

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

ВЫПУСК

9

НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ТОКАМАНОВ.
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ.
СОЛИТОНЫ

Под общей редакцией
акад. М. А. ЛЕОНТОВИЧА

Редактор выпуска
д-р физ.-мат. наук
А. Б. МИХАЙЛОВСКИЙ



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1979

Вопросы теории плазмы. Вып. 9. Неустойчивости токамаков. Нелинейные волны. Солитоны / Под общ. ред. акад. М. А. Леонтовича; Ред. вып. д-р физ.-мат. наук А. Б. Михайловский. — М.: Атомиздат, 1979, 272 с.

В 9-м выпуске серии сборников «Вопросы теории плазмы» излагаются результаты, полученные в последние годы по теории коллективных процессов в плазме. В выпуск включены шесть обзоров по темам: развитие теории гидромагнитных неустойчивостей токамаков; нелинейные волны и солитоны; вопросы теории коллективных процессов в токамаке с группой быстрых ионов; к теории альфвеновских колебаний неоднородной плазмы; неустойчивости несобственных колебаний; неустойчивости квазинечетных возмущений в токамаке.

Выпуск предназначен специалистам, занимающимся физикой плазмы и проблемами термоядерной энергетики.
Рис. 21. Библиография 216 наименований.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ГИДРОМАГНИТНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ТОКАМАКОВ

А. Б. Михайловский

ВВЕДЕНИЕ

Плазма, удерживаемая в тороидальных ловушках типа токамак, как и всякая другая реальная плазма, термодинамически неравновесна. Поэтому в соответствии с общими представлениями теории плазменных неустойчивостей в ней возможно самопроизвольное возбуждение коллективных степеней свободы, т. е. развитие неустойчивостей. Ввиду большой стоимости современных токамаков и еще большей предполагаемой стоимости будущих термоядерных реакторов-токамаков важно знать, каким именно неустойчивостям может быть подвержена плазма токамака и к каким последствиям они могут приводить. Этим объясняется то большое внимание, которое уже в течение длительного времени привлекает к себе проблема неустойчивостей токамаков.

Основы современной теории неустойчивостей токамаков были изложены в книге [1]. После написания этой книги обогатились новыми результатами обе составные части этой теории — теория гидромагнитных неустойчивостей и теория микронеустойчивостей. В данной работе изложены новые результаты теории гидромагнитных неустойчивостей. Новые результаты теории микронеустойчивостей излагаются в других работах, публикуемых в данном выпуске.

Значительная часть современных исследований по теории гидромагнитных неустойчивостей токамаков проводится численными методами. Вместе с тем разрабатываются и аналитические методы, с помощью которых удастся выявить многие основные закономерности этой теории. О результатах, получаемых с помощью аналитических методов, в основном и будет идти речь ниже.

В настоящее время стало достаточно очевидно, что картина гидромагнитных неустойчивостей тороидальных систем существенно отличается от той, которая предсказывается для прямого цилиндра. В связи с этим важна разработка методов исследования таких неустойчивостей, адекватно учитывающих специфику тороидального магнитного поля. Изложению прогресса в методике учета тороидальности в теории гидромагнитных неустойчивостей токамака посвящена гл. 1.

В последние годы существенно изменились представления о равновесных параметрах реактора-токамака, и прежде всего о параметре β —отношении давления плазмы к давлению полного магнитного поля. Если ранее считалось, что β не может быть большим 1—2% (малое β), то сейчас установлено, что возможны равновесные состояния с $\beta \approx 30\%$ (большое β). В связи с этим резко активизировались исследования по теории желобковых и баллонных неустойчивостей токамака с большим β . Результаты этих исследований рассмотрены в гл. 2.

Существенный прогресс в последнее время был достигнут в теории внутренних винтовых неустойчивостей. В частности, было выяснено, что теория внутренних винтовых неустойчивостей тороидальных систем неадекватна теории аналогичных неустойчивостей прямого цилиндра. Результаты соответствующих исследований излагаются в гл. 3.

Тороиальность стала более последовательно учитываться также в теории МГД-неустойчивостей, чувствительных к дрейфовым эффектам. Сделанное в этом направлении обсуждается в гл. 4.

ГЛАВА 1

МЕТОДИКА УЧЕТА ТОРОИДАЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ГИДРОМАГНИТНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ТОКАМАКА

§ 1.1. Введение

Методы теории гидромагнитных неустойчивостей токамака имеют богатую историю, которой мы коснемся в конце этой главы. Таких методов много, и это определяется, помимо всего прочего, кругом задач, на которые они ориентированы. В последующих главах нас будут интересовать мелкомасштабные желобковые и баллонные неустойчивости, винтовые возмущения с малыми азимутальными числами и неустойчивости, зависящие от конечной проводимости (резистивные) и дрейфовых эффектов. Поэтому в данной главе идет речь о совершенствовании методики исследования именно этого круга задач.

Вначале коснемся некоторых предшествующих результатов. В гл. 5 книги [1] был изложен метод получения уравнения малых колебаний, описывающего мелкомасштабные МГД-возмущения в приближении бесконечной проводимости и нулевой частоты. В гл. 8 той же книги было показано, как этот метод обобщается на случай мелкомасштабных МГД-возмущений с конечной частотой, а в гл. 13 [1] — на случай, когда важны дрейфовые эффекты.

Метод [1] основывается на использовании уравнения замыкания токов

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.1)$$

Выражение для плотности тока представлялось в виде суммы двух частей

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}, \quad (1.2)$$

одна из которых соответствует току вдоль магнитного поля:

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \alpha \mathbf{B}, \quad (1.3)$$

а другая — поперек: $\mathbf{j}_{\perp} \perp \mathbf{B}$. Величина α с использованием уравнения Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (1.4)$$

выражается через производные магнитного поля

$$\alpha = (\mathbf{B} \text{rot} \mathbf{B}) / \mathbf{B}^2. \quad (1.5)$$

Выражение для \mathbf{j}_{\perp} находится с помощью гидромагнитного уравнения движения

$$\rho d\mathbf{V}/dt = -\nabla p - \nabla \pi + [\mathbf{j}, \mathbf{B}], \quad (1.6)$$

так что

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{1}{\mathbf{B}^2} \left[\mathbf{B}, \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla p + \nabla \pi \right], \quad (1.7)$$

где ρ , \mathbf{V} , p , π — плотность массы, скорость, давление и тензор вязкости. Подстановка (1.3), (1.7) в (1.1) с последующей линеаризацией приводит к уравнению малых колебаний вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_0 \nabla \tilde{\alpha} + \tilde{\mathbf{B}} \nabla \alpha_0 + \text{div} \left(\frac{1}{\mathbf{B}_0^2} \left[\mathbf{B}_0, \rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla \pi \right] \right) + \\ & + \nabla \tilde{p} \text{rot} \frac{\mathbf{B}_0}{\mathbf{B}_0^2} + \nabla p_0 \text{rot} \left(\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}_0^2} - 2 \frac{\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}_0^2} \mathbf{B}_0 \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где тильда означает возмущенные величины, а ноль — равновесные.

Использование уравнения типа (1.8), дополненного соответствующими соотношениями, связывающими между собой различные возмущенные величины, и составляет основу метода [1]. Этот метод, весьма эффективный при анализе мелкомасштабных возмущений, т. е. возмущений с большими азимутальными волновыми числами (см. [1], а также [2—5]), оказывается недостаточно удобным при анализе крупномасштабных возмущений, т. е. возмущений с малыми азимутальными числами [6]. В связи с этим в § 1.2 излагается другой подход к исследованию МГД-неустойчивостей, также восходящий к уравнению замыкания токов (1.1), но использующий уравнение малых колебаний вида, отличного от (1.8). Основное отличие нового уравнения малых колебаний от (1.8) связано с тем, что в отличие от (1.2) электрический ток представляется не в виде суммы физически различных частей, а в виде суммы контравариантных компонент. Соответственно и новое уравнение малых колебаний вы-

ражается в ковариантных терминах, а не в физических, как (1.8). Оказывается, что такое ковариантное уравнение малых колебаний удобно для анализа возмущений как с большими, так и с малыми азимутальными числами.

В § 1.3 рассмотрим «идеальный» МГД-предел ковариантного уравнения малых колебаний и установим его связь с функционалом потенциальной энергии, фигурирующим в энергетическом методе исследования МГД-неустойчивостей. В § 1.4 покажем, как, используя ковариантное уравнение малых колебаний, можно получить результаты [1], касающиеся мелкомасштабных МГД-неустойчивостей. В § 1.5, основываясь на этом уравнении, выведем исходные уравнения теории низших винтовых возмущений, а в § 1.6 — уравнения, позволяющие исследовать роль инерционных эффектов в МГД-неустойчивостях. В § 1.7 дается обзор литературы.

§ 1.2. Ковариантное уравнение малых колебаний

Представляем (1.1) в ковариантном виде

$$\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{g} \tilde{j}^1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} \tilde{j}^2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{g} \tilde{j}^3 = 0. \quad (1.9)$$

Здесь a, θ, φ — обычно используемые координаты [1], g — детерминант метрического тензора.

Из линеаризованного уравнения движения (1.6) находим

$$\tilde{j}^1 = \frac{j_0^3}{B_0^3} \tilde{B}^1 - \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \left(\rho_0 \frac{d\tilde{V}}{dt} + \nabla \pi \right)_\theta \right], \quad (1.10)$$

$$\tilde{j}^2 = \frac{B_0^2}{B_0^3} \tilde{j}^3 + \frac{j_0^3}{B_0^3} \tilde{B}^2 - \frac{j_0^3}{B_0^3} \tilde{B}^3 + \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial a} + \left(\rho_0 \frac{d\tilde{V}}{dt} + \nabla \pi \right)_a \right]. \quad (1.11)$$

Здесь верхние и нижние индексы у соответствующих величин следует понимать в ковариантном смысле.

Кроме того, согласно уравнению Максвелла (1.4)

$$\tilde{j}^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \tilde{B}_2}{\partial a} - \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \theta} \right). \quad (1.12)$$

Подставляя (1.10)–(1.12) в (1.9), приходим к искомому уравнению малых колебаний

$$\begin{aligned} & \left(\frac{B_0^2}{B_0^3} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial \tilde{B}_2}{\partial a} - \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial a} \left(\sqrt{g} \frac{j_0^3}{B_0^3} \tilde{B}^1 \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{[\tilde{B}, j_0]_1}{B_0^3} \right) - \sqrt{g} \operatorname{rot}^3 \left\{ \frac{1}{B_0^3} \left(\rho_0 \frac{d\tilde{V}}{dt} + \nabla \pi + \nabla \tilde{p} \right) \right\} = 0. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Как и в (1.8), сюда входят компоненты возмущенного магнитного поля, а также возмущенные величины, характеризующие плазму,—

давление, скорость и тензор вязкости. Связь этих величин с возмущенным магнитным полем зависит от конкретных предположений о свойствах плазмы и в этом смысле зависит от того, какими уравнениями мы описываем плазму. Конкретизацией этих зависимостей мы займемся в последующих параграфах. Кроме того, уравнение (1.13) должно быть дополнено соотношениями, связывающими компоненты возмущенного магнитного поля. Одно из этих уравнений — это уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.14)$$

В качестве второго используем уравнение (1.10), в котором \tilde{j}^1 выражено с помощью (1.4) через $\tilde{\mathbf{B}}$:

$$\tilde{j}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \tilde{B}_3}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{B}_2}{\partial \varphi} \right). \quad (1.15)$$

При этом (1.10) означает

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \tilde{B}_3}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{B}_2}{\partial \varphi} \right) = \frac{j_0^3}{B_0^3} \tilde{B}^1 - \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \left(\rho_0 \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} + \nabla \pi \right)_\theta \right]. \quad (1.16)$$

Заметим также, что связь между ковариантными и контравариантными компонентами $\tilde{\mathbf{B}}$ определяется соотношениями:

$$\tilde{B}_1 = \sqrt{g} (L \tilde{B}^1 + M \tilde{B}^2); \quad (1.17)$$

$$\tilde{B}_2 = \sqrt{g} (M \tilde{B}^1 + N \tilde{B}^2); \quad (1.18)$$

$$\tilde{B}_3 = \sqrt{g} G \tilde{B}^3. \quad (1.19)$$

Здесь введены обозначения

$$L = g_{11}/\sqrt{g}, \quad M = g_{12}/\sqrt{g}, \quad N = g_{22}/\sqrt{g}; \quad (1.20)$$

$$G = g_{33}/\sqrt{g}, \quad (1.21)$$

g_{ik} — компоненты метрического тензора ($i, k = 1, 2, 3$). Предполагается, что токамак осесимметричен; при этом $g_{13} = g_{23} = 0$. Параметр G велик по сравнению с L, M, N как $(R/a)^2$, где R — большой радиус токамака. Предполагается, что выбор θ соответствует системе координат с выпрямленными силовыми линиями; при этом G не зависит от θ .

Кроме того, учтем соотношения, характеризующие равновесные магнитное поле и ток:

$$B_0^2 = \chi'/2\pi\sqrt{g}, \quad B_0^3 = \Phi'/2\pi\sqrt{g}, \quad (1.22)$$

$$j_0^2 = I'/2\pi\sqrt{g}, \quad j_0^3 = (J' + Q)/2\pi\sqrt{g}, \quad (1.23)$$

где χ , Φ — поперечный и продольный потоки магнитного поля; I , J — поперечный и продольный электрический ток, штрих — производная по a ;

$$Q = -(4\pi^2 p' / \chi') [\sqrt{g} - \sqrt{g^{(0)}}], \quad (1.24)$$

индекс «нуль» сверху — среднее по θ . Нижний индекс «нуль» у ρ_0 для простоты опущен.

Заметим, что $Q = \partial v / \partial \theta$, где v — функция, фигурирующая в гл. 5 книги [1].

С учетом (1.17)–(1.24) уравнения (1.13), (1.16) принимают вид

$$\begin{aligned} & \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} (L\tilde{B}^1 + M\tilde{B}^2) - \frac{\partial}{\partial a} \sqrt{g} (M\tilde{B}^1 + N\tilde{B}^2) \right] - \\ & - \Phi' \frac{\partial}{\partial a} \frac{J' + Q}{\Phi'} \sqrt{g} \tilde{B}^1 - \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} [(J' + Q) \tilde{B}^2 - I' \tilde{B}^3] + \\ & + 2\pi \left\{ \Phi' \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right) - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial a} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} + \Phi' \sqrt{g} \times \right. \\ & \left. \times \text{rot}^3 \left[\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \left(\rho_0 \frac{d\tilde{V}}{dt} + \nabla \pi \right) \right] \right\} = 0; \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} G \tilde{B}^3 - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{g} (M\tilde{B}^1 + N\tilde{B}^2) = \\ & = \frac{J' + Q}{\Phi'} \sqrt{g} \tilde{B}^1 - \frac{2\pi \sqrt{g}}{\Phi'} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \left(\rho_0 \frac{d\tilde{V}}{dt} + \nabla \pi \right)_{\theta} \right]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Эти уравнения дополняются соотношением

$$\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{g} \tilde{B}^1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} \tilde{B}^2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{g} \tilde{B}^3 = 0, \quad (1.27)$$

представляющим собой ковариантную форму записи уравнения (1.14).

Формулы (1.26), (1.27) будут в дальнейшем использоваться для выражения одних возмущенных величин через другие и подстановки их в (1.25). Поэтому соотношение (1.25) в конечном счете и будет основным исходным уравнением. Именно его мы обычно и будем называть ковариантным уравнением малых колебаний (или просто уравнением малых колебаний).

§ 1.3. Связь ковариантного уравнения малых колебаний с функционалом потенциальной энергии

В случае идеальной проводимости

$$\tilde{\mathbf{B}} = \text{rot} [\xi, \mathbf{B}_0], \quad (1.28)$$

где ξ — смещение плазмы, которое в пренебрежении дрейфовыми эффектами связано с возмущенной скоростью соотношением

$$\partial \xi / \partial t = \tilde{\mathbf{V}}. \quad (1.29)$$

Введя обозначения

$$X \equiv \xi^1, Y \equiv 2\pi [\xi, \mathbf{V}_0]_1 \equiv \xi^2 \Phi' - \xi^3 \chi', \quad (1.30)$$

из (1.28) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g} \tilde{B}^1 &= \frac{1}{2\pi} \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) X; \\ \sqrt{g} \tilde{B}^2 &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial a} (\chi' X) - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right]; \\ \sqrt{g} \tilde{B}^3 &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial a} (\Phi' X) + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Пренебрежем также инерционными эффектами ($\partial/\partial t \rightarrow 0$) и сжимаемостью, тогда [1]

$$\tilde{p} = -p' X. \quad (1.32)$$

При выполнении соотношений (1.31) уравнение (1.27) удовлетворяется автоматически, а уравнения (1.25), (1.26) означают

$$\begin{aligned} & \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[L \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) X - M \left(\frac{\partial}{\partial a} X \chi' - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial a} \left[N \left(\frac{\partial}{\partial a} X \chi' - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) - M \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) X \right] \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[I' \frac{\partial Y}{\partial \theta} + (J' + Q) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] - \Phi' \frac{\partial}{\partial a} \left[I' \frac{\partial X}{\partial \theta} + (J' + Q) \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right] + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ X \left[\Phi' I'' - \chi' (J' + Q)' - 4\pi^2 p' \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial a} \right] \right\} = 0; \quad (1.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & G \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial a} \Phi' X \right) - N \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial a} X \chi' - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) + \\ & + M \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) X + I' \frac{\partial X}{\partial \theta} + (J' + Q) \frac{\partial X}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.34) \end{aligned}$$

С помощью уравнения (1.11) можно убедиться, что среднее по θ от X с точностью до членов порядка $1/G$ есть нуль:

$$X^{(0)} \approx 0. \quad (1.35)$$

Поэтому можно ввести функцию $\int_0^\theta X(\theta') d\theta'$, понимаемую как интеграл по верхнему пределу. Умножая обе части равенства (1.33) на эту функцию и интегрируя результат по a, θ, φ с весом $1/8\pi^2$, получаем

$$\begin{aligned} W \equiv & \frac{1}{8\pi^2} \int da d\theta d\varphi \left\{ L \left(\chi' \frac{\partial X}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 - \right. \\ & \left. - M \left(\chi' \frac{\partial X}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[2 \frac{\partial}{\partial a} X \chi' - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(Y - \frac{\partial}{\partial a} \Phi' \int_0^\theta X(\theta') d\theta' \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + N \left(\frac{\partial}{\partial a} X \chi' - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) \left[\frac{\partial}{\partial a} X \chi' + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial a} \Phi' \int_{\theta}^{\theta} X(\theta') d\theta' \right] + \\
& + X \left[I' \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial a} X \Phi' \right) + (J' + Q) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(Y - \frac{\partial}{\partial a} \Phi' \int_{\theta}^{\theta} X(\theta') d\theta' \right) \right] - \\
& - X^2 \left[\Phi' I'' - \chi' (J'' + Q') - 4\pi^2 \rho' \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial a} \right] = 0. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

Сравним этот результат с функционалом потенциальной энергии [1], записанным в переменных X и Y :

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{8\pi^2} \int da d\theta d\varphi \left\{ L \left(\chi' \frac{\partial X}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \right. \\
& + 2M \left(\chi' \frac{\partial X}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial X \chi'}{\partial \theta} \right) + N \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial X \chi'}{\partial a} \right)^2 + \\
& + G \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial X \Phi'}{\partial a} \right)^2 + 2(J' + Q) X \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial X \chi'}{\partial a} \right) + \\
& \left. + 2I' X \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial X \Phi'}{\partial a} \right) - X^2 \left[I' \Phi'' - (J' + Q) \chi'' + 4\pi^2 \rho' \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial a} \right] \right\}. \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Учтем при этом соотношение (1.34), которое есть не что иное, как условие минимизации (1.37) по переменной Y . Интегрируя (1.34) по объему с весом $Y + \frac{\partial}{\partial a} \Phi' \int_{\theta}^{\theta} X(\theta') d\theta'$, получаем

$$\begin{aligned}
& \int da d\theta d\varphi \left\{ G \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial X \Phi'}{\partial a} \right)^2 + I' X \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial X \Phi'}{\partial a} \right) + \right. \\
& + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial a} \Phi' \int_{\theta}^{\theta} X(\theta') d\theta' \right] \left[N \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial X \chi'}{\partial a} \right) + \right. \\
& \left. \left. + M \left(\chi' \frac{\partial X}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right) + (J' + Q) X \right] \right\} = 0. \quad (1.38)
\end{aligned}$$

С учетом (1.38) находим, что (1.36) и (1.37) — это одно и то же.

§ 1.4. Уравнения мелкомасштабных МГД-возмущений

Рассмотрим, как из (1.33), (1.34) получается уравнение малых колебаний для мелкомасштабных МГД-возмущений (5.30) гл. 5 книги [1].

Полагаем операторы $\partial/\partial a$, $\partial/\partial \theta$, $\partial/\partial \varphi$, действующие на возмущенные величины, большими, а разность $\chi' \partial/\partial \theta + \Phi' \partial/\partial \varphi$ — малой. Кроме того, учитывая аксиальную симметрию токамака, считаем, что возмущения зависят от φ по закону $\exp(-i n \varphi)$.

Вспоминая, что G — большая величина, решаем уравнение (1.34) разложением в ряд по $1/G$. Удерживаем при этом формально малые

члены $\sim 1/G$, необходимые для правильного вычисления магнитной ямы. Тогда

$$Y = -\frac{\partial}{\partial a} \Phi' \int^{\theta} X(\theta') d\theta' - \frac{I'}{G} \int^{\theta} X(\theta') d\theta' + \\ + \frac{in(J'+Q)}{G} \int^{\theta} d\theta' \int^{\theta'} X(\theta'') d\theta'' - \frac{inN}{G} \frac{\partial}{\partial a} \int^{\theta} d\theta' \int^{\theta'} d\theta'' \times \\ \times \left[\chi' X(\theta'') - in\Phi' \int^{\theta''} X(\theta''') d\theta''' \right]. \quad (1.39)$$

Подставляем этот результат в уравнение (1.33) и после выделения членов с $\partial X/\partial a$ учитываем, что если оператор $\partial/\partial\theta$ не стоит в комбинации $\chi'\partial/\partial\theta + \Phi'\partial/\partial\Phi$, то его можно заменять inq , где $q = \Phi'/\chi'$, так что

$$\partial X/\partial\theta \approx inqX, \quad \int^{\theta} d\theta' \approx -iX/nq. \quad (1.40)$$

Тогда (1.33) преобразуется к виду

$$\left(\chi' \frac{\partial}{\partial\theta} - in\Phi' \right) \left(N \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 2inqM \frac{\partial}{\partial a} - n^2 q^2 \right) \left(\chi' \frac{\partial}{\partial\theta} - in\Phi' \right) X - \\ - 4\pi^2 p' \left[inq \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial\theta} - n^2 q^2 X \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial a} - \frac{\Phi''}{\Phi'} \sqrt{g} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4\pi^2 p' g}{G\Phi'^2} - \frac{\mu\mu' N \sqrt{g}}{G} \right) \right] = 0. \quad (1.41)$$

Здесь мы воспользовались уравнением равновесия

$$I'\Phi' - (J'+Q)\chi' = 4\pi^2 p' \sqrt{g} \quad (1.42)$$

и ввели стандартное обозначение $\mu \equiv 1/q = \chi'/\Phi'$.

Чтобы сопоставить (1.41) с аналогичным уравнением книги [1] (см. также [2]), учтем следующие соотношения между равновесными параметрами:

$$p' \Phi' \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right)' = \frac{\Omega - \mu' \Phi'^2 \alpha_0}{(2\pi)^2} - \frac{p'}{2\pi} \mathbf{B}_0 \nabla \left(\frac{v}{p'_0} \right)', \quad (1.43)$$

$$\frac{p'}{\Phi'} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial\theta} = -\frac{\sqrt{g}}{2\pi} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0, \quad (1.44)$$

где $\Omega = p'V'' + J'\chi'' - I'\Phi''$, $\alpha_0 = \mathbf{j}_0 \mathbf{B}_0 / B_0^2$. С помощью этих соотношений убеждаемся, что уравнение малых колебаний (5.30) книги [1] в случае аксиально-симметричного токамака означает то же самое, что и (1.41).

Для последующего использования уравнения (1.41) преобразуем коэффициент при $n^2 q^2 X$. При этом учитываем соотношения между равновесными параметрами

$$J = N^{(0)}\chi', \quad -I = G\Phi' \quad (1.45)$$

и вытекающее из второго из этих равенств и из (1.42) выражение

$$\Phi'' = -\frac{G'}{G} \Phi' - \frac{1}{G\Phi'} (p' V' + J' \chi'), \quad (1.46)$$

где V' — производная от объема, связанная с детерминантом метрического тензора соотношением

$$V' = 4\pi^2 \sqrt{g}^{(0)}. \quad (1.47)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \alpha} - \frac{\Phi''}{\Phi'} \sqrt{g} - \frac{4\pi^2 p' g}{G\Phi'^2} - \frac{\mu\mu' N \sqrt{g}}{G} = \frac{1}{G} \left\{ g'_{33} + \mu^2 \left[g_{33} \left(\frac{g_{22}}{g_{33}} \right)' + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{g} \tilde{N}' \right] - \frac{4\pi^2 p'}{\Phi'^2} \sqrt{g} \tilde{V} \tilde{g} - \frac{\sqrt{g}}{\Phi'^2} \chi' \chi'' \tilde{N} \right\}, \quad (1.48) \end{aligned}$$

где $\tilde{V} \tilde{g} = \sqrt{g} - \sqrt{g}^{(0)}$, $\tilde{N} = N - N^{(0)}$.

Уравнения (1.41), (1.48) будут использованы в качестве исходных в гл. 2 при анализе желобковых и баллонных неустойчивостей в токамаке с большим β .

§ 1.5. Уравнения для низших идеальных МГД-возмущений

Рассматривая в § 1.4 мелкомасштабные возмущения, мы фактически предполагали, что в фурье-разложениях X и Y

$$(X, Y) = \sum_m (X_m, Y_m) \exp(im\theta) \quad (1.49)$$

важны только члены с большими номерами m . Теперь обобщим это рассмотрение на произвольные m . Это позволит нам в дальнейшем проанализировать устойчивость низших МГД-возмущений.

Аналогично (1.49) раскладываем в ряды Фурье также функции L, M, N, Q :

$$(L, M, N, Q) = \sum_m (L_m, M_m, N_m, Q_m) \exp(im\theta), \quad (1.50)$$

учитывая, что $M_0 = Q_0 = 0$. Что касается величины G , то, как отмечалось выше, она от θ не зависит.

Аналогично (1.39) из (1.34) с требуемой для дальнейшего точностью находим

$$Y_m = \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Phi' X_m) + \frac{inN_0}{m^2 G} \frac{\partial}{\partial \alpha} (l_m X_m) + \frac{iX_m}{mG} \left(I' - \frac{n}{m} J' \right), \quad m \neq 0; \quad (1.51)$$

$$Y_0 = \frac{i}{nN_0} \sum_{m' \neq 0} \left[N_{-m'} \frac{\partial}{\partial \alpha} (l_{m'} X_{m'}) - im' M_{-m'} l_{m'} X_{m'} - Q_{-m'} X_{m'} \right], \quad (1.52)$$

где $l_m \equiv \chi' - (n/m)\Phi'$. Эти выражения подставляем в m -ю гармонику уравнения (1.33), которая при этом сводится к виду

$$\sum_{m'} \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(S_{mm'} \frac{\partial X_{m'}}{\partial a} \right) + T_{mm'} \frac{\partial X_{m'}}{\partial a} - U_{mm'} X_{m'} \right] = 0. \quad (1.53)$$

Здесь

$$S_{mm'} = l_m l_{m'} \left(N_{m-m'} - \frac{N_m N_{-m'}}{N_0} \right); \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} T_{mm'} = & \left(N_{m-m'} - \frac{N_m N_{-m'}}{N_0} \right) (l_m l_{m'} - l_{m'} l_m) - \\ & - i l_m l_{m'} \left[(m' + m) M_{m-m'} - \frac{1}{N_0} (m' N_m M_{-m'} + m M_m N_{-m'}) \right] + \\ & + n \Phi' Q_{m-m'} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right) - \frac{1}{N_0} (Q_m N_{-m'} l_{m'} - Q_{-m'} N_m l_m); \quad (1.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{mm'} = & \delta_{mm'} \left\{ p' V'' - \Phi'' \left(I' - \frac{n}{m} J' \right) + l_m J'' - \right. \\ & - \frac{n}{m} \frac{N_0}{G} l_m' \left(I' - \frac{n}{m} J' \right) - \frac{1}{G} \left(I' - \frac{n}{m} J' \right)^2 + \\ & \left. + l_m \left[l_m' \frac{n^2 N_0^2}{m^2 G} + \frac{n}{m} \frac{N_0}{G} \left(I' - \frac{n}{m} J' \right) \right] \right\} + l_m \left(Q_{m-m'} - \frac{N_m Q_{-m'}}{N_0} \right)' - \\ & - \left[p' \left(\frac{\chi'}{p'} Q_{m-m'} \right)' - \frac{n \Phi''}{m'} Q_{m-m'} \right] - \frac{Q_m Q_{-m'}}{N_0} + \\ & + \frac{Q_m N_{-m'}}{N_0} l_{m'} - \frac{i m' Q_m M_{-m'}}{N_0} l_{m'} + l_m \left\{ l_m' \left[i m' \left(M_{m-m'} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{M_{-m'} N_m}{N_0} \right) + i m \left(M_{m-m'} - \frac{M_m N_{-m'}}{N_0} \right) \right] - \\ & - \left[l_m' \left(N_{m-m'} - \frac{N_m N_{-m'}}{N_0} \right) \right]' + i m \frac{M_m Q_{-m'}}{N_0} \left. \right\} + l_m l_{m'} \left[m m' \left(L_{m-m'} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{M_m M_{-m'}}{N_0} \right) + i m' \left(M_{m-m'} - \frac{M_{-m'} N_m}{N_0} \right) \right]'. \quad (1.56) \end{aligned}$$

Коэффициенты $S_{mm'}$, $T_{mm'}$, $U_{mm'}$ обладают следующими свойствами симметрии:

$$S_{mm'} = S_{m'm}; \quad T_{mm'} = -T_{m'm}; \quad (1.57)$$

$$U_{mm'} = U_{m'm} + T_{m'm}' \quad (1.58)$$

Аналогично (1.36) с помощью уравнения (1.53) можно составить интегральную форму

$$W \equiv \frac{1}{2} \int da \sum_{m, m'} \left(S_{mm'} \frac{\partial X_m^*}{\partial a} \frac{\partial X_{m'}}{\partial a} - T_{mm'} \frac{\partial X_{m'}}{\partial a} X_m^* + \right.$$

$$+ U_{mm'} X_m^* X_{m'}) = 0. \quad (1.59)$$

Вследствие указанной выше симметрии коэффициентов эта интегральная форма является самосопряженной.

Ясно также, что уравнение малых колебаний (1.53) может быть получено варьированием функционала потенциальной энергии, записанного в виде (1.59).

Для дальнейшего рассмотрения удобно представить уравнение (1.53) как сумму диагональной и недиагональной частей:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a} \left(S_{mm} \frac{\partial X_m}{\partial a} \right) - U_{mm} X_m + \\ & + \sum_{m' \neq m} \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(S_{mm'} \frac{\partial X_{m'}}{\partial a} \right) + T_{mm'} \frac{\partial X_{m'}}{\partial a} - U_{mm'} X_{m'} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Здесь учтено, что $T_{mm} = 0$. Выражение для U_{mm} с использованием соотношений (1.42), (1.45)–(1.48) можно преобразовать к виду

$$U_{mm} = \left(\frac{n^2}{m^2} - 1 \right) \Lambda_m + \tilde{U}_{mm} + U_{mm}^b. \quad (1.61)$$

Здесь

$$\Lambda_m = -2\rho' \frac{V' N_0 G'}{G^2} - \frac{l_m}{G} \left[\chi' (N_0 N_0')' - \frac{n}{m} \Phi' G' \left(\frac{N_0^2}{G} \right)' \right]; \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{mm} = & p' \left[\frac{(V' G)'}{G} - 2 \frac{V' N_0 G'}{G^2} + \frac{n}{m} \mu \frac{V'}{G^2} (N_0 G)' \right] + \\ & + l_m \left\{ \frac{\chi''}{G} (N_0 G)' + N_0'' \chi' - \frac{\chi'}{G} (N_0 N_0')' + \right. \\ & + \left. \frac{n\Phi'}{m} \left[-N_0 G \left(\frac{G'}{G^2} \right)' + N_0 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \frac{G'}{G} \left(\frac{N_0^2}{G} \right)' + \frac{\mu^2 N_0'}{G^2} (N_0 G)' \right] \right\} + \\ & + l_m^2 \left[m^2 L_0 + \frac{G' N_0'}{G} + (N_0 G)' \frac{n}{m} \frac{N_0 \chi''}{G^2 \Phi'} \right]; \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} U_{mm}^b = & -\frac{Q_m^2}{N_0} + \frac{Q_m N_{-m}}{N_0} l_m' + l_m \left[\left(l_m' \frac{N_m^2}{N_0} - \frac{N_m Q_m}{N_0} \right)' + \right. \\ & \left. + 2im \frac{M_m Q_{-m}}{N_0} \right] + l_m^2 \left[\frac{m^2 M_m M_{-m}}{N_0} + im \left(\frac{M_{-m} N_m}{N_0} \right)' \right]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Величина U_{mm}^b характеризует вклад в основную (т.е. в m -ю) гармонику баллонности, обусловленной нулевой гармоникой Y_0 . Величина Λ_m при переходе к предельному случаю круглого цилиндра означает

$$\lim \Lambda_m = \Lambda_m^c \equiv \frac{8\pi^2 a^2 \rho'}{R} - \frac{a}{R^3} \left(\chi' - \frac{n\Phi'}{m} \right) \left(\chi' + \frac{3n\Phi'}{m} \right). \quad (1.65)$$

Отметим также, что при $n^2 = m^2$, и в частности при $n = m = 1$, вклад Λ_m в уравнение (1.61) выпадает.

§ 1.6. Учет инерции в идеальных МГД-возмущениях

1. Общая схема модификации уравнений (1.41), (1.53). Уравнения § 1.3—1.5 описывают возмущения с нулевой частотой. С их помощью можно исследовать границы идеальных МГД-неустойчивостей. Для нахождения инкрементов этих неустойчивостей необходимо дополнить уравнения (1.33), (1.34) и ряд последующих, во-первых, членами с $\partial\tilde{V}/\partial t$, содержащимися в (1.25), (1.26), и, во-вторых, слагаемыми со сжимаемостью, т. е. с $\delta\tilde{p}$, где $\delta\tilde{p}$ определено соотношением [ср. с (1.32)]

$$\tilde{p} = -\tilde{p}'X + \delta\tilde{p}. \quad (1.66)$$

Тогда вместо (1.33), (1.34) будем иметь уравнения

$$\hat{C}(X, Y) + \delta\hat{C}(X, Y) = 0, \quad (1.67)$$

$$\hat{D}(X, Y) + \delta\hat{D}(X, Y) = 0, \quad (1.68)$$

где \hat{C} и \hat{D} — левые части уравнений (1.33), (1.34), а выражения для $\delta\hat{C}$ и $\delta\hat{D}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\hat{C} = 4\pi^2 \left[\Phi' \frac{\partial\delta\tilde{p}}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{V\bar{g}}{\Phi'} \right) - \frac{\partial\delta\tilde{p}}{\partial a} \frac{\partial V\bar{g}}{\partial\theta} + \right. \\ \left. + \Phi' V\bar{g} \operatorname{rot}^3 \left(\frac{V\bar{g}}{\Phi'} \rho_0 \frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\delta\hat{D} = \frac{4\pi^2 V\bar{g}}{\Phi'} \left(\frac{\partial\delta\tilde{p}}{\partial\theta} + \rho_0 \frac{\partial\tilde{V}_2}{\partial t} \right). \quad (1.70)$$

Решая уравнение (1.68), находим $Y(X) = \bar{Y}(X) + \delta Y(X)$, где $\bar{Y}(X)$ — правая часть уравнений (1.39) или (1.51), а $\delta Y(X)$ — вклад в $Y(X)$ от слагаемого $\delta\hat{D}$. Тогда получаем уравнения, отличающиеся от (1.41), (1.53) членами, содержащими добавку к возмущенному давлению $\delta\tilde{p}$, и производными по времени от скорости $\partial\tilde{V}/\partial t$. Связь $\delta\tilde{p} = \delta\tilde{p}(X)$ определяется уравнениями, описывающими состояние плазмы, например в простейшем случае — уравнением адиабаты. К нахождению этой связи мы вернемся несколько позже. Теперь же найдем связь компонент $\partial\tilde{V}/\partial t$, входящих в (1.67), (1.68), с X . При этом в случаях мелко- и крупномасштабных возмущений получаем следующее.

а. Мелкомасштабные возмущения. Вычислив указанным выше способом величину δY , находим, что она мала как $1/G$. Поэтому вклад δY в уравнение (1.67) мал по сравнению с вкладом $\delta\hat{C}$, и им можно пренебречь. Иначе говоря, при учете инерционных эффектов уравнение (1.26) и вытекающее из него соотношение (1.39) остаются неизменными. Изменяется лишь уравнение (1.33), которое теперь имеет вид (1.67).

Представляем $\delta\hat{C}$, определенное уравнением (1.69), в виде

$$\delta\hat{C} = \delta\hat{C}(\delta\tilde{p}) + \delta\hat{C}(\partial\tilde{V}/\partial t). \quad (1.71)$$

Здесь

$$\delta\hat{C}(\delta\tilde{p}) = 4\pi^2 \tilde{F}\delta\hat{p}; \quad (1.72)$$

$$\delta\hat{C}(\partial\tilde{V}/\partial t) = 4\pi^2 \sqrt{g} \rho_0 \gamma^2 \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial a} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} \right); \quad (1.73)$$

$$\hat{F}X = \Phi' \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right) \frac{\partial X}{\partial \theta} - \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} \frac{\partial X}{\partial a}, \quad (1.74)$$

где γ — инкремент возмущений [берем временную зависимость возмущений в виде $\exp(\gamma t)$], ξ_1 , ξ_2 — ковариантные компоненты вектора смещения ξ .

Нам необходимо выразить ξ_1 , ξ_2 через X . Одна из связей между ξ_1 , ξ_2 определяется старшими членами уравнения (1.39), которое в соответствующем приближении означает [учтено уравнение (1.30)]

$$\xi^2 \Phi' - \xi^3 \chi' = \frac{i\chi'}{n} \frac{\partial \xi^1}{\partial a}. \quad (1.75)$$

Еще одну связь получим, предположив, что смещение плазмы вдоль силовых линий мало по сравнению с поперечными смещениями, $\xi^3 \mathbf{B}_0 \approx 0$. Это приближенно означает

$$\xi^3 \approx 0. \quad (1.76)$$

С помощью (1.75), (1.76) находим

$$\delta\hat{C}(\partial\tilde{V}/\partial t) = 4\pi^2 g \rho_0 \gamma^2 \frac{i}{nq} \left(N \frac{\partial^2 X}{\partial a^2} - 2inqM \frac{\partial X}{\partial a} - n^2 q^2 LX \right). \quad (1.77)$$

Учитывая (1.33), (1.71)—(1.73), (1.77), приходим к следующему обобщению уравнения (1.41):

$$-\left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} - in\Phi' \right) \hat{L}_\perp \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} - in\Phi' \right) X + \hat{H}X + 4\pi^2 g \rho_0 \gamma^2 \hat{L}_\perp X + 4\pi^2 \left[inq \frac{\partial \delta\tilde{p}}{\partial a} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} + n^2 \delta\tilde{p} \Phi' \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right) \right] = 0; \quad (1.78)$$

$$\hat{H}X \equiv -4\pi^2 p' \left[inq \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} - n^2 q^2 X \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial a} - \frac{\Phi''}{\Phi'} \sqrt{g} - \frac{4\pi^2 p' g}{G\Phi'^2} - \frac{\mu\mu' N \sqrt{g}}{G} \right) \right]; \quad (1.79)$$

$$\hat{L}_\perp \equiv - \left(N \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 2inqM \frac{\partial}{\partial a} - n^2 q^2 L \right). \quad (1.80)$$

Заметим, что введенный здесь оператор \hat{L}_\perp — это то же самое, что и упрощенный для случая осевой симметрии оператор \hat{L} , определенный уравнением (5.29) из книги [1].

б. Крупномасштабные возмущения. В случае крупномасштабных возмущений добавки к Y_m при $m \neq 0$ так же малы, как $1/G$, и ими можно пренебречь. Добавка же к Y_0 равна

$$\delta Y_0 = \frac{1}{n^2 N_0} (\delta \hat{D})_0. \quad (1.81)$$

Учитывая $V \tilde{g} \ll (V \tilde{g})^{(0)}$ (параметр малости a/R), также пренебрежем этой добавкой. Тогда, как и в случае мелкомасштабных возмущений, инерционные эффекты остаются только в уравнении (1.67), будучи связаны со слагаемым $\delta \hat{C}$. Это слагаемое, как и в п. а, представляем в виде (1.71). При этом выражение $\delta \hat{C}$ ($\delta \tilde{p}$) по-прежнему определяется уравнением (1.72), а вместо (1.73) теперь имеем

$$[\delta \hat{C} (\partial \tilde{V} / \partial t)]_m = \gamma^2 \Phi' \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\rho_0 V'}{\Phi'} \xi_{2m} \right) - \frac{i m \rho_0 V'}{\Phi'} \xi_{1m} \right]. \quad (1.82)$$

Здесь, как и при обосновании малости δY_0 , мы пренебрегли осцилляциями $V \tilde{g}$. Кроме того, здесь было учтено соотношение (1.47).

Дальнейшее преобразование правой части уравнения (1.82) связано с использованием приближенного равенства (1.76) и аналога уравнения (1.74), при условии (1.76) означающего [см. также (1.51)]

$$\xi_m^2 = \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial a} (\Phi' X_m). \quad (1.83)$$

Тогда из (1.83) следует

$$[\delta \hat{C} (\partial \tilde{V} / \partial t)]_m = i m \gamma^2 \sum_{m'} \hat{K}_{mm'}^\perp X_{m'}, \quad (1.84)$$

где оператор $\hat{K}_{mm'}^\perp$, описывающий вклад поперечной инерции плазмы, имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{K}_{mm'}^\perp X_{m'} = & \frac{\Phi'}{4\pi m m'} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\rho_0 V'^2}{\Phi'^2} N_{m-m'} \frac{\partial}{\partial a} (\Phi' X_{m'}) \right] - \right. \\ & - i m' \frac{\partial}{\partial a} \left(\rho_0 \frac{V'^2}{\Phi'} M_{m-m'} X_{m'} \right) - i m \frac{\rho_0 V'^2}{\Phi'^2} M_{m-m'} \frac{\partial}{\partial a} (\Phi' X_{m'}) - \\ & \left. - m m' \frac{\rho_0 V'^2}{\Phi'} L_{mm'} X_{m'} \right\}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

С учетом (1.33), (1.71), (1.84), (1.85) уравнение (1.67) приводится к виду

$$\sum_{m'} (\hat{W}_{mm'} + \gamma^2 \hat{K}_{mm'}^\perp) X_{m'} + \frac{1}{i m} [\delta \hat{C} (\delta \tilde{p})]_m = 0, \quad (1.86)$$

где $\hat{W}_{mm'} X_{m'}$ — величина, стоящая под знаком суммы (1.53), а $\delta \hat{C} (\delta \tilde{p})$ определено уравнением (1.72).

2. Роль сжимаемости в приближении одножидкостной гидродинамики. Рассмотрим роль членов с $\delta\tilde{p}$ в случае, когда давление плазмы определяется уравнением адиабаты типа

$$d(\rho\rho^{-\gamma_0})/dt = 0, \quad (1.87)$$

где γ_0 — показатель адиабаты. При этом

$$\delta\tilde{p} = -\gamma_0 \rho_0 \operatorname{div} \xi. \quad (1.88)$$

Согласно уравнениям (1.6), с величиной $\delta\tilde{p}$ связана проекция смещения ξ на магнитное поле

$$\rho_0 \gamma^2 (\xi \mathbf{B}_0) = -(\mathbf{B}_0 \nabla) \delta\tilde{p}. \quad (1.89)$$

Отсюда следует

$$\delta\tilde{p} = -\rho_0 \gamma^2 g_{33}^{(0)} \Phi' \hat{L}_{\parallel}^{-1} \xi^3, \quad (1.90)$$

где \hat{L}_{\parallel}^{-1} — оператор, обратный оператору \hat{L}_{\parallel} , определенному соотношением $\hat{L}_{\parallel} = \chi' \partial / \partial \theta - in\Phi'$. Предполагается, что ξ^3 не имеет строго желобковой части, так что величина $\hat{L}_{\parallel}^{-1} \xi^3$ конечна. В (1.90) мы пренебрегли также осцилляциями g_{33} , заменив эту величину $g_{33}^{(0)}$. Из сказанного ясно также, что $\delta\tilde{p}$, определяемое уравнением (1.90), как и ξ^3 , имеет только желобковую часть.

Из (1.88) и (1.90) получается уравнение для ξ^3 :

$$c_s^2 \left[\hat{L}_{\parallel} \xi^3 + \frac{4\pi^2}{V'} \hat{F} \Phi' \int^{\theta} X(\theta') d\theta' \right] = \gamma^2 g_{33}^{(0)} \Phi'^2 \hat{L}_{\parallel}^{-1} \xi^3; \quad (1.91)$$

$c_s^2 = \gamma_0 \rho_0 / \rho_0$ — квадрат скорости звука. При получении (1.91) мы воспользовались уравнением (1.34) и выражением (1.30) для Y .

В частности, в приближении малых инкрементов, $\gamma^2 g_{33}^{(0)} \Phi'^2 \ll \ll c_s^2 L_{\parallel}^2$, из (1.91) следует

$$\xi^3 = -\frac{4\pi^2}{V'} \hat{L}_{\parallel}^{-1} \hat{F} \Phi' \int^{\theta} X(\theta') d\theta'. \quad (1.92)$$

При этом согласно (1.90)

$$\delta\tilde{p} = \rho_0 \gamma^2 G \Phi' \hat{L}_{\parallel}^{-2} \hat{F} \Phi' \int^{\theta} X(\theta') d\theta'. \quad (1.93)$$

Подстановка (1.93) в (1.78) дает

$$\begin{aligned} & -\left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} - in\Phi'\right) \hat{L}_{\perp} \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} - in\Phi'\right) X + \hat{H} X + \\ & + 4\pi^2 g \rho_0 \gamma^2 \left(\hat{L}_{\perp} X + \frac{\Phi'^2 G}{g} \hat{\Pi} X \right) = 0; \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\hat{\Pi} X \equiv \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} \hat{L}_{\parallel}^{-2} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 X}{\partial a^2} - inq \left[\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} \hat{L}_{\parallel}^{-2} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right) \frac{\partial X}{\partial a} + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right) \hat{L}_{||}^{-2} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} \frac{\partial X}{\partial a} \Big] -$$

$$- n^2 q^2 \Phi'^2 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right) \hat{L}_{||}^{-2} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right) X. \quad (1.95)$$

Согласно (1.91)

$$\xi_m^3 = \frac{4\pi^2}{V' (1 + \Gamma_m^2) (m\chi' - n\Phi')} \sum_{m'} \frac{1}{m'} \hat{F}_{m-m'} \Phi' X_{m'}; \quad (1.96)$$

$$\Gamma_m^2 \equiv \gamma^2 g_{33}^{(0)} \Phi'^2 / c_s^2 (m\chi' - n\Phi')^2. \quad (1.97)$$

Видно, что $\xi_m^3 \rightarrow 0$ при $m\chi' - n\Phi' \rightarrow 0$, т. е., как и полагалось выше, величина ξ^3 не имеет желобковой части. Из этого ясно также, что если выражение $\hat{\Pi}X$ содержит особенности, то оно должно быть «подправлено» учетом правой части (1.91).

С помощью (1.90) и (1.96) находим

$$\delta \tilde{p}_m = i \frac{\rho_0 \gamma^2 G \Phi'}{(1 + \Gamma_m^2) (m\chi' - n\Phi')^2} \sum_{m'} \frac{1}{m'} \hat{F}_{m-m'} X_{m'}. \quad (1.98)$$

Используя (1.72) и (1.98), приводим (1.86) к виду

$$\sum_{m'} [\hat{W}_{mm'} + \gamma^2 (\hat{K}_{mm'}^\perp + \hat{K}_{mm'}^\parallel)] X_{m'} = 0, \quad (1.99)$$

$$\hat{K}_{mm'}^\parallel X_{m'} \equiv \frac{4\pi^2 \Phi'}{mm'} \sum_{m''} \hat{F}_{m-m''} \frac{\rho_0 G}{1 + \Gamma_{m''}^2 (m'' \chi' - n\Phi')^2} \hat{F}_{m''-m'} X_{m'}. \quad (1.100)$$

Разъясним структуру инерционных членов уравнений (1.94), (1.99) для случая токамака круглого сечения, когда

$$\sqrt{g} \approx aR [1 - 2(a/R)\cos \theta], \quad (1.101)$$

и возмущений, локализованных вблизи некоторой рациональной магнитной поверхности $a = a_0$, на которой $m\chi'(a_0) = n\Phi'(a_0)$. В этом случае гармоника X_m (желобковая) велика по сравнению с остальными. При этом равенство (1.94) сводится к следующему:

$$\hat{\Pi}X = 2q^2 \frac{a^2}{\Phi'^2} \hat{L}_\perp X, \quad (1.102)$$

так что коэффициент при квадрате инкремента в (1.94) означает

$$\hat{L}_\perp X + \frac{\Phi'^2 G}{g} \hat{\Pi}X = (1 + 2q^2) \hat{L}_\perp X. \quad (1.103)$$

Аналогично

$$(\hat{K}_{mm}^\perp + \hat{K}_{mm}^\parallel) X_m = (1 + 2q^2) \hat{K}_{mm}^\perp X_m, \quad (1.104)$$

где

$$\hat{K}_{mm}^\perp X_m = \frac{4\pi^2 a^2 R \rho_0}{m^2} \frac{\partial^2 X_m}{\partial a^2}. \quad (1.105)$$

Иначе говоря, учет сжимаемости приводит в этом случае к переопределению коэффициента при квадрате инкремента на множитель $1 + 2q^2$.

3. Роль сжимаемости в приближении бесстолкновительной кинетики. Как известно, уравнение (1.87), которое использовалось выше для выяснения роли сжимаемости, при достаточно редких столкновениях между частицами теряет силу. При этом для вычисления $\delta\tilde{p}$ необходимо использовать кинетическое описание плазмы. Такое вычисление в предельном случае бесстолкновительной плазмы производилось в работе автора и Г. И. Сурамлишвили [7]. Воспользуемся результатами [7] для выяснения того, что получается в приближении бесстолкновительной кинетики вместо гидродинамического соотношения (1.104).

С помощью уравнений (1.72) и (1.101) находим

$$[\delta\hat{C}(\delta\tilde{p})]_m = i4\pi^2 a^2 \frac{\partial}{\partial a} (\delta\tilde{p}_{m-1} - \delta\tilde{p}_{m+1}). \quad (1.106)$$

Согласно работе [7],

$$\delta\tilde{p}_{m \pm 1} = \pm i\gamma^2 \frac{a}{m} \frac{\partial X_m}{\partial a} \frac{3\sqrt{2\varepsilon}}{16} \frac{n_0 T_0}{R\omega_b^2}, \quad (1.107)$$

где $\omega_b = v_{Ti} \sqrt{\varepsilon}/qR$; $\varepsilon = a/R$; $v_{Ti} = (2T_0/M_i)^{1/2}$; M_i — масса ионов; n_0 — плотность плазмы. Учитывая также уравнение (1.105), находим выражение для комбинации величин, входящих в уравнение (1.86):

$$\gamma^2 \hat{K}_{mm}^\perp X_m + \frac{1}{im} [\delta\hat{C}(\delta\tilde{p})]_m = \gamma^2 \frac{4\pi^2 a^3 R \rho_0}{m^2} \frac{\partial^2 X_m}{\partial a^2} \left(1 + \frac{3q^2}{8\sqrt{2\varepsilon}}\right). \quad (1.108)$$

Таким образом, в случае бесстолкновительной кинетики вместо коэффициента 2 при q^2 получается формально большой коэффициент $\sim 1/\sqrt{\varepsilon}$. В реальных условиях этот коэффициент, однако, оказывается порядка единицы.

§ 1.7. Обзор литературы

Проблема учета тороидальности в МГД-неустойчивостях в общей постановке первоначально обсуждалась в работе Б. Б. Кадомцева [8], в которой разрабатывался общий подход к исследованию желобковой неустойчивости с использованием поверхностных функций и метрических коэффициентов g_{ik} . Здесь впервые стал фигурировать функционал потенциальной энергии, записываемый в ковариантной форме, аналогичной (1.37). Однако конкретные результаты этой работы не получили дальнейшего развития вследствие того, что пробные функции в [8] выбирались не совсем удачно: учитывалась только желобковая часть возмущений и пренебрегалось баллонностью. Этот недостаток работы [8] был исправлен Мерсье [9], получившим критерий устойчивости, который впоследствии стал называться критерием Мерсье.

Еще один новый элемент в методику исследования МГД-неустойчивостей токамаков внесла работа [10], в которой вместо функционала потенциальной энергии возмущений в качестве исходного использовалось уравнение замыкания токов (1.1). Такой подход затем регулярно использовался автором в работах [2—5] и ряде последующих. Этот подход, в отличие от энергетического метода, стал называться методом малых колебаний.

С помощью метода малых колебаний в [2] был рассмотрен вопрос о полноте критерия Мерсье. Было показано, что критерий Мерсье является необходимым и достаточным критерием устойчивости плазмы по отношению к частному классу мелкомасштабных (локальных) возмущений — таких, радиальная длина волны которых мала по сравнению с длиной волны вдоль малого азимута. В случае всех других локальных возмущений, согласно [2], критерий Мерсье, вообще говоря, не имеет места, и по этой причине он является лишь необходимым критерием локальной устойчивости.

В [2] обсуждался также вопрос о существовании общегеометрического необходимого и достаточного критерия локальной неустойчивости, аналогичного критерию Мерсье. Было показано, что такой критерий существует только в тривиальном случае плазмы очень низкого давления, когда возмущение магнитного поля на локализирующей магнитной поверхности пренебрежимо мало. Возмущения плазмы в этом случае имеют желобковый характер (смещение плазмы постоянно вдоль силовой линии), а локальная устойчивость, как это было хорошо известно и раньше, определяется широм и средней магнитной ямой. В случае же плазмы не слишком малого давления, когда важно возмущение магнитного поля, связь между возмущением поля и смещением, согласно [2], оказывается нелокальной (несмотря на локализованность возмущения вблизи соответствующей магнитной поверхности). Вследствие этого получение необходимого и достаточного критерия локальной устойчивости без дополнительных предположений о свойствах магнитной конфигурации и о структуре возмущения невозможно. Однако, согласно [2], нелокальность связи между возмущенным магнитным полем и смещением незначительна для случая возмущений с радиальной длиной волны, меньшей азимутальной, благодаря чему и удается получить общегеометрический критерий, что и было сделано Мерсье [9].

Как было показано в [2], необходимый и достаточный критерий локальной устойчивости плазмы может быть получен также и при нелокальной связи между возмущением магнитного поля и смещением, если равновесная конфигурация удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Согласно [2], такую задачу удается решить для довольно обширного класса тороидальных ловушек, включающего в себя основные разновидности токамаков и стеллараторов, но при не слишком большом давлении плазмы. В [2] был получен такой критерий, который оказался совпадающим с критерием Мерсье, упрощенным для случая такого рода ловушек. Этот результат [2] находится в соответствии с более ранним результатом Лава-

ля и др. [1], полученным энергетическим методом для осесимметричного токамака эллиптического сечения.

Указанные общие выводы работы [2] основывались на анализе уравнения (1.41), которое там и было первоначально получено. При этом возмущенное смещение X , входящее в (1.41), представлялось в виде суммы желобковой и баллонной частей и, что существенно, баллонная часть полагалась малой по сравнению с желобковой. (Отмеченная выше нелокальность касается связи между желобковыми частями возмущений магнитного поля и смещения.) В случае возмущений, не относящихся к типу Мерсье, такое приближение, как разъяснялось в [1], оправдывается только при не слишком большом давлении плазмы. При слишком большом давлении плазмы необходима модификация результатов [2]. Это было сделано в работе автора [12], результаты которой излагаются в гл. 2.

Тороидальность в низших винтовых модах токамака первоначально учитывалась в работе Уэйра и Хейса [13]. Изложенная выше схема анализа этого вопроса была развита в работе автора [14].

Инерционные эффекты в мелкомасштабных МГД-неустойчивостях тороидальных систем первоначально учитывались в работе [8]. Однако вследствие пренебрежения баллонностью возмущений в [8] учитывалась лишь поперечная инерция, тогда как продольная инерция оказалась нерассмотренной. Первоначально продольная инерция для случая круглого токамака была учтена в работе [5], где, однако, вместо полного коэффициента при инерционных членах типа $1 + 2q^2$ фигурировал неточный коэффициент $1 + q^2$, что затем было исправлено в работе [1]. Общегеометрическое рассмотрение инерционных эффектов с использованием предположений о мелкомасштабности возмущений и о малости $\partial/\partial\theta$ по сравнению с $\partial/\partial a$ в рамках одножидкостной гидродинамики было сделано в работе [4]. Кинетический анализ инерционных эффектов производился в работе [7].

В ряде задач об МГД-неустойчивостях токамаков важен также учет диссипативных, дрейфовых и некоторых других эффектов. Библиографию по этому вопросу рассмотрим в гл. 4.

ГЛАВА 2

ЖЕЛОБКОВЫЕ И БАЛЛОННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТОКАМАКЕ С БОЛЬШИМ β

§ 2.1. Общий анализ мелкомасштабных МГД-возмущений токамака с большим β

Исходя из уравнения (1.41), рассмотрим, следуя работе [12], мелкомасштабные МГД-возмущения токамака. Учитывая (1.48), представляем это уравнение в виде

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \theta} - in\right) \left(g^{11} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 2g^{12} inq \frac{\partial}{\partial a} - n^2 q^2 g^{22}\right) \left(\mu \frac{\partial}{\partial \theta} - in\right) \xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\pi^2 p'}{\Phi'^2} \left\{ n^2 q^2 \xi (\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'}) + \right. \\
& \left. + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[inq \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta} + n^2 q^2 \xi \Phi' (\sqrt{g}/\Phi')' \right] \right\} = 0. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Здесь $g^{11} = g_{22}g_{33}/g$ — алгебраическое дополнение g_{11} ; аналогичный смысл имеют и g^{12} , g^{22} , а ξ означает то же, что и X в гл. 1, т.е. $\xi \equiv \xi^1$ — возмущение радиального смещения плазмы.

Поясним смысл слагаемых уравнений (2.1). Члены с $\mu\partial/\partial\theta - in$ описывают эффект искривления силовых линий в возмущениях альфвеновского типа. Член с $\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'}$ соответствует магнитной яме. Члены с $\partial\sqrt{g}/\partial\theta$ и $(\sqrt{g}/\Phi')'$ описывают эффекты знакопеременной кривизны магнитного поля токамака. Первый из этих членов соответствует геодезической кривизне, а второй — нормальной (обычной).

С помощью уравнения (2.1) можно убедиться, что возмущения типа Сайдема, т.е. такие, у которых $(a/nq)\partial/\partial a \rightarrow \infty$, как при малых, так и при больших β можно считать приближенно желобковыми. Иначе говоря, такие возмущения всегда можно считать локализованными около некоторой рациональной магнитной поверхности и характеризующимися смещением $\xi = \bar{\xi} + \tilde{\xi}$ с баллонной частью $\bar{\xi}$, малой по сравнению с желобковой $\tilde{\xi}$. (По определению, $(\mu\partial/\partial\theta - in)\bar{\xi} \ll \ll \mu\tilde{\xi}$, $(\mu\partial/\partial\theta - in)\tilde{\xi} \simeq \mu\tilde{\xi}$.) При этом согласно (2.1)

$$\partial\bar{\xi}/\partial a \sim nq\bar{\xi}, \quad (2.2)$$

откуда следует отмеченное выше утверждение. Благодаря наличию малого параметра $\bar{\xi}/\tilde{\xi}$, двумерное уравнение (2.1) удастся свести к одномерному уравнению типа Сайдема (содержащему только радиальную координату a), решая которое, можно получить критерий устойчивости, называемый критерием Мерсье.

Согласно [1, 3], критерий устойчивости Мерсье для аксиально-симметричного токамака имеет вид

$$\mu'^2/4 + A_0 (W - A_2) - \mu' A_1 + A_1^2 > 0, \quad (2.3)$$

где W — величина, характеризующая магнитную яму

$$W = \left(\frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} p' (\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'}); \quad (2.4)$$

$A_0 = (g_{33}/\sqrt{g}) (1/g^{11})^{(0)}$, а величины A_1 , A_2 описывают вклад баллонных эффектов

$$A_1 = - \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \frac{4\pi^2 p'}{\mu\Phi'^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g^{11}} \right)^{(0)}; \quad (2.5)$$

$$A_2 = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left(\frac{4\pi^2 p'}{\mu\Phi'^2} \right)^2 \left[\frac{(\sqrt{g})^2}{g^{11}} \right]^{(0)}. \quad (2.6)$$

Критерий Мерсье существенно упрощается вблизи магнитной оси. При этом становятся несущественны члены с широм и члены с A_1 , так что вместо (2.3) имеем

$$W - A_2 > 0, \quad (2.7)$$

или, в явной форме,

$$\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} < \left(\frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \right)^2 \frac{q^2 p'}{a^2 B_s^2} \left[\frac{(\sqrt{g})^2}{g^{11}} \right]^{(0)}, \quad (2.8)$$

где $B_s = \Phi'/2\pi a$ — продольное магнитное поле.

Критерий (2.8) можно просто получить непосредственно с помощью (2.1). Для этого в соответствии со сказанным выше следует предположить $\partial/\partial a \gg nq/a$, $\tilde{\xi} \ll \bar{\xi}$ и считать, что возмущение локализовано около некоторого $a = a_0$, для которого $\mu(a_0) = n/m$, где m — некоторое целое число. Тогда, усредняя (2.1) по θ и пренебрегая членами с широм, находим

$$(\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'}) \bar{X} - \frac{ig_{33}}{nq\sqrt{g}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial a \partial \theta} \sqrt{g} \right]^{(0)} = 0, \quad (2.9)$$

где $X = \xi \exp(in\varphi - im\theta)$, а черта и тильда над X означают то же, что и над ξ . Из осциллирующей по θ части уравнения (2.1) следует

$$\frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial a \partial \theta} = -inq \bar{X} \frac{q^2}{g^{11}} \frac{p'}{a^2 B_s^2} \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \sqrt{g}. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9), получаем

$$\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} - \left(\frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \right)^2 \frac{q^2 p'}{a^2 B_s^2} \left[\frac{(\sqrt{g})^2}{g^{11}} \right]^{(0)} = 0. \quad (2.11)$$

Это уравнение соответствует границе устойчивости. Поэтому отсутствие неустойчивости, вытекающее из (2.11), означает то же самое, что и (2.8).

Условию (2.8) можно придать еще более конкретный вид, если учесть, что вблизи магнитной оси

$$\sqrt{g} = aR [1 - (a/R)\exp(-\eta/2)\cos\theta]; \quad (2.12)$$

$$g^{11} = \text{ch } \eta + \text{sh } \eta \cos 2\theta, \quad (2.13)$$

и что приближенно

$$g_{33}/\sqrt{g} = R/a. \quad (2.14)$$

Здесь η — параметр, характеризующий эллиптичность сечений магнитных поверхностей, так что $\text{th } \eta = \varepsilon \equiv (l_2^2 - l_1^2)/(l_1^2 + l_2^2)$, l_1, l_2 — полуоси эллипса. Производя в (2.8) усреднение по θ с помощью (2.12), (2.13) и формул приложения IV работы [15], находим, что условие устойчивости сайдемовских возмущений вблизи магнитной оси имеет вид

$$\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} < \frac{2q^2 R^2 p'}{B_s^2} \frac{\exp(-\eta)}{\text{ch } \eta} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \right). \quad (2.15)$$

В случае возмущений несайдемского типа, т. е. таких, что $nq/a \gtrsim \partial/\partial a$, из (2.1) вместо (2.2) следует

$$\tilde{\xi} \simeq \bar{\xi} \beta q^2 R/a. \quad (2.16)$$

При не слишком большом β , $\beta \ll a/Rq^2$, это означает, что в задаче снова имеется малый параметр $\tilde{\xi}/\bar{\xi} \ll 1$, и тогда, как и в случае возмущений типа Сайдема, уравнение (2.1) также можно свести к одномерному, что и было сделано в работе [2]. Такого рода одномерное уравнение вблизи магнитной оси отличается от уравнения типа Сайдема тривиальным образом (заменой $\partial^2/\partial a^2$ выражением $\partial^2/\partial a^2 - n^2 q^2/a^2$) и поэтому из него получается такой же критерий устойчивости, как и из уравнения типа Сайдема, т. е. критерий Мерсье.

Если же β достаточно велико, $\beta \gtrsim a/Rq^2$, то возмущения несайдемского типа характеризуются смещением $\tilde{\xi}$, баллонная часть которого $\bar{\xi}$ одного порядка с желобковой $\bar{\xi}$:

$$\tilde{\xi} \simeq \bar{\xi}. \quad (2.17)$$

Следовательно, a/Rq^2 — это характерное значение параметра β , при достижении которого сказывается радикальное отличие возмущений типа Сайдема от несайдемских возмущений, а именно: при таких β сайдемские возмущения продолжают оставаться почти желобковыми, а несайдемские становятся существенно баллонными. Поэтому ясно, что баллонные моды в токамаке с $\beta \gtrsim a/Rq^2$ — это то же, что и несайдемские возмущения.

Из этого ясно также, что при изучении баллонных возмущений при $\beta \gtrsim a/Rq^2$, вообще говоря, нет возможности свести двумерное уравнение (2.1) к одномерному уравнению типа Сайдема. Это и обуславливает серьезные трудности при выяснении вопроса об устойчивости баллонных возмущений.

Уравнение (2.1) может быть упрощено в предположении, что существуют возмущения типа анти-Сайдема, т. е. такие, у которых

$$nq/a \gg \partial/\partial a. \quad (2.18)$$

В этом приближении из (2.1) получается уравнение

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \theta} - in \right) g^{22} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \theta} - in \right) \xi - \frac{4\pi^2 p'}{\Phi'^2} \left[\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \Phi' \left(\frac{\sqrt{g}}{\Phi'} \right)' \right] \xi = 0. \quad (2.19)$$

Это уравнение учитывает геодезическое возмущение магнитного поля (т. е. возмущенное искривление силовых линий на магнитных поверхностях), магнитную яму и нормальную кривизну равновесного поля.

Необходимо, однако, иметь в виду следующее. Предположение о существовании возмущений типа Сайдема может быть оправдано

анализом радиальной структуры собственных функций, получающихся из соответствующего радиального уравнения. Иначе говоря, «пробные» возмущения с $nq/a \ll d/da$ фактически являются истинными. Что касается предположения о существовании возмущений типа анти-Сайдема (2.18), описываемых уравнением вида (2.19), то это предположение является гипотезой, оправдываемой далеко не всегда. В этом можно убедиться, например, анализируя уравнение (2.19) при $\beta < a/Rq^2$, что и делалось в работе [3]. Согласно [3], предположение о возмущениях антисайдиевского типа оправдывается при малом шире, $a\mu'/\mu \ll 1$, и не оправдывается при нормальном шире, $a\mu'/\mu \simeq 1$.

Таким образом, уравнение типа (2.19) не является универсальным, но может быть использовано в условиях малого шира. При этом его можно рассматривать как одномерное уравнение по переменной θ , считая координату a некоторым фиксированным параметром. При $\beta < a/Rq^2$ такой подход развивался в работе [3].

Пренебрегая в (2.19) эффектами шира и рассматривая возмущения при a , для которого $\mu(a) = n/m$, можно привести это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g^{22} \frac{\partial X}{\partial \theta} - \frac{p' q^2}{a^2 B_s^2} \left[\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} a \left(\frac{V \tilde{g}}{a} \right)' \right] X = 0. \quad (2.20)$$

Здесь мы учли, что при $\beta < 1$ $\Phi' \sim a$.

§ 2.2. Невыполнение критерия устойчивости Мерсье при $\beta \gtrsim a/Rq^2$

Рассмотрим структуру выражения $(\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'})$, характеризующего магнитную яму [см., например, уравнение (2.4)]. Согласно [3], общие выражения для g_{22} и g_{33} имеют вид

$$g_{22} = \dot{\rho}_0^2 + \rho_0^2 \dot{\omega}_0^2, \quad g_{33} = R^2 (1 - k\rho_0 \cos \omega_0 - k\xi_0)^2. \quad (2.21)$$

Здесь, как и в [3], ρ_0 , ω_0 — полярные координаты, связанные с центрами магнитных поверхностей и являющиеся некоторыми функциями координат a , θ ; $\xi_0 = \xi_0(a)$ — смещение центров магнитных поверхностей от геометрической оси (в [3] эта величина обозначена ξ); точка сверху ρ_0 и ω_0 означает производные этих величин по координате θ ; $k \equiv 1/R$.

При достаточно малых β , когда смещение ξ_0 мало по сравнению с малым радиусом токамака, а координаты ρ_0 и ω_0 отличаются от a и θ на малые величины (имеется в виду токамак круглого сечения), связь между (ρ_0, ω_0) и (a, θ) находится разложением в ряд по соответствующим малым параметрам. В этом случае для функции U , определенной соотношением

$$U \equiv - \frac{1}{2a\mu^2} (\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'}) \quad (2.22)$$

приближенно получается

$$U = q^2(1 - p'R^2q^2/aB_s^2) - 1. \quad (2.23)$$

Слагаемое в (2.23), пропорциональное градиенту давления плазмы, обязано своим происхождением производной от $g_{33}^{(0)}$. Действительно, в соответствующем приближении

$$g_{33} = R^2 [1 - k\xi_0 - ka(\xi_0' + ka)/2 - ka \cos \theta]^2, \quad (2.24)$$

а уравнение для ξ_0 имеет вид

$$\xi_0'' + \frac{(a\chi'^2)'}{a\chi'^2} \xi_0' = k \left(1 - \frac{2q^2 R^2 p'}{aB_s^2} \right), \quad (2.25)$$

так что $\xi_0 \simeq q^2 R \beta$. Следует, однако, иметь в виду, что должно быть $\xi_0 \leq a$. Поэтому ясно, что приближение малых ξ_0 нарушается, если $\beta \gtrsim a/Rq^2$. При столь больших β следует считать, что по порядку величины $\xi_0 \simeq a$.

Согласно (2.21)

$$g_{33}' \approx -2R (\rho_0 \cos \omega_0 + \xi_0)'. \quad (2.26)$$

Поэтому

$$\max_{\beta} g_{33}^{(0)'} \simeq aR. \quad (2.27)$$

Учитывая (2.27) и определение U [см. равенство (2.22)], получаем оценку для U при $\beta \gtrsim a/Rq^2$:

$$U \simeq q^2 R/a. \quad (2.28)$$

Качественно зависимость U от β , вытекающая из соотношений (2.23), (2.28), представлена на рис. 1. Там же схематически отложена величина

$$B \equiv -q^4 p' R^2 / a B_s^2, \quad (2.29)$$

характеризующая вклад баллонных эффектов в критерий Мерсье (2.3), а также величина

$$S \simeq \frac{a^2 \mu'^2}{4\mu^2} \frac{1}{\beta}, \quad (2.30)$$

соответствующая вкладу шира в этот критерий. При этом сам критерий Мерсье схематически выглядит так:

$$S + U - B > 0. \quad (2.31)$$

Из рис. 1 видно, что при $\beta \ll a/Rq^2$ магнитная яма пересиливает баллонные эффекты. При этом разность $U - B$ дает $q^2 - 1$. Если пренебречь широм, что всегда возможно в приосевой области токамака, то из (2.31) получается критерий устойчивости $q^2 > 1$. Если же речь идет об основной части шнура, то при $\beta \ll a/q^2 R$ члены U и B малы по сравнению с S и стабилизация происходит за счет шира независимо от того, выполняется ли критерий $q^2 > 1$.

Согласно рис. 1, в области $\beta \gtrsim a/Rq^2$ вклад шира в критерий Мерсье падает настолько, что он становится меньше, чем каждый

из членов U и B . Иначе говоря, стабилизирующая роль шира при $\beta \gtrsim a/Rq^2$ малосущественна. При этом величина U , характеризующая магнитную яму, перестает зависеть от параметра β и выходит на плато, тогда как вклад баллонных эффектов в критерий Мерсье (2.31) продолжает расти линейно с ростом β . Поэтому ясно, что при некотором критическом значении β ,

$$\beta_{\text{крит}} \simeq a/Rq^2, \quad (2.32)$$

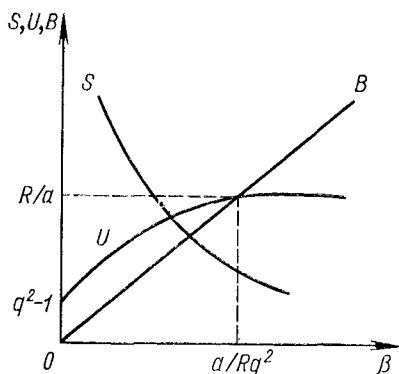


Рис. 1. Относительный вклад эффектов магнитной ямы, баллонности и шира в критерий Мерсье

критерий Мерсье перестает выполняться и плазма становится неустойчивой по отношению к возмущениям сайдемовского типа.

Иногда высказывается мнение, что критерий устойчивости Мерсье при $\beta \gtrsim a/Rq^2$ качественно выглядит так же, как и при малых β , т. е. выражается соотношением типа $q^2 > 1$, и что вследствие этого при $q^2 > 1$ сайдемовские возмущения должны быть устойчивы. Но, согласно проведенному выше анализу, такой вывод ошибочен. Это связано с игнорированием того обстоятельства, что при $\beta \gtrsim a/Rq^2$, в отличие от случая $\beta \ll a/Rq^2$, дестабилизирующий вклад баллонных эффектов в критерий Мерсье не компенсируется углублением магнитной ямы, обусловленным давлением плазмы. Если учесть это обстоятельство, то вместо критерия устойчивости $q^2 > 1$ получается критерий, качественно означающий $q^2 (1 - \beta Rq^2/a) > 1$, что и свидетельствует о неустойчивости сайдемовских возмущений при $\beta > a/Rq^2$.

Заметим, что поскольку баллонность возмущений типа анти-Сайдема, описываемых уравнением (2.20), велика, то на первый взгляд может показаться, что они «более опасны», чем сайдемовские, и что именно они определяют границу устойчивости токамака с большим β . На самом же деле, хотя баллонность сайдемовских возмущений действительно мала, вклад ее в критерий устойчивости, оказывается, отнюдь не малый. Это следует из приведенных выше соотношений, но, пожалуй, полезно пояснить этот результат схематически.

Схематически структура желобковой части уравнения возмущений типа Сайдема такова:

$$\varepsilon^2 (S + U) - \varepsilon \left(V \tilde{g} \tilde{\xi} / \tilde{\xi} \right)^{(0)} = 0, \quad (2.33)$$

где, в отличие от предыдущего, ε — малый параметр, пропорциональный ширине области локализации возмущения. Поэтому вклад баллонности в критерий Мерсье (2.31) порядка

$$B \simeq \frac{1}{\varepsilon} \left(V \tilde{g} \tilde{\xi} / \tilde{\xi} \right)^{(0)}. \quad (2.34)$$

Поскольку же баллонность $\tilde{\xi} / \tilde{\xi}$ — это эффект первого порядка малости, $\tilde{\xi} / \tilde{\xi} \simeq \varepsilon \tilde{V} \tilde{g}$, то величина B не зависит от параметра ε :

$$B \simeq \left[\left(V \tilde{g} \right)^2 \right]^{(0)}. \quad (2.35)$$

Вследствие этого параметр ε выпадает из (2.33) и получается критерий вида (2.31), не содержащий малого параметра ε .

§ 2.3. Достаточный критерий устойчивости возмущений типа анти-Сайдема

Умножая обе части равенства (2.20) на X^* (* — символ комплексного сопряжения) и интегрируя по θ , получаем интегральную форму следующего вида:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left\{ g^{22} \left| \frac{\partial X}{\partial \theta} \right|^2 + |X|^2 \frac{p' q^2}{a^2 B_s^2} \left[\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} + \frac{g_{33}}{V \tilde{g}} a \left(\frac{V \tilde{g}}{a} \right)' \right] \right\} = 0. \quad (2.36)$$

Поскольку $g^{22} > 0$, $p' < 0$, уравнение (2.36) не может удовлетвориться ни при каких X , если

$$\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} + \frac{g_{33}}{V \tilde{g}} a \max_{\theta} \left(\frac{V \tilde{g}}{a} \right)' < 0, \quad (2.37)$$

где $\max_{\theta} X_{\theta} (\dots)$ — максимум соответствующей величины как функции θ . Условие (2.37) — это достаточный критерий устойчивости возмущений типа анти-Сайдема.

Учитывая (2.11), (2.13), находим, что вблизи магнитной оси критерий (2.37) принимает вид

$$\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} + 2R \exp(-\eta/2) < 0. \quad (2.38)$$

При этом $\max_{\theta} (\dots)$ в (2.37) достигается при $\theta = \pi$, т. е. на внешнем обводе тора, что находится в соответствии с общими представлениями о характере локализации баллонных неустойчивостей.

Сравнивая критерий (2.37) с критерием Мерсье вблизи магнитной оси (2.8), заключаем, что возмущения типа Сайдема заведомо более опасны, если

$$-\frac{p'q^2}{a^2 B_s^2} \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left(\frac{(V\tilde{g})^2}{g^{11}} \right)^{(0)} > a \max_{\theta} \left(\frac{V\tilde{g}}{a} \right)', \quad (2.39)$$

или в явном виде

$$-\frac{q^2 p' R}{B_s^2} > \frac{\varepsilon \exp(\eta/2) \operatorname{ch} \eta}{1 - [(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)]^{1/2}}. \quad (2.40)$$

При условии (2.39) или (2.40) баллонные возмущения могут быть неустойчивы лишь в том случае, если нарушен критерий устойчивости Мерсье.

Для параболического распределения давления, $p = p_0 (1 - a^2/a_0^2)$, условие (2.40) сводится к виду

$$\beta_0 > \frac{a_0^2}{2aRq^2} \frac{\varepsilon \exp(\eta/2) \operatorname{ch} \eta}{1 - [(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)]^{1/2}}, \quad (2.41)$$

где $\beta_0 = p_0/B_s^2$. В случае круглых магнитных поверхностей

$$\beta_0 > a_0^2/2aRq^2. \quad (2.42)$$

Таким образом, если давление плазмы превышает давление, определенное соотношениями (2.39)–(2.42), то баллонные неустойчивости вблизи магнитной оси могут иметь место лишь при невыполнении критерия устойчивости Мерсье вблизи магнитной оси.

§ 2.4. Устойчивость баллонных возмущений при $\beta \lesssim a/Rq^2$

Рассмотрим теперь возмущения типа анти-Сайдема в предположении, что давление плазмы не слишком велико, так что удовлетворяется условие, обратное (2.39), $\beta \lesssim a/Rq^2$.

Если β слишком мало, так что $\beta \ll a/Rq^2$, то, согласно § 2.1, баллонность возмущений типа анти-Сайдема мала и уравнение (2.20) можно решить приближенно разложением в ряд по $\tilde{\xi}/\bar{\xi}$. Такая процедура проделывалась в работе [3] и результат ее известен: согласно [3], при $\beta \ll a/Rq^2$ возмущения типа анти-Сайдема заведомо устойчивы, если выполнен критерий Мерсье. Поэтому необходимо рассмотреть только случаи, когда $\beta \simeq a/Rq^2$.

В рамках аналитических подходов такая задача вряд ли может быть решена строго, поскольку имеются два рода трудностей: 1) нет рецепта вычисления выражения для магнитной ямы; 2) нет малого параметра $\tilde{\xi}/\bar{\xi}$. Поэтому мы рассмотрим этот вопрос, используя некоторые огрубленные представления. Сделаем это, полагая для простоты магнитные поверхности круглыми.

Чтобы преодолеть первую из указанных трудностей, примем упрощающее предположение, что выражение для магнитной ямы при

$\beta \simeq a/Rq^2$ имеет такой же аналитический вид, как и при меньших β . Тогда с учетом соотношений (2.22), (2.23) находим, что уравнение (2.20) сводится к виду

$$d^2X/d\theta^2 - 2\lambda(\lambda + \delta + \cos\theta)X = 0, \quad (2.43)$$

где $\lambda = -q^2Rp'/B_0^2$; $\delta = (a/R)(1 - 1/q^2)$. При $\beta \simeq a/Rq^2$, т. е. при $\lambda \simeq 1$, величина δ — это малый параметр, которым в ряде последующих выкладок будем пренебрегать.

Аналогично (2.36) из (2.43) следует интегральное соотношение

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left[\left| \frac{dX}{d\theta} \right|^2 + 2\lambda(\lambda + \delta + \cos\theta) |X|^2 \right] = 0. \quad (2.44)$$

Видно, что при $\delta > 0$, т. е. при $q^2 > 1$, это соотношение не удовлетворяется, если $\lambda > 1$. Это означает, что в рамках принятых приближений критерий $q^2 > 1$ является достаточным условием устойчивости баллонных возмущений при $\lambda > 1$. Поэтому, пренебрегая членами с δ , нам достаточно рассмотреть только случай $\lambda < 1$.

Покажем, что уравнение (2.43) при $\delta \rightarrow 0$ и $\lambda < 1$ не удовлетворяется, т. е. что плазма с соответствующими параметрами устойчива относительно возмущений типа анти-Сайдема. Для этого используем следующие два приближенных подхода.

1. Модель квантовомеханического осциллятора. Полагаем, что возмущения локализованы вблизи $\theta = \pi$. Тогда $\cos\theta \approx -1 + t^2/2$, где $t = \pi - \theta$, а уравнение (2.43) сводится к виду

$$\partial^2 X/\partial t^2 + 2\lambda(1 - \lambda - t^2/2)X = 0. \quad (2.45)$$

Это уравнение имеет собственные решения с минимальным λ при условии

$$4\lambda(1 - \lambda)^2 = 1. \quad (2.46)$$

В случае $\lambda < 1$ максимум левой части (2.46) достигается при $\lambda = 1/3$ и равен при этом $16/27$, так что условие (2.46) не выполняется. Это означает, что рассмотренное приближение при $\lambda < 1$ предсказывает устойчивость.

2. Модель конечного числа гармоник. Будем искать решение уравнения (2.43) в виде

$$X = X_0 + X_1 \cos\theta + X_2 \cos 2\theta + X_3 \cos 3\theta, \quad (2.47)$$

пренебрегая всеми остальными гармониками. (Выбор числа гармоник согласован с требованием правильного предельного перехода к случаю малых давлений в условиях некруглых сечений.) При этом из (2.43) получается дисперсионное уравнение

$$36 + 25\lambda^2 + 4\lambda^4 = D, \quad (2.48)$$

где $D = (1 + 2\lambda^2)(36 + 25\lambda^2 + 4\lambda^4) - \lambda^2(9 + 2\lambda^2)$.

Уравнение (2.48) удовлетворяется при $\lambda = 0$. Однако в этом случае уравнение (2.43) теряет смысл. Для устранения соответствующего парадокса необходимо учесть члены с δ . Тогда получается дисперсионное уравнение $q^2 = 1$, что находится в соответствии с критерием Мерсье. Других решений с $\lambda < 1$ уравнение (2.48) не имеет, что означает устойчивость возмущений типа анти-Сайдема при выполнении критерия Мерсье.

§ 2.5. Возможность неустойчивости возмущений типа анти-Сайдема при $\beta > a/Rq^2$

Рассмотрим теперь возмущения типа анти-Сайдема при $\beta > a/Rq^2$, полагая, что в соответствии с (2.22), (2.23) при таких β

$$\mu^2 g_{22}^{(0)'} + g_{33}^{(0)'} = -2CR, \quad (2.49)$$

где C — некоторая положительная константа порядка единицы. При этом предположении в случае круглых сечений магнитных поверхностей уравнение (2.20) сводится к виду

$$\partial^2 X / \partial \theta^2 - 2\lambda(C + \cos\theta)X = 0. \quad (2.50)$$

С помощью интегрального соотношения типа (2.36), вытекающего из (2.50), убеждаемся, что увеличение λ , т. е. увеличение давления плазмы, вообще говоря, не означает появление неустойчивости возмущений типа анти-Сайдема. Для такой неустойчивости необходимо также выполнение условия

$$C < 1, \quad (2.51)$$

что определяется уже более тонкими эффектами, зависящими от деталей радиального распределения равновесных параметров плазмы и магнитного поля.

§ 2.6. Обсуждение результатов и обзор литературы

Теория желобковых и баллонных неустойчивостей в токамаке с конечным β первоначально развивалась в работах [10, 11, 16], а затем в [2, 3]. Этому циклу работ предшествовали работы Фюрта и др. [17] и Кулсруда [18], ориентированные на приложения к стеллараторам. Простейшие представления о баллонных неустойчивостях изложены в § 1.5 книги [1], а результаты исследования баллонных эффектов в токамаках с $\beta < a/Rq^2$ — в гл. 5 и 6 книги [1].

В последнее время исследования по желобковым и баллонным неустойчивостям значительно интенсифицировались в связи с положительным выяснением вопроса о возможности реализации в токамаке равновесных состояний плазмы с $\beta > a/Rq^2$ [19]. Первоначальные исследования МГД-устойчивости таких равновесных состояний были выполнены Тоддом и др. [20] и Бэйтманом и Пенгом [21]. Эти исследования, выявившие наличие МГД-неустойчивостей при $\beta \gtrsim a/Rq^2$, выполнялись с использованием вычислительных машин.

В связи с этим возникла проблема интерпретации машинных результатов [20, 21]. Поскольку машинные эксперименты [20, 21] проводились при условии $q^2 > 1$, часто понимаемым как критерий устойчивости Мерсье, и поскольку структура неустойчивостей, обнаруженных в [20, 21], носит четко выраженный нежелобковый характер, то стала складываться точка зрения, что эти неустойчивости более опасны, чем возмущения типа Сайдема—Мерсье. Это и явилось причиной повышенного интереса к баллонным возмущениям, граница устойчивости которых не описывается критерием Мерсье.

В связи с этим в работе [12] было разъяснено, что при больших β критерий Мерсье не сводится к простому условию $q^2 > 1$ и что этот критерий нарушается при $\beta \gtrsim a/Rq^2$. Там же был проанализирован вопрос об относительной опасности желобковых и баллонных возмущений. Результаты работы [12] легли в основу изложения § 2.1—2.5.

Из § 2.1—2.5 следует, что в численных экспериментах [20, 21, 27, 28] при повышении параметра β сначала должны были бы наблюдаться неустойчивости типа Сайдема и лишь затем — баллонные. Возможной причиной, почему в [20, 21] не были замечены неустойчивости типа Сайдема, является узкий интервал значений параметров β , при которых они существуют, а также их сильная радиальная локализованность. Действительно, как следует из работы Кулсруда [22] (см. также гл. 2 книги [1]), размер локализации возмущений типа Сайдема растет вместе с их инкрементом, а инкремент растет экспоненциально с удалением равновесных параметров от границы устойчивости. Поэтому неустойчивости типа Сайдема с удалением от границы устойчивости довольно быстро перестают быть таковыми и воспринимаются как баллонные неустойчивости. Можно предположить, что более тщательные численные расчеты вблизи границы устойчивости выявят не только баллонные неустойчивости, но и сайдемские.

Изложенные выше представления о неизбежности нарушения критерия Мерсье при больших β подтверждаются численными расчетами Инглейда [23]. Согласно сообщению [23], в условиях, когда всюду $q > 1$, при увеличении параметра β критерий Мерсье вначале нарушается в окрестности магнитной оси, а затем область неустойчивости расширяется вместе с ростом β , что вполне согласуется с изложенной выше картиной.

ГЛАВА 3

ВНУТРЕННИЕ ВИНТОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 3.1. Введение

Одним из серьезных препятствий длительного удержания плазмы в тороидальных магнитных ловушках типа токамак являются так называемые винтовые (kink) неустойчивости. Такого рода неустойчивости представляют собой крупномасштабные гидромагнитные

возмущения, возбуждение которых обусловлено протеканием по плазме продольного тока, а также наличием градиента давления плазмы.

Характер винтовых неустойчивостей существенно зависит также от условий на границе плазменного шнура. Если между плазменным шнуром и проводящим кожухом имеется вакуумный промежуток, то возможно нарастание возмущений типа поверхностной волны. Такие возмущения обладают инкрементами, существенно большими инкрементов всех других типов гидромагнитных возмущений. В такого рода возмущениях, называемых «винтовыми неустойчивостями плазмы со свободной границей», градиент давления плазмы несуществен. Это дает возможность провести четкое разграничение между указанными неустойчивостями и желобковыми, которые, как и винтовые, относятся к числу гидромагнитных, но обусловлены градиентом давления плазмы.

В отсутствие вакуумного промежутка между плазмой и кожухом, что соответствует случаю «плазмы с закрепленной границей», отсутствуют и отмеченные выше возмущения типа поверхностных волн, обладающие большими инкрементами. При этом все гидромагнитные неустойчивости чувствительны к градиенту давления плазмы. Вместе с тем гидромагнитные возмущения плазмы с закрепленной границей могут нарастать и в пренебрежении градиентом давления, поскольку они чувствительны также к протеканию продольного тока. В этом смысле винтовые неустойчивости плазмы с закрепленной границей представляют собой своеобразный гибрид, порожденный градиентом давления плазмы и продольным током. В. Д. Шафранов [24], рассмотревший этот гибрид в случае цилиндрической плазмы, показал, что при типичных радиальных профилях давления плазмы роль продольного тока столь же существенна, как и роль градиента давления плазмы лишь при небольших номерах m азимутальной гармоник возмущений. Если же $m \gg 1$, то винтовые неустойчивости плазмы с закрепленной границей означают то же самое, что и желобковые. Поэтому и само представление о винтовых неустойчивостях плазмы с закрепленной границей имеет смысл также лишь при малых m . В этой связи ясно, что физически наибольший интерес представляет исследование возмущений с $m = 1$. Такого рода возмущения представляют наибольший интерес и с прикладной точки зрения, поскольку они являются наиболее крупномасштабными и могут приводить к наиболее заметным макроскопическим эффектам. Поэтому в дальнейшем, говоря о винтовых возмущениях, мы, как правило, будем иметь в виду случай $m = 1$.

Помимо [24] исследование внутренних винтовых неустойчивостей цилиндрического шнура проводилось также в работе [25]. Соответствующие результаты [25] излагались в § 9.4 книги [1]. Напомним, что в этом случае внутренние винтовые возмущения с $m = 1$ описываются уравнением

$$\frac{d}{da} \left\{ [\rho\gamma^2 + (k\mathbf{B})^2] a^3 \frac{dX}{da} \right\} - n^2 g_1^c X = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $k\mathbf{B} = (1 - nq)B_0/a$;

$$\left. \begin{aligned} g_{1p}^c &= g_{1p}^c + g_{1j}^c; \\ g_{1p}^c &= 2a^2 p'/R^2; g_{1j}^c = (aB_0^2/R^2)(nq-1)(3nq+1); \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$q = aB_s/RB_0$; $R = L/2\pi$, L — длина цилиндра; B_s , B_0 — компоненты магнитного поля вдоль оси и вдоль азимута цилиндра; индекс c у g_i^c означает приближение прямого цилиндра.

Согласно [1, 24, 25], для существования внутренней винтовой неустойчивости, описываемой уравнением (3.1), необходимо, чтобы разность $1 - nq$ обращалась в нуль где-либо внутри плазменного шнура. Поверхность $a = a_0$, где $1 - nq(a_0) = 0$, называется резонансной или сингулярной, поскольку в пренебрежении инерцией плазмы ($\gamma^2 \rightarrow 0$) уравнение (3.1) в этой точке имеет особенность. Учет инерции плазмы важен только вблизи точки $a = a_0$. При этом члены с g_i^c в уравнении (3.1) несущественны, так что вблизи $a = a_0$ оно сводится к следующему:

$$\frac{d}{da} \left\{ \left[\rho(a_0) \gamma^2 + \frac{B_0^2}{a_0^2} n^2 q'^2 (a - a_0)^2 \right] \frac{dX}{da} \right\} = 0. \quad (3.3)$$

Если же a не слишком близко к a_0 , то членами с γ^2 в (3.1) можно пренебречь. При этом

$$\frac{d}{da} \left[(k\mathbf{B})^2 a^3 \frac{dX}{da} \right] - g_1^c n^2 X = 0. \quad (3.4)$$

Как следует из [25], решение уравнений (3.3), (3.4) удовлетворяет граничным условиям $X(0) = \text{const}$, $X(a_*) = 0$ (a_* — граница плазмы), если

$$\int_0^{a_0} g_1^c da < 0, \quad (3.5)$$

что соответствует также результату В. Д. Шафранова [24], полученному энергетическим методом. Условие существования решения (3.5) вместе с тем является необходимым и достаточным условием внутренней винтовой неустойчивости с $m = 1$. В частности, к числу неустойчивых относится плазма с монотонно спадающими давлением и продольным током [24].

В простейшем случае параболического давления $p = p_0(1 - a^2/a_*^2)$ критерий (3.5) означает

$$\int_0^{a_0} \frac{a^3 da}{q^2} [-4\beta_J + (nq-1)(3nq+1)] < 0, \quad (3.6)$$

где $\beta_J = p_0/B_0^2(a_*)$. Это условие легче всего удовлетворяется при $n = 1$; при этом вместо (3.6) имеем

$$\int_0^{a_0} \frac{a^3 da}{q^2} [-4\beta_J + (q-1)(3q+1)] < 0. \quad (3.7)$$

Отсюда видно, что при $q(0) < 1$ плазменный цилиндр неустойчив. Неустойчивость может быть обусловлена как членом порядка β_J , соответствующим градиенту давления плазмы, так и членом, содержащим разность $q - 1$, который соответствует градиенту продольного тока.

Итак, как отмечалось выше, внутренняя винтовая неустойчивость фактически представляет собой гибрид двух неустойчивостей — желобковой и токовой.

Известно, однако, что модель цилиндрического шнура, вообще говоря, непригодна для выяснения картины желобковых неустойчивостей плазмы в тороидальных ловушках. Это обусловлено, в частности, тем, что такая модель не учитывает углубления магнитной ямы, связанного с кривизной магнитной оси. На языке, используемом при записи уравнений (3.1), (3.2), это означает, что тороидальность должна приводить к перенормировке коэффициента при g_{ir}^c . Кроме того, как ясно из общих результатов гл. 1 [см., например, уравнения (1.60)—(1.65)], вследствие тороидальности модифицируется выражение для g_{ij}^c , описывающее влияние градиента продольного тока на винтовую неустойчивость. Уже из этого ясно, что критерии устойчивости внутренних винтовых возмущений, получаемые для модели цилиндрического шнура, вообще говоря, не могут быть использованы для предсказания поведения плазмы в тороидальных ловушках.

Еще одним важным обстоятельством, свидетельствующим о неадекватности модели цилиндрического шнура и тороидальных ловушек, является наличие баллонных эффектов. На языке уравнений (1.60)—(1.65) баллонные эффекты характеризуются недиагональными матричными элементами уравнения (1.60) и величиной U_{mn}^b , определяемой уравнением (1.64). Роль соответствующих величин тем больше, чем больше давление плазмы и градиент продольного тока. Поэтому ясно, что предсказания модели цилиндрического шнура заведомо неприменимы для токамаков с не слишком малым β_J и не слишком малым градиентом продольного тока.

Заметим также, что баллонные эффекты, т. е. сателлиты $X_{m'}$ с $m' \neq m$, проявляются и в модели прямого цилиндра, если сечение цилиндра некруглое. В этом смысле баллонные эффекты не являются спецификой только тороидальных систем. Поэтому баллонные эффекты могут быть разделены на два типа: цилиндрические и тороидальные. Если сечение магнитных поверхностей токамака круглое, то недиагональные матричные элементы, входящие в уравнение (1.60), малы не только при малом β_J и малом градиенте тока, но также и при $\beta_J \gg 1$ и произвольном градиенте тока. Благодаря этому исследование баллонных эффектов в токамаке круглого сечения существенно упрощается.

Чтобы разобраться в специфике винтовых возмущений токамака, мы начнем анализ системы уравнений (1.60)—(1.65) с простейшего случая плазмы малого давления и малого градиента тока, когда не

важны баллонные эффекты. В § 3.2 при этом предположении рассмотрим общие свойства винтовых возмущений. В § 3.3 покажем, что при малом давлении и малом отрицательном градиенте продольного тока винтовые возмущения с $m = 1$ в круглом токамаке, в отличие от случая круглого цилиндра, устойчивы. Анализ баллонных эффектов начнем с § 3.4, где покажем, что увеличение давления плазмы при малом градиенте тока улучшает устойчивость возмущений с $m = 1$. В § 3.5 рассматривается роль отрицательного градиента продольного тока в плазме большого давления и устанавливается, что в этом случае имеет место дестабилизация. В § 3.6 обсуждаются результаты и дается обзор литературы.

§ 3.2. Общие свойства винтовых возмущений в токамаке с плазмой низкого давления и малым градиентом тока

Пусть $\beta_J \ll 1$, а градиент тока мал, так что $\chi' = (n/m)\Phi'$ — малый параметр. Тогда недиагональные элементы в уравнении (1.60) малы и оно сводится к приближенному виду

$$\frac{d}{da} \left(S_{mm} \frac{dX_m}{da} \right) - U_{mm} X_m = 0. \quad (3.8)$$

По той же причине мала величина U_{mm}^b в выражении (1.6i) для U_{mm} . Поэтому

$$U_{mm} = (n^2/m^2 - 1) \Lambda_m + \tilde{U}_{mm}. \quad (3.9)$$

При сделанных предположениях упрощается также величина \tilde{U}_{mm} , определенная уравнением (1.63): в правой части этого уравнения можно опустить члены с l_m^2 ; кроме того, в фигурных скобках правой части (1.63) можно считать $\chi' = (n/m)\Phi'$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{mm} = p' \left[\frac{(V' G)'}{G} - 2 \frac{V' N_0 G'}{G^2} + \frac{n^2}{m^2} \frac{V'}{G} (N_0 G)' \right] + \\ + \chi' \left(\chi' - \frac{n\Phi'}{m} \right) \left\{ [G (N_0/G)']' + \frac{G'}{G} \left(\frac{N_0^2}{G} \right)' - \frac{1}{G} (N_0 N_0')' + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2 N_0'}{G^2} (N_0 G)' \right\}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

1. Достаточное условие устойчивости. Составляя с помощью уравнения (3.8) интегральную форму (ср. с. § 1.3), заключаем, что оно не удовлетворяется ни при каких функциях $X_m(a)$, если

$$U_{mm} \geq 0. \quad (3.11)$$

Это неравенство играет роль достаточного условия гидромагнитной устойчивости токамака с плазмой низкого давления и малым градиентом тока по отношению к возмущениям с соответствующими m и n в предположении, что плазма граничит с проводящим кожухом (плазма с закрепленной границей).

2. Условие устойчивости винтовых возмущений по отношению к градиенту давления. При спадающем давлении, $p' < 0$, и полном пренебрежении членами с $\chi' - n\Phi'/m$ в выражении U_{mm} из (3.11 с учетом (1.62), (3.9) и (3.10) следует критерий устойчивости

$$\frac{(V'G)'}{G} + \frac{n^2}{m^2} V' \left(\frac{N_0}{G} \right)' \leq 0. \quad (3.12)$$

В терминах g_{ik} [см. (1.20), (1.21), (1.47)] это означает

$$g_{33}^{(0)'} + \frac{n^2}{m^2} g_{22}^{(0)'} \leq 0. \quad (3.13)$$

Это то же самое, что и критерий устойчивости плазмы низкого давления по отношению к мелкомасштабным желобковым возмущениям. Сказанное следует, например, из сравнения неравенства (3.13) с неравенством (2.8) с нулевой правой частью. Различие состоит лишь в том, что в (2.8) полагалось $\mu = n/m$, где m и n — большие целые числа, тогда как в (3.13) $\mu = n/m$ с произвольными отличными от нуля целыми m и n . Поскольку отношение n/m умножением числителя и знаменателя на большое число может быть представлено как отношение двух больших чисел, то ясно, что критерий (3.13) фактически является частным случаем критерия (2.8). Поэтому если в обсуждаемом случае пренебрежимо малого градиента продольного тока и малого давления плазмы проанализирован критерий устойчивости мелкомасштабных мод, то дополнительного анализа устойчивости низших мод проводить не требуется.

3. Роль продольного градиента тока в возмущениях с $m = 1$. Как следует из (3.9), (3.10) и (1.62), в пренебрежении градиентом давления плазмы выражение для U_{mm} принимает вид:

$$U_{mm} = \Phi'^2 \mu \left(\mu - \frac{n}{m} \right) \left(u - \frac{n^2}{m^2} v \right); \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= [G(N_0/G)']'; \\ v &= \frac{1}{G} \left[(N_0 N_0')' - \frac{3G'}{G} N_0 N_0' \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Рассмотрим, что отсюда следует для возмущений с $m = 1$. Согласно сказанному в § 3.1, эти возмущения локализованы при $a < a_0$, где a_0 — точка, в которой $\mu = n$. При спадающем по радиусу продольном токе μ возрастает с радиусом, так что при $a < a_0$ $\mu(\mu - n) < 0$. Если же ток возрастает с радиусом, то при $a < a_0$ $\mu(\mu - n) > 0$. Для этих двух случаев распределения тока, монотонного при $a < a_0$, из (3.12), (3.14) получаются критерии устойчивости

$$u - n^2 v \geq 0. \quad (3.16)$$

Верхнее неравенство относится к случаю спадающего тока, а нижнее — к растущему.

4. Влияние продольного тока на возмущения с $m \neq 1$. Прежде чем рассмотреть роль продольного тока в возмущениях с $m = 1$ в токамаке, напомним, что, согласно (1.61), (1.65), в приближении круглого цилиндра вместо (3.14) имеем

$$U_{mm} = -4 \frac{a}{R} \Phi'^2 \mu \left(\mu - \frac{n}{m} \right) \left(\frac{n^2}{m^2} - 1 \right). \quad (3.17)$$

При переходе к прямому цилиндру следует считать также $n/m \rightarrow \infty$, так что в этом предельном случае $n^2/m^2 - 1$ — заведомо положительная величина. Поэтому знак U_{mm} однозначно связан со знаком разности $\mu - n/m$. Аналогично сказанному в п. 3 при спадающем по радиусу токе эта разность положительна при $a < a_0$, а при растущем — при $a > a_0$. Однако роль знака этой разности при $m \neq 1$ не столь радикальна, как при $m = 1$, и такие возмущения могут быть неустойчивы как при спадающем, так и при растущем токе. Однако от характера распределения тока существенно зависит расположение областей локализации этих возмущений: при спадающем токе эти области располагаются внутри сингулярного слоя (т. е. при $a < a_0$), а при растущем — снаружи (т. е. при $a > a_0$). В этом отношении неустойчивости с $m \neq 1$ отличны от неустойчивостей с $m = 1$, поскольку возмущения с $m = 1$ локализируются только при $a < a_0$, а нарастание возмущений с $m = 1$ возможно лишь при спадающем токе (мы имеем в виду монотонные профили тока).

Это касается круглого цилиндра. Переходя к токамаку и учитывая (3.14), заключаем, что расположение областей локализации возмущений с $m \neq 1$ зависит не только от характера распределения продольного тока, но и от геометрии магнитного поля токамака. В частности замечаем, что расположение областей локализации таких возмущений в токамаке должно быть противоположным тому, что предсказывается моделью круглого цилиндра, если

$$u - (n/m)^2 v > 0. \quad (3.18)$$

Вытекающие отсюда конкретные результаты обсудим в § 3.3.

§ 3.3. Стабилизация внутренних винтовых неустойчивостей с $m=1$ в токамаке круглого сечения с плазмой низкого давления и малым градиентом тока

В случае токамака круглого сечения и не слишком больших β_J ($\beta_J < (R/a)^{2/3}$) величины V' , N_0 и G , необходимые для использования результатов § 3.2, имеют вид (см., например, [1, 16])

$$\left. \begin{aligned} V' &= 4\pi^2 aR \left(1 - k\xi - \frac{1}{2} ka\xi' \right); \\ N_0 &= \frac{a}{R} \left(1 + k\xi + \frac{1}{2} \xi'^2 - \frac{1}{2} ka\xi' + \frac{1}{2} k^2 a^2 \right); \\ G &= \frac{R}{a} \left(1 - k\xi - \frac{1}{2} ka\xi' - \frac{1}{2} k^2 a^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

где $k \equiv 1/R$, ξ — равновесное смещение центров магнитных поверхностей, удовлетворяющее уравнению

$$\xi'' + \frac{3}{a} \xi' + \frac{2a\mu'}{\mu} \xi' = k \left(1 - \frac{8\pi^2 R^2 a p'}{\chi'^2} \right). \quad (3.20)$$

1. Стабилизация неустойчивости, обусловленной градиентом давления. Используя (3.19), получаем следующее выражение для комбинаций величин, входящих в критерий устойчивости (3.12):

$$\left. \begin{aligned} (V'G)' / G &= -4\pi^2 a^2 \left(\xi'' + \frac{3\xi'}{a} + k \right), \\ V'(N_0/G)' &= 8\pi^2 a^2 k. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Учитывая уравнение (3.20), в котором следует считать $\mu' \rightarrow 0$, $p' \rightarrow 0$, приводим критерий устойчивости (3.12) к виду

$$-1 + (n/m)^2 \leq 0. \quad (3.22)$$

Вспоминая смысл критерия устойчивости (3.12), заключаем, что, в отличие от случая цилиндрического шнура, градиент давления не приводит к неустойчивости возмущений с $m = 1$ и $n = 1$. Этот эффект стабилизации связан с магнитной ямой токамака.

2. Стабилизация неустойчивости, обусловленной градиентом продольного тока. С помощью (3.19) находим выражения для u и v , определенных соотношением (3.15):

$$\left. \begin{aligned} u &\approx \left(N_0' - \frac{1}{R^2} \frac{N_0 G^3}{G'} \right)' = \frac{1}{R} [a\xi' \xi''' + (a\xi'' + 3\xi')(\xi'' + k) + 6k^2 a]; \\ v &= 4a/R^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

В пределе малых значений шира ($\mu' \rightarrow 0$) и давления плазмы ($p' \rightarrow 0$) из (3.20) следует

$$\xi' = ka/4. \quad (3.24)$$

В этом приближении

$$u = 29a/4 R^3. \quad (3.25)$$

Обращаясь к критериям устойчивости (3.16) и учитывая, что согласно (3.24), (3.25)

$$u > v, \quad (3.26)$$

закключаем, что в противоположность случаю круглого цилиндра спадающий ток устойчив, а нарастающий — неустойчив.

§ 3.4. Стабилизирующее влияние квадрата градиента давления плазмы на возмущения с $m=1$ в токамаке круглого сечения при малом градиенте тока

Переходим к исследованию баллонных эффектов. Полагаем, что сечения магнитных поверхностей токамака круглые. В этом случае, кроме величин N_0 и G , определенных уравнениями (3.19), отличны от нуля также следующие фурье-гармоники метрических коэффициентов: L_0 , $L_{\pm 1}$, $M_{\pm 1}$, $N_{\pm 1}$. Согласно определениям (1.50) и выражениям для L , M и N , приведенным в работах [1, 3, 16], указанные величины равны:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{aR} \left(1 + k\xi + \frac{1}{2} a^2 \xi'^2 + a\xi' \xi'' + ka^2 \xi''' + 2\xi'^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2} ka\xi' + \frac{5}{2} k^2 a^2 \right); \\ L_{\pm 1} &= \frac{\xi' + ka}{aR}; \quad M_{\pm 1} = \pm \frac{i}{2R} (a\xi'' + \xi' + ka); \\ N_{\pm 1} &= -\frac{a\xi'}{R}. \end{aligned} \right\} (3.27)$$

Отличны от нуля также элементы $Q_{\pm 1}$, которые согласно [1, 3] и (1.50) равны

$$Q_{\pm 1} = 4\pi^2 p' a^2 / \chi'. \quad (3.28)$$

Заметим, что эти величины связаны с метрическими коэффициентами $N_{\pm 1}$, $M_{\pm 1}$ соотношениями

$$Q_{\pm 1} = (N_{\pm 1} \chi')' \mp i\chi' M_{\pm 1}. \quad (3.29)$$

Эти соотношения следуют из уравнения равновесия

$$J' + Q = (N\chi')' - \chi' \partial M / \partial \theta. \quad (3.30)$$

С помощью уравнений (3.27), (3.28) убеждаемся, что недиагональные матричные элементы в уравнении (1.60) малы по сравнению с диагональными. Поэтому в соответствии со сказанным в § 3.1 вклад в уравнение (1.60) сопутствующих гармоник (сателлитов), описывающих баллонные эффекты, в случае круглого токамака может быть исследован методом последовательных приближений не только при малом β_J и малом градиенте продольного тока, но и при $\beta_J \gg 1$ и произвольном градиенте тока. При этом система уравнений (1.60) сводится к трем уравнениям: для гармоник с m и $m \pm 1$. Ниже нас будут интересовать возмущения с $m=1$. Поскольку $X_0 = 0$, то вместо трех уравнений в этом случае имеем два: для $m=1$ и $m=2$. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{da} \left(S_{11} \frac{dX_1}{da} \right) - U_{11} X_1 + \frac{d}{da} \left(S_{12} \frac{dX_2}{da} \right) + T_{12} \frac{dX_2}{da} - U_{12} X_2 = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{da} \left(S_{22} \frac{dX_2}{da} \right) - U_{22} X_2 + \frac{d}{da} \left(S_{21} \frac{dX_1}{da} \right) + T_{21} \frac{dX_1}{da} - U_{21} X_1 = 0. \quad (3.32)$$

В данном параграфе используем уравнения (3.31), (3.32) для исследования влияния роли параметра β_J , полагая, как и в § 3.2, 3.3, градиент тока достаточно малым и полностью пренебрегая им в элементах S_{12} , S_{21} , S_{22} , $T_{mm'}$ и $U_{mm'}$. При этом

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= (\chi' - n\Phi')^2 a/R; & S_{12} &= S_{21} = 0; & S_{22} &= a\chi'^2/4R; \\ T_{12} &= -T_{21} = \chi' Q_1/2; & U_{21} &= 0; & U_{12} &= -(3/2)\chi' Q_1/a; \\ U_{11} &= p' \left[\frac{(V'G)'}{G} + n^2 V' \left(\frac{N_0}{G} \right)' \right] - \frac{Q_1^2}{N_0}, & U_{22} &= \frac{3}{4} \frac{x'^2}{aR}. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Используя приведенные здесь выражения, преобразуем уравнение для второй гармоники (3.32) к виду

$$\frac{1}{a} \frac{d}{da} \left(a^3 \frac{dX_2}{da} \right) - 3X_2 = \frac{8\pi^2 a^4 R}{\chi'^2} \frac{d}{da} \left(\frac{p' X_1}{a} \right). \quad (3.34)$$

Предполагается также, что $n = 1$. Решая (3.34) со стандартными граничными условиями (конечность X_2 при $a = a_0$ и $X_2 = 0$ при $a = a_*$), получаем

$$X_2 = \frac{2a^2}{RB_0^2} \left(\frac{1}{a^3} \int_0^a p' X_1 a^2 da - \frac{a}{a_*^4} \int_0^{a_*} p' X_1 a^2 da \right). \quad (3.35)$$

Здесь $B_0 \equiv \chi'/2\pi R$. Подставляя это выражение для X_2 в уравнение (3.31), приводим последнее к виду, аналогичному уравнению (3.4):

$$\frac{d}{da} \left[(\mathbf{kB})^2 a^3 \frac{dX_1}{da} \right] - \tilde{g}_1^t X_1 = 0, \quad (3.36)$$

где

$$\tilde{g}_1^t X_1 = \frac{4a^4 p'}{R^2 B_0^2 a_*^4} \int_0^{a_*} p' X_1 a^2 da. \quad (3.37)$$

Учитываем, что приближенное решение уравнения (3.36) имеет вид [1]

$$X_1 = \begin{cases} C_1, & a < a_0, \\ 0, & a > a_0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Поэтому верхний предел интегрирования в (3.37) можно заменить a_0 и, кроме того, можно вынести функцию X_1 за знак интеграла. Тогда из (3.36) находим

$$\frac{d}{da} \left[(\mathbf{kB})^2 a^3 \frac{dX_1}{da} \right] - X_1 \frac{4a^4 p'}{R^2 B_0^2 a_*^4} \int_0^{a_0} p' a^2 da = 0. \quad (3.39)$$

Умножая обе части этого равенства на X_1^* и интегрируя по a , получаем интегральное соотношение

$$\int_0^{a_0} (\mathbf{kB})^2 a^3 \left| \frac{dX_1}{da} \right|^2 da + |C_1|^2 \frac{4}{R^2 B_0(a_*) a_*^2} \left(\int_0^{a_0} p' a^2 da \right)^2 = 0. \quad (3.40)$$

Это соотношение не удовлетворяется ни при каком $C_1 \neq 0$, что соответствует устойчивости.

§ 3.5. Дестабилизирующее влияние градиента продольного тока в круглом токамаке с плазмой большого давления

Теперь, в отличие от § 3.4, учитываем градиент продольного тока, считая его тем не менее малым. При этом в уравнения (3.31), (3.32) должны подставляться следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{a\Phi'^2}{R} (\mu - 1)^2; & S_{12} = S_{21} &= -\frac{a\Phi'^2}{4R} (\mu - 1) \left(\frac{ka}{2} - \lambda \right); \\ T_{12} &= -T_{21} = \frac{\Phi'^2}{4R} \left[2\lambda + a\mu' \left(\frac{ka}{2} - \lambda \right) - (\mu - 1) \left(\frac{9}{2} ka - \lambda \right) \right]; \\ S_{22} &= \frac{a\Phi'^2}{R} \left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2; & U_{12} &= \frac{3\Phi'^2}{4aR} \left[(\mu - 1) \left(\frac{9}{2} ka - \lambda \right) - 2\lambda \right]; \\ U_{22} &= \frac{3\Phi'^2}{aR} \left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2; & U_{21} &= -\frac{\mu' \Phi'^2}{2R} (ka + 2\lambda) + \\ &+ \frac{\Phi'^2 a^2}{2R} \left(\frac{ka}{4} - \frac{\lambda}{2} \right) \left(\frac{\mu'}{a} \right)'; \\ U_{11} &= \frac{\Phi'^2}{aR} \left\{ (\mu - 1) \left(\frac{13}{4} k^2 a^2 - 4ka\lambda - \lambda^2 \right) + \right. \\ &+ \lambda \left[\lambda + a\mu' \left(\frac{ka}{4} - \frac{\lambda}{2} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Здесь $\lambda \equiv 4\pi^2 p' a^2 R / \Phi'^2$. Для простоты полагаем давление параболическим; тогда $\lambda \sim a$. Выше мы предположили $n = 1$.

Умножая (3.31) на X_1 и интегрируя по пространству, с учетом (3.38) получаем необходимое и достаточное условие устойчивости

$$\int_0^{a_0} \left[(\mu - 1) \left(\frac{13}{4} k^2 a^2 - 4ka\lambda - \lambda^2 \right) + \lambda^2 (1 - a\mu') \right] ada - \frac{1}{2C_1} \left\{ X_2 a^3 \left[\frac{\lambda}{a} + \frac{\mu'}{2} \left(\frac{ka}{2} - \lambda \right) \right] \right\}_{a=a_0} \geq 0. \quad (3.42)$$

Мы воспользовались тем, что в членах с широм можно полагать $X_2 = C_1 \lambda / 2$ [ср. с (3.35)]. Кроме того, предполагается $a_0/a_* \ll 1$, поскольку в противном случае малые члены с широм не важны.

С помощью (3.32), (3.41) получаем уравнение для X_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left[\frac{1}{a^3} \frac{d}{da} (a^3 X_2) \right] = \frac{2\lambda}{a} \frac{dX_1}{da} + \frac{d}{da} \left[(\mu - 1) \left(\frac{ka}{2} - \lambda \right) \frac{dX_1}{da} \right] + \\ + \frac{dX_1}{da} \left[-\frac{3(ka + 2\lambda)}{a} (\mu - 1) + \mu' \left(\frac{ka}{2} - \lambda \right) \right] - 2X_1 \mu' \frac{ka + 2\lambda}{a} - \\ - 4\mu' \frac{dX_2}{da}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Решаем это уравнение в областях $a < a_0$ и $a > a_0$ и сшиваем решения с помощью условия

$$\left(\frac{dX_2}{da} \right) \Big|_{a_0 - \varepsilon}^{a_0 + \varepsilon} = - \left[\frac{2\lambda}{a} + \mu' \left(\frac{ka}{2} - \lambda \right) \right]_{a=a_0} C_1, \quad (3.44)$$

получаемого интегрированием (3.43) по переходному слою. В результате находим

$$X_2(a_0) = C_1 \left[\frac{\lambda_0}{2} \left(1 - \frac{a_0^4}{a_*^4} \right) - (\mu_0 - 1) \left(\frac{5}{12} ka_0 - \frac{3}{2} \lambda_0 \right) \right], \quad (3.45)$$

где $\lambda_0 = \lambda(a_0)$, $\mu_0 = \mu(0)$. Подставляя (3.45) в (3.42), приводим критерий устойчивости к виду

$$(\mu_0 - 1) \left(\frac{13}{48} - 3\beta_J^2 \right) + \frac{a_0^4}{a_*^4} \beta_J^2 > 0, \quad (3.46)$$

где $\beta_J \equiv p_0 R^2 / a_*^2 B_s^2$.

Отсюда видно, что при больших β_J градиент продольного тока играет дестабилизирующую роль. Этот эффект тем важнее, чем меньше a_0/a_* .

§ 3.6. Обсуждение результатов и обзор литературы

Влияние тороидальности на внутренние винтовые неустойчивости токамака выяснялось в работе [13] и ряде последующих. Здесь мы коснемся только некоторых недавних работ, а именно работ Буссак и др. [26], А. М. Крымского и автора [6, 27] и автора [14]. (Подробная библиография по винтовым неустойчивостям, как и по другим вопросам теории МГД-неустойчивостей токамаков, содержится в обзоре Вессона [28].)

В работе [26] были рассмотрены возмущения с $m = 1$ в плазме с существенным градиентом продольного тока и было показано, что при этом условии неустойчивость имеет место при больших β_J и отсутствует при малых β_J . Согласно [26], граница неустойчивости в простейшем случае малых a_0/a_* характеризуется неравенством (3.46) без последнего члена левой части, т. е. неравенством

$$\beta_J \leq \sqrt{13/12}. \quad (3.47)$$

В работе [6] предполагалось, что градиент продольного тока мал и менее существен, чем градиент давления, и выяснялось, как в

этих условиях влияет на возмущения с $m = 1$ увеличение параметра β_J . При этом были получены соотношения типа (3.39), (3.40), свидетельствующие о том, что увеличение параметра β_J играет стабилизирующую роль.

Другие приведенные выше результаты были получены в работе [14].

Учет эффектов порядка $(\beta_J a/R)^4$ и $(\beta_J a/R)^6$ в задаче о возмущениях с $m = 1$ производился в работе [27].

ГЛАВА 4

ДРЕЙФОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕОРИИ МГД-ВОЗМУЩЕНИЙ ТОКАМАКА

§ 4.1. Введение

Если частоты МГД-возмущений оказываются порядка дрейфовых, то выведенные в гл. 1 уравнения должны быть дополнены членами, учитывающими дрейфовые эффекты.

Часто в теоретических работах при исследовании дрейфовых эффектов в МГД-возмущениях токамака используются модели, не учитывающие тороидальности магнитного поля. Иначе говоря, вместо токамака часто анализируется плоский слой плазмы или прямой плазменный цилиндр, а получающиеся при таком анализе результаты по некоторым общепринятым правилам соответствия переносятся в условия токамака. Так ранее изучалась роль дрейфовых эффектов во внутренних винтовых возмущениях с $m = 1$, в возмущениях типа Сайдема, резистивных винтовых возмущениях с $m = 1$, гравитационно-резистивных, разрывных (tearing) и некоторых других возмущениях.

Чтобы составить представление об адекватности такого моделирования, заметим, что ранее тороидальность магнитного поля учитывалась в задаче о влиянии дрейфовых эффектов на альфвеновские волны в токамаке (см. [1] и цитированную там литературу). При этом было показано, что получаемая при учете тороидальности картина неустойчивостей, связанных с альфвеновскими волнами, неадекватна получаемой в пренебрежении тороидальностью. Поскольку МГД-возмущения представляют собой модифицированные альфвеновские волны, то из сказанного ясно, что и в задаче о дрейфовых эффектах в МГД-возмущениях учет тороидальности также должен быть существен.

Чтобы простейшим путем убедиться в нетривиальной роли тороидальности, ниже рассмотрим, следуя работе А. М. Крымского и автора [29], модель плазмы, описываемую уравнениями двухжидкостной гидродинамики, а в конце главы, следуя работе автора и Г. И. Сурамлишвили [7], коснемся кинетических дрейфовых эффектов.

Исходные уравнения для МГД-возмущений, соответствующие модели двухжидкостной гидродинамики, приведены в § 4.2. С их помощью в § 4.3 рассматриваются внутренние винтовые возмущения с $m = 1$, в § 4.4 — возмущения типа Сайдема, в § 4.5 — резистивные винтовые возмущения с $m = 1$ и в § 4.6 — гравитационно-резистивные и разрывные возмущения. В § 4.7 рассматриваются кинетические дрейфовые эффекты. Результаты обсуждаются в § 4.8.

§ 4.2. Исходные уравнения

Учитывая конечную проводимость плазмы и в остальном следуя [1] и гл. 1, для случая круглого токамака получаем уравнение малых колебаний вида

$$-\frac{\mu m - n}{m R B_s} \left[\frac{1}{a} \frac{d}{da} \left(a \frac{d\tau_m^1}{da} \right) - \frac{m^2}{a^2} \tau_m^1 \right] + \frac{\tau_m^1}{a R B_s} (3\mu' + \mu'' a) + \hat{W} + \mu^2 \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 0; \quad (4.1)$$

$$\hat{I}_1 = \frac{i}{m} \frac{a}{R} \frac{\omega(\omega - m\hat{\omega}_p)}{k_1^2 c_A^2} \Delta_{\perp} X_m; \quad (4.2)$$

$$\hat{I}_2 = \left(\delta p^{+'} - \delta p^{-'} - i \frac{m+1}{a} \delta p^{+} + i \frac{m-1}{a} \delta p^{-} \right) / B_s^2. \quad (4.3)$$

Здесь $\tau_m^1 \equiv (\sqrt{g\tilde{B}^1})_m$ связано со смещением X_m соотношением

$$\tau_m^1 = i a B_s (\mu m - n) X_m + \frac{i}{\omega \sigma_*} \Delta_{\perp} \tau_m^1. \quad (4.4)$$

Величины δp^{\pm} означают то же самое, что и $\delta \tilde{p}_{m\pm 1}$ в гл. 1; $k_1 = \mu/R$; $\sigma_* = \sigma_0 (1 + m\hat{\omega}_p/\omega + 0,71 m \hat{\omega}_T/\omega)$ — проводимость плазмы, перенормированная с учетом дрейфовых эффектов; $\hat{\omega}_p = T_0 \times (\ln p_0)' / e_i a B_s$, $\hat{\omega}_T = T_0' / e_i a B_s$, $c_A^2 = B_s^2 / \rho_0$ — квадрат альфвеновской скорости. Временная зависимость возмущений имеет вид $\exp(-i\omega t)$. В операторе $\Delta_{\perp} = d^2/da^2 - m^2/a^2$ слагаемое m^2/a^2 удержано с целью рассмотреть возмущения не только с малыми, но и с большими азимутальными числами. Оператор \hat{W} содержит вклад магнитной ямы и чисто гидромагнитной части баллонности. В частности, для внутренних винтовых возмущений с $m = 1$, согласно гл. 3, имеем

$$\hat{W} = i \left(\frac{R}{a^2 B_s^2} \hat{g}_{1j} + \frac{4p'R}{a_1^4 B_s^4} \int_0^{a_0} p' a^2 da \right) X_1, \quad (4.5)$$

где слагаемое \hat{g}_{ij}^t содержит члены, пропорциональные $\mu - 1$. В случае же возмущений типа Сайдема \hat{W} означает [1]:

$$\hat{W} = i \frac{2mp'}{RB_s^2} \mu^2 (1 - q^2) X_m. \quad (4.6)$$

Аналогичные выражения для \hat{W} можно привести также и в случае диссипативных возмущений, что будет сделано в § 4.6.

Негидромагнитная часть возмущения давления плазмы δp и вклад тороидальных сателлитов в инерцию плазмы \hat{I}_2 вычисляются аналогично [1]. При этом получаем

$$\hat{I}_2 = -i \frac{\beta a}{2mR} (K_m^+ + K_m^-) \Delta_{\perp} X_m; \quad (4.7)$$

$$K_m^{\pm} = \omega (D_m^{\pm})^{-1} \{ [\omega - (m \pm 1) \hat{\omega}_p] (\omega - m \hat{\omega}_p) + \\ + \gamma_i [\omega - m (\hat{\omega}_p + \hat{\omega}_T)] [\omega + (m \pm 1) \hat{\omega}_n] \}; \quad (4.8)$$

$$D_m^{\pm} = \omega^2 [\omega + (m \pm 1) \hat{\omega}_n] - \\ - k_{\perp}^2 c_s^2 [\omega + (m \pm 1) \hat{\omega}_n - (m \pm 1)(2\hat{\omega}_n + \hat{\omega}_T)/(\gamma_i + 1)], \quad (4.9)$$

где $\gamma_i = 5/3$ — показатель ионной адиабаты; $c_s^2 = (\gamma_i + 1) p/2\rho$; $\beta = p/B_s^2$; $\hat{\omega}_n = T_0 (\ln n_0)' / e_i a B_s$; n_0 — плотность плазмы.

С учетом выражений для \hat{I}_2 и \hat{W} уравнение (4.1) может быть приведено к виду

$$-\frac{\mu m - n}{RB_s} \left[\frac{1}{a} \frac{d}{da} \left(a \frac{d\tau_m^1}{da} \right) - \frac{m^2}{a^2} \tau_m^1 \right] + \\ + \frac{m\tau_m^1}{aRB_s} (3\mu' + \mu'' a) + imW_m X_m - \frac{i\mu^2 \beta a}{R} S_m \Delta_{\perp} X_m; \quad (4.10)$$

$$S_m = -\frac{\gamma_i + 1}{2} \frac{\omega (\omega - m \hat{\omega}_p)}{k_{\perp}^2 c_s^2} + \frac{q^2}{2} (K_m^+ + K_m^-). \quad (4.11)$$

Здесь W_m введено соотношением $\hat{W} = i W_m X_m$. Уравнения (4.10), (4.4) являются исходными для последующего анализа.

§ 4.3. Внутренняя винтовая неустойчивость с $m = 1$

В [30, 31] в приближении цилиндрического плазменного шнура было показано, что дрейфовые эффекты (эффекты конечного ларморовского радиуса) могут приводить к стабилизации внутренней винтовой неустойчивости $m = 1$. Однако, как уже отмечалось в § 4.1, эти результаты, вообще говоря, не могут быть использованы для анализа устойчивости токамака. Ниже рассмотрим роль дрей-

фовых эффектов в возмущениях с $m = 1$ с помощью уравнений § 4.2, учитывающих тороидальность магнитного поля токамака.

В пределе бесконечно большой проводимости ($\sigma_* \rightarrow \infty$) система уравнений (4.10) — (4.4) сводится к следующему:

$$\frac{1}{a} \frac{d}{da} \left[a^3 (\mu - n)^2 \frac{dX_1}{da} \right] - aRW_1 X_1 + \beta \mu^2 a^2 S_1 \frac{d^2 X_1}{da^2} = 0. \quad (4.12)$$

Сшивая внутреннее (в окрестности сингулярной поверхности $\mu = n$) и внешнее (вдали от нее) решения уравнения (4.12) (ср. с гл. 3), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$-(\omega - \hat{\omega}_p) \omega + k_1^2 c_s^2 (K_1^+ + K_1^-) / (\gamma_l + 1) = 3\gamma_{\text{МГД}}^2, \quad (4.13)$$

где $\gamma_{\text{МГД}}$ — инкремент внутренней винтовой неустойчивости с $m = 1$ в приближении идеальной магнитогидродинамики (явное выражение для $\gamma_{\text{МГД}}$ см. в [6]).

В приближении $|\omega| \ll k_1 c_s$ дисперсионное уравнение (4.13) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega \left[3\omega^2 - \frac{1}{2} (3\hat{\omega}_n + 13\hat{\omega}_T) \omega - \frac{3}{2} \hat{\omega}_n^2 - \frac{13}{16} \hat{\omega}_n \hat{\omega}_T + \frac{87}{32} \hat{\omega}_T^2 \right] + \\ + 3\gamma_{\text{МГД}}^2 \left(\omega + \frac{\hat{\omega}_n}{2} - \frac{3}{4} \hat{\omega}_T \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из (4.14). При малом градиенте температуры, когда $|\eta| \ll 1$ ($\eta \equiv \hat{\omega}_T / \hat{\omega}_n$), уравнение (4.14) сводится к следующему:

$$(\omega + \hat{\omega}_n/2) [\omega (\omega - \hat{\omega}_n) + \gamma_{\text{МГД}}^2] = 0. \quad (4.15)$$

Отсюда в соответствии с [31, 32] получаем, что неустойчивость имеет место, если

$$\hat{\omega}_n^2 \leq 4\gamma_{\text{МГД}}^2. \quad (4.16)$$

Рассмотрим также предельный случай $\gamma_{\text{МГД}} \ll (\hat{\omega}_n, \hat{\omega}_T)$, когда, согласно модели цилиндрического шнура, возмущения должны быть заведомо устойчивы при любых η (кроме $\eta = -1$). При этом (4.14) принимает вид

$$\Omega^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{13}{3} \eta \right) \Omega + \frac{87}{96} \eta^2 - \frac{13}{48} \eta - \frac{1}{2} = 0, \quad (4.17)$$

где $\Omega = \omega / \hat{\omega}_n$. Решая это уравнение, убеждаемся, что имеет место неустойчивость, если

$$-1,97 < \eta < -1,07. \quad (4.18)$$

Возмущения типа (4.17) можно назвать инерционными с $m = 1$.

Таким образом, в отличие от модели цилиндрического плазменного шнура, предсказывающей возможность стабилизации возмущений с $m = 1$ при любых градиентах температуры, данное рассмот-

рение, учитывающее тороидальность магнитного поля, обнаруживает дестабилизацию, если градиент температуры направлен против градиента плотности и лежит в интервале, определенном неравенством (4.18).

§ 4.4. Возмущения типа Сайдема

Рассмотрим роль дрейфовых эффектов в возмущениях типа Сайдема. Используя систему уравнений (4.10), (4.14) и учитывая, что возмущения соответствующего типа локализованы вблизи резонансной поверхности $\mu(a_0) m = n$ и что проводимость бесконечно велика, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dX_m}{dx} \right) - \frac{m^2}{a^2} x^2 X_m - \frac{2\rho' \mu^2}{a\mu'^2 B_s^2} (1 - q^2) X_m + \\ + \frac{\mu^2 \beta}{\mu'^2 m^2} S_m \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2}{a^2} \right) X_m = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь $x = a - a_0$. Аналогично гл. 2 книги [1] с помощью (4.19) получаем дисперсионное уравнение

$$S_m = \delta q^2, \quad (4.20)$$

где

$$\delta = \frac{64}{\beta} (\mu' a)^2 \exp \left[- \frac{2(\pi + 2)}{(\alpha - 1/4)^{1/2}} \right]; \quad \alpha = \frac{2\rho' \mu^2}{a\mu'^2 B_s^2} (q^2 - 1). \quad (4.21)$$

Вблизи сайдемовской границы устойчивости, когда

$$\alpha - 1/4 \ll 1, \quad (4.22)$$

уравнение (4.20) описывает возмущения двух типов: с $|\omega| \ll k_1 c_s$ и $|\omega| \simeq k_1 c_s$. При $|\omega| \ll k_1 c_s$ из (4.20) следует

$$\begin{aligned} \omega \left\{ (\omega - \omega_p^*) \left(\omega + \frac{\omega_n^*}{4} - \frac{3}{8} \omega_T^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} q^2 \left[(\omega - \omega_p^*)^2 + \frac{5}{3} (\omega - \omega_p^* - \omega_T^*) (\omega + \omega_n^*) \right] \right\} + \\ + \frac{3}{4} \delta q^2 k_1^2 c_s^2 \left(\omega + \frac{\omega_n^*}{4} - \frac{3}{8} \omega_T^* \right) = 0; \end{aligned} \quad (4.23)$$

$\omega_A^* = m \hat{\omega}_A$ ($A = p, n, T$) — обычные дрейфовые частоты. Если градиент температуры мал, $\eta \rightarrow 0$, то (4.23) сводится к виду

$$\omega (\omega - \omega_n^*) + (3/4) \delta q^2 k_1^2 c_s^2 / (1 + 2q^2) = 0, \quad (4.24)$$

качественно совпадающему с аналогичным результатом для цилиндрического шнура. В этом случае имеет место стабилизация сайде-

мовской неустойчивости, обусловленная эффектом конечного лармовского радиуса ионов. Критерий стабилизации имеет вид

$$\omega_n^{*2} \geq [8/(1 + 2q^2)] T_0 \delta / M_i R^2, \quad (4.25)$$

что отличается от аналогичного критерия стабилизации для цилиндрического шнура наличием членов с q^2 в знаменателе (4.25) и в показателе экспоненты (4.21); M_i — масса иона. При $\eta \neq 0$ и при упрощающем предположении очень малого δ , $\delta q^2 k_1^2 c_s^2 \ll \omega^2$, уравнение (4.23) означает

$$\Omega^2 - \left[\frac{3}{4} + \frac{11 + 32q^2}{8(1 + 2q^2)} \eta \right] \Omega + \frac{3}{8} \eta^2 + \frac{1 - 8q^2}{8(1 + 2q^2)} \eta - \frac{1}{4} = 0 \quad (4.26)$$

(определение Ω см. в § 4.3). Возмущения, описываемые этим уравнением, неустойчивы, если

$$-\frac{(1 + 10,3q^2)(1 + 2q^2)}{0,5 + 6,4q^2 + 12,8q^4} < \eta < -\frac{(1 + 2,5q^2)(1 + 2q^2)}{0,5 + 6,4q^2 + 12,8q^4}. \quad (4.27)$$

2. Возмущения с $|\omega| \simeq k_1 c_s$. В этом случае дисперсионное уравнение (4.20) означает просто

$$S_m = 0. \quad (4.28)$$

Это уравнение анализировалось в [5] (см. также [11]), где было показано, что оно описывает нарастающие во времени возмущения, если параметр η лежит в некотором интервале положительных значений.

§ 4.5. Резистивная внутренняя винтовая неустойчивость с $m = 1$

Резистивная неустойчивость с $m = 1$ представляет собой внутреннее винтовое возмущение с $m = 1$, модифицированное эффектами конечной проводимости. Исходные уравнения для резистивных внутренних винтовых возмущений с $m = 1$ можно получить, положив в (4.10), (4.4) $m = 1$ и удерживая (в отличие от § 4.3) члены с конечной проводимостью. При этом уравнения (4.4), (4.11) вблизи сингулярной поверхности сводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X_1}{dx^2} &= \frac{i\mu' x}{\mu^2 a B_s \beta S_1} \frac{d^2 \tau_1^1}{dx^2}; \\ x X_1 &= -i \frac{\tau_1^1}{a\mu' B_s} - \frac{1}{\omega\omega_* a\mu' B_s} \frac{d^2 \tau_1^1}{dx^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Здесь, как и в § 4.4, $x = a - a_0$. Заменяя искомую функцию $\psi = x d\tau_1^1/dx - \tau_1^1$ и независимую переменную $z = x^2/\varepsilon^2$, где

$$\varepsilon = \left[\frac{iS_1}{\omega\omega_*} \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^2 \beta \right]^{1/4}, \quad (4.30)$$

сводим систему уравнений (4.29) к стандартному виду [30]

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} - \frac{1}{2z} \frac{d\psi}{dz} - \frac{\Lambda^{3/2}}{4} \frac{\psi}{z} - \frac{\psi}{4} = -\frac{\psi_\infty}{4}. \quad (4.31)$$

Здесь

$$\psi_\infty = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi, \quad \Lambda^{3/2} = -\frac{i\mu}{\mu'} (i\omega\sigma_* S_1 \beta)^{1/2}.$$

Согласно [30], уравнению малых колебаний (4.31) соответствует дисперсионное уравнение

$$\Gamma\left(\frac{\Lambda^{3/2}+5}{4}\right) / \Lambda^{3/2} \Gamma\left(\frac{\Lambda^{3/2}-1}{4}\right) = Q, \quad (4.32)$$

где Γ — гамма-функция, $Q = \sqrt{3} \gamma_{\text{МГД}} / 8 c_A |\mu'| \varepsilon$. Это дисперсионное уравнение должно быть дополнено правилом отбора корней $\text{Re } \varepsilon^2 > 0$ (ср. с [32]).

Таким образом, роль тороидальности в возмущениях рассматриваемого типа сводится к модификации выражения для Λ : от тороидальности зависит S_1 [см. уравнение (4.11)].

Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи. Большим значениям правой части уравнения (4.32) $Q \gg 1$ соответствуют рассмотренные в § 4.3 внутренние винтовые возмущения с $m = 1$. В противоположном же случае, $Q \ll 1$, уравнение (4.31) означает (см. также [33])

$$\Lambda^{3/2} = 1 + (8/\sqrt{\pi}) Q. \quad (4.33)$$

Учитывая явный вид Λ , получаем

$$(\omega + \hat{\omega}_n + 1,71\hat{\omega}_T) S_1 = \frac{i}{\beta\tau_s} \left(1 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} Q\right)^2 \left(\frac{\mu' a}{\mu}\right)^2, \quad (4.34)$$

где $\tau_s = \sigma_0 a^2$ — время диффузии поля вследствие конечной проводимости. Исследуем уравнение (4.34), полагая, что $|\omega| \ll k_1 c_s$. В этом случае оно принимает вид

$$\omega(\omega + \hat{\omega}_n + 1,71\hat{\omega}_T) \left[\omega^2 - \frac{1}{2} \left(\hat{\omega}_n + \frac{13}{3} \hat{\omega}_T \right) \omega + \frac{87}{96} \hat{\omega}_T^2 - \frac{13}{48} \hat{\omega}_T \hat{\omega}_n - \frac{\hat{\omega}_n^2}{2} \right] + i\gamma_R^3 \left(\omega + \frac{\hat{\omega}_n}{2} - \frac{3}{4} \hat{\omega}_T \right) = 0; \quad (4.35)$$

$$\gamma_R^3 \equiv \frac{k_1^2 c_s^2}{4\beta\tau_s} \left(\frac{\mu' a}{\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} Q\right)^2. \quad (4.36)$$

В пределе $\gamma_R \gg (\hat{\omega}_n, \hat{\omega}_T)$ уравнение (4.35) описывает обычную резистивную винтовую неустойчивость с $m = 1$, исследованную в [33], с инкрементом $\text{Im } \omega = \gamma_R$, а также возмущения с частотой

$$\omega = \frac{3}{4} \hat{\omega}_T - \frac{\hat{\omega}_n}{2} +$$

$$+ i \frac{5\hat{\omega}_T (\hat{\omega}_n - 3\hat{\omega}_T/2) (2\hat{\omega}_n + \hat{\omega}_T) (0,5\hat{\omega}_n + 2,46\hat{\omega}_T)}{64\gamma_R^3}, \quad (4.37)$$

неустойчивые при

$$-2 < \eta < -0,2, \quad 0 < \eta < 2/3. \quad (4.38)$$

Если же $\gamma_R \ll (\hat{\omega}_n, \hat{\omega}_T)$, то уравнение (4.35) описывает четыре ветви колебаний, одна из которых имеет частоту $|\omega| \ll (\hat{\omega}_n, \hat{\omega}_T)$ — малую по сравнению с дрейфовыми, а три других — частоту порядка дрейфовой. Анализ этих ветвей см. в [29].

§ 4.6. Гравитационно-резистивная и разрывная неустойчивости

Как и в задаче о резистивных винтовых возмущениях (см. § 4.5), в случае гравитационно-резистивных и разрывных возмущений имеется внутренняя область, т. е. область вблизи сингулярной поверхности, где поведение возмущений определяется диссипацией, и внешняя «идеальная» область. Отличие же гравитационно-резистивных и разрывных возмущений от резистивных винтовых с $m = 1$ состоит в том, что в возмущениях этих типов $m > 1$. Для простоты ниже будем считать $m \gg 1$.

Вблизи поверхности $\mu(a_0)$ $m = n$ система уравнений (4.10), (4.4) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_m}{dy^2} - \frac{y^2}{4} u_m + G u_m &= (y+r) \tau_m^1; \\ \frac{d^2 \tau_m^1}{dy^2} - \frac{m^2}{a^2 \lambda^2} \tau_m^1 &= \frac{\Omega}{\lambda} (4\tau_m^1 + y u_m). \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} y &= \lambda (a - a_0); \lambda = (-4 i \omega \sigma_* \mu'^2 m^2 / \mu^2 \beta S_m)^{1/4}; \\ u_m &= -4 i m \mu' a B_S \lambda^{-1} X_m; r = i B_S \lambda (3 + a \mu'' / \mu') / \omega \sigma_*; \\ G &= \left(\frac{m R W_m}{\mu^2 a \beta S_m} - \frac{m^2}{a^2} \right) \lambda^{-2}; \quad \Omega = -i \omega \sigma_* / 4 \lambda. \end{aligned}$$

Из (4.39) аналогично [34] получается дисперсионное уравнение

$$\Delta' = 2^{7/2} \Omega \Gamma \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} G \right) / \Gamma \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} G \right) \quad (4.40)$$

и соответствующее правило отбора корней [32, 35]

$$|\arg \lambda| < \pi/4 \quad \text{или} \quad |\arg \lambda| > 3\pi/4. \quad (4.41)$$

Как и в [34, 35], величина Δ' означает скачок логарифмической производной функции τ_m^1 и определяется из решения внешней задачи.

1. Гравитационно-резистивная неустойчивость. Полагая, что главным стабилизирующим членом в критерии Мерсье является член с широм, т. е. [ср. с. (4.22)]

$$0 < \alpha \ll 1/4, \quad (4.42)$$

можно в согласии с [34] принять в (4.40) $\Delta' \approx 0$. При этом (4.40) сводится к виду

$$G = 1/2. \quad (4.43)$$

Пренебрегая в G вторым слагаемым, в развернутом виде имеем

$$\begin{aligned} & \omega(\omega + \omega_n^* + 1,71\omega_T^*) \left\{ \omega^2(1 + 2q^2) - \omega \left[\frac{3}{4}(1 + 2q^2)\omega_n^* + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{11}{8} + 4q^2 \right) \omega_T^* \right] - \frac{1}{4}(1 + 2q^2)\omega_n^{*2} + \frac{1}{8}\omega_n^*\omega_T^*(1 - 8q^2) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8}(1 + 2q^2)\omega_T^{*2} \right\} + i\gamma_g^3 \left(\omega + \frac{\omega_n^*}{4} - \frac{3}{8}\omega_T^* \right) = 0. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma_g^3 = \frac{2W_m R^2 \mu^2 k_1^2 c_s^2}{\tau_s \beta \mu'^2 (\gamma_i + 1)}, \quad (4.45)$$

а выражение для W_m имеет вид (см. [4])

$$W_m = \frac{2mp' \mu^2}{RB_s^2} \left[1 - q^2 \left(1 + \frac{q'}{q} R\xi' \right) \right]; \quad (4.46)$$

$$\xi' = -\frac{8\pi^2 R}{a\chi'^2} \int_0^a p' a^2 da, \quad (4.47)$$

где ξ' — производная равновесного смещения, $B_0 = \chi'/2\pi R$. При получении (4.44) предполагалось $|\omega| \ll k_1 c_s$. В пределе $\gamma_g \gg (\omega_n^*, \omega_T^*)$ из (4.44) следует выражение для инкремента обычной гравитационно-резистивной неустойчивости $\text{Im } \omega = \gamma_g$. Кроме того, в этом же пределе существует еще одна ветвь колебаний

$$\omega = \frac{3}{8}\omega_T^* - \frac{\omega_n^*}{4} + i \frac{15\omega_T^*(\omega_n^* - 3\omega_T^*/2)(2\omega_n^* + \omega_T^*)(0,75\omega_n^* + 2,09\omega_T^*)}{128\gamma_g^3}. \quad (4.48)$$

Эта ветвь колебаний неустойчива, если

$$-2 < \eta < -0,36, \quad 0 < \eta < 2/3. \quad (4.49)$$

В случае же $\gamma_g \ll (\omega_n^*, \omega_T^*)$ уравнение (4.44) аналогично (4.35) также описывает четыре ветви колебаний. Анализ неустойчивостей, связанных с этими ветвями колебаний, см. в [29].

2. Разрывная неустойчивость. Следуя стандартным предположениям теории разрывной неустойчивости [34], пренебрегаем в (4.40) членами с G и приходим к дисперсионному уравнению

$$\Delta' = 2^{7/2} \Omega \Gamma \left(\frac{3}{4} \right) / \Gamma \left(\frac{1}{4} \right). \quad (4.50)$$

В пределе $|\omega| \ll k_1 c_s$ это уравнение означает

$$\begin{aligned} \omega (\omega + \omega_n^* + 1,71\omega_T^*)^3 \left\{ (\omega - \omega_p^*) \left(\omega + \frac{\omega_n^*}{4} - \frac{3}{8} \omega_T^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} q^2 \left[(\omega - \omega_p^*)^2 + \frac{5}{3} (\omega - \omega_p^* - \omega_T^*) (\omega + \omega_n^*) \right] \right\} = \\ = i\gamma_T^5 \left(\omega + \frac{\omega_n^*}{4} - \frac{3}{8} \omega_T^* \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Здесь γ_T — инкремент обычной разрывной (tearing) неустойчивости, определенный соотношением

$$\gamma_T^5 = \frac{2k_1^2 c_s^2}{(\gamma_i + 1)\beta} \left(\frac{m\mu' a}{\mu} \right)^2 \left[\frac{\Delta' a}{2} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^4 \tau_s^{-3}. \quad (4.52)$$

Заметим, что в задаче о разрывной неустойчивости, в отличие от случая гравитационно-резистивной неустойчивости, существенно правило отбора корней (4.41). При этом выражение для параметра λ , входящего в (4.41), в задаче о разрывной неустойчивости принимает вид

$$\lambda = -i2^{3/2} \frac{(\omega + \omega_n^* + 1,71\omega_T^*) \tau_s}{\Delta' a^2} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}. \quad (4.53)$$

Ограничимся анализом случая $(\omega_n^*, \omega_T^*) \gg \gamma_T$. При этом с учетом (4.41) аналогично [35] находим

$$\begin{aligned} \omega = -\omega_n^* - 1,71\omega_T^* - \\ - i \left\{ \frac{\gamma_T^5 (0,75\omega_n^* + 2,09\omega_T^*)}{(\omega_n^* + 1,71\omega_T^*) [1,5 + 6,21\eta + 5,69\eta^2 + q^2 (3 + 12,4\eta + 13,3\eta^2)] \omega_n^{*2}} \right\}^{1/3}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Отсюда следует, что неустойчивость возможна только при отрицательных η .

§ 4.7. Кинетические дрейфовые эффекты в МГД-возмущениях токамака

Выше для нахождения связи между возмущенным давлением и смещением плазмы использовались уравнения двухжидкостной гидродинамики. Теперь, следуя работе [7], вычислим $\delta\tilde{p}$ с помощью кинетического уравнения для бесстолкновительной плазмы и рассмотрим кинетические дрейфовые эффекты.

Предварительно сделаем несколько упрощающих предположений. Прежде всего, ограничимся рассмотрением идеальных МГД-возмущений. Второе упрощающее предположение касается масштаба азимутальных волновых чисел m и n : мы будем считать $(m, n) \gg 1$, т. е. рассмотрим высшие азимутальные гармоники.

При этих предположениях система уравнений (4.2), (4.3) сводится к уравнению вида, аналогичного (4.19):

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dX_m}{dx} \right) + \alpha X_m + \frac{\omega (\omega - \omega_{pi}^*) R^2}{\mu'^2 m^2 c_A^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} - \frac{iR}{m \mu'^2 a B_s^2} (\tilde{\delta p}'_{m+1} - \tilde{\delta p}'_{m-1}) = 0. \quad (4.55)$$

Теперь переходим к описанию того, как вычисляются в кинетике величины $\tilde{\delta p}_{m\pm 1}$. Как известно, при кинетическом описании плазмы необходимо учитывать различный характер движения пролетных и запертых частиц. Соответственно возмущенная функция распределения каждого сорта частиц представляет собой сумму вкладов пролетных и запертых частиц. Запертые частицы играют определяющую роль в теории некоторых типов потенциальных (электростатических) неустойчивостей, в связи с этим называемых неустойчивостями на запертых частицах. Однако в пренебрежении столкновениями вклад запертых частиц в выражение для $\tilde{\delta p}$ представляет собой малую поправку к вкладу, обусловленному пролетными частицами. Соответствующий малый параметр — это хорошо известное отношение $\varepsilon^{1/2} \equiv (a/R)^{1/2}$, т. е. относительное число запертых частиц. Поэтому в пренебрежении членами порядка $\varepsilon^{1/2}$ при вычислении $\tilde{\delta p}$ можно ограничиться только вкладом пролетных частиц.

Исследование отклика пролетных частиц на возмущения электромагнитного поля в условиях круглого токамака первоначально производилось в работе автора и А. Г. Морозова [36]. При упрощающем предположении, что все пролетные частицы являются «сильно пролетными», т. е. движутся вдоль силовых линий со скоростью $v_{||} = \text{const}$, их возмущенная функция распределения, согласно [36], имеет вид

$$f_{m\pm 1} = \pm \frac{ia}{m} \frac{F}{R} \left(1 - \frac{\hat{\omega}_*}{\omega} \right) \frac{Mv^2}{4T} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{dX_m}{dx}. \quad (4.56)$$

Здесь $\Omega = \kappa v (2\varepsilon)^{1/2}/qR$; κ — «параметр пролетности» частиц, изменяющийся от 1 до $(2\varepsilon)^{-1/2}$; F — равновесная функция распределения; T — температура плазмы; M — масса частиц; $\hat{\omega}_* = \omega_n^* [1 + \eta (Mv^2/2T - 3/2)]$.

Введем также величину $\omega_b = v_{Ti} \sqrt{\varepsilon}/qR$, где $v_{Ti} = (2T/M_i)^{1/2}$ (ср. с § 1.6). Полагаем частоту ω достаточно малой, $\omega \ll \omega_b$, что соответствует области параметров плазмы, лежащих вблизи границы МГД-неустойчивости. В этом приближении с помощью (4.56) получается выражение для возмущенного давления

$$\tilde{\delta p}_{m\pm 1} = \mp i \frac{a}{mR} \frac{dX_m}{dx} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right)^2 n_0 T_i \lambda, \quad (4.57)$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{\omega_{ni}^*}{\omega} (1 + \eta) + \frac{i\sqrt{\pi}}{18\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right)^5 \left[1 - \frac{\omega_{ni}^*}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta \right) \right]. \quad (4.58)$$

Используя (4.57), приводим уравнение (4.55) к виду

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dX_m}{dx} \right) + \alpha X_m + \frac{R^2 \omega^2}{\mu'^2 m^2 c_A^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} + \frac{3q^2}{8\sqrt{2\varepsilon}} \lambda \right) = 0. \quad (4.59)$$

Заметим, что в обычном гидромагнитном пределе, когда $\omega_*/\omega \rightarrow 0$, $\omega/\omega_b \rightarrow 0$, выражение в скобках в последнем члене левой части равенства (4.59) означает $1 + (3/8\sqrt{2\varepsilon}) q^2$, что находится в соответствии со сказанным в § 1.6.

Аналогично § 4.4 с помощью (4.59) получаем дисперсионное уравнение вблизи сайдемовской границы неустойчивости:

$$\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} + \frac{3q^2 \lambda}{8\sqrt{2\varepsilon}} \right) = -\gamma_{\text{МГД}}^2, \quad (4.60)$$

где $\gamma_{\text{МГД}}^2$ — квадрат инкремента сайдемовской (т. е. обычной МГД) неустойчивости, определенный соотношением

$$\gamma_{\text{МГД}}^2 = \frac{c_A^2 \mu'^2 a^2}{R^2} \exp \left[-\frac{2(\pi + 2)}{(\alpha - 1/4)^{1/2}} \right]. \quad (4.61)$$

Ограничимся анализом простейшего случая $\gamma_{\text{МГД}} \ll \omega^*$, когда МГД-неустойчивость заведомо подавлена. При этом ветви колебаний, описываемые уравнением (4.60), имеют частоты:

$$\omega_1 = \omega_{pi}^* - i \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{5\sqrt{\pi}}{36\sqrt{2}(1 + 8\sqrt{2\varepsilon}/3q^2)} \frac{\omega_{pi}^{*6}}{\omega_b^5}; \quad (4.62)$$

$$\omega_2 = \omega_2^0 - i \frac{1 - (3/2)\eta}{1 + \eta} \frac{\sqrt{\pi}}{18\sqrt{2}(1 + 8\sqrt{2\varepsilon}/3q^2)} \frac{\omega_2^{*0}}{\omega_b^5}, \quad (4.63)$$

где

$$\omega_2^0 = \frac{\gamma_{\text{МГД}}^2}{\omega_{pi}^* (1 + 3q^2/8\sqrt{2\varepsilon})}, \quad (4.64)$$

Первая ветвь колебаний соответствует кинетической неустойчивости при

$$-1 < \eta < 0, \quad (4.65)$$

а вторая — при

$$\eta > 2/3 \text{ и } \eta < -1. \quad (4.66)$$

Отношение инкрементов нарастания к вещественной части частоты порядка $(\omega^*/\omega_b)^5$.

Эти неустойчивости представляют собой кинетические аналоги двухжидкостных неустойчивостей, рассмотренных в § 4.4.

§ 4.8. Обсуждение результатов

Первоначальный анализ роли негидромагнитной части возмущенного давления в МГД-возмущениях (альфвеновских волнах) производился в работе автора [5]. Затем этот анализ был продолжен в большом цикле работ, цитированных в [1], при исследовании альфвеновских неустойчивостей, вызываемых быстрыми ионами и запертыми электронами. Соответствующие работы отличаются от изложенного в предыдущих параграфах тем, что в них рассматривались гидромагнитные возмущения с частотами, существенно большими по сравнению с частотами обращения тепловых ионов вдоль тора, $\omega \gg \omega_b$, тогда как в условиях МГД-неустойчивостей $\omega \lesssim \omega_b$.

Из § 4.3—4.7 следует, что при учете баллонности давления обнаруживаются новые разновидности непотенциальных дрейфовых неустойчивостей, развивающихся в плазме с отличным от нуля градиентом температуры. Эти неустойчивости, как и ранее известные, должны учитываться при анализе коллективных процессов в токамаках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайловский А. Б. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М., Атомиздат, 1978.
2. Михайловский А. Б. К теории локальной гидромагнитной устойчивости тороидальных плазменных конфигураций. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 537.
3. Mikhajlovskij A. B. Tokamak stability at high plasma pressures. — «Nucl. Fusion», 1974, v. 14, p. 483.
4. Mikhajlovskij A. B. The stability criterion of the g -mode in a toroidal plasma. — «Nucl. Fusion», 1975, v. 15, p. 95.
5. Mikhailovsky A. V. «Drift» instabilities distorting the magnetic surfaces of tokamak-type toroidal systems. — «Nucl. Fusion», 1973, v. 13, p. 259.
6. Крымский А. М., Михайловский А. Б. Устойчивость внутренней витовой моды в токамаке с плазмой большого давления. — «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 888.
7. Михайловский А. Б., Сурамлишвили Г. И. Кинетический метод исследования дрейфовых эффектов в МГД-модах токамака. Препринт ИАЭ-3008. М., 1978.
8. Кадомцев Б. Б. Об устойчивости плазмы низкого давления. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 37, с. 1648.
9. Mercier C. Critère de stabilité d'un système toroidal hydromagnétique en pressure scalaire. — «Nucl. Fusion Suppl.», 1962, vol. 2, p. 81.
10. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. О желобковой неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, с. 811.
11. Laval G., Maschke E. K., Pellat R. Ballooning modes in axisymmetric toroidal configurations. — «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 1229.
12. Михайловский А. Б. К теории баллонных мод в токамаке с большим β . — «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 1226.

13. Ware A. A., Хаа F. A. Stability of a circular toroidal plasma under average magnetic well conditions. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 956.
14. Михайловский А. Б. Общие вопросы теории винтовых мод в токамаках и некоторые приложения. Препринт ИАЭ-3007. М., 1978.
15. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы. В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 3.
16. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. Критерий желобковой неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 1157.
17. Stabilization by shear and negative V'' . — In.: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. V. I, IAEA, Vienna, 1966, p. 103. Auth.: H. P. Furth, J. Killeen, M. N. Rosenbluth, B. Coppi.
18. Kulsrud R. M. Stability of negative V'' systems. Ibid., p. 127.
19. Oak Ridge Plasma Theory Section Staff. Tokamak plasma magnetics. — «Nucl. Fusion Suppl.», 1977, vol. 2, p. 385.
20. Stability limitations on high-beta tokamaks. — «Phys. Rev. Lett.», 1977, v. 38, p. 826. Auth.: A. M. M. Todd, M. S. Chance, J. M. Greene, R. C. Grimm, J. L. Johnson, J. Manickam.
21. Bateman G., Peng Y.-K. M. Magnetohydrodynamic stability of flux-conserving tokamak equilibria. — «Phys. Rev. Lett.», 1977, v. 38, p. 829.
22. Kulsrud R. M. The interchange instability in the stellarator. — «Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 904.
23. Englade R. Numerical evaluation of the Mercier criterion for flux-conserving equilibria of a circular tokamak. — «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1977, v. 22, p. 1153.
24. Шафранов В. Д. К вопросу о гидромагнитной устойчивости плазменного шнура с током в сильном магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1970, т. 40, с. 241.
25. Rosenbluth M. N., Dagazian R. Y., Rutherford P. H. Nonlinear properties of the internal $m = 1$ kink instability in the cylindrical tokamak. — «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 1864.
26. Internal kink modes in toroidal plasmas with circular cross section. — «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 35, p. 1638. Auth.: M. N. Bussac, R. Pellat, D. Edery, J. L. Soule.
27. Крымский А. М., Михайловский А. Б. Подавление внутренней винтовой неустойчивости моды $m = 1$ в токамаке при большом β_j . Препринт ИАЭ-3009. М., 1978.
28. Wesson J. A. Hydromagnetic stability of tokamaks. — «Nucl. Fusion», 1978, v. 18, p. 87.
29. Крымский А. М., Михайловский А. Б. Дрейфовые эффекты в теории МГД-мод токамака. — «Физика плазмы», 1979, т. 5, с. 136.
30. Waddell B. V., Laval G., Rosenbluth M. N. Reduction of the growth rate of the $m = 1$ resistive magnetohydrodynamic mode by finite gyroradius effects. ORNL/TM-5968, Oak Ridge National Laboratory. Oak Ridge, Tennessee, July 1977.
31. Wong H. V. Variational solution of internal resistive kink instabilities. FRCR-113, Fusion Research Center University of Texas at Austin. Austin, Texas, June 1976.
32. Coppi B. Current-driven instabilities in configurations with sheared magnetic fields. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2273.
33. Резистивные внутренние винтовые моды. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 961. Авт.: Б. Коппи, Р. Гальвао, Р. Пелла и др.
34. Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N. Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch. — «Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 459.
35. Hazeltine R. D., Dobrott D., Wang T. S. Kinetic theory of tearing instability. — «Phys. Fluids», 1975, v. 18, p. 1778.
36. Михайловский А. Б., Морозов А. Г. Коротковолновые непотенциальные неустойчивости в токамаке при большом давлении плазмы. Препринт ИАЭ-2686. М., 1976.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ

В. И. Петвиашвили

§ 1. Введение

В последнее время вновь усилился интерес к выяснению роли коллективных эффектов в удержании и нагреве плазмы в лабораторных установках, что связано как с улучшением возможностей наблюдения, так и с развитием теории.

Особенно важны эксперименты, в которых спектр излучения из плазмы в диапазоне ленгмюровских и циклотронных частот измеряется за возможно короткое время. В них показывается, что в ряде случаев излучение из плазмы имеет линейчатый спектр ([1] и др.). Это указывает на тенденцию к синхронизации волн в плазме, что теоретически можно объяснить сильно нелинейными эффектами, часть которых обсуждается в данной работе. Спектральная картина более низкочастотных колебаний в плазме дает меньше информации. В этой области частот наиболее интересны детальные картины зависимости колеблющихся величин в плазме от времени. Такие зависимости хорошо получаются при наблюдениях магнитосферы Земли, которую пока нужно считать лучшим объектом для изучения волн и коллективных эффектов.

Из этих зависимостей выделяются повторяющиеся части, которые хорошо поддаются классификации. Такую повторяемость также можно объяснить сильно нелинейными эффектами.

В данной работе приводится теория некоторых сильно нелинейных эффектов, влияющих на удержание и нагрев плазмы в установках для магнитного удержания плазмы. Наличием этих эффектов можно объяснить некоторые явления и в магнитосферной плазме.

В работе исследуется эффект образования нерасплывающихся двумерных пакетов циклотронных волн, амплитуда которых возрастает до довольно больших значений, что ведет к интенсивному излучению, аномальному сопротивлению плазмы и появлению частиц с большой поперечной энергией. Рассматриваются нелинейные волны, частоты которых много меньше ионных ленгмюровской и циклотронных частот. Такие волны легко раскачиваются в токамаках и других лабораторных установках. Исследуются некоторые особенности взаимодействия скопления большого числа солитонов

с пучком частиц. Это исследование связано с экспериментами, в которых за короткий промежуток времени измерялась функция распределения пучка электронов, прошедшего через плазму. Было обнаружено, что в результате взаимодействия с плазмой пучок в пространстве скоростей разделяется на несколько частей ([2] и др.).

§ 2. ВЧ-диамагнетизм и циклотронные солитоны

В режиме, когда в плазме возникают убегающие электроны, на токамаках было зарегистрировано мощное излучение электромагнитных (ЭМ) волн на частотах, равных гармоникам электронной циклотронной частоты, причем мощность излучения росла с номером гармоники. Одновременно в плазме возникали частицы с очень большой поперечной энергией [3, 4].

Интенсивное излучение ЭМ волн в диапазоне электромагнитных циклотронных частот наблюдалось и из магнитосферы Земли, как из авроральной области [5], так и с дневной стороны [6].

Эти явления можно объяснить раскачкой в плазме потенциальных волн, которые, как будет показано в данной главе, из-за нелинейной задержки дисперсионного расплывания (самофокусировки) могут дорасти до очень большой амплитуды, даже когда инкремент их раскачки мал, и которые часть энергии излучают в виде электромагнитных волн по линейному и нелинейному механизму трансформации.

Механизм самофокусировки одинаков для ионных и электронных волн и состоит в следующем. Ввиду того, что в плазме с малым отношением $\beta = 8\pi p/B^2$ частота циклотронных волн сильно зависит от магнитного поля и гораздо слабее от плотности, основной нелинейный эффект, влияющий на распространение циклотронных волн, — это ослабление магнитного поля в области локализации волнового пакета [7]. Такое ослабление происходит из-за возникновения диамагнитного тока, образующегося поперек магнитного поля вокруг пакета под влиянием ВЧ-давления пакета на плазму [8]. Эффект ВЧ-диамагнетизма тем больше, чем ближе частота волны к гармонике циклотронной частоты. В образовавшейся магнитной яме, как в длинном резонаторе-волноводе, накапливается энергия монохроматического пакета — солитона циклотронных волн. Солитон имеет осевую симметрию вокруг вектора постоянного магнитного поля. Порядок величины радиуса солитона равен циклотронному радиусу электронов или ионов. Расплывание солитонов вдоль магнитного поля незначительно из-за слабой зависимости частоты циклотронных волн от k_z -компоненты волнового вектора вдоль магнитного поля. Продольная неоднородность магнитного поля также может задержать расплывание солитона вдоль магнитного поля. Допустимая амплитуда осцилляции электрического поля в солитоне составляет заметную долю от постоянного магнитного поля и растет с номером той гармоники, к которой близ-

ка частота солитона. ВЧ-давление в солитоне может превысить давление частиц плазмы. При такой большой амплитуде частицы, взаимодействующие с солитоном, быстро набирают поперечную энергию за счет резонанса [9] между циклотронным вращением частиц и частотой электрического поля в солитоне. Генерация легко выходящих из плазмы длинноволновых ЭМ-колебаний возможна как из-за линейной трансформации, так и в результате индуцированного рассеяния колебаний солитона на частицах плазмы с некоторым уменьшением частоты или нелинейной трансформации с образованием удвоенной частоты солитона.

Раскачка электромагнитных циклотронных волн убегающими электронами происходит после раскачки колебаний на нижнегибридном резонансе [10].

Как было показано в работе [11], в результате квазилинейного воздействия нижнегибридных волн на функции распределения убегающих электронов образуется горб, что приводит к раскачке циклотронных волн. В магнитосфере Земли кроме этого механизма раскачка циклотронных волн возможна при наличии быстрых электронов с конусом потерь на функции распределения [12].

Величина диамагнитного уменьшения магнитного поля внутри ВЧ-пакета δB в отсутствие пространственной дисперсии в локальном приближении была найдена в [8, 13]. Однако формулы этих работ неприменимы для циклотронных волн, для которых ВЧ-диамагнетизм — существенно нелокальный эффект.

Будем исходить из формулы, приведенной в книге Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица «Электродинамика сплошных сред»:

$$\delta B = -4 \pi \delta F / \partial B, \quad (2.1)$$

где δF — часть плотности свободной энергии, связанная с наличием в среде осциллирующего электрического поля; B — внешнее постоянное магнитное поле. Обобщение (2.1) на нелокальный случай неоднозначно. Проведенное здесь обобщение подтверждается прямым вычислением, выполненным совместно с А. К. Некрасовым. Эти расчеты, в частности, показали, что когда длина волны сравнима с циклотронным радиусом частиц, формула (2.1) вообще непригодна. Здесь рассмотрим случай, когда длина волны больше циклотронного радиуса.

При потенциальности электрического поля и наличии пространственной дисперсии имеем

$$\delta F = -\frac{1}{16\pi} \int k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) |\varphi_{\omega, \mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k} d\omega, \quad (2.2)$$

где $\varphi_{\omega, \mathbf{k}}$ — фурье-образ электрического потенциала. В случае, когда частота ω близка к n -й гармонике электронной циклотронной частоты, входящая в (2.2) диэлектрическая проницаемость ε равна

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\omega, \mathbf{k}} &= 1 + \frac{g_e}{z_e} \left(1 - I_0 \exp(-z_e) - \frac{\omega I_n \exp(-z_e)}{\omega - n\omega_{Be}} \right); \\ |\omega - n\omega_{Be}| &\ll \omega_{Be}; \quad |(\omega - n\omega_{Be})/k_z| \gg v_{Te}; \\ z_e &\equiv k_{\perp}^2 T_e / m_e \omega_{Be}^2; \quad g_e \equiv (\omega_{pe} / \omega_{Be})^2, \end{aligned} \right\} (2.3)$$

где ω_{Be} , ω_{pe} — циклотронная и ленгмюровская частоты электронов; I_0 , I_n — модифицированные функции Бесселя от z_e . Когда частота близка к гармонике циклотронной частоты ионов, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\omega, \mathbf{k}} &= 1 + \frac{g_e}{z_e} + \frac{g_i}{z_i} \left(1 - I_0 \exp(-z_i) - \frac{\omega I_n \exp(-z_i)}{\omega - n\omega_{Bi}} \right); \\ |\omega - n\omega_{Bi}| &\ll \omega_{Bi}; \quad v_{Ti} \ll |(\omega - n\omega_{Bi})/k_z| \ll v_{Te}; \\ z_i &\equiv k_{\perp}^2 T_i / m_i \omega_{Bi}^2; \quad g_i \equiv (\omega_{pi} / \omega_{Bi})^2, \end{aligned} \right\} (2.4)$$

где ω_{pi} , ω_{Bi} — ленгмюровская и циклотронная частоты ионов. Из (2.1) и (2.2) в условиях (2.3) или (2.4) получаем общую для ионов и электронов формулу:

$$\left. \begin{aligned} \delta B &= - \frac{n^2 \omega_p^2}{4B} \int \frac{I_n \exp(-z)}{(\omega - n\omega_B)^2} \frac{k^2}{z} |\varphi_{\mathbf{k}, \omega}|^2 dk d\omega; \\ I_n \exp(-z) &\approx \frac{1}{2^n n!} z^n. \end{aligned} \right\} (2.5)$$

Как показывает прямой расчет, (2.5) имеет место только при $z < 1$. Перейдем в (2.5) к координатному представлению. Выделим из пакета волн основную частоту, т. е. представим электрический потенциал в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\psi(\mathbf{r}, t) \exp(-in\omega_{B_0} t) + \text{к. с.}] \quad (2.6)$$

Здесь зависимость ψ от времени считается слабой, ω_{B_0} — невозмущенная циклотронная частота. Проводим соответствующую замену операторов по формулам

$$k_{\perp}^2 \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\omega - n\omega_B}{n\omega_{B_0}} \rightarrow \frac{i}{n\omega_{B_0}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\delta B}{B_0}. \quad (2.7)$$

Тогда вместо (2.5) получим:

$$h \equiv \frac{\delta B}{B_0} = - \frac{k_D^2 B_0^{-2}}{2^{n+3} n!} |\chi|^2; \quad (2.8)$$

$$k_D^2 \equiv \omega_p^2 m / T; \quad r_B^2 \equiv T / m \omega_{B_0}^2.$$

Функция χ связана с ψ резонансным образом, что видно из уравнения, получаемого из условия согласованности (2.6), (2.7) и (2.5):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{i}{n\omega_{B_0}} \frac{\partial}{\partial t} - h \right) \chi &= \hat{P}_n \psi; \\ \hat{P}_n &\equiv r_B^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Таким образом, уравнение магнитной ямы (2.8), (2.9) отличается от уравнения ямы плотности с учетом звуковой волны [14—16]. Из условия потенциальности колебаний следует $\varepsilon = 0$, откуда в условиях (2.3) или (2.4) получаем:

$$\omega = n\omega_B [1 + Q(\mathbf{k})]; \quad Q \ll 1/n. \quad (2.10)$$

Здесь Q — добавка, связанная с пространственной дисперсией, должна быть малой, чтобы частоту ω можно было считать близкой к $n\omega_B$.

Согласно (2.3), для электронно-циклотронных волн Q равна

$$Q_e(\mathbf{k}) = I_n \exp(-z_e) / [z_e/g_e + 1 - I_0 \exp(-z_e)]. \quad (2.11)$$

Для ионов из (2.4) имеем похожую формулу

$$Q_i = I_n \exp(-z_i) / \left[z_i/g_i + \frac{T_i}{T_e} + 1 - I_0 \exp(-z_i) \right]. \quad (2.12)$$

Тогда, считая нелинейную поправку к циклотронной частоте (2.8) малой, порядка дисперсионной поправки Q в (2.10), с учетом (2.6), (2.7) получаем уравнение относительно ψ в координатном представлении:

$$\Delta_{\perp} \left(\frac{i}{n\omega_B} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{Q}\psi \right) - \operatorname{div} h \nabla \psi = 0. \quad (2.13)$$

Здесь \hat{Q} — линейный оператор, фурье-спектр которого равен выражению (2.11) или (2.12).

Уравнения (2.9), (2.13) вместе с определениями (2.8), (2.11), (2.12) составляют замкнутую систему уравнений для пакета потенциальных волн, частота которых близка к n -й гармонике циклотронной частоты ионов или электронов. Видно, что в (2.9) может иметь место циклотронный резонанс с поглощением энергии частицами плазмы.

Система (2.9), (2.13) может иметь стационарное решение в виде солитонов или периодических волн.

Покажем, что в случае электронов, при $n = 2$, такой солитон может существовать, если ψ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_2(\rho) \exp(iA^2 2\omega_{Be} t); \\ A^2 &= \text{const} \ll 1; \quad \rho \equiv r/r_{Be}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Здесь r, α — радиус и азимутальный угол в цилиндрической системе координат, зависимостью от координаты z пренебрегаем. Характерный размер зависимости ψ_2 от r считаем много больше лармовского радиуса. Тогда из (2.14), (2.11) и (2.13) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q} &\approx -\frac{1}{8} g_e r_B^2 \Delta_{\perp}; \\ \tilde{\Delta}_{\rho} \left(-A^2 \psi_2 + \frac{1}{8} g_e \tilde{\Delta}_{\rho} \psi_2 \right) &= h \tilde{\Delta}_{\rho} \psi_2 + \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho}; \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\tilde{\Delta}_{\rho} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (2.16)$$

Подставляя (2.14) в (2.9) и умножая на χ , получаем, учитывая (2.8):

$$(A^2 + h)^2 h = -\frac{k_D^2}{64 B_0^2} \left| \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_2 \right|^2. \quad (2.17)$$

Проведем преобразования переменных:

$$x = \sqrt{\frac{8}{g_e}} A \rho; \quad h = -A^2 F; \quad (2.18)$$

$$\psi_2 = r_{Be} B_0 \sqrt{g_e} f(x), \quad (2.19)$$

где f — действительная функция. Зависимостью от координаты можно пренебречь. Подставляя (2.18), (2.19) в (2.16) и (2.17), получаем

$$\tilde{\Delta}_x (\tilde{\Delta}_x f - f) = -F \tilde{\Delta}_x f - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}; \quad (2.20)$$

$$(1 - F)^2 F = \left| x \frac{\partial}{\partial x} x^{-1} \frac{\partial}{\partial x} f \right|^2. \quad (2.21)$$

Решение этого уравнения легко получить с помощью ЭВМ, используя метод стабилизирующего множителя [17].

Обсудим кратко возможные кинетические эффекты в плазме, вызванные возникновением циклотронных солитонов в случае, когда давление частиц плазмы меньше давления постоянного магнитного поля. Поскольку ВЧ-давление в солитоне сдерживается магнитным давлением, первое может приблизиться или даже превысить давление плазмы. Выталкивание плазмы из солитона может задержаться из-за большой длины солитона вдоль магнитного поля, а также из-за продольной неоднородности магнитного поля. Большая амплитуда колебаний электрического поля в солитоне может приводить к аномальному сопротивлению плазмы. Дело в том, что вдоль магнитного поля солитоны образуют или синусоидальные цуги бегущих волн, или стоячие волны с дискретными значениями k_z . Потенциальная

энергия электронов в такой волне может стать меньше кинетической, так что в некоторых режимах почти все электроны окажутся захваченными в ионно-циклотронных или электронно-циклотронных солитонах. Это может задержать нарастание продольного тока. При этом энергия приложенного электрического поля посредством циклотронного резонанса в волне переходит в поперечную кинетическую энергию захваченных ионов или электронов. Возможно, таким механизмом можно объяснить появление частиц с большой поперечной энергией, зарегистрированных в режимах с убегающими электронами на токамаках в работах [3, 4].

§ 3. Двумерный солитон потенциальной дрейфовой волны

Дрейфовые волны приводят к конвективному выносу тепла и частиц из плазмы и этим создают большую трудность для ее нагрева. Поэтому эти волны изучались довольно основательно ([18] и др.). Здесь рассмотрим поведение неоднородного пакета дрейфовых волн с учетом влияния гидродинамической нелинейности [19]. В работах [20, 21] было показано, что под влиянием нелинейности эффективное волновое число пакета увеличивается, пока не образуется одномерный солитон, бегущий вдоль направления дрейфовой скорости ионов.

В этом параграфе показано, что такой одномерный солитон неустойчив [22]. Эта неустойчивость может привести к образованию устойчивых двумерных круглых солитонов, наклоненных под малым углом к магнитному полю и имеющих радиус порядка r_B/A , где r_B — ларморовский радиус ионов, A — безразмерная амплитуда солитона.

Исходим из дисперсионного уравнения дрейфовой волны в отсутствие диссипации:

$$1 - \frac{k_y v_*}{\omega} + k_{\perp}^2 r_B^2 - k_z c_s^2 / \omega^2 = 0;$$

$$k_{\perp}^2 r_B^2 \ll 1, \quad r_B^2 \equiv (T_e + T_i) / M \omega_{Bi}^2, \quad |k_z c_s / \omega| \ll 1;$$

$$c_s \equiv \sqrt{(T_e + T_i) / M} \ll \left| \frac{\omega}{k_z} \right| \ll c_A. \quad (3.1)$$

Здесь c_A — альфвеновская скорость; v_* — скорость дрейфа, вызванная градиентом плотности и температуры поперек магнитного поля (вдоль оси x); M — масса; ω_{Bi} — циклотронная частота ионов. Ось z направлена вдоль магнитного поля.

Основная нелинейность этих волн при $k_z \ll k_{\perp}$ вызвана градиентом электронной температуры $\partial T_e / \partial x$ [19]. При учете этой нелинейности и (3.1) получаем следующее модельное уравнение для ψ — отношения потенциальной энергии электрона в волне к его температуре:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \omega \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} + r_B^2 v_* \Delta_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{c_s^2}{v_*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \\ \psi \equiv \frac{e\varphi}{T_e}, \quad \omega \equiv -\frac{1}{M\omega_{Bl}} \frac{\partial T_e}{\partial x}, \quad |\psi| \ll 1; \quad \Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где φ — электрический потенциал. Размеры пакета поперек магнитного поля считаются много меньше характерного размера зависимости v_* , ω от x .

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{r_B}; \quad \zeta = \frac{v_*}{c_s} \frac{z}{r_B}; \quad \eta = (y - v_* t)/r_B; \\ \tau &= \frac{v_* t}{r_B}; \quad \psi = -\frac{v_*}{\omega} f(\xi, \eta, \zeta, \tau). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В переменных (3.3) уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (f^2/2 + \Delta_{\xi, \eta} f) + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) сохраняет следующие интегралы движения:

$$I_1 = \int f^2 d\Omega; \quad I_2 = \int [(\nabla_{\perp} f)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial \zeta}\right)^2 - \frac{1}{6} f^3] d\Omega; \quad I_3 = \int f d\Omega. \quad (3.5)$$

Здесь $d\Omega$ — безразмерный элемент объема $\mu \equiv \int f d\eta$. Своим видом и интегралами движения уравнение (3.4) очень похоже на слабо-неодномерное уравнение КДВ [23]. Уравнение (3.4) имеет решение в виде одномерного солитона с фронтом, наклоненным к магнитному полю под малым углом, равным $\kappa v_*/c_s$:

$$f = F_0(\theta); \quad \theta = \eta + \kappa \zeta - (A^2 + \kappa^2)\tau; \quad \kappa^2 \ll 1, \quad (3.6)$$

где F_0 удовлетворяет уравнению

$$\partial^2 F_0 / \partial \theta^2 = A^2 F_0 - F_0^2/2, \quad (3.7)$$

которое имеет решение $F_0 = 2A \operatorname{ch}^{-2}(A\theta/2)$.

Исследуем устойчивость этого решения относительно малых возмущений, слабо зависящих от ξ , ζ , τ , методом [23]. Разложим решение (3.4) в ряд около солитонного решения F_0 :

$$f = F_0(\theta) + F_1(\theta, \zeta, \xi, \tau) + F_2 + \dots \quad (3.8)$$

Зависимость возмущения от аргументов имеет следующую иерархию порядков:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \gg \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \kappa \frac{\partial}{\partial \zeta} \gg \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \quad (3.9)$$

Подставив (3.8) в (3.4) с учетом (3.7) и (3.9), получим:

$$LF_1' \equiv F_1''' + F_0 F_1 - A^2 F_1 = 0; \quad (3.10)$$

$$(\hat{L}F_2)' = -\frac{\partial F_1}{\partial \tau} - 2\kappa \frac{\partial F_1}{\partial \xi}; \quad (3.11)$$

$$(\hat{L}F_3)'' = -\frac{\partial F_2'}{\partial \tau} - 2\kappa \frac{\partial F_2'}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 F_1'}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} F_1. \quad (3.12)$$

Оператор \hat{L} имеет собственную функцию F_0' : $\hat{L}F_0' = 0$. Здесь штрих обозначает производную по θ . Из (3.10) с учетом (3.7) получаем

$$F_1 = \alpha(\tau, \xi, \zeta)F_0'(\theta). \quad (3.13)$$

Тогда из (3.11) получаем с учетом (3.7)

$$F_2 = -A^{-2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + 2\kappa \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \right) \left(F_0 + \frac{\theta_0}{2} F_0' \right). \quad (3.14)$$

В принятой нами примитивной теории возмущений F_3 уже не стремится к нулю при возрастании θ . Чтобы избежать экспоненциально быстрого роста F_3 с ростом θ , необходимо потребовать, чтобы правая часть (3.12) была ортогональна функции $\int_{-\infty}^{\infty} F_0 d\theta$. Тогда $F_3 \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$, а при $\theta \rightarrow -\infty$ имеем

$$F_3 \rightarrow A^{-2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_0 d\theta.$$

Это означает, что в третьем приближении след возмущения солитона тянется за ним до $-\infty$. Упомянутое условие ортогональности правой части (3.12) к решению (3.12) без правой части после подстановки (3.13), (3.14) дает следующее уравнение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4} c_1 A^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \alpha + c_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} - c_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} = 0, \\ c_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_0^2 d\theta, \quad c_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_0'^2 d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Из (3.15) видно, что солитон неустойчив относительно длинноволновых возмущений, зависящих от ξ , и устойчив относительно зависящих только от ζ . Согласно (3.15), (3.3), (3.7) инкремент неустойчивости γ в единицах обратных секунд по порядку величины равен

$$\gamma^2 \approx k_x^2 v_*^2 A^4 - k_z^2 c_s^2 A^2. \quad (3.16)$$

Здесь k_x, k_z — волновые числа возмущений вдоль x, z соответственно.

Согласно (3.9), этот результат справедлив пока $\partial/\partial\xi \ll \partial/\partial\eta$. С развитием неустойчивости это условие нарушается и тогда вместо (3.6), (3.7) появляется другое стационарное решение (3.4) в виде двумерного солитона:

$$f = f_0(\theta, \xi). \quad (3.17)$$

Подставив (3.17) в (3.4), получим уравнение двумерного солитона

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial\xi^2} + \frac{f_0^2}{2} - A^2 f_0 = 0, \quad (3.18)$$

ξ, θ даются формулами (3.6), (3.3). Введем вместо f_0 функцию U , не зависящую от A , по формуле:

$$f_0 = A^2 U(\rho); \quad \rho \equiv (\theta^2 + \xi^2)^{1/2} A. \quad (3.19)$$

Из (3.19), (3.18) получаем уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho \frac{\partial U}{\partial\rho} = U - U^2/2. \quad (3.20)$$

Решения уравнения (3.20), конечные всюду и стремящиеся к нулю на бесконечности, находились с помощью ЭВМ в работе [24].

Используя интегралы движения (3.5), можно доказать полную устойчивость двумерного солитона.

Таким образом, под влиянием слабой неустойчивости в плазме могут возникать двумерные круглые солитоны, наклоненные под малым углом $\kappa v_*/c_s$ к магнитному полю. С ростом энергии безразмерная амплитуда солитона A растет, а радиус, который имеет порядок r_B/A , уменьшается. Если радиус солитона становится порядка или меньше ларморовского радиуса r_B , появляются более сильные нелинейные члены, чем в (3.4), и характер зависимости между параметрами солитона осложняется. Солитон движется поперек магнитного поля и градиента плотности со скоростью $v_*(1 + A^2)$ и этим отличается от слабонелинейных волн, скорость которых, согласно (3.1), меньше v_* и при уменьшении длины волны уменьшается. Солитон представляет собой яму плотности плазмы амплитудой $-A^2 n_0$, где n_0 — невозмущенная плотность плазмы, и радиусом $-r_B/A$. В силу локализации вдоль x двумерный солитон нечувствителен к шире магнитного поля. Отсюда следует, что даже при наличии шира дрейфовые волны могут развиваться в плазме в виде двумерных солитонов до опасного для удержания плазмы уровня.

§ 4. Уравнения МГД-волн с осевой симметрией

Известно, что в несжимаемой жидкости могут существовать разные типы вихрей. Однако количественное описание этого явления встречает значительные трудности из-за отсутствия малого параметра разложения. Рассмотрение подобных вихрей в плазме низкого давления ($\beta \ll 1$) облегчается из-за наличия малых параметров. Это

позволяет свести уравнения магнитной гидродинамики к более простым уравнениям неоднородных солитонов с помощью теории возмущений, считая дисперсионные и нелинейные члены малыми одного порядка [25] (разложение типа Кортевега—де-Вриза). Важность решений в виде неоднородных солитонов состоит прежде всего в том, что, в отличие от простых волновых пакетов, они не расплываются при распространении в плазме, в силу чего накапливают много энергии и поэтому их сравнительно легко обнаружить. Амплитуда и размеры таких образований связаны друг с другом простым соотношением, что позволяет на эксперименте выделять их среди возмущений других типов.

Целый ряд наблюдений в магнитосфере указывает на существование солитонов альфвеновского и магнитно-звукового типов. Они представляют собой вихри, бегущие вдоль магнитного поля со скоростью, близкой к альфвеновской.

В последнее время интерес к альфвеновским и магнитно-звуковым возмущениям возрос в связи с тем, что они легко могут раскачаться в будущих токамаках, где для осуществления УТС необходимо условие $\beta > m_e/m_i$. При малой амплитуде такие возмущения имеют сравнительно большую область локализации и потому могут легко стабилизироваться скосом силовых линий. Влияние нелинейности приводит к самофокусировке — уменьшению характерных размеров возмущений. В силу этого влияние скоса силовых линий ослабевает, и они могут дорасти до амплитуд, опасных для удержания плазмы.

МГД-вихри могли бы наблюдаться и в твердотельной плазме, где возможно распространение МГД-волн. Эти вихри обладают осевой симметрией вокруг силовой линии постоянного магнитного поля и их скорость несколько меньше альфвеновской. Различие между ними состоит в том, что магнитно-звуковой вихрь ограничен со всех сторон и сплюснут в направлении распространения. Циркуляция скорости в нем происходит как в вихревом кольце. Возмущенное магнитное поле имеет в основном радиальное направление. Альфвеновский вихрь представляет собой волновод, вытянутый вдоль магнитного поля. Длина волны в волноводе много меньше радиуса волновода, возмущенное магнитное поле и скорость направлены в основном по азимуту. Линии тока в нулевом приближении замкнуты.

Дисперсионное уравнение для быстрых магнитно-звуковых (БМЗ) и альфвеновских волн в плазме с $\beta \ll 1$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 = k_z^2 c_A^2 + k_\perp^2 c_A^2/2 \pm \sqrt{k_z^2 c_A^2 r_A^2 + k_\perp^2 c_A^4/4}; \\ r_A \equiv c_A/\omega_{Bi}; kc_A \ll \omega_{Bi}; k_\perp^2 \ll k_z^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Здесь ось z направлена вдоль магнитного поля, ω_{Bi} — циклотронная частота ионов, верхний знак в (4.1) соответствует магнитно-звуковым колебаниям. Из (4.1) видно, что БМЗ-волна имеет положительную дисперсию по всем направлениям. Это указывает на то, что если есть подходящая нелинейность, БМЗ-волны могут образо-

вывать трехмерные вихри. У альфвеновских волн вдоль z дисперсия отрицательна, и поэтому они могут локализоваться или только поперек магнитного поля, или вдоль магнитного поля. Уравнение (4.1) получено из линеаризованных уравнений двухжидкостной МГД. Для получения нелинейных поправок воспользуемся МГД-уравнениями, записанными в цилиндрической системе координат в предположении осевой симметрии ($\partial/\partial\varphi = 0$) в пренебрежении давлением плазмы и дисперсией:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v_r = \frac{v_\Phi^2}{r} + \frac{H_z}{D} \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) - \frac{H_\Phi}{Dr} \frac{\partial}{\partial r} r H_\Phi; \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v_\Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v_\Phi + \frac{v_r v_\Phi}{r} = \frac{1}{D} \left(H_z \frac{\partial H_\Phi}{\partial z} + \frac{H_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\Phi \right); \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v_z = \frac{H_r}{D} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_r}{\partial z} \right) - \frac{H_\Phi}{D} \frac{\partial H_\Phi}{\partial z}; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_r H_z - v_z H_r); \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial H_\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_\Phi H_z - v_z H_\Phi) - \frac{\partial}{\partial r} (v_r H_\Phi - H_r v_\Phi); \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v_z H_r - v_r H_z); \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \ln D}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \ln D = -\operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (4.8)$$

Здесь $D = 4\pi n m_i$ пропорциональна плотности плазмы. Эту систему можно упростить, если предположить, что v мало: $v \ll c_A \equiv H_0 / \sqrt{D_0}$, величины H_Φ , H_r , $H_z - H_0$ много меньше H_0 — постоянного магнитного поля.

§ 5. Магнитно-звуковой вихрь

Как известно, в линейной магнитно-звуковой волне колебания магнитного поля происходят в плоскости волнового вектора и постоянного магнитного поля. Рассмотрим вихрь БМЗ-волны. Пусть $v_\Phi = 0$, а H_r и v_r много больше остальных возмущенных величин. Нелинейные члены уравнения (4.2), (4.8) малы, так что в них можно подставить выражения, получаемые из других уравнений методом последовательных приближений. Вихрь бежит вдоль z со скоростью, близкой к c_A , поэтому в малых членах можно положить $\partial/\partial t \approx \approx -c_A \partial/\partial z$. Тогда в первом исчезающем приближении имеем

$$\left. \begin{aligned} v_r = -c_A \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad H_r = H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{H_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \xi + H_0; \\ v_z = \frac{c_A}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2, \quad \frac{D - D_0}{D_0} = \frac{v_z}{c_A} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \xi. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Постоянные интегрирования равны нулю из-за условия обращения возмущений в нуль на бесконечности. Введено смещение плазмы по формуле:

$$\xi = \xi(z - c_A t, r, t); \quad v_r = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - c_A \frac{\partial \xi}{\partial z}. \quad (5.2)$$

Зависимость от первого аргумента считается сильной. Подставляя (5.1), (5.2) в уравнение (4.2), (4.5), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2\partial^2 \xi}{c_A \partial z \partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \xi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \xi \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) описывает эволюцию магнитно-звукового пакета в системе отсчета, движущейся вдоль z со скоростью c_A , в пренебрежении дисперсионными эффектами. Считая дисперсионные поправки малыми, порядка нелинейных, подправляем (5.3), сравнивая его с (4.1). Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{c_A} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \xi + r_A \hat{K} \xi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \xi \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь \hat{K} — оператор, фурье-спектр которого равен $-\sqrt{k_z^6 + k_\perp^4 r_A^2}/4$. Уравнение (5.4) имеет стационарное решение вида

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{r_A}{A} f(\zeta, \rho); \quad \zeta = A^2 \left(z + \frac{A^2 c_A t}{2} \right) / r_A; \\ \rho &= \frac{A^3 r}{r_A}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где A — безразмерная амплитуда вихря, $A \ll 1$, а f удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho f + \hat{K}_0 f + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho f \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^3 = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где \hat{K}_0 имеет фурье-спектр вида $-(k_\zeta^2 + k_\rho^4/4)^{1/2}$. Уравнение (5.6) является уравнением Эйлера для следующего функционала:

$$\begin{aligned} H &= \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho f \right)^2 - f \hat{K}_0 f + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho f + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^4 \right] \rho d\rho d\zeta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из сравнения единственного отрицательного члена [предпоследнего в функционале (5.7)] с другими членами заключаем, что H ограничен снизу. Отсюда можно заключить, что решение уравнения (5.6) осуществляет абсолютный минимум этого функционала. Согласно теореме Лагранжа, этого достаточно для того, чтобы решение (5.5) в виде магнитно-звукового вихря, описываемого уравнениями (5.4), (5.6), было устойчивым.

Численное решение (5.6) затруднительно из-за того, что в нем наряду с квадратичной имеется и кубичная нелинейность.

В лабораторной системе координат такой вихрь бежит со скоростью $c_A (1 - A^2)$ и имеет следующие параметры:

$$L_z \sim r_A A^{-2}; \quad L_r \sim r_A A^{-3}; \quad H_r \sim H_0 A;$$

$$v_r \sim c_A A; \quad A \ll 1; \quad r_A \equiv \frac{c_A}{\omega_{BI}}, \quad (5.8)$$

где L_z — характерный размер вихря вдоль z ; L_r — поперек z . Зависимость характерных параметров вихря от координат находится по формулам (5.5). Энергия БМЗ-вихря также является интегралом движения уравнения (5.4) и выражается формулой

$$W \equiv \frac{1}{4\pi} \int H_r^2 dr = \frac{r_A^3}{2} \frac{H_0^2}{A^6} \int \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2 \rho d\rho d\xi. \quad (5.9)$$

Из сравнения (5.8) с (5.9) следует, что с ростом энергии вихря его размеры растут, а амплитуда уменьшается. Амплитуда слабо зависит от энергии вихря.

§ 6. Двумерный альфвеновский вихрь

В линейной альфвеновской волне колебания магнитного поля происходят в направлении, перпендикулярном волновому вектору и постоянному магнитному полю, а дисперсионное уравнение имеет вид [26]:

$$\omega \simeq c_A k_z \left(1 + \frac{1}{2} k_{\perp}^2 r_H^2 \right); \quad r_H^{-1} \gg k_{\perp} \gg r_A k_z^2; \quad r_A k_z \ll 1, \quad (6.1)$$

где r_H — ларморовский радиус ионов.

Ищем солитонное решение в виде волновых пакетов с несущим волновым вектором k_0 , направленным вдоль постоянного магнитного поля H_0 и со стационарной плавной огибающей.

Стационарность огибающей получается как следствие равновесия между дисперсионными и нелинейными добавками к частоте. Возможны два типа такого равновесия, что дает два типа солитонов. Здесь рассмотрим случай, когда пакет альфвеновских волн неограниченно вытянут вдоль H и ограничен в поперечном к H направлении (дисперсионное расплывание вдоль z пересилило сжатие в этом направлении, вызванное нелинейностью). Основной вид нелинейности, влияющий на локализацию пакета, — это ВЧ-диамагнетизм—

понижение среднего магнитного поля в области локализации ВЧ волнового пакета [7,8]. Учет понижения среднего магнитного поля в выражении альфвеновской скорости в (6.1) дает отрицательную поправку к частоте волны.

Во втором случае пакет локализован вдоль z и неограничен в поперечном направлении так, что диамагнитный ток отсутствует. Вычисления, проводимые в следующем параграфе, приводят в этом случае к положительной поправке к частоте.

Механизм различия между этими двумя крайними случаями детально выявляется при выводе нелинейных поправок из МГД-уравнений § 4.

В этом параграфе рассмотрим двумерный солитон, неограниченно вытянутый вдоль оси z , которая принимается за ось симметрии солитона.

Ищем нелинейные поправки в пренебрежении дисперсией, считая нелинейность и дисперсию малыми одного порядка.

В первом приближении положим

$$\left. \begin{aligned} H_{\Phi} &= \frac{1}{2} H_0 [h(r, t) \exp[-ik(z - c_A t)] + \text{к. с.}], \\ v_{\Phi} &= -c_A H_{\Phi}/H_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Зависимость h от времени t считается слабой, но считаем $\partial/\partial r \sim k_0$. Во втором приближении из (4.2), (4.5), (4.7) получим [25]:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -H_0 v_r/c_A; \quad H_z = H_0 - H_{\Phi}^2/2H_0; \\ c_A \frac{\partial}{\partial z} H_z &= \frac{H_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Тогда с учетом (6.3) уравнения (4.4), (4.8) дают

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \frac{c_A}{4} [h^2 \exp[2ik(z - c_A t)] + \text{к. с.}]; \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0; \quad D = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Линии скорости получились замкнутыми по всем направлениям, поэтому плотность в рассматриваемом нами пакете не возмущается. Подставив (6.2) и эти выражения в нелинейные члены уравнений (4.3), (4.6), получим нелинейное уравнение третьего приближения без учета дисперсии:

$$\frac{i}{c_A k_0} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{2} |h|^2 h. \quad (6.5)$$

Введем вместо h функцию φ по формуле

$$h = r_H \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, t); \quad \rho \equiv r/r_H, \quad (6.6)$$

а также дисперсионные поправки в (6.5) из (6.1). Тогда вместо (6.5):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\rho \left(\frac{2i}{c_A k_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta_\rho \Phi \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \left(\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = 0; \\ \Delta_\rho \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) сохраняет интегралы следующего вида:

$$N = \int \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho; \quad H = \int \left(|\Delta_\rho \Phi|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|^4 \right) \rho d\rho. \quad (6.8)$$

Критерий устойчивости солитонного решения показывает, что изолированный двумерный вихрь [солитонное решение уравнения (6.7)] не имеет никакого запаса устойчивости. Но решение (6.7) в виде двумерной периодической волны устойчиво.

Таким образом, при заданном N энергетически выгодно образование двумерной периодической решетки, состоящей из вихрей, вытянутых вдоль магнитного поля. Магнитное поле в вихрях колеблется по азимуту с амплитудой порядка $H_\Phi \sim AH_0$, а порядок радиуса вихря равен r_H/A . Здесь r_H — ларморовский радиус ионов, константа $A \ll 1$.

§ 7. Одномерные альфвеновские солитоны и природа «жемчужин»

При $k_\perp \ll k_z$ пакет альфвеновских волн бежит вдоль магнитного поля, не расплываясь поперек него из-за крайней малости групповой скорости в этом направлении, что видно из дисперсионного уравнения для такого пакета, получаемого из (4.1):

$$\omega^2 = c_A^2 k_z^2 - r_A c_A^2 |k_z|^3; \quad k_\perp^2 k_z^{-2} \ll r_A |k_z| \ll 1; \quad r_A \equiv c_A / \omega_{Bi}. \quad (7.1)$$

Если нелинейность ограничит дисперсионное расплывание пакета вдоль z , то мы получим солитон. В § 6 мы видели, что при $k_\perp \sim k_z$ знак нелинейности, вызванный диамагнитным током ВЧ-давления, не приводил к локализации вдоль z . В случае (7.1), когда солитон локализован только вдоль H_0 , диамагнитный ток не возникает, плотность плазмы возмущается и это дает нелинейность, имеющую благоприятный знак для локализации вдоль H_0 . Найдем нелинейные поправки к случаю (7.1) из МГД-уравнений типа (4.2)–(4.8), но без предположения осевой симметрии. В первом приближении отличны от нуля поперечные к постоянному магнитному полю составляющие скорости и осциллирующего магнитного поля $\mathbf{v}_\perp \approx \approx -\frac{c_A}{H_0} H_\perp$. Что касается производных, то считаем $\nabla_\perp = 0$, $\partial/\partial t \approx \approx -c_A \partial/\partial z$. Во втором приближении получим [ср. (6.3), (6.4)]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h} \equiv \mathbf{H}_\perp / H_0; \quad \mathbf{v}_\perp \approx -c_A \mathbf{h}; \quad H_z = H_0; \\ v_z \approx (h^2/2 - \psi); \quad D \approx D_0 (1 + v_z/c_A). \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Все величины в пакете имеют быструю и медленную зависимость от z , соответствующую большому несущему волновому числу пакета k_0 и огибающему пакета, т. е. считаем, что h имеет вид

$$h = \frac{1}{2} [h_0(z - c_A t, t) \exp [ik_0(z - c_A t) + \text{к. с.}]. \quad (7.3)$$

Зависимость h_0 от z , t считается гораздо более слабой, чем зависимость экспоненты от тех же аргументов. Поскольку интегрирование при получении (6.2) проводилось по быстрой зависимости от z , то получившаяся постоянная интегрирования ψ может зависеть от медленной переменной z . Как и в § 6, полагаем $\psi = h_0^2/2$ соответственно условию, что волна не увлекает плазму и поэтому среднее от v_z по быстрым осцилляциям должно равняться нулю. Впрочем, в отличие от предыдущего, результат настоящего расчета не зависит от ψ . Заметим, что при таком выборе ψ и среднее от возмущения плотности по осцилляциям в пакете равны нулю.

Подставляя величины (7.2) в нелинейные члены уравнений (4.2) (4.3), (4.5), (4.6), получим

$$\frac{\partial v_{\perp}}{\partial t} = c_A (c_A - v_z) \frac{\partial h}{\partial z}; \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial v_{\perp}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (v_z h). \quad (7.5)$$

С учетом дисперсионной добавки в (7.1) из этих уравнений получаем

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + c_A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} h \right) + \hat{G}h. \quad (7.6)$$

Производная в нелинейном члене согласно теории возмущений берется только по быстрой зависимости от z . Оператор \hat{G} согласно (7.1), (7.3) представим в виде

$$\hat{G} = c_A^2 r_A \left| ik_0 + \frac{\partial}{\partial z} \right|^3, \quad (7.7)$$

где $\partial/\partial z$ — производная по медленной переменной действует только на h_0 и поэтому мала. Подставляя (7.3), (7.7) в (7.6), получим приближенно

$$\begin{aligned} \frac{i}{c_A k_0} \frac{\partial h_0}{\partial t} &= \frac{1}{8} |h_0|^2 h_0 - r_A k_0 h_0 + \\ &+ 3ir_A \frac{\partial h_0}{\partial z} + 3 \frac{r_A}{k_0} \frac{\partial^2 h_0}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Солитонное решение (7.8) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{4A}{\text{ch } \zeta} \exp [i (r_A k_0 - A^2) c_A k_0 t]; \quad A^2 \ll r_A k_0 \ll 1; \\ \zeta &\equiv \frac{A}{\sqrt{3r_A k_0}} k_0 (z + 3r_A k_0 c_A t). \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Мы получили, что альфвеновские волны могут образовывать одномерный солитон огибающей с большим несущим волновым числом k_0 , направленным вдоль постоянного магнитного поля H_0 . Характерная ширина локализации пакета вдоль H_0 согласно (7.9) равна $\sqrt{r_A k_0^{-1}}/A$, где A — безразмерная амплитуда солитона. Магнитное поле в солитоне колеблется в поперечном к H_0 направлению и имеет следующий порядок амплитуды: $-H_{\perp} \sim AH_0$.

По-видимому, именно такие одномерные солитоны наблюдаются в атмосфере Земли в виде пульсаций магнитного поля типа Pc-1, известных также под названием «жемчужины» [27].

§ 8. Образование МГД-солитонов

При наличии слабой неустойчивости, локализованной в пространстве, в плазме будут раскачиваться волны и солитоны. Однако вследствие дисперсионного расплывания энергия волн остается малой. Солитоны же не расплываются и потому могут набрать большую энергию. Оценим скорость нарастания плотности энергии солитонов при заданном инкременте γ_k . В плазме МГД-волны могут раскачиваться при наличии группы быстрых частиц с анизотропным распределением по скоростям [28]. Инкремент этой неустойчивости равен:

$$\gamma = -\sqrt{\pi} \frac{\epsilon r_A^2 c_A^2}{k_z^2 v_{T\parallel}} \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \exp[-c_A^2 (k_z r_A v_{T\parallel})^{-2}] \times \\ \times \left(r_A |k_z| \pm \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right), \quad (8.1)$$

где верхний знак соответствует случаю альфвеновских волн, нижний — магнитно-звуковых; ϵ — отношение плотности быстрых частиц к плотности холодной плазмы; $T_{\perp, \parallel}$ — поперечная и продольная температура быстрых частиц; $v_{T\parallel}$ — продольная тепловая скорость быстрых частиц, которая должна быть больше c_A , чтобы инкремент имел заметную величину.

Как следует из (8.1), для возбуждения альфвеновских волн необходимо, чтобы поперечная температура быстрых частиц превышала продольную. Магнитно-звуковые волны раскачиваются при противоположной анизотропии $T_{\parallel} < T_{\perp}$. Эта неустойчивость может играть важную роль в двухкомпонентном токамаке с инжекцией нейтральных атомов. Условия для ее возникновения часто реализуются и в магнитосферной плазме. Примером возбуждения альфвеновских волн в магнитосферной плазме является генерация геомагнитных пульсаций типа Pc-1 (жемчужин). Магнитно-звуковые волны могут возникать в ночном секторе магнитосферы в области квазизахвата, где, согласно спутниковым измерениям [29] и теоретическим оценкам [30], возможно формирование распределения

быстрых протонов с $T_{\parallel} > T_{\perp}$. В частности, развитие циклотронной неустойчивости волн может соответствовать генерациям геомагнитных пульсаций типа P1 — 1B.

Взаимодействие частиц плазмы с солитонами можно разделить на два типа. В одном случае частица взаимодействует с солитоном так же, как с монохроматической синусоидальной волной (резонансным образом), а в другом она не чувствует корреляцию фаз гармоник в солитоне. Первый имеет место для случая альфвеновских солитонов и требует специального рассмотрения (см. § 9).

В другом случае, который значительно проще, как было показано в работе Л. И. Рудакова [31], изменение амплитуды солитона в слабонеустойчивой среде можно описать уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 2 \int \gamma_k W_k d_k, \quad (8.2)$$

где $W = \int W_k d_k$ — полная энергия солитона; W_k — энергия k -й гармоники фурье-разложения солитонного решения; γ_k — линейный инкремент.

Исходя из этой формулы, рассмотрим поведение магнитно-звукового вихря в среде с $\gamma \neq 0$. Используя выражение для W , вычисленное в § 5 [формула (5.9)], и подставляя его в (8.2), по порядку величины получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} A^{-6} = \gamma A^{-6}, \quad (8.3)$$

где γ — усредненный с весом W_k инкремент (8.1).

Из (8.3) и (5.8) видно, что при $\gamma > 0$ размеры БМЗ-вихря в координатном пространстве увеличиваются и его амплитуда уменьшается (это соответствует сжатию солитона в k -пространстве). Это расширение может задержаться из-за взаимодействия с соседними вихрями или из-за того, что при расширении эффективное волновое число вихря уменьшается и он может выйти из области неустойчивости в k -пространстве.

Из (8.1) следует, что инкремент циклотронной неустойчивости спадает экспоненциально при $k_z r_A < c_A/v_{T\parallel}$. Отсюда находим, что расширение вихря замедляется при $A^2 \leq c_A/v_{T\parallel}$. Отсюда с помощью (5.8) можно найти характерные параметры вихря.

§ 9. Взаимодействие пучка частиц с периодической ленгмюровской волной

Взаимодействие солитонов с частицами плазмы рассматривалось в работах [31, 32 и др.]. Было показано, что движение ленгмюровских солитонов затруднено из-за сильного торможения на частицах плазмы, особенно если электрическое поле в солитоне E не мало: $E^2 / 8\pi n T > m/M$. Поэтому в реальных ситуациях солитоны можно

считать неподвижными относительно ионов, т. е. стоячими. Известно также [31], что в одномерном случае изолированный стоячий солитон при взаимодействии с пучком всегда затухает, а функция распределения пучка расплывается согласно квазилинейной теории монотонно. Отсюда, казалось бы, следует, что в экспериментах плазма—пучок со слабой неустойчивостью ленгмюровские солитоны не могут существовать. Однако в работе [2], где исследовалось взаимодействие электронного пучка с плазмой в сильном магнитном поле ($\omega_{pe} < \omega_{He}$, $\omega_{pe} \simeq 10^9$ с⁻¹) наблюдался высокий уровень ленгмюровских шумов, причем спектр этого шума, снятый за времена порядка нескольких наносекунд, имел линейчатую структуру. В этих же работах была измерена функция распределения пучка за малые времена ($\sim 10^{-7}$ с). Измерения показали, что в результате взаимодействия с плазмой функция распределения пучка сильно расплывается и на ней появляется несколько резко выраженных горбов, что противоречит выводам квазилинейной теории.

Покажем, что замеченные в работе [2] эффекты можно объяснить, если предположить, что в результате взаимодействия плазмы с пучком образуется стационарная стоячая ленгмюровская волна или цепочка солитонов, скоррелированных по фазе. При наличии корреляции энергия пучка передается солитонам даже в том случае, когда они стоячие. Наличие корреляции вызывает и возникновение горбов на функции распределения.

Перечисленные эффекты можно было бы объяснить и раскачкой бегущей синусоидальной волны с постоянной амплитудой [2, 33], но, как показано в [15], такая волна неустойчива даже относительно одномерных возмущений, приводящих к самомодуляции волны.

Представим электрическое поле в плазме в виде

$$E = \sqrt{32\pi n_0 (T_e + T_i)} [\psi \exp(-i\omega_p t) + \psi^* \exp(i\omega_p t)], \quad (9.1)$$

где ψ — безразмерная амплитуда является функцией от x и считается слабо зависящей от времени.

Эволюция пакета ленгмюровских волн (9.1) описывается уравнением Захарова [15], которое в одномерном случае и с групповой скоростью пакета много меньшей скорости ионного звука, имеет вид

$$\frac{2i}{\omega_{pe}} \frac{\partial \psi}{\partial t} + 3r_D^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\delta n}{n_0} \psi = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial x} = -2 \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2. \quad (9.3)$$

Здесь $\delta n(x, t)$ — усредненное по осцилляциям высокой частоты $\sim \omega_p$ изменение плотности плазмы, вызванное ВЧ-давлением. Если имеем периодическую волну бесконечной протяженности, то δn в среднем по x должно равняться нулю, потому что среднюю плотность плазмы мы считаем равной n_0 .

Цуг волны можно считать бесконечно протяженным при рассмотрении процессов, характерное время которых много меньше длины цуга, деленной на скорость звука в плазме.

Введем безразмерные переменные:

$$t = \tau/\omega_p; \quad \xi = \sqrt{\frac{2}{3}} x/r_D. \quad (9.4)$$

В этих переменных из (9.2), (9.3) получаем

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \psi'' + (|\psi|^2 - a) \psi = 0, \quad a = \text{const}. \quad (9.5)$$

Постоянная a выбирается в зависимости от вида решения.

Как уже отмечалось, решение уравнения (9.5) в виде периодической волны, промодулированной только по фазе и имеющей вид

$$\psi = \psi_0 \exp[-i(k^2\tau \pm k\xi)]; \quad \psi_0 = \text{const} = \sqrt{a},$$

неустойчиво. Наличие постоянной a в (9.5) не влияет на устойчивость периодических решений. Устойчивое решение уравнения (9.5) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \psi = \psi_c = \sqrt{\Omega + a} \sqrt{\frac{2\kappa^2}{2\kappa^2 - 1}} \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{\Omega + a}{2\kappa^2 - 1}} \xi, \kappa \right) \exp(i\Omega\tau); \\ |\Omega| = \text{const} \ll 1, \quad 0,5 < \kappa^2 \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Здесь cn — эллиптическая функция Якоби с модулем κ , безразмерная поправка к ленгмюровской частоте Ω считается малой, чтобы удовлетворить условию применимости (9.2). Безразмерная длина волны [или период решения (9.6)]

$$\lambda = 4K \sqrt{(2\kappa^2 - 1)/(\Omega + a)}, \quad (9.7)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл. Условие равенства средней плотности плазмы n_0 при наличии волны (9.6) имеет вид

$$a = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \psi_c^2 d\xi. \quad (9.8)$$

Из (9.3)—(9.6) получаем связь между постоянными параметрами волны:

$$\Omega = (K - 2E) a/2\kappa^2 B; \quad \lambda = \sqrt{8\kappa^2 KB/a}, \quad (9.9)$$

где E, K, B — полные эллиптические интегралы от κ . Для дальнейшего удобно с помощью (9.9) представить (9.6) в виде

$$\psi_c = \frac{\sqrt{8}}{\lambda} \kappa K \operatorname{cn} \left(\frac{4K}{\lambda} \xi, \kappa \right) \exp(i\Omega\tau); \quad (9.10)$$

$$\Omega = 4K(K - 2E)/\lambda^2. \quad (9.11)$$

В такой записи параметрами волны являются λ и κ . Условие применимости решения (9.10) уравнения (9.1) дает простое неравенство:

$$2K(\kappa) \ll \lambda, \quad 0,5 < \kappa^2 \leq 1. \quad (9.12)$$

Разложение (9.10) в ряд Фурье имеет вид

$$\psi_c = (4\sqrt{2}\pi/\lambda) \exp(i\Omega\tau) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos[(2n-1)2\pi\xi/\lambda], \quad (9.13)$$

$$B_n = \text{ch}^{-1} \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K} \right]; \quad K' \equiv K(\sqrt{1-\kappa^2}). \quad (9.14)$$

В пределе бесконечной длины волны ряд (9.13) переходит в интеграл Фурье. Если при этом и модуль κ стремится к единице, так что

$$2K(\kappa)/\lambda \rightarrow A = \text{const} \ll 1, \quad (9.15)$$

получаем солитонное решение:

$$\psi_c \rightarrow \sqrt{2}A \exp(iA^2\tau) \int_0^{\infty} \cos(qA\xi) \text{ch}^{-1}\left(\frac{\pi q}{4}\right) dq \quad (9.16)$$

с амплитудой A и шириной $1/A$.

Подставляя (9.13), (9.14) в (9.1), получаем разложение стоячей периодической волны электрического поля в виде набора бегущих волн с фазовыми скоростями, равными

$$v_n = \pm(1 - \Omega)v_{Te} \lambda/(2n - 1), \quad n = 1, 2, 3..., \quad (9.17)$$

и безразмерными амплитудами, равными B_n в (9.14). Здесь v_{Te} — тепловая скорость электронов, связь между безразмерными величинами Ω и λ дается в (9.11).

Характер взаимодействия гармоник этого разложения с частицами зависит от амплитуды гармоник и разности фазовых скоростей между гармониками. Если эта разность много больше ширины захвата — ширины области в пространстве скоростей, в которой частицы интенсивно взаимодействуют с гармоникой, то квазилинейное приближение неприменимо. Для синусоидальной волны ширина захвата равна $\sqrt{e/m\phi_0}$, где ϕ_0 — амплитуда потенциала в волне. Для n -й гармоники разложения (9.13)

$$U_n = \sqrt{V_8 B_n / (2n - 1) v_{Te}}. \quad (9.18)$$

Из (9.17) видно, что ввиду неравенства $\lambda \gg 1$ эта величина много меньше $|v_n - v_{n \pm 1}|$.

Поэтому периодическая волна действует на резонансные частицы как набор синусоидальных бегущих волн. Если в плазме имеется пучок с характерной скоростью v_b , то в уравнении для функции распределения пучка f достаточно ограничиться вкладом только n -й волны из этого набора, фазовая скорость которой близка к v_b : $v_n \simeq$

$\simeq v_b$. Тогда, используя (9.1), (9.13), запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{8} \frac{\pi}{\lambda} B_n \cos(k_n x - \omega t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (9.19)$$

Здесь $\omega = \omega_{pe} (1 - \Omega)$, $k_n = 2\pi (2n - 1)/\lambda_{LD}$. Это уравнение легко интегрируется по траекториям. В результате получаем, что на первоначальной гладкой функции распределения f с течением времени появляются резко выраженные горбы.

Если в точке резонанса функция распределения имеет положительную производную по скоростям, то энергия пучка передается резонансной гармонике. Так как в нелинейной стоячей волне и в солитоне все гармоники связаны друг с другом, то рост энергии одной гармоники приводит к росту энергии остальных. Поэтому в отличие от изолированного солитона цепочка скоррелированных солитонов при наличии пучка будет иметь инкремент.

Как известно [33], если инкремент пучковой неустойчивости равен γ , то амплитуда электрического поля монохроматической волны, входящая в (9.19), дорастает до величины порядка $\frac{m}{e} \gamma k_n^2 k_n^{-1}$. Дальнейший рост амплитуды прекращается из-за искажения f в области резонансных скоростей.

В случае периодической волны при росте амплитуды происходит уменьшение фазовой скорости, что видно из (9.11), (9.17). Поэтому насыщение передачи энергии от частиц к волне не наступает, и амплитуда волны может дорасти до значительно большего значения, чем в случае отдельной синусоидальной волны. В результате функция распределения разбивается на отдельные горбы, легко наблюдаемые при эксперименте. Количественную картину эволюции периодической волны в результате взаимодействия с пучком легко получить с помощью ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сверхтонкая** структура СВЧ спектра взрывающегося токового кавитона. В кн.: Труды 8 Европейской конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Прага, 1977. Авт.: Н. Ф. Перепелкин и др.
2. **Лавровский В. А., Шустин Е. Г., Харченко И. Ф.** Экспериментальные наблюдения осцилляций на функции распределения электронов при взаимодействии с плазмой. — «Письма ЖЭТФ», 1972, т. 15, с. 84—87.
3. **Аликаев В. В., Разумова К. А., Соколов Ю. А.** Неустойчивость, связанная с пучком убегающих электронов в токамаке ТМ-3. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 546—555.
4. **Группа ТФР.** В кн.: Труды 5 конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Токио, доклад IAEA-CN-33/A6-2, 1974.
5. **Gurnett D. A.** The earth as a radio source: Terrestrial kilometric radiation. — «J. Geophys. Res.», 1974, v. 79, p. 4227—4238.
6. **Alexander J. K., Kaiser M. L.** Terrestrial kilometric radiation 2. Emission from the magnetospheric cusp and dayside magnetosheath, 1977, v. 82, p. 98—104.
7. **Петвиашвили В. И.** ВЧ-диамагнетизм и трехмерные циклотронные солитоны в плазме. — «Письма в ЖЭТФ», 1976, т. 23, с. 682—684.
8. **Питаевский Л. П.** Электрические силы в прозрачной среде с дисперсией. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 1450.

9. Тимофеев А. В. Циклотронные волны в плазме. — «Успехи физ. наук», 1973, т. 110, с. 329—350.
10. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Электропроводность плазмы в сильном магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.» 1967, т. 53, с. 2025.
11. Паррил В. В., Погуце О. П. Неустойчивость пучка ускоренных электронов в плазме. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 228—236.
12. Махайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, Т. I. М., Атомиздат, 1975.
13. Вашими Х., Карпман В. И. О пондеромоторной силе высокочастотного электромагнитного поля в диспергирующей среде. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 71, с. 1003—1016.
14. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
15. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, с. 1945.
16. Петвиашвили В. И. Трехмерные солитоны необыкновенной и ленгмюровской волн. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 28.
17. Петвиашвили В. И. Об уравнении необыкновенного солитона. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 469.
18. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Запертые частицы в тороидальных магнитных ловушках. — «Ядерный синтез», 1971, т. 11, с. 67.
19. Tasso N. Shock like drift waves. — «Phys. Lett A», 1967, v. 24 A, p. 618.
20. Петвиашвили В. И. О нелинейных дрейфовых волнах в плазме. — «Докл. АН СССР», 1967, т. 174, с. 66.
21. Oraevskij V N., Tasso G., Vobig G. In: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research V. 1. IAEA, Vienna, 1969, p. 671.
22. Петвиашвили В. И. Самофокусировка потенциальной дрейфовой волны. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 270.
23. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, с. 753.
24. Янкаускас З. К. Радиальные распределения поля в самофокусирующемся пучке света. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1966, т. 9, с. 412.
25. Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. Альфвеновские и магнитозвуковые вихри в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 73, с. 498.
26. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. Альфвеновский солитон. — «Письма в ЖЭТФ», 1976, т. 24, с. 53.
27. Гульельми А. В., Троицкая В. А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. М., «Наука», 1973.
28. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 39, с. 181.
29. Williams D. S., Lyons L. R. Further aspects of the proton ringcurrent interaction with the plasmapause: main and recovery phases. — «J. Geophys. Res.», 1974, v. 79, N 31, p. 4791 — 4798.
30. Kan L. R., Peacock R. R. Generation of irregular (type Pic) pulsations in the plasma sheath during substorms. — «J. Geophys. Res.», 1976, v. 81, N 13, p. 2371 — 2376.
31. Рудаков Л. И. Торможение электронных пучков в плазме с высоким уровнем ленгмюровской турбулентности. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, с. 821.
32. Горев В. В., Кингсеп А. С. Взаимодействие ленгмюровских солитонов с заряженными частицами плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 66, с. 2048.
33. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Взаимодействие волна — частица в неравновесных средах. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1976, т. 19, с. 767.
34. Павленко В. П., Петвиашвили В. И. Взаимодействие пучка частиц с периодической ленгмюровской волной. — «Письма ЖЭТФ», 1977, т. 26, с. 313.

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОЛЛЕКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОКАМАКЕ С ГРУППОЙ БЫСТРЫХ ИОНОВ

А. Б. Михайловский

ВВЕДЕНИЕ

Целью данного обзора является систематизированное изложение существующих результатов теории коллективных процессов в токамаке с быстрыми ионами. Предполагается, что быстрые ионы возникают в токамаке при ионизации инжектируемых в него быстрых нейтральных атомов или рождаются при термоядерных реакциях. Быстрые ионы в токамаке могут возникать также при высокочастотном нагреве. Хотя наше рассмотрение не ориентировано на проблему ВЧ-нагрева токамака, но, конечно, некоторые излагаемые результаты могут быть полезны и для этой проблемы.

Инжекция быстрых нейтральных атомов в настоящее время считается наиболее перспективным способом получения в токамаке плазмы с термоядерными параметрами. Для успешной работы реактора-токамака необходимо, чтобы быстрые α -частицы, рождающиеся при термоядерных реакциях, отдавали свою энергию плазме. Поэтому вопросы динамики быстрых ионов в токамаке являются центральными в современной теории реакторов-токамаков. Коллективные процессы, связанные с быстрыми ионами, в некоторых случаях могут играть положительную роль, скажем, тогда, когда благодаря им происходит термализация α -частиц. Однако более важно знать, не приведут ли эти процессы к аномально большому энергетическим потерям или другим нежелательным последствиям. Все это и приводит к необходимости тщательного исследования коллективных процессов, связанных с быстрыми ионами. В настоящее время такое исследование проводится в основном теоретически, поскольку реальные токамаки с α -частицами — дело будущего, а на современных токамаках с инжекцией развитие коллективных процессов затруднено из-за слишком частых парных столкновений, что является следствием низкой температуры плазмы.

Некоторые, в основном первоначальные, результаты теории коллективных процессов в токамаке с быстрыми ионами излагались в работе [1]. Поэтому данный обзор продолжает книгу [1]. Это касается линейной теории. Кроме того, здесь излагаются существующие результаты нелинейной теории.

**КОЛЛЕКТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОЙ ИНЖЕКЦИИ
БЫСТРЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ АТОМОВ****§ 1.1. Введение**

Неустойчивости быстрых ионов, образующихся при инжекции быстрых нейтральных атомов в магнитную ловушку, заполненную максвелловской плазмой, первоначально изучались в работе автора и Э. А. Пашицкого [2]. Эта работа была продолжением исследований по устойчивости плазмы с моноэнергетическими или почти моноэнергетическими ионами, начатых В. Б. Красициким и К. Н. Степановым [3] и автором [4].

В работе [2] предполагалось, что нейтральные атомы инжектируются поперек магнитного поля. Рассматривалось возбуждение нижнегибридных колебаний и потенциальных колебаний с частотами вблизи ионно-циклотронных гармоник. Основная часть результатов [2] была получена в постановке, традиционной для теории однородной плазмы. Вместе с тем в [2] был рассмотрен также ряд эффектов, связанных с продольной неоднородностью магнитного поля.

Такое поле, как известно, характерно как для открытых ловушек, на которые и была неявно ориентирована работа [2], так и для тороидальных ловушек типа токамак. Изложение части результатов [2] содержится в книге [5].

Работа [2] положила начало циклу исследований по коллективным процессам в магнитных ловушках с быстрыми ионами, движущимися поперек или под большим углом к магнитному полю. Эти исследования проводились в работах В. М. Кулыгина, автора и Е. С. Цапелкина [6, 7], а также в работе [8] и ряде последующих.

В работе [6] исследовалась квазилинейная релаксация быстрых ионов при возбуждении нижнегибридных колебаний, а в [7] — при возбуждении ионно-циклотронных гармоник. В обоих случаях предполагалось, что ионы инжектируются импульсно, а затем происходит их релаксация в отсутствие источника. При этом парными столкновениями пренебрегалось. В отличие от [6, 7] в работе [8] предполагалось, что имеется непрерывно действующий источник быстрых ионов и единственной причиной релаксации являются кулоновские столкновения. При этом в работе [8] находились квазиравновесные функции распределения, возникающие в условиях непрерывной инжекции и кулоновской релаксации, и исследовалась устойчивость таких распределений.

Перейдем к изложению результатов работы [6] (§ 1.2) и частично работы [8] (§ 1.3), после чего коснемся результатов более поздних работ (§ 1.4).

§ 1.2. Квазилинейная релаксация группы быстрых ионов, движущихся поперек магнитного поля

1. Введение. Пусть в плазме имеется группа быстрых ионов, движущихся поперек магнитного поля. Согласно линейной теории [2, 5], при достаточно большой плотности плазмы ($\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$) и при не слишком малом отношении плотности этой группы частиц к плазме, $\alpha \equiv n_1/n_0 \gg (M_e/M_i)^{1/2}$, основными являются неустойчивости с частотами $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ и инкрементами $\gamma > \omega_{Bi}$ (ω_{Bi} , ω_{Be} — циклотронные частоты ионов и электронов; ω_{pi} — ионная плазменная частота, M_e , M_i — массы электронов и ионов). Исследуем квазилинейные эффекты, сопровождающие развитие этих неустойчивостей.

При $\gamma > \omega_{Bi}$ ионы можно считать движущимися по прямолинейным траекториям. При этом магнитное поле не влияет на квазилинейную релаксацию скоростного распределения быстрых ионов, так что квазилинейное уравнение для их функции распределения имеет такую же форму, как и в отсутствие магнитного поля (см., например, [9]). В общем виде это уравнение описывает временное изменение распределения частиц в трехмерном скоростном пространстве. В интересующем нас случае возбуждаемые колебания имеют волновые векторы, направленные почти перпендикулярно магнитному полю, так что основной является скоростная релаксация в плоскости \mathbf{v}_\perp (перпендикулярной магнитному полю). Поэтому общее квазилинейное уравнение можно проинтегрировать по v_\parallel , и задача сведется к исследованию временного поведения двумерного распределения $f_\perp(\mathbf{v}_\perp, t)$. Вследствие изотропии начального распределения ионов по углу в пространстве поперечных скоростей спектр энергии колебаний оказывается не зависящим от угла в пространстве поперечных волновых чисел, $W_k = W(k_\perp, t)$. Благодаря этому $f_\perp = F(v_\perp, t)$, т. е. функция распределения ионов остается изотропной по углу в пространстве поперечных скоростей и в последующие моменты времени. Это существенно упрощает задачу и позволяет найти численное решение системы квазилинейных уравнений.

Исходные квазилинейные уравнения приводятся в п.2. Результаты численного исследования этих уравнений излагаются в п. 3. Обсуждению результатов посвящен п. 4.

2. Исходные уравнения. Полагаем, что в линейном приближении возмущения описываются дисперсионным уравнением

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \alpha \omega_{pi}^2 \left\langle \frac{\omega}{(\omega^2 - k^2 v^2)^{3/2}} \right\rangle = 0. \quad (1.1)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по поперечным скоростям; $k \equiv k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$, $v \equiv v_\perp = |\mathbf{v}_\perp|$. Частота колебаний, описываемых уравнением (1.1), близка к частоте нижнегибридных колебаний ω_0 , где

$$\omega_0 = \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{-1/2}. \quad (1.2)$$

Их инкремент порядка

$$\gamma \simeq \alpha (v_0/v_T)^2 \omega_0, \quad (1.3)$$

где v_0 — средняя скорость быстрых ионов; v_T — скорость их теплового разброса. Согласно (1.3), при не слишком малом α $\gamma > \omega_{B1}$.

Воспользуемся формальным сходством интересующей нас задачи с хорошо известной задачей о квазилинейной релаксации группы быстрых частиц на возбуждаемых ими ленгмюровских колебаниях [9]. Тогда имеем, что введенные выше величины W_h и F описываются уравнениями:

$$\partial W_h / \partial t = 2\gamma_h W_h; \quad (1.4)$$

$$\gamma_h = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial v_\beta}; \quad (1.6)$$

$$D_{\alpha\beta} = \pi \frac{e^2}{M^2} \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \delta(\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v}) W_h d\mathbf{k}. \quad (1.7)$$

Интегрирование в (1.5), (1.7) проводится соответственно по пространству поперечных скоростей и волновых чисел. Заметим также, что $W_h = \epsilon_{11} \mathbf{E}_h^2 / 4\pi$, где $\epsilon_{11} = 1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2$ — соответствующая компонента тензора диэлектрической проницаемости [5]; \mathbf{E}_h — фурье-компонента возмущения электрического поля; e , M — заряд и масса быстрых ионов.

Преобразуем записанные уравнения с учетом того, что F и W_h изотропны в пространстве поперечных скоростей и волновых чисел соответственно. После интегрирования (1.5) и (1.6) по углу между \mathbf{k} и \mathbf{v} получим

$$\gamma_h = \pi \frac{\omega_0^4}{k^2} \int_{\omega_0/k}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \frac{v dv}{[(kv)^2 - \omega_0^2]^{1/2}}; \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \pi \left(\frac{e}{M} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \int_{\omega_0/k}^{\infty} \frac{\omega_0}{k^2} W_h \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \frac{k dk}{[(kv)^2 - \omega_0^2]^{1/2}}, \quad (1.9)$$

где $\mathcal{E} = v^2/2$. Нижний предел интегрирования определяется из условия $kv \geq \omega_0$.

Перейдем далее к безразмерным переменным:

$\kappa = (k/k_0)^2$; $\omega = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$; $\Gamma = \gamma_h/\gamma_0$; $\tau = t/t_0$; $I_\kappa = W_h/W_h^0$; $\Phi(\omega) = \mathcal{E}_0 F(\omega)$, где $\mathcal{E}_0 = v_0^2/2$; $\gamma_0 = 2\pi\alpha\omega_0$; $t_0 = 1/\gamma_0$; $k_0 = \omega_0/(2\mathcal{E}_0)^{1/2}$,

причем $\alpha = \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega$. После этого получим окончательно:

$$\Gamma_\kappa = \frac{1}{\alpha\kappa} \int_{1/\kappa}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{d\omega}{(\kappa\omega - 1)^{1/2}}; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = A \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \int_{1/\omega}^{\infty} \frac{I_{\kappa}}{\kappa} \frac{d\kappa}{(\kappa\omega - 1)^{1/2}} \right]; \quad (1.11)$$

$$I_{\kappa} = \exp\left(2 \int_0^{\tau} \Gamma_{\kappa} d\tau\right); \quad A = \pi (e/M)^2 W_k^2 / \alpha \mathcal{E}_0^2. \quad (1.12)$$

Величина W_k^2 характеризует начальный уровень существующих в системе шумов. Предполагается, что в тех областях спектра, где

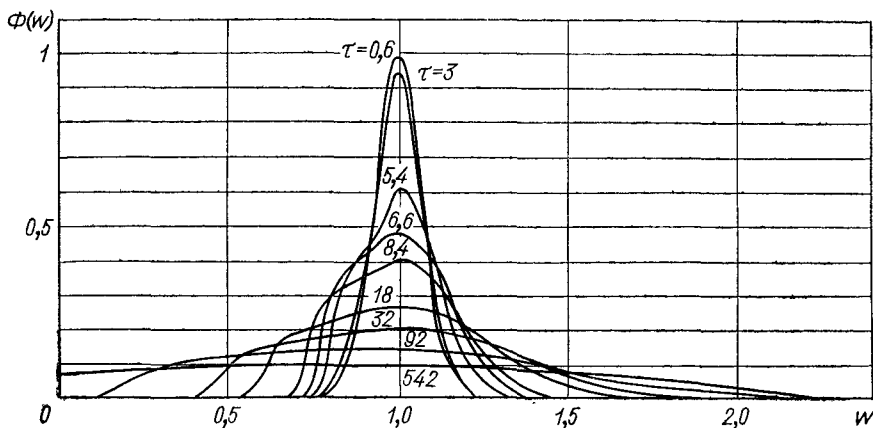


Рис. 1. Изменение функции распределения резонансных частиц $\Phi(\omega)$ с течением времени τ

не происходит раскачки колебаний пучком, этот уровень шумов сохраняется.

3. Результаты численного анализа квазилинейной релаксации. Приведенная выше система уравнений решалась численно с помощью ЭВМ. Исходная функция распределения резонансных частиц бралась в виде

$$\Phi(\omega) = a \exp[-(\omega - 1)^2/b^2]. \quad (1.13)$$

Выбор параметров a и b ($a = b = 0,1$) определялся с учетом условия, что инкремент должен быть мал по сравнению с частотой колебаний. При этом $\alpha \equiv n_1/n_0 = 0,0177$. Параметр A принимался равным 10^{-5} . Результаты расчетов представлены на рис. 1—3. Из рис. 1 видно, что релаксация функции распределения происходит одновременно с нарастанием амплитуды колебаний в соответствующем диапазоне спектра волновых чисел. Пока не произошло заметного изменения формы функции распределения [времена $(2-3)t_0$], идет экспоненциальный рост амплитуды колебаний (см. рис. 2). В это время максимум спектра еще не сместился (см. рис. 3), а небольшое изменение функции распределения произошло в основном в

области, где производная положительна — резонансные частицы отдают свою энергию колебаниям. После того как амплитуда колебаний существенно выросла [максимальная амплитуда достигается по прошествии $(7-8)t_0$], их энергия начинает передаваться частицам, увеличивая «хвост» распределения со стороны высоких энергий (см. рис. 1). При этом в спектре колебаний сосредоточено около 0,1 начальной энергии резонансных частиц.

Спектр колебаний постепенно расширяется по мере того как расширяется область, где $\partial\Phi/\partial\omega > 0$. Максимум спектра перемещается в сторону больших волновых чисел, что соответствует движению фронта распределения вниз по энергиям. Стационарное состояние наступает тогда, когда энергия колебаний полностью возвращается к частицам, амплитуда их спадает до уровня начальных шумов (на рис. 2 и 3 видно стремление амплитуды колебаний со временем к уровню начальных шумов), не связанных с рассматриваемым механизмом возбуждения. Как видно из рис. 1—3, существенное спадание амплитуды колебаний (до уровня, сравнимого с уровнем начального шума) происходит за времена порядка $600 t_0$. Дальнейшая диффузия частиц в пространстве скоростей из-за рассеяния на остаточных шумах будет идти гораздо медленнее.

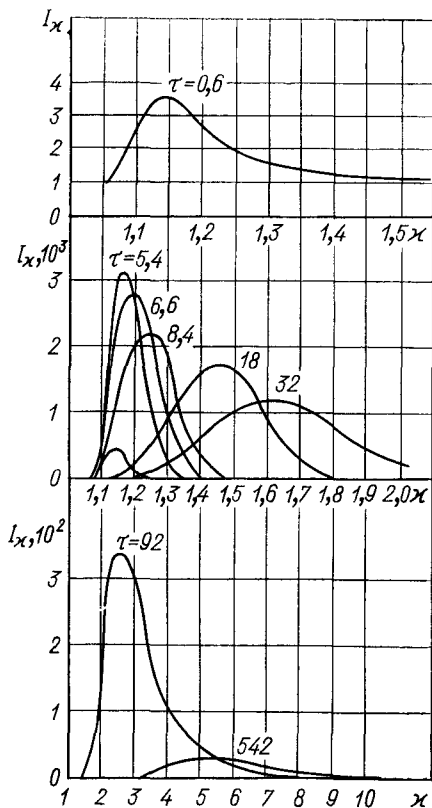


Рис. 2. Развитие во времени спектра возбуждаемых в системе колебаний

4. Обсуждение результатов. Проведенное рассмотрение показывает, что релаксация группы быстрых частиц в холодной плазме на возбужденных ими плазменных колебаниях в задаче с двумерной функцией распределения происходит иначе, чем в случае одномерного пучка. Причиной этого различия является существование наряду с передачей энергии от резонансных частиц к раскачиваемым колебаниям обратного процесса — более быстрые частицы поглощают энергию колебаний, вызывая их затухание.

Видно, что функция распределения быстрых частиц размывается как в сторону низких энергий (раскачка колебаний), так и в сторону высоких (затухание). Установившееся состояние характеризует-

ся отсутствием плато на функции распределения и нулевым уровнем шумов. Все возбужденные в процессе релаксации шумы с течением времени затухают, возвращая энергию частицам. Энергия, заклю-

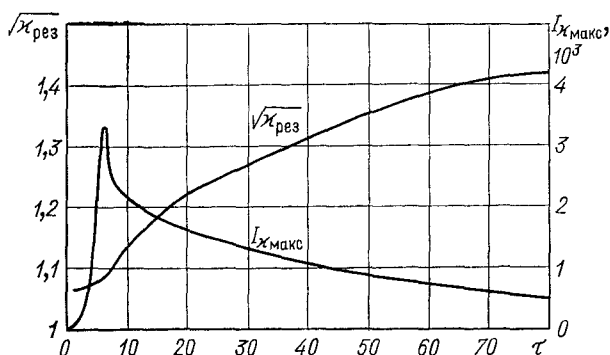


Рис. 3. Изменение во времени величин максимальной амплитуды $I_{\chi_{\text{рез}}}$ и соответствующего ей волнового числа $\sqrt{\chi_{\text{рез}}}$

ченная в шумах, меньше, чем в задаче с одномерным пучком. В момент наибольшей интенсивности шумов она составляет примерно 0,1 энергии, заключенной первоначально в резонансных частицах (против 0,3 при одномерном распределении).

§ 1.3. Неустойчивости столкновительных равновесий в режиме непрерывной инжекции

В § 1.2 предполагалось, что плотность быстрых частиц достаточно велика и неизменна в течение всего периода квазилинейной релаксации. Оба эти предположения нарушаются, если характерное время инжекции быстрых частиц больше или сравнимо с характерным временем квазилинейной релаксации. В этом случае в уравнении для функции распределения (1.6) должен быть учтен непрерывно действующий источник быстрых частиц интенсивности S , так что вместо (1.6) должно использоваться уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} D_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial v_{\beta}} + S. \quad (1.15)$$

Скорость квазилинейной релаксации в режиме непрерывной инжекции может быть сравнима также со скоростью кулоновской релаксации. При этом в уравнение для F должен быть добавлен член, учитывающий кулоновские столкновения. Тогда вместо (1.15) мы должны иметь дело с уравнением типа

$$\frac{\partial F}{\partial t} = C_{QL} + C_C + S, \quad (1.16)$$

где C_c — кулоновский столкновительный член, а C_{QL} обозначает первое слагаемое правой части (1.15), описывающее квазилинейную диффузию.

Примеры решения уравнений типа (1.15), (1.16) будут рассмотрены в гл. 6, где обсуждается квазилинейная релаксация продольных ионных пучков. Здесь, следуя [8], предположим, что имеет место лишь кулоновская релаксация, т. е. что функция распределения быстрых ионов удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = C_c + S. \quad (1.17)$$

Конкретизируя вид источника и кулоновского столкновительного члена, запишем это уравнение в виде [8]

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\tau_s v^2} \frac{\partial}{\partial v} [(v_c^2 + v^2) F] + \tilde{S}(v - v_0) \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (1.18)$$

Здесь $v_c = [(3\pi^{1/2}/4)(M_e/M_i)]^{1/3} v_{Te}$; v_0 — модуль скорости, соответствующей максимуму распределения источника; $\tau_s = M_i v_c^3 / M_b n_0 \Gamma_b$ — время кулоновского (классического) замедления (slow down); $\Gamma_b = (4\pi Z_b^2 e^4 / M_b^2) \Lambda$, Λ — кулоновский логарифм; Z_b , M_b — заряд инжектируемых ионов (в единицах e) и их масса (индекс « b » означает beam — пучок); $F = F(v, \lambda)$. Последний член правой части (1.18) описывает изменение распределения быстрых ионов вследствие инжекции. Предполагается, что скорости инжектируемых частиц направлены под одним и тем же углом $\alpha_0 = \arccos \lambda_0$ к магнитному полю, при этом $\lambda = v_{\parallel} / v$. Распределение частиц источника по модулю скорости $\tilde{S}(v - v_0)$ в [8] выбиралось в виде

$$\tilde{S}(v - v_0) = \bar{S}(v^2 \delta \sqrt{\pi})^{-1} \exp[-(v - v_0)^2 / \delta^2], \quad (1.19)$$

где \bar{S} — число частиц, инжектируемых в единицу объема за единицу времени; δ — полуширина источника, предполагаемая малой по сравнению со средней скоростью, $\delta \ll v_0$.

Уравнение (1.18) относится к интервалу инжектируемых скоростей $v_{Ti} \ll v \ll v_{Te}$. Кроме того, следует иметь в виду, что в (1.18) пренебрегаются угловым рассеянием частиц. Это, как разъяснялось в [8], вполне оправдано при $v > v_c$, т. е. при не слишком больших временах после начала инжекции.

Согласно [8], из уравнения (1.18) следует

$$F = f_c(v) \delta(\lambda - \lambda_0), \quad (1.20)$$

где

$$f_c(v) = \frac{0,5 \tau_s \bar{S}}{v^3 + v_c^3} \{ \operatorname{erfc}[(v - v_0)/\delta] - \operatorname{erfc}[(v^* - v_0)/\delta] \}; \quad (1.21)$$

$$v^* = [(v^3 + v_c^3) \exp(3t/\tau_s) - v_c^3]^{1/3}, \quad (1.22)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = (1/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

— функция ошибок (интеграл вероятности); индекс «с» у $f(v)$ означает кулоновское (Coulomb).

Функция $f_c(v)$ в различные моменты времени (после начала инжекции) имеет вид, изображенный на рисунках работы [8]. В частности, при $t \rightarrow \infty$ и $|v - v_0|/\delta \gg 1$

$$f_c(v) = \tau_s (v^3 + v_c^3)^{-1}. \quad (1.23)$$

В работе [8] было, в частности, найдено, что распределение (1.20) неустойчиво по отношению к возбуждению колебаний с частотой (1.2), причем максимум инкремента достигается при $\text{Re} \omega/k_{\perp} = = \sin \alpha_0 v(t)$ и равен

$$\gamma_{\text{макс}} = 0,85 (\bar{S} \tau_s / n_0) \sin^2 \alpha_0 v^2(t) \omega_{pi} \left[\frac{v_0^2 v(t)}{[v^3(t) + v_c^3] (v_0^3 + v_c^3)} \right]^{1/2}. \quad (1.24)$$

Здесь $v(t)$ определено соотношением

$$v^* [v(t), t] = v_0,$$

так что $v(t)$ приближенно означает положение положительного склона функции распределения как функцию времени.

При получении (1.24) предполагалось $k_{\parallel} v_{\parallel} < k_{\perp} v_{\perp}$. Это соответствует пренебрежению продольным движением быстрых ионов.

Согласно (1.24), инкремент максимален при чисто перпендикулярной инжекции. Он убывает со временем, поскольку со временем убывает и $v(t)$ вследствие того, что быстрые ионы релаксируют к своему равновесному распределению.

В [8] отмечалось, что характерные γ для примера системы с сильноточным источником, когда $S \tau_s = 0,01 n_0$, $\delta = 0,1 v_0$, порядка $\gamma \simeq \simeq 0,03 \omega_{pi}$. При этом $\gamma \tau_s \simeq 10^5 \div 10^7$, так что инкремент нарастания возмущений на много порядков превосходит скорость кулоновской релаксации.

Таким образом, авторы [8] пришли к выводу, что найденные ими распределения неустойчивы. Это означает, что и при непрерывной инжекции, так же как и при импульсной, релаксация быстрых ионов должна определяться не только кулоновскими столкновениями, но и коллективными процессами типа изучавшихся в [6, 7] и рассмотренных в § 1.2.

§ 1.4. Другие результаты теории коллективных процессов в токамаке с инжекцией нейтральных атомов

Вслед за отмеченными выше работами [2, 5—8] теория высокочастотных и ионно-циклотронных неустойчивостей, вызываемых пучками быстрых ионов, получила дальнейшее развитие в работах [10—13], а также в ряде других, часть из которых отметим ниже.

В работе [10] исследовались потенциальные неустойчивости, вызываемые быстрыми ионами с изотропным распределением по скоростям, что является дальнейшим развитием и детализацией резуль-

татов Л. В. Кораблева [14], относящихся к проблеме α -частиц. Согласно результатам [8], изложенным в § 1.3, изотропизация быстрых ионов может быть обусловлена их кулоновскими столкновениями с частицами основной плазмы. Согласно же [14], плазма с изотропным и немонотонным распределением ионов по скоростям может быть неустойчива относительно раскачки потенциальных колебаний с частотами, близкими к гармоникам ионно-циклотронной частоты. В [10] вычислялись инкременты такого рода (и некоторых других) неустойчивостей, а также пороги неустойчивостей, обусловленные затуханием Ландау на фоновых электронах и ионах.

В работе [11] обсуждалось влияние шири и неоднородности плотности на высокочастотную неустойчивость, рассмотренную в § 1.2. Авторы [11] пришли к выводу, что эти факторы в реальных условиях должны приводить к полной стабилизации высокочастотных возмущений. В [12] этот вывод был пересмотрен, при этом выяснилось, что в [11] была пропущена наиболее опасная ветвь возмущений, которая при типичных параметрах двухкомпонентного токамака должна быть нарастающей. Авторы [12] полагают, что в соответствии с работой [6] (см. также § 1.2) исследованная ими ветвь высокочастотных колебаний должна приводить к аномально быстрой диффузии пучка по поперечным энергиям, вследствие чего аналогично выводам [6] может измениться механизм пучкового нагрева в токамаке. Вместе с тем, по мнению авторов [12], для определенного суждения по этому вопросу необходимо дальнейшее исследование квазилинейных эффектов и эффектов градиента плотности.

В работе [13] исследовалось возбуждение ионно-циклотронных колебаний, что является развитием соответствующей части работы [2], а также работы [15], о которой будет идти речь ниже. К более подробному обсуждению работы [13] мы также вернемся несколько ниже.

В начале 70-х годов основное место в исследованиях по токамакам с быстрыми ионами стали занимать проблемы, связанные с продольной инжекцией. При этом наряду с отмеченными выше работами по неустойчивостям быстрых ионов, движущихся под большим углом к магнитному полю, стали проводиться исследования по неустойчивостям быстрых ионов, движущихся вдоль (или почти вдоль) магнитного поля. Первыми в этом новом направлении были работа [16] и продолжившая начатые в ней исследования работа [17].

В обеих этих работах использовалась модель магнитного поля с прямыми силовыми линиями. В [17] силовые линии считались непараллельными, что соответствует учету шири и пренебрежению всеми остальными эффектами, характерными для тороидального магнитного поля токамака. В рамках этих представлений в [16, 17] была рассмотрена возможность раскачки некоторых типов потенциальных колебаний. В [16] обсуждалась пучковая неустойчивость квазипоперечных ионно-звуковых колебаний с частотами порядка ионно-циклотронной (закон дисперсии типа $\omega^2 = \omega_{Bi}^2 + k_{\perp}^2 T_e / M_i$) и некоторые разновидности потенциальных дрейфовых неустойчивостей:

типа Кельвина — Гельмгольца (вызываемой неоднородностью профиля продольной скорости), кинетической дрейфово-температурной и кинетической токово-конвективной. Неустойчивость типа Кельвина—Гельмгольца была также объектом исследования работы [17], в которой она рассмотрена более подробно.

В [16, 17] так же как и в [8] использовались классические представления о кулоновском характере скоростной релаксации быстрых ионов. При этом предполагалось, что если инжектируемые частицы имеют скорость ниже $(M_e/M_i)^{1/3} v_{Te}$ (эта скорость фигурирует в теории кулоновской релаксации быстрых ионов, см. § 1.3), то энергия быстрых ионов передается основной ионной компоненте плазмы, а не электронной. В случае же больших скоростей инжектируемых частиц последние, по тем же представлениям, должны замедляться до скоростей порядка $(M_e/M_i)^{1/3} v_{Te}$ на электронах, а затем на ионах плазмы. При этом наряду с передачей своей энергии быстрые ионы должны передавать плазме также и свой импульс, в результате чего по прошествии времени релаксации плазма должна двигаться как целое вдоль магнитного поля с некоторой скоростью V , вообще говоря, зависящей от радиуса, что и должно служить причиной возможных неустойчивостей типа Кельвина—Гельмгольца. Что касается исследования пучковых эффектов, проводившегося в [16], то оно, как разъяснялось в [17], относится к стадии еще непрорелаксировавшего пучка.

В результате в работе [16] был сделан вывод, что раскачка продольным пучком квазипоперечных ионно-звуковых колебаний вряд ли возможна ввиду сильного стабилизирующего влияния шира. Согласно [16], шир должен существенно влиять также на кинетические дрейфовые неустойчивости и в меньшей степени на неустойчивости типа Кельвина — Гельмгольца. Последнее и послужило основанием для рассмотрения этой неустойчивости в [17]. Авторы [17] получили следующий критерий стабилизации широм этой неустойчивости:

$$\tau U' L_s / (\tau + 1) v_{Ti} < (9/8)\pi,$$

где $\tau = T_e/T_i$; U' — радиальная производная продольной скорости плазмы; L_s — длина шира; v_{Ti} — тепловая скорость ионов. Этот результат свидетельствует о том, что неустойчивость типа Кельвина—Гельмгольца может быть подавлена, если шир не слишком мал.

Возможности раскачки различных типов потенциальных (электростатических) неустойчивостей в токамаке с инжекцией быстрых нейтральных атомов обсуждались также в работах [18—20]. Так, в [18] была рассмотрена возможность раскачки высокочастотных ионно-звуковых колебаний ($\omega, \gamma \gg \omega_{Bi}$), однако такая раскачка может иметь место лишь при достаточно большом отношении T_e/T_i , что в случае токамаков с инжекцией не представляет интереса. В работе [19] обсуждалась магнитно-дрейфовая неустойчивость на ветви запертых ионов. При этом пренебрегалось разбросом быстрых ионов по скоростям, что, как показано в работе [21], законо-

лишь при чрезвычайно малом разбросе по скоростям, $\Delta v/v \simeq 2,5 \cdot 10^{-3}$, представляющем весьма ограниченный интерес. При большем же разбросе по скоростям, согласно [21], эта неустойчивость исчезает. В работе [20] недостаточно корректно была оценена роль столкновительной диссипации, которая, как было показано автором [22] и В. А. Мазуром, автором и И. Г. Шухманом [23], легко стабилизирует рассмотренные в [20] неустойчивости.

Большой круг неустойчивостей был проанализирован в целях выяснения их возможной роли в условиях двухкомпонентного токамака в работе [15] (см. также работу этой группы авторов [24]). Здесь, как и в [17], использовалась модель магнитного поля с прямыми и не параллельными силовыми линиями, учитывающая шир магнитного поля, но не учитывающая эффекты тороидальности. Как и в работе [8], в качестве квазиравновесных функций распределения быстрых ионов в [15] использовались функции, являющиеся решением уравнения Фоккера—Планка, учитывающего лишь кулоновские столкновения. Работа [15] интересна, в частности, тем, что здесь собраны воедино результаты, касающиеся многих типов высокочастотных и ионно-циклотронных, а также дрейфовых неустойчивостей, описываемых моделью плоского слоя. В результате авторы [15] пришли к заключению, что при типичных параметрах пучка и плазмы в системах с непрерывной продольной инжекцией рассмотренные ими возмущения должны быть устойчивы.

В целом из анализа [15—17] вытекало, что теория микронеустойчивостей не предсказывает каких-либо серьезных препятствий для реализации идеи двухкомпонентного реактора-токамака.

Этот общий вывод, однако, подвергся пересмотру в связи с обнаружением нового класса неустойчивостей, существенно зависящих от тороидальности магнитного поля, ролью которой в вышеуказанных работах пренебрегалось. На важность этого класса неустойчивостей было впервые обращено внимание в работе автора [25], где и были первоначально обнаружены эти неустойчивости (см. также [24, 26]).

Работа [25] основывалась на идее о чувствительности альфвеновских волн к эффектам баллонности возмущенного давления, высказанной в предшествующей работе автора [27]. Как было показано в [25], при учете баллонной части возмущенного давления, обусловленной быстрыми ионами, альфвеновские волны могут оказаться неустойчивыми, если функция распределения этих ионов по продольным скоростям имеет пик, $\partial F/\partial v_{\parallel} > 0$. Причем, что весьма существенно, неустойчивость возможна даже при малом отношении скорости быстрых ионов к альфвеновской, $v_{\parallel}/c_A \ll 1$. Это обусловлено наличием резонанса типа $\omega = v_{\parallel}/qR$, специфичного для продольно-неоднородного магнитного поля, в том числе для тороидального.

Работа [25] (ее результаты были изложены затем в книге [1]) положила начало систематическому анализу альфвеновских неустойчивостей токамака с инжекцией нейтральных атомов. В этом на-

правлении было выполнено значительное число работ, касающихся как линейной, так и нелинейной теории этих неустойчивостей. Об этих работах и их результатах будет идти речь в гл. 4—7.

Вследствие изотропизации распределения быстрых ионов, обусловленной кулоновскими столкновениями, даже при параллельной инжекции значительная доля этих ионов по прошествии соответствующего времени может обладать поперечными скоростями, сравнимыми с продольными и превышающими тепловую скорость ионов основной части плазмы. В этих условиях возможно возбуждение ионно-циклотронных гармоник аналогично тому, как это предсказывается для случая поперечной инжекции. Такого рода циклотронные неустойчивости изучались в отмеченной выше работе [13], а также в работе [28]. Согласно [13, 28], возбуждение основной циклотронной гармоники при этом оказывается практически невозможным. Что касается высших гармоник, то, согласно [13], их инкремент может составлять несколько процентов от ионной циклотронной частоты.

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТНО-ЗВУКОВОЙ ЦИКЛОТРОННОЙ «ТЕРМОЯДЕРНОЙ» НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 2.1. Введение

В работе [14] было показано, что быстрые α -частицы, образующиеся в результате термоядерных реакций, могут приводить к раскачке колебаний плазмы с частотами, близкими к гармоникам циклотронной частоты α -частиц. Инкремент таких неустойчивостей γ пропорционален корню квадратному из отношения плотности α -частиц к плотности плазмы:

$$\gamma/\omega_{V\alpha} \simeq |\omega - n\omega_{V\alpha}|/\omega_{V\alpha} \simeq (N_\alpha/N_0)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Здесь N_α , N_0 — плотности α -частиц и плазмы; $\omega_{V\alpha} = e_\alpha B_0/M_\alpha c$ — циклотронная частота α -частиц; e_α , M_α — их заряд и масса; B_0 — равновесное магнитное поле.

В работе [14] рассмотрен случай неустойчивости, связанной с возбуждением потенциальных возмущений, мало интересных для проблемы управляемого термоядерного синтеза. Возбуждение непотенциальных возмущений с частотами, близкими к гармоникам циклотронной частоты α -частиц, было впервые рассмотрено в работе [29], а затем в работах [30, 31] и ряде других. Оказалось, что инкремент непотенциальных циклотронных колебаний, как и потенциальных, тоже пропорционален корню квадратному из отношения плотностей [см. (2.1)]. Что касается инкрементов других неустойчивостей, вызываемых α -частицами, то все они линейны

по N_α/N_0 и потому гораздо меньше инкрементов циклотронных неустойчивостей (характерные значения $N_\alpha/N_0 \simeq 10^{-2} \div 10^{-3}$).

Следует, однако, иметь в виду, что отмеченные выше результаты, касающиеся циклотронных термоядерных неустойчивостей, были получены в предположении, что магнитное поле, удерживающее плазму, пространственно-однородно. Это, в частности, означает, что циклотронная частота не зависит от координаты вдоль силовой линии. Реальное же магнитное поле тороидальных магнитных ловушек типа токамак неоднородно вдоль силовых линий. Вследствие тороидальности оно гофрировано на порядок a/R от основного поля (a, R — малый и большой радиусы тора), так что

$$|\omega_{B\alpha}(\mathbf{r}) - \bar{\omega}_{B\alpha}| / \bar{\omega}_{B\alpha} \simeq a/R, \quad (2.2)$$

где $\bar{\omega}_{B\alpha}$ и $\omega_{B\alpha}(\mathbf{r})$ — среднее и локальное (в точке \mathbf{r}) значения циклотронной частоты α -частицы.

Поскольку в условиях реактора-токамака

$$(N_\alpha/N_0)^{1/2} \ll a/R, \quad (2.3)$$

ясно, что теория циклотронных термоядерных неустойчивостей, развитая в приближении однородного магнитного поля, к реактору-токамаку неприменима.

В связи с этим возникает вопрос о циклотронных термоядерных неустойчивостях в условиях (2.3). Обсуждению этого вопроса и посвящена данная глава, основывающаяся на результатах работ [32—36].

В § 2.2 обсуждается вопрос о возмущенной функции распределения α -частиц в магнитном поле произвольной тороидальной конфигурации и производится преобразование интеграла по траектории, через который выражается эта функция f . Показано, что f может быть представлено в «каноническом» виде, сходном с тем, который фигурирует в теории колебаний плазмы в однородном магнитном поле. Показано также, что тороидальность приводит в основном к модификации «интегрирующей экспоненты».

В § 2.3 обсуждается влияние шири на возмущения с $k_{\parallel} = 0$. В общей геометрии показано, что возмущения с $k_{\parallel} = 0$, соответствующие чисто радиальным смещениям, нечувствительны к шире, и в этом смысле являются наиболее опасными.

В § 2.4 приводится сводка основных результатов теории однородной плазмы в однородном магнитном поле, касающихся термоядерных циклотронных неустойчивостей с $k_{\parallel} = 0$.

В § 2.5 получено дисперсионное уравнение для чисто радиальных колебаний слаботороидального магнитного поля произвольной конфигурации. Такое дисперсионное уравнение выражается через компоненты тензора диэлектрической проницаемости, имеющего вид интеграла по траектории.

В § 2.6 вычисляется диэлектрическая проницаемость осесимметричного токамака круглого сечения. Рассмотрены отдельно

вклады в диэлектрическую проницаемость пролетных α -частиц, которые предполагаются движущимися с постоянной продольной скоростью, и запертых α -частиц.

В § 2.7 исследуются циклотронные колебания, связанные с пролетными частицами. Показано, что если условие (2.3) удовлетворяется, то неустойчивость с инкрементом $\gamma \sim (N_\alpha/N_0)^{1/2}$ подавляется.

В § 2.8 исследуется роль запертых α -частиц. Показано, что запертые α -частицы могут приводить к раскату циклотронных колебаний, однако инкремент такой раскату пропорционален N_α/N_0 , а не $(N_\alpha/N_0)^{1/2}$.

В § 2.9 исследуется стабилизирующая роль теплового разброса α -частиц.

В § 2.10 дается обзор работ и приводятся некоторые другие результаты.

§ 2.2. Возмущенная функция распределения

Исходим из известного выражения для возмущенной функции распределения [5, 29]:

$$f = -\frac{e}{M} \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} dt', \quad (2.4)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{B} — возмущения электрического и магнитного полей; f_0 — стационарная функция распределения; интеграл берется вдоль траектории частицы; остальные обозначения общепринятые.

В работе [29] было показано, что в случае однородной плазмы, находящейся в однородном магнитном поле, и при выборе возмущения в виде плоской волны, $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = (\mathbf{E}_{k\omega}, \mathbf{B}_{k\omega}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, соотношение (2.4) может быть приведено к виду

$$f = -\frac{e}{M} \left\{ [G_1(\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp) + G_2[\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp]_\parallel] \frac{\Phi_\perp}{k_\perp^2} + \left[G_0 \frac{\partial F}{\partial v_\parallel} - \frac{1}{\omega} G_1 \left(\frac{\partial F}{\partial v_\parallel} - \frac{v_\parallel}{v_\perp} \frac{\partial F}{\partial v_\perp} \right) \right] E_\parallel \right\}, \quad (2.5)$$

где, в отличие от (2.4), f и \mathbf{E} понимаются как фурье-компоненты $f_{k\omega}$, $\mathbf{E}_{k\omega}$; F — стационарная функция распределения f_0 , выраженная через v_\parallel и v_\perp — скорости частицы вдоль и поперек стационарного магнитного поля \mathbf{B}_0 , т. е. $f_0(\mathbf{v}) = F(v_\perp, v_\parallel)$,

$$\Phi_\perp = \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial F}{\partial v_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_\parallel} - \frac{v_\parallel}{v_\perp} \frac{\partial F}{\partial v_\perp} \right), \quad (2.6)$$

$$G_0 = \int_{-\infty}^t \exp\{i\omega(t-t') - i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')]\} dt', \quad (2.7)$$

а функции G_1 и G_2 отличаются от G_0 тем, что в подинтегральном выражении (2.4) перед экспонентой стоят соответственно множители

$$\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp (t', \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0), [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{v}_\perp (t', \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)]_\parallel.$$

Другие обозначения, используемые здесь, таковы: k_\parallel , \mathbf{k}_\perp — компоненты волнового вектора \mathbf{k} вдоль и поперек \mathbf{B}_0 ; аналогичный смысл имеют E_\parallel , \mathbf{E}_\perp ; \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 — координаты и скорость частицы в некоторый фиксированный момент времени $t = t_0$; индекс « \parallel » у векторного произведения означает проекцию на \mathbf{B}_0 .

Выясним, как результат (2.5) обобщается на случай тороидального магнитного поля произвольной геометрии.

Вводим систему криволинейных координат $x^1 = a$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, таких, что координата a характеризует расстояние от магнитной оси до соответствующей магнитной поверхности, а θ , φ представляют собой угловые координаты на поверхности $a = \text{const}$, период изменения которых полагаем равным 2π .

Известно [1], что в качестве координат θ и φ можно выбрать такие, что силовые линии поля \mathbf{B}_0 в них являются «прямыми». При этом контравариантные компоненты \mathbf{B}_0 имеют вид $B_\theta^0 = 0$, $B_\varphi^0 = \chi'/2\pi\sqrt{g}$, $B_a^0 = \Phi'/2\pi\sqrt{g}$, где g — детерминант метрического тензора g_{ik} координатной системы a , θ , φ , а $\chi'(a)$, $\Phi'(a)$ — производные по a от поперечного (вдоль θ) и продольного (вдоль φ) магнитных потоков.

Полагаем, что возмущения электрического и магнитного полей зависят от координат и времени по закону $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \sim \exp(-i\omega t + ik_\alpha x^\alpha)$, где по индексу α производится суммирование ($\alpha = 1, 2, 3$). Вследствие периодичности x^2 и x^3 значения k_2 и k_3 должны быть целыми числами, так что $k_2 = m$, $k_3 = -l$. Знак минус перед l берется для удобства.

Пусть $\mathbf{e}_\parallel = \mathbf{B}_0/B_0$ — единичный вектор вдоль \mathbf{B}_0 , а $\mathbf{e}_a \equiv \nabla a/|\nabla a|$ — единичный вектор вдоль направления a . Единичные векторы \mathbf{e}_\parallel и \mathbf{e}_a ортогональны друг другу. Ортогональный им третий единичный вектор $\mathbf{e}_b = [\mathbf{e}_\parallel, \mathbf{e}_a]$.

Используя единичные векторы \mathbf{e}_a , \mathbf{e}_b , \mathbf{e}_\parallel , можно ввести «физические» компоненты волнового вектора k_a , k_b , k_\parallel , определив их соотношениями

$$ik_a = \mathbf{e}_a \nabla \ln \tilde{X}; \quad ik_b = \mathbf{e}_b \nabla \ln \tilde{X}; \\ ik_\parallel = \mathbf{e}_\parallel \nabla \ln \tilde{X};$$

где \tilde{X} — возмущение. Связь k_a , k_b , k_\parallel , являющихся скалярами, с ковариантными компонентами волнового вектора k_i определяется соотношениями:

$$k_a = g^{1i} k_i / \sqrt{g^{11}}; \\ k_b = (k_2 g_{3k} - k_3 g_{2k}) B_0^k / B_0 \sqrt{g^{11} g}; \\ k_\parallel = k_i B_0^i / B_0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $k_a^2 + k_b^2 = k_\perp^2$,

где $k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2$, а квадрат полного волнового вектора k^2 определяется обычным образом: $k^2 = g^{\alpha\beta} k_{\alpha} k_{\beta}$.

Вводим также «физические» компоненты электрического поля E_a, E_b, E_{\parallel} , определив их соотношениями $E_a = e_a \mathbf{E}$, $E_b = e_b \mathbf{E}$, $E_{\parallel} = e_{\parallel} \mathbf{E}$. Связь этих величин с E^i имеет вид:

$$\begin{aligned} E_a &= E^1 / \sqrt{g^{11}}; \\ E_b &= E^k B_0^i (g_{2k} g_{3i} - g_{3k} g_{2i}) / B_0 \sqrt{g^{11} g}; \\ E_{\parallel} &= g_{ik} E^k B_0^i / B_0. \end{aligned}$$

Прямым вычислением убеждаемся, что

$$\begin{aligned} k_a E_a + k_b E_b &= \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}, \quad k_a E_b - k_b E_a = [\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{E}_{\perp}]_{\parallel}, \\ \text{где } \mathbf{k}_{\perp} &\equiv \mathbf{k} - k_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} \equiv \mathbf{E} - E_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом вводим v_a, v_b, v_{\parallel} , так что

$$\begin{aligned} v_a &= v^1 / \sqrt{g^{11}}; \\ v_b &= v^k B_0^i (g_{2k} g_{3i} - g_{3k} g_{2i}) / B_0 \sqrt{g^{11} g}; \quad v_{\parallel} = g_{ik} v^k B_0^i / B_0. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} v_a^2 + v_b^2 &= v_{\perp}^2 \equiv v^2 - v_{\parallel}^2; \\ k_a v_a + k_b v_b &= \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp}; \\ k_a v_b - k_b v_a &= [\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{v}_{\perp}]_{\parallel}. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что, как и в случае однородного магнитного поля, стационарная функция распределения $f_0(\mathbf{v})$ может быть представлена как $F(v_{\perp}, v_{\parallel})$ и переходя в (2.4) от производных f_0 по v^i, v^k к $\partial F / \partial v_{\parallel}, \partial F / \partial v_{\perp}$, убеждаемся, что (2.4) может быть приведено к виду (2.5), если в (2.5) подразумевать, что под знаком интеграла по t' стоят все величины, находящиеся справа от G_1, G_2, G_0 . Такая модификация обусловлена тем, что теперь $\partial F / \partial v_{\parallel}, \partial F / \partial v_{\perp}$, как и v_{\parallel}, v_{\perp} , не являются интегралами движения и потому не могут быть вынесены за знак интеграла по t' . То же касается величины k_{\perp}^2 и произведений \mathbf{E} на \mathbf{k} , которые вследствие зависимости метрического тензора от координат также зависят от точки на траектории частицы.

В отличие от случая однородного магнитного поля частицы при движении в тороидальном магнитном поле не только участвуют в циклотронном вращении поперек магнитного поля и перемещении вдоль силовых линий поля, но и совершают дрейфовое движение под действием кривизны и неоднородности магнитного поля. Поэтому поперечная скорость частицы состоит из двух частей: скорости циклотронного вращения $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ и скорости дрейфового движения \mathbf{V}_D , $\mathbf{v}_{\perp} = \tilde{\mathbf{v}}_{\perp} + \mathbf{V}_D$, где вектор $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ удовлетворяет такому же уравнению движения, как и поперечная скорость частицы в случае однородного магнитного поля, $d\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}/dt = [\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}, \omega_B]$, а дрейфовая скорость имеет известный вид [1]

$$\mathbf{V}_D = (v_{\perp}^2 / 2 + v_{\parallel}^2) [\mathbf{e}_{\parallel}, \nabla \ln B_0] / \omega_B.$$

Здесь $\omega_B = e_{\parallel} \omega_B$, $\omega_B = eB_0/Mc$.

Представляя $\tilde{v}_a = v_{\perp} \cos \alpha$, $\tilde{v}_b = v_{\perp} \sin \alpha$, из уравнений движения найдем известный закон изменения фазы циклотронного вращения:

$$d\alpha/dt = -\omega_B. \text{ Поэтому } \alpha = \alpha_0 - \int_{t_0}^t \omega_B dt'.$$

Аналогично поперечным скоростям представляем поперечные координаты в виде $\mathbf{x}_{\perp} = \tilde{\mathbf{x}}_{\perp} + \mathbf{X}_D$, где $d\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}/dt = \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$, $d\mathbf{X}_D/dt = \mathbf{V}_D$.

Приближенное решение уравнения для $\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}$ (с точностью до членов порядка $v/L\omega_B$, где L — характерный размер изменения магнитного поля) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_a(t) - \tilde{x}_a(t') &= -[v_{\perp}(t)/\omega_B(t)] \sin\left(\alpha_0 - \int_{t_0}^t \omega_B dt''\right) + \\ &+ \frac{v_{\perp}(t')}{\omega_B(t')} \sin\left(\alpha_0 - \int_{t_0}^{t'} \omega_B dt''\right); \\ \tilde{x}_b(t) - \tilde{x}_b(t') &= \frac{v_{\perp}(t)}{\omega_B(t)} \cos\left(\alpha_0 - \int_{t_0}^t \omega_B dt''\right) - \\ &- \frac{v_{\perp}(t')}{\omega_B(t')} \cos\left(\alpha_0 - \int_{t_0}^{t'} \omega_B dt''\right). \end{aligned}$$

Используя приведенные выше выражения, представляем экспоненту (2.7) в виде

$$\begin{aligned} &\exp\{i\omega(t-t') - ik_{\alpha}[x^{\alpha}(t) - x^{\alpha}(t')]\} = \\ &= \exp\left\{i\omega(t-t') - i \int_{t'}^t k_{\parallel} v_{\parallel} dt'' - i \int_{t'}^t k_{\perp} \mathbf{V}_D dt'' + \right. \\ &\left. + \frac{ik_{\perp} v_{\perp}(t)}{\omega_B(t)} \sin[\alpha(t) - \psi] - \frac{ik_{\perp} v_{\perp}(t')}{\omega_B(t')} \sin[\alpha(t') - \psi]\right\}. \end{aligned}$$

Здесь было принято $k_a = k_{\perp} \cos \psi$, $k_b = k_{\perp} \sin \psi$. Производя стандартное разложение

$$\exp\left[-\frac{ik_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \sin(\alpha - \psi)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B}\right) \exp[-in(\alpha - \psi)],$$

приводим выражение для возмущенной функции распределения (2.4) к виду

$$f = -\frac{e}{M} \sum_n \exp\left[i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \sin(\alpha - \psi) - in(\alpha - \psi)\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^t dt' S_n(t, t') \left\{ \left[(\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp) \frac{nJ_n}{\xi} + i [(\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp)_\parallel J'_n] \frac{\Phi_\perp v_\perp}{k_\perp} + \right. \right. \\ \left. \left. + E_\parallel \left[J_n \frac{\partial F}{\partial v_\parallel} - \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_\parallel} - \frac{v_\parallel}{v_\perp} \frac{\partial F}{\partial v_\perp} \right) k_\perp v_\perp \frac{nJ_n}{\xi} \right] \right\}, \quad (2.8)$$

где $\xi \equiv k_\perp v_\perp / \omega_B$, а $S(t, t')$ определено соотношением

$$S_n(t, t') = \exp \left\{ i \omega (t - t') - i n \int_{t'}^t \omega_B dt'' - i \int_{t'}^t k_\parallel v_\parallel dt'' - \right. \\ \left. - i \int_{t'}^t \mathbf{k}_\perp \mathbf{V}_D dt'' \right\}. \quad (2.9)$$

§ 2.3. О влиянии шира на возмущения с $k_\parallel = 0$

В литературе иногда встречаются утверждения, что неустойчивость циклотронных возмущений с $k_\parallel = 0$, приводящая к инкременту порядка (2.1), подавляется широм. Это не совсем так. В связи с этим сделаем соответствующие разъяснения.

Стабилизирующая роль шира подробно изучалась в теории дрейфовых колебаний неоднородной плазмы. При этом, в частности, было показано, что шир влияет на возмущения желобкового типа.

По определению, в желобковых возмущениях $k_\parallel = 0$. Но величина k_\parallel , вообще говоря, является функцией координаты $x^1 \equiv a$. Поэтому если при каком-то $a = a_0$ $k_\parallel(a_0) = 0$, т. е. $m\chi'(a_0) = \Phi'(a_0)$, то в соседних точках, $a \neq a_0$,

$$k_\parallel(a) = (a - a_0) [m\chi''(a_0) - \Phi''(a_0)] / 2\pi \sqrt{g} B_0.$$

С помощью первого из этих соотношений одно из волновых чисел, например l , можно выразить через другое, $l = m\chi'(a_0)/\Phi'(a_0)$, так что

$$k_\parallel(a) = (a - a_0) (\chi'/\Phi')' m\Phi' / 2\pi \sqrt{g} B_0.$$

Величина $(\chi'/\Phi')'$, как известно, характеризует шир магнитного поля. Поэтому при наличии шира чисто желобковые возмущения отсутствуют. С этим связана, в частности, стабилизация широм желобковой неустойчивости, обусловленной неоднородностью плазмы и кривизной силовых линий магнитного поля.

Следует, однако, иметь в виду, что желобковая неустойчивость называется так потому, что она приводит к образованию желобков на магнитных поверхностях. Математически это означает, что в теории желобковой неустойчивости волновые числа m и l предполагаются отличными от нуля. Только при $m \neq 0$, как это обычно и понимается в теории желобковой неустойчивости, и имеет место отмеченный выше вывод о стабилизирующей роли шира.

Что касается интересующих нас циклотронных термоядерных неустойчивостей, для которых неоднородность плазмы несущественна, то они могут развиваться и без образования желобков, т. е. при $m = l = 0$. В этом случае $k_{\parallel}(a) \equiv 0$, так что эффект шириа при возмущениях с $m = l = 0$ не проявляется.

Из отмеченной выше нечувствительности чисто радиальных возмущений к шире магнитного поля следует, что именно такие циклотронные термоядерные неустойчивости наиболее опасны. В связи с этим ниже им уделяется основное внимание. Учитывая, однако, что при малом шире могут быть существенны также возмущения с $k_{\parallel} = 0$ и $(m, l) \neq 0$, мы получим уравнения, описывающие весь класс возмущений с $k_{\parallel} = 0$ [как с $m = l = 0$, так и с $(m, l) \neq 0$].

Зная из теории колебаний однородной плазмы [5, 29], что за неустойчивости с инкрементом (2.1) ответственны возмущения с $E_{\perp} \neq 0$, $E_{\parallel} = 0$, мы ограничимся рассмотрением волн с указанной поляризацией.

При этих предположениях выражение для функции распределения (2.8) принимает вид

$$f = -\frac{e}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[i\xi \sin(\alpha - \psi) - in(\alpha - \psi)] \int_{-\infty}^t dt' \times \\ \times S_n(t, t') \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \left(\frac{nJ_n}{\xi} E_1 + iJ'_n E_2 \right), \quad (2.10)$$

где теперь $S_n(t, t')$ определяется формулой (2.9) с $k_{\parallel} = 0$, а величины E_1, E_2 здесь и ниже, в отличие от § 2.2, означают

$$E_1 = (\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}) / k_{\perp}, \quad E_2 = [\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}]_{\parallel} / k_{\perp}.$$

§ 2.4. Возмущения с $k_{\parallel} = 0$ в приближении однородного магнитного поля

В случае однородного магнитного поля $\mathbf{V}_D = 0$, $\omega_B = \text{const}$, поэтому $S_n(t, t') = \exp[i(\omega - n\omega_B)(t - t')]$. При этом коэффициент при $S_n(t, t')$ в подынтегральном выражении (2.10) не зависит от t' , так что

$$f = -\frac{ie}{M} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[i\xi \sin(\alpha - \psi) - in(\alpha - \psi)] \frac{(nJ_n/\xi) E_1 + iJ'_n E_2}{\omega - n\omega_B}. \quad (2.11)$$

С возмущением f связаны возмущенные токи $j_1 = (\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{j}_{\perp}) / k_{\perp}$, $j_2 \equiv \equiv [\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{j}_{\perp}]_{\parallel} / k_{\perp}$, которые, как следует из (2.11) и определения $\mathbf{j} = = \Sigma e \mathbf{v} f d\mathbf{v}$ (сумма по сортам частиц), в случае однородного маг-

нитного поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= -i \sum \frac{e^2}{M} \int v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \sum_n \frac{nJ_n/\xi}{\omega - n\omega_B} [(nJ_n/\xi) E_1 + iJ'_n E_2]; \\ j_2 &= - \sum \frac{e^2}{M} \int v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \sum_n \frac{J'_n}{\omega - n\omega_B} [(nJ_n/\xi) E_1 + iJ'_n E_2]. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Функция F предполагается нормированной так, что

$$\int F v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = N,$$

где N — плотность соответствующего сорта частиц.

Вводя компоненты вектора электрической индукции D_1, D_2 , с помощью (2.12) находим

$$D_1 = \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2, \quad D_2 = \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2,$$

где $\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \Sigma \varepsilon_{ik}^{(\beta)}$ (сумма по β — по сортам частиц)

$$\varepsilon_{ik}^{(\beta)} = \frac{4\pi e^2}{M\omega} \left\langle \sum_n \frac{v_{\perp} \partial F / \partial v_{\perp}}{\omega - n\omega_B} \begin{pmatrix} \frac{n^2 J_n^2}{\xi^2}, & i \frac{nJ_n J'_n}{\xi} \\ -i \frac{nJ_n J'_n}{\xi}, & J_n'^2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (2.13)$$

а символ $\langle \dots \rangle$ означает $\int (\dots) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}$.

Уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = (4\pi/c) \mathbf{j} + (1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$ при этом сводятся к уравнениям

$$\varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 = 0; \quad \varepsilon_{21} E_1 + [\varepsilon_{22} - (ck_{\perp}/\omega)^2] E_2 = 0, \quad (2.14)$$

из которых следует дисперсионное уравнение теории колебаний однородной плазмы:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - (ck_{\perp}/\omega)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.15)$$

В пренебрежении малым вкладом α -частиц $\varepsilon_{ik} \approx \varepsilon_{ik}^{(0)}$, где

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = -\omega_{pi}^2/\omega^2; \quad \varepsilon_{12}^{(0)} = -\varepsilon_{21}^{(0)} = -i\omega_{pe}^2/\omega\omega_{Be}; \quad \varepsilon_{22}^{(0)} = 0, \quad (2.16)$$

где $\omega_{pi}^2 = \omega_{pd}^2 + \omega_{pt}^2$ — сумма квадратов плазменных частот дейтерия и трития; ω_{pe}, ω_{Be} — плазменная и циклотронная частоты электронов. В (2.16) мы опустили слагаемые, вклад которых в дисперсионное уравнение несуществен. Величина $\varepsilon_{11}^{(0)}$ обязана ионам, а $\varepsilon_{12}^{(0)}$ — электронам. Отметим также, что интересующий нас интервал частот таков, что $\omega_{Bi} \ll \omega \ll (\omega_{Bi} \omega_{Be})^{1/2}$. Поперечное волновое число предполагается ограниченным сверху условием $k_{\perp} \ll \omega_{pe}/c$.

В принятом приближении дисперсионное уравнение (2.15) сводится к следующему:

$$Q^{(0)} \equiv \varepsilon_{11}^{(0)} - (\omega/c k_{\perp})^2 (\varepsilon_{12}^{(0)})^2 = 0. \quad (2.17)$$

Отсюда и из (2.16) получается, что интересующие нас возмущения имеют закон дисперсии

$$\omega^2 = c_A^2 k_{\perp}^2, \quad (2.18)$$

где $c_A^2 = c^2 \omega_{Be}^2 \omega_{pi}^2 / \omega_{pe}^4$ — квадрат скорости Альфвена. Возмущения типа (2.18) описывают высокочастотные ($\omega \gg \omega_{Bt}$) магнитно-звуковые волны, распространяющиеся поперек статического магнитного поля.

Учет вклада α -частиц приводит к тому, что дисперсионное уравнение (2.17) заменяется

$$Q^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(\alpha)} = 0, \quad (2.19)$$

где $\varepsilon_{11}^{(\alpha)}$ — вклад α -частиц в компоненту тензора диэлектрической проницаемости ε_{11} . Выражение для $\varepsilon_{11}^{(\alpha)}$ дается формулой (2.13).

В работе [14] было показано, что в случае δ -функционального распределения α -частиц по скоростям, $F \sim \delta(v - v_{\alpha})$, выражение для $\varepsilon_{11}^{(\alpha)}$ может быть приведено к виду

$$\varepsilon_{11}^{(\alpha)} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k_{\perp}^2 v_{\alpha}^2} \left[1 - \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_{2n}(2k_{\perp} v_{\alpha}/\omega_{B\alpha})}{\omega - n\omega_{B\alpha}} \right], \quad (2.20)$$

где $\omega_{p\alpha}^2 = 4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}/M_{\alpha}$ — квадрат плазменной частоты α -частиц.

При частотах, близких к гармоникам циклотронной частоты α -частиц, $\omega \approx n\omega_{B\alpha}$ ($n \gg 1$), из (2.16), (2.17), (2.20) получается дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{k_{\perp}^2 c_A^2}{\omega^2} - \frac{N_{\alpha}}{N_{0\text{эф}}} \frac{c_A^2}{v_{\alpha}^2} \frac{\omega J_{2n}(2k_{\perp} v_{\alpha}/\omega_{B\alpha})}{\omega - n\omega_{B\alpha}} = 0, \quad (2.21)$$

где $N_{0\text{эф}}$ — эффективная плотность плазмы,

$$N_{0\text{эф}} = (e_d^2 N_d/M_d + e_t^2 N_t/M_t)/(e_{\alpha}^2/M_{\alpha}),$$

а индексы d и t соответственно означают дейтерий и тритий.

Полагая в (2.21) $\omega = \omega^0 + \omega^{(1)}$ и $k_{\perp} = k_{\perp}^{(0)}$, где $\omega^{(0)}$ и $k_{\perp}^{(0)}$ удовлетворяют соотношению

$$\omega^{(0)} = n\omega_{B\alpha} = k_{\perp}^{(0)} c_A, \quad (2.22)$$

получаем квадратное уравнение для добавки $\omega^{(1)}$:

$$\left(\frac{\omega^{(1)}}{n\omega_{B\alpha}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{N_{\alpha}}{N_{0\text{эф}}} \frac{c_A^2}{v_{\alpha}^2} J_{2n} \left(\frac{2n v_{\alpha}}{c_A} \right). \quad (2.23)$$

Вследствие знакопеременности функции J_{2n} квадрат $\omega^{(1)}$ может быть отрицательным, что и соответствует циклотронной термо-

ядерной неустойчивости. Согласно (2.23), инкремент этой неустойчивости определяется выражением

$$\frac{\gamma}{\omega_{B\alpha}} = \left(\frac{N_\alpha}{2N_{\text{эфф}}} \right)^{1/2} \frac{nc_A}{v_\alpha} \sqrt{-J_{2n} \left(\frac{2nv_\alpha}{c_A} \right)}. \quad (2.24)$$

Это и соответствует оценке (2.1), приводившейся в § 2.1.

§ 2.5. Дисперсионное уравнение колебаний плазмы в слаботороидальном магнитном поле

Теперь перейдем к выяснению того, как влияет на рассмотренную в § 2.4 циклотронную «термоядерную» неустойчивость неоднородность магнитного поля.

Вначале пренебрежем вкладом α -частиц и коснемся вопроса о влиянии неоднородности магнитного поля на волны типа (2.18).

Прежде всего замечаем, что вследствие координатной зависимости циклотронной частоты ($\omega_B \neq \text{const}$) компоненты тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} , определяемые соотношением (2.16), также являются функциями координат. Поэтому уравнение (2.14) с компонентами тензора ϵ_{ik} , замененными на $\epsilon_{ik}^{(0)}$, не может быть сведено к дисперсионному уравнению вида (2.15).

Так как компоненты ϵ_{ik} периодичны по θ , φ , то система двух уравнений вида (2.14) может быть заменена двойной системой зацепляющихся уравнений, число которых, вообще говоря, бесконечно. Такого рода ситуация типична для теории равновесия и устойчивости плазмы в тороидальных магнитных ловушках, она неоднократно обсуждалась ранее. Известно также, что система бесконечного числа зацепляющихся уравнений сводится к системе с конечным числом уравнений, если тороидальность слабая, т. е. если изменение магнитного поля вдоль силовой линии мало по сравнению со средним значением этого поля.

Мы также будем следовать предположению о слабой тороидальности. Применительно к интересующей нас задаче это означает, что циклотронная частота ω_B может быть представлена в виде $\omega_B = (\omega_B)_0 + \tilde{\omega}_B$, где $|\omega_B| \ll (\omega_B)_0$. Здесь $(\omega_B)_0$ — среднее на соответствующей магнитной поверхности, а $\tilde{\omega}_B$ — отклонение от среднего. В явном виде символ $(\dots)_0$ означает:

$$(\dots)_0 = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (\dots). \quad (2.25)$$

В аналогичном виде представим и электрическое поле:

$$E_1 = (E_1)_0 + \tilde{E}_1, \quad E_2 = (E_2)_0 + \tilde{E}_2.$$

При этом из (2.14) получается

$$\tilde{E}_i \simeq [\tilde{\omega}_B / (\omega_B)_0] (E_i)_0 \ll (E_i)_0, \quad (2.26)$$

так что величинами \tilde{E}_i можно пренебречь. Поэтому в случае слабой тороидальности система уравнений (2.14) в пренебрежении вкладом α -частиц сводится к следующей:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_{11}^{(0)})_0 (E_1)_0 + (\varepsilon_{12}^{(0)})_0 (E_2)_0 &= 0, \\ (\varepsilon_{21}^{(0)})_0 (E_1)_0 + [(\varepsilon_{22}^{(0)})_0 - (ck_{\perp}/\omega)^2] (E_2)_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Отсюда получается уравнение для частоты магнитно-звуковых колебаний вида (2.18), в котором скорость Альфвена определяется средним магнитным полем.

Что касается части тензора диэлектрической проницаемости, связанной с α -частицами, то, как будет видно ниже (см. § 2.6), даже при слабой тороидальности $\tilde{\varepsilon}_{ik}^{(\alpha)} \simeq (\varepsilon_{ik}^{(\alpha)})_0$. Однако в связи с тем, что $\tilde{E}_i \ll (E_i)_0$ [см. (2.26)], вклад членов типа $(\tilde{\varepsilon}_{ik}^{(\alpha)} \tilde{E}_k)_0$ в уравнения типа (2.26) оказывается меньше вклада членов типа $(\varepsilon_{ik}^{(\alpha)})_0 (E_k)_0$. Поэтому в случае слабой тороидальности дисперсионное уравнение при учете вклада α -частиц сводится к уравнению вида (2.15), в котором ε_{ih} заменяется $(\varepsilon_{ih})_0$. Аналогом дисперсионного уравнения (2.19) в случае слабой тороидальности является уравнение

$$Q^{(0)} + (\varepsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = 0, \quad (2.28)$$

где $Q^{(0)}$ определяется выражением вида (2.17), но с заменой $\varepsilon_{ik}^{(0)}$ на $(\varepsilon_{ik}^{(0)})_0$.

Выражение $\varepsilon_{11}^{(\alpha)}$ согласно формулам (2.10) и известным соотношениям $j_i = \sigma_{ih} E_h$, $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} = 4\pi i \sigma_{ik}^{(\alpha)}/\omega$ имеет вид

$$\varepsilon_{11}^{(\alpha)} = -i \frac{4\pi e^2}{M\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \int_{-\infty}^t dt' S_n(t, t') v_{\perp} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{\xi^2} \right\rangle, \quad (2.29)$$

где символ $\langle \dots \rangle$ означает то же, что и в (2.13) — усреднение по скоростям.

§ 2.6. Диэлектрическая проницаемость осесимметричного токамака круглого сечения

Согласно сказанному в § 2.5, для рассмотрения интересующей нас задачи о влиянии неоднородности магнитного поля на циклотронную термоядерную неустойчивость необходимо вычислить $(\varepsilon_{11}^{(\alpha)})_0$.

Такое вычисление проведем для случая осесимметричного токамака круглого сечения. В этом случае отличные от нуля компоненты метрического тензора g_{ih} имеют вид

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = a^2, \quad g_{33} = R^2 (1 - 2\varepsilon \cos \theta),$$

где R — радиус кривизны магнитной оси токамака, $\varepsilon = a/R$. При этом $\sqrt{g} = aR (1 - 2\varepsilon \cos \theta)$, а модуль напряженности магнит-

ного поля B_0 приближенно равен:

$$B_0 = B_s (1 + \varepsilon \cos \theta).$$

Поскольку метрика не зависит от координаты φ , то среднее по магнитной поверхности означает $(\dots)_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\theta (\dots)$. Учитывая $\partial B_0/\partial a = (B_s/R) \cos \theta$, $\partial B_0/\partial \theta = -(aB_s/R) \sin \theta$, находим $V_{D, a} = (v^2 + v_{\parallel}^2) \sin \theta/2 \omega_{Bs} R$; $V_{D, b} = (v^2 + v_{\parallel}^2) \cos \theta/(2\omega_{Bs} R)$.

С учетом этих соотношений «интегрирующая экспонента» (2.9) (при $k_{\parallel} = 0$) принимает вид

$$S_n(t, t') = \exp \left\{ i \int_{t'}^t \Omega_n[\theta(t'')] dt'' \right\}, \quad (2.30)$$

где

$$\Omega_n(\theta) = \omega - n\omega_{Bs} (1 + \varepsilon \cos \theta) - k_{\perp} (v^2 + v_{\parallel}^2) \sin(\psi + \theta)/2\omega_{Bs} R. \quad (2.31)$$

Как известно, вследствие продольной неоднородности магнитного поля скорость движения частиц вдоль силовых линий магнитного поля зависит от координаты вдоль силовой линии. При малой тороидальности ($\varepsilon \ll 1$) такое непостоянство продольной скорости малосущественно для основной группы частиц, продольная скорость которой порядка поперечной, но важно для частиц с малой продольной скоростью. Известно также, что частицы, обладающие достаточно малыми продольными скоростями, запираются в областях между пробками тороидального магнитного поля (на внешнем обводе тора). Поэтому нам необходимо вычислить вклад в диэлектрическую проницаемость от двух групп α -частиц, пролетных и запертых.

1. Диэлектрическая проницаемость пролетных α -частиц. При вычислении вклада в диэлектрическую проницаемость от пролетных α -частиц мы будем пренебрегать непостоянством их продольной скорости, т. е. считать $v_{\parallel} = \text{const}$. При этом из уравнения движения $d\theta/dt = v_{\parallel}/qR$ ($q = \Phi'/\chi'$ — коэффициент запаса тока-мака [1]) следует $\theta(t) = \theta_0 + v_{\parallel} t/qR$. (Без ограничения общности мы приняли, что частица находится в точке $\theta = \theta_0$ при $t_0 = 0$.) Подставляя этот результат (2.30) и интегрируя по t'' , получаем

$$S_n(t, t') = \exp \{ i (\omega - n\omega_{Bs}) (t - t') - i\xi_1 [\sin(\theta_0 + v_{\parallel} t/qR) - \sin(\theta_0 + v_{\parallel} t'/qR)] + i\xi_2 [\cos(\theta_0 + \psi + v_{\parallel} t/qR) - \cos(\theta_0 + \psi + v_{\parallel} t'/qR)] \}, \quad (2.32)$$

где $\xi_1 = n\omega_{Bs} a q/v_{\parallel}$, $\xi_2 = k_{\perp} (v^2 + v_{\parallel}^2) q/2 \omega_{Bs} v_{\parallel}$.

Разложим (2.32) в ряд по функциям Бесселя (ср. с § 2.2), так что окончательно в случае пролетных α -частиц $S_n(t, t')$ принимает вид

$$S_n(t, t') = \sum_{p, r} J_p(\xi_1) J_r(\xi_2) \exp \{ i [-\xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos(\theta + \psi) + (p+r)\theta + r(\psi - \pi/2)] \} \exp \left\{ i \left[\omega - n\omega_{B_s} - \frac{v_{\parallel}}{qR} (p+r) \right] (t-t') \right\}. \quad (2.33)$$

Подставляя этот результат в (2.29) и учитывая правило усреднения (2.25), получаем

$$(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = \frac{4\pi e^2}{M\omega} \left\langle \sum_{n, p, p_1, r, r_1} v_{\perp} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{\xi^2} \delta_{p+r, p_1+r_1} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_p(\xi_1) J_{p_1}(\xi_1) J_r(\xi_2) J_{r_1}(\xi_2) \exp [i (\psi - \pi/2) (r-r_1)]}{\omega - n\omega_{B_s} - (p+r) v_{\parallel}/qR} \right\rangle. \quad (2.34)$$

2. Диэлектрическая проницаемость запертых α -частиц. Переходя от v_{\perp}, v_{\parallel} к константам движения $\mathcal{E} = v^2/2$ и $\mu = v_{\perp}^2/2 B_0$, преобразуем в (2.29) символ усреднения по скоростям $\langle \dots \rangle$ к виду

$$\langle \dots \rangle = \int (\dots) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = \sum_{\sigma} \int \frac{B d\mu d\mathcal{E}}{|v_{\parallel}|} (\dots), \quad (2.35)$$

где суммирование по $\sigma = \pm 1$ проводится по направлению движения частицы (по знаку v_{\parallel}). Интеграл по t' в выражении (2.29) преобразуем, используя соотношение

$$\int_{-\infty}^t dt' = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t-(j+1)\tau}^{t-j\tau} dt',$$

где τ — период обращения частицы по замкнутой орбите, $\tau = qR \oint d\theta / v_{\parallel}$. При этом для случая интересующих нас возмущений с $k_{\parallel} = 0$ получается

$$(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = \frac{4\pi e^2 qR}{M\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \int d\mu d\mathcal{E} \operatorname{ctg} M(\theta_1, \theta_2) \times \\ \times \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{B(\theta) \cos M(\theta, \theta_2)}{|v_{\parallel}(\theta)|} \frac{J_n v_{\perp}(\theta)}{\xi(\theta)} d\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos M(\theta', \theta_2)}{|v_{\parallel}(\theta')|} \times \\ \times \frac{J_n v_{\perp}(\theta')}{\xi(\theta')} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} + \frac{1}{B(\theta')} \frac{\partial F}{\partial \mu} \right] d\theta'. \quad (2.36)$$

Здесь

$$M(\theta', \theta) = qR \int_{\theta'}^{\theta} \Omega_n(\theta'') d\theta'' / |v_{\parallel}(\theta'')|; \quad (2.37)$$

величина Ω_n определяется выражением $\Omega_n(\theta) = \omega - n\omega_B(\theta)$, θ_1, θ_2 — точки поворота частицы. Заметим также, что

$$M(\theta_1, \theta_2) = \overline{\Omega}_n \tau / 2, \quad (2.38)$$

где черта сверху означает усреднение по периоду,

$$\overline{(\dots)} = (qR/\tau) \oint (\dots) d\theta / v_{\parallel}.$$

В случае круглого токамака, когда метрика и магнитное поле определяются соотношениями, приведенными в начале данного параграфа:

$$\overline{\Omega}_n = \omega - n\omega_{Bs} \{1 + \varepsilon [K(\kappa) - 2E(\kappa)] / K(\kappa)\},$$

$$\tau = 4qRK(\kappa) / (\mu B_s \varepsilon)^{1/2},$$

где $\kappa^2 = (\mathcal{E} - \mu B_s + \varepsilon \mu B_s) / 2\varepsilon \mu B_s$, $K(\kappa)$ и $E(\kappa)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Отметим также, что в магнитном поле круглого токамака частицы движутся с продольной скоростью $v_{\parallel} = [2(\mathcal{E} - \mu B)]^{1/2} = [2\mu B_s \varepsilon (2\kappa^2 - 1 - \cos \theta)]^{1/2}$. Точки поворота частицы с заданным κ в этом случае определяются выражениями $\theta_1 = \arccos(2\kappa^2 - 1)$, $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$. Интервал κ^2 , соответствующий запертым частицам, характеризуется неравенством $0 \leq \kappa^2 \leq 1$. Наиболее сильно запертым частицам, локализованным вблизи дна магнитной ямы, соответствует $\kappa^2 \approx 0$.

§ 2.7. Стабилизация неустойчивости с $\gamma \sim (N_{\alpha}/N_0)^{1/2}$

Используя (2.34), оценим прежде всего пределы применимости приближения однородного магнитного поля.

Замечаем, что (2.34) переходит в (2.13) при условии $|\omega - n\omega_{Bs}| > (p+r)v_{\parallel}/qR$ для всех p и r , таких, что $p \leq \xi_1$, $r \leq \xi_2$. [Учитывается, что при $p > \xi_1$ и $r > \xi_2$ функции Бесселя $J_p(\xi_1)$ и $J_r(\xi_2)$ пренебрежимо малы.] Поскольку $\xi_1 \gg \xi_2$, то указанное условие означает

$$|\omega - n\omega_{Bs}| > v_{\parallel} \xi_1 / qR \equiv an\omega_{Bs} / R. \quad (2.39)$$

Но так как согласно (2.23) $(\omega - n\omega_{Bs}) / n\omega_{Bs} \simeq (N_{\alpha}/N_0)^{1/2}$, то неравенство (2.39) есть не что иное, как неравенство, противоположное (2.3).

Таким образом, из приведенных выше соотношений видно, что влияние продольной неоднородности магнитного поля на циклотронную термоядерную неустойчивость должно учитываться как раз тогда, когда выполняется неравенство (2.3), что согласуется с качественными соображениями § 2.1.

Теперь примем, что неравенство (2.3) является сильным. В этом случае необходимо рассмотреть возможность раскачки магнитно-звуковых волн (2.18) пролетными и запертыми частицами.

Считая, как и в случае однородного магнитного поля, вклад α -частиц в дисперсионное уравнение малым, эффекты пролетных и запертых частиц можно рассматривать по отдельности. В настоящем параграфе выясним роль пролетных частиц, а в следующем параграфе — роль запертых.

Из уравнения (2.34) видно, что максимальный вклад в $(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0$ дают члены суммы в правой части (2.34) с $p + r = 0$, так что в пребрежении всеми остальными членами суммы

$$(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = \frac{4\pi e^2}{M\omega} \left\langle \sum_n \frac{v_{\perp} (\partial F / \partial v_{\perp}) n^2 J_n^2 / \xi^2}{\omega - n\omega_{Bs}} K(\xi_1, \xi_2) \right\rangle, \quad (2.40)$$

где

$$K(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p, p_1, r, r_1} J_p(\xi_1) J_{p_1}(\xi_1) J_r(\xi_2) J_{r_1}(\xi_2) \times \\ \times \exp \left\{ i \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) (r - r_1) \right\} \delta_{p+r, 0} \delta_{p_1+r_1, 0}.$$

Представляя символы Кронекера $\delta_{s,0}$ в интегральной форме $\delta_{s,0} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp(is\lambda) d\lambda$ и используя формулу суммирования функций Бесселя (см. § 2.2), приводим $K(\xi_1, \xi_2)$ к виду

$$K(\xi_1, \xi_2) = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \exp [i\xi_1 \sin \lambda - i\xi_2 \cos(\lambda + \psi)] \right|^2.$$

Учитывая, что $\xi_1 \gg 1$, интеграл по λ можно вычислить методом перевала. Тогда получаем

$$K(\xi_1, \xi_2) \approx 1/\pi |\xi_1|. \quad (2.41)$$

Подставляя этот результат в (2.40) и переходя от v_{\perp}, v_{\parallel} к $v, \vartheta \equiv \arctg(v_{\perp}/v_{\parallel})$, приводим выражение для $(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0$ к виду

$$(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = \frac{4e^2}{M\omega k^2 a q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n\omega_{Bs}|}{\omega - n\omega_{Bs}} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\partial F}{\partial v} v^2 dv \int_0^{\pi} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v}{\omega_{Bs}} \sin \vartheta \right) \sin \vartheta |\cos \vartheta| d\vartheta. \quad (2.42)$$

Используя цепочку равенств

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial F}{\partial v} v^2 dv \int_0^{\pi} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v}{\omega_{Bs}} \sin \vartheta \right) \sin \vartheta |\cos \vartheta| d\vartheta =$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int_0^{\infty} F \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \int_0^1 J_n^2 \left(\frac{kv}{\omega_{Bs}} x \right) x dx \right] dv = \\
&= -2 \int_0^{\infty} F \frac{\omega_{Bs}}{k_{\perp}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^z J_n^2(y) y dy \right] \right\}_{z=k_{\perp} v/\omega_{Bs}} = \\
&= -2 \int_0^{\infty} F v J_n^2 \left(\frac{kv}{\omega_{Bs}} \right) dv,
\end{aligned}$$

получаем окончательно

$$(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = -\frac{8e^2 N_{\alpha}}{M\omega k_{\perp}^2 a q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n\omega_{Bs}| I_n}{\omega - n\omega_{Bs}}, \quad (2.43)$$

где

$$I_n \equiv (1/N_{\alpha}) \int_0^{\infty} F v J_n^2(k_{\perp} v/\omega_{Bs}) dv.$$

Подставляя этот результат в дисперсионное уравнение (2.28), приходим к уравнению типа (2.21):

$$1 - \frac{k_{\perp}^2 c_A^2}{\omega^2} - \frac{N_{\alpha}}{N_0 \text{эф}} \frac{2c_A^2 I_n \operatorname{sgn} \omega}{\pi a q n^2 (\omega - n\omega_{Bs})} = 0. \quad (2.44)$$

Аналогично (2.23) из (2.44) находим

$$\left(\frac{\omega^{(1)}}{\omega_{Bs}} \right)^2 = \frac{N_{\alpha}}{N_0 \text{эф}} \frac{c_A^2 I_n}{\pi a q |n\omega_{Bs}|}. \quad (2.45)$$

Поскольку $I_n > 0$, то $\omega^{(1)}$ — вещественно. Это означает, что при условии (2.3) циклотронная термоядерная неустойчивость с $\gamma \sim (N_{\alpha}/N_0)^{1/2}$ подавляется.

§ 2.8. Циклотронная неустойчивость, вызываемая запертыми α -частицами

1. Предварительные замечания. Дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие магнитно-звуковых волн с запертыми α -частицами, получается при подстановке в уравнение (2.28) выражения для $(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0$ в виде (2.36). Можно убедиться, что это уравнение имеет решение с $\gamma \sim (N_{\alpha}/N_0)^{1/2}$ только в том случае, когда в выражении (2.31) для $\Omega_n(\theta)$ несущественны члены, зависящие от θ , т. е. при условии (2.39).

Решение с $\gamma \sim (N_{\alpha}/N_0)^{1/2}$ соответствует случаю $\bar{\Omega}_n \tau \ll 1$. При этом $\sin M(\theta_1, \theta_2)$ в знаменателе правой части (2.36) заменяется $\bar{\Omega}_n \tau/2$, а $\bar{\Omega}_n$ — на $\omega - n\omega_{Bs}$. Вследствие этого $(\epsilon_{11}^{(\alpha)})_0$ пропорциональ-

но $(\omega - n\omega_{Bs})^{-1}$, а дисперсионное уравнение сводится к квадратному по $\omega^{(1)}$ (ср. с § 2.4).

Однако получающийся в результате инкремент содержит дополнительный малый параметр, связанный с относительной малостью числа запертых частиц по сравнению с числом пролетных. Поэтому при выполнении условия (2.3) функция Ω_n заведомо является существенной функцией θ и не может быть заменена на $\omega - n\omega_{Bs}$. Иначе говоря, с увеличением тороидальности, когда выполняется условие типа (2.3), неустойчивость запертых частиц, имеющая при малой тороидальности характер гидродинамической неустойчивости, сменяется кинетической неустойчивостью (или кинетическим затуханием), обусловленной резонансом между волной и частицами с соответствующими \mathcal{E} и μ .

Рассмотрим соотношения, характеризующие кинетическую неустойчивость.

2. Общее выражение для инкремента неустойчивости, вызываемой α -частицами с изотропным распределением по скоростям. С учетом (2.38) представим

$$\text{ctg } M(\theta_1, \theta_2) = \frac{\omega_b}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - n\omega_B - p\omega_b}, \quad (2.46)$$

где ω_b — баунс-частота, определяемая выражением

$$\omega_b = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\pi (\mu B_s e)^{1/2}}{2qRK(\kappa)}.$$

Тогда дисперсионное уравнение (2.28) принимает вид

$$1 - \frac{k^2 c_A^2}{\omega^2} + \frac{N_\alpha}{N_{0\alpha\Phi}} \frac{\omega q R}{\pi^2} \sum_{n, p=-\infty}^{\infty} n^2 \int d\mu d\mathcal{E} \frac{\omega_b}{\omega - n\omega_B - p\omega_b} \times \\ \times \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{B(\theta) \cos M(\theta, \theta_2)}{|v_{\parallel}(\theta)|} \frac{J_n v_{\perp}(\theta)}{\xi(\theta)} d\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos M(\theta', \theta_2) J_n v_{\perp}(\theta')}{|v_{\parallel}(\theta')| \xi(\theta')} \times \\ \times \left[\frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} + \frac{1}{B(\theta')} \frac{\partial F_0}{\partial \mu} \right] d\theta' = 0, \quad (2.47)$$

где $F_0 = F/N_\alpha$ — функция распределения α -частиц, нормированная на единицу.

Рассмотрим изотропное распределение α -частиц по скоростям, $F_0 = F_0(\mathcal{E})$, $\partial F/\partial \mu = 0$. Учтем также, что при слабой тороидальности ($a/R \ll 1$) продольные скорости запертых частиц малы по сравнению с поперечными, $v_{\parallel} \ll v_{\perp}$, и заменим в уравнении (2.47) v_{\perp} на v . Кроме того, в функциях Бесселя заменим ω_B на ω_{Bs} , пренебрегая тем самым членами порядка a/R . При этом (2.47) преобразуется к виду

$$1 - \frac{k^2 c_A^2}{\omega^2} + \frac{N_\alpha}{N_{0\alpha\Phi}} \frac{\omega_{Bs}^2 \omega q R}{k_{\perp}^2 \pi^2} \sum_{n, p=-\infty}^{\infty} n^2 \int d\mu d\mathcal{E} J_n^2 \times$$

$$\times \frac{\omega_b B_s}{\omega - n\bar{\omega}_B - p\omega_b} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos M(\theta, \theta_2)}{|v_{\parallel}(\theta)|} d\theta \right]^2 \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} = 0. \quad (2.48)$$

Далее, учитывая, что $B_s d\mu = -\varepsilon v^2 d\kappa^2$, получаем следующее выражение для инкремента возмущений с $\text{Re} \omega = k c_A$:

$$\begin{aligned} \gamma \equiv \text{Im} \omega &= \frac{N_\alpha}{N_{0 \text{ эф}}} \frac{\omega_{Bs}^2 c_A^2}{2\pi} qR \sum_{n, p=-\infty}^{\infty} n^2 \int d\kappa^2 dv \omega_b J_n^2(\xi) \times \\ &\times I^2 \frac{\partial F_0}{\partial v} \delta(\omega - n\bar{\omega}_B - p\omega_b), \end{aligned} \quad (2.49)$$

где

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos M(\theta, \theta_2)}{(2\kappa^2 - 1 - \cos \theta)^{1/2}} d\theta. \quad (2.50)$$

3. Инкремент неустойчивости, вызываемой сильно запертыми α -частицами. Ввиду сложности подынтегрального выражения (2.50) ограничимся рассмотрением резонансного взаимодействия с волнами частиц с малым κ , $\kappa^2 \ll 1$. При этом

$$\bar{\omega}_B = \omega_{Bs} (1 - \varepsilon + \varepsilon \kappa^2), \quad \omega_b = v \sqrt{\varepsilon} / \sqrt{2} qR,$$

$$M(\theta, \theta_2) = \frac{qR}{v \sqrt{\varepsilon}} \int_{\theta}^{\theta_2} \frac{\omega - n\omega_{Bs} (1 + \varepsilon \cos \theta')}{(2\kappa^2 - 1 - \cos \theta')^{1/2}} d\theta'. \quad (2.51)$$

Подстановками $1 + \cos \theta = 2t^2 \kappa^2$, $1 + \cos \theta' = 2\tau^2 \kappa^2$ приводим интеграл (2.50) к виду

$$I = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{\cos M(2 \arccos t\kappa, \theta_2)}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2 \kappa^2)}} dt, \quad (2.52)$$

где

$$\begin{aligned} M(2 \arccos t\kappa, \theta_2) &= \sqrt{2} \frac{qR \sqrt{\varepsilon} n \omega_{Bs}}{v} \times \\ &\times \left\{ (\Delta + 1) \int_{-1}^t \frac{d\tau}{[(1-\tau^2)(1-\tau^2 \kappa^2)]^{1/2}} - 2\kappa^2 \int_{-1}^t \frac{\tau^2 d\tau}{[(1-\tau^2)(1-\tau^2 \kappa^2)]^{1/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\Delta = (\omega - n\omega_{Bs}) / \varepsilon n \omega_{Bs}.$$

Разлагая правую часть (2.53) в ряд по степеням κ^2 и используя условие резонанса $\omega - n\omega_B - p\omega_b = 0$, означающее

$$\Delta + 1 = \kappa^2 + p\omega_b / n\omega_{Bs} \varepsilon, \quad (2.54)$$

находим

$$M(2 \arccos t\kappa, \theta_2) = p(\arcsin t + \pi/2) + \frac{n\omega_{Bs}}{\omega_b} \varepsilon \kappa^2 t \sqrt{1-t^2}. \quad (2.55)$$

Учитывая (2.55), преобразуем правую часть (2.52):

$$I = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \cos\left[\frac{n\omega_{Bs}}{\omega_b} \varepsilon \kappa^2 t \sqrt{1-t^2} + p \arcsin t\right] = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) \left\{ \int_0^\pi dx \cos\left(\frac{n\omega_{Bs}}{2\omega_b} \varepsilon \kappa^2 \sin x\right) \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\frac{px}{2}\right) - \int_0^\pi dx \sin\left(\frac{n\omega_{Bs}}{2\omega_b} \varepsilon \kappa^2 \sin x\right) \sin\left(\frac{px}{2}\right) \right\} \quad (2.56)$$

Используя соотношения [37]

$$\int_0^\pi \sin(z \sin x) \sin(nx) dx = [1 - (-1)^n] \frac{\pi}{2} J_n(z), \\ \int_0^\pi \cos(z \sin x) \cos(nx) dx = [1 + (-1)^n] \frac{\pi}{2} J_n(z), \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

получим окончательно

$$I = \sqrt{2} \pi \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) (-1)^{p/2} J_{p/2}\left(\frac{n\omega_{Bs}}{2\omega_b} \varepsilon \kappa^2\right), \quad (2.57)$$

где $p/2$ — целое число. Подставляя (2.57) в (2.49), находим

$$\gamma = \frac{N_\alpha}{N_0 \omega_\Phi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \pi n^2 \omega_{Bs}^2 c_A^2 \sum_m \int_0^{\kappa_{\max}} d\kappa^2 \int_0^\infty dv v J_n^2(\xi) \times \\ \times J_m^2(\eta) \frac{\partial F_0}{\partial v} \delta(\omega - n\bar{\omega}_B - 2m\omega_b). \quad (2.58)$$

Здесь $\eta = n\omega_{Bs}\varepsilon\kappa^2/2\omega_b$, $\xi = k_\perp v/\omega_{Bs}$, а число членов в сумме по m ограничено условием

$$2m\omega_b/n\omega_{Bs}\varepsilon \lesssim \kappa_{\max}^2, \quad (2.59)$$

где κ_{\max} — некоторое число, малое по сравнению с единицей. Заметим, что малый коэффициент $\sqrt{\varepsilon}$ в правой части (2.58) соответствует доле запертых α -частиц.

Учитывая выражения для $\bar{\omega}_B$ и ω_b , вычисляем интеграл по κ^2 :

$$\int d\kappa^2 J_m^2(\eta) \delta \left[\omega - n\omega_{Bs} (1 - \varepsilon) - \varepsilon n\omega_{Bs} \kappa^2 - 2m \frac{v \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2} qR} \right] = \frac{J_m^2(\eta_{mn})}{\varepsilon |n\omega_{Bs}|}. \quad (2.60)$$

При этом $\eta_{mn} = \kappa^2_{mn} n\omega_{Bs} \varepsilon / 2 \omega_b$, где

$$\kappa^2_{mn} = [\omega - n\omega_{Bs} (1 - \varepsilon) - 2m\omega_b] / \varepsilon n\omega_{Bs}. \quad (2.61)$$

С учетом (2.60) выражение (2.58) для инкремента возмущений принимает вид

$$\gamma = \frac{N_\alpha}{N_{0\text{эф}}} \frac{|n\omega_{Bs}|}{\sqrt{2\varepsilon}} \pi c_A^2 \sum_0^\infty \int_0^\infty dv \frac{\partial F_0}{\partial v} J_n^2 \left(\frac{k_\perp v}{\omega_{Bs}} \right) J_m^2(\eta_{mn}). \quad (2.62)$$

Рассмотрим возбуждение волн с частотой $\omega = n\omega_{Bs} (1 - \varepsilon)$. При этом в соответствии с (2.61) резонанс частиц с волной осуществляется при κ^2 и m , связанных соотношением $\varepsilon n\omega_{Bs} \kappa^2 = -2m\omega_b$, а аргумент функции Бесселя $J_m(\eta_{mn})$ принимает вид $\eta_{mn} = -m$. Выражение (2.61) для инкремента возмущений с указанной частотой сводится к следующему:

$$\gamma = \gamma_0 (1 + K), \quad (2.63)$$

где γ_0 — инкремент в пренебрежении баунс-резонансами:

$$\gamma_0 = \frac{N_\alpha}{N_{0\text{эф}}} \frac{|n\omega_{Bs}|}{\sqrt{2\varepsilon}} c_A^2 \sqrt{\pi} \int_0^\infty dv v \frac{\partial F_0}{\partial v} J_n^2 \left(\frac{k_\perp v}{\omega_{Bs}} \right), \quad (2.64)$$

а коэффициент K учитывает роль баунс-резонансов,

$$K = \sum_{m=1}^{m_{\text{макс}}} J_m^2(m). \quad (2.65)$$

В соответствии с (2.59) $m_{\text{макс}} \simeq \varepsilon n\omega_{Bs} / 2\omega_b$. В реальных условиях эта величина велика. Поэтому в сумме по m в правой части равенства (2.65) следует учитывать много членов.

Вычислим (2.65), учитывая, что основной вклад в сумме по m дают члены с $m \gg 1$. С этой целью воспользуемся асимптотическим представлением $J_m(x)$ при $m \gg 1$, $x \gg 1$ [38]:

$$J_m(x) = \frac{2^{1/3}}{x^{1/3}} \text{Ai} \left[\left(\frac{2}{x} \right)^{1/3} (m - x) \right],$$

где $\text{Ai}(x)$ — функция Эйри первого рода, удовлетворяющая соотношению

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) dt.$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \cos(ax) dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2},$$

находим, что

$$J_m(m) \approx \frac{\Gamma(1/3) 2^{1/3}}{2\pi 3^{1/6}} \frac{1}{m^{1/3}}, \quad m \gg 1. \quad (2.66)$$

Заменяя сумму по m интегралом, получаем

$$K \approx \frac{\Gamma^2(1/3) 2^{2/3} 3^{2/3}}{4\pi^2} \left(\frac{\epsilon n \omega_{Bs}}{\omega_b} \right)^{1/3}. \quad (2.67)$$

Видно, что вследствие баунс-резонансов инкремент неустойчивости запертых α -частиц возрастает на величину порядка

$$K \approx 0,48 \left(\frac{\epsilon n \omega_{Bs}}{\omega_b} \right)^{1/3}. \quad (2.68)$$

Приближенно $\epsilon \omega_{Bs}/\omega_b \approx \sqrt{2} \epsilon q R/\rho_{\alpha}$, где $\rho_{\alpha} \approx v/\omega_{Bs}$ — лармовский радиус α -частиц. При $B = 5 \cdot 10^4$ Гс, $v = 10^9$ см/с (эта скорость соответствует энергии α -частиц 3,5 МэВ), $\rho_{\alpha} = 4$ см. Пусть для примера $R = 5 \cdot 10^2$ см, $\epsilon = 1/5$, $q = 2$. При этом $(\epsilon \omega_{Bs}/\omega_b)^{1/3} \approx 5$, так что $K = 2,5$. Это означает, что с учетом баунс-резонансов инкремент неустойчивости запертых α -частиц может быть в несколько раз больше, чем γ_0 , определяемое формулой (2.64).

4. Неустойчивость анизотропных распределений. При $\partial F/\partial \mu \neq 0$ вместо (2.49) получается $\gamma = \sum_{n,p} \gamma_{n,p}$, где

$$\begin{aligned} \gamma_{n,p} = & \frac{2\pi^2 e^2}{M} \frac{\omega^2}{\omega_{pi}^2} \sqrt{\epsilon} \frac{n^2 \omega_{Bs}^2}{c_A^2 k_{\perp}^2} \int d\mathcal{G} d\kappa^2 \frac{\mathcal{G}^{1/2}}{K(\kappa)} J_n^2 \times \\ & \times \delta(k_{\perp} - k_{np}) I_1 \left(I_1 \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} - \frac{1}{2\mathcal{G}} I_2 \frac{\partial F}{\partial \kappa^2} \right); \end{aligned} \quad (2.69)$$

$I_1 \equiv I$ определяется формулой (2.50), а выражение для I_2 имеет вид

$$I_2 = 2\sqrt{2} \kappa^2 \int_{-1}^1 \cos M (2 \arcsin \cos t\kappa, \theta_2) \left(\frac{1-t^2}{1-t^2 \kappa^2} \right)^{1/2} dt. \quad (2.70)$$

Мы воспользовались также законом дисперсии $\omega(\mathbf{k}) = k_{\perp} c_A$ и ввели $k_{np} = (n\bar{\omega}_B + p\omega_b)/c_A$.

§ 2.9. Стабилизация циклотронной неустойчивости при большом тепловом разбросе запертых α -частиц

Рассмотрим, как влияет на неустойчивость, исследованную в предыдущем параграфе, тепловой разброс α -частиц.

Предположим, что функция распределения α -частиц имеет следующий вид:

$$F(v) = (\sqrt{2\pi}v_{T\alpha}v_{\alpha}^2)^{-1} \exp[-(v-v_{\alpha})^2/2v_{T\alpha}^2], \quad (2.71)$$

где $v_{T\alpha}$ — тепловая скорость α -частиц, $v_{T\alpha} \ll v_{\alpha}$. Вообще говоря, вычисление инкремента с функцией распределения вида (2.74) требует численного счета. Однако в случае, наиболее интересном для проблемы реактора-токамака, когда скорость α -частиц v_{α} в несколько раз больше c_A , эту задачу можно решить аналитически.

При $v_{\alpha} > c_A$ аргумент функции Бесселя в выражении (2.64) велик по сравнению с единицей, $nv/c_A \gg 1$, и по сравнению с индексом этой функции. При этом справедливо известное асимптотическое разложение

$$J_n(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{n^2 - 1/4}{2z} \sin\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Интегрированием по частям и заменой переменной интегрирования приводим выражения (2.64) к следующему виду:

$$\gamma_0 = (-1)^n \frac{A}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \left\{ -\cos[2(1+\eta x)\lambda] + \frac{n^2 - 1/4}{\lambda} \sin[2(1+\eta x)\lambda] \right\}, \quad (2.72)$$

где $\lambda = nv_{\alpha}/c_A$, $\eta = \sqrt{2}v_{T\alpha}/v_{\alpha}$, $A = (\pi |n\omega_{Bs}|/2\sqrt{2\varepsilon})(N_{\alpha}/N_{\text{эф}}) \times (c_A/v_{\alpha})^2$. В рассмотренном в § 2.8 случае δ -функционального распределения, т. е. при $\eta = 0$, из уравнения (2.75) следует

$$\gamma_0 = \bar{\gamma} \equiv (-1)^n \frac{A}{\pi} \left[-\cos 2\lambda + \frac{n^2 - 1/4}{\lambda} \sin 2\lambda \right]. \quad (2.73)$$

При наличии теплового разброса, $\eta \neq 0$, из выражения (2.72) находим

$$\gamma = \bar{\gamma} \exp[-(\lambda\eta)^2]. \quad (2.74)$$

Из соотношения (2.74) видно, что тепловой разброс влияет на неустойчивость, если $\eta\lambda \gtrsim 1$, т. е. при

$$v_{T\alpha}/c_A \gtrsim 1/n. \quad (2.75)$$

Это условие находится в соответствии с аналогичным результатом работы [31], полученным для случая циклотронной раскачки быстрых магнитно-звуковых волн в однородном магнитном поле.

При выполнении условия (2.75) происходит уменьшение инкремента, однако, как и в случае δ -функционального распределения, полной стабилизации циклотронных волн не происходит.

При $v_{T\alpha} \simeq v_{Ti}$, где v_{Ti} — тепловая скорость ионов плазмы, из условия (2.75) следует, что тепловой разброс важен для гармоник с номерами

$$n \gtrsim \beta^{-1/2}, \quad (2.76)$$

где β — отношение давления плазмы к давлению магнитного поля.

Таким образом, запертые α -частицы могут приводить к раскачке ионно-циклотронных гармоник только с не слишком большими номерами.

§ 2.10. Обзор работ по термоядерным неустойчивостям

Первоначально вопрос о термоядерных неустойчивостях был поставлен в работах [14, 39]. При этом в [39] было обращено внимание на неустойчивость типа дрейфово-конусной, первоначально обсуждавшейся автором [4], а затем Постом и Розенблотом [40]. Исследования этого типа неустойчивости были затем продолжены в работе [41], из которой следует, что такая неустойчивость несущественна.

Большое влияние на развитие теории термоядерных неустойчивостей оказала работа [14], весьма интересная не только с прикладной точки зрения, но и с физической. В ней было установлено важное и ранее неизвестное обстоятельство: возможность раскачки потенциальных колебаний плазмы нерелятивистскими частицами с распределением, изотропным в пространстве скоростей и однородным в обычном пространстве. Этот эффект связан с наличием магнитного поля, привносящим элемент анизотропии. Поэтому класс неустойчивостей, обнаруженных в работе [14], связан с возмущениями, частота которых лежит вблизи гармоник циклотронной частоты соответствующего сорта частиц либо в области частот ниже циклотронной. Этим неустойчивости изотропных распределений отличаются, например, от обычных конусных, которые могут иметь место и в пренебрежении эффектами магнитного поля.

В работе [14] рассматривалась возможность возбуждения потенциальных колебаний вблизи ионно-циклотронных гармоник. В ряде последующих работ, и прежде всего в работе [42], было указано на то, что предположение о потенциальности оправдывается лишь в довольно разреженной плазме, когда скорость Альфвена превышает скорость α -частиц, $c_A > v_\alpha$, тогда как практически интересен в основном обратный случай, $c_A < v_\alpha$. При этом, однако, существенна непотенциальность возмущений. Поэтому в дальнейшем центр тяжести исследований по термоядерным неустойчивостям переместился на непотенциальные возмущения.

Первыми работами по непотенциальным термоядерным неустойчивостям были отмеченная выше работа [42] и несколько ранее

упомянутая работа [41]. В первой из них рассматривалась раскачка низкочастотных ($\omega \ll \omega_{Bi}$) быстрых магнитно-звуковых волн, а во второй — альфвеновских. Вслед за тем автором [29] была обнаружена циклотронная неустойчивость быстрых магнитно-звуковых волн, что по сути является распространением результатов работы [14] по ионно-циклотронным гармоникам на непотенциальную область.

Циклотронная неустойчивость быстрых магнитно-звуковых волн, рассмотренная в [29], обладает инкрементом, существенно бóльшим, чем низкочастотные магнитно-звуковые и альфвеновские неустойчивости. Поэтому она привлекла к себе значительное внимание и исследовалась в большом числе последующих работ, в том числе в работах [30, 31, 43, 44]. Большое внимание уделялось также альфвеновской неустойчивости [41], что объясняется относительно низким порогом ее возбуждения. Исследование этой неустойчивости было продолжено, в частности, в работах [44—46]. Ряд дополнительных результатов был получен также по низкочастотной магнитно-звуковой неустойчивости [43]. Кроме того, в работах [43, 44, 47, 48] были обнаружены некоторые дополнительные разновидности термоядерных неустойчивостей. Сводка результатов по соответствующим неустойчивостям содержится в докладе Т. Д. Каладзе, Д. Г. Ломинадзе и автора [49].

Все перечисленные работы были выполнены в рамках традиционных предположений об однородности магнитного поля и поэтому не учитывали эффектов тороидальности, что важно при выяснении роли термоядерных неустойчивостей в условиях реактора-токамака (в [31] учитывался, однако, шир магнитного поля). Поэтому когда в свое время встал вопрос о картине термоядерных неустойчивостей реактора-токамака, то потребовался пересмотр существовавших результатов этой теории с учетом эффектов тороидальности. При этом развитие теории, учитывающей эффекты тороидальности, первоначально шло по двум направлениям: одно было связано с работой Т. Д. Каладзе и автора [32], а второе — с работой автора [50].

Общим для работ [32, 50] является выдвинутая в них концепция о необходимости изучения двух наборов термоядерных неустойчивостей, один из которых связан с запертыми α -частицами, а другой — с пролетными. Основное же различие работ [32, 50] состоит в том, что в первой из них исследовались неустойчивости, обусловленные немонотонностью энергетического распределения α -частиц, а в [50] — их пространственной неоднородностью.

Работа [32] касалась циклотронной раскачки быстрых магнитно-звуковых волн. В этом отношении она продолжала линию, начатую в [29]. В ней было показано, что тороидальные эффекты существенно модифицируют циклотронное взаимодействие α -частиц с возмущениями, причем эта модификация связана как с отмеченным выше разделением частиц на запертые и пролетные, так и с отличием характера движения тех и других по сравнению со

случае однородного магнитного поля. Последнее очевидно в отношении запертых α -частиц, так как ясно, что свободный пролет вдоль магнитного поля с постоянной скоростью далеко не то же самое, что осцилляции между пробками магнитного поля по бананообразным траекториям. Что же касается пролетных α -частиц, то они, во-первых, вследствие своего знакопеременного магнитного дрейфа совершают периодические осцилляции около соответствующих силовых линий и, во-вторых, вследствие продольной неоднородности циклотронной частоты иначе реагируют на возмущения с частотой, близкой к гармоникам средней циклотронной частоты. В результате в [32] было показано, что дисперсионные уравнения, описывающие циклотронное взаимодействие с быстрыми магнитно-звуковыми волнами как запертых, так и пролетных частиц, существенно отличаются от соответствующего дисперсионного уравнения теории однородной плазмы. Из анализа этих дисперсионных уравнений в [32] было, в частности, получено, что быстрые магнитно-звуковые волны с $k_{\parallel} = 0$ в условиях токамака могут раскачиваться лишь запертыми α -частицами. Причем, вследствие пич-угловой зависимости усредненной циклотронной частоты запертых α -частиц (усреднение по баунс-периодам) инкремент магнитно-звуковой неустойчивости, согласно [32], существенно меньше, чем в случае однородной плазмы.

В отличие от [32] в [50] предполагалось, что в силу тех или иных причин распределение по скоростям α -частиц оказывается максвелловским или каким-либо другим монотонным и изотропным и что единственным фактором их термодинамической неравновесности является пространственная неоднородность. В работе [50] ставился вопрос о неустойчивостях, которые могли бы вызываться такого рода α -частицами в условиях токамака. При этом было показано наличие альфвеновских неустойчивостей, обусловленных эффектом баллонности возмущенного давления.

Работа [32] положила начало исследованию циклотронных термоядерных неустойчивостей токамака, а работа [50] (см. также [26])— исследованию низкочастотных. Последние связаны, в основном, с раскачкой альфвеновских волн. Мы рассмотрим эти неустойчивости в гл. 5, там же отметим и более поздние работы, касающиеся таких неустойчивостей. Теперь же перейдем к работам по циклотронным термоядерным неустойчивостям, продолжившим линию работы [32].

В работе [32] вычислялся инкремент циклотронной неустойчивости, вызываемой запертыми α -частицами, в предположении, что последние являются моноэнергетическими. Эти результаты на случай группы α -частиц с конечным тепловым разбросом были обобщены в работе Д. Г. Ломинадзе и автора [33]. Полученный в [33] качественный критерий существенности теплового разброса [см. (2.78)], оказался таким же, как и в задаче о циклотронной магнитно-звуковой неустойчивости в приближении прямых силовых линий магнитного поля [31].

В [32, 33] учитывался лишь резонанс между волной и частицами типа $\omega = n\bar{\omega}_B$ и пренебрегалось баунс-резонансами ($\omega = n\bar{\omega}_B + p\omega_b$, $p \neq 0$). Баунс-резонансы были учтены в работе [34]. При этом выявился эффект увеличения инкремента, обсуждавшийся выше в § 2.8.

Конкретные результаты работ [32 — 34], касающиеся неустойчивости на запертых α -частицах, основывались на рассмотрении предельного случая сильно запертых α -частиц. В этом пределе формулы, характеризующие взаимодействие α -частиц с быстрыми магнитно-звуковыми волнами, существенно упрощаются, что дает возможность исследовать это взаимодействие аналитически. Для исследования поведения α -частиц с произвольной степенью запертости необходимы численные расчеты. Такие расчеты проводились в работе Т. Д. Каладзе и др. [35]. В результате выяснилось, что инкремент зависит от степени запертости α -частиц, резко падая с увеличением параметра κ при $\kappa^2 \gtrsim \omega_b^2/n\omega_{B\epsilon}$.

В [35] численно исследовалось также влияние теплового разброса запертых α -частиц на величину инкремента возбуждаемых ими быстрых магнитно-звуковых волн, что является дальнейшим развитием линии работы [33]. Эти численные расчеты подтвердили качественный вывод [33] о том, что тепловой разброс α -частиц особенно существенно уменьшает инкремент циклотронных гармоник с высокими номерами, сравнительно большой при малом тепловом разбросе.

Из численного анализа [35] следует также, что поскольку в реальных условиях развитие циклотронной магнитно-звуковой неустойчивости может быть затруднено, то наряду с нею в реакторах токамака должны учитываться и другие термодостойные неустойчивости, а именно те, которые более слабо чувствительны к тепловому разбросу α -частиц по скоростям. К их числу относится мелко-масштабная (вдоль магнитного поля) альфвеновская неустойчивость, первоначально обсуждавшаяся в работе [41], а в условиях токамака рассмотренная в работе В. С. Беликова, Я. И. Колесниченко, автора и В. А. Яворского [51]. О возможной несущественности циклотронной магнитно-звуковой неустойчивости в условиях реактора токамака свидетельствует также квазилинейный анализ этой неустойчивости, проведенный в работе [52]. Содержание этой работы будет изложено в гл. 3.

В работах [32—35] сечения магнитных поверхностей токамака предполагались круглыми. В реальных условиях это может быть не так. В связи с этим в работе [36] была рассмотрена циклотронная магнитно-звуковая неустойчивость запертых α -частиц в токамаке эллиптического сечения. Было показано, что при большой эллиптичности сечения инкремент этой неустойчивости существенно меньше, чем в случае токамака круглого сечения. Отметим также, что в [36], как и в [32, 33], пренебрегалось баунс-резонансами. Поэтому полученные в [36] выражения для инкрементов должны быть уточнены учетом баунс-резонансов аналогично [34].

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ЗАПЕРТЫХ α -ЧАСТИЦ
В РЕАКТОРЕ-ТОКАМАКЕ ПРИ ЦИКЛОТРОННОЙ МАГНИТНО-
ЗВУКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 3.1. Введение

Исследуем квазилинейную релаксацию запертых α -частиц при циклотронной магнитно-звуковой неустойчивости, рассмотренной в гл. 2. При этом будем следовать работе [52]. В § 3.2 выведем уравнения, описывающие эту релаксацию. В § 3.3 учитывается возможность возбуждения «анизотропных» неустойчивостей, изотропизирующих функцию распределения, и выводятся квазилинейные уравнения, описывающие энергетическую релаксацию изотропных распределений. Эти уравнения анализируются в § 3.4 с учетом источника резонансных α -частиц (рождение α -частиц при термоядерных реакциях) и затухания на фоновой плазме. Результаты суммируются и обсуждаются в § 3.5.

§ 3.2. Вывод уравнений квазилинейной релаксации запертых α -частиц

Согласно изложенному в гл. 2, возмущение функции распределения α -частиц в линейном приближении по амплитуде волны в интересующем нас случае быстрых магнитно-звуковых волн с $k_{\parallel} = 0$ имеет вид (2.10). Подставляя этот результат в кинетическое уравнение Больцмана — Власова для медленноменяющейся части функции распределения α -частиц F , производя усреднение по ларморовским осцилляциям, переходим от интегрирования по времени к интегрированию по текущей координате частицы. Усредняя результат по периоду осцилляций частиц между магнитными пробками, приходим к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{2}{\tau} \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl}{v_{\parallel}} \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} (v_{\perp} Q) + J. \quad (3.1)$$

Здесь J — источник α -частиц, описывающий процесс их рождения при термоядерных реакциях и их возможный уход из магнитной ловушки; $\tau = \oint dl/v_{\parallel}$ — период осцилляций частицы между магнитными пробками; l_1, l_2 — точки поворота частицы, а Q определено соотношением

$$Q = \frac{\pi e^2}{M^2} \sum_{k,n} \frac{nJ_n}{\xi} \cos M(l_1, l_2) \delta[\sin M(l_1, l_2)] \times \\ \times \int_{l_1}^{l_2} \frac{nJ_n}{\xi'} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} |E_{1k}|^2 \cos M(l', l_2) \frac{dl'}{|v_{\parallel}|}. \quad (3.2)$$

Учитывая реальную геометрию магнитного поля токамака (магнитное поле предполагается аксиально-симметричным, а магнитные поверхности круглыми), переходим в (3.1) от интегрирования по координате l к интегрированию по малому азимуту θ . Кроме того, используем соотношение [ср. с (2.46)]

$$\delta[\sin M(\theta_1, \theta_2)] = \sum_p \frac{e}{\tau} \delta(\omega - n\bar{\omega}_B - p\omega_b). \quad (3.3)$$

С учетом этого уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & \frac{1}{\mathcal{G}^{1/2} K(\kappa)} \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} D_{11} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} D_{12} \frac{\partial F}{\partial \kappa^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \kappa^2} D_{21} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{\partial}{\partial \kappa^2} D_{22} \frac{\partial F}{\partial \kappa^2} \right) + J, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} D_{11} = & \sum_{k, n, p} \frac{e^2}{M^2} \frac{\pi n^2 \omega_{Bs}^2}{8c_A} J_n^2 \frac{|E_{1k}|^2}{k_{\perp}^2} \frac{\mathcal{G}^{1/2}}{K(\kappa)} \delta(k_{\perp} - k_{np}) I_1^2; \\ D_{12} = D_{21} = & - \sum_{k, n, p} \frac{e^2}{M^2} \frac{\pi n^2 \omega_{Bs}^2}{16c_A} J_n^2 \frac{|E_{1k}|^2}{k_{\perp}^2} \frac{\mathcal{G}^{-1/2}}{K(\kappa)} \delta(k_{\perp} - k_{np}) I_1 I_2; \\ D_{22} = & \sum_{k, n, p} \frac{e^2}{M^2} \frac{\pi n^2 \omega_{Bs}^2}{32c_A} J_n^2 \frac{|E_{1k}|^2}{k_{\perp}^2} \frac{\mathcal{G}^{-3/2}}{K(\kappa)} \delta(k_{\perp} - k_{np}) I_2^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Определение I_1, I_2 см. в § 2.8.

Заметим, что уравнение (3.4) может быть представлено также в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{G}^{1/2} K(\kappa)} \sum_{k, n, p} \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} - \frac{\partial}{\partial \kappa^2} \frac{I_2}{I_1} \frac{1}{2\mathcal{G}} \right) D \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} - \frac{I_2}{I_1} \frac{1}{2\mathcal{G}} \frac{\partial F}{\partial \kappa^2} \right) - J, \quad (3.6)$$

где

$$D = \frac{e^2}{M^2} \frac{\pi n^2 \omega_{Bs}^2}{8c_A} J_n^2 \frac{|E_{1k}|^2}{k_{\perp}^2} \frac{\mathcal{G}^{1/2}}{K(\kappa)} I_1^2 \delta(k_{\perp} - k_{np}). \quad (3.7)$$

Уравнение (3.4) [или (3.6)] является искомым уравнением, описывающим квазилинейную релаксацию α -частиц. Оно дополняется стандартным уравнением для изменения квадрата электрического поля

$$\frac{d}{dt} |E_{1k, n}|^2 = 2\gamma_{k, n} |E_{1k, n}|^2 \quad (3.8)$$

и выражением для энергии колебаний

$$W_{k, n} = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} |E_{1k, n}|^2. \quad (3.9)$$

Инкремент нарастания возмущений $\gamma_{k,n}$ определяется соотношением

$$\gamma_{k,n} = \gamma_{k,n}^{(\alpha)} - |\gamma_{k,n}^{(-)}|, \quad (3.10)$$

где $\gamma_{k,n}^{(\alpha)}$ — правая часть (2.72), а $\gamma_{k,n}^{(-)}$ — декремент затухания колебаний на фоновой плазме.

§ 3.3. Упрощенные уравнения квазилинейной релаксации

Для получения качественной картины квазилинейной релаксации α -частиц предположим, что имеются некоторые неучтенные выше неустойчивости, вызываемые анизотропией распределения α -частиц по скоростям, которые приводят к достаточно быстрой изотропизации. С этой целью дополним уравнение (3.4) модельным столкновительным членом St вида

$$St = v_{\text{эф}} \frac{1}{K(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \kappa^2} D_{\text{эф}} \frac{\partial F}{\partial \kappa^2}, \quad (3.11)$$

где $v_{\text{эф}}$ — некоторая эффективная частота рассеяния частиц на волнах. Будем считать $D_{\text{эф}} = 0$ при $\kappa^2 = 0$ и $\kappa^2 = 1$. Примером неустойчивостей, приводящих к изотропизации частиц по углам в пространстве скоростей, могут быть анизотропные ионно-циклотронные неустойчивости типа неустойчивости Сагдеева — Шафранова.

Предполагая $v_{\text{эф}}$ достаточно большим, решаем получающееся таким путем модифицированное кинетическое уравнение разложением в ряд по $1/v_{\text{эф}}$. В нулевом приближении получаем $F = \bar{F}(\mathcal{E})$, а из условия ортогональности для поправки первого приближения находим, что $\bar{F}(\mathcal{E})$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{E}^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} A(\mathcal{E}) \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathcal{E}} + \bar{S}, \quad (3.12)$$

где

$$A(\mathcal{E}) = \sum_{k,n,p} \int_0^1 D d\kappa^2 \left| \int_0^1 K(\kappa) d\kappa^2 \right|, \quad (3.13)$$

$$\bar{S} = \int_0^1 JK(\kappa) d\kappa^2 \left| \int_0^1 K(\kappa) d\kappa^2 \right|. \quad (3.14)$$

При этом выражение для инкремента нарастания колебаний (3.10) представляется в виде

$$\gamma_{k,n} = \int d\mathcal{E} \mathcal{E}^{1/2} C(\mathcal{E}, k_{\perp}) \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathcal{E}} - |\gamma_{k,n}^{(-)}|, \quad (3.15)$$

где

$$C(\mathcal{E}, k_{\perp}) = \frac{2\pi^2 e^2}{M} \frac{\omega^2}{\omega_{pi}^2} \frac{\sqrt{\varepsilon n^2 \omega_{Bs}^2}}{c_A k_{\perp}^2} J_n^2 \sum_p \int_0^1 \frac{d\kappa^2}{K(\kappa)} I_1^2 \delta(k_{\perp} - k_{np}). \quad (3.16)$$

Для простоты вычислений ограничимся приближением сильно запертых частиц. Учитывая при этом выражения для I_1 вида (2.57), найдем, что $\bar{S} = J(0)$;

$$A(\mathcal{E}) = \frac{\pi}{\kappa_{\max}^2} \frac{e^2}{M^2} \frac{\omega_{Bs}^2}{c_A} \sum_{k, n, p} n^2 \int_0^{\kappa_{\max}} d\kappa^2 \frac{|E_{1k, n}|^2}{k_{\perp}^2} J_n^2 \mathcal{E}^{1/2} J_p^2(z) \times \\ \times \delta(k_{\perp} - k_{np}); \quad (3.17)$$

$$C(\mathcal{E}, k_{\perp}) = \frac{8\pi^3 e^2}{M k_{\perp}^2} \frac{\omega^2}{\omega_{pi}^2} \sqrt{\varepsilon n^2 \omega_{Bs}^2} \sum_p \int_0^{\kappa_{\max}} d\kappa^2 J_n^2 J_p^2 \delta(\omega - n\bar{\omega}_B - 2p\omega_B^0), \quad (3.18)$$

где $\bar{\omega}_B = \omega_{Bs}(1 - \varepsilon + \varepsilon\kappa^2)$; $\omega_B^0 = \sqrt{\mathcal{E}\varepsilon}/qR$; κ_{\max} — некоторое число, малое по сравнению с единицей. Поскольку максимальный инкремент соответствует возмущениям с частотами $\bar{\omega} = n\omega_{Bs}(1 - \varepsilon)$ (см. § 2.8), будем учитывать только возмущения с частотами вблизи $\bar{\omega}$, полагая их инкремент равным γ_{\max} . При этом $z \simeq p$, так что в выражении для $C(\mathcal{E}, k_{\perp})$ возникает сумма (см. § 2.8) $1 + K$. В результате C принимает вид

$$C = \frac{8\pi^3 e^2}{M} |n\omega_{Bs}| \frac{c_A^2}{\omega_{pi}^2 \sqrt{\varepsilon}} J_n^2 (1 + K). \quad (3.19)$$

Что касается выражения (3.17) для $A(\mathcal{E})$, то в нем вначале проводим интегрирование по κ , а затем интегрирование по k_{\perp} , после чего

$$A(\mathcal{E}) = \frac{8\pi^3 e^2 c_A^3 I}{M^2 \varepsilon \kappa_{\max}^2} \sum_n \frac{J_n^2 \mathcal{E}^{1/2}}{|n\omega_{Bs}|} (1 + K); \quad (3.20)$$

$$I = \int_{k_1}^{k_2} E_k^2 k_{\perp} dk_{\perp} d\varphi / 8\pi; \quad (3.21)$$

k_1, k_2 — интервал волновых чисел, на котором $\gamma \simeq \gamma_{\max}$; φ — угол в пространстве k_{\perp} . (Всюду, где можно, k_{\perp} и k_{np} заменяем на $n\omega_{Bs}/c_A$.) Кроме того, интегрируем (3.8) по k_{\perp} в таком же интервале, после чего получим

$$dI/dt = 2 \gamma_{\max} I. \quad (3.22)$$

Заметим, что наша задача свелась к вычислению функции распределения частиц при усредненном по волновым числам спектре колебаний. Такая ситуация была бы невозможна в задаче об

одномерной релаксации, где каждому значению скорости соответствует свое резонансное волновое число.

В дальнейшем ограничимся учетом возмущений только с одним фиксированным $n = n_0$ (т. е. с частотами вблизи $\omega \approx n_0 \omega_{Bs}$). При этом следует иметь в виду, что при выводе исходных уравнений предполагалось $n > 1$. Кроме того, следует учитывать, что при очень больших n нарушается предположение о том, что ионы основной компоненты плазмы — холодные (так как $n \sim k_{\perp}$). Исходя из этого, можно предположить, что наиболее важным является случай $n_0 = 3$.

В качестве интенсивности источника S , характеризующего рождение α -частиц, примем

$$J = G \exp [-(v - v_{\alpha})^2 / 2v_{T\alpha}^2], \quad (3.23)$$

где v_{α} — средняя скорость α -частиц, $v = \sqrt{2\mathcal{E}}$; $v_{T\alpha}$ — скорость теплового разброса; G характеризует интенсивность рождения α -частиц. Чтобы связать функцию G с равновесными параметрами плазмы, заметим, что при J вида (3.23) уравнение непрерывности, вытекающее из (3.1), имеет вид (приближение сильно запертых частиц)

$$\partial n_{\alpha} / \partial t = 2 \sqrt{\epsilon} \pi \kappa_{\text{макс}}^2 \int J \mathcal{E}^{1/2} d\mathcal{E}. \quad (3.24)$$

В то же время плотность α -частиц со временем меняется по закону

$$\partial n_{\alpha} / \partial t = \frac{1}{4} \langle \sigma v \rangle n_i^2, \quad (3.25)$$

где n_i — плотность ионов «фона», а $\langle \sigma v \rangle$ характеризует скорость термоядерных реакций. Вычисляя интеграл в (3.24) и сравнивая с выражением (3.25), найдем

$$G = \langle \sigma v \rangle n_i^2 / 8\pi^{3/2} \sqrt{\epsilon} \kappa_{\text{макс}}^2. \quad (3.26)$$

Уравнения (3.12), (3.22) с коэффициентами (3.19), (3.20) и источником вида (3.23) представляют собой систему замкнутых уравнений квазилинейного приближения, описывающих циклотронное взаимодействие сильно запертых α -частиц с магнитно-звуковыми волнами.

Вышеприведенные квазилинейные уравнения можно записать также в безразмерном виде. Для этого перейдем к переменным

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \bar{F} \mathcal{E}_{\alpha}^{3/2} / n_{\alpha}^{(0)}; & \omega &= \mathcal{E} / \mathcal{E}_{\alpha}; & \Gamma &= (\gamma_{\text{макс}} - |\gamma^{(-)}|) / \gamma_0; \\ \tau &= t / t_0; & t_0 &= 1 / \gamma_0; & I_x &= I / I_0; \\ \chi &= k_{\perp}^2 / k_0^2; & \mathcal{E}_{\alpha} &= v_{\alpha}^2 / 2; & k_0 &= \omega_{Bs} / \sqrt{2\mathcal{E}_{\alpha}}; \\ \gamma_0 &= (n_{\alpha}^{(0)} / n_i) (c_A / \mathcal{E}_{\alpha}) 10\pi^2 |n\omega_{Bs}| / \sqrt{\epsilon}, \end{aligned}$$

где $n_{\alpha}^{(0)}$ — плотность α -частиц, при которой их энергия становится равной плотности энергии «фоновой» плазмы, т. е. $n_{\alpha}^{(0)}$ определяется

равенством $n_{\alpha}^{(0)} M_{\alpha} v_{\alpha}^2 / 2 = n_i T_i$ (T_i — температура ионов плазмы); v_{α} — средняя скорость α -частиц, определяемая соотношением $M_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} = M_{\alpha} v_{\alpha}^2 / 2 = 3,5$ МэВ; $I_0 = M_i n_i v_{Ti}^2 / 2$ — плотность энергии фоновой плазмы. В результате приходим к системе уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = J + \frac{\alpha}{\omega^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \omega} D \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}; \quad (3.27)$$

$$I_{\chi} = I_{\chi}(0) \exp\left(\int_0^{\tau} \Gamma d\tau'\right); \quad (3.28)$$

$$\Gamma = \int_0^{\infty} d\omega \omega^{1/2} J_n^2 \partial \Phi / \partial \omega - |\Gamma^{(-)}|; \quad (3.29)$$

$$D = I_{\chi} J_n^2 \omega^{1/2}, \quad (3.30)$$

где $|\Gamma^{(-)}| = |\gamma^{(-)}| / \gamma_0$ — безразмерный декремент, обусловленный фоновой плазмой, $J = \beta \exp[-(\omega - 1)^2 / a^2]$;

$$a^2 = 8 \mathcal{E}_{Ti} / \mathcal{E}_{\alpha}; \quad \mathcal{E}_{Ti} = v_{Ti}^2 / 2 = T_i / 2 M_i;$$

$$\beta = \mathcal{E}_{\alpha}^{1/2} \langle \sigma v \rangle n_i^2 [4 \gamma_0 \sqrt{2} \pi^{3/2} \sqrt{\epsilon} \kappa_{\max}^2 \mathcal{E}_{Ti}^{1/2} n_{\alpha}^{(0)}]^{-1};$$

$J_n = J_n(\sqrt{\chi \omega})$ — функция Бесселя, $\alpha = 40 \pi^2 \omega^2 c_A^2 I_0 \times \times [\mathcal{E}_{\alpha}^2 \gamma_0 n \omega_{Bs}^2 M^2 \epsilon \kappa_{\max}^2]^{-1}$.

§ 3.4. Анализ квазилинейных уравнений

Система уравнений (3.27) — (3.30) анализировалась численно Т. Д. Каладзе и Л. В. Цамалашвили. При этом получился довольно естественный результат: квазилинейная релаксация при наличии источника и затухания на фоновой плазме протекает так, что инкремент нарастания шумов остается близким к нулю, осциллируя около этого, нулевого значения. Воспользуемся этим общим результатом машинного счета и, основываясь на нем, произведем качественный анализ системы (3.27) — (3.30).

Полагая, что при квазилинейной релаксации функция распределения должна быть близка к «границе устойчивости», разбиваем Φ на две части: $\Phi = \bar{\Phi} + \tilde{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ удовлетворяет условию $\Gamma = 0$, т. е. согласно (3.29)

$$\bar{\Gamma}_{\alpha} = \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\omega} J_n^2 \partial \bar{\Phi} / \partial \omega = |\Gamma^{(-)}|, \quad (3.31)$$

а об $\tilde{\Phi}$ будет сказано позже.

Энергетическую зависимость $\bar{\Phi}$ можно аппроксимировать законом Гаусса, т. е.

$$\bar{\Phi} \sim \exp[-(v - v_{\alpha})^2 / 2 v_{T\alpha}^2]. \quad (3.32)$$

При этом $v_{T\alpha} = v_{T\alpha}(\tau)$. Тогда, согласно § 2.9,

$$\bar{\Gamma}_\alpha = \Gamma_\alpha^{(0)}(\tau) \exp[-2v_{T\alpha}^2(\tau) n^2/c_A^2]. \quad (3.33)$$

Здесь $\Gamma_\alpha^{(0)}(\tau)$ — инкремент, который давали бы α -частицы, если бы они не размазывались по энергиям, т. е. если бы $\bar{\Phi}(\tau)$ было заменено на $\Phi_0(\tau)$, где $\Phi_0(\tau) = J\tau$. Иначе говоря,

$$\Gamma_\alpha^{(0)}(\tau) = \tau \int_0^\infty d\omega \sqrt{\omega} J_n^2 \partial J / \partial \omega \equiv \tau d\Gamma_\alpha^{(0)} / d\tau. \quad (3.34)$$

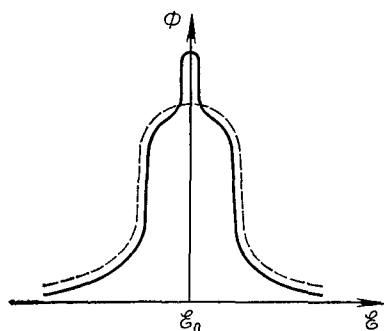


Рис. 4. Качественная картина функции распределения в различные моменты времени:

сплошная кривая — момент наибольшего инкремента неустойчивости; пунктир — момент наибольшего затухания

С учетом этого из (3.31) и (3.33) вытекает

$$v_{T\alpha}^2(\tau) = (c_A^2/2n^2) \times \times \ln [(\tau d\Gamma_\alpha^{(0)}/d\tau) / |\Gamma^{(-)}|]. \quad (3.35)$$

Следовательно, тепловой разброс α -частиц растет со временем логарифмически. Это вытекает и из машинного эксперимента. Логарифмическая зависимость является также зависимостью теплового разброса от мощности источника и от фонового декремента.

Заметим, что уравнение (3.35) можно записать в виде

$$v_{T\alpha}^2(\tau) = (c_A^2/2n^2) \ln(\tau/\tau_*), \quad (3.36)$$

где $\tau_* = |\Gamma^{(-)}| (d\Gamma_\alpha^{(0)}/d\tau)^{-1}$ — момент времени, когда инкремент от α -частиц впервые сравнивается с декрементом от фоновой плазмы, т. е. когда плотность α -частиц впервые достигает порогового значения.

Теперь вернемся к функции $\bar{\Phi}$. С ней связаны осцилляции полного инкремента, наблюдавшиеся в машинном эксперименте. Сама эта функция также является осциллирующей. Она состоит из двух частей, $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2$, отличающихся энергетической зависимостью. Одна часть, $\bar{\Phi}_1$, описывает осциллирующий отклик частиц, родившихся задолго до рассматриваемого момента времени (длительное время в данном случае означает много периодов осцилляций). Эта часть функции распределения имеет примерно такую же зависимость от энергии, как и $\bar{\Phi}$ [см. (3.32)], т. е. она достаточно размыта по энергиям. Вторая часть, $\bar{\Phi}_2$, описывает только что родившиеся и еще не успевшие сильно прорелаксировать частицы. Их тепловой разброс определяется тепловым разбросом источника и поэтому довольно мал. В целом картина функции распределения в различные моменты времени в пределах одного периода осцилляций должна быть такой, как на рис. 4.

Оценим период осцилляций инкремента, обозначив его τ_0 . Пусть за время, примерно равное времени τ_0 , происходит отрастание пика (см. рис. 4), а за время τ_0/c ($c > 1$ — некоторая константа) — его исчезновение. Рассмотрим уравнение (3.27) как уравнение для функции $\tilde{\Phi}_2$ на стадии отрастания пика и на стадии его размывания. В первом случае полагаем, что шумы еще не выросли, так что $D = 0$ и (3.27) сводится к виду $\partial\tilde{\Phi}_2/\partial\tau = J$. Отсюда находим $\tilde{\Phi}_2$ и, пренебрегая на этой стадии $\tilde{\Phi}_1$, получаем аналогично (3.34) $\Gamma(\tau) = \tau d\Gamma_\alpha^{(0)}/d\tau$ и, далее, в соответствии с (3.28)

$$I_\chi(\tau) = I_\chi(0) \exp(\tau^2 d\Gamma_\alpha^{(0)}/d\tau). \quad (3.37)$$

Теперь рассмотрим уравнение (3.27) для $\tilde{\Phi}_2$ на стадии размывания пика. В соответствии со сказанным ранее полагаем этот процесс более быстрым, чем процесс отрастания пика. Тогда можно пренебречь членом J в уравнении (3.27) и записать это уравнение в виде

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial\tau} = \frac{\alpha}{\omega^{1/2}} \frac{\partial}{\partial\omega} D \frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial\omega}. \quad (3.38)$$

Кроме того, для упрощения полагаем, что размывание пика происходит при максимальном коэффициенте диффузии D , определяемом при подстановке в (3.30) выражения (3.37), взятого при $\tau = \tau_0$. Далее учитываем, что в результате релаксации пика он должен приобретать тепловой разброс порядка $(c_A/n)^2$. Тогда

$$\partial^2/\partial\omega^2 \simeq (nv_\alpha/c_A)^2. \quad (3.39)$$

В качестве временного масштаба релаксации пика берем указанную выше величину τ_0/c . Тогда, символически сокращая (3.38) на $\tilde{\Phi}_2$, получаем оценку

$$\frac{c}{\tau_0} \simeq \alpha \left(\frac{nv_\alpha}{c_A} \right)^2 I_\chi(0) J_n^2 \exp[\tau_0^2 d\Gamma_\alpha^{(0)}/d\tau]. \quad (3.40)$$

Отсюда с двойной логарифмической точностью

$$\tau_0 \simeq \left(\frac{d\Gamma_\alpha^{(0)}}{d\tau} \right)^{-1/2} \ln^{1/2} \left[\frac{1}{\alpha I_\chi(0)} \left(\frac{c_A}{nv_\alpha} \right)^3 \frac{(d\Gamma_\alpha^{(0)}/d\tau)^{1/2}}{J_n^2} \right]. \quad (3.41)$$

Из (3.40) и (3.41) следует оценка для плотности энергии шумов в максимуме всплеска:

$$I_\chi(\tau_0) \simeq \left(\frac{c_A}{nv_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\alpha J_n^2} \left(\frac{d\Gamma_\alpha^{(0)}}{d\tau} \right)^{1/2}. \quad (3.42)$$

В пренебрежении логарифмическим множителем в (3.41) и с учетом определения τ_* получаем оценку

$$\tau_0/\tau_* \simeq (\tau_*/|\Gamma(-)|)^{-1/2}. \quad (3.43)$$

Эта величина должна быть мала, что дает нижний предел для затухания, при котором справедливо наше рассмотрение:

$$|\Gamma(-)|^2 \gg d\Gamma_{\alpha}^{(0)}/d\tau. \quad (3.44)$$

Итак, мы качественно показали, что квазилинейная релаксация запертых α -частиц характеризуется следующими основными процессами: медленным увеличением их среднего теплового разброса, описываемым соотношением (3.35) [или (3.33)], и быстрыми осцилляциями инкремента (и шумов) с периодом, определяемым правой частью (3.41).

§ 3.5. Суммирование и обсуждение результатов

Мы получили уравнения квазилинейной релаксации запертых высокоэнергичных ионов, взаимодействующих посредством циклотронного резонанса с быстрыми магнитно-звуковыми волнами. Эти уравнения существенно зависят от геометрии магнитного поля токамака и не сводятся к обычным квазилинейным уравнениям для плазмы в прямом магнитном поле.

Полученные в § 3.2 квазилинейные уравнения могут быть использованы, например, в задаче о ВЧ-нагреве плазмы в токамаке магнитно-звуковыми волнами и в ряде других задач. В данной главе мы, однако, сделали акцент на использовании этих уравнений для задачи о циклотронной магнитно-звуковой неустойчивости, вызываемой запертыми α -частицами.

В условиях реактора-токамака важны процессы непрерывного поступления в систему новых резонансных α -частиц, рождающихся при термоядерных реакциях, и затухание шумов на фоновой плазме. Поэтому мы рассмотрели квазилинейную релаксацию с учетом обоих указанных факторов. При этом выяснилось, что, как и в некоторых других задачах подобного рода, квазилинейная релаксация носит пульсирующий характер. В § 3.4 мы качественно оценили основные параметры, характеризующие такую пульсирующую релаксацию.

Из изложенного выше анализа следует, что хотя циклотронная магнитно-звуковая неустойчивость обладает довольно большим инкрементом, роль ее в реакторах-токамаках может быть не очень существенной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим более подробно выражение для теплового разброса (3.36). Предположим для ориентировки, что пороговая плотность α -частиц порядка 10^{-4} плотности основной компоненты плазмы, $(n_{\alpha}/n_i)_{\text{пор}} \simeq 10^{-4}$. К концу работы термоядерного реактора, когда $n_{\alpha}/n_i \simeq 10^{-2}$, будем иметь $\tau/\tau_* \simeq 10^{-2}/10^{-4} = 10^2$. При этом $\ln(\tau/\tau_*) \simeq 5$ и, следовательно, $v_{\alpha}^2(\tau) \simeq 5(c_A^2/2n^2)$. Даже при минимальном $n = 2$ это значение скорости теплового разброса не превосходит альфвеновской скорости c_A , что при $c_A < v_{\alpha}$ мало по сравнению со средней скоростью α -частиц.

Таким образом, грубым результатом неустойчивости должно быть небольшое уширение энергетического спектра запертых α -частиц, растущее логарифмически. Кроме того, развитие неустойчивости должно сопровождаться периодически повторяющимися всплесками колебаний на гармониках циклотронной частоты α -частиц.

Из приведенного анализа следует также, что поскольку циклотронная магнитно-звуковая неустойчивость вряд ли может приводить к катастрофическим эффектам в реакторе-токамаке, то необходимо более тщательно исследовать другие термоядерные неустойчивости, в том числе обсуждаемые несколько ниже.

ГЛАВА 4

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АЛЬФВЕНОВСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ТОКАМАКА С БЫСТРЫМИ ИОНАМИ

§ 4.1. Введение

Рассмотрим некоторые общие вопросы теории альфвеновских неустойчивостей токамака с быстрыми ионами. При этом будет предполагаться, что быстрые ионы обусловлены ионизацией быстрых нейтральных атомов, инжектируемых в токамак, либо рождением их при термоядерных реакциях. Иначе говоря, анализ данной главы имеет отношение как к проблеме токамака с инжекцией, так и к проблеме токамака с α -частицами.

Общие вопросы теории альфвеновских неустойчивостей в токамаке с инжекцией нейтральных атомов обсуждались также в гл. 14 книги [1]. Там, в частности, был дан вывод дисперсионного уравнения длинноволновых альфвеновских неустойчивостей в пренебрежении затухания колебаний на фоновой (основной) плазме [см. уравнение (14.10) книги [1]]. В гл. 15 книги [1] рассматривались некоторые общие вопросы градиентных (дрейфовых) термоядерных альфвеновских неустойчивостей. В аналогичных предположениях там было выведено дисперсионное уравнение для пролетных α -частиц [см. уравнение (15.6) книги [1]]. Кроме того, в гл. 15 книги [1] был дан вывод аналогичного уравнения для запертых α -частиц в предположении, что взаимодействие таких α -частиц с альфвеновскими волнами осуществляется посредством магнитно-дрейфового резонанса [см. уравнение (15.22) книги [1]]. В гл. 16 книги [1] был изложен метод решения столкновительного кинетического уравнения для запертых электронов, находящихся в равновесном магнитном поле токамака и в электромагнитном поле альфвеновского возмущения, и было получено общее выражение для декремента затухания таких волн [см. уравнение (16.42) книги [1]]. При этом, однако, пренебрегалось наличием в альфвеновской волне нулевого сателлита возмущения продольного электрического поля, что мо-

жет быть существенно в случае достаточно коротковолновых возмущений.

В данной главе рассматривается аналогичный круг вопросов, но при более общих предположениях. В § 4.2 выведены уравнения малых колебаний альфвеновского типа, учитывающие как дестабилизирующие факторы, связанные с быстрыми частицами, так и стабилизирующие, такие, как шир и диссипация на фоновой плазме. Затем в § 4.3, используя результаты работ К. О. Бизли, Д. Г. Ломинадзе и автора [53, 54], Т. Д. Каладзе и автора [55] и В. С. Беликова, Я. И. Колесниченко, автора и В. А. Яворского [51], вычислим вклад быстрых ионов в инкремент нарастания альфвеновских волн. И, наконец, в § 4.4, 4.5, следуя работам автора и А. Л. Френкеля [56], В. А. Мазура и автора [57], автора и И. Г. Шухмана [58], рассмотрим роль столкновительной диссипации на запертых электронах в квазичетных и квазинечетных альфвеновских волнах.

§ 4.2. Уравнение малых колебаний альфвеновского типа, учитывающее шир и диссипацию на фоновой плазме

1. Исходные электродинамические уравнения. Исходим из уравнения [1]

$$(c/4\pi B_0^2) (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0 \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\perp = 0, \quad (4.1)$$

вытекающего из уравнений Максвелла. В (4.1) вектор \mathbf{j}_\perp означает часть возмущения электрического тока, поперечную полю \mathbf{B}_0 . Предполагается, что вклад в $\operatorname{div} \mathbf{j}_\perp$ обусловлен электронами, фоновыми ионами и быстрыми ионами, обозначаемыми ниже индексом α . Роль частиц сорта α могут играть быстрые ионы, образующиеся при инжекции быстрых нейтральных атомов, или α -частицы, образующиеся при термоядерных реакциях. Таким образом,

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_\perp = \operatorname{div} \mathbf{j}_\perp^{(e)} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\perp^{(i)} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\perp^{(\alpha)}. \quad (4.2)$$

Величина $\tilde{\mathbf{B}}$ в (4.1) означает возмущение магнитного поля. Ниже будет использоваться также скалярная функция ζ , связанная с α -й контравариантной компонентой $\tilde{\mathbf{B}}$ соотношением $\tilde{B}^\alpha = (\mathbf{B}_0 \nabla) \zeta$.

Будем учитывать также продольное электрическое поле возмущений $E_\parallel = \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{B}_0 / B_0$. Это поле будем характеризовать функцией ψ , определенной соотношением $E_\parallel = -e_0 \nabla \psi$.

При учете E_\parallel уравнение (4.1) необходимо дополнить еще одним электродинамическим уравнением, из которого можно было бы найти связь между ψ и ζ . В качестве такого уравнения выбираем условие квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i + e_\alpha n_\alpha = 0$. Здесь n_e , n_i , n_α соответственно возмущения плотностей электронов, фоновых ионов и быстрых частиц; e_e , e_i , e_α — заряды частиц соответствующего сорта.

В дальнейшем будет предполагаться, что равновесное давление плазмы p_0 сравнимо с давлением равновесного полоидального магнитного поля $\beta_{\perp} \simeq 8\pi p_0/B_0^2 \gg 1$. При этом необходимо учитывать также компоненту возмущения магнитного поля вдоль равновесного магнитного поля, т. е. $\tilde{B}_{\parallel} \equiv e_0 \tilde{B}_{\parallel}$. Для определения связи \tilde{B}_{\parallel} с ζ и ψ можно использовать уравнение баланса возмущенных давлений, $\tilde{B}_{\parallel} B_0/4\pi + \tilde{p} = 0$, где \tilde{p} — возмущение давления плазмы (строгое определение \tilde{p} будет дано ниже). При учете \tilde{B}_{\parallel} необходимо учитывать также «диамагнитную» часть градиента модуля поля B_0 , т. е. часть ∇B_0 , обусловленную градиентом равновесного давления плазмы p_0 . Совместный учет того и другого приводит к заключению: при исследовании возмущений плазмы с $\beta_{\perp} \gg 1$ можно считать \tilde{B}_{\parallel} равным нулю, $\tilde{B}_{\parallel} \rightarrow 0$, но при этом величину ∇B_0^2 следует заменять $\nabla (B_0^2 + 8\pi p_0)$. Это условие будем использовать ниже, так что в дальнейшем величина \tilde{B}_{\parallel} нигде фигурировать не будет.

2. Преобразование уравнения (4.1) для случая осесимметричного токамака круглого сечения. Ограничимся рассмотрением случая осесимметричного токамака круглого сечения. Будем считать, что координатно-временная зависимость функции ζ имеет вид

$$\zeta(t, a, \theta, \varphi) = \exp(-i\omega t + im\theta - in\varphi)\zeta_0(a),$$

где m, n — целые числа, значительно превышающие единицу, и такие, что $k_{\parallel} \equiv (m - nq)/qR \ll m/a$. Здесь, как и в гл. 2, R — радиус кривизны магнитной оси токамака; $q = aB_s/RB_0$ — коэффициент запаса; B_s, B_0 — средние на магнитной поверхности $a = \text{const}$ значения тороидального и полоидального поля токамака. Индекс «нуль» у ζ_0 в дальнейшем будет опускаться.

Заметим, что приведенный вид θ -й зависимости возмущений не является общим. О результатах, получающихся при более общем виде θ -й зависимости возмущений, будет сказано в § 4.5. Там же будет разъяснено, что принятый здесь вид $\zeta(\theta)$ учитывает лишь так называемые квазичетные альфвеновские возмущения, но не учитывает квазинечетные альфвеновские возмущения.

При сделанных предположениях из условия $\text{div} \tilde{\mathbf{B}} = 0$ следует, что θ -я контравариантная компонента поля $\tilde{\mathbf{B}}$ выражается через ζ соотношением $\tilde{B}^{\theta} = (i/m) (B_0 \nabla \zeta)'$, где штрих означает производную по координате a . При этом

$$\frac{1}{B_0^2} (B_0 \nabla) (B_0 \text{rot} \tilde{\mathbf{B}}) = -i \frac{a}{m} B_s k_{\parallel} \nabla_{\perp}^2 k_{\parallel} \zeta. \quad (4.3)$$

Здесь $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial a^2 - (m/a)^2$; учтено также, что при малом a/R $B_0 \approx B_s$.

С учетом (4.3) уравнение (4.1) преобразуется к виду

$$-\frac{ic}{4\pi} \frac{a}{m} B_s k_{\parallel} \nabla_{\perp}^2 k_{\parallel} \zeta + \text{div} \mathbf{j}_{\perp} = 0. \quad (4.4)$$

3. Связь $\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(e)}$ с возмущением давления электронов. Поскольку эффекты конечного ларморовского радиуса электронов в интересующей нас задаче не играют роли, то для описания динамики электронов можно воспользоваться дрейфовым кинетическим уравнением. Последнее представляем в виде

$$\begin{aligned} \{ -i\omega + (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{V}_{De}) \nabla - \hat{C}_e \} f_e + \mathbf{V}_E \nabla F_e + v_{\parallel} \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{B_0} \nabla F_e + \\ + \frac{e_e}{M_e} (v_{\parallel} E_{\parallel} + \mathbf{V}_{De} \mathbf{E}_{\perp}) \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{E}} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь f_e , F_e — возмущение и равновесная часть функции распределения электронов, $\mathbf{v}_{\parallel} = v_{\parallel} \mathbf{e}_0$, $v_{\parallel} = \mathbf{v} \mathbf{e}_0$ — вектор и модуль продольной скорости частицы, $\mathbf{V}_{De} = (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2) \mathbf{e}_0$, $\nabla \ln (B_0^3 + 8\pi p_0) / 2\omega_{Be}$ — скорость магнитного дрейфа электронов (дрейфа под действием кривизны и неоднородности магнитного поля); $\omega_{Be} = e_e B_0 / m_e c$ — циклотронная частота электронов; $\mathbf{V}_E = c [\mathbf{E}, \mathbf{e}_0] / B_0$ — скорость электрического дрейфа; $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - \mathbf{e}_0 E_{\parallel}$ — часть вектора электрического поля \mathbf{E} , поперечная \mathbf{B}_0 ; \hat{C}_e — интеграл столкновений электронов; $\mathcal{E} = v^2/2$ — энергия частицы на единицу массы; $v_{\perp} = (v^2 - v_{\parallel}^2)^{1/2}$ — модуль поперечной скорости частицы; остальные обозначения общепринятые.

Заметим, что уравнение (4.5) при $\hat{C}_e = 0$ представляет собой результат линеаризации бесстолкновительного дрейфового кинетического уравнения. Уравнение (4.5) с $\hat{C}_e \neq 0$ получается из уравнения Больцмана — Власова в результате стандартного перехода к дрейфовому приближению.

Воспользуемся уравнением (4.5), чтобы преобразовать к более удобному виду выражение для $\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(e)}$, входящее в (4.2). С этой целью умножим обе части равенства (4.5) на e_e , проинтегрируем результат по скоростям и учтем, что, согласно условию непрерывности заряда электронов,

$$-i\omega_e n_e + \text{div} \mathbf{j}_{\parallel}^{(e)} + \text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(e)} = 0. \quad (4.6)$$

В результате

$$\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(e)} = \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_0, \nabla \ln (B_0^3 + 8\pi p_0)] \nabla \tilde{p}_e + \text{div} (e_e n_0^{(e)} \mathbf{V}_E). \quad (4.7)$$

При получении (4.7) было учтено, что

$$n_e = \int f_e dv; \quad (4.8)$$

$$\tilde{p}_e = \int \frac{M_e (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2)}{2} f_e dv; \quad (4.9)$$

$$\mathbf{j}_{\parallel}^{(e)} = e_e \int v_{\parallel} f_e dv. \quad (4.10)$$

Величина $n_0^{(e)}$ означает равновесную плотность электронов.

Заметим, что последнее слагаемое в правой части (4.7) описывает хорошо известный эффект дрейфа в скрещенных полях. (Этот эффект при суммировании по сортам зарядов вклада в полный ток не дает.) Происхождение указанного слагаемого не связано с искривленностью силовых линий равновесного магнитного поля (хотя оно и зависит от искривленности). В отличие от этого первое слагаемое в правой части (4.7) специфично только для криволинейного магнитного поля. Оно учитывает эффект сжимаемости, первоначально обсуждавшийся в работе [27] (см. также [1]).

4. Выражение для $\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)}$. При вычислении $\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)}$ будем учитывать также резонансное взаимодействие фоновых ионов с возмущениями. При этом

$$\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)} = (\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^0 + (\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^{res}, \quad (4.11)$$

где $(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^{res}$ означает вклад резонансных фоновых ионов, а $(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^0$ — нерезонансную часть $\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)}$.

Выражение для $(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^0$ будем находить, пренебрегая продольной инерцией фоновых ионов. При этом из соотношения, аналогичного (4.6), следует, что $(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^0$ может быть выражено через нерезонансную часть возмущения плотности фоновых ионов

$$(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^0 = i\omega e_i n_i^{(0)}. \quad (4.12)$$

В выражении для $(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^0$, а следовательно, и в выражении для $n_i^{(0)}$ должны учитываться члены, малые как квадрат отношения ларморовского радиуса к поперечной длине волны. Поэтому при описании динамики ионов необходимо выйти за рамки дрейфового кинетического уравнения. Это можно сделать, используя модельное кинетическое уравнение, представляющее собой дрейфовое кинетическое уравнение с некоторыми искусственно добавленными к нему слагаемыми. Более строгим является использование полного кинетического уравнения Власова — Больцмана. Решая последнее стандартным методом интегрирования по траекториям, находим выражение для $n_i^{(0)}$:

$$n_i^{(0)} = -\frac{i}{\omega} \text{div} (n_0^{(i)} \mathbf{V}_E) - \frac{c^2 \bar{M}_i n_0^{(i)}}{e_i B_s^2} \left(1 + \frac{3}{4} \bar{\rho}_i^2 \nabla_{\perp}^2 \right) \text{div} \mathbf{E}_{\perp}. \quad (4.13)$$

Здесь $n_0^{(i)}$ — равновесная плотность фоновых ионов, \bar{M}_i — их средняя масса, $\bar{M}_i = (M_d n_d + M_t n_t) / n_0^{(i)}$; M_d , M_t — массы дейтерия и трития; n_d , n_t — их равновесные плотности, $(n_d + n_t = n_0^{(i)})$; $\bar{\rho}_i^2$ — среднее квадрата ларморовского радиуса фоновых ионов.

Из (4.12), (4.13) следует

$$(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^0 = \text{div} (e_i n_0^{(i)} \mathbf{V}_E) - i\omega \frac{c^2 \bar{M}_i n_0^{(i)}}{B_s^2} \left(1 + \frac{3}{4} \bar{\rho}_i^2 \nabla_{\perp}^2 \right) \text{div} \mathbf{E}_{\perp}. \quad (4.14)$$

При вычислении $(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^{res}$ можно исходить из дрейфового кинетического уравнения, аналогичного (4.5). При этом получается [ср. с (4.7)]

$$(\text{div} \mathbf{j}_{\perp}^{(i)})^{res} = \frac{c}{B_s} [\mathbf{e}_0, \nabla \ln (B_0^2 + 8\pi\rho_0)] \nabla \tilde{\rho}_i^{res}, \quad (4.15)$$

где $\tilde{\rho}_i^{res}$ — резонансная часть возмущения давления фоновых ионов, связанная с резонансной частью возмущения функций распределения дейтерия f_d^{res} и трития f_t^{res} соотношением, аналогичным (4.9):

$$\tilde{\rho}_i^{res} = \sum_{j=d, t} \int \frac{M_j (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2)}{2} f_j^{res} dv. \quad (4.16)$$

5. Каноническая форма уравнения малых колебаний. Подстановка (4.2) в (4.13) и последующее использование соотношений (4.11), (4.14) и (4.15) приводят к соотношению

$$\omega_A \nabla_{\perp}^2 \omega_A \xi - \omega^2 \left(\nabla_{\perp}^2 \xi + \frac{3}{4} \bar{\rho}_i^2 \nabla_{\perp}^4 \xi \right) = Q_{\alpha} + Q_e + Q_i. \quad (4.17)$$

Здесь $\omega_A = k_{\parallel} c_A$, где $c_A = B_s / (4\pi \bar{M}_i n_0^{(i)})^{1/2}$ — скорость Альфвена; функция ξ означает a -ю контравариантную компоненту вектора смещения плазмы ξ , определенного соотношением $-i\omega \xi = \mathbf{V}_E$, а величины Q_{α} , Q_e и Q_i означают

$$\left. \begin{aligned} Q_{\alpha} &= -\frac{imB_s}{ac \bar{M}_i n_0^{(i)}} \text{div} (\mathbf{j}_{\perp}^{(\alpha)} - e_{\alpha} n_0^{(\alpha)} \mathbf{V}_E); \\ Q_e &= -\frac{im}{a \bar{M}_i n_0^{(i)}} [\mathbf{e}_0, \nabla \ln (B_0^2 + 8\pi\rho_0)] \nabla \tilde{\rho}_e; \\ Q_i &= -\frac{im}{a \bar{M}_i n_0^{(i)}} [\mathbf{e}_0, \nabla \ln (B_0^2 + 8\pi\rho_0)] \nabla \tilde{\rho}_i^{res}. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

При получении уравнений (4.17), (4.18) было использовано равновесное условие квазинейтральности $e_i n_0^{(i)} + e_e n_0^{(e)} + e_{\alpha} n_0^{(\alpha)} = 0$, вследствие чего в этих уравнениях появился член с $n_0^{(\alpha)}$ — равновесной плотностью частиц сорта α .

Заметим, что величина ξ связана с ζ и ψ соотношением $\xi = \zeta + (mc/\omega a B_s) \psi$. Эта величина с точностью до множителя совпадает с полным потенциалом электрического поля Φ , определенным соотношением $\mathbf{E}_{\perp} = -\nabla_{\perp} \Phi$, так что $\xi = (mc/\omega a B_s) \Phi$.

Будем учитывать только нулевую (по тороидальности) гармонику уравнения (4.17). При этом уравнение (4.17) заменяется следующим:

$$\omega_A \nabla_{\perp}^2 \omega_A \xi - \omega^2 \left(\nabla_{\perp}^2 \xi_0 + \frac{3}{4} \bar{\rho}_i^2 \nabla_{\perp}^4 \xi_0 \right) = Q_{\alpha, 0} + Q_{e, 0} + Q_{i, 0}. \quad (4.19)$$

Предполагается, что все возмущенные величины, кроме ζ , имеют тороидальные сателлиты, так что

$$\tilde{X} = \exp(-i\omega t + im\theta - in\varphi) \sum_{l=-1, 0, 1} \tilde{X}_l \exp(il\theta),$$

где \tilde{X} — возмущения. В связи с предположением о круговых магнитных поверхностях мы учитываем только сателлиты с индексами $l = \pm 1$. Дополнительный индекс «нуль» в (4.19) соответствует члену с $l = 0$.

В согласии с [1]

$$Q_{e,0} = \frac{m^2}{a^2 \bar{M}_i n_0^{(e)} R} \left[\tilde{p}_{e,+1} + \tilde{p}_{e,-1} + \frac{a}{m} \frac{\partial}{\partial a} (\tilde{p}_{e,+1} - \tilde{p}_{e,-1}) \right]. \quad (4.20)$$

Дальнейшие преобразования уравнения малых колебаний проводим с использованием электронного кинетического уравнения (4.5), уравнения квазинейтральности и выражения для возмущенной плотности ионов [уравнения (4.13), дополненного вкладом резонансных ионов].

Представляем решение уравнения (4.5) в виде $f_e = f_e^{(1)} + f_e^{(2)}$, где функция $f_e^{(1)}$ определена соотношением

$$f_e^{(1)} = -F'_e \zeta + \frac{e_e}{M_e} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{G}} \psi, \quad (4.21)$$

а $f_e^{(2)}$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\begin{aligned} (-i\omega + \mathbf{v}_{\parallel} \nabla + \mathbf{V}_{De} \nabla) f_e^{(2)} = i e_e \left(\frac{\omega}{M_e} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{G}} + \frac{mc}{e_e a B_s} \frac{\partial F_e}{\partial a} \right) \times \\ \times \left(\psi - i \frac{a B_s}{mc} \mathbf{V}_{De} \nabla \zeta \right) + \hat{C} (f_e^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Учитываем, что тепловая скорость электронов v_{Te} велика по сравнению с тепловой скоростью быстрых частиц $v_{T\alpha}$. При этом $f_e^{(2)}$ мало по сравнению с $f_e^{(1)}$, и поэтому достаточно учесть только такие члены в $f_e^{(2)}$, которые соответствуют интересующим нас диссипативным эффектам — столкновительной диссипации на запертых электронах и бесстолкновительной диссипации на резонансных пролетных и запертых электронах. В соответствии с этим полагаем $f_e^{(2)} = f_e^{col} + f_e^{res}$, где f_e^{col} — часть $f_e^{(2)}$, связанная со столкновительной диссипацией на запертых частицах (индекс *col* означает collisional), а f_e^{res} — вклад в $f_e^{(2)}$ от резонансных частиц. Оба эти слагаемые считаем малыми по сравнению с $f_e^{(1)}$.

Учитывая (4.21), представляем возмущения плотности давления электронов в виде

$$\left. \begin{aligned} n_e &= -n'_0 \zeta - \frac{e_e n_0}{T_e} \psi + n_e^{col} + n_e^{res}, \\ \tilde{p}_e &= -p'_e \zeta - e_e n_0 \psi + p_e^{col} + p_e^{res}, \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

где n_e^{col} , n_e^{res} , p_e^{col} , p_e^{res} — соответственно вклады в возмущений плотности и давления электронов, обусловленные запертыми и резонансными частицами. Аналогично $Q_{e,0} = Q_{e,0}^{(1)} + Q_{e,0}^{col} + Q_{e,0}^{res}$, где

$$\left. \begin{aligned} Q_{e,0}^{(1)} &= -\frac{e_e m^2}{a^2 \bar{M}_i R} \left[\psi_1 + \psi_{-1} + \frac{a}{m} \frac{\partial}{\partial a} (\psi_1 - \psi_{-1}) \right]; \\ Q_{e,0}^{col} &= \frac{m^2}{a^2 \bar{M}_i n_0^{(i)} R} \left[p_{e,1}^{col} + p_{e,-1}^{col} + \frac{a}{m} \frac{\partial}{\partial a} (p_{e,1}^{col} - p_{e,-1}^{col}) \right], \end{aligned} \right\} (4.24)$$

а выражение для $Q_{e,0}^{res}$ отличается от $Q_{e,0}^{col}$ только заменой индексов «col» на «res».

При получении (4.24) были учтены соотношения (4.20), (4.23) и то обстоятельство, что функция ζ не имеет сателлитов.

Используя соотношения (4.13), (4.23), приводим условие квазинейтральности к виду

$$\begin{aligned} e_e \left(-n_0' \zeta - \frac{e_e n_0}{T_e} \psi \right) + e_e (n_e^{col} + n_e^{res}) + e_i n_i^{res} - \\ - \frac{ie_i}{\omega} \operatorname{div} (n_0 \mathbf{V}_E) - \frac{c^2 \bar{M}_i n_0}{B_s^2} \operatorname{div} \mathbf{E}_\perp = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь мы пренебрегли вкладом быстрых частиц и малыми членами с $\bar{\rho}_i^2$.

Из (4.25) вытекают следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \zeta + \bar{\rho}_i^2 (T_e / \bar{T}_i) \nabla_\perp^2 \zeta + \delta \xi_{0,e}^{col} + \delta \xi_{0,e}^{res} + \delta \xi_{0,i}^{res}; \\ \xi_{\pm 1} &= -\frac{c T_e}{e_e R \omega B_s} \left(\frac{m}{a} \mp \frac{\partial}{\partial a} \right) \zeta + \delta \xi_{\pm 1,e}^{col} + \delta \xi_{\pm 1,e}^{res} + \delta \xi_{\pm 1,i}^{res}; \end{aligned} \right\} (4.26)$$

\bar{T}_i — средняя температура ионов.

Выражения для $\delta \xi_{0,e}^{col}$, $\delta \xi_{\pm 1,0}^{col}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \delta \xi_{0,e}^{col} &= \frac{m c T_e}{e_e \omega a B_s n_0} \left\{ n_{e,0}^{col} - \frac{m c T_e}{\omega R e_e B_s a} \left[n_{e,1}^{col} + n_{e,-1}^{col} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{a}{m} \frac{\partial}{\partial a} (n_{e,1}^{col} - n_{e,-1}^{col}) \right] \right\}; \delta \xi_{\pm 1,e}^{col} = \frac{m c T_e}{e_e \omega B_s n_0 a} n_{e,\pm 1}^{col}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Аналогичный вид имеют и $\delta \xi_{0,e}^{res}$, $\delta \xi_{\pm 1,e}^{res}$ [с заменой в (4.27) индексов «col» на «res»] и $\delta \xi_{0,i}^{res}$, $\delta \xi_{\pm 1,i}^{res}$ (с дополнительной заменой электронных индексов на ионные всюду, кроме T_e).

Используя (4.20) и выражения типа (4.24), (4.26), (4.27), приводим уравнение (4.19) к виду

$$\begin{aligned} \omega^2 \nabla_\perp^2 \zeta - \omega_A \nabla_\perp^2 \omega_A \zeta + (3/4 + T_e / \bar{T}_i) \omega^2 \bar{\rho}_i^2 \nabla_\perp^4 \zeta + Q_{\alpha,0} + \\ + S_e^{col} + S_e^{res} + S_i^{res} = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Здесь

$$S_e^{col} = \frac{m\omega T_e}{e_e B_s a n_0} \nabla_{\perp}^2 n_{e,0}^{col} + \frac{m^2}{a^2 \bar{M}_i n_0 R} \left[q_{e,1}^{col} + q_{e,-1}^{col} + \frac{a}{m} \frac{\partial}{\partial a} (q_{e,1}^{col} - q_{e,-1}^{col}) \right]; \quad (4.29)$$

$$q_{e,\pm 1}^{col} = p_{e,\pm 1}^{col} - T_e n_{e,\pm 1}^{col}, \quad (4.30)$$

а выражения для S_e^{res} , S_i^{res} получаются из (4.29) указанным выше переобозначением индексов.

Из структуры выражений (4.29), (4.30) видно, что учет резонансной части возмущения плотности быстрых частиц в уравнении квазинейтральности (4.25) привел бы к малым поправкам порядка T_e/T_α (T_α — «температура» быстрых частиц) к члену $Q_{\alpha,0}$.

Уравнение (4.28) представляет собой искомую форму уравнения малых колебаний альфвеновского типа в токамаке круглого сечения.

6. Локальное дисперсионное уравнение. Уравнение (4.28) в дальнейшем нам понадобится для исследования эволюции нарастающих возмущений. А теперь используем его для получения локальных дисперсионных уравнений, описывающих начальную стадию неустойчивостей.

Общее локальное дисперсионное уравнение, вытекающее из (4.28) при подстановке в него функции ζ вида $\exp(ik_a a)$, имеет решение $\omega = \text{Re}\omega + i\gamma$, где

$$(\text{Re}\omega)^2 = \omega_A^2 \left[1 + k_{\perp}^2 \bar{\rho}_i^2 (T_e/\bar{T}_i + 3/4) \right], \quad (4.31)$$

а локальный инкремент γ определяется соотношением

$$\gamma \zeta = \frac{1}{2k_{\perp}^2 \text{Re}\omega} \text{Im} (Q_{\alpha,0} + S_e^{col} + S_e^{res} + S_i^{res}), \quad (4.32)$$

где $k_{\perp}^2 = k_a^2 + (m/a)^2$ — квадрат поперечного волнового числа.

Выражение для локального инкремента (4.32) можно также представить в виде

$$\gamma = \gamma_{\alpha} + \gamma_e^{col} + \gamma_e^{res} + \gamma_i, \quad (4.33)$$

где величины в правой части равенства (4.33) — вклады в инкремент, обусловленные резонансом с быстрыми частицами, столкновительной диссипацией на запертых электронах и резонансами с электронами и фоновыми ионами. Эти четыре величины связаны с ранее введенными соотношениями:

$$\gamma_{\alpha} \zeta = \text{Im} Q_{\alpha,0} / 2k_{\perp}^2 \text{Re}\omega; \quad (4.34)$$

$$\gamma_e^{col} \zeta = \text{Im} S_e^{col} / 2k_{\perp}^2 \text{Re}\omega; \quad (4.35)$$

$$\gamma_e^{res} \zeta = \text{Im} S_e^{res} / 2k_{\perp}^2 \text{Re}\omega; \quad (4.36)$$

$$\gamma_i^{res} \zeta = \text{Im} S_i^{res} / 2k_{\perp}^2 \text{Re}\omega. \quad (4.37)$$

Заметим, что форма записи соотношений (4.34) — (4.37), как и соотношения (4.32), предполагает вещественность ζ . Очевидно, это предположение не принципиально и используется лишь из соображений удобства.

Величину γ_α вычислим в § 4.3, γ_e^{col} — в § 4.4. Вычисление γ_e^{res} производилось в работе [51], где в качестве исходного выражения для γ_e^{res} использовалась электродинамическая формула

$$\gamma_e^{res} = -\frac{\text{Re } \omega}{2} \frac{c_A^2}{c^2} \left(\text{Im } \epsilon_{11} + k_\perp^2 k_\parallel^2 \rho_i^4 \frac{T_e^2}{T_i^2} \text{Im } \epsilon_{33} \right), \quad (4.36')$$

ϵ_{11} , ϵ_{33} — усредненные по магнитной поверхности компоненты тензора диэлектрической проницаемости электронов. Такой подход является приближенным. Его уточнение может быть произведено методом, изложенным в работе [59]. Декремент затухания альфвеновских волн на фоновых ионах γ_i^{res} вычислялся в работе [60]. При этом учитывались также эффекты, специфичные для некруглого сечения токамака. Результаты [60] будут приведены в § 5.8.

§ 4.3. Вклад быстрых ионов в инкремент нарастания альфвеновских волн

Найдем связь γ_α , определенной соотношением (4.34), с равновесной функцией распределения этих частиц. Для простоты ограничимся рамками локального приближения.

Согласно (4.34), величина γ_α связана с мнимой частью функции $Q_{\alpha, 0}$, которая, в свою очередь, выражается через дивергенцию поперечного тока $\text{div} \mathbf{j}_\perp^{(\alpha)}$ быстрых частиц с помощью соотношения (4.18). Введем вместо $\text{div} \mathbf{j}_\perp^{(\alpha)}$ величину $(e_{11}^{(\alpha)})_0$, определенную соотношением (ср. с § 2.5, 2.6)

$$(\text{div} \mathbf{j}_\perp^{(\alpha)})_0 = (\omega/4\pi) (e_{11}^{(\alpha)})_0 \mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp. \quad (4.38)$$

Пренебрегая влиянием на быстрые частицы продольного электрического поля ($E_\parallel \rightarrow 0$) и учитывая, что при этом $\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp = -ik_\perp (\omega a B_s / mc) \zeta$, с помощью (4.18) находим

$$Q_{\alpha, 0} = -\zeta k_\perp^2 \omega^2 (e_{11}^{(\alpha)})_0 / e_{11}^{(0)}, \quad (4.39)$$

где $e_{11}^{(0)} = c^2/c_A^2$. Поэтому (4.34) можно представить в виде

$$\gamma_\alpha = -\text{Im} (e_{11}^{(\alpha)})_0 \text{Re} \omega / 2e_{11}^{(0)}. \quad (4.40)$$

Перейдем теперь к вычислению $(e_{11}^{(\alpha)})_0$. Для этого надо найти $(\text{div} \mathbf{j}_\perp^{(\alpha)})_0$, вычислив возмущенную функцию распределения f .

Заметим, что в § 2.2 мы уже занимались вычислением функции f и нашли для нее выражение (2.9). Однако, если в правой части (2.9) оставить только члены с $\mathbf{E}_\perp \mathbf{k}_\perp$ и перейти к интересующему нас низкочастотному пределу ($\omega \ll \omega_B$), то получим $f = 0$. В действитель-

ности, однако, в (2.9) было пренебрежено членами, несущественными для задачи о возмущениях с $\omega \approx n\omega_B (n \neq 0)$, обсуждавшейся в гл. 2, но важными при $\omega \ll \omega_B$. При учете этих членов в случае $\omega \ll \omega_B$, $E_{\parallel} = 0$ и $[\mathbf{E}, \mathbf{k}_{\perp}] \mathbf{e}_0 = 0$ вместо (2.9) получается

$$f = -\frac{e}{M} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{k_b}{\omega \omega_{Bs}} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \exp [i \xi_{\perp} \sin (\alpha - \psi)] \times \\ \times \int_{-\infty}^t S_0 (t, t') J_0 (\xi'_{\perp}) \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{V}_D (E_1/k_{\perp}) dt'. \quad (4.41)$$

Здесь $\xi_{\perp} = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$; $E_1 = \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} / k_{\perp}$; $\psi = \text{arctg} (k_b / k_a)$; $\mathcal{G} = v^2 / 2$. Вычисляя с помощью этой функции распределения возмущенный ток $\mathbf{j}_{\perp}^{(\alpha)} = e_{\alpha} \int \mathbf{v}_{\perp} f d\mathbf{v}$ и учитывая (4.38), находим

$$\varepsilon_{11}^{(\alpha)} = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{e^2}{M} \left\langle G [\theta (t)] \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{k_b}{\omega \omega_{Bs}} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^t dt' S_0 (t, t') G [\theta (t')] \right\rangle. \quad (4.42)$$

Здесь $G [\theta (t)] \equiv J_0 (\xi_{\perp}) \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{V}_D / k_{\perp}$.

1. Пролетные частицы. В случае пролетных частиц аналогично п. 1 § 2.6 из (4.42) получается

$$(\varepsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = \frac{4\pi e^2}{R^2 M \omega} \left\langle \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_0^2 (\xi_{\perp}) \frac{s^2 J_s^2 (\xi_{\parallel})}{\xi_{\parallel}^2} \frac{(v_{\perp}^2 / 2 + v_{\parallel}^2)^2}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - s v_{\parallel} / q R} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{k_b}{\omega \omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \right\rangle. \quad (4.43)$$

Здесь $\xi_{\parallel} = k_{\parallel} \Lambda$, $\Lambda = (v_{\perp}^2 / 2 + v_{\parallel}^2) q / \omega_B v_{\parallel}$.

Отсюда с учетом (4.40) следует

$$\gamma_{\alpha} = \frac{1}{2\varepsilon_{11}^{(0)}} \frac{4\pi^2 e^2}{M \omega_B^2} \left\langle \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_0^2 (\xi_{\perp}) \frac{s^2 J_s^2 (\xi_{\parallel})}{\xi_{\parallel}^2 R^2} (v_{\perp}^2 / 2 + v_{\parallel}^2)^2 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{k_b}{\omega \omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \delta \left[\omega - \left(k_{\parallel} + \frac{s}{q R} \right) v_{\parallel} \right] \right\rangle. \quad (4.44)$$

2. Запертые частицы. В случае запертых частиц из (4.42) находим [ср. с (2.36)]

$$\text{Im} (\varepsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = \frac{4\pi e^2 q R B_s}{M \omega} \int d\mu d\mathcal{G} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{k_b}{\omega \omega_{Bs}} \frac{\partial F}{\partial a} \right) |U|^2 \text{Im ctg} M (\theta_1, \theta_2). \quad (4.45)$$

Здесь

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} G (\theta) \cos M (\theta, \theta_2) \exp [i q R k_{\parallel} (\theta_2 - \theta)] d\theta / v_{\parallel} (\theta), \quad (4.46)$$

а выражение для $M(a, b)$ имеет вид [ср. с (2.37)]

$$M(a, b) = \int_a^b (\omega - \mathbf{k}_\perp \mathbf{V}_D) qR d\theta / v_\parallel. \quad (4.47)$$

В частности,

$$M(\theta_1, \theta_2) = 2qRK(\kappa)(\omega - \Omega) / (\varepsilon \mu B_s)^{1/2}, \quad (4.48)$$

где $\Omega = k_b V_D^0 [1 - 2E(\kappa)/K(\kappa)]$, $V_D^0 = -\mathcal{E}/R\omega_{Bs}$ — скорость магнитного дрейфа наиболее сильно запертых частиц. Остальные обозначения — см. в § 2.6.

Учитывая формулу (4.48), разложение (2.46) и тождество $B_s d\mu = -2\varepsilon \mathcal{E} d\kappa^2$, с помощью (4.40) и (4.45) находим

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha = & \frac{\omega_{p\alpha}^2 qR}{\pi N_\alpha} \frac{\varepsilon c_A^2}{c^2} \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} \int d\mathcal{E} d\kappa^2 \omega_b \mathcal{E} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} + \right. \\ & \left. + \frac{k_b}{\omega \omega_{Bs}} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} G(\theta) \cos M(\theta, \theta_2) \exp[iqRk_\parallel(\theta_2 - \theta)] d\theta / v_\parallel(\theta) \right|^2 \times \\ & \times \delta(\omega - \Omega - \rho \omega_b). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Здесь N_α — плотность быстрых частиц, $\omega_{p\alpha}^2 = 4\pi N_\alpha e^2 / M$ — их плазменная частота.

Получим также выражение для γ_α в приближении сильно запертых частиц, полагая, как и в § 2.8, $\kappa^2 \ll 1$. Производя соответствующие упрощения, приводим (4.49) к виду

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha = & \frac{\omega_{p\alpha}^2 qR\varepsilon}{\pi N_\alpha} \frac{c_A^2}{c^2} \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} \int d\mathcal{E} d\kappa^2 \omega_b^0 \mathcal{E} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} + \right. \\ & \left. + \frac{k_b}{\omega \omega_{Bs}} \frac{\partial F}{\partial a} \right) J_0^2(\xi_\perp) V_D^{0,2} I^2 \delta \left[\omega - \omega_b^0 - \rho \omega_b^0 + \right. \\ & \left. + \kappa^2 \left(\omega_D^0 + \frac{1}{4} \rho \omega_b^0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Здесь $\omega_b^0 = (\varepsilon \mathcal{E})^{1/2} / qR$ — баунс-частота наиболее сильно запертых частиц; $\omega_D^0 = -k_b V_D^0 = (\Omega)_{\kappa=0}$ — частота магнитного дрейфа таких частиц, а величина I определена соотношением

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\cos M(\theta, \theta_2) \sin(\theta + \psi)}{(2\kappa^2 - 1 - \cos \theta)^{1/2}} \exp[iqk_\parallel R(\theta_2 - \theta)]. \quad (4.51)$$

В выражение для функции I входят два безразмерных параметра: $k_a v / \sqrt{\varepsilon \omega_{Bs}}$ — отношение ширины «бананов» к радиальной длине волны возмущения ($v = (2\mathcal{E})^{1/2}$) и $k_\parallel R$ — величина, характеризующая обратную продольную длину волны. Поэтому дальнейшее

упрощение выражений (4.50), (4.51) можно произвести рассмотрением двух предельных случаев: $k_a v / \sqrt{\varepsilon} \omega_{Bs} > k_{\parallel} R$ и $k_a v / \sqrt{\varepsilon} \omega_{Bs} < k_{\parallel} R$. При этом получается нижеследующее.

а. *Возмущения с большими радиальными волновыми числами, $k_a v / \sqrt{\varepsilon} \omega_{Bs} < k_{\parallel} R$.* Методом, изложенным в § 2.8, получаем

$$I = \frac{(-1)^p}{v \sqrt{\varepsilon}} \pi \sqrt{2} J_p(\eta) \left(\frac{2\rho\kappa}{\eta} \cos \psi - \sin \psi \right), \quad (4.52)$$

где $\eta = 2\kappa k_a V_D^0 / \omega_b^0 = \sqrt{2} \kappa k_a q v / \omega_{Bs} \sqrt{\varepsilon}$. Подстановкой этого результата в (4.50) и интегрированием по κ^2 находим

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha = & \frac{\pi \omega_{p\alpha}^2 c_A^2 \sqrt{\varepsilon}}{N_\alpha \omega_{Bs}^2 c^2 R^2} \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} \int d\mathcal{G} \mathcal{G}^{5/2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{k_b}{\omega \omega_{Bs}} \frac{\partial F}{\partial a} \right) J_0^2(\xi_{\perp}) \times \\ & \times \left(\frac{2\rho\kappa_p}{\eta_p} \cos \psi - \sin \psi \right)^2 \frac{J_p^2(\eta_p)}{|\omega_D^0 + \rho \omega_b^0 / 4|}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

Здесь $\eta_p = 2\kappa_p k_a V_D^0 / \omega_b^0 \equiv \sqrt{2} \kappa_p k_a q v / \omega_{Bs} \sqrt{\varepsilon}$, $\kappa_p = [(\omega_D^0 + \rho \omega_b^0 - \omega) / (\omega_D^0 + \rho \omega_b^0 / 4)]^{1/2}$.

б. *Возмущения с малыми радиальными волновыми числами, $k_a v / \omega_{Bs} \sqrt{\varepsilon} < k_{\parallel} R$.* Представляем экспоненту, стоящую в подынтегральном выражении (4.51), в виде

$$\begin{aligned} \exp[iqRk_{\parallel}(\theta_2 - \theta)] &= \exp[iqRk_{\parallel}(\theta_2 - \pi)] \times \\ &\times \exp(i2qRk_{\parallel} \arcsin \kappa t), \end{aligned} \quad (4.54)$$

где, как и в § 2.8, переменная t введена соотношением $1 + \cos \theta = 2 t^2 \kappa^2$. Далее преобразуем интеграл I аналогично § 2.8. После вычислений получаем

$$|I|^2 = 2\pi^2 [4\kappa^2 J_p'^2(2k_{\parallel} q R \kappa) \cos^2 \psi + J_p^2(2k_{\parallel} q R \kappa) \sin^2 \psi]. \quad (4.55)$$

Подставляя (4.55) в (4.50) и выполняя интегрирование по κ^2 , приходим к выражению

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha = & \frac{4\pi^2 e^2 \varepsilon^{1/2}}{M \omega_{Bs}^2 R^2} \frac{c_A^2}{c^2} \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} \int d\mathcal{G} \mathcal{G}^{5/2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{k_b}{\omega \omega_{Bs}} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \\ & \times \frac{4\kappa^2 J_p'^2 \cos^2 \psi + J_p^2 \sin^2 \psi}{|\omega_D^0 + \rho \omega_b^0 / 4|} J_0^2(\xi_{\perp}), \end{aligned} \quad (4.56)$$

где $J_p = J_p(2k_{\parallel} q R \kappa_p)$.

§ 4.4. Вклад столкновительной диссипации на запертых электронах в уравнение малых колебаний квазичетных альфвеновских возмущений

1. **Введение.** Полагая, как и в § 4.2, $\zeta(\theta) \sim \exp(i m \theta)$, что, как отмечалось в п. 3 § 4.2, соответствует учету лишь квазичетных альфвеновских возмущений, найдем выражение для S_e^{col} , определенное соотношением (4.29). Кроме того, вычислим локальный декремент затухания квазичетных альфвеновских возмущений из-за столкновительной диссипации на запертых электронах. Как и в § 4.2, токамак считается круглым.

2. **Вычисление S_e^{col} .** Учитывая, что для запертых электронов $v_{\perp}^2 \gg v_{\parallel}^2$, приводим их кинетическое уравнение (4.22) для $f_e^{(2)}$ к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i n q \right) f_e^{(2)} = \frac{q R}{v_{\parallel}} \left\{ i \omega f_e^{(2)} + \hat{C} (f_e^{(2)}) - i \omega e_e \frac{F_e}{T_e} \left[\psi + \frac{M_e v^2}{2 e_e R} (\zeta \cos \theta - i \frac{a}{m} \zeta' \sin \theta) \right] \right\}, \quad (4.57)$$

Предполагается, что в функции $f_e^{(2)}$ выделен множитель $\exp(-i \omega t + i m \theta - i n \varphi)$.

Решение уравнения (4.57) ищем методом последовательных приближений, считая параметр qR/v_{\parallel} малым (ср. с [1]). Решение в нулевом порядке имеет вид $f_{e,0}^{(2)} = \exp(i q n \theta - i n \varphi) H$, где H не зависит от θ, φ . Введем h , определенное соотношением $H = h F_e / R$. Аналогично [1] условие разрешимости уравнения для поправки первого приближения дает уравнение

$$\omega h - i \bar{C}(h) = - \frac{\omega e_e R}{T_e} \bar{\psi} + \frac{\omega M_e \mathcal{G}}{T_e} \left(\overline{\zeta \cos \theta} - i \frac{a}{m} \overline{\zeta' \sin \theta} \right), \quad (4.58)$$

где $\mathcal{G} = v^2/2$. Чертой сверху обозначено усреднение по периоду колебаний частиц между пробками магнитного поля (см. § 2.6). Вид интеграла столкновений $\bar{C}(X)$ разъяснялся в [1].

Переходя в правой части (4.58) к гармоникам, получаем:

$$\omega h - i \bar{C}(h) = \omega \frac{e_e R}{T_e} \sum_l \frac{\Pi_{l-s}(x)}{K(x)} \psi_l + \frac{\omega z}{2K(x)} \{ [\Pi_{s+1}(x) + \Pi_{r-1}(x)] \zeta - (a \zeta' / m) [\Pi_{s+1}(x) - \Pi_{s-1}(x)] \}. \quad (4.59)$$

Здесь $z = M_e \mathcal{G} / T_e$; $s = m - nq$; $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода;

$$\Pi_{s+l}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\theta_0}^{2\pi - \theta_0} \frac{\exp[i(l+s)\theta] d\theta}{(2x^2 - 1 - \cos \theta)^{1/2}}; \quad (4.60)$$

κ — угловая переменная в пространстве скоростей (см. § 2.6); θ_0 и $2\pi - \theta_0$ — точки поворота. Предполагается, что ψ_l связаны с ψ соотношением $\psi = \sum_l \exp [i(m+l)\theta] \psi_l$ (суммирование по l).

Заметим также, что, согласно нашим определениям,

$$\overline{\exp [i(l+s)\theta]} = \Pi_{l+s}(\kappa)/K(\kappa).$$

С учетом уравнения квазинейтральности (4.25) приводим уравнение (4.59) к виду

$$\omega h - i\bar{C}(h) = \omega \hat{T}_s \zeta \quad (4.61)$$

с оператором

$$\hat{T}_s = -\frac{\omega}{\omega_{Bt}} \frac{a}{m} \frac{\Pi_s}{K} R V_{\perp}^2 + (z-2) \left(\frac{\Pi_{s+1} + \Pi_{s-1}}{2K} - \frac{a}{m} \frac{\Pi_{s+1} - \Pi_{s-1}}{2K} \frac{\partial}{\partial a} \right). \quad (4.62)$$

Представляя уравнение малых колебаний в виде (4.28), имеем

$$S_e^{col} = \frac{m^2}{a^2} \frac{T_e}{M_i R^2} \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\pi} \int_0^1 d\kappa^2 K(\kappa) \langle \hat{T}_s^* h \rangle. \quad (4.63)$$

Здесь [ср. с (4.62)]

$$\hat{T}_s^* = -\frac{\omega}{\omega_{Bt}} \frac{\Pi_s^*}{K} \frac{a}{m} R V_{\perp}^2 + (z-2) \left(\frac{\Pi_{s+1}^* + \Pi_{s-1}^*}{2K} - \frac{a}{m} \frac{\Pi_{s+1}^* - \Pi_{s-1}^*}{2K} \frac{\partial}{\partial a} \right), \quad (4.64)$$

а $\langle \dots \rangle$ — усреднение по максвелловскому распределению.

В уравнении (4.61) переходим от h к функции \tilde{a} , связанной с h соотношением $h = \hat{T}_s \zeta + \hat{T}_s \tilde{a} \zeta$. Первое слагаемое $\hat{T}_s \zeta$ является решением уравнения (4.61) в нулевом порядке по столкновениям. Величина \tilde{a} обусловлена столкновениями и заметно отлична от нуля лишь вблизи границы запертых и пролетных частиц, $\tilde{a}_{\kappa^2=1} = -1$. Уравнение для \tilde{a} , соответствующее (4.61), решалось ранее (см., например, [1]). Решение имеет вид

$$\tilde{a}(\xi) = -\exp \left[-\int_0^{\xi} \alpha(\xi') d\xi' \right], \quad (4.65)$$

где $\xi = 1 - \kappa^2$; $\alpha(\xi) = \frac{1-i}{2} \left(\frac{\varepsilon\omega}{v} \ln \frac{16}{\xi} \right)^{1/2}$; v — частота кулоновских столкновений.

Возвращаясь от (4.65) к (4.63), получаем с точностью до вещественных слагаемых

$$S_e^{col} = -\frac{T_e}{M_i R^2} \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\pi} \int_0^1 d\xi K(\sqrt{1-\xi}) \left\langle \left\{ \frac{\omega^2 R^2 |\Pi_s|^2}{\omega_{Bt}^2 K^2} V_{\perp}^4 \dots \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left| \frac{\bar{\Pi}_{s+1} - \bar{\Pi}_{s-1}}{2K} \right|^2 (z-2)^2 + \frac{(z-2)}{2K^2} \frac{\omega}{\omega_{Bl}} \frac{m}{a} R [(\bar{\Pi}_{s+1} + \\
& + \bar{\Pi}_{s-1}) \bar{\Pi}_s^* + \text{к. с.}] \nabla_{\perp}^2 + \left(\frac{m}{a} \right)^2 (z-2)^2 \frac{1}{4K^2} [|\bar{\Pi}_{s+1} + \bar{\Pi}_{s-1}|^2 - \\
& - |\bar{\Pi}_{s+1} - \bar{\Pi}_{s-1}|^2] \left. \right\} \exp \left[- \int_0^{\xi} \alpha(\xi') d\xi' \right] \rangle_{\xi}. \quad (4.66)
\end{aligned}$$

3. Локальный декремент альфвеновских волн, обусловленный столкновениями на запертых электронах. Подставляя (4.66) в (4.28) и переходя к локальному приближению ($\xi \sim \exp(ik_a a)$), находим с помощью (4.34) выражение для столкновительного электронного декремента:

$$\begin{aligned}
\gamma_e^{col} = & - \frac{T_e}{M_i R^2 \text{Re}\omega} \frac{\sqrt{V_{\varepsilon}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 d\xi K(\sqrt{1-\xi}) \left\langle \left(\frac{\omega^2 R^2 \Pi_s^2}{\omega_{Bl}^2 K^2} k_{\perp}^2 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{4K^2} \left[(z-2)^2 [|\bar{\Pi}_{s+1} - \bar{\Pi}_{s-1}|^2 + \left(\frac{m}{ak_{\perp}} \right)^2 |\bar{\Pi}_{s+1} + \bar{\Pi}_{s-1}|^2] + \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\omega}{\omega_{Bl}} \frac{m}{a} R (z-2) [(\bar{\Pi}_{s+1} + \bar{\Pi}_{s-1}) \bar{\Pi}_s^* + \text{к. с.}] \right) \right\rangle \times \\
& \times \exp \left[- \int_0^{\xi} \alpha(\xi') d\xi' \right] \rangle. \quad (4.67)
\end{aligned}$$

Вычисляя интегралы по ξ , имеем, в частности, при $s \ll 1$ результат работы [57]:

$$\begin{aligned}
\gamma_e^{col} = & - \frac{\sqrt{V_{\varepsilon}}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{T_e}{M_i R^2 \omega} \left\{ 64s^2 p_2 \sigma_2 \cos^2 \psi + \sigma_1 \left[p_2 \sin^2 \psi + 2 \frac{\omega}{\omega_{Bl}} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sin \psi k_{\perp} R p_3 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Bl}} k_{\perp} R \right)^2 p_1 \right] \right\}. \quad (4.68)
\end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$\sigma_1 = \left(\frac{v}{\varepsilon\omega} \right)^{1/2} \left[\ln 8 \left(\frac{\varepsilon\omega}{v} \right)^{1/2} \right]^{1/2}; \quad \sigma_2 = \left(\frac{v}{\varepsilon\omega} \right)^{1/2} \left[\ln 8 \left(\frac{\varepsilon\omega}{v} \right)^{1/2} \right]^{-3/2};$$

$p_1 = 1,61$; $p_2 = 3,50$; $p_3 = -1,07$ — коэффициенты, возникающие при усреднении по скоростям; $\psi = \arctg(m/ak_a)$. Для $s = 1$ из (4.67) получаем [56]:

$$\begin{aligned}
\gamma_e^{col} = & - \frac{\sqrt{V_{\varepsilon}}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{T_e}{M_i R^2 \text{Re}\omega} \left\{ \frac{64}{9} p_2 \sigma_2 \cos^2 \psi + \sigma_1 \left[p_2 \sin^2 \psi + 2 \frac{\omega}{\omega_{Bl}} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sin \psi k_{\perp} R p_3 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Bl}} k_{\perp} R \right)^2 p_1 \right] \right\}. \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Результаты этого параграфа будут использованы в § 5.3, 5.6.

§ 4.5. Вклад столкновительной диссипации на запертых электронах в декремент квазинечетных альфвеновских возмущений

1. **Исходные уравнения.** В § 4.4 предполагалось, что θ -я зависимость величины ζ имеет вид $\exp(im\theta)$. В общем случае следует считать

$$\zeta(\theta) = \exp(im\theta) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_l} (\zeta_l^+ \cos l\theta + \zeta_l^- \sin l\theta). \quad (4.70)$$

Здесь $\sigma_l = 2$ при $l = 0$ и $\sigma_l = 1$ при $l \geq 1$. Предполагается также, что $\zeta_l^- = 0$ при $l < 1$ и $\zeta_l^+ = 0$ при $l < 0$. Рассмотрим, какими соотношениями описываются волны альфвеновского типа в предположении, что суммирование в (4.70) производится до некоторого $l = l_{\text{макс}} \ll m$. Из обсуждавшихся в § 4.2 диссипативных эффектов будем учитывать только столкновительное взаимодействие этих волн с запертыми электронами.

Как и в § 4.2, помимо ζ вводим функцию ψ , характеризующую продольное электрическое поле возмущений, а также связанную с ζ и ψ функцию $\xi \equiv \zeta + (mc/\omega a B_s)\psi$. Полагаем, что θ -я зависимость ψ и ξ определяется рядами типа (4.70) и, следовательно, характеризуется некоторыми амплитудами ψ_l^\pm , ξ_l^\pm . Аналогично § 4.2 для этих амплитуд получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \xi_l^\pm - c_A^2 \frac{1}{2} [(k_l^2 + k_{-l}^2) \xi_l^\pm \mp i(k_l^2 - k_{-l}^2) \xi_l^\mp] &= \\ &= \frac{\sigma_l}{M_l n_0} \frac{k_b^2}{k_\perp^2 R} [en_0 G_l^\pm(\psi) + G_l^\pm(p)]; \\ \frac{en_0}{T_e} \psi_l^\pm - \frac{\sigma_l n_0}{R} G_l^\pm(\xi) + k^2 \rho^2 \frac{e}{T_e} n_0 \frac{\omega a B_s}{mc} \xi_l^\pm + n_l^\pm &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

Здесь и ниже p_l^\pm , n_l^\pm — гармоники возмущений давления и плотности запертых электронов, связанные с ξ_l^\pm , ψ_l^\pm соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_l^\pm &= -\frac{en_0}{8\pi} \sum_{l'} \left\langle \frac{E}{T_e} \int B_s d\lambda M_{l'}^{\pm*} (h_{l'}^+ \psi_{l'}^+ + h_{l'}^- \psi_{l'}^-) \right\rangle + \\ &+ \frac{n_0 T_e}{8\pi R} \sum_{l'} \left\langle \frac{E^2}{T_e^2} \int B_s d\lambda M_{l'}^{\pm*} (g_{l'}^+ \xi_{l'}^+ + g_{l'}^- \xi_{l'}^-) \right\rangle, \\ n^\pm &= -\frac{1}{4\pi} \frac{en_0}{T_e} \left\langle \int B_s d\lambda M_{l'}^{\pm*} \sum_{l'} (h_{l'}^+ \psi_{l'}^+ + h_{l'}^- \psi_{l'}^-) \right\rangle + \\ &+ \frac{n_0}{8\pi R} \left\langle \int B_s d\lambda M_{l'}^{\pm*} \sum_{l'} (g_{l'}^+ \xi_{l'}^+ + g_{l'}^- \xi_{l'}^-) \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

Входящие сюда функции $h_l^\pm(\lambda)$ и $g_l^\pm(\lambda)$ удовлетворяют уравнениям [ср. с (4.58)]

$$\left. \begin{aligned} \omega h_l^\pm - i\bar{C}(h_l^\pm) &= \omega M_l^\pm / \sigma_l L \equiv \omega \tilde{M}_l^\pm / L, \\ \omega g_l^\pm - i\bar{C}(g_l^\pm) &= \omega G_l^\pm(M) / L \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

со стандартными граничными условиями (ср. с § 4.4). Величины $M_l^\pm(\lambda, s)$ означают

$$M_l^\pm(\lambda, s) = \oint \left\{ \begin{array}{l} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{array} \right\} \frac{\exp(is\theta) d\theta}{\sigma(1-\lambda B)^{1/2}}, \quad (4.74)$$

а те же величины с индексом * — комплексно сопряженные от M_l^\pm . Функции $G_l^\pm(X)$ имеют вид

$$G_l^\pm(X) = X_{l+1}^\pm + X_{l-1}^\pm \pm (k_a/k_b)(X_{l+1}^\pm - X_{l-1}^\pm). \quad (4.75)$$

Мы использовали также обозначения: $k_l = (s+l)/qR$; $s = m - nq$; $\lambda = \mu/E$; $E = M_e v^2/2$; $\mu = M_e v_\perp^2/2B$; $\rho^2 = T_e/M_i \omega_{Bi}^2$. Остальные обозначения такие же, как в § 4.2, 4.4.

Уравнения (4.71) — (4.75) представляют собой исходную систему уравнений, описывающих взаимодействующие друг с другом четные (индекс +) и нечетные (индекс -) альфвеновские возмущения. Такое взаимодействие приводит к зацеплению между этими возмущениями и, как результат, — к образованию квазичетных и квазинечетных возмущений.

2. Нулевое приближение по параметрам связи между четными и нечетными возмущениями. Связь между четными и нечетными возмущениями определяется параметрами $s \equiv m - nq$ и $\epsilon = a/R$. В нулевом приближении по этим параметрам из уравнений (4.71) следует

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - c_A^2 k_l^2) \xi_l^+ - (1/4\pi) k_\perp^2 \rho^2 c_A^2 k_l^2 \times \\ \times \left\langle B_s \int d\lambda M_l^{+*} \sum_{l'} h_{l'}^+ \xi_{l'}^+ \right\rangle = 0; \\ (\omega^2 - c_A^2 k_l^2) \xi_l^- = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

Видно, что в этом приближении четные и нечетные возмущения «расщепляются», причем на нечетные возмущения запертые частицы не влияют. Частоты четных и нечетных возмущений соответственно равны

$$\begin{aligned} \omega_N^{\text{четн}} &= \pm c_A k_N \left[1 + (1/8\pi) \left\langle B_s \int d\lambda h_N M_N^* \right\rangle k_\perp^2 \rho^2 \right]; \\ \omega_N^{\text{нечетн}} &= \pm c_A k_N, \end{aligned} \quad (4.77)$$

где $k_N = k_l$ при $l = N$. Расщепление частот, связанное с запертыми частицами, порядка

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_N^{\text{четн}} - \omega^{\text{нечетн}} \simeq \\ &\simeq (1/8 \pi) (2 \varepsilon)^{1/2} (k_{\perp} \rho)^2 c_A k_N. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Затухание же четных возмущений порядка

$$\text{Im} \omega^{\text{четн}} / \omega_N \simeq (k_{\perp} \rho)^2 (v_e / \omega_N)^{1/2}, \quad (4.79)$$

что и было найдено в § 4.4.

Перейдем теперь к исследованию эффектов, связанных с конечными s и ε .

3. Затухание квазинечетных альфвеновских возмущений при конечном s . Пренебрежем в уравнениях (4.71) — (4.75) сжимаемостью (эффектами порядка ε), а параметр s будем считать малым по сравнению с единицей, $|s| \ll 1$. Рассмотрим квазинечетное возмущение. Частоту этого возмущения ищем разложением в ряд по малому параметру s , полагая $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$. В нулевом приближении по параметру s частота характеризуется вторым соотношением (4.77), т. е. $\omega^{(0)} = c_A k_N$. Поправка первого порядка к частоте равна нулю, $\omega^{(1)} = 0$. Поправка второго порядка имеет вид $\omega^{(2)} = \text{Re} \omega^{(2)} + i \text{Im} \omega^{(2)}$, где

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} \omega^{(2)} / \omega_N &\approx 8\pi s^2 / N^2 b_i \sqrt{2\varepsilon}, \\ \frac{\text{Im} \omega^{(2)}}{\omega} &= -\frac{16\pi p_1 s^2}{N^2 \varepsilon b_i} \left(\frac{v_e}{\omega} \ln \frac{128\varepsilon\omega}{v_e} \right)^{1/2} \left[\int_0^1 (\bar{M}_N^2 / \bar{L}) d\xi \right]^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

Здесь $p_1 = 1,61$ (см. § 4.4), $\bar{M}_N = M_N / (2\varepsilon)^{1/2}$; $\bar{L} = L / (2\varepsilon)^{1/2}$; $b_i = k_{\perp}^2 \rho_i^2$, а параметр ξ связан с λ соотношением $\lambda = B_s^{-1} [1 + \varepsilon (2\xi - 1)]$.

В частности, при $N = 1$

$$\text{Im} \frac{\omega^{(2)}}{\omega} \approx -4 \frac{s^2}{\varepsilon b_i} \left(\frac{v_e}{\omega} \ln \frac{128\varepsilon\omega}{v_e} \right)^{1/2}. \quad (4.81)$$

Найдем условие применимости использованного приближения. Необходимо, чтобы добавка к частоте была меньше расщепления частот нулевого приближения, $\omega^{(2)} < \Delta\omega$. Согласно (4.78) и (4.80) это означает

$$s < b_i \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.82)$$

Если это условие не выполнено, то сдвиг частоты, связанный с конечностью величины s , нельзя рассматривать как поправку. При этом пропадает возможность разделения возмущений на квазичетные и квазинечетные, и запертые частицы в равной степени влияют на все эти возмущения.

Сравнивая (4.81) с (4.79), находим, что отношение декрементов затухания квазинечетных и квазичетных возмущений порядка

$$\text{Im} \omega^{\text{нечетн}} / \text{Im} \omega^{\text{четн}} \simeq s^2 / \varepsilon b_i^2. \quad (4.83)$$

Естественно, что на пределе применимости использованной теории возмущений эти декременты одного порядка.

4. Затухание квазинечетных альфвеновских возмущений при $\beta > s^2/\epsilon b_i$. Теперь положим $s = 0$ и построим теорию возмущений по сжимаемости. Как и в п. 3, будем интересоваться поправками только к частоте квазинечетного возмущения. В результате находим, что $\omega^{(1)} = 0$;

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega^{(2)}/\omega_N &\simeq \beta_e \sqrt{\epsilon} q^2; \\ \operatorname{Im} \frac{\omega^{(2)}}{\omega_N} &= -\frac{\beta_e \alpha_N^2 \rho_1 q^2}{N^2} \left(\frac{v_e}{\omega_N} \ln \frac{128\epsilon\omega_N}{v_e} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

Здесь $\beta_e = 8 \pi n_0 T_e / B_s^2$;

$$\alpha_N = \left\langle \int d\lambda \bar{M}_N \bar{T}_N / \bar{L} \right\rangle / \left\langle \int d\lambda \bar{M}_N^2 / \bar{L} \right\rangle;$$

$$\bar{T}_N = \bar{M}_{N+1} - \bar{M}_{N-1}.$$

При $N = 1$ из (4.84) следует

$$\operatorname{Im} \frac{\omega^{(2)}}{\omega} \approx -0,01 \beta_e q^2 \left(\frac{v_e}{\omega} \ln \frac{128\epsilon\omega}{v_e} \right)^{1/2}. \quad (4.85)$$

Найдем условие применимости этого результата. Как и в п. 3, необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство $\operatorname{Re} \omega^{(2)} < \Delta\omega$. Это приводит к ограничению на β_e сверху:

$$\beta_e q^2 < k_{\perp}^2 \rho_i^2. \quad (4.86)$$

Заметим также, что отношение декрементов нечетных и четных возмущений порядка

$$\operatorname{Im} \omega_{\text{нечетн}} / \operatorname{Im} \omega_{\text{четн}} \simeq \beta_e q^2 / k_{\perp}^2 \rho_i^2. \quad (4.87)$$

Сравним также декремент, найденный в данном пункте, с декрементом п. 3. В результате находим, что декремент, обусловленный сжимаемостью, более важен, если только

$$\beta_e \epsilon q^2 > 256 s^2 / k_{\perp}^2 \rho_i^2. \quad (4.88)$$

Видно, что выполнение этого неравенства возможно только при очень малом s .

5. Суммирование и обсуждение результатов. Выше показано, что при выполнении условий (4.82), (4.86) существуют квазинечетные альфвеновские возмущения, декременты которых определяются формулами (4.81) или (4.84), в зависимости от соотношения между параметрами s^2 и $\beta_e \epsilon q^2$ [см. неравенство (4.88)]. Декременты квазинечетных возмущений малы по сравнению с декрементами квазичетных, что существенно для задач о раскачке этих возмущений быстрыми частицами.

**НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
АЛЬФВЕНОВСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ
БЫСТРЫМИ ИОНАМИ**

§ 5.1. Введение

Часть имеющихся в настоящее время результатов линейной теории альфвеновских неустойчивостей, возбуждаемых быстрыми ионами, изложена в гл. 14, 15 книги [1].

О некоторых других было кратко упомянуто там же и в гл. 16 той же книги. В настоящей главе излагается схема получения этих результатов.

Часть последующего изложения касается учета стабилизирующих факторов. В частности, в § 5.2 дается обзор результатов первоначальных работ [26, 50] по исследованию этих стабилизирующих факторов, а в § 5.3 — изложение более поздней работы В. А. Мазура и автора [57].

В § 5.2, 5.3 обсуждаются возмущения с поперечной длиной волны, большой по сравнению с ларморовским радиусом быстрых ионов и размером отклонений дрейфовых траекторий этих ионов от соответствующих силовых линий магнитного поля. В отличие от этого в ряде последующих параграфов исследуются более коротковолновые возмущения. В § 5.4, следуя работе К. О. Бизли, Д. Г. Ломинадзе и автора [53], рассмотрено возбуждение таких возмущений продольным ионным пучком. В § 5.5, следуя работе Т. Д. Каладзе и автора [55], а также работе В. С. Беликова, Я. И. Колесниченко, автора и В. А. Яворского [51], исследуется альфвеновская неустойчивость на баунс-резонансах запертых α -частиц, обусловленная немонотонным распределением последних по энергиям. В отличие от этого в § 5.6 рассматриваются аналогичные неустойчивости, но обусловленные градиентом плотности α -частиц.

Здесь мы следуем работе автора и А. Л. Френкеля [56]. В § 5.7, 5.8 учитывается некруглое сечение токамака и исследуется альфвеновская неустойчивость пучка быстрых ионов в таком токамаке.

При этом в § 5.7, содержащем изложение работ В. А. Мазура и автора [61] и В. М. Бардакова и автора [62], вычисляется инкремент неустойчивости, а в § 5.8, написанном по результатам работы В. А. Мазура и автора [60], обсуждается стабилизация этой неустойчивости из-за столкновительной диссипации на запертых электронах и затухания Ландау на фоновых ионах. Некоторые другие результаты теории альфвеновских неустойчивостей, вызываемых быстрыми ионами, содержатся в § 5.9.

§ 5.2. Обзор первоначальных результатов по влиянию шири и диссипации на фоновой плазме на раскачку альфвеновских волн быстрыми ионами

1. Первоначальные оценки стабилизирующей роли пролетных и запертых электронов. Первоначально вопрос о стабилизации альфвеновских неустойчивостей, возбуждаемых быстрыми ионами, обсуждался в работах [26, 50].

В [50] рассматривалась дрейфовая термоядерная неустойчивость, т. е. неустойчивость, обусловленная градиентом плотности термоядерных α -частиц. Отмечалось, что к стабилизации этой неустойчивости может приводить резонансное взаимодействие альфвеновских волн с пролетными электронами и их столкновительная диссипация на запертых электронах. При этом были получены критерии малости этих стабилизирующих эффектов. Так, согласно [50], затухание колебаний на резонансных электронах должно быть пренебрежимо малым, если

$$\rho_{\alpha}/\rho_e > (v_{T\alpha}/v_{Te})^3, \quad (5.1)$$

где ρ_{α} , ρ_e — соответственно давления α -частиц и электронов; $v_{T\alpha}$, v_{Te} — тепловые скорости α -частиц и электронов. (В [50] распределение α -частиц по скоростям предполагалось максвелловским.) Что касается условия пренебрежения столкновительным затуханием колебаний на запертых электронах, то, согласно [50], оно имеет вид

$$\rho_{\alpha}/\rho_e > (R/a)^{1/2} v_e R/c_A, \quad (5.2)$$

где R , a — большой и малый радиусы тора; v_e — частота столкновений электронов; c_A — скорость Альфвена.

Следует отметить, что критерии (5.1), (5.2) были получены в [50] не в результате количественного рассмотрения, а путем качественных оценок. Так, критерий (5.1) был получен из следующих простых соображений. Во-первых, учитывалось, что в соответствии с общими представлениями, развитыми в работе [27], вклад в инкремент нарастания (или декремент затухания) альфвеновских волн, обусловленный взаимодействием колебаний с частицами той или иной компоненты плазмы, должен быть пропорционален давлению соответствующей компоненты плазмы, так что

$$\gamma_{\alpha} \sim \rho_{\alpha}; \quad \gamma_e \sim \rho_e, \quad (5.3)$$

где γ_{α} , γ_e — соответственно вклады в инкремент от α -частиц и электронов. Во-вторых, в [50] было учтено, что вследствие большого отношения тепловых скоростей электронов и α -частиц число резонансных электронов должно содержать малость порядка $(\omega/|k_{\parallel\alpha\Phi}| v_{Te})^3$ ($k_{\parallel\alpha\Phi}$ — эффективное продольное волновое число, точное определение которого будет дано ниже, ω — частота колебаний), так что

$$\gamma_e^{res} \sim (\omega/|k_{\parallel\alpha\Phi}| v_{Te})^3. \quad (5.4)$$

Поскольку в случае дрейфовой термоядерной неустойчивости, обусловленной пролетными α -частицами,

$$\omega \simeq k_{\parallel \text{эф}} v_{T\alpha}, \quad (5.5)$$

величина γ_{α} не содержит такого малого множителя. Из (5.3) — (5.5) вытекает, что условие $\gamma_{\alpha} > \gamma_e^{res}$ означает то же самое, что и условие (5.1).

При получении условия (5.2) в [50] предполагалось, что электронный декремент, обусловленный столкновительной диссипацией на запертых электронах, помимо множителя, пропорционального давлению электронов [см. второе соотношение (5.3)], должен содержать также малые множители $(a/R)^{1/2}$ — относительное число запертых электронов и $v_{e\text{эф}}/\omega$ — отношение эффективной частоты электронных столкновений $v_{e\text{эф}} \simeq (R/a) v_e$ к частоте колебаний, т. е.

$$\gamma_e^{col} \sim (R/a)^{1/2} v_e/\omega. \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.3), (5.6) и условия $\omega \simeq c_A/R$ следует, что $\gamma_{\alpha} > \gamma_e^{col}$, если выполнено условие (5.2).

В соответствии со сказанным в работе [50], оценки (5.1), (5.2) относятся к неустойчивости, вызываемой пролетными α -частицами. Для случая же неустойчивости, вызываемой запертыми α -частицами, оценка типа (5.1) в [50] не приводилась, а оценка типа (5.2), характеризующая малость столкновительного затухания на запертых электронах, заменялась следующей:

$$\rho_{\alpha}/p_e > v_e R/c_A. \quad (5.7)$$

Эта оценка получалась в [50] из соображений, аналогичных изложенным выше, но с учетом того, что инкремент нарастания, обусловленный запертыми α -частицами, должен содержать два дополнительных множителя: малый множитель порядка $(a/R)^{1/2}$, соответствующий доле запертых α -частиц, и большой множитель порядка R/a , обусловленный тем, что

$$\gamma_{\alpha} \sim (\omega_{*\alpha}/\omega - 1), \quad (5.8)$$

где $\omega_{*\alpha}$ — градиентная (дрейфовая) частота α -частиц, связанная с неоднородностью их плотности. В [50] при рассмотрении раскочки альфвеновских волн пролетными α -частицами полагалось $\omega \simeq \omega_{*\alpha}$, так что в этом случае множитель (5.8) оказывался порядка единицы, тогда как в случае раскочки запертыми α -частицами азимутальные волновые числа, входящие в градиентную частоту, такие, что $\omega \simeq \bar{\omega}_D$, где $\bar{\omega}_D \simeq (a/R) \omega_{*\alpha}$ — средняя частота магнитного дрейфа запертых частиц (дрейфа под действием кривизны и неоднородности магнитного поля). Поэтому в целом оказывалось, что инкремент нарастания из-за запертых α -частиц содержит дополнительный большой множитель порядка $(R/a)^{1/2}$, т. е.

$$\gamma_{\alpha}^{\text{зап}} \sim (R/a)^{1/2}. \quad (5.9)$$

Это и приводило к оценке (5.7), свидетельствующей об относительно меньшей роли столкновительного затухания на запертых электронах по сравнению с оценкой (5.2). Поскольку при типичных параметрах реактора-токамака условия (5.1), (5.2), (5.7) удовлетворяются, то в [50] был сделан вывод, что в задаче о дрейфовых термоядерных неустойчивостях затухание на электронах несущественно.

Из вышесказанного ясно, что такой вывод, полученный из качественных оценок, должен быть обоснован строгим количественным рассмотрением. Это тем более необходимо, что, как будет видно из дальнейшего, роль затухания на электронах существенна, если шир магнитного поля не слишком мал.

2. Первоначальные исследования влияния шири на альфвеновские неустойчивости, вызываемые быстрыми ионами. Альфвеновские неустойчивости, вызываемые группой быстрых ионов, обсуждались также в работе [26]. Как и в [50], в работе [26], наряду с дестабилизирующим эффектом быстрых частиц, учитывался стабилизирующий эффект запертых электронов. Анализируя роль этих двух эффектов, авторы [26] пришли к выводу, что при типичных параметрах токамака декремент затухания альфвеновских волн, обусловленный запертыми электронами, вообще говоря, велик по сравнению с инкрементом нарастания этих волн из-за их взаимодействия с быстрыми частицами, вследствие чего должно иметь место затухание колебаний. Согласно [26], исключение составляет лишь приосевая область токамака, в которой только и возможно нарастание возмущений. (Согласно [26], размер неустойчивой приосевой области особенно мал в случае, когда роль быстрых частиц играют ионы, образовавшиеся при инъекции быстрых нейтральных атомов.)

Таким образом, общие выводы, сделанные в работах [26, 50], оказались трудно совместимыми друг с другом.

Одна из причин такого рода кажущейся несовместимости выводов [26, 50] связана с различием в постановке задачи о пространственно-временной структуре альфвеновских волн при наличии шири магнитного поля.

В работе [50], как и в работе [25], касавшейся двухкомпонентного токамака, при отыскании частоты и инкремента нарастания возмущений использовался так называемый «локальный» подход.

При таком подходе частота и инкремент возмущений определяются локальными характеристиками плазмы и магнитного поля (имеется в виду локальность по отношению к радиальной координате, связанной с магнитными поверхностями). При этом шир не входит в локальное дисперсионное уравнение (ср. с п. 6 § 4.2). Роль шири при таком подходе сказывается в том, что он характеризует размер локализации возмущений. В отличие от этого частота и инкремент нарастания возмущений определялись в [26] из рассмотрения «собственных решений» уравнения малых колебаний [типа (4.28)], а такие решения весьма чувствительны к шире.

Соответствие между этими двумя подходами проанализировал А. В. Тимофеев [63]. В [63] было подчеркнuto, что рассмотренные в [26] собственные решения описывают асимптотическое поведение возмущений по прошествии длительного (формально, бесконечного) времени после момента включения возмущений. Но, согласно [63], уравнение малых колебаний работы [26] допускает также решения типа «волн Ван-Кампена — Кейза», описывающие поведение возмущений по прошествии конечного момента времени после их включения. Частота такого рода возмущений определяется локальным дисперсионным уравнением, а не интегральными характеристиками, как это имеет место в случае собственных решений.

Из [63] следует, что наличие положительного локального инкремента нарастания еще не свидетельствует о наличии неустойчивости, т. е. о возможности раскачки возмущений до больших амплитуд. Дело в том, что по прошествии некоторого времени после начала нарастания возмущений типа волн Ван-Кампена — Кейза становятся важными эффекты «вязкости», которые приводят к перемешиванию этих возмущений. В работе [63] был получен общий оценочный критерий того, когда именно нарастание, предсказываемое локальным подходом, может приводить к физически реальной неустойчивости. Критерий работы [63] содержит шир. Поэтому использование этого критерия дает возможность исследовать влияние шири на возмущения типа волн Ван-Кампена — Кейза.

Таким образом, в согласии с [63] кажущаяся несовместимость общих выводов работ [25, 50] и [26] связана с тем, что в этих работах были рассмотрены разные классы возмущений. Возмущения, изучавшиеся в [26], весьма чувствительны к шире. Поэтому выводы авторов [26] о несущественности роли рассмотренной ими неустойчивости двухкомпонентного токамака свидетельствуют не просто о сильном стабилизирующем влиянии столкновений запертых электронов, а о сильном совместном действии двух факторов: шири и столкновений запертых электронов. Возмущения же, рассмотренные в [50], чувствительны к шире лишь в процессе их эволюции, а этот процесс в [50] не изучался. Поэтому результаты [50] отражают стабилизирующую роль электронов «в чистом виде», т. е. в отсутствие воздействия шири. Влияние шири на такие возмущения может быть учтено с использованием критерия типа полученного в работе [63].

3. О различиях в ранее изучавшихся механизмах взаимодействия электронов с альфвеновскими волнами. При сопоставлении [50] с [26] обнаруживается еще одно важное несоответствие. Если в уравнении малых колебаний работы [26] перейти к локальному приближению и найти локальный декремент, обусловленный диссипацией на запертых электронах, то окажется, что вместо порядковой оценки работы [50]

$$\gamma_e^{col} \simeq \beta_e (R/a)^{1/2} \nu_e \quad (5.10)$$

получается

$$\nu_e \simeq (k_{\perp} \rho_i)^2 (R/a)^{1/2} \nu_e. \quad (5.11)$$

Здесь β_e — отношение давления электронов к давлению магнитного поля; k_{\perp} — поперечное волновое число; ρ_i — ларморовский радиус ионов основной компоненты плазмы. Как видно, правые части (5.10), (5.11) различаются функционально. Значение же величины (5.11) меньше (5.10), поскольку, по предположению, поперечная длина волны $\lambda_{\perp} \simeq 1/k_{\perp}$ велика по сравнению с ларморовским радиусом α -частиц $k_{\perp} \rho_{\alpha} < 1$ (условие применимости дрейфового приближения, принятого в работах [26, 50]), а тепловая скорость α -частиц $v_{T\alpha}$ велика по сравнению со скоростью Альфвена c_A .

Несоответствие между результатами [50] и [26], касающимися диссипативного вклада запертых электронов в локальное дисперсионное уравнение альфвеновских волн, связано с различием диссипативных эффектов, рассмотренных в этих работах. В работе [50], основывающейся на представлениях работы [27], предполагалось, что электронная диссипация обусловлена сжимаемостью газа запертых электронов — эффектом, пропорциональным давлению электронов [ср. с (5.3), (5.10)]. В терминах уравнений (4.28), (4.29) это означает учет в (4.29) вклада, связанного с квадратными скобками, и пренебрежение вкладом с ∇_{\perp}^2 . В работе же [26], как и в первоначальных исследованиях по диссипативным неустойчивостям на запертых частицах, диссипативный вклад запертых частиц связывался с возмущением продольного электрического поля, которое в случае альфвеновских волн мало как $(k_{\perp} \rho_i)^2$ [ср. с (5.11)]. Это соответствует учету в (4.29) члена с ∇_{\perp}^2 и пренебрежению членом с квадратными скобками.

4. О неприменимости модельного интеграла столкновений для запертых электронов в задаче об альфвеновских неустойчивостях, вызываемых быстрыми ионами. Как в [50], так и в [26], частота столкновений запертых электронов характеризовалась величиной

$$\nu_{\text{эф}} \simeq (R/a) \nu_e. \quad (5.12)$$

Законность такого моделирования в свое время обсуждалась в работе [64]. Согласно этой работе, введение эффективной частоты столкновений вида (5.12) оправдывается лишь при частых столкновениях, т. е. при $(R/a) \nu_e > \omega$. В случае же альфвеновских неустойчивостей, обсуждавшихся в [26, 50], частота возмущений ω велика, $\omega > (R/a) \nu_e$, что соответствует случаю «редких столкновений», а при этом роль $\nu_{\text{эф}}$, как следует из [64], должна играть величина порядка

$$\nu_{\text{эф}} \simeq [(R/a) \nu_e \omega]^{1/2}. \quad (5.13)$$

Поэтому ясно, что диссипативный вклад запертых электронов как в [50], так и в [26] учитывался не вполне корректно.

§ 5.3. Стабилизация запертыми электронами альфвеновской неустойчивости в двухкомпонентном токамаке

1. Введение. В пренебрежении широм и диссипацией на фоновой плазме альфвеновская неустойчивость токамака с инжекцией быстрых нейтральных частиц (двухкомпонентного токамака) исследовалась в [25] (см. также [1]). Теперь, используя результаты § 4.2—4.4, рассмотрим влияние на эту неустойчивость шири и столкновительной диссипации на запертых электронах. Токamak полагаем круглым (случай некруглого токамака см. в § 5.8).

2. Исходные уравнения. Полагая $k_{\perp} \Lambda \ll 1$, находим стандартным способом, изложенным в [25] (см. также [1] и § 4.3), выражение для $Q_{\alpha, 0} = Q_b$, входящего в (4.28). Нам нужна только мнимая часть этого выражения. Она имеет вид

$$\text{Im} Q_b = -\omega^2 q_b \nabla_{\perp}^2 \zeta, \quad (5.14)$$

где

$$q_b = \frac{\pi}{\omega^2 n_0} \int dv \frac{M (\mathcal{E}_{\perp} + v_{\parallel}^2)^2}{4R^2} \left(\frac{\omega}{M} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} + \frac{mc}{eaB_s} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \delta(\omega - v_{\parallel}/qR). \quad (5.15)$$

Здесь M , F — масса частиц пучка и их равновесная функция распределения; $\mathcal{E}_{\perp} = v_{\perp}^2/2$.

Поскольку в случае двухкомпонентного токамака неустойчивость связана с возмущениями, у которых $k_{\parallel} \ll 1/qR$, т. е. $s \ll 1$, то полагаем в (4.66) $|s| \ll 1$ и учитываем, что при этом $\Pi_{1+s} + \Pi_{-1+s} \approx 2\Pi_1$; $\Pi_{1+s} - \Pi_{-1+s} = s\Delta$, где $\Delta = 4[(\kappa^2 - 1)K(\kappa) + E(\kappa)]$.

В результате (4.66) сводится к виду [57]:

$$\begin{aligned} S_e^{col} = & i \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{2}} \frac{T_e}{M_i R^2} \left[-\frac{\omega^2 R^2}{\omega_{Bi}^2} p_1 \sigma_1 \nabla_{\perp}^4 + \right. \\ & + \left(64s^2 p_2 \sigma_2 + 2 \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \frac{mR}{a} p_3 \sigma_1 \right) \nabla_{\perp}^2 - \\ & \left. - \frac{m^2}{a^2} p_2 (\sigma_1 - 64s^2 \sigma_2) \right] \zeta. \end{aligned} \quad (5.16)$$

С учетом (5.14) — (5.16) и в пренебрежении S_e^{res} , S_i^{res} уравнение (4.28) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{T_i}{T_e} - i\delta \right) \rho_{ie}^2 \nabla_{\perp}^4 \zeta + \nabla_{\perp} [\omega^2 (1 - i\eta_0) - c_A^2 k_{\parallel}^2] \times \\ \times \nabla_{\perp} \zeta_0 - i\eta_{\parallel} \omega^2 \frac{m^2}{a^2} \zeta = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Здесь обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ie}^2 &= T_e / M_i \omega_{Bi}^2; \quad \delta = \sqrt{\varepsilon} p_1 \sigma_1 / \pi \sqrt{2}; \\ \eta_0 &= q_b - \frac{T_e}{\omega^2 M_i R^2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{2}} \left(64s^2 p_2 \sigma_2 + 2 \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \frac{mR}{a} p_3 \sigma_1 \right); \\ \eta_1 &= \frac{T_e}{\omega^2 M_i R^2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{2}} (\sigma_1 - 64s^2 \sigma_2); \quad \varepsilon = a/R. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Уравнение (5.17) и есть нужное нам уравнение малых колебаний. Заметим, что уравнение типа (5.17) выводилось также в работе [26]. Вся электронная диссипация, учитываемая в [26], содержалась только в члене с δ . Иначе говоря, в [26] выражение для η_0 не зависело от электронной диссипации и имело вид $\eta_0 = q_b$, а члены с η_1 отсутствовали. Соответствующее отличие наших результатов от [26] обусловлено учетом нами эффектов сжимаемости запертых электронов и сателлитного электрического поля (см. также замечания в § 4.2, 5.2).

Заметим также, что наше δ_0 , определенное соотношением (5.18), отличается от модельного значения $\delta \equiv \delta_{RR}$, фигурирующего в работе [26]. Соответствующая величина из работы [26] в интересующем нас случае $\omega \gg v_e$ имеет вид

$$\delta_{RR} = (1/2 \sqrt{\varepsilon}) v_e / \omega, \quad (5.19)$$

где v_e — частота столкновений электронов с ионами (определение v_e см. в [1]).

Из сравнения (5.18) и (5.19) видно, что δ и δ_{RR} отличаются функционально, причем

$$\frac{\delta}{\delta_{RR}} = \frac{\sqrt{2} p_1}{\pi} \left(\frac{\varepsilon \omega}{v_e} \right)^{1/2} \left\{ \ln \left[8 \left(\frac{\varepsilon \omega}{v_e} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.20)$$

Реально, однако, отличие правой части (5.20) от единицы не слишком велико. Пусть, например, $B = 5 \cdot 10^4$ Гс, $n_0 = 10^{14}$ см⁻³, $T = 5$ кэВ, $a = 50$ см, $R = 300$ см и частицы пучка имеют энергию порядка 100 кэВ. Тогда $\delta/\delta_{RR} \simeq 2 \div 3$.

3. Локальное приближение. При $\xi(a) \sim \exp(ik_a a)$ из (5.17) следует

$$\left(\frac{7}{4} - i\delta \right) k_{\perp}^2 \rho_i^2 - \left(1 - i\eta_0 - \frac{c_A^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} \right) - i\eta_1 \sin^2 \alpha = 0, \quad (5.21)$$

где $\sin \alpha = m/ak_{\perp}$, $k_{\perp}^2 = (m/a)^2 + k_a^2$. Мы положили в (5.21) $T_e = T_i = T$, так что $\rho_i^2 = T/M_i \omega_{Bi}^2$. Из (5.21) следует $\text{Re} \omega = k_{\parallel} c_A \approx \omega$;

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\omega}{2} \left\{ q_b - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{2}} \frac{T}{M_i R^2 \omega^2} \left[64s^2 p_2 \sigma_2 \cos^2 \alpha + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sigma_1 \left(p_2 \sin^2 \alpha + 2 \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \sin \alpha k_{\perp} R p_3 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Bi}} k_{\perp} R \right)^2 p_1 \right) \right] \right\}. \quad (5.22) \end{aligned}$$

Условие неустойчивости имеет вид

$$q_b > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{2}} \frac{T}{M_i R^2 \omega^2} \left\{ 64s^2 p_2 \sigma_2 \cos^2 \alpha + \right. \\ \left. + \sigma_1 \left[p_2 \sin^2 \alpha + 2 \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \sin \alpha k_{\perp} R p_3 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Bi}} k_{\perp} R \right)^2 p_1 \right] \right\}. \quad (5.23)$$

Члены в правой части неравенства (5.23), пропорциональные k_{\perp}^2 , соответствуют учтенным в [26]. Поскольку $\omega \simeq v_{\parallel}/qR$, а k_{\perp} ограничено сверху условием малости размера дрейфовых орбит по сравнению с поперечной длиной волны, $k_{\perp} v_{\parallel} q / \omega_{Bi} \ll 1$, члены с k_{\perp}^2 в (5.22), (5.23) пренебрежимо малы, так что локальный инкремент (5.22) и локальное условие неустойчивости (5.23) в этом случае определяются соотношениями

$$\gamma = \frac{1}{2\omega} \left[q_b - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{2}} \frac{T p_2}{M_i R^2 \omega^2} (64s^2 \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha) \right], \\ q_b > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi \sqrt{2}} \frac{T p^2}{M_i R^2 \omega^2} (64s^2 \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha). \quad (5.24)$$

При наличии шира наиболее опасными являются возмущения с $k_{\alpha} \gg m/a$, т. е. с $\alpha \rightarrow 0$. Для таких возмущений соотношения (5.24) принимают вид

$$\gamma = \frac{\omega}{2} \left(q_b - \frac{32 \sqrt{2\varepsilon}}{\pi} \frac{T q^2 p_2 \sigma_2}{M_i c_A^3} \right), \quad (5.25) \\ q_b > \frac{32 \sqrt{2\varepsilon}}{\pi} \frac{T q^2 p_2 \sigma_2}{M_i c_A^3}.$$

Здесь было учтено, что $s/\omega = qRc_A$.

В случае продольного пучка с максвелловским разбросом по скоростям, $F \sim \exp[-(v_{\parallel} - V_0)^2/v_{Tb}^2]$, имеем

$$q_b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} q^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{N_b}{n_0} \left(\frac{V_0}{v_{Tb}}\right)^2, \quad (5.26)$$

а критерий локальной неустойчивости (5.25) приводится к виду

$$\frac{N_b}{n_0} > \frac{128}{\pi^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{2}\right) p_2 \sigma_2 \sqrt{\varepsilon} \frac{T}{M_i c_A^3} \left(\frac{v_{Tb}}{V_0}\right)^2. \quad (5.27)$$

Для токамака с параметрами, указанными в п. 2, этот критерий приближенно означает

$$N_b/n_0 > 0,5 \cdot 10^{-3} (v_{Tb}/V_0)^2. \quad (5.28)$$

Видно, что даже при очень большом тепловом разбросе пучка, когда $v_{Tb} \simeq V_0$, электронная диссипация незначительна, если плотность пучка составляет хотя бы одну тысячную часть плотности плазмы.

Если неравенство (5.24) выполняется с хорошим запасом, то, как следует из (5.25) и (5.26), локальный инкремент равен [53] (см. также § 5.4)

$$\gamma_b = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{N_b}{n_0} \left(\frac{V_0}{v_{Tb}}\right)^2 \frac{qV_0}{R}. \quad (5.29)$$

4. Эволюция начального возмущения. Следуя подходу А. В. Тимофеева [63, 65—67], рассмотрим эволюцию начального возмущения, описываемого уравнением (5.17). (Этот подход не вполне адекватен нашей задаче, см. [68, 69], и используется здесь в иллюстративных целях.)

Согласно [63, 65], при не слишком больших временах (оценка приведена ниже) можно пользоваться упрощенным уравнением (5.17) — без члена с четвертой производной:

$$\nabla_{\perp} [\omega^2 (1 - i\eta_0) - c_A^2 k_{\parallel}^2] \nabla_{\perp} \xi - i\eta_{\perp} \omega^2 \frac{m^2}{a^2} \xi = 0. \quad (5.30)$$

Исходным для изучения эволюции начального возмущения является временной аналог уравнения (5.30). Преобразуя его по Лапласу, получаем неоднородное уравнение, правая часть которого определяется начальным возмущением. Решение этого уравнения находится с помощью функции Грина $\xi_{\omega}(a) = \int da' G_{\omega}(a, a') \hat{L}\xi(0, a')$, где $\hat{L}\xi(0, a')$ — правая часть неоднородного уравнения. Существенно, что функция Грина уравнения (5.30) обладает полюсом по ω :

$$\omega(a') = c_A k_{\parallel}(a') (1 + i\eta_0/2). \quad (5.31)$$

Вследствие этого обратное преобразование Лапласа приводит к

$$\xi(a, t) = \int da' \exp[-i\omega(a')t] \operatorname{res} G_{\omega}(a, a') \hat{L}\xi(a', 0). \quad (5.32)$$

Здесь $\operatorname{res} G_{\omega}(a, a')$ — вычет в полюсе (5.31).

Таким образом, видно, что эволюция начального возмущения определяется локальной частотой $\omega(a)$. Инкремент нарастания таких возмущений

$$\gamma(a) \equiv \operatorname{Im}\omega(a) = c_A k_{\parallel}(a) \eta_0/2 \quad (5.33)$$

определяется соотношениями (5.25), (5.29).

При достаточно больших временах становится важным учет члена с четвертой производной в уравнении (5.17). Этот член регулирует уравнение, так что функция Грина $G_{\omega}(a, a')$ на самом деле не имеет полюса (5.31). Это обстоятельство существенно при больших временах. Поскольку функция Грина не имеет особенностей в конечной части плоскости комплексного ω , асимптотика возмущения при больших временах оказывается быстро падающей (быстрее любой экспоненты) [65]. Время, начиная с которого важен этот эффект, можно оценить следующим образом [63, 65]. Член с $i\delta$ входит в уравнение (5.18) так же, как и вязкость в уравнение колебаний обычной жидкости (кинематический коэффициент вязкости $\nu =$

$= \omega \delta r^2$). За время τ начальное возмущение расплывается на расстояние $\Delta a \simeq (v\tau)^{1/2}$. В точках, находящихся на таком расстоянии, локальные частоты разные. Их разность $\Delta\omega \simeq c_A k_{\parallel}' \Delta a$. За время τ набегит разность фаз $\Delta\phi \simeq \Delta\omega\tau$. Если эта разность станет порядка единицы, то интерференция уничтожит колебание в данной точке. Условие $\Delta\phi \simeq 1$ дает [63]

$$\tau^{-1} \simeq \omega (\rho_i d \ln k_{\parallel}/da)^{2/3} \delta^{1/3}. \quad (5.34)$$

Для того чтобы локальный инкремент (5.33) реализовался, необходимо [63]

$$\gamma_b \gtrsim 10\tau^{-1}. \quad (5.35)$$

Учитывая (5.29), получаем, что рассмотренная в п. 3 локальная неустойчивость существенна для случая обсуждавшихся выше конкретных параметров токамака, если

$$N_b/n_0 \gtrsim 0,1 (v_{Tb}/V_0)^2. \quad (5.36)$$

5. Обсуждение результатов. Из проведенного выше рассмотрения следует, что влияние столкновительной диссипации на запертых электронах на локальный инкремент неустойчивости ионного пучка в практически интересных случаях плотных пучков с малым тепловым разбросом несущественно. Столкновительная диссипация запертых электронов несущественна также в задаче об эволюции начальных возмущений таких пучков. Однако она может играть заметную роль в случае сильно размытых пучков. Это открывает возможность подавления альфвеновской неустойчивости путем инжекции в токамак нейтральных атомов с широким энергетическим спектром.

§ 5.4. Возбуждение продольным ионным пучком коротковолновых альфвеновских возмущений

Рассмотрим возбуждение продольным ионным пучком альфвеновских возмущений, поперечная длина волны которых сравнима с размером орбит дрейфового движения быстрых (пучковых) ионов. Полагаем, что пучок ионов движется вдоль магнитного поля со средней скоростью V_0 и обладает «продольной температурой» T , так что его равновесная функция распределения имеет вид $F = N (M/2\pi T)^{1/2} \exp [-(v_{\parallel} - V_0)^2 M/2T] \delta (v_{\perp}^2/2)$. Вычислим инкремент нарастания альфвеновских волн, возбуждаемых таким пучком, исходя из общего выражения для инкремента (4.44). Плотность пучка считаем не зависящей от координат, что означает пренебрежение градиентным членом в (4.44). Учитывая, что $(\partial F/\partial \mathcal{E})_{\mu} = (1/v_{\parallel}) (\partial F/\partial v_{\parallel})_{\mu}$, из (4.44) интегрированием по продольным и поперечным скоростям получаем

$$\gamma \equiv \text{Im } \omega = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_s, \quad (5.37)$$

где

$$\gamma_s = \frac{V\bar{\pi}\alpha}{|s+k_{\parallel}qR|} \left(\frac{V_s}{v_T} \right)^2 \frac{qV_0}{R} \frac{s^2 J_s^2(\xi_s)}{\xi_s^2} \frac{V_s}{V_0} x_s \exp(-x_s^2). \quad (5.38)$$

В (5.38) использованы обозначения: $v_T = (2T/M)^{1/2}$; $\xi_s = k_{\perp}qV_s/\omega_B$; $V_s = \omega/(k_{\parallel} + s/qR)$; $x_s = (V_0 - V_s)/v_T$, $\alpha = MN/\rho_0$ — отношение плотности пучка к плотности плазмы.

Будем считать, что скорость теплового разброса пучка мала по сравнению с его направленной скоростью, $v_T/V_0 \ll 1$. При этом величины γ_s не будут экспоненциально малыми, если только $x_s \lesssim 1$. При $x_s \lesssim 1$ и $v_T/V_0 \ll 1$ в (5.38) можно заменить V_s на V_0 всюду, где эти величины не входят в комбинации x_s . В этом приближении $\xi_s = \xi_0 \equiv k_{\perp}qV_0/\omega_B$. Учитывая резонансное условие $V_s = \omega/(k_{\parallel} + s/qR)$ и полагая $\omega = |k_{\parallel}|c_A$, находим, что при $V_s = V_0$ имеется связь между резонансными значениями k_{\parallel} и s :

$$s = \begin{cases} (c_A/V_0 - 1)qRk_{\parallel}, & k_{\parallel} > 0; \\ (c_A/V_0 + 1)qR|k_{\parallel}|, & k_{\parallel} < 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $V_0 < c_A$ резонансное взаимодействие частиц с альфвеновскими волнами имеет место только при $s > 0$. Если же $V_0 > c_A$, то для $k_{\parallel} > 0$ резонанс имеет место при $s < 0$.

С учетом (5.39) получаем

$$|s+k_{\parallel}qR| = \begin{cases} |s|c_A/|c_A - V_0|, & k_{\parallel} > 0; \\ |s|c_A/(c_A + V_0), & k_{\parallel} < 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

В результате находим, что γ_s сводится к виду

$$\gamma_s = V\bar{\pi}\alpha \left(\frac{V_0}{v_T} \right)^2 \frac{qV_0}{R} \frac{|s|J_s^2(\xi_0)}{\xi_0^2} x_s \exp(-x_s^2) \times \\ \times \begin{cases} |1 - V_0/c_A|, & k_{\parallel} > 0; \\ 1 + V_0/c_A, & k_{\parallel} < 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Заметим также, что величина $x_s \exp(-x_s^2)$ имеет положительный максимум, равный $(1/\sqrt{2}) \exp(-1/2)$, при $x_s = 1/\sqrt{2}$. Этому значению x_s соответствует

$$\gamma_s^{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha \left(\frac{V_0}{v_T} \right)^2 \frac{qV_0}{R} \frac{|s|J_s^2(\xi_0)}{\xi_0^2} \times \\ \times \begin{cases} |1 - V_0/c_A|, & k_{\parallel} > 0; \\ 1 + V_0/c_A, & k_{\parallel} < 0. \end{cases} \quad (5.42)$$

В случае длинноволновых возмущений, $\xi_0 \rightarrow 0$, все γ_s , кроме $\gamma_{|s|=1}$, стремятся к нулю. Что касается $\gamma_{|s|=1}^{\max}$, то при $\xi_0 \rightarrow 0$

$$\gamma_{111}^{\text{макс}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha \left(\frac{V_0}{v_T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{qV_0}{R} \times$$

$$\times \begin{cases} |1 - V_0/c_A|, & k_{\parallel} > 0; \\ 1 + V_0/c_A, & k_{\parallel} < 0. \end{cases} \quad (5.43)$$

При $V_0/c_A \ll 1$ (довольно медленный пучок) и $v_T \simeq V_0$ (на пределах применимости сделанного выше приближения $v_T \ll V_0$) из (5.43) получается качественная оценка

$$\gamma \simeq \alpha q V_0 / R. \quad (5.44)$$

Это находится в соответствии с оценочной формулой (4.13) работы [25] (заметим, что в формуле (4.13) работы [25] q должно стоять в числителе правой части, а не в знаменателе, см. также [1]).

Возвращаясь к формуле (5.42), замечаем, что длинноволновое приближение $\xi_0 \rightarrow 0$ нарушается при $\xi_0 \gtrsim 1$, т. е. при $k_{\perp} \Lambda \gtrsim 1$. При увеличении параметра ξ_0 до значений порядка и больших единицы инкремент при резонансе типа $|s| = 1$ убывает, тогда как инкременты, соответствующие $|s| \gtrsim 1$, возрастают. При некоторых ξ_0 , в несколько раз превышающих единицу, инкременты для небольших номеров $|s|$ по порядку величины сравниваются друг с другом. При $\xi_0 \gg 1$ выражения γ_s — осциллирующие функции ξ_0 , что связано с осцилляциями функций Бесселя. При этих осцилляциях выражения γ_s остаются, однако, неотрицательными. Среднее по осцилляциям значение γ_s , обозначаемое ниже как $\bar{\gamma}_s^{\text{макс}}$, находим, заменяя в (5.42) $J_s^2(\xi_0) \approx 1/\pi |\xi_0|$, так что при $\xi_0 \gg 1$

$$\bar{\gamma}_s^{\text{макс}} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha \left(\frac{V_0}{v_T}\right)^2 \frac{qV_0}{R} \frac{s}{|\xi_0|^3} \times$$

$$\times \begin{cases} |1 - V_0/c_A|, & k_{\parallel} > 0; \\ 1 + V_0/c_A, & k_{\parallel} < 0. \end{cases} \quad (5.45)$$

Видно, что при больших ξ_0 величины $\bar{\gamma}_s^{\text{макс}}$ убывают как $|\xi_0|^{-3}$.

Обсуждение результатов. Мы проанализировали уравнение (4.44) для случая продольного пучка с малым максвелловским разбросом по скоростям и с произвольным соотношением между средней направленной скоростью V_0 и скоростью Альфвена c_A . Такой анализ показал, что при длинах волн, сравнимых с размером орбит дрейфового движения, возможно резонансное взаимодействие типа $\omega = v_{\parallel} |(k_{\parallel} + s/qR) c|$ $|s| = 1, 2, 3, \dots$, тогда как в длинноволновом приближении обнаруживается лишь резонанс типа $|s| = 1$.

Инкременты, соответствующие резонансам с $|s| > 1$, имеют максимум при некотором конечном значении параметра $k_{\perp} V_0 q / \omega_B$. При больших значениях этого параметра инкременты убывают как при $|s| > 1$, так и при $|s| = 1$. При конечном отношении V_0/c_A возможна раскачка двух физически различных типов колебаний, соответствующих двум знакам отношения ω/k_{\parallel} . Инкременты возмущений с $\omega/k_{\parallel} < 0$ больше, чем при $\omega/k_{\parallel} > 0$.

§ 5.5. Альфвеновские неустойчивости на запертых α -частицах с немонотонным распределением по скоростям

1. **Коротковолновая неустойчивость.** Исходя из (4.53), рассмотрим возбуждение альфвеновских волн запертыми α -частицами. Полагаем частоты возмущений большими по сравнению с градиентными, $\omega \gg (\omega_{* \alpha}, \omega_D^0)$, где $\omega_{* \alpha}$ — дрейфовая частота α -частиц. Вместе с тем считаем $\omega \gtrsim \omega_D^0$, $\eta_p > 1$, что совместимо с условием $\omega \gg \omega_D^0$, если $k_a \gg k_b$, т. е. $\psi \ll 1$. При этих предположениях (4.53) сводится к виду

$$\gamma = \frac{2\pi\omega_{p\alpha}^2 \varepsilon c_A^2}{k_a^2 c^2 qR} \sum_p |p| \int dv v^2 J_0^2(\xi_{\perp}) J_p^2(\eta_p) \frac{\partial F_0}{\partial v}, \quad (5.46)$$

где $\xi_{\perp} = k_a v / \omega_{B\alpha}$; $\eta_p = (2/\varepsilon)^{1/2} \xi_{\perp} \kappa_p$; $\kappa_p = 2(1 - \sqrt{2} \omega q R / \varepsilon^{1/2} p v)^{1/2}$; $F_0 = F / N_{\alpha}$.

В правую часть (5.46) входят функции Бесселя от аргумента ξ_{\perp} , означающего отношение ларморовского радиуса α -частиц к поперечной длине волны, и от аргумента $(2/\varepsilon)^{1/2} \xi_{\perp} \kappa_p$ — эта величина характеризует отношение ширины бананов сильно запертых α -частиц. Полагаем $2\kappa_p^2/\varepsilon \gg 1$, что не противоречит принятому выше предположению $\kappa_p^2 \ll 1$, поскольку $\varepsilon \ll 1$. При этом ширина бананов велика по сравнению с ларморовским радиусом и поэтому можно полагать $\xi_{\perp} \ll 1$. Тогда из уравнения (5.46) следует

$$\gamma = \frac{2\pi\omega_{p\alpha}^2 \varepsilon c_A^2}{k_a^2 c^2 qR} \sum_p |p| \int dv v^2 J_p^2(\eta_p) \frac{\partial F_0}{\partial v}. \quad (5.47)$$

Для простоты положим $F_0(v) = \delta(v - v_{\alpha}) / 2v_{\alpha}^2$. Поскольку при выводе (5.47) предполагалось $\kappa_p^2 \ll 1$, то при таком F_0 частота исследуемых нами возмущений должна быть близка к гармоникам баунс-частоты наиболее сильно запертых α -частиц, $\omega \approx p(\varepsilon/2)^{1/2} v_{\alpha} / qR$, $p = 1, 2, 3, \dots$. В то же время при выбранном ω это приближенное равенство может удовлетворяться лишь для какого-либо одного p . Учитывая это и интегрируя (5.47) по частям, получаем

$$\gamma = -\frac{4\pi N_{\alpha} \varepsilon |p| v_{\alpha}}{N_0 \xi_{\perp}^2 qR} \left[J_p^2(\eta_p) + \frac{2}{\kappa_p^2} \eta_p J_p(\eta_p) J_p'(\eta_p) \right], \quad (5.48)$$

где N_0 — плотность плазмы. При $\eta_p \gtrsim 1$ второй член в правой части (5.48) велик по сравнению с первым (поскольку $\kappa_p^2 \ll 1$), так что приближенно

$$\gamma = -16\pi \frac{N_{\alpha}}{N_0} \frac{qv_{\alpha}}{R} \frac{|p|}{\eta_p} J_p(\eta_p) J_p'(\eta_p). \quad (5.49)$$

Видно, что имеет место неустойчивость, $\gamma > 0$, если

$$J_p(\eta_p) J'_p(\eta_p) < 0. \quad (5.50)$$

Эта неустойчивость на запертых α -частицах является аналогом неустойчивости на пролетных α -частицах, рассмотренной в работе [54] (см. также § 17.3 книги [1]). Инкремент неустойчивости на запертых частицах согласно (5.49) порядка

$$\gamma \simeq (N_\alpha/N_0) (qv_\alpha/R), \quad (5.51)$$

т. е. такого же порядка, что и инкремент неустойчивости на пролетных α -частицах [1]. Напомним также, что частота нарастающих возмущений порядка баунс-частоты запертых α -частиц, поперечная длина волны порядка ширины бананов α -частиц, а продольная велика по сравнению с длиной вдоль тора, как это имеет место для почти желобковых возмущений.

2. Длинноволновые неустойчивости. Исходим из уравнения (4.56). В целях упрощения анализа считаем $\xi_\perp \equiv k_\perp \rho_\alpha < 1$ и пренебрегаем в этом уравнении слагаемым, пропорциональным κ_p^2 , что справедливо, если угол ψ не слишком близок к нулю. Как и в п. 1, распределение α -частиц по скоростям считаем изотропным и моноэнергетическим, $F \sim \delta(v - v_\alpha)$. Рассмотрим два случая возмущений: $\omega_D \ll \omega_b$ и $\omega_D \gg \omega_b$.

а. Возмущения с $\omega_D \ll \omega_b$. Это означает $k_b \ll \sqrt{2\varepsilon}/q\rho_\alpha$. Такие возмущения характеризуются инкрементом

$$\gamma = -4\pi (\varepsilon/2)^{1/2} (N_\alpha v_\alpha^2/N_0 c_A) q^2 |k_\parallel| \sigma \sin^2 \psi, \quad (5.52)$$

где $\sigma = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p J'_p/z$; $J_p = J_p(z)$; $z = 2k_\parallel qR \kappa_p$; $\kappa_p = 2(1 - \omega/p\omega_b)^{1/2}$.

При $\omega \simeq \omega_b$ в сумме по p достаточно удержать только одно слагаемое с $p \approx \omega/\omega_b$. В этом случае условие неустойчивости имеет вид

$$J_p(z) J'_p(z) < 0. \quad (5.53)$$

Волновые числа нарастающих возмущений удовлетворяют условиям

$$k_\parallel \simeq p\omega_b/c_A \simeq p (\varepsilon/2)^{1/2} v_\alpha/c_A qR; \\ k_b < (2\varepsilon)^{1/2}/q\rho_\alpha; k_\alpha < 1/q\rho_\alpha,$$

где ρ_α — ларморовский радиус α -частиц.

б. Возмущения с $\omega_D \gg \omega_b$. В этом случае вместо резонансов на баунс-частотах имеют место резонансы на частоте магнитного дрейфа, $\omega = \omega_D$. При этом из (4.56) следует

$$\gamma = -2\pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2} \frac{M_\alpha}{M_i} \frac{N_\alpha}{N_0} \left(\frac{v_\alpha}{c_A}\right)^2 k_b v_\alpha \frac{\rho_\alpha}{R} \frac{J_0 J'_0}{z_0} \sin^2 \psi, \quad (5.54)$$

где $z_0 = 2 k_\parallel qR (1 - \omega/\omega_D)^{1/2}$; $J_0 = J_0(z_0)$.

Неустойчивость имеет место при $J_0 J'_0 < 0$. Характерные значения волновых чисел лежат в интервале $k_{\parallel} \simeq k_b \rho_{\alpha} v_{\alpha} / 2 c_A R < v_{\alpha} / 2 R c_A$; $k_b \rho_{\alpha} < \sqrt{2} \varepsilon / q$; $k_a \rho_{\alpha} \simeq 1$. Инкремент (5.54) по порядку величины равен инкременту (5.52) и превышает инкремент п. 1 в $(v_{\alpha} / c_A)^2$ раз.

§ 5.6. Дрейфовые термоядерные неустойчивости на баунс-резонансах и их стабилизация запертыми электронами

1. Инкремент неустойчивостей на баунс-резонансах. Общее выражение для локального инкремента альфвеновских волн, обусловленного взаимодействием этих волн с запертыми α -частицами, γ_{α} было приведено в § 4.5. Ниже мы будем использовать более простое (хотя тоже довольно общее) выражение для γ_{α} (4.53), соответствующее приближению сильно запертых α -частиц.

В [50] (см. также [1]) рассмотрен случай резонанса $p = 0$, $\omega \simeq \omega_D^0$. Теперь будем полагать $p \neq 0$. При этом обнаруживается интересная возможность раскачки возмущений с $\omega \ll \omega_D^0$.

Из (4.53) следует, что инкремент нарастания таких возмущений обратно пропорционален их частоте:

$$\gamma_{\alpha} = \frac{\sin^2 \psi}{\omega} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{2}} \left(\frac{R}{a}\right)^{1/2} \beta_{\alpha} \left(\frac{c_A}{R}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \int_{p\lambda}^{\infty} dx x^5 \exp(-x^2) \frac{(x-p\lambda)^2}{|x-p\lambda/4|} \times \\ \times J_0^2 (\sqrt{2} k_{\perp} \rho_{\alpha} x) J_p^2 \left[2 \frac{k_a}{\lambda k_b} (x-p\lambda) \right]. \quad (5.55)$$

Здесь $\lambda = -\sqrt{\varepsilon/q} k_b \rho_{\alpha}$; $\rho_{\alpha} = (T_{\alpha} / M_{\alpha} \omega_{B\alpha}^2)^{1/2}$; $\beta_{\alpha} = 8 \pi T_{\alpha} N_{\alpha} / B_s^2$ — отношение давления α -частиц к давлению магнитного поля (B_s — тороидальное магнитное поле); T_{α} — температура α -частиц; функция распределения α -частиц F предположена максвелловской.

В (5.55) учтено, что при $\omega > 0$ и $\partial \ln N_{\alpha} / \partial a < 0$ инкремент положителен, $\gamma > 0$, если $k_b < 0$. Поэтому $\lambda > 0$.

Полагая $\lambda \simeq 1$, $q \simeq 1$, $k_a \simeq k_b$ и учитывая, что при этом основной вклад в интеграл вносит область $x \simeq 1$, получаем следующую оценку γ_{α} (без численных коэффициентов):

$$\gamma_{\alpha} \simeq \frac{1}{\omega} \beta_{\alpha} \left(\frac{R}{a}\right)^{1/2} \frac{c_A^2}{R^2}. \quad (5.56)$$

Интересно отметить, что, хотя механизм рассмотренной здесь неустойчивости отличен от обсуждавшегося в [50], оценка (5.56) оказывается такой же, как и полученная в [50] (ср. (5.56) с уравнением (3.11) работы [50]).

Максимум γ_{α} как функции ω можно оценить из требования $\omega \gtrsim v_{Ti} / R$, где v_{Ti} — тепловая скорость ионов основной компоненты плазмы (при $\omega \lesssim v_{Ti} / R$ существенно резонансное взаимодействие

колебаний с ионами основной компоненты плазмы). При этом получается

$$(\gamma_\alpha/\omega)_{\text{макс}} \simeq (\beta_\alpha/\beta) (R/a)^{1/2}, \quad (5.57)$$

где β — отношение давления плазмы к давлению магнитного поля. Видно, что при не слишком малом β_α/β инкремент возмущений может быть сравним с их частотой.

Заметим, что такую же оценку можно получить и для случая неустойчивости, рассмотренной в [50], если, в отличие от [50], считать $k_\parallel \ll 1/qR$.

Подчеркнем также, что проведенное выше рассмотрение не учитывает шири магнитного поля. При наличии достаточно большого шири исследованная выше неустойчивость должна подавляться, поскольку, как видно из закона дисперсии $\omega = k_\parallel c_A$, очень малым ω соответствуют очень малые k_\parallel . В связи с этим представляют интерес также более высокочастотные возмущения, для которых $k_\parallel \simeq 1/qR$, $\omega \simeq c_A/qR$. Для таких возмущений из (5.56) вместо (5.57) следует оценка

$$\gamma_\alpha/\omega \simeq \beta_\alpha(R/a)^{1/2}, \quad (5.58)$$

что аналогично оценке инкремента, полученной в [50].

2. Пороги неустойчивостей. Для определения порогов рассмотренных выше неустойчивостей необходимо знать декремент затухания альфвеновских волн, обусловленный их взаимодействием с электронами и фоновыми ионами. Если k_\parallel не слишком близко к гармоникам величины $1/qR$, то декремент от фоновых ионов экспоненциально мал и им можно пренебречь. Электронный же вклад в декремент может быть представлен как сумма трех частей: из-за столкновительной диссипации колебаний на запертых электронах; из-за баунс-резонансов колебаний с запертыми электронами и из-за обычного затухания Ландау на пролетных электронах (см. § 4.2). Дополнительный анализ этих трех факторов, аналогичный работе [59], свидетельствует о том, что наиболее важным является затухание, связанное со столкновительной диссипацией на запертых электронах. Поэтому ниже при отыскании порогов неустойчивостей α -частиц мы будем учитывать только такое затухание. Необходимые нам выражения для электронного декремента содержатся в § 4.4.

Рассмотрим возмущения с $k_\parallel \ll 1/qR$ и с $|k_\parallel - 1/qR| \ll 1/qR$, полагая тем не менее соответственно $k_\parallel qR \gg v_{Ti}/c_A$, $|k_\parallel qR - 1| \gg v_{Ti}/c_A$, чтобы, как отмечалось выше, можно было пренебречь резонансами возмущения с фоновыми ионами.

В первом случае ($k_\parallel \ll 1/qR$) из (4.68) следует оценочное выражение для локального декремента альфвеновских волн, первоначально полученное в работе [57]:

$$\gamma_e \simeq -\beta(v_e\omega)^{1/2} (c_A/R\omega)^2. \quad (5.59)$$

Из (11.7), (11.10) следует, что $\gamma_\alpha > |\gamma_e|$, если

$$\beta_\alpha/\beta_e > (ev_e/\omega)^{1/2}. \quad (5.60)$$

Видно, что порог неустойчивости (т. е. граничное значение β_α) тем больше, чем меньше ω . Поэтому неустойчивость возможна при всех $v_{Ti}/R < \omega < c_A/R$, если условие (5.60) удовлетворяется при $\omega \simeq v_{Ti}/R$, т. е. в случае

$$\beta_\alpha/\beta > (v_e a/v_{Ti})^{1/2}. \quad (5.61)$$

В типичных термоядерных условиях ($T = 15$ кэВ, $n_0 = 3 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$, $a = 10^2$ см) из (5.61) следует оценка для порогового значения плотности α -частиц:

$$N_\alpha/n_0 > 10^{-3}. \quad (5.62)$$

В случае $|k_\parallel - 1/qR| \ll 1/qR$, когда $\omega \simeq c_A/qR$, из (4.69) следует результат, аналогичный (5.59):

$$\gamma_e = -\beta (v_e c_A/R)^{1/2}. \quad (5.63)$$

При этом вместо (5.61) получается порог неустойчивости

$$\beta_\alpha/\beta > (v_e a/c_A)^{1/2}, \quad (5.64)$$

что в несколько раз больше, чем (5.61).

§ 5.7. Альфвеновская неустойчивость в двухкомпонентном токамаке некруглого сечения

1. Постановка задачи и исходные уравнения. Исследуем влияние некруглого сечения токамака на альфвеновскую неустойчивость, возбуждаемую пучком быстрых ионов. Тем самым обобщим результаты [25], полученные для токамака круглого сечения (см. также [1]). Ограничимся рассмотрением слабонекруглого токамака, имея, однако, в виду, что на пределе применимости этого приближения можно получить количественно верные результаты и для токамака с существенно некруглым сечением.

В случае некруглого токамака уравнение малых колебаний, полученное в [25] (см. также [1]), модифицируется следующим образом:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) g_{22} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \xi + \left(\frac{R\omega}{c_A}\right)^2 g_{22} \xi - \frac{8\pi m a R}{k_a B_0^4} \tilde{p} \frac{\partial B_0^2}{\partial \theta} = 0. \quad (5.65)$$

Здесь, как и выше, ξ — радиальная контравариантная компонента вектора возмущенного смещения плазмы, \tilde{p} — возмущение давления пучка. Как и в § 4.2, зависимость возмущений от координат и времени выбрана в виде $X(a, \theta, \varphi, t) = \exp[i k_a a + i(m\theta - n\varphi) - i\omega t] \sum_s X_s \exp(is\theta)$, где $(m, n) \gg 1$. Члены с $s \neq 0$ учитывают тороидальность и некруглость токамака; они малы по сравнению с X_0 . Предполагается $k_a \gg m/a$, что соответствует случаю наиболее опасных возмущений. Заметим также, что мы пренебрегаем широм. Возмущения считаются длинноволновыми по сравнению с лар-

моровским радиусом быстрых ионов и размером дрейфовых орбит последних.

Входящая в (5.65) компонента метрического тензора $g_{22} = a^2 [1 + \alpha(\theta)]$, где $\alpha(\theta) = \sum \alpha_p \exp(ip\theta)$; $p \neq 0$; $|\alpha_p| \ll 1$. Поскольку $\alpha(\theta)$ — вещественна, то $\alpha_p^* = \alpha_{-p}$. При таком g_{22} квадрат модуля равновесного магнитного поля $B_0^2 = B_s^2 + B_\theta^2 + 2B_s^2 \cos \theta + B_\theta^2 \alpha(\theta)$, где B_s, B_θ , как и ранее, — средние на магнитной поверхности тороидальное и полоидальное поля. При этом

$$\frac{\partial B_0^2}{\partial \theta} = i\epsilon B_s^2 \left[\exp(i\theta) - \exp(-i\theta) + \frac{\epsilon}{q^2} \sum_p p \alpha_p \exp(ip\theta) \right]. \quad (5.66)$$

Для использования уравнения (5.65) необходимо также знать связь \tilde{p} с ξ . Величина p связана с возмущенной функцией распределения пучка f соотношением типа (4.9). Выражение для f находится из кинетического уравнения и имеет вид

$$f = \exp[i(k_\alpha a + m\theta - n\varphi - \omega t)] \sum_s f_s \exp(is\theta), \quad (5.67)$$

$$\text{где } f_s = \frac{i\omega k_\alpha (v_\perp^2/2 + v_\parallel^2)}{2m(\omega - \kappa_s v_\parallel)} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} \left(\xi_{s-1} - \xi_{s+1} + \frac{\epsilon}{q^2} \sum_p p \alpha_p \xi_{s-p} \right), \quad (5.68)$$

$\kappa_s = (m + s - nq)/qR$, $\mathcal{G} = v^2/2$. Предполагаем, что $v_\parallel \approx \text{const}$ (приближение сильно пролетных частиц). Подставляя (5.67), (5.68) в выражение типа (4.9), находим искомую связь между гармониками возмущенного давления и смещения:

$$\tilde{p}_s = - \frac{ik_\alpha a R}{m} Q_s(\omega) \left(\xi_{s-1} - \xi_{s+1} + \frac{\epsilon}{q^2} \sum_p p \alpha_p \xi_{s-p} \right), \quad (5.69)$$

где

$$Q_s = - \frac{\omega M}{4\rho_0 R^2} \int \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} \left(\frac{v_\perp^2}{2} + v_\parallel^2 \right)^2 \frac{B_0}{|v_\parallel|} \frac{d\mu d\mathcal{G}}{\omega - \kappa_s v_\parallel}; \quad (5.70)$$

$\rho_0 \equiv Mn_0$ — массовая плотность плазмы, n_0 — обычная плотность плазмы; $\mu = v_\perp^2/2 B_0$. Для простоты полагаем массы быстрых ионов и ионов основной компоненты плазмы одинаковыми.

Используя (5.65), (5.66) и выделяя s -ю гармонику по θ , приходим к уравнению

$$(\hat{Q}^{(0)} \xi)_s + (\hat{Q}^{(1)} \xi)_s = 0. \quad (5.71)$$

Здесь

$$(\hat{Q}^{(0)} \xi)_s = \sum_{s'} \alpha_{s-s'} (\omega^2 - c_A^2 \kappa_s \kappa_{s'}) \xi_{s'}, \quad (5.72)$$

$$(\hat{Q}^{(1)} \xi)_s = \frac{im}{k_\alpha a R \rho_0} \left(\tilde{p}_{s-1} - \tilde{p}_{s+1} + \frac{\epsilon}{q^2} \sum_p p \alpha_p \tilde{p}_{s-p} \right), \quad (5.73)$$

а \tilde{p}_s определяются уравнениями (5.69), (5.70).

2. **Дисперсионное уравнение.** Уравнение (5.71) решаем методом последовательных приближений по плотности пучка и по параметру α . В нулевом приближении по пучку из (5.71) следует $(\hat{Q}^{(0)}\xi)_s = 0$. Предполагая сечение токамака слабонекруглым, получаем

$$\omega = \omega^{(0)}, \quad \xi_s = \varepsilon_s^{(0)}, \quad (5.74)$$

где

$$\omega^{(0)} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{l=0} |\alpha_l|^2 \frac{\kappa_l - \kappa_0}{\kappa_l + \kappa_0} \right); \quad (5.75)$$

$\xi_s^{(0)} = \bar{\xi}_s \delta_s$; $\delta_s = \delta_{s0} - \alpha_s \kappa_0 / (\kappa_s + \kappa_0)$; $\omega_0 = \kappa_0 c_A$; $\bar{\xi}$ — некоторая константа; δ_{s0} — символ Кронекера. Заметим, что решения (5.74) с точностью до членов первого порядка по α (включительно) удовлетворяют уравнениям

$$(\omega^{(0)})^2 - c_A^2 \kappa_l^2 \delta_l + \sum_{l' \neq l} \alpha_{l-l'} (\omega^{(0)})^2 - c_A^2 \kappa_l \kappa_{l'} \delta_{l'} = 0. \quad (5.76)$$

Теперь рассмотрим первое приближение по плотности пучка. Ищем решение (5.71) в виде $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}$, $\xi_s = \xi_s^{(0)} + \xi_s^{(1)}$. Пренебрегая членами порядка $\alpha \omega^{(1)}$, $\alpha \xi^{(1)}$, получаем уравнение для $\omega^{(1)}$:

$$2\omega^{(0)} \omega^{(1)} = -\frac{im}{k_\alpha a R \rho_0} \sum_k \left(\delta_{k+1}^* - \delta_{k-1}^* + \frac{\varepsilon}{q^2} \sum_{p \neq 0} p \alpha_p \delta_{k+p}^* \right) \tilde{p}_k. \quad (5.77)$$

Подставляя сюда (5.69) и пренебрегая членами порядка $\varepsilon \alpha_p^2 \kappa_0 / \kappa_p$, получаем

$$2\omega^{(0)} \omega^{(1)} = \sum_k Q_k \left| \delta_{k+1} - \delta_{k-1} - \frac{\varepsilon}{q^2} k \alpha_k \right|^2. \quad (5.78)$$

Отсюда для ветви колебаний с частотой $\omega_0 = \kappa_0 c_A$ следует [19]

$$\begin{aligned} \gamma \equiv \text{Im } \omega^{(1)} = & \frac{\pi}{8n_0 R^2} \int \left(\frac{v_\perp^2}{2} + v_\parallel^2 \right)^2 \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \left\{ \delta(\omega^{(0)} - \kappa_1 v_\parallel) + \right. \\ & \left. + \sum_{p \neq 1} \left| \alpha_{p+1} \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + \kappa_{p+1}} - \alpha_{p-1} \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + \kappa_{p-1}} + \frac{\varepsilon}{q^2} p \alpha_p \right|^2 \delta(\omega^{(0)} - \right. \\ & \left. - \kappa_p v_\parallel) \right\} \frac{B_0}{|v_\parallel|} d\mu d\mathcal{E}. \quad (5.79) \end{aligned}$$

Отметим, что член с $(\varepsilon/q^2) p \alpha_p$ в (5.79) оказывается порядка других членов, обусловленных некруглым сечением токамака, если $\varepsilon/q^2 \simeq \kappa_0/p\kappa_p \simeq k_\parallel q R/p^2$, где $k_\parallel = \kappa_0$ — продольная составляю-

щая волнового вектора. В пренебрежении этим членом получается дисперсионное уравнение [61]

$$\omega^2 - c_A^2 \kappa_0^2 - Q_1 - Q_{-1} - \sum_{p \neq \pm 1} \left| \alpha_{p-1} \frac{\kappa_0}{\kappa_{p-1} + \kappa_0} - \alpha_{p+1} \frac{\kappa_0}{\kappa_{p+1} + \kappa_0} \right|^2 Q_p = 0. \quad (5.80)$$

Члены, стоящие перед суммой, характерны для задачи о круглом токамаке; члены под знаком суммы обусловлены тем, что сечение магнитных поверхностей некруглое.

Заметим также, что, в отличие от (5.79), уравнение (5.80) пригодно для исследования неустойчивостей гидродинамического типа, а не только кинетических.

Рассмотрим некоторые частные случаи, вытекающие из (5.80).

3. Неустойчивость пучка с малым разбросом по скоростям (неустойчивость гидродинамического типа). Пусть $F = N_0 (V_{\parallel}/B_s) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)$, где $V_{\parallel} = [2(\mathcal{E}_0 - \mu_0 B_s)]^{1/2}$. Рассмотрим колебания с частотой

$$\text{Re } \omega = c_A \kappa_0 = \kappa_p V_{\parallel}, \quad (5.81)$$

полагая $p \neq \pm 1$ (случай $p = \pm 1$ исследовался в [25], см. также [1]). Тогда из всей суммы в (5.80) остается только один член, и оно принимает вид

$$\omega^2 - c_A^2 \kappa_0^2 - \left| \alpha_{p-1} \frac{\kappa_0}{\kappa_{p-1} + \kappa_0} - \alpha_{p+1} \frac{\kappa_0}{\kappa_{p+1} + \kappa_0} \right|^2 \times \\ \times \frac{N_0}{n_0} \frac{V_{\parallel}}{qR^2} \left(1 + \frac{V_{\perp}^2}{2V_{\parallel}^2} \right)^2 \frac{\kappa_p^2 V_{\parallel}^2}{(\omega - \kappa_p V_{\parallel})^2} = 0, \quad (5.82)$$

где N_0 — плотность пучка, $V_{\perp} = (2\mu_0 B_s)^{1/2}$. Из (5.82) находим инкремент неустойчивости

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} \left| \alpha_{p-1} \frac{\kappa_0}{\kappa_{p-1} + \kappa_0} - \alpha_{p+1} \frac{\kappa_0}{\kappa_{p+1} + \kappa_0} \right|^{2/3} \times \\ \times \left(\frac{N_0}{n_0} \right)^{1/3} \left| \frac{m+p}{q} - n \right|^{1/3} \left(1 + \frac{V_{\perp}^2}{2V_{\parallel}^2} \right)^{2/3} \frac{V_{\parallel}}{R}, \quad (5.83)$$

где $q = 1/\mu$ — «коэффициент запаса» токамака.

Таким образом, p -й ($p \neq \pm 1$) резонанс (5.83) возбуждается, если отличны от нуля коэффициенты α_{p-1} или α_{p+1} . На пределе применимости нашего приближения, когда $\alpha_{p\pm 1} \simeq 1$, имеем

$$\gamma \simeq (N_0/n_0)^{1/3} V_{\parallel}/R, \quad (5.84)$$

т. е. инкремент неустойчивости достигает такой же величины, что и для основных резонансов с $p = \pm 1$.

Заметим также, что при $V_{\perp} \simeq V_{\parallel}$ условие пренебрежения тепловым разбросом по скоростям означает $\delta V_{\parallel}/V_{\parallel} < (N_0/n_0)^{1/3}$, т. е. то же самое, что и в случае круглого токамака.

4. Неустойчивость пучка с размытым распределением по продольным скоростям. Пусть теперь $F = (N_0/B_s)\delta(\mu - \mu_0)f(\mathcal{E})$. Полагаем, что пучок имеет достаточно большой разброс по продольным скоростям, $\delta\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 > (N_0/n_0)^{1/3}$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{\pi}{8} \frac{N_0}{n_0} \frac{1}{R^2} \left\{ \left(\mu B_s + c_A^2 \frac{\kappa_0^2}{\kappa_1^2} \right)^2 \frac{1}{\kappa_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} \right)_{\mathcal{E}=\mathcal{E}_1} + \right. \\ & \left. + \sum_{k \neq 1} \frac{1}{\kappa_k} \left(\mu B_s + c_A^2 \frac{\kappa_0^2}{\kappa_k^2} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} \right)_{\mathcal{E}=\mathcal{E}_k} \right\}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

где $\mathcal{E}_k = \mu_0 B_s + (1/2) c_A^2 \kappa_0^2 / \kappa_k^2$. Заметим, что первый член в фигурных скобках получается и при круглом сечении токамака, а остальные обусловлены некруглым сечением.

Как видим, для возбуждения p -го резонанса необходимо

$$\left(\partial f / \partial \mathcal{E} \right)_{\mathcal{E}=\mathcal{E}_p} > 0. \quad (5.86)$$

Наконец, заметим, что пучок с изотропным распределением по скоростям устойчив относительно рассматриваемых нами возмущений не только в круглом токамаке, как это отмечалось в [25], но и в некруглом. Это доказывается аналогично работе [25] (см. также [1]).

§ 5.8. Стабилизация альфвеновской неустойчивости в двухкомпонентном токамаке некруглого сечения

1. Общее выражение для локального инкремента. Расчеты, аналогичные проводившимся в работах [53, 57, 61] (см. также гл. 4), приводят к следующему выражению для локального инкремента альфвеновских волн:

$$\gamma = \gamma_b + \gamma_e + \gamma_i, \quad (5.87)$$

где γ_b , γ_e , γ_i — вклады, обусловленные соответственно пучком быстрых ионов, электронами и ионами фона (т. е. ионами основной компоненты плазмы); эти величины определены соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_b = & \frac{\pi}{2\omega R^2 M_i n_0} \sum_p \int dv \delta(\omega - \kappa_p v_{||}) |\Delta_{\mathcal{F}}|^2 J_0^2 \left(\frac{k_a v_{\perp}}{\omega_B} \right) \times \\ & \times \left[\frac{M_b (v^2 + v_{||}^2)}{4} \right]^2 \left(\omega \frac{\partial F_b}{\partial \mathcal{E}} + \frac{k_b c}{e B_s} \frac{\partial F_b}{\partial a} \right); \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \gamma_e = & - \frac{T_e}{2\pi T_i} (\omega v_e)^{1/2} \ln \left(\frac{128\epsilon\omega}{v_e} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left[1,6 k_a^2 \rho_i^2 + 3,5 \frac{v_{Ti}^2}{\omega^2 R^2} s^2 (1 + D)^2 \sigma^2 \right]; \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\gamma_i = -\frac{V\pi\omega}{2} \sum_i |u_i|^2 \exp(-u_i^2) \left| \frac{T_e}{T_i} k_a \rho_i \zeta_i^{(0)} - iu_i^2 \frac{v_{Ti}}{\omega R} (\zeta_{i+1}^{(0)} - \zeta_{i-1}^{(0)}) \right|^2. \quad (5.90)$$

Здесь M_b — масса ионов пучка, F_b — функция распределения пучка, нормированная так, что $\int F_b dv = N_b$; N_b — плотность пучка; $\varepsilon = a/R$; $\mathcal{E} = M_b v^2/2$; $v_{Ti} = (T_i/M_i)^{1/2}$; $\rho_i = v_{Ti}/\omega B_i$; $u_i = \omega/\sqrt{2}v_{Ti}\kappa_i$; $\sigma = 16 [\ln(128 \varepsilon \omega/v_e)]^{-1}$;

$$\Delta_p = \sum_l \frac{2(p-l)}{k_a \Lambda} J_{p-l}(k_a \Lambda) i^l \zeta_l^{(0)}; \quad (5.91)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2 - 1/4} \operatorname{Re} \alpha_l; \quad (5.92)$$

$$\zeta_l^{(0)} = \delta_{l0} - \alpha_l \kappa_0 / (\kappa_0 + \kappa_l); \quad (5.93)$$

$\Lambda = q(v^2 + v_{\parallel}^2)/2v_{\parallel}\omega_{Bb}$ — размер орбиты дрейфового движения быстрых ионов; остальные обозначения те же, что и в § 5.7.

2. Анализ выражения для локального инкремента. Из (5.87) — (5.93) следует, что некруглое сечение токамака влияет как на возбуждение альфвеновских колебаний быстрыми ионами, так и на затухание этих колебаний вследствие их взаимодействия с электронами и фоновыми ионами.

В пределе длинных волн, $k_a \Lambda \ll 1$, из (5.88) следует результат работы [61] (см. также § 5.7), а в случае токамака с круглыми сечениями магнитных поверхностей — результат работы [53] (см. также § 5.4). Некруглое сечение магнитных поверхностей наиболее существенно влияет на возмущения с $k_a \Lambda \ll 1$, обуславливая наличие высших резонансов ($p > 1$). Если же $k_a \Lambda \simeq 1$, то пучковый инкремент по порядку величины такой же, как и в случае круглого токамака, так что

$$\gamma_b \simeq \omega q^2 \frac{N_b}{n_0} \frac{M_b}{M_i} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}} \right)^2, \quad (5.94)$$

где V_b — средняя скорость пучка, v_{Tb} — его тепловой разброс.

Влияние некруглого сечения на электронное затухание характеризуется параметром D , определенным соотношением (5.92). Из (5.89) и (5.92) следует, что по порядку величины электронный декремент в случае некруглого токамака оказывается таким же, как и в случае круглого. Это и естественно, так как рассматриваемое нами отклонение от круглого сечения не слишком велико и потому не искажает траектории запертых частиц.

Рассмотрим более подробно затухание на фоновых ионах. В случае круглого токамака оно экспоненциально мало [малость типа

$\exp(-u_l^2)$ с $l = 0, \pm 1$. В пренебрежении столь малыми членами из (5.90) следует

$$\begin{aligned} \gamma_i = & -\omega \beta_i \frac{V\pi}{2} \sum_{|l|>1} |u_l|^3 \exp(-u_l^2) \left| \frac{T_e}{T_i} k_a \rho_i \alpha_l - \right. \\ & \left. - i \frac{q}{p} \frac{v_{Ti}}{V_b} u_l^2 (\alpha_{l+1} - \alpha_{l-1}) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Здесь $\beta_i = 2 v_{Ti}^2 / c_A^2 \equiv 8 \pi n_0 T_i / B_s^2$, предполагается, что возмущения возбуждаются при p -м резонансе пучка, т. е. $\omega = sc_A / qR \approx k_p V_b$, так что $p = sc_A / V_b$. В случае возмущений с $k_a \Lambda \lesssim 1$ член с $k_a \rho_i$ в (5.95) мал, так что при p -м резонансе

$$\gamma_i = -\omega \frac{\beta_i V\pi}{2} \frac{q^2}{p^2} \left(\frac{v_{Ti}}{V_b} \right)^2 \sum_{|l|>1} |u_l|^7 \exp(-u_l^2) |\alpha_{l+1} - \alpha_{l-1}|^2. \quad (5.96)$$

Функция $u_l^7 \exp(-u_l^2)$ имеет острый максимум, равный примерно 2,4 при $u_l = (7/2)^{1/2}$, что соответствует числам $l = l_p$, где $l_p = [pV_b / \sqrt{7} v_{Ti}]$, а скобки [...] означают ближайшее целое число. Поэтому из всей суммы (5.96) важен только член с $l = l_p$, так что

$$\gamma_i = -2,1 \omega \frac{q^2}{p^2} \beta_i \left(\frac{v_{Ti}}{V_b} \right)^2 |\alpha_{l_p+1} - \alpha_{l_p-1}|^2. \quad (5.97)$$

Так, например, при $V_b / v_{Ti} \approx 3$ и резонансе $p = 1$ имеем $l_p = 4$. Если при этом имеется довольно большая «треугольность», так что $\alpha_3 \simeq 1$, то из (5.97) получаем $\gamma_i \simeq -0,1 q^2 \beta_i \omega$. Сравнивая этот результат с пучковым инкрементом (5.94), получаем критерий стабилизации

$$N_b / n_0 < 0,1 \beta_i (v_{Tb} / V_b)^2. \quad (5.98)$$

Для случая размытого пучка, $v_{Tb} \simeq V_b$, и достаточно большого давления плазмы, $\beta_i \simeq 0,1$, это неравенство дает $N_b / n_0 < 0,01$, что представляет собой существенно больший порог для неустойчивости, чем в случае круглого токамака,

$$N_b / n_0 < 0,5 \cdot 10^{-3} (v_{Tb} / V_b)^2 \approx 10^{-3},$$

когда порог неустойчивости определяется затуханием на электронах [57] (см. также § 5.3). Это свидетельствует о важной роли некруглого сечения токамака в стабилизации альфвеновских волн, возбуждаемых быстрыми ионами.

§ 5.9. Заключительные замечания о работах по линейной теории альфвеновских неустойчивостей

Как отмечалось в § 1.4, 2.10, исследования по альфвеновским неустойчивостям токамака с быстрыми ионами были начаты работами [25, 50]. Содержание этих работ было изложено в книге [1],

Напомним, что эти работы основывались на использовании дрейфового кинетического уравнения. В [25, 50] предполагалось также, что магнитные поверхности токамака являются круглыми. Следующими этапами развития линейной теории альфвеновских неустойчивостей было обобщение результатов [25, 50] на возмущения с произвольными поперечными волновыми числами (т. е. выход за рамки дрейфового приближения) и учет некруглого сечения токамака.

Первое было сделано в работах К. О. Бизли, Д. Г. Ломинадзе и автора [53, 54] (содержание [54] было изложено в книге [1]), а второе — в работе В. А. Мазура и автора [61]. Затем в теории альфвеновских неустойчивостей, вызываемых быстрыми ионами, стали корректно учитываться кулоновские столкновения, что было сделано в работе В. А. Мазура и автора [57] (как отмечалось в § 5.2, модельный учет столкновений производился в [26]). Следующим существенным шагом линейной теории альфвеновских неустойчивостей был учет баунс-резонансов, произведенный в работе Т. Д. Каладзе и автора [55]. Соответствующие результаты отмеченных здесь, а также некоторых других работ были изложены выше.

Важным в теории альфвеновских неустойчивостей является учет шири. О первоначальных исследованиях по учету шири шла речь в § 5.2. Продолжением этих исследований была работа [61]. При этом в [61] использовались представления А. В. Тимофеева [63, 65] (см. также [66, 67]), восходящие к теории колебаний обычной жидкости. Выход за рамки этих представлений был сделан работой В. А. Мазура, автора, А. Л. Френкеля и И. Г. Шухмана [68] (ее результаты изложены в обзоре В. А. Мазура и др. [69] в настоящем выпуске). В [68], как и в [63], была выявлена важная роль несобственных альфвеновских неустойчивостей, но в отличие от [63] были проанализированы также факторы, которым нет аналога в теории колебаний обычной жидкости (подробнее см. [68, 69]). Некоторые разновидности несобственных альфвеновских неустойчивостей (слаболокализованные альфвеновские возмущения) были рассмотрены В. М. Бардаковым [70]. Однако такие возмущения не столь опасны, как изучавшиеся в [68, 69].

Дальнейшее развитие получила также теория альфвеновских неустойчивостей в токамаке некруглого сечения. Помимо работ [60—62], содержание которых было изложено выше, этому была посвящена также работа Х. Д. Абурджания и Т. Д. Каладзе [71]. В отличие от [60—62], где рассматривался продольный ионный пучок, в [71] исследовались неустойчивости, вызываемые α -частицами.

Еще один новый элемент — конечность параметра β быстрых ионов (отношение давления быстрых ионов к давлению полного магнитного поля) — был учтен в работе Б. И. Меерсона, автора и О. А. Похотелова [72]. При этом картина усложняется, но в целом из [72] следует, что альфвеновская неустойчивость быстрых ионов остается и при большом β .

**КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ АЛЬФВЕНОВСКИХ
НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ**

§ 6.1. Введение

Согласно гл. 5, пучок быстрых ионов, образующихся в токамаке при продольной инжекции пучка быстрых нейтральных атомов, может приводить к возбуждению альфвеновских волн. Ниже исследуем квазилинейную релаксацию быстрых ионов при взаимодействии с возбуждаемыми ими альфвеновскими волнами. Пренебрежем широм магнитного поля, что существенно упростит анализ. Следует иметь в виду, что получающиеся таким путем результаты в ряде случаев могут оказаться слишком грубыми, а оценки для скорости квазилинейной релаксации — завышенными. Тем не менее этот анализ позволяет сделать заключение, что квазилинейная релаксация, обусловленная альфвеновской неустойчивостью, должна учитываться при расчете динамики быстрых ионов в токамаке.

В § 6.2, следуя работе В. М. Кулыгина, автора, А. И. Пятака, А. М. Фридмана и Е. С. Цапелкина [73], предположим, что квазилинейная релаксация протекает существенно быстрее кулоновской, и пренебрежем кулоновскими столкновениями. При наличии квазистационарного источника быстрых частиц, действующего в течение времени порядка или большего характерного времени кулоновских столкновений, результирующее распределение частиц по скоростям будет определяться как квазилинейными, так и кулоновскими процессами. Совместный учет этих процессов производился в работе К. Г. Гуреева, автора и О. К. Черемных [74], результаты которой излагаются в § 6.3. В отличие от § 6.2, 6.3, касающихся проблемы токамака с инжекцией быстрых нейтральных частиц, в § 6.4 рассмотрим, следуя работе автора, А. И. Пятака и А. М. Фридмана [75], квазилинейную релаксацию пролетных α -частиц. В § 6.5 дается обзор работ и приводятся некоторые другие результаты, касающиеся релаксации быстрых ионов при альфвеновских неустойчивостях.

§ 6.2. Квазилинейная релаксация продольного ионного пучка в пренебрежении кулоновскими столкновениями

1. Исходные уравнения. Аналогично § 1.2 полагаем, что временная зависимость спектра энергии колебаний определяется уравнением

$$\partial W_k / \partial t = 2 \gamma_k W_k. \quad (6.1)$$

Интересующий нас здесь вид колебаний — это альфвеновские волны с законом дисперсии $\omega_k^2 = k_{\parallel}^2 c_A^2$. Для них $W_k = (c/c_A)^2 |E_k|^2 / 8 \pi$. Полагаем, что инкремент этих волн определяется пролетными

частицами и что поперечная длина волны возмущений велика по сравнению с размером дрейфовых орбит этих частиц. Тогда, согласно гл. 4, 5,

$$\gamma_k = \frac{\pi}{8R^2 n_0} \int v_{\parallel}^3 \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} \delta\left(\omega_k - \frac{v_{\parallel}}{qR}\right) dv_{\parallel}. \quad (6.2)$$

С помощью дрейфового кинетического уравнения, дополненного членом с источником частиц (ср. с § 1.2), находим, что медленно меняющаяся часть функции распределения F должна удовлетворять одномерному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} + S, \quad (6.3)$$

где

$$D = \frac{\pi v_{\parallel}^2}{4R^2 M n_0} \int W_k \delta\left(\omega_k - \frac{v_{\parallel}}{qR}\right) dk_{\parallel}. \quad (6.4)$$

Уравнения (6.1) — (6.4) представляют собой систему искоемых уравнений квазилинейного приближения, описывающих взаимодействие продольного пучка ионов с альфвеновскими волнами в токамаке. Эта система квазилинейных уравнений не имеет аналога в случае плазмы, находящейся в однородном магнитном поле, т. е. в поле с $R = \infty$, так как, согласно (6.2), (6.4), при $R = \infty$ $\gamma = 0$, $D = 0$.

2. Анализ квазилинейных уравнений. Воспользуемся приведенными выше квазилинейными уравнениями для численного анализа динамики быстрых ионов, образующихся при ионизации пучка нейтральных атомов, инжектируемых в токамак.

Пусть при $t \leq 0$ быстрых ионов нет, так что $F(v_{\parallel}, t) = 0$, если $t \leq 0$. Полагаем, что при $t = 0$ включается стационарный источник быстрых ионов $S(v_{\parallel})$ с распределением по скоростям, имеющим максимум при $v_{\parallel} = v_{\parallel}^0$. Принимая v_{\parallel}^0 за единицу скоростного масштаба, $\tau_0 \equiv 2 \pi R q \lambda / v_{\parallel}^0$ — за единицу масштаба времени (λ — некоторая безразмерная константа, вводимая для удобства численного счета), а плотность плазмы n_0 — за единицу масштаба плотности, приводим систему уравнений (6.1) — (6.4) к безразмерной:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \omega} D_{\omega} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} + J(\omega);$$

$$D_{\omega} = A \omega^2 I(\omega, \tau);$$

$$I = \exp\left(\int_0^{\tau} \Gamma d\tau\right); \quad \Gamma = B \omega^{5/2} \partial \mathcal{F} / \partial \omega. \quad (6.5)$$

Здесь $\omega = (v_{\parallel} / v_{\parallel}^0)^2$ — безразмерная энергия ионов, $\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{E}_0 F(v_{\parallel}) / v_{\parallel}^0 n_0$ — их безразмерная функция распределения; $\mathcal{E}_0 = v_{\parallel}^0^2 / 2$; $\tau = t / t_0$; $\Gamma = 2 \gamma \tau_0$ — скорость нарастания энергии шумов в единицах τ_0 ; $I = W / W_0$ — безразмерная плотность энергии коле-

баний; W_0 — некоторый начальный уровень плотности энергии колебаний; $J(\omega) = \mathcal{E}_0 S \tau_0 / v_{\parallel}^0 n_0$ — функция, характеризующая источник. Константы A и B в (6.5) означают

$$A = (2\pi)^{5/2} W_0 \lambda / R \sqrt{\rho_0 B_0} \mathcal{E}_0^{1/2}; \quad B = \pi^2 q \lambda.$$

Заметим также, что величина $I(\omega)$ может рассматриваться как функция волнового числа k_{\parallel} , связанного с ω резонансным условием $\omega_k = k_{\parallel} c_A = v_{\parallel} / qR$, так что аргумент ω у I фактически означает $\omega = (qR c_A k_{\parallel})^2 / 2 \mathcal{E}_0$.

Система уравнений (6.5) решалась численно в предположении, что распределение инжектируемых частиц по энергиям имеет вид

$$J(\omega) = a \exp [-(\omega - 1)^2 / b^2]. \quad (6.6)$$

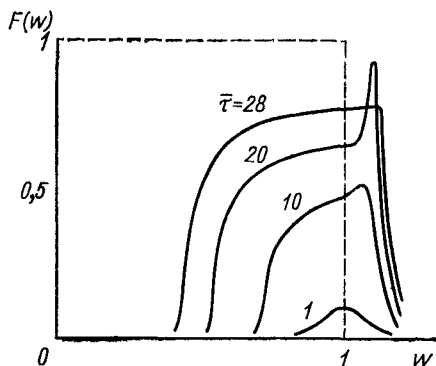


Рис. 5. Изменение функции распределения быстрых частиц со временем

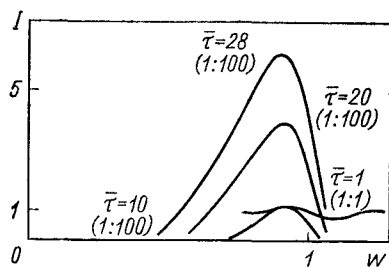


Рис. 6. Эволюция спектра колебаний со временем

Были приняты значения констант: $a = 10^{-3}$, $b = 0,1$; $A = 10^{-4}$, $B = 50$. Это объясняется следующими соображениями. Константа a , характеризующая мощность источника, должна быть такой, чтобы плотность быстрых ионов в течение всего изучаемого нами процесса квазилинейной релаксации оставалась меньше плотности плазмы. (Это соответствует ситуации в реальных экспериментах. Кроме того, в противном случае было бы нарушено наше предположение о малости вклада быстрых ионов в диэлектрическую проницаемость.) Константа b , характеризующая энергетический разброс источника, должна быть мала, $b \ll 1$, что соответствует относительно малому разбросу реальных инжекторов. При очень малом энергетическом разбросе быстрых ионов приведенная выше система квазилинейных уравнений неприменима, поскольку в этом случае возможна более сильная неустойчивость гидродинамического типа. Очень малое значение константы A обусловлено тем, что эта константа характеризует отношение начального уровня энергии шумов к энергии, которую имели бы быстрые частицы, если бы их плотность была порядка плотности плазмы (с точностью до v_{\parallel}^0 / c_A). Что касается

константы B , то она, как следует из определения, однозначно связана с коэффициентом запаса q . Поскольку константа B содержит также введенный выше параметр λ , то наши вычисления, относящиеся к фиксированному B , при соответствующем выборе параметра λ могут быть использованы при произвольных q (в этом смысле введенной λ).

Результаты численного расчета представлены на рис. 5—7. На них $\bar{\tau} = 100$.

Исходное состояние, соответствующее моменту времени $t = 0$, характеризуется нулевым значением функции $\mathcal{F}(\omega)$ на рис. 5 и единичным значением функции $I(\omega)$ на рис. 6.

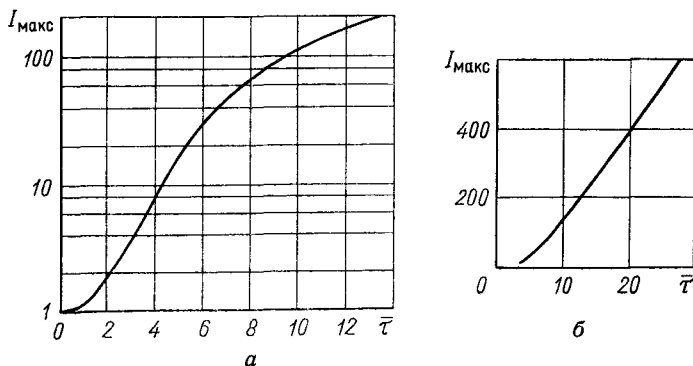


Рис. 7. Временная зависимость максимальной спектральной плотности энергии колебаний:

a — начальная стадия процесса (масштаб полулогарифмический);
б — общая картина процесса (масштаб линейный)

При $\bar{\tau} = 1$ в системе уже имеется некоторое число быстрых частиц (см. рис. 5) и происходит их резонансное взаимодействие с колебаниями, приводящее к росту энергии колебаний в области $\omega < 1$, где $\partial\mathcal{F}/\partial\omega > 0$, и ее уменьшению при $\omega > 1$, соответствующей $\partial\mathcal{F}/\partial\omega < 0$ (см. рис. 6). Однако интервал времени $\bar{\tau} < 1$ не превосходит величины обратного инкремента, характерного для этого интервала времени, так что $I(\omega, \bar{\tau} = 1)$ мало отличается от $I(\omega, \bar{\tau} = 0)$ (см. рис. 6).

При $\bar{\tau} = 10$ плотность непрерывно инжектируемых быстрых ионов на порядок больше, чем при $\bar{\tau} = 1$ (см. рис. 5). (Плотность быстрых ионов в тот или иной момент времени характеризуется площадью под соответствующей кривой рис. 5. Площадь под пунктиром на рис. 5 соответствует плотности холодной плазмы.) К этому же моменту времени вследствие большой длительности процесса взаимодействия частиц с колебаниями и вследствие увеличения инкремента нарастания колебаний, обусловленного увеличением плотности частиц, плотность энергии колебаний существенно возрастает (см. рис. 6, 7). Обратное воздействие колебаний на динамику инжектируемых частиц приводит к существенному искажению их

энергетического спектра (см. рис. 5). Наиболее важным обстоятельством, связанным с этим искажением, является эффект замедления быстрых ионов. Этот же эффект характерен и для обычной квазилинейной релаксации в отсутствие источника.

Кривые рис. 5, соответствующие $\bar{\tau} = 20$ и 28, свидетельствуют также о тенденции к образованию плато на функции распределения, $d\mathcal{F}/d\omega \rightarrow 0$. Однако образование плато затруднено, поскольку происходит непрерывная инжекция частиц с $\omega \approx 1$ и имеется связанный с этим поток частиц по спектру $\omega \leq 1$.

Еще одним важным обстоятельством, характерным для процесса одномерной квазилинейной релаксации, является все большее укрупнение фронта функции распределения в области малых скоростей, что связано с малостью коэффициента диффузии при малых ω (т. е. в области ω , где мало резонансных частиц и низок уровень колебаний). Как видно из рис. 5, эта тенденция обнаруживается и в исследуемом нами случае с непрерывной инжекцией.

На рис. 5 обращает на себя внимание также узкий максимум на функции распределения, возникающий на ранней стадии релаксационного процесса. Этот максимум формируется в области $\omega > 1$, постепенно смещается вправо, сужается и, наконец, пропадает. Это явление можно понять сопоставлением рис. 5 и 6. Согласно рис. 6, на начальной стадии процесса имеет место некоторое уменьшение энергии колебаний с $\omega > 1$. Это обусловлено отрицательностью производной $d\mathcal{F}/d\omega$ при $\omega > 1$ (см. рис. 6). Вследствие низкого уровня шумов при $\omega > 1$ очень мала и обусловленная ими диффузия частиц с $\omega > 1$, тогда как в эту область, как и в область $\omega < 1$, они непрерывно инжектируются. В результате при $\omega > 1$ происходит накопление частиц, что и объясняет появление пика на кривых $\mathcal{F}(\omega)$ (см. рис. 5) при $\omega > 1$. Образовавшийся таким образом пик имеет положительную производную $d\mathcal{F}/d\omega$ в некотором интервале $\omega > 1$ и поэтому неустойчив. Вследствие развития неустойчивости и обратного влияния нарастающих шумов с $\omega > 1$ пик начинает «обтаивать» со стороны положительной производной $d\mathcal{F}/d\omega$, «продвигая» спектр колебаний в область $\omega > 1$, а затем пик уменьшается до уровня, характерного для области $\omega < 1$, и поэтому не играет роли на последующих стадиях релаксационного процесса.

Вследствие непостоянства числа быстрых ионов, обусловленного их непрерывной инжекцией, возникает проблема определения характерного значения инкремента нарастания колебаний. В связи с этим на рис. 7 представлена временная зависимость максимальной спектральной плотности энергии колебаний; рис. 7, а более наглядно иллюстрирует начальную стадию, рис. 7, б — общую картину процесса нарастания колебаний. Из рис. 7 видно, что при $\bar{\tau} \leq 5$ нарастание амплитуды колебаний происходит почти экспоненциально с инкрементом примерно равным $(2,6 \bar{\tau})^{-1}$ (в соответствующих единицах). Этот результат можно интерпретировать как своего рода

взаимокомпенсацию между эффектом увеличения инкремента, обусловленным непрерывным увеличением числа инжектируемых частиц, и квазилинейным уменьшением инкремента, связанным с обратным влиянием колебаний на функцию распределения этих частиц.

Однако с течением времени по мере нарастания уровня колебаний квазилинейный эффект оказывается преобладающим, вследствие чего скорость роста шумов замедляется. Согласно рис. 7, б, при $\bar{\tau} > 12$ увеличение плотности энергии колебаний происходит лишь линейно, а не экспоненциально, как это имело место при $\bar{\tau} \leq 5$.

3. Обсуждение результатов. Из изложенного следует, что в процессе квазилинейной релаксации фронт функции распределения, смещаясь влево (см. рис. 5), достигает значения $\omega = 1/2$ за время $t_{1/2} \simeq 4 \cdot 10^2 R/v_{\parallel}^0$. Это характерное время квазилинейной релаксации в типичных термоядерных условиях ($v_{\parallel}^0 = 5 \cdot 10^8$ см/с, $R \simeq 5 \cdot 10^2$ см) составляет $t_{1/2} \simeq 4 \cdot 10^{-4}$ с. В отсутствие неустойчивостей релаксация быстрых ионов, как известно, определяется кулоновскими столкновениями с частицами основной («холодной») компоненты плазмы. При плотности плазмы $n_0 \simeq 5 \cdot 10^{13}$ см⁻³ характерное время кулоновской релаксации иона со скоростью $v_{\parallel}^0 = 5 \cdot 10^8$ см/с порядка $t_{кул} \simeq 0,3$ с. Поэтому из наших расчетов вытекает, что квазилинейная релаксация является процессом, существенно более быстрым, чем кулоновская: $t_{1/2}/t_{кул} \simeq 10^{-3}$.

§ 6.3. Квазилинейная релаксация продольного ионного пучка при учете кулоновских столкновений

В отличие от § 6.2 здесь мы учитываем также релаксацию быстрых ионов, обусловленную кулоновскими столкновениями. Тем самым наш анализ, с одной стороны, включает квазилинейные эффекты, рассмотренные в § 6.2, а с другой — кулоновские эффекты, аналогичные тем, которые для случая поперечной инжекции обсуждались в § 1.3.

Поскольку пучково-альфвеновская неустойчивость является одномерной, то, согласно § 6.2, бесстолкновительная квазилинейная релаксация в задаче с источником в основных чертах выглядит как совокупность двух конкурирующих процессов. Это обычный квазилинейный процесс устранения горба и установления плато на функции распределения быстрых ионов и процесс восстановления этого горба вследствие поступления все новых групп высокоэнергичных частиц из источника. Результатом конкуренции этих процессов является образование довольно медленно изменяющегося «квазиплато», отмечавшегося в § 6.2. Что касается задачи о чисто кулоновской релаксации при наличии источника, то здесь основными процессами являются кулоновская изотропизация частиц в пространстве скоростей и их последующее кулоновское замедле-

ние, а также конкурирующий процесс деизотропизации функции распределения в области больших скоростей, связанный с действием источника. В результате конкуренции этих процессов на функции распределения быстрых ионов может устанавливаться квазистационарное равновесие, вид которого, однако, существенно отличен от вышеупомянутого медленно меняющегося одномерного квазиплато.

Исходные уравнения. Исходим из кинетического уравнения для функции распределения быстрых частиц в следующем виде:

$$\partial F / \partial t = C_1 + C_2 + C_3 + S. \quad (6.7)$$

Здесь C_1 описывает квазилинейную диффузию в пространстве скоростей, C_2 — силу динамического трения при кулоновских столкновениях, C_3 — изотропизацию по скоростям вследствие рассеяния при кулоновских столкновениях, S — интенсивность источника частиц.

Если функция распределения нормирована на концентрацию «теплой» плазмы n_0 и интервал скоростей $\{0, V_0\}$, время измеряется в кулоновских временах (ср. с § 1.3) $\tau_s = M_0 v_c^3 / M_b n_0 \Gamma_b$ [$\Gamma_b = 4\pi e^4 \Lambda / M_b^2$, $v_c = (3 \sqrt{\pi} M_e / 4 M_0)^{1/3} v_{Te}$], а скорость — в значениях скорости инжектированного пучка V_0 , то, согласно гл. 4, 5, § 6.2 для C_1 имеем:

$$C_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[\frac{(v_{\perp}^2 / 2 + v_{\parallel}^2)^2}{v_{\parallel}^2} W(v_{\parallel}) \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} \right]. \quad (6.8)$$

Здесь $\lambda = (3/2) \pi^2 T_0 q \tau_s / M_b R c_A$, M_0 , M_b , M_e — масса фоновых ионов, ионов пучка и электронов; v_{Te} — тепловая скорость электронов; Λ — кулоновский логарифм; T_0 — температура плазмы; $W(v_{\parallel})$ — спектральная плотность энергии шумов, соответствующая резонансному значению v_{\parallel} .

Если $W(v_{\parallel})$ измерять в величинах $6 \pi n_0 T_0 q R$, то аналогично § 6.2 для скорости нарастания шумов имеем

$$\partial \ln W(v_{\parallel}) / \partial t = 2\gamma(v_{\parallel}), \quad (6.9)$$

где

$$\gamma(v_{\parallel}) = \frac{h}{v_{\parallel}} \int_0^{\infty} v_{\perp} \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right)^2 \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} dv_{\perp}, \quad (6.10)$$

$$h = \pi q V_0 \tau_s / 8R.$$

Как отмечалось выше, вклад кулоновских столкновений учитывается членами C_2 и C_3 . Выражения для C_2 и C_3 имеют вид

$$C_2 = \frac{1}{v^3} \left(v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) [(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) F]; \quad (6.11)$$

$$C_3 = \frac{\mu}{v^2} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) \left[\frac{v_{\perp}^2}{v} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) F \right], \quad (6.12)$$

где $\mu = (M_0/2 M_b) (v_c/V_0)^3$.

Что касается интенсивности источника, то ее характеризуем следующим соотношением [ср. с (6.6)]:

$$S \sim \exp \{ -[(v_{\parallel} - V_0)^2 + v_{\perp}^2/\delta^2] \}. \quad (6.13)$$

Полагаем, что полуширина источника по скорости порядка $1/5$.

Отметим, что благодаря упрощениям, принятым при выводе кулоновского столкновительного интеграла, уравнение (6.7) записано в неконсервативной форме по отношению к полному числу быстрых частиц. Иначе говоря, как и в § 1.3, полагается, что вблизи нуля скоростей имеется сток быстрых частиц из фазового пространства. Поэтому результаты решения уравнения (6.7) следует трактовать так: если скорость частиц падает до нуля, то эти частицы перестают принадлежать пучку и превращаются в частицы основной плазмы. При наличии стока частиц в режимах с постоянной инжекцией могут существовать стационарные решения уравнения (6.7). В случае чисто кулоновской релаксации такие решения были приведены в § 1.3.

При вычислениях принимались следующие параметры плазмы и пучка: $n_0 = 5 \cdot 10^{13}$ см⁻³; $T_0 = 10$ кэВ; $R = 500$ см; $q = 2,3$; $c_A = 6,8 \cdot 10^8$ см/с; $V_0 = v_c = 3,9 \cdot 10^8$ см/с; $\tau_s = 1,26$ с. Результаты вычислений представлены на рис. 8—12.

На рис. 8 даны последовательные кривые интеграла от функции распределения по поперечной скорости $\Phi = 2\pi \int_0^{\infty} F v_{\perp} dv_{\perp}$, полученные решением уравнений (6.7), (6.9). Видно, что в начале инжекции ($t \leq 0,3$) квазилинейная релаксация протекает гораздо быстрее кулоновской и на функции распределения устанавливается плато. На рис. 9, а показана диаграмма линий уровня

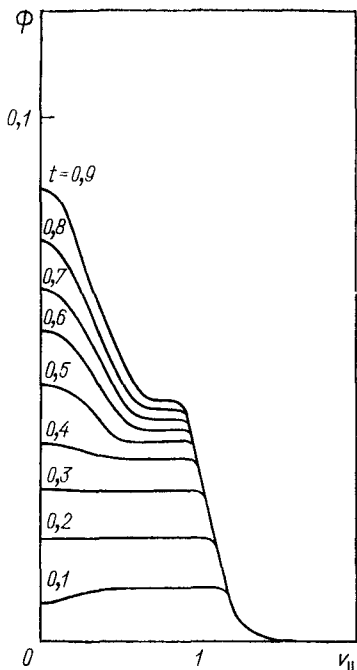


Рис. 8. Эволюция распределения быстрых ионов по продольной скорости при квазилинейной релаксации с учетом кулоновских столкновений

функции распределения в момент $t = 0,3$, которая демонстрирует практически одномерный характер релаксации пучка на начальном этапе инжекции.

Однако уже при $t > 0,3$ становится существенным вклад столкновений дейтонов (инжектируемых ионов) с частицами теплой плазмы. Столкновения приводят прежде всего к изотропизации скорости дейтонов и создают дополнительный приток частиц в область малых продольных скоростей, из-за чего функция распределения здесь начинает заметно отклоняться от формы плато. Спадаю-

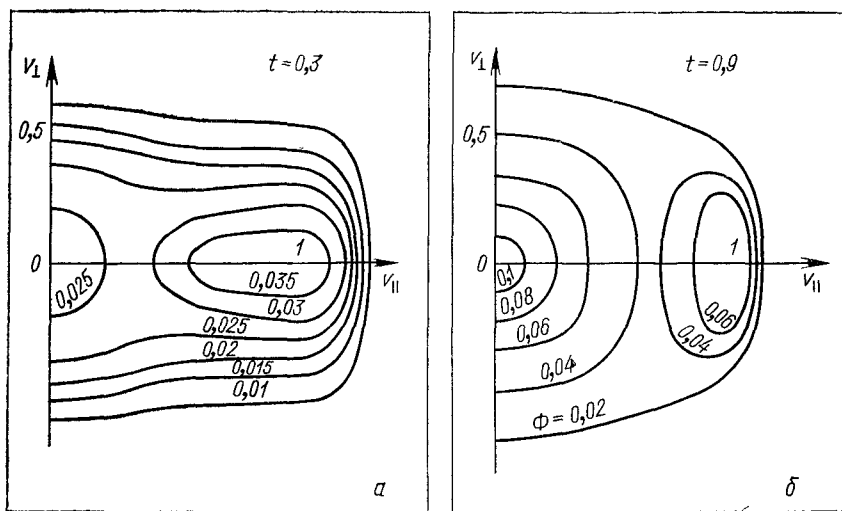


Рис. 9. Линии уровня функции распределения быстрых ионов при квазилинейной релаксации с учетом кулоновских столкновений

щий профиль интеграла Φ создает условия для затухания колебаний, резонансных с дейтонами на малых ω_{\parallel} . Затухание волн снижает скорость квазилинейной релаксации и еще более усиливает роль кулоновских столкновений, так что область с отрицательным инкрементом увеличивается. При $t = 0,9$ квазилинейная релаксация доминирует лишь в узкой области фазового пространства вблизи точки инжекции пучка, где еще удерживается распределение типа плато. Этому моменту соответствует диаграмма линий уровня на рис. 9, б. Видно, что в области скоростей $v \leq 0,5$ при $t = 0,9$ распределение является почти изотропным и анизотропия наблюдается лишь вблизи района инжекции пучка.

С течением времени распределение частиц приближается к такому распределению, которое осуществлялось бы при чисто кулоновской релаксации. Решение для этого случая можно получить, приравнявая квазилинейный член C_1 в уравнении (6.7) нулю.

На рис. 10 изображены последовательные профили Φ для чисто кулоновской релаксации пучка. На начальном этапе инъекции кривые Φ заметно отличаются от соответствующих кривых рис. 8, поскольку кулоновская релаксация протекает гораздо медленнее, чем квазилинейная. Еще сильнее отличается диаграмма линий уровня, представленная на рис. 11, а при $t = 0,3$, от диаграммы на рис. 9, а. Видно, что в случае чисто кулоновской релаксации изотропизация по скоростям происходит раньше, чем торможение пучка.

Однако с течением времени распределение на рис. 10 для чисто кулоновской релаксации и распределение на рис. 8, соответствующее квазилинейной релаксации с учетом кулоновских столкновений по своему характеру сближаются. Особенно это заметно по линиям уровня при $t = 0,9$, которые для случая чисто кулоновской релаксации представлены на рис. 11, б.

Таким образом, видно, что вклад кулоновских столкновений в релаксацию пучка определяется не только скоростью торможения пучка на столкновениях по отношению к квазилинейной релаксации, но и длительностью инъекции τ_I . Если $\tau_I \ll \tau_s$, то, очевидно, кулоновскими столкновениями можно пренебречь. Если $\tau_I \gg \tau_s$, то в конечном итоге устанавливается распределение, соответствующее чисто кулоновской релаксации. Если же $\tau_I \approx \tau_s$, то оба указанные приближения становятся непригодными и необходимо в каждом конкретном случае решать задачу о релаксации пучка, одновременно учитывая и квазилинейные эффекты, и кулоновские столкновения.

Заметим, что часто при вычислении интенсивности ядерного энерговыделения I при взаимодействии пучка с плазмой релаксация считается чисто кулоновской. В действительности же, как следует из сказанного, релаксация пучка становится кулоновской лишь за времена, сравнимые с τ_s . Поскольку в реальных условиях времена инъекции не сильно превышают время кулоновского взаимодействия, то потери быстрых частиц за счет квазилинейных эф-

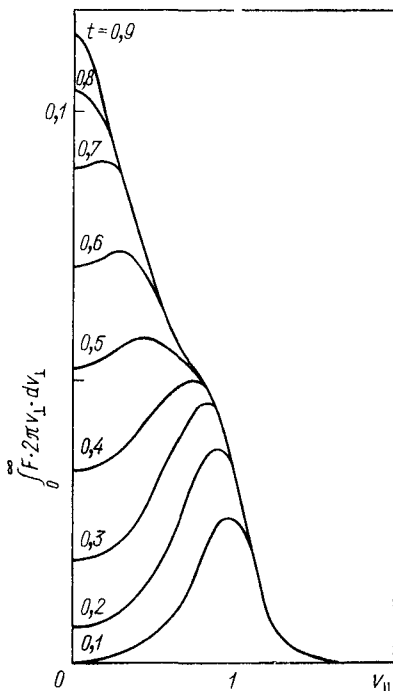


Рис. 10. Эволюция распределения быстрых ионов по продольным скоростям при чисто кулоновской релаксации (без учета квазилинейных эффектов)

фектов могут привести к заметному снижению коэффициента полезного действия токамака. На рис. 12 представлена кривая отношения интенсивности ядерного энерговыделения в реальных условиях I_1 к интенсивности I_2 , соответствующей чисто кулоновской релаксации. Интенсивность вычислялась по формуле

$$I = E_N n_0 \int \sigma_N v F d^3v,$$

где E_N — энергия одного акта ядерной реакции, а σ_N — ее сечение.

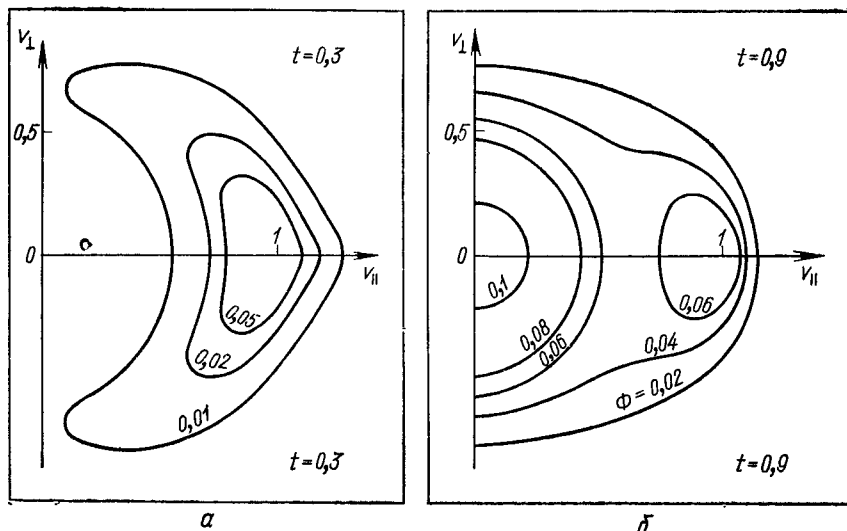


Рис. 11. Линии уровня функции распределения быстрых ионов при чисто кулоновской релаксации (без учета квазилинейных эффектов)

Из рис. 12 видно, что потери быстрых частиц за счет квазилинейных эффектов на начальном этапе инжекции более чем в два раза снижают интенсивность ядерного энерговыделения. И лишь за время порядка τ_s реальная интенсивность I_1 приближается к обычно используемой в расчетах двухкомпонентного токамака.

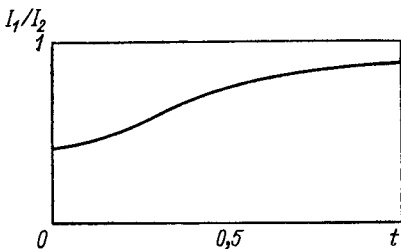


Рис. 12. Отношение интенсивности ядерного энерговыделения в двухкомпонентном токамаке, получающейся при учете квазилинейных эффектов, к интенсивности, соответствующей чисто кулоновской релаксации

Учитывая квазилинейную релаксацию посредством введения в кинетическое уравнение (6.7) слагаемого C_1 , определенного соотношениями (6.8) — (6.10), мы пренебрегли рядом эффектов, ослаб-

ляющих такую релаксацию, в том числе широм магнитного поля и затуханием колебаний на фоновой плазме. Поэтому можно предположить, что при учете этих эффектов добротность двухкомпонентного токамака будет выше, чем предсказываемая данным рассмотрением. Заметим также, что влияние квазилинейной релаксации на добротность двухкомпонентного токамака в пренебрежении кулоновскими столкновениями исследовалось в работе [76].

§ 6.4. Квазилинейная релаксация пролетных α -частиц

1. Введение. Согласно линейной теории, пролетные α -частицы с δ -функциональным распределением по энергиям могут возбуждать в плазме токамака альфвеновские волны с частотами $\omega \approx c_A/qR$ и поперечной длиной волны порядка размера орбит их дрейфового движения в тороидальном магнитном поле, т. е. $k_{\perp}\Lambda \simeq 1$. При этом альфвеновские волны должны приводить к квазилинейной релаксации функции распределения пролетных α -частиц (если возбуждается не одна, а много волн). Описание квазилинейной релаксации пролетных α -частиц существенно упрощается в приближении $q \gg 1$, поскольку при этом условие $k_{\perp}\Lambda \simeq 1$ оказывается совместимым с условием малости ларморовского радиуса α -частиц по сравнению с поперечной длиной волны, $k_{\perp}\rho_{\alpha} \ll 1$. Благодаря этому в случае $q \gg 1$ динамика α -частиц может быть рассмотрена в дрейфовом приближении аналогично динамике продольного ионного пучка, обсуждавшейся в § 6.2. Отличие от § 6.2 состоит в учете поперечных скоростей частиц (как и в § 6.3) и конечности $k_{\perp}\Lambda$. При этом уравнения (6.1) и (6.3) остаются неизменными, а вместо (6.2) и (6.4) имеем соответственно:

$$\gamma_h = \frac{2\pi^2 e^2 c_A^2}{M_{\alpha}\omega k_{\perp}^2 c^2} \left\langle \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s^2(\xi_{\parallel}) \left(\frac{sv_{\parallel}}{qR} \right)^2 \delta \left[\omega - v_{\parallel} \left(k_{\parallel} + \frac{s}{qR} \right) \right] \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \right\rangle; \quad (6.14)$$

$$D = \frac{\pi\omega_{B\alpha}^2}{q^2 R^2 n_0 M_{\alpha}} \sum_s \int \frac{s^2 J_s^2(\xi_{\parallel})}{k_{\perp}^2} W_h \delta \left[\omega - v_{\parallel} \left(k_{\parallel} + \frac{s}{qR} \right) \right] dk. \quad (6.15)$$

Из уравнения (6.14) следует, что при изотропном распределении частиц по скоростям, $F = F(\mathcal{E})$, и немонотонном распределении по энергиям имеет место нарастание возмущений, $\gamma_h > 0$, в чем можно убедиться, подставляя в (6.14) $F \sim \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)$. Развитие неустойчивости приводит в соответствии с (6.1) к нарастанию энергии шумов W_h . Вследствие этого согласно (6.3) должна иметь место квазилинейная релаксация α -частиц по скоростям с диффузионным коэффициентом D , определенным соотношением (6.15).

По порядку величины соотношение (6.15) означает

$$D \simeq (v^2/R^2 M_{\alpha} n_0 \omega) \int W_h dk. \quad (6.16)$$

Полагая, что шумы нарастают до тех пор, пока их энергия не сравняется с плотностью энергии α -частиц, $\int W_h dk \simeq M_{\alpha} N_{\alpha} v^2/2$, при-

ходим к оценке для D :

$$D \simeq N_{\alpha} v^4 / n_0 R^2 \omega. \quad (6.17)$$

Из (6.17) и (6.3) следует оценка для времени релаксации α -частиц:

$$\tau \simeq v^2 / D \simeq n_0 R^2 \omega / N_{\alpha} v^2 \simeq n_0 R c_A / N_{\alpha} q v^2. \quad (6.18)$$

С учетом $c_A/v \ll 1$, $q > 1$ это означает $\tau < n_0 R / N_{\alpha} v$. Учитывая, что в термоядерных условиях $v \simeq 10^9$ см/с, $R \simeq 5 \cdot 10^2$ см, $N_{\alpha}/n_0 \simeq 10^{-2} \div 10^{-3}$, находим $\tau < 5 \cdot 10^{-4}$ с, что существенно меньше времени кулоновской релаксации α -частиц $t_{кул}$ (при $n_0 \simeq 5 \times 10^{13}$ см $^{-3}$ $t_{кул} \simeq 1$ с).

§ 6.5. Другие результаты квазилинейной теории альфвеновских неустойчивостей

В § 6.2 мы, следуя [73], изложили картину квазилинейной релаксации продольного ионного пучка в пренебрежении кулоновскими столкновениями. Это касалось токамака круглого сечения. Аналогичный анализ проводился также для токамака некруглого сечения. Необходимые для этого квазилинейные уравнения были получены в работе В. М. Бардакова и автора [62], а численные расчеты были сделаны в работе В. М. Бардакова, автора, Е. С. Цапелкина и О. К. Черемных [77].

Началось также исследование квазилинейных эффектов, связанных с альфвеновскими неустойчивостями на α -частицах. Этому была посвящена работа Сигмара и Чана [78], рассмотревших квазилинейную стадию неустойчивости, линейная теория которой была развита в работе Т. Д. Каладзе и автора [55] (см. § 5.5).

Продолжалось также начатое работой В. С. Беликова и др. [46] исследование нелинейных эффектов в циклотронных термоядерных альфвеновских неустойчивостях, что было темой работ [79, 80].

ГЛАВА 7

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ С МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНОЙ

§ 7.1. Введение

В отличие от гл. 6 здесь предполагаем, что быстрые ионы взаимодействуют только с одной монохроматической альфвеновской волной (а не с набором волн). Рассмотрим нелинейную эволюцию функции распределения пучка и амплитуды волны. Как и в § 6.2, считаем быстрые частицы движущимися вдоль магнитного поля. Ширум магнитного поля, как и в гл. 6, пренебрегаем.

В § 7.2, следуя работе автора, А. И. Пятака и А. М. Фридмана [81], предполагаем, что источник быстрых частиц отсутствует. Покажем, что в этом случае задача об альфвеновской волне в токамаке сводится к хорошо известной задаче о нелинейном взаимодействии резонансных электронов с монохроматической ленгмюровской волной [82—84]. Для токамака с инжекцией быстрых нейтральных частиц, а также для токамака с α -частицами более характерной является ситуация, когда имеется источник быстрых частиц, вследствие чего число резонансных частиц, взаимодействующих с монохроматической волной, непостоянно. Нелинейная эволюция монохроматической волны при наличии источника частиц первоначально обсуждалась в работе автора и А. И. Пятака [85]. В целях получения общих результатов указанный процесс рассматривался в [85] вначале на стандартном примере ленгмюровской волны, а затем эти результаты распространялись на случай альфвеновской волны в токамаке с инжекцией. Излагая здесь содержание работы [85], мы рассмотрим в § 7.3 задачу о ленгмюровской волне, а в § 7.4 — об альфвеновской. Отметим также, что тогда как нелинейная теория взаимодействия монохроматической волны с резонансными частицами в отсутствие источника предсказывает исчезновение со временем затухания Ландау из-за «перемешивания» этих частиц в фазовом пространстве, при наличии источника частиц выявляется отличное от нуля нелинейное затухание Ландау.

§ 7.2. Продольный ионный пучок с постоянным числом частиц

Начнем с того, что обратимся к дрейфовым уравнениям движения частиц, записанным в тороидальной системе координат a, θ, φ . Учтем в них, что поперечное по отношению к магнитным силовым линиям движение частиц несущественно, поскольку альфвеновское возмущение предполагается длинноволновым, а резонансное условие линейного приближения $\omega = v_{\parallel}/qR$ не зависит от поперечных скоростей [1,25]. При этом получаем [см. также ниже (7.47)]

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{v_{\parallel} c E_1}{B_s R} \sin \theta, \quad d\theta/dt = v_{\parallel}/qR. \quad (7.1)$$

Здесь используются такие же обозначения, как и в гл. 6. Поскольку нас интересует узкий интервал продольных скоростей вблизи указанного выше резонансного значения, то перейдем в (7.1) от переменной v_{\parallel} к переменной $u \equiv v_{\parallel}/qR - \omega$. Тогда уравнения (7.1) примут вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{E_{10} \omega c}{2B_s R} \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = u, \quad (7.2)$$

где $\vartheta \equiv \theta - \omega t - \pi$, E_{10} — амплитуда поля [предполагается $E_1 = \exp(-i\omega t) E_{10}$].

Исключая из (7.2) величину u , приходим к уравнению

$$d^2\theta/dt^2 + (1/\tau_0^2) \sin \theta = 0, \quad (7.3)$$

где $\tau_0^2 = 2 B_s R / E_{10} \omega c$. Уравнение (7.3) формально совпадает с уравнением движения резонансных электронов в поле монохроматической ленгмюровской волны [82—84] и обычно называется уравнением маятника конечной амплитуды. Используя эту аналогию и производя выкладки, аналогичные [82—84] (эти выкладки приведены в [81]), получаем следующее выражение для нелинейного инкремента альфвеновской волны:

$$\begin{aligned} \gamma_{NL}(t) = \gamma_L \frac{64}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 d\kappa \left\{ \frac{2\pi^2 n \sin[\pi n t / \tau_0 \kappa K(\kappa)]}{\kappa^5 K^2(\kappa)(1+g^{2n})(1+g^{-2n})} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2 (2n+1) \sin[(2n+1)\pi t / 2\tau_0 K(\kappa)]}{K^2(\kappa)(1+g^{2n+1})(1+g^{-2n-1})} \right\}. \quad (7.4) \end{aligned}$$

Здесь γ_L — линейный инкремент, определяемый формулой (6.2); $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; $g = \exp(\pi K'/K)$; $K' = K(\sqrt{1-\kappa^2})$.

Из (7.4) видно, что, как и в случае ленгмюровской волны, инкремент альфвеновской монохроматической волны, осциллируя во времени, падает до нуля при $t \rightarrow \infty$. Амплитуда этой волны, претерпевающая затухающие осцилляции, на конечной стадии развития неустойчивости стремится к постоянному значению.

Значение, начиная с которого амплитуда, выйдя из стадии экспоненциального роста, испытывает нелинейные осцилляции, можно оценить следующим образом. Изменение кинетической энергии частиц $\Delta \mathcal{E}'$ в резонансной области с шириной $\Delta v_{\parallel} = 4qR/\tau_0$ равно энергии волны $W = (c/c_A)^2 |E_{10}|^2 / 8\pi$. Пользуясь этим обстоятельством, а также разложением функции распределения ионов в резонансной области, аналогично [84] находим предельное для неустойчивости значение амплитуды альфвеновской волны:

$$E_{10} = 32 \left(\frac{16}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\gamma_L}{\omega} \right)^2 \frac{v_{\parallel} B_s}{cq}. \quad (7.5)$$

При этом частицы должны дрейфовать поперек магнитного поля со скоростью $V_E = cE_{10}/B_0$, такой, что

$$V_E/v_{\parallel} \approx (72/q)(\gamma_L/\omega)^2. \quad (7.6)$$

Итак, выше показано, что задача о нелинейном возбуждении монохроматической альфвеновской волны в токамаке с неизменным числом быстрых частиц в математическом отношении сводится к аналогичной задаче о ленгмюровской волне. Это открывает возможность использования развитой ранее теории нелинейных ленгмюровских волн для изучения динамики быстрых ионов в токамаке. Однако должна учитываться специфика замагниченной плазмы, и прежде всего возникновение интенсивного движения частиц попе-

рек магнитного поля со скоростью, определенной соотношением (7.6).

Заметим также, что, согласно вышеизложенному, при возбуждении пучком одной волны имеет место релаксация лишь небольшой доли частиц, $\Delta v_{\parallel}/v_{\parallel} \simeq (\gamma_L/\omega)^{1/2} \simeq (N/n_0)^{1/2}$, тогда как при возбуждении многих волн, т. е. в квазилинейном приближении, процесс релаксации захватывает весь пучок: $\Delta v_{\parallel} \simeq v_{\parallel}$. На пределах же применимости предположения о малой плотности пучка, т. е. при $N \simeq n_0$, приближение одной волны и квазилинейное приближение приводят к качественно одним и тем же результатам.

Приведенные выше результаты обобщены на токамаки с некруглым сечением в работе В. М. Бардакова и автора [62].

§ 7.3. Нелинейная эволюция ленгмюровской монохроматической волны при наличии источника резонансных частиц

1. Каноническая форма кинетического уравнения с источником. Исходим из кинетического уравнения для функции распределения электронов, взаимодействующих с ленгмюровской монохроматической волной:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{M} E(x, t) \frac{\partial f}{\partial v} = S(v, t). \quad (7.7)$$

Здесь $E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$; $S(v, t)$ — интенсивность пространственно-однородного источника частиц, остальные обозначения стандартные. При $S = 0$ уравнение (7.7) совпадает с исследованным в работах [82—84].

Введем вместо t, x, v, f, S безразмерные величины: $\tau = \omega t$; $u = v/v_{\Phi} - 1$; $\vartheta = kx - \omega t$; $\mathcal{F} = fv_{\Phi}/n_0$; $J(u, \tau) = S(v, t)(n_0 k)^{-1}$, где $v_{\Phi} \equiv \omega/k$ — фазовая скорость волны, а n_0 — плотность основной компоненты плазмы (нерезонансных частиц). При этом уравнение (7.7) запишется в канонической форме:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} + u \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \vartheta}{\tau_0^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = J(u, \tau). \quad (7.8)$$

Здесь $\tau_0^2 = \omega^2 \tau_b^2$, а $\tau_b^2 = m/ekE_0$ — квадрат периода колебаний частиц, захваченных полем волны, т. е. баунс-периода (bounce).

2. Решение кинетического уравнения. Функцию распределения при наличии источника можно найти, решая кинетическое уравнение (7.8) методом интегрирования по траекториям частиц в поле волны. Полагаем, что в момент включения источника, т. е. при $\tau = 0$, резонансные частицы отсутствовали, тогда при $\tau > 0$

$$\mathcal{F}(\tau, \vartheta, u) = \int_0^{\tau} J[\tau', u(\tau')] d\tau'. \quad (7.9)$$

Поскольку мы интересуемся скоростями, близкими к фазовой скорости волны, то подинтегральная функция в резонансной области приближенно равна

$$J(\tau, u) = J(\tau, 0) + u (\partial J / \partial u)_{u=0}. \quad (7.10)$$

Учитывая, что, согласно уравнениям движения, $u = d\vartheta/d\tau$ и полагая временную зависимость слабой по сравнению с временной зависимостью координаты ϑ , из (7.9) получаем

$$\mathcal{F} = \int_0^\tau J(\tau', 0) d\tau' + (\vartheta - \vartheta_0) \frac{\partial J(\tau)}{\partial u_0} - \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial u_0} \frac{\partial J}{\partial \tau'} (\vartheta - \vartheta_0) d\tau', \quad (7.11)$$

где ϑ_0 — координата частицы, находящейся в момент τ в точке ϑ , которую она имела в момент $\tau = 0$; $\partial J(\tau)/\partial u_0 = (\partial J/\partial u)_{u=u_0}$.

Связь между ϑ_0 и текущим значением координаты ϑ можно найти из уравнений движения, являющихся характеристиками уравнения (7.8). Поскольку частота захвата τ_b^{-1} предполагается большой по сравнению с декрементом Ландау γ_L , то на фоне быстрого процесса осцилляции частиц в поле волны медленным изменением амплитуды при интегрировании уравнений движения пренебрегаем. Тогда из (7.8) следует

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{2\sigma}{\kappa\tau_0} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (7.12)$$

где $\kappa^2 = 4/C\tau_0^2$; C — безразмерная энергия электрона (в единицах $Mv_\phi^2/2$); $\sigma = \pm 1$ определяет направление движения частицы относительно волны.

В случае пролетных (untrapped) частиц ($\kappa < 1$) из (7.12) получается

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{2}{\kappa\tau_0} \int_0^\tau d\tau' \operatorname{dn} F \left[\kappa, \frac{\vartheta(\tau')}{2} \right], \quad (7.13)$$

где $\operatorname{dn} F[\kappa, \vartheta(\tau')/2]$ — эллиптическая функция Якоби, аргументом которой является эллиптический интеграл первого рода $F[\kappa, \vartheta(\tau')/2]$. Учитывая, что согласно (7.12)

$$F(\kappa, \vartheta/2) = F(\kappa, \vartheta_0/2) + \tau/\kappa\tau_0, \quad (7.14)$$

и используя разложение функции $\operatorname{dn} F$ в тригонометрический ряд (7.14), вычисляем интеграл по τ' в (7.13):

$$\begin{aligned} \vartheta - \vartheta_0 = \frac{\pi\tau}{\kappa\tau_0 K(\kappa)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} Q^n}{1 + Q^{2n}} \left\{ \sin \left[F \left(\kappa, \frac{\vartheta_0}{2} \right) + \frac{\tau}{\kappa\tau_0} \right] - \right. \\ \left. - \sin \frac{n\pi}{K} F \left(\kappa, \frac{\vartheta_0}{2} \right) \right\}, \quad (7.15) \end{aligned}$$

где $Q(\kappa) = \exp(-\pi K'/K)$; $K' = K(\sqrt{1-\kappa^2})$; $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

С помощью (7.14) выражаем в правой части (7.15) ϑ_0 через ϑ и подставляем результат во второй член правой части (7.11). В третьем же члене правой части (7.11) предварительно интегрируем по траектории, а затем выражаем ϑ_0 через ϑ . После проведения указанных действий получаем выражение для функции распределения пролетных частиц в переменных τ, ϑ, κ :

$$\mathcal{F}_{\text{unt}}(\kappa, \vartheta, \tau) = A_{\text{unt}}(\kappa, \tau) + B_{\text{unt}}(\kappa, \vartheta, \tau) + C_{\text{unt}}(\kappa, \vartheta, \tau), \quad (7.16)$$

где

$$A_{\text{unt}}(\kappa, \tau) = \left(1 + \frac{\pi}{\kappa\tau_0 K} \frac{\partial}{\partial u_0}\right) \int_0^\tau J(\tau', 0) d\tau'; \quad (7.17)$$

$$B_{\text{unt}}(\kappa, \vartheta, \tau) = 8 \frac{\partial J(\tau)}{\partial u_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} Q^n}{1+Q^{2n}} \sin \frac{\pi n \tau}{2\kappa\tau_0 K} \cos \frac{\pi n}{K} \left(F - \frac{\tau}{2\kappa\tau_0}\right); \quad (7.18)$$

$$C_{\text{unt}}(\kappa, \vartheta, \tau) = 4 \left[\frac{\partial J(\tau)}{\partial u_0} - \frac{\partial J(0)}{\partial u_0} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} Q^n}{1+Q^{2n}} \sin \frac{\pi n}{K} \left(F - \frac{\tau}{\kappa\tau_0}\right) - \frac{8}{\pi} \frac{\partial}{\partial u_0} \frac{\partial J}{\partial \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2} Q^n \kappa \tau_0}{1+Q^{2n}} \sin \frac{\pi n \tau}{2\kappa\tau_0 K} \sin \frac{\pi n}{K} \left(F - \frac{\tau}{2\kappa\tau_0}\right). \quad (7.19)$$

Аналогичным способом находим выражение для функции распределения запертых (trapped) частиц \mathcal{F}_t . При этом вместо (7.13), (7.14) имеем

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{2\sigma}{\kappa\tau_0} \int_0^\tau d\tau' \operatorname{cn} F \left\{ \frac{1}{\kappa}, \varphi[\vartheta(\tau')] \right\}, \quad (7.20)$$

$$F \left(\frac{1}{\kappa}, \varphi \right) = F \left(\frac{1}{\kappa}, \varphi_0 \right) + \frac{\sigma\tau}{\tau_0}, \quad (7.21)$$

так что аналогично (7.15)

$$\vartheta - \vartheta_0 = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{-1} Q^{n-1/2} (1/\kappa)}{1+Q^{2n-1} (1/\kappa)} \left\{ \sin \frac{(2n-1)\pi}{2K(1/\kappa)} \times \right. \\ \left. \times [F(1/\kappa, \varphi_0) + \sigma\tau/\tau_0] - \sin \frac{(2n-1)\pi F(1/\kappa, \varphi_0)}{2K(1/\kappa)} \right\}. \quad (7.22)$$

Здесь $\varphi(\vartheta) = \operatorname{arcsin}(\kappa \sin \vartheta/2)$; $\varphi_0 = \varphi(\vartheta_0)$. Используя (7.20) — (7.22), аналогично (7.16) получаем

$$\mathcal{F}_t(\kappa, \vartheta, \tau) = A_t(\tau) + B_t(\kappa, \vartheta, \tau) + C_t(\kappa, \vartheta, \tau), \quad (7.23)$$

где

$$A_t(\tau) = \int_0^{\tau} J(\tau', 0) d\tau'; \quad (7.24)$$

$$B_t(\kappa, \vartheta, \tau) = 16 \frac{\partial J(\tau)}{\partial u_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{-1} Q^{n-1/2}}{1+Q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi\sigma\tau}{4K\tau_0} \times \\ \times \cos \frac{(2n-1)\pi}{2K} [F(1/\kappa, \varphi) - \sigma\tau/2\tau_0]; \quad (7.25)$$

$$C_t(\kappa, \vartheta, \tau) = 8 \left(\frac{\partial J}{\partial u_0} - \frac{\partial J(0)}{\partial u_0} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{-1} Q^{n-1/2}}{1+Q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2K} \times \\ \times \left[F(1/\kappa, \varphi) - \frac{\sigma\tau}{\tau_0} \right] - \frac{32}{\pi} \frac{\partial}{\partial u_0} \frac{J}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K\tau_0 \sigma}{(2n-1)^2} \frac{Q^{n-1/2}}{1+Q^{2n-1}} \times \\ \times \sin \frac{(2n-1)\pi\sigma\tau}{4K\tau_0} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2K} \left[F\left(\frac{1}{\kappa}, \varphi\right) - \frac{\sigma\tau}{2\tau_0} \right]. \quad (7.26)$$

Заметим, что в формулах (7.25), (7.26), как и в (7.22), функции K и Q зависят от аргумента $1/\kappa$.

3. Нелинейная эволюция волны. При исследовании нелинейной эволюции монохроматической волны исходим из уравнения баланса энергии

$$\partial W / \partial t = -\mathbf{j}\bar{\mathbf{E}}, \quad (7.27)$$

где W — энергия колебания, определяемая соотношением

$$W = \frac{1}{\omega} \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta})}{\partial \omega} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi}, \quad (7.28)$$

а \mathbf{j} — плотность электрического тока резонансных частиц, равная

$$j = -e \int_{-\infty}^{\infty} f v dv = -e v_{\varphi} n_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F} du. \quad (7.29)$$

В интересующем нас случае ленгмюровских колебаний

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (1 - \omega_{pe}^2/\omega^2) \delta_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon \delta_{\alpha\beta};$$

$$W = \frac{\omega E^2}{16\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}; \quad \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = 2.$$

В линейном приближении из (7.27) — (7.29) с учетом линеаризованного кинетического уравнения (7.8) получается

$$\partial \ln E / \partial t = \gamma_L, \quad (7.30)$$

где γ_L — линейный инкремент, определяемый соотношением

$$\gamma_L = \pi \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)^{-1} \int_0^{\tau} \frac{\partial J(\tau')}{\partial u_0} d\tau'. \quad (7.31)$$

Для справедливости линейного приближения необходимо считать $\gamma_L \tau_b \gg 1$ [84]. Если же $\gamma_L \tau_b \ll 1$, то вместо (7.30) имеем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\tau_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \mathcal{F}_{\text{unt}} + \int_{-\vartheta_m}^{\vartheta_m} d\vartheta \sin \vartheta \mathcal{F}_t \right]. \quad (7.32)$$

где $\vartheta_m = 2 \arcsin(1/\kappa)$, а функции \mathcal{F}_{unt} и \mathcal{F}_t определяются соотношениями (7.16), (7.23).

В выражение (7.32) мы должны подставить величины, стоящие в правых частях равенств (7.16), (7.23); они определены формулами (7.17) — (7.19) и (7.24) — (7.26). При интегрировании в (7.32) удобно перейти от переменных ϑ, u к переменным F, κ , воспользовавшись определениями эллиптических функций и уравнением (7.12). При этом

$$dud\vartheta = -\frac{4\sigma}{\kappa\tau_0} dF d\kappa, \quad (7.33)$$

$$\sin \vartheta = 2 \operatorname{sn} F(\kappa, \vartheta/2) \operatorname{cn} F(\kappa, \vartheta/2). \quad (7.34)$$

Из уравнения (7.32), записанного в новых переменных, и выражений (7.17) — (7.19) и (7.24) — (7.26) следует, что интегралы с A_{unt} и A_t равны нулю, а интегралы с C_{unt} и C_t содержат лишь члены, осциллирующие по времени с периодом порядка τ_0 , т. е. $\sin(\pi n \tau / 2 K \tau_0)$, $\cos(\pi n \tau / \kappa K \tau_0)$. Эти члены описывают затухающие во времени отклонения амплитуды электрического поля E_0 от его среднего значения \bar{E}_0 .

Задача о монохроматической волне в отсутствие источника частиц [82—84] сводится к учету лишь такого рода осциллирующих членов; при этом $\partial \bar{E}_0 / \partial t = 0$. При наличии же источника частиц, как следует из (7.32), наряду с затухающими осцилляциями поля, несущественными при $\tau \gg \tau_0$, обнаруживается также эволюция среднего значения поля \bar{E}_0 , определяемая членами с B_{unt} и B_t [см. (7.18) и (7.25)].

В пренебрежении осцилляциями из уравнения (7.32) следует:

$$\frac{\partial \ln \bar{E}_0}{\partial \tau} = \pi G \tau_b (\bar{E}_0) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\partial J(\tau)}{\partial u_0}. \quad (7.35)$$

Здесь

$$G = 128 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{d\kappa}{\kappa^4 K} \left\{ \frac{Q^{2n}}{(1+Q^{2n})^2} + \kappa^5 \frac{Q^{2n-1}}{(1+Q^{2n-1})^2} \right\}; \quad (7.36)$$

$$K = K(\kappa); \quad Q = Q(\kappa).$$

Заметим, что с учетом (7.31) уравнение (7.35) принимает вид

$$\frac{\partial \ln \bar{E}_0}{\partial \tau} = G \tau_b (\bar{E}_0) \frac{\partial \gamma_L}{\partial t}. \quad (7.37)$$

Отсюда находим, что амплитуда \bar{E}_0 изменяется по закону

$$\bar{E}_0(\tau) = \bar{E}_0(0) \left[1 + \frac{G\gamma_L(\tau)}{2\omega_b(0)} \right]^2, \quad (7.38)$$

так что безразмерный нелинейный инкремент (в единицах частоты колебаний ω) равен

$$\gamma \equiv \frac{\partial \ln \bar{E}_0}{\partial \tau} = 2 \frac{\partial \ln \gamma_L}{\partial \tau} \left[1 + \frac{2\omega_b(0)}{G\gamma_L(\tau)} \right]^{-1}. \quad (7.39)$$

Результаты (7.37), (7.39) допускают следующую интерпретацию. Поскольку резонансные частицы эффективно взаимодействуют с волной лишь в течение времени порядка $1/\tau_b$, полагаем, что эволюция среднего значения \bar{E}_0 в момент времени τ обусловлена взаимодействием волны с частицами, поступившими из источника за время от $\tau - \tau_b$ до τ (по порядку величины). Число таких частиц порядка

$$\Delta n(\tau) \simeq \tau_b(\tau) \frac{dn}{d\tau}. \quad (7.40)$$

Они приводят к нарастанию (затуханию) волны с инкрементом (декрементом) порядка

$$\gamma \simeq \gamma_L \Delta n(\tau)/n(\tau) \simeq \tau_b \partial \gamma_L / \partial \tau. \quad (7.41)$$

Учитывая также, что $\gamma \equiv \partial \ln \bar{E}_0 / \partial \tau$, приходим к уравнению, качественно совпадающему с (7.37).

В случае подкачки частиц с $\partial \mathcal{F} / \partial u_0 < 0$ из (7.38) следует, что должно иметь место систематическое убывание амплитуды волны. При этом декремент затухания (7.39) увеличивается «взрывным» образом. По прошествии времени τ^* , определяемого соотношением $\gamma_L(\tau^*) \simeq \omega_b(0)$, амплитуда волны может уменьшаться до столь малых значений, когда дальнейшее изменение поля будет определяться обычным затуханием Ландау.

Если же инжектируются частицы с $\partial \mathcal{F} / \partial u_0 > 0$, то с течением времени нелинейность волны лишь усиливается (т. е. произведение $\gamma(\tau) \tau_b(\tau)$ с течением времени падает). Этот эффект становится существенным при $\tau \gtrsim \tau_1$, где τ_1 определяется приближенным соотношением $\int_0^{\tau_1} \gamma(\tau) d\tau \simeq 1$. С учетом (7.37) это означает

$$\gamma_L(\tau_1) \tau_2(0) \simeq 1. \quad (7.42)$$

При $\tau > \tau_1$ из формулы (7.38) следует, что амплитуда волны нарастает по закону

$$\bar{E}_0(\tau) = \bar{E}_0(0) \left[\frac{G\gamma_L(\tau)}{2\omega_b(0)} \right]^2. \quad (7.43)$$

В частности, при постоянной скорости инжекции частиц $\gamma_L(\tau) \sim \tau$, так что

$$\bar{E}_0(\tau) \sim \tau^2. \quad (7.44)$$

Поскольку вместе с ростом амплитуды поля увеличивается и ширина резонансной области, то в случае источника частиц с малым разбросом по скоростям (малым по сравнению с резонансной скоростью) с течением времени резонансными окажутся все поступившие из источника частицы. Поэтому дальнейшая эволюция поля и распределения частиц должна изучаться в рамках гидродинамического описания. Такой переход к гидродинамической стадии наступает при $\tau \simeq \tau_2$, где τ_2 удовлетворяет приближенному равенству

$$\gamma_L(\tau_2)/\omega \simeq \Delta v/v, \quad (7.45)$$

Δv — ширина распределения частиц по скоростям в источнике. Заметим, что аналогичный критерий перехода к гидродинамическому режиму имеет место и в линейном приближении, когда γ_L играет роль истинного инкремента нарастания.

§ 7.4. Эволюция нелинейной альфвеновской волны в токамаке с непрерывной инжекцией нейтральных частиц

Одним из реальных примеров источника частиц является инжекция в токамак быстрых нейтральных атомов в целях получения плазмы с термоядерными параметрами. Возникающий в результате ионизации пучок быстрых ионов может возбуждать альфвеновские колебания. При этом встает вопрос о релаксации ионного пучка при взаимодействии с альфвеновскими колебаниями и об эволюции таких колебаний. В случае возбуждения широкого спектра колебаний этот вопрос может быть рассмотрен в квазилинейном приближении, что и было сделано в работе [73] (см. также § 6.2). Представляется интересным исследование также возбуждения ионным пучком монохроматической альфвеновской волны, поскольку вследствие дискретности волновых чисел в токамаке одновременное возбуждение нескольких волн может оказаться невозможным. В работе [81] (см. также § 7.2) исследовалась эволюция альфвеновской волны в отсутствие источника. Используя общие результаты § 7.3, рассмотрим практически более важный процесс эволюции такой волны в условиях непрерывной инжекции нейтральных частиц. Как и в § 7.2, сечения магнитных поверхностей токамака считаем круглыми.

При изучении альфвеновской волны исходим из дрейфовых уравнений движения и кинетического уравнения для ионов, инжектируемых вдоль силовых линий магнитного поля токамака из непрерывно действующего источника (ср. с [81] и с § 7.2):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \nabla f + \frac{dv_{\parallel}}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = S(t, v_{\parallel}); \quad (7.46)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_{\parallel} \frac{B_0}{B_0} + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B B_0^2} [\mathbf{B}_0, \nabla B_0]; \quad (7.47)$$

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = c \frac{v_{\parallel} \mathbf{E}}{B_0^2} [\mathbf{B}_0, \nabla B_0]. \quad (7.47')$$

Введем вместо t , θ , v_{\parallel} , f безразмерные величины:

$$\tau = t/t_*; \quad u = (v_{\parallel} - v_{\parallel\phi})/V_0;$$

$$\vartheta = \theta - \omega\tau + \pi;$$

$$\mathcal{F} = fV_0/n_0; \quad J = SV_0t_*/n_0,$$

где $t_* \equiv qR/V_0 = 1/\omega$, V_0 — средняя скорость инжектируемых ионов, $v_{\parallel\phi}$ — фазовая скорость волны. Тогда кинетическое уравнение (7.46) примет форму уравнения (7.8). Роль τ_0^2 теперь будет играть величина $\tau_0^2 = \tau_b^2/t_*^2$, где $\tau_b^2 = 2 B_s q R^2 / c V_0 E_{10} (\tau)$ (ср. с § 7.2).

При исследовании эволюции амплитуды альфвеновской волны исходим из уравнения вида (7.47), которое в данном случае означает

$$\partial W / \partial t = -j^1 \bar{E}_1, \quad (7.48)$$

где $W = \varepsilon_{11} E_{10}^2 / 8\pi$, $\varepsilon_{11} = c^2 / c_A^2$, j^1 — контравариантная компонента плотности тока, связанная с функцией распределения соотношением

$$j^1 = \frac{e \sin \vartheta}{\omega B t R} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\parallel}^2 f dv_{\parallel} = \frac{Mc}{B_s R} \sin \vartheta V_0^2 n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du. \quad (7.49)$$

Вычисляя j^1 , подставляя результат в (7.48) и используя стандартные выражения для \mathcal{F}_{unt} и \mathcal{F}_t [см. (7.16), (7.23)], сводим уравнение (7.48) к виду (7.34), где в качестве \bar{E}_0 следует понимать \bar{E}_{10} , а в качестве линейного инкремента $\gamma_L(\tau)$ — следующее выражение, аналогичное (7.31):

$$\gamma_L(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi q c}{B_s} \right)^2 \frac{n_0 \omega}{\varepsilon_{11}} \int_0^{\tau} \frac{\partial J(\tau')}{\partial u_0} d\tau'. \quad (7.50)$$

Вместе с тем для случая альфвеновской волны остаются в силе и выражения для поля и нелинейного инкремента, определяемые соотношениями (7.38), (7.39). Таким образом, все записанные в канонической форме результаты о ленгмюровской волне остаются неизменными и в случае альфвеновской волны.

Пользуясь указанным обстоятельством и учитывая проведенный выше анализ соотношений (7.37) — (7.39), можно заключить, что при наличии источника быстрых ионов нелинейная эволюция альфвеновской волны в токамаке может выглядеть как последовательность следующих трех стадий.

1. Стадия почти постоянной амплитуды поля. Это соответствует интервалу времени $0 < \tau < \tau_1$. Используя (7.42) и (7.50), находим, что в случае альфвеновской волны и постоянной скорости инжекции ($J = \text{const}$)

$$\tau = (\partial J / \partial u_0)^{-1} [V_E(0) / V_0 q^3]^{1/2}, \quad (7.51)$$

где $V_E(0) = c\bar{E}_{10}(0)/B_s$ — скорость электрического дрейфа при $\tau = 0$.

2. Стадия нарастания поля в кинетическом режиме. Она соответствует интервалу времени $\tau_1 < \tau < \tau_2$. В отмеченном выше случае постоянной скорости инжекции

$$\tau_2 \simeq \frac{\Delta V}{V_0 q^2} \left(\frac{\partial J}{\partial u_0} \right)^{-1}. \quad (7.52)$$

В частности, при распределении вида $J = \bar{a} \exp[-(v-1)^2/b^2]$ ($v = v_{||}/V_0$), рассмотренном в § 6.2, $\tau_2 \simeq b^2/\bar{a}$.

Поскольку $\gamma_L(\tau)/\omega = \tau \bar{a}/b$, то $\gamma_L(\tau_2)t_2 \simeq b^3/\bar{a}$, где $t_2 \equiv \tau_2/\omega$ — размерное (обычное) время окончания второй стадии. Видно, что в случае мощного источника с $\bar{a} = 10^{-3}$ и $b = 10^{-1}$, рассмотренном в § 6.2, $\gamma_L(\tau_2)t_2 \simeq 1$, так что взаимодействие столь мощных источников ($\bar{a} \gtrsim b^3$) с монохроматической волной частиц следует изучать в рамках гидродинамики (см. ниже). Кинетическая же эволюция монохроматической волны большой амплитуды должна исследоваться при более слабых источниках, $\bar{a} < b^3$, с практической точки зрения представляющих наибольший интерес. Заметим также, что $\bar{E}_{10}(\tau_2) \simeq B_0 b^2 V_0/c$. В таком поле скорость электрического дрейфа $V_E(\tau_2) \simeq V_0 b^2$, так что ион за период колебания сдрейфовывает по малому радиусу тора на расстояние порядка $\Delta a \simeq R b^2$.

3. Стадия гидродинамической эволюции, наступающая при $\tau > \tau_2$. Для исследования этой стадии эволюции монохроматической альфвеновской волны должна быть развита нелинейная теория гидродинамической альфвеновской неустойчивости, в линейном приближении обсуждавшейся в работе [25] (см. также [1]).

Итак, согласно сказанному, наличие источника резонансных частиц существенно влияет на нелинейную эволюцию монохроматической волны. Основной эффект, обнаруживаемый при наличии источника, состоит в систематическом изменении амплитуды волны, что качественно отлично от эффекта затухающих осцилляций амплитуды в отсутствие источника.

Заключение

Итак, за последние годы сформировался новый раздел теории плазмы — теория коллективных процессов в токамаке с группой быстрых ионов. Этот раздел располагается на стыке между теорией обычных пучковых неустойчивостей, теорией дрейфовых (градиентных) неустойчивостей плазмы в магнитном поле, теорией гидромагнитных неустойчивостей в тороидальном магнитном поле, теорией неустойчивостей запертых частиц и некоторыми другими разделами теории плазмы.

Видно также, что для практического использования этого раздела теории плазмы необходимо дальнейшее исследование как ли-

нейных, так и нелинейных эффектов. Изложенное выше следует рассматривать прежде всего как фундамент для такого рода исследований. Вместе с тем ряд результатов нашего анализа мог бы уже сейчас использоваться для интерпретации экспериментов, если бы такие эксперименты были. Однако современные токамаки еще слишком далеки от термоядерных реакторов-токамаков, на которые ориентировано наше рассмотрение. Поэтому сравнение выводов изложенной выше теории коллективных процессов в токамаке с группой быстрых ионов с экспериментом — также дело будущего.

В заключение автор приносит благодарность В. М. Бардакову, В. С. Беликову, К. О. Бизли, К. Г. Гурееву, Т. Д. Каладзе, Я. И. Колесниченко, В. М. Кулыгину, Д. Г. Ломинадзе, В. А. Мазуру, А. И. Пятаку, А. Л. Френкелю, А. М. Фридману, Е. С. Цапелкину, О. К. Черемных, И. Г. Шухману, В. А. Яворскому, совместно с которыми были получены изложенные выше результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайловский А. Б. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М., Атомиздат. 1978.
2. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. К теории устойчивости ионного пучка, инжектируемого в плазму поперек магнитного поля. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1961.
3. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. Возбуждение продольных колебаний в плазме с неизотропным распределением ионов по скоростям. — «Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 1013.
4. Михайловский А. Б. Дрейфово-циклотронная неустойчивость плазмы с горячими ионами. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 125.
5. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. Изд. 2-е. М., Атомиздат, 1975.
6. Kulygin V. M., Mikhailovskii A. B., Tsapelkin E. S. Quasilinear relaxation of fast ions moving transverse to a magnetic field. — «Plasma Phys.», 1971, v. 13, p. 1111.
7. Кулыгин В. М., Цапелкин Е. С. О квазилинейном ускорении частиц при циклотронной неустойчивости гидродинамического типа. — «Журн. техн. физ.», 1972, т. 42, с. 1366.
8. Cordey J. G., Houghton M. J. Problems associated with the injection of a high-energy neutral beam into a plasma. — «Nucl. Fusion», 1973, v. 13, p. 215.
9. Веденов А. А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963, с. 203.
10. Mai L. P., Horton W. Destabilizing effects from a fast-isotropic ion component. — «Phys. Fluids», 1975, v. 18, p. 356.
11. Krommes J. A., Rosenbluth M. N., Tang W. M. Stability of ripple-assisted neutral beam injection against loss-cone modes. — «Nucl. Fusion», 1977, v. 17, p. 667.
12. Hitchcock D. A., Brecht S. H., Horton W. The neutral beam driven convective loss-cone instability in toroidal geometry. FRCR-134, Anstin, Texas, 1977.
13. Brecht S. H., Hitchcock D. A., Horton W. Parametric dependence of the ion cyclotron instability in a two-energy-component system. — «Phys. Fluids», 1978, v. 21, p. 447.
14. Кораблев Л. В. Устойчивость однородной плазмы с изотропными функциями распределения в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 1600.

15. Microinstability theory of two-energy-component toroidal systems. — «Nucl. Fusion», 1975, v. 15, p. 819. Auth.: H. L. Berk, W. Horton, M. N. Rosenbluth, P. H. Rutherford.
16. Stix T. H. Stability of a toroidal plasma subject to neutral injection. — «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 1922.
17. Catto P. J., Rosenbluth M. N., Liu C. S. Parallel velocity shear instabilities in an inhomogeneous plasma with a sheared magnetic field. — «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 1719.
18. Взаимодействие ионных пучков с плазмой. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 753. Авт.: А. А. Иваинов, С. И. Крашенинников, Т. К. Соболева, П. Н. Юшманов.
19. Ohkawa T., Bhadra D. K. Trapped-ion instability in two-component torus. — «Phys. Lett.», 1974, v. 48A, p. 140.
20. Coppi B., Bhadra D. K. Collective modes in an inhomogeneous beam injected plasma. — «Phys. Fluids», 1975, v. 18, p. 692.
21. Berk H. L. Stabilization of trapped-ion instability in two-component torus. — «Phys. Lett.», 1974, v. 50A, p. 65.
22. Михайловский А. Б. О возбуждении быстрыми ионами коротковолновой моды на запертых электронах. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 74.
23. Мазур В. А., Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Влияние запертых электронов на нечетные дрейфовые моды в токамаке. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 72, с. 956.
24. Two-energy-component toroidal fusion devices. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1975, v. 3, p. 569. Auth.: Berk H. L., Furth H. P., Jassby D. J., Kulsrud R. M., Rosenbluth M. N., Rutherford P. H., Tenney F. H., Johnson T., Killeen J., Mirin A. A., Rensink M. E., Horton C. W.
25. Михайловский А. Б. Гидромагнитная пучковая неустойчивость в токамаке с инжекцией нейтральных атомов. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 72.
26. Rosenbluth M. N., Rutherford P. H. Excitation of Alfvén waves by high-energy ions in a tokamak. — «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 1428.
27. Mikhailovsky A. B. «Drift» instabilities distorting the magnetic surfaces of tokamak-type toroidal systems. — «Nucl. Fusion», 1973, v. 13, p. 259.
28. Mai L. P., Horton W. Stability of the ion cyclotron wave for pulsed parallel injection. — «Phys. Fluids», 1976, v. 19, p. 1242.
29. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1972, с. 70.
30. Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Возбуждение непотенциальных ионных циклотронных волн в плазме группой быстрых ионов. — «Журн. техн. физ.», 1974, т. 44, с. 273.
31. Беляков В. С., Колесниченко Я. И. Термоядерная циклотронно-магнитно-звуковая неустойчивость плазмы. — «Журн. техн. физ.», 1975, т. 45, с. 1798.
32. Каладзе Т. Д., Михайловский А. Б. Циклотронная «термоядерная» неустойчивость в реакторе-токамаке. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 238.
33. Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б. Влияние теплового разброса запертых α -частиц на циклотронную неустойчивость в реакторе-токамаке. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 520.
34. Kaladze T. D., Mikhajlovskij A. B. Bounce-effects on the cyclotron instability caused by trapped alpha particles in tokamak reactors. — «Nucl. Fusion», 1977, v. 17, p. 729.
35. Численный анализ магнитозвуковой неустойчивости запертых α -частиц в реакторе-токамаке. Препринт ИАЭ-2692. М., 1976. Авт.: Т. Д. Каладзе, Д. Г. Ломинадзе, А. Б. Михайловский, А. Р. Хволес, Л. В. Цамалашвили.
36. Cyclotron instability of trapped α -particles in a tokamak with elliptic cross-section. — «Nucl. Fusion», 1976, v. 16, p. 465. Auth.: T. D. Kaladze, J. G. Lominadze, A. B. Mikhajlovskij, O. A. Pokhotelov.

37. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
38. Фок В. А. Таблицы функций Эйри. М., Изд-во АН СССР, 1946.
39. Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н. О неустойчивости неоднородной плазмы, вызываемой продуктами термоядерных реакций. — «Атомная энергия», 1967, т. 23, с. 289.
40. Post R. F., Rosenbluth M. N. Electrostatic instabilities in finite mirror-confined plasmas. — «Phys. Fluids.», 1966, v. 9, p. 730.
41. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н. Устойчивость магнитоактивной плазмы с моноэнергетической компонентой. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 2210.
42. Кораблев Л. В., Рудаков Л. И. О неустойчивости плазмы с изотропной функцией распределения. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 54, с. 818.
43. Kaladze T. D., Lominadze D. G., Stepanov K. N. Excitation of electromagnetic waves in plasma by fusion products. — In.: Proc. Sixth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Moscow (USSR) 1973, v. 1, p. 646.
44. Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Электромагнитные неустойчивости плазмы, содержащей группу быстрых моноэнергетических ионов. — В кн.: Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Вып. 1 (5). ХФТИ 76-48, Харьков, 1976.
45. Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Возбуждение альфвеновских волн быстрыми ионами в плазме конечного давления. — «Журн. техн. физ.», 1973, т. 43, с. 2517.
46. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н. Нелинейная теория термоядерной альфвеновской неустойчивости плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 66, с. 1687.
47. Колесниченко Я. И. К вопросу об устойчивости однородной магнитоактивной плазмы с изотропной моноэнергетической компонентой. — «Укр. физ. журн.», 1969, т. 14, с. 1070.
48. Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н. Влияние реакций синтеза на работу термоядерных установок. — In: Plasma Physics and Controlled Fusion Research (Proc. 4th Intern. Conf., Madison, 1971). Vienna, IAEA, 1971, v. 3, p. 411.
49. Kaladze T. D., Lominadze J. G., Mikhailovskij A. B. Thermonuclear instabilities in a tokamak. — In: Second International Congress on Waves and Instabilities in Plasmas. 17—21 March, 1975, Austria, Survey Lectures. Eds. G. Auer, F. Cap., 1975, p. L1.
50. Михайловский А. Б. О дрейфовых термоядерных неустойчивостях. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 68, с. 1772.
51. Термоядерные неустойчивости в реакторе-токамаке. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 263. Авт.: В. С. Беликов, Я. И. Колесниченко, А. Б. Михайловский, В. А. Яворский.
52. Михайловский А. Б., Ломинадзе Д. Г., Каладзе Т. Д. Квазилинейная релаксация запертых α -частиц в реакторе-токамаке при циклотронной магнитозвуковой неустойчивости. Препринт ИАЭ-2981. М., 1978.
53. Бизли К. О., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б. Неустойчивость альфвеновских волн в двухкомпонентном токамаке. Препринт ИАЭ-2615. М., 1976.
54. Бизли К. О., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б. Возбуждение коротковолновых альфвеновских колебаний высокоэнергичными ионами в токамаке. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 170.
55. Kaladze T. D., Mikhailovskij A. B. Excitation of Alfvén waves by trapped alpha particles in a tokamak reactor. — «Nucl. Fusion», 1977, v. 17, p. 411.
56. Михайловский А. Б., Френкель А. Л. К теории «дрейфовых» термоядерных неустойчивостей реактора-токамака. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1219.

57. Mazur V. A., Mikhajlovskij A. B. Stabilization of the Alfvén wave instability in a two-component tokamak. — «Nucl. Fusion», 1977, v. 17, p. 193.
58. Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Квазинечетные альфвеновские моды в токамаке и их взаимодействие с запертыми электронами. Препринт ИАЭ-2707. М., 1976.
59. Михайловский А. Б., Морозов А. Г. Коротковолновые непотенциальные неустойчивости в токамаке при большом давлении плазмы. Препринт ИАЭ-2686. М., 1976.
60. Мазур В. А., Михайловский А. Б. Стабилизация альфвеновской неустойчивости в двухкомпонентном токамаке некруглого сечения. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1216.
61. Мазур В. А., Михайловский А. Б. Возбуждение альфвеновских волн быстрыми ионами в токамаке с некруглым сечением. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 172.
62. Бардаков В. М., Михайловский А. Б. Коллективные процессы при инжекции быстрых нейтральных атомов в токамак некруглого сечения. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 220.
63. Тимофеев А. В. К теории устойчивости альфвеновских колебаний неоднородной плазмы. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 510.
64. Rosenbluth M. N., Ross D. W., Kostomarov D. P. Stability regions of dissipative trapped-ion instability. — «Nucl. Fusion», 1972, v. 12, p. 3.
65. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости. — «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, с. 195.
66. Тимофеев А. В. Альфвеновские колебания неоднородной и неравновесной плазмы. Препринт ИАЭ-2674. М., 1976.
67. Тимофеев А. В. К теории альфвеновских колебаний неоднородной плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 9. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1979, с. 205.
68. Неустойчивости несобственных колебаний и их роль в проблеме токамака с инжекцией нейтралов. — Препринт ИАЭ-2693. М., 1976. Авт.: В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Л. Френкель, И. Г. Шухман.
69. Мазур В. А. и др. Неустойчивости несобственных колебаний в токамаке. — См. наст. вып., с. 233.
70. Бардаков В. М. Эволюция несобственных слаболокализованных альфвеновских возмущений в двухкомпонентном токамаке. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1213.
71. Абурджания Х. Д., Каладзе Т. Д. Стабилизация термоядерных альфвеновских неустойчивостей в токамаке с плазмой большого давления. — «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 1245.
72. Меерсон Б. И., Михайловский А. Б., Похотелов О. А. Микронеустойчивости плазмы большого давления в винтовом магнитном поле, вызываемые группой быстрых ионов. Препринт ИАЭ-2757. М., 1976.
73. Квазилинейная релаксация пучка быстрых ионов в токамаке. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 70, с. 2152. Авт.: В. М. Кулыгин, А. Б. Михайловский, А. И. Пятак, А. М. Фридман, Е. С. Цапелкин.
74. Гуреев К. Г., Михайловский А. Б., Черемных О. К. Влияние кулоновских столкновений на квазилинейную релаксацию пучка быстрых ионов в двухкомпонентном токамаке. Препринт ИАЭ-2960. М., 1978.
75. Михайловский А. Б., Пятак А. И., Фридман А. М. Квазилинейная теория спутного взаимодействия α -частиц с альфвеновскими волнами. — «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, с. 829.
76. Бардаков В. М. О релаксации пучка быстрых ионов в плазме токамака. — «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 789.
77. Квазилинейная релаксация пучка быстрых ионов на альфвеновских волнах в некруглом токамаке. — Препринт ИАЭ-3027. М., 1978. Авт.: В. М. Бардаков, А. Б. Михайловский, Е. С. Цапелкин, О. К. Черемных.
78. Sigmar D. J., Chan H. C. Anomalous alpha particle transport in thermonuclear tokamak plasma. «Nucl. Fusion», 1978, v. 18, p. 1569.
79. Беликов В. С., Колесниченко Я. И. Турбулентная диффузия в плазме с

- группой высокоэнергетичных ионов.— «Журн. техн. физ.», 1976, т. 46, с. 37.
80. **Belikov V. S., Kolesnichenko Y. I., Yavorskij V. A.** Energy spectrum of α -particles escaping from a plasma as a result of turbulent diffusion.— «Nucl. Fusion», 1976, v. 16, p. 783.
 81. **Михайловский А. Б., Пятак А. И., Фридман А. М.** К нелинейной теории возбуждения альфвеновских волн в токамаке.— «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 922.
 82. **Мазитов Р. К.** О затухании плазменных волн.— «Прикл. механ. и теор. физ.», 1965, вып. 1, с. 27.
 83. **O'Neil T.** Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations.— «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2255.
 84. **Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** Нелинейная теория плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1973, с. 3.
 85. **Михайловский А. Б., Пятак А. И.** Влияние источника частиц на нелинейную эволюцию монохроматической волны.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 73, с. 1370.

К ТЕОРИИ АЛЬФВЕНОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

А. В. Тимофеев

§ 1. Введение

а. Формулировка проблемы. Альфвеновские колебания характеризуются вполне определенной (альфвеновской) скоростью распространения вдоль магнитного поля. В системах, в которых магнитное поле предназначается для удержания плазмы, альфвеновская скорость может довольно существенно меняться в направлении поперек магнитного поля. Возникает вопрос, как повлияет эта неоднородность на возмущения, протяженные в направлении вдоль неоднородности. Уже первая попытка ответить на этот вопрос, предпринятая в работе [1], натолкнулась на трудности, обусловленные нестандартностью проблемы в математическом отношении. Эта ее особенность отмечалась также и в ряде последующих работ (см., например, [2, 3]). По нашему мнению (см. [4, 5]), ее корректное исследование возможно лишь методами, развитыми в теории устойчивости плоскопараллельных течений обычной жидкости (см., например, [6—8]) и пока еще редко используемыми при рассмотрении плазменных колебаний (см., однако, [7, 8]).

Для того чтобы составить представление о характерных трудностях, возникающих при исследовании альфвеновских колебаний неоднородной плазмы, рассмотрим простейшую ситуацию. Предположим, что в невозмущенном состоянии силовые линии магнитного поля являются прямыми и градиент альфвеновской скорости $c_A = H_0 \sqrt{4\pi n_0 m_i}$ направлен перпендикулярно к магнитному полю H_0 , здесь n_0 — плотность плазмы, m_i — масса ионов. Введем декартову систему координат, направив ось X вдоль градиента $c_A(\mathbf{r})$, ось Z вдоль H_0 . Пусть $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — смещение плазмы вдоль OX . В силу стационарности системы и ее однородности по OY , OZ положим $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$. В приближении идеальной магнитной гидродинамики нетрудно получить следующее уравнение для определения $\varphi(x)$ (см., например, [1]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) \varphi = 0, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = n_0(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x))$; $\omega_A(x) = k_z c_A$.

При анализе колебаний неоднородной плазмы нередко используется так называемое локальное квазиклассическое приближение. В этом приближении возмущенные величины считаются постоянными вдоль направления, в котором плазма неоднородна. Если в данном случае положить $\varphi(x) = \text{const}$, то уравнение (1.1) сведется к условию, которое называется локальным дисперсионным соотношением

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 0. \quad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что каждой точке x соответствует свое значение частоты колебаний $\omega = \omega_A(x)$. Однако для колебаний с такой частотой точка x является особой, так как в этой точке обращается в нуль коэффициент при старшей (второй) производной в уравнении (1.1). Отсюда следует, что исходное уравнение (1.1) вообще непригодно для описания колебаний с таким значением частоты. Регуляризация задачи достигается учетом эффектов конечной проводимости [в бесстолкновительной плазме необходимо учитывать эффекты конечного ларморовского радиуса (см. ниже)]. При этом в (1.1) появляется слагаемое с более высокой — четвертой производной по x (см., например, [9]):

$$\alpha \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) \varphi = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\alpha = -i \omega c^2 n_0(x) / 4\pi\sigma$, σ — проводимость плазмы.

Естественно поставить вопрос: в каком отношении находятся результаты анализа дифференциального уравнения (1.3) и результаты, получаемые в локальном квазиклассическом приближении? Этот вопрос приобрел особую остроту в связи с исследованиями устойчивости альфвеновских колебаний плазмы в токамаках в присутствии пучка быстрых ионов. Такой пучок возникает, например, при инжекции в плазму токамака высокоэнергичных нейтральных атомов. В [10] было показано, что в рамках уравнения (1.1) влияние пучка быстрых ионов на альфвеновские колебания может быть учтено посредством переопределения величины ε , которая при наличии пучка равна $\varepsilon = n_0(x) [\omega^2 (1 + i\eta) - \omega_A^2(x)]$, где

$$\eta = -\frac{\pi}{16} \frac{1}{\omega R^2} \frac{n_{0b}}{n_0} \left\langle \left(1 - \frac{\omega_b^*}{\omega} \right) \left(\frac{v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \delta \left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{v_{\parallel}}{qR} \right) \right\rangle$$

(скобки означают усреднение по распределению ионов в пучке), R — радиус кривизны силовых линий магнитного поля токамака, q — коэффициент запаса устойчивости, ω_b^* — дрейфовая частота ионов пучка. При $\omega_b^* > \omega$ локальное квазиклассическое приближение приводит к выводу о неустойчивости альфвеновских колебаний для произвольных значений координаты x [10]. В то же время анализ уравнения четвертого порядка типа уравнения (1.3) при-

вел авторов работы [11] к выводу, что внутренняя часть токамака устойчива к альфвеновским колебаниям. (Под внутренней частью мы понимаем область, в равной мере удаленную как от центра плазменного шнура, так и от его края.) Неустойчивыми оказались лишь колебания, локализованные вблизи от центра шнура, причем с инкрементом, много меньшим найденного в [10].

б. Аналогия с колебаниями плоскопараллельных течений обычной жидкости. Вопрос о соответствии между решениями полного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром перед старшей производной и решениями укороченного уравнения второго порядка рассматривался ранее в связи с анализом устойчивости плоскопараллельных течений плазмы и жидкости. С точки зрения математического формализма наиболее близкой к интересующей нас задаче оказалась задача о колебаниях плоскопараллельных течений обычной жидкости. Напомним основные результаты, полученные при ее исследовании. Начать следует с теоремы Рэлея, согласно которой колебания течений идеальной жидкости, описываемые укороченным уравнением типа (1.1), устойчивы, если профиль скорости не имеет точки перегиба (см., например, [6]). Из результатов, полученных Вазовым (см. [12], а также [6]), следует, что этот вывод, вообще говоря, справедлив и для течений реальной вязкой жидкости. Дифференциальное уравнение, описывающее колебания вязкой жидкости (уравнение Орра — Зоммерфельда), имеет вид, аналогичный (1.3), причем влияние вязкости учитывается слагаемым с четвертой производной. В [7, 8] показано, что стабилизация течений обязана эффекту поглощения колебаний в резонансных точках, в которых фазовая скорость колебаний совпадает с локальной скоростью течения. Такие точки являются особыми для уравнений типа (1.1). Вывод о поглощении колебаний оказывается неверным (а следовательно, может нарушаться теорема Рэлея) для колебаний, которые резонируют с течением у его границы. Действительно, именно такие колебания неустойчивы в паузейлевском течении (см., например, [6]). Эти колебания не составляют полной системы функций, в частности, они совершенно непригодны для решения вопроса об эволюции возмущений, локализованных внутри течения. Непосредственное рассмотрение эволюции выявило новый класс элементарных возмущений, так называемые волны Ван-Кампена — Кэйза (см. [13, 14], в также [7, 8]). Они описывают струйки жидкости, движущиеся с ее локальной невозмущенной скоростью. Частоты волн Ван-Кампена — Кэйза образуют непрерывный спектр. Из них можно составить произвольное гладкое начальное возмущение, которое в дальнейшем будет затухать по степенному закону. В работах [7, 8] отмечено, что со временем характерный пространственный масштаб возмущения сокращается. В результате становится существенной вязкость жидкости, которая приводит к гораздо более резкому затуханию.

Мы столь подробно остановились на закономерностях, характеризующих колебания плоскопараллельных течений обычной жид-

кости, поскольку всем этим закономерностям можно указать аналоги в интересующей нас проблеме. Так, например, было найдено (см. [4, 5]), что при простейшем монотонном профиле $\omega_A(x)$ в идеальной плазме отсутствуют незатухающие альфвеновские колебания. Это утверждение может быть названо аналогом теоремы Рэлея, поскольку детальный анализ показывает, что его справедливость обязана эффекту поглощения колебаний в точках, где их фазовая скорость в направлении вдоль магнитного поля совпадает с локальной альфвеновской скоростью. Неустойчивости пуазейлевского течения может соответствовать неустойчивость, рассматривавшаяся в работе [11] (см. выше). Решение задачи об эволюции начальных возмущений выявляет аналог волн Ван-Кампена — Кэйза, которые в данном случае описывают возмущения, бегущие вдоль магнитного поля с локальной альфвеновской скоростью (см. [2—5, 15—18]). При наличии пучка быстрых ионов эти возмущения могут оказаться неустойчивыми. По существу именно такая неустойчивость рассматривалась в [10]. Наконец, диссипативные эффекты, как и вязкость в случае реальной жидкости, приводят к резкому затуханию возмущений. Время затухания t_d довольно большое. Поэтому даже при сравнительно небольших значениях инкремента γ_s , получаемых в локальном квазиклассическом приближении, может выполняться условие $\gamma_s t_d \gg 1$, и, следовательно, плазму можно считать неустойчивой.

Эта неустойчивость, в отличие от исследованной в [11], развивается вдали от центра плазменного шнура. Проявится ли она в эксперименте — зависит от амплитуды начальных возмущений. Если выполняется условие $\gamma_s t_d \gg 1$, то последствия раскачки любого макроскопического возмущения будут катастрофическими. Однако макроскопические возмущения в определенной степени находятся под контролем экспериментаторов. В то же время микроскопические возмущения, обусловленные тепловым движением заряженных частиц, неустраняемы. В [19] было показано, что альфвеновские колебания наиболее интенсивно возбуждаются при столкновениях электронов с ионами. В этой работе был определен стационарный уровень альфвеновских флуктуаций, возбуждаемых при таких столкновениях, и рассчитаны аномальные потери энергии пучком быстрых ионов. Таким образом, нам удалось довести задачу о колебаниях неустойчивой плазмы до логического завершения, причем это было сделано без обращения к нелинейной теории. Эта уникальная возможность в конечном счете обязана «линейному» эффекту затухания возмущений из-за конечной проводимости плазмы, который ограничивает амплитуду альфвеновских флуктуаций.

§ 2. Вопрос о собственных колебаниях. Аналог теоремы Рэлея

а. Колебания плазмы с линейным профилем плотности. Следуя [1], рассмотрим сначала простейший случай альфвеновских колебаний плазмы с линейным профилем плотности $n_0(x) = n_0(0) +$

+ $x dn_0/dx$, помещенной в однородное магнитное поле. Будем считать, что при $x = x_1, x_2$ плазма ограничена идеально проводящими поверхностями.

Предположим, что при некотором комплексном значении частоты существует решение $\varphi(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Умножим (1.1) на $\varphi^*(x)$ и проинтегрируем по отрезку $x_1 x_2$. При этом получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} dx (\omega^2 - \omega_A^2(x)) n_0(x) \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) = 0. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что частота колебаний должна быть действительной и лежать в интервале $\omega_A(x_1) > \omega > \omega_A(x_2)$ (мы считаем, что $dn_0/dx > 0$). Посмотрим, имеет ли уравнение (1.3) такие решения. При линейном профиле плотности оно принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (x - x_s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k^2 (x - x_s) \varphi = 0, \quad (2.2)$$

где $x_s = \frac{\omega_A^2(0)}{\omega^2} \frac{n_0(0)}{n_0'(0)}$. Его решения выражаются через функции Бесселя нулевого индекса от мнимого аргумента:

$$\varphi(x) = C_1 I_0[k(x - x_s)] + C_2 K_0[k(x - x_s)]. \quad (2.3)$$

Поскольку частота собственных колебаний удовлетворяет условию $\omega_A(x_1) > \omega > \omega_A(x_2)$, то точка x_s попадает на отрезок $x_1 x_2$. При $x = x_s$ функция $K_0[k(x - x_s)]$ имеет логарифмическую особенность. Один из простейших способов продолжения решения через особую точку — ее обход в комплексной плоскости переменной x . При этом для $\ln[k(x - x_s)]$, входящего в функцию $K_0[k(x - x_s)]$, получаем следующее правило перехода через точку x_s :

$$\pm i\pi + \ln[k(x_s - x)] \rightleftharpoons \ln[k(x - x_s)]. \quad (2.4)$$

Верхний знак в левой части (2.4) соответствует обходу точки x_s сверху, нижний — снизу. Поскольку для функции $K_0(z)$ справедливо представление (см. например, [20])

$$K_0(z) = \ln z I_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{2n}, \quad (2.5)$$

то правило продолжения $K_0[k(x - x_s)]$ через точку x_s имеет вид

$$\pm i\pi I_0[k(x_s - x)] + K_0[k(x_s - x)] \rightleftharpoons K_0[k(x - x_s)]. \quad (2.6)$$

Функции $I_0(z)$, $K_0(z)$ не обращаются в нуль при действительных значениях аргумента, поэтому удовлетворить граничному условию $\varphi(x_2) = 0$ можно лишь, если в (1.3) $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Будем считать эти константы действительными. Тогда у решения, действительного справа от x_s , в области слева от этой точки появится мнимая часть $\pm i\pi C_2 I_0[k(x - x_s)]$. Эта функция монотонно возрастает

ет с удалением от точки x_s , следовательно, граничное условие $\varphi(x_1)$ не может быть удовлетворено.

Таким образом, мы пришли к заключению, что уравнение (2.2), дополненное правилом обхода особой точки в комплексной плоскости, не имеет собственных функций. Если бы мы при продолжении решения через точку x_s использовали иное правило, например вида

$$\ln [k(x_s - x)] \rightleftharpoons \ln [k(x - x_s)]$$

и соответственно

$$K_0 [k(x_s - x)] \rightleftharpoons K_0 [k(x - x_s)],$$

то решение $\varphi(x)$ стало бы симметричным относительно точки x_s . В этом случае граничные условия удовлетворяются при $x_s = (x_2 - x_1)/2$. Напомним, что $x_s = \frac{\omega_A^2(0)}{\omega^2} \frac{n_0(0)}{n'_0}$.

б. Правило обхода Ландау. Аналог теоремы Рэлея. Поскольку все величины, имеющие физический смысл, должны быть ограниченными, то появление особенности в уравнении альфвеновских колебаний свидетельствует о том, что мы не учитываем каких-то эффектов, существенных в окрестности особой точки. Действительно, при приближении к точке x_s характерный пространственный масштаб решения стремится к нулю: $\partial^n \varphi / \partial x^n \sim (x - x_s)^{-n}$. Поэтому в ее окрестности должны проявиться так называемые мелкомасштабные эффекты, которые вдали от этой точки можно, вообще говоря, не учитывать. В случае равновесной столкновительной плазмы наиболее важны эффекты конечной проводимости. Их учет регуляризует уравнение альфвеновских колебаний, повышая его порядок до четвертого [сравнить уравнения (1.1) и (1.3)]. Для дальнейшего удобно привести уравнение (1.3) к виду, который обычно используется при изучении уравнений четвертого порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} (x - x_s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k^2 (x - x_s) \varphi = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{где } \Lambda = i\omega \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{1}{n_0(x)} n'_0.$$

Уравнения типа (2.7) исследовались неоднократно в связи с проблемами устойчивости плоскопараллельных течений обычной жидкости [6, 12], устойчивости желобковых колебаний плазмы в магнитном поле [21] и т. п. Наиболее подходящим методом исследования оказался метод преобразования Лапласа, который и используется, начиная с работы [12]. Мы приведем лишь результаты анализа, отсылая за подробностями к работе [21], где рассматривалось уравнение, отличающееся от (2.7) лишь $\arg \Lambda$.

Предположим, что проводимость плазмы достаточно велика, так что выполняется условие $|\Lambda| (x_2 - x_1)^3 \gg 1$. Тогда уже на сравнительно небольшом расстоянии от точки x_s , а именно при $|x - x_s| \gg |\Lambda|^{-1/3}$ решения уравнения (2.7) можно разделить на

два класса: крупномасштабные $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ и мелкомасштабные $\varphi^{(3)}$, $\varphi^{(4)}$. Приближенные выражения для $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ можно получить из решения укороченного уравнения с отброшенной четвертой производной [см. уравнение (2.2) и его решения (2.3)]. При нахождении асимптотик мелкомасштабных решений в дифференциальном уравнении можно опустить свободный член. При этом получаем

$$\varphi^{(3,4)} \approx \pi^{1/2} \Lambda^{-1/4} (x - x_s)^{-3/4} \times \\ \times \exp \left[\pm \frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} (x - x_s)^{3/2} \mp \frac{i\pi}{4} \right]. \quad (2.8)$$

Для того чтобы сделать дальнейшее рассмотрение более удобным, здесь введены численные множители.

В области $|x - x_s| \leq |\Lambda|^{-1/3}$ разделение решений на крупномасштабные и мелкомасштабные становится невозможным. Действительно, крупномасштабное решение $K_0 [k(x - x_s)]$ при $x \rightarrow x_s$ резко сокращает свой масштаб, т. е. становится мелкомасштабным. Рассмотрение показывает, что это его свойство сохраняется в некотором секторе комплексного переменного x , выходящем из точки x_s . Для решения $\varphi^{(1)}$, асимптотика которого на действительной оси при $x > x_s$ равна $K_0 [k(x - x_s)]$, этот сектор занимает положение $-\pi/6 < \arg(x - x_s) < -5\pi/6$. На рис. 1 он заштрихован. В нем для решения $\varphi^{(1)}$ имеем следующее асимптотическое представление:

$$\varphi^{(1)}(x) \approx K_0 [k(x - x_s)] - \varphi^{(4)}(x - x_s). \quad (2.9)$$

Из рис. 1 видно, что сектор комплексного переменного x , в котором крупномасштабное решение $\varphi^{(1)}(x)$ завязывается с мелкомасштабным, расположен под действительной осью. Поэтому, обходя точку x_s сверху, мы при всех действительных значениях x , кроме $|x - x_s| \leq |\Lambda|^{-1/3}$, для $\varphi^{(1)}(x)$ можем использовать крупномасштабную асимптотику. Нетрудно заметить, что это правило обхода может быть получено заменой $\omega \rightarrow \omega + i\nu$, т. е. совпадает с правилом обхода Ландау. В качестве второго линейно независимого решения уравнения (2.2) может быть выбрана функция $I_0 [k(x - x_s)]$. Для этого решения точка x_s является регулярной, и поэтому оно «не замечает» особенности уравнения (2.2) в точке x_s . Поэтому если нас интересуют только крупномасштабные решения уравнения (2.7), то вместо него можно использовать укороченное уравнение (2.2), дополненное правилом обхода Ландау сингулярной точки x_s . При $dn_0/dx > 0$ из этого правила следует, что в левой части соотношения (2.6) следует взять знак плюс.

Отметим, что при $\text{Im } \omega < 0$, т. е. для затухающих колебаний, точка x_s поднимается над действительной осью, и заштрихованный — «запрещенный» сектор пересекает действительную ось (рис. 2). Если в него попадет какая-то из граничных точек x_1 , x_2 , то замена полного уравнения (2.7) упрощенным (2.2) невозможна. Таким образом, вывод об отсутствии собственных колебаний, сделанный на основе анализа уравнения (2.2), справедлив только для незатухаю-

щих колебаний с $\text{Im } \omega \geq 0$. Действительно, численное решение уравнения альфвеновских колебаний, дополненного правилом обхода Ландау, показало, что затухающие колебания существуют [16, 17]. Бесстолкновительное затухание альфвеновских колебаний было использовано в экспериментах по нагреву плазмы [16, 17, 22]. Наряду с затухающими колебаниями, вообще говоря, могут существовать также колебания с $\text{Im } \omega = 0$ или колебания с достаточно малым инкрементом, если действительная часть частоты такова, что выполняется условие

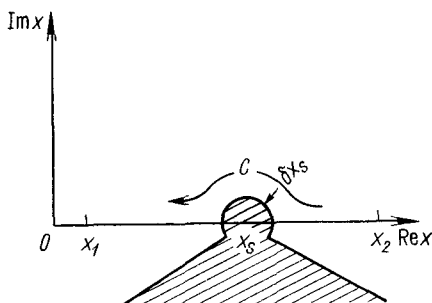
$$\left| \frac{\omega - \omega_A(x_i)}{\omega} \right| \lesssim \frac{n_0(x_i)}{n'_0} |\Lambda|^{-1/3}.$$


Рис. 1. Плоскость комплексного переменного для уравнения (2.7) при $\text{Im } \omega > 0$:

Сектор, в котором неприменимо упрощенное уравнение (2.2), заштрихован; C — контур, по которому следует аналитически продолжать решение в соответствии с правилом обхода Ландау, $\delta x_s = |\Lambda|^{-1/3}$

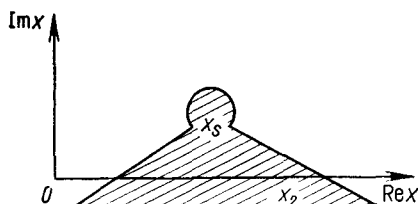


Рис. 2. Плоскость комплексного переменного для уравнения (2.7) при $\text{Im } \omega \leq 0$ (x_2 — граничная точка)

Здесь x_i — одна из граничных точек x_1 или x_2 . В этом случае, так же как и для затухающих колебаний, нельзя удовлетворить граничным условиям без анализа решений в малой окрестности сингулярной точки x_s , где использование упрощенного уравнения (2.2) невозможно (см. рис. 2).

Разумеется, то, что из приведенного доказательства выпадает какой-то класс незатухающих колебаний, является его дефектом, поскольку колебания равновесной среды при наличии диссипации могут быть только затухающими.

Правило обхода особой точки x_s определяется значением $\arg \Lambda$ и не зависит от Λ , т. е. от проводимости плазмы. Поскольку при использовании правила обхода следует вывод об отсутствии незатухающих собственных колебаний, то мы приходим к заключению, что для этого достаточно любой, сколь угодно слабой, диссипации. Этот вывод на первый взгляд кажется парадоксальным. Дело здесь в том, что возмущения, распространение которых описывается сингулярными уравнениями типа (2.2), имеют тенденцию накапливаться в окрестности сингулярной точки x_s . Эта тенденция проявляется особенно наглядно в тех случаях, когда сингулярное волновое уравнение допускает возможность использования квазиклассического приближения. При этом оказывается, что по мере приближе-

ния волнового пакета к точке x_s его скорость стремится к нулю (см. [7, 8, 23]). Распространение альфвеновских колебаний в направлении неоднородности нельзя описать в терминах квазиклассики. В данном случае отмеченная выше тенденция приводит к тому, что решение, описываемое функцией $K_0 [k(x - x_s)]$, логарифмически расходится при $x \rightarrow x_s$. Количество энергии, диссипируемой в колебаниях, определяется величиной $j^2 \delta x / \sigma$, где $\delta x \sim |\Lambda|^{-1/3} \sim \sigma^{-1/3}$ — размер слоя, в котором действуют диссипативные процессы. Поскольку при $x \rightarrow x_s$ $j \sim j_z \sim \Phi'' \sim (\delta x)^{-2} \sim \sigma^{-2/3}$ неограниченно возрастает, то количество поглощаемой энергии оказывается конечным даже при $\sigma \rightarrow \infty$, $\delta x \rightarrow 0$. Этот вывод получен в линейном приближении. Разумно считать, что линейное приближение справедливо до таких амплитуд колебаний, пока Φ , т. е. смещение плазмы по OX , будет меньше размера слоя, в котором происходит диссипация энергии $\delta x \approx |\Lambda|^{-1/3}$.

в. Аналог теоремы Рэлея для произвольного монотонного профиля $\omega_A(x)$. Как и в п. а, будем считать, что при $x = x_i$ плазма ограничена идеально проводящими стенками. Из интегрального соотношения (2.1) следует, что частота собственных колебаний должна быть действительной и лежать в интервале $\omega_{A \text{ мин}} < \omega < \omega_{A \text{ макс}}$. Следовательно, на отрезке $x_1 x_2$ должна существовать сингулярная точка x_s . В ее окрестности зависимость $\omega_A(x)$ можно аппроксимировать линейной функцией, и поэтому уравнение (1.1) переходит в (2.2). Решение последнего, регулярное в точке x_s , имеет вид $I_0 [k(x - x_s)]$. Оно конечно в точке x_s , а его первая производная при $x = x_s$ обращается в нуль. Такими же свойствами должно обладать и регулярное решение уравнения (1.1). Покажем, что регулярное решение не может удовлетворить граничным условиям $\Phi(x_i) = 0$. Для этого проинтегрируем исходное уравнение (1.1) в пределах от x_s до x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\varepsilon(x_s)}{\varepsilon(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=x_s} - \frac{k^2}{\varepsilon(x)} \int_{x_s}^x dx' \varepsilon(x') \Phi(x'). \quad (2.10)$$

Здесь для краткости оставлен лишь один из аргументов функции $\varepsilon(\omega, k, x)$.

Первое слагаемое в правой части (2.10) обращается в нуль по определению x_s , второе в области $x > x_s$ имеет тот же знак, что $\Phi(x)$, и обратный знак в области $x < x_s$. Следовательно, $|\Phi(x)|$ монотонно возрастает в обе стороны от точки x_s , и поэтому мы не можем удовлетворить граничным условиям $\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = 0$. Таким образом, собственные функции уравнения (1.1), если они существуют, должны быть сингулярными.

Будем считать для определенности, что $\omega'_A(x) < 0$. Предположим, что нам удалось удовлетворить граничному условию при $x = x_1$. В соответствии с правилом обхода Ландау при переходе

от области $x < x_s$ к $x > x_s$ у решения появляется составляющая, фаза которой отличается на $-\pi/2$ от фазы решения в области $x < x_s$. Эта составляющая регулярна при $x \rightarrow x_s$. Используя для нее равенство (2.10), получаем, что она не может обратиться в нуль при $x = x_2$. Таким образом, приходим к выводу, что уравнение (1.1) не имеет собственных функций с $\text{Im } \omega \geq 0$ при произвольной монотонной зависимости $\omega_A(x)$. Как и в случае линейного профиля плотности, это доказательство, основанное на использовании правила обхода Ландау, непригодно для колебаний с небольшим значением $\text{Im } \omega > 0$ или с $\text{Im } \omega = 0$, для которых условие $\omega = \omega_A(x)$ выполняется вблизи одной из граничных точек.

В равновесной плазме незатухающие колебания отсутствуют, по-видимому, и при произвольных немонотонных профилях $\omega_A(x)$. Однако мы смогли доказать справедливость этого утверждения, лишь предположив, что профиль $\omega_A(x)$ имеет единственную экстремальную точку и симметричен относительно этой точки. Метод доказательства аналогичен использованному выше. Ограничения, характерные для этого метода, не позволили рассмотреть колебания с частотой, близкой к $\omega_{A \text{ макс}}$ и $\omega_{A \text{ мин}}$.

г. Аналог теоремы Рэлея для коротковолновых колебаний. Для коротковолновых колебаний с $\left| \frac{1}{k\omega_A} \frac{d\omega_A}{dx} \right| \ll 1$ аналог теоремы Рэлея можно доказать еще одним способом (см. [24]). Это доказательство пригодно при произвольных профилях $\omega_A(x)$, однако, как и ранее, мы, к сожалению, не можем исключить возможности существования колебаний с небольшим инкрементом, локализованных вблизи одной из граничных точек или точек экстремума $\omega_A(x)$.

При рассмотрении коротковолновых колебаний в уравнении (1.1) удобно произвести замену $\psi = \varepsilon^{-1/2} \phi$. При этом получаем

$$\psi'' + \left(\frac{1}{4} \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} - k^2 \right) \psi = 0. \quad (2.11)$$

В области $|x - x_s| \gg k^{-1}$ оно принимает следующий простой вид:

$$\psi'' - k^2 \psi = 0. \quad (2.12)$$

Из сопоставления (2.11) и (2.12) следует, что собственные функции уравнения (2.11), если они существуют, должны быть локализованы в окрестности особой точки $|x - x_s| \leq k^{-1}$. Используя (2.12), находим, что решение, спадающее в области положительных значений разности $x - x_s$, имеет асимптотику $\exp[-k(x - x_s)]$. Если имеются собственные функции, то при переходе к отрицательным значениям величины $x - x_s$ асимптотика решения должна измениться и принять вид $\exp[k(x - x_s)]$. Известно, что асимптотика решений дифференциальных уравнений может меняться лишь на линиях мнимой фазы (линиях Стокса) (см., например, [25]). На рис. 3 линии мнимой фазы нанесены пунктиром, область S , в которой неприменимо упрощенное уравнение (2.12),

заштрихована. Для того чтобы учесть правило обхода Ландау (см. п. в), мы, для определенности считая, что $d\omega_A/dx < 0$, провели разрез (волнистая линия). На самом деле, как показано в разд. в, в некоторой части нижней полуплоскости неприменимо укороченное уравнение второго порядка (2.11) и здесь следует использовать полное уравнение (1.3). Поэтому рис. 3 носит условный характер, в частности линии Стокса могут выходить из любой точки заштрихованной области.

Возьмем решение, имеющее на пунктирной линии справа от S вид спадающей экспоненты. Переходя по контуру C в область слева от S , мы нигде не пересекаем линий Стокса (пунктирных линий), и, следовательно, в этой области решение будет нарастающим. Вообще говоря, на горизонтальной пунктирной линии слева от S к нему может быть добавлено решение, спадающее при $x - x_s \rightarrow -\infty$. Однако при действительных значениях x это решение на фоне нарастающего не будет заметно. Таким образом, уравнение (2.11) не обладает собственными функциями. В силу того, что упрощенные уравнения второго порядка можно, строго говоря, использовать лишь при рассмотрении колебаний с $\text{Im } \omega \geq 0$, полученный результат не исключает возможности существования затухающих колебаний с $\text{Im } \omega < 0$. Это ограничение вытекает из примененных нами методов и характерно для всего рассмотрения (см. выше).

д. Вопрос о собственных колебаниях неравновесной плазмы. В § 1 было отмечено, что в последнее время альфвеновские колебания изучались в связи с проблемой устойчивости плазмы в токамаке при инжекции в токамак пучка быстрых ионов. Наличие пучка учитывается в уравнении альфвеновских колебаний переопределением $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$. В термоядерном режиме плазма токамака может считаться слабостолкновительной. Поэтому в окрестности сингулярной точки наряду с эффектами конечной проводимости необходимо учитывать также эффекты конечного ларморовского радиуса ионов. Это достигается изменением величины α в уравнении (1.3), а вместе с ней и $\Lambda = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=x_s}$ в уравнении (2.7). Новое значение $\alpha = (7/4) \omega^2 \rho_i^2 n_0 (1 - i\delta)$, где ρ_i — ларморовский радиус ионов; $\delta = \frac{4}{7} \frac{v_e}{\omega} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}$; v_e — частота электронных соударений, в бесстолкновительном режиме v_e вводится для модельного учета резонансного взаимодействия колебаний с запертыми электронами; r — локальное значение малого радиуса токамака, в используемой прямоугольной системе координат малому радиусу соответствует координата x ; R — радиус кривизны магнитных силовых линий.

Альфвеновская частота $\omega_A = \mathbf{k} \mathbf{H} c_A / H$ может изменяться в направлении поперек магнитного поля за счет неоднородности плотности, изменения величины магнитного поля и перекоса его силовых линий (шира). Из-за воздействия шира проекция вектора \mathbf{k} на направление магнитного поля может изменять знак, вместе с k_{\parallel} должна изменить знак и альфвеновская частота $\omega_A = k_{\parallel} c_A$.

В уравнение альфвеновских колебаний входит не сама величина $\omega_A(x)$, а ее квадрат, поэтому для справедливости всех приведенных выше доказательств аналога теоремы Рэлея, строго говоря, требуется монотонное изменение не самой альфвеновской частоты, а ее квадрата. Однако если найдется такая точка x_0 , в которой $\omega_A(x_0) = 0$, то $\omega_A^2(x_0)$ в этой точке будет иметь минимум. Если плазма равновесна, то в окрестности точки x_0 , вообще говоря, могут существовать слабо затухающие собственные колебания. В неравновесной плазме, как отмечено в [26], существует опасность раскочки таких колебаний. Для того чтобы ее исключить, будем считать, что влияние шира пренебрежимо мало. Это предположение справедливо, если шир, характеризуемый величиной $s = (2\pi r^2/Rq) \times (dq/dr)$, достаточно мал, $s \ll 2\pi rk_{||}$. При этой оценке учтено, что размер области локализации альфвеновских колебаний в направлении изменения $k_{||}$ по порядку величины равен k^{-1} (см. п. г и ниже).

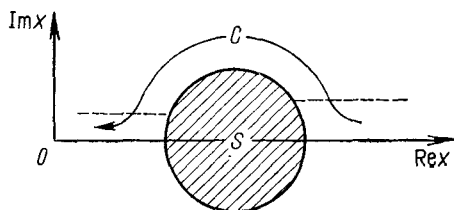


Рис. 3. Плоскость комплексного переменного для уравнения (2.11)

В токамаке магнитное поле меняется в поперечном направлении гораздо слабее плотности $H'_0 n'_0 / n'_0 H_0 \sim a/R$, здесь a — малый радиус токамака. Поэтому в дальнейшем считаем магнитное поле однородным и из всех факторов, которые могут привести к изменению ω_A , учитываем только неоднородность плотности.

Выясним сначала — можно ли в режиме слабых столкновений использовать правило обхода Ландау сингулярной точки x_s . Из рассмотрения, проведенного в п. б, следует, что правило обхода зависит от ориентации «запрещенного» сектора, выходящего из точки x_s , в котором медленно меняющееся решение «зацепляется» с быстро меняющимся. Ориентация запрещенного сектора, в свою очередь, определяется $\arg \Lambda$. При произвольных значениях $\arg \Lambda$ запрещенный сектор занимает положение $-(1/3) \arg \Lambda + (4/3) \pi < \arg(x - x_s) < -(1/3) \arg \Lambda + 2\pi$ (см., например, [7, 8]). Поэтому если имеется хотя бы небольшая отрицательная мнимая часть Λ , то он располагается под действительной осью и по-прежнему можно использовать правило обхода Ландау. Условие $\text{Im } \Lambda < 0$ выполняется, если неравновесность плазмы, характеризуемая η , не слишком велика ($\eta < \delta$). В обратном случае запрещенный становится сектор $-(1/3) \arg \Lambda < \arg(x - x_s) < -(1/3) \arg \Lambda + (2\pi/3)$, лежащий над действительной осью (см., например, [7, 8]). Обход сингулярной точки с противоположной стороны (по «анти-Ландау») привел бы к выводу об отсутствии нарастающих колебаний. Задачу о существовании нарастающих колебаний нельзя решить с помощью укороченного уравнения (1.1), поскольку при $\text{Im } \omega > 0$ и $\text{Im } \Lambda < 0$ в запрещенный сектор может попасть одна

из граничных точек x_1, x_2 . (Сравнить со случаем затухающих колебаний при $\text{Im } \Lambda > 0$.) Не исключено, что анализ неукороченного уравнения четвертого порядка приведет к выводу о существовании собственных колебаний с $\text{Im } \omega > 0$, т. е. об неустойчивости плазмы.

Будем считать, что условие $\delta > \eta$ выполняется ($\arg \Lambda > 0$). В этом случае плазма устойчива по отношению к колебаниям с таким значением частоты, что сингулярная точка x_s , определяемая из условия $\omega = \omega_A(x_s)$, удалена на достаточное расстояние от граничных точек x_1 и x_2 (см. п. в). Опасность в смысле неустойчивости могут представить лишь колебания с $x_s \approx x_i$ ($i=1, 2$).

При $x_s \approx x_2$ ввиду малого наклона заштрихованного сектора к действительной оси в него может попасть значительный отрезок действительной оси с размером $\delta x \gg |\Lambda|^{-1/3}$ (рис. 4)*. В этом случае в окрестности точки x_2 можно использовать асимптотические представления решений уравнения (2.7). В области $x < x_s$ собственные функции уравнения (2.7), если они существуют, должны состоять из медленно спадающего решения $\varphi_s(x) \approx K_0 [k(x_s - x)]$ и быстро спадающего $\varphi_r(x)$. Функция $K_0 [k(x_s - x)]$ отличается от $K_0 [k(x - x_s)]$ на $-i\pi I_0 [k(x_s - x)]$. Поэтому, используя (2.9), для асимптотики $\varphi_s(x)$ в заштрихованном секторе получаем следующее выражение:

Как следует из работы [21], асимптотика решения, быстро спадающего при $x < x_s$, в области $x > x_s$ также претерпевает значительные изменения:

$$\varphi_r(x) \approx \varphi^{(3)}(x) + \varphi^{(4)}(x) - 2\pi i I_0 [k(x - x_s)]. \quad (2.14)$$

Плазма окажется неустойчивой, если найдется сочетание $\varphi(x) = C_1 \varphi_s(x) + C_2 \varphi_r(x)$, удовлетворяющее двум граничным условиям при $x = x_2$. (Увеличение числа граничных условий вызвано возрастанием порядка дифференциального уравнения.) В [11], в которой рассматривался вопрос о собственных колебаниях неравно-

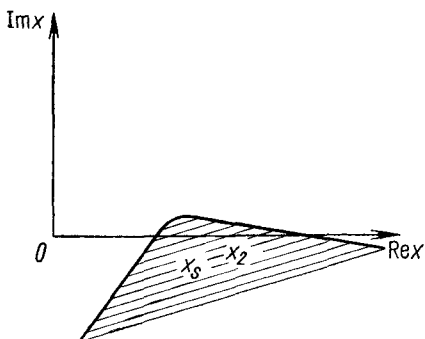


Рис. 4. Плоскость комплексного переменного для уравнения (2.7) при не-большом значении $\text{Im } \omega > 0$:

Область, в которой неприменимо упрощенное уравнение (2.2), заштрихована; x_2 — граничная точка; предполагается, что $\text{Re } \Lambda \gg |\text{Im } \Lambda|$, $\text{Im } \Lambda < 0$

* Различие в форме заштрихованных областей на рис. 1, 2 и 4 вызвано тем обстоятельством, что эти рисунки имеют иллюстративный характер, а границы области, в которой нельзя использовать дифференциальное уравнение второго порядка, определены лишь приближенно.

весной плазмы, второе граничное условие бралось в виде $\varphi''(x_2) = 0$. В этой работе, как и в настоящей, токамак заменялся эквивалентной плоской системой. При этом центру плазменного шнура ставилась в соответствие одна из граничных точек. Следует отметить, что в [11] рассматривалось упрощенное решение уравнения (2.7), а именно полагалось $\varphi(x) = \varphi_r(x)$, причем в асимптотике $\varphi_r(x)$ в области $x > x_s$ опускалось медленно меняющееся слагаемое [см. (2.14)]. Поэтому вывод о неустойчивости плазмы, полученный в работе [11], требует, на наш взгляд, подтверждения более точными расчетами. Ввиду того, что в решениях $\varphi_s(x)$ и $\varphi_r(x)$ частота входит довольно сложным образом, такие расчеты, по-видимому, требуют привлечения ЭВМ. Отметим сходство обсуждаемой неустойчивости с неустойчивостями плоскопараллельных течений, обязанными действию вязкости (см., например, [6]). Колебания плоскопараллельных течений описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка, сходным с уравнением (1.3). При больших числах Рейнольдса (малой вязкости жидкости) оно может быть заменено упрощенным уравнением второго порядка [сравнить с уравнением (1.1)]. Такая замена невозможна лишь в случае колебаний, фазовая скорость которых совпадает со скоростью течения в точке x_s , расположенной вблизи от одной из граничных точек. Точка x_s является особой для дифференциального уравнения второго порядка. Анализ полного уравнения четвертого порядка показывает, что рассматриваемые колебания неустойчивы.

В заключение подытожим результаты, полученные в настоящем разделе. Мы показали, что в областях монотонного изменения $\omega_A^2(x)$ отсутствуют незатухающие собственные колебания. Это утверждение справедливо как по отношению к равновесной, так и к слабонеравновесной плазме. Однако наш способ доказательства, основанный на использовании правила обхода в комплексной области точек, в которых выполняется условие $\omega = \omega_A(x)$, не позволил рассмотреть колебания с небольшим инкрементом, локализованные у границ плазмы или у границ областей монотонного изменения $\omega_A^2(x)$. Такие колебания, вообще говоря, могут появиться в слабонеравновесной плазме. Отметим, что в случае цилиндрической симметрии роль одной из граничных точек выполняет центр плазменного шнура.

§ 3. Эволюция начальных возмущений

а. Общие соотношения. Обычно считается, что произвольное возмущение может быть представлено в виде суперпозиции собственных колебаний. В соответствии с этой точкой зрения для того, чтобы определить характер эволюции произвольных начальных возмущений, достаточно знать частоты собственных колебаний. Выше мы нашли, что в областях монотонного изменения $\omega_A^2(x)$ незатухающие собственные колебания отсутствуют. Более того, теми же самыми методами может быть доказано и отсутствие слабозатухаю-

щих колебаний. В этих условиях возникают сомнения в полноте системы собственных функций и поэтому представляет интерес непосредственно проследить за временной эволюцией начальных возмущений.

Для этой цели, как обычно, будем использовать метод преобразования Лапласа. Преобразуя временное уравнение, описывающее альфвеновские колебания, по Лапласу, приходим к уравнению (3.1) с правой частью, которая характеризует начальное возмущение:

$$\left(\alpha \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_\omega(x) \frac{\partial}{\partial x} - k^2 \varepsilon_\omega(x) \right) \varphi_\omega(x) = G_\omega(x). \quad (3.1)$$

Здесь для того чтобы подчеркнуть зависимость ε и φ от частоты, мы указали ее в качестве индекса. Необходимо также помнить, что эти величины зависят и от волнового вектора (см. выше).

Используя функцию Грина, находим формальное решение уравнения (3.1) и производим обратное преобразование Лапласа. При этом для искомой величины $\varphi(x, t)$ получаем следующее выражение:

$$\varphi(x, t) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\gamma}^{\infty + i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) \int dx_0 C_\omega(x_0) G_\omega(x, x_0). \quad (3.2)$$

В соответствии с [27] функция Грина $G_\omega(x, x_0)$ может быть представлена в виде

$$G_\omega(x, x_0) = - \frac{1}{\alpha W_4} \begin{cases} \varphi^{(1)}(x) W[\varphi^{(2)}(x_0), \varphi^{(3)}(x_0), \varphi^{(4)}(x_0)] + \varphi^{(3)}(x) \times \\ \times W[\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(2)}(x_0), \varphi^{(4)}(x_0)] \text{ при } x > x_0; \\ \varphi^{(2)}(x) W[\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(3)}(x_0), \varphi^{(4)}(x_0)] + \varphi^{(4)}(x) \times \\ \times W[\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(2)}(x_0), \varphi^{(3)}(x_0)] \text{ при } x < x_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь у функций $\varphi^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) для краткости опущен индекс ω , W — функциональные определители, $W_4 = W(\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(2)}(x_0), \varphi^{(3)}(x_0), \varphi^{(4)}(x_0))$, последняя величина для уравнения (3.1) не зависит от координаты. В качестве функций $\varphi^{(i)}(x)$ следует взять линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (3.1), т. е. уравнения (1.3). Мы выберем их таким образом, чтобы решения $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(3)}(x)$ спадали при $x \rightarrow \infty$, а $\varphi^{(2)}(x)$, $\varphi^{(4)}(x)$ при $x \rightarrow -\infty$. (При рассмотрении возмущений, протяженность которых по OX мала по сравнению с характерным масштабом изменения $\omega_A(x)$, границы плазмы могут считаться лежащими на бесконечности.) Потребуем также, чтобы асимптотики решений $\varphi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$ были крупномасштабными функциями, а $\varphi^{(3)}(x)$, $\varphi^{(4)}(x)$ — мелкомасштабными (см. предыдущий раздел).

Функция Грина дает решение уравнения (3.1) при правой части вида $C_\omega(x) = \delta(x - x_0)$. Очевидно, что совокупность таких элементарных начальных возмущений со всеми возможными значениями x_0 составляет полную систему. Временная эволюция отдельного элементарного возмущения описывается интегралом

$$\varphi(x, x_0, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\gamma}^{\infty + i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) G_\omega(x, x_0). \quad (3.4)$$

Асимптотика интегралов типа (3.4) определяется особенностями подынтегрального выражения, рассматриваемого как функция ω . Если бы однородное уравнение (1.3) имело собственные функции, то одно и то же решение удовлетворяло бы граничным условиям как при $x \rightarrow \infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$. В результате при собственных значениях частоты функциональный определитель W_4 обращался бы в нуль, а функция Грина имела бы полюс. Однако уравнение (1.3) не имеет собственных функций с $\text{Im } \omega \geq 0$, локализованных в области монотонного изменения $\omega_A^2(x)$. Поскольку, помимо этого, полное уравнение четвертого порядка регулярно, и следовательно, его решения (а не их асимптотические представления!) также регулярны, то функция Грина не должна иметь особенностей при $\text{Im } \omega \geq 0$. Отсюда следует, что все возмущения при $t \rightarrow \infty$ должны затухать, т. е. плазму следует считать асимптотически устойчивой. Однако если плазма неравновесна, то не исключено, что найдутся возмущения, амплитуда которых меняется немонотонно, нарастая на начальном этапе эволюции. Если за это время она возрастает в достаточной степени, то плазма будет практически неустойчивой, несмотря на отсутствие собственных колебаний. Для того чтобы проанализировать эту возможность, следует вычислить интегралы (3.2), (3.4). Мы не смогли сделать это в общем виде и получили лишь приближенные выражения в предельных случаях малых ($t \ll T$) и больших ($t \gg T$) времен. Здесь $T = |\omega'_A|^{-1} |\Lambda|^{1/3}$ — характерное время, по истечении которого проявляются эффекты конечной проводимости в столкновительной плазме и эффекты конечного лармовского радиуса в бесстолкновительной плазме. Это время можно определить из следующих соображений. Укороченное уравнение (1.1) имеет особенность при $\omega = \omega_s(x)$, когда $\epsilon_\omega(x)$ обращается в нуль. Поэтому естественно ожидать, что на интегралы (3.2), (3.4) определяющее влияние окажет зависимость решений $\varphi^{(1)}$ — $\varphi^{(4)}$ от сочетания $\omega - \omega_s(x)$. При такой зависимости каждому частотному интервалу $\delta\omega$ может быть поставлен в соответствие пространственный $\delta x = \delta\omega |\omega'_A|^{-1}$, и наоборот. Мелкомасштабные эффекты становятся существенными на расстояниях $\delta x_s \approx |\Lambda|^{-1/3}$ от резонансной точки. Этому расстоянию соответствует частотный интервал $\delta\omega_s \approx |\omega'_A| |\Lambda|^{-1/3}$, с которым по «соотношению неопределенности» связано характерное время $T \approx \delta\omega_s^{-1}$.

Мы полагаем, что знание $\varphi(x, t)$ в предельных случаях больших ($t \gg T$) и малых ($t \ll T$) времен позволяет составить достаточно

полное представление о всем ходе эволюции начальных возмущений. Для того чтобы повысить степень доверия к нашему подходу, а также и к используемым приближенным методам вычисления интегралов (3.2), (3.4), в Приложении рассмотрен один сходный интеграл, для которого удастся найти точное выражение. Как и следовало ожидать, в обоих предельных случаях приближенные и точные значения интеграла совпадают. В промежуточном интервале $t \approx T$ зависимость интеграла от времени не имеет каких-либо особенностей.

б. Малые времена ($t \leq T$). Из разд. а вытекает, что при $t \ll T$ окрестность особой точки $|x - x_s| \lesssim \delta x_s$, в которой проявляются эффекты конечного ларморовского радиуса ионов, не должна оказывать существенного воздействия на эволюцию возмущений. В области $|x - x_s| \gtrsim \delta x_s$ для решений $\varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(4)}(x)$ можно использовать приближенные асимптотические выражения. При $|x - x_s| \gg \gg \delta x_s$ в функции Грина, составленной из этих выражений, можно пренебречь малыми слагаемыми, пропорциональными $\varphi^{(3)}(x)$ и $\varphi^{(4)}(x)$. Используя также условия $\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \varphi^{(3,4)}(x) \right| \gg \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \varphi^{(1,2)}(x) \right|$, представим детерминанты, стоящие при $\varphi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$, в следующем приближенном виде: $\varphi^{(2)}(x_0) W[\varphi^{(3)'}(x_0), \varphi^{(4)'}(x_0)]$ и $\varphi^{(1)}(x_0) \times \times W[\varphi^{(3)'}(x_0), \varphi^{(4)'}(x_0)]$ соответственно. Аналогичным образом получаем $W_4 \approx W[\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(2)}(x_0)] W[\varphi^{(3)''}(x_0), \varphi^{(4)''}(x_0)]$. В результате этих преобразований для функции Грина находим следующее простое выражение:

$$G_{\omega}(x, x_0) \approx \frac{i}{\pi} \begin{cases} \varphi^{(1)}(x) \varphi^{(2)}(x_0) & \text{при } x > x_0, \\ \varphi^{(2)}(x) \varphi^{(1)}(x_0) & \text{при } x < x_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Принимая во внимание (3.5) и учитывая наличие логарифмической особенности у функции $K_0[k(x - x_s)]$, получаем следующее асимптотическое выражение интеграла (3.4):

$$\varphi(x, x_0, t) \approx \frac{1}{t} \left(\frac{\omega_A(x)}{\omega_s(x)} \exp[-i\omega_s(x)t] + \frac{\omega_A(x_0)}{\omega_s(x_0)} \exp[-i\omega_s(x_0)t] \right). \quad (3.6)$$

Здесь $\omega_s(x)$ — решение локального дисперсионного уравнения (1.2). При $\eta \neq 0$ частота $\omega_s(x)$ отличается от локальной альфвеновской частоты $\omega_A(x)$. Если плазма неравновесна ($\eta < 0$), то $\text{Im } \omega_s(x) > 0$, что соответствует неустойчивости плазмы.

Из (3.5) следует, что начальное возмущение, локализованное в точке x_0 , возбуждает два волновых процесса с частотами $\omega_s(x_0)$ и $\omega_s(x)$ соответственно, здесь x — точка наблюдения. Волновой процесс первого типа, являющийся аналогом волн Ван-Кампена — Кейза (см., например, [7, 8, 13, 14]), представляет собой альфвеновские колебания, бегущие вдоль магнитного поля с локальной альфвеновской скоростью $c_A(x_0)$. В неравновесной плазме оба волновых процесса нарастают во времени. Присутствие в асимптотике

$\varphi(x, x_0, t)$ колебаний с частотой $\omega_s(x_0)$ вполне естественно, и, по-видимому, не требует пояснений. Появление волнового процесса второго типа в определенной степени связано с использованием метода преобразования Лапласа [28]. Действительно, при внезапном возникновении возмущения должен возбуждаться весь спектр частот рассматриваемой системы. Однако в точке x возмущения с частотами $\omega \neq \omega_s(x)$ взаимно уничтожают друг друга из-за интерференции. Для того чтобы стала заметной разность между частотами, отстоящими на $\Delta\omega$, необходимо время $t \geq 1/\Delta\omega$. Поэтому чем больше время t , тем меньше интервал частот $\Delta\omega$, которые дают вклад в асимптотику (3.6). С этим обстоятельством связано степенное затухание амплитуды возмущения (3.6), которое проявляется в равновесной плазме, когда $\eta = 0$, $\text{Im } \omega_s = 0$. Затухание по закону $1/t$ было получено в работах [4, 16, 17, 19, 22, 29] при решении задачи об эволюции начальных возмущений, причем в [4, 16, 17, 19, 22] использовался метод преобразования Лапласа, а в [29] рассматривались возмущения в виде волновых пакетов. По существу тот же самый результат был получен в [2], где рассматривалось пространственное затухание колебаний, возбуждаемых стационарным источником.

в. Большие времена ($t \gg T$). При $t \gg T$ интеграл (3.4) вычисляется методом перевала. Положение точки перевала на плоскости комплексной частоты ω определяется условием:

$$t = -i \frac{d}{d\omega} \ln G. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что для достаточно больших времен асимптотика возмущения отлична от нуля, если функция Грина включает в себя составляющую, характерный частотный масштаб которой $\delta\omega_G$ стремится к нулю. В п. а § 3 было отмечено, что в окрестности точек $\omega_s(x)$, $\omega_s(x_0)$ масштаб $\delta\omega_G \approx |\omega'_A| |\Delta|^{-1/3}$. Однако он уменьшается с удалением от точек $\omega_s(x)$, $\omega_s(x_0)$ [см. (2.8)]. В результате при $t \gg T$ точка перевала, если она существует, должна находиться на столь больших расстояниях от точек $\omega_s(x)$, $\omega_s(x_0)$, где для функций $\varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(4)}(x)$ опять справедливы асимптотические представления.

Выделим ту часть функции Грина, которая может дать точку перевала. Рассмотрим сначала область $x > x_0$. В первом слагаемом явление трансформации решений нужно учитывать лишь у функций $\varphi^{(1)}(x)$. Быстро меняющаяся часть $\varphi^{(4)}(x_0)$, добавляемая к функциям $\varphi^{(1)}(x_0)$ и $\varphi^{(2)}(x_0)$, в определителях очевидным образом выпадает. Асимптотика первого слагаемого имеет вид $\varphi^{(1)}(x) \varphi^{(2)}(x_0) W[\varphi^{(3)'}(x_0), \varphi^{(4)'}(x_0)]$. В ней быстро меняющиеся решения $\varphi^{(3)}(x_0)$ и $\varphi^{(4)}(x_0)$ взаимно «погашаются» и поэтому точка перевала может быть связана только с быстро меняющейся частью $\varphi^{(1)}(x)$, появляющейся в результате явления трансформации. Во второе слагаемое быстро меняющиеся решения $\varphi^{(3)}(x)$ и $\varphi^{(4)}(x)$ входят с разными аргументами. Несложные оценки, однако, пока-

зывают, что погашение экспонент происходит и в этом случае. В результате при интегрировании этого слагаемого контур интегрирования можно сместить в область как угодно больших отрицательных значений $\text{Im } \omega$, где $t \gg \left| \frac{d}{d\omega} \ln G \right|$. Аналогичные соображения приводят к выводу, что в области $x < x_0$ точка перевала вообще отсутствует. Отсюда следует, что при $t \gg T$ сколько-нибудь значительный уровень возмущения останется лишь в области $x > x_0$, т. е. со стороны большей плотности.

Используя для функции Грина приближенное выражение

$$G_\omega(x, x_0) \approx \begin{cases} \frac{i}{\pi} \varphi^{(1)}(x) \varphi^{(2)}(x_0) & \text{при } x > x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

где асимптотика $\varphi^{(1)}(x)$ определяется (2.8), (2.9), получаем

$$\varphi(t, x, x_0) \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{t} K_0[k(x-x_0)] \exp[-ikr_0 - i\omega_s(x)t + \frac{i}{24\Lambda} \times \\ \times (\omega'_A t)^3] & \text{при } x > x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что в равновесной столкновительной плазме при $t \gg |\omega'_A|^{-1} (24 |\Lambda|)^{1/3}$ эффекты конечной проводимости приводят к затуханию возмущений по закону $\varphi \sim \exp\left(-\frac{c^2}{96\pi\sigma} \omega'^2 t^3\right)$. В слабостолкновительной плазме ($\Lambda = \frac{4}{7} \rho_i^{-2} (1 - i\delta)^{-1} \omega_A^{-1} \omega'_A$) эволюция возмущений имеет более сложный характер. При $t \gg T \approx |\omega'_A|^{-1} \times (24 |\Lambda|)^{1/3}$ частота возмущения начинает возрастать со временем. Эффекты конечной проводимости проявляются позже, при $t \gg T\delta^{-1}$. Если плазма неравновесна, то они сначала лишь уменьшают инкремент колебаний. Однако с течением времени их влияние возрастает и при $t = t_d = \left(\frac{2}{|\omega'_A|}\right)^{3/2} \left(\frac{|\Lambda| \gamma_s}{\delta}\right)^{1/2}$ нарастание сменяется затуханием. За это время амплитуда возмущения возрастает в A раз:

$$A \approx \exp\left[\frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\Lambda_0}{\delta}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_s}{\omega'_A}\right)^{3/2}\right]. \quad (3.10)$$

Здесь обозначено $\Lambda_0 = \frac{4}{7} \rho_i^{-2} \omega_A^{-1} \omega'_A$, $\gamma_s = \frac{1}{2} \eta \omega_A$ — «локальный» инкремент колебаний.

Полученный нами закон затухания $\exp(-Ct^3)$ (в [29] он был найден иным способом) характерен для несобственных колебаний в диссипативной среде. Так, например, в [30] показано, что по этому закону затухают волны Ван-Кампена под влиянием слабых кулоновских соударений. Действительно, волны Ван-Кампена воз-

никают при движении пучков заряженных частиц, плотность которых модулирована в направлении движения. Так, если скорости всех частиц пучка одинаковы [распределение по скоростям имеет вид $f_0(v) = \delta(v - v_0)$], то в лабораторной системе координат возникает периодическая волна с частотой $\omega = 2\pi v_0/\lambda$, где λ — пространственный период модуляции. Под действием кулоновских соударений распределение расплывается по закону $f_0(v) \sim \exp[-(v-v_0)^2/C_1 t]$. Нетрудно увидеть, что интеграл $\int dv \exp(i kv t) \times \times f_0(v)$, определяющий временную зависимость возмущений, будет спадать во времени по закону $\sim \exp(-Ct^2)$. В рассматриваемой задаче затухание происходит аналогичным образом. Действительно, в силу того, что альфвеновская скорость является функцией координаты x , на различных силовых линиях возмущения движутся с различной скоростью. Эффекты конечной проводимости приводят к диффузии возмущений через магнитное поле. Возмущения, локализованные вначале на какой-то силовой линии, с течением времени расплываются по закону $\delta x(t) \approx (c^2 t/4\pi\sigma)^{1/2}$. В результате при $t \gtrsim \pi [|\omega'_A| \delta x(t)]^{-1}$ на одной и той же силовой линии окажутся возмущения, сдвинутые по фазе на π , что должно привести к их затуханию. Время затухания, получаемое с помощью такой оценки $t_d \sim (4\pi^2\sigma/c^2 ||\omega'_A|^2 ||)^{1/3}$, по порядку величины совпадает со следующим из (3.9).

§ 4. Флуктуации в неравновесной плазме

В п. в § 3 показано, что в неравновесной плазме амплитуда возмущений меняется немонотонно, возрастая при $t < t_d$ и убывая при $t > t_d$. Для макроскопических возмущений полученные результаты могут оказаться неверными, так как уже при $t < t_d$ их амплитуда может достигнуть такой величины, что вступят в действие нелинейные эффекты, не учитывавшиеся нами. Однако макроскопические возмущения в определенной степени поддаются контролю. В то же время в плазме нельзя устранить микровозмущения, которые непрерывно возникают из-за теплового движения заряженных частиц. Эти возмущения в силу их малой амплитуды будут эволюционировать в соответствии с предсказаниями линейной теории. Поскольку по линейной теории возмущения не растут непрерывно, а в конце концов затухают, то при наличии постоянного источника возмущений в плазме установится некоторый стационарный уровень альфвеновских флуктуаций. Его определение и является нашей задачей, которую мы рассмотрим, следуя [19].

Выше мы рассматривали эволюцию начальных возмущений с помощью метода преобразования Лапласа. При использовании этого метода считается, что возмущения возникают мгновенно при $t = 0$. Именно этому предположению и обязана универсальная применимость метода преобразования Лапласа, поскольку на мгновенное включение возмущения должны отзываться все степени свободы

исследуемой системы (разложение ступенчатой функции в интеграл Фурье содержит все частоты). Законен вопрос, имеются ли в действительности такие возмущения, о которых можно сказать, что они возникают мгновенно. По нашему мнению, такими возмущениями могут считаться скачки микротоков, обязанные соударениям между заряженными частицами. Действительно, при столкновениях может меняться суммарная величина микротоков сталкивающихся частиц, а следовательно, могут возбуждаться электромагнитные колебания (тормозное дипольное излучение). Отдельное столкновение занимает интервал времени, по порядку величины равный периоду ленгмюровских колебаний ω_{pj}^{-1} ($j = e, i$) (времени пролета частиц через дебаевскую среду). Очевидно, что при рассмотрении низкочастотных колебаний с $\omega \ll \omega_{pj}$ изменение скорости в результате столкновения может считаться мгновенным. Поскольку обычно скорость электронов намного превышает ионную, то наибольший эффект в смысле возбуждения электромагнитных колебаний должны давать соударения электронов с ионами. Отметим, что при столкновениях электронов с электронами в силу закона сохранения импульса суммарный микроток не меняется и поэтому в дипольном приближении излучение отсутствует.

Если длина волны рассматриваемых колебаний значительно превышает r_{dj} , то столкновения можно считать точечными и пространственная зависимость начального возмущения должна выбираться в виде δ -функции. Отсюда вытекает, что математический формализм, использованный в разд. а § 3, хорошо подходит для описания возбуждения альфвеновских колебаний при соударениях электронов с ионами. Напомним, что альфвеновские колебания в указанном выше смысле можно считать низкочастотными и длинноволновыми, так как для них выполняются условия $\omega \ll \omega_{pe}$, $k \ll r_{de}^{-1}$.

Для того чтобы включить в рассмотрение эффекты, вызываемые изменением скорости электронов при соударениях с ионами, необходимо в обычной системе магнитогидродинамических уравнений (см., например, [9]) изменить закон Ома, включив в него электронный инерционный член:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{vH}] + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{m_e}{n_0 e^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}^{(ст)}. \quad (4.1)$$

Здесь $\mathbf{j}^{(ст)} = -e \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)]$, суммирование проводится по всем электронам, \mathbf{v}_{α} — скорость теплового движения α -го электрона. Рассматривая с помощью такой модифицированной системы уравнений альфвеновские колебания, приходим к уравнению (3.1), получая при этом явное выражение для $C_{\omega}(x_0)$, характеризующее начальные возмущения:

$$C_{\omega}(x_0) = i \frac{c^2 k_z k_y \omega_i}{\omega \omega_{pi}} \exp(-i \mathbf{k} \mathbf{r}'_0) \Delta v_z \left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) \delta(x_0 - x'_0). \quad (4.2)$$

Здесь Δv_z — изменение проекции скорости электрона на направление магнитного поля при соударении с ионом, \mathbf{r}'_0 — значение

координаты, при которой происходит столкновение. Для упрощения вычислений считаем, что фазовая скорость колебаний значительно превышает тепловую скорость электронов. Это предположение позволяет считать, что $x_{0\alpha}(t) \approx x'_{0\alpha}$. При вычислении (4.2) начало отсчета времени совмещено с моментом соударения. Выражение (4.2) описывает возмущение, вызываемое отдельным соударением единичного электрона (индекс α для простоты опущен). После того как с помощью (4.2) будут получены интересующие нас выражения, они должны быть усреднены по статистическому ансамблю.

При выводе (3.1), (4.2) мы использовали преобразование Фурье по координатам y и z , не отмечая для краткости зависимость величин, входящих в эти уравнения, от вектора $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$. При точечном столкновении все фурье-гармоники возбуждаются примерно в одинаковой степени (фурье-образ δ -функции не зависит от \mathbf{k} и поэтому $C_\omega(x)$ — слабая степенная функция компонент волнового вектора). Однако коэффициент усиления зависит от \mathbf{k} экспоненциально. Определим, какие фурье-компоненты усиливаются в наибольшей степени. Раскачка альфвеновских колебаний обусловлена резонансным взаимодействием ионов пучка с альфвеновскими колебаниями. Этот эффект учитывается добавлением к ε мнимой части, пропорциональной η (см. § 1). Она отлична от нуля при выполнении резонансного условия $\omega \approx k_{\parallel} v_A \approx (k_{\parallel} + 1/qR) v_b$. Поскольку обычно v_A значительно превышает продольную скорость ионов пучка v_b , то условие резонанса принимает вид $k_{\parallel} \approx \frac{1}{qR} \frac{v_b}{v_A}$, где k_{\parallel} — проекция волнового вектора на направление магнитного поля. Найденное значение k_{\parallel} через $\omega_A = k_{\parallel} c_A$ входит в выражение для коэффициента усиления. Отметим, что значение k_{\parallel} совпадает с k_z лишь в системах с плоскими силовыми линиями магнитного поля. В тороидальных системах величине k_z соответствует проекция волнового вектора на ось системы. Если силовые линии магнитного поля являются винтовыми, то последнее значение отличается от k_{\parallel} , его можно получить из равенства $k_{\parallel} = (\mathbf{kH}_0)/H_0$.

Экстремальное значение k_y , равное ρ_b^{-1} , определяется из условия максимума локального инкремента $\gamma_{s \text{ макс}} \approx q^2 v_b n'_{0b}/n_0$ ($\gamma \sim k_y$ при $k_y \ll \rho_b^{-1}$ и $\gamma \sim k_y^{-1}$ при $k_y \gg \rho_b^{-1}$). Вместе с инкрементом максимальное значение принимает и коэффициент усиления (3.10):

$$A_{\text{макс}} \approx \exp \left[\frac{4 \sqrt{2}}{3} q^4 \left(\frac{n_{0b}}{n_0} \right)^{3/2} \left(\frac{R}{\rho_i} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{a} \right)^{3/4} \left(\frac{v_b}{v_e \rho_i} \right)^{1/2} \right], \quad (4.3)$$

Здесь учтено, что по порядку величины имеет место равенство $n'_{0b}/n_{0b} \approx a^{-1}$, где a — малый радиус токамака. При оценке $\gamma_{s \text{ макс}}$ и $A_{\text{макс}}$ мы приняли, что ионы пучка распределены примерно изотропно: $v_{\parallel b} \approx v_{\perp b} \approx v_b$. Ниже показано, что показатель экспоненты в (4.3) принимает довольно большие значения, поэтому в обла-

сти максимума зависимость A от k_y будет очень резкой. Поскольку вклады отдельных возмущений в интересующие нас эффекты входят аддитивно, а отношение ρ_b/a в реальных ситуациях, по-видимому, не может быть меньше 10^{-2} , то при оценках по порядку величины учитывается вклад лишь одной моды, для которой примем $k_y \approx \rho_b^{-1}$. С учетом сказанного обратное преобразование Фурье сводится к подстановке в (3.9) $k_y \approx \rho_b^{-1}$, $k_z \approx k_z(k_{||}, k_y)$ и умножению на $(1/4 Ra) \exp(-ikr)$.

В § 3 мы нашли, что альфвеновские флуктуации в конечном счете затухают из-за конечной проводимости плазмы. При этом их энергия передается электронам. Плотность выделения энергии дается выражением:

$$Q = j^2/\sigma = [\omega_A^2 n_0 m_e v_e / \omega_i^2] \langle |\Phi|^2 \rangle. \quad (4.4)$$

Здесь v_e — частота соударений электронов с ионами, Φ — вектор смещения плазмы в колебаниях, его x -я компонента находится из равенства

$$\varphi_x(x, t) = \int dx_0 \varphi(x, x_0, t) C_{\omega_A}(x_0),$$

где $\varphi(x, x_0, t)$ определяется (3.9), φ_y может быть получена из условия несжимаемости, а φ_z в альфвеновских колебаниях равна нулю. Символ $\langle . . . \rangle$ в (4.4) означает усреднение по ансамблю:

$$\langle |\Phi|^2 \rangle = \int dt_0 \int d\mathbf{r}'_0 \int d\mathbf{v} n_0 f_0(\mathbf{v}) \int [d\sigma(\chi, v) n_0 v] |\Phi|^2, \quad (4.5)$$

где интегрирование производится по времени соударения t_0 , его координате \mathbf{r}'_0 , скорости электронов до соударения \mathbf{v} ($f_0(\mathbf{v})$ — функция распределения электронов), углу отклонения электрона при соударениях, которые считаются упругими ($d\sigma(\chi, v)$ — дифференциальное сечение рассеяния электрона, движущегося со скоростью v , на угол χ).

Выражение (4.5) не содержит индекса электрона α . Мы исключили его с помощью следующих соображений. Предположим, что плазма занимает достаточно большой объем V и отдельные электроны распределены по нему равномерно и независимо друг от друга. В этом случае имеют место соотношения:

$$\frac{1}{V} \left\langle \left| \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \langle |\Phi_{\alpha}|^2 \rangle = n_0 \langle |\Phi|^2 \rangle.$$

Вычислим сначала интегралы по χ и \mathbf{v} . От угла χ зависит $\Delta v_{||}$ — изменение продольной скорости электрона при соударении. Рассмотрим геометрию столкновения. Введем три единичных взаимно ортогональных вектора, один из которых направим по скорости электрона до соударения $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}/v$, второй — \mathbf{e}_2 расположим в плоскости, проходящей через \mathbf{e}_1 и \mathbf{H}_0 , ориентация третьего при этом определена однозначно. В декартовой системе координат, ось z которой направлена вдоль \mathbf{H}_0 , получаем:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}}{v} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta);$$

$$\mathbf{e}_2 = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta);$$

$$\mathbf{e}_3 = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0).$$

После столкновения вектор скорости электрона направлен по $\mathbf{e} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$, где $\alpha_1 = \cos \chi$; $\alpha_2 = \sin \chi \sin \psi$; $\alpha_3 = \sin \chi \cos \psi$; угол ψ равновероятен, а вероятность рассеяния на угол χ определяется сечением $\sigma(\chi, v)$. Величина $(\Delta v_{\parallel})^2$, усредненная по углу ψ , равна

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_{\psi} = v^2 \left[\cos^2 \theta (\cos \chi - 1)^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \chi \right].$$

Интеграл от этого выражения по \mathbf{v} и χ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_{\mathbf{v}, \chi, \psi} &= \\ &= \frac{8\pi}{3} \int dv v^5 f_0(v) \int d\sigma(\chi, v) (1 - \cos \chi). \end{aligned}$$

Последнее выражается через эффективную частоту соударений, определяющую торможение электронов на ионах (см., например, [31]):

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle_{\mathbf{v}, \chi, \psi} = v_e T_e / 2m_e n_0. \quad (4.6)$$

Отметим, что (4.6) можно получить, вычислив нашим методом силу трения, действующую на электроны, движущиеся со скоростью \mathbf{u} относительно ионов, и по определению v_e равную $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -m_e \times \times n_0 v_e \mathbf{u}$.

Интегралы по dy'_0, dz'_0 в (4.5) сводятся к умножению на $4\pi^2 aR$. Интеграл по dx'_0 расходится при $x'_0 \rightarrow x$, так как $\varphi_{\parallel} = -\frac{1}{ik_y} \frac{d\varphi_x}{dx} \sim (x_0 - x'_0)^{-3}$. Расходимость вызвана тем обстоятельством, что при нахождении функции Грина уравнения (3.1) мы использовали асимптотические выражения, справедливые в области $|x - x_0| \gg \Lambda_0^{-1/3}$.

При оценках по порядку величины можно обрезать интеграл по dx'_0 при $|x - x'_0| \approx \Lambda_0^{-1/3}$. Наконец, интеграл по dt_0 вычисляется методом перевала.

Энергия, выделяющаяся в электронной компоненте плазмы, в конечном счете отбирается у быстрых ионов. Мы приведем выражение для количества энергии, теряемой отдельным ионом пучка в единицу времени:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_b &= \frac{Q_b}{n_{0b}} = 6\pi q^{-15/4} \left(\frac{n_0}{n_{0b}} \right)^{5/4} \left(\frac{v_e}{\omega_{pi}} \right)^{3/4} \left(\frac{R}{a} \right)^{1/8} \times \\ &\times \frac{c^{3/4} v_b^{5/4}}{c_A^2} \left(\frac{c}{\omega_{pi}} \right)^{13/4} \frac{1}{n_{0b} a^{11/12} \rho_i^{11/6} R^{7/2}} A_{\text{макс}}^2 \dot{\epsilon}_{b1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\dot{\epsilon}_{b1} = -\dot{\epsilon}_b v_e m_e / m_b$ — классические энергии при кулоновских соударениях с электронами.

Вычислим (4.7) при параметрах плазмы, принятых в [11]; $H_0 = 50$ кГц; $n_0 = 10^{14}$ см $^{-3}$; $R = 3$ м; $a = 0,5$; температура плазмы $T = 5$ кэВ; $\epsilon_b = 100$ кэВ; положим также $n_{0b}/n_0 \approx 1/20$, $q \approx 1$. В этом случае показатель экспоненты в $A_{\text{макс}}$ равен $\approx 10^3$, а безразмерный множитель, стоящий перед $A_{\text{макс}}^2$, $\approx 10^{-18}$. Эти оценки показывают, что аномальные потери значительно превышают классические. Следует, однако, отметить, что в настоящем рассмотрении не учитывались эффекты, связанные с перекосом силовых линий магнитного поля, т. е. широм (см. п. а § 3). Влияние шира может привести к резкому уменьшению показателя экспоненты в $A_{\text{макс}}$. В результате аномальные потери могут оказаться меньше классических. Однако в п. г § 2 отмечено, что при достаточно большом шире имеется опасность раскачки собственных колебаний. Если эта опасность реализуется, то определение уровня флуктуаций потеряет свое значение, так как в рамках линейной теории неустойчивые собственные колебания нарастают неограниченно.

В заключение отметим, что в работе [19] методом, использованным выше, был определен уровень высокочастотных электромагнитных флуктуаций в простейшем случае равновесной немагнитной плазмы. Полученные результаты совпадают с известными (см., например, [32]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим интеграл

$$J(x, t) = \int_{-\infty + i\gamma}^{\infty + i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) \frac{1}{2\sqrt{\pi} kv_T} W\left(\frac{\omega - kv_0(x)}{kv_T}\right). \quad (\text{П.1})$$

Здесь W — хорошо известный интеграл вероятности от комплексного аргумента:

$$W\left(\frac{\omega - kv_0(x)}{kv_T}\right) = \frac{ik}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp(-v^2/v_T^2) \frac{1}{\omega - kv_0(x) - kv}. \quad (\text{П.2})$$

Подставим (П.2) в (П.1) и поменяем порядок интегрирования:

$$J(x, t) = \frac{ik}{2\pi^{3/2} v_T} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp(-v^2/v_T^2) \times \\ \times \int_{-\infty + i\gamma}^{\infty + i\gamma} d\omega \exp(-i\omega t) \frac{1}{\omega - kv_0(x) - kv}. \quad (\text{П.3})$$

Оба интеграла легко вычисляются. При этом получаем (см. [28])

$$J(x, t) = \exp\left(-ikV_0(x)t - \frac{1}{4}k^2 v_T^2 t^2\right). \quad (\text{П.4})$$

Тот же самый результат можно было бы получить с помощью таблиц [33].

Рассмотрим поведение функции $W[(\omega - kV_0(x))/kv_T]$ на плоскости комплексного переменного x . Скорость $V_0(x)$ будем считать монотонной функцией координаты. Для определенности примем $V_0'(x) < 0$. Точку x_s , в которой выполняется условие $\omega/k = V_0(x_s)$, назовем резонансной. Вдали от этой точки, в области, где выполняется условие $|x - x_s| \gg \frac{v_T}{|V_0'|}$, для W можно использовать упрощенное «гидродинамическое» выражение:

$$W\left(\frac{\omega - kV_0(x)}{kv_T}\right) \approx -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{kv_T}{\omega - kV_0(x)}. \quad (\text{П.5})$$

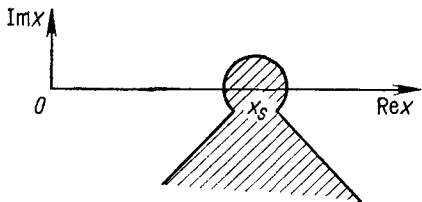


Рис. 5. Плоскость комплексного переменного x для функции $W[(\omega - kV_0(x))/kv_T]$ при $\text{Im}\omega = 0, dV_0/dx < 0$

Более аккуратное рассмотрение показывает, что это представление становится несправедливым в целом секторе комплексного переменного x , выходящем из точки x_s . На рис. 5 этот сектор заштрихован (ср. с рис. 1). Подставляя (П.5) в (П.1), находим

$$J(x, t) \approx \exp[-ikV_0(x)t]. \quad (\text{П.6})$$

То же самое выражение получается из (П.4) при $t \ll 1/kv_T$. Этот результат вполне естествен. Действительно, «тонким» кинетическим эффектам соответствуют малые частотные интервалы $\delta\omega \approx kv_T$. По соотношению неопределенностей $\delta\omega t \approx 1$ для их выявления требуются большие времена $t \gg (kv_T)^{-1}$. При $t \ll (kv_T)^{-1}$ можно использовать приближенное гидродинамическое представление $W[(\omega - kV_0(x))/kv_T]$ [см. (П.5)]. Оно сингулярно, и поэтому $J(x, t)$ оказывается незатухающей периодической функцией времени. Однако поскольку на самом деле функция $W[(\omega - kV_0(x))/kv_T]$ в любой конечной части плоскости ω является регулярной, а масштаб осциллирующей экспоненты $\exp(-i\omega t)$ по ω уменьшается со временем $\delta\omega \approx 1/t$, то прообраз функции $W[(\omega - kV_0(x))/kv_T]$ при $t \rightarrow \infty$ должен стремиться к нулю. Интегралы типа (П.1), которые содержат быстро осциллирующую и аналитическую функции, удобно вычислять методом перевала. Так как $\delta\omega \approx 1/t$ и характерный частотный масштаб $W[(\omega - kV_0(x))/kv_T]$ уменьшается с ростом аргумента функции W , то при $t \rightarrow \infty$ точка перевала должна определяться асимптотикой функции W :

$$W(s) \approx \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{\pi}s} + \exp(-s^2) & (|\text{Re } s| > |\text{Im } s|), \\ \frac{i}{\sqrt{\pi}s} + (1 - \text{sgn } \text{Im } s) \exp(-s^2) & (|\text{Re } s| < |\text{Im } s|). \end{cases} \quad (\text{П.7})$$

Используя (П.7), находим, что точка перевала $\omega^*(t, x) = kV_0(x) - \frac{i}{2} t (kV_T)^2$ попадает в область, где $W(s) \approx 2 \exp(-s^2)$. Подставляя это выражение в (П.1), получаем (П.4).

Обратим внимание на еще одну любопытную деталь. Предположим формально, что величина $v_{\frac{1}{2}}^2$ комплексна $v_{\frac{1}{2}}^2 = a + ib$. Если $a > 0$, то мы по-прежнему можем использовать все полученные выше результаты. При $b > 0$ с увеличением b заштрихованный сектор на рис. 5, в котором неприменимо упрощенное представление (П.5), поворачивается вправо, а при $b < 0$ с ростом $|b|$ — влево. Однако до тех пор, пока $a \neq 0$, этот сектор не захватывает действительной оси. Если $a \ll |b|$, то при $t \gg 2/k\sqrt{b}$ функция $J(x, t)$ становится быстро осциллирующей, причем период осцилляций с ростом времени уменьшается, а их амплитуда остается постоянной до $t \approx 2/k\sqrt{a}$. При $t \gg 2/k\sqrt{a}$ колебания затухают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Velikhov E. P. Remarks on the report by W. A. Newcomb Lagrangian and Hamiltonian Methods in Magnitohydrodynamics. — «Nucl. Fusion», Suppl., 1961, v. 2, p. 492.
2. Pridmore-Brown D. C. Alfvén Waves in a Stratified Incompressible Fluid. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 1290.
3. Uberoi C. Alfvén Waves in Inhomogeneous Magnetic Fields. — «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 1673.
4. Тимофеев А. В. Альфвеновские колебания неоднородной и неравновесной плазмы. Препринт ИАЭ-2674. М., 1976.
5. Тимофеев А. В. К теории устойчивости альфвеновских колебаний неоднородной плазмы. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 510.
6. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
7. Тимофеев А. В. Резонансные явления в течениях плазмы и жидкости. Препринт ИАЭ-1570. М., 1968.
8. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости. — «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, с. 195.
9. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
10. Михайловский А. Б. Гидромагнитная пучковая неустойчивость в токе-маке с инжекцией нейтральных атомов. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 79.
11. Rosenbluth M. N., Rutherford P. H. Excitation of Alfvén Waves by High-Energy Ions in a Tokamak. — «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 1428.
12. Wasow W. The Complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. — «Ann. Math.», 1948, v. 39, p. 852.
13. Case K. M. Stability of inviscid plane Couette flow. — «Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 143.
14. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости. — «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, с. 1068.
15. McPherson D. A., Pridmore-Brown D. C. Density gradient effects on Alfvén wave propagation in a cylindrical plasma. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 2033.
16. Tataronis J., Grossmann W. Decay of MHD-waves by phase mixing. I. The sheet-pinch in plane geometry. — «Z. Phys. », 1973, Bd 261, S. 203.
17. Grossmann W., Tataronis J. Decay of MHD-waves by phase mixing. II. The theta-pinch in cylindrical geometry. — «Z. Phys.», 1973, Bd 261, S. 217.
18. Tataronis J. A. Energy absorption in the continuous spectrum of ideal MHD. — «J. Plasma Phys.», 1975, v. 13, p. 87.
19. Тимофеев А. В., Мейтлис В. П., Чулков Г. Н. Альфвеновские флуктуации в неоднородной и неравновесной плазме. — «Физика плазмы», 1978, т. 4, вып. 5.

20. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1974.
21. Timofeev A. V. Resonance interaction of flute oscillations with ion Larmor drift. — «Nucl. Fusion», 1968, v. 8, p. 99.
22. Grossmann W., Kaufmann M., Neuhauser J. Damping of alfvén and magnetoacoustic waves at high beta. — «Nucl. Fusion», 1973, v. 13, p. 462.
23. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
24. Тимофеев А. В. Желобковые колебания плазмы с нескомпенсированным пространственным зарядом. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 14.
25. Хединг Д. Введение в метод фазовых интегралов. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.
26. Horton W., Kwak H., Estes R., Duk-In Choi. Initial value problem with non-Hermitian radial mode equation. — «Phys. Fluids», 1977, v. 20, p. 1476.
27. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
28. Костин В. М., Тимофеев А. В. Об устойчивости электронного потока с градиентом скорости. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 1378.
29. Неустойчивости несобственных колебаний и их роль в проблеме токамака с инжекцией нейтралов. Препринт ИАЭ-2693. М., 1976. Авт.: В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Л. Френкель, И. Г. Шухман.
30. Карпман В. И. Об «особых» решениях уравнений для плазменных колебаний. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 51, с. 907.
31. Хохштим А., Массель Г. В кн.: Кинетические процессы в газах и плазме. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1972, с. 126.
32. Электродинамика плазмы. Под ред. А. И. Ахизера. М., «Наука», 1974.
33. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Л. Френкель, И. Г. Шухман

§ 1. Введение

В ряде работ, появившихся в последние годы (см. [1,2] и приведенную там библиографию), был предсказан новый класс неустойчивостей в токамаке, связанных с раскачкой непотенциальных, в частности альфвеновских, колебаний. Такие неустойчивости могут возбуждаться как в «классическом», содержащем почти максвелловскую плазму, токамаке, так и особенно в токамаке с примесью горячих ионов. Особую актуальность этот вопрос приобрел в связи с проектами нагрева плазмы быстрыми нейтральными частицами и идеей двухкомпонентного токамака.

Хорошо известно, что альфвеновские волны являются собственными колебаниями однородной плазмы, находящейся в однородном магнитном поле. Однако при учете неоднородности плазмы и магнитного поля, они, вообще говоря, перестают быть собственными. Согласно § 14.10 книги [3], альфвеновские колебания холодной плазмы описываются уравнением:

$$\nabla_{\perp} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_A^2 \right) \nabla_{\perp} \xi = 0. \quad (1.1)$$

Здесь функция ξ характеризует амплитуду возмущения (в частности, под ξ можно понимать смещение плазмы в направлении неоднородности), $\omega_A = k_{\parallel} c_A$, c_A — скорость Альфвена, k_{\parallel} — волновое число вдоль магнитного поля, ∇_{\perp} — градиент поперек магнитного поля. В случае однородной плазмы и магнитного поля отсюда вытекает, что к числу собственных колебаний среды относятся альфвеновские волны с законом дисперсии $\omega = \pm \omega_A$. С учетом неоднородности плазмы и магнитного поля скорость c_A становится функцией координат, и, что еще более важно в условиях токамака, вследствие шира магнитного поля от координат зависит также k_{\parallel} (см. § 2.3 книги [1]). При этом, как можно показать (см., например, [4]), уравнение (1.1) не имеет собственных решений.

Описанная ситуация с альфвеновскими волнами не исключение. Другие типы колебаний, также являющиеся собственными в однородной плазме, перестают быть таковыми в неоднородной среде. К ним, в частности, относятся наиболее простые колебания пла-

змы — ленгмюровские волны. В холодной плазме и в отсутствие магнитного поля они описываются уравнением, аналогичным уравнению (1.1):

$$\nabla \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \nabla \psi = 0. \quad (1.2)$$

Здесь ψ — потенциал электрического поля ($\mathbf{E} = -\nabla\psi$), $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0/m$ — квадрат плазменной частоты, e , m — заряд и масса электрона. Если в пренебрежении неоднородностью плазмы, $n_0 = \text{const}$, из (1.2) следует выражение для частоты ленгмюровских волн $\omega = \pm \omega_p$, являющихся собственными колебаниями среды, то при $\nabla n_0 \neq 0$ уравнение (1.2), как вытекает, например, из [4], не имеет собственных решений. Это означает, что класс собственных колебаний холодной неоднородной плазмы не содержит ленгмюровских волн.

Традиционная постановка задачи в теории неустойчивостей плазмы заключается в том, что ищут неустойчивые собственные колебания среды. В случае слабой термодинамической неравновесности они близки к собственным колебаниям соответствующей равновесной среды и учет неравновесности можно рассматривать как поправку. Таким образом, принципиально важным в этом подходе является наличие собственных колебаний.

Если собственные колебания среды отсутствуют, необходимо обратиться непосредственно к рассмотрению эволюции начальных возмущений. Как известно, метод начальных возмущений играет важную роль в теории плазменных неустойчивостей. Достаточно отметить, что именно этим методом оправдывается рассмотрение собственных колебаний в случае однородной плазмы [5].

В слабонеоднородной среде, размер неоднородности которой (обозначим его L) велик по сравнению с характерной длиной волны, начальное возмущение можно рассматривать как суперпозицию волновых пакетов. Если ограничиться одномерной неоднородностью по оси x , то пакет можно характеризовать координатой x и волновым вектором k_x (вдоль осей y и z возмущение выберем в виде плоской волны с волновыми векторами k_y, k_z). Как известно [6], в среде без диссипации координата и волновой вектор пакета удовлетворяют уравнениям типа Гамильтона:

$$dk_x/dt = -\partial\omega(k_x, x)/\partial x, \quad dx/dt = \partial\omega(k_x, x)/\partial k_x. \quad (1.3)$$

Здесь $\omega(k_x, x)$ — так называемая локальная частота, равная частоте собственного колебания с волновым вектором k_x в однородной среде, имеющей те же параметры, что и рассматриваемая неоднородная среда в точке x . Из уравнений (1.3) следует, что волновой пакет движется вдоль оси x с локальной групповой скоростью

$$v_g(k_x, x) = \partial\omega(k_x, x)/\partial k_x \quad (1.4)$$

и при этом меняется его волновой вектор. Изменения координаты и волнового вектора связаны условием сохранения частоты, выте-

кающим из уравнений (1.3):

$$\omega [k_x(t), x(t)] = \text{const.} \quad (1.5)$$

В средах с диссипацией (или неустойчивых) локальная частота становится комплексной. Ясно, что при этом уравнения (1.3) буквально уже неприменимы. Поведение волновых пакетов в таких средах рассматривалось на основе квазиклассического приближения (см., например, § 1.5 книги [3]). Оказывается, что в уравнениях (1.3) следует заменить $\omega(k_x, x)$ на $\text{Re } \omega(k_x, x)$ (подразумевается, что среда слабонеравновесна). В такой среде амплитуда волнового пакета меняется. Изменение амплитуды происходит по закону

$\exp\left\{\int_{t_0}^t \gamma [k_x(t'), x(t')] dt'\right\}$, где локальный инкремент $\gamma(k_x, x) = -\text{Im } \omega(k_x, x)$. Существенно, что вследствие движения пакета как в k -, так и в x -пространстве локальный инкремент не остается постоянным, т. е. возмущение растет не по экспоненциальному закону.

В силу условия (1.5), при заданной частоте волновой вектор k_x можно считать функцией координаты x . Как известно, для применимости квазиклассического приближения необходимо, чтобы зависимость волнового вектора от x была достаточно слабой: $(1/k_x(x)) \partial \ln [k_x(x)] / \partial x \ll 1$. С учетом (1.5) это условие можно переписать в виде

$$v_g \gg \omega / k_x^2 L. \quad (1.6)$$

Но в холодной плазме для альфвеновских и ленгмюровских колебаний $v_g \equiv 0$ и условие (1.6) заведомо не выполняется.

С учетом тепловых поправок их групповая скорость становится отличной от нуля. Так, для ленгмюровских волн

$$v_g = 3\omega_p kd^2, \quad (1.7)$$

где d — дебаевский радиус. В этом случае волновой пакет медленно движется и вследствие зависимости $k_x(x)$ меняется его волновой вектор. Однако теперь движение пакета и изменение k_x не обязательно должно описываться уравнениями Гамильтона. С уменьшением температуры групповая скорость уменьшается, однако скорость изменения волнового вектора, как следует из (1.3), практически не меняется. Это означает, что резко усиливается зависимость $k_x(x)$, вытекающая из (1.5). В пределе холодной плазмы мы должны прийти к картине стоящего на месте волнового пакета с меняющимся волновым вектором.

Условие применимости квазиклассического приближения (1.6) с учетом (1.7) принимает вид

$$(L/d) (kd)^3 \gg 1. \quad (1.8)$$

Поскольку для ленгмюровских волн $kd \ll 1$, это условие представляется слишком жестким ограничением на неоднородность плазмы. Для альфвеновских волн условие, аналогичное (1.8), имеет вид

$$kL (kp_t)^2 \gg 1, \quad (1.9)$$

где ρ_i — ларморовский радиус ионов. В условиях токамака вследствие наличия шира для альфвеновских волн $L \simeq 1/k_b$, где k_b — компонента волнового вектора вдоль малого азимута тора. Это означает, что для длинноволновых возмущений, $k\rho_i \ll 1$, условие (1.9) не выполняется. Таким образом, для изучения эволюции начальных возмущений интересующих нас ленгмюровских и альфвеновских колебаний в неоднородной плазме необходимо использование подхода, свободного от квазиклассического ограничения (1.6).

Такой подход первоначально разрабатывался в связи с задачами гидродинамики обычной жидкости. Соответствующие представления были распространены на задачи о колебаниях плазмы в ряде работ А. В. Тимофеева (см. обзор [4] и приведенную там библиографию). Согласно этим работам, возмущения неоднородной плазмы, описываемые уравнениями типа (1.1), (1.2), могут существовать лишь конечное время, тем меньшее, чем более неоднородна плазма.

Конечное время существования возмущений в неоднородной плазме, согласно [4], связано с тем, что с течением времени происходит измельчение x -й пространственной структуры возмущения, и возрастание — по мере этого измельчения — роли вязкости, неучитываемой уравнениями типа (1.1), (1.2). Заметим, что измельчение пространственного масштаба колебания есть не что иное, как увеличение волнового вектора в соответствии с первым уравнением (1.3).

Когда пространственный масштаб возмущения измельчится настолько, что вклад вязкости в уравнения типа (1.1), (1.2) станет существенным, то, как следует из [4], возмущение начнет затухать во времени быстрее, чем по экспоненциальному закону. Поэтому в асимптотическом пределе $t \rightarrow \infty$ никаких возмущений с временной зависимостью вида $\exp(-i\omega t)$, в том числе с $\text{Im } \omega < 0$, нет, что и означает отсутствие собственных колебаний.

Таким образом, исследования А. В. Тимофеева [4] свидетельствуют о наличии в неоднородной плазме класса несобственных колебаний, которые существуют в течение ограниченного промежутка времени. Существенно, что, пока в игру не вступают эффекты вязкости, такие колебания ведут себя как соответствующие собственные и характеризуются частотами, которые, в отличие от частот собственных колебаний, являются функциями координаты.

Все сказанное выше относилось к несобственным колебаниям в устойчивой плазме. Однако в ряде отмечавшихся выше работ, посвященных проблеме термоядерных реакторов-токамаков, было установлено, что локальное дисперсионное уравнение может иметь решения не только с вещественным $\omega(x)$, но и с комплексным $\text{Im } \omega(x) > 0$. Вследствие этого возник вопрос об эволюции неустойчивостей, связанных с несобственными колебаниями плазмы в тех случаях, когда неприменимо квазиклассическое рассмотрение, в частности для альфвеновских волн. Впервые этот вопрос анализировался в работе [7] (см. также [4]). Этот анализ производился та-

ким же способом, как это делается в теории несобственных колебаний обычной жидкости, а именно при исследовании дифференциального уравнения четвертого порядка, аналогичного полученному в работе [8]. Это уравнение получается из уравнений типа (1.1), (1.2) добавлением членов, соответствующих эффекту вязкости.

Следует, однако, иметь в виду, что в задачах о несобственных колебаниях плазмы могут встречаться ситуации, когда уравнения, описывающие эти колебания, не сводятся к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. При этом использование метода [4,7] невозможно. В связи с этим в [9] был развит другой, излагаемый ниже метод исследования неустойчивостей, связанных с несобственными колебаниями.

В § 2 обсуждается эффект увеличения со временем волнового числа и рассматривается поведение начального возмущения в форме волнового пакета в холодной неоднородной плазме. В § 3 изучается роль гидродинамических эффектов, связанных с конечностью температуры основной компоненты плазмы, таких, как снос и расплывание пакета. В § 4,5 исследуются неустойчивости, связанные с несобственными колебаниями, при этом определяется рост амплитуды пакета вследствие этих неустойчивостей и выясняется возможность его затухания. § 4 посвящен анализу простейшего случая ленгмюровских колебаний, возбуждаемых пучком электронов. В § 5 рассматривается неустойчивость альфвеновских волн в токамаке с пучком быстрых ионов. Результаты обсуждаются в § 6.

§ 2. Несобственные ленгмюровские и альфвеновские колебания холодной неоднородной плазмы

Уравнения альфвеновских (1.1) и ленгмюровских (1.2) колебаний холодной неоднородной плазмы идентичны по форме. Поэтому можно ограничиться изучением одного вида колебаний, скажем, ленгмюровских.

Уравнение (1.2) получается из системы, включающей уравнение Пуассона

$$(\partial^2/\partial x^2 - k_y^2 - k_z^2) \psi = -4 \pi e n, \quad (2.1)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_0 v_x) + i (k_y v_y + k_z v_z) n_0 = 0 \quad (2.2)$$

и уравнения движения

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -i \frac{e}{m} k_y \psi, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -i \frac{e}{m} k_z \psi. \quad (2.3)$$

Здесь e , m — заряд и масса электрона, $n_0 = n_0(x)$ — невозмущенная плотность, k_y и k_z — компоненты волнового вектора, ψ — возмущенный потенциал, n и \mathbf{v} — возмущенные плотность и скорость электронов.

Исключая из (2.1) — (2.3) n и v , приходим к следующему уравнению для ψ :

$$\hat{L}_0 \psi \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2(x) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} - \\ - (k_y^2 + k_z^2) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2(x) \right] \psi = 0. \quad (2.4)$$

Оператор, стоящий в квадратных скобках, представляем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_p(x) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_p(x) \right].$$

Интересуемся возмущениями, локализованными в окрестности точки $x = 0$, при этом функцию $\omega_p(x)$ представляем в виде

$$\omega_p(x) = \omega_0 + \omega'_0 x, \quad (2.5)$$

где $\omega_0 = \omega_p(0)$, $\omega'_0 = \omega'_p(0)$. Использование разложения (2.5) подразумевает, что мы ограничиваемся рассмотрением области вблизи $x = 0$, так что $|x| \ll L$, где $L = |\omega_0/\omega'_0|$.

Ищем решения уравнения (2.4), такие, что $\partial/\partial t \approx -i\omega_0$, иначе говоря, полагаем

$$\psi(t, x) = \exp(-i\omega_0 t) \bar{\psi}(t, x), \quad (2.6)$$

где $|\partial \ln \bar{\psi} / \partial t| \ll \omega_0$. При этом $\partial/\partial t - i\omega_p \approx -2i\omega_0$ и тогда из (2.4) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega'_0 x \right) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right] - (k_y^2 + k_z^2) \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega'_0 x \right) \bar{\psi} = 0, \quad (2.7)$$

Полученное уравнение описывает эволюцию во времени функции $\bar{\psi}(t, x)$. Решая подобные уравнения, будем использовать фурье-преобразование по x :

$$\bar{\psi}(t, x) = \int \exp(i k_x x) \bar{\psi}(t, k_x) dk_x. \quad (2.8)$$

При этом из (2.7) получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega'_0 \frac{\partial}{\partial k_x} \right) [k \bar{\psi}(t, k_x)] = 0, \quad (2.9)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Этому уравнению соответствуют характеристики

$$dk_x/dt = -\omega'_0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) совпадает с одним из уравнений Гамильтона (1.3), описывающим изменение волнового вектора. Из (2.10) получаем $k_x(t) = -\omega'_0 t + \text{const}$. Поэтому

$$\bar{\psi}(t, k_x) = \frac{k(k_x + \omega'_0 t)}{k} \bar{\psi}(0, k_x + \omega'_0 t), \quad (2.11)$$

где $k(k_x + \omega'_0 t) = \sqrt{(k_x + \omega'_0 t)^2 + k_y^2 + k_z^2}$,

а $\bar{\psi}(0, k_x)$ определяется соотношением

$$\bar{\psi}(0, x) = \int \exp(i k_x x) \bar{\psi}(0, k_x) dk_x.$$

Подставляя (2.11) в (2.8) и учитывая (2.6), находим

$$\psi(t, x) = \exp[-i\omega_p(x)t] \int \frac{\exp(i\kappa x) k(\kappa)}{k(\kappa - \omega'_0 t)} \bar{\psi}(0, \kappa) d\kappa. \quad (2.12)$$

Здесь произведена замена $\kappa = k_x + \omega'_0 t$.

Чтобы проанализировать (2.12), рассмотрим начальное возмущение вида

$$\bar{\psi}(0, x) = \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi} \Delta_0} \exp\left(iqx - \frac{x^2}{2\Delta_0^2}\right), \quad (2.13)$$

где ψ_0 — константа. При этом, согласно определению,

$$\bar{\psi}(0, k_x) = \frac{\psi_0}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2} \Delta_0^2 (k_x - q)^2\right]. \quad (2.14)$$

Тогда равенство (2.12) дает

$$\psi(t, x) = \exp[-i\omega_p(x)t] \bar{\psi}(0, x) A(x, t), \quad (2.15)$$

где

$$A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \exp(-\lambda^2) \times \\ \times \left\{ \frac{(\lambda + ix/\Delta_0 + q\Delta_0)^2 + (k_y^2 + k_z^2) \Delta_0^2}{(\lambda + ix/\Delta_0 + q\Delta_0 - \omega'_0 t\Delta_0)^2 + (k_y^2 + k_z^2) \Delta_0^2} \right\}^{1/2} d\lambda. \quad (2.16)$$

Напомним, что $\omega_p = \omega_0 + \omega'_0 x$.

Из (2.15), (2.16) видно, что возмущение ведет себя так же, как и в однородной плазме, если $t < 1/(\omega'_0 \Delta_0)$. При этом $\psi(t, x) = \exp(-i\omega_0 t) \bar{\psi}(0, x)$. В противоположном случае, т. е. при $t > 1/(\omega'_0 \Delta_0)$, имеют место следующие два эффекта. Во-первых, становится существенным множитель $\exp(-i\omega'_0 xt)$, который при локальном подходе трактуется как результат координатной зависимости ленгмюровской частоты, а в терминах уравнений Гамильтона (1.3) для пакета — как результат временной зависимости волнового вектора. Во-вторых, с течением времени начинает сказываться неэкспоненциальное (степенное) уменьшение амплитуды возмущения, связанное с зависимостью $A(x, t)$ от времени. В частности, при $t \gg (1/\Delta_0^2 + q^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}/\omega'_0$ получаем $A(x, t) \sim t^{-1}$. Заметим, что такая же зависимость получается и при решении уравнения (2.4) методом преобразования Лапласа по времени с последующим вычислением вклада, связанного с обходом особой точки (см., например, [4]).

Согласно замечанию в начале этого параграфа, полученные здесь результаты, касающиеся ленгмюровских волн, целиком переносятся также на случай альфвеновских колебаний.

§ 3. Гидродинамические эффекты в горячей плазме

Изложенная в § 2 картина несобственных ленгмюровских колебаний усложняется эффектами, изучение которых требует выхода за рамки приближения холодной плазмы. Как и в случае собственных колебаний однородной плазмы [10], эти эффекты можно разделить на две категории — гидродинамические и кинетические. Здесь рассмотрим роль гидродинамических эффектов в несобственных колебаниях неоднородной плазмы, а в § 4,5 — кинетических.

Начнем снова с ленгмюровских волн. В качестве исходных уравнений примем уравнения (2.1), (2.2), а также уравнение движения типа (2.3), но дополненное членами, пропорциональными температуре плазмы:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{e}{m} \nabla \psi - \frac{c_e^2 \nabla n}{n_0},$$

где $c_e^2 = \gamma_0 T/m$, γ_0 — показатель адиабаты. При этом вместо (2.4) получается уравнение

$$(\tilde{L}_0 - \tilde{L}_1) \psi = 0, \quad (3.1)$$

где $\tilde{L}_1 = c_e^2 \nabla^4 \equiv c_e^2 (\partial^2/\partial x^2 - k_y^2 - k_z^2)^2$. Предполагается, что c_e^2 мало, а именно $c_e^2 \nabla^2 \ll \omega_0^2$. В этом случае решение (3.1) можно искать в виде (2.6). Тогда в предположениях § 2 получается уравнение для $\bar{\psi}(t, k_x)$, аналогичное уравнению (2.9):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega_0' \frac{\partial}{\partial k_x} \right) [k \bar{\psi}(t, k_x)] + i \frac{c_e^2 k^3 \bar{\psi}(t, k_x)}{2\omega_0} = 0. \quad (3.2)$$

Решая это уравнение методом характеристик, находим вместо (2.11):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t, k_x) &= \frac{k(k_x + \omega_0' t)}{k} \psi(0, k_x + \omega_0' t) \times \\ &\times \exp \left\{ -i \frac{c_e^2}{2\omega_0} \int_0^t k^2 [k_x + \omega_0' (t-t')] dt' \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В случае начального возмущения вида (2.13) из (3.3) следует:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) \sim \psi_0 \exp \left\{ i q(t) x - i \int_0^t \Omega(t') dt' - \right. \\ \left. - \frac{\left[x - \int_0^t v_g(t') dt' \right]^2}{2 \left[\Delta_0^2 + i t \frac{\partial^2 \Omega(t)}{\partial q^2(t)} \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $q(t) = q - \omega'_0 t$, а функции $\Omega(t)$ и $v_g(t)$ имеют смысл соответственно частоты колебания и групповой скорости в момент времени t

$$\Omega(t) = \omega_0 + \frac{c_e^2}{2\omega_0} [q^2(t) + k_y^2 + k_z^2], \quad (3.5)$$

$$v_g(t) = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right|_{q=q(t)} = \frac{c_e^2}{\omega_0} q(t). \quad (3.6)$$

Таким образом, учет тепловых поправок приводит к следующим эффектам. Волновой пакет теперь движется с переменной групповой скоростью $v_g(t)$. Ее переменность обусловлена неоднородностью плазмы. Пакет расплывается, т. е. увеличивается его ширина. Отделяя в показателе (3.4) реальную часть, нетрудно убедиться, что ширина пакета в момент времени t есть

$$\Delta(t) = \left[\Delta_0^4 + \left(t \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^2} \right)^2 \right]^{1/4} = \left(\Delta_0^4 + \frac{c_e^4}{4\omega_0^2} t^2 \right)^{1/4}. \quad (3.7)$$

Наконец, частота колебания в точке x становится переменной.

Убедимся, что формулы (3.4) — (3.6) согласуются с уравнениями движения центра пакета (1.3). Перепишем (3.4) в виде

$$\psi(t, x) \sim \psi_0 \exp \left\{ iqx - i \int_0^t \omega[q(t'), x] dt' - \frac{\left[x - \int_0^t v_g(t') dt' \right]^2}{2 \left[\Delta_0^2 + it \frac{\partial^2 \omega(q(t))}{\partial q^2} \right]} \right\}, \quad (3.8)$$

где

$$\omega(q, x) = \omega_0 + \omega'_0 x + \frac{c_e^2}{2\omega_0} (q^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (3.9)$$

Уравнения (2.10) и (3.6) теперь можно переписать так:

$$\frac{dq(t)}{dt} = - \frac{\partial \omega[q(t), x]}{\partial x}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega[q(t), x]}{\partial q(t)}, \quad (3.10)$$

т. е. в виде уравнений Гамильтона (1.3). Этот факт не является заведомо очевидным, поскольку условие применимости квазиклассического приближения (1.6) предполагалось невыполненным и, кроме того, характер решения (3.8) несколько отличается от квазиклассического решения (см. [10]).

Перейдем теперь к альфвеновским колебаниям. С учетом конечного ларморовского радиуса ионов уравнение (1.2) модифицируется

следующим образом (см., например, § 3.3 книги [3]):

$$(\hat{L}_0 - \hat{L}_1) \xi = 0, \quad (3.11)$$

где \hat{L}_0 — оператор уравнения (1.2); $\hat{L}_0 = \nabla_{\perp} (\partial^2 / \partial t^2 + \omega_A^2) \nabla_{\perp}$, а $\hat{L}_1 = \omega_0^2 (3/4 + T_e/T_i) \rho_i^2 \nabla_{\perp}^4$. Здесь T_e , T_i — электронная и ионная температуры, ρ_i — ларморовский радиус ионов, $\omega_0 = \omega_A(0)$. Видно, что уравнение (3.11) переходит в уравнение (3.1), если произвести замену:

$$c_e^2 \rightarrow \omega_0^2 (3/4 + T_e/T_i) \rho_i^2. \quad (3.12)$$

§ 4. Пучковая неустойчивость несобственных ленгмюровских колебаний

Как известно, кинетическая пучковая неустойчивость представляет собой раскачку собственных колебаний однородной плазмы резонансными частицами пучка. Рассмотрим, как обстоит дело с пучковой раскачкой несобственных ленгмюровских колебаний неоднородной плазмы, обсуждавшихся в § 2,3. При этом считаем плазму настолько холодной, что можно пренебречь затуханием колебаний на резонансных частицах фона.

Чтобы учесть кинетические эффекты, связанные с пучком, заменим в уравнении Пуассона $n \rightarrow n + \tilde{n}_b$, где \tilde{n}_b — часть возмущения плотности, обусловленная пучком. Пренебрежем также гидродинамическими тепловыми поправками для электронов фона, поскольку они изучены в § 3. Тогда уравнение примет вид

$$\nabla (\partial^2 / \partial t^2 + \omega_p^2) \nabla \psi = -4\pi e \partial^2 \tilde{n}_b / \partial t^2. \quad (4.1)$$

Полагая в правой части этого уравнения $\partial^2 / \partial t^2 \approx -\omega_0^2$ и производя преобразование, аналогичные в § 2, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega_0' \frac{\partial}{\partial k_x} \right) [k \bar{\psi}(t, k_x)] - i \frac{2\pi e \omega_0}{k} \bar{n}_b(t, k_x). \quad (4.2)$$

Здесь $\bar{n}_b(t, k_x)$ — фурье-образ функции $\tilde{n}_b(t, x)$, которую находим с помощью кинетического уравнения для возмущенной функции распределения пучка:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + i k v f_b = -i \frac{e}{m} k \frac{\partial F_b}{\partial v} \exp(-i \omega_0 t) \bar{\psi}(t, k_x). \quad (4.3)$$

Здесь F_b — равновесная функция распределения пучка. Полагаем

$$F_b = \frac{n_b}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp \left[-\frac{v_x^2 + v_y^2 + (v_z - V)^2}{v_T^2} \right] \quad (4.4)$$

и считаем, что n_b , V и v_T не зависят от x . Решая уравнение (4.3), находим:

$$\bar{n}_b(t, k_x) = -i \frac{e}{m} \int_0^t dt' \Phi(t', k_x) \times$$

$$\times \int d^3 \mathbf{u} \frac{k}{k} \frac{\partial F_b}{\partial \mathbf{u}} \exp [i (\mathbf{k} \mathbf{u} - \tilde{\omega}) (t' - t)]. \quad (4.5')$$

Здесь $\Phi(t, k_x) = k \bar{\Psi}(t, k_x)$, $\tilde{\omega} = \omega_0 - k_z V$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{e}_z V$, \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z .

Подставляя (4.5) в (4.2), получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega'_0 \frac{\partial}{\partial k_x} \right) \Phi(t, k_x) = \int_0^t dt' g(t' - t, k_x) \Phi(t', k_x); \quad (4.6)$$

$$g(\tau, k_x) = -i \frac{n_b}{n_0} \frac{\omega_0^3}{2} \tau \exp \left(-i \tilde{\omega} \tau - \frac{1}{4} k^2 v_T^2 \tau^2 \right). \quad (4.7)$$

Из (4.7) видно, что при достаточно большом тепловом разбросе частиц пучка, т. е. при достаточно большом v_T , функция $g(\tau, k_x)$ быстро падает при больших $|\tau|$. При этом в (4.6) существенна только область интегрирования вблизи верхнего предела. Функцию $\Phi(t', k_x)$ считаем достаточно плавной, полагая, что ее можно вынести из-под знака интеграла в точке $t' = t$. Тогда в (4.7) остается интеграл

$$\int_0^t dt' g(t' - t, k_x) = \int_{-t}^0 d\tau g(\tau, k_x). \quad (4.8)$$

Из (4.7) видно, что при $k v_T t \gg 1$ нижний предел в (4.8) можно заменить $-\infty$. Обозначим

$$G(k_x) = \int_{-\infty}^0 g(\tau, k_x) d\tau = i \frac{n_b}{n_0} \frac{\omega_0^3}{k^2 v_T^2} \left[1 + Z \left(\frac{\tilde{\omega}}{k v_T} \right) \right], \quad (4.9)$$

где $Z(x) = i \sqrt{\pi} x W(x)$, а $W(x)$ — известная функция Крампа (см., например, [10]).

С учетом всего сказанного (4.6) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega'_0 \frac{\partial}{\partial k_x} \right) \Phi(t, k_x) = G(k_x) \Phi(t, k_x). \quad (4.10)$$

Решая это уравнение методом характеристик, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(t, k_x) &= \frac{k(k_x + \omega'_0 t)}{k} \bar{\Psi}(0, k_x + \omega'_0 t) \times \\ &\times \exp \left\{ \int_0^t G[k_x + \omega'_0(t' - t)] dt' \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выясним теперь условия, при которых функцию Φ можно вынести в (4.6) из-под знака интеграла. Для этого необходимо, чтобы характерное время изменения этой функции было больше, чем характерное время изменения «обрезающего» множителя $\exp[-(1/4) k^2 v_T^2 \tau^2]$, т. е. больше, чем $\tau_0 = (k v_T)^{-1}$. С точностью до

предэкспоненты характерное время изменения функции Φ определяется двумя множителями: $\bar{\psi}(0, k_x + \omega'_0 t)$ и $\exp\left(\int_0^t G dt'\right)$. В случае начальных возмущений типа (2.13), (2.14) первый множитель можно представить в виде $\exp\left[-(1/2)\omega_0'^2 \Delta_0^2 (t - (q - k_x)/\omega_0')^2\right]$, так что характерное время его изменения есть $\tau_1 = (\omega_0' \Delta_0)^{-1}$. Характерное время изменения второго множителя есть $\tau_2 = [G(k_x)]^{-1}$. Из (4.9) следует, что $G(k_x) \simeq \gamma(k_x)$, где $\gamma(k_x)$ — инкремент кинетической пучковой неустойчивости в однородной плазме. По порядку величины

$$\gamma \simeq (n_b/n_0) \omega_0^3/k^2 v_T^2. \quad (4.12)$$

Итак, $\tau_2 \simeq \tau^{-1}$. Условие $\tau_2 \gg \tau_0$, т. е. $\gamma \ll kv_T$, означает, что неустойчивость является кинетической и не связана с неоднородностью плазмы. Условие $\tau_1 \gg \tau_0$ или $\omega_0' \Delta_0 \ll kv_T$ с учетом $k \simeq \Delta_0^{-1}$ можно переписать в виде $\omega_0' \Delta_0 \ll v_T/\Delta_0$. Этому неравенству можно придать несколько иную форму. Определим резонансную область как область, в которой может выполняться резонанс для пучка с заданными $v_T \ll V$. Для ширины резонансной области L_{res} имеем

$$L_{\text{res}} \simeq v_T/(\omega_0' \Delta_0). \quad (4.13)$$

Отсюда видно, что обсуждаемое условие принимает вид

$$\Delta_0 \ll L_{\text{res}}. \quad (4.14)$$

Таким образом, проведенный выше анализ уравнения (4.6) справедлив, если возмущение является в достаточной степени пространственно-локализованным. В противном случае временное поведение возмущения характеризуется соотношениями, приведенными в работе [12].

Вернемся к полученному решению (4.11) и вычислим $\psi(t, x)$, используя определение (2.8):

$$\begin{aligned} \psi(t, x) = & \frac{1}{2\pi} \exp(-i\omega_p t) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{k(x)}{k(x - \omega_0' t)} \times \\ & \times \exp\left[i\kappa x - \frac{(\kappa - q)^2 \Delta_0^2}{2} + \int_0^t G(\kappa - \omega_0' t') dt' \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Согласно (4.12) характерный масштаб изменения функции G по переменной κ есть ω_0/v_T . При

$$\Delta_0^{-1} \ll \omega_0/v_T \quad (4.16)$$

множитель $\exp\left[-(\kappa - q)^2 \Delta_0^2/2\right]$ является наиболее быстро меняющейся функцией κ в (4.15). Поэтому приближенно имеем

$$\psi(t, x) = \psi_0(t, x) \exp\left\{ \int_0^t G(q - \omega_0' t') dt' \right\}, \quad (4.17)$$

где $\psi_0(t, x)$ — потенциал возмущения в холодной однородной плазме без учета пучка (2.15). Поскольку нас интересует изменение амплитуды пакета, опустим в (4.17) $\text{Im}G$. Окончательно имеем

$$\psi(t, x) = \psi_0(t, x) \exp \left[\int_0^t \gamma(t') dt' \right], \quad (4.18)$$

$$\gamma(t) = \text{Re} G[q(t)] = -\sqrt{\pi} \frac{n_b}{n_0} \frac{\omega_0^3}{q^3(t) v_T^3} \tilde{\omega} \exp \left[-\frac{\tilde{\omega}^2}{q^2(t) v_T^2} \right], \quad (4.19)$$

$$q(t) = q - \omega_0' t. \quad (4.19)$$

Из (4.18) следует, что возмущение в каждый данный момент растет с инкрементом, определяемым теорией пучковой неустойчивости в однородной плазме: этот инкремент зависит от мгновенного значения волнового вектора $q(t)$. Но поскольку волновой вектор меняется со временем, то меняется и инкремент $\gamma(t)$.

Согласно (4.19), с увеличением $q(t)$ инкремент падает. Вычислим изменение амплитуды, полагая $\omega_0' < 0$ и $q \gg \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$. Тогда

$$\int_0^t \gamma(t') dt' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{\omega_0^3}{|\omega_0'| v_T (k_z V - \omega_0)} \left\{ \exp \left[-\frac{\tilde{\omega}^2}{q^2(t) v_T^2} \right] - \exp \left[-\frac{\tilde{\omega}^2}{q^2 v_T^2} \right] \right\}.$$

При $t \rightarrow \infty$ эта величина стремится к постоянному значению

$$\int_0^{\infty} \gamma(t') dt' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{\omega_0^3}{|\omega_0'| v_T (k_z V - \omega_0)} \left[1 - \exp \left(-\frac{\tilde{\omega}^2}{q^2 v_T^2} \right) \right]. \quad (4.20)$$

Максимальное значение функции $[1 - \exp(-x^2)]/x \approx 0,6$. Поэтому

$$\max \int_0^{\infty} \gamma(t') dt' \approx 0,5 (n_b/n_0) (L\omega_0^3/qv_T^2),$$

где $L = \omega_0'/|\omega_0'|$ — размер неоднородности. Если

$$0,5 \frac{n_b}{n_0} \frac{L\omega_0^3}{qv_T^2} < \Lambda_c, \quad (4.21)$$

где Λ_c — величина типа кулоновского логарифма, то в результате неустойчивости возмущение недорастет до нелинейного уровня и из-за неучтенных выше диссипативных факторов (столкновения и др.) должно затухать. В противном случае, т. е. при

$$0,5 \frac{n_b}{n_0} \frac{L\omega_0^3}{qv_T^2} > \Lambda_c, \quad (4.22)$$

следует считать, что имеет место неустойчивость несобственных колебаний. Аналогичные оценки из качественных соображений были получены в обзоре [11].

В заключение сведем вместе неравенства (4.14) и (4.16). Имеем

$$\omega'_0 \Delta_0^2 \ll v_T \ll \omega_0 \Delta_0, \quad (4.23)$$

откуда видно, что эти неравенства непротиворечивы, поскольку предполагается $\omega'_0 \Delta_0 \ll \omega_0$.

§ 5. Пучковая неустойчивость несобственных альфвеновских колебаний в токамаке

Альфвеновские колебания в токамаке описываются уравнением [2, 13]:

$$\nabla_{\perp} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_A^2 k_{\parallel}^2 \right) \nabla_{\perp} \xi = - \hat{Q}_b \{ \xi \} - \hat{Q}_e \{ \xi \}. \quad (5.1)$$

Здесь $\bar{Q}_e \{ \xi \}$ — вклад запертых электронов, полученный в работах [13—15],

$$\hat{Q}_e \{ \xi \} = 2i\omega_0^2 \delta\rho_i^2 \nabla_{\perp}^4 \xi; \quad (5.2)$$

$\delta = 1,04 [(v_e/\omega_0) \ln (128 \varepsilon \omega_0/v_e)]^{1/2}$, $\varepsilon = a_0/R$, v_e — электронная частота столкновений; $\hat{Q}_b \{ \xi \}$ — вклад пучка [13]:

$$\hat{Q}_b \{ \xi \} = - \frac{k_b^2}{RM_i n_0} \left[\left(1 + \frac{1}{k_b} \frac{\partial}{\partial a} \right) \tilde{p}_1 + \left(1 - \frac{1}{k_b} \frac{\partial}{\partial a} \right) \tilde{p}_{-1} \right]. \quad (5.3)$$

Поясним обозначения. Используется известная тороидальная система координат a , θ , φ (см., например, [1]). Возмущение выбрано в виде

$$\xi(t, a, \theta, \varphi) = \exp [i(m\theta - n\varphi)] \xi(t, a), \quad (m, n) \gg 1. \quad (5.4)$$

Продольное волновое число k_{\parallel} определено соотношением $k_{\parallel} = (m - nq)/qR$, где q — коэффициент запаса токамака, R — радиус кривизны магнитной оси. Частота $\omega_0 = c_A k_{\parallel}(a_0)$, где a_0 — координата, вблизи которой возбуждается неустойчивость. Величины $\tilde{p}_{\pm 1}$ в (5.3) — гармоники возмущенного давления, определяемые равенством

$$\tilde{p}_{\pm 1}(t, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp [-i(m \pm 1)\theta + in\varphi] \tilde{p}(t, a, \theta, \varphi) d\theta.$$

Остальные обозначения: $k_b = m/a_0$, M_i — масса ионов.

Аналогично § 4 для функции $\Phi(t, k_a) = k_{\perp} \bar{\xi}(t, k_a)$ получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial}{\partial k_a} \right) \Phi(t, k_a) = i \frac{Q_e(k_{\perp})}{2\omega_0 k_{\perp}^2} \Phi(t, k_a) -$$

$$-i \frac{k_b^2}{2\omega_0 k_{\perp}^2 R M_i n_0} \left[\left(1 + i \frac{k_a}{k_b} \right) k_{\perp} \bar{p}_1 + \left(1 - i \frac{k_a}{k_b} \right) k_{\perp} p_{-1} \right]. \quad (5.5)$$

Здесь $\bar{\xi}(t, k_a) = \exp(i\omega_0 t) \xi(t, k_a)$; $\bar{p}_{\pm 1}(t, k_a) = \exp(i\omega_0 t) \tilde{p}_{\pm 1}(t, k_a)$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(t, k_a) \\ \tilde{p}(t, k_a) \end{array} \right\} = \int \left\{ \begin{array}{l} \xi(t, a) \\ \tilde{p}(t, a) \end{array} \right\} \exp(-ik_a a) da;$$

$c_A k_{\parallel}(a) = c_A k_{\parallel}(a_0) + c_A (\partial k_{\parallel}(a_0)/\partial a)(a - a_0) \equiv \omega_0 + \omega'_0 x$, $x = a - a_0$;
 $Q_e(k_{\perp}) = 2i\omega_0^2 \delta k_{\perp}^4 \rho_i^2$, $k_{\perp}^2 = k_a^2 + k_b^2$, $\rho_i^2 = T_i/(M_i \omega_{Bi}^2)$ — квадрат лармовского радиуса ионов, ω_{Bi} — их циклотронная частота.

Для вычисления $\bar{p}_{\pm 1}$ необходимо знать резонансную часть возмущенной функции распределения пучка. Полагаем, что равновесная функция распределения пучка имеет вид $F_b(v_{\perp}, v_{\parallel}) = F(v_{\parallel})\delta(v_{\perp})$, где

$$F(v_{\parallel}) = \frac{n_b}{\sqrt{\pi} v_{Tb}} \exp\left(-\frac{u^2}{v_{Tb}^2}\right), \quad (5.6)$$

$u = v_{\parallel} - V_b$; v_{\perp} , v_{\parallel} — поперечная и продольная к магнитному полю составляющие скорости пучка; n_b , v_{Tb} — плотность и тепловая скорость пучка; предполагается, что $n_b/n_0 \ll 1$.

Резонансная часть возмущенной функции распределения $\tilde{f}(t, a, \theta, \varphi, v_{\parallel})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} = -\frac{2E}{R} \frac{\partial F}{\partial E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\xi \cos \theta - i \frac{a}{m} \frac{\partial \xi}{\partial a} \sin \theta \right) \quad (5.7)$$

или, представляя в виде интеграла Фурье:

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} = -\frac{2E}{R} \frac{\partial F}{\partial E} \frac{\partial}{\partial t} \int dk_a \xi(t, k_a) \frac{k_{\perp}}{k_b} \sin(\theta + \alpha) \times \\ \times \exp[i(m\theta - n\varphi + k_a a)]. \quad (5.7')$$

Здесь $E = M_i v_{\parallel}^2/2$, $\tan \alpha = k_b/k_a$. Интеграл по траектории для функции $\tilde{f} \equiv \exp(i\omega_0 t) \tilde{f}$ запишем в виде

$$\tilde{f}(t, a) = -\frac{2E}{R} \frac{\partial F}{\partial E} \exp[i(m\theta - n\varphi)] \int dk_a \exp(ik_a a) \times \\ \times \frac{k_{\perp}}{k_b} \int_0^t dt' \left[\frac{\partial \bar{\xi}(t', k_a)}{\partial t'} - i\omega_0 \bar{\xi}(t', k_a) \right] (S_1 + S_{-1}); \quad (5.8)$$

$$S_{\pm 1} = \pm \frac{1}{2i} \exp[-i\omega_0(t' - t) + im(\theta' - \theta) - \\ - in(\varphi' - \varphi) + ik_a(a' - a) \pm i(\theta' + \alpha)]. \quad (5.9)$$

Траектории пролетных частиц определяются уравнениями [1]:

$$\left. \begin{aligned} a' - a &= -\Lambda (\cos \theta' - \cos \theta); \theta' - \theta = (t' - t) v_{\parallel} / qR; \\ n(\varphi' - \varphi) &= nq(\theta' - \theta) - k_b \Lambda (\sin \theta' - \sin \theta). \end{aligned} \right\} (5.10)$$

Здесь $\Lambda = qv_{\parallel} / \omega_B$, $\theta' = \theta(t')$, $\varphi' = \varphi(t')$, $a' = a(t')$, ω_B — циклотронная частота быстрых ионов. С учетом (5.10) для $S_{\pm 1}$ получаем выражение:

$$S_{\pm 1} = \frac{1}{2} \sum_{r, r'} J_{r \mp 1} J_{r'} \times \\ \times \exp \left[i(r - r') \theta - i(\omega_0 - k_r v_{\parallel}) (t' - t) + i(r' - r) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right], (5.11)$$

где $J_r(k_{\perp} \Lambda)$ — функция Бесселя первого рода; $k_{\pm 1} = k_{\parallel} \pm 1/qR$; $k_r = k_{\parallel} + r/qR$.

Нам понадобятся ± 1 гармоники функции распределения. Из (5.8) и (5.9) получим для фурье-образа функции распределения:

$$\bar{f}_{\pm 1}(t, k_a) = \pm \frac{2E}{R} \frac{\partial F}{\partial E} \frac{k_{\perp}}{k_b} \exp(\pm i\alpha) \int_0^t dt' \sum_r k_r v_{\parallel} \times \\ \times \frac{r}{k_{\perp} \Lambda} J_r J_{r \mp 1} \exp[-i\omega_r(t' - t)] \bar{\xi}(t', k_a), (5.12)$$

где $\omega_r = \omega_0 - k_r v_{\parallel}$. Комбинация, входящая в правую часть (5.5), имеет вид

$$\left(1 + i \frac{k_a}{k_b} \right) \bar{p}_1 + \left(1 - i \frac{k_a}{k_b} \right) \bar{p}_{-1} = \int_0^t dt' \tilde{g}(t' - t, k_a) \bar{\xi}(t', k_a),$$

где $\tilde{g}(\tau, k_a) = 4i \sum_r \int \frac{E^2}{R} \frac{\partial F}{\partial E} k_r v_{\parallel} \frac{r^2}{k_b^2 \Lambda^2} \times \\ \times J_r^2(k_{\perp} \Lambda) \exp[-i\omega_r \tau] dv_{\parallel}$.

Считая $v_{Tb} \ll V_b$, получим

$$\tilde{g}(\tau, k_a) = \frac{n_b M_i V_b^4}{R} \sum_r r^2 \frac{J_r^2(k_{\perp} \Lambda)}{k_b^2 \Lambda^2} k_r^2 \tau \times \\ \times \exp \left[-i\omega_r \tau - \frac{1}{4} k_r^2 v_{Tb}^2 \tau^2 \right], (5.13)$$

где $\Lambda = qV_b / \omega_b$. Используя (5.13), запишем уравнение (5.5) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega_0' \frac{\partial}{\partial k_a} \right) \Phi(t, k_a) = \int_0^t dt' g(t' - t, k_a) \Phi(t', k_a) + \\ + \gamma_e(k_{\perp}) \Phi(t, k_a). (5.14)$$

Здесь

$$g(\tau, k_a) = -i \frac{k_b^2}{2k_{\perp}^2 M_i R n_0 \omega_0} \tilde{g}(\tau, k_a);$$

$$\gamma_e(k_{\perp}) = iQ_e(k_{\perp})/2\omega_0 k_{\perp}^2.$$

Уравнение (5.14) аналогично уравнению (4.6) для ленгмюровских колебаний. Функцию $\Phi(t', k_a)$ можно вынести из-под знака интеграла в момент времени $t' = t$ при условии $\omega'_0 \Delta_0 \ll k_r v_{Tb}$. Поскольку $r \neq 0$, то по порядку величины это условие означает

$$\omega'_0 \Delta_0 \ll v_{Tb}/qR \text{ или } \Delta_0 \ll L_{\text{res}}. \quad (5.15)$$

Из (5.14) получаем тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega'_0 \frac{\partial}{\partial k_a} \right) \Phi(t, k_a) = [G(k_a) + \gamma_e(k_{\perp})] \Phi(t, k_a). \quad (5.16)$$

При выводе (5.16) мы воспользовались тем, что при $k_r v_{Tb} t \gg 1$

$$\int_0^t dt' g(t'-t, k_a) \approx \int_{-\infty}^0 dt' g(t', k_a) = G(k_a).$$

Для интересующей нас реальной части $G(k_a)$ имеем выражение:

$$\text{Re } G(k_a) = \frac{\sqrt{\pi} n_b}{n_0} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}} \right)^2 \frac{V_0^2}{\omega_0 R^2} \sum_r r^2 \frac{J_r^2(k_{\perp} \Lambda)}{k_{\perp}^2 \Lambda^2} x_r \exp(-x_r^2), \quad (5.17)$$

где $x_r = (k_r v_b - \omega_0)/(|k_r| v_{Tb})$.

Для пучка с достаточно малым разбросом продольных скоростей ($v_{Tb} \ll V_b$) в сумме (5.17) остается только один член, скажем, с $r = p$, т. е. осуществляется резонанс $\omega_0 = c_{\Lambda} k_{\parallel} = k_p V_b$. Функция $x_p \exp(-x_p^2)$ имеет максимум, равный $1/\sqrt{2e}$, поэтому можно написать:

$$\text{Re } G(k_a) = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{n_b}{n_0} \frac{qV_b}{R} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}} \right)^2 \frac{p J_p^2(k_{\perp} \Lambda)}{k_{\perp}^2 \Lambda^2}. \quad (5.18)$$

Выберем начальное возмущение величины ξ в виде

$$\xi(0, x) = \frac{\xi_0}{\sqrt{2\pi} \Delta_0} \exp\left(ik_0 x - \frac{x^2}{2\Delta_0^2}\right).$$

Характерный масштаб изменения $\text{Re}G(k_a)$ по k_a , как следует из (5.18), есть $1/\Lambda$. Поэтому, поступая так же, как в § 4, при условии

$$\Lambda \ll \Delta_0 \quad (5.19)$$

получаем

$$\xi(t, x) = \frac{\xi_0 A(x, t)}{\sqrt{2\pi} \Delta_0} \exp \left[-i\omega_0 t + ik_0(t)x - \frac{x^2}{2\Delta_0^2} + \int_0^t \gamma(t') dt' \right]. \quad (5.20)$$

Здесь $k_0(t) = k_0 - \omega'_0 t$, $k_{\perp}^2(t) = k_0^2(t) + k_b^2$;

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2e} \frac{n_b}{n_0} \frac{qV_b}{R} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}}\right)^2} \frac{\rho J_p^2 [k_{\perp}(t) \Lambda]}{k_{\perp}^2(t) \Lambda^2} - \frac{\rho V_b}{qR} \delta k_{\perp}^2(t) \rho_i^2 \equiv \gamma_b + \gamma_e. \quad (5.21)$$

Величина $A(x, t)$ определена формулой (2.16).

Проследим за поведением мнимой части фазы $\Psi(t)$,

$$\text{Im } \Psi(t) \equiv \int_0^t \gamma(t') dt'.$$

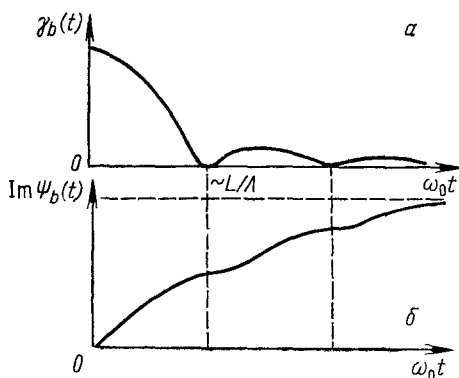


Рис. 1. Качественная зависимость от времени инкремента, связанного с пучком, $\gamma_b(t)$ (а), и мнимой части

$$\text{Im } \Psi_b(t) = \int_0^t \gamma_b(t') dt' \quad (б)$$

Рассмотрим достаточно длинноволновое начальное возмущение $k_{\perp}^2(0)\Lambda \ll 1$. Вычислим вклад в $\text{Im } \Psi$ от пучка и запертых электронов отдельно, полагая $\text{Im } \Psi = \text{Im } \Psi_b + \text{Im } \Psi_e$. Считая для определенности $\omega'_0 < 0$, имеем

$$\text{Im } \Psi_b(t) = \int_0^t \gamma_b(t') dt' = \frac{1}{|\omega'_0|} \int_{k_0}^{k_0(t)} \gamma_b(k_{\perp}) dk_{\perp},$$

где $k_{\perp}^2 = k_a^2 + k_b^2$, $k_a = k_a(t')$. Если $k_a \gg k_b$, то из (5.21) получим

$$\text{Im } \Psi_b(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2e} \frac{n_b}{n_0} \frac{qV_b}{R} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}}\right)^2} \frac{1}{|\omega'_0| \Lambda} \int_{k_0 \Lambda}^{k_0(t) \Lambda} \frac{\rho J_p^2(z)}{z^2} dz. \quad (5.22)$$

Наше рассмотрение применимо, пока $k_a(t)\rho_i < 1$, т.е. $\omega_0 t < L/\rho_i$, где $L = \omega_0/|\omega'_0|$. На границе применимости, при $t \simeq t_h = \omega_0^{-1} L/\rho_i$, имеем $k_0(t)\Lambda \simeq |\omega'_0| \Lambda t \simeq \Lambda/\rho_i = qv_b/v_{Ti} \gg 1$. Поэтому верхний предел в (5.22) можно заменить ∞ , а нижний предел $k_0\Lambda \ll 1$ и его можно заменить нулем. Таким образом, на границе применимости имеем

$$\text{Im } \Psi_b(t_h) = \frac{\rho q^2}{\sqrt{2\pi e}} \frac{n_b}{n_0} \frac{L}{\Lambda} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}}\right)^2 \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1}. \quad (5.23)$$

Если $\text{Im}\Psi_b(t_h) < \Lambda_c$, то, даже без учета диссипации на электродах, раскачка пучком не может привести к неустойчивости.

Показатель экспоненты (5.23) фактически достигается, когда $k_0(t)\Lambda \simeq 1$, т. е. при $t \simeq \omega_0^{-1}L/\Lambda$. Зависимости $\gamma_b(t)$ и $\text{Im}\Psi_b(t)$ схематически изображены на рис. 1 для случая $p = 1$.

Для электронного затухания имеем

$$\gamma_e(t) = -\frac{pV_b}{qR} \delta \rho_i^2 k_{\perp}^2(t),$$

$$\text{Im}\Psi_e(t) = -\frac{pV_b}{qR} \frac{1}{|\omega'_0|} \delta \rho_i^2 \left[\frac{1}{3} (k_0^3(t) - k_0^3) + k_b^2 (k_0(t) - k_0) \right]. \quad (5.24)$$

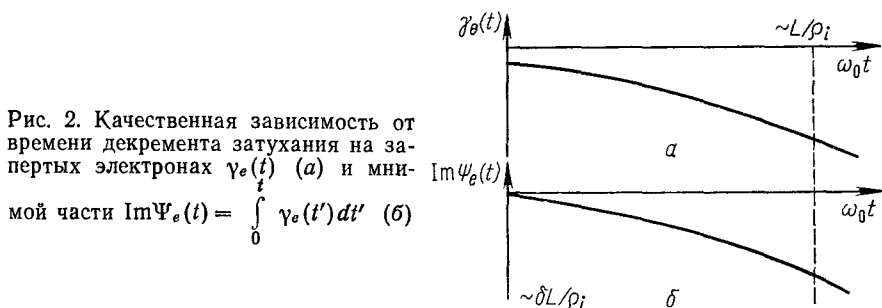


Рис. 2. Качественная зависимость от времени декремента затухания на запертых электронах $\gamma_e(t)$ (а) и мнимой части $\text{Im}\Psi_e(t) = \int_0^t \gamma_e(t') dt'$ (б)

На границе применимости ($t \simeq t_h$) величина $\text{Im}\Psi_e(t_h) \simeq \delta L/\rho_i$. На рис. 2 схематически показаны зависимости $\gamma_e(t)$ и $\text{Im}\Psi_e(t)$. Поведение $\text{Im}\Psi(t)$ дается суммой выражений (5.23) и (5.24). Используя переменную $z \equiv k_a \Lambda$, полный инкремент можно записать в виде

$$\gamma(z) = A \frac{J_p^2(z)}{z^2} - Bz^2, \quad (5.25)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{n_b}{n_0} \frac{qV_b}{R} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}} \right)^2 \frac{p}{|\omega'_0| \Lambda}, \quad B = \frac{p}{q^3} \frac{v_{Ti}}{R} \frac{v_{Ti}}{V_b} \delta. \quad (5.26)$$

Исходя из формул (5.25), (5.26), нетрудно проследить за поведением $\text{Im}\Psi(t)$ в различных случаях. Для определенности мы ограничимся одним из них:

$$p = 1, \quad B \gg A > Bz_0^2, \quad z_0 = k_0 \Lambda \ll 1. \quad (5.27)$$

В этом случае зависимость $\text{Im}\Psi(t)$ имеет вид, изображенный на рис.3.

По порядку величины в максимуме $\text{Im}\Psi_{\text{макс}}(t) \simeq (n_b/n_0) \times (L/\Lambda)(V_b/v_{Tb})^2$. Если эта величина меньше Λ_c , то неустойчивости нет. Если она больше Λ_c ,

$$\frac{n_b}{n_0} \frac{L}{\Lambda} \left(\frac{V_b}{v_{Tb}} \right)^2 > \Lambda_c, \quad (5.28)$$

то в игру вступают нелинейные эффекты и линейное приближение становится непригодным. Поэтому критерий (5.28) и следует рассматривать как качественное условие неустойчивости несобственных колебаний.

§ 6. Обсуждение результатов

Проведенный выше анализ свидетельствует о существовании класса неустойчивостей, связанных с несобственными колебаниями плазмы. В этом отношении наши результаты подтверждают общие выводы отмеченных выше работ А. В. Тимофеева [4, 7], анализ которого основывался на представлениях, восходящих к теории течений обычной жидкости. Следует, однако, иметь в виду, что теория несобственных колебаний неоднородной плазмы, вообще говоря, неадекватна теории несобственных колебаний обычной жидкости. Осо-

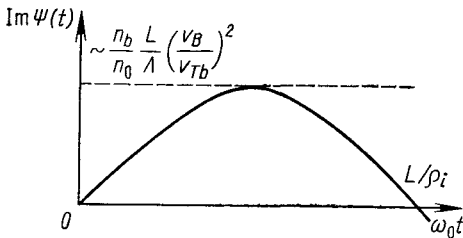


Рис. 3. Качественная зависимость от времени мнимой части фазы $\text{Im}\Psi(t) = \text{Im}\Psi_b(t) + \text{Im}\Psi_e(t)$ для случая, описываемого соотношениями (5.27)

бенно это касается плазмы, содержащей несколько групп частиц, как это имеет место в рассмотренных выше задачах о раскачке электронным пучком ленгмюровских колебаний электронной плазмы и о раскачке ионным пучком альфвеновских колебаний плазмы, находящейся в тороидальном магнитном поле токамака. В рамках гидродинамических представлений основным эффектом, ограничивающим нарастание несобственных колебаний, является вязкость, т. е. эффект, связанный с «фоновой» (основной) компонентой плазмы. Наш анализ показывает, что действительно эффект вязкости имеет место. Однако в практически интересных ситуациях более существен эффект уменьшения инкремента нарастания возмущений, связанный с сильным влиянием измельчения их длины волны на возмущенные параметры быстрой компоненты плазмы. Этот эффект, не учитывающийся в [4,7], определяет «абсолютный» порог неустойчивостей несобственных колебаний, т. е. порог, получающийся даже в пренебрежении эффектами типа вязкости. Этот абсолютный порог характеризуется качественными соотношениями (4.22) и (5.28). Характер изменения со временем пучкового инкремента альфвеновской неустойчивости и интеграла $\int_0^t \gamma_b(t') dt'$ показан на рис. 1. При этом временным масштабom изменения пучкового инкремента является величина

$$t \simeq t_b \equiv L/\Lambda\omega_0, \quad (6.1)$$

где, как и выше, $\omega_0 = k_{\parallel} c_A$ — частота колебаний; $L = (\omega'_0/\omega_0)^{-1}$ — характерный радиальный размер изменения частоты колебаний; $\Lambda = qV_b/\omega_B$ — размер отклонения быстрой частицы от магнитной поверхности при ее движении вдоль магнитного поля.

Аналогом вязкости в задаче об альфвеновских неустойчивостях является, в частности, столкновительное затухание на запертых электронах. Согласно нашему анализу, затухание на запертых электронах вступает в игру позже, чем эффект уменьшения пучкового инкремента. Время, когда начинает сказываться затухание на запертых электронах, характеризуется величиной

$$t \simeq t_e \equiv L/\rho_i \omega_0, \quad (6.2)$$

где ρ_i — ларморовский радиус ионов основной компоненты плазмы. Это время больше, чем t_b , в отношении $\Lambda/\rho_i \simeq qV_b/v_{Ti}$. Характер изменения со временем декремента затухания на запертых электронах и соответствующего интеграла $\int_0^t \gamma_e(t') dt'$ виден из рис. 2, а совместное действие обоих вышеупомянутых эффектов видно из рис. 3. Эти рисунки относятся к случаю, когда $\delta \lesssim 1$.

В § 3 обсуждались также некоторые другие эффекты, связанные с основной компонентой плазмы, а именно снос возмущения с групповой скоростью (3.6) и его расплывание, характеризующееся соотношением вида (3.7). Учитывая, что время развития альфвеновской неустойчивости характеризуется соотношением (6.1), с помощью (3.6) и (3.12) можно найти, что за это время возмущение смещается на расстояние $t_b v_g \simeq L \rho_i^2/\Lambda^2$. Это расстояние существенно меньше, чем L , что и оправдывает пренебрежение эффектом сноса возмущения. Используя (3.7) и (3.12), можно найти также, что за время t_b область локализации возмущения увеличивается на порядок $\rho_i (L/\Lambda)^{1/2}$. Это мало по сравнению с Δ_0 при

$$\Delta_0 > \rho_i (L/\Lambda)^{1/2}, \quad (6.3)$$

т. е. при не слишком узкой области локализации возмущения.

Заметим, что характерная длина L весьма чувствительна к тому, рассматривается ли пучковый механизм раскачки колебаний быстрыми частицами или дрейфовый механизм раскачки теми же частицами. Это связано с различием в масштабе азимутальных волновых чисел m и n в указанных типах раскачки. В случае пучковой раскачки единственное требование, которому должны удовлетворять эти волновые числа, сводится к условию $c_A (m - nq) \simeq \simeq V_b$. Это возможно при m и n масштаба единицы, $(m, n) \simeq 1$. В случае же дрейфовой раскачки должно быть $V_b/qR \simeq \omega_*$, где $\omega_* \simeq \simeq mV_b^2/\omega_B a^2$ — дрейфовая частота. Введенная выше длина L при наличии шира связана с азимутальными волновыми числами соотношением $L \simeq q/mq'$. Поэтому в случае пучковой раскачки в качестве оценки для L можно принять малый радиус токамака, $L \simeq \simeq a$, тогда как в случае дрейфовой раскачки и большего шира ($q'/q \simeq 1/a$) $L \simeq \Lambda R/a$. Поэтому развитый в настоящей статье под-

ход хорошо оправдывается в случае пучковой раскачки и значительно хуже — в случае дрейфовой раскачки.

Эффектом уменьшения пучкового инкремента пренебрегалось не только в [4, 7], но и в работе [13] (см. также § 5.3 [2]). В [13] предполагалось, что основным эффектом, стабилизирующим неустойчивость, является затухание на запертых электронах. При этом была получена оценка для характерного времени развития неустойчивости $t \simeq \omega_0^{-1}(L/\rho_i)^{2/3}\delta^{-1/3}$ (см. уравнение (6.6) работы [13] или уравнение (5.34) работы [2]), отличающаяся от (6.1) коэффициентом $\Lambda (\rho^2 L \delta)^{-1/3}$, численно не на много превосходящим единицу. Аналогично условие неустойчивости (5.28) является уточнением соответствующих результатов (6.7), (6.8) работы [13] (см. также (5.15), (5.36) работы [2]). Количественно, однако, это уточнение не является значительным.

Заметим, что, следуя работе [8], можно было бы рассмотреть раскачку ионным пучком собственных альфвеновских колебаний плазмы. В [8] рассматривалась несколько другая задача, а именно задача о дрейфовой раскачке таких колебаний, обусловленной пространственной неоднородностью пучка. Поэтому результаты [8] не имеют прямого отношения к задаче о пучковой раскачке альфвеновских колебаний, обусловленной пиком на функции распределения быстрых ионов. Нетрудно, однако, обобщить результаты [8] на случай пучковой раскачки. При этом, как и в [8], получилось бы, что характерная радиальная длина волны собственных альфвеновских возмущений порядка ларморовского радиуса ионов основной компоненты плазмы, $k_{\perp} \rho_i \simeq 1$. Это, вообще говоря, не слишком критично для применимости представления об альфвеновских возмущениях, так как хорошо известно, что результаты, касающиеся альфвеновских возмущений с $k_{\perp} \rho_i \ll 1$, качественно остаются в силе и при $k_{\perp} \rho_i \simeq 1$. Однако не следует забывать, что быстрые ионы, ответственные за раскачку альфвеновских возмущений, становятся чувствительными к конечности k_{\perp} уже при гораздо меньших k_{\perp} , а именно при $k_{\perp} \Lambda \simeq 1$. Вследствие этого при $k_{\perp} \rho_i \simeq 1$, как видно, например, из формулы (5.21), пучковый инкремент становится малым по сравнению с предсказываемым длинноволновым приближением ($k_{\perp} \Lambda < 1$) как параметр $(\rho_i/\Lambda)^3$. В [8] то обстоятельство игнорировалось. Если его учесть, то окажется, что инкремент нарастания собственных альфвеновских колебаний мал по сравнению с инкрементом нарастания несобственных колебаний как вышеуказанный параметр $(\rho_i/\Lambda)^3$. Вместе с тем при $k_{\perp} \rho_i \simeq 1$ затухание на электронах более существенно, чем при $k_{\perp} \Lambda \simeq 1$ (в $(\Lambda/\rho_i)^2$ раз). Поэтому ясно, что исследованные выше неустойчивости несобственных колебаний, вообще говоря, более важны, чем неустойчивости собственных колебаний.

Указанное различие в инкрементах собственных и несобственных альфвеновских колебаний исчезает в случае, если рассматриваются возмущения, локализованные вблизи центра плазменного шнура. Такого рода собственные альфвеновские колебания обсу-

дались в [8]. В этом случае параметр $k_{\perp} \Lambda$ может оказаться малым, $k_{\perp} \Lambda \simeq 1$, и именно тогда и можно использовать дрейфовое приближение для быстрых ионов, как это делали авторы [8].

Интересно отметить, что неустойчивости, рассмотренные в [8], предсказывались только для центральной части плазмы. Этот результат также связан с отмеченным выше уменьшением параметра $k_{\perp} \rho_i$ для возмущений, локализованных вблизи центра шнура. Однако в рамках предположений работы [8] уменьшение $k_{\perp} \rho_i$ приводит не к увеличению пучкового инкремента (дестабилизирующего фактора), а к уменьшению электронного декремента (стабилизирующего фактора), который, согласно сказанному выше, также чувствителен к масштабу поперечной длины волны. Этот эффект и объясняет полученный в [8] результат о неустойчивости центральной части плазмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайловский А. Б. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М., Атомиздат, 1978.
2. Михайловский А. Б. Вопросы теории коллективных процессов в токамаке с группой быстрых ионов. — См. наст. вып., с. 83.
3. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости неоднородной плазмы. Изд. 2-е. М., Атомиздат, 1976.
4. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости. — «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, с. 195.
5. Ландау Л. Д. Колебания электронной плазмы. — «Жури. эксперим. и теор. физ.», 1946, т. 16, с. 574.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1974.
7. Тимофеев А. В. К теории устойчивости альфвеновских колебаний неоднородной плазмы. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 510.
8. Rosenbluth, M. N. Rutherford P. H. Excitation of Alfvén waves by high-energy ions in a tokamak. — «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 1428.
9. Неустойчивости несобственных колебаний и их роль в проблеме токамака с инжекцией нейтралов. Препринт ИАЭ-2693. М., 1976. Авт.: В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Л. Френкель, И. Г. Шухман.
10. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей Т. 2. Неустойчивости однородной плазмы. Изд. 2-е. М., Атомиздат, 1977.
11. Веденов А. А., Рютов Д. Д. Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 3.
12. Бардаков В. М. Эволюция несобственных слаболокализованных альфвеновских возмущений в двухкомпонентном токамаке. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1213.
13. Mazur V. A., Mikhajlovskij A. B. Stabilization of the Alfvén wave instability in a two-component tokamak. — «Nucl. Fusion», 1977, v. 17, p. 193.
14. Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Влияние запертых электронов на альфвеновские волны в токамаке. — «Жури. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 71, с. 1813.
15. Михайловский А. Б., Френкель А. Л. К теории дрейфовых термоядерных неустойчивостей реактора-токамака. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1219.

НЕУСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИНЕЧЕТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТОКАМАКЕ

В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Г. Морозов, И. Г. Шухман

§ 1. Введение

В данной работе излагаются некоторые результаты теории электростатических (потенциальных) неустойчивостей квазинечетных возмущений в токамаках.

В § 2 мы рассмотрим квазинечетные дрейфовые возмущения [1, 2], в § 3 — возмущения, связанные с запертыми ионами, и в § 4 — с примесями [3].

Заметим, что в [2] исследовались также квазинечетные альфвеновские возмущения. Соответствующие результаты [2] изложены в обзоре [4].

§ 2. Квазинечетные дрейфовые возмущения

Система исходных уравнений для квазинечетных дрейфовых возмущений аналогична системе уравнений для альфвеновских возмущений, приводившейся в § 4.5 обзора [4]. Основное различие состоит в том, что дрейфовые возмущения полагаем потенциальными, так что $\zeta = 0$, $\xi = (mc/\omega a B_s)\psi$ (обозначения те же, что и в § 4.5 обзора [4]). При этом из двух исходных уравнений (4.71) обзора [4] остается только уравнение квазинейтральности, которое, однако, должно быть дополнено членами, учитывающими продольную инерцию ионов.

Учитывая сказанное и введя обозначения $A_l = \psi_l^+$, $B_l = \psi_l^-$, аналогично § 4.5 обзора [4] приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \hat{R}_l A_l + \frac{k_s^2 c_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) A_l + 4i \frac{k_l k_s}{\omega^2} c_s^2 \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) B_l - \\ & - \frac{1}{4\pi} \left\langle B_s \int d\lambda M_l^{+*} \sum_{l'} \frac{1}{\sigma_{l'}} (h_{l'}^+ A_{l'} + h_{l'}^- B_{l'}) \right\rangle - \\ & - \sigma_l \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) \frac{\varepsilon \Omega}{\omega} \left[A_{l+1} + A_{l-1} + \frac{k_a}{k_b} (B_{l+1} - B_{l-1}) \right] = 0, \quad (2.1). \\ & \hat{R}_l B_l + \frac{k_s^2 c_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) B_l - 4i \frac{k_l k_s}{\omega^2} c_s^2 \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) A_l - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4\pi} \left\langle B_s \int d\lambda M_i^{-*} \sum_{l'} \frac{1}{\sigma_{l'}} (h_l^{\dagger} A_{l'} + h_l^{-} B_{l'}) \right\rangle - \\ - \sigma_i \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \frac{\varepsilon \Omega}{\omega} \left[B_{l+1} + B_{l-1} - \frac{k_a}{k_b} (A_{l+1} - A_{l-1}) \right]. \quad (2.2)$$

Здесь $k_l = l/qR$, $k_s = s/qR$, $c_s^2 = T_e/M_i$,

$$\hat{R}_i = 1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \left(b_i - \frac{k_i^2 c_s^2}{\omega^2} \right); \quad (2.2)$$

$\omega_{ne} = -(T_e/T_i)\omega_{ni}$ — дрейфовая частота электронов по градиенту плотности, $\Omega = k_b c T_e / e a B_s$; $\varepsilon = a/R$, $b_i = k_{\perp 1}^2 T_e / M_i \omega_{Bi}^2 \equiv k_{\perp 1}^2 \rho_i^{\pm}$; функции h_l^{\pm} определены уравнением (4.73) обзора [4].

1. Предельный случай $\varepsilon \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$. Из уравнений (2.1) и (2.2) следует, что взаимосвязь между четными и нечетными возмущениями отсутствует, если $\varepsilon \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$. Действительно, полагая в (2.1) и (2.2) $\varepsilon = 0$ и учитывая, что при $s \rightarrow 0$, $M_i^{-} = 0$, $h_i^{-} = 0$, приводим уравнения (2.1) и (2.2) к виду

$$\hat{R}_i A_i = \frac{1}{4\pi} \left\langle B_s \int d\lambda M_i^{+*} \sum_{l'} \frac{1}{\sigma_{l'}} h_l^{\dagger} A_{l'} \right\rangle = 0; \quad (2.4)$$

$$\hat{R}_i B_i = 0. \quad (2.5)$$

Видно, что в уравнение (2.4) входит только величина A_i , тогда как в (2.5) только B_i , что и свидетельствует об отсутствии зацепления между четными и нечетными возмущениями. Видно также, что нечетные возмущения, в отличие от четных, нечувствительны к эффектам, обусловленным запертыми электронами.

С точностью до константы уравнение (2.5) имеет решение $B_i = \delta_{i,N}$, $N = 1, 2, 3, \dots$, соответствующее собственным частотам ω_N , удовлетворяющим уравнению $R_N(\omega_N) = 0$, т. е. согласно (2.3)

$$1 - \omega_{ne}/\omega_N + (1 - \omega_{ni}/\omega_N)(b_i - k_N^2 c_s^2 / \omega_N^2) = 0. \quad (2.6)$$

В принятых выше приближениях $b_i \ll 1$, $(k_N c_s / \omega)^2 \ll 1$ это означает

$$\omega_N^{\text{нечетн}} = \omega_{ne} [1 + (1 + T_i/T_e)(k_N^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2 - b_i)]. \quad (2.7)$$

Это уравнение описывает дрейфовые волны, теория которых в приближении однородного магнитного поля была изложена в гл. 6 книги [5]. С этими волнами связаны дрейфовые (универсальные) неустойчивости, обусловленные взаимодействием с ними резонансных электронов. Если магнитное поле предполагается однородным, так что эффектом запираения резонансных электронов, характерным для геометрии токамака [6], пренебрегается, то инкремент нарастания этих волн [5]

$$\gamma \simeq [(1 + T_i/T_e)(b_i - k_N^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2) - \eta_e / 2] \omega_{ne}^2 / |k_N| v_{Te}, \quad (2.8)$$

где $v_{Te} = (2T_e/M_e)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов $\eta_e = d \ln T_e / d \ln n_0$.

Влияние на дрейфовую неустойчивость эффекта запираания резонансных электронов впервые рассматривалось в работах Коппи и др. [7, 8], где было показано, что этот эффект приводит к уменьшению инкремента (2.8) на фактор порядка $\varepsilon^{-1} (\omega/k_N v_{Te})^2$, так что с учетом этого эффекта

$$\gamma \simeq [(1 + T_i/T_e)(b_i - k_N^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2)] \omega_{ne}^4 / \varepsilon (k_N v_{Te})^3. \quad (2.9)$$

(Здесь для простоты положено $\eta_e = 0$.)

Частоты четных возмущений, как следует из (2.4), порядка

$$\omega_N^{(\text{четн})} \simeq \omega^{(\text{нечетн})} + k_N^2 c_s^2 \sqrt{\varepsilon} / \omega_{ne}, \quad (2.10)$$

где расщепление частот

$$\Delta\omega / \omega_{ne} \simeq \varepsilon^{1/2} k_N^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2 \quad (2.11)$$

обусловлено запертыми частицами. Декремент затухания (инкремент нарастания) четных возмущений порядка

$$\gamma^{(\text{четн})} \simeq -\eta_e (v_e \omega_{ne})^{1/2} \quad (2.12)$$

и при характерных параметрах токамака превосходит (2.9). Перепутывание возмущений, возникающее при $s \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$, приводит к появлению декремента нечетных возмущений, хотя и меньшего, чем декремент (2.12), но также превосходящего (2.9).

Так как при конечных значениях параметра s и кривизны четные и нечетные возмущения перепутываются, мы будем в дальнейшем называть возмущения, которые без учета перепутывания являются чисто четными и чисто нечетными, соответственно квазичетными и квазинечетными. Рассмотрим эффекты конечной кривизны магнитной оси и конечного s отдельно.

2. Декремент затухания квазинечетных дрейфовых возмущений при $s = 0$. Проведя вычисления, изложенные в работе [1], приходим к следующему выражению для декремента затухания квазинечетных дрейфовых возмущений [1]:

$$\gamma^{(\text{нечетн})} = 1,61 \varepsilon^2 (k_a/k_b)^2 (q^2 R^2 \omega_{ne} \Omega / c_s^2)^2 \chi_N [v_e \omega_{ne} \ln(128 \varepsilon \omega_{ne} / v_e)]^{1/2} \times \\ \times [(1 + T_i/T_e)(b_i - k_N^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2) - 0,66\eta_e]. \quad (2.13)$$

Здесь v_e — частота электронных столкновений, χ_N — численные коэффициенты, возникающие при интегрировании по параметру λ . Явный вид интегралов, через которые выражаются χ_N , приведен в [1]. В частности, при $N = 1$ $\chi_N = 0,42$. Заметим также, что при получении (2.11) столкновения предполагались редкими, $\omega > v_e/\varepsilon$.

Перепутывание возмущений приводит также к сдвигу вещественной части частоты квазинечетных возмущений на величину

$$\omega^{-1} \Delta\omega^{(\text{нечетн})} \simeq (k_a/k_b)^2 \varepsilon^{5/2} q^2 R^2 \Omega^2 / c_s^2. \quad (2.14)$$

Теория возмущений, используемая при выводе (2.13), справедлива, если $\Delta\omega^{(\text{нечетн})} \ll \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ определено соотношением (2.11). Отсюда следует условие применимости выражения (2.13):

$$(q^2 k_a k_b \rho_i^2) / \varepsilon^2 \ll 1. \quad (2.15)$$

Величина, стоящая в левой части этого неравенства, и есть малый параметр теории возмущений. Этот малый параметр характеризует также отношение декрементов квазинечетных и квазичетных возмущений

$$\gamma^{(\text{нечетн})}/\gamma^{(\text{четн})} \simeq (q^2 k_a k_b \rho_i^2)^2 / \varepsilon^2. \quad (2.16)$$

На пределе применимости теории возмущений эти декременты одного порядка.

Оценку минимального декремента квазинечетных дрейфовых возмущений можно получить, используя условие $(\omega_{ne} q R / c_s)^2 > 1$. Полагая также $k_a \simeq k_b$, будем иметь

$$\gamma_{\text{мин}} \simeq \varepsilon^2 \gamma_{\text{макс}} \simeq \varepsilon^2 (v_e \omega_{ne})^{1/2} [(1 + T_i / T_e) (b_i - k_N^2 c_s^2 / \omega_{ne}^2) - 0,66 \eta_e]. \quad (2.17)$$

Из сравнения (2.17) с (2.9) видно, что найденный нами декремент квазинечетных дрейфовых возмущений, обусловленный перепутыванием этих возмущений с четными благодаря эффекту конечной кривизны, велик по сравнению с декрементом приближения непрерывующихся возмущений при

$$(v_e / \omega_{ne})^{1/2} > \varepsilon^{-3} (\omega_{ne} / k_N v_{Te})^3. \quad (2.18)$$

Поскольку, согласно [5], отношение ω_{ne} / k_N ограничено сверху скоростью Альфвена, $\omega_{ne} / k_N < c_A$, то (2.18) удовлетворяется для всех допустимых ω_{ne} , если

$$(v_e q R / c_A)^{1/2} > (M_e / M_i \beta \varepsilon^2)^{3/2}. \quad (2.19)$$

Для термоядерного реактора с параметрами $n_0 \simeq 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T_e \simeq T_i \simeq 15 \text{ кэВ}$, $B_0 \simeq 4 \cdot 10^4 \text{ Гс}$, $R = 10^3 \text{ см}$, $\varepsilon = 1/5$, $q = 2$ левая часть (2.19) порядка 0,1, тогда как правая — порядка 0,01. Это означает, что найденный нами декремент существенно больше, чем это следует в приближении незацепляющихся возмущений.

3. Декремент затухания квазинечетных дрейфовых возмущений при $s \neq 0$. Пренебрежем в (2.1), (2.2) эффектами конечной кривизны, а параметр s будем считать малым, но конечным. Производя вычисления, приведенные в работе [2], приходим к выражению для декремента [2]:

$$\gamma_N^{(\text{нечетн})} \approx -128 (s^2 \eta_e / N^2 \varepsilon) \alpha_N [v_e \omega_{ne} \ln(128 \varepsilon \omega_{ne} / v_e)]^{1/2}, \quad (2.20)$$

где α_N — численные коэффициенты, аналогичные χ_N [2]. При $N = 1$ выражение (2.20) принимает вид

$$\gamma_1^{(\text{нечетн})} \approx -21,7 (s^2 \eta_e / \varepsilon) [v_e \omega_{ne} \ln(128 \varepsilon \omega_{ne} / v_e)]^{1/2}. \quad (2.21)$$

По порядку величины

$$\gamma \simeq -s^2 \eta_e \varepsilon^{-1} (v_e \omega_{ne})^{1/2}. \quad (2.22)$$

Для $\Delta \omega^{(\text{нечетн})}$ теперь вместо (2.14) имеет оценку $\Delta \omega^{(\text{нечетн})} \simeq \simeq k_s^2 c_s^2 / \omega_{ne} \varepsilon^{1/2}$. Эта величина не должна превышать расщепления частот нулевого приближения $\Delta \omega \simeq \varepsilon^{1/2} c_s^2 / q^2 R^2 \omega_{ne}$, что приводит к условию $s^2 / \varepsilon < 1$, характеризующему параметр малости теории возмущений. Если это условие не выполнено, то разделение дрей-

фовых возмущений на квазинечетные и квазичетные невозможно. Наконец, как и в п.2, имеем $\gamma^{(\text{нечетн})}/\gamma^{(\text{четн})} \simeq s^2/\varepsilon$, так что на пределе применимости изложенной выше теории возмущений декременты квазинечетных и квазичетных возмущений оказываются одного порядка.

§ 3. Квазинечетные возмущения, обусловленные наличием запертых ионов

В этом и следующем параграфе мы проведем исследование возмущений с частотами ниже баунс-частоты запертых ионов. Как мы уже убедились выше, в том случае, когда частота возмущений меньше частоты колебаний соответствующего сорта частиц между пробками магнитного поля, вклад в возмущенную плотность запертых частиц этого сорта равен нулю, если возмущение амплитуды потенциала антисимметрично относительно внешнего обвода тора. Однако учет следующих членов разложения по параметру $\omega/\hat{\omega}_b$, где $\hat{\omega}_b$ — баунс-частота запертых частиц, приводит к отличной от нуля возмущенной плотности и в нечетных возмущениях. Впервые на это обратил внимание Коппи [9—12]. Таким образом, вклады в возмущенную плотность запертых частиц для четных и нечетных возмущений имеют различный порядок величины. Это приводит, например, к тому, что в нечетных возмущениях важна роль примесных ионов.

Ниже получим исходные уравнения для таких низкочастотных потенциальных колебаний, в которых учтем также возможность наличия тяжелых примесей. В этом параграфе проанализируем возможные неустойчивости таких низкочастотных возмущений в отсутствие примесей. Примесные возмущения обсудим в § 4.

1. Вывод исходных уравнений для низкочастотных потенциальных колебаний. Возмущение потенциала представим в виде, аналогичном формуле (4.70) работы [4]. Частоту колебаний будем считать заключенной в пределах

$$\omega_{CI} \ll \omega < \omega_{bi} \ll \omega_{be}; \quad (3.1)$$

$$(\nu_I/\varepsilon, \nu_i/\varepsilon) \ll \omega \ll \nu_e/\varepsilon, \quad (3.2)$$

где $\omega_{b, i, e} \simeq v_{Ti, e} \sqrt{\varepsilon}/qR$ — баунс-частоты ионов и электронов соответственно; ω_{CI} — частота обращения пролетных (circulating) примесных (impurity) ионов вдоль тора ($\omega_{CI} \simeq v_{Ti}/qR$); $\nu_{e, i, I}$ — частоты столкновений электронов, ионов и примесей соответственно; $v_{Ti, e, I}$ — тепловые скорости. Будем считать, что характерный масштаб локализации возмущения по координате a достаточно велик по сравнению с шириной Λ бананообразной траектории ионов $\Lambda d \ln \bar{\psi}/da < 1$, где $\Lambda \simeq q\rho_i/\sqrt{\varepsilon}$. Ограничимся также случаем $\omega > \bar{\omega}_{Di}$, где $\bar{\omega}_{Di} \simeq k_b \Lambda \omega_{bi}$ — частота магнитного дрейфа.

Уравнение квазинейтральности в гармониках, способ введения которых ясен из § 4.5 обзора [4], имеет вид

$$(\tilde{n}_I)^\pm + Z(\tilde{n}_I)^\pm = (\tilde{n}_e)^\pm, \quad (3.3)$$

где eZ — заряд примесей.

Для возмущенной плотности электронов в соответствии с (3.2) имеем

$$(\tilde{n}_e)^\pm = (e/T_e) n_e \psi_I^\pm. \quad (3.4)$$

Считая, что согласно (3.2) эффекты запертости примесей несущественны, для гармоник возмущенной плотности примесей получим:

$$(\tilde{n}_I)^\pm = -\frac{n_I e}{T_I} \frac{\omega_I^*}{\omega} \psi_I^\pm \frac{eZn_I}{M_I q^2 R^2 \omega^2} (l^2 \psi_I^\pm \mp 4i l s \psi_I^\mp), \quad (3.5)$$

где $\omega_I^* = (k_b c T_I / e B_s) d \ln n_I / da$, n_I — равновесная плотность примесей. Мы пренебрегли в (3.5) градиентом температуры примесей.

Возмущенную плотность ионов представим в виде

$$\tilde{n}_i = -\frac{en_i}{T_i} \psi + \tilde{n}_i^{tr} + \tilde{n}_i^c, \quad (3.6)$$

где \tilde{n}_i^c — возмущенная плотность пролетных ионов, \tilde{n}_i^{tr} — небольшая часть возмущенной плотности запертых ионов. Их значения можно найти из дрейфового кинетического уравнения интегрированием по траекториям, причем для запертых частиц интегрирование удобно проводить, разлагая возмущение потенциала в ряд Фурье по гармоникам баунс-частоты [9]. В результате получим:

$$\begin{aligned} (\tilde{n}_i^{tr})^\pm = & \frac{en_i}{T_i} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \sum_{l'} (\alpha_{l',l'}^{\pm,+} \psi_{l'}^\pm + \alpha_{l',l'}^{\pm,-} \psi_{l'}^\mp) - \right. \\ & - \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_b^2} \left[1 - \frac{\omega_{ni}(1-\eta_i)}{\omega} \right] \sum_{l'} (\beta_{l',l'}^{\pm,+} \psi_{l'}^\pm + \beta_{l',l'}^{\pm,-} \psi_{l'}^\mp) - \\ & \left. - \frac{i \sqrt{\pi} \omega^3}{\hat{\omega}_b^3} \left[1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_i \right) \right] \sum_{l'} (\gamma_{l',l'}^{\pm,+} \psi_{l'}^\pm + \gamma_{l',l'}^{\pm,-} \psi_{l'}^\mp) \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь

$$\hat{\omega}_b = v_{Ti} \sqrt{\varepsilon} / \sqrt{2} qR, \quad \alpha_{l',l'}^{\pm,\pm} = \frac{1}{\sigma_l} \int_0^1 \kappa d\kappa g_{l'}^{\pm*}(\kappa) g_{l'}^\pm(\kappa) L(\kappa); \quad (3.8)$$

$$\beta_{l',l'}^{\pm,\pm} = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_l} \int_0^1 \kappa d\kappa \sum_{p \neq 0} \frac{1}{p^2} g_{l'}^{\pm*}(p) g_{l'}^\pm(p) L^3(\kappa), \quad (3.9)$$

$$\gamma_{l',l'}^{\pm,\pm} = \frac{1}{8 \sqrt{2} \pi^3 \sigma_l} \int_0^1 \kappa d\kappa \sum_{p \neq 0} g_{l'}^{\pm*}(p) g_{l'}^\pm(p) L^4(\kappa) / |p|^3; \quad (3.10)$$

$$g_i^\pm(p) = \tau_b^{-1} \oint \varphi_i^\pm[\theta(t')] \exp(-ip\hat{\omega}_b t') dt', \quad (3.11)$$

где $\varphi_i^\pm(\theta) = \begin{Bmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{Bmatrix} \exp(is\theta)$; $\tau_b = qRL(\kappa)/v\sqrt{\varepsilon}$ — баунс-период запертого иона; $L(\kappa) = 4\sqrt{2}K(\kappa)$, $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; звездочка означает комплексное сопряжение.

Коэффициенты α , β , γ — числа, зависящие только от l , l' , s , которые, как вытекает из их определений, обладают следующими свойствами: $\alpha_{l,i}^{\pm} = \alpha_{l,i}^{\pm*} = 0$; $\beta_{l,i}^{\pm} = \beta_{l,i}^{\pm*} = 0$; $\gamma_{l,i}^{\pm} = \gamma_{l,i}^{\pm*} = 0$ при $s = 0$. Нужные нам для дальнейших вычислений коэффициенты имеют следующие значения ($s \ll 1$) [13]:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{0,0}^{\pm} &\simeq 2,83; \alpha_{1,0}^{\pm} = \alpha_{0,1}^{\pm} = -0,94; \alpha_{1,1}^{\pm} = 1,57; \alpha_{1,0}^{\pm} = \\ &= -\alpha_{0,1}^{\pm} = 2,51is; \alpha_{1,1}^{\pm} = -\alpha_{1,1}^{\pm} = 0,88is; \alpha_{1,1}^{\pm} = \\ &= 1,75s^2; \beta_{1,1}^{\pm} = 10,0; \beta_{1,2}^{\pm} = \beta_{2,1}^{\pm} = 0,75; \beta_{2,2}^{\pm} = \\ &= 6,0; \gamma_{1,1}^{\pm} = 28,2; \gamma_{1,2}^{\pm} = \gamma_{2,1}^{\pm} = 6,5; \\ \gamma_{2,2}^{\pm} &= 16,9. \end{aligned} \right\} (3.12)$$

Аналогичные вычисления возмущенной плотности пролетных ионов приводят к результату

$$\begin{aligned} (\tilde{n}_i^e)_i^\pm &= -\frac{en_i}{T_i} \sqrt{2\varepsilon} \left\{ \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_b^2} \left[1 - \frac{\omega ni}{\omega} (1 - \eta_i) \right] \left[\frac{\psi_i^\pm}{2l^2} \pm \frac{is\psi_i^\mp}{l^3} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{i\sqrt{\pi}}{8} \frac{\omega^3}{\hat{\omega}_b^3} \left[1 - \frac{\omega ni}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_i \right) \right] \left[\frac{\psi_i^\pm}{l^3} \pm \frac{3is\psi_i^\mp}{l^4} \right] \right\}, \quad (l \geq 1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Что касается гармоники $(\tilde{n}_i^e)_0^+$, то в зависимости от $|s|$ имеем:

а) $|s| > \omega/2\hat{\omega}_b$:

$$\begin{aligned} (\tilde{n}_i^e)_0^+ &= -\frac{en_i}{T_i} \frac{\sqrt{\varepsilon} \omega^2}{\sqrt{2} s^2 \hat{\omega}_b^2} \left\{ 1 - \frac{\omega ni}{\omega} (1 - \eta_i) + \right. \\ &+ \left. \frac{i\sqrt{\pi}\omega}{4|s|\hat{\omega}_b} \left[1 - \frac{\omega ni}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_i \right) \right] \right\} \psi_0^+; \end{aligned} \quad (3.14)$$

б) $\omega/2\hat{\omega}_b > |s| > \sqrt{2\varepsilon}\omega/2\hat{\omega}_b$:

$$\begin{aligned} (\tilde{n}_i^e)_0^+ &= -\frac{en_i \sqrt{2\varepsilon}}{T_i} \left\{ 1 - \frac{\omega ni}{\omega} - \frac{\sqrt{2\varepsilon} \omega^2}{2s^2 \hat{\omega}_b^2} \left[1 - \frac{\omega ni}{\omega} (1 - \eta_i) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega}{|s|\hat{\omega}_b} \left[1 - \frac{\omega ni}{\omega} \left(1 - \frac{\eta_i}{2} \right) \right] \right\} \psi_0^+; \end{aligned} \quad (3.15)$$

в) $|s| < \sqrt{2\varepsilon}\omega/2\hat{\omega}_b$:

$$(\tilde{n}_i^e)_0^+ \approx \frac{en_i}{T_i} \left(1 - \frac{\omega ni}{\omega} \right) \psi_0^+. \quad (3.16)$$

Подстановка (3.4), (3.5), (3.7), (3.13)—(3.16) в уравнение (3.3) приводит к искомому исходному уравнению, которое мы не будем выписывать из-за его громоздкости. Из перечисленных соотношений видно, что при $s = 0$ уравнения для четных и нечетных гармоник расщепляются. В этом случае, как и выше, мы можем говорить о четных и нечетных возмущениях. При $s \neq 0$, но $s \ll 1$ происходит перепутывание гармоник, однако при малых s перепутывание возмущений слабое — квадратично по параметру связи s .

2. Квазинечетные возмущения. Предположим сначала, что примеси отсутствуют. Тогда при $s = 0$ система уравнений для гармоник $\psi_{\bar{l}}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \psi_{\bar{l}} + \frac{V\bar{\varepsilon}}{\pi} \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_b^2} \left[1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} (1 - \eta_i)\right] \sum_{l'} \left(\beta_{\bar{l}, l'} \bar{\psi}_{l'} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{\sqrt{2}l^2} \delta_{ll'}\right) \psi_{\bar{l}} + i \frac{V\bar{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega^3}{\hat{\omega}_b^3} \left[1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_i\right)\right] \times \\ \times \sum_{l'} \left(\gamma_{\bar{l}, l'} \bar{\psi}_{l'} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8l^3} \delta_{ll'}\right) \psi_{\bar{l}} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ограничимся учетом первой гармоники ($l = 1$). Тогда при η_i , не слишком близких к единице (критерий см. ниже), уравнение (3.17) описывает квазинечетные возмущения с частотой

$$\omega_0 = 0,25 (1 + T_i/T_e) \hat{\omega}_b^2 [V\bar{\varepsilon} \omega_{ni} (1 - \eta_i)]^{-1} \quad (3.18)$$

и инкрементом

$$\gamma = -4,2 \frac{\omega_0^2}{\hat{\omega}_b} \frac{1 - (3/2) \eta_i}{1 - \eta_i}. \quad (3.19)$$

Заметим, что вследствие малости недиагональных элементов [см. (3.12)] решение системы (3.17) с учетом двух гармоник ($l = 1$ и $l = 2$) приводит к изменению коэффициентов в (3.18), (3.19) менее чем на 5%.

Используя (3.17), находим, что выражения (3.18) и (3.19) справедливы, если только $|1 - \eta_i| > (\varepsilon^{1/2} / k_b \Lambda)^{1/2}$. В противном случае в (3.17) можно пренебречь членами, квадратичными по $\omega / \hat{\omega}_b$, по сравнению с кубическими и тогда при $\eta_i \approx 1$ получается, что нарастающие решения отсутствуют. Поэтому неустойчивость возможна, если

$$2/3 < \eta_i \leq 1 + O(\varepsilon^{1/2} / k_b \Lambda)^{1/2}. \quad (3.20)$$

Из (3.1) и условия $\omega > \bar{\omega}_{Dl}$ ($\bar{\omega}_{Dl}$ — частота среднего магнитного дрейфа ионов, см. [4]) находим, что приведенные выше результаты относятся к интервалу волновых чисел, удовлетворяющих соотношению

$$\varepsilon^{1/2} < k_b \Lambda < \varepsilon^{1/4}. \quad (3.21)$$

Влияние конечного s на рассмотренные возмущения можно оценить, используя (3.14) — (3.16) и учитывая гармоники ψ_0^+ , ψ_1^+ и ψ_1^- . Тогда получаем:

$$\omega = \omega_0 + 0,4s^2 T_e \sqrt{\varepsilon} \omega_{ni} [1 + T_e/T_i]^{-1}. \quad (3.22)$$

Этот результат имеет место при $s \lesssim \omega_0/\hat{\omega}_b \simeq (\varepsilon^{1/2}/k_b \Lambda)^{1/2}$. При больших s вклад четных гармоник порядка вклада нечетных и понятие квазинечетных возмущений теряет смысл.

§ 4. Неустойчивости квазинечетных возмущений на примесях

Запишем теперь уравнение (3.6), сохранив члены, связанные с примесями. Для нечетных гармоник ψ_1^- при $s = 0$ оно имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{T_i}{T_e} + \frac{n_i}{n_e} \right) + \frac{n_i}{n_e} \frac{\omega_i^*}{\omega} Z - Z^2 \frac{n_i}{n_e} \frac{T_i}{M_I} \frac{l^2}{q^2 R^2 \omega^2} \right] \psi_1^- - \\ & - \frac{n_i}{n_e} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi} \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_b^2} \left[1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} (1 - \eta_i) \right] \sum_{l'} \left(\beta_{l'}^- \gamma_{l'}^- + \frac{\pi \sqrt{2}}{2l'^2} \delta_{ll'} \right) \psi_{l'}^- + \\ & + i \frac{n_i}{n_e} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega^3}{\hat{\omega}_b^3} \left[1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_i \right) \right] \sum_{l'} \left(\gamma_{l'}^- \gamma_{l'}^- + \frac{\pi \sqrt{2}}{8l'^3} \delta_{ll'} \right) \psi_{l'}^- = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Можно выделить три основных типа возмущений, получающихся из (4.1) при определенных значениях параметров.

В том случае, когда доминирующими в (4.1) являются члены с Z и $\omega^2/\hat{\omega}_b^2$, выделяются возмущения с частотой

$$\omega^2 \simeq 0,092 \frac{Z n_i}{n_i \sqrt{2\varepsilon}} \frac{\omega_i^* \hat{\omega}_b^2}{\omega_{ni} (1 - \eta_i)} \equiv 0,092 \left(\frac{Z_e}{Z} \right) \frac{\sigma_I}{\sqrt{2\varepsilon} (1 - \eta_i)} \hat{\omega}_b^2, \quad (4.2)$$

описывающие нерезонансную раскачку колебаний при $\sigma_I (1 - \eta_i) < 0$, где $\sigma_I = (d \ln n_i / da) / (d \ln n_i / da)$, $Z_e = Z^2 n_i / n_e$.

В предположении, что главными в (4.1) являются члены с Z^2 и $\omega^3/\hat{\omega}_b^3$, получаем

$$\omega^3 = -0,055 Z_e (2\varepsilon)^{-3/2} (M_i/M_I) \hat{\omega}_b^4 [\omega_{ni} (1 - \eta_i)]^{-1}. \quad (4.3)$$

В этом случае неустойчивость имеет место при любом соотношении между градиентами плотности и температуры.

Резонансная раскачка возмущений возможна в условиях, когда главными в (4.1) являются первый член и члены с Z и $\omega^3/\hat{\omega}_b^3$. В этом случае

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + i\gamma; \quad \omega_0 = - \frac{Z_e}{Z} \frac{\omega_i^*}{(1 + T_i/T_e)}; \\ \gamma &= 17,9 \frac{\sqrt{\varepsilon} \omega_0^3}{\hat{\omega}_b^3} \frac{\omega_{ni} [1 - (3/2) \eta_i]}{(1 + T_i/T_e)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Неустойчивость имеет место при $\sigma_l [(3/2)\eta_i - 1] > 0$. Численные коэффициенты в формулах (4.2)—(4.4) мы получили, решая систему (4.1) с учетом двух гармоник $l = 1, l = 2$.

Рассмотренные выше типы возмущений обсуждались впервые в работах Коппи [11, 12]. Условия, при которых они могут существовать, проанализированы в [3, 12]. Заметим, однако, что значения численных коэффициентов в работах [11, 12] не были определены, так как в этих работах дисперсионные уравнения получались в виде, выраженном через квадратичные формы, представляющие собой интегралы от собственных функций потенциала.

Конечность параметра s приводит к перепутыванию четных и нечетных гармоник, и для достаточно больших s (но $s \ll 1$) рассмотренные типы возмущений исчезают. Связывая конечность параметра s с наличием шири, можно убедиться, однако, что для типичного шири в токамаке ($q'a/q \simeq 1$) рассмотренные выше примесные возмущения еще имеют место (см. [3]). Поэтому связанные с ними неустойчивости могут играть существенную роль в динамике примесей в токамаке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазур В. А., Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Влияние запертых электронов на нечетные «дрейфовые» моды в токамаке.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 72, с. 956.
2. Михайловский А. В., Шухман И. Г. Квазинечетные альфвеновские моды в токамаке и их взаимодействие с запертыми электронами. Препринт ИАЭ-2707. М., 1976.
3. Михайловский А. Б., Шухман И. Г. О примесных неустойчивостях в токамаке.— «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 495.
4. Михайловский А. Б. Вопросы теории коллективных процессов в токамаке с группой быстрых ионов.— См. наст. вып., с. 83.
5. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. Изд. 2-е. М., Атомиздат, 1977.
6. Михайловский А. Б. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М., Атомиздат, 1978.
7. Coppi V., Rosenbluth M. N., Rutherford P. H. Fluid-like electron and ion modes in inhomogeneous plasmas.— «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 1055.
8. Collisionless microinstabilities in configurations with periodic magnetic curvature.— «Plasma Physics», 1968, v. 10, p. 1. Auth.: V. Coppi, G. Laval, R. Pellat, M. N. Rosenbluth.
9. Coppi V., Minardi E., Schram D. C. Resonant scattering of trapped particles by toroidal plasma modes.— «Lett. Nuovo cimento», 1972, v. 4, p. 789.
10. Coppi V., Minardi E. Transport and particle scattering due to toroidal plasma modes.— «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 1021.
11. Coppi V. Plasma modes due to impurity and magnetically trapped ions.— «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 31, p. 1443.
12. Coppi V., Revoldt G. Plasma decontamination and energy transport by impurity driven modes.— «Phys. Fluids», 1976, v. 19, p. 1144.
13. Морозов А. Г. Низкочастотные неустойчивости в токамаке, обусловленные запертыми ионами.— «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 1097.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Развитие теории гидромагнитных неустойчивостей токамаков.

А. Б. Михайловский

Введение	3
Глава 1. Методика учета тороидальности в теории гидромагнитных неустойчивостей токамака	4
§ 1.1. Введение	4
§ 1.2. Ковариантное уравнение малых колебаний	6
§ 1.3. Связь ковариантного уравнения малых колебаний с функционалом потенциальной энергии	8
§ 1.4. Уравнения мелкомасштабных МГД-возмущений	10
§ 1.5. Уравнения для низших идеальных МГД-возмущений	12
§ 1.6. Учет инерции в идеальных МГД-возмущениях	15
§ 1.7. Обзор литературы	20
Глава 2. Желобковые и баллонные неустойчивости в токамаке с большим β	22
§ 2.1. Общий анализ мелкомасштабных МГД-возмущений токамака с большим β	22
§ 2.2. Невыполнение критерия устойчивости Мерсье при $\beta \gtrsim a/Rq^2$	26
§ 2.3. Достаточный критерий устойчивости возмущений типа анти-Сайдема	29
§ 2.4. Устойчивость баллонных возмущений при $\beta \lesssim a/Rq^2$	30
§ 2.5. Возможность неустойчивости возмущений типа анти-Сайдема при $\beta > a/Rq^2$	32
§ 2.6. Обсуждение результатов и обзор литературы	32
Глава 3. Внутренние винтовые неустойчивости	33
§ 3.1. Введение	33
§ 3.2. Общие свойства винтовых возмущений в токамаке с плазмой низкого давления и малым градиентом тока	37
§ 3.3. Стабилизация внутренних винтовых неустойчивостей с $m = 1$ в токамаке круглого сечения с плазмой низкого давления и малым градиентом тока	39
§ 3.4. Стабилизирующее влияние квадрата градиента давления плазмы на возмущения с $m = 1$ в токамаке круглого сечения при малом градиенте тока	41

§ 3.5. Дестабилизирующее влияние градиента продольного тока в круглом токамаке с плазмой большого давления	43
§ 3.6. Обсуждение результатов и обзор литературы	44
Глава 4. Дрейфовые эффекты в теории МГД-возмущений токамака	45
§ 4.1. Введение	45
§ 4.2. Исходные уравнения.	46
§ 4.3. Внутренняя винтовая неустойчивость с $m = 1$	47
§ 4.4. Возмущения типа Сайдема	49
§ 4.5. Резистивная внутренняя винтовая неустойчивость с $m = 1$	50
§ 4.6. Гравитационно-резистивная и разрывная неустойчивости	52
§ 4.7. Кинетические дрейфовые эффекты в МГД-возмущениях токамака	54
§ 4.8. Обсуждение результатов	57
Список литературы	57

Нелинейные волны и солитоны

В. И. Петвиашвили

§ 1. Введение	59
§ 2. ВЧ-диамагнетизм и циклотронные солитоны	60
§ 3. Двумерный солитон потенциальной дрейфовой волны	65
§ 4. Уравнения МГД-волн с осевой симметрией	68
§ 5. Магнитно-звуковой вихрь	70
§ 6. Двумерный альфвеновский вихрь	72
§ 7. Одномерные альфвеновские солитоны и природа «жемчужин»	74
§ 8. Образование МГД-солитонов	76
§ 9. Взаимодействие пучка частиц с периодической ленгмюровской волной	78
Список литературы	81

Вопросы теории коллективных процессов в токамаке с группой быстрых ионов

А. Б. Михайловский

Введение	83
Глава 1. Коллективные процессы при поперечной инжекции быстрых нейтральных атомов	84
§ 1.1. Введение	84
§ 1.2. Квазилинейная релаксация группы быстрых ионов, движущихся поперек магнитного поля	85
§ 1.3. Неустойчивости столкновительных равновесий в режиме непрерывной инжекции	89
§ 1.4. Другие результаты теории коллективных процессов в токамаке с инжекцией нейтральных атомов	91

Глава 2. Линейная теория магнитно-звуковой циклотронной «термоядерной» неустойчивости	95
§ 2.1. Введение	95
§ 2.2. Возмущенная функция распределения	97
§ 2.3. О влиянии шира на возмущения с $k_{\parallel} = 0$	101
§ 2.4. Возмущения с $k_{\parallel} = 0$ в приближении однородного магнитного поля	102
§ 2.5. Дисперсионное уравнение колебаний плазмы в слабо-тороидальном магнитном поле	105
§ 2.6. Диелектрическая проницаемость осесимметричного токамака круглого сечения	106
§ 2.7. Стабилизация неустойчивости с $\gamma \sim (N_{\alpha}/N_0)^{1/2}$	109
§ 2.8. Циклотронная неустойчивость, вызываемая запертыми α -частицами	111
§ 2.9. Стабилизация циклотронной неустойчивости при большом тепловом разбросе запертых α -частиц	117
§ 2.10. Обзор работ по термоядерным неустойчивостям	118
Глава 3. Квазилинейная релаксация запертых α-частиц в реакторе-токамаке при циклотронной магнитно-звуковой неустойчивости	122
§ 3.1. Введение	122
§ 3.2. Вывод уравнений квазилинейной релаксации запертых α -частиц	122
§ 3.3. Упрощенные уравнения квазилинейной релаксации	124
§ 3.4. Анализ квазилинейных уравнений	127
§ 3.5. Суммирование и обсуждение результатов	130
Глава 4. Общие вопросы линейной теории альфвеновских неустойчивостей токамака с быстрыми ионами	131
§ 4.1. Введение	131
§ 4.2. Уравнение малых колебаний альфвеновского типа, учитывающее шир и диссипацию на фоновой плазме	132
§ 4.3. Вклад быстрых ионов в инкремент нарастания альфвеновских волн	140
§ 4.4. Вклад столкновительной диссипации на запертых электронах в уравнение малых колебаний квазичетных альфвеновских возмущений	144
§ 4.5. Вклад столкновительной диссипации на запертых электронах в декремент квазичетных альфвеновских возмущений	147
Глава 5. Некоторые результаты линейной теории альфвеновских неустойчивостей, возбуждаемых быстрыми ионами	151
§ 5.1. Введение	151
§ 5.2. Обзор первоначальных результатов по влиянию шира и диссипации на фоновой плазме на раскачку альфвеновских волн быстрыми ионами	152
§ 5.3. Стабилизация запертыми электронами альфвеновской неустойчивости в двухкомпонентном токамаке	157
§ 5.4. Возбуждение продольным ионным пучком коротковолновых альфвеновских возмущений	161

§ 5.5. Альфвеновские неустойчивости на запертых α -частцах с немонотонным распределением по скоростям . . .	164
§ 5.6. Дрейфовые термоядерные неустойчивости на баунс-резонансах и их стабилизация запертыми электронами	166
§ 5.7. Альфвеновская неустойчивость в двухкомпонентном токамаке некруглого сечения	168
§ 5.8. Стабилизация альфвеновской неустойчивости в двухкомпонентном токамаке некруглого сечения	172
§ 5.9. Заключительные замечания о работах по линейной теории альфвеновских неустойчивостей	174
Глава 6. Квазилинейная теория альфвеновских неустойчивостей	176
§ 6.1. Введение	176
§ 6.2. Квазилинейная релаксация продольного ионного пучка в пренебрежении кулоновскими столкновениями	176
§ 6.3. Квазилинейная релаксация продольного ионного пучка при учете кулоновских столкновений	181
§ 6.4. Квазилинейная релаксация пролетных α -частиц . . .	187
§ 6.5. Другие результаты квазилинейной теории альфвеновских неустойчивостей	188
Глава 7. Нелинейное взаимодействие пучка быстрых частиц с монохроматической волной	188
§ 7.1. Введение	188
§ 7.2. Продольный ионный пучок с постоянным числом частиц	189
§ 7.3. Нелинейная эволюция ленгмюровской монохроматической волны при наличии источника резонансных частиц	191
§ 7.4. Эволюция нелинейной альфвеновской волны в токамаке с непрерывной инжекцией нейтральных частиц	197
Заключение	199
Список литературы	200

К теории альфвеновских колебаний неоднородной плазмы

А. В. Тимофеев

§ 1. Введение	205
§ 2. Вопрос о собственных колебаниях. Аналог теоремы Рэлея . .	208
§ 3. Эволюция начальных возмущений	218
§ 4. Флуктуации в неравновесной плазме	224
Приложение	229
Список литературы	231

Неустойчивости несобственных колебаний

В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Л. Френкель, И. Г. Шухман

§ 1. Введение	233
§ 2. Несобственные ленгмюровские и альфвеновские колебания холодной неоднородной плазмы	237
§ 3. Гидродинамические эффекты в горячей плазме	240

§ 4. Пучковая неустойчивость несобственных ленгмюровских колебаний	242
§ 5. Пучковая неустойчивость несобственных альфвеновских колебаний в токамаке	246
§ 6. Обсуждение результатов	252
Список литературы	255

Неустойчивости квазинечетных возмущений в токамаке

В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Г. Морозов, И. Г. Шухман

§ 1. Введение	256
§ 2. Квазинечетные дрейфовые возмущения.	256
§ 3. Квазинечетные возмущения, обусловленные наличием запертых ионов	260
§ 4. Неустойчивости квазинечетных возмущений на примесях	264
Список литературы	265

ИБ № 652

Вопросы теории плазмы

Выпуск 9

Редактор *В. Н. Безрукова*
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*
Переплет художника *Н. Я. Вовка*
Технические редакторы *А. Л. Гулина,*
О. Н. Адакина
Корректор *Н. А. Смирнова*

Сдано в набор 27.09.78. Подп. к печати 29.05.79.
Т-07181. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 17,0. Уч.-изд. л. 18,18. Тираж 1700 экз.
Зак. изд. 76486. Зак. тип. 608. Цена 3 р.
Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли
г. Москва, 129041, Б. Переяславская ул., 46

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

АТОМИЗДАТ