Б. М. ЛЕВИТАН

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

Редактор *М. А. Евграфов.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.* Корректор *А. С. Каган.*

Подписано к печати 10/IV 1953 г. Бумага 84×108/32. 6,19 бум. л. 20,30 печ. л. 17,54 уч.-изд. л. 34 500 тип. зн. в печ. л. Т-00036. Тираж 4000 экз. Цена книги 8 руб. 75 коп. Переплет 2 руб. Заказ № 885.

16-я тип. Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И НА ГРУППАХ

ЧАСТЬ II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография возникла из лекций, которые я читал в разное время в Харьковском государственном университете им. А. М. Горького и в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Хотя теория почти-периодических функций возникла сравнительно недавно, в настоящее время накопилась обширная литература по различным вопросам этой теории и было бы чрезвычайно затруднительно дать в одной книге полный обзор теории. Я стремился лишь к тому, чтобы по прочтении моей монографии можно было свободно изучать текущую журнальную литературу по всем существенным направлениям теории почти-периодических функций. Именно поэтому я включил также в монографию изложение основных фактов из теории аналитических почти-периодических функций.

Проф. А. И. Плеснер ознакомился с рукописью монографии и сделал ряд весьма ценных замечаний, которыми я воспользовался при окончательном редактировании этой книги.

Кроме того, ряд ценных замечаний сделали проф. А. С. Кованько и проф. В. А. Марченко.

Выражаю свою искреннюю благодарность всем названным лицам.

Москва, 20 XI 1952 г. *Б. М. Левитан*

ЧАСТЬ I

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И НА ГРУППАХ

ВВЕДЕНИЕ

1. Рассмотрим две непрерывные периодические функции $f(x)$ и $g(x)$. Пусть p есть период $f(x)$ и q — период $g(x)$. Если числа p и q соизмеримы, т. е. если существуют такие целые числа m и n, что $mp = nq$, то сумма $h(x) = f(x) + g(x)$ является также периодической функцией с периодом $T = mp = nq$. Если же периоды функций $f(x)$ и $g(x)$ несоизмеримы, то сумма этих функций не будет периодической функцией. Естественно, однако, ожидать, что периодичность слагаемых существенно отражается на их сумме. Для того чтобы выяснить, каким именно образом, воспользуемся следующей теоремой *).

Пусть p и q — произвольные действительные числа. Каково бы ни было число $\delta > 0$, можно указать такое положительное число $L = L(\delta)$, что в каждом интервале длины L найдется по крайней мере одно число τ, удовлетворяющее системе двух неравенств

$$|\tau - s_1 p| < \delta, \quad |\tau - s_2 q| < \delta, \tag{1}$$

где s_1 и s_2 — целые числа.

С помощью этой теоремы мы легко установим важное свойство суммы двух периодических функций. Возьмем произвольное положительное число ε и выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что если $|h| < \delta$, то

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |g(x+h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Это возможно в силу непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$.

---

*) Эта теорема является частным случаем одной важной теоремы Кронекера (см. гл. 2, § 2).

Предположим теперь, что число τ удовлетворяет системе неравенств (1). В этом случае $\tau = s_1 p + h_1$, $\tau = s_2 q + h_2$, где $|h_1| < \delta$ и $|h_2| < \delta$, а s_1 и s_2 — целые числа. Поэтому

$$h(x+\tau) = f(x+\tau) + g(x+\tau) =$$
$$= f(x + s_1 p + h_1) + g(x + s_2 q + h_2) = f(x + h_1) + g(x + h_2)$$

и, значит, в силу неравенств (2)

$$|h(x+\tau) - h(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x+h_1) - f(x)| + |g(x+h_2) - g(x)| < \varepsilon.$$

Итак, функция $h(x)$ удовлетворяет следующему условию.

Каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое положительное число $L = L(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины L найдется по крайней мере одно число τ, удовлетворяющее неравенству

$$|h(x+\tau) - h(x)| < \varepsilon.$$

Функция, удовлетворяющая этому условию, называется почти-периодической (в дальнейшем сокращенно — п.-п. функцией).

2. При сложении большего числа непрерывных периодических функций сумма также обладает свойством почти-периодичности. Доказательство следует непосредственно из теоремы, которая также есть частный случай теоремы Кронекера.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — произвольные действительные числа. Каково бы ни было положительное число δ, можно указать такое положительное число $L = L(\delta)$, что в каждом интервале длины L найдется по крайней мере одно число τ, удовлетворяющее системе неравенств

$$|\tau - s_i p_i| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

где s_i — целые числа.

Рассмотрим, в частности, конечный тригонометрический многочлен

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \tag{3}$$

где a_k — комплексные числа и λ_k — действительные числа. Так как этот многочлен является суммой периодических функций, то на основании предыдущего $S_n(x)$ обладает свойством почти-периодичности.

Очень легко доказывается, что если последовательность непрерывных п.-п. функций сходится равномерно на всей действительной прямой, то предельная функция также почти-периодична. Таким образом, мы можем получить *обширный класс* п.-п. функций, рассматривая всевозможные равномерные пределы тригонометрических многочленов вида (3).

Основная теорема теории непрерывных п.-п. функций состоит в том, что и обратно — каждая непрерывная п.-п. функция есть равномерный предел некоторой последовательности конечных тригонометрических сумм. Эта теорема полностью вскрывает структуру непрерывных п.-п. функций.

3. Существует другой источник непрерывных п.-п. функций, на который, задолго до создания общей теории п.-п. функций, обратил внимание выдающийся рижский математик Боль *).

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π по каждой переменной. Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_p)$:

$$f(x_1, \ldots, x_p) \sim \sum_{n_1, \ldots, n_p} a_{n_1, \ldots, n_p} e^{i(n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p)}. \qquad (4)$$

Далее, рассмотрим в p-мерном эвклидовом пространстве прямую, проходящую через начало координат:

$$x_1 = \alpha_1 t, \quad x_2 = \alpha_2 t, \quad \ldots, \quad x_p = \alpha_p t,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — некоторые действительные, отличные от нуля числа. Рассматривая значение функции $f(x_1, \ldots, x_p)$ на этой прямой, мы получим функцию одной переменной:

$$\varphi(t) = f(\alpha_1 t, \ldots, \alpha_p t).$$

*) P. Bohl [1], [2]

Покажем, что $\varphi(t)$ есть п.-п. функция. В самом деле, пусть число τ удовлетворяет системе неравенств (s_k — целые числа)

$$\left|\frac{\alpha_k}{2\pi}\tau - s_k\right| < \frac{\delta}{2\pi} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{5}$$

(Мы уже отмечали выше, что, каково бы ни было положительное число δ, можно указать такое положительное число $L = L(\delta)$, что в каждом интервале длины L найдется по крайней мере одно число τ, удовлетворяющее системе неравенств (5).)

Возьмем произвольное положительное число ε и выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что если для всех $k = 1, 2, \ldots, p$ $|h_k| < \delta$, то

$$|f(x_1 + h_1, \ldots, x_p + h_p) - f(x_1, \ldots, x_p)| < \varepsilon, \tag{6}$$

что возможно в силу непрерывности функции $f(x_1, \ldots, x_p)$. Из неравенств (5) следует, что $\alpha_k\tau = 2s_k\pi + h_k$, где $|h_k| < \delta$ и s_k — целые числа. Поэтому в силу неравенства (6)

$$\begin{aligned} |\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| = |f(\alpha_1 t + 2s_1\pi + h_1, \ldots, \alpha_p t + 2s_p\pi + h_p) - \\ - f(\alpha_1 t, \ldots, \alpha_p t)| = |f(\alpha_1 t + h_1, \ldots, \alpha_p t + h_p) - \\ - f(\alpha_1 t, \ldots, \alpha_p t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

и, значит, $\varphi(t)$ есть п.-п. функция.

При некотором выборе чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ может случиться, что функция $\varphi(t)$ периодична. Так будет, если, например, положить $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 1$. Однако, если числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ линейно независимы, т. е. из равенства

$$m_1\alpha_1 + \ldots + m_p\alpha_p = 0,$$

где $m_1, \ldots, m_p$ — целые числа, следует, что $m_1 = \ldots = m_p = 0$, то, как легко убедиться, $\varphi(t)$ не будет периодической функцией.

Из разложения (4) следует разложение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) \sim \sum_{n_1, \ldots, n_p} a_{n_1, \ldots, n_p} e^{i(n_1\alpha_1 + \ldots + n_p\alpha_p)t}.$$

В дальнейшем мы увидим, как по $\varphi(t)$ можно определить коэффициенты Фурье $a_{n_1, \ldots, n_p}$.

4. В своих замечательных исследованиях Боль решил также обратную задачу. А именно, он выделил класс п.-п. функций, представимых в виде (4). При этом он вынужден был заранее предполагать, что числа τ (почти-периоды функции $\varphi(t)$) удовлетворяют системе неравенств (5), т. е. связаны с некоторой фиксированной системой чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Аналогичные результаты несколько позже Боля получил французский математик Эсклангон *). Основной и притом существенный недостаток результатов Боля и Эсклангона состоит в том, что они с самого начала, уже начиная с определения п.-п. функций, вводили в рассмотрение фиксированную систему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, связанную с числами τ системой неравенств (5). Этот недостаток был устранен датским математиком Г. Бором, который в двух фундаментальных мемуарах **) развил в общих чертах теорию *непрерывных п.-п. функций*. Исследования Бора по своим методам тесно соприкасаются с исследованиями Боля. Однако, так как Бор на числа τ заранее ограничений типа неравенств (5) не накладывал, то ему пришлось решать более трудную задачу, чем та, которая стояла перед Болем.

В упомянутых выше двух мемуарах Бор доказал основные теоремы теории п.-п. функций. Исследования Бора, так же как и исследования Боля, основаны на глубокой связи между п.-п. функциями и периодическими функциями от многих переменных. Для установления этой связи чрезвычайно существенную роль сыграла упоминавшаяся уже ранее теорема Кронекера о решениях систем совместных неравенств.

Доказательства Бора в деталях оказались слишком громоздкими. Новые доказательства основных теорем, значительно более короткие, чем первоначальные доказательства Бора, и основанные частично на совершенно иных идеях, были предложены Винером ***), Г. Вейлем ****),

---

*) E. Esclangon [1], [2].
**) H. Bohr [1], [2].
***) N. Wiener [1].
****) H. Weyl [1].

Валле-Пуссеном *) и Бохнером **). В 1939 г. Н. Н. Боголюбов ***) предложил новое, исключительно интересное и глубокое доказательство основной теоремы теории непрерывных п.-п. функций.

5. Между теорией п.-п. функций и теорией периодических функций имеется много аналогий. Так, например, каждой п.-п. функции $f(t)$ можно отнести ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n t}.$$

Числа A_n, вообще говоря, комплексны и называются коэффициентами Фурье. Числа Λ_n действительны и называются показателями Фурье. В отличие от случая периодических функций числа Λ_n могут иметь предельные точки на конечном расстоянии и даже лежать всюду плотно.

Основную трудность при построении теории непрерывных п.-п. функций составляет доказательство теоремы единственности, которая гласит:

Если для двух непрерывных п.-п. функций $f(x)$ и $g(x)$ ряды Фурье совпадают, то эти функции тождественно равны.

Таким образом, п.-п. функция определяется счетным числом параметров.

Если теорема единственности уже доказана, то доказательство основной теоремы теории непрерывных п.-п. функций (теоремы равномерной аппроксимации конечными тригонометрическими суммами) получается сравнительно просто.

Автор настоящей книги указал более общий класс непрерывных п.-п. функций, в области которого теорема единственности для рядов Фурье сохраняется в той же формулировке****), что и для равномерных п.-п. функций.

Существенную роль при этом играет следующее обобщение понятия почти-периода:

---

*) Vallee-Poussin [1].
**) S. Bochner [1].
***) Н. Н. Боголюбов [1], [2].
****) Б. М. Левитан [1], [2].

Число τ называется ε, N—почти-периодом функции $f(x)$, если для всех $|x| < N$ выполняется неравенство

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

6. В отличие от периодических функций, в случае п.-п. функций не удается дать простых и вместе с тем достаточно общих признаков сходимости рядов Фурье. Поэтому в теории п.-п. функций еще большее значение, чем в теории периодических функций, приобретают методы суммирования рядов Фурье. Повидимому, поведение ряда Фурье п.-п. функций не столько зависит от дифференциальных свойств функции, сколько от поведения ее показателей Фурье. Так, Бохнер *) указал удовлетворительные признаки сходимости рядов Фурье в случае, если $|\Lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Автор настоящей книги **) указал признаки сходимости рядов Фурье в случае, когда $\Lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

7. В третьем мемуаре Г. Бор ***) развил теорию аналитических п.-п. функций. Эта теория имеет много общего с теорией рядов Дирихле. Интересно отметить, что последняя теория послужила Г. Бору отправным пунктом при построении общей теории п.-п. функций.

При изучении аналитических п.-п. функций мы приходим к рядам Дирихле, показатели которых могут иметь предельные точки на конечном расстоянии или даже лежать всюду плотно. Таким образом открывается возможность изучать ряды Дирихле значительно более общей структуры, чем те, которые изучались в классической теории.

Следует отметить, что в отличие от первых двух мемуаров Бора доказательства в третьем мемуаре очень удачны и в дальнейшем почти не подвергались изменению. Однако фактическое содержание теории аналитических п.-п. функций в дальнейшем получило существенное развитие ****).

---

*) S. Bochner [2].

**) Б. М. Левитан [6].

***) H. Bohr [3].

****) H. Bohr [4], [5], [6]. B. Jessen [1], B. Jessen and H. Tornehave [1].

8. В своих исследованиях Г. Бор рассматривал только непрерывные функции. Распространение теории п.-п. функции на разрывные (суммируемые) функции оказалось нелегкой задачей. Первый и очень существенный шаг в этом направлении сделал В. В. Степанов *). Дальнейшее обобщение п.-п. функций указал Г. Вейль **). Наконец, Безикович ***) рассмотрел, повидимому, наиболее широкий класс п.-п. функций. В классе функций Безиковича возможно обобщение теоремы Рисса-Фишера. Более точно, имеет место следующая теорема.

Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ — *произвольные действительные числа и* $A_1, A_2, \ldots$ — *комплексные числа, для которых*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 < \infty.$$

Существует п.-п. функция Безиковича, для которой тригонометрический ряд

$$\sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$$

является ее рядом Фурье.

Перечисленные в этом пункте обобщения п.-п. функций были подробно рассмотрены в обширном мемуаре Бора и Безиковича ****). Интересно отметить, что при этом оказались весьма полезными некоторые простые понятия функционального анализа.

9. Обобщению другого рода теория п.-п. функций подверглась в работе Неймана *****). Он рассматривает числовые функции, аргументом которых является не число, а элемент абстрактной группы. Для выделения класса п.-п. функций Нейман использовал одну важную теорему Бохнера, на которой мы теперь вкратце остановимся.

Пусть $f(x)$ — непрерывная п.-п. функция. Еще Бор во втором своем мемуаре фактически доказал, что из

---

*) В. В. Степанов [1].

**) H. Weyl [1].

***) A. Besicovitch [1], [2], [4].

****) H. Bohr and A. Besicovitch [1].

*****) J. von Neuman [1].

каждой бесконечной последовательности функций

$$f(x+h_1),\ f(x+h_2),\ \ldots, \qquad (7)$$

где h_1, h_2, ... — произвольные действительные числа, можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Бохнеру удалось этот результат обратить. А именно, он доказал *), что если функция $f(x)$ непрерывна и из каждой последовательности (7) можно выбрать сходящуюся равномерно подпоследовательность, то $f(x)$ есть п.-п. функция. Теперь ясно, каким образом следует обобщить понятие почти-периодичности на случай произвольной группы.

Пусть G — произвольная абстрактная группа (топология на G может и не быть задана) и каждому элементу x группы G ставится в соответствие определенное комплексное число $f(x)$. Тем самым мы задаем на G числовую функцию. Пусть a — произвольный элемент группы G. По определению группы однозначно определено произведение элементов x и a; обозначим его через $x \cdot a$.

Функция $f(x)$ называется п.-п. функцией на группе G, если, каковы бы ни были элементы $a_1, a_2, \ldots \in G$, из бесконечной последовательности функций $f(xa_1)$, $f(xa_2)$, ... можно выделить равномерно сходящуюся на G подпоследовательность.

При построении теории п.-п. функций на группах основную трудность представляет конструкция для п.-п. функции среднего значения. Эту трудность Нейману удалось преодолеть. Позже В. Маак *) указал другую более естественную конструкцию среднего значения. После того как среднее значение построено, теория п.-п. функций развивается примерно так же, как доказывается полнота неприводимых унитарных представлений для компактных групп (теория Петер-Вейля).

Заметим, что на компактных группах каждая непрерывная функция есть п.-п. функция.

10. Дальнейшее обобщение теории можно получить, рассматривая многообразие с группой. В этом напра-

*) S. Bochner [1].
**) W. Maak [1], [2], [3].

влении значительные результаты были получены Г. Вейлем *) и В. Мааком **).

Несколько более простая теория получается, если рассмотреть гильбертово пространство, элементы которого подвергаются воздействию группы унитарных операторов.

Случай однопараметрической группы операторов имеет приложения в важных исследованиях С. Л. Соболева по гиперболическим уравнениям в частных производных ***).

11. Мы вовсе не касаемся другого обобщения п.-п. функций, которое было частично намечено Дельзартом ****) и в последнее время разрабатывалось автором настоящей книги *****), а также В. А. Марченко ******). Мы имеем в виду связь п.-п. функций с операциями обобщенного сдвига. С целью хотя бы частично восполнить этот пробел к шестой главе добавлен один параграф (§ 7). При этом мы затронули лишь формально-алгебраическую сторону вопроса и вовсе не касаемся тех многочисленных аналитических трудностей, которые при этом возникают.

---

*) H. Weyl [2], [3].
**) W. Maak [2].
***) С. Л. Соболев [1], [2].
****) J. Delsartes [2].
*****) Б. М. Левитан [3], [4], [5].
******) В. А. Марченко [1], [2].

ГЛАВА ПЕРВАЯ

РАВНОМЕРНЫЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ (П.-П.) ФУНКЦИИ

§ 1. Определение и элементарные свойства равномерных п.-п. функций

1. В этом параграфе мы рассмотрим два различных, эквивалентных определения равномерных*) п.-п. функций. Первое определение, которое было положено в основу теории п.-п. функций Г. Бором, связано со следующим обобщением понятия периода:

Число τ *называется* ε-*почти-периодом* (ε-*смещением*) *функции* $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$), *если для всех действительных* x *выполняется неравенство*

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждый период периодической функции можно рассматривать так же, как почти-период, соответствующий любому $\varepsilon > 0$. Далее заметим, что если p—период функции $f(x)$, то любое число, кратное p, есть также период функции $f(x)$. Поэтому периодическая функция имеет сколь угодно большие периоды.

Таким образом, если мы желаем естественно обобщить понятие периодичности, то следует добиваться того, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовали сколь угодно большие ε-почти-периоды. Оказалось, однако, что ограничиться только этим последним требованием нельзя. Г. Бор

*) В дальнейшем мы увидим, что и среди обобщенных п.-п. функций имеются непрерывные функции. Поэтому термин «непрерывная п.-п. функция» неудобен, и мы предпочли термин «равномерная п.-п. функция».

показал*), что класс функций, обладающих для каждого $\varepsilon > 0$ сколь угодно большими ε-почти-периодами, неинвариантен относительно сложения. Поэтому требования, налагаемые на почти-периоды, следует еще усилить. С этой целью мы введем понятие относительно плотного множества действительных чисел.

Множество E действительных чисел называется относительно плотным, если существует такое число $l > 0$, что в каждом интервале действительной оси длины l $(\alpha < x < \alpha + l)$ найдется хотя бы одно число множества E.

Например, числа арифметической прогрессии np ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, p — фиксированное положительное число) образуют относительно плотное множество чисел, точно так же, как и числа вида $\pm\sqrt{n}$ (n — целое положительное число). Напротив, числа вида $\pm n^2$ не образуют относительно плотного множества чисел.

Определение 1.1.1 (основное определение). *Непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется равномерной п.-п. функцией, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-почти-периодов функции $f(x)$.*

Иначе говоря: функция $f(x)$ называется равномерной п.-п. функцией, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Это определение п.-п. функций принадлежит Г. Бору. Покажем, что если при $\varepsilon \to 0$ числа $l(\varepsilon)$ остаются ограниченными, то $f(x)$ — обязательно периодическая функция. В самом деле, если числа $l(\varepsilon)$ ограничены числом $l < \infty$, то в интервале $(l, 2l)$ содержатся почти-периоды функции $f(x)$, отвечающие любому $\varepsilon > 0$. Предельная точка этих почти-периодов, которая существует в силу принципа Больцано-Вейерштрасса, будет, очевидно, периодом функции $f(x)$, и притом не равным нулю.

Отметим ряд элементарных свойств равномерных п.-п. функций, которые следуют непосредственно из их определения.

---

*) H. Bohr [1].

1) *Если* $f(x)$—*равномерная п.-п. функция, то* $\alpha f(x)$, $f(x+c)$ (c — действительное число, α—комплексное число) *суть также равномерные п.-п. функции.*

2) *Если* $f(x)$ — *равномерная п.-п. функция, то и* $|f(x)|$ — *равномерная п.-п. функция.* (Это следует из элементарного неравенства $||f(x+\tau)|-|f(x)||\leqslant|f(x+\tau)-f(x)|$.)

3) *Если* $f(x)$ — *равномерная п.-п. функция и*

$$\inf_{-\infty<x<\infty} |f(x)|=\gamma>0,$$

то $\frac{1}{f(x)}$ — *также равномерная п.-п. функция.*

(Действительно,

$$\left|\frac{1}{f(x+\tau)}-\frac{1}{f(x)}\right|=\frac{|f(x+\tau)-f(x)|}{|f(x+\tau)|\cdot|f(x)|}\leqslant\frac{1}{\gamma^2}|f(x+\tau)-f(x)|.$$

Поэтому каждый $\gamma^2\varepsilon$-почти-период $f(x)$ есть ε-почти-период $\frac{1}{f(x)}$.)

Легко доказать более общее предложение. Обозначим через E множество значений п.-п. функции $f(x)$. Тогда, *если функция* $F(z)$ *равномерно непрерывна на множестве* E, *то* $\varphi(x)=F[f(x)]$ *есть равномерная п.-п. функция.*

В самом деле, если τ есть ε-почти-период $f(x)$, то

$$\varphi(x+\tau)-\varphi(x)=F[f(x)+\varepsilon(x)]-F[f(x)],$$

где $|\varepsilon(x)|<\varepsilon$. Поэтому из равномерной непрерывности функции $F(z)$ следует, что

$$\sup_x|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, что и доказывает равномерную почти-периодичность функции $F[f(x)]$.

Следующие два свойства п.-п. функций менее элементарны. Так как в дальнейшем они играют существенную роль, то мы их сформулируем как отдельные теоремы.

Теорема 1.1.1. *Равномерная п.-п. функция ограничена на всей действительной оси.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция и $\varepsilon = 1$. Определим число $l = l(1)$ согласно основному определению и обозначим через m максимум непрерывной функции $f(x)$ в замкнутом интервале $[0, l]$. Пусть x_0 — произвольная точка действительной оси. Выберем почти-период $\tau = \tau(1)$ в интервале $(-x_0, -x_0 + l)$. Тогда $0 < x_0 + \tau < l$. Далее мы имеем:

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0 + \tau) + f(x_0 + \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_0) - f(x_0 + \tau)| + |f(x_0 + \tau)| < 1 + m = M,$$

и теорема доказана *).

Следствие. *Квадрат равномерной п.-п. функции есть равномерная п.-п. функция.* Действительно,

$$|f^2(x + \tau) - f^2(x)| =$$
$$= |f(x + \tau) + f(x)| |f(x + \tau) - f(x)| < 2M |f(x + \tau) - f(x)|.$$

Поэтому каждый $\frac{\varepsilon}{2M}$-почти-период функции $f(x)$ есть ε-почти-период функции $f^2(x)$.

Сопоставляя это следствие со свойством 2), мы заключаем, что вместе с $f(x)$ $|f(x)|^2$ также является равномерной п.-п. функцией.

Теорема 1.1.2. *Равномерная п.-п. функция равномерно непрерывна на всей действительной оси.*

Доказательство. Обозначим через ε произвольное положительное число и определим число $l = l\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. В замкнутом интервале $[-1, 1 + l]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна. Поэтому можно указать такое положительное число $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ (< 1), что для любых чисел

---

*) Из доказанной теоремы, в частности, следует, что если $f(x) \neq 0$ и $\inf\limits_{-\infty < x < \infty} f(x) = 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ не может быть п.-п. функцией, так как неограничена. В дальнейшем будет показано, как следует обобщить понятие почти-периодичности с тем, чтобы включить в рассмотрение подобные функции.

y_1 и y_2 из отмеченного конечного интервала, для которых $|y_2 - y_1| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(y_2) - f(y_1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь x_1 и x_2 — любая пара действительных чисел, для которой $|x_2 - x_1| < \delta$.

Обозначим через τ $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период функции $f(x)$, заключенный в интервале $(-x_1, -x_1 + l)$. Так как по условию $|x_2 - x_1| < \delta$ и $0 < x_1 + \tau < l$, то, как легко видеть, число $x_2 + \tau$ во всяком случае не выходит из интервала $(-1, 1 + l)$. Поэтому

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant |f(x_2) - f(x_2 + \tau)| + |f(x_2 + \tau) -$$
$$- f(x_1 + \tau)| + |f(x_1 + \tau) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

и так как ε мы выбрали произвольно, то теорема доказана.

2. Значительно сложнее доказать, что сумма двух равномерных п.-п. функций есть равномерная п.-п. функция. Первое доказательство этой теоремы дал Г. Бор *). Впоследствии Бохнер **) дал другое определение для равномерных п.-п. функций, из которого почти-периодичность суммы следует непосредственно. В последующем оказалось, что определение Бохнера очень полезно и во многих других вопросах, особенно при различных абстрактных обобщениях теории п.-п. функций. Приведем теперь определение для равномерных п.-п. функций, данное Бохнером, и докажем эквивалентность этого определения с определением Бора.

Определение 1.1.2. *Непрерывная функция $f(x)$ называется нормальной функцией, если семейство функций $\{f(x + h)\}$ $(-\infty < h < \infty)$ компактно в смысле равномерной сходимости на всей действительной оси. (То есть если из каждой бесконечной последовательности функций $f(x + h_1)$, $f(x + h_2)$, ... можно выбрать равно-*

---

*) H. Bohr [1].
**) S. Bochner [1].

мерно сходящуюся на всей действительной оси подпоследовательность.)

Легко видеть, что нормальная функция ограничена. В самом деле, пусть $f(x_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда из бесконечной последовательности $f(x+x_n)$ нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся при $x=0$.

Теорема 1.1.3. *Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ была равномерной п.-п. функцией, необходимо и достаточно, чтобы она являлась нормальной функцией.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость условия. Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция и $h_1, h_2, \ldots$ — произвольная бесконечная последовательность действительных чисел. Следует показать, что из последовательности функций $f(x+h_1), f(x+h_2), \ldots$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Мы применим «диагональный» прием. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots$ счетное, всюду плотное множество действительных чисел (например, множество всех рациональных чисел). Так как функция $f(x)$ ограничена (см. теорему 1.1.1), то из числовой последовательности

$$f(x_1+h_1),\ f(x_1+h_2),\ \ldots$$

можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$f(x_1+h_{11}),\ f(x_1+h_{12}),\ \ldots$$

Точно так же из числовой последовательности

$$f(x_2+h_{11}),\ f(x_2+h_{12}),\ \ldots,$$

можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$f(x_2+h_{21}),\ f(x_2+h_{22}),\ \ldots$$

Продолжим этот процесс и рассмотрим затем «диагональную» последовательность функций:

$$f(x+h_{11}),\ f(x+h_{22}),\ \ldots \tag{1.1.1}$$

Покажем, что диагональная последовательность сходится во всех точках счетного, всюду плотного множества. В самом деле, пусть x_k — произвольная точка из счетного, всюду плотного множества точек. Согласно нашей конструкции последовательность чисел

$$f(x_k+h_{k1}),\ f(x_k+h_{k2}),\ \ldots \tag{1.1.2}$$

сходится, причем при $n>k$ (и $x=x_k$) все члены последовательности (1.1.1) входят также в последовательность (1.1.2). Поэтому последовательность (1.1.1) сходится в любой точке x_k. Покажем теперь, что последовательность (1.1.1) сходится равномерно на всей действительной оси. Пусть x_0 — произвольное действительное число и ε — произвольное (сколь угодно малое) положительное число. Выберем число $l=l\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$ согласно определению 1.1.1 и число $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$ согласно теореме 1.1.2. Интервал $[0,\ l]$ покроем p интервалами длины δ (последний из этих интервалов может иметь меньшую длину) и в каждом из интервалов длины δ выберем точку из счетного, всюду плотного множества. Обозначим выбранные точки через $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_p$. При фиксированном ε p также фиксировано, поэтому из сходимости последовательности (1.1.1) в точках $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_p$ следует, что можно указать такое достаточно большое целое число $N=N(\varepsilon)$, что для $r,\ s>N$ выполняются p неравенств

$$|f(y_i+h_{rr})-f(y_i+h_{ss})|<\frac{\varepsilon}{5}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p). \tag{1.1.3}$$

Пусть τ — $\frac{\varepsilon}{5}$-почти-период функции $f(x)$, заключенный в интервале $(-x_0,\ -x_0+l)$. Тогда число $y_0=x_0+\tau$ лежит в интервале $(0,\ l)$ и, значит, при некотором i $|y_i-y_0|<\delta$. Следовательно,

$$|f(y_i+h_{kk})-f(y_0+h_{kk})|<\frac{\varepsilon}{5}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.1.4}$$

Из неравенств (1.1.3) и (1.1.4) следует:

$$\begin{aligned} |f(x_0+h_{rr})-f(x_0+h_{ss})| &\leqslant |f(x_0+h_{rr})-f(y_0+h_{rr})|+ \\ &+|f(y_0+h_{rr})-f(y_i+h_{rr})|+|f(y_i+h_{rr})-f(y_i+h_{ss})|+ \\ &+|f(y_i+h_{ss})-f(y_0+h_{ss})|+|f(y_0+h_{ss})-f(x_0+h_{ss})|< \\ &<\frac{3}{5}\varepsilon+|f(x_0+h_{rr})-f(x_0+\tau+h_{rr})|+|f(x_0+h_{ss})- \\ &-f(x_0+\tau+h_{ss})|<\varepsilon, \end{aligned}$$

и так как число N от числа x_0 не зависит, а числа ε и x_0 были выбраны произвольно, то последовательность (1.1.1) сходится равномерно для всех действительных x. Тем самым необходимость условия доказана. Докажем достаточность. Пусть $f(x)$ — непрерывная для всех действительных x функция и семейство функций $\{f(x+h)\}$ $(-\infty < h < \infty)$ компактно. Следует показать, что $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Допустим противное, т. е. предположим, что для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_0$ нельзя указать соответствующую длину $l(\varepsilon_0)$. Последнее означает, что существует последовательность интервалов $L_1, L_2, \ldots$, длины которых $r_1, r_2, \ldots$ неограниченно растут, так что ни в одном из интервалов L_n нет ε_0-почти-периодов функции $f(x)$.

Пусть h_1 — произвольное действительное число и h_2 выбрано так, что $h_2 - h_1$ лежит в интервале $L_{\nu_1} = L_1$. Выбираем L_{ν_2} так, что $r_{\nu_2} > |h_2 - h_1|$, и число h_3 так, чтобы оба числа $h_3 - h_1$ и $h_3 - h_2$ лежали в интервале L_{ν_2}. Далее, выбираем интервал L_{ν_3} из условия

$$r_{\nu_3} = \max(|h_2 - h_1|, \ |h_3 - h_2|, \ |h_3 - h_1|)$$

и число h_4 таким, чтобы числа $h_4 - h_1$, $h_4 - h_2$, $h_4 - h_3$ лежали в интервале L_{ν_3}. Вообще L_{ν_n} выбираем так, что

$$r_n > \max_{1 \leqslant \mu < \nu \leqslant n} (|h_\mu - h_\nu|),$$

и h_{n+1} так, чтобы числа $h_{n+1} - h_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ лежали в интервале L_{ν_n}. Покажем теперь, что из последовательности функций

$$f(x+h_1), \quad f(x+h_2), \quad \ldots$$

нельзя выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. В самом деле,

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x+h_{n_1}) - f(x+h_{n_2})| =$$
$$= \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x + h_{n_1} - h_{n_2}) - f(x)| > \varepsilon_0,$$

ибо по построению все числа $h_{n_1} - h_{n_2}$ $(n_1 > n_2)$ принадлежат интервалу $L_{\nu_{n_1-1}}$ и ни одно из чисел этого интервала не есть ε_0-почти-период функции $f(x)$. Полученное противоречие и доказывает теорему полностью.

Теорема 1.1.4. *Сумма и произведение равномерных п.-п. функций суть также равномерные п.-п. функции.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — равномерные п.-п. функции. На основании предыдущей теоремы семейства $\{f(x+h)\}$ и $\{g(x+h)\}$ компактны. Легко видеть, что семейства функций $\{f(x+h)+g(x+h)\}$ и $\{f(x+h)\times \times g(x+h)\}$ также компактны. В самом деле, пусть, например, дана последовательность функций $f(x+h_n)+g(x+h_n)$. Выберем вначале подпоследовательность h'_n, для которой последовательность функций $f(x+h'_n)$ сходится равномерно, а затем из подпоследовательности h'_n выберем подпоследовательность h''_n, для которой $g(x+h''_n)$ сходится равномерно. Таким образом, мы получим равномерно сходящуюся подпоследовательность $f(x+h''_n)+g(x+h''_n)$. Поэтому семейство $\{f(x+h)+g(x+h)\}$ компактно и, значит, в силу предыдущей теоремы $f(x)+g(x)$ — п.-п. функция. Для произведения — доказательство аналогично.

Замечание. Если для суммы почти-периодичность уже доказана, то для произведения она следует непосредственно из тождества

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}.$$

3. Теорема 1.1.5. *Предел $f(x)$ равномерно сходящейся последовательности $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... равномерных п.-п. функций есть равномерная п.-п. функция.*

Доказательство. Обозначим через ε произвольное положительное число и пусть $N=N(\varepsilon)$ выбрано так, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть τ есть $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период функции $f_N(x)$. Мы имеем:

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant|f(x+\tau)-f_N(x+\tau)|+$$
$$+|f_N(x+\tau)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

что и доказывает теорему, ибо множество $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-периодов функции $f_N(x)$ относительно плотно, а в силу доказанного неравенства каждый $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период $f_N(x)$ есть ε-почти-период $f(x)$. Укажем два важных следствия из теоремы 1.1.5.

1) Рассмотрим совокупность всех тригонометрических многочленов

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x},$$

где λ_k — действительные числа и a_k — комплексные числа. Каждое слагаемое $a_k e^{i\lambda_k x}$ этой суммы есть периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{|\lambda_k|}$, а следовательно, также и равномерная п.-п. функция. Из теоремы 1.1.4 следует, что сумма $S_n(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Рассмотрим теперь всевозможные равномерные пределы конечных тригонометрических сумм. В силу предыдущей теоремы все полученные таким образом функции суть равномерные п.-п. функции.

В дальнейшем будет показано, что имеет также место и обратный результат, т. е. каждая равномерная п.-п. функция есть равномерный предел некоторой последовательности тригонометрических сумм. В отличие от прямой теоремы обратная теорема является очень глубокой и ее следует рассматривать как основную теорему во всей теории равномерных п.-п. функций.

2) Рассмотрим вопрос о почти-периодичности производной п.-п. функции. С помощью теоремы 1.1.5 легко показать, что если производная п.-п. функции равномерно непрерывна на всей действительной прямой, то она также является равномерной п.-п. функцией.

В самом деле, пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция. Имеем:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f'(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{0}^{h} f'(t+x)\,dt.$$

При каждом фиксированном h левая часть в последнем равенстве есть равномерная п.-п. функция. Следовательно, это же справедливо и для правой части. Если $h \to 0$, то правая часть стремится равномерно на всей прямой к $f'(x)$. Поэтому $f'(x)$ — равномерная п.-п. функция.

§ 2. Теорема о неопределенном интеграле равномерной п.-п. функции

Для того чтобы неопределенный интеграл периодической функции $f(x)$ был также периодической функцией, необходимо и достаточно, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ не содержал свободного члена. Мы увидим в следующем параграфе, что равномерной п.-п. функции также можно отнести ряд Фурье. Однако для почти-периодичности неопределенного интеграла, вообще говоря, недостаточно отсутствие свободного члена в ряде Фурье п.-п. функции. Если неопределенный интеграл равномерной п.-п. функции является также равномерной п.-п. функцией, то в силу теоремы 1.1.1 он необходимо ограничен. Как показал Боль *), это условие также и достаточно.

Теорема 1.2.1. *Если неопределенный интеграл равномерной п.-п. функции ограничен, то он есть также равномерная п.-п. функция.*

Доказательство. Можно, очевидно, ограничиться лишь действительными функциями. По условию функция

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx + C$$

ограничена. Обозначим ее верхнюю грань через G, а нижнюю грань — через g. Мы покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1[\varepsilon, f(x)]$, что каждый ε_1-почти-период функции $f(x)$ есть ε-почти-период функции $F(x)$. С этой целью выберем два фиксиро-

*) См. Bohl, [2]. Боль рассматривал более узкий класс функций. Однако Бор [1] показал, что доказательство Боля дословно переносится на общий случай.

ванных числа x_1 и x_2 так, чтобы выполнялись неравенства

$$F(x_1) < g + \frac{\varepsilon}{6}, \quad F(x_2) > G - \frac{\varepsilon}{6}.$$

Положим $|x_1 - x_2| = d$ и $\min(x_1, x_2) = \xi$. Предположим, что в каждом интервале длины $l_0 = l\left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)$ имеется по меньшей мере один $\frac{\varepsilon}{6d}$-почти-период функции $f(x)$. В силу того что $f(x)$—равномерная п.-п. функция, такое число l_0 найдется. Прежде чем доказывать равномерную почти-периодичность функции $F(x)$, мы покажем, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha + L_0)$ длины $L_0 = l_0 + d$ существуют такие значения z_1 и z_2, что

$$F(z_1) < g + \frac{\varepsilon}{2}, \quad F(z_2) > G - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2.1}$$

В самом деле, мы можем выбрать почти-период $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)$ так, чтобы число $\xi + \tau$ лежало в интервале $(\alpha, \alpha + l_0)$. Тогда оба числа $z_1 = x_1 + \tau$ и $z_2 = x_2 + \tau$ будут наверное лежать в большем интервале $(\alpha, \alpha + L_0)$, и мы будем иметь:

$$F(z_2) - F(z_1) = F(x_2) - F(x_1) + \int_{z_1}^{z_2} f(y)\,dy - \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy =$$

$$= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \{f(y+\tau) - f(y)\}\,dy \geqslant$$

$$\geqslant F(x_2) - F(x_1) - d\frac{\varepsilon}{6d} > G - g - \frac{2\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} = G - g - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но неравенство $F(z_2) - F(z_1) > G - g - \frac{\varepsilon}{2}$ по смыслу чисел G и g возможно лишь в том случае, когда выполняются неравенства (1.2.1).

Мы теперь покажем, что число $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2L_0}$ обладает нужным свойством, т. е. что каждый ε_1-почти-период $f(x)$ есть ε-почти-период $F(x)$. Покажем отдельно справедливость каждого неравенства:

$$F(x+\tau)-F(x)>-\varepsilon, \tag{1.2.2}$$
$$F(x+\tau)-F(x)<\varepsilon. \tag{1.2.3}$$

Для доказательства неравенства (1.2.2) выберем в интервале $(x, x+L_0)$ (x — произвольное действительное число) такое значение z_1, что $F(z_1)<g+\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$F(x+\tau)-F(x)=$$
$$=F(z_1+\tau)-F(z_1)+\int_x^{x+\tau} f(y)\,dy-\int_{z_1}^{z_1+\tau} f(y)\,dy=$$
$$=F(z_1+\tau)-F(z_1)+\int_x^{z_1} f(y)\,dy-\int_{x+\tau}^{z_1+\tau} f(y)\,dy\geqslant g-$$
$$-\left(g+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left|\int_x^{z_1}\{f(y+\tau)-f(y)\}\,dy\right|>$$
$$>-\frac{\varepsilon}{2}-L_0\frac{\varepsilon}{2L_0}=-\varepsilon.$$

Для доказательства неравенства (1.2.3) выбираем в интервале $(x, x+L_0)$ точку z_2, в которой $F(z_2)>G-\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$F(x+\tau)-F(x)=F(z_2+\tau)-F(z_2)+\int_x^{z_2} f(y)\,dy-$$
$$-\int_{x+\tau}^{z_2+\tau} f(y)\,dy<G-\left(G-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\int_x^{z_2}|f(y+\tau)-f(y)|\,dy<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+L_0\cdot\frac{\varepsilon}{2L_0}=\varepsilon,$$

и теорема доказана.

С другим доказательством этой теоремы, принадлежащим Фавару, мы познакомимся в дальнейшем, в гл. IV.

§ 3. Ряды Фурье

1. Нашей ближайшей задачей является построение рядов Фурье для равномерных п.-п. функций. Ключ к этому нам даст следующая теорема.

Теорема 1.3.1 (о среднем значении). *Для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ существует среднее значение*

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

Доказательство удобно разбить на отдельные пункты.

1) Пусть ε означает произвольное положительное число. Положим

$$l = l\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad A = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|.$$

Обозначим через α произвольное действительное число и через τ $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-период функции $f(x)$, заключенный в интервале $(\alpha, \alpha+l)$. Оценим теперь разность

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx - \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx.$$

Так как

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\tau} f(x)\,dx + \int_\tau^{\tau+T} f(x)\,dx + \int_{\tau+T}^{\alpha+T} f(x)\,dx,$$

то

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx - \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx - \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} f(x)\,dx\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{T}\int_\alpha^{\tau} f(x)\,dx\right| + \left|\frac{1}{T}\int_{\tau+T}^{\alpha+T} f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)-f(x+\tau)|\,dx+\frac{1}{T}\int_a^\tau |f(x)|\,dx+$$

$$+\frac{1}{T}\int_{\tau+T}^{a+T} |f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Al}{T}. \tag{1.3.1}$$

2) Рассматривая среднее арифметическое из n разностей

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx-\frac{1}{T}\int_{(\nu-1)T}^{\nu T} f(x)\,dx \qquad (\nu=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

мы получим в силу неравенства (1.3.1):

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx-\frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Al}{T}. \tag{1.3.2}$$

Пусть теперь T_1 и T_2 — произвольные положительные соизмеримые числа, т. е. пусть $\frac{T_1}{T_2}=\frac{m_2}{m_1}$, где m_1 и m_2 — целые числа. Так как $m_1T_1=m_2T_2$, то из неравенства (1.3.2) следует

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)\,dx-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon+2Al\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right). \tag{1.3.3}$$

Последнее неравенство из соображений непрерывности переносится на произвольные положительные числа T_1 и T_2. Если T_1 и $T_2>\frac{4Al}{\varepsilon}$, то, как легко видеть из неравенства (1.3.3),

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)\,dx-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)\,dx\right|<2\varepsilon,$$

что доказывает существование предела

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=M\,\{f(x)\}.$$

Полагая в неравенстве (1.3.2) $n \to \infty$, мы получим:

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx - M\{f(x)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Al}{T}. \tag{1.3.4}$$

Замечание. Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом p, то

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{np+\alpha}\int_0^{np+\alpha} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{np+\alpha}\left\{n\int_0^p f(x)\,dx + \int_0^\alpha f(x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx,$$

т. е. для периодических функций введенное нами среднее значение совпадает с обычным средним значением.

2. Среднее значение функции обладает следующими очевидными свойствами:

1) $M\{cf(x)\} = cM\{f(x)\}$ (c — постоянное комплексное число),

2) $M\{f(x) + g(x)\} = M\{f(x)\} + M\{g(x)\}$,

3) $M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}$ (a — произвольное действительное число).

4) *Если последовательность равномерных п.-п. функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ сходится равномерно на всей действительной прямой, то*

$$\lim_{n\to\infty} M\{f_n(x)\} = M\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\}.$$

В дальнейшем очень существенную роль играет следующая теорема.

Теорема 1.3.2 (усиленная теорема о среднем значении). *Для каждой равномерной п.-п. функции предел*

$$\lim \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx = M\{f(x+a)\}$$

существует равномерно по a.

Доказательство. Мы уже отмечали, что для каждого постоянного a

$$M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}.$$

Таким образом, нам остается показать, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует не зависящее от a число $T_0 = T_0(\varepsilon)$ такое, что для $T > T_0$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+a)\,dx - M\{f(x+a)\} \right| < \varepsilon.$$

Но это непосредственно следует из неравенства (1.3.4), ибо числа A и l от a не зависят.

Полагая в частности $a = -T$, мы получим:

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx.$$

3. Теорема о среднем значении позволяет определить для равномерных п.-п. функций скалярное произведение. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две равномерные п.-п. функции. Легко видеть, что $\overline{g(x)}$ (комплексно сопряженная функция) — также равномерная п.-п. функция. В силу теоремы 1.1.4 $f(x)\cdot\overline{g(x)}$ есть равномерная п.-п. функция. Поэтому существует среднее значение

$$M\{f(x)\cdot\overline{g(x)}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx.$$

Определим скалярное произведение (f, g) функций $f(x)$ и $g(x)$ и норму функции $f(x)$, положив

$$(f, g) = M\{f(x)\cdot\overline{g(x)}\}; \qquad \|f\| = (f, f)^{1/2}.$$

Мы будем говорить, что две равномерные п.-п. функции $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

Эта терминология, так же как и в классическом математическом анализе, основана на аналогии с векторной алгеброй.

4. Пусть $f(t)$ — равномерная п.-п. функция. Легко видеть, что при фиксированном x $f(x+t)$ есть также

равномерная п.-п. функция. Поэтому функция

$$F_x(t) = f(x+t)\overline{f(t)}$$

есть равномерная п.-п. функция (см. теорему 1.1.4). Следовательно, существует среднее значение

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt. \quad (1.3.5)$$

Функция $g(x)$ называется сверткой функции $f(x)$. В дальнейшем изложении она играет существенную роль.

Покажем, что предел (1.3.5) существует равномерно по x, т. е., каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует не зависящее от x число $T_0 = T_0(\varepsilon)$, обладающее тем свойством, что при $T > T_0$ и всех x выполняется неравенство

$$\left| g(x) - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt \right| < \varepsilon.$$

В самом деле, в силу неравенства *) (1.1.4), если $T > \frac{4l_{0x}A_x}{\varepsilon}$, где числа l_{0x} и A_x соответствуют функции $F_x(t)$, то

$$\left| \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt - M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\} \right| < \varepsilon.$$

Нам остается показать, что числа l_{0x} и A_x от x не зависят. В самом деле,

$$A_x = \sup_t |F_x(t)| = \sup_t |f(x+t)| \cdot \sup_t |f(t)| = A^2.$$

---

*) Легко видеть, что имеет место неравенство, аналогичное неравенству (1.1.4):

$$\left| \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x)\,dx - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Al}{T}.$$

Далее, если τ есть $\frac{\varepsilon}{2A}$-почти-период $f(t)$, то

$$\begin{aligned}|F_x(t+\tau)-F_x(t)| &= |f(x+t+\tau)\overline{f(t+\tau)}-f(x+t)\overline{f(t)}| = \\ &= |f(x+t+\tau)\overline{f(t+\tau)}-f(x+t+\tau)\overline{f(t)}+ \\ &\qquad + f(x+t+\tau)\overline{f(t)}-f(x+t)\overline{f(t)}| \leqslant \\ &\leqslant |f(x+t+\tau)|\,|f(t+\tau)-f(t)|+ \\ &\qquad + |f(t)|\,|f(x+t+\tau)-f(x+t)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Поэтому τ есть ε-почти-период функции $F_x(t)$ и, значит, число l_{0x} от x не зависит.

Покажем, что $g(x)$ есть равномерная п.-п. функция. В самом деле, если

$$\sup_t |f(t+k)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{A},$$

то

$$\sup_x |g(x+k)-g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x M_t\{|f(x+k+t)-f(x+t)|\,|f(t)|\} \leqslant A\cdot\frac{\varepsilon}{A}=\varepsilon.$$

Из этой оценки следует как непрерывность, так и почти-периодичность функции $g(x)$.

5. Пусть $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Так как при любом действительном λ $e^{-i\lambda x}$ есть периодическая функция $\left(\text{с периодом } \frac{2\pi}{|\lambda|}\right)$, то произведение $f(x)e^{-i\lambda x}$ есть также равномерная п.-п. функция. Поэтому существует среднее значение

$$a(\lambda)=M_x\{f(x)e^{-i\lambda x}\}.$$

Фундаментальное значение имеет тот факт, что функция $a(\lambda)$ может отличаться от нуля самое большее для счетного множества значений λ. Покажем это.

Рассмотрим множество функций $e^{i\lambda x}$ $(-\infty < x,\ \lambda < \infty)$ (λ — параметр). Легко видеть, что

$$M\{e^{i\lambda_1 x}\cdot e^{-i\lambda_2 x}\}=\begin{cases}0, & \text{если } \lambda_1\neq\lambda_2,\\ 1, & \text{если } \lambda_1=\lambda_2.\end{cases}$$

Эти равенства показывают, что функции $e^{i\lambda x}$ образуют ортогональное и нормированное множество функций (см. п. 3).

В отличие от классического случая мы имеем несчетное множество ортогональных функций. Тем не менее мы покажем, что все основные положения классической теории рядов Фурье переносятся на равномерные п.-п. функции.

Мы начнем с доказательства свойства минимальности коэффициентов Фурье и неравенства Бесселя.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — произвольные различные действительные числа и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные комплексные числа. В силу очевидных преобразований

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k M\{f(x)\,e^{-i\lambda_k x}\}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n} c_k M\{\overline{f(x)}\,e^{i\lambda_k x}\}+\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} c_{k_1}\bar{c}_{k_2} M\{e^{i\lambda_1 x}\cdot e^{-i\lambda_2 x}\}=$$
$$=M\{|f(x)|^2\}-\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k a(\lambda_k)-\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{a}(\lambda_k)+\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot\bar{c}_k=$$
$$=M\{|f(x)|^2\}-\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k a(\lambda_k)-\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{a}(\lambda_k)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot\bar{c}_k+\sum_{k=1}^{n} a(\lambda_k)\cdot\bar{a}(\lambda_k)-\sum_{k=1}^{n} a(\lambda_k)\,\bar{a}(\lambda_k)=$$
$$=M\{|f(x)|^2\}+\sum_{k=1}^{n}|c_k-a(\lambda_k)|^2-\sum_{k=1}^{n}|a(\lambda_k)|^2.$$

Из этого тождества видно, что при фиксированных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ минимум левой части достигается при $c_k=a(\lambda_k)$. Это свойство чисел $a(\lambda)$ называется свойством минимальности коэффициентов Фурье. Полагая $c_k=a(\lambda_k)$, мы получим:

$$M\left\{\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} a(\lambda_k)\,e^{-i\lambda_k x}\right|^2\right\}=M\{|f(x)|^2\}-\sum_{k=1}^{n}|a(\lambda_k)|^2.$$

В этом последнем неравенстве левая часть, очевидно, неотрицательна. Поэтому мы получаем неравенство, известное под названием неравенства Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k)|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\}. \tag{1.3.6}$$

Пользуясь неравенством (1.3.6), легко показать, что для данной равномерной п.-п. функции $f(x)$ функция $a(\lambda)$ может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений λ.

В самом деле, рассмотрим те λ, для которых $|a(\lambda)| \geqslant 1$. Из неравенства (1.3.6) следует, что таких λ конечное число. Обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_1}$. Теперь рассмотрим те λ, для которых $\frac{1}{2} \leqslant |a(\lambda)| < 1$. Этих λ также конечное число. Обозначим их через $\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \ldots, \lambda_{n_2}$. Далее, рассмотрим те λ, для которых $\frac{1}{3} \leqslant |a(\lambda)| < \frac{1}{2}$. Их также конечное число. Продолжая этот процесс, мы расположим все λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$ в счетное множество конечных множеств. Но такое множество также счетно.

Обозначим те λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$ (в произвольном порядке) через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и положим $a(\lambda_n) = A_n$. Числа λ_n называются показателями Фурье, а числа A_n — коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Таким образом, каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ можно отнести ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \quad A_n = M\{f(x)\, e^{-i\lambda_n x}\}.$$

§ 4. Формальные операции над рядами Фурье

1. Пусть

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} = \sum_\lambda A(\lambda)\, e^{i\lambda x},$$
$$g(x) \sim \sum_n B_n e^{i\mu_n x} = \sum_\lambda B(\lambda)\, e^{i\lambda x}$$

— две равномерные п.-п. функции. Тогда:

1) $kf(x) \sim \sum_n kA_n e^{i\lambda_n x}$ (k — произвольное комплексное число),

2) $e^{i\lambda x} f(x) \sim \sum\limits_n A_n e^{i(\lambda_n+\lambda)x}$ (λ — произвольное действительное число),

3) $f(x+\alpha) \sim \sum\limits_n A_n e^{i\lambda_n\alpha} e^{i\lambda_n x}$ (α — произвольное действительное число),

4) $\overline{f(x)} \sim \sum\limits_n \overline{A}_n e^{-i\lambda_n x}$,

5) $f(x)+g(x) \sim \sum\limits_\lambda \{A(\lambda)+B(\lambda)\} e^{i\lambda x}$,

6) $f(x)\cdot g(x) \sim \sum\limits_n C_n e^{i\nu_n x}$,

где *)

$$C_n = \sum_{\lambda_p+\mu_q=\nu_n} A_p B_q.$$

Первые пять свойств доказываются элементарно. В отличие от них шестое свойство можно получить, лишь опираясь на основные теоремы теории равномерных п.-п. функций, которые получены лишь в шестом параграфе этой главы. Приступаем к доказательству свойств 1) — 5). Первое и пятое свойства очевидны. Для доказательства второго свойства рассмотрим тождество

$$M\{f(x)\,e^{i\lambda x}e^{-i\mu x}\} = M\{f(x)\,e^{-i(\mu-\lambda)x}\}.$$

Из него следует, что при фиксированном λ среднее значение справа отлично от нуля лишь при $\mu_n-\lambda=\lambda_n$, т. е. при $\mu_n=\lambda+\lambda_n$ и в этом случае оно равно A_n. Стало быть, числа $\mu_n=\lambda+\lambda_n$ суть показатели Фурье, а числа A_n — соответствующие коэффициенты Фурье функции $f(x)\,e^{i\lambda x}$, и свойство 2) доказано. Свойство 3) следует из тождества

$$M\{f(x+\alpha)\,e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x+\alpha)\,e^{-i\lambda(x+\alpha)}\}\,e^{i\lambda\alpha} = e^{i\lambda\alpha} M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}.$$

*) Сходимость ряда для C_n следует из неравенства

$$|A_pB_q| \leqslant \frac{1}{2}\{|A_p|^2+|B_q|^2\}$$

и неравенства Бесселя.

Свойство 4) следует из тождества

$$M\left\{\overline{f(x)}\, e^{-i\mu x}\right\} = \overline{M}\left\{f(x)\, e^{i\mu x}\right\},$$

которое показывает, что коэффициенты Фурье функции $\overline{f(x)}$ отличаются от нуля лишь при $\mu_n = -\lambda_n$ и в этом случае они равны $\overline{A}_n$.

2. *Пусть дана последовательность равномерных п.-п. функций*

$$f_m(x) \sim \sum_n A_n^{(m)} e^{i\lambda_n^{(m)} x},$$

сходящаяся равномерно для всех действительных x к равномерной п.-п. функции $f(x)$. Тогда равномерно для всех λ

$$\lim_{m\to\infty} M\left\{f_m(x)\, e^{-i\lambda x}\right\} = M\left\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\right\},$$

т. е.

$$f(x) \sim \lim_{m\to\infty} \sum_n A_n^{(m)} e^{i\lambda_n^{(m)} x}.$$

Доказательство следует непосредственно из оценки

$$\left|M\left\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\right\} - M\left\{f_m(x)\, e^{-i\lambda x}\right\}\right| \leqslant M\left\{\left|f(x) - f_m(x)\right|\right\} \leqslant \\ \leqslant \sup_x \left|f(x) - f_m(x)\right|.$$

3. Вычислим ряд Фурье для производной $f'(x)$ равномерной п.-п. функции $f(x)$. Пусть

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}.$$

Предположим, что $f'(x)$ существует и также является равномерной п.-п. функцией. Как мы видели (см. § 1), для этого достаточно, чтобы $f'(x)$ была равномерно непрерывной функцией. Интегрируя по частям, мы получим:

$$M\left\{f'(x)\, e^{-i\lambda x}\right\} = i\lambda M\left\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) \sim \sum_n i\lambda_n A_n e^{i\lambda_n x},$$

т. е. ряд Фурье для производной получается формальным дифференцированием ряда Фурье для самой функции.

Отсюда легко следует, что если неопределенный интеграл равномерной п.-п. функции $f(x)$ является также п.-п. функцией (т. е. ограничен), то

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx \sim C+\sum_n \frac{A_n}{i\lambda_n} e^{i\lambda_n x}.$$

4. Вычислим ряд Фурье свертки функции $g(x)$. С этой целью мы покажем, что для любого действительного λ

$$\begin{aligned} M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} &= M_x\{e^{-i\lambda x}M_t[f(x+t)\overline{f(t)}]\}= \\ &=|M_t\{f(t)e^{-i\lambda t}\}|^2. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Достаточно ограничиться случаем $\lambda=0$, ибо, заменяя функцию $f(t)$ на $f(t)e^{-i\lambda t}=f_1(t)$, мы получим:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= M_t\{f_1(x+t)\overline{f_1(t)}\}= \\ &= M_t\{f(x+t)e^{-i\lambda(x+t)}\overline{f(t)}e^{i\lambda t}\}=e^{-i\lambda x}\cdot g(x). \end{aligned}$$

Так как среднее значение, определяющее функцию $g(x)$, существует равномерно по x, то, каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать число $T_0=T_0(\varepsilon)$, не зависящее от x, такое, что для всех x выполняется неравенство

$$\left| M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\}-\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt\right|<\varepsilon.$$

Беря среднее по x, мы получим:

$$\left| M_x\{g(x)\}-M_x\left\{\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt\right\}\right|<\varepsilon. \tag{1.4.2}$$

Покажем теперь, что

$$\begin{aligned} M_x\left\{\frac{1}{2T_0}\int_{T_0}^{T_0} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt\right\} &= \\ &=\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\overline{f(t)}\,dt\,M_x\{f(x+t)\}. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

В самом деле, при каждом фиксированном $X>0$

$$\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}dx\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}f(x+t)\overline{f(t)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\overline{f(t)}\,dt\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}f(x+t)\,dx.$$

При $X\to\infty$ левая часть последнего равенства стремится к левой части равенства (1.4.3). То же самое имеет место для правой части, ибо среднее значение

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}f(x+t)\,dx$$

существует равномерно по t. Таким образом равенство (1.4.3) доказано. Теперь из неравенства (1.4.2) следует

$$\left|M_x\{g(x)\}-\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\overline{f(t)}\,dt\cdot M_x\{f(x)\}\right|<\varepsilon.$$

Полагая $T_0\to\infty$, мы получим:

$$M_x\{g(x)\}=|M\{f(t)\}|^2,$$

что и требовалось доказать. Из равенства (1.4.1) следует, что

$$g(x)\sim\sum_n|A_n|^2e^{i\lambda_n x}.$$

5. Покажем, что *если тригонометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\lambda_n x}$ *сходится равномерно на всей действительной прямой, то он является рядом Фурье своей суммы.*

В самом деле, то, что сумма ряда $S(x)$ есть равномерная п.-п. функция, мы уже знаем (см. § 1 теоремы 1.1.5). Далее, из равномерной сходимости тригонометрического ряда следует возможность перестановки суммы и среднего. Поэтому

$$M\{S(x)e^{-i\lambda x}\}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n M\{e^{i\lambda_n x}\cdot e^{-i\lambda x}\}=\begin{cases}a_n, & \text{если } \lambda=\lambda_n,\\ 0, & \text{если } \lambda\neq\lambda_n.\end{cases}$$

Следствие 1. *Существуют равномерные п.-п. функции с совершенно произвольным счетным множеством показателей Фурье.*

В самом деле, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — произвольное счетное множество действительных чисел, то достаточно положить

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x},$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. В частности, показатели Фурье равномерной п.-п. функции могут иметь предельные точки на конечном растоянии или даже лежать всюду плотно.

Следствие 2. *Существуют равномерные п.-п. функции со свободным членом ряда Фурье, равным нулю, и с неограниченным неопределенным интегралом.*

В самом деле, пусть

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{i\frac{x}{n^2}}.$$

Если бы неопределенный интеграл

$$\Phi(x)=\int_0^x \varphi(x)\,dx$$

был ограниченной и, следовательно, равномерной п.-п. функцией, то в силу п. 3 настоящего параграфа

$$\Phi(x) \sim C+\sum_n \frac{1}{i} e^{i\frac{x}{n^2}},$$

что невозможно, так как из неравенства Бесселя следует, что коэффициенты Фурье равномерной п.-п. функции должны стремиться к нулю.

§ 5. Основные теоремы

1. Полагая в неравенстве Бесселя (неравенство (1.3.6)) $n \to \infty$, мы получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\}.$$

Мы увидим в следующем параграфе, что на самом деле здесь имеет место знак равенства, т. е. для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\},$$

которое обычно называют равенством Парсеваля. Доказательство равенства Парсеваля представляет основную трудность при построении теории п.-п. функций. В следующем параграфе мы укажем один из путей, на котором удается эту трудность преодолеть.

В настоящем параграфе мы установим связь равенства Парсеваля с двумя другими теоремами, которые мы наряду с равенством Парсеваля будем называть основными теоремами теории равномерных п.-п. функций.

2. Первая из этих теорем есть теорема единственности, которая гласит:

Не существует не равной тождественно нулю равномерной п.-п. функции $f(x)$, все коэффициенты Фурье которой равны нулю *).

Покажем, что *из теоремы единственности следует равенство Парсеваля.*

Пусть $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$ — равномерная п.-п. функция. Рассмотрим функцию $g(x)$ — свертку функции $f(x)$

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\} \sim \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Так как в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2$ схо-

*) Чрезвычайно существенно в этой теореме, что $f(x)$—равномерная п.-п. функция. В самом деле, если, например, существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx,$$

то легко видеть, что для всех действительных λ $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = 0$. Впрочем, в дальнейшем мы увидим, что равномерная почти-периодичность не необходима для теоремы единственности.

дится, то тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}$ сходится равномерно и является, стало быть, по доказанному в предыдущем параграфе, рядом Фурье своей суммы, которую мы обозначим через $S(x)$.

Таким образом, функции $g(x)$ и $S(x)$ имеют одинаковые ряды Фурье и, значит, все коэффициенты Фурье разности $g(x)-S(x)$ равны нулю. Следовательно, по теореме единственности (справедливость которой мы предположили) эта разность тождественно равна нулю, т. е.

$$g(x)=M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\}=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Полагая в последнем равенстве $x=0$, мы получим равенство Парсеваля.

3. Покажем теперь, что и, обратно, *из равенства Парсеваля следует теорема единственности.*

В самом деле, пусть все коэффициенты Фурье равномерной п.-п. функции $f(x)$ равны нулю. Из равенства Парсеваля (справедливость которого мы предположили) мы получим в этом случае:

$$M\{|f(x)|^2\}=0.$$

Таким образом, нам остается доказать следующую теорему.

Теорема 1.5.1. *Если $\varphi(x)$ — равномерная неотрицательная п.-п. функция и если хотя бы при одном $x=x_0$ $\varphi(x_0)>0$, то*

$$M\{\varphi(x)\}>0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x_0)=a>0$. Выберем число $\delta=\delta\left(\frac{a}{3}\right)$ такое, что для $|x-x_0|<\delta$

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{a}{3}.$$

Далее обозначим, как обычно, через $l=l\left(\frac{a}{3}\right)$ наибольшее расстояние между двумя $\frac{a}{3}$ почти-периодами $\varphi(x)$.

Покажем, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha+l+2\delta)$ (α — произвольное действительное число) длины $L=l+2\delta$ имеется подинтервал длины 2δ, во всех точках которого

$$\varphi(x)>\frac{a}{3}.$$

Пусть τ есть $\frac{a}{3}$-почти-период $\varphi(x)$, заключенный в интервале $(\alpha+\delta-x_0, \alpha+l+\delta-x_0)$. Тогда число $x_0+\tau$ заключается в интервале $(\alpha+\delta, \alpha+\delta+l)$, и если $|x-x_0|\leqslant\delta$, то число $x+\tau$ пробегает интервал длины 2δ, причем

$$\varphi(x+\tau)=\varphi(x_0)+[\varphi(x)-\varphi(x_0)]+[\varphi(x+\tau)-\varphi(x)]>$$
$$>a-\frac{a}{3}-\frac{a}{3}=\frac{a}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\varphi(x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2nL}\sum_{\nu=-(n-1)}^{n}\int_{(\nu-1)L}^{\nu L}\varphi(x)\,dx>\frac{1}{2nL}\cdot 2n\cdot 2\delta\cdot\frac{a}{3}=\frac{2a\delta}{3L}.$$

Полагая в этом неравенстве $n\to\infty$, мы получим:

$$M\{\varphi(x)\}>\frac{2a\delta}{3L}>0, \tag{1.5.1}$$

что и требовалось доказать.

4. Семейство функций называется *равностепенно ограниченным*, если существует такое постоянное число A, что для всех функций этого семейства выполняется неравенство

$$|f(x)|<A.$$

Семейство функций называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta=\delta(\varepsilon)$ (не зависящее от индивидуальной функции семейства), что при $|x'-x''|<\delta$ для всех функций семейства выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Наконец, семейство функций называется *равностепенно почти-периодическим*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon)$ (не зависящее от индивидуальной функции семейства), что в каждом интервале длины l имеется общий для всех функций семейства ε-почти-период.

Бесконечное семейство равномерных п.-п. функций называется *компактным семейством*, если из каждой бесконечной последовательности функций этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Можно показать*), что *для того чтобы семейство равномерных п.-п. функций было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось равномерно ограниченным, равностепенно непрерывным и равностепенно почти-периодическим.* Поэтому в последующем изложении семейство функций, удовлетворяющее перечисленным выше трем условиям, мы будем сокращенно называть *компактным семейством функций.*

Из неравенства (1.5.1) легко получить важную теорему, связывающую сходимость равномерных п.-п. функций в среднем квадратичном с равномерной сходимостью этих функций.

Теорема 1.5.2. *Пусть $E = \{f(x)\}$ есть семейство равномерно ограниченных, равностепенно непрерывных и равностепенно почти-периодических функций (т. е. компактно).*

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\eta = \eta(\varepsilon)$ (не зависящее от индивидуальной функции семейства), что из неравенства

$$M\{|f(x)|^2\} < \eta$$

следует неравенство

$$\sup_x |f(x)|^2 < \varepsilon,$$

какова бы ни была функция $f(x) \in E$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют: 1) фиксированное положительное число $\varepsilon_0 > 0$,

---

*) Л. А. Люстерник [1].

2) бесконечная последовательность неограниченно убывающих положительных чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots$ и 3) бесконечная последовательность функций из E: $f_1(x), f_2(x), \ldots$ такие, что

$$\sup_x |f_n(x)|^2 > \varepsilon_0 \tag{1.5.2}$$

и

$$M\{|f_n(x)|^2\} < \eta_n. \tag{1.5.3}$$

Так как функции семейства $\{|f(x)|^2\}$ также равностепенно ограничены, равностепенно непрерывны и равностепенно почти-периодичны, то, полагая

$$\varphi_n(x) = |f_n(x)|^2,$$

мы получим из неравенств (1.5.1) и (1.5.2) для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$M\{|f_n(x)|^2\} > \frac{2\varepsilon_0\delta}{3l},$$

что противоречит неравенству (1.5.3), ибо числа δ и l от n не зависят, а $\eta_n \to 0$.

В частности, пусть множество E есть последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, причем

$$M\{|\varphi_n(x)|^2\} \to 0.$$

Тогда $\sup\limits_x |\varphi_n(x)|$ также стремится к нулю, т. е. из сходимости к нулю в среднем квадратичном следует равномерная сходимость к нулю последовательности $\varphi_n(x)$.

5. Вторая теорема, эквивалентная равенству Парсеваля, есть известная уже нам из четвертого параграфа теорема умножения для рядов Фурье равномерных п.-п. функций, состоящая в том, что *если*

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \quad \text{и} \quad g(x) \sim \sum_n B_n e^{i\mu_n x}$$

— две равномерные п.-п. функции, то

$$f(x) \cdot g(x) \sim \sum_n C_n e^{i\nu_n x},$$

где

$$C_n = \sum_{\lambda_p+\mu_q=\nu_n} A_p B_q.$$

Теорему умножения можно сформулировать и так: *при любом действительном* λ

$$M\{f(x)\cdot g(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \sum_{\lambda_p+\mu_q=\lambda} A_p\cdot B_q. \tag{1.5.4}$$

Покажем, что в равенстве (1.5.4) достаточно ограничиться случаем $\lambda=0$, т. е. доказать равенство

$$M\{f(x)\cdot g(x)\} = \sum_{\lambda_p+\mu_q=0} A_p\cdot B_q. \tag{1.5.5}$$

В самом деле, если равенство (1.5.5) уже доказано, то, заменяя $g(x)$ на $g(x)\cdot e^{-i\lambda x}\sim\sum\limits_n B_n e^{i(\mu_n-\lambda)x}$, мы получим:

$$M\{f(x)\cdot g(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \sum_{\lambda_p+\mu_q-\lambda=0} A_p\cdot B_q.$$

Теперь покажем, что

1) *из теоремы умножения следует равенство Парсеваля.* Действительно, достаточно в равенстве (1.5.5) положить

$$g(x)=\overline{f(x)}\sim\sum_n \overline{A}_n e^{-i\lambda_n x};$$

2) *из равенства Парсеваля следует теорема умножения.* Рассмотрим элементарное тождество

$$M\{f(x)\cdot g(x)\} = \frac{1}{4}[M\{|f+\overline{g}|^2\} - M\{|f-\overline{g}|^2\} +$$

$$+ iM\{|f+i\overline{g}|^2\} - iM\{|f-i\overline{g}|^2\}]. \tag{1.5.6}$$

Применяя к функциям $f+\overline{g},\ f-\overline{g},\ f+i\overline{g},\ f-i\overline{g}$, ряды Фурье которых нам известны, равенство Парсеваля и полагая для сокращения записи

$$a(\lambda)=M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\};\quad b(\lambda)=M\{g(x)\,e^{-i\lambda x}\},$$

мы получим в правой части равенства (1.5.6):

$$\frac{1}{4}\Big\{\sum |a(\lambda)+\overline{b(-\lambda)}|^2-\sum |a(\lambda)-\overline{b(-\lambda)}|^2+$$
$$+i\sum |a(\lambda)+i\overline{b(-\lambda)}|^2-i\sum |a(\lambda)-i\overline{b(-\lambda)}|^2\Big\}=$$
$$=\sum a(\lambda)\,b(-\lambda),$$

или

$$M(f(x)\cdot g(x))=\sum_{\lambda_p+\mu_q=0} A_p\cdot B_q,$$

так как для остальных λ слагаемые суммы равны нулю.

§ 6. Доказательство основных теорем

1. В настоящем параграфе будет доказана теорема единственности, а следовательно, и эквивалентные ей равенство Парсеваля и теорема умножения для рядов Фурье. Первое доказательство теоремы единственности предложил Бор *).

Доказательство, которое мы приведем, основано на теории интегральных уравнений **).

Вначале остановимся кратко на идее доказательства. Пусть $f(x)\not\equiv 0$ — равномерная п.-п. функция. Рассмотрим интегральное уравнение (вернее уравнение в средних значениях)

$$\lambda\varphi(t)=M_s\{f(s-t)\,\varphi(t)\}. \tag{1.6.1}$$

Обычные методы теории интегральных уравнений позволяют доказать существование нетривиального решения уравнения (1.6.1), т. е. числа $\lambda_0\neq 0$ (собственное число) и функции $\varphi(t)$ (собственная функция), удовлетворяющих уравнению (1.6.1). Далее, можно показать, что для данного λ_0 число линейно независимых собственных функций уравнения (1.6.1) конечно. Обозначим через $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots\ \varphi_n(t)$ полный набор собственных функций

*) H. Bohr [1], [11], Vallee-Poussin [1].
**) H. Weyl [1], Hammerstein [1].

уравнения (1.6.1) при $\lambda=\lambda_0$. Очевидно, что любая линейная комбинация функций $\varphi_k(t)$ есть также собственная функция уравнения (1.6.1). Предположим, что нам удалось доказать, что среди линейных комбинаций функций $\varphi_k(t)$ имеется функция $e^{-i\Lambda t}$. Мы получим в этом случае:

$$\lambda_0 e^{-i\Lambda t}=M_s\{f(s-t)\,e^{-i\Lambda s}\}=e^{-i\Lambda t}M_s\{f(s)\,e^{-i\Lambda s}\}. \quad (1.6.2)$$

Равенство (1.6.2) доказывает теорему единственности. В самом деле, допустив существование равномерной п.-п. функции, не равной тождественно нулю, все коэффициенты Фурье которой равны нулю, мы немедленно придем к противоречию с равенством (1.6.2), ибо $\lambda_0\neq 0$.

2. Доказательству теоремы единственности мы предпошлем пять лемм.

Лемма 1.6.1. *Каждое равномерно ограниченное, равностепенно непрерывное и равностепенно почти-периодическое множество функций компактно.*

Доказательство этой леммы почти дословно совпадает с доказательством достаточности в теореме 1.1.3. В самом деле, пусть $x_1, x_2, \ldots$ счетное, всюду плотное множество действительных чисел и

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots \quad (1.6.3)$$

построенная при помощи диагонального процесса последовательность функций рассматриваемого семейства, которая сходится во всех точках счетного, всюду плотного множества. Покажем, что последовательность (1.6.3) сходится равномерно для всех действительных x. Пусть $\varepsilon>0$ выбрано произвольно. Выберем число $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$ так, что если $|x''-x'|<\delta$, то для всех функций $f(x)$ из рассматриваемого семейства выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{5}. \quad (1.6.4)$$

Далее, выберем число $l=l\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$ такое, чтобы в каждом интервале длины l имелся общий для всех функций семейства $\frac{\varepsilon}{5}$-почти-период. Покроем интервал $(0, l)$ n интервалами длины δ и в каждом частичном интервале выберем произвольное число из счетного, всюду плотного множества. Обозначим выбранные числа через $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$. Далее, выберем целое положительное число $N = N\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)$ такое, чтобы для $r, s > N$ имели место n неравенств

$$|f_r(y_i) - f_s(y_i)| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.6.5)$$

Пусть теперь x_0 — произвольное действительное число. Выберем в интервале $(-x_0, -x_0 + l)$ общий для всех функций рассматриваемого семейства $\frac{\varepsilon}{5}$-почти-период τ. Число $y_0 = x_0 + \tau$, очевидно, лежит в интервале $(0, l)$ и, следовательно, при некотором i числа y_0 и y_i лежат в одном и том же интервале длины δ. В силу неравенств (1.6.4) и (1.6.5) мы получим:

$$\begin{gathered}|f_r(x_0) - f_s(x_0)| \leqslant |f_r(x_0) - f_r(x_0 + \tau)| + \\ + |f_r(x_0 + \tau) - f_r(y_i)| + |f_r(y_i) - f_s(y_i)| + \\ + |f_s(y_i) - f_s(x_0 + \tau)| + |f_s(x_0 + \tau) - f_s(x_0)| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{5} + |f_r(y_0) - f_r(y_i)| + \frac{\varepsilon}{5} + |f_s(y_i) - f_s(y_0)| + \frac{\varepsilon}{5} < \varepsilon,\end{gathered}$$

что и доказывает равномерную сходимость последовательности (1.6.3).

Лемма 1.6.2. *Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция и $\varphi(x)$ — такая равномерная п.-п. функция, что $M\{|\varphi(x)|^2\} = 1$. Положим*)*

$$I\{\varphi\} = M_x |M_\xi \{f(x + \xi)\varphi(\xi)\}|^2$$

*и предположим, что функция φ такова, что**) $I\{\varphi\} \neq 0$.*

---

*) Существование среднего значения по x следует из почти-периодичности функции

$$M_\xi \{f(x + \xi)\varphi(\xi)\}.$$

**) Достаточно, например, положить

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sqrt{M\{|f(\xi)|^2\}}}.$$

Далее, положим

$$\omega(\xi) = \frac{1}{I\{\varphi\}^{1/2}} M_\eta \{\overline{f(\xi+\eta)}\,\overline{\varphi(\eta)}\}.$$

Тогда

$$I\{\omega\} \geqslant I\{\varphi\},$$

причем знак равенства имеет здесь место лишь тогда, когда $\overline{\varphi(x)}$ *зависит линейно от функции*

$$M_\eta M_\xi \{f(x+\xi)\,\overline{f(\eta+\xi)}\,\overline{\varphi(\eta)}\}.$$

Доказательство этой леммы следует почти непосредственно из неравенства Коши-Буняковского. В самом деле,

$$I\{\omega\} = \frac{1}{I\{\varphi\}} M_x [\,|M_\xi\{f(x+\xi)\} \times$$
$$\times M_\eta\{\overline{f(\xi+\eta)}\,\overline{\varphi(\eta)}\}|^2] \cdot M_x\{|\varphi(x)|^2\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{I\{\varphi\}} |M_x [M_\xi \{f(x+\xi)\,\varphi(x)\}\, M_\eta\{\overline{f(\xi+\eta)}\,\overline{\varphi(\eta)}\}]|^2 =$$
$$= \frac{1}{I\{\varphi\}} |M_\xi M_x \{f(x+\xi)\,\varphi(x)\}|^2 = I\{\varphi\}.$$

Из вывода неравенства Коши-Буняковского известно, что знак равенства будет здесь лишь в том случае, если $\overline{\varphi(x)}$ зависит линейно от

$$M_\eta M_\xi \{f(x+\xi)\,\overline{f(\eta+\xi)}\,\overline{\varphi(\eta)}\}.$$

Лемма 1.6.3. *Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция, не равная тождественно нулю. Положим*

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\,\overline{f(t)}\}.$$

Интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(x) = M_\xi\{g(x-\xi)\,\varphi(\xi)\} \tag{1.6.6}$$

имеет нетривиальное решение. Число линейно независимых собственных функций, соответствующих данному собственному значению $\lambda = \lambda_0$, конечно.

Доказательство. Обозначим через L верхнюю грань функционала $I\{\varphi\}$ при дополнительном (нормирующем) условии $M\{|\varphi|^2\}=1$. Число L конечно, ибо из неравенства Коши-Буняковского следует

$$|M_\xi\{f(x+\xi)\varphi(\xi)\}|^2 \leqslant M\{|f|^2\}M\{|\varphi|^2\}=M\{|f|^2\}.$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ есть некоторая «максимальная» последовательность, т. е. пусть при $\nu \to \infty$

$$I\{\varphi_\nu\} \to L.$$

Покажем, что последовательность

$$\omega_\nu = \frac{1}{I\{\varphi_\nu\}^{1/2}} M_\eta\{\overline{f(x+\eta)}\varphi_\nu(\eta)\}$$

также «максимальная», причем

$$M\{|\omega_\nu|^2\}=1. \qquad (1.6.7)$$

Условие (1.6.7) следует непосредственно из определения функционала $I\{\varphi\}$. Далее, в силу предыдущей леммы

$$L \geqslant I\{\omega_\nu\} \geqslant I\{\varphi_\nu\}$$

и так как $I\{\varphi_\nu\} \to L$, то и $I\{\omega_\nu\} \to L$.

Покажем теперь, что последовательность ω_ν состоит из равномерно ограниченных равностепенно непрерывных и равностепенно почти-периодических функций.

Начнем с доказательства равномерной ограниченности. Так как $L>0$ и $I\{\varphi_\nu\} \to L$, то мы вправе считать $I\{\varphi_\nu\} > \frac{L}{2}$, ибо в противном случае достаточно было бы отбросить несколько первых членов последовательности φ_ν. Из этого замечания следует оценка

$$|\omega_\nu| \leqslant \frac{2}{L} M\{|f|^2\}^{1/2}.$$

Далее, из неравенства

$$|\omega_\nu(x+\tau)-\omega_\nu(x)| \leqslant \frac{2}{L}\left[M_\eta\{|f(x+\tau+\eta)-f(x+\eta)|^2\}\right]^{1/2}$$

следует как равностепенная непрерывность, так и равностепенная почти-периодичность последовательности ω_ν.

Обозначим через $\Phi(x)$ равномерный предел некоторой подпоследовательности ω_{ν_n}. Очевидно, что $I\{\Phi\}=L$. Мы покажем, что $\overline{\Phi}(x)$ есть собственная функция уравнения (1.6.6) при $\lambda=L$. С этой целью положим

$$\Omega(\xi)=\frac{1}{\sqrt{L}}M_\eta\{\overline{f(\xi+\eta)}\,\overline{\Phi(\eta)}\}.$$

Легко видеть, что

$$M\{|\Omega(\xi)|^2\}=1.$$

Далее, в силу предыдущей леммы

$$L\geqslant I\{\Omega\}\geqslant I\{\Phi\}=L.$$

Поэтому $I\{\Omega\}=I\{\Phi\}$ и в силу той же леммы существуют такие постоянные числа λ_1 и λ_2, что

$$\lambda_1\overline{\Phi(x)}=\lambda_2 M_\eta M_\xi\{f(x+\xi)\overline{f(\eta+\xi)}\,\overline{\Phi(\eta)}\}=$$
$$=\lambda_2 M_\eta\{g(x-\eta)\overline{\Phi(\eta)}\}.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\Phi(x)$ и взяв среднее по x, мы получим:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=I\{\Phi\}=L.$$

Поэтому

$$L\,\overline{\Phi(x)}=M_\eta\{g(x-\eta)\overline{\Phi(\eta)}\}.$$

Остается показать конечность числа собственных функций уравнения (1.6.6), отвечающих данному собственному значению $\lambda_0\neq 0$.

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — n линейно независимых собственных функций уравнения (1.6.5), отвечающих собственному значению $\lambda_0\neq 0$. Известный процесс ортогонализации *) позволяет считать функции $\varphi_i(x)$ ортогональными и нормированными в том смысле, что

$$M\{\varphi_i\cdot\overline{\varphi_k}\}=\begin{cases}1, & \text{если } i=k,\\ 0, & \text{если } i\neq k.\end{cases}$$

*) См., например, И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений (1948), стр. 78.

Из уравнения (1.6.6) следует, что $\lambda_0\varphi_i(x)$ есть коэффициент Фурье функции $g(x-\xi)$ относительно функции $\overline{\varphi_i(\xi)}$. Поэтому, в силу неравенства Бесселя, которое выводится в рассматриваемом случае, так же как и в случае классических рядов Фурье,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_0\varphi_i(x)|^2 \leqslant M_\xi \{|g(x-\xi)|^2\}.$$

Беря среднее по x, мы получим:

$$n \leqslant \frac{1}{\lambda_0^2} M\{|g(x)|^2\},$$

что и доказывает конечность числа n.

Лемма 1.6.4*). *Любое множество попарно перестановочных унитарных матриц приводится с помощью одного и того же унитарного преобразования к диагональному виду.*

Доказательство удобно разбить на ряд отдельных пунктов. 1) Пусть U и V — две перестановочные унитарные матрицы. Обозначим через $\mathfrak{R}_\lambda$ подпространство собственных векторов матрицы U, соответствующих собственному значению λ. Покажем, что $\mathfrak{R}_\lambda$ инвариантно относительно матрицы V. В самом деле, если вектор $\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_\lambda$, т. е.

$$U\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x},$$

то в силу перестановочности U и V имеем $UV\mathfrak{x} = VU\mathfrak{x} = \lambda V\mathfrak{x}$, т. е. $V\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}_\lambda$, что и требовалось доказать.

2) Покажем, что любое множество попарно перестановочных матриц имеет общий собственный вектор. Доказательство проведем по индукции. Если размерность пространства равна 1, то наше утверждение очевидно. Предположим, что для пространств размерности меньше n утверждение доказано. Докажем его для пространств размерности n. Если каждый вектор пространства является собственным для каждой из рассматриваемых матриц, то все доказано. Предположим, что хотя бы один вектор не является собственным для какой-либо

*) См. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре.

из наших матриц U. Обозначим через $\mathfrak{R}_1$ совокупность всех собственных векторов матрицы U, соответствующих какому-нибудь собственному значению λ. Согласно 1) $\mathfrak{R}_1$ инвариантно относительно остальных матриц (а также относительно U). При этом $\mathfrak{R}_1$ есть подпространство, отличное от нулевого и от всего пространства $\mathfrak{R}$ и имеющее, следовательно, размерность не больше $n-1$. По предположению в $\mathfrak{R}_1$ все матрицы имеют общий собственный вектор, и тем самым все доказано.

3) В силу 2) в $\mathfrak{R}$ существует общий для всех матриц собственный вектор e_1.

Рассмотрим $(n-1)$-мерное подпространство $\mathfrak{R}_1$, ортогональное к e_1. Оно инвариантно относительно всех матриц. В самом деле, если U—матрица из рассматриваемого семейства и $Ue_1=\lambda e_1$, $(x, e_1)=0$, то

$$(Ux, e_1)=(x, U^{-1}e_1)=\left(x, \frac{1}{\lambda}e_1\right)=\frac{1}{\bar{\lambda}}(x, e_1)=0.$$

Будем теперь рассматривать наши матрицы лишь в пространстве $\mathfrak{R}_1$. В нем найдется собственный вектор e_2, общий для всех матриц. Совокупность векторов из $\mathfrak{R}_1$, ортогональных к e_2, образует $(n-2)$-мерное подпространство, инвариантное относительно всех матриц. Продолжая этот процесс, мы получим n попарно ортогональных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, каждый из которых является собственным вектором для всех матриц рассматриваемого перестановочного семейства.

Примем векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ за базис пространства $\mathfrak{R}$. В этом базисе все матрицы запишутся в диагональной форме, и лемма доказана.

Лемма 1.6.5. *Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная комплексная функция от действительной переменной x $(-\infty < x < \infty)$. Если*

1) для всех действительных x и y имеет место функциональное уравнение

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y) \tag{1.6.8}$$

и 2) $|\varphi(x)|=1$, то $\varphi(x)=e^{i\lambda x}$, где λ — некоторое действительное число.

Доказательство. Полагая в уравнении (1.6.8) $y=0$, мы получим $\varphi(x)=\varphi(x)\cdot\varphi(0)$ и так как по 2) $\varphi(x)\neq 0$, то $\varphi(0)=1$. Рассмотрим то значение функции $\eta(x)=\ln\varphi(x)$, которое при $x=0$ равно нулю и для других действительных x определяется непрерывным продолжением.

Из уравнения (1.6.8) следует уравнение

$$\eta(x+y)=\eta(x)+\eta(y). \tag{1.6.8'}$$

Положим $\eta(1)=a$. Пусть $x=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Из уравнения (1.6.8′) следует

$$n\eta\left(\frac{1}{n}\right)=\eta(1)=a; \quad \eta\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a}{n}.$$

Если $x=\frac{m}{n}$, где m и n — целые положительные числа, то

$$\eta\left(\frac{m}{n}\right)=m\eta\left(\frac{1}{n}\right)=a\cdot\frac{m}{n}.$$

Последнее равенство в силу непрерывности функции $\eta(x)$ распространяется на любые положительные x, т. е.

$$\eta(x)=ax.$$

При $x<0$ полагаем $x=-y$ и, далее, имеем:

$$0=\eta(0)=\eta(x+y)=\eta(x)+\eta(y).$$

Следовательно,

$$\eta(x)=-\eta(y)=-a(-x)=ax.$$

Таким образом, для всех действительных x $\eta(x)=ax$. Потенцируя, получим:

$$\varphi(x)=e^{ax},$$

и так как $|\varphi(x)|=1$, то $a=i\lambda$, где λ — действительное число.

3. Мы располагаем теперь всеми вспомогательными средствами для доказательства теоремы единственности. Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция и допустим, что для всех действительных λ

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}=0.$$

Предположим, что $f(x)$ не равно тождественно нулю. Рассмотрим функцию $g(x)$ — свертку $f(x)$:

$$g(x)=M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\}.$$

Эта функция также тождественно в нуль не обращается, ибо в силу теоремы 1.5.1

$$g(0)=M\{|f(t)|^2\}>0.$$

Далее, в силу п. 4 § 4 (о коэффициентах Фурье свертки),

$$M\{g(x)e^{-i\lambda x}\}=0.$$

В силу леммы 1.6.3 интегральное уравнение (1.6.6) имеет по крайней мере одно собственное значение $\lambda_0\neq 0$. Обозначим через $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ полную систему ортогональных и нормированных решений уравнения (1.6.6) при $\lambda=\lambda_0$. Всякое другое решение есть линейная комбинация выбранных. Покажем, что при каждом действительном y функции $\varphi_i(x+y)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ суть также решения, соответствующие тому же собственному значению λ_0. В самом деле,

$$\varphi_i(x+y)=\lambda_0 M_\xi\{g(x+y-\xi)\varphi_i(\xi)\}=\lambda_0 M_\xi\{g(x-\xi)\varphi(\xi+y)\}.$$

Поэтому, так как $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ образуют полную систему решений интегрального уравнения (1.6.6), то

$$\varphi_i(x+y)=\sum_{k=1}^{n}e_{ik}(y)\varphi_k(x). \tag{1.6.9}$$

В силу инвариантности среднего значения относительно сдвигов функции $\varphi_i(x+y)$ при любом фиксированном y также ортогональны и нормированы. Поэтому матрицы $E(y)=\{e_{ik}(y)\}_{i,k=1}^{n}$ $(-\infty<y<\infty)$ унитарны. Заменяя в равенстве (1.6.9) y на $y+z$, мы получим:

$$\varphi_i(x+y+z)=\sum_{k=1}^{n}e_{ik}(y+z)\varphi_k(z)=\sum_{k=1}^{n}e_{ik}(y)\varphi_k(x+z)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}e_{ik}(y)\sum_{j=1}^{n}e_{kj}(z)\varphi_j(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\sum_{j=1}^{n}e_{ij}(y)e_{jk}(z).$$

Так как функции $\varphi_k(x)$ линейно независимы (ввиду их ортогональности), то из последнего равенства следует

$$e_{ik}(y+z)=\sum_{j=1}^{n} e_{ij}(y)\,e_{jk}(z),$$

т. е.

$$E(y+z)=E(y)\,E(z)=E(z)\,E(y).$$

Таким образом, матрицы $E(y)$ $(-\infty<y<\infty)$ образуют перестановочное множество унитарных матриц. По лемме 1.6.4 существует такая постоянная унитарная матрица U, что для всех действительных x

$$UE(x)\,U^{-1}=\begin{pmatrix} \delta_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n(x) \end{pmatrix}. \qquad (1.6.10)$$

Легко видеть, что функции $\delta_r(x)$ $(r=1, 2, \ldots, n)$ непрерывны, а из унитарности матрицы $E(x)$ следует, что $|\delta_r(x)|=1$. Заменяя в матричном уравнении (1.6.10) x на $x+y$, мы получим:

$$UE(x+y)\,U^{-1}=\begin{pmatrix} \delta_1(x+y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2(x+y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n(x+y) \end{pmatrix}=$$

$$=UE(x)\,U^{-1}\,(UE(y)\,U^{-1})=$$

$$=\begin{pmatrix} \delta_1(x)\,\delta_1(y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2(x)\,\delta_2(y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n(x)\cdot\delta_n(y) \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\delta_r(x+y)=\delta_r(x)\,\delta_r(y)$ и, значит, по лемме 1.6.5 $\delta_r(x)=e^{i\lambda_r x}$, где λ_r — действительные числа.

Из уравнения (1.6.10) легко следует, что функции $e_{ik}(x)$ суть линейные комбинации функций $e^{i\lambda_r x}$. С другой стороны, полагая в равенстве (1.6.9) $x=0$, мы выразим функции $\varphi_i(x)$ линейно через функции $e_{ik}(x)$. Поэтому, окончательно, функции $\varphi_i(x)$ выражаются линейно через функции $e^{i\lambda_r x}$. Но так как функции $\varphi_i(x)$ линейно независимы, то и обратно, функции $e^{i\lambda_r x}$ выражаются линейно через функции*) $\varphi_i(x)$. Сопоставляя это с тем, что было сказано в начале настоящего параграфа, мы заключаем, что $f(x)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

§ 7. Теорема аппроксимации. Метод Н. Винера

Структура равномерных п.-п. функций выясняется следующей теоремой, которую мы будем называть теоремой аппроксимации.

Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция.

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечный тригонометрический многочлен

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\lambda_k x},$$

удовлетворяющий неравенству

$$\sup_x |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon. \tag{1.7.1}$$

---

*) В самом деле, пусть

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, e^{i\lambda_k x}. \tag{*}$$

Покажем, что $\mathrm{Det}(a_{jk}) \neq 0$ и, следовательно, система (*) разрешима относительно функций $e^{i\lambda_k x}$. В самом деле, если $\mathrm{Det}(a_{jk})=0$, то между строками матрицы $\{a_{jk}\}$ существует линейная связь, т. е. существуют числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, не все равные нулю, так что для всех $k=1, 2, \ldots, n$ имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j a_{jk} = 0.$$

Но тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j \varphi_j(x) = 0$, что противоречит линейной независимости функций $\varphi_j(x)$.

В настоящем параграфе мы установим эквивалентность теоремы аппроксимации равенству Парсеваля (и, следовательно, двум другим основным теоремам теории п.-п. функций) методом, принадлежащим Н. Винеру. (В § 13 настоящей главы мы дадим доказательство теоремы аппроксимации, принадлежащее Н. Н. Боголюбову и не опирающееся на равенство Парсеваля).

1. *Из теоремы аппроксимации следует равенство Парсеваля.*

Пусть $f(x) \sim \sum\limits_{\nu} A(\nu) e^{i\nu x}$ — равномерная п.-п. функция. Из неравенства (1.7.1) следует

$$M\{|f(x) - P_\varepsilon(x)|^2\} < \varepsilon^2.$$

Из последнего неравенства и свойства минимальности коэффициентов Фурье (см. § 3) следует

$$M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=1}^{N} |A(\nu_k)|^2 = M\left\{|f(x) - \sum_{k=1}^{N} A(\nu_k) e^{i\nu_k x}|^2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant M\left\{|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\nu_k x}|^2\right\} < \varepsilon^2.$$

При $\varepsilon \to 0$ мы получим:

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{\nu} |A(\nu)|^2,$$

т. е. равенство Парсеваля.

2. *Из равенства Парсеваля следует теорема аппроксимации.*

Пусть $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Положим

$$g(x) = \sup_t |f(x+t) - f(t)|.$$

Так как

$$|g(x+h) - g(x)| =$$
$$= |\sup_t |f(x+h+t) - f(t)| - \sup_t |f(x+t) - f(t)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_t ||f(x+h+t) - f(t)| - |f(x+t) - f(t)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_t |f(x+h+t) - f(x+t)| = \sup_t |f(t+h) - f(t)|,$$

то $g(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Положим

$$\varphi_\varepsilon(v) = \begin{cases} 1 - \dfrac{v}{\varepsilon}, & 0 \leqslant v \leqslant \varepsilon, \\ 0, & v \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Далее, рассмотрим равномерную п.-п. функцию $\varphi_\varepsilon[g(x)]$. Эта функция неотрицательна и не равна тождественно нулю (ибо $\varphi_\varepsilon[g(0)] = 1$). Поэтому (см. теорему 1.1.5) $M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\} > 0$. Положим

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon[g(x)]}{M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\}}.$$

$\psi_\varepsilon(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Далее, положим

$$f_\varepsilon(x) = M_t\{f(t)\,\psi_\varepsilon(x-t)\}.$$

Покажем, что если $\psi_\varepsilon(x-t) \neq 0$, то

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon. \tag{1.7.2}$$

В самом деле, если $\psi_\varepsilon(x-t) \neq 0$, то $\varphi_\varepsilon[g(x-t)] \neq 0$, т. е. $g(x-t) < \varepsilon$, т. е.

$$\sup_u |f(x-t+u) - f(u)| < \varepsilon$$

или

$$\sup_u |f(x+u) - f(t+u)| < \varepsilon.$$

Полагая $u = 0$, мы получим то, что хотели доказать.

Так как $M_t\{\psi_\varepsilon(x-t)\} = 1$, то $f(x) = M_t\{f(x)\,\psi_\varepsilon(x-t)\}$ и, значит,

$$f(x) - f_\varepsilon(x) = M_t\{[f(x) - f(t)]\,\psi_\varepsilon(x-t)\}.$$

Поэтому из неравенства (1.7.2) следует оценка

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant M_t\{|f(x) - f(t)|\,\psi_\varepsilon(x-t)\} < \varepsilon. \tag{1.7.3}$$

Используем теперь равенство Парсеваля.

Пусть $f(x) \sim \sum\limits_n A_n e^{i\lambda_n x}$. Обозначим через η произвольное положительное число и выберем целое положительное число $N = N(\eta)$ такое, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n|^2 < \eta.$$

Далее, положим $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\lambda_n x}$; $r_N(x) = f(x) - S_N(x)$. В силу равенства Парсеваля

$$M\{|f(x) - S_N(x)|^2\} = M\{|r_N(x)|^2\} = \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n|^2 < \eta. \quad (1.7.4)$$

Положим теперь

$$f_\varepsilon(x) = M_t\{f(t)\psi_\varepsilon(x-t)\} = M_t\{S_N(t)\psi_\varepsilon(x-t)\} + \\ + M_t\{r_N(t)\psi_\varepsilon(x-t)\} = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\lambda_n x} M_t\{\psi_\varepsilon(t)e^{-i\lambda_n t}\} + \\ + M_t\{r_N(t)\psi_\varepsilon(x-t)\} = P_\varepsilon(x) + R_{N,\varepsilon}(x).$$

$P_\varepsilon(x)$ — тригонометрический многочлен. Оценим остаточный член $R_{N,\varepsilon}(x)$. В силу неравенства Коши-Буняковского и неравенства (1.7.4)

$$|R_{N,\varepsilon}(x)| \leqslant \sqrt{M_t\{|r_N(t)|^2\}} \cdot \sqrt{M_t\{\psi_\varepsilon^2(x-t)\}} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{M\{\psi_\varepsilon^2(t)\}}.$$

При фиксированном ε можно подобрать N столь большим (а следовательно, η столь малым), чтобы выполнилось неравенство

$$|R_{N,\varepsilon}(x)| < \varepsilon. \quad (1.7.5)$$

Для этого достаточно, чтобы число η удовлетворяло неравенству

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{M\{\psi_\varepsilon^2(t)\}}.$$

Из неравенств (1.7.3) и (1.7.5) следует

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < 2\varepsilon.$$

Последнее неравенство в силу произвольности числа ε доказывает теорему аппроксимации.

Из доказательства видно, что показатели многочлена $P_\varepsilon(x)$ можно выбирать из показателей Фурье функции $f(x)$.

Изложенный метод доказательства теоремы аппроксимации принадлежит Н. Винеру. В следующем параграфе мы приведем вывод теоремы аппроксимации из равенства Парсеваля, основанный на другой идее.

§ 8. Теорема аппроксимации. Метод Бохнера-Фейера *)

1. Пусть $f(x)$ — периодическая функция периода 2π с рядом Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}; \quad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Положим

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}, \qquad S_0(x) = a_0,$$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) a_k e^{ikx}.$$

Как известно, для каждой непрерывной периодической функции $f(x)$ суммы **) $\sigma_n(x)$ при $n \to \infty$ сходятся равномерно к функции $f(x)$. Суммы $\sigma_n(x)$, с одной стороны, можно рассматривать как средние арифметические отрезков ряда Фурье функции $f(x)$, а с другой стороны, их можно получить из ряда Фурье функции $f(x)$, вводя дополнительные множители:

$$r_k^{(n)} = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|k|}{n}\right), & \text{если } |k| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |k| > n. \end{cases}$$

Бохнер заметил, что если в ряд Фурье равномерной п.-п. функции ввести некоторые множители, существенно

*) S. Bochner [1].

**) Суммы $\sigma_n(x)$ называются суммами Фейера.

зависящие от показателей Фурье функции, то мы получим суммы, сходящиеся равномерно для каждой равномерной п.-п. функции. Эти суммы являются естественным обобщением сумм Фейера.

С помощью теоремы единственности мы покажем, что они сходятся к самой функции. Таким образом, метод Бохнера-Фейера позволяет вывести теорему аппроксимации из теоремы единственности. Возможность обратного сведения была доказана в предыдущем параграфе.

2. Для конструкции сумм Бохнера-Фейера нам понадобятся некоторые новые понятия, которые играют в последующем изложении также существенную роль в связи с другими вопросами.

Определение 1.8.1. *Конечное или счетное множество действительных чисел* $\beta_1, \beta_2, \ldots$ *называется линейно независимым, если не существует соотношения вида*

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots + r_n\beta_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

с рациональными, не равными одновременно нулю числами $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Определение 1.8.2. *Конечное или счетное множество линейно независимых чисел* $\beta_1, \beta_2, \ldots$ *называется базисом множества чисел* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, *если каждое число* Λ_n *представляется в виде конечной линейной комбинации с рациональными коэффициентами из чисел* β, *т. е.*

$$\Lambda_n = r_1^{(n)}\beta_1 + r_2^{(n)}\beta_2 + \ldots + r_{m_n}^{(n)}\beta_n. \qquad (1.8.1)$$

Теорема 1.8.1. *Каждое счетное множество действительных чисел имеет базис, содержащийся в этом множестве.*

Доказательство. Пусть

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \qquad (1.8.2)$$

— данное множество действительных чисел. Обозначим через β_1 первое из чисел множества (1.8.2), отличное от нуля, и вычеркнем в ряде (1.8.2) все числа Λ, удовлетворяющие соотношению

$$r_1\beta_1 + r_2\Lambda = 0$$

с рациональными r_1 и r_2. Пусть β_2 — первое невычеркнутое при этом число в ряде (1.8.2). Вычеркнем теперь из ряда (1.8.2) еще не вычеркнутые числа Λ, удовлетворяющие соотношению

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + r_3\Lambda = 0$$

с рациональными r_1, r_2 r_3. Первое невычеркнутое при этом число назовем β_3 и т. д. В результате этого процесса мы построим, очевидно, базис множества (1.8.2).

Разумеется, что для одного и того же множества чисел может существовать много базисов, но в определенном базисе представление (1.8.1) единственно.

Если базис содержит конечное число членов, то он называется *конечным*, в противном случае — *бесконечным*.

Если в представлении (1.8.2) все r—целые числа, то базис называется *целым*. Базис может быть и целым и конечным. Например, пусть β_1 и β_2 — несоизмеримые действительные числа. Рассмотрим множество чисел вида $n_1\beta_1 + n_2\beta_2$, где n_1 и n_2 принимают всевозможные целые значения. Очевидно, что числа β_1 и β_2 образуют целый базис для этого множества.

3. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu\beta x}, \quad a_\nu = M\{f(x)\, e^{-i\nu\beta x}\} \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

есть периодическая функция с периодом $p = \frac{2\pi}{|\beta|}$. Вычислим для $f(x)$ сумму Фейера порядка n. Мы имеем:

$$S_r(x) = \sum_{\nu=-r}^{r} a_\nu e^{i\nu\beta x} = M_t\left\{f(t) \sum_{\nu=-r}^{r} e^{i\nu\beta(x-t)}\right\} =$$

$$= M_t\left\{f(x+t)\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)\beta t}{\sin\frac{\beta t}{2}}\right\} =$$

$$= M_t\left\{f(x+t)\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)\beta t\cdot\sin\frac{\beta t}{2}}{\sin^2\frac{\beta t}{2}}\right\} =$$

$$= M_t\left\{f(x+t)\frac{\cos r\beta t - \cos(r+1)\beta t}{\sin^2\frac{\beta t}{2}}\right\}.$$

Поэтому

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{n}=M_t\left\{f(x+t)\frac{\sin^2\frac{n\beta}{2}t}{n\sin^2\frac{\beta t}{2}}\right\}=$$

$$=\sum_{\nu=-n}^{n}\left(1-\frac{|\nu|}{n}\right)a_\nu e^{i\nu\beta x}=$$

$$=M_t\left\{f(x+t)\sum_{\nu=-n}^{n}\left(1-\frac{|\nu|}{n}\right)e^{i\nu\beta t}\right\}.$$

Рассмотрим ядро Фейера

$$K_n(\beta t)=\frac{\sin^2\frac{n\beta}{2}t}{n\sin^2\frac{\beta t}{2}}=\sum_{\nu=-n}^{n}\left(1-\frac{|\nu|}{n}\right)e^{i\nu\beta t}. \qquad (1.8.3)$$

Оно обладает двумя важными свойствами, которые следуют непосредственно из равенства (1.8.3):

1) Функция $K_n(\beta t)$ неотрицательна и 2) $M_t\{K_n(\beta t)\}=1$.

4. Пусть $f(x)\sim\sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$ — равномерная п.-п. функция. Обозначим через β_1, β_2, ... какой-нибудь базис показателей Фурье функции $f(x)$ и через r, m, n_1, n_2, ..., n_r некоторые целые положительные числа. Построим составное ядро Фейера:

$$K^{(m)}_{\begin{pmatrix}n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_r\\ \beta_1,\, \beta_2,\, \ldots,\, \beta_r\end{pmatrix}}=K_{n_1}\left(\frac{\beta_1 t}{m!}\right)K_{n_2}\left(\frac{\beta_2 t}{m!}\right)\ldots K_{n_r}\left(\frac{\beta_r t}{m!}\right).$$

В дальнейшем в целях сокращения записи мы будем обозначать совокупность индексов $\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_r\\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_r\end{pmatrix}$ одной буквой B.

Составное ядро обладает теми же двумя важными свойствами, что простое ядро Фейера. Первое свойство очевидно. Для доказательства второго свойства запишем ядро $K_{\mathrm{B}}^{(m)}(t)$ в виде

$$K_{\mathrm{B}}^{(m)}(t)=\sum_{\substack{|\nu_1|\leqslant n_1\\ |\nu_2|\leqslant n_2\\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\\ |\nu_r|\leqslant n_r}}\left(1-\frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\left(1-\frac{|\nu_2|}{n_2}\right)\dots$$

$$\dots\left(1-\frac{|\nu_r|}{n_r}\right)e^{-i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)t}=$$

$$=\sum k_{n_1,n_2,\dots,n_r;\,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_r}\,e^{-i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)t}. \tag{1.8.4}$$

Так как числа β_1, β_2, ..., β_r линейно независимы, то в последней сумме нуль в показателе может получиться лишь тогда, когда $\nu_1=\nu_2=\dots=\nu_r=0$. Отсюда следует, что

$$M\{K_B^{(m)}(t)\}=1.$$

Коэффициенты в сумме (1.8.4) $k_{n_1,\dots,n_r,\nu_1,\dots,\nu_r}$ обладают следующими очевидными свойствами: 1) они положительны и не превосходят единицы и 2) при фиксированных r, ν_1, ν_2, ..., ν_r, а n_1, n_2, ..., $n_r\to\infty$ стремятся к единице.

Определим теперь тригонометрический многочлен Бохнера-Фейера:

$$P_B^{(m)}(x)=M_t\{f(x+t)\,K_B^{(m)}(t)\}=$$

$$=\sum_{\substack{|\nu_1|\leqslant n_1\\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\\ |\nu_r|\leqslant n_r}}k_{n_1,\dots,n_r,\nu_1,\dots,\nu_r}\,A\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)\times$$

$$\times e^{i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)x},$$

где

$$A\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)$$

есть коэффициент Фурье, соответствующий показателю $\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\dots+\frac{\nu_r}{m!}\beta_r$.

Рассмотрим множество всех многочленов Бохнера-Фейера для данной функции $f(x)$. Покажем, что это множество равномерно ограничено, равностепенно непрерывно и равностепенно почти-периодично.

В силу свойств составного ядра Бохнера-Фейера имеем:

$$|P_B^{(m)}(x)| \leqslant M_t\{|f(x+t)|K_B^{(m)}(t)\} \leqslant \sup_x |f(x)|;$$

$$|P_B^{(m)}(x+h) - P_B^{(m)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant M_t\{|f(x+h+t) - f(x+t)|K_B^{(m)}(t)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x |f(x+h) - f(x)|.$$

Из первого неравенства следует равномерная ограниченность функций $P_B^{(m)}(x)$, а из второго неравенства—их равностепенная непрерывность и равностепенная почти-периодичность.

В силу леммы 1.6.1 из множества $\{P_B^{(m)}(x)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Обозначим предельную функцию для этой подпоследовательности через $\varphi(x)$. Из свойства чисел $k_{n_1, \ldots, n_r, \nu_1, \ldots, \nu_r}$ легко следует, что ряд Фурье функции $\varphi(x)$ совпадает с рядом Фурье функции $f(x)$. Поэтому из теоремы единственности следует, что последовательность сумм Бохнера-Фэйера сходится равномерно к функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

§ 9. Признаки абсолютной сходимости рядов Фурье для некоторых классов равномерных п.-п. функций

1. При изучении сходимости рядов Фурье равномерных п.-п. функций мы с самого начала сталкиваемся с серьезной трудностью, заключающейся в том, что показатели Фурье могут лежать всюду плотно, и следовательно, неясно, в каком порядке следует суммировать члены ряда Фурье. В том случае, когда ряд Фурье сходится абсолютно, вопрос о порядке членов ряда Фурье отпадает. В этом параграфе мы разберем две теоремы об абсолютной сходимости рядов Фурье. В следующих двух параграфах мы будем изучать также и неабсолютную

сходимость. Однако мы будем изучать случаи, когда показатели Фурье имеют изолированные предельные точки, и поэтому вопрос о порядке суммирования членов ряда Фурье будет решаться автоматически.

Теорема 1.9.1. *Если коэффициенты Фурье равномерной п.-п. функции $f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ положительны, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим суммы Бохнера-Фейера $P_B^{(m)}(x)$. Нам уже известно, что они равномерно ограничены. Поэтому существует такая постоянная положительная величина M, что

$$P_B^{(m)}(0) = \sum_{\substack{|\nu_1| \leq n_1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ |\nu_r| \leq n_r}} k_{n_1, \ldots, n_r;\, \nu_1, \ldots, \nu_r}\, a\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right) < M.$$

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$—выбранные в каком угодно порядке N коэффициентов Фурье функции $f(x)$. При достаточно больших $r, m, n_1, n_2, \ldots, n_r$ предыдущая сумма будет содержать члены с $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Обозначим через $\sum'$ сумму, содержащую только эти члены. В силу положительности коэффициентов Фурье, а также чисел k

$$\sum{}' k_{n_1, \ldots, n_r;\, \nu_1, \ldots, \nu_r}\, a\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right) < M. \qquad (1.9.1)$$

При фиксированном N в последней сумме числа $\nu_1, \ldots, \nu_r$ ограничены. Поэтому при

$$n_1, n_2, \ldots, n_r \to \infty, \quad k_{n_1, \ldots, n_r;\, \nu_1, \ldots, \nu_r} \to 1$$

и, следовательно, из неравенства (1.9.1) следует в пределе

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \leq M,$$

что и доказывает в силу произвольности числа N сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Так как $|e^{i\lambda_k x}| = 1$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно, и поэтому в силу теоремы единственности

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}.$$

2. Рассмотрим теперь случай линейно независимых показателей Фурье.

Определение 1.9.1. *Показатели Фурье функции $f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ называются линейно независимыми, если из равенства*

$$k_1\lambda_{n_1}+\ldots+k_r\lambda_{n_r}=0,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_r$—целые числа, следует, что $k_1=k_2=\ldots$ $\ldots=k_r=0$. В частности, из этого определения следует, что в случае линейной независимости показателей Фурье ряд Фурье не имеет свободного члена.

Теорема 1.9.2. *Если показатели Фурье равномерной п.-п. функции $f(x)$ линейно независимы, то ряд Фурье для этой функции сходится абсолютно.*

Доказательство. Пусть $A_k=|A_k|e^{iv_k}$, где $|A_k|$—модуль и v_k—аргумент комплексного числа A_k. Положим

$$\varphi_k(x)=1+\cos(\lambda_k x+v_k)=1+\frac{e^{-i(\lambda_k x+v_k)}+e^{i(\lambda_k x+v_k)}}{2},$$

$$\Phi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(x)=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-i(\lambda_k x+v_k)}+\sum_r c_r e^{i\mu_r x}.$$

Из линейной независимости чисел λ_k следует, что ни одно из чисел μ_r не может равняться ни одному из чисел λ_k (а значит, также нулю). Поэтому

$$M\{\Phi_n(x)\}=1,\quad M\{f(x)\cdot\Phi_n(x)\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|A_k|.$$

С другой стороны, так как $\Phi_n(x)\geqslant 0$, то

$$|M\{f(x)\,\Phi_n(x)\}|\leqslant\sup_x|f(x)|\,M\{\Phi_n(x)\}=\sup_x|f(x)|=\Gamma.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |A_n| \leqslant 2 \sup_x |f(x)| = 2\Gamma,$$

и так как число n произвольно, то теорема доказана.

Если бы мы исходили не из ядра $\varphi_k(x)$, а из ядра

$$\varphi_{k,p}(x) = 1 + \frac{p-1}{p}\cos(\lambda_k x + v_k) +$$

$$+ \frac{p-2}{p}\cos(2\lambda_k x + 2v_k) + \ldots + \frac{1}{p}\cos[(p-1)(\lambda_k x + v_k)] =$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{p-j}{p}\cos[j(\lambda_k x + v_k)] = \frac{\sin^2 \frac{p}{2}(\lambda_k x + v_k)}{p \sin^2 \frac{\lambda_k x + v_k}{2}} \geqslant 0,$$

то совершенно аналогично пришли бы к неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \leqslant \frac{p}{p-1}\Gamma,$$

и так как p произвольно, то отсюда следует $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| \leqslant \Gamma$.

Здесь на самом деле имеет место знак равенства, так как

$$\Gamma = \sup_x \Big| \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x} \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

§ 10. Признаки сходимости рядов Фурье для некоторых классов равномерных п.-п. функций. Случай, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности

1. В настоящем параграфе мы изучим класс равномерных п.-п. функций, показатели Фурье которых имеют единственную предельную точку на бесконечности. В частности, в этот класс попадают все чисто периодические функции. Мы увидим, что свойства рядов Фурье равномерных п.-п. функций отмеченного класса во многом аналогичны свойствам рядов Фурье чисто периодических функций. Дальнейшие выводы существенно опираются на классическую формулу обращения Фурье*):

Пусть $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. Положим

$$E(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx.$$

Предположим, что в окрестности точки x_0 $f(x)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда

$$\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)] = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} E(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

Если, в частности, $E(\alpha) \in L(-\infty, \infty)$ и $f(x)$ всюду непрерывна, то

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

2. Обозначим через a и b $(a < b)$ произвольные положительные числа. В дальнейшем нам будет неоднократно встречаться функция

$$\varphi_{a,b}(\lambda) = \begin{cases} 1 & |\lambda| \leqslant a, \\ \frac{1}{b-a}(b-|\lambda|) & a < |\lambda| < b, \\ 0 & |\lambda| \geqslant b \end{cases}$$

и ее преобразование Фурье

$$\psi_{a,b}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,b}(\lambda) e^{-iu\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{b} \varphi_{a,b}(\lambda) \cos \lambda u \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{a} \cos \lambda u \, d\lambda + \frac{1}{\pi(b-a)} \int_{a}^{b} (b-\lambda) \cos \lambda u \, d\lambda =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{b-a}{2} u \cdot \sin \frac{b+a}{2} u}{\pi (b-a) u^2}. \tag{1.10.1}$$

*) Ее доказательство см., например, Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, 1948, стр. 21.

Лемма 1.10.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(u)|\,du \leqslant A + B\ln\frac{b+a}{b-a},$$

где A и B — абсолютные постоянные.

Доказательство. Положим $\frac{b-a}{2}u = v$ и $\frac{b+a}{b-a} = \eta$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(u)|\,du = \frac{4}{\pi(b-a)}\int_{0}^{\infty} \frac{\left|\sin\frac{b-a}{2}u\sin\frac{b+a}{2}u\right|}{u^2}\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{|\sin v\cdot\sin\eta v|}{v^2}\,dv \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{|\sin\eta v|}{v}\,dv + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{dv}{v^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\eta}\frac{|\sin v|}{v}\,dv + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{|\sin v|}{v}\,dv + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\eta}\frac{|\sin v|}{v}\,dv + \frac{2}{\pi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\eta + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ — произвольная равномерная п.-п. функция. Рассмотрим функцию

$$f_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\psi_{a,b}(u)\,du. \tag{1.10.2}$$

Лемма 1.10.2. *$f_{a,b}(x)$ — равномерная п.-п. функция с рядом Фурье*

$$f_{a,b}(x) \sim \sum_n \varphi_{a,b}(\Lambda_n)\,A_n e^{i\Lambda_n x}. \tag{1.10.3}$$

Доказательство. Непрерывность и почти-периодичность функции $f_{a,b}(x)$ следуют из оценки

$$|f_{a,b}(x+\tau) - f_{a,b}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+u+\tau) - f(x+u)|\,|\psi_{a,b}(u)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \sup|f(x+\tau) - f(x)|\left(A + B\ln\frac{b+a}{b-a}\right).$$

Вычислим ряд Фурье функции $f_{a,b}(x)$. Имеем:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_{a,b}(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(u)\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+u)e^{-i\lambda x}\,dx\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(u)\,e^{i\lambda u}\frac{1}{2T}\int_{-T+u}^{T+u} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\,du.$$

В силу усиленной теоремы о среднем значении в последнем равенстве можно перейти к пределу, полагая $T\to\infty$, и мы получим в силу формулы обращения Фурье:

$$M\left\{f_{a,b}(x)\,e^{-i\lambda x}\right\} = M\left\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(u)\,e^{i\lambda u}\,du =$$

$$= M\left\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\right\}\cdot\varphi_{a,b}(\lambda).$$

Поэтому ряд (1.10.3) есть ряд Фурье функции $f_{a,b}(x)$.

Теорема 1.10.1. *Пусть $b\to\infty$, a остается меньше b, причем так, что отношение $\frac{a}{b}$ остается меньше фиксированного числа θ, которое меньше 1. Тогда для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ $f_{a,b}(x)\to f(x)$ и притом равномерно на всей действительной оси.*

Доказательство. В силу формулы обращения Фурье

$$\varphi_{a,b}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(u)\,e^{i\lambda u}\,du.$$

Полагая в этом равенстве $\lambda=0$ и замечая, что $\varphi_{a,b}(0)=1$, мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(u)\,du = 1.$$

Помножим обе части последнего равенства на $f(x)$ и вычтем полученное таким образом равенство из равенства (1.10.2). Мы получим:

$$f_{a,b}(x)-f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x+u)-f(x)\}\,\psi_{a,b}(u)\,du.$$

Полагая $\frac{b-a}{2}u=v$, мы получим (приняв во внимание формулу (1.10.1)):

$$f_{a,b}(x)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f\left(x+\frac{2v}{b-a}\right)-f(x)\right\}\frac{\sin v\sin\frac{b+a}{b-a}v}{v^2}\,dv. \quad (1.10.4)$$

Обозначим через N произвольное положительное число. Тогда

$$|f_{a,b}(x)-f(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{2v}{b-a}\right)-f(x)\right|\frac{\left|\sin v\sin\frac{b+a}{b-a}v\right|}{v^2}\,dv=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-N}+\int_{-N}^{N}+\int_{N}^{\infty}\right\}=I_1+I_2+I_3.$$

Положим $\Gamma=\sup_x|f(x)|$ и обозначим через ε произвольное положительное число. Из оценок

$$I_1\leqslant\frac{2}{\pi}\Gamma\int_{-\infty}^{-N}\frac{dv}{v^2}=\frac{2\Gamma}{\pi N},\quad I_3\leqslant\frac{2\Gamma}{\pi N}$$

следует, что при произвольных a и b и достаточно большом N

$$I_1+I_3<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим теперь I_2. Так как по условию $\frac{a}{b}<\theta<1$, то

$$a<\theta b,\ b-a>b-\theta b=b(1-\theta)\to\infty \text{ при } b\to\infty.$$

Обозначим через η произвольное положительное число. В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ при фиксированном N можно выбрать $b-a$ столь большим, чтобы выполнилось неравенство

$$\left|f\left(x+\frac{2v}{b-a}\right)-f(x)\right|<\eta \quad (-\infty\leqslant x\leqslant\infty,\ -N\leqslant v\leqslant N).$$

Поэтому (см. лемму 1.10.1)

$$I_2\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}\left|f\left(x+\frac{2v}{b-a}\right)-f(x)\right|\frac{\left|\sin v\sin\frac{b+a}{b-a}v\right|}{v^2}dv\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\eta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\sin v\sin\frac{b+a}{b-a}v\right|}{v^2}dv<\eta\left(A+B\ln\frac{b+a}{b-a}\right).$$

Так как $\frac{a}{b}<\theta<1$, то

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}<\frac{2}{1-\theta}<\infty.$$

Следовательно, $\ln\frac{b+a}{b-a}$ есть величина ограниченная и, значит, при достаточно малом η $I_2<\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому окончательно

$$|f_{a,b}(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

и теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 1.10.1 мы нигде не пользовались почти-периодичностью функции $f(x)$. Достаточно требовать ограниченность и равномерную непрерывность функции $f(x)$. Заметим еще, что $f_{a,b}(x)$ есть целая аналитическая функция. Это следует из представления

$$f_{a,b}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,\psi_{a,b}(\xi-x)\,d\xi$$

и того обстоятельства, что $\psi_{a,b}(u)$ есть целая функция.

3. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$, т. е.

$$\sup_x |f(x+h) - f(x)| < C|h|^\alpha,$$

где C от x и h не зависит, то оценку разности $f_{a,b}(x) - f(x)$ можно уточнить. В самом деле, в этом случае из формулы (1.10.4) следует оценка

$$|f_{a,b}(x) - f(x)| \leqslant \frac{C}{\pi} \frac{2^{\alpha+1}}{(b-a)^\alpha} \int_0^\infty \frac{\left|\sin v \sin \frac{b+a}{b-a} v\right|}{v^{2-\alpha}} dv. \qquad (1.10.5)$$

Покажем ограниченность интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{\left|\sin v \sin \frac{b+a}{b-a} v\right|}{v^{2-\alpha}} dv.$$

В самом деле,

$$I \leqslant \int_0^1 \frac{\left|\sin v \sin \frac{b+a}{b-a} v\right|}{v^{2-\alpha}} dv + \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{\left|\sin \frac{b+a}{b-a} v\right|}{v^{1-\alpha}} + \frac{1}{1-\alpha} =$$

$$= \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^\alpha \int_0^{\frac{b+a}{b-a}} \frac{|\sin v|}{v^{1-\alpha}} dv + \frac{1}{1-\alpha} <$$

$$< \int_0^{\frac{2}{1-\theta}} \frac{dv}{v^{1-\alpha}} + \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{1-\theta}\right)^\alpha + \frac{1}{1-\alpha}.$$

Поэтому из оценки (1.10.5) следует оценка

$$|f_{a,b}(x) - f(x)| \leqslant C_1 (b-a)^{-\alpha}, \qquad (1.10.6)$$

где C_1 — постоянная величина.

4. Допустим теперь, что показатели Фурье п.-п. функции $f(x)$ имеют единственную предельную точку на бесконечности. В этом случае ряд Фурье естественно записать в виде

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\Lambda x}.$$

Вставив, в случае необходимости, лишние показатели Фурье, мы добьемся того, что показатели Фурье будут входить симметрично, т. е. $\Lambda_{-k} = -\Lambda_k$.

Очевидно, что при любых a и b ряд Фурье функции $f_{a,b}(x)$ есть конечная тригонометрическая сумма и, следовательно, в силу теоремы единственности

$$f_{a,\,b}(x) = \sum_k \varphi_{a,\,b}(\Lambda_k)\, A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Рассмотрим, в частности, лакунарные ряды Фурье, т. е. предположим, что существует не зависящее от числа n число $\theta < 1$ такое, что

$$\frac{\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}} < \theta \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Полагая $a = \Lambda_n$, $b = \Lambda_{n+1}$, мы легко получим, что

$$f_{a,\,b}(x) = \sum_{|\Lambda_k| < \Lambda_n} A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Поэтому из теоремы 1.10.1 следует

Теорема 1.10.2. *Если равномерная п.-п. функция имеет лакунарный ряд Фурье, то он сходится равномерно к функции.*

5. Предположим попрежнему, что показатели Фурье равномерной п.-п. функции $f(x)$ имеют единственную предельную точку на бесконечности. Тогда справедлива

Теорема 1.10.3. *Если равномерная п.-п. функция $f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\Lambda_k x}$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$ и если*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n^{-\alpha} \ln \frac{\Lambda_{n+1} + \Lambda_n}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} = 0,$$

то равномерно на всей действительной оси

$$f(x)=\lim \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Доказательство. Положим $a=\frac{1}{2}\Lambda_n$, $b=\Lambda_n$. Мы получим:

$$\sigma_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\psi_{a,\,b}(u)\,du=$$

$$=\sum_{|\Lambda_k|\leqslant\frac{1}{2}\Lambda_n} A_k e^{i\Lambda_k x}+\sum_{\frac{1}{2}\Lambda_n<|\Lambda_k|\leqslant\Lambda_n} \frac{2}{\Lambda_n}(\Lambda_n-|\Lambda_k|)\,A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Так как по условию $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha<1$, то из неравенства (1.10.6) следует оценка

$$|f(x)-\sigma_n(x)|<\text{const}\,\Lambda_n^{-\alpha}. \tag{1.10.7}$$

Положим теперь $a=\Lambda_n$, $b=\Lambda_{n+1}$. Тогда

$$S_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\psi_{\Lambda_n,\,\Lambda_{n+1}}(u)\,du=\sum_{|\Lambda_k|\leqslant\Lambda_n} A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Легко видеть, что

$$\sigma_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_n(x+u)\,\psi_{\Lambda_n,\Lambda_{n+1}}(u)\,du.$$

Поэтому в силу леммы 1.10.1

$$|S_n(x)-\sigma_n(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+u)-\sigma_n(x+u)|\,|\psi_{\Lambda_n,\,\Lambda_{n+1}}(u)|\,du\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\,\Lambda_n^{-\alpha}\left(A+B\ln\frac{\Lambda_{n+1}+\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}-\Lambda_n}\right). \tag{1.10.8}$$

Далее, из неравенств (1.10.7) и (1.10.8) следует

$$|f(x)-S_n(x)|\leqslant\text{const}\,\Lambda_n^{-\alpha}\left(A+1+B\ln\frac{\Lambda_{n+1}+\Lambda_n}{\Lambda_{n+1}-\Lambda_n}\right).$$

В силу условия теоремы последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

6. Если сверх того, что единственная предельная точка показателей Фурье находится на бесконечности, существует такое не зависящее от n число α, что $\Lambda_{n+1} - \Lambda_n > \alpha$, то можно получить в точности такие же признаки сходимости, как и для обычных рядов Фурье.

Теорема 1.10.4. *Пусть $\Lambda_{n+1} - \Lambda_n > \alpha > 0$, где α от n не зависит. В каждой точке x_0, в окрестности которой функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию,*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{i\Lambda_k x_0} = \frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\}.$$

Доказательство. Положим $a = \Lambda_n$, $b = \Lambda_n + \alpha$. Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{i\Lambda_k x} = f_{a,\,b}(x) =$$

$$= \frac{2}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin\frac{\alpha u}{2} \cdot \sin\frac{2\Lambda_n + \alpha}{2} u}{u^2}\, du.$$

Обозначим через ε произвольное положительное число и положим

$$S_n(x_0) = \frac{2}{\pi\alpha}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right\} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как в интервалах $(-\infty, -\varepsilon)$, (ε, ∞) функция $\frac{f(x_0+u)}{u^2}\sin\frac{\alpha u}{2}$ абсолютно интегрируема, то в силу известной леммы Римана при фиксированном ε и $n \to \infty$, I_1 и $I_3 \to 0$. Остается рассмотреть I_2. Прежде всего мы покажем, что I_2 можно заменить более простым интегралом. В самом деле, рассмотрим разность

$$\frac{2}{\pi\alpha}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_0+u)\frac{\sin\frac{\alpha u}{2}\sin\frac{2\Lambda_n+\alpha}{2}u}{u^2}\,du-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_0+u)\frac{\sin\frac{2\Lambda_n+\alpha}{2}u}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_0+u)\sin\frac{2\Lambda_n+\alpha}{2}u\left[\frac{2\sin\frac{\alpha u}{2}-\alpha u}{u^2}\right]du.$$

Легко видеть, что при $\varepsilon\to 0$ последнее выражение стремится к нулю. Таким образом, дело свелось к изучению интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_0+u)\frac{\sin\frac{2\Lambda_n+\alpha}{2}u}{u}\,du.$$

Но это есть в точности тот интеграл, который изучается в теории рядов Фурье, где доказывается, что при фиксированном ε и $\Lambda_n\to\infty$ интеграл стремится к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$. Теорема доказана. Легко видеть, что точно так же можно получить другие признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости рядов Фурье периодических функций.

§ 11. Признаки сходимости рядов Фурье для некоторых классов равномерных п.-п. функций. Случай показателей Фурье, имеющих единственную предельную точку на конечном расстоянии

1. Допустим теперь, что показатели Фурье равномерной п.-п. функции $f(x)$ имеют единственную предельную точку $\Lambda^*\neq\infty$. Не нарушая общности рассуждений, можно принять, что $\Lambda^*=0$, ибо в противном случае достаточно рассмотреть функцию $f(x)\,e^{-i\Lambda^* x}$, показатели Фурье которой имеют единственную предельную точку в нуле.

Итак, пусть

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\Lambda_k x}, \quad \Lambda_k \to 0, \quad \Lambda_{k+1} < \Lambda_k, \quad \Lambda_{-k} = -\Lambda_k.$$

Положим $a = \varepsilon$, $b = 2\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Мы получим:

$$\rho_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\psi_{a,b}(u)\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\frac{\varepsilon u}{2}\sin\frac{3\varepsilon u}{2}}{u^2}\,du \sim$$

$$\sim \sum_{|\Lambda_k| \leqslant \varepsilon} A_k e^{i\Lambda_k x} + \sum_{\varepsilon < |\Lambda_k| \leqslant 2\varepsilon} \left(2 - \frac{|\Lambda_k|}{\varepsilon}\right) A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Лемма 1.11.1. *При $\varepsilon \to 0$ множество функций $\rho_\varepsilon(x)$ равномерно ограничено, равностепенно непрерывно и равностепенно почти-периодично.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать ограниченность интеграла

$$I = \frac{2}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\sin\frac{\varepsilon u}{2}\sin\frac{3\varepsilon u}{2}\right|}{u^2}\,du.$$

Полагая $\varepsilon u = v$, мы получим:

$$I = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\sin\frac{v}{2}\sin\frac{3v}{2}\right|}{v^2}\,dv = C < \infty.$$

Теорема 1.11.1. *Равномерно для всех действительных x*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon(x) = M\{f(x)\} = A_0.$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля

$$M\{|\rho_\varepsilon(x) - A_0|^2\} = {\sum_{|\Lambda_k| \leqslant \varepsilon}}' |A_k|^2 + \sum_{\varepsilon < |\Lambda_k| \leqslant 2\varepsilon} \left(2 - \frac{|\Lambda_k|}{\varepsilon}\right)^2 |A_k|^2,$$

причем штрих в первой сумме показывает, что пропущен член $|A_0|^2$. При $\varepsilon \to 0$ выражение справа, очевидно, стремится к нулю. Поэтому на основании предыдущей леммы и теоремы 1.5.2

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\rho_\varepsilon(x) - A_0] = 0$$

равномерно для всех действительных x.

2. Положим

$$\sigma_\varepsilon(x) = f(x) - \rho_\varepsilon(x).$$

Из теоремы 1.11.1 следует, что равномерно для всех действительных x

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon(x) = f(x) - A_0.$$

Лемма 1.11.2. *Если существует такая постоянная C, что*

$$\left| \int_0^u f(x+u)\,du \right| < C\,|u|^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha \leqslant 1), \tag{1.11.1}$$

то

$$|\rho_\varepsilon(x)| \leqslant \mathrm{const}\, \varepsilon^\alpha. \tag{1.11.2}$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим:

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin\frac{\varepsilon u}{2} \sin\frac{3\varepsilon u}{2}}{\varepsilon u^2}\,du =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^u f(x+u)\,du \right\} d\left(\frac{\sin\frac{\varepsilon u}{2} \sin\frac{3\varepsilon u}{2}}{\varepsilon u^2} \right).$$

Поэтому из оценки (1.11.1) следует оценка

$$\rho_\varepsilon(x) \leqslant \frac{2}{\pi} C \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{1-\alpha} \left| \left(\frac{\sin\frac{\varepsilon u}{2} \sin\frac{3\varepsilon u}{2}}{\varepsilon u^2} \right)' \right| du.$$

Полагая $\varepsilon u = v$, мы получим:

$$|\rho_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} C\varepsilon^{\alpha-1}\cdot\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} |v|^{1-\alpha} \times$$
$$\times \left| \left(\frac{\sin\frac{v}{2}\sin\frac{3v}{2}}{v^2} \right)' \right| dv = \mathrm{const}\,\varepsilon^\alpha.$$

Замечание 1. Леммы 1.11.1 и 1.11.2, а также теорема 1.11.1 справедливы и в том случае, когда показатели Фурье образуют произвольное множество. Отличие состоит лишь в том, что в этом случае $\sigma_\varepsilon(x)$ не будет, вообще говоря, конечной суммой.

Замечание 2. Можно показать, что и, обратно, из неравенства (1.11.2) следует неравенство (1.11.1). Можно также установить связь между неравенством (1.11.1) и интегралами дробного порядка функции *).

3. Пусть теперь $a = \Lambda_{n+1}$, $b = \Lambda_n$. В этом случае

$$r_n(x) = f_{a,\,b}(x) = \sum_{|\Lambda_k| < \Lambda_n} A_k e^{i\Lambda_k x},$$

$$f(x) - r_n(x) = \sum_{|\Lambda_k| \geqslant \Lambda_n} A_k e^{i\Lambda_k x} = S_n(x).$$

Теорема 1.11.2. *Пусть* $f(x) \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\Lambda_k x}$, ($\Lambda_{k+1} < \Lambda_k$, $\Lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\Lambda_{-k} = -\Lambda_k$) *есть равномерная п.-п. функция. Если выполняется условие* (1.11.1) *и условие*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n^\alpha \ln \frac{\Lambda_n + \Lambda_{n+1}}{\Lambda_n - \Lambda_{n+1}} = 0,$$

то равномерно для всех действительных x

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

---

*) Б. М. Левитан [4].

Доказательство. Нам следует показать, что равномерно для всех действительных x

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Пусть $\varepsilon = \Lambda_n$. Тогда

$$\sigma_\varepsilon(x) = \sum_{\Lambda_n < |\Lambda_k| \leqslant 2\Lambda_n} \left(\frac{|\Lambda_k|}{\Lambda_n} - 1\right) A_k e^{i\Lambda_k x} + \sum_{|\Lambda_k| > 2\Lambda_n} A_k e^{i\Lambda_k x}$$

и, следовательно, если $a = \Lambda_{n+1}$, $b = \Lambda_n$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\varepsilon(x+u)\,\psi_{a,\,b}(u)\,du = 0.$$

С другой стороны,

$$r_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\psi_{a,\,b}(u)\,du.$$

Поэтому в силу леммы 1.11.2 и леммы 1.10.1

$$|r_n(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+u) - \sigma_\varepsilon(x+u)|\,|\psi_{a,\,b}(u)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\ \Lambda_n^\alpha \left(A + B\ln\frac{\Lambda_n + \Lambda_{n+1}}{\Lambda_n - \Lambda_{n+1}}\right),$$

и теорема доказана.

4. В заключение настоящего параграфа докажем следующую интересную теорему.

Теорема 1.11.3. *Пусть* $f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\Lambda_k x}$ — *равномерная п.-п. функция. Если для всех* k

$$|\Lambda_k| < \Lambda < \infty,$$

то существует такая целая аналитическая функция $F(z)$, *что для всех действительных* x

$$F(x) = f(x).$$

Доказательство. Положим $a=\Lambda$, $b=2\Lambda$. Тогда, как легко видеть,

$$f_{a,\,b}(x)=\frac{2}{\pi\Lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\frac{\sin\frac{\Lambda(\xi-x)}{2}\,\sin\frac{3\Lambda(\xi-x)}{2}}{(\xi-x)^2}\,d\xi\sim\sum_k A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Поэтому в силу теоремы единственности

$$f_{a,\,b}(x)=f(x)$$

и, значит,

$$F(z)=\frac{2}{\pi\Lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\frac{\sin\frac{\Lambda}{2}(\xi-z)\sin\frac{3\Lambda(\xi-z)}{2}}{(\xi-z)^2}\,d\xi.$$

§ 12. Существование ограниченного неопределенного интеграла для одного класса равномерных п.-п. функций

Пусть $f(x)\sim\sum\limits_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ — равномерная п.-п. функция. Предположим, что показатели Фурье функции $f(x)$ не сгущаются к нулю, т. е. что существует такое число $\alpha>0$, что для всех n выполняется неравенство $|\Lambda_n|>\alpha$. В этом случае никаких препятствий для формального интегрирования ряда Фурье функции $f(x)$ не существует и поэтому можно ожидать, что неопределенный интеграл функции $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Действительно, имеет место следующая теорема, принадлежащая Фавару.

Теорема 1.12.1. *Если для всех n $|\Lambda_n|>\alpha>0$, то неопределенный интеграл функции $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.*

Доказательство. Положим

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{i\alpha^2}\lambda & 0\leqslant\lambda\leqslant\alpha\\[2mm] \dfrac{1}{i\lambda} & \lambda>\alpha\end{cases}\qquad \varphi(-\lambda)=-\varphi(\lambda).$$

Функция $\varphi(\lambda)$ имеет интегрируемый квадрат в интервале $(-\infty,\infty)$. Вычислим преобразование Фурье функции $\varphi(\lambda)$.

Мы имеем:

$$\psi(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,e^{-i\lambda u}\,d\lambda=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \lambda\sin\lambda u\,d\lambda+\frac{1}{\pi}\int_a^\infty\frac{\sin\lambda u}{\lambda}\,d\lambda.$$

Из этой формулы видно, что $\psi(u)$ — нечетная функция. Покажем, что $\psi(u)$ есть ограниченная функция, непрерывная в интервалах $-\infty<u\leqslant 0$, $0\leqslant u<\infty$, а в точке $u=0$ терпит разрыв первого рода со скачком, равным единице. В самом деле, если $u>0$, то

$$\psi(u)=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \lambda\sin\lambda u\,d\lambda+\frac{1}{\pi}\int_a^\infty\frac{\sin\lambda u}{\lambda}\,d\lambda=$$

$$=-\frac{\cos au}{\pi au}+\frac{\sin au}{\pi a^2u^2}+\int_{au}^\infty\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=$$

$$=-\frac{\cos au}{\pi au}+\frac{\sin au}{\pi a^2u^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda-\frac{1}{\pi}\int_0^{au}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=$$

$$=-\frac{\cos au}{\pi au}+\frac{\sin au}{\pi a^2u^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{au}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda. \qquad (1.12.1)$$

Так как интеграл $\int_0^{au}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda$ ограничен, то ограниченность функции $\psi(u)$ следует непосредственно из формулы (1.12.1). Из этой же формулы следует, что $\psi(u)$ в интервале $0\leqslant u<\infty$ непрерывна и что $\psi(+0)=\frac{1}{2}$. Поэтому $\psi(u)$, будучи нечетной функцией, терпит в нуле разрыв первого рода со скачком, равным единице. Покажем, что для больших u $\psi(u)=O\left(\frac{1}{u^2}\right)$ и, значит, функция $\psi(u)\in L(-\infty,\infty)$. Интегрируя дважды по частям, мы получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^\infty\frac{\sin\lambda u}{\lambda}\,d\lambda=\frac{\cos au}{\pi au}+\frac{\sin au}{\pi a^2u^2}-\frac{2}{\pi u^2}\int_a^\infty\frac{\sin\lambda u}{\lambda}\,d\lambda.$$

Поэтому

$$\psi(u)=\frac{2\sin au}{\pi a^2u^2}-\frac{2}{\pi u^2}\int_a^\infty \frac{\sin\lambda u}{\lambda}\,d\lambda$$

и, значит, для больших u $\psi(u)=O\left(\frac{1}{u^2}\right)$. В силу формулы обращения Фурье *)

$$\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\,e^{i\lambda u}\,du. \tag{1.12.2}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\psi(u)\,du. \tag{1.12.3}$$

Из оценки

$$\sup_x|F(x+\tau)-F(x)|\leqslant\sup_x|f(x+\tau)-f(x)|\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(u)|\,du$$

следует непрерывность и почти-периодичность функции $F(x)$. Вычислим ряд Фурье функции $F(x)$. В силу формулы обращения (1.12.2) мы имеем **):

$$M_x\{F(x)\,e^{-i\lambda x}\}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\,M_x\{f(x+u)\,e^{-i\lambda x}\}\,du=$$
$$=M_x\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\,e^{i\lambda u}\,du=A(\lambda)\,\varphi(\lambda).$$

Так как для $|\lambda|\leqslant\alpha$ $A(\lambda)=0$, то из последней формулы следует

$$F(x)\sim\sum_n\frac{A_n}{i\Lambda_n}e^{i\Lambda_n x}.$$

---

*) См. Титчмарш, цит. соч., стр. 111, теорема 58.

**) Изменение порядка интеграла и среднего можно обосновать так же, как и при доказательстве леммы 1.10.2.

Покажем теперь, что $F(x)$ есть неопределенный интеграл для $f(x)$.

Обозначим через $P_{B}^{(m)}(x, f)$ суммы Бохнера-Фейера для $f(x)$, а через $P_{B}^{(m)}(x; F)$ — для $F(x)$. Если m и B в первой и второй суммах совпадают, то, как легко видеть, $\frac{d}{dx} P_{B}^{(m)}(x; F) = P_{B}^{(m)}(x; f)$. Следовательно,

$$P_{B}^{(m)}(x; F) - P_{B}^{(m)}(0; F) = \int_0^x P_{B}^{(m)}(x; f)\,dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, мы получим:

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(x)\,dx,$$

т. е. $F(x)$ есть неопределенный интеграл для $f(x)$, и теорема доказана.

§ 13. Доказательство теоремы аппроксимации по методу Н. Н. Боголюбова *)

Н. Н. Боголюбов предложил доказательство теоремы аппроксимации для равномерных п.-п. функций, которое не опирается не только на равенство Парсеваля, но и вообще почти ни на какие свойства равномерных п.-п. функций. Так как, с другой стороны, все основные свойства равномерных п.-п. функций просто следуют из теоремы аппроксимации, то Н. Н. Боголюбов дал фактически новое построение теории равномерных п.-п. функций.

1. Доказательству теоремы аппроксимации удобно предпослать ряд лемм.

Лемма 1.13.1. *Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция. Каково бы ни было положительное число ε, можно указать такие положительные числа $l = l(\varepsilon)$ и $\delta = \delta(\varepsilon)$, что в каждом интервале действительной оси длины l $(\alpha < x < \alpha + l)$ можно указать подинтервал длины δ, все точки которого суть ε-почти-периоды функции $f(x)$.*

*) Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов [1].

Доказательство. Обозначим через $L = L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ положительное число, обладающее тем свойством, что в каждом интервале действительной оси длины L имеется по крайней мере один $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-период функции $f(x)$. Далее, обозначим через $\delta_1 = \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ положительное число, обладающее тем свойством, что если $|h| < \delta_1$, то

$$\sup_x |f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Число δ_1 найдется в силу теоремы 1.1.2. Пусть τ есть $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-период функции $f(x)$, заключенный в интервале $(\alpha + \delta_1, \alpha + L + \delta_1)$. Если $|h| < \delta_1$, то число $\tau + h$ лежит в интервале $(\alpha, \alpha + L)$ и есть ε-почти-период функции $f(x)$. Последнее следует из оценки

$$|f(x+\tau+h) - f(x)| \leqslant |f(x+h+\tau) - f(x+h)| + \\ + |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Итак, числа $l = L + 2\delta_1$ и $\delta = 2\delta_1$ удовлетворяют условиям леммы.

2. Пусть числа l и δ выбраны согласно предыдущей лемме. Рассмотрим интервалы $I_k = \{kl, (k+1)l\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В каждом интервале I_k можно указать подинтервал $\Delta_k = \left(\tau_k - \frac{\delta}{2}, \tau_k + \frac{\delta}{2}\right)$ длины δ, все точки которого суть ε-почти-периоды функции $f(x)$. Построим функцию $K(s)$, положив $K(s) = \frac{l}{\delta}$, если $s \in \Delta_k$ и $K(s) = 0$, если s не принадлежит ни к одному из интервалов Δ_k. Таким образом, если для некоторого s $K(s) \neq 0$, то число s есть ε-почти-период $f(x)$. Обозначим через n произвольное натуральное число. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2nl}\int_{-nl}^{nl} K(s)\,ds = \frac{1}{2nl}\sum_{k=-n}^{k=n} \frac{l}{\delta}\int_{\Delta_k} ds = \frac{1}{2nl}\frac{l}{\delta}\cdot 2n\delta = 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} K(s)\,K(t)\,ds\,dt = \left\{\frac{1}{2nl}\int_{-nl}^{nl} K(s)\,ds\right\}^2 = 1. \quad (1.13.1)$$

Лемма 1.13.2. *Пусть*

$$f_n(x) = \frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} f(x+s+t)\,K(s)\,K(t)\,ds\,dt. \quad (1.13.2)$$

Для всех действительных x справедливо неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon. \quad (1.13.3)$$

Доказательство. Помножим обе части равенства (1.13.1) на $f(x)$ и результат вычтем из равенства (1.13.2). Мы получим:

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} [f(x+s+t) - f(x)]\,K(s)\,K(t)\,ds\,dt. \quad (1.13.4)$$

Если $K(s)\,K(t) \neq 0$, то $K(s) \neq 0$ и $K(t) \neq 0$. Поэтому числа s и t суть ε-почти-периоды $f(x)$, а значит, число $s+t$ есть 2ε-почти-период $f(x)$, т. е. справедливо неравенство

$$\sup_x |f(x+s+t) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Из равенства (1.13.4) следует (учитывая равенство (1.13.1)) оценка

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} |f(x+s+t) - f(x)|\,K(s)\,K(t)\,ds\,dt < 2\varepsilon\frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} K(s)\,K(t)\,ds\,dt = 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

3. Определим периодические функции $f_T(x)$ и $K_T(s)$ с одним и тем же периодом $2T=6nl$, положив

$$f_T(x)=f(x),\ \text{если}\ |x|<3nl,\ f_T(x+2T)=f_T(x),$$
$$K_T(s)=K(s),\ \text{если}\ |s|<nl,\ K_T(s)=0,\ \text{если}\ nl<|s|<3nl,$$
$$K_T(s+2T)=K_T(s).$$

Функции $f_T(x)$ и $K_T(s)$ разрывны и имеют изолированные точки разрыва первого рода. В дальнейшем нам понадобятся ряды Фурье функций $f_T(x)$ и $K_T(s)$. Пусть $(T=3nl)$

$$f_T(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k^{(n)}e^{i\nu_k^{(n)}x},$$
$$K_T(s)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k^{(n)}e^{i\nu_k^{(n)}s},$$

причем

$$A_k^{(n)}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{-i\nu_k^{(n)}x}\,dx,$$
$$\nu_k^{(n)}=\frac{2k\pi}{6nl}=\frac{k\pi}{3nl},\qquad (1.13.5)$$

$$a_k^{(n)}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_T(s)\,e^{-i\nu_k^{(n)}s}\,ds=\frac{1}{6nl}\int_{-nl}^{nl}K(s)\,e^{-i\nu_k^{(n)}s}\,ds=$$
$$=\frac{1}{6nl}\sum_{j=-n}^{n}\frac{l}{\delta}\int_{\Delta_j}e^{-i\nu_k^{(n)}s}\,ds=$$
$$=\frac{1}{6nl}\sum_{j=-n}^{n}\frac{e^{-i\nu_k^{(n)}\left(\tau_j+\frac{\delta}{2}\right)}-e^{-i\nu_k^{(n)}\left(\tau_j-\frac{\delta}{2}\right)}}{-i\nu_k^{(n)}}=$$
$$=\frac{1}{3nl}\sum_{j=-n}^{n}\frac{e^{-i\nu_k^{(n)}\tau_j}\sin\frac{\delta}{2}\nu_k^{(n)}}{\nu_k^{(n)}}.\qquad (1.13.6)$$

Лемма 1.13.3. *Справедливы оценки*

$$|A_k^{(n)}| \leqslant \sup_x |f(x)| = M, \tag{1.13.7}$$

$$|a_k^{(n)}| \leqslant \frac{2}{3\delta |\nu_k^{(n)}|}, \tag{1.13.8}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |A_k^{(n)}|^2 \leqslant M^2, \tag{1.13.9}$$

а также равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 = \frac{l}{3\delta}. \tag{1.13.10}$$

Доказательство. Оценки (1.13.7) и (1.13.8) следуют непосредственно из формул (1.13.5) и (1.13.6). Чтобы получить оценку (1.13.9), применим к периодической функции $f_T(x)$ равенство Парсеваля. Мы получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k^{(n)}|^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx \leqslant M^2.$$

Наконец, чтобы получить равенство (1.13.10), применим к периодической функции $K_T(s)$ равенство Парсеваля. Получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 = \frac{1}{6nl} \int_{-3nl}^{3nl} K_T^2(s)\, ds = \frac{1}{6nl} \int_{-nl}^{nl} K^2(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{6nl} \cdot \frac{l^2}{\delta^2} \sum_{j=-n}^{n} \int_{\Delta_j} ds = \frac{l}{3\delta}.$$

4. Рассмотрим функцию

$$f_{n,T}(x) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} f_T(x+s+t)\, K_T(s)\, K_T(t)\, ds\, dt.$$

Легко видеть, что функция $f_{n,T}(x)$ непрерывна и имеет период $2T$.

Лемма 1.13.4. *Пусть $f_n(x)$ имеет то же значение, что и в лемме 2. Для $|x| < nl$ справедливо разложение*

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k^{(n)} \{3a_{-k}^{(n)}\}^2 e^{i\nu_k^{(n)}x}, \qquad (1.13.11)$$

причем ряд сходится абсолютно.

Доказательство. Так как для $nl < |s| < 3nl$ $K(s) = 0$, то

$$f_{n,T}(x) = \frac{1}{6nl} \int_{-nl}^{nl} \int_{-nl}^{nl} f_T(x+s+t) K(s) K(t)\, ds\, dt.$$

Если $|x| < nl$, $|s| < nl$, $|t| < nl$, то $|x+s+t| < 3nl$ и поэтому в силу определения функции $f_T(x)$ (см. п. 3) $f_T(x+s+t) = f(x+s+t)$. Следовательно, для $|x| < nl$

$$f_{n,T}(x) = \frac{1}{(6nl)^2} \int_{-nl}^{nl} \int_{-nl}^{nl} f(x+s+t) K(s) K(t)\, ds\, dt = \frac{1}{9} f_n(x),$$

т. е.

$$f_n(x) = 9 f_{n,T}(x). \qquad (1.13.12)$$

Вычислим теперь ряд Фурье функции $f_{n,T}(x)$. Имеем:

$$b_k^{(n)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_{n,T}(x)\, e^{-i\nu_k^{(n)}x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2T)^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} K_T(s) K_T(t)\, ds\, dt\, \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_T(x+s+t)\, e^{-i\nu_k^{(n)}x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2T)^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} K_T(s) K_T(t)\, e^{i\nu_k^{(n)}s}\, e^{i\nu_k^{(n)}t}\, ds\, dt\, \frac{1}{2T} \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} f_T(x)\, e^{-i\nu_k^{(n)}x}\, dx =$$

$$= A_k^{(n)} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} K_T(s)\, e^{i\nu_k^{(n)}s}\, ds \right)^2 = A_k^{(n)} \{a_{-k}^{(n)}\}^2.$$

Из оценки (1.13.8) и равенства (1.13.10) следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |b_k^{(n)}| < \infty.$$

Так как функция $f_{n,T}(x)$ непрерывна, то для всех действительных x справедливо разложение

$$f_{n,T}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(n)} \{a_{-k}^{(n)}\}^2 e^{i\nu_k^{(n)}x}.$$

Отсюда и из равенства (1.13.12) следует, что для $|x| < nl$ справедливо равенство (1.13.11). Лемма доказана.

Лемма 1.13.5. *Каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое положительное число $\Lambda = \Lambda(\varepsilon)$, зависящее от ε и не зависящее от n, что*

$$\sum_{|\nu_k^{(n)}| \geqslant \Lambda} |A_k^{(n)}| \, |3a_{-k}^{(n)}|^2 < \varepsilon. \tag{1.13.13}$$

Доказательство. Обозначим через λ произвольное положительное число.

Из оценки (1.13.8) следует, что для $|\nu_k^{(n)}| > \lambda$ $|\dot{a}_{-k}^{(n)}| < \frac{2}{3\delta\lambda}$. Поэтому из оценки (1.13.9), равенства (1.13.10) и неравенства Коши-Буняковского следует оценка

$$\sum_{|\nu_k^{(n)}|>\lambda} |A_k^{(n)}| \, |3a_{-k}^{(n)}|^2 = 9 \sum_{|\nu_k^{(n)}|>\lambda} |A_k^{(n)}| \, |a_{-k}^{(n)}| \, |a_{-k}^{(n)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6}{\delta\lambda} \sum_{|\nu_k^{(n)}|>\lambda} |A_k^{(n} \, | \, |a_{-k}^{(n)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6}{\delta\lambda} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k^{(n)}|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{-k}^{(n)}|^2 \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6}{\delta\lambda} M \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{3\delta}} = \frac{2M\sqrt{3l}}{\delta^{3/2}\lambda}.$$

Так как числа l и δ зависят только от ε и не зависят от n, то лемма следует непосредственно из последней оценки.

Из оценки (1.13.13) и равенства (1.13.11) следует, что для $|x| < nl$ справедлива оценка

$$\Big| f_n(x) - \sum_{|\nu_k^{(n)}|<\Lambda} A_k^{(n)} \{3a_{-k}^{(n)}\}^2 e^{i\nu_k^{(n)}x} \Big| < \varepsilon, \quad (1.13.14)$$

причем число Λ от n не зависит.

Зафиксируем n и рассмотрим те k, для которых $|\nu_k^{(n)}| \leqslant \Lambda$. Соответствующие $A_k^{(n)}$ расположим в порядке убывания модуля. Мы получим числа $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots, U_{r_n}^{(n)}$, причем $|U_q^{(n)}| \geqslant |U_{q+1}^{(n)}|$ $(q=1, 2, \ldots, r_n)$.

Обозначим показатели Фурье функции $f_T(x)$ (числа $\nu_k^{(n)}$), соответствующие числам $U_q^{(n)}$, через $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_{r_n}$. Наконец, соответствующие числам $U_q^{(n)}$ числа $\{3a_{-k}^{(n)}\}$ обозначим через $\alpha_q^{(n)}$. В этих обозначениях неравенство (1.13.14) перепишется в виде

$$\Big| f_n(x) - \sum_{q=1}^{r_n} U_q^{(n)} \{\alpha_q^{(n)}\}^2 e^{i\mu_q^{(n)}x} \Big| < \varepsilon. \quad (1.13.15)$$

Лемма 1.13.6. *Каково бы ни было положительное число* ε, *можно указать такое целое положительное число* $r_0 = r_0(\varepsilon)$, *зависящее от* ε *и не зависящее от* n, *что*

$$\sum_{q=r_0}^{r_n} \big| U_q^{(n)} \{\alpha_q^{(n)}\}^2 \big| < \varepsilon. \quad (1.13.16)$$

Доказательство. Обозначим через r произвольное натуральное число, не превосходящее r_n. Из неравенства (1.13.9) следует

$$\sum_{q=1}^{r} |U_q^{(n)}|^2 \leqslant M^2.$$

Так как числа $|U_q^{(n)}|$ убывают, то

$$M^2 \geqslant \sum_{q=1}^{r} |U_q^{(n)}|^2 \geqslant r\,|U_r^{(n)}|^2.$$

Поэтому $\left|U_r^{(n)}\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{r}}$. Из этой оценки и равенства (1.13.10) следует оценка

$$\sum_{q=r}^{rn} \left| U_q^{(n)} \left\{\alpha_q^{(n)}\right\}^2 \right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{r}} \sum_{q=r}^{rn} \left|\alpha_q^{(n)}\right|^2 \leqslant \frac{M}{\sqrt{r}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\left\{3a_{-k}^{(n)}\right\}\right|^2 = \\ = \frac{3Ml}{\delta\sqrt{r}}.$$

Поэтому, если $r_0 > \frac{9M^2l^2}{\varepsilon^2\delta^2}$, то неравенство (1.13.16) выполняется. Так как числа l и δ от n не зависят, то лемма доказана.

Из оценок (1.13.15) и (1.13.16) следует, что для $|x| < nl$

$$\left| f_n(x) - \sum_{q=1}^{r_0} U_q^{(n)} \left\{\alpha_q^{(n)}\right\}^2 e^{i\mu_q^{(n)}x} \right| < 2\varepsilon. \tag{1.13.17}$$

Положим $U_q^{(n)} \left\{\alpha_q^{(n)}\right\}^2 = B_q^{(n)}$. Из неравенств (1.13.3) и (1.13.17) следует, что для $|x| < nl$ справедлива оценка

$$\left| f(x) - \sum_{q=1}^{r_0} B_q^{(n)} e^{i\mu_q^{(n)}x} \right| < 4\varepsilon, \tag{1.13.18}$$

причем число r_0 не зависит от n.

5. Из неравенства (1.13.18) легко следует теорема аппроксимации для равномерных п.-п. функций. Покажем, что справедлива оценка

$$\left|B_q^{(n)}\right| \leqslant M. \tag{1.13.19}$$

В самом деле, в силу оценки (1.13.7) $\left|U_q^{(n)}\right| \leqslant M$. Далее, имеем:

$$\left|a_k^{(n)}\right| = \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} K_T(s)\, e^{-i\gamma_k^{(n)}s}\, ds \right| \leqslant \frac{1}{6nl} \int_{-nl}^{nl} K(s)\, ds = \\ = \frac{1}{6nl} \sum_{j=-n}^{n} \frac{l}{\delta} \int_{\Delta_j} ds = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $\left|3a_k^{(n)}\right| \leqslant 1$, и мы получаем оценку (1.13.19).

В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса можно указать последовательность неограниченно возрастающих целых чисел $n_1, n_2, \ldots$, так что существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} B_q^{(n_k)} = B_q; \quad \lim_{k\to\infty} \mu_q^{(n_k)} = \mu_q \quad (q = 1, 2, \ldots, r_0).$$

Рассматривая неравенство (1.13.18) при $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и полагая $k \to \infty$, мы получим неравенство

$$\sup_x \Big| f(x) - \sum_{q=1}^{r_0} B_q e^{i\mu_q x} \Big| < 4\varepsilon$$

и так как число ε было выбрано произвольно, то теорема аппроксимации доказана.

6. Приведенное нами сейчас доказательство теоремы аппроксимации опирается, по существу, только на определение равномерных п.-п. функций. Более того, полученные в предыдущих параграфах наиболее существенные свойства равномерных п.-п. функций, а именно, теорема об инвариантности относительно сложения и теорема о среднем значении легко следуют из теоремы аппроксимации. Покажем это.

Рассмотрим сперва теорему об инвариантности относительно сложения. Напомним, что конечная тригонометрическая сумма есть п.-п. функция.

Возьмем теперь две равномерные п.-п. функции $f(x)$ и $g(x)$. Обозначим через ε произвольное положительное число и через $S_f(x)$ конечную тригонометрическую сумму, удовлетворяющую неравенству

$$|f(x) - S_f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а через $S_g(x)$ — конечную тригонометрическую сумму, удовлетворяющую неравенству

$$|g(x) - S_g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Легко видеть, что конечная тригонометрическая сумма $S(x) = S_f(x) + S_g(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x) + g(x) - S(x)| < \varepsilon. \tag{1.13.20}$$

Так как число ε выбрано произвольно и $S(x)$ — равномерная п.-п. функция, то из теоремы 1.1.5 следует, что $f(x)+g(x)$ есть также равномерная п.-п. функция.

7. Теперь покажем, что из теоремы аппроксимации следует теорема о среднем значении и притом в усиленной форме (теорема 1.3.2). Вначале докажем теорему о среднем значении для конечной тригонометрической суммы. Пусть

$$S_n(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\lambda_k x},$$

где λ_k $(k\geqslant 1)$ — действительные числа, не равные нулю. Обозначим через a произвольное действительное число. Мы имеем:

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} S_n(x)\,dx=A_0+\sum_{k=1}^{n} A_k\frac{e^{i\lambda_k(a+T)}-e^{i\lambda_k a}}{i\lambda_k T}.$$

Поэтому имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} S_n(x)\,dx-A_0\right|\leqslant\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{n}\frac{|A_k|}{|\lambda_k|}.$$

Из этого неравенства следует, что равномерно по a существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} S_n(x)\,dx=A_0,$$

. е., каково бы ни было положительное число ε, можно указать положительное число $T_0=T_0(\varepsilon)$, не зависящее от a, такое, что если T_1, $T_2>T_0$, то

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} S_n(x)\,dx-\frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} S_n(x)\,dx\right|<\varepsilon. \qquad (1.13.21)$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная равномерная п.-п. функция и ε — сколь угодно малое положительное число.

В силу теоремы аппроксимации можно указать конечную тригонометрическую сумму $S_n(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$\sup_x |f(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Подберем теперь число $T_0(\varepsilon)$ так, чтобы для T_1, $T_2 > T_0$ выполнялось неравенство (1.13.21). Тогда

$$\left| \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} f(x)\,dx - \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} f(x)\,dx \right| \leqslant \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} |f(x) - S_n(x)|\,dx + \\ + \left| \frac{1}{T_2} \int_a^{a+T_2} S_n(x)\,dx - \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} S_n(x)\,dx \right| + \\ + \frac{1}{T_1} \int_a^{a+T_1} |f(x) - S_n(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Так как число ε было выбрано произвольно, то из признака Коши следует, что предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

существует равномерно по a, что и требовалось доказать.

ГЛАВА ВТОРАЯ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ-ПЕРИОДОВ

§ 1. Связь показателей Фурье с почти-периодами

1. Как известно, период периодической функции однозначно определяет показатели Фурье этой функции. В самом деле, если $p > 0$ — период периодической функции $f(x)$, то ее показатели Фурье кратны числу $\frac{2\pi}{p}$.

Для равномерных п.-п. функций также существует тесная связь между почти-периодами и показателями Фурье функции, но, разумеется, не столь простая, как для периодических функций. Эта связь устанавливается с помощью следующих двух теорем *).

Теорема 2.1.1. *Пусть* $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ — *равномерная п.-п. функция. Каковы бы ни были целое положительное число N и положительное число δ $(< \pi)$, существует такое положительное число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, N)$, что все ε-почти-периоды функции $f(x)$ удовлетворяют системе неравенств* **).

$$|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi}, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.1.1}$$

Доказательство. Пусть τ есть ε-почти-период $f(x)$. Тогда

$$|M\{[f(x+\tau) - f(x)]\, e^{-i\Lambda_k x}\}| \leqslant M\{|f(x+\tau) - f(x)|\} < \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

---

*) H. Bohr [2].

**) Неравенства (2.1.1) означают, что найдутся целые числа n_k, для которых выполняются обычные неравенства

$$|\Lambda_k \tau - 2\pi n_k| < \delta \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

С другой стороны,

$$M\left\{[f(x+\tau)-f(x)]\,e^{-i\Lambda_k x}\right\}=A_k\left(e^{i\Lambda_k\tau}-1\right). \qquad (2.1.3)$$

Пусть $a=\min\limits_{k=1,\,2,\,\ldots,\,N}|A_k|$. Из (2.1.2) и (2.1.3) следует

$$|e^{i\Lambda_k\tau}-1|<\frac{\varepsilon}{a} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

При достаточно малом ε из последних неравенств следуют неравенства (2.1.1).

Теорема 2.1.2 (обратная теореме 2.1.1). *Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция с рядом Фурье $\sum\limits_k A_k e^{i\Lambda_k x}$. Для каждого положительного числа ε можно указать целое положительное число N и положительное число $\delta\ (<\pi)$ так, что каждое действительное число τ, удовлетворяющее системе неравенств* (2.1.1), *есть ε-почти-период для $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ выбрано произвольно. Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$P(x)=\sum_{k=1}^{N}B_k e^{i\Lambda_k x},$$

показатели Фурье которого взяты из показателей Фурье $f(x)$ и который удовлетворяет неравенству

$$\sup|f(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Из неравенства

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant|f(x+\tau)-P(x+\tau)|+$$
$$+|P(x+\tau)-P(x)|+|P(x)-f(x)|$$

следует, что каждый $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период $P(x)$ есть ε-почти-период $f(x)$. С другой стороны, если число τ удовлетворяет системе неравенств (2.1.1), то

$$|e^{i\Lambda_k\tau}-1|=\sqrt{(1-\cos\Lambda_k\tau)^2+\sin^2\Lambda_k\tau}=2\left|\sin\frac{\Lambda_k\tau}{2}\right|<\delta$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Поэтому

$$|P(x+\tau)-P(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |B_k| |e^{i\Lambda_k \tau}-1| < \delta \sum_{k=1}^{N} |B_k| < \frac{\varepsilon}{3},$$

если

$$\delta < \varepsilon \Big(3 \sum_{k=1}^{N} |B_k|\Big)^{-1}.$$

2. Интересно отметить, что в то время как теорема 2.1.1 совершенно элементарна, для доказательства обратной ей теоремы 2.1.2 нам пришлось привлечь основную теорему теории равномерных п.-п. функций. Это не случайно. В дальнейшем мы увидим, что теорема 2.1.2 эквивалентна теореме аппроксимации. Более точно, если предположить, что почти-периоды равномерной п.-п. функции $f(x)$ для каждого $\varepsilon > 0$ суть решения системы неравенств вида (2.1.1) (следовательно, числа Λ_k заранее заданы), то теорема аппроксимации доказывается элементарно, без привлечения теоремы единственности.

§ 2. Теорема Кронекера

В своих исследованиях Г. Бор *) установил глубокую связь между равномерными п.-п. функциями и периодическими функциями от многих переменных. Следует отметить, что задолго до работ Бора в одном важном частном случае эта связь была установлена Болем **). Для доказательства этого результата Бора нам понадобится одна важная теорема Кронекера о совместных решениях системы неравенств.

Теорема Кронекера. *Пусть* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — *произвольные действительные числа. Для того, чтобы система неравенств*

$$|\Lambda_k t - \theta_k| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.2.1)$$

имела совместные действительные решения при любом сколь угодно малом положительном числе δ, *необходимо и достаточно, чтобы равенство* $l_1\Lambda_1 + l_2\Lambda_2 + \ldots$

---

*) H. Bohr [2].
**) P. Bohl [1], [2].

$\ldots + l_n\Lambda_n = 0$, *где* l_1, l_2, $\ldots$, l_n — *какие-либо целые числа, влекло за собой равенство* $l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + \ldots + l_n\theta_n \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Доказательство *). 1) Докажем необходимость. Предположим, что для любого $\delta > 0$ можно указать такое число t, что неравенства (2.2.1) выполняются. Эти неравенства можно переписать в виде

$$-\delta_k < \Lambda_k t - \theta_k - 2\pi n_k < \delta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем $0 < \delta_k < \delta$ и n_k — целые числа. Умножим каждое из этих неравенств последовательно на целые числа l_1, l_2, $\ldots$, l_n и сложим. Мы получим:

$$-\sum_{k=1}^{n} |l_k|\delta_k < t\sum_{k=1}^{n} l_k\Lambda_k - \sum_{k=1}^{n} l_k\theta_k - 2\pi\sum_{k=1}^{n} n_k l_k < \sum_{k=1}^{n} |l_k|\delta_k.$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{n} l_k\Lambda_k = 0$, то в силу произвольности числа δ из последнего неравенства следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} l_k\theta_k$ равно целому кратному числа 2π, что и требовалось доказать.

2) Докажем достаточность. Теорема будет доказана, если мы покажем, что верхняя граница абсолютного значения функции

$$f(t) = 1 + e^{i(\Lambda_1 t - \theta_1)} + \ldots + e^{i(\Lambda_n t - \theta_n)}$$

равна $n+1$, т. е. значению функции от n независимых комплексных переменных

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

в точке $(1, 1, \ldots, 1)$. Обозначим через p произвольное целое положительное число.

Положим

$$\{f(t)\}^p = \sum_{\nu} \alpha_\nu e^{i\beta_\nu t}, \qquad (2.2.2)$$

$$\{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}^p = \sum a_{n_1, n_2, \ldots, n_n} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_n^{n_n}. \qquad (2.2.3)$$

---

*) H. Bohr [7].

Чтобы из разложения (2.2.3) получить разложение (2.2.2), следует в (2.2.3) положить $x_k = e^{i(\Lambda_k t - \theta_k)}$ и затем сделать приведение подобных членов *).

Если

$$k_1'\Lambda_1 + k_2'\Lambda_2 + \ldots + k_n'\Lambda_n = k_1''\Lambda_1 + k_2''\Lambda_2 + \ldots + k_n''\Lambda_n,$$

то по условию теоремы

$$k_1'\theta_1 + k_2'\theta_2 + \ldots + k_n'\theta_n \equiv k_1''\theta_1 + k_2''\theta_2 + \ldots + k_n''\theta_n \pmod{2\pi}.$$

Поэтому коэффициенты подобных членов имеют одинаковые аргументы. Так как модуль суммы комплексных чисел с одинаковыми аргументами равен сумме модулей этих чисел, то

$$\sum_{\nu} |\alpha_\nu| = \sum a_{n_1, n_2, \ldots, n_n} = \{F(1, 1, \ldots, 1)\}^p = (n+1)^p. \quad (2.2.4)$$

Будем теперь вести рассуждение от противного. Пусть

$$\sup_t |f(t)| = k < n+1.$$

Тогда

$$|\alpha_\nu| = |M_t\{[f(t)]^p e^{-i\beta_\nu t}\}| \leqslant k^p,$$

и так как число членов в (2.2.3) меньше, чем $(p+1)^n$ (в чем легко убедиться, применив индукцию по p), то

$$\sum_{\nu} |\alpha_\nu| < (p+1)^n \cdot k^p.$$

Но при достаточно большом p последнее неравенство противоречит равенству (2.2.4), ибо при $p \to \infty$

$$\frac{(p+1)^n \cdot k^p}{(n+1)^p} = (p+1)^n \left(\frac{k}{n+1}\right)^p \to 0.$$

Теорема доказана.

Так как $f(t)$ — п.-п. функция, то множество решений системы неравенств (2.2.1) при каждом $\delta\,(<\pi)$ относительно плотно.

---

*) Подобными членами мы называем члены с одинаковыми показателями β_ν.

В заключение настоящего параграфа отметим один важный частный случай теоремы Кронекера. Если числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ линейно независимы, т. е. уравнение $l_1\Lambda_1 + l_2\Lambda_2 + \ldots + l_n\Lambda_n$ с целыми $l_1, l_2, \ldots, l_n$ возможно лишь в том случае, когда $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 0$, то условия теоремы выполняются при любых $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ и, значит, система неравенств (2.2.1) разрешима при любых $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ и любом $\delta > 0$.

§ 3. Теорема Кронекера-Вейля

1. В 1916 г. Г. Вейль *) существенно улучшил теорему Кронекера в случае линейно независимых **) $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$.

Доказательство Вейля основано на следующей простой лемме.

Лемма 2.3.1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция с периодом 2π по каждой переменной. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — действительные линейно независимые числа и $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — произвольные действительные числа. Положим*

$$\varphi(t) = f(\gamma_1 t - \theta_1, \gamma_2 t - \theta_2, \ldots, \gamma_n t - \theta_n).$$

Тогда равномерно по γ

$$\lim_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta \varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Доказательство. Предположим вначале, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — конечная тригонометрическая сумма

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{k_1, \ldots, k_n} e^{i(k_1x_1 + \cdots + k_nx_n)}.$$

В этом случае

$$\varphi(t) = \sum a_{k_1, \ldots, k_n} e^{i(k_1\gamma_1 + \ldots + k_n\gamma_n)t} e^{-i(k_1\theta_1 + \ldots + k_n\theta_n)}.$$

---

*) H. Weyl [4].

**) В статье Г. Вейля разбирается также и общий случай, однако мы ограничимся здесь случаем линейной независимости.

Так как по предположению числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ линейно независимы, то равенство $k_1\gamma_1 + \ldots + k_n\gamma_n = 0$ возможно лишь в том случае, когда $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Поэтому равномерно по γ

$$\lim_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma} \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(t)\,dt = a_{0,0,\ldots,0} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1, \ldots, dx_n.$$

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная непрерывная периодическая функция.

Как известно, каково бы ни было положительное число ε, можно указать конечную тригонометрическую сумму $f_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что равномерно во всем пространстве выполняется неравенство

$$-\varepsilon < f(x_1, \ldots, x_n) - f_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon. \qquad (2.3.1)$$

Из этого неравенства следует

$$-\varepsilon < \varphi(t) - \varphi_\varepsilon(t) < \varepsilon,$$

где

$$\varphi_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(\gamma_1 t - \theta_1, \ldots, \gamma_n t - \theta_n).$$

Поэтому

$$-\varepsilon < \frac{1}{\delta-\gamma} \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(t)\,dt - \frac{1}{\delta-\gamma} \int_{\gamma}^{\delta} \varphi_\varepsilon(t)\,dt < \varepsilon. \qquad (2.3.2)$$

В силу предыдущего при фиксированном ε можно взять $(\delta-\gamma)$ столь большим, что (равномерно по γ) выполняется неравенство

$$-\varepsilon < \frac{1}{\delta-\gamma} \int_{\gamma}^{\delta} \varphi_\varepsilon(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon.$$

С другой стороны, из неравенства (2.3.1) следует

$$-\varepsilon < \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n -$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} f_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n < \varepsilon.$$

Поэтому при достаточно большом $(\delta-\gamma)$ выполняется неравенство

$$-2\varepsilon < \frac{1}{\delta-\gamma}\int\limits_\gamma^{2\pi} \varphi_\varepsilon(t)\,dt -$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n < 2\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (2.3.2) следует неравенство

$$\left|\frac{1}{(\delta-\gamma)}\int\limits_\gamma^{\delta} \varphi(t)\,dt -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1, \ldots, dx_n\right| < 3\varepsilon,$$

и так как число ε произвольно, то лемма доказана.

2. Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_n)$ — разрывная периодическая с периодом 2π по каждой переменной функция, обладающая тем свойством, что, каково бы ни было положительное число ε, можно указать две непрерывные периодические функции (с периодом 2π по каждой переменной) — $f_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ и $f^{(\varepsilon)}(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполняются следующие два условия *):

$$1)\quad f_\varepsilon \leqslant f \leqslant f^{(\varepsilon)}$$

---

*) Эти условия совпадают с условиями интегрируемости по Риману.

и

$$2)\quad \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}(f^{(\varepsilon)}-f_\varepsilon)\,dx_1\ldots dx_n<\varepsilon.$$

Пусть $\varphi_\varepsilon(t)$ и $\varphi^{(\varepsilon)}(t)$ определяются по f_ε и $f^{(\varepsilon)}$ так же, как $\varphi(t)$ по f. При фиксированном $\varepsilon>0$ подберем столь большое $\alpha=\alpha(\varepsilon)$, чтобы равномерно по γ выполнялись неравенства ($\delta=\alpha+\gamma$)

$$\left|\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta \varphi_\varepsilon(t)\,dt-\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f_\varepsilon(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta \varphi^{(\varepsilon)}(t)\,dt-\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f^{(\varepsilon)}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\right|<\varepsilon.$$

Так как $\varphi_\varepsilon(t)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi^{(\varepsilon)}(t)$, то из двух последних неравенств и условия 2) следует (равномерно по γ)

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n-2\varepsilon<$$

$$<\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta\varphi(t)\,dt<$$

$$<\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n+2\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то из последних неравенств следует, что равномерно по γ

$$\lim_{(\delta-\gamma)\to\infty}\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta\varphi(t)\,dt=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

3. Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — произвольная точка n-мерного пространства и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — произвольные положительные числа. Обозначим через $f(x_1, \ldots, x_n)$ характеристическую функцию параллелепипеда E_n, определяемого неравенствами $\theta_k-\delta_k<x_k<\theta_k+\delta_k$. Продолжим функцию f на все пространство, считая ее периодической с периодом 2π по каждой переменной. Легко видеть, что функция f удовлетворяет двум условиям предыдущего пункта. Поэтому равномерно по γ

$$\lim_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma} \int_{\gamma}^{\delta} f(\gamma_1 t-\theta_1, \ldots, \gamma_n t-\theta_n)\, dt = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \cdot \delta_1 \ldots \delta_n. \quad (2.3.3)$$

Равенство (2.3.3) называется теоремой Кронекера-Вейля и содержит в себе, в частности, теорему Кронекера. В самом деле, предположим, что существует последовательность интервалов $(\gamma^{(k)}, \delta^{(k)})$ неограниченно увеличивающейся длины и пусть для всех $t \in (\gamma^{(k)}, \delta^{(k)})$, $f(\gamma_1 t-\theta_1, \ldots, \gamma_n t-\theta_n)=0$, т. е. не выполняется по крайней мере одно из неравенств $|\gamma_k t-\theta_k| < \delta_k \pmod{2\pi}$. В этом случае мы имели бы

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\delta^{(k)}-\gamma^{(k)}} \int_{\gamma^{(k)}}^{\delta^{(k)}} f(\gamma_1 t-\theta_1, \ldots, \gamma_n t-\theta_n) dt = 0,$$

что противоречит равенству (2.3.3). Поэтому для любых $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и любых (положительных, сколь угодно малых) $\delta_1, \ldots, \delta_n$ система неравенств

$$|\gamma_k t-\theta_k| < \delta_k \pmod{2\pi} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

имеет относительно плотное множество решений, а это и есть теорема Кронекера.

§ 4. Предельно периодические функции*)

1. Для того чтобы установить связь между равномерными п.-п. функциями и функциями от многих переменных, Г. Бор ввел предельно периодические функции. В этом параграфе определяются предельно периодические функции от конечного и счетного числа переменных, а также доказывается важная теорема Бора о том, что

*) H. Bohr [2].

каждая равномерная п.-п. функция равна значению предельно периодической функции на главной диагонали пространства.

Определение 2.4.1. *Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называется предельно периодической, если она является равномерным пределом непрерывных периодических функций $F_k(x_1, x_2, \ldots x_m)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.*

Если функции $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ по отношению к каждой переменной имеют неизменные периоды, то предельная функция, очевидно, будет периодической с теми же периодами.

Нам понадобятся также предельно периодические функции от счетного числа переменных.

Предположим, что имеется последовательность непрерывных периодических функций $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k})$, причем $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} m_k = \infty$. Положим, по определению,

$$\Phi_k(x_1, x_2, \ldots) = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}).$$

Таким образом, функции Φ_k (от счетного числа переменных) постоянны относительно переменных x_{m_k+1}, $x_{m_k+2}, \ldots$ Определим теперь сходимость. Мы будем говорить, что *последовательность $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k})$ сходится к функции $F(x_1, x_2, \ldots)$ (от счетного числа переменных), если последовательность $\Phi_k(x_1, x_2, \ldots)$ сходится к функции $F(x_1, x_2, \ldots)$.*

Определение 2.4.2. *Функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ называется предельно периодической от счетного числа переменных, если существует последовательность непрерывных периодических функций $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k})$ $(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} m_k = \infty)$, сходящаяся равномерно к $F(x_1, x_2, \ldots)$.* Можно дать другое определение предельно периодических функций от счетного числа переменных, которое выглядит менее формально.

Определение 2.4.2'. *Функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ от счетного числа переменных называется предельно периодической функцией, если, каково бы ни было положительное число ε, можно указать целое положительное число $n = n(\varepsilon)$ и непрерывную периодическую функцию от n*

переменных $F_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ *такие, что, каковы бы ни были значения переменных* $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, *выполняется неравенство*

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) - F_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon. \quad (2.4.1)$$

Покажем, что определения 2.4.2 и 2.4.2′ эквивалентны.

1) *Из определения* 2.4.2 *следует определение* 2.4.2′. В самом деле, если функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ предельно периодична в смысле определения 2.4.2, то по данному ε можно указать такой номер k, что равномерно во всем пространстве бесконечного числа измерений выполняется неравенство

$$|F(x_1, x_2, \ldots) - F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k})| < \varepsilon.$$

Из этого неравенства следует, что $F(x_1, x_2, \ldots)$ есть предельно периодическая функция в смысле определения 2.4.2′, а именно, следует положить $n = m_k$ и $F_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = F_k(x_1, \ldots, x_{m_k})$.

2) *Из определения* 2.4.2′ *следует определение* 2.4.2.

В самом деле, пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ предельно периодична в смысле определения 2.4.2′. Это значит, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать периодическую функцию $F_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных такую, что выполняется неравенство (2.4.1). Полагая

$$\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = F_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n),$$

мы получим из неравенства (2.4.1)

$$F(x_1, x_2, \ldots) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x_1, x_2, \ldots)$$

равномерно во всем пространстве. Значит, $F(x_1, x_2, \ldots)$ есть предельно периодическая функция (от счетного числа переменных) в смысле определения 2.4.2.

2. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — непрерывная периодическая функция с периодами $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Предположим, что обратные величины периодов $q_1^{-1}, q_2^{-1}, \ldots, q_m^{-1}$ линейно независимы. Рассмотрим диагональную функцию

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x).$$

Дальнейшие результаты существенно опираются на следующую важную теорему.

Теорема 2.4.1. *Множество значений диагональной функции $f(x)$ плотно среди множества значений функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.*

Доказательство. Нужно показать, что для любой точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ и любого положительного числа ε найдется действительное число ξ, для которого выполняется неравенство

$$|F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Определим число $\delta = \delta(\varepsilon)$ из условия

$$|F(x_1', x_2', \ldots, x_m') - F(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')| < \varepsilon, \quad (2.4.2)$$

если $|x_i', - x_i''| < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Используем теперь теорему Кронекера. По условию числа $\frac{2\pi}{q_i}$ линейно независимы. Следовательно, существует такое число ξ, что

$$\left|\frac{2\pi\xi}{q_i} - \frac{2\pi x_i^0}{q_i} - 2\pi k_i\right| < \frac{2\pi\delta}{a} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Здесь $a = \max_i |q_i|$ и k_i — целые числа. Помножим обе части последних неравенств на $\frac{q_i}{2\pi}$. Получим:

$$|\xi - x_i^0 - k_i q_i| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и так как q_i — периоды функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то из неравенств (2.4.2) следует неравенство

$$|F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) - F(\xi, \xi, \ldots, \xi)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие.

$$\sup_{\substack{-\infty < x_i < \infty \\ (i=1, 2, \ldots, m)}} |F(x_1, x_2, \ldots, x_m)| = \sup_{-\infty < \xi < \infty} |f(\xi)|.$$

Мы теперь в состоянии доказать следующий важный результат Г. Бора*).

*) H. Bohr [2], S. Bochner [1].

Теорема 2.4.2. *Каждая равномерная п.-п. функция есть диагональная функция предельно периодической функции конечного или счетного числа переменных.*

Доказательство. Пусть $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x} = \sum_n A_n e^{i(r_1^{(n)}\beta_1 + \ldots + r_{m_n}^{(n)}\beta_{m_n})x}$ — равномерная п.-п. функция с базисом $\beta_1, \beta_2, \ldots$ По теореме аппроксимации существует последовательность конечных тригонометрических сумм

$$S_k(x) = \sum_n b_n^{(k)} e^{i(r_1^{(n)}\beta_1 + \ldots + r_{\nu_k}^{(n)}\beta_{\nu_k})x} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

сходящаяся равномерно на всей действительной оси к функции $f(x)$. Каждая тригонометрическая сумма есть диагональная функция периодической функции

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu_k}) = \sum_n b_n^{(k)} e^{i(r_1^{(n)}\beta_1 x_1 + \ldots + r_{\nu_k}^{(n)}\beta_{\nu_k} x_{\nu_k})},$$

периоды которой $q_1, q_2, \ldots, q_{\nu_k}$ суть целые кратные чисел $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\beta_{\nu_k}}$.

Обратные величины этих периодов линейно независимы. Точно так же линейно независимы периоды разности

$$F_{k'}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu_{k'}}) - F_{k''}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu_{k''}}).$$

Поэтому из следствия предыдущей теоремы следует, что

$$\sup |F_{k'}(x_1, \ldots, x_{\nu_{k'}}) - F_{k''}(x_1, \ldots, x_{\nu_{k''}})| = \sup |S_{k'}(x) - S_{k''}(x)|$$

и так как последовательность $S_k(x)$ сходится равномерно, то то же самое справедливо для последовательности $F_k(x_1, \ldots, x_{\nu_k})$. Обозначим предел последней последовательности через $F(x_1, x_2, \ldots)$. Так как этот предел равномерный, то по определению $F(x_1, x_2, \ldots)$ есть предельно периодическая функция. Полагая $x_1 = x_2 = \ldots = x$, мы получим:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} S_k(x) = \lim_{k\to\infty} F_k(x, x, \ldots) = F(x, x, \ldots),$$

что и требовалось доказать.

3. Природа предельно периодической функции, которая была введена в предыдущей теореме, существенно зависит от базиса показателей Фурье функции $f(x)$. Так, например, если базис целый, т. е. каждый показатель Фурье есть линейная комбинация с целыми коэффициентами из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots$, то функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ — периодическая с периодами $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots$ Если базис конечный (но не обязательно целый), то функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ является предельно периодической от конечного числа переменных. Особый интерес представляет случай и целого и конечного базиса. В этом случае мы получаем так называемые квазипериодические функции, изучавшиеся задолго до Г. Бора Болем *) и Эсклангоном **).

§ 5. Предельно периодические функции от одной переменной

1. Согласно предыдущей теореме, если показатели Фурье равномерной п.-п. функции $f(x)$ имеют одночленный базис, т. е. представляются в виде $r\beta$, где r — рациональное число, то сама функция $f(x)$ — предельно периодическая, т. е. является равномерным пределом периодических функций от одной переменной. Покажем, что имеет место также и обратный результат.

Теорема 2.5.1. *Ряд Фурье каждой предельно периодической функции $f(x)$ от одной переменной представляется в виде*

$$f(x) \sim \sum_{\nu} A_\nu e^{ir_\nu \beta x},$$

где r_ν — рациональные числа.

Доказательство. Пусть $p_n(x)$ есть последовательность периодических функций, сходящаяся равномерно к $f(x)$, и пусть

$$p_n(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu^{(n)} e^{i\frac{2\pi}{q_n}\nu x},$$

*) P. Bohl [1].
**) Esclangon [1], [2].

где q_n — период $p_n(x)$. Показатели Фурье всех функций $p_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ можно записать в виде одной последовательности чисел $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ и, следовательно,

$$p_n(x) \sim \sum_k A_k^{(n)} e^{i\Lambda_k x},$$

причем $A_k^{(n)}$ может отличаться от нуля только в том случае, когда Λ_k есть целое кратное числа $\frac{2\pi}{q_n}$. Положим

$$f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\Lambda_k x},$$

где

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_k^{(n)} \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Если $f(x)=\text{const}$, то теорема очевидна. Поэтому будем считать, что $f(x) \neq \text{const}$. Тогда существует некоторое число k_0, для которого $A_{k_0} \neq 0$, $\Lambda_{k_0} \neq 0$. По этому числу k_0 подберем число n_0 такое, чтобы выполнялось неравенство

$$|p_n(x)-f(x)| < |A_{k_0}|, \quad \text{если } n > n_0.$$

Далее, мы имеем:

$$|A_{k_0}^{(n)} - A_{k_0}| = |M\{[p_n(x)-f(x)]\} e^{-i\Lambda_{k_0}x}| \leqslant$$
$$\leqslant M\{|p_n(x)-f(x)|\} < |A_{k_0}| \quad (n > n_0).$$

Поэтому $A_{k_0}^{(n)} \neq 0$ для всех $n > n_0$ и, следовательно, число Λ_{k_0} есть кратное числа $\frac{2\pi}{q_n}$ для всех $n > n_0$. Отсюда следует, что для всех целых ν и $n > n_0$

$$\frac{2\pi}{q_n}\nu = r_\nu^{(n)}\Lambda_{k_0},$$

где $r_\nu^{(n)}$ — рациональные числа. Точно так же каждое Λ_k, для которого $A_k \neq 0$, есть целое кратное $\frac{2\pi}{q_n}$ для достаточно больших n и поэтому есть рациональное кратное числа Λ_{k_0}. Таким образом, для всех k, для которых $A_k \neq 0$,

$$\Lambda_k = r_k \Lambda_{k_0}.$$

где r_k — рациональные числа и, значит, в качестве β можно взять Λ_{k_0}.

Следствие. *Если последовательность $\{p_n(x)\}$ непрерывных периодических функций сходится равномерно к непостоянной функции, то существует такой номер n_0, что все периоды функций $p_n(x)$ для $n > n_0$ суть рациональные кратные одного и того же числа.*

В самом деле, ряд Фурье предельной функции получается предельным переходом из рядов Фурье аппроксимирующих периодических функций. Поэтому, если бы периоды приближающих функций были несоизмеримы для сколь угодно больших n, то и показатели Фурье соответствующих периодических функций были бы несоизмеримы и, следовательно, предельная функция содержала бы несоизмеримые показатели Фурье, что, как мы видели, невозможно.

2. В отличие от общих равномерных п.-п. функций для рядов Фурье предельно периодических функций (от одной переменной) имеет место простой признак сходимости. Наши рассуждения будут основаны на следующей теореме.

Теорема 2.5.2. *Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция. Для каждого действительного q предел*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu}\{f(x)+f(x+q)+\ldots+f(x+\overline{\nu-1}\,q)\}=f^{(q)}(x)$$

существует равномерно и является периодической функцией с периодом q.

Доказательство. Для $e^{i\Lambda x}$ теорема очевидна. Поэтому она справедлива также для любого многочлена $p(x)=\sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$. В этом случае предел есть многочлен $\sum_q A_n e^{i\Lambda_n x}$, причем суммирование распространяется на те члены, период которых равен q, т. е. для которых $\frac{\Lambda_n q}{2\pi}$ есть целое число.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $f(x)\sim\sim\sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ — равномерная п.-п. функция и $p_k(x)=\sum_n A_n^{(k)} e^{i\Lambda_n x}$ — последовательность конечных сумм, сходящаяся равномерно к $f(x)$. Обозначим через ε произвольное положительное число. Подберем вначале k из условия

$$|f(x)-p_k(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и затем ν_0 так, чтобы для всех $\nu>\nu_0$ имело место неравенство

$$\left|p_k^{(q)}(x)-\frac{1}{\nu}\{p_k(x)+p_k(x+q)+\ldots+p_k(x+\overline{\nu-1}\,q)\}\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для этих ν

$$\left|p_k^{(q)}(x)-\frac{1}{\nu}\{f(x)+f(x+q)+\ldots+f(x+\overline{\nu-1}\,q)\}\right|<\varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует существование предела $f^{(q)}(x)$, а также равномерная сходимость $p_k^{(q)}(x)$ к $f^{(q)}(x)$.

Так как $f^{(q)}(x)$ есть периодическая функция с периодом q (как предел периодических функций $p_k^{(q)}(x)$ с периодом q), то ее ряд Фурье содержит только те Λ_n, для которых $\frac{\Lambda_n q}{2\pi}$ равно целому числу.

Легко видеть, что множество функций $f^{(q)}(x)$ (при различных q) равномерно ограничено, равностепенно непрерывно и равностепенно почти-периодично. Более того, если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица или имеет ограниченную производную, то $f^{(q)}(x)$ удовлетворяют тем же условиям.

Пусть теперь $f(x)$ — предельно периодическая функция. Запишем ее ряд Фурье в виде

$$f(x)\sim\sum_n A_n e^{ir_n(2\pi/Q)x}, \tag{2.5.1}$$

где Q фиксировано и r_n — рациональные числа. Положим $q=\mu!Q$ (μ — целое число). Мы получим:

$$f^{(q)}(x)\sim\sum\nolimits_q A_n e^{ir_n(2\pi/Q)x},$$

причем сумма $\sum_q$ распространяется на те члены ряда

(2.5.1), для которых $r_n \mu!$ есть целое число. Применив равенство Парсеваля, мы получим:

$$M\{|f(x)-f^{(q)}(x)|^2\}=\sum_n |A_n|^2-\sum_q |A_n|^2.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае правая часть последнего равенства стремится к нулю при $\mu \to \infty$. Поэтому в силу теоремы 1.5.2 последовательность периодических функций $f^{(q)}(x)$ сходится равномерно к $f(x)$. Заметим, что частная сумма ряда Фурье функции $f^{(q)}(x)$ есть также частная сумма для ряда Фурье функции $f(x)$. Из этого замечания следует простой способ получения $f(x)$ по частным суммам ряда Фурье. Пусть, например, $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Мы уже замечали, что в этом случае периодическая функция $f^{(q)}(x)$ также удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, ее ряд Фурье сходится равномерно.

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. Определим вначале функцию $f^{(\mu!Q)}(x)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)-f^{(\mu!Q)}(x)|<\varepsilon,$$

а затем определим конечную сумму $S(x)$ ряда Фурье функции $f^{(\mu!Q)}(x)$ так, чтобы имело место неравенство

$$|f^{(\mu!Q)}(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$|f(x)-S(x)|<\varepsilon,$$

и мы получим последовательность частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$, сходящуюся к $f(x)$.

§ 6. Множество $H\{f(x)\}$

1. Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция. Рассмотрим бесконечное семейство функций $E=\{f(x+h)\}$ $(-\infty<h<\infty)$. Мы знаем (см. гл. I, § 2), что семейство E компактно. Во многих вопросах (например, в тео-

рии линейных дифференциальных уравнений с п.-п. коэффициентами) полезно рассматривать вместе с данной равномерной п.-п. функцией $f(x)$ семейство E и его замыкание, т. е. всевозможные функции вида $f(x+h)$ и равномерные пределы $f^*(x)$ всевозможных последовательностей

$$f(x+h_1),\quad f(x+h_2),\ \ldots \tag{2.6.1}$$

Совокупность всех этих функций мы будем в последующем сокращенно обозначать через $H\{f(x)\}$.

Пусть $g(x) \in H\{f(x)\}$. С помощью $g(x)$ можно построить $H\{g(x)\}$.

Теорема 2.6.1. *$H\{f(x)\} = H\{g(x)\}$, т. е. совокупность $H\{f(x)\}$ порождается любой, принадлежащей ей функцией.*

Доказательство. Предположим, что последовательность функций $f(x+k_m)$ $(m=1, 2, \ldots)$ сходится равномерно к функции $g(x)$, и пусть $f^*(x) \in H\{f(x)\}$ есть равномерный предел последовательности $f(x+h_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое $N = N(\varepsilon)$, что для $n > N$ выполняются неравенства

$$\sup_x |f^*(x) - f(x+h_n)| < \varepsilon, \tag{2.6.2}$$

$$\sup_x |g(x) - f(x+k_n)| < \varepsilon. \tag{2.6.3}$$

Подставляя в неравенство (2.6.3) вместо x $x+h_n-k_n$, мы получим:

$$\sup_x |g(x+h_n-k_n) - f(x+h_n)| < \varepsilon,$$

что в соединении с неравенством (2.6.2) дает

$$|f^*(x) - g(x+h_n-k_n)| < 2\varepsilon,$$

т. е. $f^*(x)$ есть предел последовательности $g(x+h_n-k_n)$ и, следовательно, принадлежит множеству $H\{g(x)\}$.

2. Мы знаем, что из каждой последовательности вида (2.6.1) можно выбрать равномерно-сходящуюся подпоследовательность. Пользуясь рядами Фурье, можно выяснить, в каком случае сама последовательность (2.6.1) сходится.

Теорема 2.6.2. *В множестве $H\{f(x+h)\}$ формальная*) сходимость рядов Фурье совпадает с равномерной сходимостью.*

Доказательство. Пусть последовательность (2.6.1) сходится равномерно к $f^*(x)$. Тогда на основании п. 2 § 4 гл. I ряды Фурье функций

$$f(x+h_n) \sim \sum_{\nu} A_\nu e^{ih_n\Lambda_\nu} e^{i\Lambda_\nu x}$$

сходятся к ряду Фурье функции $f^*(x)$, т. е.

$$f^*(x) \sim \sum_{\nu} A_\nu e^{ih_\nu^*} e^{i\Lambda_\nu x}, \tag{2.6.4}$$

где

$$h_\nu^* = \lim_{n\to\infty} \Lambda_\nu h_n \pmod{2\pi}. \tag{2.6.5}$$

Наоборот, пусть $f^*(x)$ имеет ряд Фурье (2.6.4), причем h_ν^* определяются с помощью (2.6.5). Покажем, что в этом случае последовательность (2.6.1) сходится равномерно к $f^*(x)$. С этой целью покажем вначале, что

$$\lim_{n\to\infty} M\{|f^*(x)-f(x+h_n)|^2\} = 0. \tag{2.6.6}$$

Действительно,

$$f^*(x)-f(x+h_n) \sim \sum_{\nu} A_\nu \left(e^{ih_\nu^*} - e^{i\Lambda_\nu h_n}\right) e^{i\Lambda_\nu x}.$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля

$$M\{|f^*(x)-f(x+h_n)|^2\} = \sum_{\nu} |A_\nu|^2 \left|e^{ih_\nu^*} - e^{i\Lambda_\nu h_\nu}\right|^2.$$

---

*) Последовательность рядов Фурье $\sum\limits_{k} A_k^{(n)} e^{i\Lambda_k^{(n)} x}$ $(n=1, 2, \ldots)$ называется формально сходящейся, если существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} A_k^{(n)} = A_k \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Обозначим через ε произвольное положительное число. Выберем целое положительное число N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |A_\nu|^2 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $\left|e^{ih_\nu^*} - e^{i\Lambda_\nu h_n}\right| \leqslant 4$, то

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |A_\nu|^2 \left|e^{ih_\nu^*} - e^{i\Lambda_\nu h_n}\right|^2 < \varepsilon. \tag{2.6.7}$$

Зафиксировав N, возьмем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} |A_\nu|^2 \left|e^{ih_\nu^*} - e^{i\Lambda_\nu h_n}\right|^2 < \varepsilon. \tag{2.6.8}$$

Из неравенств (2.6.7) и (2.6.8) следует неравенство

$$M\{|f^*(x) - f(x+h_n)|^2\} < 2\varepsilon.$$

Число ε произвольно, поэтому (2.6.6) доказано.

Так как последовательность $f(x+h_n)$ равностепенно ограничена, равностепенно непрерывна и равностепенно почти-периодична, то наше утверждение следует из теоремы 1.5.2.

3. Рассмотрим следующий важный вопрос: пусть даны две равномерные п.-п. функции $f(x)$ и $g(x)$. Спрашивается, каковы необходимые и достаточные условия для одновременной сходимости последовательности (2.6.1) и последовательности

$$g(x+h_1),\quad g(x+h_2),\quad \ldots \tag{2.6.1'}$$

Для решения этого вопроса необходимо ввести важное понятие *модуля показателей Фурье*.

Определение. *Непустое множество чисел называется модулем, если вместе с числами α и β оно содержит и их разность $\alpha-\beta$.*

Например, множество всех действительных чисел есть модуль; множество всех действительных целых чисел есть модуль. В дальнейшем мы будем рассматривать только счетные модули действительных чисел.

Модуль всегда содержит число 0, ибо если число α входит в модуль, то число $\alpha-\alpha=0$ также входит в модуль. Далее, так как $0-\beta=-\beta$, то вместе с α и β модуль содержит и их сумму $\alpha+\beta$. Отсюда следует, что если модуль содержит k чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то он содержит также все числа вида $m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\ldots+m_k\alpha_k$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — целые числа.

Пусть дано конечное или счетное множество чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, которое мы в дальнейшем будем сокращенно обозначать одной буквой E. Легко образовать модуль, содержащий в себе все числа множества E. В самом деле, достаточно рассмотреть все числа вида $m_1\alpha_1+$ $+m_2\alpha_2+\ldots+m_k\alpha_k$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — целые числа, k — произвольное конечное. Полученное таким образом множество чисел есть, очевидно, наименьший модуль, содержащий множество E. Будем его в дальнейшем сокращенно обозначать через $M\{E\}$ или $M\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Возвратимся теперь к п.-п. функциям. Пусть $f(x)\sim$ $\sim\sum\limits_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ — равномерная п.-п. функция. Рассмотрим модуль показателей Фурье этой функции $M\{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots\}$ и будем его в дальнейшем сокращенно обозначать через M_f и называть модулем функции $f(x)$.

Теорема 2.6.3. *Для того чтобы последовательности* (2.6.1) *и* (2.6.1′) *одновременно сходились, необходимо и достаточно, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ имели один и тот же модуль:*

$$M_f=M_g.$$

Доказательство. Мы докажем, что для того чтобы из сходимости последовательности (2.6.1) следовала сходимость последовательности (2.6.1′), необходимо и достаточно, чтобы модуль функции $g(x)$ содержался в модуле функции $f(x)$, т. е. чтобы каждый показатель Фурье M_n функции $g(x)$ являлся линейной комбинацией с целыми коэффициентами показателей Фурье Λ_n функции $f(\ )$. Теорема 2. 3 будет следовать из двух неравенств

$$M_g \subset M_f; \quad M_f \subset M_g.$$

Если последовательность (2.6.1) сходится, то числа $h_n - h_m$ суть почти-периоды для $f(x)$, точность*) которых стремится к нулю при $n, m \to \infty$. Поэтому нам следует выяснить, в каком случае эти числа будут также почти-периодами (точность которых стремится к нулю при $n, m \to \infty$) для функции $g(x)$. Покажем, что для этого необходимо и достаточно условие $M_g \subset M_f$. Для доказательства последнего утверждения следует сослаться на установленную в первом параграфе настоящей главы связь между почти-периодами и показателями Фурье равномерной п.-п. функции.

Начнем с доказательства достаточности. Предположим, что $M_g \subset M_f$, т. е. каждый показатель Фурье M_n функции $g(x)$, есть конечная линейная комбинация с целыми коэффициентами показателей Фурье Λ_n функции $f(x)$. В этом случае, если число τ удовлетворяет системе неравенств (2.1.1), то оно удовлетворяет также аналогичной системе неравенств, составленной по функции $g(x)$ и, следовательно, τ есть почти-период функции $g(x)$, точность которого может быть сделана сколь угодно малой.

Обратно, пусть M_g не содержится в M_f. Покажем, что в этом случае существуют сколь угодно точные почти-периоды функции $f(x)$, которые вместе с тем не могут быть достаточно точными почти-периодами для $g(x)$. Если M_g не содержится в M_f, то существует показатель Фурье функции $g(x)$ — обозначим его через M_R, который не представляется в виде конечной линейной комбинации с целыми коэффициентами из чисел Λ_n (показателей Фурье $f(x)$). В этом случае из теоремы Кронекера следует существование числа τ, удовлетворяющего системе неравенств (2.1.1) и неравенству

$$|M_R \tau| > \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \tag{2.6.9}$$

*) Точностью почти-периода мы называем число ε.

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$ при достаточно большом N и достаточно малом δ, число τ (зависящее от ε, N, δ) будет ε-почти-периодом функции $f(x)$. Вместе с тем неравенство (2.6.9) мешает числу τ быть сколь угодно точным почти-периодом для функции $g(x)$. Поэтому условие $M_g \subset M_f$ также и необходимо для того, чтобы каждый почти-период $f(x)$ был почти-периодом $g(x)$.

§ 7. Теорема об аргументе равномерной п.-п. функции

1. Пусть $F(t)$ — произвольная непрерывная ограниченная функция, определенная для всех действительных значений t. Предположим, что $\inf\limits_t |F(t)| = k > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \dfrac{F(t)}{|F(t)|}$. Очевидно, функция $\varphi(t)$ также непрерывна для всех действительных значений t, причем $|\varphi(t)| = 1$. Положим $\varphi(t) = e^{i\omega(t)}$.

Если в некоторой точке $t = t_0$ значение функции $\omega(t)$ уже выбрано, то для других значений t ее естественно продолжить по непрерывности. Очевидно, что таким образом функция $\omega(t)$ определится с точностью до целого кратного 2π. Функция $\omega(t)$ становится однозначно определенной, если дополнительно наложить условие $-\pi \leqslant \omega(0) < \pi$. Функция $\omega(t)$ называется аргументом функции $F(t)$ и обозначается $\arg F(t)$. Различные непрерывные ветви аргумента функции отличаются на целое кратное 2π.

Предположим, что функция $F(t)$ равномерно непрерывна для всех действительных t. Покажем, что в этом случае функция $\omega(t)$ также равномерно непрерывна.

Допустим противное. Тогда существует такое фиксированное число $\alpha_0 \neq 2k\pi$ и такая последовательность пар точек $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$, $(t_1^{(2)}, t_2^{(2)})$, ..., что для всех n $|\omega(t_2^{(n)}) - \omega(t_1^{(n)})| > \alpha_0$ и $|t_2^{(n)} - t_1^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$. Так как функция $|\omega(t_2^{(n)}) - \omega(t_1^{(n)})|$ при фиксированном $t_1^{(n)}$, как функция $t_2^{(n)}$, непрерывна, то в интервале $(t_1^{(n)}, t_2^{(n)})$ можно подобрать такое число — обозначим его снова через $t_2^{(n)}$, —

что $|\omega(t_2^{(n)}) - \omega(t_1^{(n)})| = \alpha_0$. Поэтому

$$|\varphi(t_2^{(n)}) - \varphi(t_1^{(n)})| = |1 - e^{i[\omega(t_2^{(n)}) - \omega(t_2^{(n)})]}| = |1 - e^{\pm i\alpha_0}|.$$

Правая часть последнего выражения при $n \to \infty$ не может стремиться к нулю, так как $\alpha_0 \neq 2k\pi$. Левая же часть стремится к нулю в силу равномерной непрерывности функции $\varphi(t)$, которая легко следует из равномерной непрерывности и ограниченности функции $F(t)$, а также условия $|F(t)| \geqslant k > 0$. Мы получили противоречие и, значит, $\omega(t)$ равномерно непрерывна.

2. Предположим теперь, что $F(t)$ — равномерная п.-п. функция. В этом случае справедлива следующая интересная

Теорема 2.7.1 *). *Пусть $F(t)$ — равномерная п.-п. функция и для всех t $|F(t)| \geqslant k > 0$. Тогда $\arg F(t) = ct + \psi(t)$, где c — постоянная величина и $\psi(t)$ — равномерная п.-п. функция. Число c и показатели Фурье функции $\psi(t)$ принадлежат модулю $F(t)$.*

Первое доказательство *). Из равномерной непрерывности функции $\arg F(t)$ непосредственно следует, что для каждого положительного числа τ можно указать такое положительное число K_τ, что для $|l| \leqslant \tau$ и всех t

$$|\arg F(t+l) - \arg F(t)| \leqslant K_\tau. \tag{2.7.1}$$

Выберем произвольное положительное число $\varepsilon < \pi$ и положим $\eta = 2k \sin \frac{1}{2}\varepsilon$. Далее, обозначим через $\tau = \tau(\eta)$ произвольный η-почти-период $F(t)$.

Из рис. 1 легко усмотреть, что для всех t

$$|\arg F(t+\tau) - \arg F(t)|$$

меньше, чем на ε, отличается от $2m\pi$. В самом деле, пусть $OA = F(t)$, $OB = F(t+\tau)$, $OC = OA$, $\varphi = \arg F(t+\tau) - \arg F(t)$. Из равнобедренного треугольника OAC следует $AC = 2AO \sin \frac{\varphi}{2}$. Так как $AC < AB < \eta = 2k \sin \frac{\varepsilon}{2}$,

*) H. Bohr [8], [10].

то $2OA\sin\frac{\varphi}{2} < 2k\sin\frac{\varepsilon}{2}$. Принимая во внимание, что $OA \geqslant k$, мы получим из последнего неравенства $\sin\frac{\varphi}{2} < \sin\frac{\varepsilon}{2}$, откуда непосредственно следует, что

$$|\arg F(t+\tau) - \arg F(t) - 2\pi n_\tau| < \varepsilon. \qquad (2.7.2)$$

В силу непрерывности $\arg F(t)$ целое число n_τ от t не зависит.

Выберем теперь произвольные действительные числа γ и $\delta > \gamma$. Положим $\delta = \gamma + h\tau + l$, где h — целое положи-

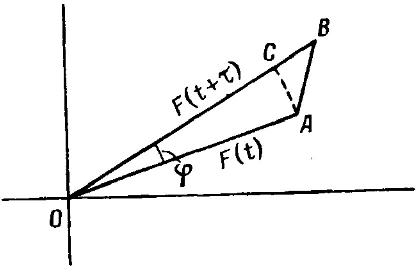

Рис. 1.

тельное число и $0 \leqslant l < \tau$. В силу неравенств (2.7.1) и (2.7.2)

$$|\arg F(\gamma+\tau) - \arg F(\gamma) - 2\pi n_\tau| < \varepsilon,$$
$$|\arg F(\gamma+2\tau) - \arg F(\gamma+\tau) - 2\pi n_\tau| < \varepsilon$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|\arg F(\gamma+h\tau) - \arg F(\gamma+\overline{h-1}\tau) - 2\pi n_\tau| < \varepsilon,$$
$$|\arg F(\delta) - \arg F(\gamma+h\tau)| < K_\tau.$$

Поэтому, складывая все эти неравенства, мы получим:

$$|\arg F(\delta) - \arg F(\gamma) - 2\pi h n_\tau| < h\varepsilon + K_\tau.$$

Так как $h = \frac{\delta-\gamma-l}{\tau}$, то из последнего неравенства следует неравенство

$$\left|\arg F(\delta) - \arg F(\gamma) - 2\pi\frac{\delta-\gamma}{\tau}\cdot n_\tau\right| < \frac{\delta-\gamma}{\tau}\varepsilon + C_\tau,$$

где $C_\tau = K_\tau + |n_\tau|\,2\pi$.

Деля обе части последнего неравенства на $\delta-\gamma$, мы получим:

$$\left|\frac{\arg F(\delta)-\arg F(\gamma)}{\delta-\gamma}-\frac{2\pi n_\tau}{\tau}\right|<\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{C_\tau}{\delta-\gamma}. \qquad (2.7.3)$$

Так как число $\delta-\gamma$ можно взять сколь угодно большим, а число $\varepsilon>0$ сколь угодно малым, то из неравенства (2.7.3) следует существование предела

$$c=\lim_{(\delta-\gamma)\to\infty}\frac{\arg F(\delta)-\arg F(\gamma)}{\delta-\gamma}.$$

Переходя теперь в неравенстве (2.7.3) к пределу, полагая $(\delta-\gamma)\to\infty$, мы получим:

$$\left|c-\frac{2\pi n_\tau}{\tau}\right|<\frac{\varepsilon}{\tau}.$$

Или

$$|c\tau-2\pi n_\tau|<\varepsilon, \qquad (2.7.4)$$

т. е.

$$|c\tau|<\varepsilon \quad (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Покажем, что из последнего неравенства следует, что число τ принадлежит модулю функции $F(t)$. Допустим противное. Тогда из теоремы Кронекера следует, что существует число τ, удовлетворяющее системе неравенств (2.1.1) и неравенству

$$\left|c\tau-\frac{\pi}{2}\right|<\delta \ (\operatorname{mod} 2\pi).$$

При достаточно малых ε и δ последнее неравенство противоречит неравенству (2.7.4).

Положим теперь $\arg F(t)=ct+\psi(t)$. Покажем, что $\psi(t)$ есть равномерная п.-п. функция. Из неравенства (2.7.2) следует

$$|c\tau+\psi(t+\tau)-\psi(t)-n_\tau 2\pi|<\varepsilon,$$

что в соединении с неравенством (2.7.4) дает:

$$|\psi(t+\tau)-\psi(t)|<2\varepsilon \qquad (2.7.5)$$

и, значит, $\psi(t)$—равномерная п.-п. функция. Из доказательства теоремы 2.6.3 непосредственно следует, что показатели Фурье функции $\psi(t)$ содержатся в модуле функции $F(t)$.

3. Второе доказательство*). Докажем вначале теорему для тригонометрического многочлена

$$F(t)=\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n t}.$$

Предположим, что показатели многочлена содержатся в модуле

$$M=\{h_1\mu_1+\ \ldots\ +h_m\mu_m\}=\{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\mu}\},$$

где $h_1, \ldots, h_m$—целые числа, $\boldsymbol{h}$—вектор с целыми координатами $h_1, \ldots, h_m$, $\boldsymbol{\mu}$—постоянный вектор с координатами $\mu_1, \ldots, \mu_m$ и через $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\mu}$ обозначено скалярное произведение. Пусть $\lambda_1=\boldsymbol{h}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\mu}, \ldots, \lambda_N=\boldsymbol{h}^{(N)}\cdot\boldsymbol{\mu}$. В этих обозначениях

$$F(t)=\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\boldsymbol{h}^{(n)}\boldsymbol{\mu} t}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_m)$—произвольный вектор m-мерного действительного пространства Эвклида. Рассмотрим функцию от m переменных

$$G(\boldsymbol{x})=\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\boldsymbol{h}^{(n)}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

В силу теоремы 2.4.1 $|G(\boldsymbol{x})|\geqslant k$.

Рассмотрим произвольную непрерывную ветвь $\arg G(\boldsymbol{x})$. Для каждого l существует такое целое число h_l, в силу непрерывности $G(\boldsymbol{x})$ не зависящее от $\boldsymbol{x}$, что

$$\arg G(\ldots, x_l+2\pi, \ldots)-\arg G(\ldots, x_l, \ldots)=h_l 2\pi. \quad (2.7.6)$$

Обозначим через $\boldsymbol{h}$ вектор $(h_1, \ldots, h_N)$. Из (2.7.6) легко следует, что

$$\arg G(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}+\chi(\boldsymbol{x}),$$

---

*) B. Jessen [2].

где функция $\chi(\boldsymbol{x})$ — периодическая с периодом 2π по каждой переменной.

В самом деле, рассмотрим функцию

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \arg G(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}.$$

Покажем, что $\chi(\boldsymbol{x})$ — периодическая функция с периодом 2π по каждой переменной. Имеем:

$$\begin{aligned}&\chi(\ldots, x_l+2\pi, \ldots) - \chi(\ldots, x_l, \ldots) =\\ &= \arg G(\ldots, x_l+2\pi, \ldots) - \arg G(\ldots, x_l, \ldots) -\\ &- \{h_1x_1 + \ldots + h_l(x_l+2\pi) \ldots + h_mx_m\} +\\ &+ \{h_1x_1 + \ldots + h_mx_m\} = h_l\cdot 2\pi - h_l\cdot 2\pi = 0.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\arg F(t) = \arg G(\boldsymbol{\mu}\cdot t) = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\mu}\cdot t + \chi(\boldsymbol{\mu}\cdot t) = ct + \psi(t),$$

где $c = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\mu} \in M$ и $\psi(t) = \chi(\boldsymbol{\mu}\cdot t)$ есть равномерная п.-п. функция с показателями Фурье, принадлежащими модулю M.

Доказательство теоремы в общем случае легко получается с помощью теоремы аппроксимации. Пусть $F(t)$ — равномерная п.-п. функция, удовлетворяющая для всех t неравенству $|F(t)| \geqslant k > 0$. Пусть $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ — произвольное положительное число. Пусть $P_\varepsilon(t)$ — тригонометрический многочлен с показателями, выбранными из показателей Фурье $F(t)$ (например, многочлен Бохнера-Фейера), удовлетворяющий неравенству

$$|F(t) - P_\varepsilon(t)| < k\sin\varepsilon.$$

Легко видеть, что для всех t справедливо неравенство

$$|P_\varepsilon(t)| > k - k\sin\varepsilon > 0$$

и, следовательно, теорема об аргументе применима к $P_\varepsilon(t)$, т. е.

$$\arg P_\varepsilon(t) = c_\varepsilon t + \psi_\varepsilon(t). \tag{2.7.7}$$

Рассуждая так же, как и при выводе неравенства (2.7.2), мы установим, что для некоторой определенной ветви аргумента справедливо неравенство

$$|\arg F(t) - \arg P_\varepsilon(t)| < \varepsilon. \tag{2.7.8}$$

Из (2.7.7) и (2.7.8) следует, что для всех t

$$|\arg F(t) - c_\varepsilon t - \psi_\varepsilon(t)| < \varepsilon. \tag{2.7.9}$$

Из последнего неравенства, в частности, следует, что, начиная с некоторого достаточно малого ε, c_ε от ε не зависит. В самом деле, пусть $\varepsilon' < \varepsilon$ и $c_{\varepsilon'} \neq c_\varepsilon$. Наряду с неравенством (2.7.9) имеет место неравенство

$$|\arg F(t) - c_{\varepsilon'} t - \psi_{\varepsilon'}(t)| < \varepsilon'. \tag{2.7.9'}$$

Из (2.7.9) и (2.7.9′) следует

$$|(c_\varepsilon - c_{\varepsilon'})t - \psi_{\varepsilon'}(t) + \psi_\varepsilon(t)| < \varepsilon + \varepsilon'.$$

Так как $\psi_\varepsilon(t)$ и $\psi_{\varepsilon'}(t)$ — ограниченные функции, то последнее неравенство возможно для всех t лишь в том случае, если $c_\varepsilon = c_{\varepsilon'}$, т. е. c_ε не зависит от ε. Положим $c_\varepsilon = c$. Неравенство (2.7.9) перепишется в виде

$$|\arg F(t) - ct - \psi_\varepsilon(t)| < \varepsilon. \tag{2.7.10}$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\arg F(t) = ct + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — ограниченная непрерывная *) функция. Подставляя в неравенство (2.7.10) вместо $\arg F(t)$ $ct + \psi(t)$, мы получим:

$$|\psi(t) - \psi_\varepsilon(t)| < \varepsilon$$

и так как число ε произвольно, то $\psi(t)$ есть равномерная п.-п. функция.

Число c принадлежит модулю $P_\varepsilon(t)$ и, значит, подавно модулю $F(t)$. Далее, показатели Фурье $\psi_\varepsilon(t)$ принадлежат модулю $P_\varepsilon(t)$ и, значит, принадлежат модулю $F(t)$. Следовательно, то же самое верно для $\psi(t)$. Теорема полностью доказана.

4. Имея в виду дальнейшие приложения, изучим функцию $\ln F(t)$. Пусть $|F(t)| \geqslant k > 0$. Обозначим через

---

*) Непрерывность функции $\psi(t)$ следует из непрерывности функции $\arg F(t)$.

$\varepsilon < \pi$ произвольное положительное число и пусть

$$\eta = 2k \sin \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Далее, обозначим через $\tau = \tau(\eta)$ произвольный η-почти-период $F(t)$. Применяя теорему о среднем значении (формулу конечных приращений), мы получим оценку

$$|\ln|F(t+\tau)| - \ln|F(t)|| < \frac{\eta}{k} < \varepsilon. \qquad (2.7.11)$$

Таким образом, $\ln|F(t)|$ есть равномерная п.-п. функция и ее показатели Фурье принадлежат модулю $F(t)$. Поэтому, применяя теорему об аргументе, мы получим:

$$\ln F(t) = \ln|F(t)| + i \arg F(t) = ict + H(t),$$

где $H(t) = \ln|F(t)| + i\psi(t)$ есть равномерная п.-п. функция с показателями Фурье из модуля $F(t)$.

Из неравенств (2.7.5) и (2.7.11) следует, что каждый η-почти-период $F(t)$ есть 3ε-почти-период $H(t)$.

Таким образом, каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, которое зависит также от k, но никак иначе от $F(t)$ не зависит, что каждый δ-почти-период $F(t)$ есть ε-почти-период для $H(t)$.

В силу некоторых приложений к механике, восходящих еще к Лагранжу, число c называется средним движением *).

§ 8. Функции распределения для равномерных п.-п. функций **)

1. Возрастающая функция $\mu(\sigma)$, заданная в интервале $-\infty < \sigma < \infty$, называется функцией распределения, если она удовлетворяет условиям: $\lim\limits_{\sigma \to -\infty} \mu(\sigma) = 0$, $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \mu(\sigma) = 1$. В точках разрыва функции $\mu(\sigma)$ мы не будем приписывать ей определенного значения.

В дальнейшем нам будет встречаться тот случай, когда $\mu(\sigma) = 0$ для $\sigma < \alpha$ и $\mu(\sigma) = 1$ для $\sigma > \beta$, где α и β — некоторые конечные числа.

---

*) Более подробно об этом см. H. Bohr [10] и B. Jessen and H. Tornehave [1].

**) A. Wintner [1].

Пусть A есть некоторое множество точек на прямой. Предположим, что A в пересечении с каждым конечным интервалом дает измеримое множество. Обозначим через $m(A;\gamma,\delta)$ меру части множества A, заключенной в интервале (γ,δ). Назовем величины

$$\underline{r}(A)=\varliminf_{\delta-\gamma\to\infty}\frac{m(A;\gamma,\delta)}{\delta-\gamma},$$

$$\overline{r}(A)=\varlimsup_{\delta-\gamma\to\infty}\frac{m(A;\gamma,\delta)}{\delta-\gamma}$$

нижней, соответственно верхней, плотностью множества A. Если $\overline{r}(A)=\underline{r}(A)$, т. е. если существует предел

$$r(A)=\lim_{(\delta-\gamma)\to\infty}\frac{m(A;\gamma,\delta)}{\delta-\gamma},$$

то число $r(A)$ называется плотностью множества A. Если множество A периодично, то очевидно, что плотность существует и равна мере части A, лежащей на протяжении одного периода, деленной на период.

2. Пусть $F(t)$ есть действительная измеримая функция, определенная для $-\infty<t<\infty$. Обозначим через $A^-(\sigma)$ и $A^+(\sigma)$ множество тех t, для которых $F(t)<\sigma$, соответственно $F(t)\leqslant\sigma$.

Мы будем говорить, что функция $F(t)$ имеет асимптотическую функцию распределения, если существует такая функция распределения $\mu(\sigma)$, что для всех σ

$$\mu(\sigma-0)\leqslant\underline{r}\{A^-(\sigma)\}\leqslant\overline{r}\{A^+(\sigma)\}\leqslant\mu(\sigma+0). \tag{2.8.1}$$

Если $F(t)$ — ограниченная функция (например, равномерная п.-п. функция), то асимптотическая функция распределения для $\mu(\sigma)$ (если она существует) имеет тот специальный вид, о котором мы выше говорили. В самом деле, если значения $F(t)$ принадлежат интервалу (α,β), то $\mu(\sigma)=0$ для $\sigma<\alpha$ и $\mu(\sigma)=1$ для $\sigma>\beta$.

Легко видеть, что ограниченная функция $F(t)$ обладает асимптотической функцией распределения в том и только в том случае, когда

$$\overline{r}\{A^+(\sigma_1)\}\leqslant\underline{r}\{A^-(\sigma_2)\} \tag{2.8.2}$$

для любых $\sigma_1 < \sigma_2$. В самом деле, в этом случае достаточно положить $\mu(\sigma) = \underline{r}\{A^-(\sigma)\}$.

В (2.8.1) неравенство $\overline{r}\{A^+(\sigma)\} \leqslant \mu(\sigma+0)$ есть следствие неравенства (2.8.2). Остальные неравенства очевидны.

Теорема 2.8.1. *Каждая действительная равномерная п.-п. функция $F(t)$ имеет асимптотическую функцию распределения $\mu(\sigma)$.*

Доказательство. Достаточно доказать условие (2.8.2). Обозначим через $\chi(\sigma)$ непрерывную функцию, равную 1 в интервале $\sigma \leqslant \sigma_1$, нулю — в интервале $\sigma \geqslant \sigma_2$ и линейную — в интервале $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$. $\chi\{F(t)\}$ есть равномерная п.-п. функция и, значит, существует среднее значение

$$M_t\{\chi[F(t)]\}.$$

Покажем, что

$$\overline{r}\{A^+(\sigma_1)\} \leqslant M_t\{\chi[F(t)]\} \leqslant \underline{r}\{A^-(\sigma_2)\}. \tag{2.8.3}$$

В самом деле, если $t \in A^+(\sigma_1)$, т. е. $F(t) \leqslant \sigma_1$, то $\chi[F(t)] = 1$. Для других t $\chi[F(t)] = 0$. Поэтому
≤ 1

$$M_t\{\chi[F(t)]\} = \lim_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma} \int_\gamma^\delta \chi[F(t)]\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma} \int_{t\in A^+(\sigma_1)} dt = \varliminf_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{\operatorname{mes}[A^+(\sigma_1);\,\delta,\gamma]}{\delta-\gamma} = \overline{r}\{A^+(\sigma_1)\}.$$

Точно так же, если $t \in A^-(\sigma_2)$, т. е. $F(t) < \sigma_2$, то $\chi[F(t)] \leqslant 1$ и для других t $\chi[F(t)] = 0$. Поэтому

$$M_t\{\chi[F(t)]\} = \lim_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma} \int_\gamma^\delta \chi[F(t)]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma} \int_{t\in A^-(\sigma_2)} dt = \underline{r}\{A^-(\sigma_2)\}.$$

Таким образом (2.8.3) доказано. Из (2.8.3) непосредственно следует неравенство (2.8.2), из которого, как мы уже выше отмечали, теорема следует непосредственно.

Если $F(t)$ — периодическая функция, то $r\{A^{\pm}(\sigma)\}$ существует для всех σ, причем

$$r\{A^{-}(\sigma)\} = \mu(\sigma - 0); \quad r\{A^{+}(\sigma)\} = \mu(\sigma + 0).$$

Так как $A^{-}(\sigma)$ — открытое множество, а $A^{+}(\sigma)$ — замкнутое множество, то оба эти множества измеримы по Жордану для всех σ, для которых $\mu(\sigma)$ непрерывна.

Покажем, что асимптотическая функция распределения $\mu(\sigma)$ для равномерных п.-п. функций $F(t)$ строго возрастает в интервале $[\alpha, \beta]$, где α и β обозначают нижнюю и верхнюю грани $F(t)$.

В самом деле, пусть $\alpha \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 \leqslant \beta$ и ε—положительное число $< \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)$. В силу непрерывности $F(t)$ существует интервал $|t - t_0| < \delta$, в котором $\sigma_1 + \varepsilon < F(t) < \sigma_2 - \varepsilon$. Для произвольного ε-почти-периода $\tau = \tau_F(\varepsilon)$ мы имеем в интервалах $|t + \tau - t_0| < \delta$ $\sigma_1 < F(t) < \sigma_2$. Множество чисел τ относительно плотно. Поэтому два множества $A^{-}(\sigma_2)$ и $A^{+}(\sigma_1)$ отличаются на множество положительной нижней плотности, откуда следует, что

$$\underline{r}\{A^{+}(\sigma_1)\} < \overline{r}\{A^{-}(\sigma_2)\} \text{ и поэтому } \mu(\sigma_1 - 0) < \mu(\sigma_2 + 0).$$

3. Обратно, каждая строго возрастающая функция распределения $\mu(\sigma)$, для которой существует такой интервал $[\alpha, \beta]$, что $\mu(\sigma) = 0$ для $\sigma < \alpha$ и $\mu(\sigma) = 1$ для $\sigma > \beta$, есть асимптотическая функция распределения для некоторой действительной равномерной п.-п. функции. Более того, $F(t)$ можно выбрать среди периодических функций и притом с заранее предписанным периодом. С этой целью рассмотрим обратную функцию $\sigma = H(y)$ для $y = \mu(\sigma)$, которая непрерывна для $0 < y < 1$ и, значит, если положить $H(0) = \alpha$, $H(1) = \beta$, непрерывна для $0 \leqslant y \leqslant 1$. Положим в интервале $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}p$

$$F(t) = H\left(t \Big/ \frac{1}{2}p\right)$$

и продолжим $F(t)$ четно, а затем с периодом p. Мы получим непрерывную периодическую функцию, которая, как легко видеть, имеет своей асимптотической функцией распределения функцию $\mu(\sigma)$. В самом деле, функция $F(t)$ как периодическая функция имеет функцию распределения. Мы должны показать, что исходная функция $\mu(\sigma)$ удовлетворяет условиям (2.8.3) и, значит, является функцией распределения для $F(t)$.

Обозначим через σ произвольное число. По определению $A^-(\sigma)$ есть множество тех t, для которых

$$F(t) = H\left(t \Big/ \frac{1}{2} p\right) = \sigma.$$

В силу периодичности и четности функции $F(t)$ множежество $A^-(\sigma)$ также периодично и четно. Поэтому $r\{A^-(\sigma)\}$ равняется мере части $A^-(\sigma)$, заключенной в интервале $\left(0, \frac{1}{2} p\right)$, поделенной на длину этого интервала, т. е. на $\frac{1}{2} p$.

Итак, следует найти меру множества тех t $\left(\text{из интервала } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} p\right)$, для которых справедливо неравенство $H\left(t \Big/ \frac{1}{2} p\right) < \sigma$. В силу монотонности функции $H\left(t \Big/ \frac{1}{2} p\right)$ из последнего неравенства следует неравенство $t \Big/ \frac{1}{2} p \leqslant \varphi(\sigma - 0)$. Поэтому $r\{A^-(\sigma)\} = \varphi(\sigma - 0)$. Точно так же доказывается, что $r\{A^+(\sigma)\} = \varphi(\sigma + 0)$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

§ 1. Вводные замечания. Определение и простейшие свойства N-почти-периодических (N-п.-п.) функций

1. В этой главе будет указан класс обобщенных п.-п. функций, внутри которого попрежнему имеет место теорема единственности. Это обобщение было нами указано в 1937 г. *). В 1945 г. В. А. Марченко **) в очень интересной работе получил более простые доказательства основных теорем и, что особенно существенно, распространил метод суммирования Бохнера-Фейера на изучаемые в этой главе обобщенные п.-п. функции.

Наконец Б. Я. Левин ***) наново осветил весь круг рассматриваемых вопросов и получил дальнейшие результаты (в частности, равенство Парсеваля, которого у предыдущих авторов не было), привлекши теорию непрерывных групп.

Возможность обобщения теоремы единственности следует из простого анализа доказательства теоремы 1.5.1, которая лежит в основе вывода теоремы единственности из равенства Парсеваля для равномерных п.-п. функций.

В самом деле, обратимся к доказательству теоремы 1.5.1. Легко усмотреть, что для справедливости этой теоремы вовсе несущественно, чтобы почти-периоды действовали на всей прямой. Достаточно, чтобы они дей-

*) Б. М. Левитан [1], [2].
**) В. А. Марченко [3], [4].
***) Б. Я. Левин [1], [2].

ствовали в окрестности точки x_0, а так как точка x_0 может занимать любое положение, то достаточно потребовать, чтобы для любых положительных чисел ε и N нашлось относительно плотное множество чисел $\tau = \tau(\varepsilon, N)$, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad (|x| < N).$$

Б. Я. Левин*) показал, что одного этого условия недостаточно для выделения естественного класса обобщенных п.-п. функций, ибо внутри этого класса, вообще говоря, нет инвариантности относительно сложения. Поэтому следует наложить дополнительные ограничения на числа $\tau(\varepsilon, N)$, что будет нами сделано в надлежащем месте.

В заключение отметим, что из-за недостатка места нами изложены лишь те результаты, для которых в настоящее время известны достаточно простые доказательства. Поэтому некоторые важные результаты, в особенности из работы Б. Я. Левина, не нашли себе здесь места. Читателю, который заинтересуется результатами настоящей главы и пожелает глубже проникнуть в суть дела, мы рекомендуем обратиться к оригинальным работам.

2. Дадим теперь то обобщение понятия почти-периода, которое играет существенную роль во всем дальнейшем изложении этой главы.

Определение 3.1.1. *Число $\tau = \tau(\varepsilon, N)$ называется ε, N-почти-периодом функции $f(x)$, если для всех $|x| < N$ выполняется неравенство*

$$|f(x \pm \tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Можно было бы попытаться изучить непрерывные функции $f(x)$, для которых при любых положительных ε и N существует относительно плотное множество ε, N-почти-периодов. Мы уже отмечали во введении к настоящей главе, что одного этого условия недостаточно, и требования, налагаемые на N-почти-периоды, следует усилить.

*) Б. Я. Левин [2].

Определение 3.1.2. *Непрерывная*) для всех действительных x функция $f(x)$ называется N-почти-периодической, если, каковы бы ни были положительные числа ε и N, можно указать действительные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots$ $\ldots, \mu_p$ и положительное число δ, так что каждое число τ, удовлетворяющее системе неравенств*

$$|\mu_k\tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{3.1.1}$$

*есть ε, N-почти-период функции**) $f(x)$.*

Неудобство этого определения состоит в том, что числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ не только в своем числе, но и сами по себе могут зависеть от ε и N. Было бы удобнее, если бы при уменьшении ε и увеличении N к числам $\mu_1, \ldots, \mu_p$ следовало бы добавлять новые числа, не изменяя прежних. Следующая теорема показывает, что этого всегда можно достичь.

Теорема 3.1.1. *Пусть $f(x)$ — N-п.-п. функция* (в смысле определения 3.1.2). *Существует счетная последовательность фиксированных чисел $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, обладающая тем свойством, что, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, можно указать целое положительное число $n = n(\varepsilon, N)$ и положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, N)$ такие, что каждое число τ, удовлетворяющее системе неравенств*

$$|\Lambda_k\tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.1.2}$$

есть ε, N-почти-период функции $f(x)$.

Доказательство. Обозначим через q натуральное число и через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — бесконечную последовательность неограниченно убывающих положительных

---

*) В определении N-п.-п. функций непрерывность можно не требовать, однако ради простоты мы с самого начала будем рассматривать только непрерывные функции. Относительно распространения теории на разрывные функции см. работу В. А. Марченко [4].

**) Если число τ удовлетворяет системе неравенств (3.1.1), то число $-\tau$ также удовлетворяет этой системе неравенств. Поэтому в определении 3.1.2 достаточно было бы потребовать, чтобы числа τ удовлетворяли неравенству

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \qquad (|x| < N).$$

чисел. Положим $N=q$, $\varepsilon=\varepsilon_k$. Согласно определению 3.1.2 можно указать действительные числа $\mu_1^{(k,q)}$, $\mu_2^{(k,q)}$, $\mu_{p_k}^{(k,q)}$ и положительное число $\delta_{k,q}$, обладающее тем свойством, что каждое действительное число τ, удовлетворяющее системе неравенств

$$|\mu_j^{(k,q)}\tau|<\delta_{k,q} \pmod{2\pi} \quad (j=1, 2, \ldots, p_{k,q}), \qquad (3.1.3)$$

есть q, ε_k-почти-период функции $f(x)$. Придавая q и k все возможные значения, мы получим счетное множество чисел μ. Расположим эти числа в одну строку. Для этого положим $h=q+k$. Число h меняется от 2 до ∞. Для каждого конечного h число чисел μ конечно. Выпишем вначале все числа μ, соответствующие $h=2$. Затем выпишем все μ, соответствующие $h=3$, и т. д. Полученную последовательность чисел обозначим через $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ Покажем, что эта последовательность обладает требуемым свойством.

Выберем произвольные положительные числа ε и N. Далее, выберем k и q столь большими, чтобы выполнялись неравенства $\varepsilon_k<\varepsilon$, $q>N$. Пусть $h=k+q$. Если $n>h$, то числа $\mu_1^{k,q}, \ldots, \mu_{r_{k,q}}^{(k,q)}$ заключаются среди чисел $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$. Поэтому каждое число τ, удовлетворяющее системе неравенств (3.1.2) с $\delta<\delta_{k,q}$, удовлетворяет также системе неравенств (3.1.3). Но если число τ удовлетворяет системе неравенств (3.1.3), то оно есть ε_k, q-почти-период $f(x)$ и, значит, ε, N-почти-период $f(x)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что определение 3.1.2 можно заменить следующим определением.

Определение 3.1.2′. *Непрерывная функция $f(x)$ называется N-п.п. функцией, если можно указать счетную последовательность фиксированных*) чисел $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, обладающую тем свойством, что, каковы бы ни были положительные числа ε и N, можно указать целое положительное число $n=n(\varepsilon, N)$ и положительное число $\delta=\delta(\varepsilon, N)$ такие, что каждое действительное число τ,*

---

*) Числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, разумеется, зависят от функции $f(x)$.

удовлетворяющее системе неравенств

$$|\Lambda_k\tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

есть ε, *N-почти-период* $f(x)$.

Из теоремы 2.1.2 следует, что каждая равномерная п.-п. функция есть N-п.-п. функция. Обратное неверно. В самом деле, легко построить пример неограниченной N-п.-п. функции. В силу теоремы 1.1.1 такая функция не может быть равномерной п.-п. функцией.

Пусть $p(x) = 2 + \cos x + \cos \sqrt{2}\, x$. Ясно, что для всех x $p(x) > 0$, так как $\cos x = \cos x\sqrt{2} = -1$ невозможно из-за несоизмеримости 1 и $\sqrt{2}$.

С другой стороны, в силу теоремы Кронекера, для любого $\delta > 0$ найдется решение системы неравенств

$$|x - \pi| < \delta \pmod{2\pi},$$

$$|\sqrt{2}\, x - \pi| < \delta \pmod{2\pi}.$$

Поэтому

$$\inf_{-\infty<x<\infty} p(x) = 0.$$

Значит, функция $q(x) = \frac{1}{p(x)}$ неограниченна. Покажем, что $q(x)$ есть N-п.-п. функция. Возьмем $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ произвольно и положим $\min\limits_{-N \leqslant x \leqslant N} p(x) = k$. Затем выберем произвольное положительное число $\delta < k$ и обозначим через $\tau = \tau(\delta)$ δ-почти-период равномерной п.-п. функции $p(x)$. Имеем для $|x| < N$:

$$|q(x+\tau) - q(x)| \leqslant \frac{|p(x+\tau) - p(x)|}{p(x)\, p(x+\tau)} \leqslant \frac{\delta}{k(k-\delta)}.$$

Поэтому, если $\delta = \min\left(\frac{k}{2}, \frac{\varepsilon\delta^2}{2}\right)$, то $\frac{\delta}{k(k-\delta)} < \varepsilon$ и, значит, τ есть ε, N-почти-период для $q(x)$.

3. Из теорем 2.1.1 и 2.1.2 следует, что определение 3.1.2 можно заменить другим определением, которое в некоторых случаях оказывается более удобным.

Определение 3.1.2″. *Непрерывная функция* $f(x)$ *называется N-п.-п. функцией, если существует равномерная п.-п. функция* $\varphi(x)$ (которую мы в дальнейшем будем называть мажорантой для функции $f(x)$), *так что для любых положительных чисел* ε *и* N *можно указать такое положительное число* $\delta=\delta(\varepsilon, N)$, *что каждый* δ*-почти-период* $\varphi(x)$ *есть* ε, N*-почти-период* $f(x)$.

Покажем, что определения 3.1.2′ и 3.1.2″ эквивалентны. То, что из определения 3.1.2″ следует определение 3.1.2′, получается непосредственно из теорем 2.1.1 и 2.1.2.

Пусть теперь $f(x)$ — N-п.-п. функция в смысле определения 3.1.2′. Рассмотрим равномерную п.-п. функцию $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}e^{i\Lambda_k x}$. Из теорем 2.1.1 и 2.1.2 следует, что если число τ удовлетворяет системе неравенств вида (3.1.2), то оно является почти-периодом равномерной п.-п. функции $\varphi(x)$ и, наоборот, каждый почти-период $\varphi(x)$ удовлетворяет системе неравенств вида (3.1.2). Поэтому из определения 3.1.2′ следует определение 3.1.2″.

Замечание. Легко видеть, что для данной N-п.-п. функции $f(x)$ существует бесчисленное множество мажорант. Все мажоранты должны содержать один и тот же модуль.

Докажем два важных свойства N-п.п. функций.

Теорема 3.1.2. *Сумма двух* N*-п.-п. функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *есть* N*-п.п. функция.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ есть мажоранта для $f(x)$ и $\psi(x)$ — для $g(x)$.

Построим мажоранту для $f(x)+g(x)$. Обозначим через $M=\{M_1, M_2, \ldots\}$ наименьший общий модуль показателей Фурье для равномерных п.-п. функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Далее рассмотрим равномерную п.-п. функцию

$$\chi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}e^{M_k x}.$$

Из теорем 2.1.1 и 2.1.2 следует, что для каждого $\delta>0$ можно указать такое $\eta=\eta(\delta)$, что каждое число $\tau=\tau_\chi(\eta)$, которое является η-почти-периодом для $\chi(x)$, есть δ-почти-период как для $\varphi(x)$, так и для $\psi(x)$ и, следовательно, ε,N-почти-периодом как для $f(x)$, так и для $g(x)$. Поэтому, если $|x|<N$, то

$$|[f(x+\tau)+g(x+\tau)]-[f(x)+g(x)]| \leqslant |f(x+\tau)-f(x)|+ \\ +|g(x+\tau)-g(x)|<2\varepsilon,$$

и, значит, $\chi(x)$ есть мажоранта суммы $f(x)+g(x)$.

Замечание 1. В общем случае нельзя в качестве мажоранты суммы двух N-п.-п. функций использовать сумму их мажорант, ибо сумма двух равномерных п.-п. функций может иметь меньшее число показателей Фурье. (Члены с одинаковыми показателями могут уничтожиться при сложении. См. также теоремы 2.1.1, 2.1.2.)

Замечание 2. Подобно тому как при доказательстве теоремы 3.1.2 мы построили мажоранту суммы двух N-п.-п. функций, можно построить мажоранту для суммы любого конечного числа N-п.-п. функций. Почти-периоды этой мажоранты совпадают с общими почти-периодами мажорант слагаемых.

Теорема 3.1.3. *Произведение двух N-п.-п. функций $f(x)$ и $g(x)$ есть N-п.-п. функция.*

Доказательство. Вначале покажем, что квадрат N-п.-п. функции есть N-п.-п. функция. Пусть $N>0$ выбрано произвольно. Положим $\max\limits_{-N\leqslant x\leqslant N}|f(x)|=M$. Далее выберем произвольное положительное число $\varepsilon<M$ и обозначим через τ $\frac{\varepsilon}{3M}$, N-почти-период $f(x)$. Если $|x|<N$, то

$$f^2(x+\tau)-f^2(x)| \leqslant (|f(x+\tau)|+|f(x)|)\,|f(x+\tau)-f(x)< \\ <(\varepsilon+2M)\frac{\varepsilon}{3M}<\varepsilon.$$

Поэтому τ есть ε, N-почти-период для $f^2(x)$. Теперь доказательство следует из предыдущей теоремы и тождества

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}.$$

4. Принятое нами определение N-п.-п. функций имеет следующий недостаток: то обстоятельство, что равномерная п.-п. функция есть N-п.-п. функция, получается не из первоначального определения равномерных п.-п. функций, а из глубокой теоремы 2.1.2.

Если мы все же, несмотря на это, остановились на определении 3.1.2′, то это объясняется тем, что N-п.-п. функции, встречающиеся в приложениях, порождаются обычно равномерными п.-п. функциями и потому условие 3.1.2′ непосредственно легко проверяется. С другой стороны, если в основу теории положить определение 3.1.2′, то доказательства основных теорем значительно упрощаются.

В наших первоначальных работах по теории N-п.-п. функций мы исходили из другого определения, которое следует рассматривать как непосредственное обобщение равномерной почти-периодичности.

Определение 3.1.3. *Непрерывная функция $f(x)$ называется N-п.-п. функцией, если она удовлетворяет следующим двум условиям:*

I. *Для произвольных положительных чисел ε и N можно указать относительно плотное множество ε, N-почти-периодов $f(x)$, т. е. чисел $\tau=\tau(\varepsilon, N)$, удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon$$

при $|x|<N$.

II. *Если $\tau_1=\tau(\varepsilon_1, N)$ есть ε_1, N-почти-период $f(x)$ и $\tau_2=\tau(\varepsilon_2, N)$ есть ε_2, N-почти-период $f(x)$, то числа $\tau_1 \pm \tau_2$ суть δ, N-почти-периоды $f(x)$ $(\delta=\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, причем при каждом фиксированном N и ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$, наименьшее из чисел δ также стремится к нулю* *).

Теорема 3.1.4. *Определения* 3.1.3 *и* 3.1.2 *эквивалентны.*

Доказательство. 1) Из определения 3.1.2 следует определение 3.1.3. В самом деле, пусть $f(x)$ есть N-п.-п. функция в смысле определения 3.1.2 и, следовательно, в смысле определения 3.1.2″. Обозначим через $\varphi(x)$ мажоранту для $f(x)$. Выберем произвольно $\varepsilon>0$ и $N>0$

*) Числа τ удовлетворяют двум условиям. Поэтому может случиться, что при данных ε и N следует рассматривать не все ε, N-почти-периоды функции $f(x)$, а только некоторую часть, так, чтобы выполнялись оба условия. По этому поводу см. интересную сноску в работе Б. Я. Левина [1], стр. 50.

и пусть число $\eta=\eta(\varepsilon, N)$ подобрано так, что каждый η-почти-период равномерной п.-п. функции $\varphi(x)$ есть ε, N-почти-период $f(x)$.

Положим $\zeta=\min(\varepsilon, \eta)$. Очевидно, что каждый ζ-почти-период $\varphi(x)$ есть вместе с тем η-почти-период $\varphi(x)$. Кроме того, если $\varepsilon\to 0$, то ζ также стремится к нулю*). Обозначим через $E(\zeta)$ множество ζ-почти-периодов функции $\varphi(x)$. Множество $E(\zeta)$ относительно плотно. С другой стороны, в силу определения мажоранты, если $\tau\in E(\zeta)$ и $|x|<N$, то

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon.$$

Поэтому условие I выполняется. Покажем, что условие II также выполняется. По данным ε_1, ε_2 и N подберем $\zeta_1=\zeta(\varepsilon_1, N)$ и $\zeta_2=\zeta(\varepsilon_2, N)$. Если $\tau_1\in E(\zeta_1)$, $\tau_2\in E(\zeta_2)$, то $\tau_1\pm\tau_2\in E(\zeta_1+\zeta_2)$. Если ε_1 и $\varepsilon_2\to 0$, то ζ_1 и ζ_2 также стремятся к нулю. Это следует из определения чисел ζ ($\zeta=\min(\varepsilon, \eta)$). По определению мажоранты, каковы бы ни были числа $\delta>0$ и $N>0$, можно указать такое $\rho=\rho(\delta, N)$, что если $\tau\in E\{\rho, \varphi(x)\}$, то τ есть δ, N-почти-период $f(x)$. Выберем ε_1 и ε_2 столь малыми, чтобы имело место неравенство $\zeta_1+\zeta_2<\rho$. В этом случае числа $\tau_1\pm\tau_2$ будут ρ-почти-периодами $\varphi(x)$ и, значит, δ, N-почти-периодами $f(x)$. Так как число δ было указано произвольно, то при ε_1 и $\varepsilon_2\to 0$ δ также стремится к нулю и, значит, условие II выполняется.

2) Из определения 3.1.3 следует определение 3.1.2.

Доказательство опирается на глубокую теорему Н. Н. Боголюбова, которую мы приведем здесь без доказательства **).

Теорема Н. Н. Боголюбова. *Пусть $\mathfrak{E}$ есть произвольное относительно плотное множество действительных чисел. С каждыми достаточно малыми положи-*

---

*) Может случиться, что при $\varepsilon\to 0$ η к нулю не стремится. Поэтому мы ввели еще число ζ, т. е. рассматриваем не все ε, N-почти-периоды функции $f(x)$, а только некоторую часть. Мы вынуждены к этому прибегать ввиду условия II.

**) Н. Н. Боголюбов [1]. Эта теорема позволила Н. Н. Боголюбову дать глубокое доказательство теоремы аппроксимации для равномерных п.-п. функций.

тельными числами δ и η можно сопоставить линейно независимые числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ такие, что если число τ удовлетворяет системе неравенств

$$|\omega_k\tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

то оно обязано удовлетворять также неравенству $|\tau-\tau_1-\tau_2+\tau_3+\tau_4| < \eta$, где τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4 — некоторые числа множества $\mathscr{E}$.

Предположим, что $f(x)$ есть N-п.-п. функция в смысле определения 3.2.3. Выберем произвольные положительные ε и N и обозначим через $E(\varepsilon, N)$ множество ε, N-почти-периодов функции $f(x)$. Далее, подберем положительное число $\eta=\eta(\varepsilon, N) < 1$ так, чтобы при $|h| < \eta$ и $|x| < N$ выполнялось неравенство

$$|f(x+h)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.1.4}$$

что возможно в силу непрерывности функции $f(x)$. Наконец, подберем положительное число $\delta=\delta(\varepsilon, N)$ так, что если τ_1, τ_2, τ_3, $\tau_4 \in E(\delta, N+1)$, то $\tau^*=\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4 \in E\left(\frac{\varepsilon}{2}, N+1\right)$. Это возможно в силу условия II. Из теоремы Н. Н. Боголюбова следует, что существуют линейно-независимые числа $\omega_1, \ldots, \omega_p$, обладающие тем свойством, что если число τ удовлетворяет системе неравенств

$$|\omega_k\tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p), \tag{3.1.5}$$

то в множестве $E(\delta, N+1)$ можно указать числа τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, для которых выполняется неравенство

$$|\tau-\tau^*| < \eta \quad (\tau^*=\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4). \tag{3.1.6}$$

Покажем теперь, что число τ есть ε, N-почти-период $f(x)$ В самом деле, из неравенства (3.1.6) следует, что $\tau=\tau^*+h$, где $|h| < \eta$. Так как $\tau^* \in E\left(\frac{\varepsilon}{2}, N+1\right)$ и $\eta < 1$, то из неравенства (3.1.4) следует ($|x| < N$)

$$|f(x+\tau)-f(x)| \leqslant |f(x+\tau^*+h)-f(x+h)| + \\ + |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы показали, что, каковы бы ни были положительные числа ε и N, можно указать линейно независимые действительные числа $\omega_1, \ldots, \omega_p$ и положительное число δ такие, что каждое действительное число τ, удовлетворяющее системе неравенств (3.1.5) есть ε, N-почти-период $f(x)$, т. е. $f(x)$ есть N-п.-п. функция в смысле определения 3.1.2 и, значит, в силу теоремы 3.1.1 в смысле определения 3.1.2'. Теорема полностью доказана.

§ 2. Ряды Фурье для N-п.-п. функций

1. Пусть $f(x)$ есть N-п.-п. функция. Обозначим числа модуля функции $\varphi(x)$ (мажоранты $f(x)$) в произвольном порядке через M_1, M_2, ... Пусть

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|\,dx<\infty. \tag{3.2.1}$$

Если $\lambda=\lambda_0$ — фиксированное действительное число, то в силу (3.2.1)

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{-i\lambda_0 x}\,dx\right|\leqslant\overline{\lim}\int_{-T}^{T}|f(x)|\,dx<\infty.$$

Поэтому, пользуясь диагональным процессом Кантора, можно выделить последовательность чисел T_1, T_2, ... ($T_n\to\infty$ при $n\to\infty$), для которой

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2T_n}\int_{-T_n}^{T_n}f(x)\,e^{-iM_kx}\,dx$$

существует для всех $k=1, 2, \ldots$

Ряд

$$f(x)\sim\sum_k A_k e^{iM_kx}$$

мы будем называть рядом Фурье N-п.-п. функции $f(x)$. Мы покажем в этом параграфе, что существуют N-п.-п. функции, для которых ряд Фурье определяется неоднозначно. Тем не менее, как мы увидим в дальнейшем, каждый ряд Фурье N-п.-п. функции может служить для построения конечных тригонометрических сумм, сходящихся к $f(x)$.

2. Покажем, что существуют ограниченные N-п.-п. функции $f(x)$, для которых выражение

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

не стремится к определенному пределу при $T\to\infty$ *). Пусть $\{\varepsilon_i\}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i=\varepsilon<\frac{1}{3}$. Выберем произвольное число $T_1>1$ и положим в интервале $(-T_1, T_1)$ $f(x)=1$. Определим число l_1 из условия

$$l_1>\frac{T_1}{\varepsilon_1}$$

и положим

$$f(x+nl_1)=f(x)\quad (|x|<T_1,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Таким образом, функция $f(x)$ определена на периодическом множестве интервалов $\mathfrak{M}_1$ плотности **), меньшей ε_1.

Выберем теперь число $T_2>0$ такое, чтобы сумма длин интервалов, попавших в интервал $(-T_2, T_2)$, в которых $f(x)$ уже определена, не превышала $2\varepsilon_1T_2$. Это возможно, так как плотность множества $\mathfrak{M}_1$ меньше ε_1. На пересечении множества, дополнительного к $\mathfrak{M}_1$, с интервалом $(-T_2, T_2)$ положим $f(x)=0$. Определим число $l_2=n_1l_1$ (n_1 — натуральное число) из условия

$$l_2>\frac{T_2}{\varepsilon_2}$$

и положим

$$f(x+nl_2)=f(x)\quad (|x|<T_2,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

---

*) Б. Я. Левин и Б. М. Левитан [1].

**) Плотностью множества E называется $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{mE_t}{2t}$, где E_t — пересечение множества E с интервалом $(-t, t)$.

При этом функция $f(x)$ не переопределяется на множестве $\mathfrak{M}_1$, так как $l_2 = n_1 l_1$ есть период множества $\mathfrak{M}_1$. Теперь функция $f(x)$ определена на периодическом множестве интервалов $\mathfrak{M}_2$ плотности, меньшей $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Выберем $T_3 > 0$ так, чтобы сумма длин интервалов, попавших в интервал $(-T_3, T_3)$, в которых функция $f(x)$ уже определена, не превышала $2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) T_3$.

Определим число $l_3 = n_2 l_2$ (n_2 — натуральное число) из условия

$$l_3 > \frac{T_3}{\varepsilon_3}.$$

На пересечении множества, дополнительного к $\mathfrak{M}_2$, с интервалом $(-T_2, T_2)$ положим $f(x) = 1$ и пусть

$$f(x + nl_3) = f(x) \quad (|x| < T_3, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При этом $f(x)$ не переопределяется на $\mathfrak{M}_2$. Теперь $f(x)$ определена на периодическом множестве интервалов плотности, меньшей $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Таким образом, мы можем определить последовательно числа

$$T_1, T_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots,$$

и тем самым определим ограниченную на всей действительной оси функцию $f(x)$. Покажем, что функция $f(x)$ не имеет среднего значения.

В самом деле, очевидно, что

$$\frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1} f(x)\,dx = 1 > \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2T_2}\int_{-T_2}^{T_2} f(x)\,dx < \varepsilon_1 < \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2T_3}\int_{-T_3}^{T_3} f(x)\,dx > 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) > 1 - \varepsilon > \frac{2}{3}.$$

И вообще

$$\frac{1}{2T_{2k+1}}\int_{-T_{2k+1}}^{T_{2k+1}} f(x)\,dx > 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{2k}) > 1 - \varepsilon > \frac{2}{3}, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{1}{2T_{2k}}\int_{-T_{2k}}^{T_{2k}} f(x)\,dx < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{2k-1} < \varepsilon < \frac{1}{3}. \tag{3.2.3}$$

Поэтому для функции $f(x)$ среднее значение не существует. Функция $f(x)$ разрывна. Для того чтобы получить непрерывную N-п.-п. функцию, не имеющую среднего значения, рассмотрим функцию

$$f_\delta(x)=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta f(x+u)\,du \quad (0<\delta<1).$$

Интегрируя равенство

$$f(x+u+nl_m)=f(x+u)$$
$$(|x|<T_m-\delta,\ 0\leqslant u\leqslant\delta,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

получим:

$$f_\delta(x+nl_m)=f_\delta(x)\ (|x|<T_m,\ n=0, \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

$f_\delta(x)$ есть непрерывная N-п.-п. функция. Так как

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_\delta(x)\,dx=\int_0^\delta du\,\frac{1}{2T}\int_{-T+u}^{T+u} f(x)\,dx,$$

то из (3.2.2) и (3.2.3) следует, что среднее значение для функции $f_\delta(x)$ не существует.

Можно также показать *), что для каждого регулярного способа суммирования существует непрерывная N-п.-п. функция, среднее значение которой не суммируемо этим способом.

§ 3. Теоремы аппроксимации и единственности для N-п.-п. функций

1. В настоящем параграфе будет показано, что для каждой N-п.-п. функции $f(x)$ можно указать с помощью некоторого метода суммирования ряда Фурье этой функции конечные тригонометрические суммы, которые сходятся к $f(x)$ равномерно в каждом конечном интервале. Отсюда, в частности, будет следовать теорема единственности для рядов Фурье N-п.п. функций.

*) Б. Я. Левин и Б. М. Левитан [2].

Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ — некоторое счетное множество действительных чисел. Обозначим через $E(\delta; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ $\left(0<\delta<\frac{\pi}{2}\right)$ множество действительных чисел τ, являющихся решениями системы неравенств

$$|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

В дальнейшем существенную роль играет тригонометрический многочлен

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(\cos\Lambda_1 x + \cos\Lambda_2 x + \ldots + \cos\Lambda_n x).$$

Нам понадобятся следующие простые свойства этого многочлена.

а) Если $x \in E(\delta; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ и $\delta < \frac{\pi}{2}$, то $\sigma_n(x) > \cos\delta$. Действительно, в этом случае $|\Lambda_k x| < \delta \pmod{2\pi}$ и, значит, для всех $k=1, 2, \ldots, n$ $\cos\Lambda_k x > \cos\delta$.

б) Если $x \bar{\in} E(\delta; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ $\left(\delta<\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$|\sigma_n(x)| < 1 - \frac{1-\cos\delta}{n}.$$

Действительно, в этом случае, по крайней мере для одного Λ_k, выполняется неравенство $|\cos\Lambda_k x| < \cos\delta$. Поэтому

$$\sigma_n(x) < \frac{n-1+\cos\delta}{n} = 1 - \frac{1-\cos\delta}{n}.$$

Рассмотрим многочлен

$$S_n(x) = \sigma_n(x) + \alpha, \quad \text{где } \alpha = \frac{1-\cos\delta}{2n}.$$

в) Если $x \bar{\in} E(\delta; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, то

$$S_n(x) < 1 - \frac{1-\cos\delta}{n} + \alpha = 1 - \alpha.$$

г) Пусть $\delta' > 0$ выбрано так, что $\cos\delta' > 1 - \frac{\alpha}{2}$. Тогда для $x \in E(\delta'; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$

$$S_n(x) > \cos\delta' + \alpha > 1 - \frac{\alpha}{2} + \alpha = 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

д) Положим

$$k_{n,p} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [S_n(x)]^{2p}\, dx. \qquad (3.3.1)$$

Покажем, что при фиксированном n и $p \to \infty$ $k_{n,p} \to \infty$. В самом деле, пусть δ' удовлетворяет условиям п. г). Обозначим для сокращения записи через E' множество $E(\delta'; \Lambda_1 \ldots, \Lambda_n)$ и через E'_T — пересечение множества E' с интервалом $(-T, T)$. Имеем при каждом фиксированном T

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [S_n(x)]^{2p}\, dx > \frac{1}{2T} \int_{E'_T} [S_n(x)]^{2p}\, dx >$$
$$> \left(1 + \frac{a}{2}\right)^{2p} \frac{1}{2T} \int_{E'_T} dx. \qquad (3.3.2)$$

Так как множество E' состоит из относительно плотного множества интервалов, длина каждого из которых превосходит некоторое фиксированное положительное число *), то

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{E'_T} dx > 0.$$

Поэтому из неравенства (3.3.2) следует, что при $p \to \infty$ $k_{n,p} \to \infty$.

2. Пусть $f(x)$ — N-п.-п. функция и числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ выбраны согласно определению 3.1.2. Предположим, что

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|\, dx < \infty. \qquad (3.3.3)$$

Обозначим через $M_1, M_2, \ldots$ наименьший модуль, содержащий числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$.

*) В силу теорем 2.1.1 и 2.1.2 множество E' есть множество всех почти-периодов равномерной п.-п. функции с показателями Фурье $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Пусть $T_1, T_2, \ldots$ — последовательность неограниченно возрастающих положительных чисел, для которой существуют пределы

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} f(x)\, e^{-iM_n x}\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Зафиксируем целые положительные числа n и p и действительное число x и рассмотрим конечную тригонометрическую сумму

$$P_{n,p}(x) = \frac{1}{k_{n,p}} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m-x}^{T_m-x} f(x+t)\,[S_n(t)]^{2p}\, dt. \qquad (3.3.4)$$

Теорема 3.3.1. *Пусть $f(x)$ — N-п.-п. функция, удовлетворяющая условию* (3.3.3). *Каковы бы ни были положительные числа ε и N, можно указать такие целые положительные числа n и p, что для всех $|x| < N$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - P_{n,p}(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. По данным ε и N выберем согласно определению 3.1.2′ $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, N\right)$ и $n = n\left(\frac{\varepsilon}{2}, N\right)$ так, чтобы числа множества $E(\delta;\ \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ были $\frac{\varepsilon}{2}$, N-почти-периодами для $f(x)$. Выбрав таким образом δ и n, построим конечную тригонометрическую сумму $P_{n,p}(x)$ по формуле (3.3.4). Рассмотрим теперь разность

$P_{n,p}(x) - f(x) =$

$$= \frac{1}{k_{n,p}} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} [f(x+t) - f(x)]\,[S_n(t)]^{2p}\, dt. \qquad (3.3.5)$$

Если $t \in E(\delta;\ \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ и $|x| < N$, то $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому, полагая для сокращения записи $E = E(\delta;\ \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, $E_{m,x}$ — пересечение множества E с интервалом $(-T_m - x,\ T_m - x)$ и $CE_{m,x}$ — дополнение множества $E_{m,x}$ относительно интервала

$(-T_m, -x, T_m - x)$, мы получим при фиксированном p

$$|P_{n,p}(x) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{E_{m,x}} |f(x+t) - f(x)| S_n^{2p}(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{CE_{m,x}} |f(x+t) - f(x)| S_n^{2p}(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{CE_{m,x}} |f(x+t)| S_n^{2p}(t)\,dt +$$

$$+ |f(x)| \frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{CE_{m,x}} S_n^{2p}(t)\,dt.$$

Числа множества $CE_{m,x}$ не принадлежат множеству E. Поэтому согласно п. в), если $t \in CE_{m,x}$, то $|S_n(t)| < 1 - \alpha < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{CE_{m,x}} |f(x+t)| S_n^{2p}(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{CE_{m,x}} |f(x+t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{-T_m - x}^{T_m - x} |f(x+t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f(t)|\,dt;$$

$$\frac{1}{k_{n,p}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{2T_m} \int\limits_{CE_{m,x}} S_n^{2p}(t)\,dt \leqslant \frac{1}{k_{n,p}}.$$

Таким образом, мы имеем окончательно ($|x| < N$)

$$|P_{n,p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k_{n,p}} \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f(t)|\,dt + |f(x)| \right\}.$$

Так как при фиксированном n и $p \to \infty$ $k_{n,p} \to \infty$, то, выбрав достаточно большое p, мы получим из последнего неравенства ($|x| < N$):

$$|P_{n,p}(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

3. Из теоремы аппроксимации следует непосредственно теорема единственности для рядов Фурье N-п.-п. функций.

Теорема единственности. Пусть какой-либо из рядов Фурье*) N-п.-п. функции $f(x)$ совпадает с каким-либо из рядов Фурье N-п.-п. функции $g(x)$. Тогда $f(x) \equiv g(x)$.

Доказательство. В силу теоремы аппроксимации $f(x)$ и $g(x)$ можно аппроксимировать равномерно в каждом конечном интервале одной и той же конечной тригонометрической суммой.

В заключение этого параграфа заметим, что теорема аппроксимации и теорема единственности для N-п.-п. функций впервые были доказаны автором этой книги**). Изложенное здесь доказательство принадлежит В. А. Марченко***).

§ 4. Распространение метода Бохнера-Фейера на N-п.-п. функции

1. В этом параграфе будет показано, что метод суммирования Бохнера-Фейера распространяется на ограниченные N-п.-п. функции. Этот важный результат впервые был получен В. А. Марченко****).

Пусть $f(x)$ — ограниченная N-п.-п. функция и $\varphi(x)$ — ее мажоранта. Обозначим через $\beta_1, \beta_2, \ldots$ базис показателей Фурье функции $\varphi(x)$ (см. § 8 гл. I) и через $\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots$ — сами показатели Фурье $\varphi(x)$.

---

*) Так как коэффициенты Фурье могут определяться неоднозначно, то N-п.-п. функции может соответствовать не один ряд Фурье, а некоторое множество рядов Фурье.

**) Б. М. Левитан [1].

***) В. А. Марченко [4].

****) В. А. Марченко [4]. См. также Б. Я. Левин [2], где дано другое доказательство.

Рассмотрим счетное множество действительных чисел

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots + r_m\beta_m \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

с рациональными $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Обозначим числа этого множества в произвольном порядке через $M_1, M_2, \ldots$ Далее, выберем последовательность неограниченно возрастающих действительных чисел $T_1, T_2, \ldots$ так, чтобы для всех $k = 1, 2, \ldots$ существовали пределы

$$A_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} f(x)\, e^{-iM_k x}\, dx.$$

Чтобы доказать сходимость метода Бохнера-Фейера для ограниченных N-п.-п. функций, следует изучить более подробно составное ядро Бохнера-Фейера.

Для удобства мы разобьем это изучение на пункты.

а) Пусть число t удовлетворяет системе неравенств

$$|\Lambda_k t| < \eta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.4.1)$$

где $\eta > 0$ и n — произвольные числа. Покажем, что существуют такие целые положительные числа $q = q(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ и $m = m(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, а также такое положительное число $\delta = \delta(\eta; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, что если число t удовлетворяет системе неравенств

$$\left|\frac{\beta_k}{q} t\right| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (3.4.2)$$

то оно удовлетворяет также системе неравенств (3.4.1).

В самом деле, при фиксированных $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ можно указать в силу определения базиса $\beta_1, \beta_2, \ldots$ такие целые положительные числа $q = q(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ и $m = m(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, что каждое Λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выражается в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами из чисел $\frac{\beta_k}{q}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Выбрав q и m, можно затем подобрать столь малое положительное число $\delta = \delta(\eta; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, чтобы из неравенств (3.4.2) следовали неравенства (3.4.1).

б) Обозначим через Q произвольное целое положительное число. Пусть $\lambda_k = \frac{\beta_k}{q}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, где q и m

выбраны согласно п. а). Рассмотрим ядра Фейера

$$K_Q(\lambda_k t) = \frac{1}{Q}\left(\frac{\sin\frac{Q\lambda_k t}{2}}{\sin\frac{\lambda_k t}{2}}\right)^2 \quad (k=1, 2, \ldots, m).$$

Если $|\lambda_k t| \geqslant \delta \pmod{2\pi}$ $(0<\delta<\pi)$, то $\sin\frac{\lambda_k t}{2} \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$.

Поэтому для таких t имеем:

$$K_Q(\lambda_k t) \leqslant \frac{1}{Q\sin^2\frac{\delta}{2}}. \tag{3.4.3}$$

в) Рассмотрим теперь составное ядро Бохнера-Фейера

$$K^{(Q)}(t) = K_Q(\lambda_1 t) K_Q(\lambda_2 t) \ldots K_Q(\lambda_m t).$$

Мы знаем, что (см. § 8 гл. I)

$$M_t\{K^{(Q)}(t)\} = 1. \tag{3.4.4}$$

Обозначим через $E_k = E(\delta; \lambda_k)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ множество решений неравенства

$$|\lambda_k t| < \delta \pmod{2\pi}$$

и через $E = E(\delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — множество решений системы неравенств (3.4.2). Через $E_k^{(T)}$ (соответственно $E^{(T)}$) обозначим пересечение множеств $E_k\,(E)$ с интервалом $(-T, T)$. Легко видеть, что множество $E\,(E^{(T)})$ есть пересечение множества E_k $(E_k^{(T)})$ для $k=1, 2, \ldots, m$.

В силу неравенства (3.4.3) для любого $T>0$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} K^{(Q)}(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} K_Q(\lambda_1 t) K_Q(\lambda_2 t)\ldots K_Q(\lambda_m t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{E_1^{(T)}} K_Q(\lambda_1 t) K_Q(\lambda_2 t)\ldots K_Q(\lambda_m t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2T}\int_{CE_1^{(T)}} K_Q(\lambda_1 t) K_Q(\lambda_2 t) - K_Q(\lambda_m t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2T} \int\limits_{E_1^{(T)}} K_Q(\lambda_1 t) K_Q(\lambda_2 t) \ldots K_Q(\lambda_m t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{Q \sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} K_Q(\lambda_2 t) \ldots K_Q(\lambda_m t)\, dt.$$

Выделяя теперь из множеств $E_1^{(T)}$ точки множества $E_2^{(T)}$, мы получим аналогичным образом неравенство

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} K^{(Q)}(t)\, dt \leqslant \frac{1}{2T} \int\limits_{E_1^{(T)} \cdot E_2^{(T)}} K^{(Q)}(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{Q \sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \left[\frac{K^{(Q)}(t)}{K_Q(\lambda_1 t)} + \frac{K^{(Q)}(t)}{K_Q(\lambda_2 t)} \right] dt.$$

Продолжая этот процесс и переходя к пределу, полагая $T \to \infty$, мы получим важное неравенство

$$M\{K^{(Q)}(t)\} \leqslant \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{E^{(T)}} K^{(Q)}(t)\, dt + \frac{m}{Q \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \tag{3.4.5}$$

г) Пусть $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ выбраны произвольно. Подберем числа $n = n(\varepsilon, N)$ и $\eta = \eta(\varepsilon, N)$ так, чтобы числа t, удовлетворяющие системе неравенств (3.4.1), были $\frac{\varepsilon}{2}$, N-почти-периодами для $f(x)$. Затем подберем числа δ и m согласно п. а). Таким образом, числа t, удовлетворяющие системе неравенств (3.4.2), удовлетворяют также для $|x| < N$ неравенству

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4.6}$$

Рассмотрим теперь многочлены Бохнера-Фейера

$$P_Q(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2T_n} \int\limits_{-T_n}^{T_n} f(x+t) K^{(Q)}(t)\, dt.$$

Пусть $\sup\limits_x |f(x)| = \Gamma$. Из (3.4.4), (3.4.5) и (3.4.6) легко следует ($|x| < N$)

$$|P_Q(x) - f(x)| \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f(x+t) - f(x)|\, K^{(Q)}(t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \overline{\lim} \frac{1}{2T} \int\limits_{E(T)} K^{(Q)}(t)\, dt + \frac{2\Gamma m}{Q \sin^2 \frac{\delta}{2}} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} M\{K^{(Q)}(t)\} + \frac{2\Gamma m}{Q\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\Gamma m}{Q\sin^2\frac{\delta}{2}}. \quad (3.4.7)$$

При фиксированных m и δ можно подобрать столь большое Q *), чтобы имело место неравенство

$$\frac{2\Gamma m}{Q\sin^2\frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.4.8)$$

Из (3.4.7) и (3.4.8) следует неравенство

$$|P_Q(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (|x| < N), \quad (3.4.9)$$

что и доказывает равномерную в каждом конечном интервале сходимость сумм Бохнера-Фейера к N-п.-п. функции.

2. Если $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция, то неравенство (3.4.6) имеет место для всех действительных x. Поэтому и неравенство (3.4.9) имеет место также для всех действительных x. Мы получили таким образом новое доказательство сходимости сумм Бохнера-Фейера для равномерных п.-п. функций.

Более того, пусть E есть множество равномерно ограниченных, равностепенно непрерывных и равностепенно почти-периодических функций с одним и тем же модулем показателей Фурье **). Анализируя предыдущее доказательство, легко усмотреть, что оценка (3.4.9) имеет место равномерно для всех x и всех функций семейства E. Поэтому нами доказана также следующая важная

*) Число Q от m и δ не зависит.

**) Из теоремы 2.6.3 следует, что это условие автоматически выполняется, если выполнены первые три.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $E=\{f(x)\}$—*семейство равномерно ограниченных, равностепенно непрерывных и равностепенно п.-п. функций. Каково бы ни было положительное число* ε, *можно указать такое составное ядро* $K^{(Q)}(x)$, *Бохнера-Фейера, что для всех функций рассматриваемого семейства выполняется неравенство*

$$\sup_x |f(x)-M_t\{f(x+t)K^{(Q)}(t)\}|<\varepsilon.$$

Замечание. Из теоремы 2.1.2 и из результатов настоящего параграфа следует, что существование для почти-периодов равномерной п.-п. функции системы неравенств вида (3.4.1) эквивалентно основной теореме для этих функций. В связи с этим отметим, что Н. Н. Боголюбов в очень интересной работе*) показал непосредственно, не прибегая к теореме аппроксимации и к аппарату теории рядов Фурье, что почти-периоды равномерной п.-п. функции суть все решения системы неравенств вида (3.4.1) при некоторых $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$.

§ 5. Некоторые условия для того, чтобы N-п.-п. функция была равномерной п.-п. функцией

1. В этом параграфе мы укажем некоторые условия, при выполнении которых N-п.-п. функция на самом деле есть равномерная п.-п. функция.

Начнем с очевидного условия, которое по существу носит характер замечания к теореме единственности для N-п.-п. функций.

Пусть $f(x)$ *есть* N-п.-п. *функция с рядом Фурье*

$$f(x)\sim\sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$$

и

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|\,dx<\infty.$$

*) Н. Н. Боголюбов [1], [2].

Предположим, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится абсолютно, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$. *В этом случае $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.* В самом деле, рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

$g(x)$ есть равномерная п.-п. функция, а значит, и подавно N-п.-п. функция с тем же модулем показателей Фурье, что и функция $f(x)$. Разность $h(x) = f(x) - g(x)$ есть также N-п.-п. функция с тем же модулем, что и у $f(x)$. Легко видеть, что все коэффициенты Фурье функции $h(x)$ равны нулю. Поэтому в силу теоремы единственности для N-п.-п. функций $h(x) \equiv 0$ и, значит, $f(x) \equiv g(x)$.

Укажем теперь два простых признака абсолютной сходимости ряда Фурье N-п.-п. функции.

1) *Если N-п.-п. функция $f(x) \sim \sum_n A_n e^{iM_n x}$ ограничена и все ее коэффициенты Фурье A_n положительны, то ряд $\sum_n A_n$ сходится* *). Этот признак следует непосредственно из метода Бохнера-Фейера, в точности так же, как и для равномерных п.-п. функций (см. теорему 1.9.1).

2) *Пусть $f(x) \sim \sum_n A_n e^{iM_n x}$ есть ограниченная N-п.-п. функция. Предположим, что те M_n, для которых $A_n \neq 0$ — обозначим их в произвольном порядке через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — образуют линейно независимое множество чисел* (см. § 9 гл. I). *При этих предположениях ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ сходится, и значит, $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.*

Доказательство этого признака проводится буквально так же, как и в случае равномерных п.-п. функций (см. теорему 1.9.2).

---

*) Числа M_n строятся по рациональному базису мажоранты $f(x)$ (см. § 3 настоящей главы). Используя другой метод суммирования ряда Фурье, можно избавиться от условия ограниченности функции $f(x)$.

2. Условия другого типа можно получить, накладывая ограничения на предельные точки показателей Фурье N-п.-п. функций. Доказательству теоремы, которая будет нами получена, удобно предпослать две леммы.

Лемма 3.5.1. *Пусть последовательность конечных тригонометрических сумм*

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}e^{i\lambda_k x}$$

при $n\to\infty$ сходится равномерно в каждом конечном интервале к функции $f(x)$. Если

1) *существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k,n}=a_k$ $(k=1, 2, \ldots)$,*

2) *числа λ_k имеют единственную предельную точку на конечном расстоянии и*

3) *суммы $S_n(x)$ равномерно ограничены, то $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.*

Доказательство. Вначале мы покажем, что $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, причем последовательность сумм $S'_n(x)$ сходится равномерно в каждом конечном интервале к $f'(x)$. Так как по условию показатели λ_k имеют единственную предельную точку на конечном расстоянии, то они ограничены. Пусть $|\lambda_k|<M$. Выберем $a>M$ и построим согласно (1.10.2) функцию $\psi_{a,b}(u)$. Легко видеть (см. лемму 1.10.2), что для всех n

$$S_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x+u)\,\psi_{a,b}(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\xi)\,\psi_{a,b}(\xi-x)\,d\xi. \tag{3.5.1}$$

Дифференцируя равенство (3.5.1), мы получим:

$$S'_n(x)=-\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\xi)\,\psi'_{a,b}(\xi-x)\,d\xi. \tag{3.5.2}$$

Так как функция $\psi'_{a,b}(u)\in L(-\infty,\infty)$ и суммы $S_n(\xi)$ сходятся равномерно в каждом конечном интервале, то из равенства (3.5.2) следует, что последовательность конечных сумм $S'_n(x)$ сходится равномерно в каждом конечном интервале к некоторой непрерывной функции $g(x)$. Переходя в равенствах (3.5.1) и (3.5.2) к пределу, полагая $n \to \infty$, мы получим:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \psi_{a,b}(\xi - x)\, d\xi, \tag{3.5.3}$$

$$g(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \psi'_{a,b}(\xi - x)\, d\xi. \tag{3.5.4}$$

Дифференцируя равенство (3.5.3), получим:

$$f'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \psi'_{a,b}(\xi - x)\, d\xi. \tag{3.5.5}$$

Сравнивая (3.5.5) и (3.5.4), заключаем, что $g(x) = f'(x)$. Итак, мы доказали, что существует производная $f'(x)$ и последовательность конечных сумм $S'_n(x)$ сходится к $f'(x)$ равномерно в каждом конечном интервале. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\lambda^* = 0$. В противном случае достаточно рассмотреть суммы $S_n(x)\, e^{-i\lambda^* x}$.

Выберем произвольное положительное число ε и положим $a = \varepsilon$, $b = 2\varepsilon$. Далее, построим согласно (1.10.2) функцию $\psi_{a,b}(u)$. В силу леммы 1.10.2

$$\sigma_{n,\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S'_n(x+u)\, \psi_{a,b}(u)\, du =$$

$$= \frac{2}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} S'_n(x+u) \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} u \sin \frac{3\varepsilon}{2} u}{u^2}\, du =$$

$$= \sum_{|\lambda_k| \leq \varepsilon} i\lambda_k a_{k,n} e^{i\lambda_k x} + \sum_{\varepsilon < |\lambda_k| < 2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (2\varepsilon - |\lambda_k|)\, i\lambda_k a_{k,n} e^{i\lambda_k x}$$

и, значит,

$$S'_n(x) - \sigma_{n,\varepsilon}(x) =$$

$$= \sum_{\varepsilon < |\lambda_k| \leq 2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (|\lambda_k| - \varepsilon)\, i\lambda_k a_{k,n} e^{i\lambda_k x} + \sum_{|\lambda_k| > 2\varepsilon} i\lambda_k a_{k,n} e^{i\lambda_k x}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, при $n \to \infty$ мы получим:

$$f'(x) - \sigma_\varepsilon(x) = \\ = \sum_{\varepsilon < |\lambda_k| \leqslant 2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}(|\lambda_k| - \varepsilon)\, i\lambda_k a_k e^{i\lambda_k x} + \sum_{|\lambda_k| > 2\varepsilon} i\lambda_k a_k e^{i\lambda_k x}, \tag{3.5.6}$$

причем

$$\sigma_\varepsilon(x) = \frac{2}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x+u) \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}u \sin\frac{3\varepsilon}{2}u}{u^2}\, du.$$

Интегрируя по частям, мы получим:

$$\sigma_\varepsilon(x) = -\frac{2}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{d}{du}\left(\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}u \sin\frac{3\varepsilon}{2}u}{u^2}\right) du.$$

Пусть $\sup\limits_x |f(x)| = \Gamma$. Заменяя в последнем интеграле εu на v, мы получим оценку

$$|\sigma_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{2\Gamma}{\pi\varepsilon}\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dv}\left(\frac{\sin\frac{v}{2}\sin\frac{3v}{2}}{v^2}\right)\right| dv = O(\varepsilon).$$

Поэтому, если $\varepsilon \to 0$, то $\sigma_\varepsilon(x)$ стремится к нулю равномерно по x. Отсюда и из равенства (3.5.6) следует, что $f'(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Так как по условию функция $f(x)$ ограничена, то из теоремы 1.2.1 следует, что $f(x)$ есть также равномерная п.-п. функция. Лемма доказана.

Лемма 3.5.2. *Пусть последовательность конечных тригонометрических сумм*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} e^{i\lambda_k x} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится равномерно в каждом конечном интервале к функции $f(x)$. Если

1) *существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k,n} = a_k$,

2) *числа λ_k имеют две предельные точки, из них одну на бесконечности, а одну на конечном расстоянии,*

3) *суммы $S_n(x)$ равномерно ограничены и*

4) *функция $f(x)$ равномерно непрерывна,*

то $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.

Доказательство. Выберем произвольное положительное число N и рассмотрим конечные суммы

$$S_{n,N}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x+u)\frac{\sin^2\frac{Nu}{2}}{Nu^2}\,du.$$

При каждом фиксированном N суммы $S_{n,N}(x)$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.5.2 с предельной функцией

$$f_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin^2\frac{Nu}{2}}{Nu^2}\,du.$$

Поэтому $f_N(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Так как по предположению функция $f(x)$ равномерно непрерывна, то в силу теоремы 1.10.1 функции $f_N(x)$ сходятся при $N\to\infty$ равномерно для всех x к $f(x)$. Поэтому $f(x)$ есть также равномерная п.-п. функция, что и требовалось доказать.

3. Из леммы 3.5.2 непосредственно следует

Теорема 3.5.1. *Пусть $f(x)$ есть ограниченная, равномерно непрерывная на всей действительной прямой N-п.-п. функция с рядом Фурье*) $\sum\limits_k A_k e^{iM_k x}$. Обозначим те M_k, для которых $A_k\neq 0$, в произвольном порядке, через λ_k. Если последовательность λ_k имеет две предельные точки, из них одну на бесконечности, то $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.*

Доказательство. Легко видеть, что суммы Бохнера-Фейера для $f(x)$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.5.2. Поэтому $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.

Замечание. Легко видеть, что лемма 3.5.2 и, значит, теорема 3.5.1 остаются в силе и в том случае, если числа λ_k имеют в каждом конечном интервале конечное

---

*) Числа M_k строятся по рациональному базису показателей Фурье мажоранты для $f(x)$ (см. § 4 настоящей главы).

число предельных точек. Можно также предполагать, что предельные точки чисел λ_k имеют предельные точки в конечном числе и т. д. Более того, с помощью трансфинитной индукции можно доказать лемму 3.5.2 в предположении, что множество λ_k в каждом конечном интервале приводимо. Более подробно о равномерной сходимости в каждом конечном интервале конечных тригонометрических сумм см. интересную работу Ф. Вольфа*).

---

*) F. Wolf [1]. Этому же вопросу посвящена работа автора (Б. М. Левитан [7]).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Некоторые общие сведения о линейных системах дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(S_x) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(x)\, y_k + g_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

в которой коэффициенты $f_{ik}(x)$ и свободные члены $g_i(x)$ суть непрерывные функции для всех действительных x.

Каковы бы ни были начальные условия $y_1(0), y_2(0), \ldots$ $\ldots, y_n(0)$, существует решение системы (S_x). Это решение можно получить, применяя, например, метод последовательных приближений.

Рассмотрим теперь последовательность систем

$$(S_x^{(p)}) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}^{(p)}(x)\, y_k + g_i^{(p)}(x)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad p = 1, 2, \ldots).$$

Предположим, что коэффициенты $f_{ik}^{(p)}(x)$ и свободные члены $g_i^{(p)}(x)$ при $p \to \infty$ стремятся равномерно в каждом конечном интервале к $f_{ik}(x)$ и $g_i(x)$. Если сверх этого начальные значения $y_i^{(p)}(0)$ также стремятся к пределам $y_i(0)$, то решения систем $(S_x^{(p)})$ стремятся к решению системы (S_x).

Это является простым следствием метода последовательных приближений.

Более точно, имеют место следующие утверждения.

I) *Пусть* ε, α *и* T — *произвольные положительные числа. Выберем из последовательности систем* $(S_x^{(p)})$ *две системы, соответствующие* p_1 *и* p_2 *так, чтобы имели место неравенства*

$$|f_{ik}^{(p_1)}(x)-f_{ik}^{(p_2)}(x)|<\varepsilon, \qquad |g_i^{(p_1)}(x)-g_i^{(p_2)}(x)|<\varepsilon$$
$$(|x|\leqslant T, \quad i, k=1, 2, \ldots, n),$$
$$|y_i^{(p_1)}(0)-y_i^{(p_2)}(0)|<\alpha \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда можно определить положительное число $\omega=\omega(\varepsilon, \alpha)$, *для которого*

$$|y_i^{(p_1)}(x)-y_i^{(p_2)}(x)|<\omega \quad (|x|\leqslant T, \quad i=1, 2, \ldots, n). \tag{4.1.1}$$

II) Наоборот, *как бы мало ни было число* ω *и велико число* T, *можно определить числа* α *и* ε *так, чтобы имели место неравенства* (4.1.1).

Наряду с системой (S_x) мы будем рассматривать также однородную систему

$$(\Sigma_x) \qquad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(x)\,y_k \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

2. Предположим теперь, что все коэффициенты $f_{ik}(x)$ и свободные члены $g_i(x)$ суть равномерные п.-п. функции. Рассмотрим всевозможные последовательности действительных чисел $\{h_\nu\}$, для которых существуют пределы

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{ik}(x+h_\nu)=f_{ik}^*(x), \quad \lim_{\nu\to\infty} g_i(x+h_\nu)=g_i^*(x)$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n)$$

Наряду с системами (S_x) и (Σ_x) мы будем также рассматривать системы

$$(S_x^*) \quad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{n} f_{ik}^*(x)\,y_k+g_i^*(x) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{4.1.2}$$

$$(\Sigma_x^*) \quad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{n} f_{ik}^*(x)\,y_k \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{4.1.2'}$$

Мы будем говорить, что системы (S_{x+h_ν}), соответственно (Σ_{x+h_ν}), сходятся к системе (S_x^*), соответственно

(Σ_x^*), и писать

$$(S_x^*) = \lim_{\nu\to\infty} (S_{x+h_\nu}), \quad \text{соотв.} \quad (\Sigma_x^*) = \lim_{\nu\to\infty} (\Sigma_{x+h_\nu}).$$

Выбирая различные последовательности $\{h_\nu\}$, мы получим семейства систем, которые обозначим через $H(S_x)$ и $H(\Sigma_x)$. Покажем, что каждая из этих систем определяется каким-нибудь из уравнений (4.1.2) (соответственно (4.1.2')). В самом деле, если

$$(S_x^*) = \lim_{\nu\to\infty} (S_{x+h_\nu}),$$

то, как легко видеть,

$$(S_x) = \lim_{\nu\to\infty} (S_{x-h_\nu}^*).$$

Аналогично для систем (Σ_x^*).

3. Назовем *модулем системы* (S_x) наименьший модуль, содержащий модули функций $f_{ik}(x)$ и $g_i(x)$.

Если какое-то решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ состоит из равномерных п.-п. функций, то модулем решения назовем наименьший модуль, содержащий модули всех функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. В этом случае решение сокращенно будем называть почти-периодическим (п.-п.) решением.

Отметим еще следующее. Так как всех функций $f_{ik}(x)$ и $g_i(x)$ — конечное число, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество общих ε-почти-периодов для этих функций. Условимся сокращенно обозначать это множество через $E(\varepsilon, S)$, и то обстоятельство, что число $\tau \in E(\varepsilon, S)$, будем записывать в виде условного неравенства

$$|S_{x+\tau} - S_x| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty). \tag{4.1.3}$$

Аналогично для систем (Σ_x).

4. Определение. *Абсолютным значением решения* $\{y_i(x)\}$ *в точке* x *называется*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i(x)|^2\right)^{1/2}.$$

Предположим, что для данного $k>0$ система (S_x) имеет решение $\{y_i(x)\}$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i(x)|^2\right)^{1/2}=k. \tag{4.1.4}$$

Покажем, что каждая система семейства $H(S_x)$ также имеет решение, удовлетворяющее условию (4.1.4). Действительно, $\{y_i(x+h_\nu)\}$ есть решение системы (S_{x+h_ν}). В силу (4.1.4) начальные значения $\{y_i(h_\nu)\}$ ограничены и, следовательно, имеют предельные точки. Не нарушая общности, можно считать, что начальные значения $\{y_i(h_\nu)\}$ сходятся. Поэтому решения $\{y_i(x+h_\nu)\}$ сходятся равномерно в каждом конечном интервале к решению системы $(S_x^*)=\lim(S_{x+h_\nu})$ $(\nu\to\infty)$, которое мы обозначим через $\{y_i^*(x)\}$. При каждом фиксированном ν

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i(x+h_\nu)|^2\right)^{1/2}=k.$$

Так как функции $y_i(x+h_\nu)$ сходятся равномерно в каждом конечном интервале к $y_i^*(x)$, то в последнем равенстве можно перейти к пределу, полагая $\nu\to\infty$, и мы получим:

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i^*(x)|^2\right)^{1/2}=k.$$

Числа k, для которых существуют решения системы (S_x), удовлетворяющие условию (4.1.4), имеют нижнюю границу g. Покажем, что число g также принадлежит множеству чисел k. С этой целью выделим последовательность решений $\{y_i^{(p)}(x)\}$, для которых $k_p\to g$ при $p\to\infty$. Множество начальных значений $y_i^{(p)}(0)$ имеет, по меньшей мере, одну предельную точку. Мы можем считать для упрощения записи, что множество начальных значений сходится, и обозначим предельную точку через $\{\eta_i(0)\}$. Покажем, что решение системы (S_x) с начальным условием $\{\eta_i(0)\}$ — обозначим его через $\{\eta_i(x)\}$ — удовлетворяет условию

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i(x)|^2\right)^{1/2}=g.$$

В самом деле, пусть для $x = x_0$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i(x_0)|^2\Big)^{1/2} = g + l \quad (l > 0).$$

Так как последовательность $\{y_i^{(p)}(x)\}$ сходится равномерно в каждом конечном интервале к $\{\eta_i(x)\}$, то можно определить такое число P, что для всех $p > P$ имеем:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i^{(p)}(x)|^2\Big)^{1/2} < g + \frac{l}{2};$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i(x) - y_i^{(p)}(x)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \frac{l}{2} \quad (|x| \leqslant x_0),$$

откуда следует

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i(x)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i^{(p)}(x)|^2\Big)^{1/2} + \\ + \Big(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i(x) - y_i^{(p)}(x)|^2\Big)^{1/2} < g + l \quad (x \leqslant x_0),$$

что противоречит предположению.

В силу предыдущих рассуждений (см. также п. 2), каждая система семейства $H(S_x)$ имеет решение, верхняя граница абсолютного значения которого равна g.

5. Допустим теперь, что однородная система (Σ_x) не имеет решений (кроме тривиальных), которые могут стать по абсолютному значению сколь угодно малыми. В этом случае мы покажем, что система (S_x) *имеет только одно решение, верхняя граница абсолютного значения которого равна* g.

Действительно, пусть система (S_x) имеет два таких решения: $\{\eta_i^{(1)}(x)\}$ и $\{\eta_i^{(2)}(x)\}$. Тогда $\left\{\frac{\eta_i^{(1)}(x) + \eta_i^{(2)}(x)}{2}\right\}$ есть решение системы (S_x), а $\left\{\frac{\eta_i^{(1)}(x) - \eta_i^{(2)}(x)}{2}\right\}$ есть решение системы (Σ_x). Далее имеем:

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \left(|\eta_i^{(1)} + \eta_i^{(2)}(x)|^2 + |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}(x)|^2\right) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(|\eta_i^{(1)}(x)|^2 + |\eta_i^{(2)}(x)|\right) \leqslant g^2.$$

Так как, по предположению, система (Σ_x) не имеет решений, сколь угодно малых по абсолютному значению, то существует такое число $l > 0$, что

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} |\eta_i^{(1)}(x) - \eta_i^{(2)}(x)|^2 \geqslant l^2;$$

следовательно,

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} |\eta_i^{(1)}(x) + \eta_i^{(2)}(x)|^2 \leqslant g^2 - l^2,$$

что противоречит определению g.

6. Предположим, что ни одна из систем семейства $H(\Sigma_x)$ не имеет решений, сколь угодно малых по абсолютному значению. В этом случае, так же как и в п. 4, мы установим, что каждая из систем семейства $H(S_x)$ имеет только одно решение, верхняя граница абсолютного значения которого равна g.

§ 2. Почти-периодические решения линейных систем дифференциальных уравнений

1. Предположим, что коэффициенты системы (S_x) — $f_{ik}(x)$ и свободные члены $g_i(x)$ суть равномерные п.-п. функции.

Теорема 4.2.1. *Если однородная система (Σ_x) не имеет ограниченных решений (за исключением тривиального $x_i = 0$), то каждое ограниченное решение системы (S_x) состоит из N-п.-п. функций.*

Доказательство. Рассмотрим систему (S_x). Ее решение $\{y_i(x)\}$ определяется начальными значениями $\{y_i(0)\}$. Покажем, что существует только одно ограниченное решение системы (S_x). В самом деле, в противном случае разность двух ограниченных решений системы (S_x) являлась бы ограниченным (нетривиальным) решением системы (Σ_x), что противоречит условию теоремы. Отсюда, в частности, следует, что существует только одна система начальных значений $\{y_i(0)\}$, порождающая ограниченное решение системы (S_x). Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим множество $E(\varepsilon, S)$ всех ε-почти-периодов системы (S_x), т. е. множество всех чисел, удовлетворяющих условному неравенству (4.1.3). Если $\varepsilon \to 0$, то $(S_{x+\tau}) \to (S_x)$. Так как $\{y_i(x+\tau)\}$ есть решение системы $(S_{x+\tau})$, то в силу предыдущего начальные значения $\{y_i(\tau)\}$ должны стремиться (при $\varepsilon \to 0$) к $y_i(0)$. В противном случае из множества точек $\{y_i(\tau)\}$ мы могли бы выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу, отличному от $\{y_i(0)\}$, и получили бы второе ограниченное решение системы (S_x).

Так как система (S_x) — почти-периодическая, то ε-почти-периоды системы (S_x) суть решения системы неравенств

$$|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ — числа модуля системы (S_x).

Для доказательства того, что $y_i(x)$ суть N-п.-п. функции, нужно показать в силу II) п. 1 § 1, что, каково бы ни было число $\alpha > 0$, можно указать такое положительно число $\delta = \delta(\alpha)$, что если $\eta < \delta$ и $\tau \in E(\eta, S)$, то

$$|y_i(\tau) - y_i(0)| < \alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Допустим противное. Тогда существуют:

1) число $\alpha > 0$;

2) бесконечная последовательность почти-периодов системы (S_x): $\tau(\varepsilon_1), \tau(\varepsilon_2), \ldots, \tau(\varepsilon_m)$ ($\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$);

3) среди чисел $1, 2, \ldots, n$ число j такое, что

$$|y_j[\tau(\varepsilon_m)] - y_j(0)| > \alpha. \tag{4.2.1}$$

Из последовательности точек $\{y_i[\tau(\varepsilon_m)]\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность и обозначим предел через $\{y_i'(0)\}$. В силу (4.2.1)

$$|y_j'(0) - y_j(0)| > \alpha. \tag{4.2.2}$$

Но так как $(S_{x+\tau_m}) \to (S_x)$ при $m \to \infty$, то числа $\{y_i'(0)\}$ суть начальные значения ограниченного решения системы

(S_x), отличные в силу (4.2.2) от исходного, что, как мы видели, невозможно.

2. Обозначим через $\{\eta_i(x)\}$ «минимальное» решение системы (S_x) (см. пп. 3 и 4 предыдущего параграфа).

Теорема 4.2.2. *Если неоднородная система (S_x) имеет ограниченные решения, а однородная система (Σ_x) не имеет ограниченных решений, абсолютное значение которых может становиться сколь угодно малым (за исключением тривиального решения $y_i = 0$), то «минимальное» решение системы (S_x) — $\{\eta_i(x)\}$ состоит из N-п.-п. функций.*

Доказательство. Мы уже знаем (§ 1, п. 4), что при наших предположениях «минимальное» решение $\{\eta_i(x)\}$ единственно. Это нам даст возможность заключить, что числа $\eta_i[\tau(\varepsilon)]$ при $\varepsilon \to 0$ стремятся равномерно к пределам $\eta_i(0)$, а отсюда, как мы убедились при доказательстве теоремы 4.2.1, следует, что $\eta_i(x)$ суть N-п.-п. функции.

Предположим, что числа $\eta_i[\tau(\varepsilon)]$ не стремятся равномерно к числам $\eta_i(0)$. Тогда существуют:

1) число $\alpha > 0$;

2) бесконечная последовательность смещений системы $(S_x): \tau(\varepsilon_1), \tau(\varepsilon_2), \ldots, (\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty)$;

3) среди чисел 1, 2, ..., n число j такое, что

$$|\eta_j[\tau(\varepsilon_m)] - \eta_j(0)| > \alpha. \tag{4.2.3}$$

Из последовательности точек $\{\eta_i[\tau(\varepsilon_m)]\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность. Для простоты записи будем предполагать, что сама последовательность точек $\{\eta_i[\tau(\varepsilon_m)]\}$ сходится. Ясно, что никакого нарушения общности рассуждений это не вызывает.

Так как при $m \to \infty$ $(S_{x+\tau_m}) \to (S_x)$ $(\tau_m = \tau(\varepsilon_m))$, то решения системы $(S_{x+\tau_m})$ — $\{\eta_i(x+\tau_m)\}$ стремятся к решению системы (S_x) — $\{\eta_i^*(x)\}$, отличному в силу (4.2.3) от $\{\eta_i(x)\}$. Но

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i[x+\tau(\varepsilon_m)]|^2\Big)^{1/2} = \sup_{-\infty<x<\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i(x)|^2\Big)^{1/2} = g.$$

Переходя к пределу ($m \to \infty$), получим:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i^*(x)|^2\right)^{1/2} \leqslant g,$$

а так как g есть нижняя граница чисел k, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i^*(x)|^2\right)^{1/2} = g,$$

что противоречит единственности минимального решения.

Замечание. Легко видеть, что теоремы 4.2.1 и 4.2.2 остаются в силе, если предполагать, что функции $f_{ih}(x)$ и $g_i(x)$ суть N-п.-п. функции (см. I), II) п. 1 § 1).

В частности, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

где $f(x)$ есть ограниченная N-п.-п. функция. Соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

имеет решение $y = C$, которое, очевидно (кроме случая $C = 0$), не может становиться, по абсолютному значению сколь угодно малым. Поэтому, если неопределенный интеграл ограниченной N-п.-п. функции ограничен, то он также является N-п.-п. функцией.

3. Выясним, каковы те дополнительные условия, которые обеспечивают равномерную почти-периодичность решений системы (S_x). Для этого нам придется привлечь семейства систем $H(S_x)$ и $H(\Sigma_x)$.

Теорема 4.2.1′ (первая теорема Фавара*). *Если ни одна из систем $H(\Sigma_x)$ не имеет ограниченных решений (за исключением тривиального), то каждое ограниченное решение системы (S_x) состоит из равномерных п.-п. функций.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 4.2.1 мы показали, что почти-периоды системы суть

*) J. Favard [2].

N-почти-периоды для решений. Покажем, что при принятых дополнительных условиях почти-периоды системы (S_x) суть почти-периоды для решений.

Допустим противное. Тогда можно указать:

1) положительное число α;

2) бесконечную последовательность действительных чисел $x_1, x_2, \ldots$;

3) бесконечную последовательность почти-периодов системы $S(x): \tau(\varepsilon_1), \tau(\varepsilon_2), \ldots$ ($\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$);

4) среди чисел $1, 2, \ldots, n$ число j такое, что

$$|y_j(x_p + \tau(\varepsilon_p)) - y_j(x_p)| > \alpha. \tag{4.2.4}$$

В силу нормальности п.-п. функций из последовательности систем (S_{x+x_p}) можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Для упрощения записи будем считать, что сама последовательность систем (S_{x+x_p}) сходится. Легко видеть, что это не нарушает общности рассуждений. Предельную систему обозначим через (S_x^*). Так как $\tau(\varepsilon_p)$ есть ε_p-почти период системы (S_x) и $\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$, то последовательность систем $(S_{x+x_p+\tau(\varepsilon_p)})$ также сходится к (S_x^*).

Рассмотрим теперь последовательности точек $\{y_i[x_p + \tau(\varepsilon_p)]\}$ и $\{y_i(x_p)\}$. В силу предполагаемой ограниченности решений из этих последовательностей можно выделить сходящиеся подпоследовательности. Мы не нарушим снова общность рассуждений, если будем считать, что сами последовательности точек сходятся. Обозначим предельные точки через $\{y_i^{(1)}\}$ и $\{y_i^{(2)}\}$. В силу (4.2.4)

$$|y_j^{(1)} - y_j^{(2)}| > \alpha. \tag{4.2.5}$$

Так как $\{y_i(x + x_p)\}$ есть решение системы (S_{x+x_p}), а $\{y_i(x + x_p + \tau(\varepsilon_p))\}$ — решение системы $(S_{x+x_p+\tau(\varepsilon_p)})$, и так как обе системы при $p \to \infty$ стремятся к одному и тому же пределу (S_x^*), то в силу (4.2.5) предельная система (S_x^*) должна иметь различные ограниченные решения, что противоречит условиям теоремы. В самом деле, если бы система (S_x^*) имела два различных ограниченных решения, то соответствующая однородная система (Σ_x^*) имела бы ограниченное, нетривиальное решение. Аналогично доказывается (привлекая пп. 3 и 4 предыдущего параграфа) вторая теорема Фавара.

Теорема 4.2.2′ (вторая теорема Фавара*). *Если ни одна из однородных систем семейства $H(\Sigma_x)$ не имеет решения, абсолютное значение которого может становиться сколь угодно малым (за исключением тривиального решения $y_i = 0$), и если система (S_x) имеет ограниченные решения, то минимальное решение системы (S_x) состоит из равномерных п.-п. функций.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что если неопределенный интеграл равномерной п.-п. функции ограничен, то он является также равномерной п.-п. функцией.

Замечание. Из приведенных нами доказательств следует непосредственно, что почти-периоды системы (S_x) суть почти-периоды решения. Поэтому модуль полученных п.-п. решений не больше модуля системы (S_x).

4. В теоремах 4.2.1′ и 4.2.2′ устанавливалась почти-периодичность решений только для системы (S_x). Однако нетрудно показать, что *если система (S_x) имеет п.-п. решение, то каждая из систем семейства $H(S_x)$ также имеет п.-п. решение.*

Действительно, пусть $\{y_i(x)\}$ есть п.-п. решение системы (S_x) и пусть (S_x^*) есть другая система семейства $H(S_x)$:

$$(S_x^*) = \lim_{\nu \to \infty} (S_{x+h_\nu}).$$

Из множества решений $\{y_i(x + h_\nu)\}$ систем (S_{x+h_ν}) выделим равномерно сходящуюся подпоследовательность. Предельную совокупность из n функций обозначим через $\{y_i^*(x)\}$. Легко видеть, что $\{y_i^*(x)\}$ есть п.-п. решение системы (S_x^*).

5. В теоремах 4.2.1′ и 4.2.2′ накладывались условия не только на систему (Σ_x), но и на все семейство систем $H(\Sigma_x)$. Возникает естественный вопрос: нельзя ли ограничиться только системой (Σ_x). Следующий пример показывает, что этого сделать нельзя. Рассмотрим равно-

---

*) J. Favard [3].

мерную п.-п. функцию

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{x}{2k+1}. \tag{4.2.6}$$

Интегрируя почленно, мы получим:

$$g(x)=\int_0^x f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(1-\cos\frac{x}{2k+1}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin^2\frac{x}{2(2k+1)}\geqslant 0.$$

Пусть $N>0$ — произвольное целое число. Очевидно, что для любого действительного x имеем:

$$g(x)\geqslant\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(2k+1)}\sin^2\frac{x}{2(2k+1)}.$$

Положим $x_0=1\cdot 3\ \ldots\ (2N+1)\pi$. Если $0\leqslant k\leqslant N$, то $\frac{x_0}{2(2k+1)}=(2r+1)\frac{\pi}{2}$, где r — целое положительное число. Поэтому

$$g(x_0)\geqslant\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1}>\int_0^N\frac{dx}{2x+1}=\frac{1}{2}\ln(2N+1).$$

Следовательно, $g(x)$ есть неограниченная положительная функция.

Рассмотрим теперь последовательность чисел $h_N=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ (2N+1)\pi$ $(N=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и последовательность функций $\{f(x+h_N)\}$. Так как при $0\leqslant k\leqslant N$ $\frac{h_N}{2k+1}=(2r+1)\pi$ (r — целое положительное число), то $\sin\frac{x+h_N}{2k+1}=-\sin\frac{x}{2k+1}$. Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty}f(x+h_N)=-f(x). \tag{4.2.7}$$

Поэтому

$$\int_0^x [-f(x)]\,dx = -g(x)$$

есть неограниченная отрицательная функция.

Рассмотрим, далее, однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,y. \tag{4.2.8}$$

Так как $y = Ce^{g(x)}$, то уравнение (4.2.8) не имеет ограниченных решений, а также решений, абсолютное значение которых может становиться сколь угодно малым (кроме тривиального, когда $C = 0$). С другой стороны, в силу (4.2.7) уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)\,y$$

принадлежит к замыканию смещенных систем (4.2.8). Однако решения последнего уравнения $y = Ce^{-g(x)}$ включают только ограниченные функции, которые могут становиться сколь угодно малыми по абсолютному значению.

Этот пример заимствован нами из статьи Фавара *), который, впрочем, вместо частной функции (4.2.6) пользовался следующей общей теоремой (доказательство см. в статье Фавара): *если равномерная п.-п. функция $f(x)$ имеет среднее значение, равное нулю, и если ее неопределенный интеграл неограничен, то в множестве предельных функций семейства $\{f(x+h)\}$ существуют, по крайней мере, две функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, для которых*

$$\int_0^x f^+(x)\,dx \geqslant 0, \quad \int_0^x f^-(x)\,dx \leqslant 0 \quad (-\infty \leqslant x \leqslant \infty).$$

6. Докажем еще одну теорему, которая может иногда облегчить проверку условий теоремы 4.2.2′.

*) J. Favard [2].

Теорема 4.2.3. *Предположим, что система* (Σ_x) *имеет только ограниченные решения и пусть*

$$F(x)=\int_0^x [f_{11}(x)+f_{22}(x)+\ldots+f_{nn}(x)]\,dx$$

есть ограниченная и, следовательно, равномерная п.-п. функция. Тогда все системы семейства $H(\Sigma_x)$ *имеют только ограниченные решения, абсолютные значения которых не могут стать сколь угодно малыми.*

Доказательство. Пусть $\{y_i^{(1)}(x)\}$, $\{y_i^{(2)}(x)\}$, ..., $\{y_i^{(n)}(x)\}$ — n любых линейно независимых решений системы (Σ_x). Как известно *),

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & \ldots & y_n^{(1)}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}=Ce^{F(x)}\ (C\neq 0). \quad (4.2.9)$$

Теорема Адамара **) о максимуме абсолютного значения определителя непосредственно показывает (в силу ограниченности функций $\{y_i^{(k)}(x)\}$ и $F(x)$), что абсолютное значение решения системы (Σ_x) не может становиться сколь угодно малым.

Рассмотрим теперь последовательность систем $\{\Sigma_{x+h_\nu}\}$, сходящуюся к системе (Σ_x^*), при $\nu\to\infty$. Предположим, что последовательности чисел $\{y_i^{(k)}(h_\nu)\}$ стремятся к числам $y_i^{(k)*}(0)$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ (это не является нарушением общности, так как в противном случае мы можем выделить подпоследовательность h'_ν, для которой сходимость уже будет иметь место). Обозначим через C^* определитель из этих предельных чисел. Рассмотрим

---

*) В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений (1945), стр. 265.

**) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III (1933), стр. 28.

решения $\{y_i^{(k)*}(x)\}$ системы (Σ_x^*). Покажем, что

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)*}(x), & y_2^{(1)*}(x), & \ldots, & y_n^{(1)*}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)*}(x), & y_2^{(n)*}(x), & \ldots, & y_n^{(n)*}(x) \end{vmatrix} = C^* e^{F^*(x)}, \tag{4.2.10}$$

где

$$F^*(x) = \int_0^x [f_{11}^*(x) + f_{22}^*(x) + \ldots + f_{nn}^*(x)]\, dx.$$

В самом деле, заменяя в формуле (4.2.9) x на $x+h_\nu$, мы получим:

$$\Delta(x+h_\nu) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x+h_\nu), & y_2^{(1)}(x+h_\nu), & \ldots, & y_n^{(1)}(x+h_\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)}(x+h_\nu), & y_2^{(n)}(x+h_\nu), & \ldots, & y_n^{(n)}(x+h_\nu) \end{vmatrix} =$$

$$= Ce^{F(x+h_\nu)}.$$

Полагая в этом равенстве $x=0$, получим:

$$\Delta(h_\nu) = Ce^{F(h_\nu)}.$$

Отсюда следует, что $C = \Delta(h_\nu)\, e^{-F(h_\nu)}$ и, значит,

$$\Delta(x+h_\nu) = \Delta(h_\nu)\, e^{F(x+h_\nu)-F(h_\nu)} =$$

$$= \Delta(h_\nu)\, e^{\int\limits_{h_\nu}^{x+h_\nu} \{f_{11}(x)+\ldots+f_{nn}(x)\}\, dx} =$$

$$= \Delta(h_\nu)\, e^{\int\limits_0^x \{f_{11}(x+h_\nu)+\ldots+f_{nn}(x+h_\nu)\}\, dx}.$$

Полагая при фиксированном x $\nu \to \infty$, мы получим формулу (4.2.10). Так как функции $\{y_i^{(k)}(x+h_\nu)\}$ сходятся равномерно в каждом конечном интервале к функциям $\{y_i^{(k)*}(x)\}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, то последние функции ограничены. Отсюда и из (4.2.9) следует, что абсолютное значение решений $y_1^{(k)*}(x)$, $y_2^{(k)*}(x)$, ... $y_n^{(k)*}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ не может становиться сколь угодно малым, что и требовалось доказать.

§ 3. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_n y=f(x), \tag{4.3.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные числа и $f(x)$ — равномерная п.-п. функция. Уравнение (4.3.1), как вообще любое линейное дифференциальное уравнение, можно записать в виде эквивалентной системы линейных дифференциальных уравнений. В рассматриваемом случае — уравнения с постоянными коэффициентами — семейство $H(\Sigma_x)$ состоит из одного уравнения.

В силу одной известной леммы Эсклангона, которая будет доказана в следующем пункте настоящего параграфа, из ограниченности решения уравнения (4.3.1) следует ограниченность всех производных $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Таким образом, если мы покажем, что уравнение без правой части не имеет ограниченных решений, которые могут становиться по абсолютному значению сколь угодно малыми, то тем самым будет установлено, что ограниченные решения уравнения (1) суть равномерные п.-п. функции. В нашем случае абсолютное значение решения в точке x равно корню квадратному из выражения

$$|y(x)|^2+|y'(x)|^2+\ldots+|y^{(n-1)}(x)|^2.$$

Ограниченные решения уравнения без правой части имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu e^{i\lambda_\nu x}, \tag{4.3.2}$$

где $k \leqslant n$, C_ν — произвольные (комлексные) постоянные, λ_ν вещественны, $i\lambda_\nu$ — корни уравнения

$$P(r)=r^n+a_1 r^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Если бы абсолютное значение этого решения могло становиться сколь угодно малым, например меньше ε, то во всяком случае должны выполняться неравенства

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu \lambda_\nu^j e^{i\lambda_\nu x}\right| < \varepsilon \quad (j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Рассмотрим столько из этих неравенств, сколько среди чисел $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — не равных нулю. Определитель, составленный из коэффициентов при $e^{i\lambda_\nu x}$, отличен от нуля (определитель Вандермонда).

Определяя функции $e^{i\lambda_\nu x}$, мы придем к противоречию, ибо, с одной стороны, модуль функции $e^{i\lambda_\nu x}$ равен единице, а с другой стороны, ε может быть сколь угодно малой величиной.

Таким образом, в силу теоремы 4.2.2′ (см. предыдущий параграф) по крайней мере одно ограниченное решение уравнения (4.3.1) есть равномерная п.-п. функция. Так как различные ограниченные решения уравнения (4.3.1) отличаются на решение уравнения без правой части, которое имеет вид (4.3.2) (λ_ν действительны), то все ограниченные решения уравнения (4.3.1) суть равномерные п.-п. функции.

Не представляет никаких затруднений найти ряд Фурье решения, если известен ряд Фурье функции.

Изложенный метод принадлежит Фавару *).

2. Приведем доказательство леммы Эсклангона**). Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

и пусть известно, что $f(x)$ и y — ограниченные функции. Покажем, что в этом случае производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ также ограничены. Предварительно покажем, что производные растут не быстрее некоторого многочлена. Дей-

---

*) J. Favard [2]. Другое доказательство было дано Бором и Нейгебауэром [1].

**) Esclangon [3].

ствительно интегрируя равенство

$$(y^{(n-1)}+a_1y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y)'=f(x)-a_ny$$

в пределах от 0 до x, мы получим:

$$y^{(n-1)}+a_1y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y=\int\limits_0^x [f(x)-a_ny]\,dx+C_1,$$

где $C_1=y^{(n-1)}(0)+a_1y^{(n-2)}(0)+\ldots+a_{n-1}y(0)$ есть постоянная величина. Так как $f(x)-a_ny$ — ограниченная функция, то

$$\int\limits_0^x [f(x)-a_ny]\,dx$$

растет не быстрее линейной функции.

Повторяя эту оценку $n-1$ раз, мы убедимся, что y' растет не быстрее многочлена $(n-1)$-й степени. Рассматривая промежуточные равенства, мы убедимся, что y'', y''', ..., $y^{(n)}$ растут с той же скоростью. Теперь мы рассмотрим отдельно положительные и отрицательные x. Пусть вначале $x>0$. Рассмотрим следующее тождество:

$$\frac{d}{dx}e^{-x}[y^{(n-1)}+\lambda_1y^{(n-2)}+\ldots+\lambda_{n-2}y'+\lambda_{n-1}y]=$$
$$=e^{-x}[y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny+u]. \quad (4.3.3)$$

Здесь

$$\lambda_1=1+a_1,\ \lambda_2=1+a_1+a_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}=1+a_1+\ldots+a_{n-1},$$
$$u(x)=-(\lambda_{n-1}+a_n)\,y.$$

Так как λ_{n-1} — константа, а $y(x)$ — ограниченная функция, то $u(x)$—также ограниченная функция. Тождество (4.3.3) проинтегрируем от $x\,(>0)$ до $+\infty$. Так как все производные функции y мажорируются многочленом, то проинтегрированная левая часть при $x=+\infty$ обратится в нуль, и мы получим, применяя справа теорему о среднем значении,

$$-e^{-x}\left[y^{(n-1)}+\lambda_1 y^{(n-2)}+\ldots+\lambda_{n-1}y\right]=$$
$$=\int_x^\infty e^{-x}\left[f(x)+u(x)\right]dx=\left[f(\xi)+u(\xi)\right]\int_x^\infty e^{-x}\,dx=$$
$$=e^{-x}\left[f(\xi)+u(\xi)\right]\quad (x<\xi<\infty).$$

Отсюда, сокращая на e^x, получим:

$$y^{(n-1)}+\lambda_1 y^{(n-2)}+\ldots+\lambda_{n-1}y=-\left[f(\xi)+u(\xi)\right](x<\xi<\infty).$$

Таким образом, выражение $y^{(n-1)}+\lambda_1 y^{(n-2)}+\ldots$ $\ldots+\lambda_{n-1}y$ ограничено для всех положительных x. Повторяя этот процесс, мы дойдем до выражения вида

$$y'+\mu y=\psi(x),$$

где μ — постоянная величина, а y и $\psi(x)$ — ограниченные функции. Отсюда следует ограниченность y'. Теперь из предыдущего равенства мы заключаем об ограниченности y'' и т. д. до $y^{(n)}$.

В случае отрицательных x нужно исходить из тождества, аналогичного тождеству (4.3.3), но вместо e^{-x} брать e^x и затем интегрировать в пределах от $-\infty$ до x (<0).

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИКАХ

§ 1. Вводные замечания. Некоторые сведения из теории метрических пространств

1. До сих пор мы изучали непрерывные п.-п. функции. Из теории периодических функций известно, что неестественно ограничиваться изучением только непрерывных функций. Более того, особенно законченные результаты удается получить, лишь рассматривая совокупность всех суммируемых функций. Приведем в качестве примера теорему Рисса-Фишера.

Для того чтобы тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$$

являлся рядом Фурье периодической периода 2π функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2.$$

Вот почему естественно и теорию п.-п. функций обобщить на суммируемые по Лебегу функции. Первый крупный шаг в этом направлении был сделан В. В. Степановым *).

---

*) В. В. Степанов [1].

Следующее обобщение указал Г. Вейль *). Наконец, Безикович **) рассмотрел такое обобщение п.-п. функций, которое позволило ему доказать аналог теоремы Рисса-Фишера.

Перечисленные обобщения были затем подробно рассмотрены в совместной работе Бора и Безиковича ***). Оказалось, что каждый из классов обобщенных п.-п. функций получается в результате замыкания в том или ином смысле одной и той же совокупности конечных тригонометрических сумм. При этом соответствующим образом обобщается также понятие почти-периода.

Каждое из рассматриваемых в этой главе обобщений п.-п. функций тесно связано с превращением совокупности измеримых, суммируемых в каждом конечном интервале, функций в метрическое пространство с помощью того или иного понятия расстояния. Вот почему, прежде чем приступить непосредственно к изучению обобщенных п.-п. функций, мы остановимся кратко на основных понятиях абстрактных метрических пространств. Это пригодится нам также в последующем, при обобщении теории п.-п. функций на группы.

2. Определение 5.1.1. *Множество M называется метрическим пространством, если для любых двух элементов (точек) a, $b \in M$ определено расстояние $D(a, b)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1) $D(a, b) \geqslant 0$, *причем* $D(a, b) = 0$ *в том и только в том случае, если* $a = b$.

2) $D(a, b) = D(b, a)$.

3) *Аксиома треугольника:*

$$D(a, b) \leqslant D(a, c) + D(c, b); \quad a, b, c \in M.$$

Определение 5.1.2. *Последовательность элементов a_n из M называется фундаментальной последовательностью, если*

$$D(a_n, a_m) \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

---

*) H. Weyl [1].

**) A. Besicovitch [1], [2], [4].

***) H. Bohr and A. Besicovitch [1].

Определение 5.1.3. *Пространство M называется полным, если каждая фундаментальная последовательность является сходящейся, т. е. существует элемент $a \in M$, для которого*

$$D(a, a_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 5.1.4. *Множество $X \subset M$ называется условно компактным, если из любой последовательности $x \in X$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. Если сверх того M полно, то множество X называется компактным в M.*

Определение 5.1.5. *Множество X_1 называется ε-сетью по отношению к множеству X, если с каждой точкой $x \in X$ можно сопоставить точку $x_1 \in X_1$, для которой*

$$D(x, x_1) < \varepsilon;$$

ε-сеть называется конечной, если она состоит из конечного числа точек.

Для компактных множеств справедлива следующая основная теорема.

Теорема 5.1.1 (Хаусдорфа *)). *Для компактности множества X в метрическом пространстве M необходимо и, в случае полноты M, достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было построить конечную ε-сеть для X.*

Доказательство. 1) Условие необходимо. В самом деле, построим последовательность элементов x_n следующим образом: в качестве x_1 берем произвольный элемент из X. В качестве x_2 выбираем любой элемент из X, для которого $D(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Если такого элемента нет, то один элемент x_1 образует ε-сеть. В качестве x_3 выбираем любой элемент из X, для которого $D(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$, $D(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$. Если такого элемента нет, то два элемента x_1, x_2 образуют ε-сеть. И так далее. Таким образом, если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ уже выбраны, то в качестве x_n мы выберем произвольную точку из X, которая

---

*) Хаусдорф, Теория множеств. См. также Л. А. Люстерник [1].

удалена от любого элемента x_i $(1 \leqslant i < n)$ на расстояние, не превосходящее ε.

Последовательность x_n обязательно оборвется. В самом деле, в противном случае мы имели бы бесконечную последовательность элементов x_n, для которой по построению $D(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$, если $n \neq m$. Но тогда ни последовательность x_n, ни любая ее подпоследовательность не могла бы сходиться, что, очевидно, противоречит компактности множества X.

2) Условие достаточно. Пусть M — полное пространство и X удовлетворяет условиям теоремы, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ на X существует конечная ε-сеть. Докажем, что из любой последовательности $T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ точек, принадлежащих X, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Выбрав последовательность положительных чисел ε_n, сходящуюся к нулю, мы, по условию теоремы, для каждого ε_n построим конечную ε_n-сеть: $(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_{k_n}^{(n)})$.

Построим теперь подпоследовательности $T_1, T_2, \ldots$ последовательности T следующим образом: все точки X и, в частности, точки последовательности T заключены в конечном числе сфер *)

$$S(a_1^{(1)}, \varepsilon_1),\; S(a_2^{(1)}, \varepsilon_1),\; \ldots,\; S(a_{k_1}^{(1)}, \varepsilon_1)$$

радиусов ε_1 и с центрами в точках ε_1-сети. По крайней мере одна из этих сфер содержит бесчисленное множество точек из последовательности T. Назовем это множество подпоследовательностью T_1. Пусть последовательности $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ уже выбраны. Замечаем, что все точки последовательности $T_{n-1} \subset X$ заключены в конечном числе сфер $S\{a_i^{(n)}; \varepsilon_n\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ с центрами в точках ε_n-сети и радиусами, равными ε_n. По крайней мере в одну из этих сфер попадет бесконечная подпоследовательность T_n из точек T_{n-1}. В силу построения все

*) Сферой с центром в точке $a \in M$ и радиуса r называется совокупность точек $x \in M$, удовлетворяющих неравенству

$$D(a, x) \leqslant r.$$

точки T_n лежат в сфере радиуса ε_n и, следовательно, если $a, b \in T_n$, то

$$D(a, b) \leqslant 2\varepsilon_n.$$

Составим теперь диагональным методом последовательность T_ω:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

где $a_n \in T_n$. При $m > 0$ имеем $T_{n+m} \subset T_n$. Поэтому $a_{n+m} \in T_n$ и

$$D(a_n, a_{n+m}) < 2\varepsilon_n.$$

Стало быть, последовательность T_ω — фундаментальная и ввиду предполагаемой полноты пространства M она сходится.

Замечание. Часто бывает полезно следующее очевидное обобщение теоремы Хаусдорфа: для компактности множества X в метрическом пространстве M достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было построить компактную ε-сеть для X.

В самом деле, компактную ε-сеть можно заменить в силу доказанной теоремы конечной ε-сетью, которая будет конечной 2ε-сетью для множества X.

3. В качестве первого примера метрического пространства рассмотрим совокупность непрерывных, ограниченных функций, определенных на всей действительной оси. Эта совокупность превращается в полное метрическое пространство, если определить расстояние по формуле

$$D(f, g) = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g(x)|.$$

В этом пространстве сходимость совпадает с равномерной сходимостью на всей оси. Предоставляем читателю проверить, что три аксиомы метрического пространства здесь выполняются. Можно этот пример обобщить, предполагая, что x не точка оси, а точка некоторого абстрактного пространства Z. Z может и не быть топологизировано. Разумеется, в этом случае о непрерывности говорить не приходится.

Условие компактности непосредственно следует из теоремы Хаусдорфа. Можно, однако, из этого условия вывести другое условие компактности, которое более удобно во многих случаях.

Определение*) 5.1.6. *Конечным ε-делением пространства Z, соответствующим семейству функций $\{f(z)\}$, $z \in Z$, называется такое разложение Z в сумму конечного числа множеств:*

$$Z = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n,$$

что для любой функции $f(z)$ из рассматриваемого семейства и любых точек z', $z'' \in \mathfrak{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выполняется неравенство

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Теорема 5.1.2. *Для того чтобы семейство ограниченных в совокупности функций $\{f(z)\}$, заданных на Z, было компактным (в смысле равномерной сходимости на Z), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало конечное ε-деление Z, соответствующее семейству $\{f(z)\}$.*

Доказательство. 1) Условие необходимо. В самом деле, предположим вначале, что семейство состоит из одной ограниченной действительной функции $f(z)$ и числа a и b выбраны так, что $a < f(z) < b$. Выберем в интервале a, b числа $a = l_0 < l_1 < \ldots < l_{i-1} < l_i < \ldots < l_{n-1} < l_n = b$ так, что $l_i - l_{i-1} < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Обозначим через $\mathfrak{A}_i$ множество тех точек Z, для которых

$$l_{i-1} < f(z) \leqslant l_i.$$

Очевидно, что множества $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ осуществляют конечное ε-деление Z, отвечающее одной функции $f(z)$.

Предположим, что $g(z)$—другая ограниченная действительная функция. Для нее точно так же можно определить конечное ε-деление Z:

$$Z = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots + \mathfrak{B}_m.$$

Рассмотрим пересечение каждого из множеств $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с каждым из множеств $\mathfrak{B}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Мы получим не более чем mn множеств,

---

*) W. Maak [1].

образующих конечное ε-деление Z, соответствующее семейству из двух функций $f(z)$ и $g(z)$. Отсюда, в частности, следует, что каждая ограниченная комплексная функция $f(z)=f_1(z)+if_2(z)$ для каждого $\varepsilon>0$ допускает конечное ε-деление множества Z. Повторяя рассуждение с пересечением множеств, мы установим, что две, три и вообще любое конечное число ограниченных комплексных функций допускают для каждого $\varepsilon>0$ конечное ε-деление Z.

Допустим, что $\{f(z)\}$ есть бесконечное компактное семейство ограниченных функций. По теореме Хаусдорфа для каждого $\varepsilon>0$ существует в этом семействе конечная $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть:

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z).$$

Найдем $\frac{\varepsilon}{3}$-деление, отвечающее этому конечному семейству функций:

$$Z=\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots+\mathfrak{A}_p.$$

Покажем, что это деление является конечным ε-делением для всего семейства $\{f(z)\}$. В самом деле, пусть $f(z)$ — произвольная функция семейства. Среди функций $f_1(z)$, $f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z)$ найдется функция $f_k(z)$, для которой

$$\sup_{z\in Z}|f(z)-f_k(z)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $z',\ z''\in\mathfrak{A}_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$. Тогда

$$|f_k(z')-f_k(z'')|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно,

$$|f(z')-f(z'')|\leqslant|f(z')-f_k(z')|+\\+|f_k(z')-f_k(z'')|+|f_k(z'')-f(z'')|<\varepsilon.$$

2) Условие достаточно. Пусть $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_k,\ldots$ — бесконечная последовательность чисел, сходящаяся к нулю. Для каждого ε_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ существует, по условию, конечное ε_k-деление Z:

$$Z=\mathfrak{A}_1^{(k)}+\mathfrak{A}_2^{(k)}+\ldots+\mathfrak{A}_{n_k}^{(k)}.$$

В каждом из множеств $\mathfrak{A}_j^{(k)}$ выберем произвольную точку $z_j^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots; j=1, 2, \ldots, n_k)$. Множество всех точек $z_j^{(k)}$ счетно. Расположим все эти точки в одну строку: $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{n_1}^{(1)}, z_1^{(2)}, \ldots, z_{n_2}^{(2)}, \ldots$ Так как, по условию теоремы, все функции семейства $\{f(z)\}$ ограничены одним и тем же числом, то с помощью диагонального процесса можно выделить последовательность функций—обозначим ее через $\{f_n(z)\}$, сходящуюся во всех точках множества $z_j^{(k)}$. Покажем, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно на Z. Обозначим через ε произвольное положительное число. Возьмем r столь большим, чтобы ε_r было меньше ε. Затем возьмем n настолько большим, чтобы при любых $n', n'' > n$ выполнялись неравенства

$$|f_{n'}(z_j^{(k)}) - f_{n''}(z_j^{(k)})| < \varepsilon \ (k=1, 2, \ldots, r; \ j=1, 2, \ldots, n_r). \tag{5.1.1}$$

Пусть теперь z—произвольная точка пространства Z. z попадает в одно из множеств $\mathfrak{A}_j^{(r)}$. Пусть это будет множество $\mathfrak{A}_{j_0}^{(r)}$. Тогда

$$|f_{n'}(z) - f_{n'}(z_{j_0}^{(r)})| < \varepsilon, \tag{5.1.2}$$

$$|f_{n''}(z) - f_{n''}(z_{j_0}^{(r)})| < \varepsilon. \tag{5.1.3}$$

Из неравенств (5.1.1), (5.1.2) и (5.1.3) следует неравенство

$$|f_{n'}(z) - f_{n''}(z)| < 3\varepsilon,$$

что и доказывает в силу произвольности числа ε равномерную сходимость последовательности $\{f_n(z)\}$.

4. Другой важный пример метрического пространства доставляет совокупность измеримых функций, определенных в интервале (a, b) и интегрируемых с p-й степенью $(p \geqslant 1)$. Расстояние определим формулой

$$D\{f, g\} = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Это так называемые пространства $L_p(a, b)$. Выполнение аксиома 1) и 2) очевидно*). Аксиома 3) следует из неравенства Минковского**):

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Нам понадобится в дальнейшем также неравенство Гельдера***): если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(p;\ q>0)$ и $f(x)\in L_p(a, b)$; $g(x)\in L_q(a, b)$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Отметим еще, что пространства $L_p(a, b)$ полны.

§ 2. Элементарные свойства п.-п. функций Степанова

1. Ранее мы уже отмечали, что различные классы обобщенных п.-п. функций связаны с различным введением расстояния в пространстве измеримых, суммируемых в каждом конечном интервале функций. П.-п. функции Степанова (S-п.-п. функции) связаны со следующим определением расстояния.

Определение 5.2.1. *Величина*

$$D_{S_l^p}[f(x),\ g(x)] = \sup_{-\infty<x<\infty} \left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(x)-g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$$

---

*) Функции $f(x)$ и $g(x)$ считаются равными, если они совпадают почти всюду.

**) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, 1950, стр. 175.

***) См., например, там же, стр. 174.

называется S-расстоянием порядка p, соответствующим длине l. Пространство суммируемых в каждом конечном интервале функций с так определенным расстоянием называется пространством Степанова (S^p-пространством). Покажем, что S-расстояния, соответствующие различным l, топологически эквивалентны. Пусть $h(x)\geqslant 0$—измеримая функция и $l_2 > l_1$. Тогда

$$\sup_x \frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} h(x)\,dx = \sup_x \frac{l_2}{l_1}\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2-(l_2-l_1)} h(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{l_2}{l_1}\sup_x \frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2} h(x)\,dx.$$

Полагая здесь $h(x)=|f(x)-g(x)|^p$ и извлекая затем корень p-й степени, мы получим:

$$D_{S_{l_1}^{(p)}}(f, g) \leqslant \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1/p} D_{S_{l_2}^{(p)}}(f, g). \qquad (5.2.1)$$

Для вывода противоположного неравенства положим $l_2 = nl_1 + \theta l_1$, где n—целое положительное число, и $0\leqslant\theta<1$. Имеем:

$$\sup_x \frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2} h(x)\,dx < \sup_x \frac{1}{nl_1}\int_x^{x+(n+1)l_1} h(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x \frac{1}{nl_1}\left\{\int_x^{x+l_1} + \ldots + \int_{x+nl_1}^{x+(n+1)l_1} h(x)\,dx\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n+1}{n}\sup_x \frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} h(x)\,dx < 2\sup_x \frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} h(x)\,dx.$$

Снова полагая $h(x)=|f(x)-g(x)|^p$, мы получим:

$$[D_{S_{l_2}^p}\{f, g\}]^p \leqslant 2\,[D_{S_{l_1}^p}\{f, g\}]^p.$$

Поэтому

$$D_{S_{l_2}^p}\{f, g\} \leqslant 2^{1/p} D_{S_{l_1}^p}\{f, g\}. \qquad (5.2.2)$$

Из неравенств (5.2.1) и (5.2.2) следует, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна при одном l, то она также фундаментальна и при всяком другом l, т. е. S-расстояния, соответствующие различным l, топологически эквивалентны. Можно, например, полагать всегда $l=1$. В этом случае мы будем писать просто S^p, опуская внизу единицу.

2. Теорема 5.2.1. *S^p-пространства полны.*

В дальнейшем нас будет интересовать только случай $p>1$, который мы и рассмотрим. Обычное доказательство полноты пространства $L_p(a, b)$ почти дословно переносится на S^p-пространства.

Доказательство теоремы разобьем на два пункта.

1) Пусть $\{u_n(x)\}$ $(a\leqslant x\leqslant b)$—последовательность неотрицательных функций и

$$I_n=\int\limits_a^b u_n(x)\,dx,$$

причем ряд $I_1+I_2+\ldots$ сходится. Тогда ряд $u_1(x)+$ $+u_2(x)+\ldots$ почти всюду сходится к конечной функции. В самом деле, если бы ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots$ сходился к $+\infty$ на множестве положительной меры, то по теореме Лебега об интегрировании монотонных последовательностей функций *) мы имели бы:

$$I_1+I_2+\ldots=\infty,$$

что противоречит допущению.

2) Пусть $D_{S^p}\{f_n, f_m\}\to 0$ при $m, n\to\infty$. Положим

$$\varepsilon_i=\max_{m,\, n\geqslant i} D_{S^p}\{f_n, f_m\}.$$

Так как $\varepsilon_i\to 0$, то можно подобрать достаточно быстро возрастающую последовательность индексов $\{n_k\}$, так что $\varepsilon_{n_1}+\varepsilon_{n_2}+\ldots<\infty$. По неравенству Гельдера

$$\sup_x\int\limits_x^{x+1}|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|\,dx\leqslant\varepsilon_{n_k}.$$

*) См., например, Натансон, цит. соч., стр. 126.

Поэтому в силу 1) ряд

$$|f_{n_1}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| + \dots$$

сходится почти всюду. Следовательно, почти всюду существует функция

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \{f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)\} + \dots = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Если $m > n_k$, то

$$D_{S^p}\{f_m, f_{n_k}\} < \varepsilon_m.$$

По лемме Фату *) отсюда следует (при $n_k \to \infty$)

$$D_{S^p}\{f, f_m\} \leqslant \varepsilon_m,$$

т. е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в S^p-метрике к $f(x)$, что и доказывает полноту S^p-пространств. Из неравенства треугольника легко следует единственность предельной функции $f(x)$.

3. Определение 5.2.2. *Число τ называется S_l^p, ε-почти-периодом суммируемой с p-й степенью (в каждом конечном интервале) функции $f(x)$, если выполняется неравенство*

$$D_{S_l^p}\{f(x+\tau), f(x)\} < \varepsilon.$$

Определение 5.2.3. *Измеримая и суммируемая вместе со своей p-й степенью ($p \geqslant 1$) в каждом конечном интервале функция $f(x)$ называется S_l^p-почти-периодической (S_l^p-п.-п.), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого фиксированного $l > 0$ существует относительно плотное множество S_l^p, ε-почти-периодов функции $f(x)$.*

Из неравенств (5.2.1) и (5.2.2) следует, что в этом определении можно ограничиться случаем $l = 1$.

Теорема 5.2.2. *S^p-п.-п. функция $f(x)$ S^p-ограничена, т. е. существует такая постоянная величина A, что* **)

$$D_{S^p}\{f\} < A.$$

---

*) См. И. П. Натансон, цит. соч., стр. 125.

**) $D_{S^p}\{f(x)\} = D_{S^p}\{f(x), 0\}$.

Доказательство. Положим $\varepsilon = 1$. Пусть в каждом интервале длины L $(\alpha < x < \alpha + L)$ имеется хотя бы один S^p, ε-почти-период $f(x)$. Обозначим через x_0 произвольное действительное число и через τ — S^p, ε-почти-период $f(x)$, расположенный в интервале $(-x_0, -x_0 + L)$. По неравенству Минковского

$$\left(\int_{x_0}^{x_0+1} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{x_0}^{x_0+1} |f(x) - f(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p} + \\ + \left(\int_{x_0}^{x_0+1} |f(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \left(\int_{x_0+\tau}^{x_0+\tau+1} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant 1 + \left(\int_{0}^{L+1} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = A,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 5.2.3. *S^p-п.-п. функция S^p-равномерно непрерывна, т. е., каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что*

$$D_{S^p}\{f(x+h), f(x)\} < \varepsilon, \quad \textit{если} \quad |h| < \delta.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано и x_0 — произвольное действительное число. Выберем S^p, $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период τ в интервале $\left\{-x_0, \ -x_0 + L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right\}$. В силу неравенства Минковского имеем для каждого действительного h:

$$\left(\int_{x_0}^{x_0+1} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{x_0}^{x_0+1} |f(x+h) - f(x+h+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p} + \\ + \left(\int_{x_0}^{x_0+1} |f(x+h+\tau) - f(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_{x_0}^{x_0+1}|f(x+\tau)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+$$

$$+\left(\int_{x_0+\tau}^{x_0+1+\tau}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\left(\int_{0}^{L+1}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Далее, в силу известной теоремы Лебега можно определить число $\delta=\delta(\varepsilon)$ так, чтобы для $|h|<\delta$ выполнялось неравенство

$$\left(\int_{0}^{L+1}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Число δ, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы.

Следствие 1. *Для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такие числа $L>0$ и $\delta>0$, что каждый интервал действительной оси длины L содержит подинтервал длины δ, все точки которого являются S^p, ε-почти-периодами $f(x)$.*

Действительно, пусть в каждом интервале длины $l=l\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ имеется хотя бы один S^r, $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-период $f(x)$. Выберем согласно теореме 5.2.3 число $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Легко видеть, что числа

$$L=l+2\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\qquad \delta=2\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

удовлетворяют поставленному условию.

В самом деле, пусть $\tau=\tau\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ есть S^p, $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-период функции $f(x)$, заключенный в интервале $\left\{\alpha+\right.$ $\left.+\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \alpha+\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+l\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$. Если $|h|<\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, то числа $\tau+h$ заключаются в интервале $(\alpha,\alpha+L)$ и заполняют интервал длины δ. Из неравенства Минковского следует, что числа $\tau+h$ ($|h|<\delta$) суть S^p, ε-почти-периоды функции $f(x)$.

Следствие 2. *Каково бы ни было положительное число ε, существуют такие положительные числа L и δ, что для каждого положительного числа $h \leqslant \delta$ в каждом интервале длины L содержится S^p, ε-почти-период $f(x)$, являющийся целым кратным числа h.*

В самом деле, в интервале длины L (где L выбрано согласно следствию 1) выберем наименьший S^p, ε-почти-период функции $f(x)$ и обозначим его через τ. Если τ не есть целое кратное числа h ($0 < h < \delta$ и δ выбрано согласно следствию 1), то достаточно к нему добавить число, меньшее h, чтобы получить S^p-почти-период с требуемым свойством.

4. Теорема 5.2.4. *Сумма двух S^p-п.-п. функций $f(x)$ и $g(x)$ есть S^p-п.-п. функция.*

Доказательство. Теорема будет, очевидно, доказана, если мы покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество S^p, ε-почти-периодов, общих как для $f(x)$, так и для $g(x)$. Доказательство проходит так же, как и в случае равномерных п.-п. функций *). Приведем это доказательство **).

По данному $\frac{\varepsilon}{2}$ определим числа L_f, L_g, δ_f, δ_g, согласно следствию 2, и положим

$$L = \max(L_f, L_g), \qquad \delta = \min(\delta_f, \delta_g).$$

Каждый интервал длины L содержит почти-периоды $\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\tau_g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, которые суть целые кратные числа δ. Пусть $\tau_f = n'\delta$, $\tau_g = n''\delta$. Так как $|\tau_f - \tau_g| = |n' - n''|\,\delta < L$, то существует только конечное число значений $n\delta = (n' - n'')\,\delta$. Пусть это будут $n_1\delta, n_2\delta, \ldots, n_r\delta$. Каждому из этих чисел соответствует пара чисел $\{\tau_f^{(1)}, \tau_g^{(1)}\}, \ldots$ $\ldots \{\tau_f^{(r)}, \tau_g^{(r)}\}$, выбранная нами произвольно и затем закрепленная. Положим

$$\max_{q=1, 2, \ldots, r} |\tau_f^{(q)}| = l.$$

---

*) См. H. Bohr [11].

**) В § 4 настоящей главы будет дано другое доказательство этой теоремы.

Пусть $(\alpha, \alpha+L+2l)$ — произвольный интервал длины $L+2l$. В интервале $(\alpha+l, \alpha+l+L)$ длины L выберем два почти-периода $\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=n'\delta$ и $\tau_g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=n''\delta$. Пусть $\tau_f-\tau_g=n_q\delta$ и $\{\tau_f^{(q)}, \tau_g^{(q)}\}$ — выбранная выше фиксированная пара, соответствующая числу n_q, т. е. $\tau_f-\tau_g=\tau_f^{(q)}-\tau_g^{(q)}$ и, значит, $\tau_f-\tau_f^{(q)}=\tau_g-\tau_g^{(q)}=\tau$. Число τ как разность двух S^p, $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-периодов есть S^p, ε-почти-период как для $f(x)$, так и для $g(x)$, а значит, S^p, 2ε-почти-период для их суммы. Кроме этого, число τ находится в интервале $(\alpha, \alpha+L+2l)$ длины $L+2l$. Действительно, число τ_f находится в интервале $(\alpha+l, \alpha+L+l)$, а $|\tau_f^{(q)}|\leqslant l$.

Теорема 5.2.5. *Произведение S^p-п.-п. функции $f(x)$ и S^q-п.-п. функции $g(x)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ есть S-п.-п. функция* *).

Доказательство. Согласно предыдущей теореме для каждого $\varepsilon>0$ существует общее относительно плотное множество S, ε-почти-периодов для $f(x)$ и $g(x)$. В силу неравенства Гельдера **)

$$\int_x^{x+1} |f(x+\tau)g(x+\tau)-f(x)g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^{x+1} |f(x+\tau)|\,|g(x+\tau)-g(x)|\,dx +$$

$$+\int_x^{x+1} |g(x)|\,|f(x+\tau)-f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_x^{x+1} |f(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_x^{x+1} |g(x+\tau)-g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} +$$

$$+\left(\int_x^{x+1} |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\left(\int_x^{x+1} |f(x+\tau)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < 2A\varepsilon,$$

*) При $p=1$ мы будем писать S-п.-п. функция вместо S^1-п.-п. функция.

**) Если $p=1$, то $q=\infty$. В этом случае следует предполагать, что один из множителей ограничен.

где

$$A = \max\left\{\sup_x\left(\int_x^{x+1}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad \sup_x\left(\int_x^{x+1}|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

5. Теорема 5.2.6. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ S^p-п.-п. функций сходится (в метрике S^p) к функции $f(x)$, то предельная функция есть также S^p-п.-п. функция.*

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$D_{S^p}\{f(x), f_N(x)\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда, если τ есть S^p, $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период $f_N(x)$, то в силу неравенства Минковского

$$D_{S^p}\{f(x+\tau), f(x)\} \leqslant D_{S^p}\{f(x+\tau), f_N(x+\tau)\} + \\ + D_{S^p}\{f_N(x+\tau), f_N(x)\} + D_{S^p}\{f_N(x), f(x)\} < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

В частности, если последовательность равномерных п.-п. функций S^p-сходится, то предельная функция есть S^p-п.-п. функция, ибо равномерная п.-п. функция, очевидно, есть также S^p-п.-п. функция (для любого $p > 0$).

6. Теорема 5.2.7. *Если S^p-п.-п. функция $(p \geqslant 1)$ равномерно непрерывна (в обычном смысле) на всей действительной оси, то она есть равномерная п.-п. функция.*

Доказательство. В силу неравенства Гельдера

$$\int_x^{x+1}|f(x+\tau)-f(x)|\,dx \leqslant \left(\int_x^{x+1}|f(x+\tau)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Поэтому мы вправе считать $f(x)$ S-п.-п. функцией. Рассмотрим при фиксированном h функцию

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+s)\,ds.$$

Функция $f_h(x)$ играет в последующем изложении существенную роль. Впервые функцию $f_h(x)$ с успехом применил для изучения периодических функций В. А. Стеклов. Поэтому функцию $f_h(x)$ мы будем называть *функцией Стеклова.*

Докажем, что $f_h(x)$ есть равномерная п.-п. функция. В самом деле, она непрерывна, а ее почти-периодичность следует из оценки

$$|f_h(x+\tau)-f_h(x)|\leqslant\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}|f(s+\tau)-f(s)|\,ds.$$

Далее мы имеем:

$$|f_h(x)-f(x)|=$$
$$=\frac{1}{h}\left|\int\limits_0^h\{f(x+s)-f(x)\}\,ds\right|\leqslant\frac{1}{h}\int\limits_0^h|f(x+s)-f(x)|\,ds.$$

Последнее выражение в силу равномерной непрерывности $f(x)$ при $h\to 0$ стремится равномерно к нулю. Поэтому $f(x)$ есть равномерный предел равномерных п.-п. функций и, значит, сама является такой же функцией. В следующем параграфе мы покажем, что существуют непрерывные (но не равномерно непрерывные) S-п.-п. функции.

7. Рассмотрим еще вопрос о природе неопределенного интеграла S-п.-п. функций.

Теорема 5.2.8. *Если неопределенный интеграл S-п.-п. функции есть ограниченная равномерно непрерывная функция, то он является равномерной п.-п. функцией.*

Доказательство. В предыдущем пункте мы установили, что

$$f_h(x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+s)\,ds$$

есть равномерная п.-п. функция. Рассмотрим неопределенный интеграл функции $f_h(x)$:

$$F_h(x)=\int_0^x f_h(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_0^h ds\int_0^x f(x+s)\,dx=$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h ds\int_s^{s+x} f(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_0^h F(s+x)\,ds-\frac{1}{h}\int_0^h F(s)\,ds,$$

где

$$F(y)=\int_0^y f(x)\,dx.$$

При любом $h>0$ $F_h(x)$, очевидно, ограниченная функция, так как функция $F(y)$, по условию, ограничена. Следовательно, $F_h(x)$ есть равномерная п.-п. функция. Если $h\to 0$, то в силу равномерной непрерывности функции $F(y)$ (которую мы предположили), $F_h(x)$ стремится к $F(x)$ равномерно по x. Поэтому последняя функция является равномерной п.-п. функцией.

8. Теорема 5.2.9. *Пусть $f(x)$ есть S^p-п.-п. функция и*

$$f_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi \qquad (h>0).$$

При каждом фиксированном l

$$\lim_{h\to 0} D_{S_l^p}\{f(x),\ f_h(x)\}=0.$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f_h(x+\tau)-f_h(x)|^p\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} dx\left\{\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|\,d\xi\right\}^p.$$

В силу неравенства Гельдера

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\left(\int_{x}^{x+h}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} h^{1-\frac{1}{p}} =$$

$$=\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p}.$$

В силу этого неравенства, а также в результате изменения порядка интегрирования мы получим ($h<l$):

$$\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f_h(x+\tau)-f_h(x)|^p\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|^p\,d\xi\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l+h}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|^p\frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi}dx\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+2l}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|^p\,d\xi.$$

Из этого неравенства следует, что если число τ есть S_l^p, ε-почти-период $f(x)$, то оно является также S_l^p, 2ε-почти-периодом для $f_h(x)$.

Выберем произвольное положительное число ε и пусть в каждом интервале длины $L=L\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ имеется хотя бы один S_l^p, $\frac{\varepsilon}{4}$-почти-период $f(x)$. Далее, пусть x_0 — произвольное действительное число. В интервале $(-x_0,\ -x_0+L)$

выберем S_l^p, $\frac{\varepsilon}{4}$-почти-период $f(x)$. Тогда

$$\left(\frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}|f(x)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}|f(x)-f(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}|f(x+\tau)-f_h(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}|f_h(x+\tau)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3\varepsilon}{4}+\left(\frac{1}{l}\int\limits_{0}^{L+l}|f(x)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

В силу известной теоремы Лебега при фиксированных l и L можно подобрать столь малое положительное число $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$, что для $|h|<\delta$

$$\left(\frac{1}{l}\int\limits_{0}^{L+l}|f(x)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, из предыдущих неравенств следует

$$\left(\frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}|f(x)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\varepsilon$$

и так как ε и x_0 произвольны, то теорема доказана.

§ 3. Два примера S-п.-п. функций

1. Пусть $f(x)$ — действительная функция. Положим

$$\operatorname{sign} f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } f(x)>0,\\ 0, & \text{если } f(x)=0,\\ -1, & \text{если } f(x)<0.\end{cases}$$

Если $f(x)$ есть периодическая функция, то очевидно, что $\operatorname{sign} f(x)$ есть также периодическая функция.

Предположим теперь, что $f(x)$ — действительная равномерная п.-п. функция. Спрашивается, какова природа функции $\operatorname{sign} f(x)$? Следующая теорема показывает, что в одном важном случае $\operatorname{sign} f(x)$ есть S-п.-п. функция.

Теорема 5.3.1. *Пусть $F(z)$ $(z = x + iy)$ — аналитическая, регулярная в полосе $a \leqslant x \leqslant b$ $(a < 0 < b)$ функция. Если при $x = 0$ $F(z)$ $F(iy) = f(y)$ принимает действительные значения и $f(y)$ есть равномерная п.-п. функция, то $\operatorname{sign} f(y)$ есть S-п.-п. функция.*

Доказательство. Обозначим через α произвольное положительное число и через E_α — множество тех y, для которых $|f(y)| > \alpha$. Если τ есть α-почти-период $f(y)$, то для $y \in E_\alpha$

$$\operatorname{sign} f(y+\tau) = \operatorname{sign} f(y).$$

В самом деле, в противном случае мы имели бы:

$$|f(y+\tau) - f(y)| = |f(y)| + |f(y+\tau)| > \alpha$$

и, следовательно, число τ не могло бы быть α-почти-периодом функции $f(y)$. Обозначим через CE_α дополнительное к E_α множество. Для произвольного y имеем:

$$\int_y^{y+1} |\operatorname{sign} f(y+\tau) - \operatorname{sign} f(y)|\, dy \leqslant 2 \int_{CE_\alpha * (y,\, y+1)} dy =$$
$$= 2 \operatorname{mes}[CE_\alpha * (y,\, y+1)].$$

Нам остается показать, что при $\alpha \to 0$ $\operatorname{mes}[CE_\alpha * (y,\, y+1)]$ стремится к нулю равномерно по y.

Допустим противное, т. е. допустим, что

$$\operatorname{mes}\{CE_\alpha * (y,\, y+1)\}$$

при $\alpha \to 0$ не стремится равномерно по y к нулю. Тогда можно указать:

1) фиксированное число $m_0 > 0$,

2) бесконечную последовательность положительных, неограниченно убывающих чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и

3) бесконечную последовательность неограниченно возрастающих чисел, так что

$$\operatorname{mes}\{CE_{\alpha_n^*}(y_n, y_n+1)\} > m_0.$$

Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(y) = f(y+y_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Для каждой функции $\varphi_n(y)$ в интервале $(0, 1)$ существует множество точек U_n, меры, большей m_0, в каждой точке которого выполняется неравенство $|\varphi_n(y)| < \alpha_n$.

В силу свойства нормальности равномерных п.-п. функций из последовательности $\varphi_n(y)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не загромождать обозначения, мы будем считать, что сама последовательность $\varphi_n(y)$ сходится. Положим $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(y) = \varphi(y)$ и обозначим через U верхний предел множеств U_n (т. е. U есть множество тех точек, каждая из которых принадлежит бесконечному числу множеств U_n). Как известно *),

$$\operatorname{mes} U \geqslant m_0.$$

Пусть $y \in U$. Это означает, что найдется такая бесконечная последовательность индексов n_k, что $y \in U_{n_k}$. Из определения U_{n_k} следует, что

$$|\varphi_{n_k}(y)| < \alpha_{n_k}.$$

Следовательно, полагая $k \to \infty$, мы получим для $y \in U$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n_k}(y) = \varphi(y) = 0.$$

С другой стороны, $\lim \varphi_{n_k}(y) = \varphi(y)$ есть аналитическая функция как предел аналитических функций, регулярных в полосе. Мы пришли к противоречию, ибо аналитическая функция, отличная от тождественного нуля, не может обращаться в нуль на множестве положительной меры.

В частности, из доказанной теоремы следует, что знак действительного тригонометрического многочлена есть S-п.-п. функция.

---

*) См. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. I, 1933, стр. 66.

2. Пользуясь рассуждениями предыдущей теоремы, легко построить пример непрерывной S-п.-п. функции (не являющейся равномерной п.-п. функцией).

Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$\varphi(x) = 2 + \cos x + \cos \sqrt{2}\, x.$$

Мы уже видели (см. стр. 144), что для всех действительных x $\varphi(x) > 0$ и $\inf \varphi(x) = 0$.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x) = \sin \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Покажем, что $f(x)$ есть S-п.-п. функция. Пусть $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ выбраны произвольно. Рассмотрим множество E_α (см. доказательство предыдущей теоремы) и пусть τ есть δ-почти-период $\varphi(x)$. Тогда

$$|f(x+\tau) - f(x)| =$$
$$= \left| \sin \frac{1}{\varphi(x+\tau)} - \sin \frac{1}{\varphi(x)} \right| \leqslant 2 \sin \frac{|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)|}{2\varphi(x+\tau)\,\varphi(x)} < \frac{\delta}{\alpha(\alpha - \delta)}.$$

Следовательно,

$$\int_x^{x+1} |f(x+\tau) - f(x)|\, dx \leqslant \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} + 2 \operatorname{mes} \{CE_\alpha * (x,\ x+1)\}.$$

Обозначим через ε произвольное положительное число. На основании предыдущей теоремы можно α выбрать столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$2 \operatorname{mes} \{CE_\alpha * (x,\ x+1)\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбрав таким образом α, подберем затем δ из условия

$$\frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, если τ есть δ-почти-период $\varphi(x)$, то

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_x^{x+1} |f(x+\tau) - f(x)|\, dx < \varepsilon$$

и, следовательно, τ есть S, ε-почти-период $f(x)$.

Остается показать, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной функцией на всей действительной прямой.

Обозначим через n произвольное положительное число. Так как $\varphi(x)$ — непрерывная действительная функция и $\inf\limits_{-\infty<x<\infty} \varphi(x) = 0$, то найдутся такие значения $x_n > 0$ и $x'_n > 0$, что

$$\varphi(x_n) = \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi} \quad \text{и} \quad \varphi(x'_n) = \frac{1}{n\pi}. \tag{5.3.1}$$

Различных пар точек (x_n, x'_n) может существовать бесчисленное множество. В дальнейшем мы будем подразумевать под x_n и x'_n наименьшие положительные числа, удовлетворяющие уравнениям (5.3.1). Покажем, что при $n \to \infty$ $|x'_n - x_n| \to 0$.

Допустим противное. Тогда можно указать бесконечную последовательность неограниченно возрастающих чисел $x'_{n_1}, x'_{n_2}, \ldots$ так, что

$$\varphi(x'_{n_k}) = \frac{1}{n_k \pi},$$

причем каждая точка x'_{n_k} имеет окрестность, длина которой превосходит фиксированное положительное число и во всех точках которой выполняется неравенство

$$\varphi(x) < \frac{1}{\left(n_k - \frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Но последнее неравенство находится в противоречии с тем, что

$$\operatorname{mes}\left\{CE_{\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}} * (x, x+1)\right\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x. Далее мы имеем:

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left|\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \sin n\pi\right| = 1,$$

и так как $|x'_n - x_n| \to 0$ при $n \to \infty$, то $f(x)$ не может быть равномерно непрерывной функцией.

3. В § 10 гл. I мы уже имели возможность убедиться в том, что случай $\lambda_{n+1}-\lambda_n > \alpha > 0$ (λ_n — показатели Фурье п.-п. функции) близок к случаю чисто периодических функций. Следующая теорема еще раз подтверждает это.

Теорема 5.3.2*). *Если* $\lambda_{n+1}-\lambda_n > \alpha > 0$ *(α от n не зависит) и* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, *то суммы*

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$$

S^2-сходятся.

Доказательство. Положим

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$$

и рассмотрим интеграл ($m < n$)

$$\sigma_{m,n} = \frac{1}{2}\int\limits_{u-1}^{u+1} (1-|x-u|)\,|S_n(x)-S_m(x)|^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{u-1}^{u+1} (1-|x-u|) \sum_{m<|k|\leq n}\ \sum_{m<|l|\leq n} a_k\bar{a}_l e^{i(\lambda_k-\lambda_l)x}dx =$$

$$= \sum_k \sum_l a_k\bar{a}_l\, \frac{1}{2}\int\limits_{u-1}^{u+1} (1-|x-u|)\, e^{i(\lambda_k-\lambda_l)x}dx.$$

Полагая $x=u+t$ и интегрируя по частям, мы получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{u-1}^{u+1} (1-|x-u|)\, e^{i\lambda x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (1-|t|)\, e^{i\lambda(u+t)}dt =$$

$$= 2e^{i\lambda u}\,\frac{\sin^2\dfrac{\lambda}{2}}{\lambda^2}.$$

*) В. В. Степанов [2], [3].

Поэтому

$$\sigma_{m,n} \leqslant 2 \sum_{m<|k|\leqslant n} \sum_{m<|l|\leqslant n} |a_k||a_l| \frac{\sin^2 \frac{(\lambda_k-\lambda_l)}{2}}{(\lambda_k-\lambda_l)^2} =$$

$$= 2\sum_{k=m}^{n}\sum_{l=m}^{n} |a_k||a_l| \frac{\sin^2 \frac{(\lambda_k-\lambda_l)}{2}}{(\lambda_k-\lambda_l)^2} +$$

$$+ 2\sum_{k=-n}^{-m}\sum_{l=-n}^{-m} |a_k||a_l| \frac{\sin^2 \frac{(\lambda_k-\lambda_l)}{2}}{(\lambda_k-\lambda_l)^2} = 2\sigma_{m,n}^{(1)} + 2\sigma_{m,n}^{(2)}.$$

Обе суммы оцениваются аналогично. Рассмотрим, например, $\sigma_{m,n}^{(1)}$. Обозначая для сокращения записи элемент суммирования через C_{kl}, мы получим в силу того, что $C_{kl} = C_{lk}$,

$$\sigma_{m,n}^{(1)} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{l=m}^{n} C_{kl} =$$

$$= \sum_{k=l} C_{kl} + 2\sum_{k-l=1} C_{kl} + 2\sum_{k-l=2} C_{kl} + \ldots + 2\sum_{k-l=n-m} C_{kl}. \tag{5.3.2}$$

Так как $\lambda_{k+1}-\lambda_k > \alpha$, то $\lambda_k-\lambda_l > (k-l)\,\alpha$ $(k>l)$ и, следовательно,

$$\frac{\sin^2 \frac{(\lambda_k-\lambda_l)}{2}}{(\lambda_k-\lambda_l)^2} < \frac{1}{\alpha^2(k-l)^2}.$$

Поэтому из разложения (5.3.2) следует оценка

$$\sigma_{m,n}^{(1)} \leqslant 4\sum_{k=m}^{n} |a_k|^2 + \frac{2}{\alpha^2}\sum_{k=m}^{n} |a_k|^2 + \frac{2}{4\alpha^2}\sum_{k=m}^{n} |a_k|^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2}{(n-m)^2\cdot\alpha^2}\sum_{k=m}^{n} |a_k|^2 \leqslant \text{const} \sum_{k=m}^{n} |a_k|^2.$$

Поэтому при m, $n\to\infty$ $\sigma_{m,n}^{(1)}\to 0$ и точно так же доказывается, что $\sigma_{m,n}^{(2)}\to 0$.

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{u-1}^{u+1}(1-|x-u|)\,|S_n(x)-S_m(x)|^2\,dx\to 0$$

при $m,\ n\to\infty$. Далее, если $|x-u|\leqslant\frac{1}{2}$, то $(1-|x-u|)\geqslant\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}}(1-|x-u|)\,|S_n(x)-S_m(x)|^2\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\int\limits_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}}|S_n(x)-S_m(x)|^2\,dx.$$

Из последней оценки следует, что последовательность конечных тригонометрических сумм $S_n(x)$ S^2-сходится. Предельная функция $f(x)$ (которая существует, так как пространство S^2-полно) в силу теоремы 5.2.6 есть S^2-п.-п. функция.

Из дальнейших результатов будет следовать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{i\lambda_k x}$$

есть ряд Фурье функции $f(x)$.

§ 4. Компактность и нормальность S^p-п.-п. функций *)

1. В настоящем параграфе мы изучим признаки компактности семейств S-п.-п. функций. В частности, будет показано, что на S-п.-п. функции переносится свойство нормальности.

Теорема 5.4.1. *Для того чтобы семейство S^p-п.-п. функций $E=\{f(x)\}$ было компактным (в смысле S^p-схо-*

---

*) А. С. Ковапько [1].

димости), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

I) *При любом* $h > 0$ *множество равномерных п.-п. функций*

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(s)\,ds, \quad f(x) \in E$$

компактно в смысле равномерной сходимости на всей действительной оси.

II) *Каково бы ни было положительное число* ε *и фиксированное число* $l > 0$, *можно указать положительное число* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *такое, что для* $h < \delta$

$$D_{S_l^p}\{f(x), f_h(x)\} < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из замечания к теореме Хаусдорфа, ибо $f_h(x)$, по условию теоремы, есть компактная ε-сеть для E.

Докажем необходимость. В силу теоремы Хаусдорфа для фиксированного $h > 0$ и каждого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, образующих ε-сеть для семейства E. Это значит, что для любой функции $f(x) \in E$ найдется свой номер k такой, что для всех действительных x выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} |f(x) - f_k(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{5.4.1}$$

Покажем, что при каждом фиксированном $h > 0$ функции

$$f_{h,k}(x) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f_k(s)\,ds$$

образуют конечную ε-сеть для множества равномерных п.-п. функций

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(s)\,ds; \quad f(s) \in E.$$

В самом деле, если $p > 1$, то из неравенства Гельдера и из неравенства (5.4.1) следует

$$|f_h(x) - f_{h,k}(x)| \leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(s) - f_k(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} \left\{ \int_x^{x+h} |f(s) - f_k(s)|^p\, ds \right\}^{1/p} \left\{ \int_x^{x+h} ds \right\}^{1-\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(s) - f_k(s)|^p\, ds \right\}^{1/p} < \varepsilon. \qquad (5.4.2)$$

Легко видеть, что неравенство (5.4.2) сохраняется и в случае $p = 1$. Таким образом, семейство равномерных п.-п. функций $\{f_h(x)\}$, $f(x) \in E$ компактно и, значит, условие 1) доказано. Переходим к доказательству условия 2). Пусть $l > 0$ фиксировано и $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. Выберем на E $\frac{\varepsilon}{4}$-сеть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, т. е. для любой функции $f(x) \in E$ существует свой номер k такой, что

$$D_{S_l^p}\{f(x),\ f_k(x)\} < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (5.4.3)$$

Из теоремы 5.2.9 следует, что при достаточно малом $\delta_k = \delta_k\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ и $h < \delta_k$.

$$D_{S_l^p}\{f_k(x),\ f_{h,k}(x)\} < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ где } f_{h,k} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_k(s)\, ds.$$

Полагая

$$\delta = \min_{k=1,\,2,\,\ldots,\,n} \delta_k,$$

мы будем иметь:

$$D_{S_l^p}\{f_k f_{n,k}\} < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ если } h < \delta \ (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5.4.4)$$

Далее, применяя неравенство Гельдера и меняя порядок интегрирования, получим:

$$D_{S_l^p}\{f_{h,k}(x), f_h(x)\} = \sup_x \left(\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f_{h,k}(x) - f_h(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{l}\int_x^{x+l} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} |f(t) - f_k(t)|^p \, dt \, ds\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{l}\int_x^{x+l+h} |f(t) - f_k(t)|^p \, dt\right)^{1/p} <$$

$$< D_{S_l^p}\{f(x), f_k(x)\} + \left(\frac{1}{l}\int_{x+l}^{x+l+h} |f(t) - f_k(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 2D_{S_l^p}[f(x), f_k(x)] < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4.5}$$

Из (5.4.3), (5.4.4), (5.4.5) и неравенства Минковского следует для $h < \delta$

$$D_{S_l^p}\{f(x), f_h(x)\} \leqslant$$

$$\leqslant D_{S_l^p}\{f, f_k\} + D_{S_l^p}\{f_k, f_{h,k}\} + D_{S_l^p}\{f_{h,k}, f_h\} < \varepsilon,$$

что и доказывает условие 2).

2. Определение. *Суммируемая вместе со своей p-й степенью в каждом конечном интервале функция $f(x)$ называется S^p-нормальной, если семейство функций $f(x+k)$* $(-\infty < k < \infty)$ S^p-компактно.

Теорема 5.4.2. *Для того чтобы функция $f(x)$ была S^p-нормальной функцией, необходимо и достаточно, чтобы она была S^p-п.-п. функцией.*

Доказательство. 1) Достаточность следует непосредственно из предыдущей теоремы. В самом деле, пусть $f(x)$ есть S^p-п.-п. функция. Требуется показать, что семейство $\{f(x+k)\}$ S^p-компактно, т. е. что для этого семейства выполняются условия I) и II) предыдущей теоремы. Выполнение условия II) следует из теоремы 5.2.9, а условие I) — из того, что при любом фиксированном h функция

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s)\,ds$$

есть равномерная п.-п. функция, а также из равенства

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s+k)\,ds = \frac{1}{h} \int_{x+k}^{x+k+h} f(s)\,ds = f_h(x+k).$$

2) Докажем необходимость. Пусть $f(x)$ — S^p-нормальная функция. По теореме Хаусдорфа для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть: $f(x+k_1)$, $f(x+k_2)$, ..., $f(x+k_n)$. Это значит, что, каково бы ни было действительное число k, найдется индекс r, для которого

$$D_{S_p}\{f(x+k),\ f(x+k_r)\} < \varepsilon$$

и, следовательно, в силу очевидного свойства расстояния D_{S^p}

$$D_{S^p}\{f(x+k-k_r),\ f(x)\} < \varepsilon,$$

т. е. число $\tau = k - k_r$ есть S^p, ε-почти-период функции $f(x)$. Нам остается показать, что при каждом ε числа τ образуют относительно плотное множество. Пусть

$$L = \max_{r=1,\,2,\,\dots,\,n} |k_r|$$

и $k = \alpha + L$, где α — произвольное действительное число. Если число k_r соответствует числу k, то согласно предыдущему $k - k_r$ есть S^p, ε-почти-период $f(x)$. Легко видеть, что число $k - k_r$ лежит в интервале $(\alpha, \alpha + 2L)$, и так как α выбрано произвольно, то множество S^p, ε-почти-периодов функции $f(x)$ относительно плотно при любом $\varepsilon > 0$.

§ 5. Элементарные свойства п.-п. функций Вейля

1. В теории п.-п. функций Степанова существенно, что число l, фигурирующее в определении расстояния, фиксировано. Напротив, для п.-п. функций Вейля существенно, что с убыванием ε до нуля число l растет до бесконечности.

Определение 5.5.1. *Величина* ($p \geqslant 1$)

$$D_{W^p}\{f, g\} = \lim_{l\to\infty} D_{S_l^p}\{f, g\} =$$
$$= \lim_{l\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(x) - g(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

называется W-расстоянием порядка p.

Для того чтобы это определение имело смысл, следует показать, что предел при $l \to \infty$ существует. Очевидно, что достаточно доказать существование предела

$$\lim_{l\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} \int_x^{x+l} |\varphi(x)| \, dx \tag{5.5.1}$$

для всякой измеримой, суммируемой в каждом конечном интервале функции $\varphi(x)$.

Допустим, что для одного какого-то значения l $D_{S_l^p}\{\varphi(x)\} = \infty$. Очевидно, что в этом случае и для всех других l результат будет тот же и, следовательно, предел (5.5.1) существует и равен бесконечности. Таким образом, мы вправе предполагать, что для всех $l > 0$ $D_{S_l^p}\{\varphi(x)\} < \infty$. Пусть l_0 и $l > l_0$ — произвольные положительные числа, а n — целое число, для которого

$$(n-1)\, l_0 < l \leqslant n l_0.$$

Так как

$$\frac{1}{l} \int_x^{x+l} |\varphi(x)| \, dx \leqslant \frac{n l_0}{l} \cdot \frac{1}{l_0} \int_x^{x+n l_0} |\varphi(x)| \, dx,$$

то

$$D_{S_l}\{\varphi(x)\} \leqslant \frac{n l_0}{l} D_{S_{n l_0}}\{\varphi(x)\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{l + l_0}{l} D_{S_{n l_0}}\{\varphi(x)\} \leqslant \left(1 + \frac{l_0}{l}\right) D_{S_{l_0}}\{\varphi(x)\},$$

откуда следует, что для любого l_0

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} D_{S_l}\{\varphi(x)\} \leqslant D_{S_{l_0}}\{\varphi(x)\}.$$

Полагая $l_0 \to \infty$, мы отсюда получим:

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} D_{S_l}\{\varphi(x)\} \leqslant \underline{\lim_{l_0\to\infty}} D_{S_{l_0}}\{\varphi(x)\} = \underline{\lim_{l\to\infty}} D_{S_l}\{\varphi(x)\},$$

что и доказывает существование предела (5.5.1).

2. Условимся впредь обозначать через $S_l^p E\{\varepsilon, f(x)\}$ множество всех ε, S_l^p-почти-периодов функции $f(x)$.

Определение 5.5.2. *Функция $f(x)$, интегрируемая с p-й степенью в каждом конечном интервале, называется почти-периодической в смысле Вейля (W^p-п.-п.), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что множество $S_l^p E\{\varepsilon, f(x)\}$ относительно плотно.*

Иначе говоря, функция $f(x)$ называется W^p-п.-п. функцией, если с каждым $\varepsilon > 0$ можно сопоставить два числа $l = l(\varepsilon)$ и $L = L(\varepsilon)$ так, что в каждом интервале действительной оси $(\alpha, \alpha + L)$ длины L найдется хотя бы одно число τ, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left\{\frac{1}{l}\int\limits_x^{x+l} |f(x+\tau) - f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} < \varepsilon.$$

Очевидно, что если $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} l(\varepsilon) < \infty$, то W^p-п.-п. функция есть S^p-п.-п. функция. Точно так же очевидно, что равномерные п.-п. функции и S^p-п.-п. функции суть W^p-п.-п. функции. Докажем теперь несколько простых свойств W^p-п.-п. функций, аналогичных ранее изученным свойствам S^p-п.-п. функций.

Теорема 5.5.1. *W^p-п.-п. функция W^p-ограничена, т. е. существует такое число A, что*

$$D_{W^p}\{f(x)\} < A. \tag{5.5.2}$$

Доказательство. Достаточно показать существование для каждой W^p-п.-п. функции $f(x)$ положительных чисел l и A, для которых выполняется неравенство

$$D_{S_l^p}\{f(x)\} < A. \tag{5.5.3}$$

В самом деле, из (5.5.3) следует для любого целого положительного числа n

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{nl} \int_{x}^{x+nl} |f(x)|^p\, dx \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l} \int_{x}^{x+l} |f(x)|^p\, dx < A^p.$$

Извлекая корень p-й степени, мы получим:

$$D_{S^p_{nl}} \{f(x)\} < A.$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим из последнего неравенства неравенство (5.5.2). Итак, достаточно доказать неравенство (5.5.3).

Пусть $\varepsilon = 1$. Выберем числа $l = l(1)$ и $L = L(1)$ согласно определению W^p-почти-периодичности. Обозначим через x_0 произвольное действительное число. В интервале $(-x_0, -x_0+L)$ длины L выберем W^p-почти-период τ. Далее имеем:

$$\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f(x)-f(x+\tau)|^p\, dx\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f(x+\tau)|^p\, dx\right)^{1/p} < 1 + \left(\frac{1}{l}\int_{x_0+\tau}^{x_0+l+\tau} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \left(\frac{1}{l}\int_{0}^{l+L} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = A.$$

Так как число x_0 было выбрано произвольно, то неравенство (5.5.3) доказано.

Теорема 5.5.2. *W^p-п.-п. функция W^p-равномерно непрерывна, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $l = l(\varepsilon)$ и $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, для которых*

$$D_{S^p_l} \{f(x+h),\ f(x)\} < \varepsilon, \textit{ если } |h| < \delta_0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно определению W^p-п.-п. функций можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что множество $S_l^p E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f(x)\right\}$ относительно плотно. Через $L = L(\varepsilon)$ обозначим соответствующую длину, через x_0 — произвольное действительное число. Далее, выберем в интервале $(-x_0, -x_0+L)$ S_l^p, $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период функции $f(x)$, который мы будем обозначать через $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Для каждого действительного числа h имеем:

$$\left\{\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f(x+h)-f(x+h+\tau)|^p\,dx\right\}^{1/p} +$$

$$+\left\{\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f(x+h+\tau)-f(x+\tau)|^p\,dx\right\}^{1/p} +$$

$$+\left\{\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f(x+\tau)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \left\{\frac{1}{l}\int_{0}^{l+L} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

В силу известной теоремы Лебега можно определить положительное число $\delta = \delta_0(\varepsilon)$ так, чтобы для $|h| < \delta_0$ выполнялось неравенство

$$\left\{\frac{1}{l}\int_{0}^{l+L} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Числа l и δ_0 удовлетворяют условию теоремы.

Теорема 5.5.3. *Сумма двух W^p-п.-п. функций есть W^p-п.-п. функция.*

Доказательство. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две W^p-п.-п. функции. Пусть $\varepsilon > 0$ дано. Через $l_1(\varepsilon)$ и $l_2(\varepsilon)$ обозначим числа, отвечающие $f_1(x)$ и $f_2(x)$ согласно определению W^p-п.-п. функций. Допустим, что $l_1 > l_2$, и положим

$$l_1 = nl_2 + \theta l_2,$$

где n — целое положительное число и θ — правильная дробь. Пусть τ_2 есть $S^p_{l_2}$, ε-почти-период $f_2(x)$. Тогда

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l_1} \int_x^{x+l_1} | f_2(x+\tau_2) - f_2(x) |^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{nl_2} \int_x^{x+(n+1)l_2} | f_2(x+\tau) - f_2(x) |^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_2} | f_2(x+\tau) - f_2(x) |^p \, dx < 2\varepsilon^p.$$

Поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что число $l(\varepsilon)$, которое фигурирует в определении W^p-п.-п. функций, одно и то же для $f_1(x)$ и $f_2(x)$. После этого замечания остается дословно повторить рассуждения теоремы 5.2.3.

Теорема 5.5.4. *Произведение W^p-п.-п. функции $f(x)$ и W^q-п.-п. функции $g(x)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ есть W-п.-п. функция* *).

Доказательство. Согласно предыдущей теореме для каждого $\varepsilon > 0$ существует общее относительно плотное множество ε, W-почти-периодов для $f(x)$ и $g(x)$. Пусть l — соответствующее число. В силу неравенства

---

*) W^1-п.-п. функции мы будем обозначать сокращенно через W-п.-п. функции.

Гельдера

$$\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l}|f(x+\tau)g(x+\tau)-f(x)g(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l}|f(x+\tau)||g(x+\tau)-g(x)|\,dx+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l}|g(x)||f(x+\tau)-f(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l}|f(x+\tau)|^{p}\,dx\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l}|g(x+\tau)-g(x)|^{q}\,dx\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\frac{1}{l}\int_{x}^{x+}|g(x)|^{q}\,dx\right)^{1/q}\left(\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l}|f(x+\tau)-f(x)|^{p}\,dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда и из теоремы 5.5.1 следует настоящая теорема*).

Теорема 5.5.5. *Если последовательность W^p-п.-п. функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... W^p-сходится к функции $f(x)$, то предельная функция $f(x)$ есть также W^p-п.-п. функция.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем число $N=N(\varepsilon)$ такое, чтобы

$$D_{W^p}\{f(x),\ f_N(x)\}<\frac{\varepsilon}{6}.$$

Далее, подберем число $l_1=l_1(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$D_{S^p_{l_1}}\{f(x),\ f_N(x)\}<\frac{\varepsilon}{6},$$

*) При $p=1$ $q=\infty$. В этом случае следует считать $g(x)$ ограниченной функцией.

что возможно в силу определения W^p-расстояния. Затем подберем число $l_2 = l_2(\varepsilon)$ и число τ так, чтобы имело место неравенство

$$D_{S^p_{l_2}}\{f_N(x+\tau),\ f_N(x)\} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Пусть $l = \max\{l_1, l_2\}$. Легко видеть (см. доказательство теоремы 5.5.3), что

$$D_{S^p_l}\{f(x),\ f_N(x)\} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.5.4}$$

$$D_{S^p_l}\{f_N(x+\tau),\ f_N(x)\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.5.5}$$

Из (5.5.4) и (5.5.5) следует

$$\begin{aligned} D_{S^p_l}\{f(x+\tau),\ f(x)\} \leqslant D_{S^p_l}\{f(x+\tau),\ f_N(x+\tau)\} &+ \\ + D_{S^p_l}\{f_N(x+\tau),\ f_N(x)\} &+ \\ + D_{S^p_l}\{f_N(x),\ f(x)\} &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что и доказывает W^p-почти-периодичность функции $f(x)$.

Теорема 5.5.6. *Пусть $f(x)$ есть W^p-п.-п. функция и*

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

Тогда

$$\lim_{h\to 0} D_{W^p}\{f(x),\ f_h(x)\} = 0.$$

Доказательство. Если τ есть S^p_l, $\frac{\varepsilon}{4}$-почти-период $f(x)$ $\left[l = l\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right]$, то при любом h для $f_h(x)$, как нам известно из доказательства теоремы 5.2.8, τ будет S^p_l, $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-периодом для $f_h(x)$. Пусть x_0 — произвольное действительное число и $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ есть S^p_l, $\frac{\varepsilon}{4}$-почти-период функции $f(x)$, заключенный в интервале $(-x_0,\ -x_0 + L)$.

В силу неравенства Минковского имеем:

$$\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f(x)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f(x)-f(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p}+$$
$$+\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f(x+\tau)-f_h(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p}+$$
$$+\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f_h(x+\tau)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{3}{4}\varepsilon+\left(\frac{1}{l}\int_{0}^{L+l}|f(x)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Так как при фиксированном ε l и L также фиксированы, то в силу теоремы Лебега при достаточно малых h

$$\left(\frac{1}{l}\int_{0}^{L+l}|f(x)-f_h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{4},$$

что и доказывает нашу теорему.

§ 6. Теорема о среднем значении для W^p-п.-п. функций. Равенство Парсеваля для W^2 и S^2-п.-п. функций

1. Так как коэффициенты Фурье п.-п. функций вычисляются с помощью определенных интегралов, то естественно ожидать, что формулы для коэффициентов Фурье, которые мы вывели для равномерных п.-п. функций, распространяются и на суммируемые п.-п. функции. Действительно, имеет место

Теорема 5.6.1. *Для каждой W-п.-п. функции $f(x)$ существует среднее значение*

$$M\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx. \tag{5.6.1}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы почти дословно совпадает с доказательством соответствующей теоремы для равномерных п.-п. функций (теорема 1.3.1). Некоторые изменения следует внести в доказательство п. 1 (см. стр. 32), чем мы сейчас и займемся.

1) Пусть ε — произвольное положительное число и числа $l = l\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ и $L = L\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ выбраны согласно определению W-почти-периодичности. Для произвольного α и произвольного положительного T оценим разность

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx - \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

С этой целью в интервале $(\alpha, \alpha+L)$ выберем S_l, $\frac{\varepsilon}{4}$-почти-период τ функции $f(x)$. Тогда

$$\left|\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx - \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(x)\,dx\right| + \left|\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\tau} f(x)\,dx\right| + \left|\frac{1}{T}\int_{\alpha+T}^{\tau+T} f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\int_{0}^{T} |f(x) - f(x+\tau)|\,dx + \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+L} |f(x)|\,dx +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{\alpha+T}^{\alpha+T+L} |f(x)|\,dx. \qquad (5.6.2)$$

Если $T > l$, то (см. доказательство теоремы 5.5.3)

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} |f(x) - f(x+\tau)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5.6\ 3)$$

Далее, в силу W-ограниченности функции $f(x)$ существуют числа Q и A, для которых

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{Q} \int\limits_{x}^{x+Q} |f(x)|\,dx < A.$$

Поэтому, если $L > Q$, то

$$\frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+L} |f(x)|\,dx = \frac{L}{T} \frac{1}{L} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+L} |f(x)|\,dx = \frac{2AL}{T} \qquad (5.6.4)$$

и точно так же

$$\frac{1}{T} \int\limits_{\alpha+T}^{\alpha+T+L} |f(x)|\,dx < \frac{2AL}{T}. \qquad (5.6.5)$$

Из неравенств (5.6.2), (5.6.3), (5.6.4) и (5.6.5) следует оценка

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx - \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4AL}{T}. \qquad (5.6.6)$$

2) Рассматривая среднее арифметическое из n разностей

$$\frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx - \frac{1}{T} \int\limits_{(\nu-1)T}^{\nu T} f(x)\,dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

мы получим в силу неравенства (5.6.6):

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx - \frac{1}{nT} \int\limits_{0}^{nT} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4AL}{T}. \qquad (5.6.7)$$

Доказательство заканчивается так же, как и в теореме 1.3.1.

2. Полагая в неравенстве (5.6.7) $n \to \infty$, мы получим:

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx - M\{f(x)\} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4AL}{T}. \qquad (5.6.8)$$

3. Мы видели, что для равномерных п.-п. функций среднее значение существует равномерно. Оказывается, что то же самое имеет место и для W-п.-п. функций.

Теорема 5.6.2. *Для каждой W-п.-п. функции предел*

$$\lim \frac{1}{T} \int\limits_a^{a+T} f(x)\, dx = M\{f(x)\}$$

существует равномерно по a.

Доказательство. Если a — постоянное действительное число, то, как легко видеть,

$$M_x\{f(x+a)\} =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_a^{a+T} f(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^{T} f(x)\, dx = M_x\{f(x)\}.$$

Остается показать, что это равенство имеет место равномерно по a, т. е. каждому заданному $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие число $T_0 = T_0(\varepsilon)$, от a не зависящее, для которого

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x+a)\, dx - M\{f(x+a)\} \right| < \varepsilon, \quad \text{если } T > T_0.$$

Но это является следствием неравенства (5.6.8), ибо числа L и A одни и те же для всех функций $f(x+a)$ и, следовательно, от числа a не зависят. В частности,

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{0} f(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(x)\, dx.$$

В последующем именно этим средним значением мы будем пользоваться.

4. Для W^2-п.-п. функции $f(x)$ можно повторить вывод неравенства Бесселя и построить ряд Фурье *):

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}, \quad A_n = M\{f(x)\, e^{-i\Lambda_n x}\}.$$

*) $f(x)\, e^{-i\lambda x}$ при всяком действительном λ есть в силу теоремы 5.5.4 W-п.-п. функция, поэтому существуют средние

$$a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}.$$

Мы теперь покажем, что для W^2-п.-п. функции $f(x)$ имеет место равенство Парсеваля:

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_n |A_n|^2.$$

Если $f(t)$ есть W^2-п.-п. функция, то, как легко видеть, $\overline{f(t)}$ и при каждом фиксированном x $f(x+t)$ суть также W^2-п.-п. функции. Поэтому из теоремы 5.5.4 следует, что

$$F_x(t) = f(x+t)\cdot\overline{f(t)}$$

есть W-п.-п. функция. Рассмотрим функцию $g(x)$ — свертку функции $f(x)$

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\cdot\overline{f(t)}\}$$

и покажем, что предельное равенство имеет место равномерно по x, т. е., каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число $T_0 = T_0(\varepsilon)$, от x не зависящее, что для всех $T > T_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{f(t)}\,dt - M_t\{f(x+t)\overline{f(t)}\}\right| < \varepsilon. \quad (5.6.9)$$

Действительно, в силу неравенства (5.6.6) неравенство (5.6.9) будет выполнено, если $T > \frac{4L_xA_x}{\varepsilon}$, где L_x и A_x соответствуют функции $F_x(t)$. Но из W^2-ограниченности $f(t)$ и неравенства Коши-Буняковского легко следует, что эти числа от x не зависят.

Покажем теперь, что $g(x)$ — равномерная п.-п. функция. Из W^2-ограниченности $f(t)$ следует существование постоянной A, удовлетворяющей оценке

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt < A^2.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно и τ есть S_l^2, $\frac{\varepsilon}{A}$-почти-период $f(t)$ $\left[l = l\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)\right]$. Из неравенства Коши-Буняковского следует

$$|g(x+\tau) - g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x+t+\tau) - f(x+t)|^2 dt\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Точно так же с помощью W^2-равномерной непрерывности $f(t)$ доказывается непрерывность $g(x)$. Поэтому $g(x)$ — равномерная п.-п. функция.

Вычислим теперь ряд Фурье функции $g(x)$. Так как среднее, определяющее функцию $g(x)$, существует равномерно, то возможно изменение порядка средних, и мы получим для любого действительного λ:

$$M_x\{g(x)\,e^{-i\lambda x}\} = M_x\{e^{-i\lambda x} M_t[f(x+t)\overline{f(t)}]\} =$$
$$= M_t\{\overline{f(t)}\,e^{i\lambda t} M_x[f(x+t)\,e^{-i\lambda(x+t)}]\} = |M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}|^2.$$

Поэтому

$$g(x) \sim \sum_n |A_n|^2 e^{i\Lambda_n x}$$

и так как $g(x)$ — равномерная п.-п. функция, а ряд $\sum\limits_n |A_n|^2 e^{i\Lambda_n x}$ сходится равномерно, то в силу теоремы единственности для равномерных п.-п. функций

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 e^{i\Lambda_n x}.$$

При $x = 0$ мы получаем отсюда равенство Парсеваля для $f(x)$. Так как S^2-п.-п. функции являются также и W^2-п.-п. функциями, то равенство Парсеваля доказано также и для S^2-п.-п. функций.

§ 7. Теорема аппроксимации для W^p (S^p)-п.-п. функций

1. Если последовательность конечных тригонометрических сумм $W^p(S^p)$-сходится, то из теоремы 5.5.5 (5.2.5) следует, что предельные функции суть $W^p(S^p)$-почти-периодические. Основная задача настоящего параграфа — доказать обратное утверждение. Это даст нам возможность строить ряды Фурье и для $p \neq 2$.

Теорема 5.7.1. *Пусть* $f(x) \sim \sum\limits_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ *есть* $W^2(S^2)$-*п.-п. функция. Для каждого положительного числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать конечный тригонометрический многочлен* $P_\varepsilon(x)$ *и положительное число* $l = l(\varepsilon)$ (*для* S^2-*п.-п. функций* l *от* ε *не зависит*) *так, что*

$$D_{S_l^2}\{f(x),\ P_\varepsilon(x)\} < \varepsilon.$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай W^2-п.-п. функций. Изменение доказательства на случай S^2-п.-п. функций не представит труда.

Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем числа $l = l\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ и $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ согласно теореме 5.5.6 так, что

$$D_{S_l^2}\{f(x), f_h(x) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{если} \quad |h| < \delta, \qquad (5.7.1)$$

где

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(s)\,ds.$$

Пусть, далее, в каждом интервале длины $L = L\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ содержится S_l^2, $\frac{\varepsilon}{4}$-почти-период *) $f(x)$. Через τ_j обозначим почти-период $f(x)$ в интервале $[(j-1)L,\ jL]$

---

*) Число l может не подойти для $\frac{\varepsilon}{4}$-почти-периодов $f(x)$. В этом случае следует увеличить число l в неравенстве (5.7.1).

($j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Мы знаем (см. доказательство теоремы 5.5.6), что τ_j есть S_l^2, $\frac{\varepsilon}{2}$-почти-период $f_h(x)$.

Из неравенства Минковского и неравенства (5.7.1) следует

$$D_{S_l^2}\{f(x),\ f_h(x+\tau_j)\} < \frac{3\varepsilon}{4} \qquad (j=0 \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Полагая $j=-(n-1), \ldots, n$ и беря среднее арифметическое, мы получим:

$$D_{S_l^2}\left\{f(x),\ \frac{1}{2n}\sum_{j=-(n-1)}^{n}\frac{1}{h}\int_0^h f(x+\tau_j+s)\,ds\right\} < \frac{3\varepsilon}{4}. \quad (5.7.2)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$K_\delta(s)=\begin{cases}\dfrac{L}{\delta}, & \text{если } 0<s-\tau_j<\delta \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),\\ 0 & \text{для прочих } s\end{cases}$$

и положим

$$f_{n,\delta}(x)=\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL} f(x+s)\,K_\delta(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2nL}\sum_{j=-(n-1)}^{n}\frac{L}{\delta}\int_{\tau_j}^{\tau_j+\delta} f(x+s)\,ds.$$

Неравенство (5.7.2) можно, очевидно, переписать в виде

$$D_{S_l^2}\{f(x),\ f_{n,\delta}(x)\} < \frac{3\varepsilon}{4}. \qquad (5.7.3)$$

В силу равенства Парсеваля, каково бы ни было положительное число η и действительное число x, можно подобрать столь большое целое положительное число N, что

$$M_s\left\{\left|f(x+s)-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right|^2\right\} < \eta.$$

Так как для W-п.-п. функций среднее значение существует равномерно, то из последнего неравенства следует, что существует столь большое целое положительное число n, что равномерно по x

$$\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\left|f(x+s)-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right|^2 ds<\eta. \qquad (5.7.4)$$

Далее имеем:

$$f_{n,\delta}(x)=\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL} f(x+s)\,K_\delta(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\left[f(x+s)-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right]K_\delta(s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\left(\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right)K_\delta(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\left[f(x+s)-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right]K_\delta(s)\,ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k x}\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}K_\delta(s)\,e^{i\Lambda_k s}\,ds=$$

$$=\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\left[f(x+s)-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right]K_\delta(s)\,ds+P_\varepsilon(x),$$

где $P_\varepsilon(x)$ есть конечный тригонометрический многочлен. Из неравенства (5.7.4) и неравенства Коши-Буняковского следует

$$\left|\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\left[f(x+s)-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right]K_\delta(s)\,ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}\left|f(x+s)-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i\Lambda_k(x+s)}\right|^2 ds\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2nL}\int_{-nL}^{nL}K_\delta^2(s)\,ds\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{\eta L}{\delta}\right)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{4}, \qquad (5.7.5)$$

если только $\eta<\dfrac{\varepsilon^2\delta}{16L}$.

Из неравенства (5.7.5) следует

$$|f_{n,\delta}(x) - P_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{5.7.6}$$

а значит, и подавно

$$D_{S_l^2}\{f_{n,\delta}(x),\ P_\varepsilon(x)\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.7.7}$$

Из (5.7.3) и (5.7.7) следует

$$D_{S_l^2}\{f(x), P_\varepsilon(x)\} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание I. Если $f(x)$ есть S^2-п.-п. функция, то число l от ε не зависит.

Замечание II. Каждая ограниченная $W(S)$-п.-п. функция, очевидно, есть $W^2(S^2)$-п.-п. функция. Поэтому теорема аппроксимации имеет место для ограниченных $W(S)$-п.-п. функций.

Пусть

$$A = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|.$$

Из представления для $f_{n,\delta}(x)$ легко следует, что $f_{n,\delta}(x)$ имеет ту же верхнюю грань, что и $f(x)$. Поэтому из неравенства (5.7.6) следует, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |P_\varepsilon(x)| < A + \frac{\varepsilon}{4}.$$

2. Доказав теорему аппроксимации для ограниченных $W(S)$-п.-п. функций, нетрудно уже получить ее для $W^p(S^p)$-п.-п. функций.

Лемма. *Для каждой $W^p(S^p)$-п.-п. функции $f(x)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует ограниченная $W^p(S^p)$-п.-п. функция $g(x)$ такая, что*

$$D_{W^p}\{f(x),\ g(x)\} < \varepsilon \quad (D_{S^p}\{f(x),\ g(x)\} < \varepsilon).$$

Доказательство. Обозначим через N произвольное положительное число и положим

$$f_N(x) = f(x), \qquad \text{если } |f(x)| \leqslant N,$$

$$f_N(x) = N\frac{f(x)}{|f(x)|}, \quad \text{если } |f(x)| > N.$$

Очевидно, что для любой пары точек x_1 и x_2 справедливо неравенство

$$|f_N(x_1)-f_N(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(x_2)|.$$

Из этого неравенства следует, что если $f(x)$ есть W^p (S^p)-п.-п. функция, то $f_N(x)$ обладает тем же свойством и с теми же почти-периодами.

Пусть числа l и L выбраны согласно определению W^p-п.-п. функций (для S^p-п.-п. функций число l от ε не зависит). Обозначим через x_0 произвольное действительное число и выберем S_l^p, $\frac{\varepsilon}{3}$-почти-период функции $f(x)$ в интервале $(-x_0, \ -x_0+L)$. Тогда получим:

$$\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f(x)-f_N(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f(x)-f(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f(x+\tau)-f_N(x+\tau)|^p\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}|f_N(x+\tau)-f_N(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<$$

$$<\frac{2\varepsilon}{3}+\left(\frac{1}{l}\int_{0}^{l+L}|f(x)-f_N(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Если числа ε, l и L даны, то в силу определения интеграла Лебега от неограниченных функций можно подобрать N столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{1}{l}\int_{0}^{l+L}|f(x)-f_N(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{3},$$

и лемма доказана.

Теорема 5.7.2. *Для каждой $W^p(S^p)$-п.-п. функции $f(x)$ и каждого $\varepsilon > 0$ можно указать конечный тригонометрический многочлен $P(x)$, удовлетворяющий неравенству*

$$D_{W^p}\{f(x),\ P(x)\} < \varepsilon \quad [D_{S^p}\{f(x),\ P(x)\} < \varepsilon].$$

Доказательство. Пусть даны $W^p(S^p)$-п.-п. функция $f(x)$ и число $\varepsilon > 0$.

Определим число $N > 0$ из условия

$$D_{W^p}\{f(x),\ f_N(x)\} < \frac{\varepsilon}{2}; \tag{5.7.8}$$

$f_N(x)$ есть, как мы знаем, ограниченная $W(S)$-п.-п. функция. В силу теоремы 5.7.1 для произвольного $\eta > 0$ существуют конечная тригонометрическая сумма $P(x)$ и число $l > 0$, удовлетворяющие неравенству

$$|f_N(x) - P(x)| < \frac{\eta}{4}.$$

В силу замечания II к теореме 5.7.1

$$|P(x)| < N + \frac{\eta}{4}.$$

Далее, имеем (предполагая, что $\eta < 4$)

$$\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f_N(x) - P(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (2N+1)^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} |f_N(x) - P(x)|\,dx\right)^{1/p} <$$

$$< (2N+1)^{1-\frac{1}{p}}\,\eta^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

если только $\eta < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p (2N+1)^{1-p}$.

Так как x_0 произвольно, то из последнего неравенства следует, что

$$D_{S_l^p}\{f_N(x),\ P(x)\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.7.9}$$

Из неравенств (5.7.8) и (5.7.9) следует

$$D_{W^p}\{f(x),\ P(x)\} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

3. Построим теперь для каждой $W^p\,(S^p)$-п.-п. функции $f(x)$ ряд Фурье. Пусть $P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots$ — последовательность конечных тригонометрических многочленов, $W^p\,(S^p)$-сходящаяся к $f(x)$. Так как

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} P_n(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x) - P_n(x)|\,dx,$$

то при каждом фиксированном действительном λ

$$M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = \lim_{n\to\infty} M\{P_n(x)\,e^{-i\lambda x}\}. \qquad (5.7.10)$$

Так как при каждом фиксированном n $M\{P_n(x)\,e^{-i\lambda x}\}$ отлично от нуля только для конечного числа значений λ, то из (5.7.10) следует, что функция

$$a(\lambda) = M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}$$

отлична от нуля не более чем для счетного множества значений $\lambda: \Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3,\ \ldots$ Соответствующие $a(\lambda)$ обозначим через A_n. Таким образом, каждой $W^p\,(S^p)$-п.-п. функции ставится в соответствие ряд Фурье.

§ 8. Суммирование рядов Фурье $W^p\,(S^p)$-п.-п. функций по способу Бохнера-Фейера

1. Начнем с доказательства вспомогательного неравенства.

*Если $\psi(x)$ есть $W^p(S^p)$-п.п. функция, то для каждого многочлена Бохнера-Фейера $\sigma_B^{\psi}(x)$ *) и каждого $l > 0$*

$$D_{S_l^p}\{\sigma_B^{\psi}(x)\} \leqslant D_{S_l^p}\{\psi(x)\}. \qquad (5.8.1)$$

*) B — совокупность индексов (см. стр. 69).

Доказательство. В силу неравенства Гельдера

$$|\sigma_B^\psi(x)| \leqslant M_t \{|\psi(x+t)| K_B(t)\} \leqslant$$
$$\leqslant [M_t\{|\psi(x+t)|^p K_B(t)\}]^{1/p} [M_t\{K_B(t)\}]^{\frac{p-1}{p}} =$$
$$= [M_t\{|\psi(x+t)|^p K_B(t)\}]^{1/p}.$$

Отсюда следует неравенство

$$|\sigma_B^\psi(x)|^p \leqslant M_t\{|\psi(x+t)|^p K_B(t)\}$$

и, значит,

$$\{D_{S_l^p}[\sigma_B^\psi(x)]\}^p \leqslant M_t[D_{S_l^p}\{\psi(x)\}^p K_B(t)] = \{D_{S_l^p}[\psi(x)]\}^p,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5.8.1. *Пусть $f(x)$ есть W^p (S^p)-п.-п. функция и $\sigma_{B_1}^f(x)$, $\sigma_{B_2}^f(x)$, ... — последовательность сумм Бохнера-Фейера* *) *для $f(x)$. Каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое целое положительное число n_0 и такое положительное число l, что*

$$D_{S_l^p}[f(x), \sigma_{B_n}^f(x)] < \varepsilon \quad \text{для } n > n_0. \tag{5.8.2}$$

Доказательство. По теореме 5.7.2 для данного $\varepsilon > 0$ существует положительное число l и конечный тригонометрический многочлен $P(x)$, для которого

$$D_{S_l^p}[f(x), P(x)] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.8.3}$$

Образуем базис $P(x)$, взяв базис $f(x)$ и добавив к нему в случае необходимости другие числа. Рассмотрим последовательность сумм Бохнера-Фейера для $P(x)$:

$$\sigma_{B_1'}^P(x),\ \sigma_{B_2'}^P(x),\ \ldots$$

Заметим, что B_n' содержит все числа базиса, содержащиеся в B_n (тот же индекс n) и, возможно, числа базиса $P(x)$, которые не входят в базис $f(x)$. Легко видеть,

*) B_n — упорядоченное B.

что для всех n

$$\sigma^f_{B'_n}(x) = \sigma^f_{B_n}(x).$$

Полагая в неравенстве (5.8.1) $\psi(x) = P(x) - f(x)$ и $B = B'_n$ и замечая, что

$$\sigma^{P-f}_{B'_n} = \sigma^P_{B'_n} - \sigma^f_{B_n},$$

мы получим, пользуясь неравенством (5.8.3) неравенство

$$D_{S^p_l}[\sigma^P_{B'_n}, \sigma^f_{B_n}] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.8.4}$$

Далее, так как $P(x)$ есть равномерная п.-п. функция, то по данному ε найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для $n > n_0$

$$|P(x) - \sigma^P_{B'_n}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и, следовательно,

$$D_{S^p_l}[P(x), \sigma^P_{B'_n}] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.8.5}$$

Из (5.8.3), (5.8.4) и (5.8.5) следует (5.8.2), что и требовалось доказать.

Если $f(x)$ есть S^p-п.-п. функция, то число l в неравенстве (5.8.2) от ε не зависит. Можно, например, положить $l = 1$.

Замечание. В случае, если $f(x)$ есть W^p- (но не S^p) п.-п. функция, неравенство (5.8.2) несколько точнее, чем

$$\lim_{n\to\infty} D_{W^p}[f(x), \sigma^f_{B_n}(x)] = 0. \tag{5.8.6}$$

В самом деле, из доказательства теоремы ясно, что неравенство (5.8.2) выполняется при одном и том же l для всех $n > n_0$. Непосредственно из (5.8.6) этого получить нельзя.

§ 9. Неполнота пространства *) W^p

В отличие от пространства Степанова, пространства Вейля неполны. Для доказательства этого достаточно построить фундаментальную (в пространстве W^p) после-

*) См. А. С. Ковань ко [5]. Мы приводим здесь другую конструкцию.

довательность тригонометрических многочленов, которая не имеет в пространстве W^p предела.

Докажем вначале две леммы.

Лемма I. *Пусть* $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ *есть* W-*п.-п. функция. Среднее значение сумм Бохнера-Фейера*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_{B_n}^f(x)\,dx \tag{5.9.1}$$

при $T \to \infty$ *стремится равномерно по* n *к* A_0.

Доказательство. Как нам известно, среднее значение для W-п.-п. функции существует равномерно. Поэтому, каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое положительное число $T_0 = T_0(\varepsilon)$, что для всех $T > T_0$ и всех действительных t выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\,dx - A_0\right| < \varepsilon.$$

Подставляя в (5.9.1) вместо суммы $\sigma_{B_n}^f(x)$ ее выражение и замечая, что

$$M_t\{K_{B_n}(t)\} = 1,$$

мы получим:

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_{B_n}^f(x)\,dx - A_0\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{T}\int_0^T M_t\{f(x+t)K_{B_n}(t)\}\,dx - A_0\right| =$$

$$= \left|M_t\left\{\left[\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\,dx - A_0\right]K_{B_n}(t)\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_t\left\{\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\,dx - A_0\right|K_{B_n}(t)\right\} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Лемма II. *Пусть* $\mu_1, \mu_2 \ldots$ — *линейно независимые действительные числа и* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — *n каких-то из этих чисел, причем некоторые числа* ν_k *могут повторяться* (однако равенство между собой всех ν_k исключается). *Тогда*

$$M_x \{\sin \nu_1 x \sin \nu_2 x \ldots \sin \nu_n x\} = 0.$$

Доказательство. По формуле Эйлера

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \nu_k x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \prod_{k=1}^{n} (e^{i\nu_k x} - e^{-i\nu_k x}) =$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^n \sum e^{i(\pm\nu_1 \pm \nu_2 \pm \ldots \pm \nu_n)x}.$$

В силу линейной независимости числел μ_k показатель степени в сумме может равняться нулю лишь в том случае, когда все ν_k равны между собой (и n четно), что исключается. Переходим к построению W^p-фундаментальной, но не сходящейся последовательности.

Пусть λ_n — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1) числа $\frac{1}{\lambda_n}$ линейно независимы,
2) $|\lambda_n - n| < 1$,
3) $\lambda_{n+1} > \lambda_n$.

Покажем, что эти условия непротиворечивы. Если числа $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ уже выбраны, то очевидно, что линейно зависимых от них чисел будет лишь счетное множество. Число λ_{n+1} должно лежать в силу условия 2) в интервале $(n, n+2)$. Всех же чисел в этом интервале несчетное множество. Поэтому можно выбрать λ_{n+1} так, чтобы число $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ не было линейно связано с числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Положим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \sin \frac{x}{\lambda_k}.$$

Если $n > m$, $l > 0$ — целое число, то в силу леммы II

$$M\{[S_n(x) - S_m(x)]^{2l}\} = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\lambda_k^{2l}} M\left\{\sin^{2l}\frac{x}{\lambda_k}\right\}. \quad (5.9.2)$$

Так как $\left|\sin\frac{x}{\lambda_k}\right| \leqslant 1$, то

$$M\left\{\sin^{2l}\frac{x}{\lambda_k}\right\} \leqslant 1$$

и, следовательно, из (5.9.2) следует

$$M\{[S_n(x) - S_m(x)]^{2l}\} \leqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\lambda_k^{2l}}.$$

Так как $\lambda_k = O(k)$, то из последнего неравенства следует существование для каждого $\varepsilon > 0$ такого целого положительного числа $N = N(\varepsilon)$, что для $m, n > N$

$$[M\{[S_n(x) - S_m(x)]^{2l}\}]^{1/2l} < \varepsilon. \quad (5.9.3)$$

Пусть $p \geqslant 1$. Подберем целое положительное число l из условия $p < 2l$. В силу неравенства Гельдера из (5.9.3) следует *)

$$[M\{[S_n(x) - S_m(x)]^{2l}\}]^{1/p} < \varepsilon.$$

Так как $S_m(x)$ и $S_n(x)$ суть равномерные п.-п. функции, то из последнего неравенства следует, что при фиксированных m и n можно подобрать столь большое положи-

---

*) Полагая $r = \frac{2l}{p}$, $r' = \frac{r}{r-1} = \frac{2l}{2l-p}$,

мы получим:

$$M\{|S_n(x) - S_m(x)|^p\} \leqslant [M\{|S_n(x) - S_m(x)|^{pr}\}]^{1/r}[M\{1\}]^{1/r'} =$$
$$= [M\{|S_n(x) - S_m(x)|^{2l}\}]^{\frac{p}{2l}}.$$

Отсюда

$$[M\{|S_n(x) - S_m(x)|^p\}]^{1/p} \leqslant [M\{|S_n(x) - S_m(x)|^{2l}\}]^{1/2l}.$$

тельное число $T = T(\varepsilon)$, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left\{\frac{1}{T}\int_x^{x+T} |S_n(x)-S_m(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} < 2\varepsilon.$$

Отсюда следует

$$D_{W^p}[S_m(x),\ S_m(x)] =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\ \sup_{-\infty<x<\infty} \left[\frac{1}{T}\int_x^{x+T} |S_n(x)-S_m(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant 2\varepsilon$$

и так как ε произвольно, то последовательность $S_n(x)$ является фундаментальной последовательностью в пространстве W^p. Покажем, что она не может быть W^p-сходящейся. Допустим противное. Пусть $f(x)$ есть W^p-п.-п. функция, предельная для последовательности $S_n(x)$.

Рассмотрим суммы Бохнера-Фейера для функции $f(x)$. Прежде всего очевидно, что ряд Фурье функции $f(x)$ совпадает с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\sin\frac{x}{\lambda_k}.$$

Поэтому

$$\sigma^f_{B_n}(x) = \sum_{k=1}^{N} \rho_{k,N}\frac{1}{\lambda_k}\sin\frac{x}{\lambda_k},$$

где $\rho_{k,N}\geqslant 0$ и при фиксированном k и $N\to\infty$, $\rho_{k,N}\to 1$. В силу леммы 1 средние значения (5.9.1) при $T\to\infty$ должны стремиться к нулю равномерно по n. Мы покажем, что это не так и, следовательно, $f(x)$ не может быть W- (а значит и W^p-) п.-п. функцией.

Пусть $N_0\,(<N)$ — фиксированное число. Мы имеем:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^f_{B_n}(x)\,dx = \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{N}\rho_{k,N}\sin^2\frac{T}{2\lambda_k} \geqslant \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{N_0}\rho_{k,N}\sin^2\frac{T}{2\lambda_k}.$$

Так как при фиксированном k и $N \to \infty$ $\rho_{k,N} \to 1$, то, каково бы ни было положительное число η, при достаточно большом N мы получим:

$$\frac{2}{T} \sum_{\substack{\lambda_k \geqslant T \\ k \leqslant N_0}} \rho_{k,N} \sin^2 \frac{T}{2\lambda_k} > \frac{2}{T} \sum_{\substack{\lambda_k \geqslant T \\ k \leqslant N_0}} \sin^2 \frac{T}{2\lambda_k} - \eta.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{B_n}^f (x)\, dx \geqslant \frac{2}{T} \sum_{\substack{\lambda_k \geqslant T \\ k \leqslant N_0}} \sin^2 \frac{T}{2\lambda_k}.$$

В силу неравенства $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x \left(0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ мы имеем:

$$\frac{2}{T} \sum_{\lambda_k \geqslant T} \sin^2 \frac{T}{2\lambda_k} \geqslant \frac{2T}{\pi^2} \sum_{\lambda_k \geqslant T} \frac{1}{\lambda_k^2} > \frac{2T}{\pi^2} \int_{T+1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} > \frac{1}{\pi^2}.$$

Поэтому, так как число N_0 произвольно, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{B_n}^f (x)\, dx > \frac{1}{\pi^2}$$

и, значит, средние значения (5.9.1) не могут стремиться к нулю при $T \to \infty$ равномерно по n.

Для $p = 2$ уже более простой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{x}{k}$$

показывает неполноту W^2 *).

§ 10. П.-п. функции Безиковича

1. Из примера предыдущего параграфа, в частности, следует, что существуют тригонометрические ряды

$$\sum_k A_k e^{i\Lambda_k x}$$

*) Относительно нетривиальности классов W^p-п.-п. функций см. В. В. Степанов и Б. М. Левитан [1] и обширный мемуар H. Bohr and E. Følner [1].

со сходящейся суммой квадратов модулей коэффициентов: $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 < \infty$, которые не могут быть рядами Фурье W^2-п.-п. функций. С другой стороны, в теории периодических функций имеет место теорема Рисса-Фишера, гласящая, что каждый тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$$

со сходящейся суммой квадратов модулей коэффициентов Фурье есть ряд Фурье функции с интегрирусмым квадратом. Вот почему естественно искать такое обобщение почти-периодичности, для которого справедлива теорема, аналогичная теореме Рисса-Фишера. Такое обобщение было предложено Безиковичем и связано оно со следующим определением расстояния:

$$D_{B^p}[f, g] = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{1/p} =$$
$$= \{\overline{M}[|f-g|^p]\}^{1/p} \quad (p \geqslant 1). \qquad (5.10.1)$$

Относительно функций $f(x)$ и $g(x)$ предполагается, что они измеримы и суммируемы вместе с p-й степенью своего модуля в каждом конечном интервале.

Ясно, что расстояние (5.10.1) является более сильным, чем расстояния Степанова и Вейля в том смысле, что если последовательность функций сходится в W^p- или S^p-метрике, то она сходится и в B^p-метрике.

С помощью расстояния (5.10.1) мы определим класс B^p-п.-п. функций.

Определение. *Функция $f(x)$ называется B^p-п.-п. функцией, если существует последовательность конечных тригонометрических сумм $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., для которой*

$$\lim_{n\to\infty} D_{B_p}[f(x), P_n(x)] = 0.$$

Это определение по своему характеру отличается от тех определений, которые были положены в основу при изучении S^p- и W^p-п.-п. функций. Там определение давалось с помощью обобщения понятия почти-периода, а то, что здесь берется за определение, являлось теоремой. И для функций Безиковича можно было бы пойти по такому же пути, однако для этих функций положение сильно осложняется, доказательства теорем становятся весьма громоздкими. Мы ограничимся лишь доказательством полноты пространств B^p $(p \geqslant 1)$, из которой, в частности, следует теорема Рисса-Фишера, а читателей, интересующихся связью B^p-п.-п. функций с почти-периодами, отсылаем к книге Безиковича или к оригинальной работе Бора и Безиковича*).

Теорема 5.10.1. *Пространства* B^p $(p \geqslant 1)$ *полны.*

Доказательство**). Пусть дана последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., которая B^p-сходится, т. е. для которой

$$\overline{M}\{|f_n - f_m|^p\} \to 0 \quad \text{при } n,\ m \to \infty. \qquad (5.10.2)$$

Следует показать существование функции $f(x)$, к которой последовательность $\{f_n(x)\}$ B^p-сходится.

Подберем подпоследовательность $f_{n_i}(x)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$D_{B^p}\{f_{n_i}(x),\ f_{n_{i-1}}(x)\} \leqslant 2^{-(i+1)}. \qquad (5.10.3)$$

Далее, положим

$$\delta_\lambda\{f\} = \sup_{\lambda \leqslant T < \infty} \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Выберем теперь последовательность положительных чисел λ_i так, чтобы выполнялись неравенства

$$\lambda_{i+1} > 2\lambda_i, \qquad (5.10.4)$$

$$\delta_{\lambda_i}\{f_{n_i} - f_{n_{i-1}}\} < 2^{-i}.$$

---

*) A. Besicovitch [4]. H. Bohr and A. Besicovitch [1].

**) Эта теорема принадлежит J. Marcinkievicz [1]. Для $p=2$ теорема была доказана A. Besicovitch [2], [4].

Определим теперь функцию $f(x)$, полагая

$$f(x)=\begin{cases} f_{n_i}(x) & \text{для } \lambda_i \leqslant |x| < \lambda_{i+1} \quad (i=1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{для } |x| < \lambda_1. \end{cases}$$

Вначале покажем, что $D_{B^p}\{f, f_{n_i}\} \to 0$ при $i \to \infty$. В самом деле, пусть $\lambda_k \leqslant T < \lambda_{k+1}$. Имеем:

$$\int_{-T}^{T} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx \leqslant \sum_{\nu=1}^{i} \int_{(D_\nu)} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx +$$

$$+\sum_{\nu=i+1}^{k-1} \int_{(D_\nu)} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p dx + \int_{\lambda_k \leqslant |x| \leqslant T} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx +$$

$$+\int_{|x|\leqslant \lambda_1} |f_{n_i}(x)|^p\,dx = A+B+C+D.$$

Через D_ν мы обозначили область интегрирования, определяемую неравенствами $\lambda_\nu \leqslant |x| < \lambda_{\nu+1}$. В силу неравенства Минковского мы имеем для $\nu < i$

$$\left\{\int_{(D_\nu)} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = \left\{\int_{(D_\nu)} |f_{n_\nu}(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega=\nu}^{i-1} \left\{\int_{(D_\nu)} |f_{n_\omega}(x)-f_{n_{\omega+1}}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega=\nu}^{i-1} \left\{\int_{\lambda_i}^{\lambda_i} |f_{n_\omega}(x)-f_{n_{\omega+1}}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (2\lambda_i)^{1/p} \sum_{\omega=1}^{\infty} 2^{-\omega} = (2\lambda_i)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\int_{(D_\nu)} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx \leqslant \lambda_{i+1}$$

и, следовательно,

$$A < i\lambda_{i+1}. \tag{5.10.5}$$

С другой стороны, для $\nu > i$ мы имеем:

$$\left\{\int\limits_{(D_\nu)} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = \left\{\int\limits_{(D_\nu)} |f_{n_\nu}(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega=i}^{\nu-1}\left\{\int\limits_{(D_\nu)} |f_{n_\omega}(x)-f_{n_{\omega+1}}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega=i}^{\nu-1}\left\{\int\limits_{-\lambda_\nu}^{\lambda_\nu} |f_{n_\omega}(x)-f_{n_{\omega+1}}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega=i}^{\nu-1}(2\lambda_\nu)^{1/p}\cdot 2^{-\omega} \leqslant (2\lambda_\nu)^{-\omega}\cdot 2^{-i+1}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(D_\nu)} |f(x)-f_{n_i}(x)|^p\,dx \leqslant \lambda_{\nu+1}\cdot 2^{-(i-1)p}.$$

Следовательно,

$$B \leqslant 2^{-(i-1)p}(\lambda_{i+2}+\ldots+\lambda_k) <$$
$$< 2^{-(i-1)p}\lambda_k\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-i-2}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-(i-1)p}\,2\lambda_k \leqslant 2^{-(i-1)p}\cdot 2T. \tag{5.10.6}$$

Аналогично получим:

$$\left(\int\limits_{\lambda_k\leqslant|x|\leqslant T} |f_{n_i}(x)-f_{n_k}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega=i}^{k-1}\left(\int\limits_{|x|\leqslant T} |f_{n_\omega}(x)-f_{n_{\omega+1}}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (2T)^{1/p}\sum_{\omega=i}^{k-1}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} |f_{n_\omega}(x)-f_{n_{\omega+1}}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (2T)^{1/p}\sum_{\omega=i}^{k-1} 2^{-\omega} \leqslant 2^{-i+1}(2T)^{1/p}.$$

Поэтому

$$C \leqslant 2^{-(i-1)p} \cdot 2T. \tag{5.10.7}$$

Из неравенств (5.10.5), (5.10.6) и (5.10.7) следует неравенство

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x) - f_{n_i}(x)|^p \, dx \leqslant \frac{i\lambda_{i+1}}{T} + 2 \cdot 2^{-(i-1)p} + \frac{\mathrm{const}}{T}.$$

Полагая $T \to \infty$, мы получим:

$$D_{B^p}\{f, f_{n_i}\} \leqslant 2^{1/p} \cdot 2^{-(i-1)}.$$

Отсюда следует, что при $i \to \infty$ $D_{B^p}\{f, f_{n_i}\} \to 0$. Пусть теперь ν есть произвольное целое положительное число. Подберем число i из условия $n_i \leqslant \nu < n_{i+1}$. Имеем в силу неравенства Минковского:

$$D_{B^p}\{f_\nu, f\} \leqslant D_{B^p}\{f_\nu, f_{n_i}\} + D_{B^p}\{f_{n_i}, f\} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1/p} \cdot 2^{-(i-1)} + D_{B^p}\{f_\nu, f_{n_i}\}. \tag{5.10.8}$$

Если ν неограниченно растет, то i также неограниченно растет и, значит, $D_{B^p}\{f_\nu, f_{n_i}\} \to 0$. Поэтому из неравенства (5.10.8) следует

$$\lim_{\nu \to \infty} D_{B^p}\{f, f_\nu\} = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Покажем, каким образом из полноты пространства B^2 следует аналог теоремы Рисса-Фишера. Пусть дан тригонометрический ряд

$$\sum_k A_k e^{i\Lambda_k x} \tag{5.10.9}$$

и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 < \infty$. Рассмотрим последовательность конечных тригонометрических сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\Lambda_k x}.$$

Из равенства Парсеваля (для конечных тригонометрических сумм оно получается непосредственно из ортогональности функций $e^{i\lambda x}$) следует ($n > m$)

$$M\{|S_n(x) - S_m(x)|^2\} = \sum_{k=m+1}^{n} |A_k|^2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Поэтому в силу полноты пространства B^2 существует B^2 п.-п. функция $f(x)$, для которой

$$\overline{M}\{|f(x) - S_n(x)|^2\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Легко видеть, что ряд (5.10.9) есть ряд Фурье для функции $f(x)$.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРУППАХ

§ 1. Определение и элементарные свойства п.-п. функций на группах

1. В настоящей главе теория п.-п. функций распространяется на тот случай, когда независимой переменной является не число, а элемент группы *). Оказывается, что основные предложения теории п.-п. функций переносятся на этот случай. Главную трудность при этом представляет построение среднего значения функции. Как только среднее значение построено, теория интегральных уравнений дает возможность доказать равенство Парсеваля, а затем уже нетрудно получить теорему аппроксимации.

2. Пусть G—абстрактная группа, т. е. множество элементов, удовлетворяющих следующим четырем аксиомам:

1) в G определено умножение (вообще говоря, некоммутативное), т. е. операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов a, $b \in G$ элемент $c \in G$:

$$ab = c.$$

2) Операция умножения ассоциативна, т. е. для любых трех элементов a, b, $c \in G$ имеет место равенство

$$a(bc) = (ab)c = abc.$$

3) В G имеется правая единица e, т. е. такой элемент, что для любого элемента $a \in G$

$$ae = a.$$

---

*) J. von Neuman [1].

4) Для всякого элемента $a \in G$ существует единственный правый обратный элемент a^{-1} такой, что

$$aa^{-1} = e.$$

Если сверх указанных четырех аксиом выполнено еще условие

$$ab = ba$$

для любых элементов $a, b \in G$, то группа G называется коммутативной (абелевой). Для коммутативных групп вместо мультипликативных обозначений часто употребляют аддитивные, т. е. вместо произведения элементов пишут сумму.

Например, действительная ось есть абелева группа. В этом случае под суммой (композицией) элементов понимают обычную сумму. Обратный элемент есть число с обратным знаком. Роль единичного элемента играет число нуль.

Из аксиом 1) — 4) следует, что

1) правый обратный элемент является одновременно и левым обратным элементом и

2) правая единица является одновременно и левой единицей. Докажем 1). Из аксиом 3) и 4) следует $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Умножая обе части этого соотношения справа на правый обратный элемент к элементу a^{-1}, мы получим $a^{-1}a = e$.

Докажем 2). Имеем $ea = aa^{-1}a = ae = a$, т. е. e есть левая единица.

3. Определение. *Функция $f(x)$ ($x \in G$, $f(x)$ принимает комплексные значения) называется правой (левой) почти-периодической функцией (п.-п. функцией), если семейство функций $f(xa)$ (соответственно $f(ax)$) (a пробегает всю группу G) компактно в смысле равномерной сходимости на всей группе, т. е. если из каждой бесконечной последовательности $f(xa_1)$, $f(xa_2)$, ... (соответственно $f(a_1x)$, $f(a_2x)$, ...) можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

Легко показать, что правая (левая) п.-п. функция ограничена на группе G. В самом деле, пусть $f(x)$ — правая п.-п. функция и пусть существует последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots$, для которой $f(a_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Если бы это имело место, то из последовательности $f(xa_n)$ нельзя было бы выделить подпоследовательность, сходящуюся при $x = e$.

Лемма 6.1.1. *Правая (левая) п.-п. фукнция одновременно является и левой (правой) п.-п. функцией.*

Доказательство. Совокупность ограниченных на G функций можно превратить в метрическое пространство, если расстояние определить следующим образом:

$$D[f(x),\ g(x)] = \sup_{x \in G} |f(x) - g(x)|.$$

Предположим, что $f(x)$ есть правая п.-п. функция. По теореме 5.1.2 для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное ε-деление группы G:

$$G = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n,$$

соответствующее семейству $f(xa)$ (a — параметр). В каждом из множеств $\mathfrak{A}_i$ выберем произвольный элемент x_i и закрепим его. Если x — произвольный элемент группы G, то найдется такой номер j, что

$$\sup_{a \in G} |f(xa) - f(x_j a)| < \varepsilon.$$

Поэтому функции $f(x_1 a)$, $f(x_2 a)$, $\ldots$, $f(x_n a)$ образуют конечную ε-сеть для семейства $f(xa)$ (x — параметр). В силу теоремы Хаусдорфа последнее семейство компактно, т. е. $f(x)$ есть левая п.-п. функция. Точно так же доказывается, что из левой почти-периодичности следует правая. Таким образом, в последующем мы можем не делать различия между левой и правой почти-периодичностью и говорить просто о почти-периодичности на группе.

Лемма 6.1.2. *Если $f(x)$ — п.-п. функция, то $f(axb)$, $\overline{f(x)}$, $\alpha f(x)$, $f(x^{-1})$ (a, $b \in G$, α — комплексное число) суть также п.-п. функции. Сумма, произведение и равномерный предел п.-п. функций суть также п.-п. функции.*

Доказательство непосредственно следует из определения п.-п. функций.

Пусть $f(x)$ есть п.-п. функция на группе G. Рассмотрим семейство функций $f(cxd)$, где c и d независимо друг от друга пробегают всю группу G.

Лемма 6.1.3. *Семейство $f(cxd)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ есть конечное ε-деление группы G, соответствующее семейству $f(xd)$. В каждом множестве $\mathfrak{A}_i$ выберем произвольный элемент d_i и закрепим его. Тогда для любого $d \in G$ найдется элемент d_i такой, что

$$|f(xd)-f(xd_i)|<\varepsilon. \tag{6.1.1}$$

При каждом фиксированном i функция $f(xd_i)$ является, очевидно, п.-п. функцией. Следовательно, семейство $f(cxd_i)$ (d — параметр) компактно. При фиксированном i рассмотрим ε-деление группы G для семейства $f(cxd_i)$:

$$G=\mathfrak{B}_{i1}+\mathfrak{B}_{i2}+\ldots+\mathfrak{B}_{ik_i}.$$

Если $x, y \in \mathfrak{B}_{ij}$ $(j=1, 2, \ldots, k_i)$, то

$$|f(cxd_i)-f(cyd_i)|<\varepsilon. \tag{6.1.2}$$

Возьмем теоретико-множественное пересечение множеств $\mathfrak{B}_{ij}$. Под этим мы понимаем следующее. Рассмотрим вначале деления $\mathfrak{B}_{1j}$ и $\mathfrak{B}_{2j}\cdot(j=1, 2, \ldots, k_1$ и $j=1, 2, \ldots, k_2)$, а затем множества, которые получаются в результате пересечения множества $\mathfrak{B}_{11}$ с множествами $\mathfrak{B}_{2j}$ $(j=1, 2, \ldots, k_2)$, множества $\mathfrak{B}_{12}$ с теми же множествами $\mathfrak{B}_{2j}$ и т. д. Мы получим конечное деление группы G на части, число которых не превосходит k_1k_2. Далее, рассмотрим пересечение этих частей с частями $\mathfrak{B}_{3j}$ $(j=1, 2, \ldots, k_3)$ и т. д. В результате мы получим конечное деление группы G на части, которые мы обозначим через D_j. Очевидно, что если элементы $x, y \in D_j$, то для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ они принадлежат к одному и тому же множеству $\mathfrak{B}_{ij}$ при некотором j. Поэтому из неравенств (6.1.1) и (6.1.2) следует неравенство

$$|f(cxd)-f(cyd)|\leqslant|f(cxd)-f(cxd_i)|+$$
$$+|f(cxd_i)-f(cyd_i)|+|f(cyd_i)-f(cyd)|<3\varepsilon,$$

т. е. D_j образуют конечное 3ε-деление группы G для семейства $f(cxd)$. Лемма доказана.

Сопоставляя эту лемму с леммой 6.1.1, мы заключаем, что при определении почти-периодичности на группе можно исходить из компактности одного из трех семейств функций: $f(cx)$, $f(xd)$, $f(cxd)$.

§ 2. Теорема о среднем значении

1. Дальнейшее развитие теории п.-п. функций на группах существенно опирается на теорему о среднем значении. Впервые эта теорема была доказана Нейманном в цитированной выше работе.

В. Маак*), введя определение п.-п. функций с помощью ε-делений, дал значительно более простую конструкцию среднего значения.

Сначала докажем одну комбинаторную лемму**).

Лемма. *Пусть имеется n элементов a_i и n элементов b_j. Предположим, что каждому элементу a_i поставлено в соответствие некоторое количество элементов***) b_j и любым k элементам a_i соответствует в совокупности не менее чем k элементов b_j.*

Тогда для каждого элемента a_i можно из соответствующих ему элементов b_j выбрать элемент b_{ji}, причем так, что разным a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ будут соответствовать разные b_{ji}.

Доказательство. Рассуждаем по индукции. Для $n=1$ лемма очевидна. Допустим, что для $n=1, 2, \ldots, (n-1)$ элементов лемма доказана. Докажем ее для n элементов.

Предположим вначале, что r произвольным элементам a_i $(1 \leqslant r < n)$ соответствует по крайней мере $(r+1)$ элемент b_j. В этом случае возьмем некоторый элемент a_i и выберем для него какую-либо пару b_{ji}. Останется $(n-1)$ элемент a_i и $(n-1)$ элемент b_j, причем r произвольным элементам a_i соответствует по крайней мере r элементов b_j, т. е. для оставшихся элементов условие леммы выпол-

*) W. Maak [1], [2], [3].

**) См. P. Halmos and H. Vaughan [1].

***) Мы говорим, что некоторому числу элементов a_i соответствует в совокупности элемент b_j, если b_j соответствует хотя бы одному из этих a_i.

няется, а так как число оставшихся элементов равно $n-1$, то лемма доказана.

Допустим теперь, что каким-то r элементам a_i $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ соответствует в точности r элементов b_j. По индуктивному предположению между этими элементами требуемое соответствие можно установить. (Условие о количестве соответствующих элементов, очевидно, выполняется.)

Остается показать, что для оставшихся $(n-r)$ элементов a_i условие леммы тоже выполняется. В самом деле, допустим, что каким-либо из оставшихся h элементов a_i соответствует меньше чем h элементов b_j. Тогда этим h элементам a_j вместе с предыдущими r элементами a_i соответствовало бы первоначально меньше чем $h+r$ элементов b_j, что противоречит предположению. Поэтому среди оставшихся элементов требуемое соответствие также можно установить. Лемма доказана.

Из доказанной леммы просто следует лемма о разбиениях множества.

Лемма. *Если множество* $\mathfrak{M}$ *разбито двумя способами на* n *частей*: $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ *и* $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots + \mathfrak{B}_n$, *причем любые* r *частей* $\mathfrak{B}_i$: $\mathfrak{B}_{i_1}, \mathfrak{B}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_r}$ *не могут содержать в себе более чем* r *частей* $\mathfrak{A}_i$, *то можно указать такую перестановку индексов* $1, 2, \ldots, n - j_1, j_2, \ldots, j_n$, *что части* $\mathfrak{A}_i$ *и* $\mathfrak{B}_{ji}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *содержат общий элемент.*

Действительно, возьмем в качестве элементов a_i части первого разбиения, а в качестве элементов b_j части второго разбиения. Элемент a_i будем считать соответствующим элементу b_j, если пересечение $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_j$ не пусто. Следует показать, что любым k элементам a_i соответствует в совокупности не менее чем k элементов b_j. Допустим противное, т. е. пусть k элементам a_i соответствует $k' < k$ элементов b_j. Это значит, что k' частей $\mathfrak{B}_j$ содержат в себе k частей $\mathfrak{A}_i$, что невозможно.

2. Пусть $f(x)$ есть п.-п. функция на группе G. Выберем произвольное положительное число ε и пусть

$$G = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n$$

есть минимальное (по числу частей) ε-деление группы G, соответствующее семейству $f(cxd)$. Из каждого множества $\mathfrak{A}_i$ выберем произвольный элемент a_i и образуем среднее значение

$$M\{f;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

Число $M\{f;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ выбором элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, очевидно, определяется с точностью до ε.

Пусть $G=\mathfrak{B}_1+\ldots+\mathfrak{B}_n$ — другое минимальное ε-деление группы G, соответствующее семейству функций $f(cxd)$. Рассмотрим среднее значение

$$M\{f;\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(b_j),\quad b_j\in\mathfrak{B}_j.$$

Множества $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_j$ удовлетворяют условиям предыдущей леммы. Действительно, если бы r множеств $\mathfrak{A}_i$ покрывали $r+s$ $(s>0)$ множеств $\mathfrak{B}_j$, то число n не было бы минимальным. Итак, в силу предыдущей леммы в $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ можно выбрать общие элементы $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Поэтому

$$\begin{aligned}|M\{f;\ a_1,\ \ldots,\ a_n\}-M\{f;\ b_1,\ldots,\ b_n\}|&\leqslant\\ \leqslant|M\{f;\ a_1,\ \ldots,\ a_n\}-M\{f;\ c_1,\ \ldots,\ c_n\}|&+\\ +|M\{f;\ c_1,\ \ldots,\ c_n\}-M\{f;\ b_1,\ \ldots,\ b_n\}|&<2\varepsilon. \qquad (6.2.1)\end{aligned}$$

3. Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать следующую фундаментальную теорему.

Теорема 6.2.1 (теорема о среднем значении). *Для каждой п.-п. функции $f(x)$ существует число $M\{f(x)\}$* (среднее значение функции $f(x)$), *которое равномерно по c и d аппроксимируется выражениями вида*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(ca_i d).$$

При этом число $M\{f(x)\}$ определяется однозначно.

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть п.-п. функция и a_i суть представители минимального ε-деления для семейства $f(cxd)$. Пусть c_0 и d_0 — фиксированные элементы группы G. Легко видеть, что части $c_0\mathfrak{A}_1 d_0$, $c_0\mathfrak{A}_2 d_0, \ldots$, $c_0\mathfrak{A}_n d_0$ образуют минимальное ε-деление группы G для того же семейства $f(cxd)$, а элементы $c_0a_id_0$ суть представители этого деления. В самом деле, если x', $x'' \in c_0\mathfrak{A}_id_0$, то найдутся элементы y', $y'' \in \mathfrak{A}_i$, для которых $x' = c_0y'd_0$, $x'' = c_0y''d_0$. Следовательно, для любых c, $d \in G$

$$|f(cx'd) - f(cx''d)| = |f(cc_0y'd_0d) - f(cc_0y''d_0d)| < \varepsilon.$$

Поэтому в силу неравенства (6.2.1)

$$\left| M\{f;\ a_1,\ \ldots,\ a_n\} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_0a_id_0) \right| < 2\varepsilon. \qquad (6.2.2)$$

Предположим, что для данного $\varepsilon' > 0$ можно указать элементы $b_1, b_2, \ldots, b_m \in G$ и число $A' = A'(\varepsilon', b_1, \ldots, b_m)$, обладающие тем свойством, что для всех c, $d \in G$ выполняется неравенство

$$\left| A' - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(cb_jd) \right| < \varepsilon'. \qquad (6.2.3)$$

Неравенство (6.2.1) показывает, что для каждого $\varepsilon' > 0$ найдется число A' и выражение вида $\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m} f(cb_jd)$, так что неравенство (6.2.3) выполняется.

Положим в неравенстве (6.2.3) $d = e$ (единице группы), а c последовательно равным $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (см. п. 2 настоящего параграфа) и рассмотрим среднее арифметическое из всех полученных таким образом неравенств. Мы получим:

$$\left| A' - \frac{1}{nm}\sum_{i,j} f(a_ib_j) \right| < 2\varepsilon'. \qquad (6.2.4)$$

Точно так же, если в неравенстве (6.2.2) положить $c_0 = e$, а d_0 последовательно равным $b_1, b_2, \ldots, b_n$, затем умножить каждое неравенство на $\frac{1}{m}$ и сложить, то мы получим:

$$\left| M\{f;\ a_1,\ \ldots,\ a_n\} - \frac{1}{nm}\sum_{i,j} f(a_ib_j) \right| < 2\varepsilon. \qquad (6.2.5)$$

Из неравенств (6.2.4) и (6.2.5) следует неравенство

$$|A' - M\{f;\ a_1,\ \ldots,\ a_n\}| < 2(\varepsilon + \varepsilon'). \qquad (6.2.6)$$

Если теперь A'' соответствует числу ε'', то точно так же получим:

$$|A'' - M\{f;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\}| < 2(\varepsilon + \varepsilon'').$$

Поэтому

$$|A' - A''| < 4\varepsilon + 2(\varepsilon' + \varepsilon'').$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, мы получим:

$$|A' - A''| \leqslant 2(\varepsilon' + \varepsilon').$$

Так как числа ε' и ε'' произвольны, то из последнего неравенства следует, что все числа A, удовлетворяющие поставленному выше условию, сходятся к одному и тому же пределу, который называется средним значением функции $f(x)$ и обозначается $M\{f(x)\}$.

Из неравенства (6.2.6) следует (при $\varepsilon' \to 0$), что

$$|M_x\{f(x)\} - M\{f;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}| < 2\varepsilon, \qquad (6.2.7)$$

и так как ε произвольно, то, следовательно, по функции $f(x)$ среднее значение определяется однозначно.

4. Построенное среднее значение обладает рядом свойств, которые сближают его с интегралом. В следующей теореме сформулированы основные свойства среднего значения.

Теорема 6.2.2. *Среднее значение п.-п. функций обладает следующими свойствами:*

1) $M_x\{\alpha f(x)\} = \alpha M_x\{f(x)\}$ (α — комплексное число).

2) $M_x\{f(x) \pm g(x)\} = M_x\{f(x)\} \pm M_x\{g(x)\}$.

3) $M_x\{1\} = 1$.

4) *Если на всей группе G $f(x) \geqslant 0$, то $M_x\{f(x)\} \geqslant 0$. Если сверх этого $f(x) \not\equiv 0$, то $M_x\{f(x)\} > 0$.*

5) $|M_x\{f(x)\}| \leqslant M_x\{|f(x)|\}$.

6) $M_x\{\overline{f(x)}\} = \overline{M}_x\{f(x)\}$.

7) $M_x\{f(xa)\} = M_x\{f(ax)\} = M_x\{f(x)\}$ (a — произвольный элемент группы G),

8) $M_x\{f(x^{-1})\} = M_x\{f(x)\}$.

Доказательство. Свойства 1), 3), первая половина 4), 5), 6) и 7) следуют непосредственно из определения среднего значения как предела выражений вида $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(ca_i d)$. Докажем свойство 8). Пусть выражение $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(ca_i d)$ сходится к $M_x\{f(x)\}$. Заменяя c на c^{-1} и d на d^{-1}, мы получим выражение вида $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c^{-1}a_i d^{-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f[(da_i^{-1}c)^{-1}]$, которое может служить для определения среднего значения функции $f(x^{-1})$.

Докажем теперь свойство 2). Рассмотрим общие ε-деления для семейств $f(cxd)$ и $g(cxd)$. Как мы знаем (см. § 1 гл. V), такие деления существуют. Среди общих ε-делений выберем минимальное и по этому делению, точно так же как прежде, построим $M_x\{f(x)\}$; $M_x\{g(x)\}$; $M_x\{f(x)\pm g(x)\}$. Легко видеть, что для этих средних значений

$$M_x\{f(x)\pm g(x)\} = M_x\{f(x)\} \pm M_x\{g(x)\}.$$

Так как среднее значение определяется однозначно*), то свойство 2) доказано. Остается доказать вторую половину свойства 4). Пусть $f(x) \geqslant 0$ и существует элемент $x_0 \in G$, для которого $f(x_0) > a > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{a}{2}$ и пусть $f(xa_1), f(xa_2), \ldots, f(xa_n)$ есть конечная ε-сеть для семейства $f(xa)$, т. е. для каждого $a \in G$ найдется элемент a_i такой, что

$$|f(xa) - f(xa_i)| < \frac{a}{2}.$$

---

*) Среднее значение есть предел выражений вида $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(cb_j d)$.

Положим в этом неравенстве $x = x_0 a_i^{-1}$. Мы получим:

$$|f(x_0 a_i^{-1} a) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{2},$$

откуда следует, что $f(x_0 a_i^{-1} a) > \frac{\alpha}{2}$. Поэтому для любого $a \in G$

$$g(a) = f(x_0 a_1^{-1} a) + f(x_0 a_2^{-1} a) + \ldots + f(x_0 a_n^{-1} a) > \frac{\alpha}{2}.$$

Взяв среднее по a и воспользовавшись свойствами 1), 2), 7) и первой половиной 4), мы получим:

$$M_x\{f(x)\} > \frac{\alpha}{2n} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6.2.3. *Формальные свойства* 1) — 3), *первая половина* 4) *и* 7) *определяют среднее значение однозначно.*

Доказательство. Пусть существует функционал $M'_x\{f(x)\}$, удовлетворяющий перечисленным в теореме условиям. В силу свойств 1) и 2) можно предполагать, не нарушая при этом общности рассуждений, что $f(x)$ есть действительная п.-п. функция. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно и $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(ca_i d)$ — выражение, удовлетворяющее неравенствам (d полагаем равным единице группы)

$$M_x\{f(x)\} - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(ca_i) \leqslant M_x\{f(x)\} + \varepsilon.$$

Считая c аргументом и беря среднее M' по c, мы получим в силу свойства 7)

$$M_x\{f(x)\} - \varepsilon \leqslant M'_x\{f(x)\} \leqslant M_x\{f(x)\} + \varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то $M'\{f(x)\} = M\{f(x)\}$.

5. В дальнейшем нам понадобятся средние значения для п.-п. функций от двух переменных. Рассмотрим сдвоенную группу $G \cdot G$, т. е. множество всевозможных пар $[a, a']$, $a, a' \in G$ со следующим определением умножения

и обратного элемента:

$$[a,\ a'][b,\ b'] = [ab,\ a'b'];\quad [a,\ a']^{-1} = [a^{-1},\ (a')^{-1}].$$

Пусть $f(x,\ x')$ есть п.-п. функция на сдвоенной группе, т. е. пусть семейство функций $f(ax,\ a'x')$ компактно. Полагая a' (a) равным единице группы, мы получим компактные семейства $f(ax,\ x')$, $[f(x,\ a'x')]$. Это значит, что при всяком фиксированном x' (x) $f(x,\ x')$ есть п.-п. функции на G по переменной x (x').

Теорема 6.2.4. *Если $f(x)$ — п.-п. функция на G, то функции $f(xy)$, $f(yx)$, $f(xy^{-1})$, $f(x^{-1}y)$, $f(x^{-1}y^{-1})$, $f(yx^{-1})$ суть п.-п. функции на $G \cdot G$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, функцию $f(xy)$. Остальные случаи разбираются аналогично. Нам следует показать, что семейство функций $f(axby)$ компактно. По условию семейство $f(zy)$ (y — параметр) компактно. Следовательно, в силу теоремы Хаусдорфа для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ так, что для каждого $y \in G$ найдется y_i, для которого

$$|f(zy) - f(zy_i)| < \varepsilon. \tag{6.2.8}$$

Рассмотрим семейства функций $f(zby_i)$ (b — параметр, $i = 1, 2, \ldots, n$). Пусть $G = \mathfrak{B}_{1i} + \mathfrak{B}_{2i} + \ldots + \mathfrak{B}_{n_i i}$ есть конечное ε-деление, отвечающее семейству $f(zby_i)$ (b — параметр). Рассматривая пересечения этих делений для различных i, мы получим конечное деление группы G на части D_j. В каждой части D_j выберем произвольный элемент b_j. Тогда для каждого $b \in G$ и всех i найдется элемент b_j такой, что

$$|f(zby_i) - f(zb_jy_i)| < \varepsilon. \tag{6.2.9}$$

Из (6.2.8) и (6.2.9) следует

$$|f(zby) - f(zb_jy)| \leqslant |f(zby) - f(zby_i)| + |f(zby_i) - f(zb_jy_i)| + \\ + |f(zb_jy_i) - f(zb_jy)| < 3\varepsilon.$$

Наконец, рассмотрим семейство $f(au)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное число элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такое, что для каждого $a \in G$ найдется элемент a_i, для

которого
$$|f(au)-f(a_lu)|<\varepsilon.$$
Поэтому
$$|f(axby)-f(a_lxb_jy)|\leqslant$$
$$\leqslant|f(axby)-f(a_lxby)|+|f(a_lxby)-f(a_lxb_jy)|<4\varepsilon.$$

Таким образом, конечное множество функций $f(a_lxb_jy)$ образует конечную 4ε-сеть для семейства $f(axby)$, и теорема доказана.

Пусть $f(x, x')$ — п.-п. функция на $G\cdot G$. Как мы уже отмечали при каждом фиксированном x, $f(x, x')$ есть п.-п. функция. Рассмотрим среднее значение
$$M_x\{f(x,\ x')\}=g(x').$$

Покажем, что $g(x')$ есть п.-п. функция. В самом деле, легко видеть, что семейство
$$g(a'x')=M_x\{f(x,\ a'x')\}$$
компактно.

Поэтому можно образовать повторное среднее значение $M_{x'}M_x\{f(x,\ x')\}$. Точно так же можно образовать повторное среднее значение $M_xM_{x'}\{f(x,\ x')\}$. Наконец, рассматривая $f(x, x')$ на сдвоенной группе $G\cdot G$, можно образовать среднее значение $M_{xx'}\{f(x,\ x')\}$.

Теорема 6.2.5. $M_xM_{x'}\{f(x, x'\}=M_{x'}M_x\{f(x,\ x')\}=$ $=M_{xx'}\{f(x,\ x')\}$.

Доказательство. $M_{x'}M_x\{f(x, x')\}$ и $M_xM_{x'}\{f(x, x')\}$ обладают, очевидно, всеми формальными свойствами среднего значения для функции $f(x,\ x')$ на сдвоенной группе $G\cdot G'$. Поэтому в силу теоремы 6.2.3
$$M_xM_{x'}\{f(x,\ x')\}=M_{x'}M_x\{f(x,\ x')\}=M_{xx}\{f(x,\ x')\},$$
что и требовалось доказать.

§ 3. Унитарные представления группы. Лемма Шура. Соотношения ортогональности

1. Определение*) 6.3.1. *Матрица* $g(x) = \{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{r}$, *элементы которой суть функции от* $x \in G$, *называется линейным представлением группы* G, *если* 1) $g(e) = I_r$ (e — единица группы, I_r — единичная матрица порядка r) *и* 2) *для любых элементов* x, $y \in G$ *имеет место равенство* $g(xy) = g(x)\,g(y)$. *Число* r *называется степенью представления.*

Определение 6.3.2. *Два представления* $g(x)$ *и* $g'(x)$ *группы* G *одинаковой степени* r *называются эквивалентными, если существует такая постоянная матрица* A *порядка* r, *что*

$$g'(x) = A^{-1} g(x)\,A.$$

Если матрица $g(x)$ унитарна, то линейное представление называется *унитарным*. Покажем, что *элементы* $g_{ij}(x)$ *унитарного представления суть п.-п. функции.* В самом деле, в силу унитарности

$$\sum_{j=1}^{r} |g_{ij}(x)|^2 = 1 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

поэтому для всех i, $j = 1, 2, \ldots, r$ $|g_{ij}(x)| \leqslant 1$. Далее,

$$g_{ij}(ax) = \sum_{k=1}^{r} g_{ik}(a)\,g_{kj}(x)$$

и так как для всех a $|g_{ik}(a)| \leqslant 1$, то семейство $g_{ij}(ax)$ компактно.

Из этого рассуждения видно, что для почти-периодичности элементов $g_{ij}(x)$ достаточна их ограниченность. Впрочем, мы сейчас покажем, что если элементы представления ограничены, то существует эквивалентное унитарное представление.

*) С основными понятиями теории матриц можно познакомиться в книге И. М. Гельфанда, Лекции по линейной алгебре.

Лемма 6.3.1. *Если элементы $g_{ij}(x)$ представления $g(x)=\{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{r}$ равномерно ограничены, то существует эквивалентное $g(x)$ унитарное представление.*

Доказательство. Рассмотрим постоянную матрицу A с элементами

$$A_{ij}=M_x\Big\{\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(x)\,\overline{g_{jk}(x)}\Big\}.$$

Легко видеть, что $A_{ij}=\overline{A}_{ji}$, т. е. матрица $A=\{A_{ij}\}_{i,j=1}^{r}$ эрмитова. Далее, для произвольных комплексных $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_r$, для которых $\sum_{i=1}^{r}|\xi_i|^2>0$, имеем:

$$\sum_{i,j=1}^{r}\Big[\sum_{k=1}^{r} g_{ik}(x)\,\overline{g_{jk}(x)}\Big]\xi_i\bar{\xi}_j=\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{r} g_{ik}(x)\,\xi_i\Big|^2\geqslant 0.$$

Взяв среднее по x, мы получим *):

$$\sum_{i,j=1}^{r} A_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j>0.$$

Таким образом, A есть положительно-определенная эрмитова матрица. Поэтому существует такая постоянная унитарная матрица U, что

$$U^{-1}AU=\{\lambda_i\delta_{ik}\},$$

где $\lambda_i>0$ и $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$ и $\delta_{ik}=1$ при $i=k$. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda=\{\sqrt{\lambda_i}\,\delta_{ik}\}.$$

---

*) При $x=e$ $\sum_{i=1}^{r} g_{ik}(e)\,\xi_i=\xi_k$, поэтому $\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{r} g_{ik}(e)\,\xi_i\Big|^2=$ $=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2>0$ и, значит, по свойству 4) среднего значения

$$M_x\Big\{\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{r} g_{ik}(x)\,\xi_i\Big|^2\Big\}>0.$$

Легко видеть, что

$$U^{-1}AU = \Lambda^2.$$

Следовательно,

$$A = U\Lambda^2U^{-1} = (U\Lambda U^{-1})(U\Lambda U^{-1}) = BB.$$

Далее, в силу инвариантности среднего значения

$$A_{ij} = M_x\left\{\sum_{k=1}^{r} g_{ik}(ax)\,\overline{g_{jk}(ax)}\right\} =$$
$$= M_x\left\{\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i'=1}^{r} g_{ii'}(a)\,g_{i'k}(x)\right)\left(\sum_{j'=1}^{r}\overline{g_{jj'}(a)}\,\overline{g_{j'k}(x)}\right)\right\} =$$
$$= \sum_{i',j'} g_{ii'}(a)\,\overline{g_{jj'}(a)}\,A_{i'j'},$$

т. е. $A = g(a)\,Ag^*(a)$, где $g^*(a) = \{\overline{g_{ji}(a)}\}_{i,j=1}^{r}$ (сопряженная матрица), или

$$BB = g(a)\,BBg^*(a); \quad B^{-1}g(a)\,BBg^*(a)\,B^{-1} = I_r,$$

т. е.*) $[B^{-1}g(a)\,B]\,[B^{-1}g(a)\,B]^* = I_r$. Иными словами, эквивалентное $g(a)$ представление $B^{-1}g(a)\,B$ унитарно.

2. В теории линейных представлений большую роль играет понятие неприводимости представления. Это понятие удобнее вначале вводить не для матриц, а для линейных преобразований.

Определение 6.3.3. *Пусть $\mathfrak{M}$ есть некоторое множество линейных преобразований r-мерного векторного пространства $\mathfrak{R}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется приводимым, если существует подпространство S пространства R размерности s, $0 < s < r$, инвариантное относительно всех преобразований множества $\mathfrak{M}$. Если условие приводимости не выполняется, то множество $\mathfrak{M}$ называется неприводимым.*

Выберем в $\mathfrak{R}$ определенные координаты. Тогда каждому преобразованию из $\mathfrak{M}$ будет соответствовать некоторая матрица. Обозначим совокупность всех этих матриц через $\mathfrak{N}$. Множество матриц $\mathfrak{N}$ называется *приводимым* или *неприводимым* в зависимости от того, приводимо или неприводимо $\mathfrak{M}$. Пусть множество $\mathfrak{M}$ приводимо.

---

*) B — эрмитова матрица и, значит, $B^* = B$, $(B^{-1})^* = B^{-1}$.

Выберем координаты в пространстве R так, чтобы первые s осей лежали в S. Тогда каждая матрица $d \in \mathfrak{N}$ будет иметь вид

$$d = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad (6.3.1)$$

где a — квадратная матрица порядка s, c — квадратная матрица порядка $r-s$, b — прямоугольная матрица и 0 — прямоугольная матрица, составленная из нулей.

Пусть d^* — сопряженная матрица для матрицы d. Преобразование f^*, соответствующее матрице d^*, оставляет, очевидно, инвариантным подпространство S' пространства $\mathfrak{R}$ размерности $r-s>0$.

Покажем, что если множество матриц $\mathfrak{N}$ приводимо, то и множество сопряженных матриц $\mathfrak{N}^*$ также приводимо. Матрица $x \in \mathfrak{N}$ может и не иметь вида (6.3.1). Однако согласно сделанному замечанию, если выбрать специальным образом координатные оси, то мы получим матрицу вида (6.3.1). Это значит, что существует такая постоянная матрица t, что все матрицы $txt^{-1} = x'$ имеют вид (6.3.1).

Переходя к сопряженным матрицам, получим $t^{-1*}x^*t^* = x'^*$, $x^* = t^*x'^*t^{-1*}$. Так как матрица x'^* оставляет инвариантным некоторое подпространство S', то матрица x^* также оставляет инвариантным некоторое подпространство S'' и, следовательно, семейство $\mathfrak{N}$ приводимо.

3. Пусть f — унитарное преобразование пространства R с матрицей d. Предположим, что f оставляет инвариантным некоторое подпространство S размерности s. Обозначим через S' подпространство размерности $r-s$, состоящее из всех векторов, ортогональных к векторам пространства S. Так как f — унитарное преобразование, то ортогональные векторы переходят в ортогональные. Следовательно, подпространство S' также инвариантно относительно f. Выберем ортогональный базис в $\mathfrak{R}$ так, чтобы первые r осей лежали в S, а последние — в S'. В этом новом базисе преобразованию f будет соответствовать матрица d', имеющая вид

$$d' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где a — прямоугольная матрица порядка s, b — прямоугольная матрица порядка $r-s$. При этом $d' = t\,dt^{-1}$, где t — унитарная матрица (ибо новый базис ортогонален).

4. Пусть $g(x) = \{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{r}$ — некоторое приводимое унитарное представление группы G. Согласно предыдущему пункту можно утверждать, что существует такая постоянная унитарная матрица t, что матрица $h(x) = t^{-1}g(x)\,t$ имеет вид

$$h(x) = \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & g''(x) \end{pmatrix},$$

где $g'(x)$ и $g''(x)$ — унитарные матрицы. Легко видеть, что $g'(x)$ и $g''(x)$ суть также представления группы G, т. е. представление $g(x)$ распалось на $g'(x)$ и $g''(x)$. Если $g'(x)$ и $g''(x)$ опять приводимы, то их можно еще расщепить. Поэтому каждое конечное унитарное представление группы G распадается на конечное число неприводимых унитарных представлений.

5. В дальнейшем большую роль играет свойство ортогональности элементов неприводимых представлений. Доказательство ортогональности опирается на следующую фундаментальную лемму, принадлежащую И. Шуру.

Лемма. *Пусть $\{A\}$ и $\{B\}$ — два неприводимых множества матриц порядков m и n и P — прямоугольная матрица, число строк которой равно m, а число столбцов n. Предположим, что*

$$\{A\}\,P = P\,\{B\}, \tag{6.3.2}$$

т. е. для каждой матрицы $a \in \{A\}$ найдется такая матрица $b \in \{B\}$, что $aP = Pb$ и, наоборот, для каждой матрицы $b \in \{B\}$ найдется такая матрица $a \in \{A\}$, что $aP = Pb$. При этих условиях возможны лишь два случая: либо все элементы матрицы P равны нулю, либо $m = n$ и квадратная матрица P имеет определитель, отличный от нуля.

Доказательство. Пусть $P = \{p_{ij}\}$. Обозначим через $\mathbf{p}_k$ ($k = 1, \ldots, n$) вектор с координатами $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{mk}$. Далее, обозначим через S линейное подпространство m-мерного векторного пространства, порожденное векторами $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$. Покажем, что S **инвариантно** относительно всех преобразований множества $\{A\}$. Пусть $a = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^m \in \{A\}$ и b—такая матрица множества $\{B\}$, что

$$aP = Pb. \tag{6.3.3}$$

Пусть $\boldsymbol{q}_k = a\boldsymbol{p}_k$, т. е.

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} p_{jk} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

В силу равенства (6.3.3)

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^n p_{ij} b_{jk} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. координаты вектора $\boldsymbol{q}_k$ линейно выражаются через координаты векторов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k$, а это и значит, что $q_k \in S$. Так как множество $\{A\}$ неприводимо, то S должно иметь размерность, равную нулю или m. В первом случае векторы $\boldsymbol{p}_k$ (порождающие S) должны равняться нулю, т. е. элементы матрицы P равны нулю. Во втором случае среди векторов $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ имеется ровно m линейно независимых, а это значит, что среди столбцов матрицы P имеется m линейно независимых. Из этого следует, что

$$n \geqslant m. \tag{6.3.4}$$

Обозначим через $\{A\}'$ и $\{B\}'$ множества матриц, полученных транспонированием матриц из множеств $\{A\}$ и $\{B\}$. Множества $\{A\}'$ и $\{B\}'$ неприводимы (см. п. 2). Наконец, через P' обозначим матрицу, транспонированную к матрице P. Транспонируя равенство (6.3.2), мы получим:

$$\{B\}'P' = P'\{A\}'.$$

Применяя теперь те же рассуждения, что и прежде, мы установим, что имеются две возможности: либо все элементы матрицы P' равны нулю, либо у матрицы P' существуют n линейно независимых столбцов. Первое предположение не дает ничего нового. Из второго же предположения следует, что матрица P имеет n линейно независимых строк, т. е. $n \leqslant m$. Сопоставляя это неравенство с неравенством (6.3.4), мы заключаем, что $n = m$ и $\operatorname{Det} P \neq 0$.

Следствие 1. *Пусть $\{A\}$ есть некоторое неприводимое множество квадратных матриц порядка r и b — некоторая квадратная матрица также порядка r, перестановочная со всеми матрицами множества $\{A\}$. При этих предположениях $b = \beta I_r$, где β — комплексное число и I_r — единичная матрица порядка r.*

В самом деле, рассмотрим матрицу $a = b - \beta I_r$, где β — корень уравнения

$$\operatorname{Det}[b - \beta I_r] = 0.$$

Очевидно, что матрица a также перестановочна со всеми матрицами из $\{A\}$. На основании леммы Шура все элементы матрицы a равны нулю, ибо по предположению $\operatorname{Det} a = 0$.

Следствие 2. *Пусть $\{A\}$ — неприводимое множество попарно перестановочных матриц. Тогда все матрицы множества $\{A\}$ первого порядка.*

В самом деле, на основании предыдущего следствия все матрицы множества $\{A\}$ имеют вид βI_r. Но множество матриц такого вида неприводимо лишь тогда, когда $r = 1$.

Легко видеть, что в следствии 2 содержится лемма 1.6.4.

6. Теперь мы можем непосредственно заняться доказательством соотношений ортогональности.

Теорема 6.3.1. *Пусть $g(x)$ и $h(x)$ — два унитарных, неприводимых и неэквивалентных представления группы G степени m и n. Тогда*

$$M_x\{g_{ij}(x)\overline{h_{kl}(x)}\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Обозначим через b произвольную постоянную матрицу с m строчками и n столбцами. Положим

$$a(x) = g(x)\,bh(x^{-1});\quad a = M_x\{a(x)\}.$$

В силу инвариантности среднего значения

$$g(y)\,ah(y^{-1}) = M_x\{g(y)\,g(x)\,bh(x^{-1})\,h(y^{-1})\} = \\ = M_x\{g(yx)\,bh[(yx)^{-1}]\} = M_x\{a(yx)\} = a.$$

Поэтому $g(y)\,a = ah(y)$ и в силу леммы Шура возможны два случая: 1) $m = n$ и $\operatorname{Det} a \neq 0$. В этом случае $h(y) = a^{-1}g(y)\,a$, т. е. представления $g(x)$ и $h(x)$ эквивалентны, что противоречит сделанному предположению. 2) Матрица a состоит из нулей, т. е. для любой постоянной матрицы b

$$M_x\{g(x)\,bh(x^{-1})\}=0.$$

Выберем матрицу b следующим образом: элемент, стоящий на пересечении j-й строки и l-го столбца, равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Тогда мы получим:

$$M_x\{g_{ij}(x)\,\overline{h_{kl}(x)}\}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6.3.2. *Пусть $g(x)$ есть унитарное неприводимое представление группы G степени r. Тогда*

$$M_x\{g_{ij}(x)\,\overline{g_{ij}(x)}\}=\frac{1}{r};\ M_x\{g_{ij}(x)\,\overline{g_{kl}(x)}\}=0, \quad \textit{если} \quad i\neq k$$

или $j\neq l$.

Доказательство. Обозначим через $b=\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{r}$ квадратную постоянную матрицу порядка r. Положим

$$a(x)=g(x)\,bg(x^{-1});\ a=M_x\{a(x)\}.$$

В силу инвариантности среднего значения

$$g(y)\,ag(y^{-1})=a, \text{ т. е. } g(y)\,a=ag(y).$$

На основании первого следствия из леммы Шура мы заключаем, что $a=\alpha I_r$, где α — число, т. е.

$$M_x\{g(x)\,bg(x^{-1})\}=\alpha I_r.$$

Для определения числа α рассмотрим след обеих частей последнего равенства. Мы получим:

$$M_x\{\mathrm{Sp}\,[g(x)\,bg(x^{-1})]\}=\alpha r.$$

Следовательно, $\alpha=\frac{1}{r}\mathrm{Sp}\,(b)$. Пусть у матрицы b элемент, стоящий на пересечении j-й строки и l-го столбца, равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Тогда $\mathrm{Sp}\,(b)=\delta_{jl}$. Следовательно,

$$M_x\{g_{ij}(x)\,\overline{g_{kl}(x)}\}=\frac{1}{r}\,\delta_{ik}\delta_{jl},$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Ряды Фурье. Равенство Парсеваля. Теорема единственности

1. Разобьем совокупность всех неприводимых, унитарных представлений группы G на классы, так, чтобы в каждый класс вошли все эквивалентные между собой представления. Из каждого класса выберем произвольный представитель и обозначим совокупность всех представителей через S. Пусть $g(x) = \{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{r} \in S$ и $f(x)$ — некоторая п.-п. функция на группе G. Назовем матрицей Фурье функции $f(x)$ матрицу

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{r} = rM_x\{f(x)\tilde{g}(x^{-1})\} = \\ = r\{M_x[f(x)\overline{g_{ij}(x)}]\}_{i,j=1}^{r}, \tag{6.4.1}$$

где через $\tilde{g}(x)$ мы обозначили транспонированную к $g(x)$ матрицу *): $\tilde{g}(x) = \{g_{ji}(x)\}_{i,j=1}^{r}$.

Так как в силу теорем 6.3.1 и 6.3.2 функции $g_{ij}(x)$ в различных матрицах из совокупности S, а также и из одной и той же матрицы взаимно ортогональны, то справедливо неравенство Бесселя. Поэтому (см. § 3 гл. I) для каждой п.-п. функции $f(x)$ существует не более счетного числа матриц $g_n(x) = \{g_{ij}^{(n)}(x)\}_{i,j=1}^{r_n} \in S$ порядков $r_1, r_2, \ldots$, для которых матрицы Фурье функции $f(x)$ ненулевые. Отнесем функции $f(x)$ ее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{r_n} a_{ij}^{(n)} g_{ij}^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Sp}[A_n \tilde{g}_n(x)]. \tag{6.4.2}$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \sum_{i,j=1}^{r_n} |a_{ij}^{(n)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}(A_n A_n^*) \leqslant M_x\{|f(x)|^2\}, \tag{6.4.3}$$

где $A_n^* = \{\bar{a}_{ji}^{(n)}\}_{i,j=1}^{r_n}$ — сопряженная к A_n матрица.

Мы покажем, что для каждой п.-п. функции $f(x)$ в неравенстве (6.4.3) на самом деле имеет место знак равенства (равенство Парсеваля). Вначале мы докажем

---

*) В силу унитарности матрицы $g(x)$ $g(x^{-1}) = g^*(x) = \{\overline{g_{ji}(x)}\}_{i,j=1}^{n}$.

эквивалентность равенства Парсеваля с теоремой единственности, которая гласит:

Если $f(x)$ — п.-п. функция и для всех $g(x) \in S$ матрицы Фурье нулевые, то $f(x) \equiv 0$.

1) ***Из равенства Парсеваля следует теорема единственности.***

В самом деле, если все матрицы Фурье равны нулю, то из равенства Парсеваля (справедливость которого мы предположили) следует, что

$$M_x\{|f(x)|^2\} = 0.$$

По свойству 4) среднего значения отсюда следует, что $f(x) \equiv 0$.

2) ***Из теоремы единственности следует равенство Парсеваля.***

Рассмотрим свертку функции $f(x)$.

$$g(x) = M_y\{f(xy)\overline{f(y)}\}.$$

Покажем, что $g(x)$ — п.-п. функция. Действительно, пусть $G = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ есть конечное ε-деление для семейства $f(xz)$ (z — параметр). Стало быть, если $x', x'' \in \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то для всех $z \in G$

$$|f(x'z) - f(x''z)| < \varepsilon.$$

Пусть a — произвольный элемент группы G. Тогда

$$|g(x'a) - g(x''a)| \leqslant M_y\{|f(x'ay) - f(x''ay)|\,|f(y)|\} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon M_y\{|f(y)|\},$$

что и доказывает почти-периодичность функции $g(x)$.

Вычислим ряд Фурье функции $g(x)$. Пусть $h(x)$ — неприводимое унитарное представление группы G степени r. Тогда в силу теорем 6.1.4 и 6.2.5

$$\begin{aligned} B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^r &= r\,\{M_x[g(x)\overline{h_{ij}(x)}]\}_{i,j=1}^r = \\ &= rM_x\{g(x)\cdot\tilde{h}(x^{-1})\} = rM_x\{\tilde{h}(x^{-1})\,M_y[f(xy)\overline{f(y)}]\} = \\ &= rM_y\{\overline{f(y)}\,M_x[f(xy)\,\tilde{h}(x^{-1})]\} = \\ &= rM_y\{\overline{f(y)}\,M_z[f(z)\,\tilde{h}(yz^{-1})]\} = \\ &= rM_z\{f(z)\,\tilde{h}(z^{-1})\}\,M_y\{\overline{f(y)}\,\tilde{h}(y)\} = \frac{1}{r}A\cdot A^*. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (6.4.2)

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}\{A_n A_n^* \tilde{g}_n(x)\}.$$

Пусть $h'(x) = Uh(x)U^{-1}$ — представление группы G, унитарно эквивалентное представлению $h(x)$. Из формулы (6.4.2) следует, что

$$A' = rM_x\{f(x)\tilde{h}'(x^{-1})\} = V^{-1}AV,$$

где $V = \tilde{U}$ — также унитарная матрица. Если матрица A эрмитова, то, как известно, можно найти такую унитарную матрицу V, что матрица A' будет диагональной. При этом

$$\operatorname{Sp}(A'\tilde{h}'(x)) = \operatorname{Sp}(V^{-1}AVV^{-1}\tilde{h}(x)V) = \operatorname{Sp}(A\tilde{h}(x)).$$

Для свертки $g(x)$ все матрицы Фурье $B_n = \frac{1}{r_n} A_n A_n^*$ эрмитовы. Поэтому можно предполагать, что все они диагональны:

$$B_n = \frac{1}{r_n}\{\lambda_i \delta_{ij}\}_{i,j=1}^{r_n},$$

причем, так как матрицы B_n положительно определены, то все λ_i не меньше нуля.

Покажем теперь, что ряд Фурье свертки сходится абсолютно и равномерно на всей группе G. Мы имеем:

$$\operatorname{Sp}\{B_n \tilde{g}_n(x)\} = \frac{1}{r_n} \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i e_{ii}(x).$$

Так как $|e_{ii}(x)| \leqslant 1$, то

$$|\operatorname{Sp}\{B_n \tilde{g}_n(x)\}| \leqslant \frac{1}{r_n} \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i = \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}(A_n A_n^*).$$

Итак, числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}(A_n A_n^*)$$

является мажорантой для ряда Фурье свертки. Принимая во внимание неравенство Бесселя, мы заключаем, что ряд Фурье свертки сходится абсолютно и равномерно и стало быть его сумма есть п.-п. функция. По теореме единственности (справедливость которой мы предположили)

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\operatorname{Sp}(A_nA_n^*\tilde{g}_n(x)).$$

Полагая здесь $x=e$ (единице группы), мы получим:

$$M_y\{|f(y)|^2\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\operatorname{Sp}(A_nA_n^*),$$

т. е. равенство Парсеваля.

§ 5. Доказательство теоремы единственности

1. В предыдущем параграфе мы установили эквивалентность равенства Парсеваля и теоремы единственности. Поэтому достаточно доказать одну из этих теорем. В методическом отношении несколько проще доказывается теорема единственности. Доказательство этой теоремы основано на теории интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Пусть $K(x, x')$ — п.-п. функция на группе $G\cdot G$. Предположим, что функция $K(x, x')$ эрмитова, т. е. $K(x, x')=\overline{K}(x', x)$ и что $K(x, x')\not\equiv 0$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(x)=M_{x'}\{K(x, x')\varphi(x')\}. \tag{6.5.1}$$

С помощью обычных методов теории интегральных уравнений можно показать*), что уравнение (6.5.1) имеет нетривиальное решение, т. е. существует число $\lambda_0\neq 0$ (собственное значение) и функция $\varphi(x)\not\equiv 0$ (собственная функция), которые удовлетворяют уравнению (6.5.1). При этом каждому собственному значению

*) См., например, И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений (1948), стр. 68.

уравнения (6.5.1) соответствует конечное число линейно независимых собственных функций.

Единственное изменение следует внести в доказательство компактности семейства функций

$$\varphi(x) = M_{x'}\{K(x, x')\psi(x')\}$$

при условии $M_{x'}\{|\psi(x')|^2\} < M$, M фиксировано.

Наметим доказательство компактности семейства функций $\varphi(x)$. Так как $K(x, x')$ — п.-п. функция на группе $G \cdot G$, то семейство $K(ax, bx')$ ($[a, b]$ — параметр) компактно. Это значит, что из каждой бесконечной последовательности функций $K(a_1x, b_1x')$, $K(a_2x, b_2x')$, ..., $K(a_nx, b_nx')$, ... можно выбрать равномерно сходящуюся на $G \cdot G$ подпоследовательность. Полагая, в частности, $x' = e$, $a_n = e$ ($n = 1, 2, \ldots$), мы получим, что из последовательности $K(x, b_1)$, $K(x, b_2)$, ... можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, т. е. семейство $K(x, b)$ (b — параметр) компактно. Поэтому в силу теоремы 5.1.2 для кажоого $\varepsilon > 0$ существует конечное ε-деление группы $G \cdot G = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_p$ такое, что если $x_1, x_2 \in \mathfrak{A}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, p$), то для всех $b \in G$

$$|K(x_2, b) - K(x_1, b)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant M_{x'}\{|K(x_2, x') - K(x_1, x')|\,|\psi(x')|\} \leqslant$$
$$\leqslant (M_{x'}\{|K(x_2, x') - K(x_1, x')|^2\}\, M_{x'}\{|\psi(x')|^2\})^{1/2} < \varepsilon\sqrt{M}.$$

Снова применяя теорему 5.1.2, заключаем, что семейство $\varphi(x)$ компактно.

2. Прежде чем приступить непосредственно к доказательству теоремы единственности, сделаем одно простое замечание, которое несколько облегчит нашу задачу. Пусть $f(x)$ есть п.-п. функция на группе G с нулевым рядом Фурье, т. е. пусть для всех неприводимых матриц $g(x) \in S$ матрицы Фурье для $f(x)$ суть нулевые матрицы. Тогда и для всех приводимых унитарных представлений группы G матрицы Фурье функции $f(x)$ суть нулевые. В самом деле, пусть $E(x)$ — приводимое унитарное представление группы G. В § 3 настоящей главы было показано, что существует постоянная унитарная матрица U, обладающая тем свойством, что представление $E'(x) = UE(x)U^{-1}$ распадается на неприводимые. Так как $E(x) = U^{-1}E(x)U$, то элементы матрицы $E(x)$ суть линейные комбинации из элементов неприводимых представлений. Поэтому матрица Фурье функции $f(x)$ относительно представления $E(x)$ нулевая.

Предположим теперь, что п.-п. функция $f(x)$ имеет нулевой ряд Фурье. Следует показать, что в этом случае $f(x) \equiv 0$. Пусть $g(x)$ есть свертка для $f(x)$. Как мы знаем (см. предыдущий параграф), $g(x)$ есть п.-п. функция и также имеет нулевой ряд Фурье. Рассмотрим ядро

$$K(x, z) = g(xz^{-1}) = M_y\{f(xz^{-1}y)\overline{f(y)}\} = M_y\{f(xy)\cdot\overline{f(zy)}\}. \tag{6.5.2}$$

Легко видеть, что ядро $K(x, z)$ эрмитово. В силу теоремы 6.1.4 $K(x, z)$ есть п.-п. функция на группе $G\cdot G$. Предположим, что функция $g(x)$ не равна тождественно нулю. Тогда интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(x) = M_z\{g(xz^{-1})\varphi(z)\} \tag{6.5.3}$$

имеет нетривиальное решение. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ — собственное значение уравнения (6.5.3) и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — полный набор ортонормированных *) собственных функций, соответствующих собственному значению λ_0. Покажем, что при любом $y \in G$ функции $\varphi_i(xy^{-1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ суть также собственные функции уравнения (6.5.3), соответствующие собственному значению λ_0. В самом деле, в силу инвариантности среднего значения

$$\lambda_0\varphi_i(xy^{-1}) = M_z\{g(xy^{-1}z^{-1})\varphi_i(z) = M_t\{g(xt^{-1})\varphi_i(ty^{-1})\},$$

что доказывает наше утверждение. Так как функции $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ образуют полную систему собственных функций для уравнения (6.5.3) (при $\lambda = \lambda_0$), то

$$\varphi_i(xy^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}(y)\varphi_j(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.5.4}$$

*) Линейно независимые собственные функции уравнения (6.5.3) можно ортогонализовать с помощью процесса Шмидта, так же как в обычной теории интегральных уравнений.

Из инвариантности среднего значения следует, что при каждом фиксированном y функции $\varphi_i(xy^{-1})$ образуют ортонормированную систему функций. Поэтому матрица $E(y) = \{e_{ij}(y)\}_{i,j=1}^n$ преобразует ортонормированную систему в ортонормированную и, следовательно, есть унитарная матрица. Покажем, что матрица $E(y)$ порождает линейное представление группы G. В самом деле, из равенства (6.5.4) следует

$$\varphi_i\{x(yz)^{-1}\} = \varphi_i(xz^{-1}y^{-1}) = \sum_{j=1}^n e_{ij}(yz)\varphi_j(x) =$$
$$= \sum_{j=1}^n e_{ij}(y)\varphi_j(xz^{-1}) = \sum_{j=1}^n e_{ij}(y)\sum_{k=1}^n e_{jk}(z)\varphi_k(x) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)\sum_{k=1}^n e_{ik}(y)e_{kj}(z).$$

Из ортогональности функций $\varphi_j(x)$ следует их линейная независимость. Поэтому последнее равенство дает

$$e_{ij}(yz) = \sum_{k=1}^n e_{ik}(y)e_{kj}(z),$$

т. е. $E(yz) = E(y)E(z)$. Полагая в равенстве (6.5.4) $y = e$, мы получим:

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n e_{ij}(e)\varphi_j(x)$$

и, значит, $e_{ij}(e) = \delta_{ij}$. Таким образом, $E(y)$ есть унитарное представление группы G.

В силу предположения матрицы Фурье функции $f(x)$ (и следовательно, $g(x)$) относительно любого унитарного представления группы G состоят из нулей. Поэтому

$$M_x\{g(x)\overline{e_{ij}(x^{-1})}\} = M_x\{g(x)e_{ji}(x)\} = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.5.5}$$

Покажем, что равенство (6.5.5) противоречит существованию нетривиального решения интегрального уравнения (6.5.3). Из уравнения (6.5.5) следует

$$M_y\{g(xy^{-1})e_{ij}(y^{-1})\}=M_z\{g(z)e_{ij}(x^{-1}z)\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}e_{ik}(x^{-1})M_z\{g(z)e_{kj}(z)\}=0. \quad (6.5.6)$$

Полагая в равенстве (6.5.4) $x=e$ и заменяя y на y^{-1}, мы получим:

$$\varphi_i(y)=\sum_{j=1}^{n}e_{ij}(y^{-1})\varphi_j(e).$$

Поэтому из равенства (6.5.6) следует

$$M_y\{g(xy^{-1})\varphi_i(y)\}=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(e)M_y\{g(xy^{-1})e_{ij}(y^{-1})\}=0.$$

С другой стороны,

$$M_y\{g(xy^{-1})\varphi_i(y)\}=\lambda_0\varphi_i(x),$$

что противоречит предыдущему равенству. Поэтому $g(x)\equiv 0$ и, значит, $f(x)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

§ 6. Теорема аппроксимации

1. Пусть $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_N(x)$ — унитарные представления группы G степеней $r_1, r_2, \ldots r_N$. Обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_N$ произвольные постоянные матрицы порядков $r_1, r_2, \ldots, r_N$ и рассмотрим конечную сумму

$$P_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Sp}\{B_n\tilde{g}_n(x)\}.$$

$P_N(x)$ есть п.-п. функция на G. Если последовательность конечных сумм $P_N(x)$ сходится равномерно на группе G, то, как мы знаем (см. лемму 6.1.2), предельная функция будет также п.-п. функцией. Справедливо также обратное утверждение.

Теорема аппроксимации. *Пусть $f(x)$ — п.-п. функция на группе G. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать конечный многочлен*

$$P_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Sp}\{B_k^{(\varepsilon)}\tilde{g}_k(x)\}.$$

где $g_k(x)$ — *некоторые унитарные, неприводимые представления группы* G *порядков* r_k *и* $B_k^{(\varepsilon)}$ — *постоянные матрицы тех же порядков, удовлетворяющие неравенству*

$$\sup_{x \in G} |f(x) - P_N(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. На группы легко распространяется метод Винера (см. § 7 гл. I). Положим

$$g(x) = \sup_{t \in G} |f(xt) - f(t)|.$$

Покажем, что $g(x)$ есть п.-п. функция. Пусть $G = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ — конечное ε-деление группы G для семейства $f(xa)$ (a — параметр). Так как для любого элемента a группы G

$$g(xa) = \sup_{t \in G} |f(xat) - f(t)| = \sup_{t \in G} |f(xt) - f(a^{-1}t)|,$$

то для $x', x'' \in \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$|g(x''a) - g(x'a)| = \Big|\sup_{t \in G} |f(x''t) - f(a^{-1}t)| -$$
$$- \sup_{t \in G} |f(x't) - f(a^{-1}t)|\Big| \leqslant \sup_{t \in G} |f(x''t) - f(x't)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует почти-периодичность функции $g(x)$. Определим функцию $\varphi_\varepsilon(v)$ $(v \geqslant 0)$ следующим образом:

$$\varphi_\varepsilon(v) = \begin{cases} 1 - \dfrac{v}{\varepsilon} & \text{для } 0 \leqslant v \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{для } \quad v > \varepsilon. \end{cases}$$

Далее, положим

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon[g(x)]}{M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\}}.$$

$\varphi_\varepsilon[g(x)]$ есть положительная п.-п. функция, не равная тождественно нулю, ибо $\varphi_\varepsilon[g(e)] = \varphi_\varepsilon[0] = 1$. Поэтому $M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\} \neq 0$ и функция $\psi_\varepsilon(x)$ существует и есть п.-п. функция на G.

Рассмотрим теперь функцию

$$f_\varepsilon(x) = M_u\{f(u)\psi_\varepsilon(xu^{-1})\}.$$

Покажем, что если $\psi_\varepsilon(xt^{-1}) \neq 0$, то

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon. \tag{6.6.1}$$

В самом деле, если $\psi_\varepsilon(xt^{-1}) \neq 0$, то $\varphi_\varepsilon[g(xt^{-1})] \neq 0$, т. е. $g(xt^{-1}) < \varepsilon$, т. е.

$$\sup_u |f(xt^{-1}u) - f(u)| < \varepsilon$$

или, заменяя $t^{-1}u$ на u,

$$\sup_u |f(xu) - f(tu)| < \varepsilon.$$

Полагая здесь $u = e$, получим неравенство (6.6.1). Так как $M_t\{\psi_\varepsilon(xt^{-1})\} = 1$, то $f(x) = M_t\{f(x)\psi_\varepsilon(xt^{-1})\}$ и, значит,

$$f(x) - f_\varepsilon(x) = M_t\{[f(x) - f(t)]\psi_\varepsilon(xt^{-1})\}.$$

Из неравенства (6.6.1) следует оценка

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant M_t\{|f(x) - f(t)|\psi_\varepsilon(xt^{-1})\} < \varepsilon. \tag{6.6.2}$$

Используем теперь равенство Парсеваля. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}\{A_n \tilde{g}_n(x)\}.$$

Обозначим через η произвольное положительное число и выберем целое положительное число $N = N(\eta)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}\{A_n A_n^*\} < \eta. \tag{6.6.3}$$

Далее, положим

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}\{A_n \tilde{g}_n(x)\}; \quad r_N(x) = f(x) - S_N(x).$$

В силу равенства Парсеваля

$$M_x\{|r_N(x)|^2\} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}(A_n A_n^*) < \eta.$$

Далее имеем:

$$f_\varepsilon(x) = M_t\{f(t)\,\psi_\varepsilon(xt^{-1})\} = M_t\{S_N(t)\,\psi_\varepsilon(xt^{-1})\} + \\ + M_t\{r_N(t)\,\psi_\varepsilon(xt^{-1})\} = \\ = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}[A_n M_t\{\tilde{g}_n(t^{-1})\,\psi_\varepsilon(t)\}\,\tilde{g}_n(x)] + \\ + M_t\{r_N(t)\,\psi_\varepsilon(xt^{-1})\} = P_\varepsilon(x) + R_{N,\varepsilon}(x).$$

$P_\varepsilon(x)$ — конечный многочлен. Оценим остаточный член $R_{N,\varepsilon}(x)$. В силу неравенства Коши-Буняковского и неравенства (6.6.3) имеем:

$$|R_{N,\varepsilon}(x)| \leqslant (M_t\{|r_N(t)|^2\})^{1/2}\,(M_t\{\psi_\varepsilon^2(xt^{-1})\})^{1/2} < \\ < (\eta M_t\{\psi_\varepsilon^2(t)\})^{1/2} < \varepsilon, \tag{6.6.4}$$

если только

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{M_t\{\psi_\varepsilon^2(t)\}}.$$

Из (6.6.2) и (6.6.4) следует оценка

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < 2\varepsilon,$$

и так как число ε было выбрано произвольно, то теорема аппроксимации доказана.

Замечание. Легко усмотреть из доказательства теоремы аппроксимации, что представления $g_n(x)$, фигурирующие в конечном многочлене $P_N(x)$, выбираются из представлений, встречающихся в ряде Фурье функции $f(x)$.

2. Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ — конечное число п.-п. функций. Рассмотрим п.-п. функцию

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_r(x),$$

где

$$g_i(x) = \sup_t |f_i(xt) - f_i(t)| \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Положим, далее,

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon[g(x)]}{M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\}}.$$

Так как $g_i(x) \geqslant 0$, то из неравенства $g(x) < \varepsilon$ следуют неравенства $g_i(x) < \varepsilon$. Поэтому для всех i

$$|f_i(x) - f_i^{(\varepsilon)}(x)| < 2\varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad (6.6.5)$$

где

$$f_i^{(\varepsilon)} = M_u \{f_i(u)\, \psi_\varepsilon(xu^{-1})\}.$$

Повторяя оценки, проведенные в конце доказательства теоремы аппроксимации и пользуясь неравенством (6.6.5), мы получим следующую теорему.

Теорема об одновременной аппроксимации конечного числа п.-п. функций.

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ — *конечное число п.-п. функций на группе* G. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *можно указать одни и те же для всех функций* $f_i(x)$ *унитарные представления группы* G $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_N(x)$ *порядков* $r_1, r_2, \ldots, r_N$ *и (зависящие от* i*) постоянные матрицы соответственно тех же порядков* $B_{1,i}^{(\varepsilon)}, B_{2,i}^{(\varepsilon)}, \ldots$ $\ldots, B_{N,i}^{(\varepsilon)}$ *так, что*

$$|f_i(x) - \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Sp}\, \{B_{n,i}^{(\varepsilon)} \tilde{g}_n(x)\}| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

3. Рассмотрим теперь одновременную аппроксимацию компактных множеств п.-п. функций.

Пусть $E = \{f(x)\}$ — компактное множество п.-п. функций на G. По теореме Хаусдорфа для каждого $\varepsilon > 0$ существует на E конечная ε-сеть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$. Для каждой п.-п. функции $f(x)$ из E найдется функция $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ такая, что

$$|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon. \qquad (6.6.6)$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi_\varepsilon(xu^{-1})$ из предыдущего пункта.

Так как $M_u\{\psi_\varepsilon(xu^{-1})\} = 1$, то из неравенства (6.6.6) следует

$$|f_i^{(\varepsilon)}(x) - f^{(\varepsilon)}(x)| \leqslant M\{|f_i(u) - f(u)|\, \psi_\varepsilon(xu^{-1})\} < \varepsilon. \quad (6.6.7)$$

Из неравенств (6.6.5), (6.6.6) и (6.6.7) следует

$$|f(x)-f^{(\varepsilon)}(x)| \leqslant |f(x)-f_i(x)| + |f_i(x)-f_i^{(\varepsilon)}(x)| + \\ + |f_i^{(\varepsilon)}(x)-f^{(\varepsilon)}(x)| < 3\varepsilon.$$

Покажем теперь, что можно указать счетное множество нoприводимых унитарных представлений группы G: $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., так что ряд Фурье каждой функции $f(x) \in E$ можно записать в виде

$$f(x) \sim \sum_n \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}[A_n(f)\, \tilde{g}_n(x)]. \tag{6.6.8}$$

Вначале покажем, что можно указать счетное плотное на E множество функций, которое мы в дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{R}$. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, есть последовательность неограниченно убывающих положительных чисел. Обозначим через $f_1^{(k)}(x), \ldots, f_{n_k}^{(k)}(x)$ конечную ε_k-сеть ($k=1, 2, \ldots$) для E. Объединяя все ε_k-сети, мы получим счетное, плотное на E множество $\mathfrak{R}$.

Ряд Фурье каждой п.-п. функции содержит не более чем счетное множество унитарных неприводимых представлений. Поэтому, так как множество $\mathfrak{R}$ счетно, то можно указать не более чем счетное множество неприводимых, неэквивалентных представлений группы G: $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., так что ряд Фурье любой п.-п. функции $f(x) \in \mathfrak{R}$ записывается в виде (6.6.8).

С другой стороны, каждая функция $f(x) \in E$ есть равномерный предел некоторой последовательности п.-п. функций, принадлежащих $\mathfrak{R}$. Поэтому ряд Фурье каждой функции $f(x) \in E$ также может быть записан в виде (6.6.8).

Покажем теперь, что, каково бы ни было положительное число η, можно указать такое целое положительное число $N = N(\eta)$, зависящее только от η и не зависящее от индивидуальной функции семейства E, что выполняется неравенство

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}\{A_n A_n^*\} \right)^{1/2} < \eta.$$

В самом деле, выбрав η, подберем столь большое k, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon_k < \frac{\eta}{2}$. Далее, рассмотрим ε_k-сеть для E: $f_1^{(k)}, \ldots, f_{n_k}^{(k)}$. При фиксированном k можно подобрать столь большое $N = N(\eta)$, что выполняются неравенства

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp} \{A_n^{(i)} A_n^{(i)*}\} \right)^{1/2} < \frac{\eta}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n_k). \quad (6.6.9)$$

С другой стороны, какова бы ни была функция $f(x) \in E$, можно указать такой номер i, что

$$\sup_x |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon_k < \frac{\eta}{2},$$

и, значит, подавно

$$(M_x \{|f(x) - f_i(x)|^2\})^{1/2} < \frac{\eta}{2}. \quad (6.6.10)$$

В силу равенства Парсеваля из неравенства (6.6.10) следует неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp} [(A_n - A_n^{(i)}) (A_n^* - A_n^{(i)*})] \right)^{1/2} < \frac{\eta}{2}$$

и, значит, в силу положительности всех членов последнего ряда — неравенство

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp} [(A_n - A_n^{(i)}) (A_n^* - A_n^{(i)*})] \right)^{1/2} < \frac{\eta}{2}. \quad (6.6.11)$$

Из неравенств (6.6.9) и (6.6.11), а также из неравенства

Минковского следует*)

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\operatorname{Sp}(A_nA_n^*)\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\operatorname{Sp}[(A_n-A_n^{(i)})(A_n^*-A_n^{(i)*})]\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\operatorname{Sp}(A_n^{(i)}A_n^{(i)*})\right)^{1/2}<\eta,$$

что и требовалось доказать.

Повторяя снова оценки, проведенные в конце доказательства теоремы аппроксимации, мы получим следующую теорему.

Теорема (об одновременной аппроксимации компактного множества п.-п. функций на группе).

Пусть $E=\{f(x)\}$ — компактное множество п.-п. функций на группе G. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать одни и те же для всех функций $f(x)\in E$ унитарные представления группы G: $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_N(x)$ порядков $r_1, r_2, \ldots, r_N$ и (зависящие от функции $f(x)$) постоянные матрицы соответственно тех же порядков $B_{1,f}^{(\varepsilon)}, B_{2,f}^{(\varepsilon)}, \ldots, B_{N,f}^{(\varepsilon)}$ так, что для всех $f(x)\in E$

$$\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Sp}\{B_{n,f}^{(\varepsilon)}\tilde{g}_n(x)\}\right|<\varepsilon,\quad f(x)\in E.$$

§ 7. Топологические группы. Абелевы группы

1. До сих пор мы нигде не предполагали, что на группе G задана топология. Все результаты следовали из

---

*) $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\operatorname{Sp}(A_nA_n^*)=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\sum\limits_{i,j=1}^{r_n}|a_{ij}|^2$. Поэтому мы пользуемся фактически неравенством Минковского для бесконечных числовых рядов.

одной лишь почти-периодичности изучаемых функций. Но даже если группа G топологическая *), мы можем не требовать непрерывности в этой топологии изучаемых п.-п. функций. Заметим, что в этом случае унитарные представления, которые входят в ряд Фурье функции $f(x)$, вообще говоря, также не будут непрерывными функциями. Иначе будет обстоять дело, если предположить непрерывность п.-п. функции $f(x)$ в заданной на G топологии. В этом случае все представления, входящие в ряд Фурье функции $f(x)$, будут непрерывными.

Для доказательства этого утверждения определим равномерную непрерывность на группе.

Функция $f(x)$, заданная на топологической группе G, называется равномерно непрерывной, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $W(\varepsilon)$ единицы e группы G, что для любых двух элементов a, a_1 группы G, для которых $aa_1^{-1} \in W$, выполняется неравенство

$$\sup_x |f(xa) - f(xa_1)| < \varepsilon.$$

Покажем, что если п.-п. функция $f(x)$ непрерывна на группе G, то она и равномерно непрерывна. Допустим противное. В этом случае существуют:

1) фиксированное положительное число α,

2) бесконечная последовательность стягивающихся к единице e группы G окрестностей $W_1, W_2, \ldots$ и

3) бесконечная последовательность пар элементов группы G: $(a_1, a_1') \in W_1$; $(a_2, a_2') \in W_2, \ldots$ так, что для всех n

$$\sup | f(xa_n') - f(xa_n) | > \alpha$$

или

$$\sup | f(xa_n^{-1} a_n') - f(x) | > \alpha. \tag{6.7.1}$$

---

*) Группа G называется топологической, если G есть топологическое пространство и если операция умножения в группе непрерывна относительно рассматриваемой топологии (см. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы).

Так как по предположению $f(x)$—п.-п. функция, то из последовательности

$$f(xa_n^{-1}a_n') \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{6.7.2}$$

можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что сама последовательность (6.7.2) сходится. Так как при $n \to \infty$ $a_n^{-1}a_n' \to e$, то равномерно на всей группе *)

$$f(xa_n^{-1}a_n') \to f(x). \tag{6.7.3}$$

Очевидно, что (6.7.3) противоречит неравенству (6.7.1).

Если G—топологическая группа и п.-п. функция $f(x)$ непрерывна в топологии, заданной на G, то элементы неприводимых представлений, входящих в ряд Фурье функции $f(x)$, также непрерывны в топологии группы G.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим свертку функции $f(x)$:

$$g(x) = M_y\{f(xy)\overline{f(y)}\}.$$

Покажем, что $g(x)$ непрерывна в топологии группы G. В самом деле, так как $f(x)$ непрерывна и почти-периодична, то она равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $W = W(\varepsilon)$ единицы группы G, что если $x', x'' \in W$, то

$$\sup_{y \in G} |f(x'y) - f(x''y)| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$|g(x') - g(x'')| < \varepsilon \sup_y |f(y)|$$

и, значит, $g(x)$ есть непрерывная функция на G.

---

*) В самом деле, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(xa_n^{-1}a_n') = g(x)$, причем сходимость равномерна. Из непрерывности $f(x)$ и условия $a_n^{-1}a_n' \to e$ следует, что при каждом фиксированном x $\lim\limits_{n\to\infty} f(xa_n^{-1}a_n') = f(x)$. Поэтому $g(x) = f(x)$.

Рассмотрим теперь ряд Фурье функции $g(x)$. Если

$$f(x) \sim \sum_n \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}\{A_n \tilde{g}_n(x)\},$$

то (см. § 4 настоящей главы)

$$g(x) \sim \sum_n \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}\{B_n \tilde{g}_n(x)\}, \tag{6.7.4}$$

где $B_n = A_n A_n^*$, $\tilde{g}_n(x) = \{g_{ji}^{(n)}(x)\}_{i,j=1}^{r_n}$. Положим

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j g_{ji}^{(n)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r_n)$$

и выберем числа α_j так, чтобы функции $\varphi_i(x)$ были собственными функциями интегрального уравнения

$$\lambda_0 \varphi_i(x) = M_y\{g(xy^{-1})\varphi_i(y)\} \quad (\lambda_0 \neq 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, r_n). \tag{6.7.5}$$

Для определения чисел α_j и λ_0 подставим выражение для $\varphi_i(x)$ в уравнение (6.7.5). Получим:

$$M_y\left\{g(xy^{-1}) \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j g_{ji}^{(n)}(y)\right\} = M_y\left\{g(y) \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j g_{ji}(y^{-1}x)\right\} =$$

$$= M_y\left\{g(y) \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j \sum_{k=1}^{r_n} g_{jk}^{(n)}(y^{-1}) g_{ki}^{(n)}(x)\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j \sum_{k=1}^{r_n} g_{ki}^{(n)}(x) M_y\left\{g(y) \overline{g_{kj}^{(n)}(y)}\right\} = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k \sum_{j=1}^{r_n} b_{jk}^{(n)} g_{ji}^{(n)}(x) =$$

$$= \lambda_0 \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j g_{ji}^{(n)}(x).$$

Здесь $b_{jk}^{(n)}$ суть элементы матрицы B_n. Функции $g_{ji}^{(n)}(x)$ как элементы неприводимого представления ортогональны и, следовательно, линейно независимы. Сравнивая коэффициенты при одинаковых $g_{ij}^{(n)}(x)$, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{r_n} b_{jk}^{(n)} \alpha_k = \lambda_0 \alpha_j. \tag{6.7.6}$$

Так как B_n—ненулевая эрмитова матрица, то среди собственных значений матрицы B_n найдется число, отличное от нуля. Равенство (6.7.6) показывает, что λ_0 есть собственное значение матрицы B_n. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ и $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_{r_n})$—нетривиальное решение системы (6.7.6).

Функции $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j g_{ji}^{(n)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r_n)$ суть нетривиальные решения уравнения (6.7.5). Так как функция $g(x)$ почти-периодична и непрерывна, то она равномерно непрерывна, поэтому (см. доказательство непрерывности функции $g(x)$) функции $\varphi_i(x)$ суть непрерывные п.-п. функции.

Из ортогональности функций $g_{ij}^{(n)}(x)$ следует

$$M_x\{\varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ \dfrac{1}{r_n}\sum\limits_{j=1}^{r_n} |\alpha_j|^2, & i = j. \end{cases} \tag{6.7.7}$$

Далее имеем:

$$\varphi_i(xy) = \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j g_{ji}^{(n)}(xy) = \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_j \sum_{k=1}^{r_n} g_{jk}^{(n)}(x) g_{ki}^{(n)}(y) = \\ = \sum_{k=1}^{r_n} g_{ki}^{(n)}(y)\varphi_k(x).$$

Помножив обе части последнего равенства на $\varphi_j(x)$ и взяв среднее по x, мы получим в силу равенства (6.7.7)

$$M_x\{\varphi_i(xy)\overline{\varphi_j(x)}\} = \left[\frac{1}{r_n}\sum_{j=1}^{r_n} |\alpha_j|^2\right] g_{ji}^{(n)}(y).$$

Из последнего равенства, а также непрерывности и почти периодичности функций $\varphi_i(x)$ следует непрерывность функций $g_{ij}^{(n)}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r_n)$, что и требовалось доказать.

2. Если группа G абелева, то из следствия II из леммы Шура или из леммы 1.6.4 следует, что неприводимые унитарные представления одномерны. В этом случае ряд Фурье пишется в виде

$$f(x) \sim \sum_n a_n \chi_n(x), \quad a_n = M_x\{f(x)\overline{\chi_n(x)}\},$$

где $\chi_n(x)$—так называемые характеры группы G—удовлетворяют условиям:

1) $\chi_n(e) = 1$,
2) $|\chi_n(x)| = 1$,
3) $\chi_n(xy) = \chi_n(x)\ \chi_n(y)$.

Равенство Парсеваля пишется в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = M_x\{|f(x)|^2\}$.

Если абелева группа G—топологическая и п.-п. функция $f(x)$ непрерывна в этой топологии, то характеры $\chi_n(x)$ будут также непрерывными функциями.

3. Важным частным случаем коммутативной топологической группы является числовая прямая с обычной топологией. Другой важный случай коммутативной топологической группы мы получаем, рассматривая действительное r-мерное ($r > 1$) эвклидово пространство E_r с обычной топологией. Элементы в этой группе суть векторы $\boldsymbol{x}$. Композиция (умножение) определяется по правилу сложения векторов. Роль единичного элемента играет нулевой вектор. Непрерывными характерами в этой группе являются функции $\chi(x) = e^{i(\alpha\cdot x)}$, где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ есть постоянный из вектор E_r и $\boldsymbol{\alpha x} = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k x_k$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{x}$. Такпм образом, из результатов настоящей главы в частном случае следует теория п.-п. функций многих переменных.

§ 8. Компактные группы

1. Определение 1. *Последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots$, называется сходящейся к единице группы G, если существует такая последовательность окрестностей единицы группы G: $U_1, U_2, \ldots$, что*

1) $a_n \in U_n$,

2) *пересечение всех* U_n *равно* e.

Определение 2. *Последовательность элементов* $a_1, a_2, \ldots$ *называется сходящейся к элементу* $a \in G$, *если последовательность элементов* $a_n^{-1}a$ *сходится к единице группы.*

Определение 3. *Топологическая группа* G *называется компактной в случае, если из каждой бесконечной последовательности элементов группы* G *можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема 6.8.1. *Каждая непрерывная на компактной группе функция есть п.-п. функция на этой группе.*

Доказательство. Пусть G—компактная группа и $f(x)$—непрерывная на G функция. Пусть $a_1, a_2, \ldots$— произвольная последовательность элементов группы. Следует показать, что из последовательности функций $f(a_1 x)$, $f(a_2 x)$, $\ldots$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Так как G—компактная группа, то из последовательности $a_1, a_2, \ldots$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, можно принять, что сама последовательность a_n сходится. Обозначим через a предельный элемент для a_n. Мы покажем, что равномерно на G

$$\lim f(a_n x) = f(ax).$$

Тем самым теорема будет доказана.

Допустим противное. Тогда можно указать:

1) фиксированное число $\alpha > 0$,

2) бесконечную последовательность неограниченно возрастающих положительных целых чисел $n_1, n_2, \ldots$,

3) бесконечную последовательность элементов группы G: $x_1, x_2, \ldots$ так, что для $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|f(a_{n_k} x_k) - f(ax_k)| > \alpha. \qquad (6.8.1)$$

Так как G—компактная группа, то из бесконечной последовательности x_k можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что сама последовательность x_k сходится. Обозначим через x_0 предельный элемент для x_k. В силу непрерывности $f(x)$ в неравенстве (6.8.1) можно перейти к пределу, и мы получим:

$$\lim_{k\to\infty} |f(a_{n_k} x_k) - f(ax_k)| = |f(\lim a_{n_k} x_k) - f(a \lim x_k)| =$$
$$= |f(ax_0) - f(ax_0)| > \alpha > 0,$$

что невозможно. Теорема доказана.

2. Теория линейных представлений компактных групп была построена главным образом в связи с пятой проблемой Гильберта.

Эта проблема состоит в следующем.

Пусть топологическая группа G имеет окрестность единицы, гомеоморфную r-мерной сфере эвклидова пространства. Доказать (или опровергнуть), что в этом случае группа G есть группа Ли, т. е. в группу G можно ввести аналитические координаты.

Можно показать, что для решения пятой проблемы Гильберта достаточно установить, что для произвольных двух элементов группы G a и b можно указать линейное конечномерное представление $g(x)$, обладающее тем свойством, что

$$g(a) \neq g(b). \tag{6.8.2}$$

Если это условие выполняется, то говорят, что на группе G существует достаточное число линейных представлений. Для компактных групп существование достаточного числа линейных представлений легко следует из теоремы аппроксимации.

Теория п.-п. функций на группах была построена в надежде расширить класс групп, на которых существует достаточное число линейных представлений и тем самым решить для этих групп пятую проблему Гильберта. Однако в этом отношении теория п.-п. функций на группах себя не оправдала, что видно из следующей теоремы Фройденталя *).

*) H. Freudenthal [1].

Пусть G—связная) топологическая группа. Если на G существует достаточное число линейных унитарных представлений, то G есть* **прямое произведение** *компактной группы и конечномерной векторной группы.*

§ 9. Операторы обобщенного сдвига и связанные с ними обобщенные почти-периодические функции

1. В теории п.-п. функций (от действительной переменной), включая различные обобщения, изучается «разложение» функций, заданных на всей прямой по простейшим гармоникам, т. е. по функциям $e^{i\lambda x}$.

С другой стороны, в классическом математическом анализе наряду с разложениями по тригонометрическим функциям подробно изучаются разложения по другим ортогональным системам, например ряды по ортогональным многочленам, ряды Штурма-Лиувилля и пр.

В связи с этим естественно обобщать теорию п.-п. функций еще в одном направлении, а именно, изучать «разложение» функций на всей прямой или на полупрямой по ортогональным системам, отличным от тригонометрических функций, например по функциям Бесселя, по решениям уравнения Штурма-Лиувилля, заданного в бесконечном промежутке, и т. д. С формально алгебраической точки зрения такие обобщения вводятся очень естественно. Если обычные п.-п. функции связаны с групповой операцией, то обобщенные п.-п. функции связаны с континуальными гиперкомплексными системами.

В развитии этих вопросов чрезвычайно существенную роль сыграло понятие операторов обобщенного сдвига, впервые введенное в математику Дельзартом**).

Для простоты изложения мы ограничимся функциями, заданными на действительной прямой. Пусть $f(t)$—ограниченная измеримая функция, заданная для всех дейст-

---

*) Группа G называется связной, если топологическое пространство этой группы связно, т. е. если его нельзя разбить на сумму двух непустых непересекающихся областей (открытых множеств) A и B.

**) J. Delsartes [1], [2].

вительных t. Положим

$$M\{f(t)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt.$$

Мы будем предполагать в дальнейшем, что этот предел существует, и вообще будем предполагать, что средние значения существуют для всех рассматриваемых нами функций. От этого неудобного предположения легко избавиться, рассматривая обобщенный предел Банаха. Однако мы этого делать здесь не будем.

Пусть T^s (s—действительное число) есть семейство операторов, заданных на ограниченных измеримых функциях $f(t)$. Таким образом, каждой ограниченной измеримой функции $f(t)$ ставится в соответствие функция от двух переменных, которую мы обозначим через $T_t^s f(t)$.

Мы будем предполагать, что операторы T^s ограничены, т. е.

$$|T_t^s f(t)|\leqslant C\sup_t|f(t)|,$$

где C—константа. Определим семейство сопряженных операторов $\tilde{T}^s$ с помощью равенств

$$M_t\{T^s f(t)\overline{g(t)}\}=M_t\{f(t)\overline{\tilde{T}_t^s g(t)}\}.$$

Операторы T^s называются операторами обобщенного сдвига, если выполнены следующие условия:

1) $T^0=E$, где E — единичный оператор.

2) Линейность и однородность: $T_t^s\{af(t)+bg(t)\}=$ $=aT_t^s f(t)+bT_t^s g(t)$ для любых постоянных комплексных чисел a и b.

3) Ассоциативность: $T_s^r T_t^s=T_t^s T_t^r$.

4) Коммутативность и нормальность:

$$T_t^s T_t^r=T_t^r T_t^s;\quad T_t^s\tilde{T}_t^r=\tilde{T}_t^r T_t^s.$$

Можно рассматривать и некоммутативные операторы обобщенного сдвига, однако здесь мы ограничимся только коммутативным случаем.

2. С каждым семейством операторов обобщенного сдвига связан свой класс обобщенных п.-п. функций.

Определение. *Ограниченная функция $f(t)$ называется п.-п. функцией относительно семейства операторов обобщенного сдвига T^s, если семейство функций $\widetilde{T}_t^s f(t)$ (s — параметр) компактно на всей прямой.*

Рассмотрим оператор

$$A\varphi = M_s\{\widetilde{T}_t^s f(t)\,\varphi(s)\}.$$

Легко показать *), что если $f(t)$ — п.-п. функция в смысле предыдущего определения, то оператор A вполне непрерывен.

Из условий, наложенных на операторы T^s, и леммы Шура легко следует, что собственные функции оператора A суть линейные комбинации конечного числа собственных функций семейства операторов T^s. При этом функция $e(t)$ называется собственной функцией семейства T^s, если для всех s и t выполняется равенство

$$T_t^s e(t) = e(s)\,e(t).$$

Далее можно показать, что для данной функции $f(t)$ существует не более счетного числа собственных функций семейства T^s: $e_1(t)$, $e_2(t)$, ..., для которых

$$M\{f(t)\,\overline{e_n(t)}\} = A_n \neq 0.$$

Поэтому каждой обобщенной п.-п. функции $f(t)$ можно отнести ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_n A_n e_n(t).$$

Из общих теорем для вполне непрерывных операторов следует равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{|f(t)|^2\}.$$

3. Предположим, что операторы T^s обладают тем свойством, что из условий: 1) $f(t)$ — п.-п. функция относи-

*) Б. М. Левитан [3].

тельно семейства T^s, 2) по крайней мере в одной точке $t=t_0$ $f(t_0)\neq 0$ следует, что

$$M\{|f(t)|^2\}>0.$$

В этом случае функцию $f(t)$ можно аппроксимировать сколь угодно хорошо и равномерно на всей прямой конечными суммами вида

$$\sum_{n=1}^{N} b_n e_n(t). \tag{6.9.1}$$

Обратно, легко показать, что каждая функция $f(t)$, являющаяся равномерным пределом сумм вида (1), где $e_n(t)$ суть собственные функции для операторов T^s, есть п.-п. функция относительно семейства T^s.

Более подробно намеченные здесь вопросы освещены в работах В. А. Марченко*) и автора этой книги**).

*) В. А. Марченко [1], [2].
**) Б. М. Левитан [3], [4], [5].

ЧАСТЬ II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ВВЕДЕНИЕ

Теория аналитических п.-п. функций составляет важную часть общей теории п.-п. функций. Чтобы получить полное представление о современном состоянии теории п.-п. функций, необходимо познакомиться с основными предложениями теории аналитических п.-п. функций. Исходя из этого, я решил поместить в настоящей книге три главы, написанные на основе следующих работ.

Первая глава, посвященная общей теории аналитических п.-п. функций, написана на основе соответствующей главы из книги Безиковича *) и в значительной мере воспроизводит эту главу в некоторых случаях буквально.

Вторая глава посвящена изучению распределения значений аналитических п.-п. функций. Эта глава написана на основе совместной работы Иессена и Торнгафа **).

Третья глава посвящена теории гармонических п.-п. функций. Эта глава, за исключением последнего параграфа, написана на основе соответствующей главы из книги Фавара ***).

---

*) A. Besicovitch [1].
**) B. Jessen and H. Tornehave [1].
***) J. Favard [1].

ГЛАВА ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Некоторые сведения из теории аналитических функций

1. В этом параграфе собраны необходимые нам в дальнейшем теоремы об аналитических функциях.

Некоторые из этих теорем хорошо известны и поэтому мы ограничимся лишь их формулировками, не останавливаясь на доказательствах. Менее известные теоремы будут доказаны.

Теорема 1.1.1 *) (теорема Монтеля). *Пусть* $\{f_n(z)\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — *последовательность аналитических и равномерно ограниченных в области* (D) *функций.*

Существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, *равномерно сходящаяся в каждой подобласти области* (D).

Теорема 1.1.2 **). *Если аналитическая функция* $f(z)$ *непрерывна с одной стороны незамкнутой дуги Жордана и имеет на ней предельные значения, равные нулю, то* $f(z)\equiv 0$.

Теорема 1.1.3 ***) (теорема Руше). *Если функции* $f(z)$ *и* $\varphi(z)$ *регулярны внутри и на контуре* C *и удовле-*

---

*) Доказательство см., например, Титчмарш, Теория функций (1951), стр. 196 или А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций (1950), стр. 293.

**) См. И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитических функций, ГТТИ, 1950, стр. 284.

***) См. Титчмарш, цит. соч., стр. 137.

творяют на C условию: $|\varphi(z)| < |f(z)|$, *то внутри C $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ имеют одинаковое число нулей.*

Теорема 1.1.4*) (лемма Шварца). *Пусть функция $w=\varphi(z)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Регулярна при* $|z|<1$,
2) $|\varphi(z)|\leqslant 1$ *при* $|z|\leqslant 1$,
3) $\varphi(0)=0$.

При этих условиях $|w|<|z|$ *внутри того же круга.*

Следствие. *Если функция* $w'=\psi(z')$ *удовлетворяет условиям:*

1) *регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re} z'>0$,
2) *для* $\operatorname{Re} z'>0$ $\operatorname{Re} w'>0$,
3) *для* $z'=1$ $w'=1$,

то имеет место неравенство

$$\left|\frac{w'-1}{w'+1}\right| \leqslant \left|\frac{z'-1}{z'+1}\right|. \tag{1.1.1}$$

В самом деле, пусть $z=\frac{z'-1}{z'+1}$. При этом полуплоскость $\operatorname{Re} z'>0$ отобразится на круг $|z|=1$. Далее, положим $w=\varphi(z)=\frac{w'-1}{w'+1}$. Функция w, как легко видеть, удовлетворяет всем условиям леммы Шварца. Поэтому $|w|\leqslant|z|$ для $|z|<1$, что эквивалентно неравенству (1.1.1).

2. В теории аналитических п.-п. функций основной областью изменения аргумента является полоса. В связи с этим мы условимся раз и навсегда в определенной терминологии.

Через (a, b) мы будем обозначать открытый интервал $a<x<b$.

Через $[a, b]$ — замкнутый интервал $a\leqslant x\leqslant b$. Будут также встречаться интервалы вида $(a, b]$, $[a, b)$ и т. д., смысл которых не нуждается в пояснении.

Пусть $s=\sigma+it$ — комплексная переменная. Множество всех s, для которых $\sigma=\sigma_0$, мы будем называть прямой линией, вертикальной прямой линией или просто линией $\sigma=\sigma_0$.

*) См. Титчмарш, цит. соч., стр. 194.

Множество всех s, для которых σ принадлежит интервалу (a, b), будем называть полосой (a, b). Мы будем также иметь дело с полосами $[a, b]$ и т. д.

3. Дальнейшие теоремы относятся главным образом к тому случаю, когда областью изменения комплексного аргумента является полоса.

Теорема 1.1.5 (теорема Фрагмена-Линделефа для полосы). *Пусть $\varphi(s)$ регулярна в полосе (a, b) и ограничена в полосе $[a, b]$. Если на граничных прямых этой полосы $\sigma = a$, $\sigma = b$ имеет место неравенство*

$$|\varphi(s)| \leqslant K,$$

то то же самое неравенство имеет место во всех внутренних точках рассматриваемой полосы.

Доказательство. Пусть $c > 0$ и $T > 0$ выбраны произвольно. Для больших T функция $\varphi(s)\, e^{cs^2}$ на горизонтальных сторонах прямоугольника $\sigma = a$, $\sigma = b$, $t = -T$, $t = T$ мала по абсолютной величине. Поэтому при фиксированном c можно подобрать столь большое T, что максимум $|\varphi(s)\, e^{cs^2}|$ на сторонах $t = \pm T$ будет меньше, чем $K \max |e^{cs^2}|$, причем последний максимум берется на сторонах $\sigma = a$, $\sigma = b$, т. е.

$$\max |e^{cs^2}| = \max (e^{ca^2}, e^{cb^2}).$$

Так как модуль аналитической функции своего максимума достигает на границе области, то во всем прямоугольнике справедливо неравенство

$$|\varphi(s)\, e^{cs^2}| \leqslant K \max (e^{ca^2}, e^{cb^2}).$$

Последнее неравенство в силу произвольности числа T имеет место во всей полосе $[a, b]$. Полагая $c \to 0$, мы получим утверждение теоремы.

Теорема 1.1.6. *Если последовательность многочленов*

$$P_k(s) = \sum_{n=1}^{N_k} a_{n,k} e^{\lambda_{n,k} s},$$

($\lambda_{n,k}$ действительны, $a_{n,k}$ комплексны) сходится равномерно на двух прямых $\sigma = \alpha$, $\sigma = \beta$, то эта последовательность сходится равномерно в полосе $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. По условию найдется такое k_0, что для k', $k'' > k_0$ на прямых $\sigma = \alpha$, $\sigma = \beta$ выполняется неравенство

$$|P_{k'}(s) - P_{k''}(s)| < \varepsilon. \tag{1.1.2}$$

Так как функция $P_{k'}(s) - P_{k''}(s)$ в полосе $[\alpha, \beta]$ ограничена, то в силу теоремы Фрагмена-Линделефа неравенство (1.1.2) имеет место во всех точках полосы $[\alpha, \beta]$.

4. Пусть $\varphi(s)$ — аналитическая функция в некоторой полосе (α, β). Пусть σ — прямая, расположенная внутри этой полосы. Обозначим через $L(\sigma)$ верхнюю грань функции $\varphi(s)$ на прямой σ:

$$L(\sigma) = \sup_{-\infty<t<\infty} |\varphi(\sigma + it)|.$$

В дальнейшем функция $L(\sigma)$ играет фундаментальную роль.

Теорема 1.1.7 (теорема Детша о трех прямых). *Пусть $\varphi(s)$ регулярна и ограничена в полосе $[\alpha, \beta]$. Для каждого σ из этой полосы имеет место неравенство*

$$L(\sigma) \leqslant L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} L(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}. \tag{1.1.3}$$

Иными словами, функция $\ln L(\sigma)$ выпукла *).

Доказательство. Выберем действительное число a так, чтобы выполнялось равенство

$$L(\sigma_1)\, e^{a\sigma_1} = L(\sigma_2)\, e^{a\sigma_2}. \tag{1.1.4}$$

*) Функция $f(x)$ называется выпуклой, если для любых двух точек P_1 и P_2 кривой $y = f(x)$ точки дуги P_1P_2 лежат ниже или на хорде P_1P_2. Если $f(x)$ — выпуклая функция, то для любой системы положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которой $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, и любой системы точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) \leqslant a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \ldots + a_nf(x_n).$$

Для $n = 2$ это неравенство следует из определения выпуклости. В общем случае пользуемся индукцией. Более подробно о выпуклых функциях см. § 4 следующей главы.

Из этого равенства непосредственно следует, что

$$e^a = L(\sigma_1)^{-\frac{1}{\sigma_1-\sigma_2}} L(\sigma_2)^{\frac{1}{\sigma_1-\sigma_2}}. \qquad (1.1.5)$$

Применяя теорему Фрагмена-Линделефа к функции $\varphi(s)e^{sa}$ $(s=\sigma+it,\ \sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2)$, мы получим в силу (1.1.4)

$$L(\sigma)e^{\sigma a}\leqslant L(\sigma_1)e^{a\sigma_1}.$$

Отсюда и из (1.1.5) следует

$$L(\sigma)\leqslant L(\sigma_1)e^{a(\sigma_1-\sigma)} = L(\sigma_1)L(\sigma_1)^{-\frac{\sigma_1-\sigma}{\sigma_1-\sigma_2}}L(\sigma_2)^{\frac{\sigma_1-\sigma}{\sigma_1-\sigma_2}} =$$

$$= L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}L(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.1.8. *Пусть многочлен* $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n s}$ *имеет исключительно отрицательные показатели* λ_n. *Тогда функция* $L(\sigma)$ *в интервале* $(-\infty,\infty)$ *строго убывает.*

Доказательство. В рассматриваемом случае, как легко видеть, $L(+\infty)=0$. Поэтому $\ln L(+\infty)=-\infty$. В силу предыдущей теоремы функция $\ln L(\sigma)$ выпукла. Из этих двух фактов следует, что $\ln L(\sigma)$ и, следовательно, $L(\sigma)$ строго убывают.

Следующая теорема играет фундаментальную роль в теории аналитических п.-п. функций.

Теорема 1.1.9. *Пусть функция* $\varphi(s)$ *регулярна в некоторой полосе* $[\alpha',\beta']$. *Каковы бы ни были числа* $\alpha,\sigma_0,\beta,K,\varepsilon$ $(\alpha'<\alpha<\sigma_0<\beta<\beta',\ K>\varepsilon>0)$, *можно указать такое положительное число* $\delta=\delta(\alpha',\alpha,\sigma_0,\beta,\beta',K,\varepsilon)$, *что если функция* $\varphi(s)$ *удовлетворяет условиям:*

1) $|\varphi(s)|\leqslant K$ *в полосе* $[\alpha',\beta']$ *и*

2) $L(\sigma_0)\leqslant\delta$,

то $|\varphi(s)|<\varepsilon$ *в полосе* $[\alpha,\beta]$.

Доказательство. Определим число δ так, чтобы точка $(\alpha,\ln\varepsilon)$ лежала выше прямой линии, соединяющей точки $(\alpha',\ln K)$ и $(\sigma_0,\ln\delta)$, а точка $(\beta,\ln\varepsilon)$ лежала выше прямой, соединяющей точки $(\sigma_0,\ln\delta)$ и $(\beta',\ln K)$ (см. рис. 2).

Если оба эти условия выполнены, то из выпуклости функции $\ln L(\sigma)$ следует, что $\ln L(\alpha) < \ln \varepsilon$, $\ln L(\beta) < \ln \varepsilon$, т. е. $L(\alpha) < \varepsilon$, $L(\beta) < \varepsilon$. Поэтому из теоремы Фрагмена-Линделефа следует, что $|\varphi(s)| < \varepsilon$ во всей полосе $[\alpha, \beta]$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.1.10. *Предположим, что функция $\varphi(s)$ удовлетворяет следующим условиям:*

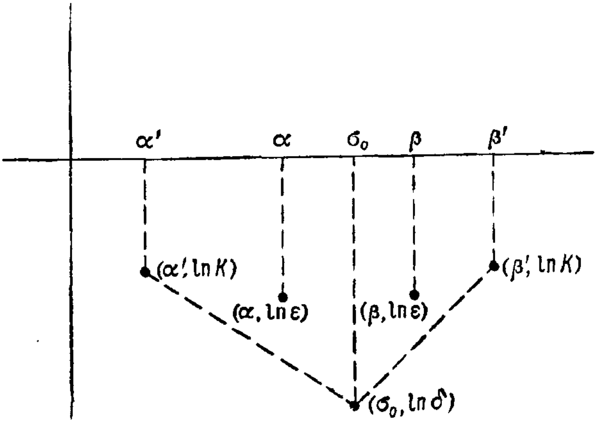

Рис. 2.

1) *$\varphi(s)$ регулярна и ограничена в полосе (α, β),*

2) *на линии σ_0 $(\alpha < \sigma_0 < \beta)$ существует последовательность точек $(\sigma_0 + it_n)$, для которой $\varphi(\sigma_0 + it_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и*

3) *существуют такие положительные числа d и l, что на каждом отрезке длины l прямой $\sigma = \sigma_0$ существует точка $\sigma_0 + it$, в которой выполняется неравенство*

$$|\varphi(\sigma_0 + it)| > d.$$

При этих предположениях функция $\varphi(s)$ имеет нули в каждой полосе $(\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность регулярных в полосе (α, β) функций $\varphi_n(s) = \varphi(s + it_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В каждом прямоугольнике $\alpha < \sigma < \beta$, $-l < t < l$ эта последовательность функций ограничена.

Пусть $\delta = \min(\sigma_0 - \alpha,\ \beta - \sigma_0)$. По теореме Монтеля существует подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}(s)\}$, сходящаяся равномерно в прямоугольнике $c: \sigma_0 - \delta \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 + \delta$; $-\frac{1}{2} l \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} l$ к пределу, который мы обозначим через $\psi(s)$. В силу условия 2) $\psi(\sigma_0) = 0$. Далее, в силу условия 3) $\psi(s) \not\equiv 0$. Так как нули аналитической функции изолированы, то существует столь малое положительное число $r < \delta$, что $\psi(s) \neq 0$ на окружности $|s - \sigma_0| = r$. Так как $\varphi_{n_k}(s)$ сходятся равномерно к $\psi(s)$ и на окружности $|s - \sigma_0| = r$ $\inf |\psi(s)| > 0$, то существует такое число k_0, что для всех $k > k_0$ на окружности $|s - \sigma_0| = r$ выполняется неравенство

$$|\varphi_{n_k}(s) - \psi(s)| < |\psi(s)|.$$

Поэтому из теоремы Руше следует, что функция $\varphi_{n_k}(s) = \psi(s) + \{\varphi_{n_k}(s) - \psi(s)\}$ имеет внутри круга $|s - \sigma_0| = r$ то же самое число нулей, что и функция $\psi(s)$, т. е. не менее одного нуля. Так как $\varphi_{n_k}(s) = \varphi(s + it_{n_k})$, то, следовательно, функция $\varphi(s + it_{n_k})$ имеет по крайней мере один нуль, если s находится внутри круга $|s - \sigma_0| = r$. Так как $r < \delta$, то теорема доказана.

Теорема 1.1.11. *Пусть заданы числа $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, $k > 0$, $c > 0$. Предположим, что функция $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > \sigma_1$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в полуплоскости $\sigma > \sigma_1$ $|f(s)| > ce^{k\sigma_1}$,*
2) *на прямой $\sigma = \sigma_2$ $|f(s)| \leqslant ce^{k\sigma_2}$.*

При этих предположениях $f(s)$ удовлетворяет во всей полуплоскости $\sigma > \sigma_2$ неравенству

$$|f(s)| < ce^{k\sigma}.$$

Доказательство. С помощью простой замены переменных можно общий случай свести к следующему: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $c = 1$. При этом

$$|f(s)| > 1, \qquad \text{если} \quad \sigma > 0, \tag{1.1.6}$$

$$|f(s)| < e^{k}, \qquad \text{если} \quad \sigma = 1 \tag{1.1.7}$$

и следует показать, что

$$|f(s)| \leqslant e^{k\sigma}, \qquad \text{если} \quad \sigma > 1. \tag{1.1.8}$$

Последнее неравенство достаточно доказать только для действительных s. В самом деле, обозначим через t произвольное действительное число и рассмотрим функцию $f_t(s)=f(s+it)$, где s — действительное число. Функция $f_t(s)$, очевидно, удовлетворяет неравенствам (1.1.6) и (1.1.7) даже если s комплексно. Поэтому если неравенство (1.1.8) уже доказано для действительных s, то мы получим:

$$|f_t(s)|=|f(s+it)|<e^{ks}, \quad \text{если} \quad s>1,$$

что в силу произвольности числа t эквивалентно неравенству (1.1.8).

Возьмем произвольную ветвь функции $\ln f(s)$ и рассмотрим функцию $F(s)=\frac{1}{k}\ln f(s)$. В силу неравенства (1.1.6) функция $F(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma>0$. Далее, в силу неравенств (1.1.6) и (1.1.7)

$$\operatorname{Re}\{F(s)\}>0 \qquad \text{для } \sigma>0, \tag{1.1.9}$$

$$\operatorname{Re}\{F(s)\}\leqslant 1 \qquad \text{для } \sigma=1. \tag{1.1.10}$$

Пусть $F(1)=u_1+iv_1$. Из (1.1.9) и (1.1.10) следует $0<u_1\leqslant 1$. Применим теперь к функции

$$w=\varphi(s)=\frac{F(s)-iv_1}{u_1}$$

следствие из леммы Шварца. Мы получим, полагая $s=\sigma>1$)

$$\left|\frac{\varphi(\sigma)-1}{\varphi(\sigma)+1}\right|\leqslant\frac{\sigma-1}{\sigma+1}.$$

Отсюда следует, что *)

$$\operatorname{Re}\{\varphi(\sigma)\}\leqslant\sigma. \tag{1.1.11}$$

---

*) В самом деле, $|\varphi(\sigma)-1|\geqslant|\varphi(\sigma)|-1$, $|\varphi(\sigma)+1|\leqslant|\varphi(\sigma)|+1$. Поэтому $\frac{|\varphi(\sigma)|-1}{|\varphi(\sigma)|+1}\leqslant\frac{|\varphi(\sigma)-1|}{|\varphi(\sigma)+1|}\leqslant\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$. Следовательно,

$$(|\varphi(\sigma)|-1)(\sigma+1)\leqslant(\varphi(\sigma)+1)(\sigma-1).$$

Отсюда $\sigma|\varphi(\sigma)|+|\varphi(\sigma)|-\sigma-1\leqslant\sigma|\varphi(\sigma)|-|\varphi(\sigma)|+\sigma-1$ или $2|\varphi(\sigma)|\leqslant 2\sigma$. Отсюда следует (1.1.11).

С другой стороны,

$$\operatorname{Re}\{\varphi(\sigma)\} = \frac{1}{ku_1}\ln|f(\sigma)| \geqslant \frac{1}{k}\ln f(\sigma). \qquad (1.1.12)$$

Из (1.1.11) и (1.1.12) следует $|f(\sigma)| \leqslant e^{k\sigma}$, что и требовалось доказать.

5. На аналитические п.-п. функции распространяется известная теорема Пикара. При этом фундаментальную роль играет следующая теорема Иверсена *), которую мы приведем без доказательства.

Теорема Иверсена. *Пусть функция $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > \sigma_1$ и ограничена на прямой $\sigma = \sigma_1$. Обозначим через E множество значений функции $f(s)$ на прямой $\sigma = \sigma_1$ и через E' — производное множество для множества E. Если в каждой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_2 > \sigma_1$ множество значений функции $w = f(s)$ всюду плотно в w-плоскости, то функция $f(s)$ принимает в полуплоскости $\sigma > \sigma_1$ все значения, не принадлежащие множеству $E + E'$, за исключением, быть может, одного.*

§ 2. Определение аналитических п.-п. функций и их элементарные свойства

1. Предположим, что функция $f(s)$ регулярна в полосе (α, β). Числа α и β могут быть как конечными, так и бесконечными.

Определение 1.2.1. *Действительное число τ называется ε-почти-периодом функции $f(s)$, если во всех точках полосы (α, β) выполняется неравенство*

$$|f(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon.$$

Обозначим множество всех ε-почти-периодов функции $f(s)$ (в рассматриваемой полосе) через $E\{\varepsilon;\ f(s)\}$.

Определение 1.2.2. *Если для каждого $\varepsilon > 0$ множество $E\{\varepsilon;\ f(s)\}$ относительно плотно, то функция $f(s)$ называется почти-периодической функцией в полосе (α, β).*

---

*) F. Iversen [1].

Аналогично можно определить почти-периодичность в полосе $[\alpha, \beta]$ *). Очевидно, что если функция $f(s)$ почти-периодична в некоторой полосе, то на каждой прямой этой полосы $f(s)$ — равномерная п.-п. функция от действительной переменной t $(s=\sigma+it)$.

Теорема 1.2.1. *Пусть $f(s)$ — п.-п. функция в полосе $[\alpha, \beta]$. Тогда $f(s)$ ограничена в этой полосе.*

Доказательство. Рассмотрим полосу $[\alpha, \beta]$. В каждой конечной части полосы $[\alpha, \beta]$ $f(s)$ ограничена. Пользуясь почти-периодичностью $f(s)$, можно показать, так же как при доказательстве соответствующей теоремы для равномерных п.-п. функций, что $f(s)$ ограничена во всей полосе $[\alpha, \beta]$.

Теорема 1.2.2. *Пусть $f(s)$ регулярна и ограничена в полосе* $[\alpha, \beta]$ (например, $f(s)$ есть п.-п. функция в этой полосе). *Тогда $f(s)$ и все ее производные равномерно непрерывны в любой полосе* $[\alpha_1, \beta_1]$ $\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta$.

Доказательство. Обозначим через M верхнюю грань $|f(s)|$ в полосе $[\alpha, \beta]$ и пусть $\delta=\min(\alpha_1-\alpha, \beta-\beta_1)$. По теореме Коши $|f^{(n)}(s)|\leqslant\frac{n!M}{\delta^n}$ для всех точек полосы $[\alpha_1, \beta_1]$. Поэтому если s_1 и s_2 — любые две точки полосы $[\alpha_1, \beta_1]$, то

$$|f^{(n-1)}(s_2)-f^{(n-1)}(s_1)|=\left|\int_{s_1}^{s_2} f^{(n)}(z)\,dz\right|\leqslant\frac{n!M}{\delta^n}|s_2-s_1|.$$

Из последнего неравенства следует, что функция $f(s)$ и все ее производные в каждой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ равномерно непрерывны, что и требовалось доказать.

2. Следующая теорема позволит нам перенести ряд важных теорем из теории п.-п. функций от действительной переменной на аналитические п.-п. функции.

Теорема 1.2.3. *Пусть $f(s)$ регулярна в полосе* (α, β) *и ограничена в любой полосе* $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta$. *Предположим, что на прямой* $\sigma=\sigma_0$ $(\alpha<\sigma_0<\beta)$ *$f(s)$ есть*

---

*) При этом следует требовать, чтобы $f(s)$ была регулярна в полосе (α, β) и непрерывна в полосе $[\alpha, \beta]$.

равномерная п.-п. функция. Тогда $f(s)$ — п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \beta$, причем числа α_2 и β_2 выбраны так, что прямая $\sigma = \sigma_0$ лежит внутри полосы $[\alpha_2, \beta_2]$. Обозначим через M верхнюю грань $|f(s)|$ в полосе $[\alpha_2, \beta_2]$. Пусть $\tau \in E\{\delta; f(\sigma_0 + it)\}$, причем число $\delta > 0$ мы выберем позже. Рассмотрим аналитическую функцию $\varphi(s) = f(s + i\tau) - f(s)$. Эта функция удовлетворяет следующим условиям:

1) в полосе $[\alpha_2, \beta_2]$ $|\varphi(s)| < 2M$,

2) на прямой $\sigma = \sigma_0$ $|\varphi(s)| < \delta$.

Из теоремы 1.1.10 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если выполнены условия 1) и 2), то в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ имеет место неравенство

$$|\varphi(s)| = |f(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon.$$

Так как ε может быть выбрано произвольно и множество $E\{\delta; f(s)\}$ относительно плотно, то теорема доказана.

Следствие. *Пусть $f(s)$ регулярна в полосе (α_1, β_1). Существует максимальная полоса почти-периодичности функции $f(s)$. Эта полоса является одновременно максимальной полосой ограниченности функции $f(s)$.*

Заметим, что теорема 1.2.3 несправедлива, если отбросить требование ограниченности функции $f(s)$ в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. В самом деле, Г. Бор *) построил пример аналитической функции, которая на всех вертикальных линиях полосы, исключая, быть может, одну, почти-периодична и вместе с тем не является п.-п. функцией во всей полосе, так как неограничена в этой полосе.

Теорема 1.2.4 **). *Пусть $f(s)$ и $g(s)$ — п.-п. функции в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Тогда $f(s) + g(s)$ и $f(s)\,g(s)$ суть также п.-п. функции в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$.*

Доказательство. Выберем в полосе (α, β) произвольную прямую $\sigma = \sigma_0$. В полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ функции $f(s) +$

*) H. Bohr [4].

**) Теоремы 1.2.4, 1.2.5 и 1.2.7 могут быть доказаны также и для полосы $[\alpha, \beta]$ с помощью теоремы Фрагмена-Линделефа (см. часть II, теорему 1.3.6).

$+g(s)$ и $f(s)\,g(s)$ ограничены, а на прямой $\sigma=\sigma_0$ суть равномерные п.-п. функции, как сумма и произведение равномерных п.-п. функций от действительной переменной. Поэтому настоящая теорема следует непосредственно из предыдущей.

Следствие. *Многочлен* $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n s}$ (λ_n — действительные числа) *является п.-п. функцией в полосе* $(-\infty, \infty)$.

Теорема 1.2.5. *Пусть последовательность аналитических п.-п. в любой полосе* $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$ *функций* $\{f_n(s)\}$ *сходится равномерно к функции* $f(s)$. *Тогда* $f(s)$ *есть также п.-п. функция в любой полосе* $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$.

Доказательство. Эта теорема может быть доказана буквально так же, как и в случае п.-п. функций от действительной переменной. Можно также рассуждать иначе. Выбрать в полосе (α, β) произвольную прямую $\sigma=\sigma_0$. На этой прямой $f(s)$ есть равномерная п.-п. функция, а в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$ $f(s)$ — ограниченная аналитическая функция. Поэтому на основании теоремы 1.2.3 $f(s)$ – п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$.

Следствие. *Сумма равномерно сходящегося в любой полосе* $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$ *ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$ (λ_n действительны) *есть п.-п. функция в этой полосе.*

Теорема 1.2.6. *Производная функции п.-п. в любой полосе* $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$ — *также п.-п. функция в той же полосе.*

Доказательство. Ранее было показано (см. теорему 1.2.2), что $f'(s)$ ограничена и равномерно непрерывна в любой внутренней полосе. Пусть $\sigma=\sigma_0$ — любая прямая внутри полосы (α, β). На основании п. 3 § 1 гл. I $f'(\sigma_0+it)$ - равномерная п.-п. функция действительной переменной t. Поэтому из теоремы 1.2.3 следует, что $f'(s)$ — п.-п. функция в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$.

Теорема 1.2.7. *Если неопределенный интеграл* $F(s)$ *п.-п. в полосе* $[\alpha_1, \beta_1]$ *функции* $f(s)$ *ограничен в этой полосе, то он является в этой же полосе п.-п. функцией.*

Доказательство. Пусть σ_0 — произвольное действительное число, удовлетворяющее неравенству $\alpha<\sigma_0<\beta$. Так как любые два неопределенных интеграла функции $f(s)$ отличаются на константу, то можно ограничиться изучением интеграла

$$F(s)=\int_{\sigma_0}^{s} f(z)\,dz.$$

Пусть $s=\sigma+it$. В качестве пути интегрирования возьмем ломаную линию: $(\sigma_0,\ \sigma_0+it,\ \sigma+it=s)$. По условию $F(s)$ в любой полосе $[\alpha_1,\beta_1]$ — ограниченная функция. На прямой $\sigma=\sigma_0$ $F(s)$ — равномерная п.-п. функция от действительной переменной t (см. часть I, теорему 1.2.1). Поэтому из теоремы 1.2.3 следует, что $F(s)$ — п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1,\beta_1]$, а это и требовалось доказать.

Теорема 1.2.8. *Пусть $f(s)$ есть п.-п. функция в полосе (α,β). Обозначим через G множество всех значений функции $f(s)$ на прямой σ_0 $(\alpha<\sigma_0<\beta)$. Каково бы ни было $\delta>0$, функция $f(s)$ принимает в полосе $(\sigma_0-\delta,\ \sigma_0+\delta)$ все значения из производного множества G'.*

Доказательство. Эта теорема следует почти непосредственно из теоремы 1.1.9. В самом деле, пусть $w_0\in G'$. Могут представиться два случая: либо $f(s)-w_0$ обращается в нуль на σ_0, либо нет. Очевидно, что следует рассмотреть только второй случай. Тогда из определения множества G' следует существование такой бесконечной последовательности точек σ_0+it_n $(n=1,2,\ldots)$, что $f(\sigma_0+it_n)-w_0\to 0$ при $n\to\infty$. Возьмем произвольную точку σ_0+it' и пусть

$$|f(\sigma_0+it')-w_0|=2d>0.$$

Пусть в каждом интервале длины l_d имеется по крайней мере один d-почти-период функции $f(s)$. Из предыдущего неравенства легко следует, что в каждом интервале длины l_d линии σ_0 имеются точки, в которых выполняется неравенство

$$|f(\sigma_0+it)-w_0|>d>0.$$

Таким образом, выполняется условие 3) теоремы 1.1.9. Остальные два условия этой теоремы также имеют место. Следовательно, все доказано.

Следствие 1. *Если $f(s)$ — п.-п. функция в полосе (α, β) и не обращается в этой полосе в нуль, то* $\inf|f(s)|$ *в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ больше нуля* $(\alpha_1 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$.

Следствие 2. *Если $f(s)$ — п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, и $f(s) \neq 0$ в полосе (α, β), то $g(s) = \frac{1}{f(s)}$ есть п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$.*

Докажем следствие 2. Пусть $\alpha < \alpha_1 < \sigma_0 < \beta_1 < \beta$. В силу следствия 1 $g(s)$ ограничена в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$. На прямой $\sigma = \sigma_0$ $g(s)$ есть п.-п. функция (см. часть I, § 1 гл. I). Поэтому из теоремы 1.1.3 следует почти-периодичность функции $g(s)$ в каждой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, что и требовалось доказать.

§ 3. Ряды Дирихле

1. Каждой аналитической п.-п. функции соответствует бесконечный ряд, который называется рядом Дирихле. Этот ряд аналогичен ряду Фурье для равномерных п.-п. функций от действительной переменной.

Теорема 1.3.1. *Пусть $f(s) = f(\sigma + it)$ — п.-п. функция в полосе (α, β). Рассмотрим при фиксированном σ $f(\sigma + it)$ как функцию от t. Ряд Фурье функции $f(\sigma + it)$ имеет вид*

$$f(\sigma + it) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n \sigma} e^{i\Lambda_n t}, \tag{1.3.1}$$

причем числа A_n и Λ_n от t и σ не зависят.

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном σ функцию $f(\sigma + it)$. Показатели Фурье этой функции суть те λ, для которых

$$M_t\{f(\sigma + it)\, e^{-i\lambda t}\} \neq 0. \tag{1.3.2}$$

Покажем, что эти значения λ от σ не зависят. Пусть $\sigma_1 < \sigma_2$, причем оба эти числа принадлежат интервалу

(α, β). По теореме Коши для любого $T>0$ имеем:

$$\frac{1}{T}\left\{\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+iT}+\int\limits_{\sigma_1+iT}^{\sigma_2+iT}+\int\limits_{\sigma_2+iT}^{\sigma_2}+\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1}\right\} f(s)\, e^{-\lambda s}\, ds=0.$$

Пусть $T\rightarrow\infty$. Так как $f(s)$ — ограниченная функция, то второй и четвертый интегралы (деленные на T) стремятся к нулю.

Следовательно, мы получим:

$$\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+iT} f(s)\, e^{-\lambda s}\, ds+\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{\sigma_2+iT}^{\sigma_2} f(s)\, e^{-\lambda s}\, ds=0,$$

или

$$e^{-\lambda\sigma_1}\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\sigma_1+it)\, e^{-i\lambda t}\, dt=$$
$$=e^{-\lambda\sigma_2}\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\sigma_2+it)\, e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$e^{-\lambda\sigma_1} M_t\{f(\sigma_1+it)\, e^{-i\lambda t}\}=e^{-\lambda\sigma_2} M_t\{f(\sigma_2+it)\, e^{-i\lambda t}\}. \quad (1.3.3)$$

Из (1.3.3) следует, что если неравенство (1.3.2) имеет место для одного σ из (α, β), то оно также справедливо для всех других σ. Итак, показатели Фурье одни и те же для всех функций $f(\sigma+it)$. Обозначим их через Λ_1, $\Lambda_2, \ldots$ Напишем теперь ряд Фурье функции $f(\sigma+it)$ в виде

$$f(\sigma+it)\sim\sum_n A_n(\sigma)\, e^{i\Lambda_n t}, \quad A_n(\sigma)=M_t\{f(\sigma+it)\, e^{-i\Lambda_n t}\}.$$

В силу равенства (1.3.3) $A_n(\sigma)\, e^{-\Lambda_n\sigma}=\text{const}=A_n$. Поэтому окончательно

$$f(s)\sim\sum_n A_n e^{\Lambda_n\sigma} e^{i\Lambda_n t}=\sum_n A_n e^{\Lambda_n s}.$$

Ряд (1.3.1) называется рядом Дирихле функции $f(s)$ в полосе (α, β). Числа A_n называются **коэффициентами**

Дирихле, а числа Λ_n — показателями Дирихле п.-п. функции $f(s)$.

Из определения ряда Дирихле непосредственно следует

Теорема 1.3.2. *Пусть* $f(s)$ *есть сумма ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\Lambda_n s}$, *равномерно сходящегося в некоторой полосе. Тогда* $f(s)$ *имеет своим рядом Дирихле заданный ряд.*

Теорема 1.3.3 (теорема единственности). *Если две аналитические п.-п. в одной и той же полосе функции имеют одинаковые ряды Дирихле, то они тождественны в этой полосе.*

Доказательство. Выберем в полосе любую прямую $\sigma=\sigma_0$ и рассмотрим обе функции на этой прямой как функции действительной переменной t. В силу теоремы единственности для функций от действительной переменной на прямой $\sigma=\sigma_0$ функции совпадают. Будучи аналитическими функциями, они совпадают во всей полосе.

Теорема 1.3.4 (равенство Парсеваля). *Пусть* $f(s)$ — *п.-п. в полосе* (α, β) *функция с рядом Дирихле* $\sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$. *Для каждого* σ *из полосы* (α, β) *имеет место равенство Парсеваля*

$$M_t\{|f(\sigma+it)|^2\}=\sum_n |A_n|^2 e^{2\Lambda_n \sigma}.$$

Доказательство следует непосредственно из того обстоятельства, что на прямой σ $f(s)=f(\sigma+it)$ есть равномерная п.-п. функция действительной переменной t с рядом Фурье

$$f(\sigma+it)\sim\sum_n A_n e^{\Lambda_n \sigma} e^{i\Lambda_n t}.$$

Теорема 1.3.5 (теорема аппроксимации). *Пусть* $f(s)$ — *п.-п. в полосе* (α, β) *функция. Последовательность сумм Бохнера-Фейера для ряда Дирихле функции* $f(s)$ *сходится равномерно к* $f(s)$ *в любой внутренней полосе.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы об одновременной аппроксимации равностепенно почти-периодических семейств функций (см. часть I, п. 2 § 4 гл. III).

Можно, впрочем, дать и другое доказательство. Пусть $f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — п.-п. в полосе (α, β) функция. Пусть $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. На прямых α_1 и β_1 суммы Бохнера-Фейера для функций $f(\alpha_1 + it)$, $f(\beta_1 + it)$ сходятся равномерно. Значит, в силу теоремы 1.1.6 они сходятся равномерно в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, что и требовалось доказать.

2. Мы видели, что для почти-периодичности функции $f(s)$ в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$ достаточно, чтобы она была ограничена в этой полосе и была почти-периодична хотя бы на одной прямой внутри этой полосы. Можно указать другой интересный признак почти-периодичности функции в полосе, в условия которого ограниченность функции в полосе не входит. Вначале докажем лемму.

Лемма 1.3.1. *Предположим, что ряд* $\sum_n A_n e^{\Lambda_n \sigma} e^{i\Lambda_n t}$ *для* $\sigma = \alpha$ *и* $\sigma = \beta$ *является рядом Фурье равномерных п.-п. функций* $f_\alpha(t)$ *и* $f_\beta(t)$. *Тогда существует п.-п. в полосе* $[\alpha, \beta]$ *функция* $f(s)$, *удовлетворяющая следующим условиям*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(s) \text{ в полосе } [\alpha, \beta] \text{ непрерывна}, \\ 2)\ f_\alpha(t) = f(\alpha + it); \quad f_\beta(t) = f(\beta + it), \\ 3)\ f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}. \end{array}\right\} \qquad (1.3.4)$$

Доказательство. Образуем суммы Бохнера-Фейера ряда (1.3.4). На прямых $\sigma = \alpha$, $\sigma = \beta$ эти суммы совпадают с суммами Бохнера-Фейера для функций $f_\alpha(t)$ и $f_\beta(t)$ и, следовательно, сходятся к этим функциям. В полосе $[\alpha, \beta]$ суммы Бохнера-Фейера ограничены. Поэтому в силу теоремы 1.1.6 они сходятся равномерно к пределу $f(s)$. Функция $f(s)$, очевидно, удовлетворяет всем условиям.

Теорема 1.3.6. *Пусть* $F(s)$ *удовлетворяет следующим условиям:* 1) *регулярна в полосе* (α, β), 2) *непрерывна в полосе* $[\alpha, \beta]$ *и* 3) *на прямых* $\sigma = \alpha$ *и* $\sigma = \beta$ $F(s)$ — *равномерная п.-п. функция действительной переменной* t *с рядом Фурье* $\sum_n A_n e^{\Lambda_n \sigma} e^{i\Lambda_n t}$ $(\sigma = \alpha; \sigma = \beta)$. *При этих* *предположениях $F(s)$ является п.-п. функцией в полосе $[\alpha, \beta]$ и ее ряд Дирихле пишется в виде*

$$\sum_n A_n e^{\Lambda_n s}.$$

Доказательство. По предыдущей лемме существует п.-п. в полосе (α, β) и непрерывная в полосе $[\alpha, \beta]$ функция $f(s)$, совпадающая с $F(s)$ на прямых $\sigma = \alpha$ и $\sigma = \beta$. Поэтому по теореме 1.1.2 $f(s) = F(s)$ во всех точках полосы (α, β).

3. Применим предыдущую теорему к определению области почти-периодичности некоторых рядов Дирихле.

Теорема 1.3.7. *Пусть дан ряд*

$$\sum^{\infty} A_n e^{\Lambda_n s} \tag{1.3.5}$$

с отрицательными показателями Дирихле ($\Lambda_n < 0$). Предположим, что для некоторого $\sigma = \alpha$ ряд (1.3.5) является рядом Фурье п.-п. функции $f_\alpha(t)$. Тогда существует п.-п. в полосе $(\alpha, +\infty)$ и непрерывная в полосе $[\alpha, +\infty)$ функция, которая на прямой $\sigma = \alpha$ совпадает с функцией $f_\alpha(t)$, имеет своим рядом Дирихле ряд (1.3.5) и при $\sigma \to +\infty$ стремится равномерно по t к нулю.

Доказательство. Пусть $\sigma_{B_k}(t)$ *) суть суммы Бохнера-Фейера для $f_\alpha(t)$ и $\sigma_{B_k}(s)$ — суммы Бохнера-Фейера для ряда (1.3.5). Так как суммы $\sigma_{B_k}(t)$ сходятся и числа Λ_n отрицательны, то из теоремы 1.1.8 следует, что суммы $\sigma_{B_k}(s)$ сходятся равномерно в каждой полосе $[\alpha, \beta]$ к функции $F(s)$, которая при $\sigma \to +\infty$ стремится равномерно по t к нулю.

Из теоремы 1.3.7 непосредственно следует

Теорема 1.3.8. *Пусть $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ есть п.-п. функция в полосе (α, β), причем все $\Lambda_n < 0$. Тогда $f(s)$ — п.-п. функция в полосе $(\alpha, +\infty)$ и стремится при $\sigma \to +\infty$ к нулю равномерно по t.*

---

*) B — набор индексов (см. § 8 гл. I ч. I) B_k упорядоченное B.

Замечание. Аналогичные теоремы имеют место для рядов с исключительно положительными показателями Дирихле.

Из теоремы 1.1.8 непосредственно следует интересная теорема.

Теорема 1.3.9. *Пусть $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — п.-п. функция в полосе (α, β) и пусть показатели Дирихле Λ_n функции $f(s)$ ограничены. Тогда $f(s)$ — целая аналитическая п.-п. функция, в любой полосе $[\alpha, \beta]$.*

Доказательство. Пусть $k < \Lambda_n < K$. Тогда функция $f(s)e^{-ks}$ почти-периодична в полосе $(\alpha, +\infty)$, а функция $f(s)e^{-Ks}$ почти-периодична в полосе $(-\infty, \beta)$. Из этих двух фактов теорема следует непосредственно.

Замечание. Другое доказательство этой теоремы следует из теоремы 1.11.3, часть I.

4. Мы видели, что аналитические п.-п. функции с отрицательными показателями Дирихле при $\sigma \to +\infty$ равномерно стремятся к нулю и, следовательно (при $\sigma \to +\infty$), ограничены. Оказывается, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1.3.10. *Пусть функция $f(s)$ почти-периодична в полосе $(\alpha, +\infty)$ и ограничена в полосе $(\alpha, +\infty)$. Тогда все показатели Дирихле функции $f(s)$ неположительны.*

Доказательство. Пусть $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n \sigma} e^{i\Lambda_n t}$ и $C = \sup|f(s)|$ в полосе $(\alpha, +\infty)$. Легко видеть, что для всех $\sigma > \alpha$

$$C \geqslant |M_t\{f(\sigma + it)e^{-i\Lambda_n t}\}| = |A_n| e^{\Lambda_n \sigma}.$$

Последнее неравенство возможно лишь тогда, когда все числа Λ_n неположительны.

5. Пусть показатели Дирихле функции $f(s)$ неположительны. Обозначим через A_0 свободный член ряда Дирихле функции $f(s)$. Положим $\varphi(s) = f(s) - A_0$. Ряд Дирихле функции $\varphi(s)$ имеет все отрицательные показатели Дирихле. Поэтому в силу теоремы 1.3.8 $\varphi(s)$ стремится при $\sigma \to +\infty$ равномерно по t к нулю. Следовательно, $f(s)$ при $\sigma \to +\infty$ стремится равномерно по t к A_0.

Сопоставляя последний результат с теоремой 1.3.10, мы заключаем, что

Класс ограниченных п.-п. функций в полосе $(\alpha, +\infty)$ *совпадает с классом п.-п. функций с неположительными показателями Дирихле, причем каждая функция последнего класса при* $\sigma \to +\infty$ *стремится равномерно по* t *к свободному члену своего ряда Дирихле.*

В дальнейшем мы встретимся с теоремой, в условия которой входит ограниченность неопределенного интеграла аналитической п.-п. функции. Поэтому мы приведем сейчас простое условие для ограниченности неопределенного интеграла аналитической п.-п. функции.

Теорема 1.3.11. *Пусть* $f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — *п.-п. функция в любой полосе* $[\alpha_1, +\infty)$ $\alpha_1 > \alpha$ *и пусть существует такое число* $\lambda < 0$, *что для всех* n $\Lambda_n < \lambda < 0$. *При этих предположениях неопределенный интеграл функции* $f(s)$ — *также п.-п. функция в любой полосе* $[\alpha_1, +\infty)$ $\alpha_1 > \alpha$.

Доказательство. В силу теоремы 1.2.7 достаточно показать, что неопределенный интеграл функции $f(s)$ ограничен в любой полосе $[\alpha_1, +\infty)$, $\alpha_1 > \alpha$. Выберем в интервале $(\alpha, +\infty)$ произвольное число σ_0 и пусть $s = \sigma + it$ — произвольная точка полосы $(\alpha, +\infty)$. Мы имеем:

$$F(s) = \int_{\sigma_0}^{s} f(s)\,ds = \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+it} f(s)\,ds + \int_{\sigma_0+it}^{\sigma+it} f(s)\,ds =$$

$$= i\int_0^t f(\sigma_0 + it)\,dt + \int_{\sigma_0}^{\sigma} f(\sigma + it)\,d\sigma.$$

Первое слагаемое справа ограничено в силу теоремы 1.12.1, часть I. Второе слагаемое ограничено в силу ограниченности функции $f(s)$. Поэтому $F(s)$ — п.-п. функция. Так как все показатели Дирихле последней функции неположительны, то она является п.-п. функцией в полосе $[\alpha_1, +\infty)$.

6. В связи с тем, что имеется характеристика аналитических п.-п. функций с показателями Дирихле определенного знака, естественно выяснить, в каких случаях п.-п. функция с показателями Дирихле различных знаков может быть представлена в виде суммы двух п.-п. функций с показателями Дирихле определенного знака. Это разложение, очевидно, аналогично разложению Лорана. Таким образом, следует выяснить, в каком случае две части ряда Дирихле

$$\sum_{\Lambda_n<0} A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \sum_{\Lambda_n\geqslant 0} A_n e^{\Lambda_n s} \tag{1.3.6}$$

суть ряды Дирихле некоторых аналитических п.-п. функций. Следующая теорема дает удовлетворительный ответ на этот вопрос.

Теорема 1.3.12. *Пусть*

$$f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s} \tag{1.3.7}$$

есть п.-п. функция в полосе $[\alpha, \beta]$. *Если неопределенный интеграл* $F(s)$ *функции* $f(s)$ *в полосе* $[\alpha, \beta]$ *ограничен (и, следовательно, является п.-п. функцией), то ряды* (1.3.6) *) *суть ряды Дирихле двух функций* $f_1(s)$ *и* $f_2(s)$ *п.-п. в любой полосе* $[\alpha_1, +\infty)$, $\alpha_1>\alpha$, *соответственно* $(-\infty, \beta_1]$.

Доказательство. Пусть s — некоторая точка полосы $[\alpha, \beta]$ и положительное число T удовлетворяет неравенству $T > \operatorname{Im} s$. В силу теоремы Коши

$$2\pi i f(s) = \left\{ \int_{\alpha+iT}^{\alpha-iT} + \int_{\alpha-iT}^{\beta-iT} + \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} + \int_{\beta+iT}^{\alpha+iT} \right\} \frac{F(z)}{(z-s)^2}\, dz.$$

Допустим, что T неограниченно увеличивается. Так как по условию функция $F(z)$ ограничена, то при этом второй и четвертый интегралы будут стремиться к нулю. Следовательно, мы получим:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} \frac{F(z)\, dz}{(z-s)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{F(z)\, dz}{(z-s)^2} = f_1(s) + f_2(s).$$

*) Так как неопределенный интеграл функции $f(s)$ ограничен, то ряд Дирихле этой функции не содержит свободного члена, и поэтому ряд $\sum_{\Lambda_n\geqslant 0} A_n e^{\Lambda_n s}$ можно записать в виде $\sum_{\Lambda_n>0} A_n e^{\Lambda_n s}$.

Легко видеть, что функция $f_1(s)$ ограничена в полосе $[\alpha, +\infty]$ и при $\sigma \to +\infty$ стремится к нулю равномерно по t (вблизи и на прямой $\sigma = \alpha$, как разность двух ограниченных функций $f(s)$ и $f_2(s)$). Обозначим через σ_0 произвольное число из интервала (α, β) и через τ_ε — ε-почти-период функции $F(z)$ в полосе $[\alpha, \beta]$. Легко видеть, что

$$|f_1(s+i\tau) - f_1(s)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} \frac{F(z+i\tau)-F(z)}{(z-s)^2}\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\sigma_0-\alpha)^2+t^2} = \frac{\varepsilon}{2(\sigma_0-\alpha)}.$$

Поэтому $f_1(s)$ есть п.-п. функция на прямой $\sigma = \sigma_0$. Кроме того, $f_1(s)$ — п.-п. функция и на прямой $\sigma = \alpha$ (как разность $f(s)$ и $f_2(s)$). В силу теоремы 1.3.6 $f_1(s)$ — п.-п. функция в полосе $[\alpha_1, +\infty)$, а в силу теоремы 1.3.10 она имеет только отрицательные показатели Дирихле. Точно так же можно показать, что $f_2(s)$ — п.-п. функция в полосе $(-\infty, \beta_1]$ и имеет только положительные показатели Дирихле. Так как ряд Дирихле $f(s)$ есть сумма рядов Дирихле для $f_1(s)$ и $f_2(s)$, то

$$f_1(s) \sim \sum_{\Lambda_n<0} A_n e^{\Lambda_n s} \qquad \text{в полосе } [\alpha_1, +\infty)$$

и

$$f_2(s) \sim \sum_{\Lambda_n<0} A_n e^{\Lambda_n s} \qquad \text{в полосе } (-\infty, \beta_1].$$

Наконец, так как последние ряды от выбора α_1 и β_1 в интервале (α, β) не зависят, то функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ удовлетворяют всем условиям, и теорема доказана.

Следствие. *Если* $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — *п.-п. функция в полосе* $[\alpha, \beta]$ *и если существует такое число* $\lambda > 0$, *что для всех* n $|\Lambda_n| > \lambda > 0$, *то ряды* $\sum\limits_{\Lambda_n<0} A_n e^{\Lambda_n s}$ *и* $\sum\limits_{\Lambda_n>0} A_n e^{\Lambda_n s}$ *суть ряды Дирихле функций* $f_1(s)$ и $f_2(s)$, *п.-п. в полосе* $[\alpha, +\infty)$, *соответственно в полосе* $(-\infty, \beta]$.

В самом деле, в этом случае неопределенный интеграл $F(s)$ существует (см. теорему 1.12.1, часть I).

7. В заключение настоящего параграфа рассмотрим функции п.-п. в полосе $[\alpha, +\infty)$, но неограниченные в этой полосе. Простейшим примером такой функции является неограниченная периодическая функция.

Пусть τ является ε-почти-периодом функции $f(s)$ для некоторого $\varepsilon < 1$. Выберем произвольное фиксированное τ и рассмотрим функцию $\varphi_\tau(s) = f(s+i\tau) - f(s)$. Функция $\varphi_\tau(s)$ п.-п. в полосе $[\alpha, +\infty)$ и ограничена в этой полосе, ибо $|\varphi_\tau(s)| < \varepsilon$. В силу теоремы 1.3.10 ряд Дирихле для $\varphi_\tau(s)$ содержит только неотрицательные показатели. Пусть $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$. Тогда $\varphi_\tau(s) = f(s+i\tau) - f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}\,(e^{i\Lambda_n \tau} - 1)$. Поэтому для положительных показателей Дирихле функции $f(s)$ должно быть $e^{i\Lambda_n\tau} = 1$, т. е. $\Lambda_n\tau \equiv 0 \pmod{2\pi}$, т. е. $\Lambda_n\tau = 2\pi k_n$, следовательно, $\Lambda_n = k_n \dfrac{2\pi}{\tau}$, где k_n — целые числа. Поэтому все положительные показатели Дирихле функции $f(s)$ кратны числу $\dfrac{2\pi}{\tau}$.

Рассмотрим функцию

$$p(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(s) + f(s+i\tau) + \ldots + f(s+i\,\overline{n-1}\,\tau)}{n}.$$

Легко показать (см. часть I, § 5 гл. II), что $p(s)$ есть аналитическая периодическая функция с периодом $i\tau$, причем показатели Дирихле для $p(s)$ суть те показатели Дирихле для $f(s)$, которые кратны $\dfrac{2\pi}{\tau}$. В частности, ряд Дирихле для $p(s)$ содержит все члены ряда Дирихле $f(s)$ с положительными показателями. Поэтому функция $h(s) = f(s) - p(s)$ имеет только отрицательные показатели Дирихле и, значит, на основании теоремы 1.3.10 ограничена в полосе $[\alpha, +\infty)$. Мы получили следующую теорему.

Теорема*) 1.3.13. *Каждая функция $f(s)$, неограниченная и п.-п. в полосе $[\alpha, +\infty)$, представляется в виде*

$$f(s) = p(s) + h(s),$$

где $p(s)$ — периодическая и неограниченная в полосе $[\alpha, +\infty)$ функция, а $h(s)$ — ограниченная п.-п. функция в той же полосе.

§ 4. Сходимость рядов Дирихле для аналитических п.-п. функций

1. Вопрос о сходимости рядов Дирихле для аналитических п.-п. функций столь же сложен, как и для равномерных п.-п. функций от действительной переменной. Мы ограничимся несколькими признаками абсолютной сходимости рядов Дирихле.

Теорема 1.4.1**). *Пусть $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Предположим, что выполнено одно из условий:*

1) *Λ_n линейно независимы,*
2) *$\Lambda_n > 0$,*
3) *для всех $\delta > 0$ сходится ряд $\sum\limits_n e^{-|\Lambda_n|\delta}$. Тогда ряд $\sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ сходится абсолютно в полосе (α, β).*

Доказательство. Абсолютная сходимость в случаях 1) и 2) следует непосредственно из соответствующих теорем для равномерных п.-п. функций от действительной переменной. Рассмотрим случай 3). Обозначим через σ_0 произвольное число из интервала (α, β). Далее, пусть число δ_0 выбрано так, что $\alpha < \sigma_0 - \delta_0$ и $\sigma_0 + \delta_0 < \beta$. Ряды

$$\sum_n A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0-\delta_0)} e^{i\Lambda_n t}, \quad \sum_n A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+\delta_0)} e^{i\Lambda_n t}$$

суть ряды Фурье равномерных п.-п. функций $f(\sigma_0 \mp \delta_0 + it)$.

---

*) H. Bohr [6]. В этой работе читатель найдет более подробное изложение вопроса.

**) В случаях 1) и 2) утверждение справедливо и для полосы $[\alpha, \beta]$. Оно получается применением теоремы Фрагмена-Линделефа.

Поэтому коэффициенты Фурье этих функций ограничены, т. е. существует такое постоянное число $A > 0$, что

$$|A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0 \mp \delta_0)}| < A.$$

Следовательно,

$$|A_n e^{\Lambda_n \sigma_0}| = |A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0 \mp \delta_0)}| e^{\pm \delta_0 \Lambda_n} < A e^{-|\Lambda_n| \delta_0}.$$

Поэтому

$$|\sum_n A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0 + it)}| \leqslant A \sum_n e^{-|\Lambda_n|\delta_0},$$

т. е. ряд $\sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ сходится абсолютно на каждой прямой σ_0, что и требовалось доказать.

2. Абсолютная сходимость ряда Дирихле в случае 2) позволяет доказать для аналитических п.-п. функций теорему, аналогичную теореме Ландау из теории классических рядов Дирихле.

Теорема 1.4.2. *Пусть все коэффициенты Дирихле A_n п.-п. функции*

$$f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s} \tag{1.4.1}$$

положительны. Если полоса (α, β) — максимальная полоса почти-периодичности функции $f(s)$, то точки $s = \alpha$ и $s = \beta$ суть особые точки $f(s)$.

Доказательство. По предыдущей теореме ряд (1.4.1) абсолютно сходится в полосе (α, β). Следовательно, сходятся абсолютно ряды

$$f_1(s) = \sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s}, \quad f_2(s) = \sum_{\Lambda_n \leqslant 0} A_n e^{\Lambda_n s}. \tag{1.4.2}$$

В силу теоремы 1.3.8 $f_1(s)$ и $f_2(s)$ суть п.-п. функции соответственно в полосах $(-\infty, \beta_1]$ и $[\alpha_1, +\infty)$ $\alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_1$. Так как $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$, то достаточно показать, что β есть особая точка функции $f_1(s)$ и α — особая точка $f_2(s)$.

По теореме 1.2.6 все производные функции $f_1(s)$ суть п.-п. функции. Далее, мы имеем:

$$f_1^{(\nu)}(s) \sim \sum_{\Lambda_n > 0} A_n \Lambda_n^{\nu} e^{\Lambda_n s}.$$

Последний ряд имеет только положительные коэффициенты Дирихле и, следовательно, сходится абсолютно в полосе $(-\infty, \beta)$ и равномерно в полосе $(-\infty, \beta_1]$. Поэтому

$$f_1^{(\nu)}(s) = \sum_{\Lambda_n > 0} A_n \Lambda_n^{\nu} e^{\Lambda_n s}.$$

Напишем разложение в ряд Тэйлора в точке $\beta - 1$ функции $f_1(s)$. Мы получим:

$$f_1(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(s-\beta+1)^{\nu}}{\nu!} f_1^{(\nu)}(\beta-1) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(s-\beta+1)^{\nu}}{\nu!} \sum_{\Lambda_n > 0} A_n \Lambda_n^{\nu} e^{\Lambda_n(\beta-1)}, \tag{1.4.3}$$

Предположим, что β — регулярная точка для $f_1(s)$. Тогда радиус сходимости r предыдущего ряда больше единицы. Пусть число η выбрано из условия $\beta < \eta < \beta - 1 + r$. Напишем ряд (1.4.3) для $s = \eta$. Мы получим:

$$f_1(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\eta-\beta+1)^{\nu}}{\nu!} \sum_{\Lambda_n > 0} A_n \Lambda_n^{\nu} e^{\Lambda_n(\beta-1)} =$$

$$= \sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n(\beta-1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\eta-\beta+1)^{\nu}}{\nu!} \Lambda_n^{\nu} = \sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n \eta}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s}$ сходится абсолютно в полосе $(-\infty, \eta]$ и, значит, $f_1(s)$ — п.-п. функция в полосе $(-\infty, \eta)$, а $f(s)$ — п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \eta)$, $\alpha_1 > \alpha$, что противоречит предположению. Аналогично можно показать, что α есть особая точка $f(s)$.

§ 5. Поведение п.-п. функций при $\sigma = +\infty$ (аналоги теорем Вейерштрасса и Пикара)

1. В этом параграфе изучается поведение «в точке» $\sigma = +\infty$ аналитических функций п.-п. в полуплоскости $[\alpha, +\infty)$. Результаты этого параграфа аналогичны классическим теоремам Вейерштрасса и Пикара, Теорема 1.5.1 (аналог теоремы Вейерштрасса). *Пусть $f(s)$ — п.-п. функция в полосе $[\alpha, +\infty)$. Могут представиться только три возможности поведения функции $f(s)$ в окрестности точки $\sigma = +\infty$:*

(A) $f(s)$ стремится к конечному пределу при $\sigma \to +\infty$ и притом равномерно по t.

(B) $|f(s)| \to +\infty$ при $\sigma \to +\infty$ равномерно по t.

(C) В каждой полуплоскости $\sigma > \alpha_1 > \alpha$ $f(s)$ принимает значения, сколь угодно близкие к каждому комплексному числу.

Мы будем говорить, что функция $f(s)$ принадлежит к классу (A), (B) или (C) в зависимости от того, какой случай имеет место.

Доказательство. Предположим, что функция $f(s)$ не принадлежит ни к классу (A), ни к классу (B). Следует показать, что она принадлежит к классу (C). Допустим противное. Тогда существует такое число w_0, что в полуплоскости $\sigma > \alpha_1$ нижняя грань $|f(s) - w_0|$ положительна. В силу следствия 2 из теоремы 1.2.8 функция

$$g(s) = \frac{1}{f(s) - w_0}$$

почти-периодична в полосе (α_1, β) при любом β и ограничена в полосе $(\alpha_1, +\infty)$. Поэтому в силу теорем 1.3.8 и 1.3.10 $g(s)$ стремится при $\sigma \to \infty$ к конечному пределу равномерно по t. Последнее невозможно, ибо $f(s)$ по предположению не принадлежит к классам (A) и (B).

Следующая теорема дает возможность по ряду Дирихле функции $f(s)$ судить о том, к какому классу она принадлежит.

Теорема 1.5.2. *Пусть $f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — п.-п. функция в полосе (α, β) при любом $\beta > \alpha$. Функция $f(s)$ принадлежит:*

1) к классу (A), если все показатели Дирихле неположительны,

2) к классу (B), если имеются положительные показатели Дирихле и среди них наибольший и

3) к классу (C), если имеются положительные показазатели Дирихле, но среди них нет наибольшего.

Доказательство. В силу теоремы 1.3.10 класс (A) совпадает с классом п.-п. функций с неположительными показателями Дирихле. Поэтому 1) доказано.

Рассмотрим 2). Предположим, что функция $f(s)$ имеет положительные показатели Дирихле и пусть Λ — самый большой среди них. Рассмотрим функцию $g(s)=f(s)e^{-\Lambda s}$. Легко видеть, что ряд Дирихле функции $g(s)$ имеет только неположительные показатели Дирихле и свободный член, отличный от нуля. Поэтому (см. теорему 1.3.10) $g(s)$ стремится при $\sigma \to +\infty$ равномерно по t к свободному члену своего ряда Дирихле. Следовательно, $|f(s)|$ стремится при $\sigma \to +\infty$ равномерно по t к $+\infty$. Отсюда следует 2).

Остается рассмотреть 3). Мы будем различать два случая: а) ряд Дирихле функции $f(s)$ имеет сколь угодно большие положительные показатели и б) верхняя грань Λ положительных показателей Дирихле функции $f(s)$ конечна, но само число Λ не есть показатель Дирихле. Из теоремы 1.3.10 следует непосредственно, что в этих случаях $f(s)$ не может принадлежать к классу (A). Мы должны показать, что $f(s)$ не может также принадлежать к классу (B). Допустим противное, т. е. пусть при $\sigma \to +\infty$ $|f(s)| \to +\infty$ равномерно по t.

Рассмотрим вначале случай а). Обозначим через C_1 произвольное положительное число. Далее, определим σ_1 так, чтобы в полосе (σ_1, ∞) выполнялось неравенство $|f(s)|>C_1$. Выберем теперь произвольное $\sigma_2>\sigma_1$ и определим постоянную величину $C_2>C_1$ так, чтобы для $\sigma=\sigma_2$ имело место неравенство $|f(s)|<C_2$. Определим теперь положительные числа c и k из равенств

$$C_1=ce^{k\sigma_1}, \qquad C_2=ce^{k\sigma_2}.$$

Итак, мы имеем:

$$|f(s)|>ce^{k\sigma_1} \quad \text{в полосе } (\sigma_1, +\infty),$$
$$|f(s)|<ce^{k\sigma_2} \quad \text{на прямой } \sigma=\sigma_2.$$

Поэтому применима теорема 1.1.11 и, значит,

$$|f(s)|<ce^{k\sigma} \text{ в полосе } (\sigma_2, +\infty). \tag{1.5.1}$$

Выберем теперь показатель Дирихле $\Lambda_n > k$ и положим, так же как и в § 1,

$$L(\sigma) = \sup_{-\infty<t<\infty} |f(\sigma+it)|.$$

Мы имеем в полосе $(\alpha, +\infty)$

$$L(\sigma) \geqslant |M_t\{f(\sigma+it)\, e^{-i\Lambda_n t}\}| = |A_n| e^{\Lambda_n \sigma}.$$

Из последнего неравенства следует, что для больших σ $L(\sigma) > ce^{k\sigma}$, что невозможно в силу неравенства (1.5.1). Мы пришли к противоречию и, значит, в случае а) $f(s)$ не может принадлежать к классу (B).

Остается рассмотреть случай б). Пусть, как и в предыдущем случае, $|f(s)| > C_1$ в полосе $(\sigma_1, +\infty)$. Выберем число $c > 0$ так, чтобы выполнялось равенство $C_1 = ce^{\Lambda\sigma_1}$. Следовательно,

$$|f(s)| > ce^{\Lambda\sigma_1} \quad \text{в полосе } (\sigma_1, +\infty). \tag{1.5.2}$$

С другой стороны, функция $g(s) = f(s)\, e^{-\Lambda s}$ имеет исключительно отрицательные показатели Дирихле и, следовательно (см. теорему 1.3.8), стремится к нулю при $\sigma \to +\infty$ равномерно по t. В частности, существует такое $\sigma_2 > \sigma_1$, что на прямой $\sigma = \sigma_2$

$$|f(s)| < \frac{1}{2} ce^{\Lambda\sigma_2}. \tag{1.5.3}$$

Выберем теперь число $\Lambda' < \Lambda$ так, чтобы имело место неравенство $\frac{1}{2} e^{\Lambda\sigma_2} < e^{\Lambda'\sigma_2}$. В силу неравенств (1.5.2) и (1.5.3) мы имеем $|f(s)| > ce^{\Lambda'\sigma_2}$ в полосе $(\sigma_1, +\infty)$, $|f(s)| < ce^{\Lambda'\sigma_2}$ на прямой $\sigma = \sigma_2$. Поэтому, применяя снова теорему 1.1.11, мы получим:

$$|f(s)| < ce^{\Lambda'\sigma} \quad \text{в полосе } (\sigma_2, +\infty). \tag{1.5.4}$$

С другой стороны, так же как и в случае а), имеем для $\Lambda_n > \Lambda'$

$$L(\sigma) \geqslant |A_n| e^{\Lambda_n \sigma} \quad \text{в полосе } (\alpha, +\infty).$$

Поэтому для больших σ имеет место неравенство

$$L(\sigma) \geqslant ce^{\Lambda'\sigma},$$

что противоречит неравенству (1.5.4). Мы снова получили противоречие и, значит, $f(s)$ не может принадлежать и в случае б) к классу (B). Таким образом, теорема полностью доказана.

2. Докажем теперь теорему типа теоремы Пикара.

Теорема 1.5.3. *Пусть $f(s)$ есть п.-п. функция в полосе $(\alpha, +\infty)$ и принадлежит к классу (C). Тогда в каждой полуплоскости $(\alpha_1, +\infty)$ $(\alpha_1 > \alpha)$ функция $f(s)$ принимает все значения, за исключением, быть может, одного.*

Доказательство. Выберем произвольную прямую $\sigma = \sigma_1 > \alpha_1 > \alpha$ и обозначим через G множество всех значений функций $f(s)$ на этой прямой и через G' — производное множество множества G (т. е. совокупность всех предельных точек множества G). Так как $f(s)$ принадлежит к классу (C), то в силу предыдущей теоремы множество значений функции $f(s)$ в каждой полуплоскости $(\sigma_2, +\infty)$ $(\sigma_2 > \sigma_1)$ всюду плотно среди множества всех комплексных чисел. Поэтому из теоремы Иверсена (см. § 1)следует, что функция $f(s)$ принимает в полуплоскости $(\sigma_1, +\infty)$ все значения, которые не принадлежат к $G+G'$, за исключением, быть может, одного. С другой стороны, в силу теоремы 1.2.8 $f(s)$ принимает все значения из множества $G+G'$ в каждой полосе $(\sigma_1-\delta, \sigma_1+\delta)$ $(\delta > 0)$. Таким образом, теорема полностью доказана.

3. *Если положительные показатели Дирихле функции $f(s)$ имеют конечную верхнюю грань Λ, причем само число Λ не есть показатель Дирихле, то функция $f(s)$ совсем не имеет исключительных значений Пикара.*

Доказательство этой интересной теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 1.5.1. *Пусть ряд Дирихле п.-п. функции $f(s)$ имеет только отрицательные показатели. Если верхняя грань Λ показателей Дирихле функции $f(s)$ является также показателем Дирихле, то существует такое σ_1, что для всех $\sigma > \sigma_1$ $f(s) \neq 0$.*

Если же, напротив, верхняя грань Λ показателей Дирихле не есть показатель Дирихле, то $f(s)$ имеет нули в каждой полуплоскости $(\alpha_1, +\infty)$.

Доказательство. В первом случае постоянный член ряда Дирихле функции $g(s) = f(s)\,e^{-\Lambda s}$ отличен от нуля. Обозначим этот постоянный член через A. Мы имеем в силу теоремы 1.3.10 (равномерно по t)

$$\lim_{\sigma\to+\infty} |f(s)\, e^{-\Lambda s}| = A.$$

Поэтому существует такое σ_1, что в полосе $(\sigma_1, +\infty)$ выполняется неравенство

$$|f(s)\, e^{-\Lambda s}| > \frac{1}{2} A.$$

Из этого неравенства следует, что $f(s)$ не имеет нулей в полосе $(\sigma_1, +\infty)$.

Рассмотрим второй случай. В этом случае функция $g(s)$ имеет только отрицательные показатели и, следовательно (см. теорему 1.3.8), стремится к нулю при $\sigma\to+\infty$ равномерно по t. Допустим, что в некоторой полуплоскости $(\sigma_1, +\infty)$ $g(s)$ не имеет нулей. По следствию 2 из теоремы 1.2.8 $h(s)=\frac{1}{g(s)}$ есть п.-п. функция в полосе (σ_1', β) $\sigma_1' > \sigma_1$, $\beta < \infty$. Функция $h(s)$, очевидно, принадлежит к классу (B) и, следовательно (см. теорему 1.5.2), ее ряд Дирихле имеет наибольший положительный показатель Дирихле. Обозначим соответствующий член ряда Дирихле через Be^{Ms} $(M>0)$. Тогда функция $h(s)\,e^{-Ms}$ при $\sigma\to+\infty$ стремится равномерно по t к постоянной B. Следовательно, существует такая постоянная величина $\sigma_2 > \sigma_1$, что в полосе $(\sigma_2, +\infty)$ выполняется неравенство

$$|h(s)\, e^{-Ms}| > \frac{1}{2}|B|.$$

Поэтому в полосе $(\sigma_2, +\infty)$ имеет место неравенство

$$|f(s)| < \frac{2}{|B|} e^{(\Lambda-M)\sigma}. \tag{1.5.5}$$

Выберем $\Lambda_n > \Lambda - M$. Так же как и прежде, имеем $L(\sigma) \geqslant |A_n|\, e^{\Lambda_n\sigma}$ и поэтому для больших σ справедливо неравенство

$$L(\sigma) > \frac{2}{|B|} e^{(\Lambda-M)\sigma},$$

Последнее неравенство противоречит неравенству (1.5.5). Таким образом, мы пришли к противоречию и, следовательно, во втором случае $f(s)$ имеет нуль со сколь угодно большой абсциссой. Итак, лемма полностью доказана.

Теорема 1.5.4. *Пусть функция $f(s)$ принадлежит к классу (C) и пусть ее показатели Дирихле ограничены сверху. Тогда функция $f(s)$ принимает все значения в каждой полуплоскости* $(\alpha, +\infty)$ (т. е. у нее отсутствуют исключительные значения Пикара).

Доказательство. Обозначим через $\Lambda > 0$ верхнюю грань показателей Дирихле функции $f(s)$. Так как $f(s)$ по предположению не принадлежит к классу (B), то число Λ не является показателем Дирихле (см. теорему 1.5.2). Выберем произвольное комплексное число a и рассмотрим функцию

$$g(s) = \{f(s) - a\} e^{-\Lambda s}.$$

В силу предыдущей леммы эта функция имеет нуль в каждой полуплоскости $(\alpha_1, +\infty)$. Отсюда следует, что $f(s)$ принимает значение a в каждой полуплоскости $(\alpha_1, +\infty)$, что и требовалось доказать.

§ 6. Аналитические S-п.-п. функции

1. В настоящем параграфе мы рассмотрим аналитические функции, п.-п. в смысле Степанова. Мы увидим, что по существу никакого обобщения при этом не получается.

Определение. *Пусть $f(s)$—аналитическая функция в полосе* (α, β).

Действительное число τ называется ε, S-почти-периодом $f(s)$, если для всех точек s полосы (α, β) выполняется неравенство $(s = \sigma + it)$

$$\int_{z}^{z+1} |f(s + i\tau) - f(s)|\, dt < \varepsilon.$$

Если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε, S-почти-периодов для $f(s)$ относительно плотно, то $f(s)$ называется S-п.-п. функцией.

Теорема 1.6.1. *Если $f(s)$ — S-п.-п. функция в полосе (α, β), то она является аналитической п.-п. функцией в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$.*

Доказательство. Рассмотрим две полосы $[\alpha_1, \beta_1]$ и $[\alpha_2, \beta_2]$, причем $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1 < \beta$. Пусть $r = \min(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_1 - \beta_2)$. Пользуясь почти-периодичностью $f(s)$ в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, можно показать, сводя всю полосу $[\alpha_2, \beta_2]$ к конечному прямоугольнику, что существует такое число $A > 0$, что если s_0 — произвольная точка полосы $[\alpha_2, \beta_2]$, то

$$\int\limits_{|s-s_0|=r} |f(s)||ds| < A.$$

В силу теоремы Коши

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s-s_0|=r} \frac{f(s)}{s - s_0} ds.$$

Поэтому

$$|f(s_0)| \leqslant \frac{A}{2\pi r},$$

т. е. $f(s)$ в каждой полосе (α_2, β_2) ограничена, а значит, в силу теоремы 1.2.2 равномерно непрерывна в этой полосе.

Рассмотрим некоторую прямую $\sigma = \sigma_0$ полосы $[\alpha_2, \beta_2]$. На прямой $\sigma = \sigma_0$ $f(s)$ равномерно непрерывна и является S-п.-п. функцией. Значит, в силу теоремы 5.2.7, часть I $f(s)$ — равномерная п.-п. функция на прямой $\sigma = \sigma_0$. Поэтому в силу теоремы 1.2.3 $f(s)$ — п.-п. функция в любой полосе (α_1, β_1) $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, что и требовалось доказать.

2. Теорема 5.6.1 вместе с теоремой 2.1.5 *) позволяют доказать следующую интересную теорему Бора **).

Теорема 1.6.2. *Пусть $f(s)$ и $g(s)$ — две аналитические п.-п. функции в полосе (α, β). Если отношение $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ в этой полосе ограничено, то $h(s)$ есть п.-п. функция в любой полосе (α_1, β_1), $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$.*

---

*) См. следующую главу, стр. 351.

**) H. Bohr [9].

Доказательство. Обозначим через m произвольное положительное число и через E_m — множество тех точек полосы $[\alpha_1, \beta_1]$, в которых $|g(s)| \geqslant m$. Пусть b – произвольный отрезок прямой, расположенный в полосе (α, β), длина которого меньше некоторого фиксированного числа. В силу теоремы 2.1.5 (см. следующую главу) линейная мера пересечения множества CE_m с l при $m \to 0$ равномерно стремится к нулю.

Выберем положительное число $\varepsilon < \frac{m}{2}$ и пусть τ есть ε-почти-период как для $f(s)$, так и для $g(s)$. Если $s \in E_m$, то по определению множества E_m $g(s) > m$ и, значит,

$$|g(s+i\tau)| =$$
$$= |\{g(s+i\tau) - g(s)\} + g(s)| \geqslant |g(s)| - |g(s+i\tau) - g(s)| > \frac{m}{2}.$$

Поэтому для $s \in E_m$

$$|h(s+i\tau) - h(s)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|f(s+i\tau) - f(s)|\,|g(s)| + |g(s+i\tau) - g(s)|\,|f(s)|}{|g(s+i\tau)|\,|g(s)|} \leqslant \frac{4A\varepsilon}{m^2}, \quad (1.6.1)$$

где $A = \max\{\sup|f(s)|, \sup|g(s)|\}$ в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$. Таким образом, если z находится в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, то, обозначая через l_z отрезок прямой с концами в точках z и $z+i$, мы получим в силу неравенства (1.6.1):

$$\int_z^{z+i} |h(s+i\tau) - h(s)|\,dt = \int_{l_z} |h(s+i\tau) - h(s)|\,dt =$$
$$= \int_{l_z * E_m} |h(s+i\tau) - h(s)|\,dt + \int_{l_z * CE_m} |h(s+i\tau) - h(s)|\,dt <$$
$$< \frac{2\varepsilon}{m^2} + A\,\mathrm{mes}\,(l_z * CE_m). \quad (1.6.2)$$

Обозначим через δ произвольное положительное число и выберем столь малое m, чтобы $A\,\mathrm{mes}\,(l_z * CE_m)$ стало меньше $\frac{\delta}{2}$. Выбрав таким образом m, подберем затем столь малое ε, чтобы $\frac{2\varepsilon}{m^2}$ стало меньше $\frac{\delta}{2}$. Тогда из неравенства (1.5.2) будет следовать

$$\int\limits_{z}^{z+1} |h(s+i\tau)-h(s)|\,dt < \delta,$$

то-есть $h(s)$ есть аналитическая S-п.-п функция в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, и в силу теоремы 1.6.1 теорема доказана.

§ 7. О поведении аналитической п.-п. функции вне полосы почти-периодичности

1. В § 2 этой главы было показано, что каждая аналитическая п.-п. функция имеет максимальную полосу почти-периодичности, которая одновременно является также максимальной полосой ограниченности этой функции.

В связи с этим возникает следующий естественный вопрос: допустим, что аналитическая п.-п. функция может быть аналитически продолжена в полосу, примыкающую к максимальной полосе почти-периодичности. Спрашивается, обладает ли функция в расширенной полосе некоторой обобщенной почти-периодичностью и если да, то как найти ее ряд Дирихле?

Следующая теорема дает в некоторых случаях ответ на поставленный сейчас вопрос.

Теорема*) 1.7.1. *Пусть* $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — *аналитическая п.-п. функция в полосе* (α, β) *и регулярна в большей полосе* (α_1, β_1) $(\alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1)$. *Предположим, что* $f(s)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

I) $M_t\{|f(\sigma+it)|^2\} = K_\sigma < \infty$ *для всех* σ *из интервала* $[\alpha_1, \beta_1]$.

II) *Существует целое положительное число* $m > 1$ *и положительное число* C *такие, что*

$$|f(\sigma+it)| < C\left|\frac{t}{2}\right|^{m-\frac{1}{2}}$$

для $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$, $|t| > 1$.

---

*) A. Besicovitch [3], [4].

При этих предположениях $f(s)$ на каждой прямой $\sigma=\sigma_0$ полосы (α_1, β_1) есть B^2-п.-п. функция, ряд Фурье которой получается из ряда Дирихле функции $f(s)$ при $\sigma=\sigma_0$ и, следовательно, равенство Парсеваля пишется в виде

$$M_t\{|f(\sigma_0+it)|^2\}=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2 e^{2\Lambda_n\sigma_0}.$$

Доказательство. Пусть полоса (α_1, β_1) содержит полосу (α, β), причем имеет место по крайней мере одно

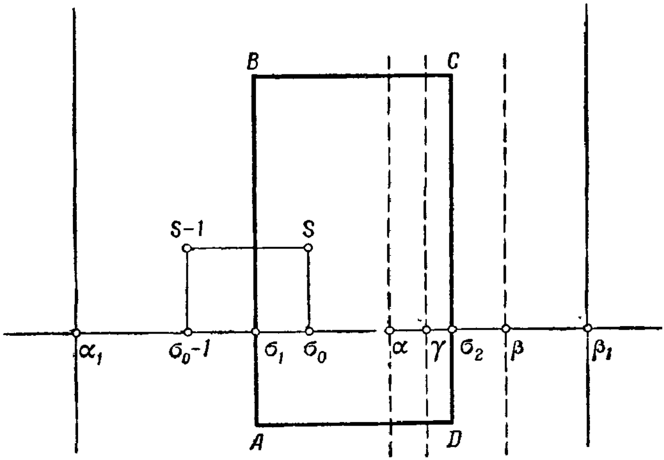

Рис. 3.

из неравенств $\alpha_1<\alpha$, $\beta<\beta_1$. Пусть для определенности $\alpha_1<\alpha$. Выберем в полосе (α_1, α) прямую $\sigma=\sigma_0$ (рис. 3).

Далее, выберем фиксированные абсциссы σ_1, σ_2 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\max(\alpha_1, \sigma_0-1)<\sigma_1<\sigma_0;\ \alpha<\sigma_2<\beta. \qquad (1.7.1)$$

Можно, например, положить $\sigma_2=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$: $A=\sigma_1-iT$, $B=\sigma_1+iT$, $C=\sigma_2+iT$, $D=\sigma_2-iT$. Пусть λ — произвольное положительное число.

В силу теоремы Коши о вычетах

$$f(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ABCD} \frac{f(z)\, e^{\lambda (z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}\, dz.$$

Разбивая интеграл на четыре слагаемых по сторонам прямоугольника, мы получим:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ -\int\limits_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} + \int\limits_{\sigma_2 - iT}^{\sigma_2 + iT} - \int\limits_{\sigma_1 + iT}^{\sigma_2 + iT} + \int\limits_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_2 - iT} \right\}.$$

Если $T \to \infty$, то в силу условия 2) третий и четвертый интегралы стремятся к нулю. Поэтому

$$f(s) = \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \right\} \frac{f(z)\, e^{\lambda (z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}\, dz =$$

$$= \varphi(s, \lambda) + \psi(s, \lambda).$$

Рассмотрим функцию $\psi(s, \lambda)$. Покажем, что $\psi(s, \lambda)$ есть аналитическая п.-п. функция в полосе (α_1, σ_2). Пусть γ — произвольное число интервала (α, σ_2). Мы должны показать, что $\psi(s, \lambda)$ есть аналитическая п.-п. функция в полосе (α_1, γ). Пусть τ есть ε-почти-период функции $f(\sigma_2 + it)$ и $s = \sigma_0 + it$ — произвольная точка полосы (α_1, γ). Мы имеем:

$$\psi(s + i\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{f(z)\, e^{\lambda (z-s-i\tau)}\, dz}{(z-s-i\tau)(z-s-i\tau+1)^m} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{f(z+i\tau)\, e^{\lambda (z-s)}\, dz}{(z-s)(z-s+1)^m}.$$

Поэтому

$$|\psi(s+i\tau, \lambda)-\psi(s, \lambda)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{|e^{\lambda(z-s)}|\,|dz|}{|z-s|\,|z-s+1|^m} \text{*)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{\lambda(\sigma_2-\alpha_1)} \int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{|dz|}{|z-s|^{m+1}}.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{|dz|}{|z-s|^{m+1}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|(\sigma_2-\sigma_0)+i(y-t)|^{m+1}} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|\sigma_2-\sigma_0+iy|^{m+1}} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|\sigma_2-\gamma+iy|^{m+1}}.$$

Поэтому

$$|\psi(s+i\tau, \lambda)-\psi(s, \lambda)| < B\varepsilon,$$

где число B не зависит от ε и s. Следовательно, τ есть B, ε-почти-период функции $\psi(s, \lambda)$ в полосе (α_1, γ). Следовательно, $\psi(s, \lambda)$ — аналитическая п.-п. функция в полосе (α_1, σ), что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(s, \lambda) = f(s)-\psi(s, \lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{f(z)\, e^{\lambda(z-s)}\, dz}{(z-s)(z-s+1)^m}.$$

Мы покажем, что для больших λ $\overline{M}_t\{|\varphi(\sigma_0+it, \lambda)|^2\}$ мало. Пусть $T>1$, $-T<t<T$, $s=\sigma_0+it$. Имеем:

$$\varphi(s, \lambda) = -\frac{e^{\lambda(\sigma_1-\sigma_0)}}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{f(z)\, e^{i\lambda(y-t)}}{(z-s)(z-s+1)^m} dz =$$

$$= -\frac{e^{\lambda(\sigma_1-\sigma_0)}}{2\pi i}(\varphi_1+\varphi_2), \tag{1.7.2}$$

*) Из рис. 3 легко усмотреть, что $|z-s|<|z-(s-1)|$.

где

$$\varphi_1 = \int\limits_{\sigma_1 - 2Ti}^{\sigma_1 + 2Ti}, \quad \varphi_2 = \int\limits_{\sigma_1 + 2Ti}^{\sigma_1 + i\infty} + \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 - 2Ti}.$$

Обозначим через a $\min(\sigma_0 - \sigma_1, \sigma_1 - \sigma_0 + 1)$. По условию II при достаточно больших T

$$\left| \int\limits_{\sigma_1 + 2Ti}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{f(z) e^{i\lambda(y-t)}}{(z-s)(z-s+1)^m} dz \right| \leqslant \int\limits_{2T}^{\infty} \frac{C\left(\frac{y}{2}\right)^{m-\frac{1}{2}} dy}{[a^2 + (y-t)^2]^{\frac{m+1}{2}}} <$$

$$< C \int\limits_{2T}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{m-\frac{1}{2}} dy}{\left(\frac{y}{2}\right)^{m+1}} = \frac{4C}{\sqrt{T}}.$$

Точно так же

$$\left| \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 - 2iT} \frac{f(z) e^{i\lambda(y-t)}}{(z-s)(z-s+1)^m} dz \right| < \frac{4C}{\sqrt{T}}.$$

Следовательно, $|\varphi_2(s, \lambda)| < \frac{8C}{\sqrt{T}}$. Оценим теперь $\varphi_1(s, \lambda)$. В силу неравенства Коши-Буняковского

$$|\varphi_1|^2 \leqslant \left(\int\limits_{-2T}^{2T} \frac{|f(\sigma_1 + iy)|\, dy}{\{a^2 + (y-t)^2\}^{\frac{m+1}{2}}} \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-2T}^{2T} \frac{|f(\sigma_1 + iy)|^2}{a^2 + (y-t)^2} dy \int\limits_{-2T}^{2T} \frac{dy}{[a^2 + (y-t)^2]^m}.$$

Так как

$$\int\limits_{-2T}^{2T} \frac{dy}{[a^2 + (y-t)^2]^m} < \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[a^2 + (y-t)^2]^m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)^m} <$$

$$< \frac{1}{a^{2m-2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{\pi}{a^{2m-1}},$$

то

$$|\varphi_1|^2 \leqslant \frac{\pi}{a^{2m-1}} \int_{-2T}^{2T} \frac{|f(\sigma_1+iy)|^2}{a^2+(y-t)^2}\,dy.$$

Положим

$$K_{\sigma_1}(T) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma_1+iy)|\,dy.$$

Тогда

$$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} |\varphi_1|^2\,dt < \frac{\pi}{a^{2m-1}}\,\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} f(\sigma_1+iy)\int_{-T}^{T}\frac{dt}{a^2+(y-t)^2}\,dy <$$

$$< \frac{2\pi^2}{a^{2m}} K_{\sigma_1}(2T). \qquad (1.7.3)$$

Вспоминая оценку для φ_2, мы получим:

$$|\varphi_1+\varphi_2|^2 \leqslant |\varphi_1|^2 + \frac{16C}{\sqrt{T}}|\varphi_1| + \frac{64C^2}{T}.$$

Из неравенства Коши-Буняковского и неравенства (1.7.3) следует оценка

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_1|\,dt \leqslant \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_1|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\pi}{a^m}\sqrt{2K_{\sigma_1}(T)}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_1+\varphi_2|^2\,dt <$$

$$< \frac{2\pi^2}{a^{2m}}K_{\sigma_1}(2T) + \frac{16\pi C}{\sqrt{T}a^m}\sqrt{2K_{\sigma_1}(2T)} + \frac{64C^2}{T}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\overline{M}\{|\varphi_1+\varphi_2|^2\} \leqslant \frac{2\pi^2}{a^{2m}}K_{\sigma_1}; \quad K_{\sigma_1} = \overline{M}_t\{|f(\sigma_1+it)|^2\}.$$

Поэтому из (1.7.2) следует

$$\overline{M}_t \{ |\varphi(\sigma_0 + it, \lambda)|^2 \} =$$
$$= \frac{e^{2\lambda(\sigma_1 - \sigma_0)}}{4\pi^2} \overline{M}_t \{ |\varphi_1 + \varphi_2| \} < \frac{1}{2a^{2m}} e^{2\lambda(\sigma_1 - \sigma_0)} K_{\sigma_1}. \quad (1.7.4)$$

Пусть $\lambda_n \to +\infty$. В силу (1.7.4) и (1.7.1)

$$\lim_{n\to\infty} \overline{M}_t \{ |\varphi(\sigma_0 + it, \lambda_n)|^2 \} = 0.$$

Следовательно,

$$f(\sigma_0 + it) = B^2 \lim_{n\to\infty} \psi(\sigma_0 + it, \lambda_n),$$

т. е. $f(\sigma_0 + it)$ есть B^2-п.-п. функция.

Остается показать, что

$$f(\sigma_0 + it) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n \sigma_0} e^{i\Lambda_n t}.$$

Это можно сделать без дальнейших вычислений. Функции $\psi(s, \lambda_n)$ суть аналитические п.-п. функции в любой полосе (α_1, σ_2'), $\sigma_2' < \sigma_2$, и B^2-сходятся к $f(s)$ на каждой прямой линии полосы (α_1, σ_2). Следовательно, $f(s)$ на этих прямых есть B^2-п.-п. функция. Поэтому ряд Фурье функции $\psi(s, \lambda_n)$ формально сходится к ряду Фурье $f(s)$ на каждой линии полосы (α_1, σ_2). С другой стороны, ряды Фурье функций $\psi(s, \lambda_n)$ на всех прямых полосы (α_1, σ_2) получаются из ряда Дирихле этой функции в полосе (α_1, σ_2). Поэтому ряды Дирихле функций $\psi(s, \lambda_n)$ сходятся формально к некоторому ряду Дирихле, который на каждой прямой полосы (α_1, σ_2) дает ряд Фурье функции $f(s)$. Но мы знаем, что ряд Дирихле $f(s)$ в полосе (α, σ_2) дает ряд Фурье $f(s)$ на каждой прямой этой полосы. Поэтому то же самое будет иметь место в полосе (α_1, σ_2), что и завершает доказательство теоремы.

2. Доказанная в предыдущем пункте теорема допускает следующее интересное обобщение.

Пусть функция $f(s)$ регулярна в полосе $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ и удовлетворяет условию

$$\overline{\lim} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 dt = K_\sigma < \infty.$$

Пусть в полосе (α_1, β_1) *выполняется условие* II. *Предположим, что на одной единственной прямой* $\sigma = \sigma_2$ $f(\sigma_2 + it) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda n (\sigma_2 + it)}$ *есть* B^2*-п.-п. функция. При этих предположениях* $f(s)$ *есть* B^2*-п.-п. функция на каждой прямой* $\sigma = \sigma_0$ *полосы* (α_1, β_1) *с рядом Фурье*

$$\sum_n A_n e^{\Lambda n (\sigma_0 + it)}.$$

Доказательство в общем проводится аналогично предыдущему. Пусть $\sigma_0 < \sigma_2$. Так же как и прежде,

$$f(\sigma_0 + it) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{f(z)\, e^{\lambda(z-s)}\, dz}{(z-s)(z-s+1)^m} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{f(z)\, e^{\lambda(z-s)}\, dz}{(z-s)(z-s+1)^m},$$

где σ_1 выбирается из интервала $\max(\alpha_1, \sigma_0 - 1) < \sigma < \sigma_0$. Во втором интеграле функция $f(z) = f(\sigma_2 + iy)$ по предположению есть B^2-п.-п. функция. Поэтому, каково бы ни было $\delta > 0$, ее можно представить в виде

$$f(z) = f_1(z) + R(z),$$

где $f_1(z)$ — равномерная п.-п. функция и

$$M_y\{|R(\sigma_2 + iy)|^2\} < \delta.$$

Точно так же, как и прежде,

$$\psi(s, \lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{f_1(z)\, e^{\lambda(z-s)}\, dz}{(z-s)(z-s+1)^m}$$

на прямой $\sigma = \sigma_0$ есть равномерная п.-п. функция. Далее, мы имеем:

$$f(\sigma_0 + it) - \psi(\sigma_0 + it, \lambda) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{f(z)\, e^{\lambda(z-s)}\, dz}{(z-s)(z-s+1)^m} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{R(z)\, e^{\lambda(z-s)}\, dz}{(z-s)(z-s+1)^m}.$$

Выбрав ε, можно подобрать λ столь большим, чтобы среднее значение квадрата первого интеграла было $< \frac{\varepsilon}{4}$, а выбрав λ, взять δ столь малым, чтобы среднее значение квадрата второго интеграла было также $< \frac{\varepsilon}{4}$. Мы тогда получим:

$$M_t\{|f(\sigma_0+it)-\psi(\sigma_0+it,\lambda)|^2\} < \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $f(\sigma_0+it)$ — B^2-п.-п. функция. Остается доказать утверждение теоремы относительно ряда Фурье.

Доказательство ведется аналогично предыдущему. Проведем вспомогательную прямую линию $\sigma=\sigma^*$, которая лежит с той же стороны от линии $\sigma=\sigma_2$, что и $\sigma=\sigma_0$, но более удалена (однако все еще в полосе $\alpha_1<\sigma<\beta_1$). Ясно, что ряды Фурье функций $f(\sigma_0+it)$ и $f(\sigma^*+it)$ получаются из одного и того же ряда Дирихле, ибо в обоих случаях мы можем использовать ту же самую аппроксимирующую функцию $\psi(s,\lambda)$. Далее, мы знаем, что на прямой $\sigma=\sigma^*$ $f(s)$ есть B^2-п.-п. функция. Поэтому, рассуждая, как прежде, мы можем заключить, что ряды Фурье функций $f(\sigma_0+it)$ и $f(\sigma_2+it)$ получаются из одного и того же ряда Дирихле, ибо обе прямые $\sigma=\sigma_0$ и $\sigma=\sigma_2$ лежат с одной стороны прямой $\sigma=\sigma^*$.

ГЛАВА ВТОРАЯ

СРЕДНЕЕ ДВИЖЕНИЕ И ПЛОТНОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Вспомогательные теоремы из теории аналитических функций

1. Аналитическая функция, если и обращается в нуль, то только в изолированных точках. Поэтому для каждой аналитической функции (независимо от того, обращается она в нуль или нет) можно разумно ввести понятие аргумента функции.

Вопрос об аргументе аналитической п.-п. функции тесно связан с распределением ее значений. Под этим понимается следующее. Пусть $f(s)$ — аналитическая в полосе (α, β) п.-п. функция. Пусть $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$ и a — произвольное комплексное число. Обозначим через T произвольное действительное число и рассмотрим прямоугольник с вершинами в точках $\alpha_1 - iT$, $\alpha_1 + iT$, $\beta_1 + iT$, $\beta_1 - iT$. Наконец, обозначим через $N(\alpha_1, \beta_1, T, a)$ число корней уравнения $f(s) = a$ в отмеченном прямоугольнике. Рассмотрим отношение

$$\frac{N(\alpha_1, \beta_1, T, a)}{2T}.$$

Может случиться, что это отношение при T неограниченно растущем (и при фиксированных α_1, β_1 и a) стремится к определенному пределу. Этот предел называется плотностью значения a в полосе (α_1, β_1). Очевидно, что, не нарушая общности рассуждений, можно принять $a = 0$.

В настоящей главе изучаются указанные вопросы. Основные результаты принадлежат Иессену*).

2. В этом параграфе мы рассмотрим несколько вспомогательных теорем из теории аналитических функций, которые в последующем изложении будут играть существенную роль.

Теорема 2.1.1. *Пусть G есть некоторая область плоскости комплексной переменной s и $O \subset G$ — ограниченная подобласть области G. Пусть $\{g(s)\}$ есть некоторое бесконечное множество аналитических и равномерно ограниченных в G функций. Предположим, что никакая подпоследовательность множества $\{g(s)\}$ не сходится к тождественному нулю. При этих предположениях существует такое целое $N > 0$ (зависящее только от семейства $\{g(s)\}$ и множества O), что каждая функция $g(s)$ имеет в O не более N нулей.*

Доказательство. Допустим противное и пусть

$$g_1(s),\ g_2(s),\ \ldots \tag{2.1.1}$$

— последовательность функций из множества $\{g(s)\}$, причем $g_n(s)$ имеет в O не менее n нулей. В силу теоремы Монтеля из последовательности (2.1.1) можно выбрать равномерно сходящуюся в O подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что сама последовательность (2.1.1) сходится. Обозначим предельную функцию через $h(s)$. По условию $h(s) \not\equiv 0$. Обозначим через $\overline{O}$ замыкание множества O и пусть $h(s)$ имеет в $\overline{O}$ N_0 нулей. Около каждого нуля функции $h(s)$ опишем кружок малого радиуса так, чтобы каждый кружок содержал только один нуль и различные кружки не пересекались. Границы этих кружков и часть множества $\overline{O}$ вне кружков образует множество $\overline{O}'$. Так как множество $\overline{O}'$ замкнуто, то $\inf\limits_{s \in \overline{O}'} |h(s)| = m > 0$. Выберем теперь столь большое число $n > N_0$, чтобы во всех точках множества $\overline{O}'$ имело место неравенство $|g_n(s) - h(s)| < m \leqslant |h(s)|$. Из этого неравенства следует, что в $\overline{O}'$

*) B. Jessen [1], B. Jessen and Tornehave [1].

$|g_n(s)| \neq 0$. Применим теперь к функциям $h(s)$ и $g_n(s) - h(s)$ на каждом кружке теорему Руше. Мы убедимся, что $g_n(s)$ имеет в O не более N_0 нулей. Таким образом, мы пришли к противоречию, и теорема доказана.

Теорема 2.1.2. *Пусть G, O $\{g(s)\}$ означают то же, что и в предыдущей теореме и $A \subset O$ — произвольное замкнутое множество. Пусть $g(s)$ есть произвольная функция из множества $\{g(s)\}$. Для каждого $r > 0$ существует такое положительное число $m = m(r)$, что во всех точках множества A, расстояние которых до нулей функции $g(s)$, расположенных в O, не меньше r, выполняется неравенство $|g(s)| \geqslant m$.*

Доказательство. Обозначим через δ наименьшее расстояние от A до границы O. Достаточно предполагать, что $r < \delta$. Будем теперь рассуждать от противного.

Пусть

$$g_1(s),\ g_2(s),\ \ldots \tag{2.1.2}$$

— последовательность функций множества $\{g(s)\}$ и

$$s_1,\ s_2,\ \ldots \tag{2.1.3}$$

— последовательность точек из множества A, причем $|g_n(s_n)| < \frac{1}{n}$ и в круге $|s - s_n| < r$ $g_n(s)$ отлична от нуля. Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что последовательность (2.1.2) сходится равномерно в области O к предельной функции $h(s)$. По предположению $h(s) \not\equiv 0$. Обозначим через s' предельную точку последовательности (2.1.3). Легко видеть, что $h(s') = 0$. Выберем теперь столь малое положительное число $\rho < r$, чтобы $h(s)$ имела в круге $|s - s'| \leqslant \rho$ только один (быть может, кратный) нуль s'. Далее, положим $\min\limits_{|s-s'|=\rho} |h(s)| = m$ и выберем n столь большим, чтобы, во-первых, $|s_n - s'| < r - \rho$ и, во-вторых, в O, а значит, и на окружности $|s - s'| = \rho$ выполнялось неравенство $|g_n(s) - h(s)| < m$. Применяя к $h(s)$ и $g_n(s) - h(s)$ теорему Руше, мы установим, что функция $g_n(s)$ имеет в круге $|s - s'| < \rho$ по крайней мере один нуль. Так как $|s - s_n| \leqslant |s - s'| + |s' - s_n| < \rho + (r - \rho) = r$, то $g_n(s)$ имеет по крайней мере один нуль в круге $|s - s_n| < r$. Это противоречит сделанному предположению, и значит, теорема доказана.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $\{g(s)\}$, O *и* A *имеют то же самое значение, что и в предыдущей теореме. Пусть* $g(s)$ *есть произвольная функция из множества* $\{g(s)\}$. *Обозначим через* $s_1, s_2, \ldots, s_{N'}$ $(N' \leqslant N)$ *нули* $g(s)$, *расположенные в множестве* O. *Существует такая постоянная величина* $k > 0$, *что функция*

$$g^*(s) = \frac{g(s)}{\prod\limits_{m=1}^{N'} (s - s_m)}$$

во всех точках множества A *удовлетворяет неравенству* $|g^*(s)| \geqslant k$.

Доказательство. Эта теорема следует непосредственно из предыдущей теоремы, ибо множество функций $\{g^*(s)\}$ равномерно ограничено *), не содержит подпоследовательности, сходящейся к нулю, и каждая из функций $g^*(s)$ на множестве A в нуль не обращается.

3. Предположим, что функция $f(s)$ $(s = \sigma + it)$ аналитична в некоторой области G и отлична в этой области от тождественного нуля. Во всех точках, за исключением нулей $f(s)$, по формуле $f(s) = |f(s)|\, e^{i \arg f(s)}$ определяется с точностью до кратного 2π функция $\arg f(s)$.

Предположим, что L есть прямая (или отрезок прямой) из G. Мы будем в дальнейшем предполагать, что прямая L ориентирована, т. е. на L различается положительное и отрицательное направления.

Определим функцию $\arg^- f(s)$ $(s \in L)$, взяв произвольную ветвь аргумента функции $f(s)$ и продолжая далее ее во всех точках, где $f(s) \neq 0$ по непрерывности. Если же s проходит в положительном направлении нуль кратности p функции $f(s)$, то функции $\arg^- f(s)$ приписывается скачок $-p\pi$. Функция $\arg^- f(s)$ называется левым аргументом.

---

*) В окрестности каждого нуля функции $g(s)$ функция $g^*(s)$ оценивается через производные функции $g(s)$, которые равномерно ограничены (см. доказательство теоремы 1.2.2).

Аналогично определяется правый аргумент $\arg^+ f(s)$ на L как произвольная ветвь аргумента $f(s)$, непрерывная всюду, за исключением нулей $f(s)$ на L и со скачком $+p\pi$, если s проходит в положительном направлении нуль $f(s)$ кратности p.

В точках разрыва определенных сейчас функций мы будем приписывать функции среднее арифметическое значение. Обе функции $\arg^- f(s)$ и $\arg^+ f(s)$ таким образом определены во всех точках s на L, разумеется, с точностью до кратного 2π. Если $f(s)$ на L не имеет нулей, то каждая из функций совпадает с некоторой непрерывной ветвью $\arg f(s)$ на L. Пусть s_1 и s_2 — две точки на L, расположенные в положительном направлении прямой L. Тогда разности

$$\arg^- f(s_2) - \arg^- f(s_1), \quad \arg^+ f(s_2) - \arg^+ f(s_1)$$

не зависят от выбора ветви аргумента и называются изменением (вариацией) $\arg f(s)$ в пределах от s_1 до s_2 в левом (соответственно в правом) направлении. Очевидно, что

$$\arg^- f(s_2) - \arg^- f(s_1) \leqslant \arg^+ f(s_2) - \arg^+ f(s_1).$$

Из теоремы 2.1.1 непосредственно следует

Теорема 2.1.4. *Пусть $\{g(s)\}$ и A имеют тот же смысл, что и в теореме* 2.1.2. *Для каждого $l>0$ существует положительное число $v = v(l)$ такое, что изменение аргумента любой функции $g(s) \in \{g(s)\}$ в левом или в правом направлении вдоль каждой прямой длины, не большей l, принадлежащей A, меньше $v(l)$.*

4. Пусть $f(s)$ — аналитическая п.-п. функция в полосе (α, β) $(-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty)$, не равная тождественно нулю. Рассмотрим семейство аналитических п.-п. функций $\{g(s)\} = \{f(s+it^*)\}$, $-\infty < t^* < \infty$. Определим теперь множества точек G, O и A. Пусть $\alpha < \alpha_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_0 < \beta$ и $0 < d < \min(\alpha_1 - \alpha_0, \beta_0 - \beta_1)$. В качестве G выберем вертикальную полосу (α_0, β_0); в качестве O — прямоугольник $\alpha_1 - d < \sigma < \beta_1 + d$; $-\frac{1}{2} - d < t < \frac{1}{2} + d$ и в качестве A — прямоугольник $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$; $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$. В области G функции $f(s+it^*)$ равномерно ограничены. Покажем, что никакая последовательность $f(s+it_n^*)$ $(n=1, 2, \ldots)$ не может сходиться равномерно в O к нулю. Допустим противное. Пусть последовательность

$$f(s+it_1^*),\ f(s+it_2^*),\ \ldots \tag{2.1.4}$$

сходится равномерно в O к нулю. Пусть σ_0 — произвольное число из интервала (α, β). Положим $s=\sigma_0+it$. Последовательность функций

$$f[\sigma_0+i(t+t_n^*)]=\varphi(t+t_n^*)\quad (n=1, 2, \ldots) \tag{2.1.5}$$

сходится равномерно к нулю, если $-\frac{1}{2}-d<t<\frac{1}{2}+d$. Так как $\varphi(t)=f(\sigma_0+it)$ — равномерная п.-п. функция действительной переменной t, то, не нарушая общности рассуждений (см. теорему 1.1.3, часть I) можно предполагать, что последовательность (2.1.5) сходится равномерно для всех t. В силу аналитичности предельная функция будет равна нулю тождественно. Последнее невозможно, так как найдется такое $h>0$, что $|f(\sigma_0+it)|>h$ для относительно плотного множества значений t. Значит, для каждого n можно указать такое t, что

$$|f[\sigma_0+i(t+t_n^*)]|>h.$$

Последнее неравенство противоречит равномерной сходимости к нулю функций $\varphi(t+t_n^*)$.

Итак, к семейству $\{f(s+it^*)\}$ применимы теоремы 2.1.1—2.1.4. Более того, пусть $f_0(s)$, $f_1(s)$, ... — последовательность п.-п. в полосе (α, β) функций, сходящаяся равномерно в полосе (α, β) к пределу $f_0(s)$. Если ни одна из функций $f_n(s)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ не равна тождественно нулю, то теоремы 2.1.1—2.1.4 применимы к множеству всех функций $\{f_n(s+it^*)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots;$ $-\infty<t^*<\infty)$.

В самом деле, эти функции в области G равномерно ограничены. Покажем, что никакая последовательность рассматриваемого множества функций не может сходиться к нулю. В самом деле, пусть последовательность

$$f_{n_1}(s+it_1^*),\ f_{n_2}(s+it_2^*),\ \ldots \tag{2.1.6}$$

сходится к нулю в области O. Если все индексы n_k ограничены, то хотя бы один из них повторяется бесконечное число раз. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что в (2.1.6) все n_k совпадают и, следовательно, мы имеем предыдущий случай. Если индексы n_k не ограничены, то, не нарушая общности рассуждений, можно принять, что в (2.1.6) все n_k различны. По условию последовательность $f_{n_k}(s)$ сходится равномерно в (α, β) к $f_0(s)$. Поэтому последовательность $f_0(s+it_k^*)$ сходится равномерно в O к нулю, что, как мы видели, невозможно.

Применяя теоремы 2.1.1—2.1.4 к множествам $\{f(s+it^*)\}$ $(-\infty<t^*<\infty)$ и $\{f_n(s+it^*)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots;$ $-\infty<t^*<\infty)$, мы получим следующую теорему.

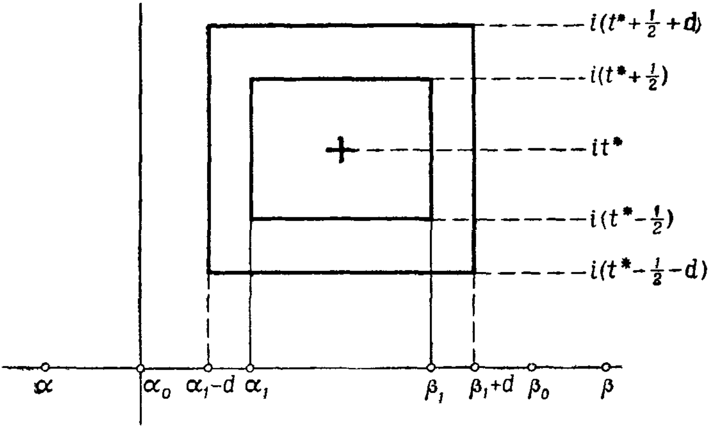

Рис. 4.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $-\infty\leqslant\alpha<\alpha_0<\alpha_1<\beta_1<\beta_0<$ $<\beta\leqslant\infty$ *и* d — *положительное число, меньше обеих разностей* $\alpha_1-\alpha_0$, $\beta_0-\beta_1$. *Пусть, далее,* $f(s)$ *есть аналитическая п.-п. функция в полосе* (α, β), *не равная тождественно нулю. Имеют место следующие утверждения* (рис. 4).

1) *Существует такое число* N (*не зависящее от числа* t^*), *что число нулей функции* $f(s)$ *в каждом прямоуголь-*

нике $\alpha_1 - d < \sigma < \beta_1 + d$; $t^* - \frac{1}{2} - d < t < t^* + \frac{1}{2} + d$ *не превосходит* N.

2) *Для каждого положительного* r *существует положительное число* $m = m(r)$ *такое, что во всех точках полосы* $[\alpha_1, \beta_1]$, *расстояние которых до нулей* $f(s)$ *полосы* (α_0, β_0) *больше или равно* r, *имеет место неравенство* $|f(s)| \geqslant m$.

3) *Обозначим для произвольного действительного числа* t^* *через* $s_1, s_2, \ldots, s_{N^*}$ $(N^* \leqslant N)$ *нули* $f(s)$ *в прямоугольнике* $\alpha_1 - d < \sigma < \beta_1 + d$; $t^* - \frac{1}{2} - d < t < t^* + \frac{1}{2} + d$. *Существует такая постоянная величина* $k > 0$, *что функция*

$$f^*(s) = \frac{f(s)}{\prod\limits_{m=1}^{N^*} (s - s_m)}$$

в прямоугольнике $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$; $t^* - \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant t^* + \frac{1}{2}$ *удовлетворяет неравенству* $|f^*(s)| \geqslant k$.

4) *Для каждого* $l > 0$ *существует постоянное число* $v(l)$ *такое, что изменение аргумента* $f(s)$ *в левом или в правом направлении на каждой прямой длины, не большей* l, *полосы* $[\alpha_1, \beta_1]$ *не превосходит* $v(l)$.

5) *Если последовательность п.-п. в полосе* (α, β) *функций* $f_1(s), f_2(s), \ldots$ *сходится равномерно в* (α, β) *к пределу* $f_0(s)$, *не равному нулю тождественно, и если ни одна из функций* $f_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *не равна нулю тождественно, то утверждения* 1) — 4) *справедливы для всех функций* $f_n(s)$ с N, $m(r)$, k и $v(l)$, *не зависящими от* n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

§ 2. Среднее движение и плотность нулей для аналитических п.-п. функций

1. Пусть $f(s)$ есть аналитическая п.-п. в полосе (α, β) функция. Пусть σ принадлежит интервалу (α, β). Рассмотрим прямую $L: s = \sigma + it$, ориентированную по росту t. Как и прежде, мы будем обозначать через $\arg^- f(s)$,

$\arg^{+} f(s)$ левый (соответственно правый) аргумент $f(s)$ на прямой L.

Пусть $-\infty < \gamma < \delta < \infty$. Рассмотрим изменение левого и правого аргументов в пределах от $\sigma + i\gamma$ до $\sigma + i\delta$:

$$\arg^{-} f(\sigma + i\delta) - \arg^{-} f(\sigma + i\gamma); \quad \arg^{+} f(\sigma + i\delta) - \arg^{+} f(\sigma + i\gamma).$$

Из определения левого и правого аргументов непосредственно следует, что как функция переменной σ первая разность непрерывна слева, а вторая — справа. Далее, мы имеем, как и в общем случае (см. предыдущий параграф):

$$\arg^{-} f(\sigma + i\delta) - \arg^{-} f(\sigma + i\gamma) \leqslant \arg^{+} f(\sigma + i\delta) - \arg^{+} f(\sigma + i\gamma).$$

Введем в рассмотрение четыре числа:

$$\begin{cases} \underline{c}^{\pm}(\sigma) = \underline{\lim}_{(\delta-\gamma)\to\infty} \dfrac{\arg^{\pm} f(\sigma + i\delta) - \arg^{\pm} f(\sigma + i\gamma)}{\delta - \gamma}, \\ \overline{c}^{\pm}(\sigma) = \overline{\lim}_{(\delta-\gamma)\to\infty} \dfrac{\arg^{\pm} f(\sigma + i\delta) - \arg^{\pm} f(\sigma + i\gamma)}{\delta - \gamma}, \end{cases}$$

$\underline{c}^{-}(\sigma)$ называется нижним левым средним движением функции $f(s)$, на прямой $s = \sigma + it$ $(-\infty < t < \infty)$, $\overline{c}^{-}(\sigma)$ — верхним левым средним движением и т. д.

Из теоремы 2.1.5 непосредственно следует, что для каждого σ эти числа конечны и даже ограничены в полосе (α, β). Если $\underline{c}^{-}(\sigma) = \overline{c}^{-}(\sigma) = c^{-}(\sigma)$ или $\underline{c}^{+}(\sigma) = \overline{c}^{+}(\sigma) = c^{+}(\sigma)$, то числа $c^{-}(\sigma)$ и $c^{+}(\sigma)$ называются левым (соответственно правым) средним движением $f(s)$ на прямой σ.

2. Пусть $\alpha < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta$ и $-\infty < \gamma < \delta < +\infty$. Обозначим через $N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)$ число нулей функции $f(s)$ в прямоугольнике $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$; $\gamma < t < \delta$.

Числа

$$\begin{cases} \underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \underline{\lim}_{\delta-\gamma\to\infty} \dfrac{N(\sigma_1, \sigma_2, \gamma, \delta)}{\delta - \gamma}, \\ \overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \overline{\lim}_{\delta-\gamma\to\infty} \dfrac{N(\sigma_1, \sigma_2, \gamma, \delta)}{\delta - \gamma} \end{cases}$$

называются нижней (соответственно верхней) плотностью нулей функции $f(s)$ в полосе (σ_1, σ_2). Из теоремы 2.1.5

непосредственно следует, что эти числа конечны. Если $\underline{H}=\overline{H}=H$, то число $H(\sigma_1, \sigma_2)$ называется плотностью нулей функции $f(s)$ в полосе (σ_1, σ_2).

Замечание. В силу теоремы 2.1.5 при определении чисел $\underline{H}$ и $\overline{H}$ можно предполагать, что числа γ и δ принадлежат к некоторому относительно плотному множеству чисел. В самом деле, число нулей функции $f(s)$ в каждом конечном прямоугольнике полосы (σ_1, σ_2) конечно. Поэтому горизонтальные прямые полосы (σ_1, σ_2), на которых расположены нули функции $f(s)$, не могут сгущаться при удалении этих прямых в бесконечность.

3. С помощью теоремы Коши легко установить связь между средними движениями и плотностями нулей.

Теорема 2.2.1. *Пусть аналитическая функция $f(s)$ п.-п. в полосе (α, β) и отлична от тождественного нуля. Средние движения и плотности нулей в произвольной полосе (σ_1, σ_2) $(\alpha < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta)$ связаны следующими неравенствами:*

$$\frac{1}{2\pi}[\underline{c}^-(\sigma_2) - \bar{c}^+(\sigma_1)] \leqslant \underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}[\bar{c}^-(\sigma_2) - c^+(\sigma_1)]. \qquad (2.2.1)$$

Доказательство. В силу замечания, сделанного в конце предыдущего пункта, можно предполагать, что на прямых $t=\gamma$, $t=\delta$, $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ функция $f(s)$ не имеет нулей. Предположим для определенности, что на прямых $\sigma=\sigma_1$, $\gamma \leqslant t \leqslant \delta$, $\sigma=\sigma_2$, $\gamma \leqslant t \leqslant \delta$ $f(s)$ имеет по одному нулю: $s_1=\sigma_1+it_1$ и $s_2=\sigma_2+it_2$ кратностей соответственно p и q. Применим к функции $\frac{d}{ds}\ln f(s)$ и к контуру L, указанному на рис. 5, теорему Коши. Обозначим через ρ радиусы полуокружностей γ_1 и γ_2 с центрами в точках s_1 и s_2. При достаточно малом ρ число нулей $f(s)$ внутри контура L совпадает с числом нулей внутри прямоугольника $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $\gamma < t < \delta$, т. е. с $N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)$.

Поэтому в силу известной теоремы *)

$$N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \arg f(s).$$

Обозначим через $R(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)$ долю изменения аргумента $f(s)$ на горизонтальных сторонах контура L и через $\Delta_{\sigma_1} \arg f(s)$ и $\Delta_{\sigma_2} \arg f(s)$ — на вертикальных сторонах этого контура. Так как направление на γ_1 и γ_2

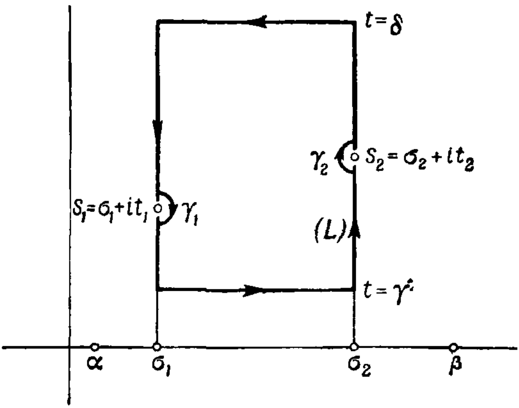

Рис. 5.

противоположно положительному направлению, то в силу теоремы о вычетах

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = -\pi i p; \qquad \int\limits_{\gamma_2} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = -\pi i q,$$

т. е. при обходе контуров γ_1 и γ_2 $\arg f(s)$ изменяется на $-\pi p$, соответственно на $-\pi q$. Поэтому

$$\Delta_{\sigma_2} \arg f(s) = [\arg^- f(\sigma_2 + i\delta) - \arg^- f(\sigma_2 + i\gamma)],$$
$$\Delta_{\sigma_1} \arg f(s) = -[\arg^+ f(\sigma_1 + i\delta) - \arg^+ f(\sigma_1 + i\gamma)].$$

*) См., например, И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного (1945), стр. 222.

Таким образом,

$$N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta) = \frac{1}{2\pi}\{[\arg^- f(\sigma_2 + i\delta) - \arg^- f(\sigma_2 + i\gamma)] -$$
$$- [\arg^+ f(\sigma_1 + i\delta) - \arg^+ f(\sigma_1 + i\gamma)] + R(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)\}. \quad (2.2.2)$$

В силу теоремы 2.1.5 для всех γ и δ величина R ограничена. Поэтому, разделив обе части равенства (2.2.2) на $(\delta - \gamma)$ и полагая $(\delta - \gamma) \to \infty$, а также принимая во внимание определения средних движений и плотностей нулей, мы получим утверждение настоящей теоремы.

4. Имея в виду дальнейшие результаты, укажем несколько непосредственных следствий из теоремы 2.2.1.

1) Если $c^+(\sigma_1)$ существует, то для каждого $\sigma_2 > \sigma_1$ справедливы равенства

$$\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[\underline{c}^-(\sigma_2) - c^+(\sigma_1)];$$
$$\overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[\overline{c}^-(\sigma_2) - c^+(\sigma_1)].$$

2) Если $c^-(\sigma_2)$ существует, то для каждого $\sigma_1 < \sigma_2$ справедливы равенства

$$\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[c^-(\sigma_2) - \overline{c}^+(\sigma_1)];$$
$$\overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[c^-(\sigma_2) - \underline{c}^+(\sigma_1)].$$

3) Если существуют две из трех величин $c^+(\sigma_1)$, $c^-(\sigma_2)$, $H(\sigma_1, \sigma_2)$, то существует также и третья из этих величин, причем

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[c^-(\sigma_2) - c^+(\sigma_1)].$$

§ 3. Функция Иенсена*)

1. Дальнейшее изучение средних движений и плотностей нулей зависит от функции Иенсена, существование которой доказывается с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.3.1. *Для каждой п.-п. в полосе* (α, β) *функции* $f(s)$, *не равной тождественно нулю, существует*

*) B. Jessen [1].

равномерно по σ *в интервале* $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, *среднее значение*

$$\varphi(\sigma) = \underset{t}{M}\{\ln|f(\sigma+it)|\},$$

т. е. функция

$$\varphi(\sigma;\ \gamma,\ \delta) = \frac{1}{\delta-\gamma}\int\limits_{\gamma}^{\delta} \ln|f(\sigma+it)|\,dt$$

стремится равномерно по σ *в* $[\alpha_1, \beta_1]$ *при* $(\delta-\gamma)\to\infty$ *к пределу* $\varphi(\sigma)$. *Функцию* $\varphi(\sigma)$ *можно также определить следующим образом.*

Пусть $m > 0$ *выбрано произвольно. Положим* $|f(s)|_m = \max\{|f(s)|,\ m\}$

$$\varphi_m(\sigma) = \underset{t}{M}\{\ln|f(\sigma+it)|_m\}.$$

При $m\to 0$ $\varphi_m(\sigma)$ *сходятся равномерно в* $[\alpha_1, \beta_1]$ к $\varphi(\sigma)$. *Функция* $\varphi(\sigma)$ *называется функцией Иенсена для функции* $f(s) = f(\sigma+it)$. *Так как* $\varphi(\sigma;\ \gamma,\ \delta)$ *при фиксированных* γ, δ *как функция* σ *непрерывна, то из теоремы следует, что* $\varphi(\sigma)$ *непрерывна.*

Доказательство. Пусть $[\alpha_1, \beta_1]$ — подинтервал интервала (α, β). Выберем произвольное $m > 0$. Для каждого σ из интервала (α, β) функция $\ln|f(\sigma+it)|_m$ есть равномерная п.-п. функция переменной t. Если σ менять в интервале $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$, то мы получим множество равностепенно непрерывных, равностепенно ограниченных и равностепенно п.-п. функций. Поэтому среднее значение

$$\underset{t}{M}\{\ln|f(\sigma+it)|_m\} = \lim_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta-\gamma}\int\limits_{\gamma}^{\delta} \ln|f(\sigma+it)|_m\,dt$$

существует равномерно по σ в интервале $[\alpha_1, \beta_1]$. Так как $\ln|f(\sigma+it)|_m \geqslant \ln|f(\sigma+it)|$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что для каждого ε найдется такое m, что для $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$ и $(\delta-\gamma) > 1$

$$\frac{1}{\delta-\gamma}\int\limits_{\gamma}^{\delta} \ln|f(\sigma+it)|_m\,dt - \varphi(\sigma;\ \gamma,\ \delta) < \varepsilon \qquad (2.3.1)$$

или иначе

$$\int_{\gamma}^{\delta} \{\ln|f(\sigma+it)|_m - \ln|f(\sigma+it)|\}\,dt < \varepsilon(\delta-\gamma). \quad (2.3.2)$$

Если мы докажем неравенство (2.3.1), то тем самым мы докажем первую часть теоремы. Полагая затем в неравенстве (2.3.1) $(\delta-\gamma)\to\infty$, мы получим для $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$

$$\underset{t}{M}\{\ln|f(\sigma+it)|_m\} - \varphi(\sigma) < \varepsilon, \quad (2.3.3)$$

а это есть вторая часть теоремы. Остается доказать неравенство (2.3.1). Для этого мы используем теорему 2.1.5. Пусть $\alpha < \alpha_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_0 < \beta$; $d = \min\{(\alpha_1-\alpha_0), (\beta_0-\beta_1)\}$. В силу теоремы 2.1.5 (п. 2) для каждого $r > 0$ существует такое $m = m(r) > 0$ (которое можно также считать меньшим единицы), что $|f(s)| \geqslant m$ или $|f(s)|_m = |f(s)|$ для всех точек s полосы $[\alpha_1, \beta_1]$, расстояние которых от всех нулей $f(s)$ полосы $[\alpha_0, \beta_0]$ не меньше, чем r.

Выберем некоторое $r < d$. По теореме 2.1.5 можно указать не зависящее от r целое число N, обладающее тем свойством, что в каждом интеграле

$$I = \int_{t^*-\frac{1}{2}}^{t^*+\frac{1}{2}} \{\ln|f(\sigma+it)|_m - \ln|f(\sigma+it)|\}\,dt$$

$$(\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1;\ -\infty < t^* < \infty)$$

подинтегральная функция положительна не более чем в N подинтервалах, полная длина которых не больше $2rN$, а в остальных точках равна нулю.

Выберем $m = m(r) < 1$. Легко видеть, что в указанных подинтервалах

$$\ln|f(\sigma+it)|_m - \ln|f(\sigma+it)| \leqslant -\ln^-|f(\sigma+it)|.$$

Поэтому в силу теоремы 2.1.5 (п. 3) существует такое не зависящее от r постоянное число $k > 0$, что если $s_1 = \sigma_1 + it_1, \ldots, s_{N^*} = \sigma_{N^*} + it_{N^*}$ $(N^* \leqslant N)$ суть нули $f(s)$ в прямоугольнике $\alpha_1 - d < \sigma < \beta_1 + d$; $t^* - \frac{1}{2} - d < t < t^* +$

$+\frac{1}{2}+d$, то для прямоугольника $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$; $t^*-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant$ $\leqslant t^*+\frac{1}{2}$ имеет место неравенство*)

$$\ln|f(\sigma+it)|_m - \ln|f(\sigma+it)| \leqslant -\ln^- k - \sum_{n=1}^{N^*} \ln^-|s-s_n| \leqslant$$
$$\leqslant -\ln^- k - \sum_{n=1}^{N^*} \ln^-|t-t_n|.$$

Из последней оценки мы заключаем, что для каждого интеграла I справедлива оценка

$$I \leqslant -\ln^- k \cdot 2rN - N \int_{-Nr}^{Nr} \ln^-|u|\,du.$$

Последняя величина при $r \to 0$ также стремится к нулю, ибо числа N и k от r не зависят. Выберем теперь число r такое, чтобы эта величина была $\frac{1}{2}\varepsilon$. Покажем, что при этом неравенство (2.3.2) выполняется для $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$, если только $m=m(r)$ выбрано соответственно этому r. В самом деле, обозначим через A наибольшее целое число, которое $\leqslant (\delta-\gamma)$. Тогда интеграл, стоящий слева в (2.3.2) $\leqslant (A+1)\,I \leqslant 2AI \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \cdot 2(\delta-\gamma) = \varepsilon(\delta-\gamma)$. Таким образом, теорема доказана.

2. С помощью неравенства (2.3.3) легко доказать следующую теорему.

Теорема 2.3.2. *Пусть $f_1(s)$, $f_2(s)$, … — последовательность п.-п. в полосе (α, β) функций, сходящаяся равномерно в этой полосе к функции $f_0(s)$. Если для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ функции $f_n(s)$ отличны от тождественного нуля, то функции Иенсена $\varphi_n(\sigma)$ сходятся при $n \to \infty$ равномерно в интервале (α, β) к $\varphi_0(\sigma)$ (функции Иенсена для $f_0(s)$). В этом смысле функция Иенсена $\varphi(\sigma)$ зависит непрерывно от функции $f(s)$.*

---

*) $\ln^- x$ для $x>0 = \min(\ln x, 0)$. Функция $-\ln^- x$ не отрицательна и убывает. Если $x = x_1 \ldots x_{N^*}$, то

$$-\ln^- x \geqslant -\ln^- x_1 - \ln^- x_2 - \ldots - \ln^- x_{N^*}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Рассмотрим интервал $[\alpha_1, \beta_1]$. В силу теоремы 2.1.5 (п. 5) числа N, k и $m(r)$ можно выбрать независимо от n. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $m < 1$, что для всех σ из $[\alpha_1, \beta_1]$ и всех n выполняется неравенство

$$\underset{t}{M}\{\ln|f_n(\sigma+it)|_m\} - \varphi_n(\sigma) < \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

При фиксированном m мы имеем равномерно в $[\alpha_1, \beta_1]$

$$\lim_{n\to\infty} \underset{t}{M}\{\ln|f_n(\sigma+it)|_m\} = \underset{t}{M}\{\ln|f_0(\sigma+it)|_m\}.$$

Поэтому для всех достаточно больших n

$$|\underset{t}{M}\{\ln|f_n(\sigma+it)|_m\} - \underset{t}{M}\{\ln|f_0(\sigma+it)|_m\}| < \varepsilon. \tag{2.3.5}$$

Из (2.3.4) и (2.3.5) следует

$$|\varphi_0(\sigma) - \varphi_n(\sigma)| \leqslant |\varphi_0(\sigma) - \underset{t}{M}\{\ln|f_0(\sigma+it)|_m\}| +$$
$$+ |\underset{t}{M}\{\ln|f_0(\sigma+it)|_m\} - \underset{t}{M}\{\ln|f_n(\sigma+it)|_m\}| +$$
$$+ |\underset{t}{M}\{\ln|f_n(\sigma+it)|_m\} - \varphi_n(\sigma)| < 3\varepsilon.$$

Так как число ε можно выбрать произвольно, то теорема доказана.

§ 4. Выпуклые функции

1. Определение. *Функция $\varphi(x)$ называется выпуклой в интервале (α, β), если для любой пары точек P_1, P_2, принадлежащих кривой $y = \varphi(x)$, точки дуги P_1P_2 лежат на хорде P_1P_2 или ниже ее.*

Лемма 2.4.1. *Если $\varphi(x)$ — выпуклая функция, то для любой системы положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, для которой $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, и любой системы точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из интервала (α, β) выполняется неравенство*

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha\varphi(x_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(x_n). \tag{2.4.1}$$

Доказательство. Для $n = 2$ неравенство (2.4.1) следует непосредственно из определения выпуклой функции. Для произвольного n его можно получить с помощью индукции. В самом деле, легко видеть, что существует такое число y_1 в интервале (α, β), что

$$\alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = (\alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\, y_1.$$

Поэтому

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 \varphi(x_1) + (\alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\, \varphi(y_1) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 \varphi(x_1) + (\alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \frac{1}{\alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \times$$
$$\times \{\alpha_2 \varphi(x_2) + \ldots + \alpha_n \varphi(x_n)\} = \alpha_1 \varphi(x_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(x_n).$$

2. Следующая теорема вскрывает полностью структуру выпуклых функций.

Теорема 2.4.1. *Для того чтобы функция $\varphi(x)$, определенная во всех точках некоторого конечного интервала $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была неопределенным интегралом функции, неубывающей и интегрируемой на интервале $[\alpha, \beta]$, т. е.*

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \int_\alpha^x \xi(t)\, dt, \quad \text{где} \quad \xi(t_1) \leqslant \xi(t_2) \quad \text{для} \quad t_1 < t_2. \tag{2.4.2}$$

Доказательство. 1) Докажем достаточность. Следует показать, что если (2.4.2) имеет место, то для любого положительного $\theta < 1$ и любых x_1 и x_2 из интервала (α, β) выполняется неравенство

$$\varphi(x) \leqslant (1-\theta)\, \varphi(x_1) + \theta \varphi(x_2), \quad \text{где} \quad x = (1-\theta)\, x_1 + \theta x_2.$$

Не нарушая общности, можно принять, что $x_1 = 0$, $\varphi(x_1) = 0$, так что дело сводится к доказательству неравенства

$$\int_0^{\theta x_2} \xi(t)\, dt \leqslant \theta \int_0^{x_2} \xi(t)\, dt$$

или

$$(1-\theta) \int_0^{\theta x_2} \xi(t)\, dt \leqslant \theta \int_{\theta x_2}^{x_2} \xi(t)\, dt. \tag{2.4.3}$$

Из монотонности $\xi(t)$ следует

$$(1-\theta)\int_0^{\theta x_2} \xi(t)\,dt \leqslant \theta(1-\theta)\,x_2\xi(\theta x_2);$$

$$\theta\int_{\theta x_2}^{x_2} \xi(t)\,dt \geqslant \theta(1-\theta)\,x_2\xi(\theta x_2),$$

что и доказывает неравенство (2.4.3).

2) Докажем необходимость. Положим для $h \neq 0$

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = R(x,\ h).$$

Покажем, что

$$R(x,\ -k) \leqslant R(x,\ h), \tag{2.4.4}$$

$$R(x,\ h) \leqslant R(x,\ h_1), \tag{2.4.5}$$

если только $0 < k$, $0 < h < h_1$, и точки x, $x-k$, $x+h_1$ принадлежат интервалу $[\alpha,\ \beta]$. Это следует из геометрического значения $R(x,\ h)$: $R(x,\ h)$ есть тангенс угла, образованного хордой, соединяющей точки $[x,\ \varphi(x)]$, $[x+h,\ \varphi(x+h)]$ с осью OX. Если кривая $y=\varphi(x)$ выпукла, то этот угол должен расти при возрастании h, так как в противном случае нашелся бы участок, кривой, лежащей над хордой.

Из (2.4.5) следует, что при $h \to 0$ отношение $R(x,\ h)$ стремится к определенному пределу, а из (2.4.4) следует, что этот предел, который представляет собой правую производную $D^+\varphi(x)$, конечен для $\alpha < x < \beta$.

Аналогичным образом можно доказать, что для $0 < h < h_1$, $R(x,\ -h_1) \leqslant R(x,\ -h)$ и, следовательно, левая производная $D^-\varphi(x)$ существует и конечна для $\alpha < x < \beta$. Из (2.4.4) следует, что

$$D^-\varphi(x) \leqslant D^+\varphi(x). \tag{2.4.6}$$

Пусть теперь $\alpha < x < x_1 < \beta$ и $h > 0$, $h+k = x_1 - x$, так что $x+h = x_1 - k$. Имеем:

$$D^+\varphi(x) \leqslant R(x,\ h) \leqslant R(x_1,\ -k) \leqslant D^-\varphi(x_1).$$

Отсюда и из неравенства (2.4.6) следует, что для $x < x_1$

$$D^-\varphi(x) \leqslant D^-\varphi(x_1); \qquad D^+\varphi(x) \leqslant D^+\varphi(x_1), \qquad (2.4.7)$$

т. е. производные $D^-\varphi(x)$ и $D^+\varphi(x)$ не убывают. Так как множество точек, где неубывающая функция разрывна, самое большее счетно, то из (2.4.6) и (2.4.7) следует, что $\varphi'(x)$ существует всюду, за исключением самое большее счетного множества точек. Производная $\varphi'(x)$ равномерно ограничена в каждом интервале $[\alpha', \beta']$, целиком содержащемся внутри интервала $[\alpha, \beta]$. Поэтому равенство (2.4.2) во всяком случае справедливо, если $\alpha = \alpha'$ и $\xi(t) = \varphi'(t)$, а x меняется в интервале $[\alpha', \beta']$. Беря $\alpha' \to \alpha$ и $\beta' \to \beta$ и замечая, что $\varphi(t)$ непрерывна*), мы получим формулу (2.4.2) с $\xi(t) = \varphi'(t)$. Чтобы доказать интегрируемость $\varphi'(t)$, достаточно лишь заметить, что эта функция имеет постоянный знак в окрестности точек α и β, так что из существования несобственного интеграла следует интегрируемость в смысле Лебега.

§ 5. Связь между функцией Иенсена, средним движением и плотностью нулей аналитической п.-п. функции

1. Теорема 2.5.1. *Пусть $f(s)$ — п.-п. функция в полосе (α, β) и не равна тождественно нулю. Соответствующая ей функция Иенсена $\varphi(\sigma)$ выпукла в (α, β) и для каждого $\sigma \in (\alpha, \beta)$ четыре средних движения удовлетворяют неравенствам*

$$\varphi'(\sigma - 0) \leqslant c^-(\sigma) \leqslant \bar{c}^+(\sigma) \leqslant \varphi'(\sigma + 0).$$

Далее, две плотности нулей удовлетворяют в каждой полосе (σ_1, σ_2) $(\alpha < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta)$ неравенствам

$$\frac{1}{2\pi}\{\varphi'(\sigma_2 - 0) - \varphi'(\sigma_1 + 0)\} \leqslant \underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\{\varphi'(\sigma_2 + 0) - \varphi'(\sigma_1 - 0)\}.$$

*) Геометрически очевидно, что если функция $\varphi(x)$ выпукла, то в окрестности каждой точки она монотонна как слева, так и справа. Поэтому существуют $\varphi(x+0)$ и $\varphi(x-0)$. Более того, $\varphi(x+0) = \varphi(x-0)$, так что $\varphi(x)$ непрерывна.

Доказательство. Достаточно доказать выпуклость функции $\varphi(\sigma)$ и два неравенства

$$\varphi'(\sigma-0) \leqslant \underline{c}^-(\sigma) \quad \text{и} \quad \bar{c}^+(\sigma) \leqslant \varphi'(\sigma+0). \qquad (2.5.1)$$

так как после этого остальные утверждения теоремы будут следовать из теоремы (2.2.1). Более того, если выпуклость $\varphi(\sigma)$ уже доказана, то неравенства (2.5.1) достаточно доказать в каждом интервале $[\alpha_1, \beta_1]$. В самом деле, в этом случае из выпуклости $\varphi(\sigma)$ легко получить неравенства (2.5.1) в интервале $[\alpha, \beta]$.

В силу того, что $f(s)$ — п.-п. функция, для каждых α_1 и β_1 можно указать такое число $m > 0$ и такое относительно плотное множество чисел, что если t_0 принадлежит этому относительно плотному множеству чисел, то на каждом отрезке $\alpha_1 \leqslant \sigma \leqslant \beta_1$, $t = t_0$ $|f(s)| \geqslant m$ (см. теорему 2.1.5). Обозначим через K верхнюю грань $|f'(s)|$ в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$. Тогда на каждом из упомянутых отрезков имеет место неравенство

$$\left|\frac{d \ln f(s)}{ds}\right| = \left|\frac{f'(s)}{f(s)}\right| \leqslant \frac{K}{m}.$$

Пусть $\alpha_1 < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta_1$ и числа γ и δ принадлежат к рассмотренному относительно плотному множеству. Тогда в формуле (2.2.2) остаток $R(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)$ удовлетворяет неравенству

$$|R| < \frac{2K}{m}(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(\sigma; \gamma, \delta) = \frac{1}{\delta-\gamma} \int_\gamma^\delta \ln|f(\sigma+it)|\, dt.$$

Если для некоторого σ $f(\sigma+it) \neq 0$ для $\gamma \leqslant t \leqslant \delta$, то функция $\varphi(\sigma; \gamma, \delta)$ дифференцируема по σ, причем

$$\varphi'_\sigma(\sigma; \gamma, \delta) = \frac{\arg f(\sigma+i\delta) - \arg f(\sigma+i\gamma)}{\delta-\gamma}. \qquad (2.5.2)$$

Действительно, в этом случае

$$\ln f(s) = \ln|f(s)| + i \arg f(s).$$

Поэтому из формулы Коши-Римана следует, что

$$\frac{d}{d\sigma}\ln|f(\sigma+it)| = \frac{d}{dt}\arg f(\sigma+it).$$

Из последнего равенства формула (2.5.2) следует непосредственно. Для данных γ и δ существует самое большее конечное число исключительных значений σ. Для этих исключительных значений σ правая часть (2.5.2) имеет пределы слева и справа, а именно*)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\sigma}'(\sigma-0;\ \gamma,\ \delta) &= \frac{\arg^{-} f(\sigma+i\delta)-\arg^{-} f(\sigma+i\gamma)}{\delta-\gamma}, \\ \varphi_{\sigma}'(\sigma+0;\ \gamma,\ \delta) &= \frac{\arg^{+} f(\sigma+i\delta)-\arg^{+} f(\sigma+i\gamma)}{\delta-\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (2.5.3)$$

Таким образом, формула (2.2.2) принимает следующий вид:

$$\frac{N(\sigma_1,\ \sigma_2;\ \gamma,\ \delta)}{\delta-\gamma} = \\ = \frac{1}{2\pi}\{\varphi'(\sigma_2-0;\ \gamma,\ \delta)-\varphi'(\sigma_1+0;\ \gamma,\ \delta)+r(\sigma_1,\ \sigma_2;\ \gamma,\ \delta)\}, \quad (2.5.4)$$

причем остаток r удовлетворяет неравенству

$$|r| < \frac{1}{\delta-\gamma}\frac{2K}{m}(\sigma_2-\sigma_1).$$

Функция $\varphi(\sigma;\ \gamma,\ \delta)$ сама, вообще говоря, не выпукла. Поэтому мы рассмотрим функцию

$$\varphi_1(\sigma;\ \gamma,\ \delta) = \varphi(\sigma;\ \gamma,\ \delta) + \frac{1}{\delta-\gamma}\frac{K}{m}\sigma^2,$$

которая при больших $\delta-\gamma$ мало отличается от $\varphi(\sigma;\ \gamma,\ \delta)$ и вместе с тем, как мы сейчас покажем, выпукла. Равенство (2.5.4) можно теперь записать в виде

$$\frac{N(\sigma_1,\ \sigma_2;\ \gamma,\ \delta)}{\delta-\gamma} = \\ = \frac{1}{2\pi}\{\varphi_1'(\sigma_2-0;\ \gamma,\ \delta)-\varphi_1'(\sigma_1+0;\ \gamma,\ \delta)+r_1(\sigma_1,\ \sigma_2;\ \gamma,\ \delta)\},$$

---

*) В этом легко убедиться, применив формулу (2.2.2) к прямоугольникам σ, $\sigma\pm\varepsilon$; $\gamma\leqslant t\leqslant\delta$.

причем новый остаток r_1 удовлетворяет неравенству

$$-\frac{1}{\delta-\gamma}\frac{4K}{m}(\sigma_2-\sigma_1)\leqslant r_1\leqslant 0.$$

Так как $N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)\geqslant 0$, то из последнего неравенства следует, что

$$\varphi_1'(\sigma_1+0;\ \gamma,\ \delta)\leqslant\varphi_1'(\sigma_2-0;\ \gamma,\ \delta).$$

Последнее неравенство как раз и означает, что функция $\varphi_1(\sigma;\ \gamma,\ \delta)$ выпукла.

Теперь доказательство теоремы заканчивается в нескольких словах. По теореме 2.3.1 мы имеем равномерно в интервале $[\alpha_1,\ \beta_1]$

$$\varphi(\sigma)=\lim_{(\delta-\gamma)\to\infty}\varphi_1(\sigma;\ \gamma,\ \delta).$$

Поэтому функция $\varphi(\sigma)$ также выпукла. Следовательно, для каждого $\sigma\in[\alpha_1,\ \beta_1]$ существуют производные $\varphi'(\sigma-0)$, $\varphi'(\sigma+0)$ и

$$\varphi'(\sigma-0)\leqslant\underline{\lim}_{(\delta-\gamma)\to\infty}\varphi_1'(\sigma-0;\ \gamma,\ \delta)=\underline{\lim}_{(\delta-\gamma)\to\infty}\varphi'(\sigma-0;\ \gamma,\ \delta);$$

$$\overline{\lim}_{(\delta-\gamma)\to\infty}\varphi'(\sigma+0;\ \gamma,\ \delta)=\overline{\lim}_{\delta-\gamma\to\infty}\varphi_1'(\sigma+0;\ \gamma,\ \delta)\leqslant\varphi'(\sigma+0).$$

Комбинируя эти неравенства с (2.5.3), мы устанавливаем неравенства (2.5.1). Таким образом, теорема полностью доказана.

2. Из теоремы 2.5.1 можно получить

Следствие 1. Если функция $\varphi(\sigma)$ в некоторой точке σ дифференцируема, то левые и правые средние движения $c^-(\sigma)$ и $c^+(\sigma)$ функции $f(\sigma+it)$ существуют и имеют общее значение

$$c^-(\sigma)=c^+(\sigma)=\varphi'(\sigma).$$

Следствие 2. Если $\varphi(\sigma)$ дифференцируема в двух точках σ_1 и σ_2, то существует плотность нулей $f(s)$ $H(\sigma_1, \sigma_2)$ в полосе (σ_1, σ_2), причем

$$H(\sigma_1,\ \sigma_2)=\frac{1}{2\pi}\{\varphi'(\sigma_2)-\varphi'(\sigma_1)\}.$$

Последнюю формулу естественно назвать формулой Иенсена по аналогии с классической формулой теории аналитических функций *).

Следствие 3. Справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi}\{\varphi'(\sigma+0)-\varphi'(\sigma-0)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{H}(\sigma-\varepsilon,\ \sigma+\varepsilon).$$

Из этой формулы следует, что $\varphi(\sigma)$ дифференцируема в тех и только тех точках, где

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{H}(\sigma-\varepsilon,\ \sigma+\varepsilon)=0.$$

§ 6. Полосы без нулей. Периодические функции

1. Пусть $f(s)$ — п.-п. функция в полосе (α, β). Полосы, свободные от нулей функции $f(s)$, представляют особый интерес. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.6.1. *Пусть $f(s)$ — п.-п. функция в полосе (α, β) и не равна тождественно нулю. Функция $f(s)$ не имеет нулей в полосе $[\alpha_0, \beta_0]$ $(\alpha<\alpha_0<\beta_0<\beta)$ в том и только в том случае, когда функция Иенсена $\varphi(\sigma)$ линейна в интервале (α_0, β_0). В этом случае в каждой меньшей полосе $\alpha_0<\alpha_1\leqslant\sigma\leqslant\beta_1<\beta_0$*

$$\inf_{\substack{\alpha_1\leqslant\sigma\leqslant\beta_1\\ -\infty<t<\infty}}|f(s)|>0. \tag{2.6.1}$$

Более того, произвольная ветвь логарифма $f(s)$ имеет вид

$$\ln f(s)=cs+g(s), \tag{2.6.2}$$

где $c=\varphi'(\sigma)$ в интервале (α_0, β_0) и $g(s)$ — п.-п. функция в полосе (α_0, β_0). Число c и показатели Дирихле функции $g(s)$ принадлежат модулю показателей Дирихле функции $f(s)$.

Доказательство. Предположим, что $f(s)$ не имеет нулей в полосе (α_0, β_0). Тогда $\overline{H}(\alpha_0, \beta_0)=0$ и, следовательно, по теореме 2.5.1 $\varphi'(\alpha_0+0)=\varphi'(\beta_0-0)$. Из послед-

*) См., например, Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат (1951), стр. 147 и 314.

него равенства и выпуклости функции $\varphi(\sigma)$ следует ее линейность в интервале (α_0, β_0) (см. теорему 2.4.1).

Предположим теперь, что $f(s)$ имеет нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ в полосе (α_0, β_0), и покажем, что $\varphi(\sigma)$ не может быть во всем интервале (α_0, β_0) линейной функцией. Из аналитичности и почти-периодичности $f(s)$ легко следует, что если функция имеет один нуль в полосе (α_0, β_0), то она имеет бесчисленное множество нулей в этой же полосе, причем эти нули расположены относительно плотно. В самом деле, пусть σ_1 и σ_2 — два числа, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_0 < \sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2 < \beta_0$. Далее, выберем положительное число r так, чтобы выполнялись следующих два условия: 1) r меньше каждой из разностей $\sigma_0 - \sigma_1$ и $\sigma_2 - \sigma_0$ и 2) на окружности $|s - s_0| = r$ $|f(s)| \neq 0$. Положим $m = \min\limits_{|s-s_0|=r} |f(s)|$. Выберем произвольное положительное число $\varepsilon < m$, и пусть $\tau = \tau(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2)$ есть ε-почти-период для $f(s)$ в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Рассмотрим две функции $f(s)$ и $\varphi(s) = f(s) - f(s + i\tau)$. Из определения чисел τ легко следует, что на окружности $|s - s_0| = r$ $|\varphi(s)| \neq 0$ и $|\varphi(s)| < m \leqslant |f(s)|$. Поэтому применима теорема Руше и, следовательно, $f(s)$ имеет по крайней мере один нуль в круге $|s - (s_0 + i\tau)| < r$. Итак, множество нулей функции $f(s)$ в полосе (σ_1, σ_2) относительно плотно и, следовательно, $\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Из последнего неравенства и теоремы 2.5.1 следует, что $\varphi'(\sigma_1 - 0) < \varphi'(\sigma_2 + 0)$ и, значит, $\varphi(\sigma)$ не может быть линейной функцией в интервале (α_0, β_0). Итак, первая часть теоремы полностью доказана.

Предположим теперь, что $f(s)$ не имеет нулей в полосе (α_0, β_0). Неравенство (2.6.1) следует непосредственно из теоремы 1.2.8. Выберем число σ из интервала (α_0, β_0) и рассмотрим равномерную п.-п. функцию действительного переменного t $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$. При каждом фиксированном σ $F_\sigma(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.7.1, часть I. Поэтому

$$\ln f(\sigma + it) = ict + H_\sigma(t),$$

где постоянная величина c (среднее движение функции $F_\sigma(t)$) согласно теореме 2.5.1 равняется $\varphi'(\sigma)$, т. е.

не зависит от σ, и $H_\sigma(t)$ есть равномерная п.-п. функция переменной t. Мы получили представление (2.6.2) с $g(s) = g(\sigma + it) = H_\sigma(t) - c\sigma$. Остается показать, что $g(s)$ есть аналитическая п.-п. функция в полосе (α_0, β_0). Для этого мы сошлемся на замечание, сделанное в п. 3 § 7 гл. II ч. I. Согласно этому замечанию для каждой меньшей полосы $\alpha_0 < \alpha_1 < \sigma < \beta_1 < \beta_0$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждый δ-почти-период $f(s)$ в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ есть ε-почти-период для $H_\sigma(t)$ и всех σ из интервала $[\alpha_1, \beta_1]$, а следовательно, ε-почти-период $g(s)$ в полосе (α_1, β_1). Итак, $g(s)$ — п.-п. функция в полосе (α_0, β_0).

Наконец, последняя часть теоремы следует непосредственно из теоремы 2.7.1 части I.

2. Пусть (α_0, β_0) — некоторая полоса без нулей функции $f(s)$ и $\beta_0 < \beta$. Пусть σ_0 принадлежит интервалу (α_0, β_0). Тогда (см. п. 2 предыдущего параграфа) $c^+(\sigma_0) = \varphi'(\sigma_0)$ и $H(\sigma_0, \beta_0)$ существует. Поэтому (см. § 2 этой главы) существует $c^-(\beta_0)$, причем

$$H(\sigma_0, \beta_0) = \frac{1}{2\pi}\{c^-(\beta_0) - c^+(\sigma_0)\}.$$

Аналогично, если $\alpha < \alpha_0$, то $c^+(\alpha_0)$ существует и $c^+(\alpha_0) = \varphi'(\alpha_0 + 0)$.

Отсюда следует, что если две полосы без нулей имеют общую граничную линию $\sigma = \sigma_0$, то средние движения $c^-(\sigma_0)$ и $c^+(\sigma_0)$ существуют и определяются по формулам

$$c^-(\sigma_0) = \varphi'(\sigma_0 - 0); \quad c^+(\sigma_0) = \varphi'(\sigma_0 + 0). \qquad (2.6.3)$$

Пусть, в частности, нули $f(s)$ расположены на вертикальных прямых, не сгущающихся внутри полосы (α, β). В этом частном случае функция Иенсена кусочно-линейна, с точками недифференцируемости в абсциссах нулей $f(s)$. Формула (2.6.3) справедлива для всех σ_0. Поэтому плотность нулей существует и определяется по формуле

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}\{\varphi'(\sigma_2 - 0) - \varphi'(\sigma_1 + 0)\}. \qquad (2.6.4)$$

3. Разобранный в конце предыдущего пункта частный случай имеет место для аналитических периодических функций $f(s)$ с периодом ip $(p > 0)$. В этом случае показатели Дирихле содержатся в дискретном модуле $M = \left\{h \cdot \frac{2\pi}{p}\right\}$ $(h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Итак, для периодических функций функция Иенсена $\varphi(\sigma)$ кусочно-линейна, и значения $\varphi'(\sigma)$ в интервалах линейности суть целые кратные числа $\frac{2\pi}{p}$. В этом случае левое и правое средние движения $c^-(\sigma)$ и $c^+(\sigma)$ и плотность нулей определяются без предельного перехода, а именно:

$$\left.\begin{aligned} c^{\mp}(\sigma) &= \frac{\arg^{\mp} f(\sigma + ia + ip) - \arg^{\mp} f(\sigma + ia)}{p}, \\ H(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{N(\sigma_1, \sigma_2;\ a,\ a+p)}{p}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6.5)$$

В первых двух формулах действительное число a произвольно, а в последней формуле число a выбирается так, что $f(s) \neq 0$ на отрезке $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $t = a$. Функция Иенсена вычисляется по формуле

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{p} \int_a^{a+p} \ln |f(\sigma + it)|\, dt,$$

где число a произвольно.

Из формул (2.6.4) и (2.6.5) непосредственно следует, что скачки $\varphi'(\sigma)$ в угловых точках σ_0 функции $\varphi(\sigma)$ — $\varphi'(\sigma_0 + 0) - \varphi'(\sigma_0 - 0)$ равны $h_0 \frac{2\pi}{p}$, где h_0 — число нулей $f(s)$ на отрезке $\sigma = \sigma_0$; $a \leqslant t < a + p$.

Пусть, в частности, ряд Дирихле $f(s)$ не содержит отрицательных показателей, т. е.

$$f(s) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h e^{h \frac{2\pi}{p} s}, \quad a_0 \neq 0.$$

В этом случае $f(s)$ периодична в полосе $(-\infty, \beta)$, причем равномерно по t $f(s) \to a_0$ при $\sigma \to -\infty$ (см. теорему 1.3.10). Поэтому абсциссы нулей можно расположить в возрастающую последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ Так как в интервале $(-\infty, \sigma_1)$ $f(s)$ не имеет нулей, то в этом интервале $\varphi(\sigma)$ линейна. Более того, так как $\varphi(\sigma) \to \ln |a_0|$ при $\sigma \to -\infty$, то $\varphi(\sigma) = \ln |a_0|$ для $\sigma < \sigma_1$.

Обозначим через h_n число нулей $f(s)$ на отрезке $\sigma = \sigma_n$, $a \leqslant t < a + p$. Тогда для каждого $\sigma < \beta$

$$\varphi(\sigma) = \ln|a_0| + \sum_{\sigma_n \leqslant \sigma} h_n(\sigma - \sigma_n).$$

Если сделать подстановку $z = e^{\frac{2\pi}{p}s}$, то мы получим обычную формулу Иенсена для функции $F(z)$, аналитической в круге $|z| < \rho$ и отличной от нуля при $z = 0$.

§ 7. Функции, у которых показатели Дирихле ограничены сверху или снизу

Пусть функция $f(s)$, как и прежде, почти-периодична в полосе (α, β) и отлична от тождественного нуля. Предположим, что показатели Дирихле функции $f(s)$ имеют верхнюю грань Λ. В этом случае согласно теореме 1.3.8 $f(s)$ можно продолжить в полуплоскость $(\alpha, +\infty)$. При рассмотрении поведения $f(s)$ при $\sigma \to +\infty$ следует различать два случая (см. § 3 предыдущей главы):

1) Число Λ является показателем Дирихле $f(s)$. В этом случае $f(s) = e^{\Lambda s} g(s)$, причем $g(s)$ при $\sigma \to +\infty$ равномерно по t стремится к постоянной величине $A \neq 0$ — коэффициенту при $e^{\Lambda s}$ в ряде Дирихле функции $f(s)$. Поэтому существует полуплоскость $\sigma > \sigma_0$, в которой $f(s) \neq 0$.

2) Λ не есть показатель Дирихле. В этом случае $g(s)$ при $\sigma \to +\infty$ стремится равномерно по t к нулю и, следовательно, не существует полуплоскости $\sigma > \sigma_0$, свободной от нулей $f(s)$.

В первом случае функция Иенсена $\varphi(\sigma)$ линейна для $\sigma > \sigma_0$. Далее, в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ $\ln f(s) = \Lambda s + \ln g(s)$. Поэтому

$$\varphi(\sigma) = \underset{t}{M}\{\ln|f(\sigma + it)|\} = \Lambda\sigma + \underset{t}{M}\{\ln|g(\sigma + it)|\}.$$

Так как при $\sigma \to +\infty$

$$\underset{t}{M}\{\ln|g(\sigma + it)|\} \to \ln|A|,$$

то для $\sigma > \sigma_0$ $\varphi(\sigma) = \Lambda\sigma + \ln|A|$. Поэтому $\varphi'(\sigma) = \Lambda$ для $\sigma > \sigma_0$. Во втором случае $\varphi(\sigma)$ не может быть линейной функцией для $\sigma > \sigma_0$. Так как, далее,

$$\varphi(\sigma) = \Lambda\sigma + \underset{t}{M}\{\ln|g(\sigma+it)|\},$$

причем теперь $\underset{t}{M}\{\ln|g(\sigma+it)|\} \to -\infty$ при $\sigma \to +\infty$, то $\varphi'(\sigma+0) < \Lambda$ для всех достаточно больших σ и, следовательно, в силу выпуклости $\varphi(\sigma)$ для всех σ.

Итак, имеет место следующая

Теорема 2.7.1. *Если среди показателей Дирихле функции $f(s)$ существует наибольший показатель Λ, то, обозначая через A соответствующий коэффициент Дирихле, мы имеем для всех достаточно больших σ*

$$\varphi(\sigma) = \Lambda\sigma + \ln|A|.$$

Таким образом, $c^+(\sigma) \leqslant \Lambda$ для всех σ и $c^+(\sigma) = \Lambda$ для всех достаточно больших σ.

Если же верхняя грань показателей Дирихле не есть показатель, то для $\sigma \to +\infty$ $\varphi(\sigma) - \Lambda\sigma \to -\infty$, так что для всех $\bar{c}^+(\sigma) < \Lambda$.

Аналогичная теорема имеет место для функций, показатели Дирихле которых ограничены снизу. В этом случае следует рассматривать поведение $\varphi(\sigma)$ при $\sigma \to -\infty$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что нижнее и верхнее левое и правое средние движения аналитической п.-п. функции $f(s)$ с ограниченными сверху или снизу показателями Дирихле на любой вертикальной прямой не могут быть ни меньше, ни больше показателей Дирихле этой функции.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Простейшие свойства гармонических п.-п. функций

1. Пусть $f(s)$ $(s=\sigma+it)$ — аналитическая п.-п. функция в некоторой полосе. Положим $f(s)=u(\sigma, t)+iv(\sigma, t)$. Известно, что $u(\sigma, t)$ и $v(\sigma, t)$ суть гармонические функции в той же полосе.

В настоящей главе мы будем изучать гармонические в некоторой полосе п.-п. функции, а также выясним, в каком случае гармоническая в полосе п.-п. функция является действительной частью некоторой аналитической в этой же полосе п.-п. функции *).

2. Предположим, что функция $u(\sigma, t)$ в некоторой области (D) плоскости (σ, t) гармонична, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

Пусть (σ_0, t_0) — внутренняя точка области (D). Рассмотрим круг радиуса r с центром в этой точке. В силу формулы Пуассона

$$u(\sigma_0+\rho\cos\varphi,\ t_0+\rho\sin\varphi)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma_0+r\cos\psi,\ t_0+r\sin\psi)\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}\,d\psi. \tag{3.1.1}$$

*) Результаты этой главы в основном принадлежат Фавару. J. Favard [1].

Дифференцируя формулу (3.1.1) по ρ и полагая затем $\rho=0$, мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_0}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial t_0}\sin\varphi=$$
$$=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u(\sigma_0+r\cos\psi,\ t_0+r\sin\psi)\cos(\psi-\varphi)\,d\psi.$$

Так как угол φ произволен, то из последней формулы следует

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_0}=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u(\sigma_0+r\cos\psi,\ t_0+r\sin\psi)\cos\psi\,d\psi, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_0}=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u(\sigma_0+r\cos\psi,\ t_0+r\sin\psi)\sin\psi\,d\psi. \quad (3.1.2')$$

В частности, из формул (3.1.2), (3.1.2′) следует, что если на рассматриваемой окружности $|u|\leqslant A$, то в центре круга справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right|\leqslant\frac{4A}{\pi r}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\leqslant\frac{4A}{\pi r}. \quad (3.1.3)$$

3. Теорема 3.1.1. *Пусть $u(\sigma,\ t)$ — гармоническая функция, регулярная в полосе $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$; $-\infty\leqslant t\leqslant\infty$. Если на прямых $\sigma=\sigma_1$, $\sigma=\sigma_2$, $m\leqslant u(\sigma,\ t)\leqslant M$, то эти же неравенства справедливы во всей полосе.*

Доказательство. Эта теорема легко сводится к теореме Фрагмена-Линделефа для полосы. Пусть $v(\sigma,\ t)$ — сопряженная функция для $u(\sigma,\ t)$. Положим $f(s)=u+iv$ и рассмотрим аналитические функции $F(s)=e^{f(s)}$; $\frac{1}{F(s)}=e^{-f(s)}$. Так как $|F(s)|=e^u$; $\left|\frac{1}{F(s)}\right|=e^{-u}$, то в полосе $[\sigma_1,\ \sigma_2]$ $F(s)$ имеет ограниченный модуль и на прямых $\sigma=\sigma_1$ и $\sigma=\sigma_2$ справедливы оценки

$$|F(s)|\leqslant e^M; \quad \left|\frac{1}{F(s)}\right|\leqslant e^{-m}.$$

Применяя к функциям $F(s)$ и $\frac{1}{F(s)}$ теорему Фрагмена-Линделефа, мы убедимся, что последние неравенства остаются в силе также для полосы $[\sigma_1, \sigma_2]$. Поэтому для $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$

$$m \leqslant u(\sigma, t) \leqslant M,$$

что и требовалось доказать.

4. Из теоремы о трех прямых (теорема 1.1.7) следует

Теорема 3.1.2. *Функции*

$$M(\sigma) = [\sup_{-\infty<t<\infty} \ln|F(\sigma+it)|] = \sup_{-\infty<t<\infty} u(\sigma, t),$$

$$-m(\sigma) = [\inf_{-\infty<t<\infty} \ln|F(\sigma+it)|] = -\inf_{-\infty<t<\infty} u(\sigma, t)$$

выпуклы.

Если рассмотрим функцию $\mathfrak{M}(\sigma) = \max\{M(\sigma), -m(\sigma)\}$, то легко убедимся, что эта функция также выпукла.

Определение. *Регулярная, гармоническая в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ функция называется п.-п. функцией в этой полосе, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-почти-периодов, т. е. таких чисел τ, для которых выполняется неравенство*

$$|u(\sigma, t+\tau) - u(\sigma, t)| < \varepsilon \quad (-\infty < t < \infty;\ \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2).$$

Легко доказываются следующие утверждения.

Гармоническая п.-п. в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ функция 1) *ограничена и* 2) *равномерно непрерывна в этой полосе.*

Теорема 3.1.3. *Пусть $u(\sigma, t)$ — гармоническая, регулярная и ограниченная в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ функция. Если на прямых $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$ $u(\sigma, t)$ есть равномерная п.-п. функция, то она есть гармоническая п.-п. функция в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$.*

Доказательство. Эта теорема следует непосредственно из теоремы 3.1.1. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать относительно плотное множество общих ε-почти-периодов $\tau = \tau(\varepsilon)$ для функций $u(\sigma_1, t)$ и $u(\sigma_2, t)$, т. е. гармоническая функция $w = u(\sigma, t+\tau) - u(\sigma, t)$ на прямых $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$ удовлетворяет неравенству

$$|w(\sigma, t)| < \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

В силу теоремы 3.1.1 неравенство (3.1.4) имеет место во всей полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$, т. е. $u(\sigma, t)$ есть п.-п. функция в этой полосе.

Теорема 3.1.4. *Сумма конечного числа гармонических п.-п. функций в полосе* $[\sigma_1, \sigma_2]$ *есть гармоническая функция в той же полосе. Предел равномерно сходящейся последовательности гармонических п.-п. функций в полосе* $[\sigma_1, \sigma_2]$ *есть также гармоническая п.-п. функция в той же полосе.*

Доказательство. Первая часть теоремы следует непосредственно, если рассмотреть все функции на прямых $\sigma = \sigma_1$; $\sigma = \sigma_2$ и принять во внимание предыдущую теорему. Вторая часть теоремы получается точно так же. Следует только еще привлечь теорему Гарнака о равномерном пределе гармонических функций *).

Теорема 3.1.5. *Частные производные всех порядков гармонической п.-п. функции, регулярной в полосе* $[\sigma_1, \sigma_2]$, *суть также гармонические п.-п. функции в этой же полосе.*

Доказательство. Как известно **), частные производные ограниченной гармонической функции суть также ограниченные гармонические функции. Из ограниченности частных производных следует их равномерная непрерывность по совокупности переменных, а значит, и по каждой переменной в отдельности. Очевидно, что достаточно доказать нашу теорему для частных производных первого порядка $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$. Для $\frac{\partial u}{\partial t}$ теорема следует из результата п. 3 § 1 гл. I части I, применен-

---

*) См., например, Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. II, стр. 278.

**) В самом деле, например, $\frac{\partial u}{\partial t}$ есть предел при $h \to 0$ гармонических функций $\frac{u(\sigma, t+h) - u(\sigma, t)}{h}$ и, следовательно, также гармонична.

ного на прямых $\sigma=\sigma_1$ и $\sigma=\sigma_2$ и из теоремы 3.1.3. Еще проще доказывается теорема для $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$.

В самом деле, если $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=\lim_{n\to\infty}\frac{u(\sigma+h_n,\ t)-u(\sigma,\ t)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial u(\sigma+\theta h_n,\ t)}{\partial \sigma}.$$

В силу равномерной непрерывности $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$ последнее предельное равенство имеет место равномерно и, следовательно, предельная функция $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$ — равномерная п.-п. функция.

§ 2. Ряды Фурье для гармонических п.-п. функций

1. В настоящем параграфе будет показано, что каждой гармонической п.-п. функции $u(\sigma, t)$ можно отнести ряд Фурье вида

$$u(\sigma,\ t)\sim k\sigma+l+\sum_n (A_n^+e^{\Lambda_n\sigma}+A_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})\cos\Lambda_n t+$$
$$+\sum_n (B_n^+e^{\Lambda_n\sigma}+B_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})\sin\Lambda_n t, \quad (3.2.1)$$

где k, l, A_n^+, A_n^-, B_n^+, B_n^- от σ и t не зависят. То, что при каждом фиксированном σ функции $u(\sigma, t)$ отвечает ряд Фурье, следует из почти-периодичности по t этой функции. Наша задача — показать, что зависимость коэффициентов Фурье от σ выражается равенством (3.2.1). Вначале мы вычислим свободный член ряда Фурье.

Пусть в полосе $[\sigma_1', \sigma_2']$, внутренней относительно первоначальной полосы $[\sigma_1, \sigma_2]$, $|u|\leqslant M$; $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\leqslant M'$, $\left|\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right|\leqslant M'$, где M и M' — константы. Пусть $\sigma=\sigma_1''$, $\sigma=\sigma''$ — две различные прямые внутри второй полосы. Обозначим через R прямоугольник, ограниченный прямыми $\sigma=\sigma_1''$, $\sigma=\sigma_2''$, $t=0$, $t=T$. В силу известного свойства гармоническиx функций

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial n}\,da=0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — нормальная производная и da — элемент дуги контура R.

Представляя интеграл в виде суммы четырех интегралов по сторонам прямоугольника, мы получим:

$$\int_0^T \underset{(\sigma=\sigma_1'')}{\frac{\partial u}{\partial \sigma}} dt - \int_0^T \underset{(\sigma=\sigma_2'')}{\frac{\partial u}{\partial \sigma}} dt = \int_{\sigma_1''}^{\sigma_2''} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\sigma, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(\sigma, T) \right] d\sigma.$$

Деля обе части последнего равенства на T и полагая $T \to \infty$, мы получим в силу ограниченности $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$M_t \underset{(\sigma=\sigma_1'')}{\left\{ \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right\}} = M_t \underset{(\sigma=\sigma_2'')}{\left\{ \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right\}} = k,$$

где k от σ не зависит.

Возьмем теперь две гармонические функции σ и $u(\sigma, t)$ и применим формулу Грина, взяв в качестве контура прямоугольник R. Мы получим:

$$\int_0^T \underset{(\sigma=\sigma_1'')}{\left(u - \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)} dt - \int_0^T \underset{(\sigma=\sigma_2'')}{\left(u - \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)} dt =$$

$$= \int_{\sigma_1''}^{\sigma_2''} \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\sigma, T) - \frac{\partial u}{\partial t}(\sigma, 0) \right] d\sigma + \int_{\sigma_1''}^{\sigma_2''} [u(\sigma, 0) - u(\sigma, T)]\, d\sigma.$$

Деля обе части на T и полагая $T \to \infty$, мы получим:

$$\underset{(\sigma=\sigma_1'')}{M_t \{u\}} - k\sigma = \underset{(\sigma=\sigma_2'')}{M_t \{u\}} - k\sigma = l,$$

где l от σ не зависит. Поэтому

$$M_t \{u\} = k\sigma + l.$$

Применим теперь формулу Грина к гармоническим функциям u и $e^{-\lambda\sigma} \cos \lambda t$ вдоль того же контура. Мы получим:

$$\int\limits_{\substack{0\\ \sigma=\sigma_1''}}^{T}\left(-\lambda u e^{-\lambda\sigma}\cos\lambda t - e^{-\lambda\sigma}\cos\lambda t\,\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)dt -$$

$$-\int\limits_{\substack{0\\ \sigma=\sigma_2''}}^{T}\left(-\lambda u e^{-\lambda\sigma}\cos\lambda t - e^{-\lambda\sigma}\cos\lambda t\,\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)dt =$$

$$=\int\limits_{\sigma_1''}^{\sigma_2''}\left(-\lambda u e^{-\lambda t}\sin\lambda t - e^{-\lambda\sigma}\cos\lambda t\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)d\sigma -$$

$$-\int\limits_{\sigma_1''}^{\sigma_2''}\left(-\lambda u e^{-\lambda t}\sin\lambda t - e^{-\lambda\sigma}\cos\lambda t\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)d\sigma.$$

Деля обе части последнего равенства на T и полагая затем $T\to\infty$, мы установим, что выражение

$$M_t\left\{\cos\lambda t\left(\lambda u+\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)\right\}=\lambda A^{+}e^{\lambda\sigma} \tag{3.2.2}$$

не зависит от σ. Рассматривая u и $e^{\lambda\sigma}\cos\lambda t$, мы точно так же докажем, что выражение

$$M_t\left\{\cos\lambda t\left(\lambda u-\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)\right\}=\lambda A^{-}e^{-\lambda\sigma} \tag{3.2.3}$$

не зависит от σ. Складывая (3.2.2) и (3.2.3) и деля на 2λ, мы получим:

$$M_t\{u\cos\lambda t\}=\frac{1}{2}\{A^{+}e^{\lambda\sigma}+A^{-}e^{-\lambda\sigma}\}.$$

Аналогично доказывается, что

$$M_t\{u\sin\lambda t\}=\frac{1}{2}\{B^{+}e^{\lambda\sigma}+B^{-}e^{-\lambda\sigma}\}.$$

Так как числа A и B от σ не зависят, то если $M_t\{u\cos\lambda t\}=0$ или $M_t\{u\sin\lambda t\}=0$ для двух значений σ, то $A^{+}=A^{-}=0$, соответственно $B^{+}=B^{-}=0$. Поэтому достаточно рассмотреть ряды Фурье функции $u(\sigma, t)$ для двух значений σ. Показатели Фурье, которые при этом выделятся, будут показателями Фурье для всех σ. Таким образом, мы получили для $u(\sigma, t)$ ряд (3.2.1).

2. Теорема единственности. *Пусть $u_1(\sigma, t)$ и $u_2(\sigma, t)$ — гармонические п.-п. функции в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$. Если ряды Фурье для этих функций совпадают в этой полосе, то $u_1 \equiv u_2$.*

Доказательство. Достаточно взять в полосе какую-либо прямую $\sigma = \sigma_0$ и рассмотреть п.-п. функции u_1 и u_2 на этой прямой. Применяя теорему единственности к равномерным п.-п. функциям $u_1(\sigma_0, t)$ и $u_2(\sigma_0, t)$, мы установим, что $u_1(\sigma_0, t) \equiv u_2(\sigma_0, t)$. Так как функции u_1 и u_2 гармоничны, то они совпадают во всей полосе.

Теорема аппроксимации. *Суммы Бохнера-Фейера для гармонической п.-п. функции $u(\sigma, t)$ в полосе (σ_1, σ_2) сходятся равномерно к $u(\sigma, t)$ в каждой внутренней полосе $[\sigma_1', \sigma_2']$ $(\sigma_1 < \sigma_1' < \sigma_2' < \sigma_2)$.*

Доказательство. Очевидно, что суммы Бохнера-Фейера для $u(\sigma, t)$ суть гармонические функции. На прямых σ_1' и σ_2' суммы Бохнера-Фейера сходятся к $u(\sigma, t)$ равномерно. Поэтому, применяя теорему Фрагмена-Линделефа, мы убедимся, что упомянутые суммы сходятся равномерно к $u(\sigma, t)$ в полосе $[\sigma_1', \sigma_2']$.

3. Покажем, что ряд Фурье частных производных функции $u(\sigma, t)$ получается формальным дифференцированием ряда (3.2.1). Для $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$ мы имеем в силу предыдущего:

$$M_t\left\{\frac{\partial u}{\partial \sigma}\cos\lambda t\right\} = \frac{\lambda}{2}\left(A^+e^{\lambda\sigma} - A^-e^{-\lambda\sigma}\right),$$

$$M_t\left\{\frac{\partial u}{\partial \sigma}\sin\lambda t\right\} = \frac{\lambda}{2}\left(B^+e^{\lambda\sigma} - B^-e^{-\lambda\sigma}\right),$$

$$M_t\left\{\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right\} = k,$$

что и доказывает наше утверждение. Для $\frac{\partial u}{\partial t}$ имеем:

$$M_t\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{u(\sigma, T) - u(\sigma, 0)}{T} = 0.$$

Далее, интегрируя по частям, мы получим:

$$M_t\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\sin\lambda t\right\}=-\lambda M_t\{u\cos\lambda t\},$$
$$M_t\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\cos\lambda t\right\}=\lambda M_t\{u\sin\lambda t\}.$$

Из этих формул наше утверждение для $\frac{\partial u}{\partial t}$ получается непосредственно.

4. Так же как и для аналитических п.-п. функций, сходимость рядов Фурье для гармонических п.-п. функций можно гарантировать в следующих трех случаях:

1) *числа Λ_n линейно независимы,*

2) *ряд* (3.2.1) *содержит только косинусы и притом с положительными коэффициентами Фурье,*

3) *для всех $\delta>0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\Lambda_n\delta}$ сходится.*

Первые два случая разбираются так же, как и в случае п.-п. функций от действительной переменной. Рассмотрим третий случай. Выберем некоторое σ_0 внутри интервала $[\sigma_1, \sigma_2]$ и подберем δ_0 так, чтобы интервал $(\sigma_0-\delta_0, \sigma_0+\delta_0)$ находился внутри интервала $[\sigma_1, \sigma_2]$. Обозначим через M' число, которое больше верхних граней $\left|\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right|$ и $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|$ в полосе $(\sigma_0-\delta_0, \sigma_0+\delta_0)$. Тогда из определения коэффициентов Фурье следует

$$|\Lambda_n(A_n^+e^{\Lambda_n\sigma}+A_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})|\leqslant M',$$
$$|\Lambda_n(A_n^+e^{\Lambda_n\sigma}-A_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})|\leqslant M'.$$

Поэтому

$$|A_n^+e^{\Lambda_n\sigma}|\leqslant\frac{2M'}{\Lambda_n};\quad |A_n^-e^{-\Lambda_n\sigma}|\leqslant\frac{2M'}{\Lambda_n}.$$

Полагая в первом неравенстве $\sigma=\sigma_0+\delta_0$, а во втором — $\sigma=\sigma_0-\delta_0$, мы получим:

$$|A_n^+e^{\Lambda_n\sigma_0}|\leqslant\frac{2M'}{\Lambda_n}e^{-\Lambda_n\delta_0};\quad |A_n^-e^{-\Lambda_n\sigma_0}|\leqslant\frac{2M'}{\Lambda_n}e^{-\Lambda_n\delta_0}.$$

Аналогичные неравенства можно получить для чисел $B^{\pm}$. Так как числа Λ_n не могут сгущаться на конечном расстоянии *), то из полученных оценок следует абсолютная сходимость ряда Фурье для $u(\sigma, t)$.

§ 3. Условие, при котором сопряженная функция есть также п.-п. функция

1. Пусть u — гармоническая в некоторой области функция. Как известно, существует единственная, с точностью до константы, гармоническая функция v такая, что $u+iv$ есть аналитическая функция от $s=\sigma+it$ в рассматриваемой области. Функция v определяется из уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \sigma}. \tag{3.3.1}$$

Возникает естественный вопрос. Предположим, что u — гармоническая п.-п. функция в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$. Спрашивается, будет ли v также п.-п. функцией в этой же полосе? Мы увидим, что это не всегда так. Покажем, что во всяком случае необходимо, чтобы в ряде Фурье для u не было члена с σ. В самом деле, если v — п.-п. функция, то

$$M_t\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = 0.$$

С другой стороны, из уравнений Коши-Римана следует

$$M_t\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = M_t\left\{\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right\} = k = 0.$$

2. Предположим, что сопряженная функция $v(\sigma, t)$ есть п.-п. функция. Найдем ряд Фурье этой функции.

---

*) *Ибо по условию ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\Lambda_n \delta}$ *сходится.*

Из равенств

$$M_t\left\{\frac{\partial v}{\partial \sigma}\cos\lambda t\right\}=M_t\left\{-\frac{\partial u}{\partial t}\cos\lambda t\right\};$$
$$M_t\left\{\frac{\partial v}{\partial \sigma}\sin\lambda t\right\}=M_t\left\{-\frac{\partial u}{\partial t}\sin\lambda t\right\}$$

следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}\sim\sum_n\{\Lambda_n(A_n^+e^{\Lambda_n\sigma}+A_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})\sin\Lambda_n t-$$
$$-\Lambda_n(B_n^+e^{\Lambda_n\sigma}+B_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})\cos\Lambda_n t\}.$$

Интегрируя по σ, мы получим:

$$v(\sigma,t)\sim C+\sum_n\{(A_n^+e^{\Lambda_n\sigma}-A_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})\sin\Lambda_n t-$$
$$-(B_n^+e^{\Lambda_n\sigma}-B_n^-e^{-\Lambda_n\sigma})\cos\Lambda_n t\},$$

где C константа.

Пользуясь этим разложением, легко построить пример гармонической п.-п. функции, для которой сопряженная функция не является п.-п. функцией.

Пусть

$$u(\sigma,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\Lambda_n\sigma}-e^{-\Lambda_n\sigma})A_n\cos\Lambda_n t,$$

причем Λ_n линейно независимы и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|A_n|\operatorname{sh}\Lambda_n$ сходится. Функция $u(\sigma,t)$ гармоническая и п.-п. по крайней мере в полосе $[-1, 1]$. Предположим, что сопряженная функция $v(\sigma,t)$ — также п.-п. в той же полосе. Так как по предположению числа Λ_n линейно независимы, то

$$v(\sigma,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\Lambda_n\sigma}+e^{-\Lambda_n\sigma})A_n\sin\Lambda_n t,$$

и ряд справа должен сходиться абсолютно, если $|\sigma|\leqslant 1$.

В частности, при $\sigma=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|<\infty.$$

Однако, если Λ_n достаточно быстро стремятся к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|\operatorname{sh}\Lambda_n$ может сходиться, в то время как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|$ расходится и следовательно, $v(\sigma, t)$ не является п.-п. функцией.

3. Рассмотрим действительную п.-п. функцию

$$f(t)\sim A+\sum_{n}(A_n\cos\Lambda_n t+B_n\sin\Lambda_n t).$$

Мы покажем, что существует гармоническая регулярная для $\sigma>0$ и непрерывная для $\sigma\geqslant 0$ функция $u(\sigma, t)$, совпадающая с $f(t)$ при $\sigma=0$. В самом деле, рассмотрим функцию

$$u(\sigma, t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sigma\,dx}{\sigma^2+(x-t)^2}. \qquad (3.3.2)$$

Легко непосредственно проверить, что функция $\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-t)^2}$ при фиксированном x и $\sigma>0$ гармоническая. Поэтому $u(\sigma, t)$ также гармоническая функция. Покажем, что при $\sigma>0$ $u(\sigma, t)$ по t — п.-п. функция и притом равномерно для всех $\sigma>0$. С помощью подстановки $x-t=\sigma u$ мы получим:

$$u(\sigma, t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+\sigma u)\frac{du}{1+u^2}. \qquad (3.3.3)$$

Если τ есть ε-почти-период $f(x)$, то

$$|u(\sigma, t+\tau)-u(\sigma, t)|\leqslant\frac{1}{\pi}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}=\varepsilon,$$

что и доказывает почти-периодичность функции $u(\sigma, t)$. Вычислим ряд Фурье функции $u(\sigma, t)$. Мы имеем:

$$M_t\{u(\sigma, t)\cos\lambda t\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}M_t\{f(t+\sigma u)\cos\lambda t\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda\sigma u\, du}{1+u^2}M_t\{f(t)\cos\lambda t\} = M_t\{f(t)\cos\lambda t\}\, e^{-|\lambda|\sigma};$$

$$M_t\{u(\sigma, t)\sin\lambda t\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\sigma u\, du}{1+u^2}M_t\{f(t)\sin\lambda t\} =$$

$$= M_t\{f(t)\sin\lambda t\}\, e^{-|\lambda|\sigma}.$$

Поэтому

$$u(\sigma, t) \sim A + \sum_n (A_n\cos\Lambda_n t + B_n\sin\Lambda_n t)\, e^{-\Lambda_n\sigma}.$$

Из представления (3.3.3) следует, примерно так же как и в § 10 гл. I части I (см. доказательство теоремы 1.10.1), что при $\sigma\to 0$ $u(\sigma, t)\to f(t)$ и притом равномерно по t. Найдем еще предел $u(\sigma, t)$ при $\sigma\to\infty$. Множество функций $u(\sigma, t)$ ($\sigma\geqslant 0$ — параметр) равностепенно ограниченно, равностепенно непрерывно и равностепенно почти-периодично. Поэтому суммы Бохнера-Фейера $\sigma_{B_k}(\sigma, t)$ сходятся равномерно по $\sigma\geqslant 0$. С другой стороны, при фиксированном k и $\sigma\to+\infty$ $\sigma_{B_k}(\sigma, t)\to A = M_t\{f(t)\}$ равномерно по t. Поэтому и $u(\sigma, t)$ при $\sigma\to+\infty$ также стремится равномерно по t к A.

4. Выведем теперь формулу для функции $v(\sigma, t)$, сопряженной к функции $u(\sigma, t)$, которую мы определили в предыдущем пункте. Найдем вначале функцию, сопряженную функции $\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-t)^2}$ (x фиксировано). С этой целью рассмотрим аналитическую функцию $\frac{1}{s-ix}$. Легко видеть, что $\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-t)^2}$ есть действительная часть, а $\frac{x-t}{\sigma^2+(x-t)^2}$ — мнимая часть этой аналитической функции.

Выберем произвольное положительное число N и рассмотрим аналитическую функцию переменной s

$$F(s, N)=\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{f(x)}{s-ix}\,dx \qquad (s=\sigma+it).$$

Лемма 3.3.1. *Если*

$$\left|\int_{0}^{u} f(u+t)\,du\right|<C|u|^{\alpha}, \tag{3.3.4}$$

где $C>0$ и $0\leqslant\alpha<1$ — постоянные числа, то при $N\to\infty$ функции $F(s, N)$ сходятся равномерно в каждой полуполосе $\sigma\geqslant\sigma_0>0$, $-T\leqslant t\leqslant T$ к аналитической функции

$$F(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{s-ix}\,dx.$$

Замечание. Условия леммы выполняются, если функция $f(x)$ имеет ограниченный неопределенный интеграл.

Доказательство. Пусть $\sigma_0>0$ и $T>0$ выбраны произвольно и зафиксированы. Мы должны показать, что, каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое положительное число $P=P(\varepsilon)$, что если $N'>N>P$, то для $\sigma\geqslant\sigma_0$ и $-T\leqslant t\leqslant T$ выполняется неравенство

$$|F(s, N')-F(s, N)|<\varepsilon. \tag{3.3.5}$$

Имеем:

$$F(s, N')-F(s, N)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-N'}^{N}\frac{f(x)}{s-ix}\,dx+\int_{N}^{N'}\frac{f(x)}{s-ix}\,dx\right\}=r_1+r_2.$$

Оценим $|r_2|$. Оценка для $|r_1|$ проводится аналогично.

Мы имеем:

$$r_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{N}^{N'} \frac{f(x)}{\sigma + i(t-x)} dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{N-t}^{N'-t} \frac{f(x+t)}{\sigma - ix} dx.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$r_2 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\int\limits_0^x f(x+t)\, dx}{\sigma - ix} \right]_{x=N-t}^{x=N'-t} - \frac{i}{\pi} \int\limits_{N-t}^{N'-t} \frac{\int\limits_0^x f(x+t)\, dx}{(\sigma - ix)^2} dx.$$

Поэтому из оценки (3.3.4) следует

$$|r_2| \leqslant \frac{1}{\pi} \frac{|N'-t|^\alpha}{\{\sigma^2 + (N'-t)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\pi} \frac{|N-t|^\alpha}{\{\sigma^2 + (N-t)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{N-t}^{N'-t} \frac{|x|^\alpha}{\sigma^2 + x^2} dx.$$

Очевидно, что выражение, стоящее справа, при $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, $-T \leqslant t \leqslant T$ можно сделать при достаточно большом P $(N' > N > P)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Точно такая же оценка имеет место для $|r_1|$. Поэтому неравенство (3.3.5), а значит, и лемма доказаны.

Отделяя у функции $F(s)$ действительную часть, получим функцию $u(\sigma, t)$, а отделяя мнимую часть, получим функцию $v(\sigma, t)$, сопряженную к функции $u(\sigma, t)$:

$$v(\sigma, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)(x-t)}{\sigma^2 + (x-t)^2} dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(x+t)}{\sigma^2 + x^2} dx.$$

Лемма 3.3.2. *Если выполнено условие леммы* (3.3.1), *то* $v(\sigma, t)$ *есть гармоническая п.-п. функция в полуплоскости* $\sigma > 0$.

Доказательство. Гармоничность функции $v(\sigma, t)$ доказана в предыдущей лемме. Таким образом, нам остается показать, что $v(\sigma, t)$ есть п.-п. функция в каждой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$. Выберем произвольное положительное число N и положим

$$v(\sigma, t)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-N}+\int_{-N}^{N}+\int_{N}^{\infty}\right\}\frac{f(x+t)\,x\,dx}{\sigma^2+x^2}=R_N^{(1)}+I_N+R_N^{(2)}.$$

Легко видеть, что при фиксированном N I_N есть п.-п. функция в полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0>0$.

Если мы покажем, что при $N\to\infty$ $R_N^{(1)}$ и $R_N^{(2)}$ стремятся к нулю равномерно по $\sigma\geqslant 0$ и t $(-\infty<t<\infty)$, то лемма будет доказана. Интегрируя по частям, получим:

$$R_N^{(2)}=\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_0^x f(x+t)\,dx\right]\left[\frac{x}{\sigma^2+x^2}\right]\right\}_{x=N}^{x=\infty}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_N^\infty\frac{\sigma^2-x^2}{(\sigma^2+x^2)^2}\left[\int_0^x f(x+t)\,dx\right]dx.$$

Поэтому из оценки (3.3.4) следует

$$\left|R_N^{(2)}\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{N^{1+\alpha}}{\sigma^2+N^2}+\frac{1}{\pi}\int_N^\infty\frac{x^\alpha(\sigma^2-x^2)}{(\sigma^2+x^2)^2}\,dx.$$

Последняя оценка показывает, что $R_N^{(2)}$ стремится при $\sigma\geqslant 0$ и $N\to\infty$ равномерно по t к нулю. Точно так же ведет себя $R_N^{(1)}$. Поэтому лемма доказана.

В силу п. 2 настоящего параграфа

$$v(\sigma, t)\sim C-\sum_{n=1}^\infty e^{-\Lambda_n\sigma}(A_n\sin\Lambda_n t-B_n\cos\Lambda_n t).$$

Покажем, что в рассматриваемом случае $C=0$. С этой целью вычислим вначале свободный член ряда Фурье $I_N(\sigma, t)$. Имеем:

$$M_t\{I_N(\sigma, t)\}=\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{x\,dx}{\sigma^2+x^2}M_t\{f(x+t)\}=$$

$$=M_t\{f(t)\}\int_{-\frac{N}{\sigma}}^{\frac{N}{\sigma}}\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Из этого равенства следует, что при фиксированном N и $\sigma \to \infty$ $M_t\{I_N(\sigma, t)\} \to 0$. Поэтому свободный член ряда Фурье функции $I_N(\sigma, t)$ равен нулю. Так как $I_N(\sigma, t)$ при $N \to \infty$ сходится равномерно по $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$ и t $(-\infty < t < \infty)$ к $v(\sigma, t)$, то свободный член ряда Фурье функции $v(\sigma, t)$ также равен нулю.

Итак,

$$v(\sigma, t) \sim -\sum_n e^{-\Lambda_n \sigma}(A_n \sin \Lambda_n t - B_n \cos \Lambda_n t). \quad (3.3.6)$$

5. В заключение этого параграфа выясним, при каких условиях функция $v(\sigma, t)$ при $\sigma \to 0$ сходится равномерно по t к некоторой функции $g(t)$ (в силу предыдущей леммы в этом случае $g(t)$ должна быть равномерной п.-п. функцией). Функция $g(t)$ (если она существует) называется сопряженной функцией для $f(t)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $f(t)$ есть действительная п.-п. функция с рядом Фурье* (3.3.2). *Если $f(t)$ удовлетворяют условию леммы* (3.3.1) *с $\alpha < 1$ и условию Липшица*:

$$|f(t'') - f(t')| < C_1 |t'' - t'|^{\beta},$$

где $C_1 > 0$ и $\beta > 0$ — *постоянные величины, то существует сопряженная п.-п. функция*

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t+x) - f(t-x)}{x}\, dx$$

с рядом Фурье

$$g(t) \sim \sum_n (B_n \cos \Lambda_n t - A_n \sin \Lambda_n t).$$

Доказательство. Выберем произвольное число N и положим, так же как и при доказательстве предыдущей леммы,

$$v(\sigma, t) = R_N^{(1)} + I_N + R_N^{(2)}.$$

Обозначим через ε сколь угодно малое положительное число. Из доказательства предыдущей леммы следует, что если N достаточно велико, то для всех $\sigma \geqslant 0$ и всех действительных t выполняется неравенство

$$|R_N^{(1)} + R_N^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.3.7)$$

Поэтому

$$|v(\sigma, t) - I_N(\sigma, t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3.8}$$

Покажем теперь, что при фиксированном N и $\sigma \to 0$ $I_N(\sigma, t)$ стремится равномерно по t к функции *)

$$g_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^N \frac{f(t+x) - f(t-x)}{x} dx.$$

В самом деле,

$$I_N(\sigma, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-N}^0 f(x+t) \frac{x}{\sigma^2 + x^2} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^N f(x+t) \frac{x\,dx}{\sigma^2 + x^2} =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^N [f(t+x) + f(t-x)] \frac{x\,dx}{\sigma^2 + x^2}.$$

Поэтому

$$|I_N(\sigma, t) - g_N(t)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^N \frac{|f(t+x) - f(t-x)|}{x} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + x^2} dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\delta + \int_\delta^1 + \int_1^N \right\} \frac{|f(t+x) - f(t-x)|}{x} \frac{\sigma^2\,dx}{\sigma^2 + x^2} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \frac{2^\beta}{\pi} \int_0^\delta \frac{dx}{x^{1-\beta}} + \frac{2M\sigma^2}{\pi} \int_\delta^1 \frac{dx}{x(\sigma^2 + x^2)} + \frac{2M\sigma^2}{\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} =$$
$$= i_1 + i_2 + \frac{2M\sigma^2}{\pi},$$

где $M = \sup\limits_t |f(t)|$.

Выберем вначале δ так, чтобы имело место неравенство $i_1 < \frac{\varepsilon}{9}$. Затем подберем столь малое $\sigma = \sigma_0$, чтобы имели место неравенства $i_2 < \frac{\varepsilon}{9}$, $\frac{2M\sigma^2}{\pi} < \frac{\varepsilon}{9}$. Выбрав таким

---

*) Существование и непрерывность функции $g_N(t)$ следует из условия Липшица для $f(t)$.

образом σ_0, мы получим оценку

$$|I_N(\sigma_0, t) - g_N(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из неравенства (3.3.8) следует

$$|v(\sigma_0, t) - g_N(t)| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{3.3.9}$$

С другой стороны, так как неравенство (3.3.7) имеет место равномерно по $\sigma \geqslant 0$, то при $\sigma = 0$ мы получим:

$$\left|\int_N^\infty \frac{f(t+x) - f(t-x)}{x}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из неравенства (3.3.9) следует

$$|v(\sigma_0, t) - g(t)| < \varepsilon$$

и так как ε произвольно, а σ_0 от t не зависит, то равномерно по t

$$\lim_{\sigma \to 0} v(\sigma, t) = g(t).$$

Чтобы получить ряд Фурье функции $g(t)$, достаточно в разложении (3.3.6) положить $\sigma = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

Besicovitch A.

1. On generalised almost periodic functions, Proc. London Math. Soc. (2), 25 (1926), стр. 495—512.
2. On Parseval theorem for Dirichlet Series, Proc. London Math. Soc. (2), 26 (1926), стр. 25—34.
3. Ueber die Parsevalsche Gleichung für analytische fastperiodische Funktionen, Acta math. 47 (1926), стр. 283—295.
4. Almost periodic functions, Cambridge (1932).

Besicovitch A. and Bohr H.

1. Almost periodicity and generalised trigonometric series, Acta math. 57 (1931), стр. 203—291.

Bochner S.

1. Beitrage zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I Teil. Funktionen einer Variablen, Math. Ann. 96 (1927), стр. 119—147. II Teil.: Funktionen mehrerer Variablen, там же, стр. 383—409.
2. Properties of Fourier series of almost periodic functions, Proc. London Math. Soc. (2), 26 (1926), стр. 433 -452.
3. Fastperiodische Lösungen der Wellengleichung, Acta math., 62 (1933), стр. 227—237.
4. Abstrakte fastperiodische Funktionen, Acta math., 61 (1933), стр.149—184.

Bochner S. and von Neuman J.,

1. Almost periodic functions in a group, II, Trans. Amer. Math. Soc. 37 (1935), стр. 21—50.

Боголюбов Н. Н.

1. О некоторых арифметических свойствах почти-периодов. Зап. кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки Академії наук УРСР, т. IV, 1939.
2. Об одном приложении теории положительно определенных функций, Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 1948, II, стр. 113.

Боголюбов Н. Н. и Крылов Н. М.

1. Новые методы нелинейной механики (1934), стр. 54—84.

Bohl P.

1. Ueber die Darstellung von Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehrerer einer Variablen proportionalen Argumenten (магистерская диссертация), Dorpat, 1893.
2. Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Crelles Journ., **131** (1906), стр. 268—321.

Bohr H.

1. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I Teil: Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen, Acta math., 45 (1925), стр. 29—127.
2. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, II Teil: Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlichvielen Variablen; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen, Acta math., **46** (1925), стр. 101—214.
3. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, III Teil: Dirichletentwicklung analytischer Funktionen, Acta math. 47 (1926), стр. 237—281.
4. Ueber analytische fastperiodische Funktionen, Math. Ann. **103** (1930), стр. 1—14.
5. On the inverse function of an analytic almost periodic function, Ann. of Math. сер. 2, **32** (1931), стр. 247—260.
6. Contribution to the theory of analytic almost periodic functions, Kobenhaven (1943).
7. Again the Kronecker theorem, Journ. of the London Math. Soc., т. 9. ч. 1, № 33—36 (1934), стр. 5.
8—9. Kleinere Beitrage zur Theorie der fastperiodischer Funktionen, I—II, V, Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. **10**, № 10 (1930), **13**, № 8 (1935).
10. Ueber fastperiodische ebene Bewegungen, Comm., math. Helv. **4** (1932), стр. 51—64.
11. Почти-периодические функции, ОГИЗ (1934).

Bohr H. and Følner E.

1. On some types of functional spaces. A contribution to the theory of almost periodic functions, Acta math., **76** (1944), стр. 31—155.

Bohr H. und Nengebauer O.

1. Ueber lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite, Gött. Nachr. (1926), стр. 8—22.

Delsartes J.

1. Sur une extension de la formule de Taylor, Journ. d. Math. pures et appl. **17**, 3 (1938), стр. 213.
2. Une extension nouvelle de la théorie de fonctions presque-périodiques de Bohr, Acta math., **69** (1939), стр. 257—317.

Favard J.

1. Leçons sur les fonctions presques périodiques, Paris (1933).
2. Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques, Acta math. 51 (1927), стр. 31—81.

Freudenthal H.

1. Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen, Ann., of Math. (2), **37** (1936), стр. 57—77.

Esclangon E.

1. Les fonctions quasi-périodiques. Thèse, Paris, 1904.
2. Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques, Ann. de l'Observ. de Bordeau, 1919.
3. Sur les intégrales bornées d'une équation différentielle linéaire, C. R. Ac. de sc., Paris, **160** (1915), стр. 475—478.

Halmos P. and Vaugham U.

1. The marriage problem, Amer. Journal of Math. **72** (1950), стр. 214—215.

Hammerstein A.

1. Ueber die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen, S.-B. preuss. Akad. Wiss. (1928), стр. 17—20.

Iversen F.

1. Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisi nage d'un point singulier, Oefv. finska vet. sot. 58, Nr. 25 (1915—1916).

Jessen B.

1. Ueber die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen Funktion. Eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel. Math. Ann., **108** (1933), стр. 485—516.
2. Ueber die Säkularkonstanten einer fastperiodischen Funktion, Math. Ann., **111** (1935), стр. 355—363.

Jessen B. and Tornehave H.

1. Mean Motions and Zeros of Almost Periodic Functions, Acta math., **77** (1945), стр. 137—279.

Кованько А. С.

1. О компактности систем обобщенных почти-периодических функций Степанова, ДАН СССР, т. **XXVI**, 3 (1940), стр. 219.

2—3. О компактности систем обобщенных почти-периодических функций Безиковича, ДАН СССР, т. **XXXII**, 2 (1941), стр. 118, т. **XLIII** (1944), стр. 53.

4. О компактности систем обобщенных почти-периодических функций Безиковича, Матем. сборник, т. **16** (58) (1945), стр. 365.
5. О компактности систем обобщенных почти-периодических функций Вейля, ДАН СССР, т. **XLIII**, № 7 (1944), стр. 291.

Левин Б. Я.

1. Новое построение теории почти-периодических функций Левитана, ДАН СССР, т. LXII, 5 (1948), стр. 585—588.
2. О почти-периодических функциях Левитана, Укр. матем. журнал № 1 (1949), стр. 49—100.

Левин Б. Я. и Левитан Б. М.

1. О рядах Фурье обобщенных почти-периодических функций, ДАН СССР, т. XXII, 9 (1939), стр. 543—547.
2. Дополнение к заметке «О рядах Фурье обобщенных почти-периодических функций», Зап. Харьк. Научно-иссл. ин-та матем. и Мат. об-ва, сер. 4, т. XVII (1940), стр. 109—110.

Левитан Б. М.

1. Новое обобщение почти-периодических функций H. Bohr'a, Зап. Харьк. ин-та матем. и Мат. об-ва, т. XV, 2 (1938).
2. Некоторые вопросы теории почти-периодических функций, II, Успехи матем. наук, т. II, вып. 6 (1947), стр. 174—214.
3. Обобщение операции сдвига в связи с почти-периодическими функциями, Матем. сб., т. 7 (49) (1940), стр. 449—474.
4. Обобщенные почти-периодические функции, Матем. сб., т. 24 (66), 3 (1949), стр. 321—346.
5. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным операторам второго порядка, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 1 (1949), стр. 1—107.
6. Про ряди Фур'є одного класу майже періодичних функцій, Зап. Науково-досл. інституту матем. й мех. Харк. матем. тов., серія 4, т. XIV (1937), стр. 105—116.
7. О функциях с чисто точечным спектром, Зап. Харьк. ин-та матем. и Мат. об-ва, т. XVI, сер. 4 (1940), стр. 89—101.

Люстерник Л. А.

1. Основные понятия функционального анализа, Успехи матем. наук, т. I (1936), стр. 77—140.

Maak W.

1. Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen, Abhandlungen aus dem Math. Sem. Hamburg Univ. 11 (1938), стр. 240.
2. Abstrakte fastperiodische Funktionen, Abh. aus dem math. Sem. Hamburg Univ. 11 (1938), стр. 367.
3. Fastperiodische Funktionen, Springer Verlag (1950).

Марченко В. А.

1. Операторы преобразования, ДАН СССР, т. LXXIV, 2 (1950), стр. 185.
2. Обобщенные почти-периодические функции, ДАН СССР, т. LXXIV, 5 (1950), стр. 893.
3. Применение метода суммирования Фейера-Бохнера к обобщенным рядам Фурье, ДАН СССР, т. LIII, 1 (1946), стр. 7.
4. Методы суммирования обобщенных рядов Фурье, Зап. научно-иссл. ин-та матем. и мех. Харьк. гос. ун-та, т. XX (1950), стр. 3—32.

von Neuman J.,

1. Almost periodic functions in a group, I, Trans. Amer. math. soc. 36 (1934), 445—492.

Соболев С. Л.

1. О почти-периодичности решений волнового уравнения, ДАН СССР, т. XLVIII, 8, стр. 570, т. XLVIII, 9, стр. 646, т. XLIX, 1, стр. 12 (1945).
2. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленингр. гос. ун-та (1950).

Степанов В. В.

1. Ueber einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen, Math. Ann., 95 (1926), стр. 437—498.
2. О метрике в пространстве почти-периодических функций S_2, ДАН СССР, т. **LXIV**, 3 (1949), стр. 171.
3. Об одном классе почти-периодических функций, ДАН СССР, т. **LXIV**, 3 (1949), стр. 297.

Степанов В. В. и Левитан Б. М.

1. О почти-периодических функциях, принадлежащих в собственном смысле классу W, ДАН СССР, т. **XXII** (1939), стр. 229.

Vallée Poussin C. J.

1. Sur les fonctions presque-périodiques de H. Bohr, Ann. soc. scien. Bruxelles, **47** (1927), стр. 141—158.

Weyl H.

1. Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, Math. Ann., **97** (1926), стр. 338—356.
2. Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math., сер. 2, 35 (1936), стр. 486.
3. Almost periodic invarianten Vector sets in a metric vector space, Amer. Journ. of Math., **71**, 1 (1949), стр. 178.
4. Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. **77** (1916), стр. 313—352.

Wiener N.

1. Generalised harmonic analysis, Acta math., **55** (1930), стр. 117—258.

Wintner A.

1. On the asymptotic repartition of the values of real almost periodic functions, Amer. Journ. of Math. 54 (1932), 334—345.

Wolf F.

1. Approximation by trigonometrical polynomials and almost periodicity, Proc. London Math. Soc. II, **44** (1938), стр. 100—114.