов интегрирования:

$$q_2 = 1 - \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 \left[\left(\frac{a_1}{v_0^2} + \frac{a_2}{v_0^4} + \dots \right) q_2' + \left(\frac{b_1}{v_0^2} + \frac{b_2}{v_0^4} + \dots \right) q_2 \right]. \quad (2.102b)$$

Решение (2.102a) можно записать в виде

$$q_1 = q_{10} + q_{11} + q_{12} + \dots, \quad (2.103)$$

где

$$q_{10} = 1; \quad (2.104a)$$

$$q_{11} = -\frac{1}{v_0^2} \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 b_1; \quad (2.104b)$$

$$q_{12} = -\frac{1}{v_0^4} \left[\int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 b_2 - \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 a_1 \int_{-\infty}^{z_2} dz_3 b_1 - \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 b_1 \int_{-\infty}^{z_2} dz_3 \int_{-\infty}^{z_3} dz_4 b_1 \right]. \quad (2.104b)$$

Подобным образом можно записать выражение для q_2 .

Перейдем к определению функции $y_{ср}$. Эта функция в отличие от q_1 и q_2 определяется граничными условиями (2.56a) и поэтому ее нельзя вычислить методом Коши, т. е. решение (2.99) в данном случае непригодно. Однако эту функцию по-прежнему можно искать в виде ряда

$$y_{ср} = y_{ср.0} + \varepsilon y_{ср.1} + \dots; \quad \varepsilon \equiv 1/v_0^2, \quad (2.105)$$

где последующие члены быстро убывают с ростом v_0 , а первый член $y_{ср.0}$ можно считать постоянным.

Запишем опять уравнение (2.51) в интегральной форме, но теперь уже с учетом свободного члена $c(z)$. При условии (2.56а) получим

$$y_{\text{ср}} = y_{\text{ср}}(-\infty) - \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 (ay'_{\text{ср}} + by_{\text{ср}} + c); \quad (2.106a)$$

$$y'_{\text{ср}}(z) = - \int_{-\infty}^z dz_1 (ay'_{\text{ср}} + by_{\text{ср}} + c). \quad (2.106б)$$

Мы записали здесь формулу для $y'_{\text{ср}}$, так как второе граничное условие на эту функцию задается при $z = +\infty$.

Подставляя в (2.106) разложение (2.105) и учитывая, что $y_{\text{ср},0} \equiv \equiv \text{const}^*$, получаем следующее уравнение для определения этой величины:

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (b_1 y_{\text{ср},0} + c_1) dz. \quad (2.107a)$$

Отсюда имеем [см. формулу (2.100)]

$$y_{\text{ср},0} = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} c_1 dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} b_1 dz} = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} U_1 dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} U_2 dz}, \quad (2.107б)$$

причем $y_{\text{ср},0}$, как следует из (2.107б), при $H_\theta = 0$ не зависит от массы и скорости частиц, т. е. цилиндрическая поверхность, определяемая $y_{\text{ср},0}$ для «тонких» линз, — это точный аналог оптической оси осевых линз. Зная $y_{\text{ср},0}$ и подставляя его в (2.106а), находим уточненное значение $y_{\text{ср},1}$:

$$\begin{aligned} y_{\text{ср},1} &= y_{\text{ср},1}(-\infty) - \frac{1}{v_0^2} \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 (b_1 y_{\text{ср},0} + c_1) \equiv \\ &\equiv y_{\text{ср},1}(-\infty) + \tilde{y}_{\text{ср},1}. \end{aligned} \quad (2.108a)$$

Здесь $y_{\text{ср},1}(-\infty)$ можно определить из условия

$$y'_2(+\infty) = 0. \quad (2.109)$$

Представим $y_{\text{ср},1}(-\infty)$ в виде

$$y_{\text{ср},1}(-\infty) = y_{\text{ср},0} + \delta y_1. \quad (2.108б)$$

* Очевидно, $y_{\text{ср}} = y_{\text{ср},0}$ при $\varepsilon = 0$, но в этом случае $v_0 \rightarrow \infty$ и траектория не возмущается.

Подставляя (2.108б) в (2.106б) и учитывая (2.109), получаем выражение для δy_1 :

$$\delta y_1 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dz (a_1 \tilde{y}'_{\text{ср.1}} + b_1 \tilde{y}_{\text{ср.1}} + c_1)}{\int_{-\infty}^{+\infty} b_1 dz}. \quad (2.110)$$

В частном случае осевых линз выписанные выражения упрощаются, так как в силу (2.53) при $R \rightarrow \infty$ $U_0(z)$ и $U_1(z)$ тождественно равны нулю. Поэтому в данном случае

$$q_1 = 1 - \frac{1}{Mv_0^2} \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 U_2 - \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 U_2 \int_{-\infty}^{z_2} dz_3 \int_{-\infty}^{z_3} dz_4 U_4; \quad (2.111)$$

$$y_{\text{ср}} = 0. \quad (2.112)$$

2. Фокусное расстояние линз. Зная функции q_1, q_2 , выведем теперь формулы для фокусных расстояний линз, исходя из соотношений (2.59). Для этого надо получить явное выражение для $q'_1(+\infty)$; $q'_2(-\infty)$; g ; l .

Рассмотрим для определенности «правый фокус», т. е. найдем q'_1 и g . Для общности запишем однородное уравнение (2.101) в виде

$$q''_1 = f(q_1, q'_1, z) \equiv f_1(q_1, z). \quad (2.113)$$

Точное решение (2.113), очевидно, равно

$$q_1(z) = 1 + \int_{-\infty}^z dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 f_1(q_1, z_2), \quad (2.114)$$

отсюда

$$q'_1(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz f_1(q_1, z). \quad (2.115)$$

Далее, из (2.57а) следует формула для g :

$$g = \lim_{z \rightarrow \infty} [q_1 - z (dq_1/dz)]. \quad (2.116)$$

Подставляя (2.114) и (2.115) в (2.116), получаем после простых преобразований

$$g = 1 + \int_{-\infty}^0 dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 f(z_2, q_1) - \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} dz_2 f(z_2, q_1). \quad (2.117)$$

Таким образом, искомая формула для F_1 имеет следующий вид:

$$\frac{1}{F_1} = - \frac{q'_1(+\infty)}{g} = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 f_1(z_1, q_1)}{1 + \int_{-\infty}^0 dz_1 \int_{-\infty}^z dz_2 f(z_2, q_1) - \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} dz_2 f(z_2, q_1)}. \quad (2.118a)$$

Аналогично находим формулу для F_2 :

$$\frac{1}{F_2} = - \frac{q'_2(-\infty)}{l} = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 f(z_1, q_2)}{1 + \int_{\infty}^0 dz_1 \int_{\infty}^{z_1} dz_2 f(z_2, q_2) - \int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 f(z_2, q_2)}. \quad (2.118б)$$

Если теперь подставим сюда разложение (2.104) и $f(z, q)$ в виде ряда по степеням v_0^2 , то получим фокусное расстояние также в виде ряда по степеням v_0^2 . Напишем этот ряд для F_1 :

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{Mv_0^2} W \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} A + 0 \left(\frac{1}{(Mv_0^2)^3} \right), \quad (2.119)$$

где

$$W = \int_{-\infty}^z U_2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} (U_{2H} + U_{2E}) dz = W_H + W_E; \quad (2.120a)$$

$$A = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} U_1^2 dz + 2 [U_0 W]_{-\infty}^{+\infty} - W \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W dz + \int_{-\infty}^{+\infty} W^2 dz - \int_{-\infty}^{+\infty} W U'_0 dz - W \Big|_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^0 W dz + \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} U_2 dz \right]. \quad (2.120б)$$

Формула для F_2 аналогична, только

$$W \rightarrow \dot{W} \equiv \int_{z_1}^{\infty} U_2 dz. \quad (2.120в)$$

Если фокусируемый пучок конечной ширины, то необходимо учитывать нелинейные члены в уравнении (2.50). Учет нелинейных членов уже проведен в § 3 настоящей главы при вычислении аберраций в схеме Г. А. Гринберга. Сейчас можно воспользоваться результатами этого параграфа. Решение параксиального уравнения (2.51) имеет вид (2.55). Считая это решение за нулевое приближение и записывая решение нелинейного уравнения (2.50) в форме (2.63),

получаем решение уравнения (2.50) с учетом нелинейных членов в виде (2.66). При вычислении фокусного расстояния предположим, что на линзу падает параллельный пучок ионов, приходящий из бесконечности со стороны отрицательных значений z . Тогда начальные условия имеют вид

$$y_{\text{макс}}(-\infty) = y_0; \quad y'_0(-\infty) = 0, \quad (2.121)$$

где $y_{\text{макс}}(-\infty)$ — максимальная ширина пучка при $z = -\infty$. Ограничившись для простоты линзами с $F \approx v_0^2$, получим в силу (2.118a) фокусное расстояние для F_1 :

$$\frac{1}{F_1} = -\frac{1}{Mv_0^2} W_1 \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad (2.122a)$$

где

$$W_1 = \int_{-\infty}^z \left(U_2 - \frac{y_0}{2} U_3 \right) dz. \quad (2.122b)$$

Из (2.122) видно, что при учете сферической aberrации фокусное расстояние зависит не только от формы полей линзы, но и от геометрии пучка. Формулы для фокусных расстояний осевых линз легко получить из (2.119), если учесть, что в осевых линзах $U_0 = U_1 = 0$. Тогда в осевых линзах

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{Mv_0^2} W \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} A + 0 \left(\frac{1}{Mv_0^2} \right)^3, \quad (2.123a)$$

где

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} W^2 dz + W \Big|_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W dz - \int_{-\infty}^0 W dz + \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} U_2 dz \right). \quad (2.123b)$$

При учете конечной ширины пучка (сферической aberrации) в осевых линзах нужно учитывать, что коэффициенты в (2.48) при кубических членах равны нулю, т. е. поправки на непараксиальность будут кубическими. Для линз с $F \approx v_0^2$, проводя вычисления аналогично сделанному выше, получаем фокусное расстояние для пучка конечной ширины в виде (2.122a), где

$$W_1 = \int_{-\infty}^{z_1} \left(U_2 - \frac{y_0^2}{12} U_4 \right) dz. \quad (2.124)$$

Всюду ниже будем называть линзу «тонкой», если ее фокусное расстояние с хорошей степенью точности определяется первым членом (2.119). Если же первый член в (2.119) обращается в нуль либо последующие члены разложения существенно влияют на величину F , то линзу будем называть «толстой».

Наконец, если фокусирующее действие линзы определяется совместным действием электрического и магнитного полей, то такую линзу будем называть электромагнитной. Любопытный вопрос,

касающийся электромагнитных линз, — это вопрос о «зацеплении» **E**-и **H**-фокусировок. Будем говорить, что фокусировки «не зацепляются», или независимы, если

$$1/F = (1/F_E) + (1/F_H). \quad (2.125)$$

Здесь F_E — фокусное расстояние линзы при $\mathbf{H} \rightarrow 0$; F_H — фокусное расстояние линзы при $\mathbf{E} = 0$. В противоположном случае, если равенство (2.125) не выполняется, будем говорить о «зацеплении» фокусировок.

Рассмотрим подробнее условие независимости **E**-, **H**-фокусировок в кольцевых линзах. Разделяя в коэффициентах разложения обобщенного потенциала u члены, связанные с электрическим и магнитным полями (2.120а), фокусное расстояние кольцевых линз запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_1} = & \left\{ \frac{1}{Mv_0^2} W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (W_H^2 - W_H U'_{0H} + 2U_{1H}^2) dz + \right. \right. \\ & + 2 [U_{0H} W_H]_{-\infty}^{+\infty} - W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_H dz - \\ & \left. \left. - W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^0 W_H dz + \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} U_{2H} dz_2 \right) \right] \right\} + \\ & + \left\{ \frac{1}{Mv_0^2} W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (W_E^2 + W_E U'_{0E} + 2U_{1E}^2) dz + \right. \right. \\ & + 2 [U_{0E} W_E]_{-\infty}^{+\infty} - W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_E dz - \\ & \left. \left. - W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^0 W_E dz + \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} U_{2E} dz_2 \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \left[4 \int_{-\infty}^{+\infty} U_{1E} U_{1H} dz - W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_H dz - \right. \\ & - W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_E dz + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_E W_H dz - \\ & \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} (W_E U'_{0H} + W_H U'_{0E}) dz \right] + \dots \quad (2.126) \end{aligned}$$

Здесь явно выделены слагаемые, связанные с полем **E**, полем **H**, и перекрестные члены с **E**, **H**. Видно, что в общем случае фокусное расстояние (2.126) нельзя представить в виде (2.125). Однако если скорость частиц достаточно велика и можно пренебречь членами порядка v_0^{-4} , т. е. линзу можно считать тонкой, то магнитная и

электрическая фокусировки оказываются независимы [см. условие (2.125)]. Если члены с v_0^{-2} равны нулю ($W|_{-\infty}^{+\infty} = 0$), то фокусное расстояние линзы $F \approx v_0$. Для «расщепления» **E**-, **H**-фокусировок в этом случае нужно специальным образом подбирать поля, чтобы уничтожить «перекрестные» члены, т. е. удовлетворить следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} W_E W_H dz = 0; & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_E \frac{dU_{0H}}{dz} dz = 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} W_H \frac{dU_{0E}}{dz} dz = 0; & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} U_{1E} U_{1H} dz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

Фокусное расстояние при выполнении условий (2.127) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} = \frac{1}{F_E} + \frac{1}{F_H} = \frac{1}{(Mv_0^2)^2} & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (W_E^2 - W_E U'_{0E} + 2U_{1E}^2) dz + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} (W_H^2 - W_H U'_{0H} + 2U_{1H}^2) dz \right]. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Если ввести функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f(z)$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} W_E W_H = f(z); & \quad \frac{f_1(z)}{W_H} U'_{0H} = f_1(z); \\ \frac{f(z)}{W_E} U'_{0E} = f_2(z), & \end{aligned} \right\} \quad (2.129)$$

то равенства (2.127) примут вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) dz = 0. \quad (2.130)$$

Отсюда видно, что структура полей, обеспечивающих расщепление фокусировок, определяется следующими уравнениями:

$$W_H = \frac{f(z)}{f_1(z)} U'_{0H}; \quad W_E = \frac{f(z)}{f_2(z)} U'_{0E}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} U_{1E} U_{1H} dz = 0. \quad (2.131)$$

Вследствие того что U_{0E} , U_{0H} , U_{1E} , U_{1H} , W_E и W_H в (2.131) связаны с видом **E**-, **H**- полей на ИП [см. формулы (2.53), (2.120)],

выражения (2.131) — это дифференциальные уравнения для определения вида ψ и Φ (ψ). На вид функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ накладывається единственное ограничение (2.130) и естественное требование гладкости, что позволяет подбирать эти функции наиболее удобным образом.

В частном случае $\psi_1 = 0$ для выполнения условий (2.127) можно взять функцию W_E симметричной, W_H — антисимметричной, Φ_0 (ψ_0) — симметричной. В этом случае фокусировка по полям E и H будет независимой [см. выражение (2.125)].

§ 6. О вариационной формулировке задач корпускулярной оптики

1. Критерий качества. Выше мы рассмотрели несколько конкретных методов расчета корпускулярных оптических систем. Эти методы, однако, оставляют чувство неудовлетворения по двум причинам. Во-первых, расчетам с помощью этих методов должна предшествовать процедура «угадывания» или априорного выбора общей схемы фокусирующего устройства. Во-вторых, разделение эффектов на собственно фокусировку и аберрации органически связано с парааксиальным приближением. В то же время парааксиальное приближение диктуется, как правило, не физическими соображениями, а просто расчетной схемой. Однако с точки зрения расчетов парааксиальное приближение оправдывает себя лишь в тех случаях, когда аберрации высоких порядков несущественны.

Мы уже видели выше, как громоздка и трудоемка процедура анализа аберраций даже второго порядка. Поэтому естественно искать пути отхода от классических методов расчета фокусирующих систем.

Физически очевидно, что последовательная формулировка задач корпускулярной оптики должна быть вариационной. Иными словами, она должна сводиться к отысканию экстремума некоторого функционала, характеризующего качество оптической системы. Разумеется, отыскание этого экстремума должно проводиться при тех или иных ограничениях (например, на величину используемых напряженностей полей).

Рассмотрим подробнее этот вопрос на примере сферической аберрации цилиндрической линзы. Пусть источником частиц служит бесконечно тонкая нить, помещенная в начале координат $x = y = 0$, выходя из которой, все ионы имеют одинаковую скорость v_0 . Нам надо собрать ионы в точке $x = L, y = 0$.

Очевидно, в общем случае получающееся изображение пучка будет иметь некую конечную ширину d . Величина d зависит, в частности, от ширины диафрагмы, вырезающей пучок, т. е. от максимальных углов — $\alpha_0, +\alpha_0$, в пределах которых выходят частицы из источника.

Если заданы длина фокусировки L и угол разброса α_0 , то задача состоит в том, чтобы подобрать такие поля, при которых $d = \min$.

Функционал для ширины изображения можно определить разными способами. Один из них следующий:

$$d^{2n} = \frac{1}{A} \int_0^L \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} a(\alpha) d\alpha dx (2ny^{2n-1} y') = \\ = \int_0^L \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q(\alpha, y, y') d\alpha dx, \quad y' \equiv \frac{dy}{dx}. \quad (2.132)$$

Здесь y — отклонение частицы от оси x ; $a(\alpha)$ — «весовая функция»; A — нормировочный множитель.

Выбор n , $a(\alpha)$ и A определяется конкретными требованиями к системе. Величина y , которая входит в (2.132), — это функция переменных x и α . Уравнение, определяющее y , следует из закона Ньютона, и его можно записать в виде

$$y'' = G(y', y, x, [f]). \quad (2.133)$$

Здесь $[f]$ — совокупность функций, определяющих электромагнитные поля в канале. В рассматриваемом плоском случае это будут три функции, заданные на ИП:

$$\psi(x)|_{y=0}; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0}; \quad \Phi(\psi). \quad (2.134)$$

Уравнение (2.133) второго порядка, и поэтому оно имеет две постоянные интегрирования

$$y|_{x=0} \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (2.135)$$

Поскольку вид $y(\alpha, x)$ зависит от $[f]$, запишем

$$y = y(x, \alpha, [f]),$$

и, следовательно, d есть функционал от f

$$d^{2n}[f] = \int_0^L \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q d\alpha dx. \quad (2.136)$$

Итак, задача сводится к отысканию минимума функционала (2.136) при добавочном условии (2.133). В рассматриваемом случае поле в объеме потока можно выразить с помощью указанных трех функций в виде рядов типа (2.42), (2.43), причем эта система уравнений должна быть дополнена интегральными соотношениями, связывающими Ψ , Φ с f .

Из сказанного видно, что попытка свести неким «лобовым» образом проблему корпускулярной оптики к стандартной по форме вариационной задаче приводит уже в простейшем случае к очень сложной системе.

Следует отметить, что сформулированная задача заведомо имеет решение $d = 0$ в случае, если допустимы поля с неограниченной

напряженностью. Поэтому для нахождения регулярного решения, возможно, потребуется выполнение некоторого условия «разумной» напряженности полей и их градиентов, например, в виде

$$\int b(\alpha) (E^2 + \alpha^2 H^2 + \beta^2 (\nabla E)^2 + \gamma^2 (\nabla H)^2) dx d\alpha = \text{const}. \quad (2.137)$$

В настоящее время не только нет каких-либо методов решения указанной выше вариационной задачи, по сути дела, даже нет ее серьезной формулировки. Поэтому наряду с необходимостью дальнейшего анализа и совершенствования общей аналитической формулировки вариационной проблемы важна разработка частных вариационных формулировок. Ниже приведена работа, в которой решена до конца численными методами одна специальная вариационная задача.

Мы уже отмечали выше, что сегодня большую роль играет предсказание первоначальной схемы фокусирующего устройства. Указанная выше задача о построении изображения нити без сферической аберрации была давно решена Л. А. Арцимовичем. Им показано, что если вдоль нити приложить однородное магнитное поле с напряженностью H_0 , а перпендикулярно к магнитному полю вдоль оси y — электрическое поле E_0 такой величины, чтобы выполнялись условия

$$\frac{2\pi}{\omega_H} c \frac{E}{H} = L; \quad \omega_H = \frac{eH}{Mc}, \quad (2.138)$$

то все частицы, выходящие из нити, встретятся в точке $x = L$, $y = 0$, независимо не только от угла α , но и от скорости частиц v_0 .

2. Метод Шапиро. Метод Шапиро позволяет оптимизировать параксиальную систему при условии, что известны выражения для аберраций. Этот метод приспособлен для численных расчетов с помощью ЭВМ.

Суть его в следующем. Как мы знаем, в уравнение Гринберга для узкого пучка входит несколько величин, которые характеризуют геометрию основной траектории, например, $p(s)$ -отклонение частиц от основной траектории, $r(s)$ и характеристики магнитных и электрических полей $\psi(s)$, $\Phi(s)$, ...

Все эти величины обозначим $\zeta_k(s)$. Тогда уравнение Гринберга можно записать в виде

$$\Gamma[\zeta_k(s)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.139)$$

Местоположению источника частиц пусть соответствует $s = 0$, а местоположению изображения — $s = L$.

Различного рода аберрации $\delta\zeta_i$ есть функционалы от ζ_k [см. формулу (2.66)]:

$$\delta\zeta_i = A_i[\zeta_k], \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.140)$$

Значения ζ_k при $s = 0$ и $s = L$ должны удовлетворять некоторым граничным условиям:

$$\hat{\gamma}_j [\zeta_k]_{s=0} = 0; \quad 1 \leq j \leq n_1 \leq n; \quad (2.141a)$$

$$\hat{\gamma}_j [\zeta_k]_{s=L} = 0; \quad 1 \leq j \leq n_2 \leq n, \quad (2.141б)$$

в том числе

$$p(0) = 0; \quad p(L) = 0. \quad (2.141в)$$

Идея метода сводится к следующему. Аппроксимируем величины $\zeta_k(s)$ конечными суммами $\tilde{\zeta}_k$ неких известных функций $\psi_{ki}(s)$:

$$\tilde{\zeta}_k(s) = \sum_{i=1}^{v_k} \alpha_{ik} \psi_{ki}(s). \quad (2.142)$$

Здесь α_{ik} — постоянная, которую надо найти. Подставляя (2.142) в (2.141), получаем $n_1 + n_2$ алгебраических уравнений для определения $n_1 + n_2$ коэффициентов α_{ki} .

Для нахождения остальных коэффициентов необходимо потребовать, во-первых, чтобы значение ζ_k , определяемое формулой (2.142), по возможности точнее удовлетворяло уравнению Гринберга (2.139), а во-вторых, минимизировало аберрацию (2.140). Эти требования можно свести к требованию минимизации функционала

$$F(\alpha_{ki}) = \int_0^L \hat{\Gamma}^2 [\tilde{\zeta}_k] ds + \sum_i^l q_i A_i^2 [\tilde{\zeta}_k]. \quad (2.143)$$

Здесь q_i — априори задаваемые коэффициенты.

Поскольку функционал (2.143) представляет собой некое алгебраическое выражение от α_{ki} , его минимум в принципе можно найти стандартными методами дифференциального исчисления, учитывая добавочные условия (2.141).

Однако получающиеся в результате выражения $F(\alpha)$ оказываются настолько громоздкими, что вычисление можно довести до конца только с помощью ЭВМ, используя тот или иной метод поиска, например, «метод оврагов».

В работе [30] для примера приведен расчет магнитного поля катодной линзы, создающей в сочетании с однородным электрическим полем изображение с исправленной анизотропной дисторсией, повернутое на заданный угол и расположенное в заданной плоскости. Величина увеличения была принята равной единице. Процесс поиска продолжался, пока значение F не достигло 10^{-4} . Для этого потребовалось около десяти «овражных» шагов, причем на первом из них F было порядка 10^4 , а на третьем — порядка единицы.

Найденное таким образом магнитное поле было подставлено в уравнение движения и затем на ЭВМ рассчитаны траектории частиц. Расчет показал, что как расстояние до гауссовой плоскости, так и увеличение в центре совпадают с заданными, при этом относительная погрешность составляет не более 0,02.

§ 1. Осевые плазменные линзы

Плазменные линзы — это простейшие плазмооптические системы. Поэтому изучению их свойств должно быть уделено особое внимание. Этому и посвящена настоящая глава.

1. Фокусирующие свойства осевых линз. На примере плазменной осевой линзы (см. гл. 2, § 2) видно, что фокусирующие свойства плазменных линз во многом отличны от вакуумных. Это связано с тем, что плазменные линзы — это нетранзитивные системы, поэтому они могут осуществлять фокусировку на объемном заряде. Фокусное расстояние осевых линз в приближении «слабого» поля дается формулой (2.119).

Разделив в (2.119) члены, связанные с магнитным и электрическим полями, перепишем выражение для фокусного расстояния в виде

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{Mv_0^2} (W_H + W_E) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (W_H + W_E)^2 dz - \right. \\ \left. - (W_H + W_E) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_H + W_E) dz - (W_H + W_E) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \times \right. \\ \left. \times \left[\int_{-\infty}^0 (W_H + W_E) dz + \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} (U_{2H} + U_{2E}) dz \right] \right\} + 0 \left(\frac{1}{(Mv_0^2)^3} \right), \quad (3.1a)$$

где

$$W_H = \int_{-\infty}^z U_{2H} dz; \quad W_E = \int_{-\infty}^z U_{2E} dz; \quad (3.16)$$

U_{2H} для осевых линз определяется формулой (2.49a).

Так как распределение магнитного поля $H(z)$ не меняется (в предположении справедливости квазиодночастичного приближения), то фокусные расстояния магнитных линз одинаковы как в вакуумном, так и в плазменном случае.

Функция U_{2E} в плазменном случае [см. формулу (2.49a)]

$$U_{2E} = \frac{e}{2} \cdot \frac{d\Phi}{d\psi} H(z), \quad (3.2a)$$

а в вакуумном случае

$$U_{2E} = \frac{e}{2} \cdot \frac{d^2 \Phi}{dz^2}. \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что в случае электростатических вакуумных линз $W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$, так как вследствие ограниченной протяженности полей при $|z| \rightarrow \infty$ ($d\Phi/dz = -E_z \rightarrow 0$).

Следовательно, «тонкие» (т. е. с $F \approx v_0^2$) электростатические вакуумные линзы сделать нельзя. С другой стороны, видно, что в случае плазменных линз при специальном выборе фокусирующих полей, например при $\Phi = k\psi$, $k = \text{const}$, $H > 0$, линзы с $F \approx v_0^2$ существуют. Как и в случае кольцевых линз, **Е**- и **Н**-фокусировки в тонких осевых линзах с $F \approx v_0^2$ не зацепляются.

Тонкие магнитные осевые линзы в соответствии с формулой (3.1) могут быть только собирающими. В то же время «тонкие» плазменные осевые электростатические линзы могут быть как собирающими, так и рассеивающими в зависимости от знака Φ (ψ) [см. формулу (3.2a)].

Рассмотрим осевые линзы, у которых

$$W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} = W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (3.3a)$$

В этом случае

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_H + W_E)^2 dz + \frac{1}{(Mv_0^2)^3} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} W^2 dz_1 \int_{-\infty}^{z_1} W dz_2 - \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 W \int_{-\infty}^{z_1} dz_2 W^2 \right] + \dots, \quad (3.3b)$$

где $W = W_H + W_E$.

Видно, что линзы с $F \approx v_0^4$ могут быть только собирающими, даже в плазменном случае, так как подынтегральное выражение в (3.3b) для линзы с $F \approx v_0^4$ не отрицательно.

Из формулы (3.3b) видно, что «чисто» магнитных или «чисто» электростатических линз с фокусным расстоянием $F \approx v_0^6$ быть не может, так как в противном случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_H^2 dz = 0 \quad (3.4a)$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_E^2 dz = 0 \quad (3.4b)$$

при $H \neq 0$ и $E \neq 0$, что невозможно.

Если линза электромагнитная, то для исчезновения члена, пропорционального v_0^6 , достаточно, чтобы выполнялось более слабое условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (W_H + W_E)^2 dz = 0. \quad (3.4b)$$

Можно показать, что при выполнении условия (3.4b) линзы с $F \approx v_0^6$ также не существуют. Следовательно, не существует линз с высшими степенями $(v_0^2)^n$, $n > 3$.

2. Пример осевой линзы. Рассмотрим более подробно простейшую осевую плазменную линзу (см. гл. 1, § 2). Линза представляет собой кольцо с током. Между кольцом и источником ионов приложено напряжение u . Напряженность магнитного поля на оси кольца в вакуумном случае, как известно, равна

$$H_0 = \frac{2\pi R^2 I}{c(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (3.5a)$$

Здесь I — сила тока в кольце; R — радиус кольца.

Если плотность ионного тока очень мала, то электрическое поле в окрестности кольца удовлетворяет уравнению Лапласа (вакуумный режим). В этом случае на оси системы

$$\Phi(z) = \Phi_0 = \frac{u_0 R}{(z^2 + R^2)^{1/2}}, \quad (3.5b)$$

где u_0 — потенциал оси при $z = 0$.

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем фокусное расстояние такой линзы в вакуумном режиме*:

$$\frac{1}{F_H} = \frac{3\pi^3}{16} \cdot \frac{e}{Mc^3} \cdot \frac{1}{\frac{Mv_0^2}{2e}} \cdot \frac{l^2}{c^2 R}; \quad (3.6a)$$

$$\frac{1}{F_E} = \frac{3}{16} \frac{1}{\left(\frac{Mv_0^2}{2e}\right)^2} \cdot \frac{\pi u_0^2}{8R}. \quad (3.6b)$$

В плазменном случае F_H , очевидно, не изменится. Значение же F_E вследствие эквипотенциализации магнитных силовых линий будет другим. Действительно, задавая простейшую зависимость $\Phi(\psi)$ в виде

$$\Phi = k\psi; \quad k = \text{const}, \quad (3.7)$$

получаем

$$1/F_E = 2u_0 / \left(\frac{Mv_0^2}{2e}\right). \quad (3.8)$$

Ясно, что в зависимости от знака u_0 плазменная линза при $F_H \gg F_E$ может быть как собирающей, так и рассеивающей.

3. Хроматическая aberrация осевых линз. Из написанных выше формул, например (3.6) и (3.8), следует, что хроматическая aberrация в осевых линзах неустранима как в вакуумном, так и в плазменном режиме: $(\partial F/\partial v_0) \neq 0$ при $F \neq \infty$. Этот результат получен в приближении слабого поля. Однако для плазменного режима его можно получить и точно. Отличительная особенность

* Так как **E**- и **H**-фокусировки не зацепляются, то F_H и F_E связаны соотношением (2.122) с фокусным расстоянием и их можно вычислить независимо.

последнего случая при $T_e \rightarrow 0$ — это постоянство электрического потенциала вдоль оси.

Покажем, что хроматическая aberrация принципиально неустранима в любой осевой системе, если скорость частицы, идущей вдоль оси, остается постоянной. Для доказательства этого утверждения запишем уравнение малых радиальных смещений (2.49)

$$(d^2r/dz^2) + \lambda^2 \kappa(z)r = 0. \quad (3.9)$$

Здесь $\lambda = 1/v$, где v — скорость частицы, а $\kappa(z)$ — функция, зависящая от структуры электромагнитных полей. Пусть λ_0 — обратная величина скорости для некоторой «основной» частицы, а $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$ — этот же параметр для некоторой «неосновной» частицы. Тогда уравнение движения для последней запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} r'' + \lambda_0^2 \kappa(z)r &= -2\lambda_0 \delta\lambda \kappa(z)r; \\ r'' &\equiv d^2r/dz^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Считая, что $\delta\lambda$ — величина первого порядка малости, будем решать уравнение (3.10) методом последовательных приближений. Представим r в виде

$$r = r_0 + r_1 + \dots \quad (3.11)$$

и ограничимся первыми двумя членами разложения. Тогда с учетом (3.9) уравнение для r_1 можно записать в виде

$$r_1'' + \lambda_0^2 \kappa(z)r_1 = 2\lambda_0 \delta\lambda r_0'', \quad (3.12)$$

где r_0 — решение уравнения

$$r_0'' + \lambda_0^2 \kappa(z)r_0 = 0. \quad (3.13)$$

Если нам известны линейно независимые решения η_{01} , η_{02} уравнения (3.13), удовлетворяющие граничным условиям

$$\eta_{01}(0) = \eta_{01}(L) = 0; \quad (3.14a)$$

$$\eta'_{02}(0) = \eta'_{02}(L) = 0, \quad (3.14b)$$

где L — длина фокусировки, то без ограничения общности можно потребовать, чтобы r_0 удовлетворяло граничным условиям (3.14a). Тогда

$$r_0 = \text{const } \eta_{01}(z), \quad (3.15)$$

и частное решение уравнения (3.12) можно записать в виде

$$r_1 = 2 \text{const } \lambda_0 \delta\lambda \left[-\eta_{01} \int_0^z \eta_{01}'' \eta_{02} dz + \eta_{02} \int_0^z \eta_{01}' \eta_{01} dz \right]. \quad (3.16a)$$

Или после интегрирования второго слагаемого в (3.16а) по частям запишем r_1 в следующем виде:

$$r_1 = 2 \text{ const } \lambda_0 \delta\lambda \left[-\eta_{01} \int_0^z \eta_{01}'' \eta_{02} dz + \eta_{02} [\eta_{01}' \eta_{01}]_0^z - \eta_{02} \int_0^z (\eta_{01}')^2 dz \right]. \quad (3.16б)$$

Учитывая граничные условия (3.14), получаем в точке фокусировки $z = L$:

$$r_1 = 2 \text{ const } \lambda_0 \delta\lambda \eta_{02}(L) \int_0^L (\eta_{01}')^2 dz. \quad (3.16в)$$

Функция $\eta_{02}(z)$ не обращается в нуль в точке $z = L$ в силу граничных условий (3.14) [вронскиан $W(\eta_{01}, \eta_{02}) = 1$]. Поэтому $r_1 \neq 0$ в точке фокусировки при $\delta\lambda \neq 0$ и, следовательно, хроматическая aberrация в плазменных осевых системах при $T_e = 0$ принципиально неустранима.

4. Сферическая aberrация осевых плазменных линз. Как известно [31], сферическая aberrация в вакуумных осевых линзах принципиально неустранима. Однако еще Шерцер [32] отмечал, что с помощью объемного заряда можно осуществить коррекцию электрического поля в линзах и уничтожить отдельные виды aberrаций, принципиально неустранимых в вакуумных осевых линзах. В плазменных линзах есть реальная возможность создавать объемный заряд с достаточно произвольным распределением плотности в соответствии с условием (1.11). Посмотрим, как сказывается это обстоятельство на сферической aberrации осевых плазменных линз.

В отличие от хроматической сферическую aberrацию осевых плазменных линз можно устранить.

Фокусное расстояние тонких осевых линз с учетом хроматической aberrации определяется формулой (2.122а), где W_1 определено выражением (2.124). Подставляя в эти формулы явный вид U_2 , U_4 , получаем фокусное расстояние в виде

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{v_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^2}{M^2 c^2} \cdot \frac{H^2}{4} + \frac{e}{M} \cdot \frac{d\Phi}{d\psi} H \right] dz - \frac{r_0^2}{v_0^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{e^2}{M^2 c^2} \cdot \frac{1}{12} H H'' \frac{e}{M} \frac{d\Phi}{d\psi} \frac{H''}{6} + \frac{e}{M} \frac{d^2\Phi}{d\psi^2} \cdot \frac{H^2}{2} \right] dz. \quad (3.17)$$

Покажем, что второй интеграл в формуле (3.17), описывающий сферическую aberrацию, может быть обращен в нуль. Возьмем для этого функцию $\Phi(\psi)$ в виде

$$\Phi(\psi) = k_1 \psi + k_2 \psi^2, \quad k_1, k_2 = \text{const}. \quad (3.18)$$

Подставив (3.18) в (3.17), получим выражение

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_0} - \frac{r_0^2}{v_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{e^2}{M^2 c^2} \frac{1}{12} H H'' - \right. \\ \left. - \frac{e}{M} k_1 \frac{H''}{6} + \frac{e}{M} k_2 H^2 \right) dz, \quad (3.19)$$

где F_0 — фокусное расстояние линзы без учета сферической аберрации.

Если приравнять интеграл в (3.19) нулю и учесть, что $H' \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$, то получим

$$k_2 = -\frac{1}{12} \cdot \frac{e}{Mc^2} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} H'^2 dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} H^2 dz}. \quad (3.20)$$

Таким образом, выбирая k_2 из условия (3.20) при зависимости Φ (ψ) в виде (3.18), можно уничтожить сферическую аберрацию в тонкой осевой линзе. Фокусное расстояние линзы в этом случае не меняется. В случае осевой линзы, рассмотренной выше, величина k_2 равна

$$k_2 = -3 \cdot 10^{-2} \frac{1}{R^2} \cdot \frac{e}{Mc^2}. \quad (3.21)$$

§ 2. Магнитные кольцевые линзы

Рассмотрим магнитные кольцевые плазменные линзы для фокусировки полых трубчатых КИП.

1. Общие свойства магнитных линз. Фокусирующие свойства магнитных линз, которые мы будем считать близкими к тонким, можно исследовать, учитывая формулы (2.119), (2.123) и считая, что поле $\mathbf{E} = 0$, т. е. U_{0E} , U_{1E} и U_{2E} равны нулю. Величину фокусного расстояния в таком случае можно записать в виде

$$\frac{1}{F_H} = \frac{1}{Mv_0^2} W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} W_H^2 dz - W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_H dz - \right. \\ \left. - W_H \Big|_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^0 W_H dz + \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} U_{2H} dz_2 \right] + \right. \\ \left. + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} U_{1H}^2 dz + 2 [U_{0H} W_H] \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right\} + \dots, \quad (3.22)$$

где в случае $D = 0$ [см. формулу (2.53)]

$$W_H = \int_{-\infty}^z U_{2H} dz = \frac{e^2}{Mc^2} \int_{-\infty}^z \left(\frac{3\psi_0^2}{R^2} + \psi_1^2 - 3 \frac{\psi_0 \psi_1}{R} - \psi_0 \psi_0'' \right) \frac{1}{R^2} dz. \quad (3.23)$$

Предположим сначала, что скорость частиц достаточно велика и можно пренебречь членами, пропорциональными v_0^4 . Фокусное расстояние магнитной линзы в этом случае $F \approx v_0^2$ и, как следует из формул (3.22) и (3.23),

$$\frac{1}{F} = \frac{e^2}{(Mv_0)^2 c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_1^2 - 3 \frac{1}{R} \psi_0 \psi_1 + \psi_1^2 + 3 \frac{\psi_0^2}{R^2} \right) \frac{1}{R^2} dz. \quad (3.24)$$

Покажем, что магнитные линзы с $F \approx v_0^2$ не могут быть рассеивающими. Для этого заметим, что подынтегральное выражение в (3.24) есть квадратный трехчлен относительно $1/R$. Вычислив его дискриминант, получим условие отрицательности дискриминанта

$$4\bar{\psi}_0^2 (\bar{\psi}_1^2 + \bar{\psi}_0'^2) > 3(\bar{\psi}_0 \bar{\psi}_1)^2, \quad (3.25)$$

где $\bar{a} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} a dz$. Неравенство (3.25) заведомо выполняется*, т. е.

F всюду больше нуля. Очевидно, знак равенства имеет место только в случае $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 0$. Следовательно, нельзя создать близкие к тонким линзы, у которых $F \approx v_0^4$, т. е. $W|_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

2. Пример магнитной билинзы. Для примера рассмотрим более подробно фокусирующие свойства магнитной билинзы, схематически изображенной на рис. 16, а. У такой билинзы $\psi_1 = 0$, а

$$\psi_0 = H_0 R \Lambda \sqrt{\frac{e_0}{2}} \exp(-z^2/\Lambda^2), \quad (3.26)$$

где e_0 — основание натуральных логарифмов; H_0 — амплитудное значение напряженности магнитного поля; Λ — характерный размер поля по ИП.

Распределение токов в катушках, которые реализуют магнитное поле, соответствующее (3.26), рассчитано в гл. 2, § 1. Форма силовых линий показана на рис. 16, б^{2*}. Если учесть кривизну силовых линий и направление вектора \mathbf{H} в билинзе, то можно заключить, что центральная зона билинзы $|z| \leq \Lambda/2$ — собирающая, а области $|z| > \Lambda/2$ — рассеивающие. Частица может пройти билинзу, если ее энергия $(Mv_0^2/2) > U = (e^2/Mc^2) (\psi_0^2/2R^2)$. В противном случае билинза отразит частицу.

* Действительно, (3.25) представляет усиленное неравенство Шварца $\bar{a}^2 \bar{b}^2 \geq (\bar{ab})^2$.

^{2*} Магнитное поле можно создавать не только с помощью катушек с током, но и магнитными полюсами. На рис. 16, б показана форма полюсных наконечников.

Для пролетных частиц в приближении тонкой линзы величина фокусного расстояния равна (3.24)

$$\frac{1}{F} = \frac{H_0^2 e^2 \Lambda^3}{c^2 (Mv_0)^2 R^2} \cdot \frac{e_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 3 \frac{\Lambda^2}{R^2} \right). \quad (3.27)$$

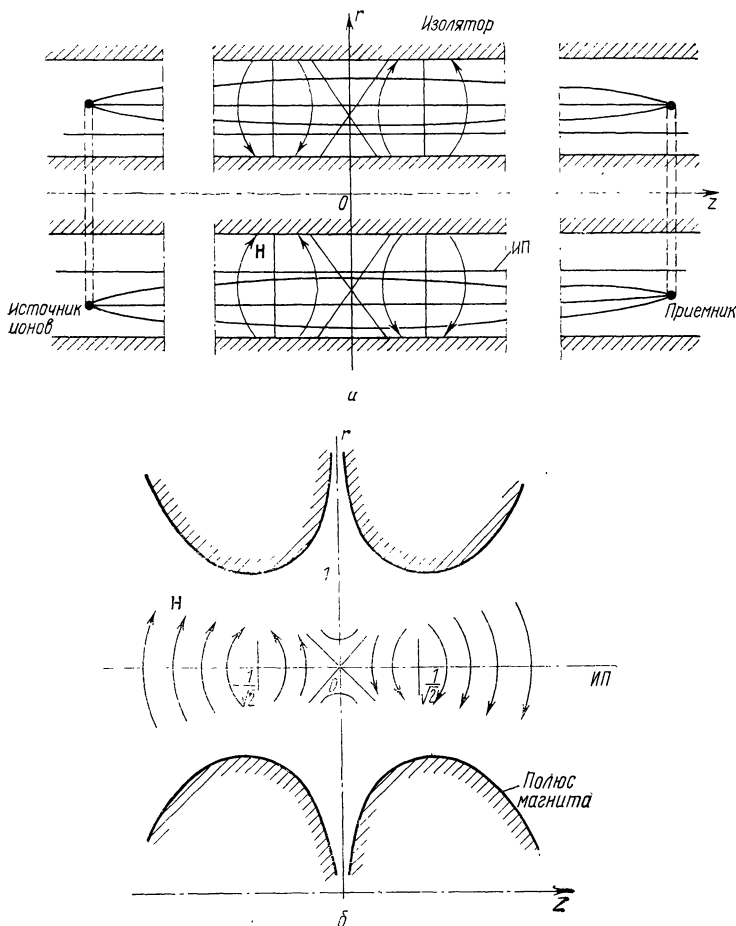


Рис. 16.

Положение ОП определяется формулами (2.1076)

$$y_{ср.0} = \frac{\Lambda^2}{R} \cdot \frac{1}{1 + 3\Lambda^2/R^2}. \quad (3.28)$$

Так как мы рассматриваем параксиальные пучки, проходящие вблизи ИП, то очевидно, что $y_{ср.0} \ll R$, т. е. значение R по порядку величины должно удовлетворять условию $(\Lambda/R)^2 \ll 1$. С увеличением R $y_{ср} \rightarrow 0$ и ОП совпадает с ИП. Это справедливо для

линз с любым распределением магнитного поля H_r на ИП (при $\psi_1 = 0$), что видно из общей формулы для $y_{\text{ср}}$ (2.107б), которая в этом случае имеет вид

$$y_{\text{ср.0}} = \frac{\Lambda^2}{R} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^2 dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_0'^2 + 3 \frac{\Lambda^2}{R^2} \psi_0^2 \right) dz}. \quad (3.29)$$

Заметим, что в таких линзах ОП всегда выше ИП ($y_{\text{ср.0}} > 0$).

При уменьшении v_0 фокусное расстояние уменьшается и становится сравнимым с характерным размером фокусирующих полей. В этом случае приближение тонкой линзы неприменимо и необходимо точно решать уравнение движения (2.51). Зависимость F (кривые 1, 2) от оптической силы билинзы $v_0^2/\omega_H^2 \Lambda^2$, вычисленная на ЭВМ при значении $\Lambda/R = 0,4$, показана на рис. 17.

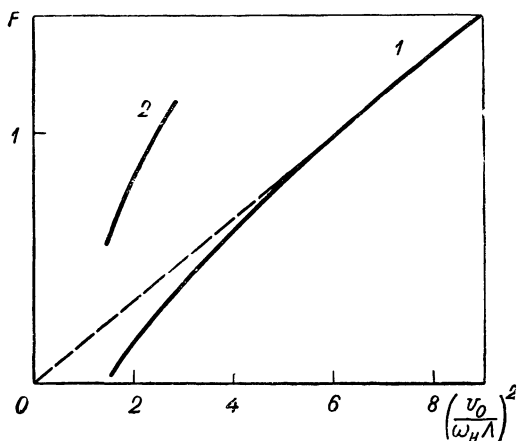


Рис. 17.

Для сравнения пунктиром показана величина F , найденная в приближении тонкой линзы (3.27). Видно, что при больших значениях $v_0/\omega_H \Lambda$ это приближение дает достаточно точные значения величины фокусного расстояния. На этом же рисунке показаны кратные фокусы 2, появляющиеся при уменьшении $v_0/\omega_H \Lambda$. Если же $v_0 \rightarrow \min v_0^*$, то можно показать, что число кратных фокусов неограниченно возрастает. Наконец, если отношение $v_0/\omega_H \Lambda$, убывая, становится меньше $\min v_0$, то частица отражается от билинзы.

* Можно определить $\min v_0$ как минимальную скорость, при которой частица остается «пролетной», т. е.

$$\min v_0 \approx \omega_H \Lambda \sqrt{\frac{\Lambda}{2R}}.$$

§ 3. Электростатические плазменные линзы

1. Общие свойства плазменных электростатических линз. Как уже отмечалось в § 1, коренное отличие плазменных электростатических линз от вакуумных аналогов связано с их нетранзитивностью. При $T_e \rightarrow 0$ справедливо условие (1.11) и картина магнитных силовых линий определяет форму эквипотенциалей. Будем считать, что распределение электрического поля задается извне системой электродов с приложенной разностью потенциалов. Это позволяет выбирать наиболее выгодную для данного типа задач структуру электрического поля. Остановимся более подробно на свойствах электростатических плазменных кольцевых линз.

В соответствии с (2.123) фокусное расстояние плазменной электростатической линзы определяется формулой*

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} = & \frac{1}{Mv_0^2} W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} W_E^2 dz - W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_E dz + \right. \\ & + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} U_{1E}^2 dz + 2 [U_{0E} W_E]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} W_E U'_{0E} dz - \\ & \left. - W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^0 W_E dz + \int_0^{\infty} dz_1 \int_{z_1}^{\infty} U_{2E} dz_2 \right] \right\} + \dots, \quad (3.30) \end{aligned}$$

где W_E в явном виде можно записать так [см. формулы (2.120б) и (2.53в)]:

$$W_E = \int_{-\infty}^z U_{2E} dz = e \int_{-\infty}^z \left(\frac{d\Phi}{d\psi} \cdot \frac{\psi_1}{R} + \frac{d^2\Phi}{d\psi^2} \psi_1^2 - \frac{d\Phi}{d\psi} \psi_0'' \right) dz, \quad (3.31)$$

а U_{0E} и U_{1E} в соответствии с формулами (2.53а) и (2.53б)

$$U_{0E} = \Phi_0(\psi_0); \quad U_{1E} = \frac{d\Phi}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi_1. \quad (3.32)$$

Если линзы тонкие ($F \approx v_0^2$), то соответствующим выбором E можно сделать линзу как собирающей, так и рассеивающей. В билинзе, например, для этого достаточно убрать электрическое поле (закоротить электроды, задающие распределение электрического потенциала) либо из фокусирующих, либо из дефокусирующих участков.

В том случае, когда $W_E \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ и фокусное расстояние $F \approx v_0^2$, возможность создания плазменных электростатических

* Как и раньше, рассмотрим только «правый фокус» F_1 в связи с полной аналогией свойств F_1 и F_2 .

рассеивающих линз менее очевидна. Запишем фокусное расстояние в виде

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(W_E^2 - W_E \frac{dU_{0E}}{dz} + 2U_{1E}^2 \right) dz. \quad (3.33)$$

Возьмем для простоты случай $\psi_1 = 0$. Тогда

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{(Mv_0^2)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_E^2 + W_E E_z) dz, \quad (3.34)$$

так как $dU_{0E}/dz = d\Phi_0/dz = -E_z$; $U_{1E} = 0$. В рассеивающей линзе $F < 0$, поэтому нужно поля линзы подобрать таким образом, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (W_E^2 + W_E E_z) dz < 0, \quad (3.35)$$

и одновременно удовлетворить условию $W_E|_{-\infty}^{+\infty} = 0$, для того чтобы получить рассеивающую линзу с $F \approx v_0^4$. Введем дополнительную функцию

$$f(z) = W_E^2 + W_E E_z, \quad (3.36)$$

которая удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz < 0; \quad f(z) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (3.37)$$

Тогда, считая $E_z(z)$ и $f(z)$ заданными, найдем из соотношения (3.36) функцию W_E :

$$W_E(z) = E_z/2 \pm \sqrt{\frac{E_z^2}{4} + f(z)}. \quad (3.38)$$

Зная, что

$$dW_E/E_z = dH_r/H_r, \quad (3.39)$$

получим, подставляя (3.38) в (3.39), распределение магнитного поля, необходимое для создания рассеивающей линзы с $F \approx v_0^4$:

$$H_r = H_{r0} \exp \left\{ \int_{z_0}^z \frac{dW_E}{dz} \cdot \frac{1}{E_z} dz \right\}, \quad (3.40)$$

где H_{r0} — амплитудное значение напряженности магнитного поля. Таким образом, задача о нахождении вида фокусирующих полей электростатической рассеивающей кольцевой линзы решена.

Для примера рассмотрим линзу с $E_z = \text{const} = k$, а $f(z)$ зададим в виде

$$f(z) = k^2 \frac{z^2}{z_0^2} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right); \quad -z_0 < z < z_0. \quad (3.41)$$

Подставляя (3.41) и E_z в (3.40), находим

$$H_r = H_{r0} \exp(-z^2/z_0^2); \quad |z| < z_0. \quad (3.42)$$

2. Примеры электростатических билинз. Учитывая, что структура электрического поля в электростатической линзе задается распределением магнитного поля, рассмотрим билинзу с магнитным полем типа (3.26). Зависимость Φ (ψ) в билинзе задается системой электродов и в принципе произвольна. Предположим сначала, что электрическое поле в билинзе всюду ускоряющее и $E \approx H^2$. Тогда поля E_z и H_r на ИП будут соответственно

$$H_r = H_{r0} \sqrt{2e_0} \frac{z}{\Lambda} \exp(-z^2/\Lambda^2); \quad E_z = 2E_{z0} \frac{z^2}{\Lambda^2} \exp(1 - 2z^2/\Lambda^2), \quad (3.43)$$

где H_{r0} , E_{z0} — амплитудные значения \mathbf{H} -, \mathbf{E} -полей.

Функция W_E в данном случае имеет вид

$$W_E = e \int_{-\infty}^z E_z \frac{1}{H_r} \cdot \frac{dH_r}{dz} dz = \frac{eE_z}{2}. \quad (3.44)$$

Так как $E_z|_{-\infty}^{+\infty} = 0$, то в соответствии с (3.30) фокусное расстояние билинзы F_E может быть пропорционально v_0^4 . Пусть $F_H \gg F_E$, т. е. билинза электростатическая. Подставляя (3.44) в (3.33), находим величину фокусного расстояния

$$\frac{1}{F_E} = \frac{3\sqrt{\pi}}{512} \cdot \frac{1}{(Mv_0^2/2e)^2} \cdot \frac{e_0^2 \Phi_0^2}{\Lambda}, \quad (3.45)$$

где $\Phi_0 = E_{z0}\Lambda$.

Можно убедиться, что фокусное расстояние электростатической билинзы существенно зависит от структуры электрического поля. Действительно, предположив, что в билинзе $E \approx H$, ($E_z = \sqrt{2} e_0 \times \times E_{z0} z/\Lambda \exp(-z^2/\Lambda^2)$), получим аналогичным образом величину фокусного расстояния

$$\frac{1}{F_E} = \frac{1}{8} \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{e_0} \Phi_0^2}{\Lambda \left(\frac{Mv_0^2}{2e} \right)^2}. \quad (3.46)$$

Сравнивая (3.45) и (3.46), видим, что в линзе с рекуперацией энергии (3.46) фокусное расстояние примерно на порядок меньше, чем в линзе с ускорением (3.45) при одинаковых амплитудах фокусирующих полей.

В разобранных выше примерах напряженность электрического поля отлична от нуля всюду, причем частица проходила через билинзу, испытывая как фокусировку, так и дефокусировку. Это привело к тому, что фокусное расстояние билинзы было обратно пропорционально квадрату Φ_0 . Если же электрическое поле отлично от нуля либо в фокусирующих, либо в дефокусирующих участках, то, как отмечалось выше, фокусное расстояние будет обратно пропорцио-

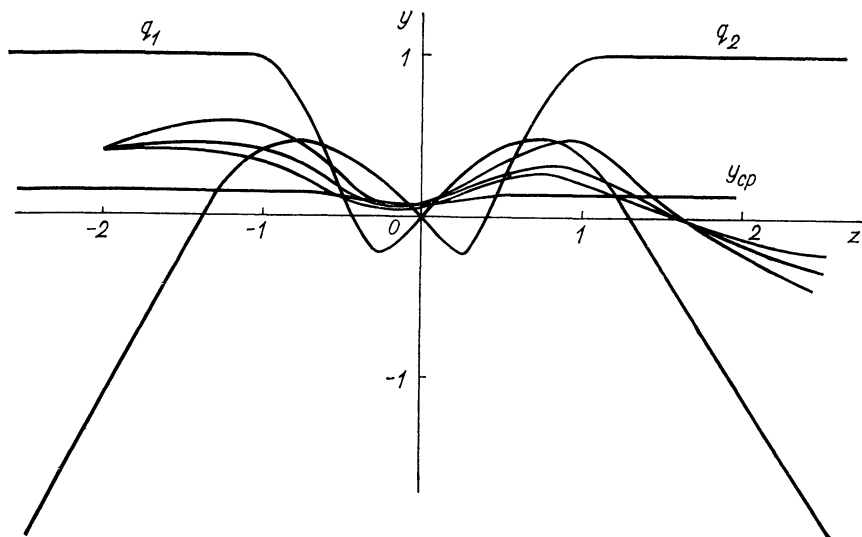


Рис. 18.

нально Φ_0 . Для примера рассмотрим фокусирующую билинзу с рекуперацией, у которой зависимость Φ (ψ) определена следующим образом:

$$E_z = \sqrt{2e_0} E_{z0} \frac{z}{\Lambda} \exp(-z^2/\Lambda^2); \quad -\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} > z; \quad z > \frac{\Lambda}{\sqrt{2}}; \quad (3.47a)$$

$$E_z = 0; \quad -\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} < z < \frac{\Lambda}{\sqrt{2}}. \quad (3.47b)$$

Тогда

$$\frac{1}{F_E} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{Mv_0^2}{2e}} \cdot \frac{\Phi_0}{\Lambda}. \quad (3.48)$$

Из (3.48) непосредственно следует, что в зависимости от знака Φ_0 электрическая линза с $F_E \approx v_0^2$ может быть как собирающей, так и рассеивающей.

Если скорость частиц v_0 невелика, то приближение «слабого» поля неприменимо. В этом случае оказывается существенным не

только интегральное воздействие электрических полей на частицы, но и структура фокусирующих и дефокусирующих полей внутри линзы. На рис. 18 показаны траектории частиц в электрической билинзе с рекуперацией, полученные численным счетом на ЭВМ при $(v_0/\omega_H\Lambda) = 2$, $\omega_H = (eH_{z0}/Mc)$. Видно, что при малых скоростях каждый участок билинзы фокусирует независимо и, кроме того, появляются кратные фокусы.

§ 4. Аберрации первого порядка кольцевых плазменных линз

1. Общие формулы. Размытие точки фокусировки (см. гл. 2, § 2) определяется неисчезающими членами ряда (2.26б) при поперечных аберрациях и ряда (2.27) при продольных. В настоящем параграфе учтены только линейные члены рядов (2.26б), (2.27), т. е. аберрации первого порядка. Явный вид функций d и z_1 при фокусировке в линзах легко получить в приближении диоптрики Гаусса (см. гл. 2, § 2), которой мы постоянно пользовались. Учитывая очевидные соотношения

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{F} - \frac{1}{z_A}; \quad y_{E1} = y_A - \frac{z_A}{z_A - F} (y_A - y_{cp.0}), \quad (3.49)$$

где $\{y_A, z_A\}$ — координаты источника относительно ИП, а $\{y_B, z_B\}$ — координаты изображения, получаем после вариации выражения (3.49) по параметрам F и $y_{cp.0}$, зависящим от вида фокусирующих полей, для величины продольной и поперечной аберраций следующие соотношения соответственно:

$$z_1 = L\delta F \frac{1}{z_A - F}; \quad (3.50a)$$

$$d = -\delta y_{cp.0} \frac{z_A}{z_A - F} - \frac{y_A - y_{cp.0}}{(z_A - F)^2} z_A \frac{\delta F}{F}, \quad (3.50б)$$

где $L = z_A + z_B = \frac{z_A^2}{z_A - F}$ — длина фокусировки. Из (3.50) видно, что величины аберраций зависят от переменных величин δF , $\delta y_{cp.0}$, L , F , которые, в свою очередь, связаны с видом фокусирующих полей. Ясно, что с изменением конфигурации фокусирующих полей величины аберраций меняются и можно попытаться устранить или минимизировать по крайней мере некоторые из них.

Устранение хроматической и моментной аберрации кольцевых систем рассмотрено в гл. 4. Здесь мы остановимся на исследовании сферической аберрации кольцевых линз.

Для нахождения значения сферической аберрации в уравнении параксиального приближения необходимо учесть высшие члены разложения по y , т. е. в уравнении (2.50) учесть явный вид P . Тогда,

решая уравнение (2.50) в приближении «слабого поля», можно найти фокусное расстояние [см. формулу (2.122)]

$$1/F_1 = 1/F_0 + 1/F_{\text{сф}}. \quad (3.51)$$

Здесь F_0 — фокусное расстояние узкого пучка (2.119) (величиной P пренебрегаем); $F_{\text{сф}}$ — поправка к F_0 при учете сферической аберрации. Как видно из формулы (2.122а), учет членов $P_{\text{квадр}}$ для тонких линз сводится к тому, что в формуле (2.119) для фокусного расстояния величину $W = \int_{-\infty}^z U_2 dz$ (2.120б) заменяют на

$$W_1 = \int_{-\infty}^z \left(U_2 + \frac{y_0}{2} U_3 \right) dz, \quad (3.52)$$

где y_0 — характерная полуширина пучка. Следовательно, $F_{\text{сф}}$ для тонких линз

$$\frac{1}{F_{\text{сф}}} = \frac{1}{Mv_0^2} \cdot \frac{y_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} U_3 dz. \quad (3.53)$$

Величина $F_{\text{сф}}$ зависит от вида фокусирующих полей оптической силы линзы $v_0/\omega_H \Lambda$ и геометрии пучка. Удобнее для исследования ввести новую величину γ :

$$\gamma = F_0 \Lambda / F_{\text{сф}} h, \quad (3.54)$$

которая является универсальным безразмерным параметром, зависящим только от структуры фокусирующих полей; h — характерная полуширина пучка. Обращение величины γ в нуль соответствует уничтожению сферической аберрации в линзе.

2. Сферическая аберрация тонких магнитных кольцевых линз. Из формул (2.119) и (2.122) непосредственно следует, что

$$\gamma_H = \frac{\Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-3 \frac{\psi_1^2}{R} + 3\psi_1 \psi_0'' + 5 \frac{\psi_0 \psi_0''}{R} - \psi_0 \psi_1'' + 12 \frac{\psi_0 \psi_1}{R^2} - 12 \frac{\psi_0^2}{R^3} \right) dz}{2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(3 \frac{\psi_0^2}{R^2} + \psi_1^2 - 3 \frac{\psi_0 \psi_1}{R} + \psi_0'^2 \right) dz}. \quad (3.55)$$

Поля магнитных кольцевых линз по-прежнему задаются компонентами H_r и H_z , т. е. ψ_0, ψ_1 на ИП.

Рассмотрим сначала класс линз с «поперечными» полями, у которых на ИП $H_z = 0$ ($\psi_1 = 0$). Тогда из (3.55) для таких линз получим

$$\gamma_H = \frac{\Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left(5\psi_0'^2 + 12 \frac{\psi_0^2}{R^2} \right) dz}{2R \int_{-\infty}^{+\infty} \left(3 \frac{\psi_0^2}{R^2} + \psi_0'^2 \right) dz}. \quad (3.56a)$$

Так как подынтегральные выражения знакопостоянны, то в таких линзах $\gamma_H \neq 0$ и сферическая aberrация неустранима. Более того, величина γ_H в (3.56a) слабо зависит от формы полей, так как слагаемые в подынтегральных выражениях отличаются постоянными коэффициентами. Для билинзы типа (3.26)

$$\gamma_H = \frac{\Lambda}{R} \frac{5 + 12 \frac{\Lambda^2}{R^2}}{1 + 3 \frac{\Lambda^2}{R^2}}. \quad (3.56b)$$

Если на ИП линзы $H_r = 0$ ($\psi_0 = 0$ — линза с «продольными» полями), а $H_z \neq 0$, то

$$\gamma_H = -3\Lambda/R \quad (3.57)$$

и не зависит от формы полей в линзе. Сферическая aberrация, очевидно, также неустранима.

Остается общий случай, когда на ИП $H_r \neq 0$, $H_z \neq 0$. Покажем, что при определенных соотношениях величин H_r и H_z сферическая aberrация уничтожается. Предположим, что ψ_0 и ψ_1 связаны соотношением

$$\psi_1 = k\psi_0; \quad k = \text{const}. \quad (3.58)$$

Такое соотношение выполняется, например, в линзах с

$$H_r \approx \frac{z}{\Lambda} \exp(-z^2/\Lambda^2); \quad H_z \approx \exp(-z^2/\Lambda^2). \quad (3.59)$$

Тогда

$$\gamma_H = \frac{\Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (p\psi_0^2 - q\psi_0'^2) dz}{2R \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\psi_0^2 \left(3 \frac{\Lambda^2}{R^2} + k^2 - 3 \frac{k\Lambda'}{R} \right) + \psi_0'^2 \right] dz}, \quad (3.60)$$

где

$$p = 12k\Lambda^2/R^2 - 3k^2\Lambda/R - 12\Lambda^3/R^3; \quad (3.61a)$$

$$q = 5\Lambda/R - k\Lambda^2/R^2 - 3k. \quad (3.61b)$$

Выберем ψ_0 в виде (3.26). Подставив (3.26) в (3.60) и проинтегрировав, находим, что сферическая aberrация уничтожается, если параметры k и Λ/R таковы, что

$$p - q = 0. \quad (3.62)$$

Решая уравнение (3.62) относительно k , получаем

$$k = \frac{6 \frac{\Lambda^2}{R^2} + 4 \pm \sqrt{9 \frac{\Lambda^2}{R^2} + 4}}{3 \frac{\Lambda}{R}}. \quad (3.63)$$

3. Коррекция сферической aberrации электрическим полем. В связи с произвольностью выбора Φ (ψ) можно подобрать электрическое поле в электромагнитной линзе так, чтобы устранить сферическую aberrацию. Запишем величину γ в частном случае $\psi_1 = 0$ для линзы с **E**-, **H**-полями [см. формулу (2.122)]

$$\gamma = \frac{\frac{e^2}{Mc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(12 \frac{\Lambda^2}{R^2} \psi_0^2 - 5\psi_0 \psi_0'' \right) dz + e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi_0'' dz}{\frac{e^2}{Mc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_0'^2 + 3 \frac{\Lambda^2}{R^2} \psi_0^2 \right) dz + e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi_0'' dz} \quad (3.64)$$

и приравняем нулю подынтегральное выражение в числителе (3.64). В результате получим уравнение для определения вида Φ (ψ)

$$12\Lambda^2/R^2\psi_0^2 - 5\psi_0\psi_0'' + (d\Phi/d\psi)\psi_0'' = 0, \quad (3.65)$$

откуда

$$\Phi = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\psi_0''} \left(5\psi_0 \psi_0'' - 12 \frac{\Lambda^2}{R^2} \psi_0^2 \right) \psi_0' dz. \quad (3.66)$$

Если отношение $(\Lambda/R) \rightarrow 0$, то выражение (3.66) упрощается и

$$\Phi(\psi) \approx \text{const } \psi_0^3. \quad (3.67)$$

Итак, показано, что в тонких магнитных и электростатических плазменных линзах возможно устранение сферической aberrации. Отметим, что при этом остальные виды aberrаций, вообще говоря, не уничтожаются, а могут даже возрастать.

§ 5. Трубчатые многолинзовые ускорители заряженных частиц

В существующих сейчас ускорителях заряженных частиц сечение ускорительного канала представляет собой некую односвязную фигуру — круглую, прямоугольную или эллиптическую. Однако имеет смысл рассматривать класс ускорителей, у которых сечение

ускорительного канала двухсвязно и подобно кольцу той или иной формы. Эти ускорители, предложенные А. И. Морозовым и Г. Я. Щелкиным [33], назовем трубчатыми.

Схематически линейный и циклический (тороидальный) типы таких ускорителей изображены на рис. 19. Внутреннее тело в канале назовем внутренним сердечником 1 или просто сердечником. В тороидальном ускорителе сердечник должен быть подвешен либо с помощью магнитного поля, либо ускоритель должен работать короткими импульсами, пока сердечник не успеет упасть. Термоядер-

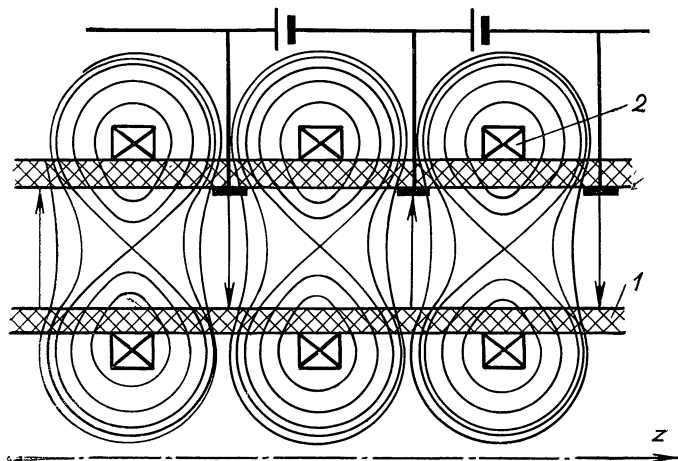


Рис. 19.

ные тороидальные системы с висящим сердечником, получившие название левитронов, уже сейчас достаточно хорошо отработаны конструктивно. Трубчатые схемы, хотя и обладают большей конструктивной сложностью, допускают ускорение потоков ионов с компенсированным объемным зарядом.

Рассмотрим трубчатую систему, в ускорительном зазоре которой с помощью внутреннего сердечника 1 и наружного магнитпровода 2 создано меридианальное знакопеременное магнитное поле (см. рис. 19). Силовые линии этого поля образуют, очевидно, линзоподобные конфигурации (рис. 20). Поэтому ускоритель с таким магнитным полем назовем трубчатым многолинзовым (ТУМ). Под действием продольного электрического поля ионы внутри канала ускоряются, и если параметры системы подобраны так, что ионный ларморовский радиус больше длины линзы

$$R_{\Delta i} > \Lambda, \quad (3.68)$$

то ускорение ионов будет идти непрерывно.

Линейные ТУМы работают по схеме прямого ускорителя подобно электростатическим генераторам Ван-де-Граафа [34]. Поэтому,

хотя они в принципе могут дать большие ионные токи, уровень энергии частиц здесь будет невысок (1—5 Мэв).

Для достижения существенно больших энергий необходимо переходить к циклическим системам.

В дальнейшем, говоря о циклических трубчатых ускорителях, будем иметь в виду только многолинзовые трубчатые ускорители, подобные линейным ТУМам. Ускорение квазинейтральных потоков в циклических ТУМах, вероятно, удобнее всего будет проводить с помощью бетатронного механизма.

Переход к ускорению ионов до высоких энергий открывает новые возможности работы циклического ТУМа. Действительно, роль

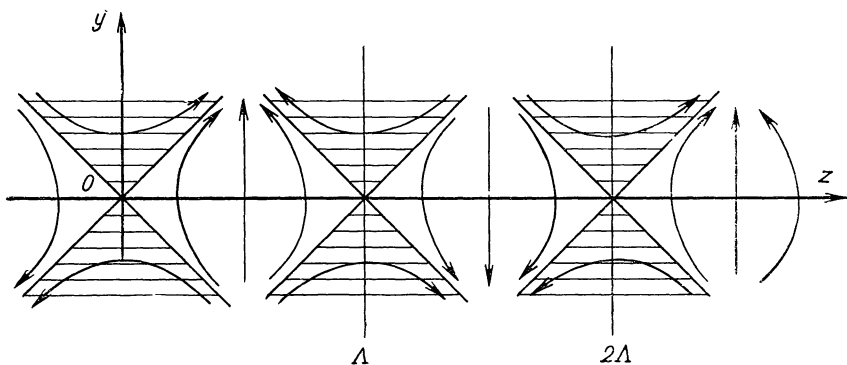


Рис. 20.

объемного заряда особенно велика при малой энергии частиц, когда стабилизирующее магнитное поле мало*. Однако при увеличении энергии ионов можно переходить к более мощным фокусирующим магнитным полям, способным уже удерживать некомпенсированные ионные пучки. Если учесть, что в случае ТУМа $\omega_f \approx \omega_H \approx H$, то плотность в пучке при отсутствии компенсации будет

$$n \approx H^2. \quad (3.69)$$

Иными словами, возможна такая организация процесса, при которой первоначальное ускорение происходит в квазинейтральном режиме, а затем так или иначе электроны отбираются из пучка и в дальнейшем ускоряется некомпенсированный пучок ионов, например, с помощью высокочастотного поля.

Из циклического ТУМа можно в принципе осуществить также вывод пучка. Для этого при снятом ускоряющем электрическом поле (т. е. при «выключенном» дрейфе электронов) нужно стянуть

* Приближенный критерий верхнего значения плотности пучка, удерживаемого фокусирующим полем, имеет вид $\omega_0 < \omega_f$; здесь ω_0 — ленгмювская частота, ω_f — частота поперечных колебаний.

трубчатый поток в достаточно тонкий шнур. После шнурования оболочки вывод пучка осуществляется обычными методами.

1. Динамика частиц в плоской модели ТУМа. Рассмотрим квазиодночастичную модель ТУМа, пренебрегая всеми плазменными эффектами, кроме эквипотенциализации магнитных силовых линий. Кроме того, будем считать магнитные и электрические поля идеальными и пренебрежем всеми резонансными эффектами, имеющими большое значение в реальных машинах с жесткой фокусировкой, к которым, очевидно, относится и ТУМ.

Для того чтобы выявить лишь основные принципиальные особенности ТУМа, подробно рассмотрим плоскую модель ТУМ и лишь кратко коснемся цилиндрической и тороидальной моделей.

Задание полей в плоской модели. За исходную поверхность возьмем плоскость $y = 0$. Будем считать, что на этой поверхности

$$H_x = 0; H_y = H_0 \sin \alpha z; H_z = 0; \alpha = \pi/\Lambda. \quad (3.70)$$

В рассматриваемом случае уравнение Лапласа строго интегрируется:

$$\Omega = (H_0/\alpha) \operatorname{sh} \alpha y \sin \alpha z; \quad (3.71)$$

$$A_x \equiv \psi = (H_0/\alpha) \operatorname{ch} \alpha y \cos \alpha z. \quad (3.72)$$

Для того чтобы определить вид зависимости $\Phi = \Phi(\gamma)$, зададим на исходной поверхности напряженность электрического поля в виде

$$E_x = 0; E_y = 0; E_z = E_0 (H/H_0)^2. \quad (3.73)$$

Такой выбор зависимости E_z от H — модельный, но тем не менее он четко отражает два физически важных момента: во-первых, знакопостоянство продольной компоненты электрического поля и, во-вторых, обращение электрического поля в нуль в точке, где $H=0$.

Используя (3.71) и (3.72), условие эквипотенциальности магнитных силовых линий можно записать в виде

$$\Phi = E_0 \left(-\frac{z_0(f)}{2} + \frac{1}{4\alpha} \sin 2\alpha z_0(f) \right), \quad (3.74)$$

где

$$z_0(f) \equiv \frac{1}{\alpha} \arccos \frac{\psi \alpha}{H_0}; \quad \psi < \frac{H_0}{\alpha}. \quad (3.75)$$

При задании Φ с помощью (3.74) остается неопределенным значение Φ на силовых линиях, не пересекающих исходную поверхность $y = 0$. Область этих силовых линий на рис. 19 заштрихована. Этой области соответствует $\psi > (H_0/\alpha)$. Для доопределения $\Phi(\gamma)$ можно считать заштрихованные зоны эквипотенциальными. Если ограничиться областью КИП, то

$$\Phi = E_0 \left(-\frac{z_0}{2} + \frac{1}{4\alpha} \sin 2\alpha z_0 \right) + \dots \quad (3.76)$$

Динамика частиц в плоской модели. Движение иона в рассматриваемом случае описывается системой уравнений:

$$\dot{x} + \frac{e}{Mc} \psi = D = \text{const}; \quad (3.77a)$$

$$M\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad (3.77б)$$

$$M\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad (3.77в)$$

$$U = M/2 \left(D - \frac{e}{Mc} \psi \right)^2 + e\Phi(\psi). \quad (3.77г)$$

В связи с отсутствием общего решения (3.77) рассмотрим несколько частных задач, что дает ясное представление о процессах в целом. Начнем с расчета основных траекторий, под которыми мы будем понимать плоские траектории, лежащие в плоскости $y = 0$. Для основных траекторий система (3.77) сводится к квадратурам

$$\begin{aligned} \dot{x} + \frac{e}{Mc} \cdot \frac{H_0}{\alpha} \cos \alpha z &= D; \\ \dot{z}^2 + \left(D - \frac{eH}{Mc\alpha} \cos \alpha z \right)^2 + e\Phi &= v_0^2. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Эти выражения интегрируются в элементарных функциях только при $D = 0$ и $\Phi = 0$. В таком случае уравнение траектории $x = x(z)$ находится в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{1}{\alpha} \ln \left[k \sin \alpha z + \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha z} \right] + \text{const}; \\ k &= \omega_H / \alpha v_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

Таким образом, при сделанных предположениях среднее значение x остается неизменным.

Пусть теперь $D \neq 0$, $\Phi = 0$. Тогда среднее смещение частицы вдоль оси x уже не равно нулю. Зависимости $x = x(t)$ и $z = z(t)$ в этом случае можно выразить через эллиптические функции, но получающиеся выражения слишком громоздки. Поэтому ограничимся разложениями функций $x(t)$ и $z(t)$ при малых k и $\beta = D/v_0$. Они имеют вид

$$x = Dt - \frac{k}{\alpha} \sin \alpha v_0 t + O(k^3 - \beta^n); \quad (3.80a)$$

$$\begin{aligned} z &= v_0 t - \frac{v_0}{2} \left[\left(\beta^2 + \frac{k^2}{2} \right) t - \frac{2k\beta}{v_0 \alpha} \sin \alpha v_0 t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2}{4\alpha v_0} \sin 2\alpha v_0 t + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.80б)$$

В случае, если $D \neq 0$ и $\Phi \neq 0$, можно также просто получить выражения для $x(t)$ и $z(t)$, если учесть, что в системе с большим числом линз прирост энергии частицы в пределах одной линзы сравнительно мал, т. е.

$$\gamma \equiv \frac{eE_0}{2} \Lambda / \frac{Mv_0^2}{2} \ll 1. \quad (3.81)$$

Поэтому в пределах небольшого числа линз можно написать разложения, подобные (3.80), по степеням k , β и γ . Из-за громоздкости получающихся выражений и элементарности их содержания мы их также не будем выписывать.

В общем случае аналитический расчет динамики частиц вдоль ИП достаточно сложен. Так, уже при $D = 0$, $\Phi = 0$ линейризованное уравнение колебаний вдоль y имеет вид

$$y'' + k^2 \left(\frac{\text{cn}(t, k)}{\text{dn}(t, k)} \right)^2 y = 0. \quad (3.82)$$

Здесь $\text{cn}(t, k)$ и $\text{dn}(t, k)$ — эллиптические функции Якоби. Как известно, точное решение уравнения типа (3.82) представляет интерес лишь в связи с исследованием резонансных эффектов. Поэтому мы не будем здесь анализировать эти эффекты и ограничимся расчетом движения частиц с помощью метода усреднения, который дает правильные результаты в случае отсутствия резонансов.

В рассматриваемом случае усреднение должно проводиться по высокочастотному дрожанию, обязанному конечным размерам каждой линзы, т. е. по периоду колебания порядка времени пролета одной линзы.

В общем случае, если предположить, что магнитное поле не имеет постоянной составляющей, то в первом приближении по t усредненную систему уравнения движения частицы записываем в виде [35]

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{e} \cdot \frac{dv}{dt} = & -\nabla \Phi_0 + \frac{v_{z\sim}}{v_z} \nabla \Phi_{\sim} - \frac{1}{c} \left(\frac{v_{z\sim}}{v_z} \right) [\mathbf{v}, \mathbf{H}_{\sim}] + \\ & + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\sim}, \mathbf{H}_{\sim}]; \\ & d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Здесь волнистой чертой отмечены величины, усредненные по пространственному периоду, нулем — постоянная составляющая потенциала.

В формулу (3.83) входят компоненты высокочастотной модуляции скорости

$$\mathbf{v}_{\sim} = \frac{e}{Mv_z} \left(-\nabla \hat{\Phi} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right). \quad (3.84)$$

Здесь $\hat{\Phi}$ — переменная часть интеграла по z от переменной части соответствующей величины.

Предполагая справедливым $\Phi = \Phi(\gamma)$, из (3.74) при условии (3.81) можно получить следующее уравнение для усредненных величин:

$$\frac{M}{e} \cdot \frac{dv}{dt} = -\nabla \Phi_0 + F_H - \frac{e}{2Mv_z^2} \nabla \Phi_{\sim}^2, \quad (3.85)$$

где Φ_0 — постоянная, а Φ_{\sim} — осциллирующая по z , составляющие электрического потенциала. При выводе уравнения (3.85) из (3.83) было учтено, что переменная часть Φ_{\sim} имеет двойную частоту по сравнению с магнитным полем.

Сила F_H имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} F_{Hx} &= -\frac{M}{e} \omega_H^2 \frac{v_y v_x}{v_z^2} \beta; & F_{Hy} &= \frac{M}{e} \omega_H^2 \frac{v_x^2 + v_z^2}{v_z^2} \beta; \\ F_{Hz} &= -\frac{M}{e} \omega_H^2 \frac{v_y}{v_z} \beta; & \beta &= \frac{1}{4\alpha} \operatorname{sh} 2\alpha y. \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

Подставляя в уравнение (3.85) Φ_{\sim} из (3.74) и линеаризируя по y , получаем следующую систему уравнений:

$$dv_x/dt = 0; \quad (3.87a)$$

$$v_z^2 + (2e\Phi_0/M) = v_0^2; \quad (3.87b)$$

$$\frac{dv_y}{dt} + \Omega^2 y = 0; \quad \Omega^2 = \left(\frac{v_x^2}{v_z^2} + 1 \right) \frac{\omega_H^2}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{e^2 E_0^2}{M^2 v_z^2}. \quad (3.87b)$$

Отсюда видно, что в системе имеет место стабилизация смещений вдоль оси y . При этом стабилизация осуществляется как магнитным, так и электрическим полем. Относительная роль каждой из этих «фокусировок» определяется скоростью частицы. Если

$$v > v_* = \frac{1}{2\sqrt{2}} c \frac{E_0}{H_0}, \quad (3.88)$$

то преобладает магнитная фокусировка, в противном случае — электростатическая. Заметим, что при $E_0 = 1 \text{ кВ/см}$, $H = 3 \cdot 10^3 \text{ э}$ критическая скорость $v_* \approx 10^7 \text{ см/сек}$. Полученное значение v_* означает, что в наиболее интересных случаях должна преобладать магнитная фокусировка. Это обстоятельство очень важно, так как возникающие при различных плазменных неустойчивостях возмущения электрического поля не будут в первом приближении влиять на динамику частиц.

2. Динамика частиц в прямом цилиндрическом ТУМе. Как и в рассмотренной ранее плоской модели ТУМа, ограничимся здесь рассмотрением только «срединной» части ускорителя, пренебрегая концевыми эффектами и изменением параметров линз вдоль оси системы. Качественно новое в цилиндрической системе — это появление центробежных эффектов. В результате радиальные колеба-

ния частиц происходят уже не около исходной поверхности*, а около отличной от нее ОП.

В принципе центробежные эффекты точно или в среднем по z можно подавить с помощью «постоянных» магнитных полей: однородного продольного $H_{0z} = H_{\parallel}$ и азимутального

$$H_{\theta} \sim 1/r. \quad (3.89)$$

В первом случае центробежную силу уравнивает сила Лоренца, обязанная регулярному движению по азимуту, а во втором — сила Лоренца, обязанная продольному движению. Для простоты ограничимся рассмотрением центробежных эффектов только при отсутствии электрического поля.

Как видно из уравнений движения частиц в азимутально симметричном магнитном поле,

$$M\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{e}{c}\dot{z}H_{\theta}; \quad M\dot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{e}{c}\dot{r}H_{\theta}. \quad (3.90)$$

Точная основная поверхность существует в том случае, если при некотором $r = r_0$ радиальная скорость \dot{r} при всех z равна нулю, т. е.

$$\partial U/\partial r + (e/c)\dot{z}H_{\theta} = 0. \quad (3.91)$$

Нетрудно убедиться, что для магнитного поля, заданного на ИП условиями $H_z = 0$ и $H_r = H_0 \sin \alpha z$, точная магнитная поверхность существует, если

$$H_{\theta} = 0; \quad q/r_0 = \partial q/\partial r_0; \quad D = 0. \quad (3.92)$$

Здесь $q(r)$ связана с ψ соотношением

$$\psi = \frac{H_0}{\alpha} \cos(\alpha z)q(r) = \frac{H_0}{\alpha} \cos(\alpha z) \left(1 + \frac{\alpha^2 y^2}{2} + \dots \right). \quad (3.93)$$

Если радиус основной поверхности r_0 мало отличается от радиуса исходной поверхности R , то, используя соотношение (3.93), можно условие (3.92) записать так:

$$r - R = 1/R\alpha^2 = \Lambda^2/\pi^2 R.$$

В общем случае, когда есть электрическое поле и условия (3.91) не выполняются, существует усредненная основная поверхность, определяемая из условия

$$(\partial \bar{U}/\partial r) + (e/c)\dot{z}H_{\theta} = 0.$$

§ 6. Тороидальный ТУМ

1. Задание магнитного поля. Будем следовать рассмотренной выше [см. соотношения (2.11), (2.12)] общей схеме задания магнитного поля с помощью ИП. Исходную поверхность выберем в виде тора круглого сечения с малым радиусом a и большим радиусом b .

* Предполагая, что на исходной поверхности тангенциальная компонента магнитного поля равна нулю.

С этим тором свяжем квазитороидальную систему координат r, β, α (рис. 21). Элемент дуги в этих координатах выражается формулой

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha + (\rho_0 + r \cos \alpha)^2 d\beta^2. \quad (3.94)$$

Учитывая, что в тороидальном ТУМе внешнее магнитное поле принципиально трехкомпонентно, будем описывать его магнитным скалярным потенциалом Ω , удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta \Omega = 0; \quad \mathbf{H} = \nabla \Omega. \quad (3.95)$$

В квазитороидальных координатах компоненты магнитного поля связаны с Ω соотношениями

$$H_r = \frac{\partial \Omega}{\partial r}; \quad H_\beta = \frac{1}{(\rho_0 + r \cos \alpha)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta};$$

$$H_\alpha = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \quad (3.96)$$

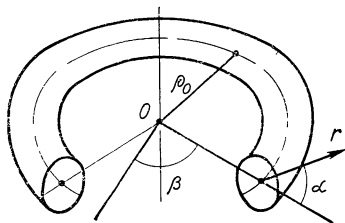


Рис. 21.

а уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{rR} \cdot \frac{\partial}{\partial r} rR \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2 R} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} R \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} = 0. \quad (3.97)$$

Периодическое (многолинзовое) магнитное поле на ИП зададим в виде

$$H_\alpha|_{\text{ИП}} = 0; \quad H_\beta|_{\text{ИП}} = 0; \quad H_r|_{\text{ИП}} = h_0(\alpha) \sin N\beta. \quad (3.98)$$

Здесь $2N$ — число линз, укладываемых на торе.

Используя (3.98), можно записать следующее выражение для магнитного потенциала периодического поля:

$$\Omega = y h_0(\alpha) \sin N\beta - \frac{y^2}{2} \cdot \frac{h_0(\alpha) \sin N\beta}{R_1} \cdot \frac{\rho_0 + 2R_1 \cos \alpha}{\rho_0 + R_1 \cos \alpha} + \dots \quad (3.99)$$

Наряду с периодическим полем в тороидальном ТУМе необходимо создавать магнитные поля, не зависящие от β . Их условно назовем постоянными.

Постоянное магнитное поле с компонентами $H_{\alpha 0}, H_{r 0}$, которое мы будем называть просто «поперечным полем», обеспечивает движение частиц вдоль большого азимута β . Оно полностью аналогично поперечным магнитным полям в существующих циклических ускорителях (бетатроне, циклотроне и т. д.).

На ИП значение $H_{\alpha 0}$ и $H_{r 0}$ в общем случае отлично от нуля. Если обозначить $h_\alpha(\alpha)$ и $h_r(\alpha)$ их значения на ИП, то можно на-

писать следующие выражения для потенциала поперечного поля Ω_{\perp} в окрестности ИП:

$$\Omega_{\perp} = R_1 \int h_{\alpha} d\alpha + y h_r(\alpha) - \frac{y^2}{2} \left(\frac{h_r(\rho_0 + 2R_1 \cos \alpha)}{R(\rho_0 + R_1 \cos \alpha)} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial \alpha} - h_{\alpha} \frac{\sin \alpha}{\rho_0 + R_1 \cos \alpha} \right) + \dots \quad (3.100)$$

Наряду с поперечным магнитным полем представляет интерес постоянное продольное магнитное поле, имеющее одну компоненту $H_{\beta 0}$. Это поле аналогично продольному полю H_{\parallel} в линейном ТУМе. Оно также может обеспечить подавление центробежной силы. Очевидно,

$$H_{\beta 0} \approx \frac{\text{const}}{\rho_0 + R_1 \cos \alpha}. \quad (3.101)$$

2. Динамика частиц в тороидальном ТУМе. Движение частицы в квазитороидальных координатах описывается системой уравнений:

$$M \frac{dv_r}{dt} = \frac{e}{c} \left[\frac{v_{\beta}}{R} H_{\alpha} - \frac{v_{\alpha}}{r} H_{\beta} \right] + \frac{Mv_{\alpha}^2}{r^3} + M \frac{v_{\beta}^2 \cos \alpha}{R^3}; \quad (3.102a)$$

$$M \frac{dv_{\beta}}{dt} = R \frac{e}{c} \left[\frac{v_{\alpha}}{r} H_r - v_r H_{\alpha} \right]; \quad (3.102б)$$

$$M \frac{dv_{\alpha}}{dt} = r \frac{e}{c} \left[v_r H_{\beta} - \frac{v_{\beta}}{R} H_r \right] - \frac{Mr v_{\beta}^2 \sin \alpha}{R^3}; \quad (3.102в)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r; \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{v_{\beta}}{R^2}; \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_{\alpha}}{r^2}. \quad (3.102г)$$

Разбивая магнитное поле на постоянную и периодическую части и считая, что время пролета линзы — это малый параметр, получаем следующие выражения для быстропеременных модуляций величин v :

$$\tilde{v}_r = \frac{e}{Mc} \left[R \hat{H}_{\alpha} - \frac{v_{\alpha}}{v_{\beta}} \cdot \frac{R^2}{r} \hat{H}_{\beta} \right]; \quad (3.103a)$$

$$\tilde{v}_{\beta} = \frac{e}{Mc} R^3 \frac{1}{v_{\beta}} \left[\frac{v_{\alpha}}{r} \hat{H}_r - v_r \hat{H}_{\alpha} \right]; \quad (3.103б)$$

$$\tilde{v}_r = \frac{e}{Mc} r R^2 \left[\frac{v_r}{v_{\beta}} \hat{H}_{\beta} - \frac{\hat{H}_r}{R} \right]. \quad (3.103в)$$

Усредненные уравнения имеют вид:

$$M \frac{dv_r}{dt} = \frac{e}{c} \left(\frac{v_{\beta}}{R} H_{\alpha 0} - \frac{v_{\alpha}}{r} H_{\beta 0} \right) + \frac{Mv_{\alpha}^2}{r^3} + \frac{Mv_{\beta}^2 \cos \alpha}{R^3} + \frac{e^2}{Mc^2} R \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{v_{\alpha}^2}{v_{\beta}^2} \right) \overline{\hat{H}_{\beta} \hat{H}_r}; \quad (3.104a)$$

$$M \frac{dv_\beta}{dt} = R \frac{e}{c} \left(\frac{v_\alpha}{r} H_{r0} - v_r H_{\alpha 0} \right) + \frac{e^2}{Mc^2} R^3 \left(\frac{v_r}{H_\beta} \overline{\widehat{H}_\beta \widehat{H}_r} + \frac{v_\alpha}{v_\beta} \cdot \frac{1}{r} \overline{\widehat{H}_\beta \widehat{H}_\alpha} \right); \quad (3.104\text{e})$$

$$M \frac{dv_\alpha}{dt} = r \frac{e}{c} \left(v_r H_{\beta 0} - \frac{v_\beta}{R} H_{r0} \right) - \frac{Mr v_\beta^2 \sin \alpha}{R^3} + rR \frac{e^2}{Mc^2} \overline{\widehat{H}_\alpha \widehat{H}_\beta} \left(1 + \frac{v_r^2}{v_\beta^2} R^2 \right) - \frac{e}{Mc^2} \cdot \frac{v_r v_\alpha}{v_\beta^2} \overline{\widehat{H}_r \widehat{H}_\beta}. \quad (3.104\text{в})$$

Если ограничиться линейным приближением по y , то в последних двух уравнениях члены, содержащие явное усреднение, можно опустить.

3. Основные траектории. Здесь, как и в цилиндрическом случае, существуют усредненные основные траектории. Рассмотрим класс таких ТУМов, у которых они лежат на исходной поверхности $r = R_1$.

Полагая в (3.104) $r = R_1 = \text{const}$, $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, получаем условия на поля $H_{\beta 0}$, $H_{\alpha 0}$, H_{r0} , при которых ОП и ИП совпадают:

$$\frac{e}{c} \left[\frac{v_\beta}{R_0} H_{\alpha 0} - \frac{v_\alpha}{R_1} \right] + \frac{Mv_\alpha^2}{R_1^3} + M \frac{v_\beta^2 \cos \alpha}{R_0^3} = 0; \quad (3.105\text{a})$$

$$M \frac{dv_\beta}{dt} = R_0 \frac{e}{c} H_{r0} \frac{v_\alpha}{R_1}; \quad (3.105\text{б})$$

$$0 = -\frac{e}{c} R_1 \frac{v_\beta}{R_0} H_{r0} - M \frac{R_1 v_\beta^2 \sin \alpha}{R_0^3}; \quad (3.105\text{в})$$

$$R_0 \equiv \rho_0 + R_1 \cos \alpha. \quad (3.105\text{г})$$

Нетрудно убедиться, что предпоследнее уравнение эквивалентно очевидному условию

$$\omega_\beta \equiv v_\beta/R_0 = v_0 = \text{const}. \quad (3.106)$$

Условия (3.105) определяют при данных v_0 и v_α компоненты поля $H_{\beta 0}$, H_{r0} , $H_{\alpha 0}$. Одна из них оказывается произвольной. Так, если потребовать равенство нулю тока, текущего вдоль сердечника,

$$\oint H_{\alpha 0} d\alpha = 0, \quad (3.107)$$

то при $v_\alpha = 0$ должна быть отлична от нуля компонента $H_{\beta 0}$. В частном случае, когда $v_\alpha = 0$, основные траектории — это окружности, лежащие на ИП. В этом случае уравнение (3.105б) означает, что

$$v_\beta = \text{const}, \quad (3.108)$$

и поэтому значения азимутальной скорости ω_β на разных траекториях не связаны между собой.

Два остальных уравнения определяют компоненты поперечного магнитного поля на ОП:

$$H_{\alpha 0} \equiv h_{\alpha} = -(Mc/e)\dot{\beta}(\alpha) \cos \alpha; \quad (3.109a)$$

$$H_{r_0} = h_r = -(Mc/e)\dot{\beta}(\alpha) \sin \alpha. \quad (3.109b)$$

Если $\beta(\alpha) = \text{const}$, то поперечное поле однородно и направлено вдоль z . Если $\dot{\beta}(\alpha) \neq 0$, то на ОП поле по-прежнему направлено вдоль z . В окрестности ОП его можно определить с помощью (3.100):

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & -\frac{R_1 Mc}{e} \int \dot{\beta}(\alpha) \cos \alpha d\alpha - y \frac{Mc}{e} \dot{\beta}(\alpha) \sin \alpha + \\ & + \frac{y^2}{2} \cdot \frac{Mc}{R_1 e} \cdot \frac{\partial \dot{\beta}(\alpha)}{\partial \alpha} \cos \alpha + \dots \end{aligned} \quad (3.110)$$

4. Устойчивость основных траекторий при $v_{\alpha} = 0$. Общее исследование поведения решений системы (3.102) в окрестности основных траекторий (3.105) достаточно сложно. Однако в широком диапазоне параметров физически очевидна устойчивость движений частиц с $\overline{v_{\alpha}} \neq 0$.

Случай с $v_{\alpha} = 0$ должен быть менее устойчивым. Поэтому его исследование кажется важным, тем более что оно существенно проще.

Линеаризация системы (3.102) при условии (3.105) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dt^2} + 2 \cos^2 \alpha_0 \beta_0^2 + \omega_0^2 - \left(\frac{\partial \omega_{\alpha 0}}{\partial r} \right) \frac{v_{\beta 0}}{R_0} \right] y_1 - \\ & - \left[R_0 \beta \left(\frac{\partial \omega_{\alpha 0}}{\partial \alpha} - \dot{\beta} \sin \alpha_0 + \frac{R_1}{R_0} \dot{\beta} \sin 2\alpha_0 \right) - \right. \\ & \left. - R_1 \frac{e}{c} H_{\beta 0} \frac{d}{dt} \right] \alpha_1 - \dot{\beta} \cos \alpha_0 \frac{v_{\beta 1}}{R_0} = 0; \end{aligned} \quad (3.111a)$$

$$v_{\beta 1} = R_0 R_1 \omega_{r_0} \alpha_1 - R_0 \omega_{\alpha 0} y_1; \quad (3.111b)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{v_{\beta 0}}{R_1 R_0} \left(\frac{\partial \omega_{r_0}}{\partial \alpha} + 2 \frac{R_1}{R} \sin^2 \alpha_0 \dot{\beta} + \dot{\beta}_0 \cos \alpha \right) \right] \alpha_1 + \\ & + \left[\frac{v_{\beta 0}}{R_1 R_0} \left(\frac{\partial \omega_{r_0}}{\partial r} - \frac{\sin 2\alpha_0}{R_0} \dot{\beta}_0 \right) - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{e H_{\beta 0}}{Mc} \cdot \frac{d}{dt} \right] y + \\ & + \frac{\sin \alpha_0}{R_0^2} v_{\beta 0} \frac{v_{\beta 1}}{R_0 R_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.111b)$$

Здесь нулем отмечены величины, взятые на основной траектории, и, кроме того, введены обозначения

$$y \omega_0^2 = \frac{e^2}{M^2 c^2} R_0 \tilde{H}_{\beta} \hat{H}_r; \quad \omega_{r_0} = \frac{e H_{r_0}}{Mc}; \quad \omega_{\alpha 0} = \frac{e H_{\alpha 0}}{Mc}. \quad (3.112)$$

Ограничившись случаем $\dot{\beta} = \text{const}$, получим следующее характеристическое уравнение ($y_1, \alpha_1, v_{\beta 1} \approx \exp i\omega t$):

$$\omega^4 - (\omega_0^2 + \dot{\beta}_0^2 + \omega_{\beta 0}^2) \omega^2 + \omega_0^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \alpha = 0. \quad (3.113)$$

Как и следовало ожидать, колебания оказываются всюду устойчивыми, за исключением колебаний вдоль поперечного поля при $\sin \alpha = 0$, где они нейтральны. Этот результат и делает в широком диапазоне параметров в высшей степени вероятной устойчивость движения частиц при $v_\alpha \neq 0$.

Г Л А В А 4

П Л А З М О О П Т И Ч Е С К И Е С И С Т Е М Ы С Д В У Х П А Р А М Е Т Р И Ч Е С К О Й Ф О К У С И Р О В К О Й

§ 1. Системы со стабилизированным фокусом

Под двухпараметрической, или двойной, фокусировкой обычно понимают фокусировку по каким-либо двум параметрам пучка*. В данной главе рассмотрены системы, фокусирующие расходящийся ионный пучок и свободные либо от хроматической, либо от моментной аберрации. Такие системы выгодно отличаются от систем с однопараметрической фокусировкой относительной нетребовательностью к стабильности источника ионов.

1. Ахроматические системы линз. Под стабилизацией фокуса мы понимаем устранение продольной хроматической аберрации в линзах при сохранении геометрической фокусировки. Это соответствует уничтожению члена $dz_1/d\alpha$ в (2.27). В лучевой оптике ахроматические линзы получают, склеивая две линзы, одна из которых собирающая, другая — рассеивающая с относительно большей величиной дисперсии (апохроматор Аббе). Как показано в гл. 3, § 1, в случае вакуумных и плазменных осевых систем такую схему воспроизвести нельзя. В случае плазменных кольцевых линз ситуация иная. Здесь можно сделать собирающую линзу с $F \approx v_0^2$ и рассеивающую с $F \approx v_0^4$, т. е. буквально осуществить лучевую схему стабилизации. Остановимся на этом более подробно. Пусть фокусные расстояния двух линз равны

$$F_1 = F_{10} (v/v_0)^{n_1}; \quad F_2 = F_{20} (v/v_0)^{n_2}. \quad (4.1)$$

Здесь v_0 — характерное значение скорости частиц; n_1, n_2 — неотрицательные числа; F_{10}, F_{20} — фокусные расстояния линз для скорости v_0 . Если характерное расстояние между линзами L ,

* Если рассмотреть выражение (2.266), то двухпараметрическая фокусировка соответствует уничтожению каких-либо двух членов ряда (2.266).

а источник расположен на расстоянии a_1 от первой линзы (рис. 22), то точка фокусировки определяется известными соотношениями

$$1/a_1 + 1/b_1 = 1/F_1; \quad 1/a_2 + 1/b_2 = 1/F_2; \quad a_2 = L - b_1. \quad (4.2)$$

Вводя вспомогательные переменные

$$\alpha = 1/a_1; \quad \beta = 1/b_2; \quad \omega_1 = 1/F_1; \quad \omega_2 = 1/F_2, \quad (4.3)$$

перепишем (4.2) вместе с условием стабилизации $\partial b_2/\partial v = 0$ в виде :

$$\frac{1}{\omega_1 - \alpha} + \frac{1}{\omega_2 - \beta} = L; \quad \left(\frac{\omega_1 - \alpha}{\omega_2 - \beta} \right)^2 = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (4.4)$$

Из уравнений (4.4) сразу видно, что при $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ для стабилизации фокуса необходимо взять одну линзу собирающую,

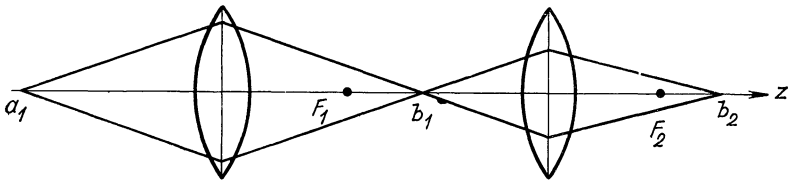


Рис. 22.

а другую — рассеивающую (например $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$). Систему (4.4) можно упростить, если обозначить $1/(\omega_1 - \alpha) = \xi$; $1/(\omega_2 - \beta) = \eta$; $n_1/n_2 = \theta$ и положить $L = 1$. Тогда вместо (4.4) получим

$$\xi + \eta = 1. \quad \frac{\eta}{\xi} = -\theta \frac{1 + \xi\alpha}{1 + \eta\beta}. \quad (4.5)$$

Отсюда находим

$$\eta = \frac{-1 + \theta(1 + 2\alpha) \pm \sqrt{(1 - \theta)^2 - 4\theta(\alpha + \beta + \alpha\beta)}}{2(\beta + \alpha\theta)}. \quad (4.6)$$

Из условия неотрицательности дискриминанта

$$D = (1 - \theta)^2 - 4\theta(\alpha + \beta + \alpha\beta) > 0 \quad (4.7)$$

найдем отношение $n_1/n_2 = \theta$, при котором возможна стабилизация.

Области $D \geq 0$ показаны на рис. 23. Наклон прямой $y = 4\theta(\alpha + \beta + \alpha\beta)$ зависит от оптической силы линз. Видно, что стабилизация возможна при $\theta < \theta_1^*$, $\theta > \theta_2^*$. Заметим, что области θ , при которых возможна стабилизация, соответствуют лучевой схеме. При $\theta < \theta_1^*$ первая линза должна быть собирающей $\omega_1 > 0$, а вторая — рассеивающей $\omega_2 < 0$, причем для создания действительного изображения необходимо, чтобы $\omega_1 > |\omega_2|$. В области $\theta > \theta_2^*$ для стабилизации фокуса нужно взять линзы с $\omega_1 < 0$, $\omega_2 > 0$ и

$|\omega_1| < \omega_2$. Собирающую и рассеивающую линзы можно совместить, т. е. сделать $L = 0$. В этом случае условие стабилизации фокуса имеет вид

$$\omega_1 = -\theta\omega_2, \quad (4.8)$$

а действительное изображение получается, если $\theta < 1$. В самом деле, фокусное расстояние такой «совмещенной» системы равно

$$\beta = \omega_2(1 - \theta); \quad \alpha = 0. \quad (4.9)$$

Системы со стабилизированным фокусом, построенные из тонких линз, обладают довольно большим фокусным расстоянием. Для уменьшения фокусного расстояния можно либо использовать линзы со значительной протяженностью полей, либо иметь возможность изменять скорость частиц в промежутке между линзами.

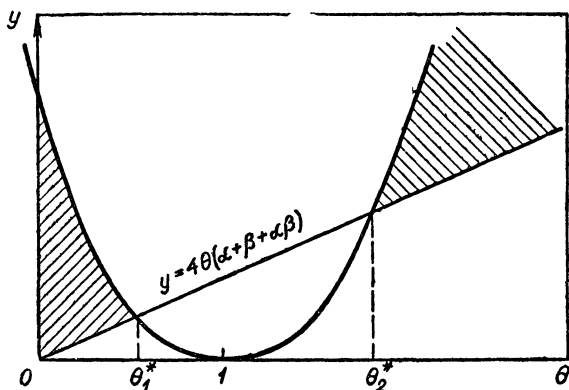


Рис. 23.

2. Трехэлементная система со стабилизированным фокусом

Для примера короткофокусного устройства рассмотрим систему, состоящую из трех элементов (рис. 24): толстой магнитной линзы с продольным полем 1, тормозящего элемента 2, уменьшающего скорость частиц без изменения направления движения, и тонкой рассеивающей линзы 3.

Если поместить источник в начало координат $z = 0$, а тонкую линзу на расстоянии L от источника, то точка фокусировки определится как

$$1/z_2 = 1/(z_1 - L) - 1/F_2, \quad (4.10)$$

где z_2 — точка фокусировки, отсчитываемая от центра тонкой линзы; z_1 — координата по z точки фокусировки толстой линзы; F_2 — фокусное расстояние тонкой линзы.

Ограничимся для простоты плоским случаем $R \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что частицы, выходя из толстой линзы с однородным продольным полем, сфокусируются в точке

$$z_1 = z_0 - \frac{1}{2} R_{\Lambda i} \operatorname{tg} \frac{2z_0}{R_{\Lambda i}}, \quad (4.11)$$

где z_0 — протяженность поля толстой линзы; $R_{\Lambda i} = v_0/\omega_{H_i}$ — ларморовский радиус ионов; $\omega_{H_i} = eH_0/Mc$; H_0 — напряженность продольного магнитного поля.

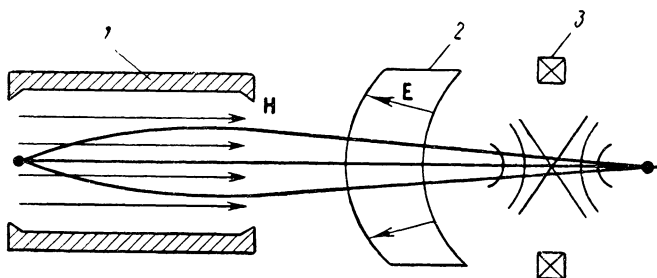


Рис. 24.

Если взять вместо тонкой рассеивающей линзы билинзу с электростатической фокусировкой, то ее фокусное расстояние [см. формулу (3.45)] равно

$$F_2 = F_0 (v_2/v_0)^4, \quad (4.12a)$$

где v_2 — скорость ионов, попадающих в билинзу. Условие стабилизации фокуса, очевидно, имеет вид

$$\partial z_2 / \partial v_0 = 0. \quad (4.13a)$$

Учитывая соотношения (4.10), можно (4.13a) переписать в виде

$$\partial z_1 / \partial F_2 = (z_1 - L)^2 / F_2^3. \quad (4.13b)$$

Здесь вариация z_1 и F_2 проводится по скоростям. Подставляя в (4.13b) выражения (4.11) и (4.12a), получаем связь фокусных расстояний z_1 и F_2 :

$$F_2 = \frac{4(z_1 - L)^2}{z_1 + k} \cdot \frac{v_1}{v_2}; \quad k = z_0 \operatorname{tg}^2 \frac{2z_0}{R_{\Lambda i}}. \quad (4.12b)$$

Используя (4.13b), (4.12a) и (4.10), находим

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 - L} \left(1 - \frac{z_1 + k}{4(z_1 + L)} \cdot \frac{v_2}{v_1} \right). \quad (4.14)$$

Потребуем, чтобы z_2 было положительно (собирающая система), получим условие на степень замедления ионов в тормозящей системе:

$$\frac{v_1}{v_2} > \frac{z_1 + k}{4(z_1 - L)}. \quad (4.15)$$

Тормозящая система должна быть тонкой вдоль ИП, причем ее силовые линии должны совпадать с траекториями частиц.

§ 2. Фокусировка по радиальным и азимутальным скоростям (А-система)

1. Структура А-системы. В этом параграфе рассмотрена аксиально симметричная плазмооптическая система, способная при $T_e = 0$ фокусировать КИП, частицы которого имеют разброс по v_r и v_θ . В отличие от системы со стабилизированным фокусом (см. § 1 гл. 4) в этой системе уничтожается не продольная хроматическая аберрация, а поперечная моментная. Структура полей системы изображена на рис. 25. В этой системе следует различать три элемента: азимутатор (+А), фокусирующий промежуток (ФП) и деазимутатор (-А). Так как элементы (+А) и (-А) в большой степени определяют свойства системы и принцип ее работы, назовем это устройство А-системой. Рассмотрим работу каждого элемента в отдельности.

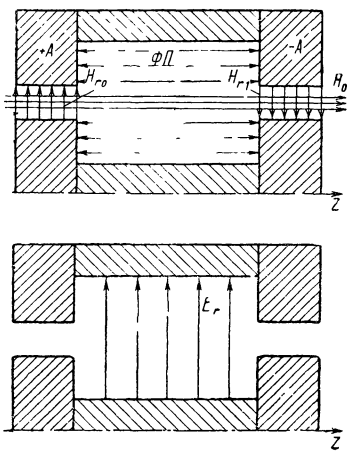


Рис. 25.

В азимутаторе магнитное поле близко к радиальному $H_r \sim 1/r$. Пройдя азимутатор, частицы пересекают магнитный поток ψ_A и приобретают угловую скорость

$$v_{\theta A} = -\frac{e}{Mc} \psi_A, \quad (4.16)$$

где ψ_A — магнитный поток в азимутаторе.

Деазимутатор имеет ту же структуру полей, что и азимутатор, только с противоположным направлением вектора напряженности магнитного поля. Ясно, что так как в ФП частица не приобретает дополнительной закрутки δv_θ , то при равенстве абсолютных величин магнитных потоков в азимутаторе и деазимутаторе угловая скорость, приобретенная в азимутаторе, компенсируется в деазимутаторе и частица выходит из системы с начальной угловой скоростью $v_{\theta 0}$.

Фокусирующий промежуток — это цилиндрический конденсатор с радиальным электрическим полем $E_r \approx 1/r$ и наложенным однородным продольным магнитным полем $H_z = H_0 = \text{const}$.

Равновесная траектория в пределах ФП представляет собой окружность в плоскости $r\theta$. При этом необходимо, чтобы центробежная сила уравновешивалась силой Лоренца и действием электрического поля

$$Mv_{\theta}^2/R = eE_0 + (e/c)v_{\theta}H_0; v_r = 0, \quad (4.17)$$

где R — радиус равновесной траектории; E_0 , H_0 — напряженности электрического и магнитного полей соответственно при $r = R$.

Если магнитный поток азимутатора такой, что частицы на выходе из него приобретают скорость v_{θ} в соответствии с (4.17), то в ФП частицы будут двигаться около цилиндрической поверхности радиуса $r = R$, которая является в данном случае ОП. Фокусирующий промежуток обладает той же фокусирующей способностью, что и обычный цилиндрический конденсатор с однородным магнитным полем, направленным вдоль его оси симметрии. Как показано в работе [2], расходящийся поток частиц, имеющий азимутальную скорость v_{θ} , удовлетворяющую в первом приближении условию (4.17), фокусируется при повороте частиц на угол

$$\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2 + \omega_H^2/\dot{\theta}^2}}. \quad (4.18)$$

Здесь $\omega_H = eH_0/Mc$; $\dot{\theta} = v_{\theta}/R$. При этом длина фокусировки по ИП определяется из простого соотношения

$$L = v_z T = v_z \frac{R\theta}{v_{\theta}}, \quad (4.19)$$

где T — время поворота частиц на угол θ .

Рассматриваемая А-система — почти транзитивна, т. е. ее свойства практически не меняются при переходе от вакуумного режима к плазменному. Действительно, в обоих случаях в ФП электрическое поле $E \sim 1/r$, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому эта область А-системы транзитивна.

В азимутаторе и деазимутаторе картина электрических полей и магнитных полей, строго говоря, нетранзитивна. Но если зазор между полюсами там достаточно мал, то поле в зазоре можно считать плоским и поэтому его можно сделать транзитивным (см. гл. 2, § 2).

Интересно отметить, что фокусирующие свойства системы зависят от массы ионов. Если из источника выходят ионы с массами $M_0 + \delta M$, то после азимутатора они приобретают скорость v_{θ} , не зависящую от начальной скорости ионов, но различную для разных масс (4.16). Условие равновесия (4.17) при данных E и H выполняется только при одном значении $v_{\theta 0}$, соответствующем некоей массе M_0 , и не выполняется для ионов других масс, поэтому ионы с массами, отличными от M , будут смещаться с равновесной поверхности $r = R$ и фокусироваться на других радиусах.

2. Поля в А-системе. Так как движение пучка частиц в А-системе рассматривается вблизи ИП, то естественно воспользоваться уравнениями движения около ИП в форме (2.51). Можно показать, что влиянием рассеянных полей, согласующих поля отдельных участков системы, можно пренебречь. Поэтому допустимо рассматривать резкую границу между участками, находить вид траектории в каждом из трех участков и сшивать решения на границе.

В последующих расчетах будет принята следующая простая картина полей (см. рис. 25). Магнитное поле во всем объеме А-системы имеет постоянную z -составляющую H_0 . В пределах азимутатора и деазимутатора существует радиальное магнитное поле

$$H_r = H_{r0}R/r, \quad (4.20)$$

величина которого не зависит от z .

Электрическое поле существует только в пределах ФП и равно $E_r = E_{r0}R/r$. Так как азимутатор и деазимутатор не обладают фокусирующей способностью, то будем для простоты изложения считать длину ($+A$) и ($-A$) бесконечно малой, а сами поля δ -образными. Тогда смещением траектории частицы в азимутаторе и деазимутаторе можно пренебречь. Так как движение частиц в ФП происходит вблизи ИП, то функцию магнитного потока ψ представим в виде ряда (2.15б), ограничившись для параксиального приближения первыми членами разложения. Для магнитного поля (4.20) получим

$$\psi_0 = 0; \psi_1 = H_0R; \psi_2 = H_0. \quad (4.21)$$

Скалярный потенциал электрического поля в ФП также представим в виде ряда (2.43) с коэффициентами

$$\Phi_0 = 0; \Phi_1 = -E_0; \Phi_2 = E_0/R. \quad (4.22)$$

3. Фокусировка по радиальным скоростям. Рассмотрим сначала фокусировку пучка частиц, выходящих из кольцевого источника с координатами $y = 0, z = 0$ со скоростями $\mathbf{v}_0 = \{v_{r0}, 0, v_{z0}\}$.

Ограничиваясь параксиальным приближением и используя уравнение пучка (2.51), найдем с учетом (4.21) и (4.22) коэффициенты a, b, c , считая, что после прохождения δ -азимутатора частицы приобрели азимутальную скорость $v_{\theta 0}$:

$$a_0 = 0; \quad (4.23a)$$

$$b_0 = \frac{1}{Mv_z^2} \left(\frac{3Mv_{\theta 0}^2}{R^2} + M\omega_H^2 + \frac{3M\omega_H v_{\theta 0}}{R} + \frac{eE_0}{R} \right); \quad (4.23б)$$

$$c_0 = \frac{1}{Mv_z^2} \left(\frac{Mv_{\theta 0}^2}{R} + M\omega_H v_{\theta 0} + eE_0 \right). \quad (4.23в)$$

Здесь $\omega_H = eH_0/Mc$; $v_z^2 = v_0^2 - v_{\theta 0}^2$. Индексом «0» отмечены величины нулевого порядка.

Из уравнения (2.51) следует, что для выполнения условия равновесия нужно положить c_0 равным нулю:

$$Mv_{\theta 0}^2/R + M\omega_H v_{\theta 0} + eE_0 = 0. \quad (4.24)$$

Это условие, как будет видно в дальнейшем, полностью совпадает с условием (4.17). Решение однородного уравнения (2.51) имеет вид

$$y = A \sin \sqrt{b_0} z + B \cos \sqrt{b_0} z, \quad (4.25)$$

где для принятых выше начальных условий

$$A = y'_{00}/\sqrt{b_0}; \quad B = 0; \quad y'_{00} = v_{r0}/v_z. \quad (4.26)$$

Ясно, что А-система обладает фокусировкой по радиальным скоростям, причем длина фокусировки равна

$$L = \pi/\sqrt{b_0}. \quad (4.27)$$

С учетом условия равновесия (4.24) b_0 можно представить в виде

$$b_0 = \frac{1}{Mv_z^2} \left(\frac{2Mv_{\theta 0}^2}{R^2} + M\omega_H^2 + \frac{2M\omega_H v_{\theta 0}}{R} \right), \quad (4.28)$$

исключив тем самым явную зависимость длины фокусировки от величины напряженности электрического поля.

4. Фокусировка по азимутальным скоростям. Предположим, что при входе в систему частицы обладают разбросом по азимутальным скоростям δv_{θ} , т. е. $\mathbf{v} = \{v_{r0}, \delta v_{\theta}, v_{z0}\}$, и будем считать для общности, что источник имеет конечные размеры y_{00} . Тогда в параксиальном приближении коэффициент c в уравнении (2.51) имеет вид

$$c = c_0 + c_1, \quad (4.29)$$

где c_1 — величина первого порядка малости по D_0, y_{00} :

$$c_1 = -\frac{1}{Mv_z^2} \left(2 \frac{v_{\theta 0}}{R} + \omega_0 \right) \left(\frac{D_0}{R} + y_{00} M\omega_0 \right). \quad (4.30)$$

При нахождении коэффициента c_1 мы учли, что частицы, проходя δ -азимутатор, имеют азимутальную скорость

$$v_{\theta 0} = \frac{e}{Mc} \cdot \frac{R}{(y_{00} + R)} \int_0^{\lambda} H_{r0} dz + \delta v_{\theta}, \quad (4.31)$$

где $\lambda \rightarrow 0$ — длина азимутатора.

Обобщенный импульс в ФП с точностью до членов первого порядка малости

$$D = D_0 \left(1 + \frac{\delta v_{\theta}}{v_{\theta 0}} \right) + M\omega_H R y_{00} = \text{const},$$

где $D_0 = MR v_{\theta 0}$. Общее решение уравнения (2.51) имеет вид

$$y = \frac{y'_{00}}{\sqrt{b_0}} \sin \sqrt{b_0} z + y_{00} \cos \sqrt{b_0} z + \frac{c_1}{b_0} (\cos \sqrt{b_0} z - 1). \quad (4.32)$$

Из решения (4.32) следует, что фокусировка по азимутальным скоростям возможна либо при $z = 2\pi/\sqrt{b_0}$ — двухполупериодная фокусировка, либо при $c_1 = 0$. Последнее условие приводит к следующему соотношению между $v_{\theta 0}$ и ω_H :

$$2 \frac{v_{\theta 0}}{R} + \omega_H = 0, \quad (4.33)$$

которое эквивалентно условию

$$D_0 = 0. \quad (4.34)$$

Условие (4.34) означает равенство магнитных потоков в азимутаторе и ФП. Длина фокусировки при выполнении условия (4.33)

$$L = \frac{\pi \sqrt{2}}{\omega_H} v_z. \quad (4.35)$$

Из решения (4.32) можно найти поперечный размер изображения источника. Если полуширина источника y_{00} , то полуширина изображения в месте фокусировки

$$y|_{z=L} = -y_{00} (1 + 2 c_1/b_0). \quad (4.36)$$

Подставляя явный вид b_0 и c_1 в выражение (4.36), получаем

$$y|_{z=L} = \left[-1 + 2 \frac{\frac{2v_{\theta 0} \omega_H}{R} + \omega_H^2}{2 \frac{v_{\theta 0}^2}{R} + \omega_H^2 + 2 \frac{\omega_H v_{\theta 0}}{R}} \right] y_{00}. \quad (4.37)$$

При выполнении условия (4.33) коэффициент увеличения системы $y|_{z=L}/y_{00} = -1$, т. е. А-система подобна тонкой линзе при помещении предмета на двойном фокусном расстоянии.

§ 3. Рекуператор

Рекуператор предназначен для отбора энергии частиц электрическим полем при их торможении. В качестве простейшего тормозящего элемента можно использовать обращенный однолинзовый ускоритель, описанный выше.

Как правило, рекуперлируемые КИП имеют широкий энергетический спектр. Поэтому перед рекуперацией выгодно разделить

пучок по энергиям и тормозить моноэнергетически пучки. Для повышения эффективности работы рекуператора следует учесть конечную ширину пучка и предусмотреть возможность исправления сферической aberrации. В аксиально симметричных системах разделению пучка по энергиям может препятствовать наличие разброса по азимутальным составляющим скорости (моментная aberrация). Эту aberrацию также нужно скорректировать. Одна из простейших схем рекуператоров, удовлетворяющая указанным выше условиям, показана на рис. 26, где 1 — тороидальный конденсатор, 4 — приемное тормозящее устройство с разделенными источниками питания 3.

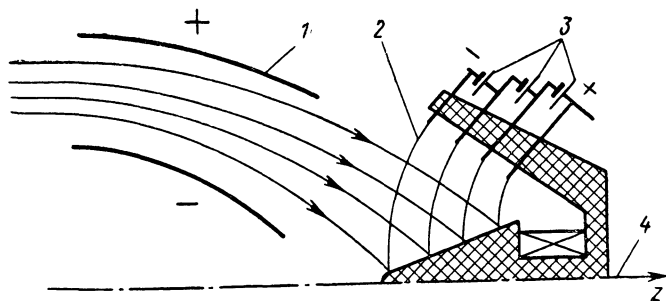


Рис. 26.

Эквипотенциали 2 при $T_e = 0$ совпадают с силовыми линиями магнитного поля. Силовые линии магнитных полей конденсатора направлены по большому и малому кругам тора.

Рассмотрим работу такой системы в предельном случае $r \rightarrow \infty$. Выбрав цилиндрическую систему координат так, чтобы ось z проходила через центр малого круга тора, а ось r совпадала по направлению с электрическим полем \mathbf{E} , можно написать лагранжиан в виде

$$L = \frac{M}{2} (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} (\mathbf{A}\mathbf{v}) - e\Phi(rA_\theta), \quad (4.38)$$

где $\mathbf{A} = \{0, A_\theta, A_z\}$. Учитывая цикличность координат z и θ , получаем функцию Рауса

$$R = Mr^2/2 - U(r), \quad (4.39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U(r) = & \frac{M}{2} \left(p - \frac{e}{Mc} A_z \right)^2 + \frac{\left(D - \frac{e}{c} rA_\theta \right)^2}{2Mr^2} + e\Phi(rA_\theta); \\ p = & \dot{z} + \frac{e}{Mc} A_z; \quad D = Mr^2\dot{\theta} + \frac{e}{c} rA_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Таким образом, имеем одномерное движение в потенциальном поле $U(r)$. Уравнение движения запишем в виде

$$M \ddot{r} = - \frac{\partial U(r)}{\partial r}, \quad (4.41)$$

а условие фокусировки

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Будем считать, что движение пучка происходит вблизи круговой траектории $r = R$ (условие равновесия при таком движении введем ниже), и разложим потенциал $U(r)$ в ряд по степеням $y = r - R$, сохраняя члены порядка y^3 , связанные со сферической aberrацией:

$$U(y) = U(R) + \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{r=R} y^2. \quad (4.42)$$

Выбрав компоненты A_θ и A_z в виде

$$A_\theta = -rH_0/2; \quad A_z = -H_0R \ln r/R \quad (4.43)$$

и зависимость $\Phi(rA_\theta)$

$$\Phi(rA_\theta) = k\psi + q\psi^2/2R^2, \quad \psi = rA_\theta, \quad (4.44)$$

приходим к следующему уравнению движения вблизи основной круговой траектории:

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = Q + sy^2 + \delta Q, \quad (4.45)$$

где

$$\delta Q = - \frac{\omega_\theta \delta p + 2D \delta D}{M^2 R^3}; \quad \omega_0 = \frac{eH_0}{Mc}; \quad \omega_\theta = \frac{eH_\theta}{Mc}; \quad (4.46a)$$

$$\Omega^2 = - \frac{\omega_0 p}{R} + \omega_0^2 + \frac{3D^2}{M^2 R^4} + \frac{\omega_0^2}{4} - \frac{e}{M} \cdot \frac{k}{R} H_0 + \frac{e}{M} \frac{3}{2} H_0^2 q; \quad (4.46b)$$

$$Q = \omega_0 p - \frac{D^2}{M^2 R^3} + \frac{\omega_0^2 R}{4} \cdot \frac{e}{M} k H_0 + \frac{e}{M} \frac{1}{2} q R H_0^2; \quad (4.46b)$$

$$s = \frac{\omega_\theta p}{R^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega_0^2}{R} - 6 \frac{D^2}{M^2 R^2} + \frac{e}{M} \frac{3}{2} q \frac{H_0^2}{R}. \quad (4.46г)$$

Здесь δp , δD — разброс значений p и D соответственно.

В (4.45) входят четыре свободных параметра ω_0 , ω_θ , q , k и параметр p , который в принципе можно варьировать с помощью азимутатора (см. гл. 4 § 2).

Условие равновесия при движении по основной траектории примет вид $Q = 0$. Найдем отсюда значение q и потребуем, чтобы сферическая aberrация $s = 0$, тогда получим решение уравнения (4.45) в виде

$$y = B \sin \Omega t + \frac{-\omega_0 \delta p + 2D \delta D}{\Omega^2} \frac{1}{M^2 R^3} (1 - \cos \Omega t), \quad (4.47)$$

где B — постоянная, зависящая от начальных условий.

Так как k и ω_0 произвольны, то их можно использовать для изменения длины фокусировки или для устранения еще какой-либо абберации. Как видно из (4.47), моментная абберация, связанная с δp , здесь не устраняется. Поэтому для разделения пучка по энергиям необходимо, чтобы выполнялось дополнительное условие

$$(\delta p/\delta D) \ll (2D/MR^3\omega_0) \quad (4.48)$$

или

$$(\delta v_z/\delta v_\theta) \ll 2 \frac{R_{\Delta\theta}}{R}, \quad (4.49)$$

где $R_{\Delta\theta} = v_\theta/\omega_\theta$. В случае $\delta v_z/\delta v_\theta \approx 1$ получим ограничения на величину $R_{\Delta\theta}$ в виде

$$2R_{\Delta\theta} \gg R. \quad (4.50)$$

Исключая p и q из Ω^2 с помощью условий $Q = 0$, $s = 0$, получаем при $\omega_\theta \approx 0$

$$\Omega^2 = \frac{12D^2}{M^2 R^4} + \omega_0^2 - 4 \frac{e}{M} \cdot \frac{k}{R} H_0. \quad (4.51)$$

При выводе (4.51) предполагалось, что значения p можно варьировать с помощью азимутатора. В том случае, когда азимутатора нет и $p = 0$, фокусировка и разделение по энергиям сохраняются, но

$$\Omega^2 = 8 \frac{D^2}{M^2 R^4}. \quad (4.52)$$

Так как в этом случае длина фокусировки равна

$$L = \pi R/2\sqrt{2}, \quad (4.53)$$

то она не зависит от начальной скорости частиц, а величины k и q фиксированы*:

$$k = \frac{1}{\omega_0 c} \left(\frac{\omega_0^2 R}{4} + \frac{1}{2} \omega_0^2 R + \frac{D^2}{M^2 R^3} \right); \quad (4.54)$$

$$q = \frac{2e}{\omega_0^2 c^2 M} \left(\frac{1}{2} \omega_0^2 R - 2 \frac{D^2}{M^2 R^3} \right). \quad (4.55)$$

ГЛАВА 5

РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ КИП

§ 1. Термализованный потенциал

Как уже отмечалось выше, под равновесными конфигурациями КИП мы понимаем теоретические модели КИП, учитывающие конечность электронной температуры и граничные условия на стенках канала (включая источник ионов и его приемник).

* Здесь ω_0 — свободный параметр, а ω_θ следует взять возможно меньшим для корреляции моментной абберации.

В дальнейшем будем считать T_e известным, за исключением § 2. Это объясняется тем, что T_e априори определяется слишком большим числом факторов, и выделение из них наиболее существенных — дело будущего.

Если $T_e \neq 0$, а столкновения редки, то закон Ома можно записать в виде

$$\frac{\nabla p_e}{en} - \nabla \Phi + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{H}] = 0. \quad (5.1)$$

Считая, что вдоль силовой линии $T_e = \text{const}$, т. е. $T_e = T_e(\gamma)$, из (5.1) автоматически получаем, что при $T_e \neq 0$ вдоль магнитной силовой линии сохраняется не электрический потенциал Φ , а «термализованный» потенциал

$$\Phi^* = \Phi - (kT_e(\gamma)/e) \ln n/n_0. \quad (5.2)$$

Здесь n_0 — некая постоянная.

Отличие термализованного потенциала от электрического связано с тем, что для обеспечения квазинейтральности те участки силовой линии, где плотность больше, должны иметь и более высокий электрический потенциал. Эффект термализации потенциала, очевидно, приводит к добавочному расширению ионного пучка. Этот эффект есть не что иное, как расширение пучка под действием электронного давления. Оно проявляется особенно сильно вблизи границы пучка, где (∇n) особенно велик. Так, при $T_e \sim 1$ эв и $(n_{\text{мин}}/n_{\text{макс}}) \sim 10^{-3}$ скачок потенциала будет около 7 эв. Если пучок не окружен хотя бы очень редкой «шубой», то вычисленный с помощью (5.2) граничный скачок потенциала бесконечно велик при любой T_e . В действительности, формула (5.2)

здесь становится уже не применимой (см. подробнее § 4). Различие между Φ и Φ^* проявляется отчетливо, если

$$\left| \nabla_{\parallel} \left(\frac{kT_e}{e} \ln \frac{n}{n_0} \right) \right| \gg \left| \nabla_{\perp} \Phi \right|. \quad (5.3)$$

Индексы \parallel и \perp означают, что производные берутся вдоль и поперек направления магнитного поля.

Очевидно, условие (5.3) эквивалентно следующей оценке:

$$\left| \frac{1}{\delta_{\parallel}} \frac{kT_e}{e} \right| \gg |E_{\perp}|. \quad (5.4)$$

Здесь δ_{\parallel} — масштаб неоднородности распределения плотности вдоль магнитного поля.

Эксперименты очень четко демонстрируют сказанное. На рис. 27 показано распределение электрического потенциала (а) в канале «однолинзового» ускорителя с замкнутым дрейфом, даны

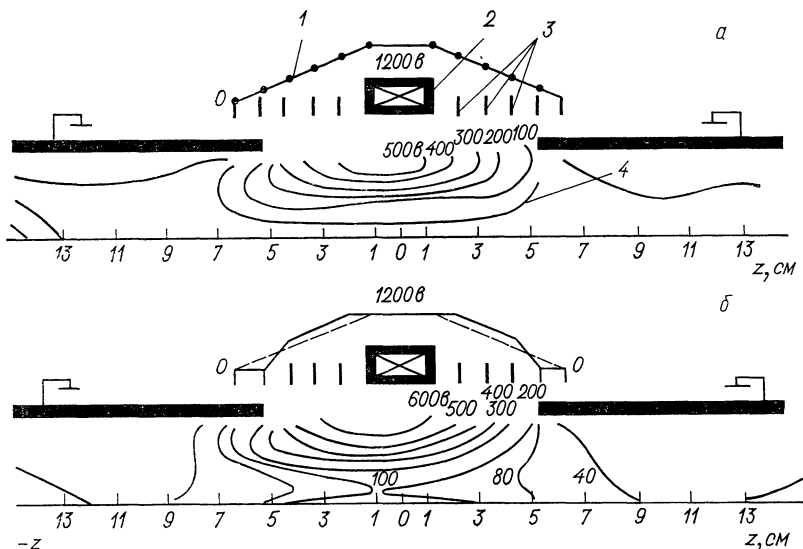


Рис. 28.

картины магнитных силовых линий (б), плотности потока, а также распределение T_e (в). Хорошо видно, что эквипотенциали существенно отличаются от магнитных силовых линий. Однако если по известным Φ , n , T_e рассчитать Φ^* , то в пределах точности экспериментальных данных линии $\Phi^* = \text{const}$ совпадают с линиями $\psi = \text{const}$, т. е. магнитными силовыми линиями [42].

Аналогичную ситуацию мы имеем и в осевой плазменной линзе. Здесь также кривые $\Phi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ сильно отличаются друг от друга (рис. 28). Здесь 2 — катушка, создающая магнитное поле; 3 — гребенка электродов, фиксирующая потенциал магнитных силовых линий; 1 — график распределения потенциала по электродам гребенки; 4 — эквипотенциали. К сожалению, отсутствие данных n_0 , T_e не позволяет аккуратно рассчитать Φ^* . Тем не менее эксперименты с этой линзой явно показали, что, варьируя распределение потенциала в системе электродов, охватывающих пучок, удается существенно изменять распределение потенциала в объеме пучка

и тем самым сильно варьировать фокусирующие свойства системы. В частности, при распределении потенциала, изображенного на рис. 28, а, четко выражена сферическая aberrация, тогда как в случае, показанном на рис. 28, б, она практически отсутствует [4].

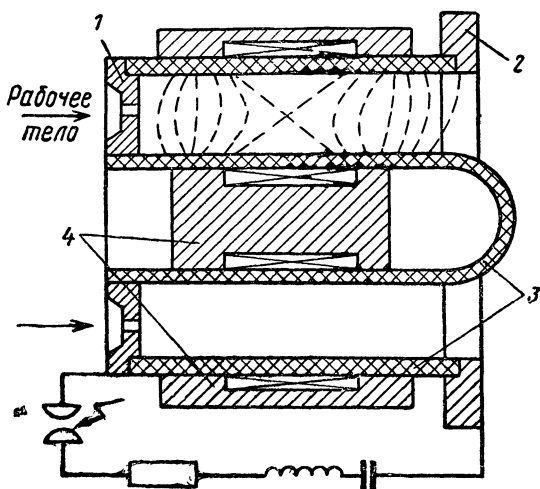


Рис. 29.

Приведенные данные о свойствах линзы относятся к режимам с достаточно сильным магнитным полем. Если же магнитное поле начинает убывать, то фокусирующие свойства при некотором $H_{\text{мин}}$

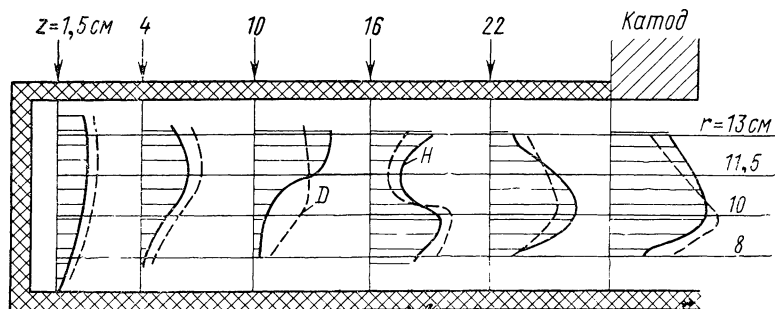


Рис. 30.

резко исчезают. Из опыта видно, что исчезновение фокусировки имеет место тогда, когда ларморовская окружность электрона становится сравнимой с диаметром КИП.

Плазмооптический режим в линзе исчезает и при уменьшении плотности пучка, если дебаевский радиус становится сравнимым с размерами системы.

Следует упомянуть еще двухлинзовый ускоритель с замкнутым дрейфом (рис. 29). В этом ускорителе имеются анод 1 и катод 2, причем рабочее тело подается через анод. Ускорение ионов осуществляется в диэлектрическом канале 3, который пронизывается магнитным полем, созданным сердечниками и катушками 4 [20, 40, 41]. Для ускоряемого потока выполняется неравенство, обратное (5.4), так как $E_{\perp} \approx (100 \div 200) \text{ в/см}$, $T_e \approx 10 \text{ эв}$, $\delta \sim 3 \text{ см}$. Поэтому неудивительно, что распределение электрического потенциала близко к распределению магнитных силовых линий.

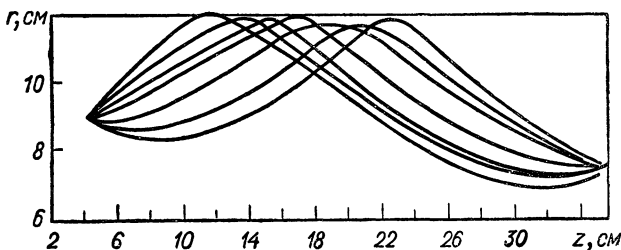


Рис. 31.

При работе на водороде магнитная фокусировка преобладает над электростатической (см. гл. 3). Действительно, характерная скорость дрейфа в этой системе (при $E = 200 \text{ в/см}$, $H = 800 \text{ э}$) $u = cE/H = 2,5 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$, тогда как направленная скорость ионов равна приблизительно 10^8 см/сек . Поэтому фокусировка КИП в двухлинзовом ускорителе преимущественно определяется магнитным полем. На рис. 30 показано распределение плотности потока по радиусу в разных сечениях этой системы, полученное экспериментально. На рис. 31 изображена рассчитанная на машине картина траекторий ионов H^+ в предположении, что частицы родились в одной точке. При расчете E и H значения полей были взяты из эксперимента. Получено хорошее качественное согласие результатов теории и эксперимента.

§ 2. Распределение термализованного потенциала и электронной температуры в стационарных плазменных системах

1. Случай автономной* идеальной электронной компоненты. Рассмотрим свойства распределения Φ^* для систем достаточно произвольного вида, в том числе и не обладающих симметрией. Покажем, что поверхности $\Phi^* = \text{const}$ определенным образом связаны с поверхностями $T_e = \text{const}$ и характером распределения плотности в системе.

* Под автономностью мы понимаем отсутствие обмена между электронами в объеме КИП и электронами со стенок.

Пренебрегая проводимостью плазменного объема, запишем следующую систему уравнений для электронной компоненты:

$$\operatorname{div} n \mathbf{u} = 0, \quad (5.5a)$$

$$0 = \frac{\nabla p_e}{en} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{H}]; \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (5.5b)$$

$$c_V [n (\mathbf{u} \nabla) T_e - T_e (\gamma_a - 1) (\mathbf{u} \nabla n)] = \operatorname{div} \overset{\leftrightarrow}{\kappa} \nabla T_e. \quad (5.5b)$$

Здесь \mathbf{u} — направленная скорость электронов; $\overset{\leftrightarrow}{\kappa}$ — тензор теплопроводности; c_V — теплоемкость, отнесенная к одному электрону; γ_a — показатель адиабаты.

В системе уравнений (5.5) считаем заданными n , \mathbf{H} , $\overset{\leftrightarrow}{\kappa}$. Искомые величины — это Φ , \mathbf{u} и T_e .

Поскольку мы пренебрегаем омическим сопротивлением, ограничимся идеальной моделью теплопроводности, т. е.

$$\kappa_{\parallel} \approx \infty; \quad \kappa_{\perp} = 0. \quad (5.6a)$$

Иными словами, предположим, что теплопроводность вдоль магнитных силовых линий сколь угодно велика, тогда как поперек силовых линий магнитного поля она пренебрежимо мала.

Из предположения (5.6a) следует, что электронная температура и термализованный потенциал постоянны вдоль магнитной силовой линии:

$$T_e = T_e(\gamma); \quad (5.6b)$$

$$\Phi^*(\gamma) = \Phi - \frac{kT_e(\gamma)}{e} \ln \frac{n}{n_0}. \quad (5.6b)$$

Нашей задачей будет вывод из системы (5.5) уравнений, связывающих функции $T(\gamma)$ и $\Phi^*(\gamma)$ с геометрией магнитного поля и распределением плотности в системе. Для этого

предположим, что магнитное поле допускает введение такой ортогональной системы координат, одна ось которой (x_3) совпадает с магнитными силовыми линиями. Две другие координаты обозначим x_1 и x_2 (рис. 32).

В этих координатах запишем:

$$T_e = T_e(\gamma) = T_e(x_1, x_2); \quad (5.7a)$$

$$\Phi^*(x_1, x_2) = \Phi - \frac{kT(x_1, x_2)}{e} \ln \frac{n}{n_0}. \quad (5.7b)$$

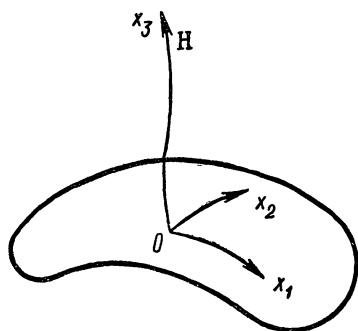


Рис. 32.

Как известно, метрическая форма, градиент и дивергенция в произвольной ортогональной системе координат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2; \\ \nabla &= \left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \right); \\ \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} h_2 h_3 a_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 h_3 a_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} h_2 h_1 a_3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Здесь h_1, h_2, h_3 — параметры Ламэ.

Используя (5.5б), (5.7) и (5.8), выведем следующие формулы для компонент электронной скорости поперек магнитного поля:

$$u_1 = -\frac{c}{H h_2} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2} + \frac{k}{e} \left(\ln \frac{n}{n_0 e_0} \right) \frac{\partial T_e}{\partial x_2} \right); \quad (5.9a)$$

$$u_2 = \frac{c}{H h_1} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1} + \frac{k}{e} \left(\ln \frac{n}{n_0 e_0} \right) \frac{\partial T_e}{\partial x_1} \right). \quad (5.9б)$$

Здесь e_0 — основание натуральных логарифмов.

Для того чтобы найти третью компоненту \mathbf{u} , подставим (5.9) в уравнение непрерывности (5.5а). После преобразований получим

$$u_3 = \frac{1}{h_1 h_2 n} \left[\frac{D(\omega, \Phi^*)}{D(x_1, x_2)} + \frac{k}{e} \cdot \frac{D(\lambda, T_e)}{D(x_1, x_2)} \right], \quad (5.10)$$

где

$$\omega(x_3) = \int_{x_3(0)}^{x_3} dx_3 \frac{h_3 n}{H}; \quad \lambda(x_3) = \int_{x_3(0)}^{x_3} \frac{nh_3 dx_3 L}{H}; \quad (5.11)$$

$$L = \ln \frac{n}{n_0 e_0},$$

а $x_3(0)$ — координата «начала» силовой линии, где $u_3 = 0$. Символом $D(f, g)/D(\alpha, \beta)$ обозначен якобиан

$$\frac{D(f, g)}{D(\alpha, \beta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} & \frac{\partial g}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

Предполагая, что в «начале» и «конце» магнитной силовой линии скорость u_3 обращается в нуль, из (5.10) находим первое уравнение, связывающее Φ^* и T_e :

$$\frac{D(\Phi^*, W)}{D(x_1, x_2)} + \frac{k}{e} \cdot \frac{D(T_e, \Lambda)}{D(x_1, x_2)} = 0; \quad (5.12)$$

$$W \equiv \int_{x_3(0)}^{x_3(\infty)} \frac{n dl}{H}; \quad \Lambda = \int_{x_3(0)}^{x_3(\infty)} \frac{nL dl}{H}. \quad (5.13)$$

Здесь $x_3(0)$ — координата начала силовой линии, а $x_3(\infty)$ — координата ее конца. Входящий в формулы (5.13) дифференциал $dl = h_3 dx_3$ — элемент дуги магнитной силовой линии.

Рассмотрим теперь уравнение энергии. Если умножить его на элемент объема бесконечно тонкой магнитной трубки (рис. 33)

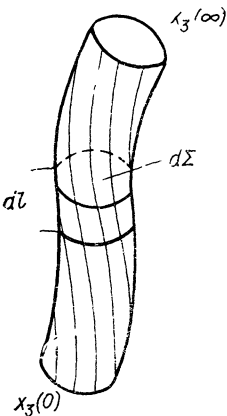


Рис. 33.

$$dV = dl d\Sigma \quad (5.14)$$

и учесть сохранение магнитного потока

$$H d\Sigma = \text{const}, \quad (5.15)$$

то при условии (5.6а) и отсутствии тепловых потоков из областей начала и конца магнитной силовой линии получим

$$\int \frac{dl}{H} [n(\mathbf{u} \nabla) T_e] = (\gamma_a - 1) T_e \int \frac{dl}{H} [\mathbf{u} \nabla] n. \quad (5.16)$$

Подставляя в (5.16) формулы для компонент скорости (5.9), (5.10) и учитывая, что (5.15) эквивалентно условию

$$h_2 h_3 H = \text{const}, \quad (5.17)$$

находим вторую связь T_e и Φ^*

$$W \frac{D(T_e, e\Phi^*)}{D(x_1, x_2)} = T_e (\gamma_a - 1) \left[\frac{D(\Lambda, \Phi^* e)}{D(x_1, x_2)} + \frac{D(Y^* - W, T_e k)}{D(x_1, x_2)} \right], \quad (5.18)$$

где [см. формулы (5.11)]

$$\Lambda \equiv - \int \frac{dl}{H} \cdot \frac{\partial n}{\partial l} \omega(l); \quad Y^* \equiv \int \frac{dl}{H} \cdot \frac{\partial n}{\partial l} \lambda(l); \quad dl = h_3 dx_3. \quad (5.19)$$

Система уравнений (5.12) и (5.18) решает поставленную задачу о нахождении связи $T_e(\gamma)$ и $\Phi^*(\gamma)$ с распределением \mathbf{H} и n для случая идеальной и автономной электронной компоненты. Следует отметить, что в этих уравнениях под x_1 и x_2 можно теперь понимать любые координаты.

Из полной системы уравнений (5.12) и (5.18) видно, что если плазма в объеме имеет пренебрежимо малую температуру, т. е. $T \rightarrow 0$, или условия таковы, что ее можно считать изотермичной ($\gamma = 1$), то потенциал постоянен на поверхностях $W = \text{const}$, т. е.

$$\Phi = \Phi(W); \quad W = W(\gamma). \quad (5.20)$$

Здесь вместо Φ^* написано Φ , так как при $T_e \rightarrow 0$ термализованный потенциал $\Phi^* \rightarrow \Phi$.

Формулы (5.20) уточняют полученные ранее условия эквипотенциальности магнитных силовых линий.

Если система обладает осевой симметрией, то ее параметры не зависят от координаты $x_2 = 0$, и уравнения (5.12) и (5.18) удовлетворяются тождественно зависимостями

$$T_e = T_e(x_1); \Phi^* = \Phi^*(x_1). \quad (5.21a)$$

Ортогональная координата x_1 , учитывая привязку координатной системы к магнитному полю, в данном случае является функцией магнитного потока ψ . Поэтому (5.21a) эквивалентны соотношениям

$$T_e = T_e(\psi); \Phi^* = \Phi^*(\psi). \quad (5.21b)$$

Рассмотрим формулы (5.13) и (5.20) для W и отметим два момента. Во-первых, выражение для W можно рассматривать как обобщение известного из магнитной гидродинамики условия вмороженности для плоских движений

$$n/H = \text{const} \quad (5.22)$$

и формулы для «удельного объема магнитной трубки», известной из теории равновесных плазменных конфигураций

$$U = \int \frac{dl}{H}. \quad (5.23)$$

Действительно, как известно, из условия гидродинамического равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] \quad (5.24)$$

следует постоянство давления вдоль магнитной силовой линии. Поэтому при естественном условии $T_e = T_e(\psi)$ из-под знака интеграла (5.13) для W можно вынести n и получить выражение (5.23).

Во-вторых, равенство (5.22) сохраняется вдоль линии потока вещества в идеальной одножидкостной* магнитной гидродинамике. Но направление скорости среды в этой модели связано с электрическим полем соотношением

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0. \quad (5.25)$$

Отсюда видно, что течение среды происходит по эквипотенциалам в полном соответствии с формулами (5.20).

Продолжим общий анализ систем (5.12) и (5.18), предположив, что функции $W(x_1, x_2)$ и $\Lambda(x_1, x_2)$ независимы друг от друга, т. е. что якобиан^{2*}

$$\frac{D(W, \Lambda)}{D(x_1, x_2)} \neq 0. \quad (5.26)$$

* В одножидкостной магнитной гидродинамике считается, что $|\mathbf{v} - \mathbf{u}| \rightarrow 0$.

^{2*} В частности, тем самым мы предполагаем, что система не обладает симметрией.

Тогда, переходя от переменных x_1, x_2 к переменным W, Λ , вместо (5.12) и (5.18) получаем

$$\frac{D(W, e\Phi^*)}{D(W, \Lambda)} = \frac{D(T_e, \Lambda)}{D(W, \Lambda)}; \quad (5.27a)$$

$$W \frac{D(T_e, e\Phi^*)}{D(W, \Lambda)} = T_e (\gamma_a - 1) \left[\frac{D(\Lambda, e\Phi^*)}{D(W, \Lambda)} + \frac{D(Y^* - W, T_e)}{D(W, \Lambda)} \right]. \quad (5.27b)$$

Эти выражения хороши тем, что не зависят от координат. Очевидно, первое из них эквивалентно равенству

$$\partial(e\Phi^*)/\partial\Lambda = \partial T/\partial W. \quad (5.28)$$

Существование связи между Φ^* и T позволяет свести систему уравнений (5.27) к одному уравнению для некоей функции χ , которую назовем энергетическим потенциалом плазмы. Этот потенциал связан с Φ^* и T_e соотношениями

$$e\Phi^* = \partial\chi/\partial W; \quad T_e = \partial\chi/\partial\Lambda. \quad (5.29)$$

Подставляя (5.29) в (5.27b), получаем уравнение второго порядка для χ

$$W \frac{D\left(\frac{\partial\chi}{\partial\Lambda}, \frac{\partial\chi}{\partial W}\right)}{D(W, \Lambda)} = \frac{\partial\chi}{\partial\Lambda} (\gamma_a - 1) \times \left[\frac{D\left(\Lambda, \frac{\partial\chi}{\partial W}\right)}{D(W, \Lambda)} + \frac{D\left(Y^* - W, \frac{\partial\chi}{\partial\Lambda}\right)}{D(W, \Lambda)} \right]. \quad (5.30)$$

Если T_e достаточно мало или $\gamma_a \rightarrow 1$, то можно найти общее решение уравнения (5.30) в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon \sim T_e (\gamma_a - 1)$

$$\chi = \chi_0(W) + \varepsilon\chi_1(\Lambda, W) + \varepsilon^2\chi_2(\Lambda, W) + \dots \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в (5.28), получаем

$$W \frac{\partial^2 \chi_1^2}{\partial\Lambda^2} = \frac{\partial\chi_1}{\partial\Lambda} \frac{\partial\Lambda^*}{\partial\Lambda} (\gamma_a - 1). \quad (5.32)$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\ln \frac{\partial\chi_1}{\partial\Lambda} = (\gamma_a - 1) \frac{\Lambda^*}{W} + g_1(W). \quad (5.33)$$

Здесь $g_1(W)$ — произвольная функция своего аргумента. Найдя χ_1 , можно определить χ_2 и т. д.

Последующие приближения можно найти интегрированием уравнения

$$W \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial\Lambda^2} - \frac{\partial\chi_n}{\partial\Lambda} (\gamma_a - 1) \frac{\partial\Lambda^*}{\partial\Lambda} = F_n(\Lambda, W, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}). \quad (5.34)$$

Таким образом можно рассчитать χ при известных $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и распределении $n(\mathbf{r})$. Магнитное поле всегда считаем известным, а n определяем из уравнений ионной динамики или из эксперимента. В общем случае получается весьма сложная система уравнений,

однако в предположении, что $kT_e \ll Mv^2/2$, или в случае симметрии задача упрощается и часто может быть решена.

Следует иметь в виду, что установленная связь между величинами $T_e(\gamma)$, $\Phi^*(\gamma)$ и W , Λ и Y позволяет лучше представить себе взаимосвязь процессов в плазмооптических системах.

2. Случай неавтономной идеальной электронной компоненты. Выше мы предполагали, что электронная компонента автономна, т. е. она не обменивается ни энергией, ни частицами со стенкой. Однако, как правило, это не так. Поэтому интересно обобщить формулы предыдущего пункта на случай, когда такой обмен имеет место.

Итак, по-прежнему считаем плазму идеальной, т. е. что ее можно описать системой (5.5) с добавочным условием (5.6а).

В этом случае справедливы зависимости $T_e = T_e(\gamma)$, $\Phi^*(\gamma)$, а также формулы (5.9) для поперечных компонент электронной скорости. Однако формула (5.10) теперь примет другой вид. Если координаты стенок равны $x_3(0)$ и $x_3(\infty)$, а плотность и скорость u_3 при $x_3(0)$ равны $n^{(0)}$ и $u_3^{(0)}$ соответственно, то

$$u_3 n h_1 h_2 = u_3^{(0)} h_1^{(0)} h_2^{(0)} n^{(0)} + \left[\frac{D(W, \Phi^*)}{D(x_1, x_2)} + \frac{k}{e} \cdot \frac{D(\Lambda, T_e)}{D(x_1, x_2)} \right]. \quad (5.35)$$

Здесь $\omega(x_3)$ и $\lambda(x_3)$ определены формулами (5.11).

Если известна плотность потока электронов через верхнюю стенку $u_3^{(\infty)}$, $n^{(\infty)}$, то вместо (5.9) получим

$$q(x_1, x_2) = \frac{D(\Phi^*, W)}{D(x_1, x_2)} + \frac{k}{e} \cdot \frac{D(T_e, \Lambda)}{D(x_1, x_2)}, \quad (5.36)$$

где

$$q dx_1 dx_2 = u_3^{(\infty)} n^{(\infty)} ds^{(\infty)} - u_3^{(0)} n^{(0)} ds^{(0)}; \quad (5.37)$$

$$ds^{(\infty)} \equiv (h_1 h_2)^{(\infty)} dx_1 dx_2; \quad ds^{(0)} = (h_1 h_2)^{(0)} dx_1 dx_2. \quad (5.38)$$

Очевидно, величина $q dx_1 dx_2$ равна числу электронов, покидающих магнитную трубку за единицу времени.

То обстоятельство, что какая-либо магнитная трубка непрерывно отдает на стенку некоторое количество электронов, не противоречит условию стационарности, так как в это же время какие-то другие магнитные трубки системы непрерывно получают от стенки электроны и в результате дрейфа передают их рассматриваемой трубке.

Аналогично можно обобщить и энергетические уравнения (5.18):

$$W \frac{D(T_e, e \Phi^*)}{D(x, x_2)} = T_e (\gamma_\alpha - 1) \left[\frac{D(\Lambda^*, e \Phi^*)}{D(x_1, x_2)} + \frac{D(Y^* - W, kT_e)}{D(x_1, x_2)} \right] + \frac{1}{c_V} Q(\gamma). \quad (5.39)$$

Здесь $Q dx_1 dx_2$ — поток тепла, уносимый электронами из данной трубки.

Система уравнений (5.37), (5.39) показывает, что в принципе можно задать произвольные зависимости $\Phi(\gamma)$ и $T_e(\gamma)$, но тогда электронная компонента должна обмениваться со стенкой частицами и энергией.

§ 3. Динамика ионов

1. Методы расчета. Поскольку мы пренебрегаем столкновениями, для описания динамики ионов следует использовать уравнение Власова

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f_i + \frac{e}{M} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (5.40)$$

Электрическое поле в этом уравнении определяется термализованным потенциалом $\Phi^*(\gamma)$, который можно считать фиксированным, например, электродами на стенках канала

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\nabla \left(\Phi^*(\gamma) + \frac{kT_e}{e} \ln \frac{n}{n_0} \right); \quad n = \int f dv. \quad (5.41)$$

Если эффект термализации пренебрежимо мал, то электрическое поле можно считать известным (предполагается фиксированным Φ^*), и поскольку известно также магнитное поле, решение уравнения Власова сводится к расчету движения одной частицы в известных полях, так как уравнения характеристик в данном случае имеют вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \quad M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right). \quad (5.42)$$

В общем нестационарном случае система (5.42) имеет шесть интегралов

$$\left. \begin{aligned} g_k(\zeta_1, \dots, \zeta_6, t) = \zeta_{k0} \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, 6; \\ \zeta_{1, 2, 3} = z, x, y; \quad \zeta_{4, 5, 6} = v_z, v_x, v_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Если $f_0(\zeta_k)$ — значение функции распределения f_i при $t = 0$, то в любой другой момент

$$\left. \begin{aligned} f_i(\zeta, t) = f_0(g(\zeta, t)); \\ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_6); \quad g = (g_1, \dots, g_6). \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

В плазмооптике особый интерес представляют статические задачи, когда параметры потока не зависят от t . В этом случае в качестве независимой переменной естественно взять одну из координат, например, $\zeta_1 \equiv z$. Тогда, исключив t с помощью первого из уравнений (5.43), можно получить пять интегралов

$$G_k(\zeta_j, \dots, z) = \zeta_{k0}; \quad k, j = 2, \dots, 6, \quad (5.45a)$$

и, следовательно, если при ζ_{i0} функция распределения равна f_0 , то в любом другом сечении

$$f_i(\zeta, z) = f_0(G(\zeta, z)). \quad (5.456)$$

Сложнее обстоит дело в случае, когда необходимо учитывать эффект термализации. Подставляя (5.41) в (5.40), получаем сложное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для f_i .

Мы отмечали, что в плазмооптических системах T_e , как правило, мало. Это позволяет учитывать термализацию путем последовательных приближений, взяв в качестве первого приближения квазиодночастичную модель. Последующие приближения можно вычислять разными способами. Рассмотрим два из них. В первом методе функцию f ищут в виде ряда

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad (5.46)$$

причем $f_1 \sim T_e$, $f_2 \sim T_e^2$ и т. д. Подставляя разложение (5.46) в (5.40), (5.41), получаем

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{v}_0 \nabla) f_1 + \frac{e}{M} \left(-\nabla \Phi^*(\gamma) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \\ = \frac{e}{M} \nabla \left(\frac{kT_e(\gamma)}{e} \ln \int \frac{f_0 d\mathbf{v}}{n_0} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}; \\ (\mathbf{v}_0 \nabla) f_2 + \frac{e}{M} \left(-\nabla \Phi^*(\gamma) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}} = \\ = \frac{e}{M} \nabla \left(\frac{kT_e}{e} \cdot \frac{\int f_1 d\mathbf{v}}{\int f_0 d\mathbf{v}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{M} \nabla \left(\frac{kT_e}{e} \ln \int \frac{f_0 d\mathbf{v}}{n_0} \right) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

Здесь f_0 — первое приближение, рассчитанное без учета термализации по известным Φ и \mathbf{H} .

Как известно, неоднородные уравнения типа (5.47) легко интегрируются при переходе к новым переменным. А именно, если вместо ζ_i , взять переменные ζ_1, ζ_{j0} , где $j = 2, \dots, 6$, то неоднородное уравнение

$$\frac{Df}{Dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{v_x}{v_z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v_y}{v_z} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{e}{M} \frac{\mathbf{E}_*}{v_z} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = Q, \quad (5.48a)$$

где $\mathbf{E}_* = -\nabla \Phi(\gamma) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]$, принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial z} = Q \quad (5.486)$$

и непосредственно интегрируется

$$f = F_0(\zeta_{0i}) + \int_0^z Q(\zeta_{0i}, z) dz. \quad (5.48b)$$

Заметим, что данный метод последовательных приближений предполагает хорошие аналитические свойства функции $f_0(\mathbf{v})$, поскольку вычисление f_n требует существования n -й производной f_0 по v .

Физически более прозрачным и менее требовательным является другой способ, в котором ищутся поправки не к функции распределения, а уточняются уравнения характеристик.

Таким образом, мы строим последовательность приближений

$$f_{(0)}, f_{(1)}, f_{(2)}, \dots,$$

причем для $f_{(n)}$ справедливо уравнение

$$(\mathbf{v} \nabla) f_{(n)} + \frac{e}{M} \left\{ \left[-\nabla \left(\Phi^*(\gamma) + \frac{kT_e}{e} \ln \frac{\int f_{(n-1)} d\mathbf{v}}{n_0} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f_{(n)}}{\partial v} = 0. \quad (5.49a)$$

Решение этого уравнения сводится к расчету движения в известном поле сил

$$\mathbf{H}, \Phi_n = \Phi^*(\gamma) + \frac{kT_e}{e} \ln \frac{\int f_{(n-1)} d\mathbf{v}}{n_0}, \quad (5.49b)$$

что можно делать, например, методом «слабого» поля.

Проиллюстрируем последний метод на простом примере. Пусть в свободное полупространство $z > 0$ поступает КИП, ионы которого при $z = 0$ имеют функцию распределения

$$f_{(0)}|_{z=0} = n_{00} \exp(-y^2/b^2) \delta(v_z - v_0) \delta(v_y). \quad (5.50)$$

Температуру электронов T_e считаем постоянной. Кинематическое уравнение для ионов в этом случае имеет вид

$$(\mathbf{v} \nabla) f - \frac{kT_e}{M} \cdot \frac{1}{n} \left(\nabla n \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0; \quad n = \int f d\mathbf{v}. \quad (5.51)$$

Нулевое приближение функции распределения удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{v} \nabla) f_{(0)} = 0, \quad (5.52)$$

характеристики которого описывают равномерное прямолинейное движение

$$v_{y0} = v_y; v_{z0} = v_z; y_0 = y - (v_y z / v_z). \quad (5.53)$$

Следовательно, и при любом x

$$f_0 = n_{00} \exp(-y^2/b^2) \delta(v_z - v_0) \delta(v_y). \quad (5.54)$$

Отсюда находим распределение плотности пучка в нулевом приближении

$$n_0 = n_{00} \exp(-y^2/b^2) \quad (5.55)$$

и уравнение первого приближения

$$v_z \frac{\partial f_{(1)}}{\partial z} + v_y \frac{\partial f_{(1)}}{\partial y} - \frac{kT_e}{M} \cdot \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_y} = 0. \quad (5.56)$$

Его характеристическая система

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dv_z}{0} = \frac{dv_y}{\frac{kT_e}{M} \cdot \frac{2y}{b^2}} \quad (5.57a)$$

имеет решения

$$\begin{aligned} v_{z0} &= v_z; \quad v_{y0} = v_y \operatorname{ch} \frac{qz}{v_z} - qy \operatorname{sh} \frac{qz}{v_z}; \\ y_0 &= y \operatorname{ch} \frac{qz}{v_z} - \frac{v_y}{q} \operatorname{sh} \frac{qz}{v_z}; \quad q^2 = \frac{2kT_e}{Mb^2}. \end{aligned} \quad (5.57б)$$

Подставляя (5.57б) в (5.50), получаем

$$\begin{aligned} f_1 &= n_{00} \exp \left[(-y^2/b^2) \left(y \operatorname{ch} \frac{qz}{v_z} - \frac{v_y}{q} \operatorname{sh} \frac{qz}{v_z} \right)^2 \right] \times \\ &\times \delta(v_{z0} - v_0) \delta \left(v_y \operatorname{ch} \frac{qz}{v_z} - qy \operatorname{sh} \frac{qz}{v_z} \right). \end{aligned} \quad (5.57в)$$

Учитывая, что

$$\delta(f(\alpha)) = \delta(\alpha - \alpha_0) / |f'(\alpha_0)|, \quad f(\alpha_0) = 0, \quad (5.58)$$

упростим выражение (5.57в):

$$f_1 = n_{00} \frac{\exp \left(-y^2/b^2 \operatorname{ch}^2 \frac{qz}{v_z} \right)}{\operatorname{ch}(qz/v_z)} \delta(v_{z0} - v_0) \delta \left(v_y - qy \operatorname{th} \frac{qz}{v_z} \right). \quad (5.59)$$

Отсюда видно, что под действием сил электронного давления КИП начинает расширяться.

Плотность пучка, соответствующая первому приближению (5.59), равна

$$n_{(1)} = n_{00} \frac{\exp \left(-y^2/b^2 \operatorname{ch}^2 \frac{qz}{v_z} \right)}{\operatorname{ch} \frac{qz}{v_z}}. \quad (5.60)$$

Зная $n_{(1)}$, можно найти $f_{(2)}$ и т. д. Как видно из структуры решения (5.59), безразмерным параметром малости является величина

$$\frac{qz}{v_z} = \frac{c_T}{v_z} \cdot \frac{z}{b}; \quad c_T = \sqrt{\frac{2kT}{M}}. \quad (5.61)$$

Заметим, что если бы мы применили к расчету только что разобранный примера метод (5.46) — (5.48), то поправка к функциям (5.54) имела бы следующий вид:

$$f_1 = \frac{kT}{M} N(y) \delta(v_{z0} - v_0) \frac{\delta'_0(v_y)}{v_y}.$$

2. Фокусировка некохроматических ионных потоков осевыми линзами. Рассмотрим, как влияет разброс ионов по скоростям на структуру потока, фокусируемого осевой линзой.

В этом случае электронную температуру будем считать равной нулю. Это обстоятельство позволяет рассчитать движение каждого иона в квазиодночастичном приближении. Зная интегралы уравнений движения и значение функции распределения при $z = 0$, в соответствии с формулами (5.45) найдем функцию распределения частиц при любом z и тем самым определим любые интересующие нас параметры ионного пучка. В частности, найденные таким образом распределения плотности $n_{(0)}$ можно использовать при известной T_e для расчета функции распределения $f_{(1)}$, т. е. для учета влияния T_e на динамику пучка ионов.

Если ограничиться линеаризованной моделью осевой системы, то уравнение движения примет вид (см. гл. 2)

$$v_0^2 r'' + \omega_0^2(z)r = 0. \quad (5.62a)$$

Ниже, чтобы упростить выражения, предположим, что вместо уравнения (5.62) рассматривается эквивалентное уравнение

$$r_1'' + \Omega^2(z)r_1 = 0, \quad (5.62b)$$

в котором r_1 , Ω_1 , z_1 — безразмерные величины, соответствующие r , ω_0/v_0 , z . Индекс «1», указывающий на безразмерность, в дальнейшем писать не будем. Фундаментальную систему решений $R_1(z)$, $R_2(z)$ уравнения (5.62b) выберем таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} R_1(0) = 1; R_1'(0) = 0; \\ R_2(0) = 0; R_2'(0) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.63a)$$

Тогда вронскиан

$$W = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_1' & R_2' \end{vmatrix} = 1. \quad (5.63b)$$

Если при $z = 0$ параметры частицы суть

$$r_0, r_0' = v_{r0}/v_0 \equiv dr_0/dz, \quad (5.63b)$$

то уравнения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} r = r_0 R_1(z) + r_0' R_2(z); \\ r' = r_0 R_1'(z) + r_0' R_2'(z). \end{aligned} \right\} \quad (5.64a)$$

Решая систему (5.64) относительно r_0 и r'_0 , получаем

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= rR'_2(z) - r'R_2(z); \\ r'_0 &= -rR'_1(z) + r'R_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.64б)$$

или

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= rR'_2(z) - \frac{v_r}{v_0} R_2(z); \\ v_{r0} &= -rv_0 R'_1(z) + v_r R_1(z). \end{aligned} \right\} \quad (5.64в)$$

Из первого уравнения (5.64а) нетрудно заключить, что изображение предмета определяется из условия

$$R_2(z_*) = 0. \quad (5.65а)$$

Действительно, в этом случае все частицы, вышедшие из точек окружности, независимо от разброса радиальной скорости r'_0 , соберутся на окружности с радиусом

$$r_* = r_0 R_1(z_*). \quad (5.65б)$$

Используя найденные решения, перейдем к построению функции распределения. Для этого необходимо задать функцию распределения f_0 при $z = 0$, т. е. свойства источников ионов. Учитывая, что нас интересует главным образом качественная сторона дела, выберем такие f_0 , при которых вычисления особенно просты. Так, оказывается удобно считать, что пучок эмиттируется всей плоскостью $z = 0$, но плотность частиц убывает с радиусом по закону Гаусса

$$n|_{z=0} = n_0 \exp(-z^2/q^2). \quad (5.66)$$

Для распределения ионов по скоростям при $z = 0$ выберем следующую физически достаточно интересную и в то же время формально простую модель «параллельного» потока с максвелловским разбросом скоростей по всем координатам. Наиболее общий вид функции следующий:

$$f_0 = \frac{n_0 |r_0| \Pi(r_0)}{b_0 (\sqrt{\pi})^3 C_1 C_2 C_3} \exp \left\{ -\frac{r_0^2}{q^2} - \frac{(v_{z0} - v_0)^2}{C_1^2} - \frac{(r_0 v_{\theta 0})^2}{b_0^2 C_3^2} - \frac{v_{r0}^2}{C_2^2} \right\}. \quad (5.67)$$

Здесь $C_1(r)$, $C_2(r)$, $C_3(r)$ — характерные масштабы разброса скоростей вдоль соответствующих направлений; $b_0(r_0)$ — функция, имеющая размерность длины; $\Pi(\alpha)$ — функция Хевисайда, равная единице при $\alpha > 0$ и нулю при $\alpha < 0$. Нормировочный множитель в формуле (5.67) выбран таким образом, чтобы было справедливо соотношение (5.66).

Очевидно, если $C_1, C_2, C_3 \rightarrow 0$ и $b = \text{const}$, то распределение (5.67) принимает вид

$$f_0 = n_0 |r_0| e^{-r_0^2/q^2} \delta(v_{z0} - v_0) \delta(r_0 v_{\theta 0}) \delta(v_{r0}) \Pi(r_0) \quad (5.68)$$

и описывает монохроматичный поток ионов, идущий вдоль оси z .

Рассмотрим сначала более простой случай холодного параллельного потока. Не усложняя последующих выкладок, вместо начальной функции (5.68) в данном случае можно взять более общую функцию

$$f_0 = n_0 r_0 Q(r_0) \delta(v_{r0}) \delta(v_{\theta 0} r_0) \delta(v_z - v_0) \Pi(r_0), \quad (5.69)$$

где $Q(r_0)$ — произвольная функция r_0 .

Для того чтобы найти функцию f при любом z , подставим сюда (5.64б) и учтем сохранение момента количества движения и продольной компоненты скорости

$$rv_\theta = r_0 v_{\theta 0}, \quad v_z = v_{z0}. \quad (5.70)$$

В результате получим

$$f = n_0 \left(rR_2' - \frac{v_r}{v_0} R_2 \right) Q \left(rR_2' - \frac{v_r}{v_0} R_2 \right) \delta(rv_\theta) \delta(v_z - v_0) \delta(-rv_0 R_1' + v_r R_1) \Pi \left(rR_2' - \frac{v_r}{v_0} R_2 \right). \quad (5.71)$$

Последняя δ -функция в формуле (5.71) отлична от нуля при $v_r = rv_0 R_1' / R_1$. Поэтому формулу (5.71), учитывая равенство единице вронскиана, можно привести к виду

$$f = \frac{n_0 r}{R_1 |R_1|} Q \left(\frac{r}{R_1} \right) \delta(v_z - v_0) \delta(rv_\theta) \delta \left(v_r - \frac{rv_0 R_1'}{R_1} \right) \Pi \left(\frac{r}{R_1} \right). \quad (5.72)$$

Если теперь проинтегрировать полученное выражение для f по v_z , v_θ и v_r , то найдем распределение плотности в потоке

$$n = n_0 \frac{1}{R_1^2} Q \left(\frac{r}{R_1} \right); \quad R_1 > 0. \quad (5.73a)$$

В частности, в случае (5.68)

$$n = \frac{n_0}{R_1^2} \exp \left(-\frac{r^2}{q^2 R_1^2} \right); \quad R_1 > 0. \quad (5.73б)$$

Отсюда видно, что потоки фокусируются в точку при $z = z_1$, где

$$R_1(z_1) = 0. \quad (5.74)$$

Обращает на себя внимание различие координаты изображения (5.56) и координаты фокуса (5.74). Это объясняется тем, что минимальное сечение пучка, место положения которого в данном случае определяется условием (5.74), не обязано совпадать с изображением протяженного по r источника (плоскости $z = 0$). Но такое совпадение обязательно, если источник точечный.

Отметим еще одну особенность полученных формул. Как видно из (5.73), функция f равна нулю при $r > 0$ и $R_1 < 0$, так как в этом случае множитель $\Pi(r/R_1)$ обращается в нуль. Очевидно, это свя-

зано с тем, что в точке $z = z_1$ частицы переходят через ось $r = 0$, и, как следует из соотношения (5.62б), нам следовало бы считать при $z > z_1$ величину r отрицательной. В то же время в цилиндрической системе координат всегда $r > 0$. Возникающая формальная неувязка объясняется тем, что рассматриваемый режим с $D = 0$ является особым. Для того чтобы избежать такого рода формальных осложнений, функцию f следует взять в виде

$$f = F(v_z, v_\theta r, v_r, r, z) \Pi(r/R_1) + \\ + F(v_z, rv_\theta, -v_r, -r, z) \Pi(-r/R_1). \quad (5.75a)$$

Здесь буквой F обозначен множитель, стоящий перед Π (5.75), а величина r считается обычной положительной цилиндрической координатой. Заметим, что при переходе через ось $r = 0$ меняется знак не только v_r и r , но и v_θ . Поэтому произведение rv_θ знака не меняет.

Учитывая четность функции f , найденной с помощью (5.68), относительно изменения знака r и v_r , запишем (5.75a) в виде

$$f = F(\Pi(r/R_1) + \Pi(-r/R_1)) = F, \quad (5.75б)$$

так как

$$\Pi(a) + \Pi(-a) = 1. \quad (5.75в)$$

Обобщим теперь рассмотренный пример, предположив, что частицы имеют разброс по радиальной компоненте скорости ($C_2 \neq 0$), тогда как продольная и азимутальная компоненты скорости у всех частиц одинаковы ($C_1 = C_3 = 0$).

В этом случае выражение (5.67) для функции распределения ионов при $z = 0$ примет вид ($b_0 \equiv \text{const}$)

$$f_0 = \frac{n_0 r_0}{\sqrt{\pi} C_2} \exp\left(-\frac{r_0^2}{q^2} - \frac{v_{r0}^2}{C_2^2}\right) \delta(v_{z0} - v_0) \delta(rv_{\theta 0}) \Pi(r_0). \quad (5.76)$$

Подставляя сюда формулы (5.64б) и законы сохранения (5.70), а также учитывая замечания (5.75а), получаем следующую формулу для функции распределения ионов при любом z :

$$f = \frac{n_0 e^{-\frac{r^2}{C_2^2 s q^2}}}{r \sqrt{\pi} C_2} \left\{ \left(rR_2' - \frac{v_r}{v_0} R_2 \right) e^{-s \left(v_r - r \frac{v_0}{2} \frac{s'}{s} \right)^2} \Pi \left(rR_2' - \frac{v_r}{v_0} R_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(-rR_2' + \frac{v_r}{v_0} R_2 \right) e^{-s \left(v_r - r \frac{v_0}{2} \frac{s'}{s} \right)^2} \Pi \left(-rR_2' + \frac{v_r}{v_0} R_2 \right) \right\} \times \\ \times \delta(v_z - v_0) \delta(rv_\theta). \quad (5.77)$$

Здесь показатель экспоненты преобразован следующим образом:

$$\frac{1}{q^2} \left(rR_2' - \frac{v_r}{v_0} R_2 \right)^2 + \frac{1}{C_2^2} (v_r R_1 - r v_0 R_1')^2 = s \left(v_r - r \frac{v_0}{2} \frac{s'}{s} \right)^2 + \frac{r^2}{C_2^2 q^2 s}, \quad (5.78a)$$

где

$$s(z) \equiv \left(\frac{R_2^2}{v_0^2 q^2} + \frac{R_1^2}{C_2^2} \right); \quad s' = \frac{ds}{dz}. \quad (5.78б)$$

Интегрируя функцию f по скоростям, находим распределение плотности частиц в пучке

$$n = \frac{n_0 R_2}{\sqrt{\pi} C_2 v_0 r} \exp \left[-\frac{r^2}{C_2^2 s q^2} \left\{ \int_{-\infty}^{r\alpha} (r\alpha - x) \exp(-s(x - r\beta)^2) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{r\alpha}^{\infty} (-r\alpha + x) \exp(-s(x - r\beta)^2) dx \right\} \right]. \quad (5.79)$$

В (5.79) введены следующие обозначения:

$$\alpha \equiv v_0 R_2' / R_2; \quad \beta \equiv (v_0/2)(s'/s); \quad x \equiv v_r,$$

причем нетрудно убедиться, что

$$\alpha - \beta = v_0 R_1 / s R_2 C_2^2.$$

После простых вычислений формулу (5.79) можно привести к виду

$$n = \frac{n_0 R_2}{\sqrt{\pi} C_2 v_0} e^{-\frac{r^2}{C_2^2 s q^2}} \left[(\alpha - \beta) \int_{-r(\alpha - \beta)}^{r(\alpha - \beta)} e^{-s^2 y^2} dy + \frac{e^{-s^2 r^2 (\alpha - \beta)^2}}{sr} \right]. \quad (5.80а)$$

Если умножить (5.80а) на $2\pi r dr$ и проинтегрировать от нуля до бесконечности, то получим, как и следовало ожидать, величину, не зависящую от z .

Из формулы (5.80а) видно, что в отличие от случая монохроматического потока (5.69), у которого плотность обращалась в бесконечность только в одной точке [см. формулы (5.73б) и (5.74)], в данном случае плотность обращается в бесконечность практически при всех $z \neq 0$.

Кроме $z = 0$ нерегулярность плотности исчезает при $R_2(z^*) = 0$. В этом сечении $z = z^*$ плотность

$$n = \frac{n_0}{R_1^2} \exp \left(-\frac{r^2}{R_1^2 q^2} \right), \quad (5.80б)$$

т. е. мы нашли увеличенное в $R_1(z^*)$ раз изображение «источника» $z = 0$.

Полученный результат полностью согласуется с формулами (5.65) и относящимися к ним комментариями. Обращение плотности потока в бесконечность при $r = 0$, очевидно, связано с тем, что мы пренебрегаем разбросом частиц по угловому моменту.

Рассмотрим теперь «параллельный» поток, в котором имеется разброс как радиальной, так и азимутальной компоненты скорости. Для простоты рассмотрим функцию f_0 в виде

$$f_0 = \frac{n_0}{\pi c_T^2} e^{-\frac{1}{q^2} (x_0^2 + y_0^2) - \frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{c_T^2}} \delta(v_{z0} - v_0). \quad (5.81a)$$

Здесь используются декартовы координаты, поскольку в этих координатах и при $v_0 \neq 0$ уравнения движения (5.62) остаются линейными

$$x'' + \Omega^2 x = 0; \quad y'' + \Omega^2 y = 0. \quad (5.81б)$$

Подставляя в (5.81a) выражения для x_0 и y_0 , аналогичные (5.64б), получаем

$$f_0 = \frac{n_0}{\pi c_T^2} \delta(v_{z0} - v_0) e^{-s(v_x - x\alpha)^2 - s(v_y - y\alpha)^2 - \frac{x^2 + y^2}{q^2 c_T^2 s}}, \quad (5.81в)$$

где s определено формулой (5.78б) при $c_T \equiv C_2$. Интегрируя (5.81в) по v_x и v_y , получаем распределение плотности в виде

$$n = \frac{n_0}{\left(R_1^2 + \frac{c_T^2}{v_0^2 q^2} R_2^2\right)} \exp \left[-\frac{r^2}{q^2 \left(R_1^2 + \frac{c_T^2}{v_0^2 q^2} R_2^2\right)} \right]. \quad (5.81г)$$

Отсюда видно, что при $z = z^*$, где $R_2(z^*) = 0$, т. е. в плоскости изображения, распределение плотности не зависит от c_T и v_0 .

3. Влияние T_e на фокусировку КИП в ТУМе. Используя найденные в предыдущем пункте распределения плотностей КИП для примера можно с помощью методов, указанных выше, рассчитать влияние термализации на фокусировку. Рассмотрим влияние T_e на работу ТУМа.

Теория фокусировки ионов в плоской модели ТУМа при $T_e = 0$ сводится к уравнению (3.87в)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + \Omega^2 y &= 0; \\ \Omega^2 &= \frac{1}{2} \frac{e^2 H_0^2}{M^2 c^2} + \frac{1}{16} \frac{e^2 E^2}{M^2 v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

При выводе (5.82) предполагалось, что $\varphi = \varphi(y)$. Если $T_e \neq 0$, то надо учесть появление расталкивающей пучок составляющей электрического поля вдоль магнитного поля.

Используя найденные в гл. 3 решения уравнений движения, можно было бы построить функцию распределения частиц в квази-одночастичном приближении f_0 , а затем с помощью описанного выше метода рассчитать последовательным приближением поправки к ней.

Однако здесь мы этого делать не будем, а сразу априори зададим распределение плотности частиц в потоке в виде

$$n(y, z) = n_0(z) \exp\left(-\frac{y^2}{\delta^2(z)}\right), \quad (5.83)$$

причем зависимость от z будем считать слабой.

Подставляя (5.83) в формулу для термализованного потенциала, получаем

$$\varphi = \varphi^*(y) - \frac{kT_e}{e} \frac{y^2}{\delta} + \frac{kT_e}{e} \ln \frac{n_0(z)}{n_{00}}. \quad (5.84)$$

Если зависимость $\varphi^*(y)$ взять в прежнем виде, то, подставляя выражение (5.84) в уравнения метода усреднения (3.83), получаем вместо (5.82) следующее уравнение для поперечных колебаний:

$$\ddot{y} + \left(\Omega^2 - \frac{2kT_e}{M} \frac{1}{\delta^2}\right) y = 0. \quad (5.85)$$

Таким образом, при достаточно больших электронных температурах пучок становится неустойчивым и фокусировка исчезает. Очевидно, аналогичный результат, используя, например (5.81), можно получить и для осевой линзы.

§ 4. Электронная оболочка КИП, оторванных от стенок

1. Общее рассмотрение. Создание КИП, оторванных от стенок, наиболее заманчивая задача плазмооптики. Осуществление таких режимов кажется вероятным, хотя управление пучком и стабилизация колебаний в нем с помощью электродов, установленных на стенках канала, при наличии между пучком и стенкой только электронов могут оказаться достаточно сложными. Не касаясь вопросов устойчивости, построим модели таких равновесных оторванных конфигураций, обладающих аксиальной симметрией. Для этого необходимо прежде всего рассчитать структуру «электронной» оболочки КИП.

Рассмотрим осевую плазменную линзу и предположим, что вакуум в камере настолько высок, что ионизацией нейтралов в объеме КИП можно пренебречь. Из формулы для термализованного потенциала (5.1) следует, что в объеме КИП

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{e}{kT_e} (\varphi^*(\psi) - \varphi)\right] = v(\psi) \exp \frac{e\varphi}{kT_e}. \quad (5.86)$$

Однако формула (5.86) непригодна, вообще говоря, для расчета плотности частиц в электронной оболочке КИП. Это объясняется тем, что она справедлива лишь для электронов, находящихся в термодинамическом равновесии между собой в пределах узкой магнитной трубки.

Поскольку между КИП и стенкой могут устанавливаться самые различные разности потенциалов, равновесия в электронной оболочке, вообще говоря, нет.

Для того чтобы рассчитать структуру электронной оболочки (т. е. определить распределения Φ и n_e), нужно весьма точно знать функцию распределения электронов в объеме КИП. Слова «весьма точно» означают, что важно знать поведение «хвостов» распределения, поскольку они определяют структуру оболочки. Вообще говоря, аккуратный расчет f_e в этих условиях — задача весьма сложная, так как неизбежное присутствие колебаний может существенно повлиять на результат. Поэтому ниже мы будем просто считать функцию распределения электронов известной, например, из опыта.

Очевидно, в типичных условиях движение электрона перед выходом из объема пучка и в процессе движения до стенки канала можно считать бесстолкновительным. А поскольку в системе предполагается к тому же наличие достаточно сильного магнитного поля, движение электронов будет дрейфовым.

В этом случае имеет место сохранение двух величин: энергии и поперечного адиабатического инварианта:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - e\varphi = \mathcal{E} = \text{const}; \\ v_{\perp}^2/H = I = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

Здесь v_{\parallel} и v_{\perp} — составляющие скорости электрона, направленные вдоль и поперек поля.

Если обозначить индексом нуль величины, взятые на поверхности КИП, то на основании (5.87) в любой точке силовой линии продольная скорость

$$v_{\parallel}^2 = v_{0\parallel}^2 + \left(1 - \frac{H}{H_0}\right) v_{0\perp}^2 - \frac{2e}{m} (\varphi_0 - \varphi). \quad (5.88)$$

Зная зависимость v_{\parallel} от координат, можно рассчитать плотность тех электронов между КИП и стенкой, которые вышли из пучка. Для этого выделим узкую магнитную трубку около рассматриваемой силовой линии (рис. 34) и рассмотрим группу электронов, у которых начальные скорости лежат в пределах $(v_{0\parallel}, v_{0\parallel} + dv_{0\parallel})$, $(v_{0\perp}, v_{0\perp} + dv_{0\perp})$.

Предположим сначала, что электроны этой группы достигают стенки, т. е. всюду $v_{\parallel} > 0$. Тогда в силу уравнения непрерывности можно написать

$$dn_{0k} S_0 v_{0\parallel} = dn_k S v_{\parallel}. \quad (5.89a)$$

Здесь S — площадь сечения магнитной трубки, а dn_k — плотность электронов данной группы, вышедших из КИП (индекс «к»). Вводя функцию распределения $F_0(v_{0\parallel}, v_{0\perp})$ электронов вблизи поверхности КИП

$$dn_{0k}(v_{0\parallel}, v_{0\perp}) = F_0(v_{0\parallel}, v_{0\perp}) dv_{0\parallel} dv_{0\perp} \quad (5.89b)$$

и учитывая закон сохранения магнитного потока

$$S_0 H_0 = SH,$$

получаем следующее выражение:

$$dn_k = \frac{H}{H_0} \frac{(F_0 dv_{0\parallel} dv_{0\perp}) v_{0\parallel}}{\sqrt{v_{0\parallel}^2 + \left(1 - \frac{H}{H_0}\right) v_{0\perp}^2 - \frac{2e}{m} (\varphi_0 - \varphi)}}. \quad (5.90a)$$

Если же при движении вдоль магнитной силовой линии в некоторой точке знаменатель становится мнимым, то здесь происходит

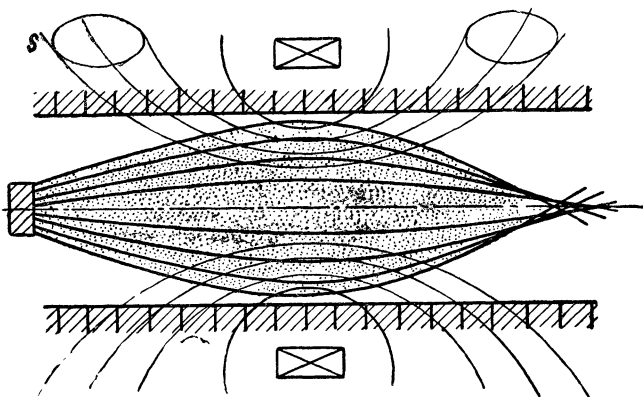


Рис. 34.

отражение этой группы частиц от эффективного потенциального барьера (потенциал стенки $\varphi=0$)

$$\left. \begin{aligned} \chi &= - \left[v_{0\perp}^2 \left(1 - \frac{H}{H_0} \right) - \frac{2e}{M} (\varphi_0 - \varphi) \right]; \\ 0 < \chi < \chi_{\max} &\equiv \frac{2e\varphi_0}{M} - v_{0\perp}^2 \left(1 - \frac{H_{\text{ст}}}{H_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.90b)$$

В результате имеем

$$dn_k = \begin{cases} 0, & \text{если } v_{0\parallel}^2 - \chi < 0; \\ \frac{2H}{H_0} \frac{v_{0\parallel} dn_0}{\sqrt{v_{0\parallel}^2 - \chi}}, & \text{если } \chi_{\max} > v_{0\parallel}^2 > \chi. \end{cases} \quad (5.91)$$

Таким образом, можно написать следующее выражение для плотности электронов в пределах рассматриваемой магнитной трубки:

$$n_e = 2 \frac{H}{H_0} \int_{\Sigma_1} \int_{-\Sigma} \frac{F_0(v_{0\parallel}, v_{0\perp}) v_{0\parallel} dv_{0\parallel} dv_{0\perp}}{\sqrt{v_{0\parallel}^2 + \left(1 - \frac{H}{H_0}\right) v_{0\perp}^2 - \frac{2e}{m} (\Phi_0 - \Phi)}} +$$

$$+ \frac{H}{H_0} \int_{\Sigma_2} \frac{F_0(v_{0\parallel}, v_{0\perp}) v_{0\parallel} dv_{0\parallel} dv_{0\perp}}{\sqrt{v_{0\parallel}^2 + \left(1 - \frac{H}{H_0}\right) v_{0\perp}^2 - \frac{2e}{m} (\Phi_0 - \Phi)}} + n_{\text{ст}}. \quad (5.92)$$

Здесь первый интеграл определяет плотность электронов, испытывающих отражение между данной точкой силовой линии (область параметров Σ) и стенкой (Σ_1), а второй — плотность «пролетных» электронов, попадающих на стенку; $n_{\text{ст}}$ — плотность электронов, эмиттированных стенкой.

Уточнить области интегрирования в (5.92) можно, рассмотрев в плоскости $(v_{0\perp}, v_{0\parallel})$ кривые

$$Y(v_{0\perp}, v_{0\parallel}) = v_{0\parallel}^2 + \left(1 - \frac{H}{H_0}\right) v_{0\perp}^2 - \frac{2e}{m} (\Phi_0 - \Phi) = 0. \quad (5.93)$$

В зависимости от знака $(1 - H/H_0)$ это будут либо эллипсы ($H/H_0 < 1$), либо гиперболы ($H/H_0 > 1$). В первом случае, двигаясь от КИП к стенке вдоль магнитной силовой линии, электрон попадает в область магнитных полей все меньшей напряженности, тогда как во втором случае он движется в усиливающемся магнитном поле. Первая возможность реализуется в осевых линзах, а вторая — в ТУМах и кольцевых билинзах.

Зная выражения для n_e , можно написать уравнения для распределения потенциала в электронной оболочке

$$\Delta\Phi = 4\pi en_e \quad (5.94)$$

и в объеме КИП

$$\Delta\Phi = 4\pi e (n_e - n_i). \quad (5.95)$$

Здесь n_e можно взять в форме Больцмана, а n_i из квазиодночастичной модели.

Полученные уравнения, содержащие функцию $\Phi(r, z)$, необходимо дополнить граничными условиями на стенке канала.

Выше мы предполагали, что ионизация нейтронов в объеме КИП пренебрежимо мала*. В этих условиях вследствие конечной температуры электроны будут постепенно покидать КИП, заряжая его положительно. В результате возникающей декомпенсации оптические свойства системы изменятся.

* Реально это означает, что в промежутке между КИП и стенкой мы учитывали n_e , но пренебрегали n_i .

Очевидно, чтобы прекратить процесс ухода электронов из КИП, необходимо сделать стенку эмиттирующей. Для расчета электронной оболочки при эмиссии со стенки необходимо задать:

- 1) распределение потенциала на стенке;
- 2) закон эмиссии стенки (например, при термоэмиссии можно положить $E = 0$);
- 3) условие равенства нулю потока электронов от КИП к стенке и обратно.

2. Плоская модель электронной оболочки. Уравнения электронной оболочки КИП, даже при известной функции распределения электронов в пучке $F_0(v_{0\parallel}, v_{0\perp})$, весьма сложны. Поэтому мы рассмотрим простую одномерную модель.

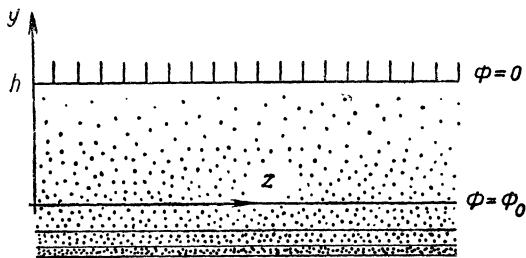


Рис. 35.

Будем считать, что поверхность КИП — плоская, магнитное поле однородно и перпендикулярно к этой плоскости, а эмиттирующая стенка параллельна пучку и удалена от него на расстояние h (рис. 35).

В таком случае плотность электронов в оболочке [см. формулу (5.91)]

$$n_e \equiv n_n + n_{ст} = n_{ст} + 2 \int \frac{F_0(v_0) v_0 dv_0}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2e}{m}(\varphi_0 - \varphi)}} +$$

$$+ \int_{v_0^2 > \frac{2e\varphi_0}{m}} \frac{F_0(v_0) v_0 dv_0}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2e}{m}(\varphi_0 - \varphi)}}; \quad (5.96a)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0; \quad \varphi(h) = 0, \quad (5.96б)$$

где $n_{ст}$ — плотность электронов, эмиттированных стенкой. Здесь $F(v_0)$ — функция распределения электронов по компоненте скорости $v_{0\parallel}$, поскольку в силу однородности магнитного поля поперечная компонента $v_{0\perp}$ не влияет явно на распределение плотности частиц. При написании формулы (5.96) мы положили потенциал пучка равным φ_0 , а потенциал стенки равным нулю.

Если предположить, что при $y = 0$ функция $F_0(v_0)$ — строго максвелловская

$$F_0(v_0) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_e}\right), \quad v_0 > 0, \quad (5.97)$$

то плотность электронов n_{κ} , эмиттированных КИП (5.96),

$$n_{\kappa} = \frac{n_0}{2} \exp\left(-\frac{e(\varphi_0 - \varphi)}{kT_e}\right) \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{e\varphi}{kT_e}}} \exp(-\alpha^2) d\alpha \right]. \quad (5.98)$$

Отсюда видно, что для области промежутка $0 < y < h$, где

$$e\varphi/kT_e \gg 1, \quad (5.99a)$$

распределение n_{κ} с большой точностью является равновесным (больцмановским)

$$n_{\kappa} \approx n_0 \exp\left(-\frac{\varphi_0 - \varphi}{kT_e}\right). \quad (5.99b)$$

Однако вблизи стенки (т. е. при $\varphi \rightarrow 0$) плотность электронов n_{κ} в два раза меньше плотности равновесного распределения. Физически это понятно, так как при $y \rightarrow 0$ имеются электроны,двигающиеся как от КИП, так и к КИП, тогда как при $y \rightarrow h$ электроны двигаются только к стенке.

До сих пор мы говорили об n_{κ} , т. е. об электронах, эмиттированных пучком. Однако в объеме электронной оболочки есть электроны, эмиттированные стенкой ($n_{ст}$).

Пусть модель эмиссии — это модель Ленгмюра, т. е. будем считать, что эмиттирующая способность стенки неограниченна и поэтому при $y = h$ должно выполняться условие

$$\left. \frac{d\varphi}{dy} \right|_{y=h} = 0. \quad (5.100)$$

Кроме того, электроны, эмиттированные стенкой, предполагаются холодными, так что

$$j_{ст} = en_{ст} \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}. \quad (5.101a)$$

Учитывая сохранение $j_{ст}$, из (5.101a) находим выражение для плотности $n_{ст}$ в электронной оболочке

$$n_{ст} = \frac{j_{ст}}{e \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}}. \quad (5.101b)$$

Используя (5.98) и (5.101б), получаем уравнение для Φ

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} = 4\pi e(n_k + n_{ст}) = 4\pi \left\{ \frac{j_{ст}}{\sqrt{\frac{2e\Phi}{m}}} + e \frac{n_0}{2} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{e(\Phi_0 - \Phi)}{kT_e}\right) \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{e\Phi}{kT_e}}} \exp(-\alpha^2) d\alpha \right] \right\}. \quad (5.102)$$

В это уравнение входят две неизвестные постоянные $j_{ст}$ и Φ_0 и две постоянные, которые определяются КИП и предполагаются известными: n_0 и T_e . Для того чтобы найти однозначное решение уравнения (5.102), необходимо иметь четыре граничных условия, два из которых связаны с тем, что уравнения содержат вторую производную, а два — неопределенностью $j_{ст}$ и Φ_0 . Пока мы имеем три условия (5.96) и (5.100). Недостающее четвертое условие — это условие равенства потоков электронов, идущих от КИП на стенку и от стенки к КИП:

$$j_{ст} = e \int_{\sqrt{\frac{2e\Phi_0}{m}}}^{\infty} v_0 F(v_0) dv_0 = \frac{en_0}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_e}{m}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{e\Phi_0}{kT_e}\right). \quad (5.103)$$

Подставляя (5.103) в (5.102) и вводя безразмерные величины

$$\eta^2 = y^2 \frac{2\sqrt{\pi}e^2 n_0}{kT_e} \exp(-\chi_0); \quad \chi_0 \equiv \frac{e\Phi_0}{kT_e}; \quad \chi = \frac{e\Phi}{kT_e}, \quad (5.104)$$

приводим (5.102) к более компактному виду

$$\frac{d^2 \chi}{d\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{\chi}} + \exp(\chi) \left(\sqrt{\pi} + 2 \int_0^{\sqrt{\chi}} \exp(-\alpha^2) d\alpha \right). \quad (5.105)$$

Умножая обе части на $d\chi/d\eta$ и интегрируя, получаем при граничных условиях (5.96б) и (5.100) соотношение

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\eta} \right)^2 = \sqrt{\pi} \exp(\chi) + 2 \exp(\chi) \int_0^{\sqrt{\chi}} \exp(-\alpha^2) d\alpha - \sqrt{\pi}. \quad (5.106)$$

Отсюда следует зависимость χ от η

$$\frac{1}{\pi^{1/4}} \int_0^{\chi} \frac{d\chi \exp(-\chi/2)}{\sqrt{\left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\chi}} \exp(-\alpha^2) d\alpha \right] - e^{-\chi}}} = \sqrt{2}\eta. \quad (5.107)$$

Полагая $y = h$, находим связь χ_0 или, что то же, φ_0 с параметрами системы

$$G(\chi_0) = \exp\left(\frac{\chi_0}{2}\right) \int_0^{\chi_0} \frac{d\chi \exp\left(-\frac{\chi}{2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\chi}} \exp(-\alpha^2) d\alpha}} =$$

$$= h \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{kT_e}}. \quad (5.108)$$

Вычисления показывают, что найденный интеграл следующим образом ведет себя при $\chi \rightarrow 0$ и $\chi \rightarrow \infty$:

$$Z(\chi) = \int_0^{\chi} \frac{d\chi \exp(-\chi/2)}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\chi}} \exp(-\alpha^2) d\alpha}} =$$

$$= \begin{cases} Z(\infty) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \exp(-\chi/2) + \frac{1}{6} \exp(-3/2\chi) + \dots \right\}; & \chi \rightarrow \infty; \\ \sqrt{\frac{4}{\pi}} \left(\frac{4}{3} \chi^{3/4} - \frac{\sqrt{\pi}}{5} \chi^{5/4} + \dots \right); & \chi \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.109)$$

Зная функцию $Z(\chi)$, можно определить перепад потенциала при известных n_0 , h , T_e .

Если взять наиболее интересный случай, когда h велико по сравнению с дебаевским радиусом

$$D = \left(\sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{kT_e}} \right)^{-1}, \quad (5.110)$$

то в силу (5.109) можно положить $Z(\chi) \approx Z(\infty) \approx 2$. Подставляя это значение $Z(\chi)$ в (5.108), получаем искомое выражение для разности потенциалов между пучком и стенкой

$$\varphi_0 \approx \frac{kT_e}{e} \ln \frac{h}{D\sqrt{2}}. \quad (5.111)$$

Очевидно, логарифмическая зависимость φ_0 от отношения h/D есть следствие предположения о максвелловском характере F_0 . Определив величину скачка потенциала на электронной оболочке, можно по известному распределению потенциала на стенке найти распределение потенциала на поверхности КИП, а тем самым рассчитать поле в его объеме*.

* В действительности, для этого надо решить уравнение (5.95) в объеме КИП, чтобы сшить зону нарушения квазинейтральности в окрестности поверхности КИП с зоной квазинейтральности в объеме КИП. Однако в этой области скачок потенциала невелик — порядка kT_e/e (см. § 5, разд. 2).

§ 5. Конфигурации КИП в осевой линзе в «лижущем» режиме

1. Модель пристеночной проводимости. Под пристеночной проводимостью понимается проводимость, обязанная рассеиванию электронов на стенках канала. Основное уравнение пристеночной проводимости в достаточно сильном магнитном поле может быть записано в виде [39]

$$i_s = \lambda E \equiv \left(\frac{\kappa n_t}{H^2} \right) E. \quad (5.112)$$

Здесь i_s — ток, протекающий вблизи стенки в слое толщиной порядка электронного ларморовского радиуса и отнесенный к 1 см в направлении, перпендикулярном к E ; n_t — плотность плазмы около

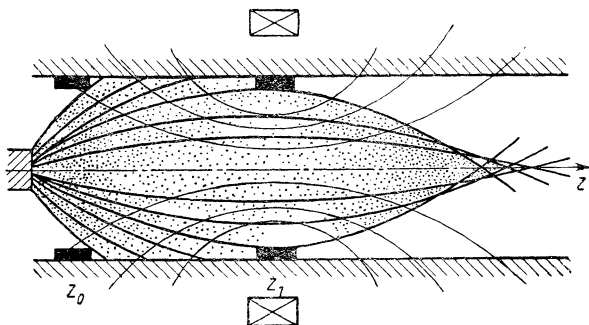


Рис. 36.

стенки; H — напряженность магнитного поля; κ — коэффициент, зависящий от шероховатости стенки, электронной температуры и угла между магнитными силовыми линиями и нормалью к стенке.

Рассмотрим задачу о равновесной конфигурации КИП в осевой линзе следующей примитивной конструкции: имеется диэлектрическая труба радиуса a с шероховатой поверхностью (рис. 36). На поверхности трубы при $z = z_0$ и $z = z_1$ находятся два достаточно узких кольца, между которыми приложена разность потенциалов. Пусть ψ_0 — магнитная поверхность, проходящая через кольцо z_0 , положим, для определенности, что $\psi^* = 0$ при $\psi < \psi^*$. Будем считать, что все ионы, находящиеся в системе, вышли из источника и движение их бесстолкновительное: попадая на стенку, они гибнут.

Пусть при $z < z_1$ всюду в объеме трубы квазинейтральность не нарушается, тогда как при $z > z_1$ КИП окружен электронной оболочкой. Область $z > z_1$ можно рассчитать по схеме, приведенной в предыдущем параграфе, с учетом того, что распределение ψ^* (ψ) определяется пристеночной проводимостью и в стационарном режиме стенка должна зарядиться так, чтобы поток электронов на

нее из КИП был равен нулю. Разумеется, эта задача имеет строгое решение лишь в том случае, когда энергетический спектр электронов в КИП обрзан на некоторой достаточно большой энергии.

Итак, нас интересует расчет области $z_0 < z < z_1$. Чтобы не усложнять задачу, будем считать, что T_e мало и поэтому ролью термализации в объеме КИП можно пренебречь, т. е. движение ионов будем рассчитывать в квазиодночастичном приближении. Равновесная конфигурация, которая возникает в рассматриваемом случае, определяется следующими факторами:

- 1) геометрией магнитного поля $\psi(r, z)$;
- 2) угловым распределением частиц, выходящих из источника,

$$dN = \nu(\alpha) d\alpha; \quad (5.113)$$

- 3) параметром пристеночной проводимости $\kappa(z)$;
- 4) приложенной разностью потенциалов U_p ;
- 5) геометрическими размерами a, z_0, z_1 .

Если считать заданными $\psi, \nu(\alpha)$ и $\kappa(z)$, то расчет конфигурации сводится к определению зависимости $\phi(\psi)$. Найдем соответствующее уравнение. Для этого прежде всего запишем закон сохранения заряда:

$$j_{ir} - j_{er} = \partial i_s / \partial z; \quad i_s = \kappa n_i E / H^2. \quad (5.114)$$

Здесь j_{ir} — плотность тока ионов на стенку; j_{er} — модуль плотности тока электронов на стенку.

Так как величина пристеночного скачка потенциала пропорциональна T_e , т. е. малая величина, то изменением радиальной компоненты скорости ионов в пределах скачка можно пренебречь. Поэтому, если известны полная скорость ионов v_0 , падающих на стенку, и угол $(\pi/2 - \beta)$, под которым они падают на нее (пренебрегаем разбросом ионов по скоростям), то плотность частиц около стенки

$$n_t = j_{ir} / v_0 e \sin \beta. \quad (5.115)$$

Итак, при сделанных оговорках можно записать [см. формулы (5.114) и (5.115)]

$$j_{ir} - j_{er} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa(z)}{v_0 e} \frac{E j_{ir}}{H^2 \sin \beta} \right). \quad (5.116)$$

Будем считать, что объемной проводимостью канала можно пренебречь. Тогда, поскольку количество электронов, находящихся в пределах данной магнитной трубки, не меняется, мы должны положить $j_{er} = 0$. В результате уравнение (5.116) принимает вид

$$j_{ir} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa}{v_0 \sin \beta} \frac{E j_{ir}}{H^2 e} \right). \quad (5.117)$$

Найдем связь $j_{ir}(z)$ и $\sin \beta(z)$ с распределением $\nu(\alpha)$ частиц по углам на выходе из источника [см. формулу (5.113)]. Ограничимся

простейшим случаем прохождения узкого пучка через плазменную электростатическую линзу. Тогда можно написать

$$\varphi = k\psi \approx r^2\varphi_1(z)/2; \quad \varphi_1(z) \equiv kH_0(z). \quad (5.118)$$

Решение уравнения движения

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{e}{Mv_0^2} \varphi_1(z) r = 0 \quad (5.119)$$

при начальных условиях $r \Big|_{z=0} = 0$, $\frac{dr}{dz} \Big|_{z=0} = \alpha$ имеет вид*

$$r = \alpha R_2(z). \quad (5.120)$$

Отсюда найдем связь между углом α , под которым частица вышла из источника, и координатой z точки столкновения с трубой

$$\alpha(z) = a/R_2(z). \quad (5.121)$$

Функция $R_2(z)$, если система способна фокусировать, имеет при некотором $z = z_1$ максимум. Поэтому существует некое минимальное $\alpha_{\text{мин}}$, при котором частицы еще достигают стенки, тогда как при $\alpha < \alpha_{\text{мин}}$ они проходят канал насквозь. Найдем плотность потока ионов на стенку, зная $\alpha(z)$, и угловое распределение частиц, выходящих из источника $\nu(\alpha)$. Очевидно, можно написать

$$j_{ir} = e \frac{v_0(\alpha) d\alpha}{2\pi a dz} = e \frac{v_0(\alpha)}{2\pi} \frac{d}{dz} \frac{1}{R_2(z)}. \quad (5.122)$$

Угол, под которым ионы встречают стенку, определяется соотношением

$$\text{tg } \beta = \frac{dr}{dz} \Big|_{r=a}.$$

Подставляя сюда (5.121), получаем

$$\text{tg } \beta = \alpha \frac{dR_2}{dz} = \frac{a}{R_2} \frac{dR_2}{dz}. \quad (5.123)$$

Если $\beta \rightarrow 0$, то $\text{tg } \beta \approx \sin \beta$. В этом случае, как следует из формул (5.115), (5.122) и (5.123), плотность ионов около стенки равна

$$n_r = \frac{j_{ir}}{e v_0 \sin \beta} = \frac{v_0(\alpha)}{2\pi v_0 a} \frac{1}{R_2(z)}. \quad (5.124a)$$

Полученные выражения имеют особенность при $z = 0$. Эта особенность возникает из-за сделанного при выводе (5.124) предположения, что β мало. В противном случае

$$n_r = \frac{v_0(\alpha)}{2\pi v_0 R} \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2 \left(\frac{dR_2}{dz}\right)^2}}{R_2^2 + a^2}. \quad (5.124б)$$

* Однако в отличие от прежнего [см. формулы (5.63) и (5.64)] считаем функцию $R_2(z)$ размерной.

Это выражение регулярно при $z=0$. Подставляя (5.124) и (5.122) в (5.117), получаем основное уравнение для расчета линзы в режиме пристеночной проводимости:

$$\frac{e v}{R_2^2} \frac{dR_2}{dz} = -\frac{\partial}{\partial z} \kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{1}{H^2} \frac{v}{v_0 a} \frac{1}{R_2}. \quad (5.125)$$

К этому уравнению необходимо добавить соотношения (5.118) и (5.119), связывающие H и φ с R_2 , которые можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{r=a} &= -\frac{a^2}{2e} M v_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{R_2''}{R_2}; \\ H &= -\frac{1}{k} \frac{M v_0^2}{e} \frac{R_2''}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (5.126)$$

Как видно, из полученной системы (5.125), (5.126) мы имеем фактически явное выражение для $\kappa(z)$, линейное дифференциальное уравнение для $v(\alpha)$ и дифференциальное уравнение четвертого порядка для $R_2(z)$ при прочих известных величинах. В простейшем случае, когда заданы $v(\alpha)$ и $R_2(z)$, мы определяем полностью равновесную конфигурацию потока, найдя κ с помощью (5.125) и (5.126).

2. Модель эмиттирующей стенки. Рассмотрим теперь другую модель осевой линзы. Предположим, что пучок движется внутри секционированной трубы, внутренняя поверхность которой обладает неограниченной эмиттирующей способностью. Секционирование позволяет задать на поверхности трубы произвольное распределение потенциала $\varphi_t(z)$. Однако благодаря неизбежно возникающему скачку потенциала около стенки распределение потенциала в объеме КИП отличается от того, которое формально следует из условия $\Phi^* = \Phi^*(\psi)$.

Возникновение пристеночного скачка потенциала объясняется тем, что стенка и плазменный объем не находятся в термодинамическом равновесии и поэтому существенную роль здесь начинает играть инерция электронов в связи с их макроскопическими потоками.

Предположим, что при $z < z_1$ ионный пучок «лижет» стенку, однако, считая стенку очень гладкой, пренебрежем пристеночной проводимостью*, а также и объемной. Тогда можно написать следующее уравнение баланса электронов в объеме КИП:

$$-j_{es} + j_{er} = 0. \quad (5.127)$$

Здесь j_{es} — поток электронов, эмиттируемых стенкой и попадающих в объем КИП; j_{er} — поток электронов из КИП на стенку.

По-прежнему будем считать, что поток ионов односкоростной и можно пренебречь изменением радиальной компоненты скорости

* Это допущение разумно по той причине, что основная масса электронов, падая на стенку, отражается в пределах дебаевского слоя, который может быть очень «гладким».

ионов v_{\perp} в пределах зоны пристеночного скачка. Тогда распределение потенциала около стенки

$$d^2\varphi/dy^2 = -4\pi e (n_i - n_{er} - n_{es}). \quad (5.128)$$

Здесь плотность ионов $n_i \equiv j_{ir}/v_{\perp} = \text{const}$; $y = a - r$ —расстояние, отсчитываемое от стенки канала внутрь КИП. Левая часть соотношения (5.128) — одномерный лапласиан, так как толщина пристеночного слоя мала.

Для удобства расчетов считаем, что в данной точке потенциал стенки равен нулю. Тогда, следуя схеме Ленгмюра (5.101), запишем

$$n_{es} = \frac{|j_{es}|}{e \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}}; \quad |j_{es}| \equiv j_0. \quad (5.129)$$

Предполагая в объеме КИП электроны равновесными, аппроксимируем распределение плотности (5.98) простой зависимостью

$$n = n_0 \exp\left(-e \frac{\varphi_0 - \varphi}{kT}\right). \quad (5.130a)$$

Здесь φ_0 — потенциал КИП вблизи стенки до пристеночного слоя. Тогда [см. формулы (5.103) и (5.127)]

$$j_{er} = \frac{en_0 a}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{e\varphi_0}{kT_e}\right) = j_0; \quad a^2 = \frac{2kT_e}{m}. \quad (5.130b)$$

Теперь уравнение (5.128) принимает вид

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = -\left(1 - \frac{b}{\sqrt{\chi}} - 2\sqrt{\pi} b e^{\chi}\right). \quad (5.131a)$$

Здесь введены обозначения

$$\chi \equiv \frac{e\varphi}{kT_e}; \quad b \equiv \frac{j_0}{en_0 a}; \quad \xi^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0i}}{kT_e} y^2. \quad (5.131b)$$

Итак, мы получили уравнение, зависящее от одного параметра. Интегрируя (5.131) и учитывая при $y = 0$ граничные условия Ленгмюра

$$\chi = 0; \quad d\chi/d\xi = 0, \quad (5.132)$$

получаем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\xi}\right)^2 = 2b\sqrt{\chi} + 2\sqrt{\pi}b(e^{\chi} - 1) - \chi \equiv Y(\chi). \quad (5.133)$$

Значение b можно определить следующим образом. При достаточно малых b зависимость $Y(\chi)$ немонотонна и знакопеременна (рис. 37). Если потребовать, чтобы потенциал монотонно возрастал, стремясь к конечной величине при $\xi \rightarrow \infty$, необходимо выбрать параметр b равным b^* , при котором кривая $Y(\chi)$ касается оси χ

в точке χ^* . Следует, однако, подчеркнуть, что хотя выбор $b = b^*$ и представляется естественным, необходимо иметь в виду, что возможны ограниченные решения и при $b < b^*$. Однако они соответствуют осциллирующим распределениям потенциала, уходящим на бесконечность. Таким образом априори в рамках рассматриваемой статической модели может существовать широкий класс моделей, удовлетворяющих единственному бесспорному предположению об ограниченности φ при $\chi \rightarrow \infty$. Для того чтобы b было однозначно, необходимо исследовать решение на устойчивость. Но это находится за пределами настоящего исследования.

Вернемся к анализу случая $b = b^*$. Кроме граничных условий при $\zeta = 0$ в этом случае, поскольку χ стремится к χ^* при $\zeta \rightarrow \infty$, должны выполняться следующие условия:

$$\left. \frac{d\chi}{d\zeta} \right|_{\chi \rightarrow \chi^*} \rightarrow 0; \quad \left. \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} \right|_{\chi \rightarrow \chi^*} \rightarrow 0. \quad (5.134)$$

Отсюда можно определить как величину b^* , так и величину χ^* — потенциал бесконечности. Из (5.131), (5.133) и (5.134) следуют два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} b^* [2\sqrt{\chi^*} + 2\sqrt{\pi}(e^{\chi^*} - 1)] &= \chi^*; \\ b^* \left[\frac{1}{\sqrt{\chi^*}} + 2\sqrt{\pi}e^{\chi^*} \right] &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.135a)$$

Нетрудно убедиться, используя последние уравнения и определение b , что введенный в (5.130a) скачок потенциала φ_0 связан с χ^* соотношением $e\varphi_0/kT_e = \chi^*$. Исключая из системы (5.135a) величину b^* , получаем уравнение для χ^*

$$\sqrt{\chi^*} + 2\sqrt{\pi}(e^{\chi^*} - 1) = 2\sqrt{\pi}e^{\chi^*}\chi^*. \quad (5.135b)$$

Это уравнение имеет два корня: $\chi^* = 0$, $\chi^* \approx 0,5$. Для нас, очевидно, представляет интерес второй корень. Таким образом, при сделанных предположениях скачок потенциала

$$\varphi_0 \approx 0,5kT_e/e. \quad (5.136)$$

Зная $\chi^* \approx 0,5$, найдем величину b^* [см. формулу (5.135a)]:

$$b^* = \left(\frac{1}{\sqrt{\chi^*}} + 2\sqrt{\pi} \exp(\chi^*) \right)^{-1} \approx 0,14$$

и с помощью (5.130б) и (5.135б) ток эмиссии со стенки

$$j_{es} = en_0 a \cdot 0,14 = 0,14 en_0 v_{\perp} \frac{a}{v_{\perp}}; \quad j_{es} = j_{i\perp} \left(0,14 \frac{a}{v_{\perp}} \right). \quad (5.137)$$

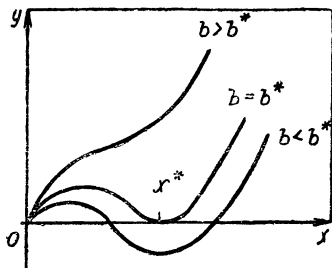


Рис. 37.

При $a \sim 10^8$ см/сек, $v_{\perp} \sim 10^6$ см/сек ток электронов с эмиттера почти в 14 раз больше тока ионов на эмиттер.

Зная величину пристеночного скачка потенциала φ_0 , можно окончательно рассчитать плазменную конфигурацию.

Действительно, если $\varphi_t(z)$ — распределение потенциала вдоль стенки, то

$$\varphi^*(\psi) = \varphi_t(z(\psi)) + \varphi_0(T_e(\psi)). \quad (5.138)$$

Отсюда, в частности, следует, что если $T_e = \text{const}$, то $\varphi_0^*(\psi)$ отличается от $\varphi_t(z(\psi))$ только несущественной постоянной.

В проведенном расчете скачка потенциала может вызвать возражение замена распределения плотности (5.98) более простой зависимостью (5.130а). Это тем более кажется неприятным, что величина χ^* оказалась равной 0,5 и поэтому заведомо нельзя считать обмен электронами между КИП и стенкой слабым. Разумеется, в этих условиях вообще не имеет особого смысла предположение о равновесии электронной компоненты в объеме КИП.

Однако если все же считать электронную компоненту в глубине объема КИП равновесной*, то можно рассчитать картину распределения потенциала в слое, используя (5.98). Проведенные расчеты показывают, что найденные таким образом значения χ^* и b^* практически не отличаются от приведенных выше.

§ 6. Собственные магнитные поля в ТУМе

До сих пор, рассчитывая плазменную систему, мы полностью пренебрегали магнитными полями токов, текущих в объеме КИП. Как правило, это всегда можно сделать, если импульс потока много меньше магнитного давления

$$\rho v^2 \ll (H^2/8\pi). \quad (5.139)$$

Однако существуют плазмооптические системы, когда собственные магнитные поля являются единственными. Такого рода ситуация реализуется, например, в коаксиальных импульсных ускорителях во время существования так называемого «квазистационарного плазменного фокуса» [42]. Однако в данной работе мы не рассматривали подобных устройств, поэтому ограничимся здесь анализом собственных магнитных полей в плазмооптических системах с внешним магнитным полем.

Для примера рассмотрим собственные магнитные поля, создаваемые токами, текущими в объеме КИП в условиях ТУМа. В ТУМе, как и в других аксиально симметричных устройствах, возникающее собственное магнитное поле имеет три компоненты, которые удобно разбить на азимутальные и меридиональные поля. Азимутальное магнитное поле создается продольным током ионов и электронов.

* В данном случае распределение потенциала определяется не далекими хвостами, а «основной» частью распределения.

Пусть $l \approx 10^3 a$, диаметр пучка около 30 см, тогда $H_\theta \approx 7$ э. Это, очевидно, очень небольшая величина по сравнению с напряженностью поля в линзах H_0 , которая измеряется в килоэрстедах.

Существенно бóльшие магнитные поля $H_{\text{соб}}$ дают азимутальные дрейфовые токи. Рассмотрим их подробнее на примере плоской модели, считая, что магнитная система ускорителя такова, что поля азимутальных токов можно рассчитывать с граничным условием

$$|H_{\text{соб}}| \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (5.140)$$

Если взять $E = E_0 (H/H_0)^2$; $H = H_0 \sin \alpha z$, то, пренебрегая ионной составляющей тока, получаем

$$j_x = enc E/H = enc (E_0/H_0) \sin \alpha z. \quad (5.141)$$

Полагая, что $n = n_0(y)$, напишем уравнение для функций магнитного потока собственного магнитного поля КИП

$$\Delta \psi_{\text{соб}} = -\frac{4\pi}{c} j_x = -4\pi en_0(y) \frac{E_0}{H_0} \sin \alpha z.$$

Решение этого уравнения, симметричное относительно y_1 , имеет вид

$$\psi_{\text{соб}} = A \operatorname{ch} \alpha y \sin \alpha z - \frac{4\pi e E_0}{H_0} \sin \alpha z \frac{1}{\alpha} \int_0^y n_0(\eta) \operatorname{sh} \alpha (\eta - y) d\eta,$$

где A — постоянная, выбираемая из условий (5.140).

В частности, если

$$n_0(y) = n_0 \text{ при } |y| < y_0; \quad n(y) = 0 \text{ при } |y| > y_0,$$

то

$$\psi_{\text{соб}} = \frac{4\pi e E_0 n_0}{H_0 \alpha^2} \sin \alpha z [\exp(\alpha y_0) \operatorname{ch} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha (y_0 - y)]_{|y| > y_0};$$

$$\psi_{\text{соб}} = \left[-\frac{4\pi e E_0 n_0}{H_0} \sin \alpha z \frac{1}{\alpha^2} (1 - \exp(-\alpha y_0)) \operatorname{ch} \alpha y - \frac{4\pi e E_0}{H_0} n_0 \frac{\sin \alpha z}{\alpha^2} (1 - \operatorname{ch} \alpha y) \right]_{|y| < y_0}.$$

Отсюда видно, что по сравнению с основным полем собственное магнитное поле сдвинуто по фазе на $\pi/2$.

Отношение κ амплитуд собственного и внешнего полей равно

$$\kappa = \frac{|\Psi_j|_{\text{ампл}}}{|\Psi_{\text{вн}}|_{\text{ампл}}} \approx \frac{4\pi e E_0 n_0}{H_0^2 \alpha} = \frac{4e E_0 \Lambda_0 n_0 M}{H_0^2 M} \approx \frac{\delta(v^2)}{c_{\Lambda_0}^2}. \quad (5.142)$$

Здесь $\delta(v^2)$ — изменение квадрата скорости частицы при прохождении одной линзы, $c_{\Lambda_0}^2 = H_0^2/4\pi M n_0$ — квадрат альфвеновской скорости. Очевидно, по структуре оценка (5.142) согласуется с (5.139).

Параметр κ для приводившегося ранее примера ускорителя протонов на 10^3 а при $Mv^2/2 = 10$ кэв и $H_0 = 10^4$ э оказывается порядка 10^{-4} . Это говорит о том, что если все неприятности в работе ускорителя связаны с искажением магнитного поля, то в рассмотренной системе можно довести ускоряемый ток почти до 10^6 а, сохраняя все остальные параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арцимович Л. А. и др. Электромагнитное разделение изотопов тяжелых элементов. — «Атомная энергия», 1957, 3, № 12, с. 483—491.
2. Морозов А. И. Фокусировка холодных квазинейтральных пучков в электромагнитных полях. — «Докл. АН СССР», 1965, 163, № 6, с. 1363.
3. Лебедев С. В., Морозов А. И. Фокусировка ионного пучка в поле заряженного кольца с током. — «Ж. теорет. физ.», 1966, 36, с. 960.
4. Жуков В. В., Морозов А. И., Щепкин Г. Я. Экспериментальное исследование плазменной фокусировки ионных пучков. — «Письма ЖЭТФ», 1969, 9, с. 24.
5. Nezlín M. V. Plasma in stabilities and the compensation of space charge on anion beam. — Plasma Physics, 1965, 10, p. 337—358.
6. Райко В. И. О законах подобия для источников ионов. — «Ж. теорет. физ.», 1963, 33, с. 244.
7. Габович М. Д., Кириченко Г. С. Двухпучковая неустойчивость в системе взаимопроникающих пучков. — «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1966, 50, с. 1183.
8. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы. — «Докл. АН СССР», 1949, 64, с. 555.
9. Завойский Е. К. Коллективные взаимодействия и проблема получения высокотемпературной плазмы. — «Атомная энергия», 1963, 14, с. 57.
10. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. Взаимодействие модулированного потока с плазмой. — «Атомная энергия», 1965, 19, с. 336.
11. Габович М. Д. Плазменные источники ионов. Киев, «Наукова думка», 1964.
12. Морозов А. И., Артющков Е. В., Соловьев Л. С., Шубин А. П. Некоторые свойства течений проводящего газа в магнитном поле. — В сб.: Низкотемпературная плазма. М., «Мир», 1967.
13. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. — См. наст. сб., с. 3.
14. Lary E. C. Ion acceleration in a space charge neutral plasma. UAC Res. Lab. Report. UAR — A125, June 1962; Leikel G. R., Reshotko E. Hall current ion accelerator. — Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, 1962, v. 7, 6, p. 414.
15. Janes G. S., Dotson J. Experimental studies of oscillations and accompanying anomalous electron diffusion. Proc. 5. Symp. on engng aspects of MHD, M II, 1964, Apr., 1—2, p. 135—148.
16. Морозов А. И., Есипчук Ю. В. и др. Экспериментальное исследование плазменного ускорителя с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения. — «Ж. техн. физ.», 1972, № 1, с. 12.
17. Жаринов А. В., Попов Ю. С. Об ускорении плазмы замкнутым холловским током. — «Ж. техн. физ.», 1967, 37, с. 2.
18. Кервалишвили Н. А. Влияние ориентации анода на характеристики разряда низкого давления в поперечном магнитном поле. — «Ж. техн. физ.», 1968, 38, 4, с. 637.
19. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Кибернетическая стабилизация плазменных неустойчивостей. — «Ж. техн. физ.», 1964, 34, с. 9.
20. Зубков И. П., Кислов А. Я., Лебедев С. В., Морозов А. И. Движение ионов в двухлинзовом ускорителе с замкнутым дрейфом электронов. — «Ж. техн. физ.», 1971, 41, с. 3.

21. **Borris, Ruska.** Z. Phys., 1932, 76, p. 649.
22. **Gabor D.** Proc. Roy. Soc. A., 1945, 183, p. 992—935.
23. **Иванов В. И.** Диссертация. ХФТИ, 1956.
24. **Лебедев С. В.** Конфигурации токов, обеспечивающие быстроспадающие аксиально симметричные магнитные поля. — «Приборы и техника эксперимента», 1971, № 1, с. 32.
25. **Гринберг Г. А.** Математическая теория электрических и магнитных явлений. М., Изд-во АН СССР, 1947.
26. **Вандакуров Ю. В.** Уравнения электронной оптики для широких пучков с учетом хроматической абберации. — «Ж. техн. физ.», 1955, 25, 8, с. 1412.
27. **Морозов А. И., Соловьев Л. С.** Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 2, М., Госатомиздат, 1963.
28. **Лебедев С. В.** К вопросу фокусировки заряженных частиц магнитными полями. — «Ж. техн. физ.», 1971, 41, с. 3.
29. **Морозов А. И., Лебедев С. В.** К теории фокусировки квазинейтральных пучков аксиально симметричными электромагнитными полями. — «Ж. техн. физ.», 1967, 37, с. 4.
30. **Шапирог Ю. А.** Об одном прямом методе расчета электромагнитных линз. — «Ж. техн. физ.», 1964, 34, № 10, с. 1747—1751.
31. **Кельман В. М., Явор С. Я.** Электронная оптика. М., Изд-во АН СССР, 1963.
32. **Scherzer O.** Beitrage zur Electronenoptik. Berlin, V. H. Busch, E. Brüche, 1937.
33. **Морозов А. И., Щепкин Г. Я.** Авторское свидетельство № 115/435. Бюлл. изобрет., № 4, 1969, с. 64.
34. **Коломенский А. А., Лебедев А. Н.** Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
35. **Волков Т. Ф., Морозов А. И.** Магнитная система трубчатого многолинзового ускорителя. — «Ж. техн. физ.», 1971, 41, № 6, с. 1247.
36. **Волков Т. Ф.** К теории движения заряженных частиц в трубчатом многолинзовом ускорителе. — «Ж. техн. физ.», 1971, 41, № 6, с. 1257.
37. **Кадомцев Б. Б.** Гидромагнитная устойчивость плазмы. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 2, М., Госатомиздат, 1963.
38. **Добрецов Л. Н., Гомоюкова М. В.** Эмиссионная электроника. М., «Наука», 1966.
39. **Морозов А. И.** О пристеночной проводимости хорошо замагниченной плазмы. — «Приклад. матем. и теор. физ.», 1968, № 3, с. 19.
40. **Морозов А. И., Кислов А. Я., Зубков И. П.** Сильноточный плазменный ускоритель с замкнутым электронным дрейфом. — «Письма ЖЭТФ», 1968, 7, с. 7.
41. **Зубков М. П., Кислов А. Я., Морозов А. И.** Экспериментальное исследование двухлинзового ускорителя. — «Ж. техн. физ.», 1970, 40, № 11, с. 2301.
42. **Плазменные ускорители.** Под ред. Л. А. Арцимовича. М., Машиностроение, 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. И. Морозов, Л. С. Соловьев

Введение	3
Глава 1. Механизмы ускорения	4
§ 1. Микроскопическая картина ускорения плазмы	4
§ 2. Условия существования электрического поля в плазменном объеме	6
§ 3. Основные уравнения и параметр обмена ξ	9
§ 4. Возмущения плазменного потока.	11
Глава 2. Аксиально симметричные течения идеальной плазмы в магнитном поле при $\xi = 0$	16
§ 1. Законы сохранения и уравнения для функций потока	16
§ 2. Аксиально симметричные течения поперек азимутального магнитного поля	21
§ 3. Течение плазмы в узкой трубке потока ($H_{\parallel} = 0$)	23
§ 4. Интегрируемые случаи течений, медленно изменяющихся вдоль оси z	30
§ 5. Переход течения через скорость сигнала	37
§ 6. Токовые вихри и критические поверхности.	39
Глава 3. Течения в аксиально симметричных каналах при наличии продольного магнитного поля	46
§ 1. Интегральные характеристики	46
§ 2. Течения в узких аксиально симметричных каналах	48
§ 3. Течения холодной плазмы в каналах медленно меняющегося сечения	58
Глава 4. Аксиально симметричные течения идеальной плазмы при учете эффекта Холла	60
§ 1. Законы сохранения и интегральные параметры	60
§ 2. Качественный анализ системы уравнений (4.18) и (4.19)	64
§ 3. Течения двухкомпонентной плазмы в узких трубках при $H_{\parallel} = 0$	70
§ 4. Течения в плавных каналах при $H_{\parallel} = 0$	72
Приложение 1. Двухпараметрические стационарные гидромагнитные течения идеально проводящей среды в произвольной криволинейной системе координат	73
Приложение 2. Стационарные симметричные течения в двухжидкостной магнитной гидродинамике	80
Список литературы	86

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ

К. В. Брушлинский, А. И. Морозов

Введение	88
Глава 1. Постановка задачи и метод расчетов	91
§ 1.1 Физическая постановка задачи	91
§ 1.2. Математические модели задачи	101
§ 1.3. Метод численного решения задачи	115

Глава 2. Течения полностью ионизированной плазмы	121
§ 2.1. Установление стационарного режима и устойчивость течения	121
§ 2.2. Квазиодномерное течение.	123
§ 2.3. Двумерные течения идеальной плазмы	127
§ 2.4. Влияние конечной проводимости на течение	131
§ 2.5. Течения с учетом эффекта Холла	134
§ 2.6. Компрессионные течения плазмы	143
Глава 3. Течения газа, ионизирующегося в канале	151
§ 3.1. Процесс ионизации в рассматриваемой модели течения	151
§ 3.2. О стационарных течениях со скачком проводимости в канале постоянного сечения	152
§ 3.3. Расчеты течений ионизирующегося газа	156
Список литературы	161

**ДВУМЕРНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЕННОГО
ФОКУСА Z-ПИНЧА**

В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник

Введение	164
--------------------	-----

Глава 1. Постановка магнитогиродинамической задачи о нецилиндрическом Z-пинче	166
---	-----

§ 1. Описание диссипативных процессов	166
§ 2. Двумерные уравнения магнитной гидродинамики (МГД-модель)	172
§ 3. Закон сохранения энергии и электротехническое уравнение	177
§ 4. Начальные и граничные условия МГД-задачи	184
§ 5. Безразмерная форма уравнений и завершение постановки МГД-задачи	188

Глава 2. Метод численного решения двумерной МГД-задачи	192
--	-----

§ 6. Общие замечания	192
§ 7. Метод свободных точек	195
§ 8. Организация отбора точек	197
§ 9. Метод получения разностных соотношений	201
§ 10. Расчетные формулы	204
§ 11. Разностная реализация граничных условий	212
§ 12. Постановка расчетной задачи	215

Глава 3. Результаты расчетов МГД-модели Z-пинча	216
---	-----

§ 13. Некоторые замечания	216
§ 14. Схождение ударной волны и токовой оболочки к оси системы	218
§ 15. Первое сжатие плазмы	221
§ 16. Второе сжатие плазмы	224
§ 17. Неустойчивость границы плазмы с магнитным полем	231
§ 18. Энергетический баланс и нейтронный выход плазменного фокуса	236
Заключение	243
Список литературы	245

ПЛАЗМООПТИКА

А. И. Морозов, С. В. Лебедев

Глава 1. Введение	247
-----------------------------	-----

§ 1. Понятие о плазмооптике	247
§ 2. Электрическое поле в плазме при $T_e = 0$	252
§ 3. Схема анализа плазмооптических систем	264

Глава 2. Методы расчета параксиальных пучков в квазидночас- тичном приближении	266
§ 1. Задание магнитных полей	266
§ 2. Уравнения параксиального приближения	270
§ 3. Учет аббераций в схеме Гринберга	281
§ 4. Гармонические системы с эквипотенциальной основной траекто- рией	284
§ 5. Приближение «слабых» полей для линз	291
§ 6. О вариационной формулировке задач корпускулярной оптики .	300
Глава 3. Плазменные линзы	304
§ 1. Осевые плазменные линзы	304
§ 2. Магнитные кольцевые линзы	309
§ 3. Электростатические плазменные линзы	313
§ 4. Абберации первого порядка кольцевых плазменных линз	317
§ 5. Трубочатые многолинзовые ускорители заряженных частиц . . .	320
§ 6. Торoidalный ТУМ	327
Глава 4. Плазмооптические системы с двухпараметрической фоку- сировкой	332
§ 1. Системы со стабилизированным фокусом	332
§ 2. Фокусировка по радиальным и азимутальным скоростям (А-сис- тема)	336
§ 3. Рекуператор	340
Глава 5. Равновесные конфигурации КИП	343
§ 1. Термализованный потенциал	343
§ 2. Распределение термализованного потенциала и электронной темпе- ратуры в стационарных плазменных системах	347
§ 3. Динамика ионов	354
§ 4. Электронная оболочка КИП, оторванных от стенок	364
§ 5. Конфигурация КИП в осевой линзе в «лижущем» режиме	372
§ 6. Собственные магнитные поля в ТУМе	378
Список литературы	380

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Вы п у с к 8

Редактор **Л. В. Белова**

Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**

Технический редактор **Н. А. Власова**

Корректоры **Е. Д. Рагулина, Н. А. Смирнова**

Сдано в набор 22.VI.1973 г.

Подписано к печати 24.I.1974 г.

Т-03039

Формат 60×90^{1/16}.

Бумага типографская № 1.

Усл. печ. л 24,0 Уч.-изд. л 24,24

Тираж 2250 экз.

Цена 2 р. 63 к

Зак. изд. 71135

Зак. тип 364

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, Москва. И-11, Б. Переяславская, 46.

533
В-748

Кирд

ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ
ПЛАЗМЫ

АТОМИЗДАТ · 1974