

И. М. ЛИФШИЦ
М. Я. АЗБЕЛЬ
М. И. КАГАНОВ

ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

Электронная теория металлов, И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, монография, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука» 1971.

Монография содержит изложение современной электронной теории металлов, основанное на предположении, что электроны проводимости — квазичастицы со сложным законом дисперсии.

Построена механика (квантовая и классическая) квазичастиц со сложным законом дисперсии, причем главное внимание уделено движению электронов в магнитном поле. Необычный характер движения квазичастиц приводит к специфическим свойствам монокристаллических образцов металлов.

Подробно исследованы термодинамические (тепловые, магнитные), кинетические, высокочастотные и резонансные свойства металлов. Выяснена связь характеристик металла с законом дисперсии электронов проводимости и сформулирована задача о расшифровке электронного энергетического спектра по экспериментальным данным.

Монография снабжена приложением, в котором собраны данные об электронном спектре различных металлов.

Табл. 1, Рис. 110, Библ. 673 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
§ 1. Простая модель	7
Часть I. Механика (классическая и квантовая) электрона проводимости	27
§ 2. Геометрия изоэнергетических поверхностей	27
§ 3. Плотность состояний на единичный интервал энергий	39
§ 4. Классическая механика частицы с произвольным законом дисперсии	45
§ 5. Движение электронов проводимости в неоднородных полях	58
§ 6. Столкновения квазичастиц. Рассеяние	67
§ 7. Квазиклассические уровни энергии	74
§ 8. Квантовая механика электрона с произвольным законом дисперсии	86
§ 9. Квантовая теория рассеяния электронов с произвольным законом дисперсии	94
§ 10. Магнитный пробой	98
Часть II. Статистическая механика электронов проводимости	109
§ 11. Критерий металла и диэлектрика. Энергия Ферми. Поверхность Ферми. Число электронов	109
§ 12. Термодинамика электронов проводимости	119
§ 13. Об аномалиях электронных характеристик металла в области больших давлений	125
§ 14. Пара- и диамагнетизм (слабые магнитные поля)	131
§ 15. Эффект де Гааза — ван Альфена (сильные магнитные поля)	135
§ 16. Эффект де Гааза — ван Альфена и теория ферми-жидкости	147
§ 17. Определение электронного энергетического спектра по эффекту де Гааза — ван Альфена	151
§ 18. Общая теория осцилляционных явлений	155
§ 19. Сильный магнетизм электронов проводимости. Аномалии термодинамических величин в сильном магнитном поле	159
§ 20. Доменные и периодические структуры в магнитном поле	166
§ 21. Теория диамагнитных фазовых переходов	177
§ 22. Замечание об эмиссионных свойствах металлов	188
Часть III. Кинетические свойства электронов в металле	190
§ 23. Кинетическое уравнение Больцмана	191
§ 24. Удельная электропроводность. Закон Ома	201
§ 25. Теплопроводность. Закон Видемана — Фрайца. Термоэлектрические явления	211
§ 26. Гальваномагнитные явления. Введение	219
§ 27. Гальваномагнитные явления. Большие поля. Замкнутые траектории	226
§ 28. Гальваномагнитные явления. Большие поля. Открытые траектории	236
§ 29. Теория статического скин-эффекта	251

§ 30. Теплопроводность и термоэлектрические явления в сильном магнитном поле	261
§ 31. Квантовые осцилляции сопротивления металлов — эффект Шубникова — де Гааза	264
<i>Часть IV. Высокочастотные свойства металлов</i>	270
§ 32. Общие закономерности поведения металлов в высокочастотных полях	271
§ 33. Аномальный скин-эффект в отсутствие постоянного магнитного поля	280
§ 34. Аномальный скин-эффект в постоянном магнитном поле	285
§ 35. Физическая картина циклотронного резонанса	288
§ 36. Теория циклотронного резонанса	296
§ 37. Исследование поверхностного импеданса при циклотронном резонансе	304
§ 38. Затухание высокочастотного поля в металле	309
§ 39. Собственные колебания и слабозатухающие волны в металле	318
§ 40. Ферми-жидкостные эффекты в высокочастотных явлениях в металлах	326
§ 41. Поверхностный скин-эффект и резонанс на сверхнизких частотах	329
§ 42. Квантовая теория высокочастотных явлений	333
§ 43. Квантовый циклотронный резонанс	341
§ 44. Парамагнитный резонанс в металлах	345
§ 45. Комбинированный резонанс	355
§ 46. Осцилляции импеданса в слабых магнитных полях	357
§ 47. Инфракрасная оптика	360
§ 48. О восстановлении энергетического спектра металлов	365
<i>Приложение I. Квантовые осцилляции сопротивления металлов на низких частотах</i>	370
<i>Приложение II. Роль электронов в распространении и поглощении звука в металлах</i>	373
<i>Приложение III. Топология поверхностей Ферми металлов (справочная таблица)</i>	385
<i>Литература</i>	398

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы, которые автор включает в книгу, названную «Электронная теория металлов», определяются не привходящими обстоятельствами (размер, уровень подготовки предполагаемого читателя и т. п.), а тем образом, который возникает у автора, когда произносится слово «металл». Для нас металл — это прежде всего заряженная жидкость в ионном остове, делающая своим существованием этот остов устойчивым. Частицы жидкости — электроны проводимости. Если их извлечь из металла, то это, конечно, обычные электроны с зарядом e , спином $1/2$ и массой m . Но электрон проводимости в меди существенно отличается от электрона проводимости в железе. Мерой их индивидуальности служит закон дисперсии — весьма сложная зависимость энергии от импульса.

Закон дисперсии электронов проводимости проявляет себя во всех свойствах металлов. Именно он определяет отличие в поведении разных металлов, особенно в тех тонких квантовых явлениях, к которым привлечено внимание сегодня.

Это означает, что знание его так же необходимо, как знание уровней энергии атомов для расчета свойств газов. В настоящее время для многих металлов закон дисперсии электронов проводимости уже установлен. В конце книги имеется специальное приложение III, любезно составленное по нашей просьбе Ю. П. Гайдуковым, в котором кратко изложены результаты этих исследований и приведена обширная библиографическая справка.

Расшифровка экспериментальных данных (которая, конечно, производится с помощью более или менее надежных моделей), т. е. установление количественных соотношений между измеряемыми величинами и параметрами закона дисперсии, невозможна без теории структурно чувствительных явлений (магнитных, гальваномагнитных и т. д.). Авторы главное внимание уделили изложению теории подобных явлений, сформулированной в форме, удобной для расшифровки энергетического спектра.

Задача теории металлов, разумеется, не исчерпывается рецептами расшифровки закона дисперсии, и на данную монографию не следует смотреть как на сборник таких рецептов.

Явления, о которых идет речь, представляют сами по себе огромный интерес: именно они составляют то, что в настоящее время принято называть электронными свойствами металлов.

Нет необходимости перечислять включенные в монографию вопросы. С содержанием книги легко ознакомиться по оглавлению. Нам хочется отметить вопросы, которые в книгу не вошли или которым уделено мало внимания. Это прежде всего температурная зависимость кинетических коэффициентов (электропроводности, теплопроводности и т. д.). Вынужденная лаконичность, как будет ясно из введения, — дань стилю и задачам книги. Не излагаются приближенные методы расчета электронного энергетического спектра металлов, так как недавно появилось несколько специальных книг на эту тему и дублирование нам кажется нецелесообразным. Наконец, совершенно отсутствует изложение теории коллективных явлений (ферро- и антиферромагнетизма, сверхпроводимости). По традиции — это особая тема.

Большая часть вошедших в монографию результатов основана на работах группы харьковских физиков-теоретиков либо на исследованиях, продолжающих эти работы. Существенное продвижение в физике металлического состояния связано не только с теоретическими работами, но в очень большой степени и с полученными экспериментальными результатами. В нашей монографии, однако, экспериментальные результаты привлекаются только для иллюстрации. Уже поэтому мы не можем претендовать на охват всех работ по электронным свойствам металлов, вышедших за последние годы. В частности, цитированная литература ни в коей мере не является библиографией по затронутым вопросам.

Конечно, когда мы писали книгу, мы думали о тех, кто будет ее читать. Мы представляли себе двух читателей. Одного мы условно называли «экспериментатором», а другого — «теоретиком». Первого интересует физическая сущность явления и, возможно, указание на то, какую информацию об электронах проводимости можно извлечь при изучении этого явления. Для второго, кроме того, важно, *как* выводятся формулы. Теоретику придется читать все (или полностью те главы, где описаны интересующие его явления). Экспериментатор, внимательно просмотрев книгу, найдет (как правило, в начале параграфа) интересующие его сведения.

Нам приятно воспользоваться случаем и поблагодарить всех товарищей, в совместной работе с которыми создавался излагаемый ниже вариант электронной теории металлов.

Отдельно мы хотели бы поблагодарить И. Н. Адаменко и А. А. Шапиро, помогавших при оформлении рукописи к изданию.

(Авторы)

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее существенное продвижение в понимании физики металлического состояния произошло, по-видимому, в то время, когда стало ясно, что в металлах есть свободные электроны и (следующий этап) что они представляют собой предельно вырожденный квантовый газ. В дальнейшем эти представления не были отменены, а совершенствовались и углублялись.

§ 1. Простая модель

Исходя из предположения о существовании в металле свободных электронов, можно построить последовательную теорию металлического состояния. Отличие одного металла от другого по этой теории обусловлено числом свободных электронов и различием кристаллических решеток. Понимая чисто историческую ценность этих примитивных представлений об электронах в металле, перечислим все же некоторые характеристики такого гипотетического металла. Это перечисление, как нам кажется, необходимо, так как позволит сделать ряд важных оценок и высказать соображения, весьма полезные для дальнейшего.

Обычно свободными считают валентные электроны. Это означает, что для металлов первой группы таблицы Менделеева число свободных электронов — один на атом, для металлов второй группы — два и т. д. Тем самым в подобной модели плотность n электронов в металле порядка нескольких единиц на объем кристаллической ячейки, т. е. $n \approx 1/a^3$, где a — межатомное расстояние. Энергия Ферми ϵ_F такого газа порядка 10^{11} эрг или 10^5 ° К, что и определяет сильное вырождение электронного газа при всех температурах T ($T \ll \epsilon_F$). Распределение электронов в импульсном пространстве резко неоднородно: электроны заполняют сферу радиуса $p_F \approx \hbar/a$, причем с повышением температуры это распределение изменяется незначительно. Для большинства свойств металлов определяющую роль играют электроны с энергией порядка фермиевской (фермиевские электроны). Их скорость $v_F \approx 10^8$ см/сек, а длина волны де Бройля λ_B порядка межатомного расстояния ($\lambda_B \approx a \approx 3 \cdot 10^{-8}$ см).

Резкое вырождение электронного газа приводит к квадратичной зависимости термодинамических потенциалов от температуры, а как следствие — к линейной зависимости от температуры электронной части теплоемкости металла:

$$C_{эл} (1/сМ^3) = \frac{\pi^2}{2} n \frac{T}{\epsilon_F}. \quad (1.1)$$

Естественно, что при достаточно низких температурах теплоемкость металла определяется именно электронами, так как решеточная (фононная) часть теплоемкости убывает с температурой значительно быстрее электронной ($C_{реш} \sim T^3$).

Взаимодействие электронов с нерегулярностями кристалла, в частности с колебанием кристаллической решетки, в модели свободных электронов ограничивается рассеянием и может быть описано введением длины свободного пробега l_p . Электропроводность σ при этом равна

$$\sigma = \frac{ne^2 l_p}{p_F}, \quad (1.2)$$

причем вся температурная зависимость проводимости описывается зависимостью от температуры длины свободного пробега ($l_p = l_p(T)$). Индекс p у длины свободного пробега означает, что механизм рассеяния связан с диссипацией импульса.

Модель вырожденного электронного газа позволяет объяснить не только существование закона Видемана — Франца

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3e^2} \quad (1.3)$$

(κ — теплопроводность металла), но и отклонения от него. Более общее выражение, даваемое теорией, гласит:

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3e^2} \frac{l_e}{l_p}, \quad (1.4)$$

где l_e — длина свободного пробега относительно диссипации энергии. Согласно теории предсказывает, что $l_e \neq l_p$ при температурах порядка и ниже дебаевской.

Подобная модель не может описать гальваномагнитных и термомагнитных эффектов, однако позволяет оценить величину константы Холла R :

$$R = 1/nec. \quad (1.5)$$

Электрон в магнитном поле H движется по спирали, навитой на магнитную силовую линию. Радиус r_H орбиты электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, равен cp_{\perp}/eH , где p_{\perp} — перпендикулярная магнитному полю компонента импульса. Как показывает рассмотрение, основную роль

в большинстве наблюдаемых явлений играют те фермиевские электроны, для которых $p_{\perp} = p_F$, т. е. проекция импульса на магнитное поле равна нулю. Для них

$$r_H = cp_F/eH. \quad (1.6)$$

Финитный характер движения электронов в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, приводит к квантованию уровней энергии

$$\epsilon = (n + 1/2) \hbar\omega_H + \frac{p_z^2}{2m} + \sigma\mu_B H, \quad (1.7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad \sigma = \pm 1.$$

Здесь ω_H — циклотронная частота обращения электрона в магнитном поле

$$\omega_H = eH/mc, \quad (1.8)$$

m — масса электрона, а p_z — проекция импульса на магнитное поле; последнее слагаемое в формуле (1.7) обязано своим существованием спину электрона, μ_B — магнетон Бора ($\mu_B = e\hbar/2mc$).

Величину магнитного поля можно оценивать различным образом, например, по отношению радиуса орбиты электрона r_H к его длине волны де Бройля λ_B . Так как $p_F \approx \hbar/a$, а $\lambda_B \approx a$, то из (1.6) следует

$$\lambda_B/r_H = H/H_a; \quad H_a = c\hbar/ea^2 \approx 10^8 - 10^9 \text{ э.} \quad (1.9)$$

Практически всегда $H \ll H_a$, а это значит, что $\lambda_B \ll r_H$. Если при этом заметить, что условие $H \ll H_a$ означает, кроме того, малость расстояний между квантованными уровнями энергии по сравнению с самой энергией Ферми ($\hbar\omega_H \ll \epsilon_F$) то становится очевидным, что в реально достижимых магнитных полях движение электрона проводимости во внешнем магнитном поле можно исследовать, пользуясь квазиклассическим приближением. Это обстоятельство, весьма характерное для динамики электрона проводимости, будет нами неоднократно использовано в дальнейшем. Следует подчеркнуть, что квазиклассичность движения фермиевских электронов во внешних полях (не только в магнитном) связана лишь с большой плотностью электронов ($n \approx 1/a^3$) и, как следствие этого, с малостью длины волны де Бройля ($\lambda_B \approx a$). Когда же речь идет о внешних (приложенных извне к кристаллу) полях, то, очевидно, подразумеваются поля, не изменяющие существенно структуру кристалла. Это означает, что имеются в виду такие внешние воздействия, которым соответствуют силы, малые по сравнению с внутриатомными или внутрикристаллическими. Внешние поля всегда достаточно однородны (плавны), благодаря чему траектория электрона в таком поле всегда значительно больше атомных

размеров. А это, как ясно из предыдущего, обеспечивает возможность квазиклассического подхода. Мы подробно останавливаемся на этих довольно тривиальных замечаниях, так как при существенном усложнении модели было бы невозможно продвинуться в расчете наблюдаемых характеристик металла, если бы не возможность использовать квазиклассическое приближение.

Вернемся к оценке величины магнитного поля. Соотношение (1.9) отнюдь не означает, что магнитное поле всегда можно считать малым. Радиус орбиты электрона r_H сравнительно легко сравнивается с длиной свободного пробега

$$l_p/r_H = H/H_i; \quad H_i = H_a a/l_p. \quad (1.10)$$

При низких температурах и у достаточно чистых металлов длины свободного пробега в сотни тысяч раз (и более!) больше межатомного расстояния, поэтому $H_i \ll H_a$. Расстояние между квантованными уровнями энергии, которое всегда значительно меньше энергии Ферми, в сравнительно небольших полях может оказаться порядка или даже больше температуры *):

$$\hbar\omega_H/T = H/H_T; \quad H_T = mcT/eh = H_a \frac{T}{\epsilon_F} \approx 10^4 T \text{ (}^\circ\text{K)}. \quad (1.11)$$

Конечно, можно было бы привести еще примеры; например, сопоставить r_H и глубину скин-слоя δ . Оказалось бы, что при вполне достижимых магнитных полях и частотах радиус орбиты и глубина скин-слоя имеют один и тот же порядок величины ($\delta \sim r_H$).

Как видно из перечисленных примеров, макроскопические характеристики электронного газа (l , T , δ и т. п.) таковы, что сравнение с ними параметров, характеризующих движение электрона в магнитном поле (r_H , $\Delta\epsilon$), заставляет часто считать магнитное поле большим, хотя при сравнении с индивидуальными характеристиками фермиевских электронов (ϵ_F , $\lambda_B \approx \hbar/a$) это же поле следует считать малым. Подобная ситуация является причиной большого числа разнообразных интересных эффектов, наблюдаемых в металлах, помещенных в достаточно сильное магнитное поле. Мы часто будем употреблять термин «сильное магнитное поле». При этом, однако, всегда подразумевается, что $H \ll H_a$, т. е. по сравнению с атомными полями магнитное поле мало.

Характер движения электронов в магнитном поле существенно связан с их энергетическим спектром, поэтому исследо-

*) Во всех формулах температура — в энергетических единицах. Константа Больцмана принята равной единице. Однако «на словах» мы будем измерять температуру градусами.

вание электронных свойств металлов в сильном магнитном поле является в настоящее время одним из основных методов изучения электронного энергетического спектра. Этим вопросам будет уделено много внимания. При переходе к более реалистической модели металла многие оценки нам придется, конечно, уточнить, но основной вывод о квазиклассичности движения электронов в магнитном поле полностью сохранится.

*
* *
*

При построении последовательной теории металлического состояния необходимо учесть два фундаментальных обстоятельства: взаимодействие электронов с периодическим полем кристаллической решетки и взаимодействие электронов друг с другом.

Квантовомеханическое изучение движения электронов в периодическом поле привело к созданию зонной теории, основные выводы которой сохранили свое значение до настоящего времени. Для выяснения характера истинного (т. е. учитывающего взаимодействие электронов друг с другом) энергетического спектра металлов обычно используют представления и терминологию зонной теории. Дело в том, что учет межэлектронного взаимодействия не затрагивает главного результата зонной теории — характера стационарных состояний в периодической структуре. Сформулируем кратко основные положения зонной теории.

Периодичность поля U кристаллической решетки

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = U(\mathbf{r}) \quad (1.12)$$

(где $\mathbf{a} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + s_3\mathbf{a}_3$, \mathbf{a}_j — основные векторы решетки, s_j — целые числа) приводит к трансляционной инвариантности оператора Гамильтона \hat{H} . Это обстоятельство позволяет классифицировать состояния электрона по поведению волновой функции при трансляции ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$). Легко показать, что волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ (решение уравнения Шредингера) должна удовлетворять следующему условию (условию Блоха):

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}/\hbar}\psi(\mathbf{r}), \quad (1.13)$$

где \mathbf{p} — произвольный вещественный вектор. Он называется *квазиимпульсом*. Состояние электрона удобно задавать, задавая значение квазиимпульса \mathbf{p} . Однако такое задание состояния неоднозначно. Действительно, общий вид функции, удовлетворяющей условию Блоха, имеет вид:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}u(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

где $u(\mathbf{r})$ — периодическая функция $u(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = u(\mathbf{r})$, явный вид которой должен быть найден путем решения уравнения, получающегося из уравнения Шредингера после подстановки в него волновой функции (1.14):

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{p}) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}); \quad \widehat{\mathcal{H}}_{\mathbf{p}} = e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} \widehat{\mathcal{H}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}. \quad (1.15)$$

При заданном значении \mathbf{p} это уравнение имеет бесконечный дискретный ряд различных решений $u_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, поэтому

$$\psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} u_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (1.16)$$

а отвечающие им различные значения энергии электрона суть

$$\varepsilon = \varepsilon_s(\mathbf{p}), \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Индекс s , нумерующий решения уравнения Шредингера (1.15), мы будем называть номером зоны, а зависимость энергии от квазиимпульса при фиксированном номере зоны — законом дисперсии*).

По определению номера зоны s , это номер решения некоторого дисперсионного уравнения, возникающего при исследовании исходного уравнения Шредингера. Из сказанного ясно, что различные функции $\varepsilon_s(\mathbf{p})$ суть различные ветви одной аналитической функции комплексного вектора \mathbf{p} , причем из постановки задачи, как правило, ясно, какую из компонент вектора \mathbf{p} следует считать комплексной. Такой подход к закону дисперсии в различных зонах помогает рассмотрению эффектов, связанных с переходами электронов из зоны в зону.

Все функции $\psi_{s\mathbf{p}}$ с различными s , \mathbf{p} , естественно, ортогональны. В частности при соответствующей нормировке

$$\int u_{s'\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) u_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d\mathbf{v} = \delta_{ss'}, \quad (1.18)$$

причем здесь интегрирование ведется в пределах одной элементарной ячейки кристаллической решетки.

Функции (1.16) обнаруживают сходство с волновыми функциями свободного электрона $\psi = \text{const } e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}$, причем отчетливо видна близость квазиимпульса и импульса свободного электрона. К этому вопросу, играющему фундаментальную роль, мы еще вернемся и подробно обсудим, в каких случаях можно вовсе пренебречь различием между квазиимпульсом и импульсом. Введение квазиимпульса (1.13) показывает, что он определен неоднозначно. Квазиимпульсы, отличающиеся на вектор ви-

*) Энергетической зоной (или полосой) называют интервал между минимальным и максимальным значениями энергии при фиксированном значении s . Эти интервалы, конечно, могут перекрываться (§ 2).

да $2\pi\hbar\mathbf{b}$ (где \mathbf{b} — произвольный вектор обратной решетки), физически эквивалентны, так как приводят к одинаковому поведению волновой функции при трансляции ($a\mathbf{b}$ — целое число!). Это означает, что функции $\psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ периодичны относительно индекса \mathbf{p} :

$$\psi_{s, \mathbf{p}+2\pi\hbar\mathbf{b}}(\mathbf{r}) = \psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (1.19)$$

и, что особенно следует подчеркнуть, энергия также является периодической функцией квазиимпульса:

$$\varepsilon_s(\mathbf{p} + 2\pi\hbar\mathbf{b}) = \varepsilon_s(\mathbf{p}). \quad (1.20)$$

Трансляционные свойства волновых функций в \mathbf{r} - и \mathbf{p} -пространствах отчетливо видны, если записать разложение блоховской волны (1.16) по плоским волнам (т. е. по состояниям с определенным импульсом). Учет условия (1.19) приводит к весьма специальной зависимости коэффициентов разложения от \mathbf{p} и \mathbf{b} :

$$\psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{b}} a_s(\mathbf{p} + 2\pi\hbar\mathbf{b}) e^{i(\mathbf{p}+2\pi\hbar\mathbf{b})\mathbf{r}/\hbar}. \quad (1.21)$$

Следует подчеркнуть, что разложение (1.21) есть непосредственное следствие периодичности потенциальной энергии $U(\mathbf{r})$ (см. формулу (1.12)) и может быть получено, если разложить потенциальную энергию в ряд Фурье.

Периодичность пространства квазиимпульсов показывает, что выбор основной ячейки, т. е. области, содержащей все неэквивалентные состояния по одному разу, условен и определяется только соображениями удобства. Очень часто (особенно при рассмотрении движения электрона во внешних полях) удобно пользоваться бесконечным периодическим \mathbf{p} -пространством, а условность выбора основной ячейки означает условность положения обратной решетки кристалла.

В некоторых случаях (особенно для анализа движения электрона под действием внешних сил) удобно использовать не блоховские волны (1.16), а их линейную комбинацию — функции Ванье:

$$a_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar} \psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

Здесь \mathbf{R} — целочисленный вектор, совпадающий с векторной координатой центра кристаллической ячейки, N — число ячеек кристалла.

Суммирование в последней формуле ведется по всем физическим неэквивалентным состояниям. Другими словами, если перейти к интегрированию по \mathbf{p} , то его надо производить внутри одной ячейки обратной решетки (ячейки с ребрами $2\pi\hbar\mathbf{b}_i$,

$2\pi\hbar\mathbf{b}_2$, $2\pi\hbar\mathbf{b}_3$, где \mathbf{b}_j — основные векторы обратной решетки). Периодичность по \mathbf{p} множителя $e^{-i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar}$ и функции $\psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ позволяет распространить интегрирование на все пространство, введя дополнительный нормирующий множитель. Мы в дальнейшем специально остановимся на выборе области определения квазиимпульса и, в частности, на преимуществах, которые возникают при использовании всего \mathbf{p} -пространства.

Функции Ванье составляют ортонормированную систему функций, причем надо отметить, что ортогональны функции, принадлежащие не только разным зонам ($s \neq s'$), но и одной, если они центрированы на разные ячейки ($\mathbf{R} \neq \mathbf{R}'$).

Функции Ванье (1.22) описывают состояние электрона, принадлежащего s -й зоне и локализованного в окрестности \mathbf{R} -й ячейки кристаллической решетки. Энергия такого электрона, естественно, не имеет определенного значения. Электрон в состоянии с определенным квазиимпульсом «размазан» по всей решетке. Вероятность $W_{s\mathbf{p}}$ обнаружить электрон в точке \mathbf{r} есть периодическая функция. Согласно (1.16) $W_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = |u_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r})|^2$.

Одноэлектронное приближение (напомним, что мы пока не учитываем взаимодействие между электронами) идейно очень просто и позволяет в принципе выяснить структуру электронного энергетического спектра и характер квантовых состояний электронов. Основным результатом этого рассмотрения, несомненно, является введение квазиимпульса. Однако непосредственный расчет закона дисперсии и волновых функций связан с большими вычислительными трудностями, которые удается преодолеть лишь при весьма специальных предположениях (сильная связь, почти свободные электроны и т. п.). Выяснение квантовых состояний электронов в решетке и их энергетического спектра, по сути дела, является не завершением электронной теории металлов, а только ее началом — обоснованием. При решении конкретных задач теории металлов оказывается необходимым проанализировать движение электрона во внешних по отношению к кристаллу полях, в частности во внешнем магнитном поле. Точное решение уравнения Шредингера в этом случае уже не только невозможно практически, но в большинстве случаев не удастся даже описать квантовое состояние электрона, на который кроме периодической силы со стороны ионов решетки действует и внешняя аperiодическая сила. Возможность продвижения в исследовании свойств электронов проводимости основана на том уже упоминавшемся нами обстоятельстве, что внешние поля по своей сути всегда слабы и плавны и допускают квазиклассический подход.

Уточним, как можно использовать слабость и плавность внешних полей при рассмотрении движения электрона в кристалле.

Решение $\psi(\mathbf{r}, t)$ нестационарного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.23)$$

для электрона, движущегося в поле кристаллической решетки $U(\mathbf{r})$ и во внешнем электрическом поле $V(-\text{grad } V = e\mathbf{E})$, удобно искать в виде разложения по функциям Ванье

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{s, \mathbf{R}} f_s(\mathbf{R}, t) a_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (1.24)$$

Подставляя разложение (1.24) в уравнение (1.23), получим бесконечную систему уравнений для коэффициентов $f_s(\mathbf{R}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial f_s(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \sum_{s', \mathbf{R}'} \{ \delta_{ss'} \varepsilon_{s'}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + V_{ss'}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \} f_{s'}(\mathbf{R}', t), \quad (1.25)$$

где

$$V_{ss'}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \int a_s^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) V(\mathbf{r}) a_{s'}(\mathbf{r} - \mathbf{R}') d\mathbf{r} \quad (1.26)$$

— матричный элемент потенциала внешней силы, а

$$\varepsilon_s(\mathbf{R}) = \frac{1}{N} \sum_p \varepsilon_s(\mathbf{p}) e^{+i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar} \quad (1.27)$$

Фурье-образ энергии.

Точное уравнение (1.25) формально можно записать так, чтобы подчеркнуть его сходство с уравнением Шредингера. Для этого надо ввести непрерывную функцию $f_s(\mathbf{r}, t)$, такую, что $f_s(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} = f_s(\mathbf{R}, t)$. Тогда уравнение (1.25) переписывается следующим образом:

$$\left[\hat{\varepsilon}_s \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) f_s(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f_s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + \sum_{s' \mathbf{R}'} V_{ss'}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) f_{s'}(\mathbf{R}', t) = 0. \quad (1.28)$$

Оператор $\hat{\varepsilon}_s \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)$ задается своим разложением в ряд Фурье *)

$$\hat{\varepsilon}_s \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) = \sum_{\mathbf{R}} \varepsilon_s(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{R}\nabla}. \quad (1.29)$$

Сделаем наконец, упрощающие предположения, основанные на слабости и плавности внешнего поля $V(\mathbf{r})$. Вероятность перехода между зонами существенно связана с величиной потенциала V . Если $|V| \ll \varepsilon_a$, где ε_a — энергия порядка атомной, то эта вероятность очень мала и можно отбросить все те матричные

*) Переход от уравнения (1.25) к уравнению (1.28) требует определенных оговорок, касающихся аналитических свойств функций $\varepsilon_s(\mathbf{p})$. Мы на этом не будем останавливаться. Более подробный вывод см., например, в работе [1].

элементы, для которых $s \neq s'$. Если, кроме того, внешнее поле медленно меняется от точки к точке, то можно пренебречь всеми матричными элементами, кроме $V_{ss}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, который, по определению, равен $V(\mathbf{R}) = V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}$. Таким образом, в наиболее интересных для нас случаях имеем:

$$\left\{ \hat{\epsilon}_s \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} f_s(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.30)$$

причем надо положить $\mathbf{r} = \mathbf{R}$. Естественно распространить это уравнение на все точки пространства. Функция $f_s(\mathbf{r}, t)$, приближенно описывающая движение электрона во внешних полях, играет роль волновой функции электрона s -й зоны. Структура уравнения показывает, что $\epsilon_s \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)$ следует считать оператором кинетической энергии, а $V(\mathbf{r})$ — потенциальной. Точность описания движения электрона с помощью функции $f_s(\mathbf{r}, t)$, естественно, ограничивается точностью интерполяции, т. е. постоянной решетки a . Следовательно, использовать уравнение (1.30) допустимо, только если область существенного изменения функции $f_s(\mathbf{r}, t)$ значительно больше постоянной решетки. С другой стороны, так как длина волны де-Бройля фермиевского электрона порядка a , то это условие позволяет (при рассмотрении движения электрона проводимости во внешних полях) использовать квазиклассическое приближение, а в большом числе задач просто ограничиться классическим подходом *).

Переход к классической постановке задачи происходит путем введения функции Гамильтона

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \epsilon_s(\mathbf{p}) + V(\mathbf{r}). \quad (1.31)$$

Эта процедура соответствует обращению принципа соответствия. При переходе к квантовой постановке оператор Гамильтона получается заменой импульса \mathbf{p} оператором $\frac{\hbar}{i} \nabla$; здесь мы переходим к классике, заменяя оператор $\frac{\hbar}{i} \nabla$ импульсом \mathbf{p} .

Уравнения Гамильтона записываются обычным образом

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}; \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.32)$$

Первое уравнение служит определением скорости **)

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}, \quad (1.33)$$

*) Ниже мы очертим круг задач, при решении которых нельзя ограничиться классическим подходом.

**) Во всех случаях, где это не может привести к путанице, мы будем опускать индекс s , отмечающий номер зоны.

а второе вполне аналогично уравнению Ньютона

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}; \quad \mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.34)$$

Подчеркнем два обстоятельства: 1) скорость и импульс не связаны «привычным» соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, скорость — сложная периодическая функция импульса \mathbf{p} , задаваемая законом дисперсии (1.17); 2) в уравнение Ньютона (1.34) входит не полная сила, действующая на электрон, а только внешняя по отношению к кристаллу.

Если внешняя сила обусловлена электрическим полем напряженности \mathbf{E} , то $\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}$.

Влияние магнитного поля \mathbf{H} можно учесть, заменив правую часть уравнения (1.34) силой Лоренца:

$$\dot{\mathbf{p}} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\}. \quad (1.35)$$

Строгий вывод уравнения (1.35), относительно которого Займан [1] заметил, что «оно слишком хорошо, чтобы быть совершенно точным», — довольно громоздкая процедура.

Однако после перехода к классике уравнение (1.35) может быть выведено стандартным образом, исходя из функции Лагранжа (аналогично тому, как это сделано, например, в «Теории поля» Л. Ландау и Е. Лифшица). При этом в функции Лагранжа следует писать $\frac{e}{c} \mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi$ ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$), так как $\mathbf{A}\mathbf{p}$ при перемещении на период обратной решетки не дает полной производной по времени. Вывод, кроме того, основан на неизменности заряда электрона, что есть следствие равенства числа квазичастиц при учете ферми-жидкостного взаимодействия числу электронов (см. ниже).

Таким образом, мы приходим к обычному определению кинематического импульса \mathbf{p} через канонически сопряженный импульс \mathbf{P} и векторный потенциал \mathbf{A} :

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}; \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}. \quad (1.36)$$

Функция Гамильтона частицы, кинетическая энергия которой $\varepsilon(\mathbf{p})$, в магнитном поле имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \varepsilon\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right) + V(\mathbf{r}); \quad V = e\varphi. \quad (1.37)$$

Если теперь записать уравнения Гамильтона (они пишутся для величин \mathbf{P} и \mathbf{r}) и перейти к кинематическим импульсам \mathbf{p} , то, воспользовавшись связью между потенциалами φ и \mathbf{A} и

напряженностями полей E и H

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi; \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

а также определением скорости (1.33), легко получим уравнение (1.35). Этим рассуждением мы хотим подчеркнуть: то обстоятельство, что сила Лоренца формально совпадает с обычной, во всяком случае не связано с квадратичностью закона дисперсии электронов. Как мы увидим ниже, движение электрона со сложным законом дисперсии в магнитном поле существенно зависит от закона дисперсии, а наиболее существенные проявления квантовых свойств («размазанности» электрона) носят весьма своеобразный характер, причем отступления от классической механики обусловлены структурой электронного энергетического спектра, т. е. целиком связаны со сложной зависимостью энергии ϵ от импульса p .

Итак, зонная теория выясняет квантовые состояния электронов (состояния с определенным квазиимпульсом p и номером зоны s , см. (1.16)), дает принципиальный алгоритм вычисления закона дисперсии $\epsilon_s(p)$ без учета взаимодействия между электронами и обосновывает квазиклассический подход, главное в котором — возможность замены квазиимпульса импульсом, пользование функцией $\epsilon_s(p)$ как кинетической энергией, использование классических уравнений движения (1.35) с учетом сложной периодической зависимости скорости от импульса ($v = v(p)$). Если добавить к этому утверждение, что электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака, т. е. представляют собой идеальный ферми-газ, то мы имеем законченную платформу для вывода всех равновесных свойств металла (тепловых и магнитных). Введение столкновений электронов с колебаниями решетки, друг с другом и с любыми нарушениями периодичности кристалла (с атомами внедрения, с дислокациями и т. п.) позволяет построить теорию кинетических свойств металла (электро- и теплопроводности, гальвано- и термомагнитных явлений и др.).

Однако, как будет видно ниже, использование представлений зонной теории можно обосновать, учтя взаимодействие между электронами. Правда, при этом приходится отказаться (во всяком случае, на сегодняшнем этапе развития электронной теории металлов) от вычисления волновой функции электрона проводимости *) и его закона дисперсии. Закон дисперсии в развиваемом далее аппарате теории предполагается заданным, либо ставится (и решается) задача о его определении из сравнения результатов теории с экспериментом.

*) Точнее, одночастичной функции Грина электронов.

*

* * *

Идейно наиболее сложно при построении электронной теории металлов последовательно учесть взаимодействие между электронами. Разнообразные попытки непосредственного построения волновой функции ансамбля электронов не привели к сколько-нибудь конструктивным результатам. Весьма продуктивным оказался подход, разработанный Ландау [2] для изучения свойств легкого изотопа гелия He^3 и получивший название ферми-жидкостного.

Согласно теории Ландау, в основе построения спектра ферми-жидкостного типа лежит предположение, что по мере постепенного «включения» взаимодействия между электронами, т. е. при переходе от газа к жидкости, классификация уровней остается неизменной — состояние электрона в кристалле по-прежнему можно описать заданием квазиимпульса p и номера зоны *) s . Роль частиц газа в этой классификации принимают на себя элементарные возбуждения (квазичастицы). Каждая квазичастица обладает определенным квазиимпульсом. Квазичастицы подчиняются статистике Ферми, а их число всегда совпадает с числом частиц в жидкости. Квазичастицу можно в известном смысле рассматривать как частицу, находящуюся в самосогласованном поле окружающих частиц. При этом естественно, что энергия частицы зависит от состояния окружающих частиц; энергия всей системы не есть сумма энергий отдельных частиц, а является функционалом от функции распределения. Последнее утверждение — основная идея теории ферми-жидкости.

Основой приближения в теории ферми-жидкости служит малость отклонения системы от основного состояния, которое аналогично основному состоянию идеального газа: все состояния с энергией, меньшей некоторой (энергии Ферми), заняты, а остальные свободны. Возбужденные состояния возникают, когда частица переходит из занятого состояния с энергией, меньшей энергии Ферми, в свободное состояние. Для того чтобы каждой квазичастице можно было приписать определенный квазиимпульс, необходимо, чтобы неопределенность квазиимпульса была мала не только по сравнению с самим квазиимпульсом, но и по сравнению с областью размытости фермиевского распределения Δp . Легко видеть, что это условие заведомо соблюдается, если область размытости достаточно мала.

*) Конечно, если при включении взаимодействия не происходит изменения систематики состояний (например, если металл не переходит в сверхпроводящее состояние; в последнем случае не только изменяется систематика состояний, но и появляется щель вблизи энергии Ферми).

Действительно, благодаря принципу Паули вероятность рассеяния, а значит, и неопределенность импульса пропорциональна $(\Delta p)^2$. Отсюда ясно, что при достаточно малом Δp (размытии) неопределенность импульса мала не только по сравнению с импульсом, но и по сравнению с Δp . Кроме столкновений друг с другом причиной неопределенности импульса служат столкновения электронов с фононами. Можно показать [3], что и этот процесс не мешает описывать квазичастицу определенным квазиимпульсом, причем в данном случае малым параметром служит величина Θ/ε_F , где Θ — температура Дебая кристалла.

Если характеризовать состояние металла его отличием от основного состояния, то естественно описывать возбужденное состояние числом электронов «над» поверхностью Ферми, равным числу свободных мест «под» поверхностью Ферми. Согласно сказанному выше, эти числа значительно меньше общего числа электронов в единице объема. Мы в дальнейшем подобным описанием пользоваться не будем, хотя при трактовке ряда физических явлений «на словах» будем использовать тот факт, что число подвижных (не замороженных принципом Паули) электронов мало.

Основными характеристиками ферми-жидкости служат: закон дисперсии квазичастиц $\varepsilon(\mathbf{p})$ и корреляционная функция $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, которые вводятся следующим равенством, справедливым при малых отклонениях системы от основного состояния *):

$$E = E_0 + \int \varepsilon f_1(\mathbf{p}) d\Gamma + \frac{1}{2} \int \int \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_1(\mathbf{p}) f_1(\mathbf{p}') d\Gamma d\Gamma', \quad (1.38)$$

$$d\Gamma = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z.$$

Здесь E — плотность энергии системы, E_0 — плотность энергии основного состояния, $f_1(\mathbf{p})$ — отклонение функции распределения от фермиевской ступеньки. Из формулы (1.38) видно, что $\varepsilon(\mathbf{p})$ есть вариационная производная от энергии по функции распределения, она соответствует изменению энергии системы при добавлении к ней одной частицы с импульсом \mathbf{p} . Именно эта величина $\varepsilon(\mathbf{p})$ играет роль гамильтоновой функции квазичастицы в поле других частиц.

Следует подчеркнуть, что функция $\varepsilon(\mathbf{p})$ включает в себя как взаимодействие с ионным остовом кристаллической решетки, так и взаимодействие электронов друг с другом. Квазичастицу с законом дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ мы будем называть электроном проводимости, а часте просто электроном.

*) Мы для простоты не учитываем спиновых переменных, а также опускаем индексы, отмечающие номер зоны.

То обстоятельство, что введение квазиимпульса связано только с трансляционной инвариантностью системы, можно проиллюстрировать, рассмотрев собственные состояния гамильтониана, обладающего трансляционной инвариантностью, но который из-за межэлектронного взаимодействия, вообще говоря, может быть нелокальным:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.39)$$

Вместо координаты \mathbf{r} , принимающей непрерывный ряд значений, удобно ввести целочисленную координату \mathbf{R} , определяющую номер ячейки кристалла, и координату ρ , изменяющуюся в пределах одной ячейки

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho; \quad \mathbf{R} = s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + s_3 \mathbf{a}_3, \quad (1.40)$$

\mathbf{a}_j — основные векторы решетки, s_j — любые целые, положительные и отрицательные числа.

Вследствие трансляционной инвариантности гамильтониан независимо от его природы может зависеть только от относительного расположения ячеек, а не от их абсолютного положения

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \rho, \rho'). \quad (1.41)$$

Это следствие трансляционной симметрии позволяет разделить \mathbf{R} и ρ . Действительно, уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(\mathbf{R}, \rho)$ имеет решение вида

$$\psi(\mathbf{R}, \rho) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar} \psi_{\mathbf{p}}(\rho), \quad (1.42)$$

где \mathbf{p} — квазиимпульс, а функция $\psi_{\mathbf{p}}(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}} = \epsilon \psi_{\mathbf{p}}; \quad \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{R}'} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{R}'/\hbar} \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{R}', \rho, \rho'). \quad (1.43)$$

В общем случае уравнение (1.43), справедливое в пределах одной ячейки, имеет дискретный набор решений, каждое из которых будем отмечать индексом s (s — номер зоны):

$$\psi(\mathbf{R}, \rho) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{R}/\hbar} \psi_{s\mathbf{p}}(\rho). \quad (1.44)$$

С другой стороны, волновую функцию электрона можно рассматривать как функцию единой координаты $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho$. Поэтому $\psi_{s\mathbf{p}}(\rho)$ должна иметь следующую структуру: $\psi_{s\mathbf{p}}(\rho) = e^{i\mathbf{p}\rho/\hbar} u_{ps}(\rho)$, где $u_{ps}(\mathbf{r})$ — периодическая функция. Следовательно, волновая функция электрона с определенным квазиимпульсом есть блоховская волна (см. формулу (1.14) и следующие). Итак, возможность введения квазиимпульса — следствие только

трансляционной симметрии задачи — не связана ни с природой сил взаимодействия ни с конкретным видом гамильтониана.

Как мы уже говорили, большинство достижений электронной теории металлов в ее сегодняшней форме основано на том, что уровни энергии электрона проводимости $\epsilon_s(\mathbf{p})$ удается с весьма хорошей степенью точности трактовать как кинетическую энергию свободной частицы, а квазиимпульс \mathbf{p} считать обычным импульсом. Мы еще раз остановимся на этом, причем все рассуждение проведем в форме, не оставляющей сомнений в том, что используемые приближения не связаны со специальным видом гамильтониана (с одноэлектронным приближением).

Для изучения движения электрона во внешних полях надо построить в \mathbf{p} , s -представлении оператор координаты:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{p}}. \quad (1.45)$$

Из вида волновых функций (1.42) ясно, что

$$\hat{\mathbf{R}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}. \quad (1.46)$$

Это означает, что квазиимпульс \mathbf{p} и дискретная координата \mathbf{R} канонически сопряжены. Квазиимпульс \mathbf{p} , по принятой в механике терминологии, является импульсом по отношению к обобщенной дискретной координате \mathbf{R} .

Оператор $\hat{\mathbf{p}}$ диагонален по квазиимпульсу \mathbf{p} и определен своими матричными элементами

$$\rho_{ss'}(\mathbf{p}) = (\Psi_{ps}^* \rho \Psi_{ps'}). \quad (1.47)$$

Так как в \mathbf{p} , s -представлении гамильтониан (1.41) задан матричными элементами $\epsilon_s(\mathbf{p})$, то из формул (1.45) — (1.47) следует, что оператор скорости электрона имеет следующие матричные элементы:

$$v_{ss'} = \frac{\partial \epsilon_s}{\partial \mathbf{p}} \delta_{ss'} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{s'}}{\hbar} \rho_{ss'}. \quad (1.48)$$

Отсюда среднее значение скорости, естественно, равно $\frac{\partial \epsilon_s}{\partial \mathbf{p}}$ в согласии с формулой (1.33).

Рассмотрим теперь движение электрона проводимости под действием внешней силы $\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$, причем это рассмотрение должно служить дополнительным обоснованием процедуры перехода к классическому подходу (см. уравнения (1.32) — (1.35)). Гамильтониан электрона проводимости состоит из оператора кинетической энергии $\epsilon_s(\mathbf{p})$ и оператора потенциальной энергии $\hat{V}(\mathbf{r})$:

$$\hat{\mathcal{H}} = \epsilon_s(\mathbf{p}) + \hat{V}(\mathbf{r}). \quad (1.49)$$

Коммутируя p с гамильтонианом (1.49) и замечая, что соотношения коммутации между координатой и квазиимпульсом p те же, что между координатой и настоящим импульсом, получим соотношение, аналогичное теореме Эренфеста:

$$\hat{p} = - \frac{\partial \hat{V}}{\partial r}. \quad (1.50)$$

Подчеркнем, однако, еще раз, что в уравнение (1.50) (как и в уравнение (1.34)) входит только внешняя по отношению к кристаллу сила. Воспользуемся теперь многократно упоминавшимся обстоятельством — малостью внешних сил. В данном случае это означает, что $V(\mathbf{r}) \equiv V(\mathbf{R} + \mathbf{r})$ — достаточно плавная функция своего аргумента, которую можно разложить по степеням \mathbf{r} и пренебречь членами, содержащими \mathbf{r} , исходя из того, что матричные элементы $\rho_{ss'}$ порядка межатомного расстояния (см. (1.47)). Таким образом, при сравнительно «грубом» описании движения электрона в уравнения движения входит только координата \mathbf{R} , ее дискретный характер можно не учитывать, а следовательно, квазиимпульс считать обычным импульсом. Для того чтобы быть последовательными, мы, естественно, должны опустить недиагональные элементы в операторе скорости (1.48). Заметим, однако, что недиагональные элементы скорости того же порядка, что и диагональные. Пренебрежение недиагональными элементами связано с плавностью внешних полей, благодаря чему переходы из зоны в зону происходят весьма редко: как мы уже говорили, всегда осуществляются условия квазиклассичности движения электрона проводимости во внешнем поле.

Заканчивая это затянувшееся введение, сформулируем ряд положений, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

1. Спектр носителей проводимости в металле есть спектр фермиевского типа. Это означает, что перенос заряда осуществляется квазичастицами (электронами проводимости), подчиняющимися статистике Ферми, т. е. совокупность валентных электронов, взаимодействующих между собой и с полем кристаллической решетки, в отношении своих статистико-термодинамических и кинетических свойств может быть заменена ферми-жидкостью, свойства которой описываются законом дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ и корреляционной функцией $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ (см. формулу (1.38)). Заряд каждой квазичастицы равен заряду электрона; число квазичастиц равно полному числу электронов. В отсутствие внешнего магнитного поля у магнитонепорядоченных кристаллов каждое состояние электрона дважды вырождено. В этом смысле следует приписать электрону проводимости спин, равный $1/2$, однако из-за существования спин-орбитальной связи расщепление уровней энергии в магнитном поле $\delta\varepsilon_H$ не

равно $2\mu_B H$. Это обстоятельство описывают введением g -фактора, отличного от g -фактора свободного электрона.

2. Кроме фермиевских ветвей энергетического спектра, в металле всегда существуют другие ветви — бозевского типа (фононы, например), однако на основании всей совокупности имеющихся в настоящее время экспериментальных данных кажется весьма маловероятным, что в несверхпроводящем состоянии существует бозевская ветвь спектра, связанная с переносом заряда.

3. В соответствии с симметрией кристалла энергия квазичастицы $\epsilon(\mathbf{p})$ должна быть периодической функцией квазиимпульса с периодом обратной решетки (см. (1.20)). В общем случае эта формула является многозначной, что соответствует различным зонам энергии электрона. Эта сторона зонной теории оканчивается не связанной с одноэлектронной моделью Блоха и носит значительно более общий характер.

4. Движение электрона во внешних полях, как правило, носит квазиклассический характер, что позволяет часто не учитывать различие между квазиимпульсом и импульсом, а $\epsilon(\mathbf{p})$ рассматривать как кинетическую энергию электрона проводимости.

*
* * *

Часто при построении электронной теории металлов подчеркивается сходство электрона в металле со свободным электроном и не уточняются те особенности в поведении электрона, которые связаны со сложным характером его закона дисперсии. Как показали исследования, проведенные в последние десятилетия, ряд важных свойств металлов можно объяснить, только исходя из предположения о том, что электронный энергетический спектр металлов сложен и существенно отличается от энергетического спектра свободных электронов. Сложность закона дисперсии прежде всего сказывается на характере движения электрона во внешних полях. Поэтому построение электронной теории металлов следует начинать с изучения механики электрона со сложным законом дисперсии. Механика электрона проводимости отличается рядом существенных особенностей, которые могут быть выяснены в самых общих терминах без детализации волновых функций и закона дисперсии электронов. С другой стороны, особенности движения электронов проводимости находят свое отражение в весьма разнообразных макроскопических свойствах металла.

Сказанное определяет следующую идею: изучить разнообразные следствия, вытекающие из предположения о фермиевском характере спектра электронов проводимости в металле, оставляя в стороне вопрос о генезисе подобного спектра и не задаваясь какой-либо конкретной моделью квазичастиц, его

осуществляющих. Как оказывается, большая часть кинетических и статистико-термодинамических характеристик металла (включая и его магнитные свойства) может быть выражена через параметры, характеризующие квазичастицы (их число, закон дисперсии и т. д.). Кроме того, может быть поставлена и разрешена обратная задача — определение энергетического спектра квазичастиц (электронов проводимости) по экспериментальным данным, касающимся различных макроскопических характеристик металла. При этом наиболее чувствительным инструментом для определения энергетического спектра являются разнообразные свойства металла в магнитном поле, когда радиус кривизны траектории электрона значительно меньше длины свободного пробега, и электрон успевает между столкновениями проявить свои динамические свойства (низкотемпературные осцилляции восприимчивости, гальваномагнитные явления в сильных полях, высокочастотные характеристики металла, резонансные эффекты). Учет взаимодействия электронов с полем решетки и друг с другом для большинства металлов не изменяет существенно оценки фермиевской энергии электронов: ϵ_F порядка 10^4 — 10^5 °К. Это означает, что температуру всегда нужно считать низкой и неравенство $T \ll \epsilon_F$ имеет место практически всегда. Вследствие этого, как мы уже говорили, существенную роль во всех эффектах играют частицы с энергией, близкой к фермиевской ($\epsilon \approx \epsilon_F$), и, следовательно, в основном должны проявляться лишь те стороны закона дисперсии электронов, которые связаны с поведением функции $\epsilon(\mathbf{p})$ вблизи поверхности постоянной энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ в пространстве импульсов. Эта поверхность, разделяющая свободные и занятые области \mathbf{p} -пространства при $T = 0$, называется поверхностью Ферми, и ее характеристики определяют свойства металлов. Помимо формы поверхности Ферми характерной для энергетического спектра величиной является $\partial\epsilon/\partial\mathbf{p} = \mathbf{v}$, имеющая, как мы знаем, смысл скорости электронов. Поэтому в дальнейшем, говоря об определении энергетического спектра электронов проводимости, мы будем иметь в виду определение этих двух его важнейших характеристик.

Корреляционная функция $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, как мы увидим ниже, не входит в большинство статических характеристик металла, что позволяет при изучении статических и квазистатических свойств металла использовать газовую терминологию. Надо, однако, помнить, что закон дисперсии $\epsilon(\mathbf{p})$ по своему смыслу учитывает взаимодействие между электронами в основном состоянии.

Как ясно из предыдущего, все рассмотрение основано на возможности описывать квантовое состояние электрона заданием квазиимпульса. Эта возможность обусловлена трансляционной симметрией (периодичностью) кристаллической решетки.

Квантовое состояние, отвечающее определенному квазиимпульсу, описывается модулированной плоской волной. Подобная систематика делает очень наглядным статистическую картину элементарных возбуждений и механизм кинетических явлений, связанных с возбуждениями. Так, например, понятие столкновений частиц и длины свободного пробега в кинетике вводится по отношению к изменению квазиимпульса. Вся существующая терминология целиком опирается на эти понятия. Таким образом, все изложение, по сути дела, относится к кристаллам.

Между тем кинетические явления в аморфных телах (неупорядоченных твердых растворах, жидких металлах) часто сохраняют тот же характер, что и в кристаллических телах. Это означает, что ряд свойств твердых тел в принципе могут быть выражены в иных терминах, не связанных однозначно с периодической структурой. В последние годы появилось большое число работ, посвященных исследованию энергетического спектра неупорядоченных систем. Эти вопросы, однако, явно выходят за рамки настоящей монографии.

*
* *
*

Принцип построения книги следующий. После рассмотрения структуры электронного энергетического спектра в первой части излагается механика (классическая и квантовая) электрона проводимости. Вторая часть посвящена статистической термодинамике электронного газа: выясняются тепловые и магнитные свойства металлов в равновесных условиях. В третьей части исследуются кинетические свойства, причем главное внимание уделено гальваномагнитным явлениям. В четвертой части изучаются высокочастотные, в частности, резонансные явления.

Отбор материала проведен так, чтобы охватить те свойства, которые существенно связаны с характером электронного энергетического спектра и могут поэтому служить методами для его определения.

В последние годы в мировой литературе появилось большое число работ, в том числе обзорных, посвященных исследованию энергетического спектра электронов проводимости. Многие из них основываются на приближении почти свободных электронов, которое оказалось весьма эффективным для построения поверхностей Ферми поливалентных металлов (модель Харрисона). В настоящей монографии не излагаются расчеты поверхностей Ферми конкретных металлов и сравнение расчетов с экспериментальными данными. Интересующимся этой стороной современной теории металлов можно рекомендовать подробную монографию Харрисона [4].

МЕХАНИКА (КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ) ЭЛЕКТРОНА ПРОВОДИМОСТИ

Носитель заряда в металле — электрон проводимости — квазичастица со сложной периодической зависимостью энергии от квазиимпульса. От обычного электрона (в вакууме) он отличается своим поведением во внешних (относительно кристалла) полях. Например, в магнитном поле некоторые электроны не вращаются вокруг поля в плоскости, перпендикулярной полю, а уходят на бесконечность (совершают инфинитное движение).

Особенности классического и квазиклассического движения электрона сформулированы в терминах его закона дисперсии. Последовательно используя зонные представления (представление, в котором квазиимпульс — число), строится квантовая механика электрона проводимости. Это создает возможность в принципе решить любую задачу о движении электрона проводимости во внешних полях.

Изложение ведется так, чтобы отчетливо было видно отличие электрона в металле от свободного электрона.

§ 2. Геометрия изоэнергетических поверхностей

Закон дисперсии электронов проводимости существенно отличается от закона дисперсии свободных электронов. При аналитическом изучении структуры электронного энергетического спектра, точнее, при конкретном построении функций $\epsilon_s(\mathbf{p})$, что, естественно, возможно только при тех или других модельных предположениях, результат вычислений обычно изображают в виде зависимости энергии от величины квазиимпульса при фиксированном его направлении. Однако, для всего дальнейшего изложения значительно удобнее рассматривать не зависимость энергии от квазиимпульса, а изоэнергетические поверхности $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon$, которые так же полно характеризуют закон дисперсии. Конечно, зная зависимость энергии от квазиимпульса, можно построить изоэнергетические поверхности, однако, как правило, такая работа весьма сложна и требует специального рассмотрения, потому что в большинстве случаев зависимость $\epsilon_s(\mathbf{p})$ известна только при нескольких весьма специальных направлениях квазиимпульса. Если, кроме того, учесть, что

получение аналитических выражений опирается на не слишком надежные модели, то становится очевидным, что значительно естественнее при рассмотрении структуры электронного энергетического спектра исходить из наиболее общих топологических соображений. Такой подход принят в этом параграфе и в большей части книги.

Очень существенным обстоятельством, помогающим проанализировать структуру изоэнергетических поверхностей, является то, что периодичность расположения атомов в кристаллической решетке приводит к периодической зависимости энергии от квазиимпульса (см. формулу (1.20) введения). Элементы симметрии кристалла вообще накладывают отпечаток на симметрию функций $\epsilon_p(\mathbf{p})$. При этом надо учесть, что закон дисперсии может обладать и обладает специфическими элементами симметрии. Так, инвариантность уравнений квантовой механики относительно изменения знака времени требует, чтобы $\epsilon_s(-\mathbf{p}) = \epsilon_{s'}(\mathbf{p})$. Если энергетические полосы (или зоны) не перекрываются (см. введение), то это условие выполняется при $s = s'$ и означает, что изоэнергетические поверхности обладают центром инверсии. Энергетические полосы (или зоны) могут частично перекрываться (т. е. $\min \epsilon_{s'} < \max \epsilon_s < \max \epsilon_{s'}$), однако их индивидуальность, естественно, сохраняется, так как каждой зоне соответствует свой закон дисперсии. Формальное перекрытие энергетических зон или полос, конечно, означает вырождение — различным состояниям соответствует одна и та же энергия. Но в общем случае это обстоятельство не приводит ни к каким особенностям в спектре, так как одним и тем же энергиям соответствуют различные квазиимпульсы. На геометрическом языке, удобном при рассмотрении структуры энергетического спектра электронов, это означает, что в общем случае перекрытия соответствующие изоэнергетические поверхности ($\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon$ и $\epsilon_{s'}(\mathbf{p}) = \epsilon$) находятся в различных областях \mathbf{p} -пространства. Важным и весьма интересным случаем вырождения является случай пересечения изоэнергетических поверхностей, т. е. ситуация, когда в некоторых точках импульсного пространства уравнение $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon$ имеет решение при нескольких номерах зоны s . В дальнейшем только такой случай и будет называться вырожденным, и его мы анализируем несколько ниже.

Рассмотрим теперь структуру изоэнергетических поверхностей внутри зоны. При определенных значениях квазиимпульса энергия достигает минимального и максимального значений. Вблизи минимума (или максимума) энергию можно разложить по степеням отклонения от того значения импульса, при котором энергия принимает минимальное (максимальное) значение. Если не учитывать случаев вырождения, то разложение имеет

следующий вид:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial p_k} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} (p_i - p_{i0})(p_k - p_{k0}). \quad (2.1)$$

Здесь $\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial p_k} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0}$ — симметричный тензор второго ранга, причем, если $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ соответствует минимуму энергии, его главные значения положительны, если максимуму — отрицательны. Компоненты тензора имеют размерность обратной массы, поэтому сам тензор называют тензором обратных эффективных масс и обозначают в виде m_{ik}^{-1} . Таким образом,

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}_0) + \frac{1}{2} m_{ik}^{-1} (p_i - p_{i0})(p_k - p_{k0}). \quad (2.1a)$$

Вблизи описанных экстремальных точек изоэнергетические поверхности в пространстве квазиимпульсов замкнутые, причем в непосредственной близости от этих точек, как видно из разложения (2.1) (или (2.1a)), — эллипсоиды.

Следует иметь в виду, что любая замкнутая изоэнергетическая поверхность вблизи точек минимума окружает область в импульсном пространстве, где энергия меньше, чем ее значение на поверхности, а вблизи точек максимума любая замкнутая поверхность окружает область, где энергия больше, чем ее значение на поверхности. Это значит, что в первом случае (вблизи минимума) вектор скорости $\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}$ направлен по

внешней нормали к изоэнергетической поверхности, а во втором случае (вблизи максимума) — по внутренней.

При удалении от минимума и максимума изоэнергетические поверхности несколько деформируются, однако, пока разности $|\varepsilon - \varepsilon_{\min}|$ или $|\varepsilon_{\max} - \varepsilon|$ малы, остаются замкнутыми. Надо, правда, не забывать, что благодаря периодичности функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ описанные выше поверхности периодически повторяются по всей обратной решетке.

Очевидно, что между этими простыми с топологической точки зрения поверхностями должны расположиться более сложные поверхности — самопересекающиеся и открытые (т. е. поверхности, проходящие через всю обратную решетку), иначе невозможен непрерывный переход от поверхностей, окружающих точки минимума, к поверхностям, окружающим точки максимума.

На рис. 1 для примера изображены изоэнергетические «поверхности» (в двумерном случае — кривые) для закона дисперсии

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = A_1 \cos \frac{p_x a_x}{\hbar} + A_2 \cos \frac{p_y a_y}{\hbar}.$$

Видно, что при $A_1 = A_2$ имеется одна открытая «поверхность» (система прямых жирных линий на рис. 1, а); если же $A_1 \neq A_2$, то таких поверхностей целый слой (рис. 1, б).

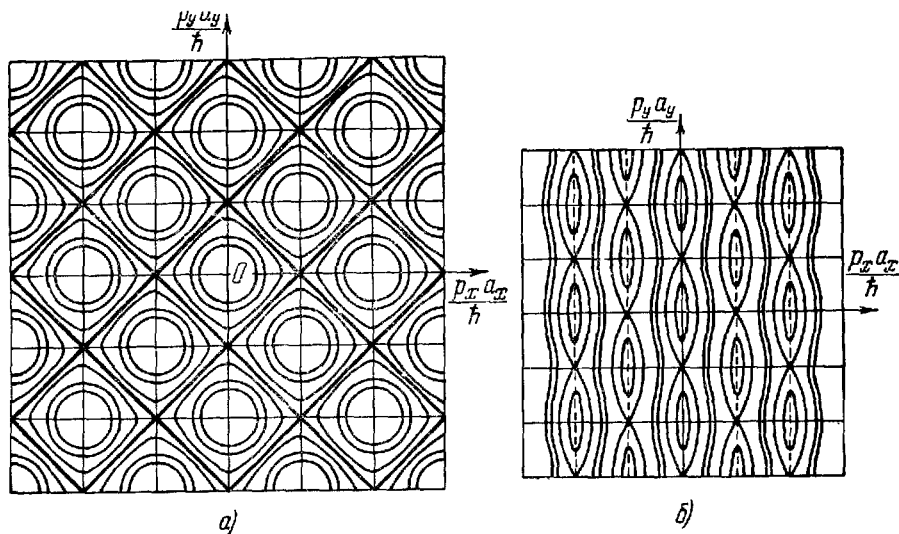


Рис. 1. Линии равных энергий.

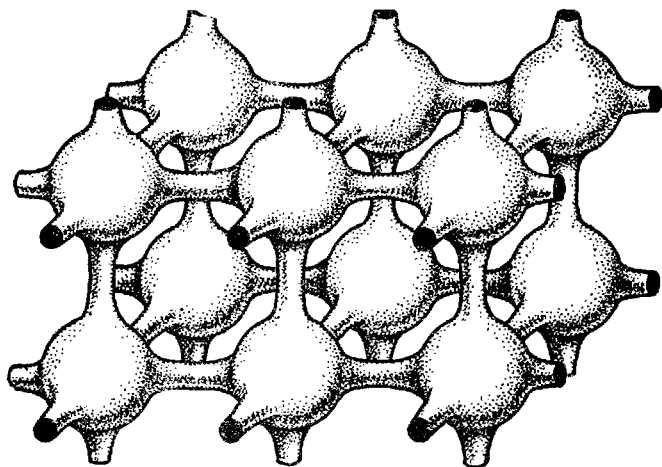


Рис. 2. Типичная открытая изоэнергетическая поверхность (пространственная сетка).

Зависимость энергии от квазиимпульса определяется уравнением (2.2).

Заметим, что в трехмерном случае открытые поверхности должны встречаться очень часто. Например, такой «простой» закон дисперсии, как

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\cos \frac{p_x a_x}{\hbar} + \cos \frac{p_y a_y}{\hbar} + \cos \frac{p_z a_z}{\hbar} \right) \right\} \quad (2.2)$$

приводит к слоям открытых поверхностей, заполняющих примерно $\frac{1}{3}$ объема всей обратной решетки (рис. 2).

Закон дисперсии (2.2) можно трактовать как первые члены разложения общего закона дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ в ряд Фурье. В теории сильносвязанных электронов Блоха этот закон соответствует учету взаимодействия электронов данного атома с ближайшими соседями в простой кубической решетке (см., например, [1]). Как показано в работах [5, 6], удержание следующих членов разложения, что соответствовало бы в блоховской теории учету взаимодействия не только ближайших соседей, но и более далеко расположенных атомов, приводит к значитель-

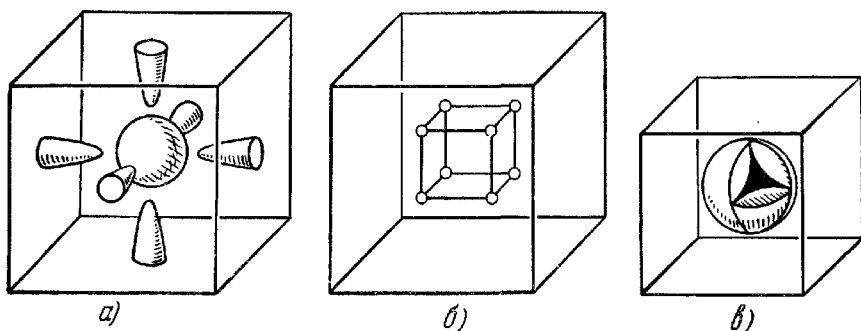


Рис. 3. Изоэнергетические поверхности при различных значениях параметров A_j и энергии ε .

На рис. 3, в изображен специальный случай, когда одна часть изоэнергетической поверхности содержится в другой. Часть внешней поверхности вырезана.

ному усложнению изоэнергетических поверхностей. В частности, очень часты случаи изоэнергетических поверхностей сложной связности, показанные на рис. 3, где изоэнергетические поверхности даны для закона дисперсии

$$\begin{aligned} \varepsilon = & A_0 + A_1 \left(\cos \frac{p_x a}{\hbar} + \cos \frac{p_y a}{\hbar} + \cos \frac{p_z a}{\hbar} \right) + \\ & + A_2 \left(\cos \frac{p_x + p_y}{\hbar} a + \cos \frac{p_x + p_z}{\hbar} a + \cos \frac{p_y + p_z}{\hbar} a \right) + \\ & + A_3 \left(\cos \frac{p_x + p_y - p_z}{\hbar} a + \cos \frac{p_x - p_y + p_z}{\hbar} a + \cos \frac{p_x - p_y - p_z}{\hbar} a \right) + \\ & + A_4 \left(\cos \frac{2p_x}{\hbar} a + \cos \frac{2p_y}{\hbar} a + \cos \frac{2p_z}{\hbar} a \right) \end{aligned}$$

при различных значениях параметров A_j и энергии ε . На рис. 3, в изображен специальный случай, когда одна часть

изоэнергетической поверхности содержится в другой; часть внешней поверхности вырезана.

Открытые поверхности могут быть самыми разнообразными — односвязными и многосвязными. Некоторые примеры открытых поверхностей изображены на рис. 2 и 4.

Топология изоэнергетических поверхностей, точнее, характер кривых, образующихся сечением этих поверхностей плоскостью,

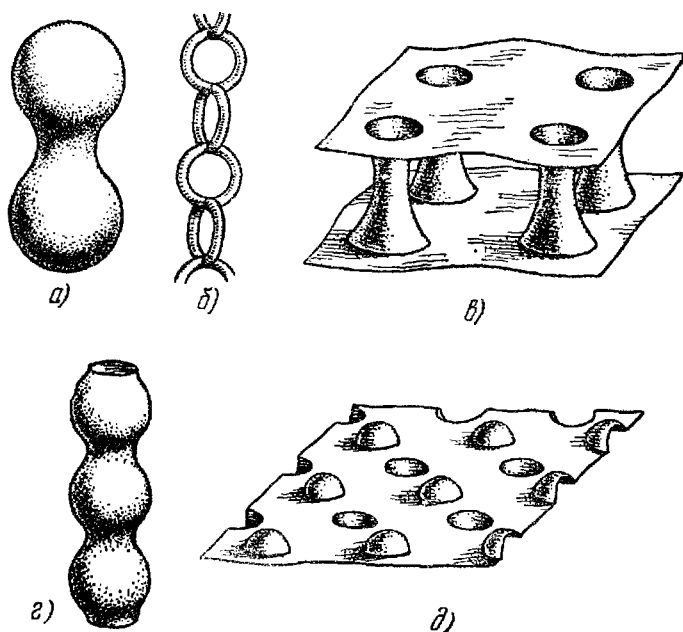


Рис. 4. Различные типы изоэнергетических поверхностей.

определяет, как будет показано, динамику электрона в магнитном поле. Поэтому изоэнергетические поверхности удобно классифицировать не только по тому принципу, замкнуты они или открыты, но и по характеру плоских кривых на них.

Итак:

1. Замкнутые непересекающиеся поверхности.

а) Замкнутые поверхности, не содержащие плоских самопересекающихся кривых. Простым примером подобной поверхности является сфера.

б) Замкнутые поверхности, содержащие плоские самопересекающиеся кривые (см. рис. 4, а).

2. Замкнутые самопересекающиеся поверхности. (Забегая вперед, отметим, что в общем случае самопересечение возможно только в точке.)

3. Открытые поверхности.

а) Открытые поверхности, не содержащие открытых сечений*) (рис. 4, б, например).

б) Открытые кривые содержатся только при фиксированных направлениях нормали к секущей плоскости (см. рис. 4, в).

в) Имеется одномерное множество (двугранный угол) направлений нормалей к секущим плоскостям, приводящим к открытым кривым (рис. 4, г — «гофрированный» цилиндр; двугранный угол равен 2π).

г) Имеется двумерное множество (телесный угол) направлений, приводящих к открытым кривым (рис. 4, д — «гофрированная» плоскость, угол равен 4π , рис. 2 — «пространственная сетка», телесный угол меньше 4π).

В случае сложных изоэнергетических поверхностей направления нормалей к плоскостям, приводящие к открытым сечениям, удобно изображать на стереографической проекции**) (рис. 5).

Точки в p -пространстве, в которых энергия принимает минимальное ϵ_{\min} и максимальное ϵ_{\max} значения, являются простейшими особыми точками. В энергетической зоне или полосе всегда имеется ряд особых значений энергии. Назовем их критическими и обозначим ϵ_k . При $\epsilon = \epsilon_k$ изоэнергетические поверхности меняют свою топологию. Как мы увидим ниже, во всех критических точках, в частности при $\epsilon = \epsilon_{\min}$ и $\epsilon = \epsilon_{\max}$, имеет особенность плотность состояний электронов. Изменение топологии может происходить следующим образом: либо в некоторой точке p -пространства при $\epsilon = \epsilon_k$ появляется (исчезает) новая полость изоэнергетической поверхности (рис. 6, а), либо

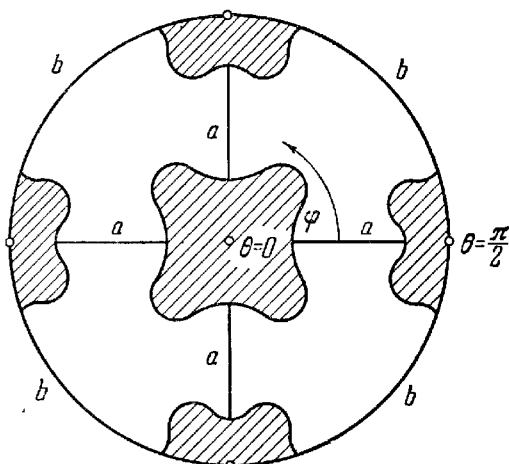


Рис. 5. Стереографическая проекция направлений нормалей к секущим плоскостям, при которых существуют открытые сечения для изоэнергетической поверхности, изображенной на рис. 2. Указанные направления отвечают заштрихованным областям и линиям a и b .

*) По аналогии с открытыми поверхностями открытыми сечениями назовем сечения, проходящие через всю обратную решетку.

**) Стереографическая проекция — это изображение полусферы единичного радиуса на круг единичного радиуса, на котором положение точки задается полярными координатами ρ и χ . Соответствие с точками на полусфере устанавливается следующими равенствами: $\rho = 2\theta/\pi$, $\chi = \varphi$, где θ и φ — азимутальный и полярный углы ($0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

поверхность меняет свою связность. В частности, открытая поверхность распадается на ряд замкнутых поверхностей, тороидальная — на систему эллипсоидов (рис. 6, б) и т. п. В случаях

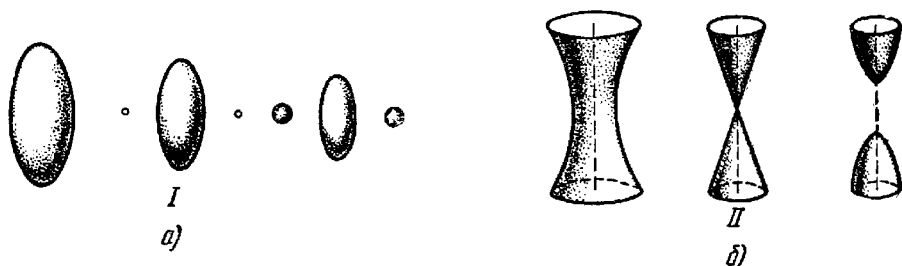


Рис. 6. Появление новой полости (а) и разрыв перемычки (б) изоэнергетической поверхности.

Поверхности I и II соответствуют критической энергии ϵ_K . Поверхность II содержит коническую точку.

изменения связности граничная изоэнергетическая поверхность $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_K$ всегда содержит одну или несколько конических точек $\mathbf{p} = \mathbf{p}_K$, вблизи которых закон дисперсии хорошо аппроксимируется уравнением двуполостного гиперболоида (после разрыва перемычки) и уравнением однополостного гиперболоида (до разрыва). Появление (исчезновение) новой полости изоэнергетической поверхности всегда

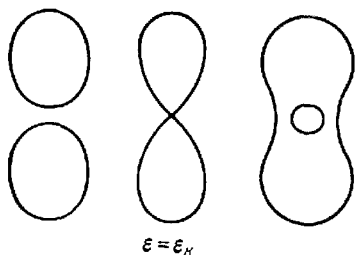


Рис. 7. Двумерная модель появления (исчезновения) полости изоэнергетической поверхности.

происходит в точке $\mathbf{p} = \mathbf{p}_K$, где энергия, как функция квазиимпульса, достигает минимума или максимума. Изоэнергетические поверхности, проходящие вблизи этой точки, хорошо описываются уравнением эллипсоида. При этом, естественно, главные значения эффективных масс положительны, если

в этой точке энергия минимальна, и отрицательны, если — максимальна. На рис. 7 появление и исчезновение полости изоэнергетической поверхности «промоделировано» на двумерном примере. Изоэнергетическая поверхность в этом случае, естественно, линия.

Проанализируем теперь структуру изоэнергетических поверхностей в случае вырождения. Пусть в некоторой точке \mathbf{p} -пространства (обозначим ее \mathbf{p}_0)

$$\epsilon_1(\mathbf{p}_0) = \epsilon, \quad \epsilon_2(\mathbf{p}_0) = \epsilon. \quad (2.3)$$

Номера вырожденных зон условно названы «1» и «2». Как мы

увидим, в общем случае пересекаются две изоэнергетические поверхности. Произвольное пересечение вовсе запрещено. В общем случае поверхности пересекаются в изолированных точках. Поверхности так подгоняются друг к другу, что их, особенно в целях изучения динамики электронов, удобнее рассматривать как одну сложную самопересекающуюся поверхность.

Согласно (1.43), уравнение Шредингера в p -представлении имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_p \psi_p(\rho) = \epsilon \psi_p(\rho), \quad (2.4)$$

а предположение о вырождении означает, что оператор Гамильтона в точке $p = p_0$ имеет два совпадающих собственных значения:

$$\mathcal{H}_{p_0}^{11} = \mathcal{H}_{p_0}^{22} = \epsilon(p_0). \quad (2.5)$$

Рассмотрим значения p , близкие к p_0

$$\mathcal{H}_p^{ss'} \approx \epsilon(p_0) \delta_{ss'} + V^{ss'}. \quad (2.6)$$

Матрица $V^{ss'}$ — функция разности $p - p_0$, причем $V^{ss'} \equiv 0$ при $p - p_0 = 0$.

Для определения поправки к энергии $\Delta\epsilon$ служит уравнение, получающееся приравниванием нулю детерминанта уравнения (2.4):

$$\begin{vmatrix} \Delta\epsilon - V^{11} & V^{12} \\ V^{21} & \Delta\epsilon - V^{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда

$$\Delta\epsilon = \frac{V^{11} + V^{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(V^{11} + V^{22})^2}{4} + |V^{12}|^2}. \quad (2.8)$$

Мы воспользовались эрмитовостью оператора Гамильтона $V^{12} = (V^{21})^+$ (знак «+» в данном случае означает комплексное сопряжение). Обозначим теперь

$$\epsilon(p_0) + \frac{V^{11} + V^{22}}{2} = A(p); \quad \frac{V^{11} + V^{22}}{2} = B(p); \quad |V^{12}|^2 = C^2(p).$$

Тогда выражение (2.8) принимает вид

$$\epsilon = A(p) \pm \sqrt{B^2(p) + C^2(p)}. \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что при определенном значении энергии ϵ точка вырождения (точка p_0 пересечения поверхностей) определяется тремя уравнениями

$$A(p) = \epsilon; \quad B(p) = C(p) = 0. \quad (2.10)$$

Ясно, что в общем случае (без специальных предположений) точки вырождения располагаются вдоль некоторой линии в p -пространстве (каждому значению энергии ϵ соответствует

одно значение квазиимпульса p_0), причем точки вырождения — конические особые точки самопересекающейся поверхности (2.9). Если разложение матрицы $V^{ss'}$ по степеням $p - p_0$ по каким-либо причинам (обычно это требования симметрии) начинается не с первого члена, то самопересечение сопровождается касанием. Пересечение двух изоэнергетических поверхностей по линии или пересечение больше двух изоэнергетических поверхностей является следствием специальных свойств симметрии того или иного кристалла (например, почему-либо одна из величин, B или C тождественно равна нулю).

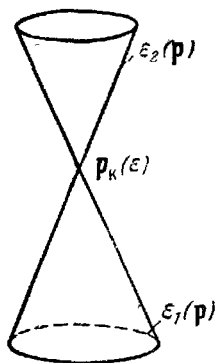


Рис. 8. Изоэнергетические поверхности $\epsilon = \epsilon_{1,2}(p)$, пересекающиеся в точке $p = p_k(\epsilon)$.

Вне конуса $\epsilon_1(p) = \epsilon$ энергия $\epsilon_1(p) > \epsilon$; вне конуса $\epsilon_2(p) = \epsilon$ энергия $\epsilon_2(p) < \epsilon$.

На рис. 8 показана окрестность точки пересечения, причем для каждой из ветвей выражения (2.9), т. е. для каждой из зон отмечено, где энергия больше ϵ , где меньше ϵ .

Рис. 9 схематически изображает самопересекающуюся изоэнергетическую поверхность. Поверхности a и b — предельные поверхности этого семейства. Энергии, отвечающие этим поверхностям, соответствуют максимальному или минимальному значению энергии в зоне. Может показаться удивительным, что поверхности, принадлежащие разным энергиям, пересекаются. Легко, однако, видеть, что пересекаются поверхности, отвечающие разным зонам. Таким образом, электрон, имеющий, например, квазиимпульс p' (см. рис. 9), имеет энергию либо ϵ , либо ϵ' в зависимости от того, какой зоне он принадлежит (т. е. его энергия либо $\epsilon_s(p')$, либо $\epsilon_{s'}(p')$). Обычно (когда нет вырождения) при изображении изоэнергетических поверхностей каждой зоне (каждому значению s) сопоставляется свое p -пространство. В случае вырождения это неудобно. Двум зонам («1» и «2») приписывают одно и то же p -пространство.

Вырождение весьма часто — следствие симметрии кристалла и обычно имеет место на определенных избранных линиях в p -пространстве. Более того, анализируя симметрию тех или иных точек p -пространства кристаллов, можно найти совокупность точек обязательного вырождения, а также выяснить зависимость элементов матрицы $V^{ss'}$ от компонент разности $p - p_0$. Это позволяет, не прибегая к модельным соображениям, установить структуру изоэнергетической поверхности вблизи точки вырождения [7].

Часты случаи, когда учет сравнительно малых членов в гамильтониане электрона проводимости (например, спин-орби-

тальной связи) существенно изменяет симметрию гальмитониа-на и может привести к снятию вырождения. В этих случаях, естественно, оказывается, что изоэнергетическая поверхность состоит из двух близко расположенных полостей.

Значения энергии, которым соответствуют самопересекающиеся изоэнергетические поверхности, не являются особыми: как правило, самопересекающиеся поверхности занимают целый слой. Правда, не следует забывать, что каждая самопересекающаяся поверхность содержит особую (коническую) точку. Однако, как будет ясно из дальнейшего, для классификации особых точек существенно, обращается ли в этой точке скорость в нуль. Критические поверхности (поверхности, соответствующие $\epsilon = \epsilon_k$) всегда содержат точку, в которой $v = 0$. В точке самопересечения $v \neq 0$. Поэтому рассмотренные ранее типы особых случаев (зарождение или исчезновение новой полости в точке; разрыв или смыкание в точке перемычки; исчезновение или появление самопересекающихся поверхностей) исчерпывают, по видимому, все виды особых изоэнергетических поверхностей, а также все виды особых точек в p -пространстве.

Возможны случаи, при которых в определенном приближении особые точки в p -пространстве занимают целую кривую (петлю экстремумов). Например, в случае кристаллов типа вюрцита петля экстремумов — окружность с центром на оси симметрии [8]. Аналогичная ситуация имеет место и в других кристаллах (CdS, InSb и др.).

На рис. 10 воспроизведена электронная энергетическая структура кристаллов типа вюрцита, у которых, согласно [8], закон дисперсии электронов с энергиями, близкими к экстремальной, имеет вид

$$\epsilon^{\pm} = a(p_{\perp} \pm p_0)^2 + bp_z^2, \quad (2.11)$$

где a , b , p_0 — положительные константы, $p_{\perp} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$, ось p_z совпадает с осью кристалла.

При энергиях, меньших ap_0^2 (но больших нуля), существует только одна ветвь энергетического спектра (знак минус в уравнении (2.11)). Изоэнергетические поверхности — тороиды с эллиптическими сечениями в плоскостях, проходящих через ось p_z . Линия, на которой энергия имеет минимум, это петля радиуса p_0

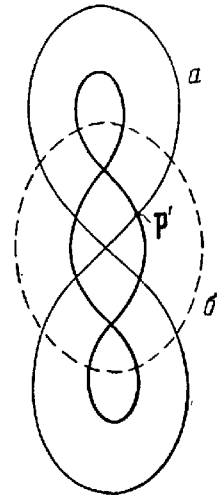


Рис. 9. Изоэнергетическая поверхность, содержащая две точки вырождения.

Тонкой линией a и штриховой линией b изображены граничные поверхности семейства изоэнергетических поверхностей с двумя точками вырождения.

(заметим, что величина ρ_0 связана с параметром спин-орбитального взаимодействия электронов β , $\rho_0 = \beta/2a$; см. работу [8]). Критическое значение энергии принято равным нулю ($\epsilon_k = \epsilon_k^{(-)} = 0$). Закон дисперсии (2.11) приводит еще к одному критическому значению энергии $\epsilon_k = \epsilon_k^{(+)} = a\rho_0^2 = \beta^2/4a$. При этой энергии, во-первых, меняется топология поверхностей $\epsilon^{(-)}(\mathbf{p}) = \epsilon - \epsilon$ — «зарастает» отверстие тороида. Одновременно появляется новая полость, соответствующая знаку плюс в уравнении (2.11)

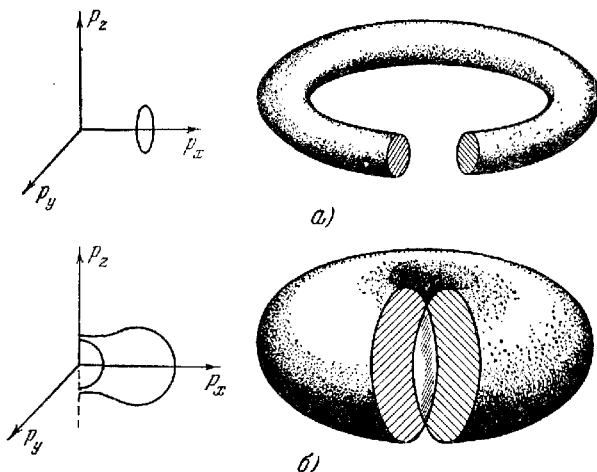


Рис. 10. Изоэнергетические поверхности в кристаллах типа вюрцита получаются вращением вокруг оси p_z эллипса *а* при $0 < \epsilon < a\rho_0^2$ (см. (2.11)) и фигуры *б* при $\epsilon > a\rho_0^2$.

и представляющая собой овалоид. Из сказанного ясно, что начало координат ($p_{\perp} = p_z = 0$) также является особой точкой, однако, как будет понятно из дальнейшего, в этой точке особенность слабее, чем, скажем, в той точке \mathbf{p} -пространства, где происходит разрыв перемычки. Следует иметь в виду, что при более детальном исследовании (при учете отброшенных в уравнении (2.11) малых членов) зарождение новой зоны начинается с возникновения системы эллипсоидов, которые с ростом энергии деформируются и сливаются в тороидальную поверхность [9] (рис. 11).

Данное изложение в большой мере опирается на представление о бесконечном \mathbf{p} -пространстве. Однако, как известно, физически неэквивалентные состояния занимают только одну ячейку этого пространства. В некоторых случаях возникает вопрос о выборе основной ячейки. Как правило, из соображений наглядности удобно выбирать основную ячейку так, чтобы не раз-

рывать замкнутых поверхностей. Поэтому может оказаться, что разным зонам (и даже различным интервалам энергии в одной зоне) будут соответствовать различные основные ячейки. При конкретном построении энергетического спектра обычно пользуются так называемой зоной Бриллюэна (точнее, первой зоной Бриллюэна) — областью p -пространства, включающей только неэквивалентные векторы p , причем отобранные по следующему

принципу: из всех эквивалентных векторов выбирается самый короткий. При отборе и сравнении квазиимпульсов следует учитывать все элементы симметрии кристаллов данного класса. Для большинства кристаллов первая зона Бриллюэна представляет собой не параллелепипед, а более сложную фигуру, ясно демонстрирующую элементы симметрии кристалла. Естественно, что объем первой зоны Бриллюэна равен объему элементарной ячейки обратной решетки, умноженному на $(2\pi\hbar)^3$. Отметим еще, что первыми зонами Бриллюэна можно выложить все p -пространство*).

Форма зоны Бриллюэна очень существенна для выяснения характера симметрии изоэнергетических поверхностей. Часто, однако, используя периодичность энергии $\varepsilon(p)$, вообще ограничиваются первой зоной Бриллюэна. При этом очень трудно рассматривать движение электронов во внешних (по отношению к кристаллу) полях, когда квазиимпульс не сохраняется. Действительно, сразу возникает вопрос, что произойдет с электроном, если он достигнет границы зоны Бриллюэна? Конечно, эту трудность можно обойти, однако в большинстве случаев удобнее считать квазиимпульс электрона определенным во всем пространстве обратной решетки, а его энергию и другие характеристики (скорость, например) — периодическими функциями p .

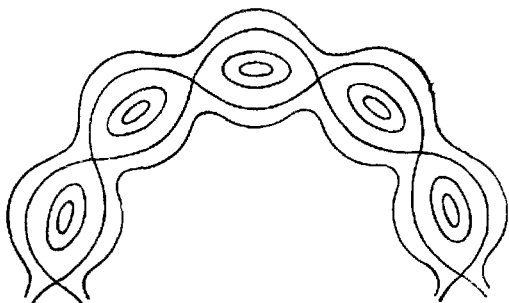


Рис. 11. Переход от эллипсоидальных изоэнергетических поверхностей к «гофрированным» тороидам (сечение плоскостью $p_z = 0$).

§ 3. Плотность состояний на единичный интервал энергий

Одной из важнейших характеристик энергетического спектра, необходимой, в частности, для построения статистической

*) Зоны Бриллюэна были введены в связи с изучением энергетического спектра почти свободных электронов. Рассмотрение следующих (второй, третьей и т. д.) зон нам представляется нецелесообразным, так как они слишком тесно связаны со свойствами почти свободных электронов.

термодинамики электронного газа, является плотность состояний на единичный интервал энергий $\nu(\varepsilon)$. Эта величина тесным образом связана с законом дисперсии $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon$.

Число состояний в кристалле объема V электронов, принадлежащих s -й зоне, в элементе объема импульсного пространства равно

$$dn_{\mathbf{p}}^{(s)} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z. \quad (3.1)$$

Часто бывает удобно пользоваться не декартовой системой координат в импульсном пространстве, а системой, в которой координатные поверхности совпадают с изоэнергетическими. В этой системе состояние электрона характеризуется его положением на изоэнергетической поверхности $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon$, а элемент объема $dp_x dp_y dp_z$ равен $dS d\varepsilon/v_s$, где dS — элемент площади на изоэнергетической поверхности, а v_s — модуль скорости электрона *).

Интегрируя выражение (3.1) по поверхности равной энергии, получим, что число электронных состояний $dn_{\varepsilon}^{(s)}$ на интервале энергий $d\varepsilon$ равно

$$dn_{\varepsilon}^{(s)} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon_s(\mathbf{p})=\varepsilon} \frac{dS}{v_s} d\varepsilon. \quad (3.2)$$

Тогда плотность электронных состояний в s -й зоне имеет вид

$$\nu_s(\varepsilon) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon_s(\mathbf{p})=\varepsilon} \frac{dS}{v_s}. \quad (3.3)$$

Вне зависимости от того, является изоэнергетическая поверхность замкнутой или открытой, интегрирование в формуле (3.3) ведется в пределах одной ячейки обратной решетки (одной зоны Бриллюэна), причем в тех случаях, когда поверхность $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon$ распадается на несколько полостей, $\nu_s(\varepsilon)$, естественно, — сумма соответствующих интегралов.

Выражение (3.3) можно переписать в виде:

$$\nu_s(\varepsilon) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{d\varepsilon} \Delta_s(\varepsilon), \quad (3.4)$$

где

$$\Delta_s(\varepsilon) = \int E[\varepsilon_s(\mathbf{p}) - \varepsilon] d\tau_{\mathbf{p}}. \quad (3.5)$$

*) $|\nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_s(\mathbf{p})|^{-1} \equiv v_s^{-1}$ — якобиан перехода от переменных p_x, p_y, p_z к переменным ε, ξ, η , где ξ, η — любая ортогональная система координат на поверхности $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon$ ($dS = d\xi d\eta$).

Функция $E(x)$ определена следующим образом:

$$E(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Независимо от топологии изоэнергетической поверхности $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon$ величина $\Delta_s(\epsilon)$ есть объем той части зоны Бриллюэна, где энергия меньше ϵ (рис. 12):

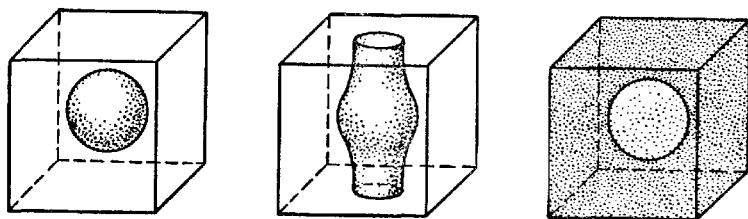


Рис. 12. Объем части зоны Бриллюэна, где энергия больше ϵ , заштрихован.

Величина $\frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \Delta_s(\epsilon)$ определяет число электронных состояний в s -й зоне с энергией, меньшей ϵ . Обозначим его через $N_s(\epsilon)$. Тогда

$$\nu_s(\epsilon) = \frac{dN_s(\epsilon)}{d\epsilon}. \quad (3.6)$$

Плотность электронных состояний $\nu_s(\epsilon)$ — сложная функция своего аргумента. Ее явный вид может быть получен, если известен закон дисперсии электронов проводимости.

Не прибегая ни к каким специальным предположениям о законе дисперсии, можно, однако, сделать ряд заключений об особенностях функции $\nu_s(\epsilon)$, заданной на интервале (ϵ_0, ϵ_1) , где $\epsilon_0 = \epsilon_{\min}^{(s)}$, а $\epsilon_1 = \epsilon_{\max}^{(s)}$. Как мы уже говорили (§ 2), изоэнергетические поверхности вблизи минимума ($\epsilon \geq \epsilon_0$) и вблизи максимума ($\epsilon \leq \epsilon_1$) — эллипсоиды. Поэтому

$$\nu(\epsilon) \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2\hbar^3} (m_1 m_2 m_3)^{1/2} (\epsilon - \epsilon_0)^{1/2}, \\ \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2\hbar^3} (m'_1 m'_2 m'_3)^{1/2} (\epsilon_1 - \epsilon)^{1/2}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Корневая особенность*), которую имеет $\nu(\epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ и при $\epsilon \rightarrow \epsilon_1$, характерна для всех тех значений энергии, при которых

*) Точнее, производная от $\nu(\epsilon)$ обращается в бесконечность, как $x^{-1/2}$ при $x \rightarrow 0$.

изменяется топология изоэнергетических поверхностей. С этой точки зрения минимум — это точка, в которой возникает новая полость изоэнергетической поверхности, а максимум — точка, в которой полость исчезает. Как мы видели, появление или исчезновение полости может происходить и в середине зоны при определенных «критических» значениях энергии $\varepsilon = \varepsilon_k$. При энергиях, близких к ε_k , представим плотность электронных состояний $\nu(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\nu(\varepsilon) = \nu_0(\varepsilon) + \delta\nu(\varepsilon), \quad (3.8)$$

где $\nu_0(\varepsilon)$ — плавная функция энергии, а $\delta\nu(\varepsilon)$ отлична от нуля с той стороны от критического значения, где число полостей больше на единицу. Пусть для определенности число полостей увеличивается с ростом энергии. Тогда

$$\delta\nu(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & (\varepsilon < \varepsilon_k), \\ \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2\hbar^3} (m_1 m_2 m_3)^{1/2} (\varepsilon - \varepsilon_k)^{1/2} & (\varepsilon \geq \varepsilon_k). \end{cases} \quad (3.9)$$

Как указывалось в предыдущем параграфе, увеличение числа полостей изоэнергетической поверхности может происходить не только путем «рождения» новой полости (см. рис. 6, а), но и путем «разрыва» перемычек *) (см. рис. 6, б). Остановимся на этом случае изменения топологии несколько подробнее. Изоэнергетическая поверхность $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_k$ содержит коническую особую точку $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k$. При энергиях, меньших ε_k , участок поверхности вблизи точки $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k$ совпадает с двухполостным гиперболоидом, а при $\varepsilon > \varepsilon_k$ — с однополостным. При соответствующем выборе осей координат уравнение участка изоэнергетической поверхности вблизи $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k$ ($\varepsilon \approx \varepsilon_k$) записывается следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{p_3^2}{2m_3} \quad (m_1, m_2, m_3 > 0). \quad (3.10)$$

Вычисляя объем, ограниченный поверхностью (3.10) и плоскостью $p_3 = \text{const}$ (ось p_3 соответствует оси перемычки), получаем

$$\Delta(\varepsilon, p_3) = \begin{cases} \frac{2\pi p_3^3}{3} \frac{(m_1 m_2)^{1/2}}{m_3} + 4\pi (m_1 m_2)^{1/2} (\varepsilon - \varepsilon_k) p_3 & (\varepsilon > \varepsilon_k), \\ \frac{2\pi p_3^3}{3} \frac{(m_1 m_2)^{1/2}}{m_3} + 4\pi (m_1 m_2)^{1/2} (\varepsilon - \varepsilon_k) p_3 + \\ + \frac{8\pi}{3} (2m_1 m_2 m_3)^{1/2} (\varepsilon_k - \varepsilon)^{3/2} & (\varepsilon < \varepsilon_k). \end{cases} \quad (3.11)$$

*) Изменение топологии изоэнергетической поверхности может происходить и без изменения числа полостей, например разрыв перемычки у тороидальной поверхности. В этих случаях в точке $\varepsilon = \varepsilon_k$ меняется связность поверхности, причем $\delta\nu(\varepsilon) \neq 0$ в той области энергий, где связность меньше.

Отсюда видно, что и в этом случае плотность электронных состояний $\nu(\epsilon) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{d\epsilon} \Delta(\epsilon)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых: плавного $\nu_0(\epsilon)$ и нерегулярного $\delta\nu(\epsilon)$, имеющего корневую особенность и отличного от нуля при тех энергиях, при которых число полостей больше (см. также примечание на стр. 42). Выражение (3.9) при этом остается в силе (смысл величин m_1, m_2, m_3 ясен из уравнения (3.10)).

В предыдущем параграфе мы останавливались на случае самопересечения изоэнергетических поверхностей. Заметим, что при тех энергиях, при которых происходит пересечение, плотность электронных состояний $\nu(\epsilon)$, конечно, никакими особенностями не обладает. Особыми, или критическими, как мы уже говорили, в этом случае будут те значения энергии, при которых меняется топология изоэнергетических поверхностей. Например, поверхности a и b на рис. 9 являются в этом смысле особыми. Легко показать, что и в таких случаях $\delta\nu \sim |\epsilon - \epsilon_K|^{1/2}$ и отлична от нуля только по одну сторону от $\epsilon = \epsilon_K$. При этом, однако, если особая точка $\mathbf{p} = \mathbf{p}_K$ является точкой вырождения, то уравнение изоэнергетической поверхности вблизи этой точки имеет более сложный вид, чем предполагалось выше:

$$\epsilon = \epsilon_K + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_K)^2 \varphi(n),$$

где $\varphi(\mathbf{n})$ — некоторая функция единичного вектора $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_K}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_K|}$, соответствующая симметрии точки $\mathbf{p} = \mathbf{p}_K$. Так, например, энергетический спектр вблизи максимума валентной зоны кристаллов Ge и Si имеет вид

$$\epsilon_1 - \epsilon = A\rho^2 \pm \sqrt{B^2\rho^4 + C^2(p_x^2 p_y^2 + p_x^2 p_z^2 + p_y^2 p_z^2)},$$

где A, B, C — константы, а квазиимпульс \mathbf{p} отсчитывается от точки, в которой энергия достигает максимума $\epsilon(\mathbf{p} = 0) = \epsilon_1$.

Рассмотренные здесь типы особых случаев (зарождение новой полости и разрыв перемишки) исчерпывают все виды особых точек в \mathbf{p} -пространстве. Однако, как мы видели, при некоторых вполне оправданных предположениях особые точки в \mathbf{p} -пространстве можно рассматривать не как изолированные точки, а как точки, расположенные на линии — петле экстремумов. Выясним, как выглядит в этих случаях плотность электронных состояний при энергиях, близких к экстремальным. Для определенности мы воспользуемся законом дисперсии (2.11). Напомним, что есть два критических значения энергии ($\epsilon_K = 0$ и $\epsilon_K = a\rho_0^2$). При образовании тороида ($\epsilon_K = 0$), как легко

показать, плотность состояний меняется скачком:

$$\nu^-(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon < 0, \\ \nu_0 = \frac{\beta}{4\pi\hbar^3 a^{3/2} b^{1/2}} & \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

При «зарастании» тороида ($\varepsilon_K = ar_0^2$) плотность состояний рассматриваемой ветви $\nu^-(\varepsilon)$ имеет слабую особенность

$$\delta\nu^-(\varepsilon) \approx \frac{\nu_0}{3\pi} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_K}{\varepsilon_K} \right)^{3/2} \quad (\varepsilon \gtrsim \varepsilon_K).$$

Как известно, при этой же энергии появляется новая плотность — оваллоид. Его рождение сопровождается аналогичной ослабленной особенностью:

$$\delta\nu^+(\varepsilon) \approx \frac{\nu_0}{3\pi} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_K}{\varepsilon_K} \right)^{3/2} \quad (\varepsilon \gtrsim \varepsilon_K).$$

Отсюда

$$\delta\nu(\varepsilon) \approx \frac{2\nu_0}{3\pi} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_K}{\varepsilon_K} \right)^{3/2} \quad (\varepsilon \gtrsim \varepsilon_K). \quad (3.13)$$

Если все рассмотрение проводить с большей степенью точности, то, как мы уже говорили, зарождение зоны (знак минус



Рис. 13. Поведение плотности состояний при переходе от эллипсоидальных изоэнергетических поверхностей к тороидам.

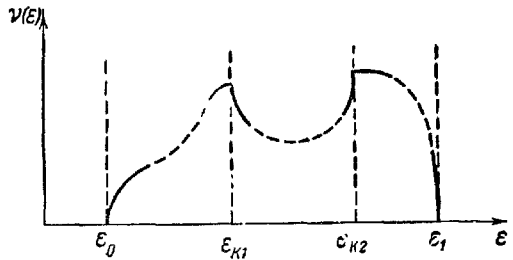


Рис. 14. Простейшая зависимость плотности состояний от энергии.

в уравнении (2.11)) начинается с появления эллипсоидов. В соответствующей критической точке плотность состояний имеет стандартную корневую особенность; на очень малом интервале плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ достигает значения, соответствующего тороиду; при смыкании эллипсоидов у $\nu(\varepsilon)$ имеется еще одна корневая особенность (рис. 13).

Суммируя сказанное в этих параграфах, можно утверждать, что плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ имеет не менее двух корневых особенностей внутри каждой зоны [10]. Простейший вид $\nu(\varepsilon)$ изображен на рис. 14. Покажем это. Между слоями закрытых поверхностей обязательно располагается по крайней мере один

слой открытых поверхностей. При переходе от закрытых поверхностей к открытым ($\epsilon = \epsilon_{K1}$) при возрастании энергии $\frac{dv}{d\epsilon}$ обращается в отрицательную бесконечность, а при переходе от открытых к замкнутым ($\epsilon = \epsilon_{K2}$) производная от плотности состояний обращается в положительную бесконечность. Если еще учесть, что $v(\epsilon_0) = v(\epsilon_1) = 0$ и $v(\epsilon) \geq 0$, то очевидно, что в интервалах $(\epsilon_0, \epsilon_{K1})$ и $(\epsilon_{K2}, \epsilon_1)$ плотность состояний имеет максимумы или достигает наибольшего значения, а между ними — по меньшей мере один минимум или имеются другие особенности.

Полная плотность электронных состояний, естественно, является суммой состояний в зонах

$$v(\epsilon) = \sum_s v_s(\epsilon), \quad (3.14)$$

причем «включение» новой зоны (в случае перекрытия зон) неотличимо (в смысле особенности плотности состояний) от появления новой полости внутри зоны или от разрыва перемычки.

По аналогии с формулой (3.14) можно ввести полное число электронов с энергией, меньшей заданной

$$N(\epsilon) = \sum_s N_s(\epsilon). \quad (3.15)$$

В заключение этого параграфа приведем выражения для плотности состояний свободного электронного газа

$$v(\epsilon) = \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2 \hbar^3} m^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad (3.16)$$

и для числа электронов с энергией, не превышающей заданную:

$$N(\epsilon) = \frac{2\sqrt{2}V}{3\pi^2 \hbar^3} m^{3/2} \epsilon^{3/2}. \quad (3.17)$$

§ 4. Классическая механика частицы с произвольным законом дисперсии

Во введении мы подробно остановились на возможности использования классических представлений для изучения движения электрона проводимости во внешних полях. Результат процедуры, аналогичной обращению принципа соответствия, заключается в том, что $\epsilon(\mathbf{p})$ надо считать кинетической энергией электрона, а уравнения движения в электрическом и магнитном полях могут быть записаны стандартным образом:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\}; \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad v = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.1)$$

Эти уравнения служат основой для построения классической механики электрона со сложным законом дисперсии.

Во избежание недоразумений подчеркнем еще раз: электрон проводимости — несомненно квантовомеханический объект, т. е. его законы движения могут быть получены только на основании квантовомеханического рассмотрения. В частности, только квантовая механика позволяет объяснить «свободу» электрона — его способность перемещаться в кристаллической решетке на макроскопические расстояния, позволяет сформулировать такие понятия, как квазичастица, квазиимпульс, закон дисперсии и т. п. Однако, поскольку такие понятия уже сформулированы и можно говорить об электроны в металле как о частице со сложным законом дисперсии, возникает возможность решать ряд задач чисто классически. Мы не будем сейчас останавливаться на тех условиях, которые должны быть для этого выполнены (они достаточно подробно обсуждались во введении). Отметим только, что классическое рассмотрение движения электрона с заданным законом дисперсии во внешних по отношению к кристаллу полях возможно только в тех случаях, когда размеры траектории электрона значительно больше межатомных расстояний. Это, другими словами, означает, что внешние поля должны быть малы по сравнению с внутри- и межатомными.

Перейдем теперь к исследованию различных случаев движения электронов во внешних полях. Хотя использовать уравнения в ньютоновой форме практически не удастся, для уяснения специфики движения частиц со сложным законом дисперсии они несомненно полезны. Дифференцируя второе из уравнений системы (4.1) по времени, получаем

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_k} F_k. \quad (4.2)$$

Неудобство полученной системы уравнений заключается в том, что тензор $\frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_k}$, называемый тензором обратных эффективных масс, в общем случае зависит от импульса, а следовательно, от времени. Это, конечно, необычайно затрудняет интегрирование системы уравнений (4.2). Если по условиям задачи можно не учитывать нелинейные по силе члены, то компоненты тензора обратных эффективных масс следует считать постоянными. Нужно отметить, что в произвольной точке \mathbf{p} -пространства тензор обратных эффективных масс имеет три не совпадающих ни по величине, ни по знаку главных значения. Вблизи тех значений импульса, при которых энергия достигает минимума или максимума, компоненты тензора эффективных масс суть постоянные величины, причем главные значения тензора имеют одинаковые знаки (§ 2). В этом случае использова-

ние уравнений (4.2) с постоянным тензором эффективных масс получает дополнительное обоснование.

Уже в простейшем (линейном по силе) случае может возникнуть весьма любопытная ситуация: одна и та же сила, действуя вдоль одного направления, ускоряет электрон, а вдоль другого — замедляет.

Уравнение (4.2) наглядно демонстрирует то обстоятельство, что кинематические свойства электрона со сложным законом дисперсии не могут быть охарактеризованы одной величиной — массой. Скорость электрона проводимости вовсе не пропорциональна импульсу: v — сложная периодическая функция импульса, а коэффициент пропорциональности между силой и ускорением — сложным образом зависящий от импульса тензор второго ранга. В этом же параграфе мы введем определение эффективной массы, удобное при рассмотрении движения частицы в магнитном поле. В некоторых весьма специальных случаях в формулы входит и «обычная» тяжелая масса электрона. Это имеет место тогда, когда явление определяется истинным (релятивистским) импульсом электрона $p_p = \mathcal{E}v/c^2$, где c — скорость света, а \mathcal{E} — полная энергия электрона с учетом его массы покоя. Так как энергия взаимодействия электрона с решеткой и с другими частицами значительно меньше энергии покоя m_0c^2 , то $p_p = m_0v$ (§ 24).

Рассмотрим теперь движение в постоянном и однородном электрическом поле. Уравнения движения в этом случае существенно упрощаются:

$$\dot{p} = eE, \quad \dot{r} = v. \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что при $E = \text{const}$ электрон движется с постоянной скоростью в p -пространстве:

$$p = p_0 + eEt. \quad (4.4)$$

Из закона сохранения энергии

$$\epsilon(p) - eEr = \text{const} \quad (4.5)$$

следует, что движение электрона проводимости в постоянном и однородном электрическом поле финитно вдоль поля. Если направление поля совпадает с одним из кристаллографических направлений, то электрон совершает колебания с частотой $\omega_E = 2eE/\Delta p_E$, где Δp_E — период функции $\epsilon(p)$ в направлении электрического поля. Так как $\Delta p_E \approx 2\pi\hbar/a$ (a — параметр решетки), то $\omega_E \approx eEa/\hbar$. Амплитуда колебаний при этом равна $\Delta\epsilon/eE$ ($\Delta\epsilon$ — ширина энергетической зоны). В общем случае, когда направление поля не совпадает с одним из кристаллографических направлений, движение электрона близко к периодическому. При разумных значениях поля амплитуда колебаний

электрона в электрическом поле чрезвычайно велика, в миллионы раз больше длины свободного пробега ($\Delta\varepsilon/eE \approx 10^8$ см при $E = 10^{-8}$ CGSE *), а $\Delta\varepsilon \approx 10^{-12}$ эрг). Поэтому при расчете сопротивления металла и в других аналогичных случаях периодический характер движения электронов можно не учитывать. На малых участках пути электрон, естественно, движется поступательно.

В диэлектриках, однако, финитный характер движения электрона в электрическом поле может все же проявиться, увеличивая вероятность межзонного пробоа.

Отметим, наконец, что анизотропный характер закона дисперсии приводит к тому, что в плоскости, перпендикулярной приложенному полю, электрон движется не как свободный: его скорость в этой плоскости изменяется с изменением проекции импульса на электрическое поле. Это одна из элементарных причин анизотропии сопротивления, теплопроводности и других кинетических коэффициентов.

Изучим теперь движение в постоянном и однородном магнитном поле ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$).

Уравнение Лоренца в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (4.6)$$

Умножая его один раз скалярно на \mathbf{v} , а другой раз на \mathbf{H} , заключаем, что, как и в случае свободного электрона, при движении в магнитном поле электрона проводимости сохраняются энергия электрона ε и проекция его импульса p_z на магнитное поле. Если выбрать ось z вдоль магнитного поля, то получим

$$\varepsilon = \text{const}, \quad p_z = \text{const}. \quad (4.7)$$

Равенства (4.7) описывают траекторию электрона в импульсном пространстве. В зависимости от топологии изоэнергетической поверхности она может быть либо замкнутой (т. е. распадающейся на замкнутые кривые, расположенные каждая в пределах одной ячейки обратной решетки**), либо открытой (т. е. непрерывно проходящей через всю обратную решетку). Классификация различных кривых приведена в § 2.

Положение электрона на траектории (4.7) в импульсном пространстве удобно определить, задав время обращения, отсчитываемое от какой-либо произвольной точки на траектории.

*) $E = 10^{-8}$ CGSE соответствует плотности тока в металле $j = 10^2$ а/см² при удельном сопротивлении $\rho = 10^{-8}$ ом·см.

**) Заметим, что в тех случаях, когда плоскость (x, y) не совпадает ни с одной из кристаллографических плоскостей, кривые, расположенные в различных ячейках обратной решетки, не тождественны. Это, очевидно, не противоречит периодичности функции $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$.

Проектируя уравнение (4.6) на плоскость (x, y) , получаем

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = -\frac{eH}{c} v_{\perp}. \quad (4.8)$$

Здесь dp_{\perp} — элемент дуги на кривой (4.7), а $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Напомним, что ось z совпадает с направлением магнитного поля. Знак минус выбран в связи с тем, что заряд электрона принято считать отрицательным ($-e > 0$).

Интегрирование уравнения (4.8) дает

$$t = -\frac{c}{eH} \int \frac{dp_{\perp}}{v_{\perp}}. \quad (4.9)$$

Если кривая (4.7) замкнутая, то электрон в магнитном поле, очевидно, совершает периодическое движение с периодом

$$T_H = -\frac{c}{eH} \oint \frac{dp_{\perp}}{v_{\perp}}. \quad (4.10)$$

Это выражение можно преобразовать, воспользовавшись тем обстоятельством, что v_{\perp} (вектор с компонентами v_x и v_y) — нормаль к плоской кривой (4.7). Обозначим через $S(\epsilon, p_z)$ площадь, ограниченную кривой (4.7) (речь идет о замкнутой непересекающейся кривой).

Так как

$$S(\epsilon, p_z) = \iint dp_x dp_y = \int d\epsilon \oint \frac{dp_{\perp}}{v_{\perp}},$$

то

$$\oint \frac{dp_{\perp}}{v_{\perp}} = \frac{\partial S}{\partial \epsilon},$$

откуда

$$T_H = -\frac{c}{eH} \frac{\partial S}{\partial \epsilon}. \quad (4.11)$$

Величину $(1/2\pi) \partial S / \partial \epsilon = m^*$ естественно назвать эффективной массой электрона в магнитном поле; здесь m^* — функция сохраняющихся в магнитном поле величин ϵ, p_z , что делает ее использование значительно более удобным, чем использование тензора обратных эффективных масс, который в общем случае зависит от всех компонент вектора p .

Период и частота обращения (ларморовская, или циклотронная частота) электрона имеют вид, совпадающий с выражениями для периода обращения и частоты свободного электрона:

$$T_H = \frac{2\pi m^* c}{|e| H}; \quad \omega_H = \frac{|e| H}{m^* c}. \quad (4.12)$$

Отсюда ясно, что для свободного электрона $m^* = m$. Действительно, если $\epsilon = p^2/2m$, то кривая (4.7) — окружность; она ограничивает круг, площадь которого равна $S = \pi(2m\epsilon - p_z^2)$. Отсюда $\partial S/\partial \epsilon = 2\pi m$.

Так как эффективная масса m^* зависит от ϵ и p_z , то, естественно, она различна для различных электронов проводимости. Поэтому в отличие от газа свободных электронов газ электронов проводимости не вращается в магнитном поле с общей для всех электронов частотой. Разные электроны совершают различные периодические движения. Те электроны, которые движутся по открытым траекториям в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (в пространстве импульсов), совершают инфинитное движение.

Мы до сих пор не обращали внимания на направление движения электрона, которое, очевидно, определяется взаимным направлением вектора v_{\perp} и p_{\perp} . Из уравнения (4.6) легко показать, что направление движения связано со знаком эффективной массы: если $m^* > 0$, то электрон движется по левому винту (как свободный электрон), а если $m^* < 0$ — по правому, как положительно заряженная частица. При этом эффективной массе приписывается знак производной $\partial S/\partial \epsilon$, который, очевидно, зависит от того, будет ли энергия внутри поверхности $\epsilon(p) = \epsilon$ меньше или больше ϵ . В первом случае производная $\partial S/\partial \epsilon$, а значит, и эффективная масса m^* положительна, во втором — отрицательна.

Подчеркнем еще, что для открытых траекторий естественное понятие эффективной массы в магнитном поле, связанное с периодом обращения по орбите, ввести нельзя. Однако можно установить правило для определения направления движения электрона, справедливое и для замкнутых, и для открытых траекторий: электрон движется так, что справа от направления движения электрона в каждой точке траектории всегда расположена область с меньшей энергией.

Мы до сих пор говорили о движении электрона в пространстве импульсов. Из уравнения Лоренца видно, что траектория электрона в пространстве импульсов тесно связана с проекцией траектории электрона в обычном пространстве на плоскость, перпендикулярную магнитному полю. Действительно, уравнения (4.6) показывают, что скорость электрона в каждый момент времени перпендикулярна скорости в пространстве импульсов \dot{p} . А это значит, что проекция траектории электрона в координатном пространстве на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, получается из его траектории в пространстве импульсов путем поворота на угол $\pi/2$ и изменения масштаба (умножения на c/H). В частности, это означает, что период и частота движения электрона в координатном пространстве равны T_H и ω_H .

Движению электрона проводимости в магнитном поле присущи некоторые интересные особенности в случае, если его изоэнергетическая поверхность открытая. Так, например, его траектория в пространстве импульсов может быть открытой. Но это значит, что в обычном координатном пространстве, в плоскости, перпендикулярной полю, электрон совершает инфинитное движение — уходит на бесконечность.

Существенное различие между свободным электроном и электроном в кристалле может проявиться и в тех нередких случаях, когда траектория электрона в магнитном поле замкнута, но проходит через седловую точку изоэнергетической поверхности. Действительно, в седловой точке проекция скорости на плоскость, перпендикулярную нормали, равна нулю.

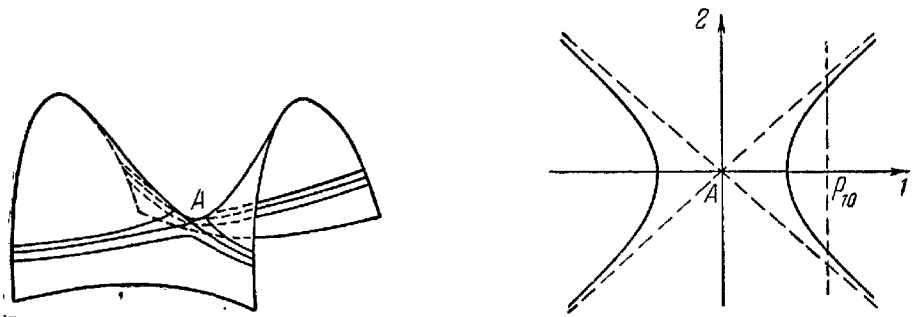


Рис. 15. Траектории электрона вблизи седловой точки.

В точке A (седловая точка) скорость равна нулю.

Поэтому при движении по траектории (4.7), формально проходящей через седловую точку, электрон лишь асимптотически приближается к ней. Электрон, находящийся в седловой точке, вовсе не движется. Отсюда ясно, что электроны, которые движутся по траектории, проходящей вблизи седловой точки, большую часть времени проводят вблизи этой точки, а это, в свою очередь, означает, что величина периода в основном определяется характером движения электрона вблизи особенности. Уравнение траектории электрона в магнитном поле (в импульсном пространстве) вблизи седловой точки при соответствующем выборе осей в общем случае имеет вид

$$\varepsilon - \varepsilon_0(p_z) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{m_1} - \frac{p_2^2}{m_2} \right). \quad (4.13)$$

Здесь $\varepsilon_0(p_z)$ — значение энергии в седловой точке, положение осей 1 и 2 ясно из рис. 15; ось p_z , как всегда, направлена по магнитному полю; $1/m_1$ и $1/m_2$ — значения соответствующих вторых производных от ε по p в седловой точке ($m_1, m_2 > 0$). Так

как по большей части траектории движение происходит с конечной скоростью, а вблизи точки A с бесконечно малой, то

$$\begin{aligned}
 T_H &\cong \frac{c}{|e|H} \int_{-p_0}^{p_0} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dp_1}{dp_2}\right)^2}{v_1^2 + v_2^2}} dp_2 = \\
 &= \frac{2c}{|e|H} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} \int_0^{p_0} \frac{dp_2}{\sqrt{\frac{p_1^2}{m_1^2} + \frac{p_2^2}{m_2^2}}} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

(p_0 — значение p_2 , при котором траектория существенно удалилась от седловой точки; см. рис. 15). Выражая p_1 через $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0(p_2)$ и интегрируя, имеем:

$$T_H \cong \frac{2c}{|e|H} (m_1 m_2)^{1/2} \left| \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \right|. \quad (4.15)$$

Таким образом, при приближении траектории к седловой точке период логарифмически возрастает. Из вывода формулы (4.15) ясно, что приближение к особенности может при этом происходить как за счет изменения энергии ε или проекции импульса p_z (рассмотренные здесь случаи), так и за счет направления магнитного поля.

Логарифмическое возрастание периода обращения можно описать, введя обращающуюся в бесконечность эффективную массу

$$m^* = \frac{1}{\pi} (m_1 m_2)^{1/2} \ln \left| \frac{\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon} \right|. \quad (4.15a)$$

Движение по траектории, проходящей через седловую точку, сходно с инфинитным — частица тратит бесконечное время на прохождение траектории. Рассмотренные здесь траектории разделяют траектории разных типов. Эта их «разделительная» роль особенно существенно проявляется при рассмотрении движения электрона в медленно меняющемся магнитном поле (см. следующий параграф).

Открытые траектории (или открытые сечения) возможны, естественно, только для электронов на открытых изоэнергетических поверхностях. Однако и в этих случаях сечения, как говорилось, могут быть либо открытыми, либо замкнутыми в зависимости от направления магнитного поля и величины p_z . Выясним, как (по какому закону) обращается в бесконечность период, если параметры движения изменяются так, что траектория из замкнутой превращается в открытую. Для наглядности можно воспользоваться поверхностью типа «гофрированный цилиндр», которая, по сути дела, моделирует любую открытую

поверхность вдоль «направления открытости». Кроме того, для определенности будем считать, что изменяется направление магнитного поля. Для прямого (не гофрированного) цилиндра при уменьшении угла $\varphi = \pi/2 - \theta$ (θ — угол между осью цилиндра и магнитным полем) период возрастал бы обратно пропорционально $\sin \varphi$ или вблизи открытой траектории — пропорционально φ . Однако наличие гофрировки существенно меняет дело. Легко видеть, что при приближении угла θ к прямому траектория обязательно проходит через седловые точки (рис. 16). При приближении к седловой точке период логарифмически

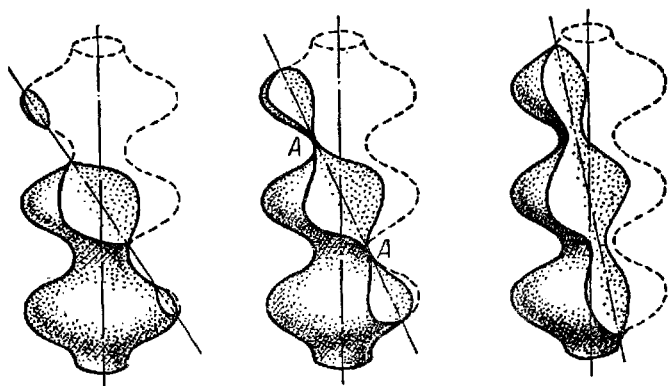


Рис. 16. Изменение характера траектории электрона в зависимости от угла между направлением магнитного поля и осью гофрированного цилиндра.

Точки *A* — седловые точки.

обращается в бесконечность. В связи с этим угловая зависимость периода оказывается очень сложной: она схематически изображена на рис. 17. Точки, в которых период обращается в бесконечность, соответствуют тем значениям угла при фиксированных ε и p_z , при которых траектория проходит через седловые точки.

Отметим еще любопытную особенность движения электрона в магнитном поле вблизи конической точки на изоэнергетической поверхности с самопересечением. Используя формулу (2.9), можно показать [11], что при приближении к конической точке период (а значит, и эффективная масса) стремится к нулю. Магнитное поле при этом должно не слишком отклоняться от оси конуса. Обращение в нуль эффективной массы, т. е. обращение в бесконечность ларморовской частоты, должно привести к ряду эффектов.

Как известно, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты. Поскольку для электронов с закрытыми траекториями

движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, периодически, то адиабатическим инвариантом является интеграл $I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_\perp dr$, взятый по полному периоду движения, где \mathbf{P}_\perp — проекция обобщенного импульса на указанную плоскость (см. введение, формулу (1.36)).

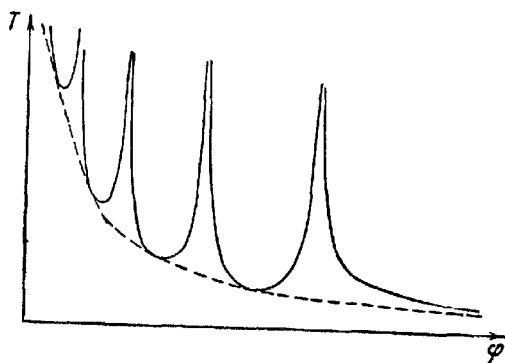


Рис. 17. Зависимость периода обращения электрона от угла между направлением магнитного поля и осью цилиндра (ср. рис. 16).

Пунктирная линия отвечает неизофрированному цилиндру.

Замкнутое выражение для адиабатического инварианта можно получить при произвольном законе дисперсии. Для этого выберем векторный потенциал следующим образом:

$$A_x = -Hy; \quad A_y = A_z = 0. \quad (4.16)$$

Отсюда

$$P_x = p_x - \frac{eH}{c} y, \quad P_y = p_y; \quad P_z = p_z. \quad (4.17)$$

Кроме того, так как при выборе векторного потенциала в виде (4.16) координата x является циклической, то $P_x = \text{const}$, а $dy = \frac{c}{eH} dp_x$. Используя эти соотношения, легко получаем

$$I = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{eH} \oint p_y dp_x.$$

Интеграл в полученном равенстве определяет площадь $S(\varepsilon, p_z)$ сечения изоэнергетической поверхности плоскостью, перпендикулярной магнитному полю. Таким образом,

$$I = \frac{cS(\varepsilon, p_z)}{2\pi eH}. \quad (4.18)$$

Для квадратичного изотропного закона дисперсии $S(\varepsilon, p_z) = \pi p_{\perp}^2$ и

$$I = \frac{cp_{\perp}^2}{2eH}. \quad (4.19)$$

Адиабатический инвариант с точностью до постоянного множителя совпадает с усредненной по траектории проекцией магнитного момента *) на магнитное поле, причем речь идет о магнитном моменте, возникающем за счет орбитального движения. Действительно, если чертой обозначить усреднение и воспользоваться подобием траекторий в импульсном и координатном пространстве, то

$$M_z = \frac{e}{2c} \overline{[\mathbf{r}, \mathbf{v}]_z} = \frac{e}{2c} \overline{(xv_y - yv_x)} = -\frac{1}{2H} \overline{(v_x p_x + v_y p_y)}.$$

С другой стороны, легко показать (подробнее см. § 27), что

$$\overline{p_x v_x} = \overline{p_y v_y} = \frac{S(\varepsilon, p_z)}{2\pi m^*}. \quad (4.20)$$

Окончательно

$$M_z = \frac{e}{2m^*c} I. \quad (4.21)$$

Отметим, что в определении магнитного момента координата отсчитывается от «центра» орбиты.

Мы видим, что $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью $p_z = \text{const}$ — играет существенную роль в динамике движения частицы в магнитном поле. Для дальнейшего нам понадобится ряд формул, в которые входят производные от $S(\varepsilon, p_z)$.

Вычислим $(\partial S / \partial p_z)_{\varepsilon}$. Согласно определению,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_z} \right)_{\varepsilon} = \oint_{p'_x, \varepsilon} \left(\frac{\partial p_y}{\partial p_z} \right) dp'_x.$$

С другой стороны, из равенства нулю дифференциала $d\varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const}$) следует, что $(\partial p_y / \partial p_z)_{p'_x, \varepsilon} = -v_z / v_y$. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_z} \right)_{\varepsilon} = - \oint \frac{v_z}{v_y} dp_x. \quad (4.22)$$

По своему смыслу величина $S(\varepsilon, p_z)$ зависит, естественно, от направления магнитного поля $\xi \approx H/H$. Можно показать, что изменение площади сечения δS , обусловленное изменением направления на величину $\delta \xi$, выражается следующей формулой:

$$\delta S = \oint \frac{v_z p}{v_y} d\xi dp_x. \quad (4.23)$$

*) При выводе формул (4.21)–(4.25) мы пользуемся работой [12].

Действительно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_i}\right)_{\varepsilon, p_z} = \oint \left(\frac{\partial p_y}{\partial \xi_i}\right)_{p'_x, \varepsilon, p_z} dp'_x \quad (4.24)$$

Теперь воспользуемся тем обстоятельством, что зависимость $\varepsilon = \varepsilon(p_x, p_y, p_z, \xi)$ от ξ связана только со своеобразным выбором системы координат — ось всегда направлена вдоль магнитного поля. Поэтому переход к новому направлению $\xi + d\xi$ соответствует повороту p -пространства на «угол» $\delta\varphi$:

$$\delta p = [p, \delta\varphi],$$

а $\delta\varphi$ связан с $d\xi$ аналогичным соотношением

$$d\xi = [\xi, \delta\varphi].$$

Из условия постоянства энергии

$$d\varepsilon = v_x dp_x + v_y dp_y + v_z dp_z + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_i} \delta \xi_i$$

и из того обстоятельства, что $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \delta p_i$, можно получить

$$\left(\frac{\partial p_y}{\partial \xi_y}\right)_{p'_x, \varepsilon, p_z} = -p_z + \frac{v_z p_y}{v_y},$$

откуда и следует формула (4.23).

Выпишем уже без доказательства еще одно полезное соотношение

$$\bar{v}_z = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v_z}\right)_S. \quad (4.25)$$

Рассмотрим теперь кратко движение электрона проводимости в скрещенных электрическом и магнитном полях, которые для простоты будем предполагать перпендикулярными друг другу. Известно, что свободный электрон, помещенный в скрещенное поле, дрейфует в направлении, перпендикулярном и электрическому и магнитному полям. Скорость дрейфа, т. е. средняя скорость движения электрона при этом равна

$$\mathbf{v}_{EH} = \frac{c}{H^2} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (4.26)$$

Точнее говоря, формула (4.26) дает значение скорости в направлении, перпендикулярном векторам \mathbf{E} и \mathbf{H} . Кроме того, электрон движется вдоль магнитного поля, так как проекция импульса (а значит, скорости) на направление магнитного поля сохраняется. Поэтому свободный электрон дрейфует под углом к магнитному полю в плоскости, перпендикулярной электрическому полю. Посмотрим, как обстоит дело с электроном с произвольным законом дисперсии. С помощью (4.26) уравнение

(4.1) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} - \mathbf{v}_{EH}, \mathbf{H}]. \quad (4.27)$$

Усредняя это уравнение по времени, видим, что в тех случаях, Однако в тех случаях, когда траектория открытая, $\overline{d\mathbf{p}/dt} \neq 0$, и средняя скорость в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, совпадает с \mathbf{v}_{EH} , как и у свободного электрона, т. е.

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{EH} + \mathbf{v}_{\parallel}; \quad \mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{v}\mathbf{H})}{H^2}.$$

Однако в тех случаях, когда траектория открытая, $\overline{d\mathbf{p}/dt} \neq 0$, и $\mathbf{v}_{\perp} \neq \mathbf{v}_{EH}$. Следует подчеркнуть, что речь идет не о траектории в магнитном поле, а о траектории в скрещенных полях.

Из уравнения (4.27) видно, что движение в скрещенных полях частицы с законом дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ можно трактовать как движение только в магнитном поле частицы с законом дисперсии

$$\varepsilon^*(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mathbf{v}_{EH}\mathbf{p}. \quad (4.28)$$

Уравнения траектории в импульсном пространстве в этом случае имеют вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) - \mathbf{v}_{EH}\mathbf{p} = \text{const}; \quad p_z = \text{const}. \quad (4.29)$$

Легко видеть, что даже тогда, когда траектория в магнитном поле замкнута, траектория (4.29) в скрещенных полях может быть открытой*). Зная траекторию в пространстве импульсов, легко построить траекторию электрона проводимости в координатном пространстве, если заметить, что из закона сохранения энергии

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v}\mathbf{E}$$

следует, что скорость \mathbf{v} всегда перпендикулярна вектору $d\mathbf{p}^*/dt$, где $\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - e\mathbf{E}t$. В тех случаях, когда траектория электрона в импульсном пространстве — замкнутая кривая, легко определить период обращения электрона T_{EH} . Из формулы (4.28) ясно, что, так же как в отсутствие электрического поля,

$$T_{EH} = -\frac{c}{eH} \frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon^*}.$$

Здесь S^* — площадь, ограниченная кривой, определенной уравнениями (4.29). Величина $\partial S^*/\partial \varepsilon^*$ в общем случае зависит от электрического поля. Интересно отметить, что эта зависимость

*) Только наличием открытых траекторий можно объяснить тот факт, что полный ток целиком заполненной энергетической зоны равен нулю в скрещенных полях.

исчезает при квадратичном законе дисперсии. Так как электрическое поле практически всегда мало по сравнению с магнитным*), то интерес (и то только для полупроводников и полуметаллов типа Вi) может иметь изменение периода под воздействием слабого электрического поля. Вычисление этого изменения следует производить, удерживая квадратичные по электрическому полю члены (линейные члены исчезают при вычислении конкретных эффектов за счет усреднения по всем электронам).

В заключение этого параграфа подчеркнем, что при расчете электропроводности металла (и статической, и высокочастотной) в магнитном поле оказывается возможным рассматривать электрическое поле как возмущение. Поэтому макроскопические свойства металла в скрещенных полях определяются динамикой электрона проводимости в магнитном поле.

§ 5. Движение электронов проводимости в неоднородных полях

В предыдущем параграфе мы проанализировали движение квазичастиц со сложным законом дисперсии в постоянных и однородных электрическом и магнитном полях. Уже там были обнаружены особенности, характерные только для частиц со сложной зависимостью энергии от квазимпульса. Еще большее многообразие, естественно, проявляется при движении частиц в неоднородных полях [14—16]**).

В настоящем параграфе рассматривается движение квазичастиц в электрическом и магнитном полях, «медленно» изменяющихся во времени и в пространстве. Эти поля удовлетворяют условиям

$$T_H \ll T_0; \quad r_H \ll L_0; \quad E \ll \frac{v}{c} H, \quad (5.1)$$

где T_0 и L_0 соответственно характерные время и длина изменения полей E и H . Практически эти условия выполняются до очень больших градиентов и частот (например, при $H \approx 10^3$ э допустимы градиенты $|\nabla H| \approx 10^5$ э/см и частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0 \approx \approx 10^8$ 1/сек).

Обратим внимание на то, что электрическое поле, согласно (5.1), считается малым. Таким образом, в этом параграфе пе-

*) Заметим, что условие $E/H \ll 1$ необходимо для того, чтобы можно было пользоваться формулами классической (нерелятивистской) механики (см., например, работу [13]).

**) В настоящее время не обнаружены экспериментально явления, связанные с описываемыми здесь свойствами. Поэтому при первом знакомстве с электронной теорией металлов этот параграф можно опустить.

возмущенным движением надо считать движение в постоянном и однородном магнитном поле.

Условия (5.1) позволяют истинное движение квазичастицы разбить на сумму двух движений — быстрого движения в среднем магнитном поле и медленного изменения характеристик быстрого движения. Особенно наглядно можно себе представить быстрое движение в случае замкнутых траекторий в импульсном пространстве. В этом случае медленное движение — дрейф, поворот и деформация контура, по которому частица совершает быстрое движение.

Если изоэнергетическая поверхность не является всюду выпуклой, то при движении в электромагнитном поле, медленно изменяющемся в пространстве и во времени, возникает своеобразное явление — «рассеяние квазичастицы на седловых точках поверхности», не связанное с наличием какого-либо силового центра в \mathbf{r} -пространстве. Это рассеяние обусловлено тем, что седловая точка является особой точкой — точкой остановки по отношению к движению квазичастицы в постоянном и однородном магнитном поле. В случае электромагнитного поля, удовлетворяющего условиям (5.1), эта точка разделяет в \mathbf{p} -пространстве несколько областей с существенно разными режимами движения. Когда контур проходит через такую особую точку, режим движения частицы резко изменяется, при этом ее попадание в ту или иную область зависит от точных начальных условий. В данном случае физический интерес представляет определение вероятности попадания частицы в эти области.

Рассмотрим сначала тот случай, когда быстрое движение происходит по замкнутой траектории в импульсном пространстве. Для исследования движения квазичастицы удобно использовать (вместо декартовых компонент импульса) величины p_{ξ} , ε и τ , где p_{ξ} — проекция импульса на единичный вектор магнитного поля $\xi = \mathbf{H}/H$, ε — энергия, а τ — угловая переменная, определяющая положение частицы на траектории быстрого движения $p_{\xi} = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ (см. предыдущий параграф).

Запишем функции $\mathbf{r}(t)$, $p_{\xi}(t)$ и $\varepsilon(t)$, явно отделив быстрое движение:

$$\mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{\rho}(t); \quad p_{\xi}(t) = \bar{p}_{\xi}(t) + \tilde{p}_{\xi}(t); \quad \varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}(t) + \tilde{\varepsilon}(t), \quad (5.2)$$

где черта означает усреднение по периоду быстрого движения

$$\bar{x} = \frac{1}{T_H} \int_t^{t+T_H} x(t') dt'. \quad \text{«Усредненные» величины } \mathbf{R}(t) = \bar{\mathbf{r}}(t),$$

$P_{\xi}(t) = \bar{p}_{\xi}(t)$ и $\mathcal{E}(t) = \bar{\varepsilon}(t)$ задают медленное (плавное) движение частицы; при этом \mathbf{R} имеет смысл координаты центра орбиты — контура; единичный вектор $\xi = \mathbf{H}(\mathbf{R}, t)/H(\mathbf{R}, t)$, а также

величины $\mathcal{E}(t)$ и $P_{\xi}(t)$ задают положение контура в p -пространстве. Период $T_H = 2\pi m^* c / eH$ определяется мгновенными значениями \mathcal{E} , P_{ξ} и ξ , а функции ρ , \tilde{p}_{ξ} и $\tilde{\varepsilon}$ — осциллирующие добавки, среднее значение которых равно нулю. В силу (5.1) $|\tilde{p}_{\xi}|$ и $|\tilde{\varepsilon}|$ значительно меньше P_{ξ} и \mathcal{E} , а $|\rho|$ — порядка линейных размеров ларморовской орбиты ($|\rho| \approx r_H$). Точные уравнения движения имеют обычный вид (4.1). Перепишем их в выбранных нами переменных. Для этого умножим уравнение

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}H] \quad (5.3)$$

на единичный вектор $\xi(\mathbf{r}, t)$ вдоль магнитного поля

$$\xi \dot{\mathbf{p}} = eE_{\xi}.$$

По определению,

$$\dot{p}_{\xi} = \frac{d}{dt} (\xi \mathbf{p}) = \dot{\xi} \mathbf{p} + \xi \dot{\mathbf{p}},$$

а

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \xi.$$

Поэтому

$$\dot{p}_{\xi} = eE_{\xi} + \mathbf{p} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \xi \right).$$

Так как $\xi d\xi/dt = 0$, то

$$\dot{p}_{\xi} = \mathbf{p}_{\perp} (\mathbf{v}\nabla) \xi + \mathbf{p}_{\perp} \frac{\partial \xi}{\partial t} + eE_{\xi}, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - (\mathbf{p}\xi)\xi$ — проекция вектора \mathbf{p} на плоскость, перпендикулярную магнитному полю $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. К уравнению (5.4) надо еще добавить закон изменения энергии ε :

$$\dot{\varepsilon} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \quad (5.5)$$

и уравнение, определяющее зависимость от времени координат частицы,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\perp} + v_{\xi} \xi, \quad \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (v\xi) \xi. \quad (5.6)$$

Уравнения (5.4) — (5.6) — полная система уравнений движения частицы в нужных нам переменных.

Величины, описывающие положение частицы (\mathbf{r} и \mathbf{p}), удовлетворяют соотношению типа $\dot{\mathbf{x}} \cong \dot{\mathbf{x}}$. С этой же точностью при усреднении можно замснить интегрирование по истинному времени интегрированием по τ вдоль контура $\varepsilon = \mathcal{E}$, $p_{\xi} = P_{\xi}$ (легко показать, что $dt = d\tau$ с точностью до величин $\sim cE/vH$; см. § 27). При усреднении по τ , которое нам предстоит произвести, надо

знать зависимость $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau)$. Для ее выяснения удобно воспользоваться уравнениями движения в среднем поле:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{R}),$$

причем магнитное поле \mathbf{H} надо считать постоянным. Отсюда

$$v_{x(y)} = (\mp) \frac{c}{eH} \frac{\partial p_{y(x)}}{\partial \tau}.$$

Оси x и y выбраны в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Следовательно, $\bar{v}_\perp = 0$. Кроме того, $\overline{v_x p_y} = \overline{v_y p_x} = 0$, а $\overline{v_x p_x} = \overline{v_y p_y}$ и равны $S/2\pi m^*$, где S и $m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}$ — функции ξ и P_ξ (см. предыдущий параграф).

Приступим теперь к усреднению уравнений (5.4) — (5.6). В уравнении (5.4) трудность может возникнуть только при усреднении первого члена в правой части. Проведем усреднение этого члена подробно. Выбираем оси x, y, z так, чтобы $\xi_z = 1$, а $\xi_x = \xi_y = 0$. Тогда $\nabla \xi_z = 0$, а

$$\overline{\mathbf{p}_\perp (\mathbf{v}\nabla) \xi} = \frac{S}{2\pi m^*} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right) + \overline{v_z \left(\mathbf{p}_\perp \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)}.$$

Мы воспользовались уже упоминавшимся соотношением $\overline{v_x p_x} = \overline{v_y p_y} = S/2\pi m^*$. Последнее слагаемое можно переписать, перейдя от интегрирования по τ к интегрированию по p_x :

$$\overline{v_z \left(\mathbf{p}_\perp \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)} = \frac{1}{2\pi m^*} \oint \frac{v_z \left(\mathbf{p}_\perp \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)}{v_y} dp_x.$$

Используя формулу (4.24), получаем

$$\overline{v_z \left(\mathbf{p}_\perp \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)} = \frac{1}{2\pi m^*} (\xi \nabla) S.$$

С другой стороны, учитывая, что $\text{div } \mathbf{H} = 0$, можно показать:

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = H (\xi \nabla) \frac{1}{H}.$$

Таким образом,

$$\overline{\mathbf{p}_\perp (\mathbf{v}\nabla) \xi} = \frac{H}{2\pi m^*} (\xi \nabla) \frac{S}{H} \quad (5.7)$$

и усредненное уравнение (5.4) принимает вид

$$\dot{P}_\xi = \frac{H}{2\pi m^*} (\xi \nabla) \frac{S}{H} + \bar{\mathbf{p}}_\perp \frac{\partial \xi}{\partial t} + cE_\xi. \quad (5.8)$$

Займемся теперь уравнением (5.5). Электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ приблизительно равно $\mathbf{E}(\mathbf{R}) + (\rho \nabla) \mathbf{E}$. Если учесть, что

$\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$, то

$$\overline{e\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{v}} = eE_{\xi}\bar{v}_{\xi} + e\bar{v}_i\rho_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k}.$$

Так как $\bar{v}_i = \dot{\rho}_i$, то, интегрируя по частям, легко показать, что $\bar{v}_i\rho_k$ — антисимметричный тензор. Поэтому

$$\bar{v}_i\rho_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \bar{v}_i\rho_k \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}]_i (\text{rot } \mathbf{E})_i.$$

Но, согласно уравнениям Максвелла,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

а $\frac{e}{2c} [\bar{\rho}, \tilde{\mathbf{v}}] = \mathbf{M}$, как мы уже говорили, средний магнитный момент контура относительно «центра орбиты» \mathbf{R} . Поэтому

$$\dot{\mathcal{S}} = eE_{\xi}\bar{v}_{\xi} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.6) усредняется автоматически

$$\dot{\mathbf{R}} = \bar{v}_{\xi}\xi. \quad (5.10)$$

Уравнения (5.8)–(5.10) составляют полную систему усредненных уравнений движения электрона. В правых частях стоят функции, зависящие только от P_{ξ} , \mathcal{S} и \mathbf{R} . Для нахождения их явного вида в некоторых случаях надо воспользоваться формулами, выведенными в предыдущем параграфе.

Из системы уравнений (5.8)–(5.10) с помощью соотношений

$$\bar{v}_{\xi} = -\frac{1}{2\pi m^*} \frac{\partial S}{\partial P_{\xi}}; \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} = \oint \frac{p_{\perp} v_{\xi}}{v_{\perp}} dp_{\perp},$$

где интегрирование ведется вдоль средней траектории, легко получить, что отношение $S(P_{\xi}, \mathcal{S}, \xi)/H(\mathbf{R}, t)$ есть интеграл движения. Это показывает, в частности, что и в неоднородном магнитном поле вид адиабатического инварианта такой же, как и в постоянном поле (см. формулу (4.18)).

Другое важное свойство движения в медленно меняющемся в пространстве и во времени электромагнитном поле состоит в том, что скорость центра орбиты параллельна направлению магнитного поля (см. уравнение (5.10)).

Знание усредненных уравнений позволяет полностью исследовать характер движения и деформацию контура в медленно меняющихся полях. Особенно нагляден характер этого движения в том простейшем случае, когда постоянное магнитное поле — медленная функция координат. Электрон движется по энергетической поверхности таким образом, чтобы отношение

S/H оставалось постоянным. Центр контура движется вдоль силовой линии. В частности, могут наблюдаться любопытные осцилляции, аналогичные колебаниям частиц в магнитной ловушке. Однако в металле периодическое движение может быть обусловлено не специальным видом магнитного поля, а своеобразием закона дисперсии, благодаря которому S является периодической функцией [14] (рис. 18).

Если уравнения $p_{\xi} = \text{const}$, $\epsilon = \text{const}$ описывают открытую траекторию, то следует различать два случая:

1. Траектория — периодическая кривая: направление открытости параллельно какому-либо вектору обратной решетки. Главное отличие от случая замкнутых сечений связано с тем,

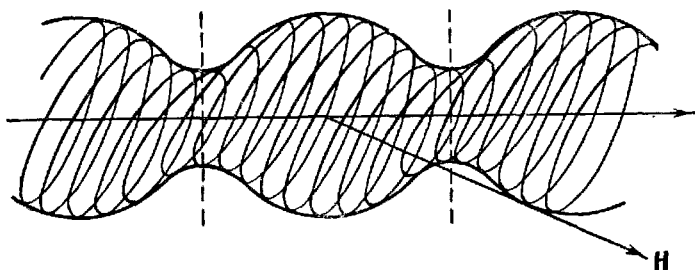


Рис. 18. Траектория электрона в неоднородном магнитном поле.

что скорость не направлена вдоль магнитной силовой линии, в результате чего S/H не есть адиабатический инвариант. Однако, общий характер движения весьма похож на движение по замкнутой траектории. Так, роль периода играет время, за которое электрон проходит одну элементарную ячейку обратной решетки.

2. Траектория — не периодическая кривая: направление открытости не параллельно ни одному из векторов обратной решетки. При усреднении по аperiodической траектории интегрирование вдоль открытой траектории, проходящей через бесконечное множество элементарных ячеек*), можно заменить суммой

*) В действительности вывод уравнений, описывающих медленное движение (дрейф и т. п.), связан с усреднением по интервалу времени T , удовлетворяющему неравенству $T_0 \ll T \ll \tau$, где T_0 — время прохождения частицы через элементарную ячейку, τ — время свободного пробега. Однако при усреднении ограниченных величин интегрирование можно распространить по всей траектории, так как разность

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} (2T')^{-1} \int_{-T'}^{T'} f(t') dt' - \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt'$$

есть быстро осциллирующая функция порядка $f \cdot T_0/T$.

интегралов по эквивалентным участкам внутри одной ячейки (рис. 19). В случае апериодической траектории эти участки плотно заполняют элементарную ячейку. Отсюда следует, что средние величины, характеризующие медленное движение, не могут зависеть от ρ_H — проекции импульса на магнитное поле. Естественно, что зависимость средних от ρ_H можно пренебречь и для периодических траекторий, если период их значительно более \hbar/a (a — среднее расстояние между атомами). Это

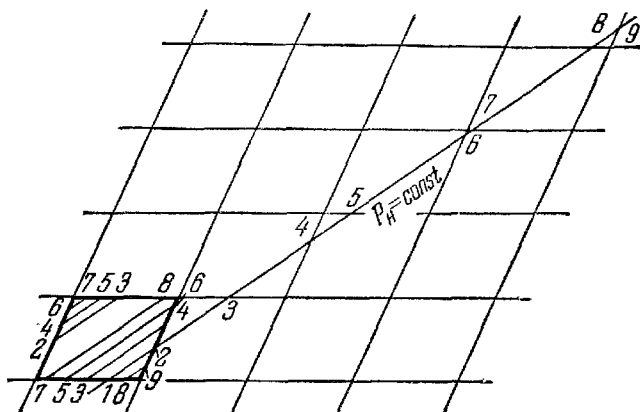


Рис. 19. Одна из кристаллографических плоскостей обратной решетки, пересеченная плоскостью $p_H = \text{const}$ (одинаковыми цифрами обозначены эквивалентные точки).

обстоятельство (независимость средних от ρ_H) существенно изменяет характер медленного движения (подробнее см. в работе [15]).

Наиболее интересная ситуация возникает, если при движении в поле, медленно меняющемся в пространстве и во времени, совершается переход от одного режима к другому. Как мы уже говорили, в этом случае имеет место явление, очень напоминающее рассеяние на силовом центре [15, 16].

Области в p -пространстве с различными режимами движения отделены друг от друга участками самопересекающейся траектории, которая образуется при сечении поверхности $\epsilon = \text{const}$ плоскостью, касающейся гиперболических точек изоэнергетической поверхности. Эти точки — точки остановки при движении в однородном и постоянном магнитном поле. Период движения частицы логарифмически расходится при $\rho_H \rightarrow \rho_H^k$, где ρ_H^k — вектор в p -пространстве, проведенный в особую точку (см. формулы (4.15) и (4.15a)).

Сущность явления рассеяния легче всего пояснить на примере движения в слабо неоднородном и постоянном во времени магнитном поле, имеющем прямую силовую линию. Пусть F — седловая точка изоэнергетической поверхности $\varepsilon = \varepsilon_0$, такая, что нормаль к поверхности в этой точке параллельна \mathbf{H} . Сечение $\varepsilon = \varepsilon_0$, $p_H = p_H^k$ — «восьмерка», точка самопересечения которой совпадает с F . Если «токовый лепесток» при движении в p -пространстве коснется поверхности в седловой точке, то в дальнейшем он расщепится на два токовых лепестка, соответствующих областям I и II , разделенным особой точкой (рис. 20).

Режимы движения в этих областях существенно отличаются. В зависимости от точных «микроскопических» начальных условий частица попадает либо в область I , либо в область II . Микроскопические начальные условия перемежаются таким образом, что на каждом макроскопическом элементе изоэнергетической поверхности, определенном усредненными значениями «координат», находятся точки, из которых частица попадает как в первую, так и во вторую область. Поэтому и можно попадание частиц в каждую из областей рассматривать как случайный процесс и говорить о своеобразном рассеянии частиц вблизи особой точки; при этом вероятности попадания в области I и II (W_I и W_{II}) имеют вполне определенные значения.

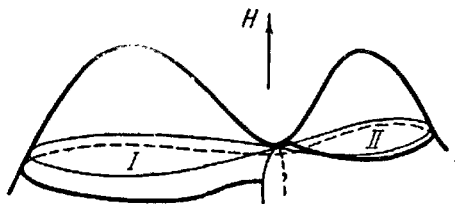


Рис. 20. Движение электрона в неоднородном магнитном поле вблизи седловой точки изоэнергетической поверхности (расщепление «токового лепестка»).

Для определения этих вероятностей рассмотрим классический ансамбль частиц, распределенных по некоторому прицельному параметру, выбор которого будет определен ниже. Каждая частица на последнем витке перед попаданием в области I и II пересекает главную линию кривизны, проходящую через точку F при некотором значении $p_H(0)$. Совершив полный оборот вокруг одной из петель «восьмерки», частица снова оказывается в окрестности точки самопересечения. В зависимости от знака разности $p_H(t) - p_H^k$ в этот момент времени, частица попадает в область I или II , при этом величина $p_H(t) - p_H^k$ однозначно определяется значением $p_H(0)$ в начале оборота. Из сказанного видно, что величину $p_H(0)$ удобно взять в качестве прицельного параметра. Областям I и II соответствуют интервалы δ_I и δ_{II} значений $p_H(0)$, определяющих попадание в эти области. Вероятности рассеяния W_I и W_{II} , т. е. относительные числа частиц, попадающих соответственно в области I и II , пропорциональны

потокам частиц через δ_I и δ_{II} . Для достаточно плавной функции распределения эти потоки в первом приближении по неоднородности пропорциональны величинам самих элементов.

Интервалы δ_I и δ_{II} определяются с помощью соотношения

$$p_H(t) = p_H(0) + \int_0^t \dot{p}_H dt'.$$

Отсюда получим, что

$$\delta_I = \int_0^{T_1} \dot{p}_H dt', \quad \delta_{II} = \int_{T_1}^{T_2} \dot{p}_H dt' \quad (5.11)$$

(здесь T_1 — время движения вокруг первой петли «восьмерки», T_2 — время движения вокруг всей «восьмерки»).

Основной вклад в изменение p_{II} за время оборота вокруг восьмерки дают участки траектории, далекие от особой точки. Это объясняется тем, что в рассматриваемом случае в самой особой точке $\dot{p}_H = 0$.

Используя уравнение движения «токового лепестка», можно показать, что из выражений (5.11) следует [15]:

$$W_I/W_{II} = \delta_I/\delta_{II} = S_I/S_{II}, \quad (5.12)$$

где S_I и S_{II} — площади петель «восьмерки». Из равенств (5.12) имеем

$$W_I = \frac{S_I}{S_I + S_{II}}; \quad W_{II} = \frac{S_{II}}{S_I + S_{II}}.$$

В общем случае существует несколько типов переходов от одного режима к другому, причем возможны переходы с замкнутой траектории на открытую (периодическую и аperiodическую) и с открытой на замкнутую. При движении в произвольном слабо неоднородном и медленно меняющемся во времени электромагнитном поле вывод вероятностей того или иного режима несколько сложнее рассмотренного выше частного случая. В работе [15] из общей формулы получены компактные выражения для соответствующих вероятностей в наиболее интересных частных случаях. Так, например, при движении в слабом электрическом поле, параллельном постоянному и однородному магнитному полю,

$$\frac{W_I}{W_{II}} = \left(\frac{dS_I/dp_H}{dS_{II}/dp_H} \right)_{p_H = p_H^k} \quad (5.13)$$

§ 6. Столкновения квазичастиц. Рассеяние

В предыдущих параграфах мы рассмотрели классическое движение электрона проводимости в электрическом и магнитном полях. Поля при этом предполагались такими, чтобы характерные размеры траектории квазичастиц были значительно больше атомных размеров: это и позволило говорить об определенной траектории электрона проводимости. Но такими движениями не исчерпываются все возможные движения электронов проводимости. В результате взаимодействия с различного рода неоднородностями кристалла, размеры которых порядка размеров ячейки a , электрон резко (на расстояниях порядка a) изменяет свое состояние: меняются его импульс и энергия. В таких случаях говорят о рассеянии, обусловленном столкновениями электрона с локальными нарушениями периодичности кристалла. Так как длина волны де Бройля электрона проводимости порядка межатомного расстояния, то задача о рассеянии электрона на локальной неоднородности кристалла носит существенно квантовомеханический характер. Однако некоторые важные выводы о рассеянии электрона можно получить, используя только законы сохранения. Вопрос об эффективном поперечнике рассеяния не может быть решен в общем случае: сечение существенно зависит от структуры локальной неоднородности, т. е. от вида энергии взаимодействия электрона с неоднородностью.

Даже в механике классической частицы эффективное сечение рассеяния вычисляется до конца только в простейшем случае поля с центральной симметрией. Здесь же анизотропия кристалла делает эту задачу значительно более сложной *).

Как правило, локальные неоднородности кристалла — это атомы примеси (в частном случае изотопической), либо нарушения типа вакансий или дислокаций. Их подвижность значительно меньше подвижности электронов (они тяжелы). Поэтому рассеяние на таких неоднородностях надо рассматривать как рассеяние на силовом центре. При этом, если столкновение упругое (а мы здесь будем рассматривать только такие столкновения), то квазиимпульс электрона изменяется, а энергия сохраняется. Сложный закон дисперсии приводит к своеобразному явлению: угол рассеяния определяется направлением скорости (а не направлением импульса) электрона после столкновения. При этом, если изоэнергетическая поверхность в пространстве импульсов выпуклая, каждому значению скорости соответствует одно значение импульса (способ его нахождения

*) Квантовомеханическая задача о рассеянии частиц с произвольным законом дисперсии рассматривается в § 9.

ясен из рис. 21); если же геометрия изоэнергетической поверхности более сложна, то обязательно существуют такие направления, рассеяние в которых отличается необычным для свободных частиц свойством — одному и тому же значению угла рассеяния отвечают несколько значений импульса рассеянной частицы (рис. 22). Каков будет импульс рассеянного электрона в действительности, можно сказать, только проанализировав

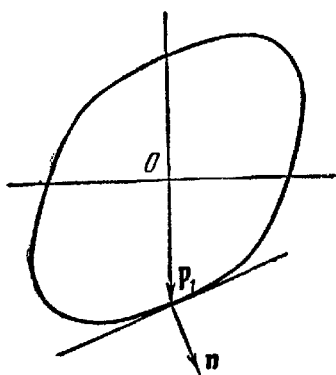


Рис. 21. Определение импульса электрона, рассеянного в направлении n .

Точка p_1 — точка касания опорной направляющей плоскости с изоэнергетической поверхностью $\varepsilon = \varepsilon(p)$.

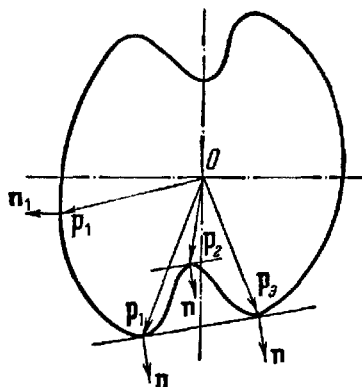


Рис. 22. Определение импульсов электронов, рассеявшихся в направлениях n и n_1 .

Видно, что усложнение геометрии изоэнергетической поверхности приводит к появлению в некоторых направлениях нескольких значений p , отвечающих данному направлению рассеяния.

сам акт рассеяния, т. е. исследовав характер движения электрона в поле примеси. Подчеркнем, что этот анализ дополнительно усложняется периодическим характером закона дисперсии, так как в результате упругого рассеяния электрон может перейти на другую полость изоэнергетической поверхности, расположенную в одной из соседних ячеек импульсного пространства*). Конечно, при классическом (точнее, квазиклассическом) подходе, задав точные начальные условия, можно точно определить, в какое конечное состояние перейдет электрон. В большинстве задач такая постановка не нужна и речь должна идти о вычислении эффективного поперечника рассеяния. Однако в ряде физических задач (ионный перенос, электромеханические эффекты и т. п.) возникает вопрос именно об изменении квазиимпульса при единичном акте рассеяния [17].

*) На квантовомеханическом языке это означает, что рассеяние сопровождается «процессом переброса» (см. ниже).

Если рассеяние происходит на малые углы, то, не делая никаких специальных предположений о характере закона дисперсии, нетрудно найти аналитическое выражение для изменения импульса в процессе рассеяния [17]. При этом без большой ошибки расчет можно вести с помощью классических уравнений механики, так как рассеяние на малые углы происходит при достаточно больших значениях прицельного параметра ρ ($\rho \gg a$), когда условия квазиклассичности для электрона проводимости выполнены (см. введение). При расчете мы сделаем одно упрощающее предположение: силу, действующую на электрон, будем считать центральной. Тогда изменение квазиимпульса в акте рассеяния можно записать следующим образом:

$$\mathbf{p}' - \mathbf{p} = n\delta_{\parallel} + \mathbf{v}\delta_{\perp}, \quad (6.1)$$

где δ_{\parallel} и δ_{\perp} — изменение импульса вдоль направления скорости $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ и в перпендикулярном направлении $\mathbf{v} = \rho/\rho$. Так как в упругом столкновении энергия сохраняется, то имеем

$$\varepsilon(\mathbf{p} + n\delta_{\parallel} + \mathbf{v}\delta_{\perp}) = \varepsilon(\mathbf{p}). \quad (6.2)$$

Разлагая ε в ряд по δ_{\parallel} и δ_{\perp} , с точностью до членов второго порядка получаем

$$0 = \mathbf{v}(n\delta_{\parallel} + \mathbf{v}\delta_{\perp}) + \frac{1}{2}(m^{-1})_{ik}(n_i\delta_{\parallel} + v_i\delta_{\perp})(n_k\delta_{\parallel} + v_k\delta_{\perp}), \quad (6.3)$$

где $(m^{-1})_{ik} = \partial^2\varepsilon/\partial p_i\partial p_k$ — тензор обратных эффективных масс (§ 4). Скалярное произведение векторов \mathbf{v} и \mathbf{v} равно нулю, а $\mathbf{v}\mathbf{n} = v$; члены, содержащие δ_{\parallel}^2 и $\delta_{\parallel}\delta_{\perp}$, можно опустить, так как они малы по сравнению с линейным по δ_{\parallel} членом; поэтому

$$v\delta_{\perp} = -\frac{1}{2}(m^{-1})_{ik}v_iv_k\delta_{\perp}^2. \quad (6.4)$$

При рассмотрении потока электронов чаще всего нужно знать среднее изменение импульса. Усредняя выражение (6.4) по азимутальному углу и замечая, что $v_iv_k = 1/2\delta_{ik}$ ($i, k = x, y$; ось z — вдоль траектории электрона), получаем

$$\delta_{\perp} = -\frac{1}{4v}(m_{xx}^{-1} + m_{yy}^{-1})\delta_{\perp}^2(\rho). \quad (6.5)$$

Заметим, что $\delta_{\parallel}v$ есть изменение среднего импульса единичного потока электронов с прицельным параметром ρ в единицу времени. Величину δ_{\perp} можно определить непосредственно из уравнений движения:

$$\delta_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\rho} dt = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\rho} dz \quad (6.6)$$

или с той же точностью

$$\delta_{\perp} = -\frac{\rho}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{r}; \quad r = \sqrt{z^2 + \rho^2}. \quad (6.7)$$

Другой предельный случай, допускающий сравнительно простой анализ, это лобовое столкновение электрона с примесью. Даже в этом простейшем случае удается показать, что электрон

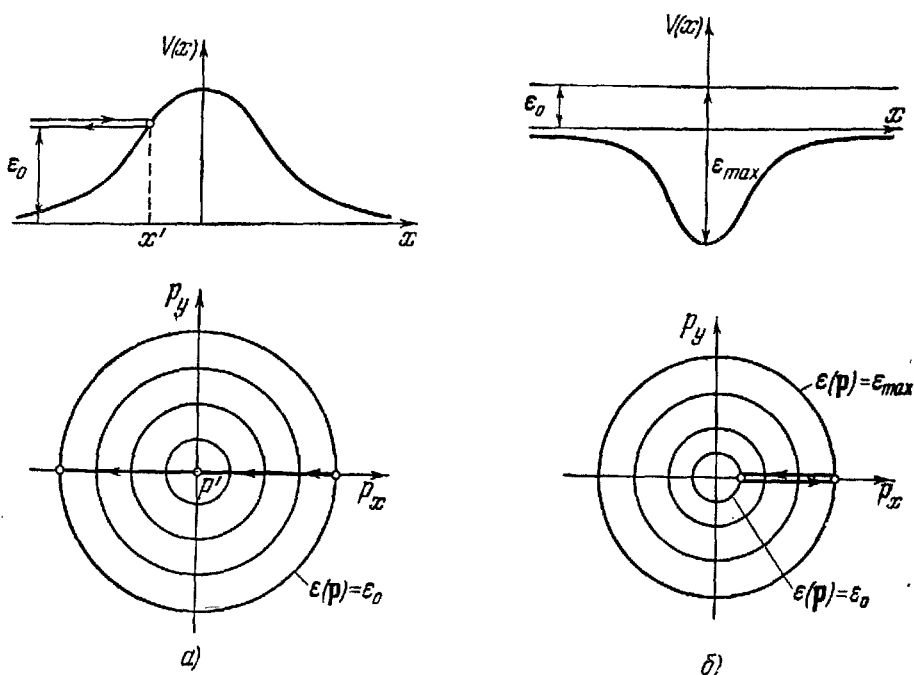


Рис. 23. Рассеяние электрона с квадратичным изотропным законом дисперсии от а) отталкивающего потенциала, б) от притягивающего потенциала. ϵ_0 — кинетическая энергия электрона на бесконечности; x' — точка остановки в x -пространстве; ей соответствует точка p' в импульсном пространстве; электрон перешел на противоположную сторону изоэнергетической поверхности (а). Электрон возвратился в ту же точку p -пространства (б).

в процессе рассеяния может перейти с одной полости изоэнергетической поверхности на другую. Если электрон обладает законом дисперсии $\epsilon = p^2/2m$ (электрон в свободном пространстве), то в результате лобового столкновения может произойти одно из двух: если у него есть точка поворота в координатном пространстве, он перейдет в противоположную точку на изоэнергетической сфере (рис. 23, а); если точки поворота нет, электрон возвратится в ту же точку на изоэнергетической сфере, с которой начался процесс рассеяния (рис. 23, б). Для электрона, закон дисперсии которого — периодическая функция, ситуа-

дия усложняется, так как электрон может отражаться не только от точки, в которой энергия имеет минимум, но и от точки, в которой энергия достигает максимума, так как в этой точке скорость также обращается в нуль. На рис. 24 изображено несколько случаев движения электрона в поле примеси. Для наглядности взят весьма простой закон дисперсии. Анализируя движение в импульсном пространстве, надо иметь в виду, что в тех случаях, когда есть точка остановки (см. рис. 23, а), на электрон все время действует сила одного знака (точка остановки в пространстве импульсов отсутствует), а в тех случаях, когда точки остановки нет (см. рис. 23, б), сила меняет знак, следовательно, \dot{p} обращается в нуль, т. е. имеется точка остановки в p -пространстве. Как видно из рис. 24, весьма часты случаи ухода частицы в процессе рассеяния в соседнюю ячейку обратной решетки.

Кроме столкновений с локальными неоднородностями, электроны проводимости в металле могут также «сталкиваться» с другими квазичастицами (с электронами же, с фононами, со спиновыми волнами и др.). При таких столкновениях должны, естественно, выполняться законы сохранения квазиимпульса и энергии:

$$p_i = p_e + 2\pi\hbar\mathbf{b}, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_e,$$

где \mathbf{b} — произвольный вектор обратной решетки, p_i и p_e — сумма квазиимпульсов частиц до и после столкновения соответственно (например, для столкновения двух электронов $p_i = p_{i1} + p_{i2}$) и ε_i , ε_e — энергии частиц до и после столкновения.

Среди всевозможных процессов столкновений принято различать нормальные процессы ($\mathbf{b} = 0$) и процессы переброса ($\mathbf{b} \neq 0$). Так как выбор основной ячейки обратной решетки условен (см. стр. 13 и 39), то и разделение носит условный характер. Когда речь идет о единичном акте столкновения, то, по-видимому, всегда можно соответствующим выбором ячейки «ликвидировать» переброс; однако на практике приходится рассматривать множество различных столкновений (например, столкновение данного электрона со всеми фононами и т. п.). Конечно, при этом все процессы столкновений необходимо рассматривать при зафиксированном положении обратной решетки. Принято выбирать ячейку обратной решетки так, чтобы нормальные процессы имели максимальную вероятность. Периодичность волновых функций в p -пространстве обеспечивает однозначность при расчете всех величин, характеризующих наблюдаемые явления (коэффициента электропроводности, теплопроводности и т. д.).

Числа бозонов до и после «столкновения» могут быть различными: возможны рождение и гибель фононов, спиновых

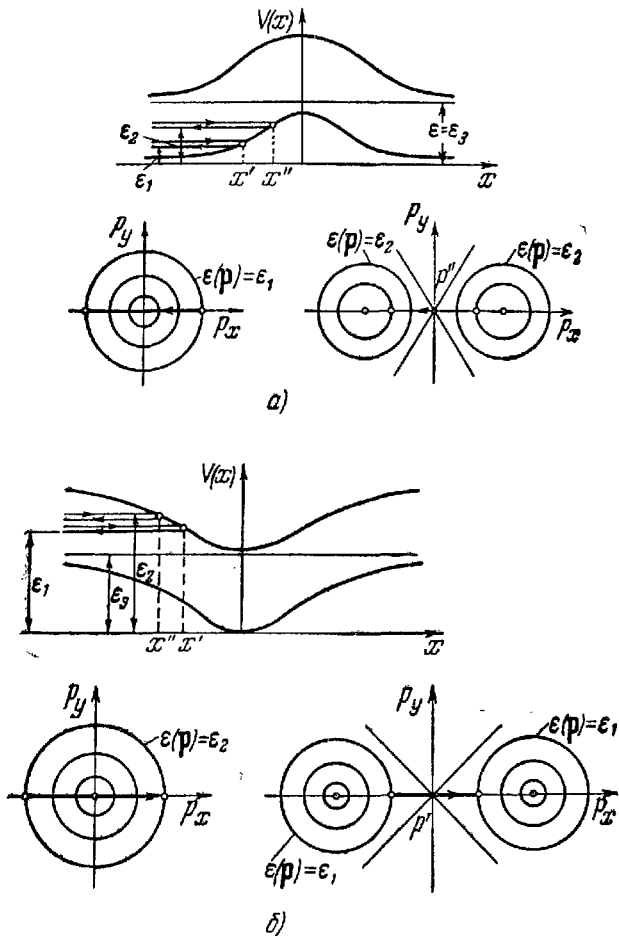


Рис. 24. Рассеяние электрона с законом дисперсии $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon$ в поле а) отталкивающего потенциала, б) в поле притягивающего потенциала (рассеяние от потолка зоны).

Если энергия электрона вдали от примеси близка к минимальной ($\epsilon = \epsilon_1$), то электрон остается внутри одной ячейки обратной решетки; если энергия близка к максимальной ($\epsilon = \epsilon_2$), то электрон переходит в соседнюю ячейку обратной решетки; если энергия такова, что нет точки остановки ($\epsilon = \epsilon_3$), то электрон, естественно, всегда возвращается в ту точку \mathbf{p} -пространства, откуда начался процесс (а). Если энергия — вблизи минимума ($\epsilon = \epsilon_1$), то электрон уходит в другую ячейку; если энергия — вблизи максимума ($\epsilon = \epsilon_2$), электрон остается в своей ячейке. При достаточно малых энергиях (например, $\epsilon = \epsilon_3$) у электрона нет точки остановки в x -пространстве (б) (см. рис. 23, б).

волн и других квазичастиц. Число электронов в таких взаимодействиях сохраняется, если в металле нет фермионов другого знака («дырок»), которые играют роль античастиц для электронов. Если в металле имеются или могут возникнуть «дырки», то электроны и «дырки» гибнут и рождаются парами, так что разность между числами электронов и «дырок» остается постоянной.

Так как понятие «дырка» в электронной теории металлов не вполне однозначно, то последнее высказывание требует уточнения. В § 4 мы видели, что электроны с энергией, близкой к максимальной в данной зоне, обладают отрицательной эффективной массой. Эти электроны в ряде случаев ведут себя как частицы с положительным зарядом (например, в постоянном магнитном поле вращаются в направлении, противоположном правилу буравчика, замедляются электрическим полем, ускоряющим свободные электроны, и т. п.). Как правило, в окончательные формулы (для электропроводности, для константы Холла и др.) входит не число электронов с отрицательной эффективной массой, а число свободных состояний с отрицательной эффективной массой. Последнее и принято называть числом «дырок». При этом, однако, все рассмотрение вообще можно вести, не оговаривая существования «дырок», достаточно последовательно учитывать характер закона дисперсии вблизи максимума энергии*). Если в результате столкновения электрон из состояния с положительной эффективной массой перейдет в состояние с отрицательной эффективной массой, то это можно, конечно, трактовать как аннигиляцию электрона и «дырки», но можно (и, с нашей точки зрения, даже удобнее) не вводить новых понятий, а при дальнейшем расчете, если необходимо, учесть то обстоятельство, что в конечном состоянии электрон обладает отрицательной эффективной массой.

Понятие «дырка» весьма часто употребляется еще и в другом смысле. Можно так построить теорию, чтобы весь расчет вести от основного состояния металла. Как известно, при абсолютном нуле температуры все состояния с энергией ниже некоторой граничной заняты, а остальные свободны. Это состояние можно принять за «вакуум» относительно элементарных возбуждений. Тогда всякое возбуждение электронной системы связано с одновременным появлением занятых состояний с энергией выше граничной и с освобождением состояний с энергией ниже граничной. Естественно, что такие возбуждения могут появляться только парами. Частицы, энергия которых больше

*) См. по этому поводу § 27, в котором именно таким образом строится теория гальваномагнитных явлений в металлах со сложным законом дисперсии электронов проводимости.

границной, принято называть электронами, а освободившиеся состояния — «дырками». При такой трактовке, конечно, нельзя избежать процессов аннигиляции электронов и «дырок». Хотя такое описание обладает рядом преимуществ (в частности, нет необходимости заботиться о законе сохранения числа частиц — он выполняется автоматически) и весьма принято, мы здесь им пользоваться не будем. Таким образом, если в настоящем издании встретится слово «дырка», то оно означает свободное от электрона состояние с отрицательной эффективной массой.

§ 7. Квазиклассические уровни энергии

Изучение движения электронов со сложным законом дисперсии показывает, что в ряде случаев электрон совершает финитное движение. Это, естественно, должно привести к тому, что часть энергии электрона, связанная с этим движением, квантуется. Когда выполнены условия квазиклассического приближения (а это наиболее важный случай, как показано во введении), квантованные уровни энергии могут быть вычислены без построения последовательной квантовой механики электрона проводимости.

Самым важным для теории металлов случаем квантования энергии электрона, несомненно, является движение электрона в магнитном поле. Условия квазиклассического приближения для этого случая обсуждались во введении, где было показано, что возникающее при этом ограничение на магнитное поле по сути дела несущественно: магнитное поле H должно быть меньше атомного магнитного поля $H_a \approx 10^8 \div 10^9$ э (см. формулу (1.9)). Надо, однако, иметь в виду: эта оценка получена в предположении, что энергия электрона равна фермиевской, а последняя порядка 10^{-12} — 10^{-11} эрг. У ряда металлов (например, у Вi) число электронов значительно меньше обычного (у Вi плотность электронов порядка 10^{-5} на одну ячейку кристаллической решетки), энергия Ферми соответственно также занижена и условие квазиклассичности может нарушаться в достижимых полях ($H \approx 10^4 \div 10^5$ э). Поэтому полученные ниже формулы надо применять с осторожностью, особенно когда вычисляются характеристики металлов типа Вi.

Для определения квазиклассических уровней энергии можно воспользоваться правилами квантования Бора

$$\frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_\perp dr = n\hbar, \quad (7.1)$$

где n — целые числа.

Так как адиабатический инвариант $\oint \mathbf{p}_\perp d\mathbf{r}$ уже вычислен в § 4, то мы можем воспользоваться формулой (4.18):

$$S(\varepsilon, p_z) = \frac{2\pi\hbar eH}{c} n. \quad (7.2)$$

Выражение (7.2) надо рассматривать как уравнение относительно энергии ε . Решая его, можно определить квантованные уровни энергии $\varepsilon_n(p_z)$. Иногда по условиям задачи энергия ε задана. Тогда уравнение (7.2) определяет квантованные значения импульса $p_{zn}(\varepsilon)$. Конкретное нахождение уровней энергии возможно, конечно, только в тех случаях, когда известен закон дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$, позволяющий вычислить зависимость площади сечения $S(\varepsilon, p_z)$ от энергии и проекции импульса на магнитное поле. Однако во многих задачах (см. например, § 15) оказывается достаточно знать формулу (7.2) для вычисления термодинамических и кинетических характеристик металла.

Формула (7.2) применима при $n \gg 1$, и многие вопросы электронной теории металлов могут быть решены без учета следующих членов в выражении для квазиклассических уровней энергии. Однако в некоторых случаях первая поправка к квазиклассическим уровням энергии оказывается существенной. Как известно, эта поправка может быть вычислена в рамках квазиклассического приближения. Обычно учет следующих членов разложения соответствует тому, что в формуле (7.1) надо заменить n на $n + 1/2$. Анализ показывает, что в наиболее распространенных случаях эта замена справедлива и для электрона с произвольным законом дисперсии. Отсюда

$$S(\varepsilon, p_z) = \frac{2\pi\hbar eH}{c} (n + 1/2). \quad (7.3)$$

Но в этом же приближении необходимо учесть квантование энергии, обусловленное спином электрона. Если спин-орбитальная связь отсутствует, то учет спинового расщепления весьма прост: каждый уровень расщепляется на два, причем величина расщепления равна $\frac{e\hbar}{m_0 c} H$, где m_0 — масса свободного электрона *).

*) При наличии спин-орбитальной связи величина расщепления уровней существенно зависит от ε и p_z , а условие квантования можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{c}{e\hbar H} S(\varepsilon, p_z) \pm \frac{\pi}{2} g(\varepsilon, p_z) = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

где функция $g(\varepsilon, p_z)$ играет роль g -фактора и равна 2 для свободного электрона

Таким образом,

$$\varepsilon_{n\sigma}(p_z) = \varepsilon_n(p_z) + \sigma \frac{e\hbar}{2m_0c} H \quad (\sigma = \pm 1), \quad (7.4)$$

где $\varepsilon_n(p_z)$ — корни уравнения (7.3).

Если $\varepsilon = p_z^2/2m_0$, то $S(\varepsilon, p_z) = \pi(2m_0\varepsilon - p_z^2)$, и мы приходим к известной формуле Ландау (1930):

$$\varepsilon_{n\sigma}(p_z) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_H + \sigma\mu_0 H + \frac{p_z^2}{2m_0}, \quad (7.5)$$

где $\omega_H = eH/m_0c$; $\mu_0 = e\hbar/2m_0c$ — магнетон Бора.

Если в закон дисперсии ввести эффективную массу, т. е. считать, что $\varepsilon = p^2/2m^*$, то в формуле (7.5) m^* войдет в первое и в третье слагаемые. Подчеркнем, что при $m^* \neq m_0$ отсутствует известное двукратное вырождение, обусловленное совпадением значений энергии в состоянии с $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$, отличающимся на единицу по квантовому числу n .

Если закон дисперсии квадратичный, но анизотропный ($\varepsilon = p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 + p_3^2/2m_3$), то формула для квантованных уровней энергии несколько усложняется за счет различия продольных и поперечных эффективных масс:

$$\varepsilon_{n\sigma}(p_z) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_H + \sigma\mu_0 H + \frac{p_z^2}{2m_{\parallel}}, \quad \hbar\omega_H = \frac{eH}{m_{\perp}c}, \quad (7.6)$$

а m_{\perp} и m_{\parallel} следующим образом зависят от направления магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} m_{\perp} &= \left(\frac{\alpha_1^2}{m_2 m_3} + \frac{\alpha_2^2}{m_1 m_3} + \frac{\alpha_3^2}{m_1 m_2} \right)^{-1/2}, \\ m_{\parallel} &= m_1 \alpha_1^2 + m_2 \alpha_2^2 + m_3 \alpha_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

где α_j — направляющие косинусы магнитного поля относительно главных осей тензора эффективных масс $\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 = 1\right)$.

Используя уравнение (7.3), можно вычислить расстояния между уровнями энергии $\Delta\varepsilon$. Так как $n \gg 1$, то $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$ (условие квазиклассичности) и из (7.3) следует

$$\Delta\varepsilon = \frac{2\pi\hbar eH}{c \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}} = \frac{\hbar eH}{m^*(\varepsilon, p_z)c},$$

так как, согласно определению, $m^* = (1/2\pi) \partial S / \partial \varepsilon$ (см. стр. 49). Другими словами, как и следовало ожидать, расстояние между

трона, когда $S = \pi(2m_0\varepsilon - p_z^2)$. Функция $g(\varepsilon, p_z)$ может быть вычислена в ряде конкретных случаев (см. работу [18], где соответствующее вычисление проведено для V_1).

уровнями равно классической частоте обращения ω_H , умноженной на постоянную Планка \hbar :

$$\Delta \epsilon = \hbar \omega_H. \quad (7.8)$$

Последняя формула, однако, не означает, что уровни энергии эквидистантны. Они только квазиэквидистантны или локально эквидистантны. Эффективная масса зависит от энергии ϵ и от проекции импульса на магнитное поле p_z . Это приводит к сложной зависимости энергии от квантового числа n . Последняя крайне существенна вблизи тех значений энергии или импульса, при которых характер сечения существенно изменяется. Выясним, например, зависимость уровней энергии от квантового числа n вблизи траекторий с самопересечением. Как было показано ранее, время обращения по такой траектории логарифмически обращается в бесконечность, так как точка пересечения является точкой остановки. Мы для определенности будем считать, что энергия зафиксирована, и искать зависимость от n квантованных значений проекции импульса на магнитное поле. Особой траектории (жирная линия) соответствует значение $p_z \doteq p_{z\hbar}$ (рис. 25).

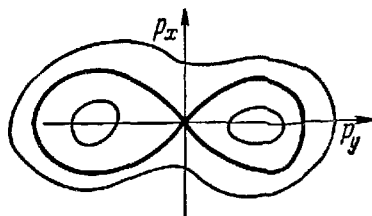


Рис. 25. Траектории электрона в магнитном поле вблизи точки самопересечения.

Квазиклассические уровни энергии с достаточной степенью точности могут быть получены из обычного условия квантования площади. При отыскании уровней энергии, однако, надо учесть, что в точке $p_z = p_{z\hbar}$ площадь S имеет особенность типа $\Delta p_z \ln \Delta p_z$, где $\Delta p_z = p_z - p_{z\hbar}$. С одной стороны от плоскости $p_z = p_{z\hbar}$ имеется две системы квазиэквидистантных уровней, определяемых уравнениями

$$S_1(\epsilon, p_z) = \frac{2\pi\hbar eH}{c} n_1, \quad S_2(\epsilon, p_z) = \frac{2\pi\hbar eH}{c} n_2, \quad (7.9)$$

с другой стороны — одна система, определяемая уравнением

$$S(\epsilon, p_z) = \frac{2\pi\hbar eH}{c} n. \quad (7.10)$$

«Перестройка» уровней происходит вблизи $p_z = p_{z\hbar}$ и описывается системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} S_{1k} + p_0 \Delta p_z \ln \left| \frac{\Delta p_z}{p_0} \right| &= \frac{2\pi\hbar eH}{c} n_1, \\ S_{2k} + p_0 \Delta p_z \ln \left| \frac{\Delta p_z}{p_0} \right| &= \frac{2\pi\hbar eH}{c} n_2, \\ S_k + p_0 \Delta p_z \ln \left| \frac{\Delta p_z}{p_0} \right| &= \frac{2\pi\hbar eH}{c} n, \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

где $p_0 = 2v_z(p_{zk}) \sqrt{m_1 m_2}$. Обозначая

$$\frac{cS_{1k}}{2\pi\hbar eH} = n_{1k}, \quad \frac{cS_{2k}}{2\pi\hbar eH} = n_{2k}, \quad \frac{cS_k}{2\pi\hbar eH} = n_k,$$

из уравнений (7.11) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_z &= \frac{2\pi\hbar eH}{cp_0} \frac{n_1 - n_{1k}}{\ln \frac{2\pi\hbar eH}{cp_0} (n_1 - n_{1k})}, \\ \Delta p_z &= \frac{2\pi\hbar eH}{cp_0} \frac{n_2 - n_{2k}}{\ln \frac{2\pi\hbar eH}{cp_0} (n_2 - n_{2k})}, \\ \Delta p_z &= \frac{2\pi\hbar eH}{cp_0} \frac{n - n_k}{\ln \frac{2\pi\hbar eH}{cp_0} (n - n_k)}. \end{aligned} \right\} (7.12)$$

Интересно отметить, что вблизи p_{zk} расстояния между уровнями существенно неэквидистантны, изменение топологии сечения приводит к неаналитической зависимости энергии (или p_z при фиксированной энергии) от квантового числа n . Полученный здесь результат вытекает, как мы видели, из квазиклассических условий квантования, даже не учитывающих члены порядка $1/n$ по сравнению с единицей (аномалии, обусловленные изменением топологии сечения, проявляются в членах порядка $\ln n/n \gg 1/n$). Уравнения (7.11) применимы при $n_1, n_2, n \gg 1$, а решения (7.12), конечно, только при $n_1, n_2, n \gg |n - n_{1k}|, |n - n_{2k}|, |n - n_k| \gg 1$. Строгий квантовомеханический анализ движения электронов по восьмерочным траекториям в квазиклассическом приближении ([19] и значительно более полно в [20]) приводит к аналогичным результатам. Уточнение значения квазиклассических уровней (типа учета $1/2$ в условиях квантования Бора) показывает, что в данном случае имеет место любопытная осцилляторная зависимость расстояния между уровнями от магнитного поля [20], необходимая для вычисления осциллирующих частей различных термодинамических величин (§ 15).

Последние формулы демонстрируют существенное различие между структурой спектра в магнитном поле свободного электрона (с законом дисперсии $p^2/2m$) и электрона со сложным законом дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$. Особенно отчетливо это различие проявляется в связи с существованием открытых изоэнергетических поверхностей и открытых сечений — квантуется движение отнюдь не всех электронов в металле, а только тех, которые совершают финитное движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. При этом появление или отсутствие дискретных уровней энергии (при фиксированном значении p_z) определяется не только видом изоэнергетической поверхности, но и направлением магнитного поля, а при фиксированном поле — ве-

личной p_z . Переход от замкнутых траекторий к открытым подробно рассмотрен в § 4. Из проведенного там рассмотрения ясно, что при переходе от обычных замкнутых сечений к открытым структура энергетического спектра очень сложна. На общую тенденцию — уменьшение расстояний между уровнями, связанное с увеличением периода обращения, — накладываются логарифмические особенности, обусловленные приближением к седловым точкам (см. рис. 17).

Полученные здесь формулы для энергии электрона в магнитном поле показывают, что бесконечнократное вырождение, имеющее место в случае свободного электрона (независимость уровней энергии от сохраняющейся компоненты импульса P_x), в случае электрона с произвольным законом дисперсии в квазиклассическом приближении сохраняется. Однако надо иметь в виду следующее: вычисленные в квазиклассическом приближении уровни энергии свободного электрона совпадают с точными. Это свойство, обусловленное строгой эквидистантностью энергетических уровней осциллятора, отсутствует у электронов со сложным законом дисперсии. Поэтому, в частности, учет более высоких квантовых поправок [21] снимает вырождение по P_x , что приводит к размытию уровней энергии (7.3). Обычно величина этого размытия очень мала $\Delta\epsilon/\epsilon \approx (H/H_a)^2$ [см. (1.9)]. Зависимость ϵ от P_x , а следовательно, и размытие уровней энергии, связаны с тем, что P_x определяет положение траектории электрона в пространстве (в случае свободного электрона cP_x/eH — центр орбиты на плоскости (x, y) , по которой вращается электрон). Если в свободном пространстве (для свободного электрона) все точки пространства эквивалентны (магнитное поле предполагается однородным), то в периодической структуре, которой является кристалл, эта однородность, естественно, отсутствует.

В тех случаях, когда траектория электрона в импульсном пространстве в магнитном поле открытая, как мы уже говорили, квазиклассическое рассмотрение не приводит к квантованию энергии. Однако более точное рассмотрение [21] показывает, что благодаря периодической зависимости энергии от квазиимпульса возникают своеобразные разрывы в непрерывном спектре электрона. Места этих разрывов определяются уравнением, напомним условия квантования (7.2):

$$S(\epsilon, p_z) = \frac{2\pi\hbar eH}{c} n \quad (n \text{ — целые числа}). \quad (7.13)$$

Однако здесь S — часть описываемой электроном площади, проходящей на одну ячейку импульсного пространства. Относительная ширина разрыва при не слишком узких «перешейках» экспоненциально мала ($\Delta\epsilon/\epsilon \approx e^{-\beta H_a/H}$; $\beta \sim 1$).

Весьма своеобразный характер имеют уровни вблизи орбит, проходящих через всю кристаллическую решетку. При этом возникает система расщепляющихся уровней, подуровней и т. д.

Кроме отмеченного выше механизма уширения уровней энергии (зависимость ϵ от P_x) имеется еще один, связанный с переходами электронов с одной классической орбиты на другую. Этому явлению, получившему специальное название — магнитный пробой, будет посвящен специальный параграф (§ 10)*. Пока отметим только, что обычно ширина размытия (уровней, обусловленная переходами, экспоненциально мала $\Delta\epsilon/\epsilon \sim e^{-\beta'H a/H}$; $\beta' \sim 1$) и размытие не играет никакой роли. Однако в случае открытых изоэнергетических поверхностей при переходе от замкнутых сечений к открытым эффект уширения за счет переходов крайне существен: за счет этого эффекта ширина области размытия постепенно увеличивается и спектр из дискретного превращается в непрерывный.

В § 4 было показано, что движение в скрещенных электрическом и магнитном полях можно трактовать как движение частицы с законом дисперсии

$$\epsilon^*(p) = \epsilon(p) - V_{EH} p \quad (7.14)$$

только в магнитном поле, причем, если траектория в импульсном пространстве замкнута, частица совершает финитное движение вдоль оси y (ось z по-прежнему выбрана вдоль магнитного поля, ось x — вдоль электрического). Это позволяет ранее полученные результаты перенести на случай движения частицы в скрещенных полях. Действительно, поступая совершенно аналогично предыдущему, мы получим условия квантования в виде

$$S^*(\epsilon^*, p_z) = \frac{2\pi |e| \hbar H}{c} n, \quad (7.15)$$

где S^* — площадь сечения поверхности $\epsilon^*(p) = \text{const}$ плоскостью $p_z = \text{const}$. Расстояние между уровнями $\Delta\epsilon$, как легко убедиться непосредственно, равно частоте ω_{EH} , умноженной на постоянную Планка \hbar , т. е.

$$\Delta\epsilon = \hbar \omega_{EH} = \frac{2\pi |e| \hbar H}{c} \frac{\partial S^*}{\partial \epsilon^*}. \quad (7.16)$$

Напомним, что частота ω_{EH} в случае произвольного закона дисперсии зависит от величины приложенного электрического поля, причем эта зависимость исчезает для квадратичного закона дисперсии. Следовательно, и расстояния между дискретными уровнями энергии электрона в скрещенных полях должны за-

*) Там, в частности, будет рассмотрен переход между различными зонами, индуцированный магнитным полем.

висеть от величины электрического поля (аналог эффекта Штарка).

Если не учитывать переходы между зонами, то электрон проводимости в однородном электрическом поле совершает финитное движение (§ 4). Этому финитному движению также должны соответствовать квантовые уровни энергии, расстояния между которыми легко получить, воспользовавшись принципом соответствия

$$\Delta\varepsilon = \hbar\omega_E.$$

По-видимому, нет возможности наблюдать эффекты, которые могли бы иметь место в результате этого квантования. Даже если считать, что переходы между зонами крайне маловероятны, то электрону не удастся совершить полного колебания из-за столкновений с нерегулярностями решетки.

Кристаллическая решетка, в которой движется электрон, всегда ограничена размерами образца. Однако обычно размеры эти столь велики, что их можно считать бесконечными. Все же могут встретиться случаи, когда необходимо учитывать конечность размеров металла (например, при рассмотрении свойств тонких пленок). Поверхность металла всегда несколько деформирована, т. е. вблизи нее обязательно имеются нарушения периодичности структуры. Изучение поведения электрона вблизи поверхности — сложная задача, не всегда даже ясно сформулированная.

Часто без достаточно строгого обоснования границу образца считают бесконечно высоким потенциальным барьером. Другими словами, электрон в металле рассматривают как частицу в потенциальном ящике.

В последние годы имеется ряд экспериментов, которые трактуют как доказательство зеркального характера отражения электронов от внутренней границы металла [22]. По-видимому, зеркальное отражение имеет место либо тогда, когда длина волны де Бройля электрона велика по сравнению с межатомным расстоянием (Ві и другие полуметаллы), либо для электронов, движущихся под малым углом к поверхности металла, т. е. для почти скользящих электронов. У этих электронов проекция импульса, определяющая характерную длину волны де Бройля, также мала (см. ниже). Кроме того, как отмечено в работе [23], в металлах типа Ві возможна дополнительная причина зеркальности — искривление зон на расстояниях порядка радиуса Дебая — Хюккеля, который у этих металлов аномально велик (значительно больше постоянной решетки).

Свободный электрон при отражении от бесконечного барьера изменяет на обратную нормальную проекцию импульса (зеркальное отражение). Для электрона со сложным законом

дисперсии характер отражения даже от бесконечного потенциального барьера усложняется. Надо учесть, что при отражении сохраняются энергия и p_{\perp} — проекция импульса на поверхность металла. Рассматривая отражение электрона как процесс уменьшения кинетической энергии, а затем увеличения до первоначального значения, можно найти изменение нормальной проекции импульса при отражении.

Очевидно, z -я проекция импульса до и после столкновения (ось z перпендикулярна границе) удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon(p_{\perp}, p_z) = \varepsilon, \quad (7.17)$$

причем начальное значение импульса $p_z^{(i)}$ определяется естественным условием $v_z^{(i)} > 0$, а конечное $p_z^{(f)}$ — условием $v_z^{(f)} < 0$.

Уравнение (7.17) может иметь больше двух корней. В таком случае все корни могут быть разделены на пары так, чтобы при переходе от $p_z^{(i)}$ к $p_z^{(f)}$ кинетическая энергия все время была меньше начальной (ср. с исследованием рассеяния электрона в поле примеси, приведенным в предыдущем параграфе). Для сферической поверхности Ферми $\Delta p_z = p_z^{(i)} - p_z^{(f)} = 2 \sqrt{2me - p_{\perp}^2}$.

Процедуру квазиклассического квантования, обусловленного конечными размерами образца, можно провести стандартным образом, приравняв адиабатический инвариант I целому числу постоянных Планка. В данном случае

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p_z dz = \frac{1}{2\pi} |p_z^{(i)} - p_z^{(f)}| L = \frac{L |\Delta p_z|}{2\pi},$$

где L — поперечные размеры образца (толщина слоя). Отсюда

$$\Delta p_z = |p_z^{(i)} - p_z^{(f)}| = \frac{2\pi\hbar n}{L} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.18)$$

Это равенство надо рассматривать как уравнение относительно энергии при фиксированном значении p_{\perp} . Решая его, получим

$$\varepsilon = \varepsilon_n(p_{\perp}) \quad (7.19)$$

систему квантованных уровней энергии. Если уравнение (7.17) имеет несколько пар корней, то мы получаем несколько (по числу пар) систем уровней энергии (аналогичная ситуация имеет место при квазиклассическом квантовании в магнитном поле, когда изоэнергетическая поверхность имеет седловую точку; см. формулу (7.12)).

Можно получить компактные уравнения для определения уровней энергии также в том случае, когда на электрон в постоянном и однородном поле, кроме того, действует сила, перпендикулярная магнитному полю. Если, как всегда, считать, что магнитное поле направлено вдоль оси z , то существование силы

учитывается введением потенциального поля $U(y)$. Векторный потенциал удобно выбрать в форме $A_x = -Hy$ и $A_y = A_z = 0$ (см. выражение (4.16)). В этом случае x является циклической координатой, следовательно, импульс P_x сохраняется. Используя условие квантования Бора, можно легко получить уравнение для уровней энергии \mathcal{E} :

$$S(\mathcal{E}, p_z, P_x) = \frac{2\pi\hbar |e|H}{c} n. \quad (7.20)$$

Здесь $S(\mathcal{E}, p_z, P_x)$ — площадь, ограниченная траекторией электрона в пространстве кинематических импульсов. Последняя определяется интегралами движения

$$\varepsilon(p_x, p_y, p_z) + U\left[\frac{c}{eH}(p_x - P_x)\right] = \mathcal{E}, \quad p_z = \text{const}, \quad P_x = \text{const}. \quad (7.21)$$

Уравнения (7.20) и (7.21) определяют зависимость уровней энергии от квантового числа n , компонент импульса p_z и P_x , а также от величины магнитного поля. Конечно, при этом предполагается, что траектория (7.21) — замкнутая кривая.

Обратим внимание на то, что вырождение по P_x отсутствует: из-за поля $U(y)$ различные траектории, отвечающие одинаковым значениям \mathcal{E} и p_z , не эквивалентны. Полученные здесь формулы (7.20) и (7.21) можно использовать для выяснения зависимости уровней энергии электрона в магнитном поле от размеров пластины, параллельной магнитному полю (мы по-прежнему считаем, что отражение от границ пластины зеркальное). Для этого примем, что поле задано следующим образом:

$$U(y) = \begin{cases} 0 & |y| < d, \\ \infty & |y| \geq d. \end{cases} \quad (7.22)$$

Другими словами, объем металла представляем бесконечно глубокой потенциальной ямой. Равенство (7.22) эквивалентно предположению, что $|y|$ не может принимать значений, больших d . Так как $y = \frac{c}{eH}(p_x - P_x)$, то в данном случае траектории электрона в импульсном пространстве задаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \mathcal{E}, \quad |p_x - P_x| < \frac{|e|Hd}{c}, \\ P_x = \text{const}, \quad p_z = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Обозначим через $p_x^{(\text{min})}(\mathcal{E}, p_z)$ и $p_x^{(\text{max})}(\mathcal{E}, p_z)$ левую и правую крайние p_x -координаты кривой $\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \mathcal{E}, p_z = \text{const}$. Если

$$p_x^{(\text{max})}(\mathcal{E}, p_z) - \frac{|e|Hd}{c} < P_x < p_x^{(\text{min})}(\mathcal{E}, p_z) + \frac{|e|Hd}{c}, \quad (7.24)$$

то траектория (в координатном пространстве) полностью помещается в пластине и электрон вовсе ее не «чувствует». Уровни энергии в этом случае совпадают с уровнями энергии электрона в массивном металле. Если траектория не помещается в пленке, то площадь, входящая в уравнение (7.20), является площадью, описанной кривой $\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \mathcal{E}$, $p_z = \text{const}$, усеченной прямыми или одной из прямых $p_x = P_x \mp \frac{|e|Hd}{c}$. При достаточно большом магнитном поле большинство замкнутых траекторий целиком уложится в пластине: электроны, двигающиеся по замкнутым траекториям, практически не будут «чувствовать» границ пластины. Иначе обстоит дело с электронами, которые движутся по открытым траекториям: в сколь угодно большом поле все они сталкиваются со стенкой. Это обстоятельство является причиной квантования энергии таких электронов.

В последнее время выяснилось, что в высокочастотных свойствах металлов проявляются поверхностные уровни электронов, возникающие в магнитном поле. Оставляя рассмотрение высокочастотных свойств до части IV (§ 46), мы выведем здесь выражения для поверхностных уровней энергии, считая для простоты, что магнитное поле приложено параллельно поверхности.

Естественно, что при изучении поверхностных состояний существенное значение имеет характер рассеяния электронов на поверхности проводника. Характер рассеяния определяется соотношением между дебройлевской длиной волны λ_B падающих на поверхность зарядов и характерными размерами искажений

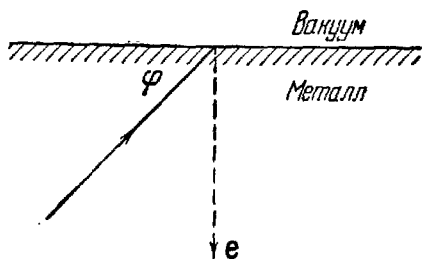


Рис. 26. Падение электрона на границу металл — вакуум.

поверхности. У хороших металлов λ_B порядка межатомного расстояния, и потому при немалых углах падения отражение электронов от поверхности с высокой точностью можно считать диффузным. Значит, естественная ширина уровней заведомо того же порядка, что и расстояние между ними (так как определяется той же частотой), и говорить о квантовании спектра этих электронов не приходится. По мере уменьшения угла падения φ , дебройлевская длина волны в нормальном к поверхности направлении растет пропорционально φ^{-1} (рис. 26), так что при достаточно малых углах падения отражение электронов от поверхности может оказаться близким к зеркальному.

Нас будут интересовать поэтому только те электроны, которые почти скользят относительно поверхности (в высокочастот-

ных свойствах металлов эти электроны иногда наиболее существенны).

В квазиклассике квантование уровней электронов, сталкивающихся с поверхностью в параллельном ей (для простоты рассуждений) магнитном поле, находится из тех же рассуждений, что и квантование в неограниченном образце, и приводит к аналогичному результату

$$S(\epsilon, p_z, P_x) = \frac{2\pi\hbar |e| H}{c} n, \quad (7.25)$$

где S — площадь орбиты электрона, сталкивающегося с поверхностью образца, в импульсном пространстве. Естественно,

она зависит от сохраняющегося значения P_x , которое определяет положение орбиты $y = \frac{c}{eH} (p_x - P_x)$, $e < 0$. На рис. 27 заштрихована площадь S :

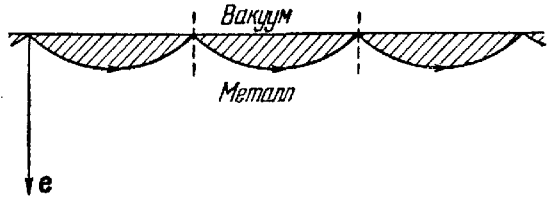


Рис. 27. Квантуется заштрихованная площадь (между пунктирными линиями).

$$\epsilon(p_x, p_y, p_z) = \epsilon, \quad p_z = \text{const}, \quad p_x \leq P_x. \quad (7.26)$$

Площадь орбиты в импульсном пространстве отличается от ее площади в координатном пространстве только множителем $(eH/c)^2$. Из уравнений движения следует $y = cp_x/eH + y_0$, $x = -\frac{cp_y}{eH} + x_0$. При малых ϕ

$$y = y_{\text{max}} - \frac{x^2}{R}, \quad y_{\text{max}} = x_{\text{max}}\phi, \quad (7.27)$$

(где R — радиус кривизны в точке $y = y_{\text{max}}$), так что

$$y_{\text{max}} = R\phi^2, \quad x_{\text{max}} = R\phi.$$

Квантование площади орбиты дает квантование углов ϕ :

$$\frac{2}{3} R^2 \phi^3 = \frac{n\hbar c}{eH}, \quad \phi_n = \left(\frac{3}{2} \frac{n\hbar c}{eHR^2} \right)^{1/3}. \quad (7.28)$$

Поскольку R порядка ларморовского радиуса (а энергию можно приравнять фермиевской ($\epsilon = \epsilon_F$, $p \approx p_F$)), то

$$\phi_n \sim \left(\frac{eH\hbar}{cp_F^2} n \right)^{1/3} \sim \left(\frac{\hbar\omega_H}{\epsilon_F} \right)^{1/3} n^{1/3}. \quad (7.29)$$

Так как $x = v_x^0 t \approx v_F t$, период обращения $T_\phi = 2 \Delta x_{\text{max}} / v_x^0 = 2R\phi_n / v_x^0$, и частоты ω_n обращения по таким орбитам суть

$$\omega_n(\epsilon_F, p_z) = \frac{\pi v_x^0}{R\phi_n} \sim \omega_H \left(\frac{\epsilon_F}{\hbar\omega_H} \right)^{1/3} \frac{1}{n^{1/3}}. \quad (7.30)$$

Расстояние между соответствующими уровнями

$$\Delta \varepsilon_n = \hbar \omega_n. \quad (7.31)$$

Естественная ширина уровней $\delta \varepsilon$ обуславливается «объемным» временем свободного пробега: $\delta \varepsilon_\tau \sim \hbar/\tau$ и отклонением рассеяния от чисто зеркального. Если при каждом столкновении вероятность диффузного рассеяния есть q ($q \ll 1$), то при числе столкновений, приводящих к практически полному рассеянию, $(1 - q)^n \sim 1/2$, откуда $n \sim 1/q$, а $\delta \varepsilon_q \sim \hbar \omega_n/q$. Таким образом, необходимые условия существования квазистационарных уровней (7.31) следующие:

$$q(\varphi_n) \ll 1; \quad \omega \tau \left(\frac{\varepsilon_F}{\hbar \omega} \right)^{1/2} \frac{1}{n^{1/2}} \gg 1. \quad (7.32)$$

Это может быть выполнено в слабых полях H , если $q(\omega \tau)^{-1/2} \ll 1$.

Все рассмотренные здесь случаи квантования — частные случаи весьма общего способа квазиклассического квантования, который состоит в том, что находятся адиабатические инварианты I_j и приравниваются $n_j \hbar$, где n_j — целые числа. Тогда уровни энергии (которая может быть выражена через I_j) определяются так:

$$\varepsilon_{n_1, n_2, n_3} = \varepsilon(n_1 \hbar; n_2 \hbar; n_3 \hbar). \quad (7.33)$$

Это выражение справедливо, если движение финитно по всем трем степеням свободы. Если по одной или двум степеням свободы движение инфинитно, то энергия зависит только от двух или одного (соответственно) дискретных квантовых чисел.

§ 8. Квантовая механика электрона с произвольным законом дисперсии

Хотя при рассмотрении конкретных задач электронной теории металлов, как правило, достаточно квазиклассического приближения, построение последовательной квантовой механики электронов проводимости, несомненно, представляет принципиальный интерес.

Если исходить из предположения, что сложный закон дисперсии возник при рассмотрении движения отдельного электрона в периодическом поле, то естественно попытаться просто ввести в уравнение Шредингера внешние поля и решить возникающие при этом задачи. Однако, как мы говорили во введении, электрон проводимости — более сложное образование. Закон дисперсии учитывает взаимодействие всех электронов друг с другом. Поэтому при построении квантовой механики электрона проводимости прежде всего надо договориться, в ка-

ких терминах ее следует формулировать. Квантовая механика не может быть сформулирована только в терминах закона дисперсии, хотя \mathbf{p} -представление, несомненно, является самым целесообразным. Действительно, обычно уравнение Шредингера удобно записывать в координатном представлении, так как оператор кинетической энергии очень просто выражается через оператор дифференцирования. Уравнение Шредингера благодаря этому — линейное дифференциальное уравнение в частных производных; теория таких уравнений подробно разработана. Для электрона в металле кинетической энергией служит $\varepsilon(\mathbf{p})$ — сложная периодическая функция квазиимпульса. С другой стороны, внешние силы в подавляющем большинстве случаев сравнительно просто зависят от координат. Это обстоятельство стимулирует желание формулировать квантовую механику электрона проводимости, исходя из оператора Гамильтона, записанного в \mathbf{p} -представлении:

$$\hat{\mathcal{H}} = \varepsilon(\mathbf{p}) + \hat{\mathcal{U}}, \quad (8.1)$$

где $\hat{\mathcal{U}}$ — оператор потенциальной энергии, связанной с внешними силами. Такая запись, по сути дела, непоследовательна, так как при переходе от квазиклассического рассмотрения к последовательно квантовому надо не только учесть операторный характер потенциальной энергии, т. е. заменить координату \mathbf{r} (функцией которой является \mathcal{U}) оператором $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$, но и учесть отличие квазиимпульса \mathbf{p} от истинного импульса. Согласно формулам (1.45) и (1.46), это означает, что оператор координаты имеет вид

$$\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}, \quad (8.2)$$

причем оператор $\hat{\mathbf{p}}$, диагональный по квазиимпульсу \mathbf{p} , задан своими матричными элементами, связанными с переходами из зоны в зону (см. формулу (1.47)). Поэтому окончательно оператор Гамильтона следует записать как сумму операторов: «кинетической» энергии $\hat{\mathcal{K}}$ и потенциальной $\hat{\mathcal{U}}$:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{K}} + \hat{\mathcal{U}}, \quad (8.3)$$

причем оператор $\hat{\mathcal{K}}$ задан своими матричными элементами в \mathbf{p} -представлении:

$$\mathcal{K}_{ss'}^{(\mathbf{p})} = \varepsilon_s(\mathbf{p}) \delta_{ss'}, \quad (8.4)$$

а оператор $\hat{\mathcal{U}}$ — зависимостью от оператора координаты \mathbf{r} (см. формулу (8.2)). Знание оператора Гамильтона электрона проводимости во внешнем поле позволяет принципиально решить любую задачу квантовой механики электрона со сложным законом дисперсии. При этом, естественно, результаты будут

выражены не только в терминах закона дисперсии, т. е. через функции $\varepsilon_s(\mathbf{p})$ и их производные, но в ответ будут входить и матричные элементы $\rho_{ss'}(\mathbf{p})$. Такое построение, основанное на задании закона дисперсии $\varepsilon_s(\mathbf{p})$ и матричных элементов $\rho_{ss'}(\mathbf{p})$, вполне последовательно, однако принято задавать не $\rho_{ss'}(\mathbf{p})$, а набор собственных функций не возмущенного внешними полями гамильтониана электрона $\psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r})$. Матричные элементы $\rho_{ss'}(\mathbf{p})$, естественно, можно выразить с помощью этих функций. Воспользовавшись определением (1.47) и явным видом волновой функции (1.16), получим:

$$\rho_{ss'}(\mathbf{p}) = i\hbar \int u_{s\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} u_{s'\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d\mathbf{v}. \quad (8.5)$$

Этому выражению можно придать другой вид, если использовать разложение блоховской волны (1.16) в ряд Фурье (1.21):

$$\rho_{ss'}(\mathbf{p}) = i\hbar \sum_b a_s^*(\mathbf{p} + 2\pi\hbar\mathbf{b}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} a_{s'}(\mathbf{p} + 2\pi\hbar\mathbf{b}). \quad (8.6)$$

Последняя запись удобна при решении конкретных задач, когда за основу берется приближение слабой связи. $\psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — это волновые функции электрона проводимости в координатном представлении. Коэффициенты разложения функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ (произвольного состояния) по волновым функциям $\psi_{s\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — это волновые функции в \mathbf{p} -представлении. Мы их будем обозначать $g(s, \mathbf{p}, t)$. Так, волновая функция электрона в состоянии с определенным значением квазиимпульса ($\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$) в определенной зоне ($s = s_0$) есть

$$\left. \begin{aligned} g(s, \mathbf{p}, t) &= e^{-ie_{s_0}(\mathbf{p}_0)t/\hbar} g(s, \mathbf{p}), \\ g(s, \mathbf{p}) &= A \delta_{ss_0} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0), \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

где A — нормировочная константа.

Используя определение гамильтониана (8.3), легко вычислить оператор скорости в координатном пространстве $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{v}}$ и в пространстве квазиимпульсов $\hat{\mathbf{p}}$. Операторы скорости выписаны во введении. Мы не будем приводить их значения заново (см. формулы (1.48) и (1.50)). Отметим только, что приведенные выражения дают возможность, во всяком случае в принципе, выяснить трансформацию во времени состояния электрона проводимости, находящегося под воздействием внешних полей. Такого типа задачу — выяснение изменения состояния во времени — можно решать и с помощью волновых функций, т. е., попросту говоря, искать зависимость волновой функции от времени. Разберем простейший пример. Найдем зависимость от

времени волновой функции электрона, когда на него действует постоянная и однородная сила F , равная eE , где E — напряженность электрического поля. Согласно (8.3), (8.4) и (8.2), система уравнений для функций $g(s, p, t)$ в данном случае принимает вид:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial g(s, p, t)}{\partial t} = \epsilon_s g_s + \frac{e\hbar}{i} E \frac{\partial g(s, p, t)}{\partial p} - eE \sum_{s'} \rho_{ss'}(p) g(s', p, t). \quad (8.8)$$

В ряде случаев (а для металлов практически всегда) это уравнение можно решать методом последовательных приближений, рассматривая последнюю сумму в правой части как малое возмущение. Это оправдывается, в конечном счете, малостью приложенного поля по сравнению с атомными полями. При оценке безразмерного малого параметра надо помнить, что матричные элементы $\rho_{ss'}^{x, y, z} \approx a$ (см. введение). Прежде чем воспользоваться методом последовательных приближений, преобразуем несколько уравнения (8.8), введя вместо времени t новую переменную $\xi = p_x - eEt$ (ось x выбрана вдоль электрического поля, p_x в дальнейшем обозначается просто p). Тогда

$$-\frac{\hbar}{i} eE \left(\frac{\partial g_s}{\partial p} \right)_{\xi} = \epsilon_s g_s - eE \sum_{s'} \rho_{ss'}^x g_{s'} \quad (8.9)$$

(дискретный аргумент s мы записали в виде индекса). Проекция квазиимпульса p_y и p_z входят в последнее уравнение как параметры. Функции $g_s(p, \xi)$ будем искать в виде

$$g_s(p, \xi) = e^{-\frac{i}{eE\hbar} \int \epsilon_s(p') dp'} \varphi_s(p, \xi). \quad (8.10)$$

Система уравнений для функций $\varphi_s(p, \xi)$ выглядит особенно просто:

$$\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial p} \right)_{\xi} = \sum_{s'} q_{ss'} \varphi_{s'}(p, \xi), \quad (8.11)$$

где

$$q_{ss'} = \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{eE\hbar} \int \epsilon_s dp'} \epsilon_s \rho_{ss'}^x e^{-\frac{i}{eE\hbar} \int \epsilon_{s'} dp'}. \quad (8.12)$$

Теперь воспользуемся методом последовательных приближений. В нулевом приближении, которое соответствует пренебрежению переходами между зонами,

$$\left(\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial p} \right)_{\xi} = 0, \quad (8.13)$$

т. е.

$$\varphi_s^{(0)} = \varphi_s^{(0)}(\xi) \equiv \varphi_s^{(0)}(p - eEt). \quad (8.14)$$

Удовлетворим теперь начальным условиям задачи. Если при $t = 0$ волновая функция электрона $g_s(p, 0) = g_s(p)$, то, согласно (8.14) и (8.10),

$$g_s^{(0)}(p, t) = g_s(p - eEt) e^{-\frac{i}{eE\hbar} \int \epsilon_s(p') dp'}. \quad (8.15)$$

Величина $|g_s(p, t)|^2$ определяет вероятность того, что электрон из s -й зоны в момент времени t имеет значение квазиимпульса из интервала $(p, p + dp)$.

Последнее равенство показывает, что в нулевом приближении (пренебрегая переходами между зонами) распределение вероятностей целиком движется в пространстве квазиимпульсов с постоянной скоростью $\dot{p} = eE$. В частности, это относится и к δ -образному распределению вероятностей: если электрон в начальный момент времени имел определенное значение квазиимпульса, то и в любой момент времени t электрон будет иметь определенное значение квазиимпульса, которое может быть определено из классического уравнения движения:

$$\frac{dp}{dt} = eE. \quad (8.16)$$

Этот вывод служит еще одним обоснованием принятого здесь классического и квазиклассического подхода.

Подставляя нулевое приближение в правую часть системы (8.11), можно определить функции $g_s(p, t)$ в первом приближении по электрическому полю и вычислить вероятность перехода электрона из зоны в зону [24], однако мы не будем останавливаться на этом вопросе.

Сделаем замечание относительно уравнения движения

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial \hat{U}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}},$$

частным случаем которого является уравнение (8.16). Возможность пользоваться уравнением движения (и его вывод) предполагает неограниченность \mathbf{p} -пространства; возвращение квазиимпульса в избранную ячейку обратной решетки не содержится в этом уравнении. Физическая эквивалентность состояний в различных ячейках, обеспеченная периодичностью волновой функции, описывающей состояние с определенным квазиимпульсом, приводит к однозначности результатов.

С другой стороны, при вычислении вероятности различных процессов мы должны пользоваться полным (но не переполненным) набором собственных функций, т. е. выбрав определенную ячейку обратной решетки, использовать волновые функции только из этой ячейки *). При этом, естественно, могут оказаться

*) Если нужно, для конечных и начальных состояний можно взять разные ячейки.

разрешенными (иметь отличную от нуля вероятность) процессы, сопровождающиеся перебросами (U -процессы).

Описание одного и того же процесса с использованием уравнения движения и вероятностная схема носят дополнительный характер. Выбор описания диктуется постановкой задачи.

Мы до сих пор не рассматривали квантовых свойств электрона в магнитном поле. Наиболее интересные вопросы, связанные с переходом электрона с одной классической траектории на другую («магнитный пробой»), мы разберем в специальном параграфе (§ 10). Здесь же ограничимся только несколькими замечаниями.

Компоненты оператора кинематического импульса *)

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (8.17)$$

не коммутируют друг с другом, так как векторный потенциал зависит от координаты ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$). Используя правила коммутации между координатой \mathbf{r} и канонически сопряженным импульсом \mathbf{P} , можно установить соотношения коммутации между компонентами кинематического импульса («кинематического квазиимпульса»):

$$\{p_i, p_k\} = -\frac{e\hbar}{ic} \epsilon_{ikl} H_l, \quad (8.18)$$

где ϵ_{ikl} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга, а фигурные скобки означают коммутант. Отметим, что в это соотношение магнитное поле H и постоянная Планка \hbar входят в виде произведения. Чем больше магнитное поле, тем сильнее проявляются квантовые свойства. Подобный вывод мы уже сделали, сравнивая радиус орбиты электрона с длиной его волны де Бройля. Из правил коммутации (8.18) очевидно, что вывод не зависит от характера траектории электрона в магнитном поле. Обратим внимание на то, что с точностью до постоянного множителя компоненты кинематического импульса канонически сопряжены друг другу.

Если, исходя из закона дисперсии $\epsilon_s(\mathbf{p})$, попытаться строить гамильтониан электрона проводимости в магнитном поле, то возникает вопрос: в каком смысле надо понимать функцию $\epsilon_s(\mathbf{p})$ от некоммутирующих переменных $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$? При этом ситуация усложняется, так как координата \mathbf{r} не сохраняется; формально это можно записать как отсутствие коммутации между кинематическим импульсом и «оператором номера зоны»

*) Строго говоря, соотношение между \mathbf{P} и \mathbf{p} справедливо только для истинного импульса, однако можно показать, что оно сохраняется и для квазиимпульса, во всяком случае, для электрона в периодическом поле кристаллической решетки [21] (см. также стр. 17).

(оператор номера зоны \hat{s} — это оператор собственными значениями которого являются квантовые числа, определяющие энергетическую зону, ее номер). Используя для векторного потенциала выражение $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}\mathbf{r}]$, можно показать, что

$$\{\hat{s}, \hat{\mathbf{p}}\}_{ss'} = -\frac{e}{2c} (s - s') [\mathbf{H}, \rho_{ss'}(\mathbf{p})]. \quad (8.19)$$

Построение гамильтониана электрона в магнитном поле, исходя только из вида закона дисперсии, в общем случае, по-видимому, не может быть произведено. Структура гамильтониана существенно связана с генезисом фермиевской ветви энергетического спектра. Однако если пренебречь переходами между зонами *) (пренебречь ρ по сравнению с \mathbf{R} в формуле (1.45)), то характер симметризации функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ можно выяснить из достаточно общих соображений. Будем исходить из разложения функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ в ряд Фурье:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_a A_a e^{ia\mathbf{p}/\hbar}, \quad (8.20)$$

где суммирование ведется по всем периодам \mathbf{a} кристаллической решетки. При переходе к оператору Гамильтона, т. е. при замене компонент кинематического импульса операторами с правилами коммутации (8.18), естественно исходить из разложения (8.20), понимая каждое слагаемое как функцию (экспоненту) от одного оператора $\mathbf{a}\mathbf{p}$. Иначе говоря, если пренебречь переходами между зонами, то

$$\varepsilon(\hat{\mathbf{p}}) = \sum_a A_a e^{ia\hat{\mathbf{p}}/\hbar}. \quad (8.21)$$

Выражение (8.21) соответствует «полной симметризации» гамильтониана по операторам компонент кинематического импульса. Вывод о необходимости полной симметризации может быть подкреплен следующим рассуждением. Компонента кинематического импульса вдоль магнитного поля сохраняется и коммутирует с \hat{p}_x и \hat{p}_y . В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, оси не зафиксированы и за канонически сопряженные переменные могут быть выбраны любые линейные комбинации p_x и p_y . Вектор \mathbf{a} всегда можно представить в виде суммы $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel$, где $\mathbf{a}_\parallel = (\mathbf{a}\mathbf{H})\mathbf{H}/H^2$. Если теперь ось x направить вдоль \mathbf{a}_\perp , то в показателе экспоненты будет стоять один оператор. Приведенное здесь рассуждение подтверждается исследованием [21], к которому мы отсылаем читателя.

*) Нельзя указать достаточно строгих критериев для подобного пренебрежения. По-видимому, необходимо, чтобы зоны не перекрывались и расстояние между ними было достаточно велико.

Правила коммутации (8.18), которые здесь мы будем рассматривать как правила коммутации между компонентами истинного кинематического импульса (а не квазиимпульса), показывают, что с ростом магнитного поля возрастает «квантовость» задачи. По-видимому, строго говоря, не делая никаких дополнительных предположений, структуру квантовых состояний электрона в магнитном поле можно сформулировать только в двух случаях.

1. Магнитное поле мало. Осуществляется квазиклассическая ситуация: электрон движется по классическим орбитам, определенным законом дисперсии в отсутствие магнитного поля; квантование выделяет определенные сечения на изоэнергетических поверхностях (см. формулы (7.2) и (7.3)).

2. Магнитное поле столь велико, что действием внутрикристаллических полей можно пренебречь. Электрон перестает «замечать» поле кристаллической решетки. Уровни энергии электрона определяются формулой Ландау (см. формулу (7.5)). Последний случай, естественно, не осуществляется на практике (для его осуществления нужны поля порядка 10^8 — 10^9 э!), однако у некоторых металлов, благодаря специфическим особенностям их энергетического спектра, фермиевские электроны проявляют свою «свободу» («забывают» о внутрикристаллических полях) в не слишком больших магнитных полях (см. по этому поводу § 10).

И, наконец, в заключение настоящего параграфа решим квантовым путем задачу о поверхностных уровнях в магнитном поле, решенную в предыдущем параграфе квазиклассически. Необходимость подобного решения связана с тем, что в высокочастотных свойствах, о которых речь пойдет ниже (§ 46), играют роль первые уровни, а их расчет с помощью уравнений (7.25) — (7.31) слишком груб.

В данном случае уравнение Шредингера, получающееся заменой классических величин операторами сравнительно просто, так как смещение по нормали к поверхности образца мало (скользящие углы) и, следовательно, можно воспользоваться разложением $\varepsilon(p_x, p_y, p_z)$ вблизи точки

$$\varepsilon(p_x^0, p_y^0, p_z) = \varepsilon_0, \quad v_y(p_x^0, p_y^0, p_z) = 0 \quad (\dot{v}_y < 0):$$

$$\left\{ -\alpha \left(\frac{c\hbar}{eH} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} + (y - y_{\max}) \right\} \psi = 0, \quad y_{\max} = y(0), \quad (8.22)$$

где

$$\alpha \equiv \alpha(\varepsilon, p_z) = - \left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right|_{x=0} = - \frac{eH}{c} \left. \frac{\partial^2 p_x(\varepsilon, p_z, p_y)}{\partial p_y^2} \right|_{\substack{p_y = p_y^0(\varepsilon, p_z) \\ v_y = 0, \dot{v}_y < 0}}. \quad (8.23)$$

При зеркальном отражении электронов

$$\psi|_{y=0} = 0, \quad \psi|_{y=\infty} = 0. \quad (8.24)$$

Уравнение (8.22) подстановкой

$$\psi = \psi_1 \left(\frac{eH}{c\hbar} (y - y_{\max}) \right) \quad (8.25)$$

приводится к уравнению для функций Эри, а граничное условие (8.24) определяет y_{\max} . Но $y_{\max} = \frac{p_x^{\max}(\epsilon, p_z) - P_x}{eH/c}$, так что отсюда находится $\epsilon = \epsilon_n(p_z, P_x)$. При этом удобно для получения явного вида ϵ_n использовать разложение $\epsilon(p_x, p_y)$. В результате

$$\epsilon_n = \hbar v_x^0(p_z) \left(\frac{eH}{\hbar} \right)^{2/3} (2R(p_z))^{-1/3} a_n, \quad Ai(-a_n) = 0, \quad (8.26)$$

где $Ai(x)$ — функция Эри.

Формула (8.26) решает поставленную задачу о нахождении поверхностных уровней энергии электронов в магнитном поле, параллельном поверхности.

§ 9. Квантовая теория рассеяния электронов с произвольным законом дисперсии

Построение теории рассеяния связано с вычислением эффективных сечений различных процессов и с исследованием формы волновой поверхности рассеянной частицы на больших расстояниях от рассеивающего центра. Если первая часть задачи (вычисление эффективных сечений) не может быть решена без знания структуры неоднородности, то вторая — исследование формы волновой поверхности на больших расстояниях — формулируется и решается при очень общих предположениях о характере неоднородности, причем асимптотическое поведение волновой функции электрона, как оказывается, определяется формой его изоэнергетической поверхности.

Рассмотрим рассеяние электрона, находящегося в состоянии (s_0, p_0) , т. е. имеющего волновую функцию $\psi_{s_0 p_0}^{(0)}(\mathbf{r}) = e^{i p_0 r / \hbar} u_{s_0 p_0}(\mathbf{r})$, на локальной неоднородности. Если считать, что рассеивающая частица бесконечно тяжела (атом примеси, вакансия и пр.), то возмущенная волновая функция электрона может быть записана следующим образом:

$$\psi_{s_0 p_0}(\mathbf{r}) = \psi_{s_0 p_0}^{(0)}(\mathbf{r}) - \sum_s \int \frac{C_{s_0 p_0}^{s p} e^{i p r / \hbar} d\tau_p}{\epsilon_s(p) - \epsilon_{s_0}(p_0)}. \quad (9.1)$$

Величины $C_{s_0 p_0}^{s p}$ определяются характером рассеивающего центра, находящегося, по предположению, в точке $\mathbf{r} = 0$. Если неод-

нородность кристалла характеризовать оператором возмущения $\hat{\Lambda}$, то в тех случаях, когда возмущение имеет δ -образный характер [25],

$$C_{s_0 p_0}^{sp} = \frac{\Lambda_{s_0 p_0}^{sp} u_{sp}(\mathbf{r})}{1 + \sum_s \int \frac{\Lambda_{s_0 p_0}^{sp}}{\varepsilon_s(\mathbf{p}) - \varepsilon_{s_0}(\mathbf{p}_0)} d\tau_{\mathbf{p}}}$$

Здесь $\Lambda_{s_0 p_0}^{sp}$ — матричный элемент оператора $\hat{\Lambda}$.

В тех же случаях, когда можно пользоваться теорией возмущений,

$$C_{s_0 p_0}^{sp} = \Lambda_{s_0 p_0}^{sp} u_{sp}(\mathbf{r}).$$

Обозначим

$$I_s(\mathbf{r}) = \int \frac{C_{s_0 p_0}^{sp} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}}{\varepsilon_s(\mathbf{p}) - \varepsilon} d\tau_{\mathbf{p}}; \quad \varepsilon \equiv \varepsilon_{s_0}(\mathbf{p}_0). \quad (9.2)$$

Специфическая структура интегралов $I_s(\mathbf{r})$ позволяет исследовать рассеянную волну на больших расстояниях от рассеивающего препятствия.

Интегрирование в (9.2) можно производить по энергиям и по поверхностям равных энергий. Тогда

$$I_s(\mathbf{r}) = \int \frac{I_s(\mathbf{r}, \varepsilon') d\varepsilon'}{\varepsilon' - \varepsilon}, \quad (9.3)$$

где

$$I_s(\mathbf{r}, \varepsilon') = \int_{\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon'} \frac{C_{s_0 p_0}^{sp} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} dS_{\varepsilon'}}{|\nabla \varepsilon_s(\mathbf{p})|}. \quad (9.4)$$

Здесь $dS_{\varepsilon'}$ — элемент площади на изоэнергетической поверхности $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon'$, а интегрирование в (9.3) производится в пределах, допустимых для s -й зоны значений энергии (от $\varepsilon_{s \min}$ до $\varepsilon_{s \max}$).

Для вычисления асимптотического значения (при больших r) интегралов (9.4) удобно на изоэнергетической поверхности $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon'$ ввести систему координат, связанную с линиями пересечения поверхности плоскостями $n\mathbf{p} = \text{const}$ ($n = \mathbf{r}/r$). Обозначим $n\mathbf{p} = u$ и будем производить интегрирование сначала по ленте на поверхности между u и $u + du$, и затем по переменной u (рис. 28). Это дает

$$\left. \begin{aligned} I_s(\mathbf{r}, \varepsilon') &= \int \hat{f}_s(u) e^{iur/\hbar} du, \\ \hat{f}_s(u) &= \int_{\substack{\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon' \\ u < n\mathbf{p} < u + du}} \frac{C_{s_0 p_0}^{sp}}{|\nabla \varepsilon_s(\mathbf{p})|} dS_{\varepsilon'}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Из полученного выражения ясно, что члены порядка $1/r$, которые соответствуют расходящимся, т. е. рассеянными волнам, возникают при интегрировании вблизи разрывов функции $f_s(u)$. Как легко сообразить, единственными точками разрыва функции $f_s(u)$ являются точки касания поверхности $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon'$ с опорной плоскостью, перпендикулярной направлению распространения \mathbf{n}

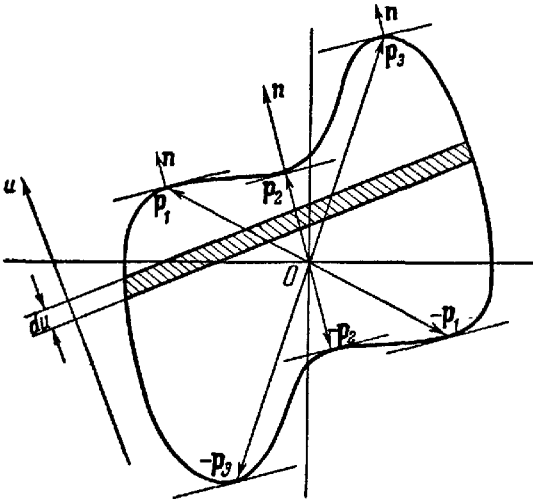


Рис. 28. Сечение поверхности $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon'$ плоскостью $\mathbf{n}\mathbf{p} = \text{const}$.

$\mathbf{p}_\nu, -\mathbf{p}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) — точки касания опорной плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

(см. рис. 28). Обозначая точки касания через \mathbf{p}_ν , получим

$$I_s(\mathbf{r}, \epsilon') \approx \sum_{\nu} \frac{2\pi C_{s_0 \mathbf{p}_0}^{s \mathbf{p}} e^{i \mathbf{p}_\nu r / \hbar}}{|\nabla \epsilon_s(\mathbf{p}_\nu)| \sqrt{K_\nu}} \frac{1}{r}, \tag{9.6}$$

где K_ν — гауссова кривизна поверхности $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \epsilon'$ в точке $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\nu$.

Точки касания \mathbf{p}_ν определяются, очевидно, уравнениями

$$\epsilon_s(\mathbf{p}_\nu) = \epsilon', \quad [\mathbf{n}, \mathbf{v}_s(\mathbf{p}_\nu)] = 0. \tag{9.7}$$

Подставляя выражения (9.6) в формулу (9.3), убеждаемся, что при $r \rightarrow \infty$ интегралы по энергиям остаются конечными, только если значения $\epsilon \equiv \epsilon_{s_0}(\mathbf{p}_0)$ попадают внутрь интервала допустимых значений энергий в s -й зоне. В этом случае интегралы (9.3) следует понимать как предельные значения интегралов

$$I_s(\mathbf{r}) = \int \frac{I_s(\mathbf{r}, \epsilon') d\epsilon'}{\epsilon' - \epsilon + i\gamma} \tag{9.8}$$

при бесконечно малом затухании ($\gamma \rightarrow +0$).

Главная часть интегралов (9.3) или (9.8) получается интегрированием вблизи полюса $\epsilon' = \epsilon$.

Учитывая это, можно окончательно получить асимптотическое выражение для возмущенной волновой функции:

$$\Psi_{s_0 \mathbf{p}_0}(\mathbf{r}) \approx \Psi_{s_0 \mathbf{p}_0}^{(0)} - \frac{(2\pi)^{3/2} i}{r^{1/2}} \sum_{s, \nu} \frac{C_{s_0 \mathbf{p}_0}^{s \mathbf{p}} e^{i \mathbf{p}_\nu r / \hbar}}{|\nabla \epsilon_s(\mathbf{p}_\nu)| \sqrt{K_\nu}}, \tag{9.9}$$

причем значения \mathbf{p}_ν определяются уравнениями (9.7), если вместо ϵ' подставить $\epsilon \equiv \epsilon_0(\mathbf{p}_0)$.

Полученные здесь результаты согласуются с выводами § 6, сделанными на основании классического (корпускулярного) рассмотрения. Действительно, процедура определения p_v (уравнение (9.7)) заключается в том, что необходимо найти те точки на изоэнергетической поверхности, где скорость электрона $v_s = \nabla \epsilon_s(p)$ совпадает по направлению с данным направлением рассеяния n .

Найденное выражение для возмущенной волновой функции позволяет сделать ряд заключений о характере рассеянных волн.

В большинстве случаев волновая функция электрона, рассеянного единичной неоднородностью, представляет собой суперпозицию нескольких волн, число которых равно числу возможных решений уравнений (9.7) при $\epsilon' = \epsilon_{s0}(p_0)$. Каждая из этих волн имеет свою форму

и свою скорость распространения (рис. 29): Даже в тех случаях, когда энергия рассеиваемого электрона принадлежит только одной зоне, число рассеянных волн, как правило, превышает единицу, так как обычно изоэнергетические поверхности не выпуклы, а имеют сложную форму. Амплитуда каждой из рассеянных волн определяется не только законом дисперсии, но и особенностями рассеивающего центра (посредством величин $C_{s_0 p_0}^{s p}$,

которые связаны с возмущением, создаваемым рассеивающим центром). Фаза же волны, т. е. форма волновой поверхности, определяется только законом дисперсии, причем волновая поверхность каждой волны является полярной поверхностью по отношению к изоэнергетической поверхности электрона $\epsilon_s(p) = \epsilon$.

Знание волновой функции рассеянного электрона позволяет вычислить эффективный поперечник рассеяния в направлении n внутри телесного угла $d\omega$

$$d\sigma(n) = \frac{16\pi^4}{|\nabla \epsilon_{s_0}(p_0)|} \sum_{s, v} \frac{|B_{s_0 p_0}^{s p_v}|^2}{|K_v| |\nabla \epsilon_s(p_v)|} d\omega, \quad (9.10)$$

где величины $B_{s_0 p_0}^{s p_v}$ простым образом связаны с коэффициентами $C_{s_0 p_0}^{s p_v}$.

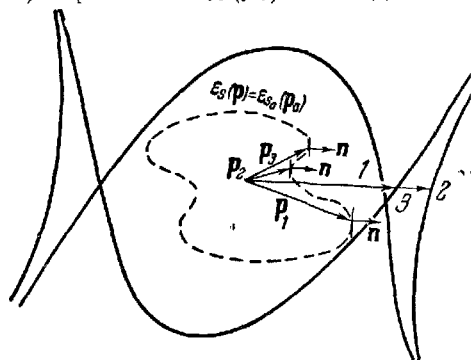


Рис. 29. Сечение волновой поверхности рассеянного электрона (сплошные линии).

Штриховой линией изображено сечение изоэнергетической поверхности.

Каждое слагаемое в формуле (9.10) определяет сечение процесса, при котором рассеянный электрон имеет определенное значение квазимпульса и принадлежит определенной зоне.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В случае открытых изоэнергетических поверхностей могут существовать такие направления, в которых частица вовсе не движется. На рис. 30 изображена область недоступных углов для поверхности типа «гофрированный цилиндр». Естественно, что в этом случае электрон не может рассеяться в запрещенном направлении. Точнее: акт рассеяния в этом направлении произойдет, только если частица перейдет на другую полость изоэнергетической поверхности (если таковая есть).

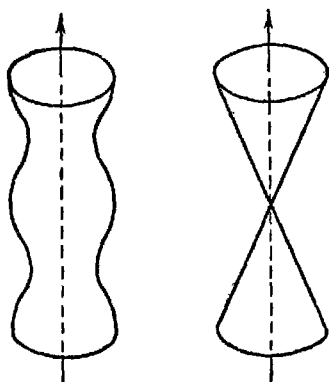


Рис. 30. Область недоступных углов для поверхности типа «гофрированный цилиндр».

§ 10. Магнитный пробой

Одним из наиболее интересных проявлений квантового характера движения электрона в магнитном поле несомненно является возможность перехода электрона с одной классической орбиты на другую (магнитный пробой). Причина этого явления та же, что у обычного туннельного эффекта — волновая природа электрона. Однако в описываемом явлении проявляется специфика движения в магнитном поле. В частности, с ростом магнитного поля усиливается квантовый характер движения электрона (§ 7), поэтому вероятность магнитного пробоя растет с магнитным полем. Прежде чем излагать строгую теорию магнитного пробоя, поясним наиболее существенные черты этого явления. Переход с одной классической орбиты на другую имеет исчезающе малую вероятность W , естественно, только в том случае, если эти траектории достаточно близко расположены и потенциальный барьер между ними не слишком велик. Близко расположенные траектории могут иметь различную природу. Обе они принадлежат либо одной и той же зоне (рис. 31, а), либо различным (рис. 31, б). Существование близко расположенных траекторий, принадлежащих одной зоне, не требует специального объяснения. Для этого, например, достаточно, чтобы изоэнергетическая поверхность имела седловую точку. Тогда при значениях $p_z (H_z = H, H_x = H_y = 0)$, близких к критическому $p_z = p_{zk}$ (при $p_z = p_{zk}$ траектория представляет собой «восьмерку»), траектории незначительно удалены друг от друга (см. рис. 31, а). Во втором случае, когда близко располо-

женные траектории принадлежат различным зонам, их близость всегда обусловлена близостью к точке вырождения. Правда, иногда это вырождение (если оно не является обязательным)

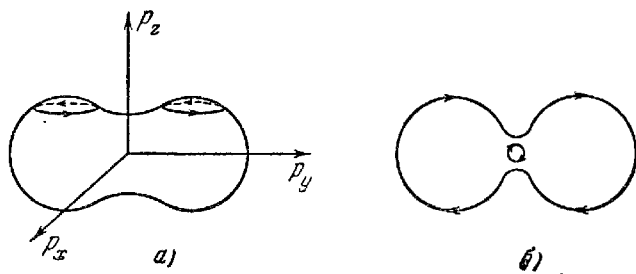


Рис. 31. Различная природа близко расположенных траекторий:

a — изоэнергетическая поверхность с перемычкой; *b* — внутри одной поверхности располагается другая (близко расположенные траектории принадлежат разным зонам); стрелки обозначают направление движения.

может быть снято. Различные случаи близко расположенных траекторий изображены на рис. 31.

Сравнивая рис. 31, б и рис. 31, а, следует обратить внимание на направление движения электрона в одном и другом случае. Переход электрона с одной классической траектории на другую, когда они обе принадлежат одной зоне, всегда сопровождается изменением направления движения. При межзонном переходе с траектории на траекторию направление движения не меняется, электрон как бы продолжает движение вдоль классической траектории.

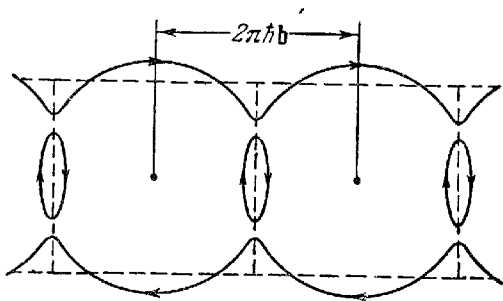


Рис. 32. Возникновение близко расположенных траекторий по модели почти свободных электронов.

Особенно наглядной картина делается в приближении слабой связи. Действительно, если вовсе пренебречь взаимодействием электрона с решеткой, то изоэнергетические поверхности — сферы (рис. 32). Учет периодического поля решетки прежде всего заставляет перейти в классификации состояний от импульса к квазиимпульсу, что делает точки в *p*-пространстве, отличающиеся на $2\pi\hbar b$, физически эквивалентными. Это означает, что сферы можно проводить не только из начала координат, но и из любой точки $p = 2\pi\hbar b$ (см. рис. 32). Если значение энергии таково, что соседние сферы не пересекаются, то роль решетки совершенно незначительна. Если

же, сферы пересекаются, то имеет место вырождение, которое снимается учетом периодического потенциала. На рис. 32 изображен случай двукратного вырождения. В результате снятия вырождения возникают две изоэнергетические поверхности, которые естественно отнести к различным зонам. Заметим, что вдали от точек вырождения поверхность с большой точностью совпадает с исходной сферой. На рис. 32 показано направление движения электрона в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка. В достаточно сильном магнитном поле электрон «не замечает» потенциального барьера и движется по окружности. В меньших полях его траектория весьма далека от окружности. В частности, в данном случае он движется по открытой траектории.

Сравнивая межзонный магнитный пробой с внутризонным, надо отметить следующее. В случае внутризонного пробоя вероятность пробоя W с ростом магнитного поля стремится к $1/2$. Предельно квантовый случай соответствует «расщеплению электрона» в точке максимального сближения. При межзонном переходе $W \rightarrow 1$ при стремлении магнитного поля к бесконечности (это более строгая формулировка утверждения: «не замечает потенциального барьера»). И, наконец, пожалуй, наиболее важное: характерные магнитные поля H_{Π} в обоих случаях существенно различны. В случае внутризонного пробоя

$$H_{\Pi} = \Delta\epsilon/\mu, \quad (10.1)$$

где $\Delta\epsilon$ — величина потенциального барьера, μ — магнетон Бора, а при межзонном

$$H_{\Pi} = (\Delta\epsilon)^2/\epsilon\mu \ll \Delta\epsilon/\mu. \quad (10.2)$$

Другими словами, межзонный магнитный пробой наступает в значительно меньших магнитных полях, чем внутризонный. Оценка (10.1), по сути дела, совершенно естественна. Она означает, что при $H \approx H_{\Pi}$ вк размытие траектории, обусловленное соотношением неопределенности, порядка расстояния между траекториями. Действительно, из (8.18) следует $\Delta p_x \Delta p_y \sim \sim e\hbar H/c$. Неопределенность одной компоненты квазимпульса задана размерами траектории* $\Delta p_x \sim p$, а $\Delta p_y \sim \Delta\epsilon/v$, где v — скорость электрона; так как $p/v \sim m$, а $\mu \approx e\hbar/mc$, то из соотношения неопределенности получаем оценку поля внутризонного пробоя (10.1). То, что межзонный пробой наступает при значительно меньших полях, следует из точной теории межзонного пробоя, к изложению которой мы приступаем*).

*) Мы следуем работе [26], первое вычисление вероятности межзонного пробоя принадлежит Блаунту [27]. Подробное изложение теории магнитного пробоя содержится в недавно вышедшем обзоре [28].

Вначале уточним структуру энергетического спектра с малой энергетической щелью между зонами, имеющими законы дисперсии $\varepsilon_1(\mathbf{p})$ и $\varepsilon_2(\mathbf{p})$. Пусть

$$\Delta(\mathbf{p}) = |\varepsilon_1(\mathbf{p}) - \varepsilon_2(\mathbf{p})|. \quad (10.3)$$

Нас будет интересовать та область \mathbf{p} -пространства, где $\Delta \ll \varepsilon$ ($\varepsilon \approx \varepsilon_{1,2}$). Соображения, аналогичные приведенным в § 2 при исследовании структуры спектра вблизи точки вырождения, показывают, что в точке \mathbf{p} , близко расположенной к точке \mathbf{p}' , в которой $\Delta(\mathbf{p}') \ll \varepsilon(\mathbf{p}')$, закон дисперсии может быть записан в виде

$$\varepsilon_{1,2}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbf{A} \delta \mathbf{p} \pm \sqrt{\frac{(\Delta + \mathbf{B} \delta \mathbf{p})^2}{4} + |\mathbf{C} \delta \mathbf{p}|^2}, \quad (10.4)$$

который показывает, что законы дисперсии в различных зонах суть различные ветви одной аналитической функции. В (10.4)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{B} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{C} = \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{21}^*, \quad \delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'.$$

Все величины ε_1 , ε_2 , \mathbf{A} , \mathbf{B} и т. д. берутся в точке \mathbf{p}' . Наличие малого параметра Δ под корнем в формуле (10.4) показывает, что в окрестности точки \mathbf{p}' законы дисперсии $\varepsilon_{1,2}(\mathbf{p})$ являются острыми функциями своего аргумента. Характерный интервал изменения порядка $\Delta 2\pi \hbar \mathbf{b} / \varepsilon_0$, где ε_0 порядка ширины зоны. Пространственные группы кристаллических решеток всех металлов содержат центр инверсии. Можно показать [26] *), что это обстоятельство обеспечивает действительность вектора \mathbf{C} во всех точках \mathbf{p} -пространства. Поэтому мы будем считать, что $\text{Im } \mathbf{C} = 0$. Надо выделить два топологически различных случая.

1. Векторы \mathbf{B} и \mathbf{C} параллельны. Вблизи точки \mathbf{p}' вырождение отсутствует — разность $\Delta(\mathbf{p}) \neq 0$, причем $\min \Delta(\mathbf{p})$ достигается на плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{B}(\mathbf{p}')$ (и \mathbf{C}) и проходящей вблизи точки \mathbf{p}' , а

$$\mathbf{B} \delta \mathbf{p} = - \frac{B^2}{B^2 + 4C^2} \Delta. \quad (10.5)$$

Другими словами, точки, где $\Delta \ll \varepsilon_0$, сосредоточены вблизи некоторой поверхности наибольшего сближения зон (назовем ее M -поверхностью). На M -поверхности и вблизи нее $\Delta(\mathbf{p}) \neq 0$. Из (10.4) следует, что спектр вблизи M -поверхности определяет ся формулой

$$\varepsilon_{1,2}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} [\varepsilon_1(\mathbf{p}_M) + \varepsilon_2(\mathbf{p}_M)] + \frac{1}{2} [v_1^n(\mathbf{p}_M) + v_2^n(\mathbf{p}_M)] \delta p_n \pm \sqrt{\frac{\Delta^2(\mathbf{p}_M)}{4} + (\delta p_n v_{12}^n)^2}, \quad (10.6)$$

*) Доказательство не распространяется на магнитоупорядоченные металлы.

где $\delta p_n = n(\mathbf{p} - \mathbf{p}_M)$, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к M -поверхности в точке \mathbf{p}_M , лежащей на ней; $v_{12}^n = n v_{12}(\mathbf{p}_M)$ (с точностью до членов $\sim \Delta_M$, где Δ_M — характерное значение параметра Δ на M -поверхности). Как следует из формулы (10.6), наименьшее расстояние между классическими траекториями в магнитном поле $\epsilon_1(\mathbf{p}) = \epsilon$, $p_z = p_{z0}$ и $\epsilon_2(\mathbf{p}) = \epsilon$, $p_z = p_{z0}$ достигается в точках пересечения этих траекторий с M -поверхностью,

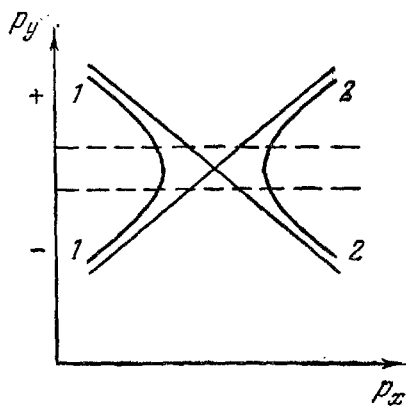


Рис. 33. Траектории электрона вблизи точки максимального сближения.

причем минимальное расстояние между траекториями $p_{\min} \simeq \simeq \Delta_M 2\pi \hbar b / \epsilon_0$ плавная функция энергии ϵ и проекции квазиимпульса на магнитное поле p_{z0} .

В модели почти свободных электронов (см. выше) M -поверхность совпадает с границами зоны Бриллюэна, а малость параметра Δ обеспечивается малостью энергии взаимодействия электрона с кристаллической решеткой.

2. Векторы \mathbf{B} и \mathbf{C} не параллельны. Разность $\Delta(\mathbf{p})$ обращается в нуль на линии, проходящей вблизи точки \mathbf{p}' и образующейся пересечением плоскостей

$\Delta(\mathbf{p}') + \mathbf{B}(\mathbf{p}') \delta \mathbf{p} = 0$ и $\mathbf{C}(\mathbf{p}') \delta \mathbf{p} = 0$. Таким образом, спектр этого типа характеризуется существованием в \mathbf{p} -пространстве линии точек \mathbf{p}_0 (\mathbf{p}_0 -линии), в которых $\Delta(\mathbf{p}_0) = 0$, т. е. имеется двукратное вырождение $\epsilon_1(\mathbf{p}_0) = \epsilon_2(\mathbf{p}_0) = \epsilon(\mathbf{p}_0)$.

Можно показать (см. § 2 и работу [26]), что изоэнергетическая поверхность $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \mathcal{E}$, проходящая через точку $\mathbf{p}_0(\mathcal{E})$, является эллиптическим конусом, ось которого совпадает с \mathbf{p}_0 -линией (см. рис. 8). Полости конуса, разделенные точкой $\mathbf{p}_0(\mathcal{E})$, соответствуют изоэнергетическим поверхностям в первой и второй зонах. Как мы уже говорили, описанная здесь ситуация может возникнуть вследствие обязательного вырождения, обусловленного типом симметрии кристаллической решетки металла. Например, обязательное вырождение должно наблюдаться у всех металлов с гексагональной плотной упаковкой атомов. Таких металлов много (Zn, Cd, Mg и др.).

Однако проявление подобного вида спектра на опыте зависит от того, проходит ли поверхность Ферми (см. введение) через \mathbf{p}_0 -линию или нет. У графита поверхность Ферми проходит через \mathbf{p}_0 -линию. По-видимому, у ряда металлов поверхность Ферми во всяком случае близка к линии обязательного вырождения (а может быть, и проходит через нее).

Заметим, что для обоих случаев на участке наибольшего сближения классические траектории являются различными ветвями одной гиперболы (рис. 33).

Основой излагаемого ниже расчета является квазиклассичность движения электрона, причем на большей части траектории можно пренебречь межзонными переходами.* Это позволяет вдали от области максимального сближения траекторий использовать стационарное уравнение Шредингера с гамильтонианом, полученным по рецепту, изложенному в § 8, т. е. путем замены компонент кинематического импульса операторами с правилами коммутации (8.18) и с дальнейшей симметризацией полученного выражения. В представлении, в котором оператор \hat{p}_y диагонален, уравнение Шредингера может быть записано в следующей форме*):

$$\epsilon_s \left(P_x + i\sigma \frac{\partial}{\partial p_y}; p_y; p_z \right) g_s(\mathbf{p}) = \mathcal{E} g_s(\mathbf{p}). \quad (10.7)$$

Параметр $\sigma = e\hbar H/c$, корень из которого ($\sqrt{\sigma}$) всегда мал по сравнению с характерным изменением квазиимпульса, служит в данном случае параметром квазиклассичности [21].

Квазиклассическое решение уравнения (10.7), соответствующее классическому движению по траекториям $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \mathcal{E}$, $p_z = p_{z0}$, запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g_s^{\pm}(\mathbf{p}) &= \sum_{\nu} f_{s\nu}^{(\pm)}(p_y) \delta(p_x - P_{x0}) \delta(p_z - p_{z0}), \\ f_{s\nu}^{(\pm)}(p_y) &= \frac{C_{\nu, s}^{(\pm)}}{\sqrt{\left| \frac{\partial \epsilon_s}{\partial P_x} \right|}} \exp \left\{ \frac{i}{\sigma} \left(P_{x0} p_y + \int^{p_y} p_x^{(\nu, s)}(p'_y) dp'_y \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Индекс ν обозначает одно из решений уравнения

$$\epsilon_s(p_x(p_y), p_y, p_z) = \mathcal{E}, \quad (10.9)$$

а знак \pm относится к квазиклассическим областям значений p_y , разделенным малым интервалом, внутри которого неприменимо уравнение (10.7), так как в этом интервале существенны межзонные переходы. Постоянные коэффициенты $C_{s\nu}^{(\pm)}$, как всегда в квазиклассическом приближении, должны быть связаны друг с другом путем приближенного решения уравнения Шредингера внутри области, где движение существенно отличается от классического.

На рис. 33 эта область ограничена пунктирными прямыми. Для описания связи между амплитудами $C_{s\nu}^{(\pm)}$ удобно ввести

*) Использован обычный выбор векторного потенциала (см. формулу (4.16)).

специальные матрицы «сшивки» $\tau_{ss'}^{(\nu)}$:

$$C_{sv}^{(+)} = \sum_{s'=1, 2} \tau_{ss'}^{(\nu)} C_{s'v}^{(-)}. \quad (10.10)$$

Отметим, что «сшивка» для каждой из пары траекторий происходит независимо (различные ν не перепутываются).

Таким образом, исследование динамики электрона проводимости в условиях магнитного пробоя сводится к нахождению матрицы $\hat{\tau}$, элементы которой — функции магнитного поля \mathbf{H} , а также сохраняющихся величин: энергии \mathcal{E} и проекции импульса на направление магнитного поля p_{z0} .

Случай I. Так как нас интересуют локальные свойства, то без потери общности можно считать, что M -поверхность — плоскость, на которой мы выберем начало координат; ось p_x параллельна плоскости, а ось p_z (магнитное поле, как всегда, параллельна оси z) составляет с плоскостью угол θ .

Можно показать [26], что вблизи линии пересечения плоскости $p_z = p_{z0}$ с M -поверхностью система уравнений для волновых функций $g_s(\mathbf{p})$ может быть записана следующим образом:

$$\left\{ \epsilon_s \left(P_x + i\sigma \frac{\partial}{\partial p_y}, \bar{p}_y, p_z \right) - \mathcal{E} \right\} g_s(\mathbf{p}) + \delta p_y \sum_{s'=1, 2} v_{ss'}^{(y)} \left(P_x + i\sigma \frac{\partial}{\partial p_y}, \bar{p}_y, p_z \right) g_{s'}(\mathbf{p}) = 0, \quad (10.11)$$

где

$$\delta p_y = p_y - \bar{p}_y, \quad \delta p_y \ll \bar{p}_y = p_{z0} \operatorname{tg} \theta,$$

причем при выводе этого уравнения был учтен квазиклассический характер движения, т. е., по сути дела, учтена малость параметра σ . Однако при этом, естественно, не были отброшены члены, связанные с магнитным пробоем (содержащие $v_{ss'}$ при $s \neq s'$), и существенно использовалась структура энергетического спектра вблизи точки сближения. Решая эту систему в том же приближении и сшивая решение с функциями (10.8), после довольно сложных вычислений можно получить выражения для элементов матрицы $\tau_{ss'}^{(\nu)}$:

$$\hat{\tau}^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \tau_\nu e^{i\omega_\nu} & -\rho_\nu \\ \rho_\nu & \tau_\nu e^{-i\omega_\nu} \end{pmatrix}, \quad \tau_\nu^2 + \rho_\nu^2 = 1, \quad (10.12)$$

где

$$\rho_\nu = e^{-\pi Y_\nu/2}; \quad Y_\nu = \frac{c\Delta_\nu^{-2}(\mathcal{E}, p_{z0})}{e\hbar H |\bar{v}_x^\nu \bar{v}_{12}^{\nu\nu}| \cos \theta}, \quad (10.13)$$

а

$$\omega_\nu = \left[\frac{\pi}{4} + \frac{Y_\nu}{2} - \frac{Y_\nu}{2} \ln \frac{Y_\nu}{2} + \arg \Gamma \left(\frac{iY_\nu}{2} \right) \right] \operatorname{sign} \bar{v}_x^\nu. \quad (10.14)$$

Черта над Δ_v и v означает, что они берутся в точке, лежащей на M -поверхности (плоскости), посередине между траекториями $\varepsilon_{1,2}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, $p_z = p_{z0}$; $\Gamma(z)$ — гамма-функция Римана. Унитарность матрицы τ обеспечивает закон сохранения частиц — непрерывность плотности потока вероятности. Величина ω_v определяет скачок фазы волновой функции при магнитном пробое, вероятность W которого определяется параметром межзонного пробоя γ_v . При $\gamma_v \rightarrow 0$ (т. е. при стремлении вероятности пробоя к единице) скачок фазы стремится к нулю. По определению,

$$W_v = |\tau_{12}^v|^2 = |\tau_{21}^v|^2 = \rho_v^2 = e^{-H_{п.м}^v/H}, \quad (10.15)$$

где

$$H_{п.м}^v = H_{п.м}^v(\mathcal{E}, p_{z0}) = \frac{c\pi\Delta_v^2}{e\hbar \left| \frac{\partial \varepsilon_{1,2}^v}{\partial p_z} \right| \cos \theta}. \quad (10.16)$$

Формула (10.16) подтверждает нашу оценку (10.2). Полученные формулы справедливы при любых значениях магнитного поля. Согласно (10.15) и (10.16) вероятность W_v уменьшается с увеличением угла θ между магнитным полем \mathbf{H} и M -плоскостью. При $\theta \rightarrow \pi/2$ параметр $H_{п.м}^v \rightarrow \infty$, а $W_v \rightarrow 0$, однако, когда магнитное поле почти перпендикулярно M -плоскости, классические траектории сближаются не на малом участке и приведенный выше метод расчета неприменим. Анализ вывода показывает, что формулы (10.12) — (10.16) можно использовать, если $\Delta\theta \gg \mu H/\varepsilon_0$ ($\Delta\theta = \pi/2 - \theta$), что, учитывая малость магнитных полей по сравнению с внутриатомными, не слишком ограничивает применимость выписанных здесь формул.

Случай II. Значения p_y , при которых существенные переходы, расположены вблизи точки $p_0^{(y)}(p_{z0})$. Строя приближенную систему уравнений, справедливую при малых $\delta p_y = p_y - p_0^{(y)}(p_{z0})$, и решая ее в квазиклассическом приближении, после сшивки получим матрицу τ , которую можно записать в форме (10.12), но «частота» ω и параметр пробоя γ в этом случае будут иметь вид:

$$\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\gamma}{2} + \arg \Gamma\left(\frac{i\gamma}{2}\right), \quad \gamma = B \delta p_z^2 / \sigma. \quad (10.17)$$

Здесь $\delta p_z = p_z^z(\mathcal{E}) - p_{z0}$, а B — безразмерный параметр, зависящий от направления магнитного поля и от вида эллиптического конуса вблизи точки вырождения. Формулы (10.17) справедливы, только если направление магнитного поля таково, что классические траектории вблизи точки вырождения имеют две ветви и, следовательно, магнитный пробой возможен. В этой области направлений магнитного поля параметр $B \sim 1$, однако

при подходе к границе этой области параметр W стремится к бесконечности ($W \rightarrow 0$). Вторая из формул (10.17) показывает, что вероятность межзонного пробоя близка к единице при $\delta p_z \sim \sqrt{\sigma}$. Это означает, что в данном случае в межзонном пробое принимают участие электроны, движущиеся по траекториям, расположенным в узком слое вблизи точки вырождения. Это найдет свое отражение в макроскопических эффектах. Так же как формулы (10.12) — (10.16), выражения (10.17) справедливы при произвольном значении магнитного поля; однако надо помнить, что во всей полноте магнитный пробой может проявиться только тогда, когда вероятность перескочить с одной траектории на другую за счет столкновений мала по сравнению с W . Иначе говоря, магнитный пробой можно наблюдать только при низкой температуре на совершенных образцах металла.

Описанная нами в § 7 структура электронного энергетического спектра в магнитном поле существенно связана с характером классических траекторий электронов. В квазиклассическом приближении замкнутые траектории приводят к дискретным бесконечнократно вырожденным уровням энергии, а открытые траектории не квантуются. Полностью задача об энергетическом спектре электронов с учетом магнитного пробоя не решена. Трудность полного решения связана с тем, что при произвольном направлении магнитного поля даже при вероятности пробоя, близкой к единице, возникают аperiодичные траектории (последнее замечание относится к тому случаю, когда в результате пробоя замкнутые траектории превращаются в открытые; см., например, рис. 32). Однако при определенных направлениях магнитного поля задачу решить удастся. Будем считать, что магнитное поле параллельно одному из простых кристаллографических направлений, причем в первой зоне траектории открыты, а во второй замкнуты (см. рис. 32). Направление открытости (ось p_y) параллельно одному из векторов обратной решетки. Период вдоль этого направления равен $2\pi\hbar b$, траектории симметричны относительно оси P_y . Уровни энергии в этом случае (случай I по принятой классификации) могут быть получены из условия периодичности волновой функции вдоль оси p_y :

$$g_s(p_y) = g_s(p_y + 2\pi\hbar b). \quad (10.18)$$

Мы опять опустим выкладки (которые можно найти в цитированной работе [26]) и приведем окончательный результат — уравнение для определения уровней энергии электрона:

$$\frac{S_2}{2\sigma} - \omega = \pi n - \arccos \frac{\rho^2 \sin \Phi_1}{\sqrt{[2\tau \cos \varphi - (1 + \tau^2) \cos \Phi_1]^2 + \rho^4 \sin^2 \Phi_1}}, \quad (10.19)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{S_1}{2\sigma} + \omega, \quad \varphi = \frac{2\pi\hbar b P_x}{\sigma}.$$

Здесь n — произвольное целое число; $S_2(\mathcal{E}, p_z)$ — площадь, ограниченная замкнутой траекторией $e_2(\mathbf{p}) = \mathcal{E}$, $p_z = \text{const}$; $S_1(\mathcal{E}, p_z)$ — площадь фигуры, образованной двумя открытыми траекториями в первой зоне и границами ячейки; величины ω , $\rho^2 = W$, $\tau^2 = 1 - W$ определены формулами (10.13) и (10.14). При фиксированных n и p_z уравнение (10.19) определяет однозначную периодическую по φ функцию $\epsilon = \epsilon_n(p_z, \varphi)$. Возникает новая зонная структура, причем ширина «магнитной» зоны порядка $\hbar\omega_H \sqrt{1 - W^2}$, а расстояние между зонами порядка $W\hbar\omega_H$ (ω_H — циклотронная частота). Структура спектра ясна из рассмотрения предельных случаев. Удобно начать с предельно больших магнитных полей. Когда магнитное поле достаточно велико, параметр пробоя γ очень мал, а W с ростом магнитного поля стремится к единице. Так как при $\gamma \rightarrow 0$ «частота» $\omega \rightarrow 0$, то уравнение (10.19) принимает вид:

$$S_1(\epsilon, p_z) + S_2(\epsilon, p_z) = 2\pi\sigma(n + 1/2), \quad \sigma = e\hbar H/c. \quad (10.20)$$

Это уравнение определяет дискретные уровни энергии (при фиксированном p_z), соответствующие движению по классической орбите, составленной из кусков траекторий в первой и второй зонах. С уменьшением магнитного поля уровни энергии

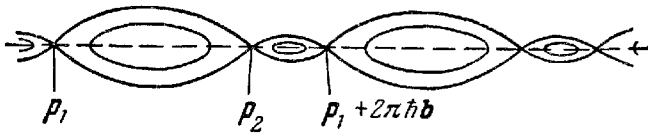


Рис. 34. Каждая изоэнергетическая поверхность при фиксированном значении p_z содержит одну самопересекающуюся траекторию. Точки самопересечения расположены периодически.

постепенно расширяются. В противоположном предельном случае ($\gamma \rightarrow \infty$, $W \rightarrow 0$) уравнение (10.19) распадается на два; одно из них описывает инфинитное движение по открытой траектории в первой зоне, а второе определяет дискретные уровни энергии, соответствующие классическому движению по замкнутой траектории во второй зоне.

Отметим, что состояние, описываемое уравнением (10.19), является токовым. Средняя скорость вдоль оси x отлична от нуля и с прежней точностью равна $\partial\epsilon_n/\partial p_x \sim v_0 \sqrt{1 - W^2}$, где $v_0 = e_0/2\hbar b$ — характерная скорость в зоне при $H = 0$.

Рассмотрение случая II тоже может быть проведено при специальном выборе направления магнитного поля. На рис. 34 изображена конфигурация, которая допускает полный расчет электронного энергетического спектра: магнитное поле

перпендикулярно p_0 -линии, на которой периодически расположены точки вырождения. Каждая изоэнергетическая поверхность при фиксированном значении p_z содержит одну самопересекающуюся открытую траекторию. Остальные траектории (при других значениях p_z) распадаются на систему замкнутых кривых. Учет магнитного пробоя приводит к тому, что дискретные уровни, соответствующие движению по замкнутым траекториям, расширятся в зону, состояние в которой определяется значением P_x .

Это означает, что средняя скорость в плоскости, перпендикулярной магнитному полю — вдоль оси x , отлична от нуля (и порядка Wv_0). В отличие от случая I скорость резко зависит от величины p_z , экспоненциально уменьшаясь с удалением от критической траектории.

Мы рассмотрели два, по сути дела, простейших случая перестройки электронного энергетического спектра за счет магнитного пробоя — ликвидация и появление открытых траекторий. В реальном кристалле могут встретиться самые разнообразные ситуации. С ростом магнитного поля постепенно должны начать «пробиваться» все более широкие перемычки, что приведет к существенному отклонению от простой квазиклассической картины, описанной в § 7. Ниже, при рассмотрении поведения металла в сильном магнитном поле мы подчеркнем роль магнитного пробоя.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ

Содержание этой части — равновесные свойства металлов при низких температурах. При этом, в духе всей книги, основное внимание уделено тем явлениям и свойствам, которые чувствительны к закону дисперсии электронов проводимости.

Изложение строится на основании «газовой модели», т. е. почти везде, если не оговорено противное, предполагается, что электроны проводимости представляют собой идеальный газ заряженных квазичастиц. Такое изложение кроме простоты оправдано тем, что в наиболее интересных случаях (низкие температуры, большие магнитные поля) результаты, полученные из модели ферми-жидкости (см. введение), совпадают с результатами, найденными в газовом приближении. Во всех случаях, когда имеется расхождение между моделями, это специально оговаривается. Надо, правда, помнить, что, строго говоря, понятие электрона проводимости как элементарного возбуждения с определенным квазиимпульсом имеет смысл только для возбуждений с энергией порядка фермиевской (см. введение). В процессе вывода мы часто будем пользоваться газовой терминологией для состояний, далеких от поверхности Ферми, однако подавляющее число приведенных здесь окончательных результатов определяется электронами с энергией порядка энергии Ферми. В некоторые формулы входит объем поверхности Ферми. Согласно теореме Ландау — Латинжера [1], эта величина инвариантна относительно включения взаимодействия. Поэтому такие понятия, как «число электронов», «число дырок», носят вполне достоверный характер.

§ 11. Критерий металла и диэлектрика. Энергия Ферми. Поверхность Ферми. Число электронов

В части I была описана общая структура электронного энергетического спектра, а также рассмотрено поведение отдельного электрона во внешних полях. Сейчас мы приступаем к изучению статистического ансамбля электронов. Свойства такого ансамбля существенно зависят от того, является кристалл диэлектриком или металлом. Зонная структура электронного энергетического спектра, которая лежит в основе нашего

рассмотрения, позволяет сформулировать критерий металла (проводника) и диэлектрика (изолятора). Наличие зон, частично заполненных электронами при абсолютном нуле температуры, характерно для металлов. У диэлектриков имеются целиком заполненные и целиком пустые зоны.

Полное заполнение энергетической зоны соответствует однородному заполнению всего пространства квазиимпульсов (или, короче, p -пространства). Так как в каждой ячейке фазового пространства может находиться не более двух электронов (с разными направлениями спинов), ясно, что в каждой зоне может находиться не более $2\mathfrak{N}$ электронов, где \mathfrak{N} — число элементарных ячеек в кристалле. Если бы энергетические полосы не перекрывались, то все кристаллы, имеющие четное число электронов на элементарную ячейку, были бы диэлектриками, а нечетное — металлами. Перекрывание зон делает такую классификацию совершенно неверной и объясняет тот факт, что большинство элементов в кристаллическом состоянии — металлы.

Как правило, в металлах имеется несколько частично заполненных зон. Они носят название зон проводимости. Именно эти зоны ответственны за металлические свойства металлов, в частности за электропроводность. Электроны, однородно заполняющие p -пространство и принадлежащие глубинным зонам, практически не принимают участия в тепловом движении*), так как для их возбуждения т. е. для перехода в зоны проводимости нужны энергии порядка нескольких электронвольт. Поэтому одной из наиболее существенных характеристик металла является число электронов в частично заполненных зонах (N), которое, как ясно из предыдущего, должно весьма слабо зависеть от температуры. Полное число электронов в незаполненных зонах, по-видимому, должно быть равно целому числу, умноженному на число атомов в кристалле.

Вся электронная система обладает единым химическим потенциалом ζ , который при нуле температуры определяет уровень заполнения энергетических зон электронами. Часто химический потенциал отсчитывают от дна соответствующей зоны. В этом случае, естественно, каждая зона обладает своим химическим потенциалом $\zeta_i = \zeta - \varepsilon_{0i}$, где ε_{0i} — энергия, соответствующая дну зоны. Энергия, ниже которой все электронные состояния при $T = 0$ заняты, носит название граничной энергии Ферми (ε_F), а соответствующая ей изоэнергетическая поверхность — поверхности Ферми.

*) Точнее, они в составе иона движутся вместе с решеткой. Деление всей электронно-ионной системы на независимые подсистемы — электроны и ионы (решетка) — обосновывается существенным различием скоростей ионов и электронов, обусловленным различием масс (адиабатическое приближение).

В металле граничная энергия Ферми расположена в одной из энергетических зон. Поверхность Ферми — сложная периодическая поверхность, которая у большинства металлов непрерывным образом проходит через всю обратную решетку (открытая поверхность — по терминологии § 2). Замкнутая поверхность Ферми, очевидно, периодически повторяется в каждой ячейке p -пространства.

Поскольку электроны при $T = 0$ занимают только те области p -пространства, где $\epsilon < \epsilon_F$, число электронов проводимости на одну элементарную ячейку равно

$$n = 2 \frac{\Delta_F}{\Delta}; \quad \Delta_F = \int_{(\Delta)} E(\epsilon - \epsilon_F) d\tau_p. \quad (11.1)$$

Здесь интегрирование ведется по объему Δ элементарной ячейки в p -пространстве, а функция $E(x)$ равна единице при $x > 0$ и нулю при $x \leq 0$ (§ 3).

Плотность электронов N/V (N — число свободных электронов в кристалле объема V) можно записать так:

$$N/V = 2\Delta_F/(2\pi\hbar)^3, \quad \dots \quad (11.2)$$

или, если воспользоваться определением плотности состояний (§ 3):

$$N = \int_0^{\epsilon_F} v(\epsilon) d\epsilon. \quad (11.2a)$$

Для замкнутой поверхности Ферми Δ_F — объем, заключенный внутри поверхности Ферми. Заметим, что эта поверхность может распадаться на несколько полостей, расположенных в одной ячейке.

В тех случаях, когда в металле имеется несколько частично заполненных зон, поверхность Ферми распадается на несколько поверхностей (по числу незаполненных зон), причем характер пересечения этих поверхностей, если они пересекаются, строго определен принципом непересекаемости термов (§ 2). При этом величина Δ_F^s для каждой из этих поверхностей определяет число электронов на элементарную ячейку в соответствующей зоне:

$$n_s = 2\Delta_F^s/\Delta. \quad (11.3)$$

Естественно, что

$$\sum_s n_s = n. \quad (11.4)$$

Теоретическое вычисление формы поверхности Ферми всех металлов — в настоящее время задача неосуществимая. Поэтому наиболее естественным является определение формы поверхности Ферми по экспериментальным данным. Однако подобная задача

не может быть решена без привлечения пробных моделей. При их построении используют чаще всего либо приближение почти свободных электронов (Бриллюэн), либо приближение связанных электронов, восходящее к Блоху [2]. Наиболее существенным в этих двух методах является тщательный учет симметрии кристалла, дающий возможность разобраться в общих контурах

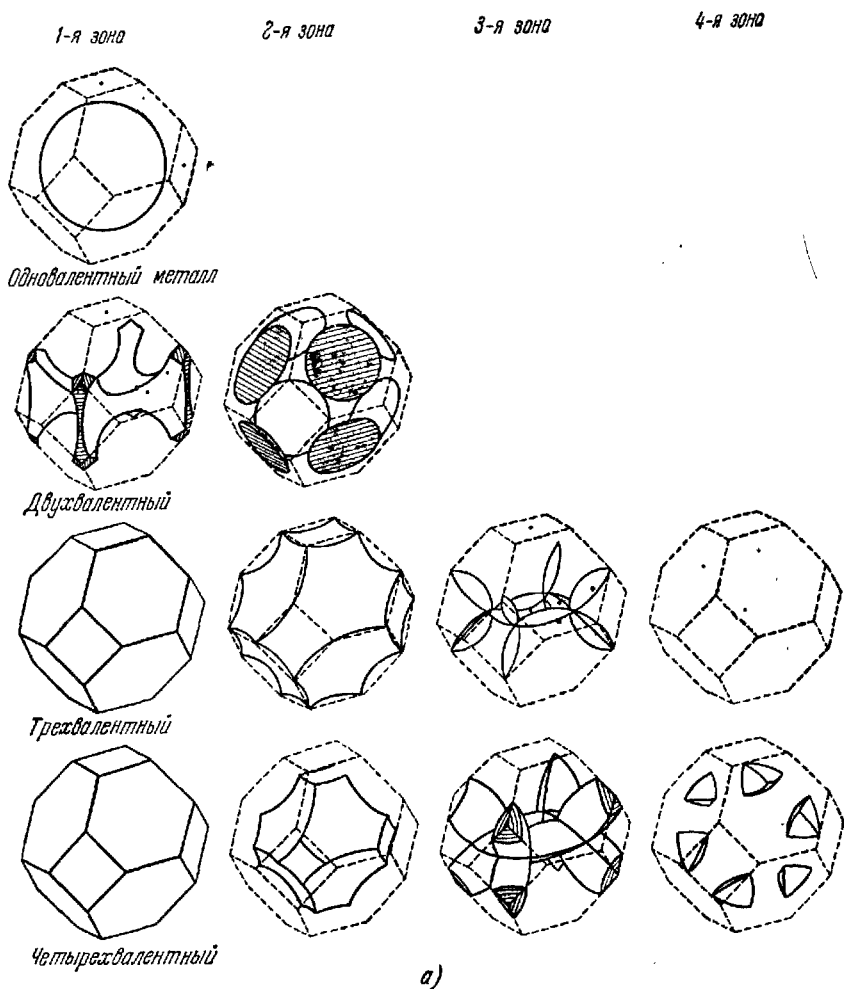
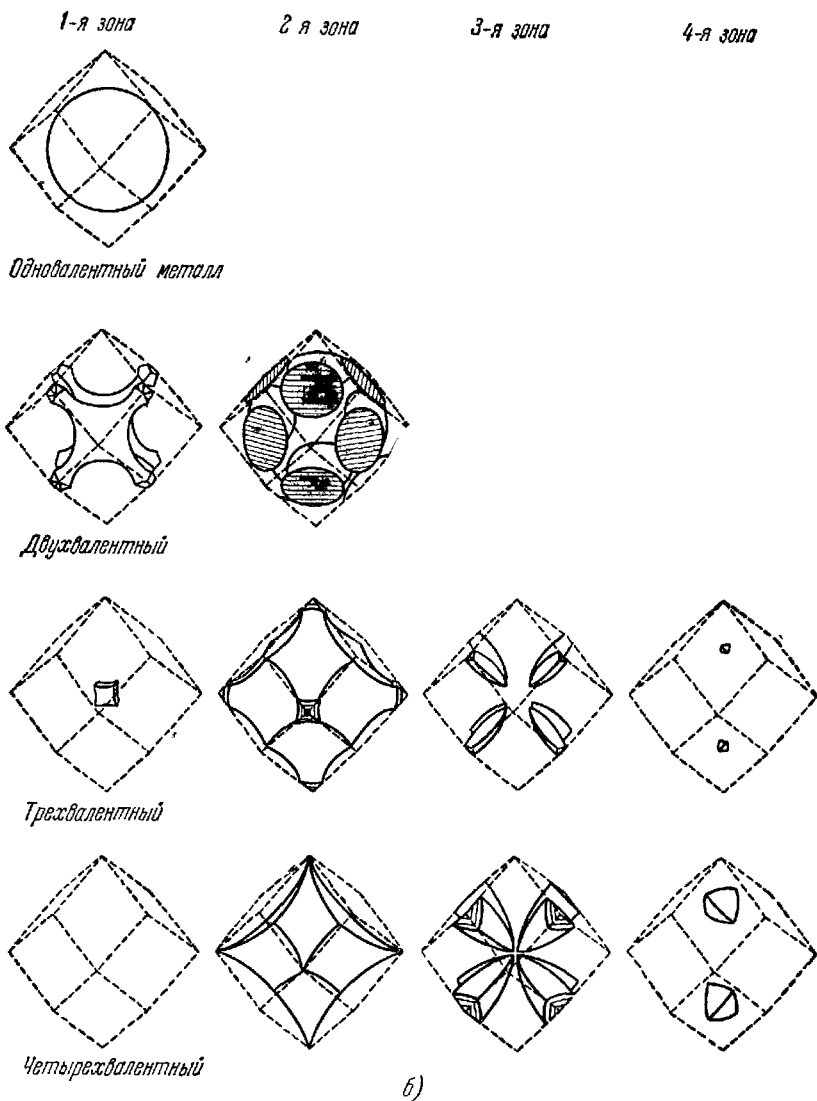


Рис. 35. Поверхности a — кристаллы с гранецентрированной кубической

поверхности, а также найти точки обязательного вырождения, что позволяет определить структуру отщепившихся областей поверхности Ферми (см., например, [3]).

Идея первого метода (метода почти свободных электронов) кратко изложена в § 10. Основное следствие таково: вся анизо-

тропия поверхности Ферми — результат периодичности кристалла. В нулевом приближении поверхность Ферми — совокупность



Ферми по Харрисону [3]:
решеткой; б — с объемноцентрированной.

сфер радиуса $2\pi\hbar \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3}$ с центрами в точках p -пространства, эквивалентных $p = 0$ (в точках $p = 2\pi\hbar\mathbf{b}$, где \mathbf{b} — произвольный вектор обратной решетки). Учет взаимодействия сводится к снятию вырождения (если диаметр сферы оказывается

больше размеров ячейки) и приводит к существенной перестройке поверхности Ферми, например возникают открытые поверхности. Использование метода почти свободных электронов для построения поверхностей Ферми [3] находит дополнительное оправдание в том, что у поливалентных металлов, для которых результаты построения неплохо согласуются с экспериментами, фермиевская энергия очень высока, а поле решетки в большей своей части компенсируется электронами проводимости. На рис. 35 изображены поверхности Ферми ряда поливалентных металлов. Обращает на себя внимание многообразие форм. Надо, однако, помнить, что эти поверхности составлены из «обрезков» сфер.

Другое приближение (приближение сильно связанных электронов) использует разложение энергии в ряд Фурье, а модельность метода связана с использованием не всего ряда, а лишь нескольких слагаемых, удовлетворяющих всем элементам симметрии кристалла. Возможные типы поверхностей Ферми ряда металлов (Ag, Au и др.) рассмотрены так в работе [4] (а также [5]). Найденные поверхности Ферми удается согласовать с экспериментальными результатами (см., например, [6]), и они в ряде случаев весьма похожи на поверхности, получающиеся из модели слабо связанных электронов. Близость результатов, полученных различными методами, объясняется, разумеется, тем, что оба метода правильно учитывают все элементы симметрии кристаллов.

В некоторых случаях можно исследовать форму поверхности Ферми или ее участка, не прибегая к специальным модельным соображениям. Так бывает всегда, когда поверхность Ферми расположена вблизи особых точек в p -пространстве (§ 2, 3). Простейший пример: энергия Ферми близка к «дну» (или к «потолку») зоны. Другими словами: поверхность Ферми расположена вблизи той точки в p -пространстве, где энергия в данной зоне достигает минимума (или максимума). Если речь идет о всей поверхности Ферми, то подобная ситуация может иметь место только при очень небольшом перекрытии энергетических зон. Подобная картина наблюдается у металлов V группы периодической системы (Sb, As, Bi). Кристаллические решетки этих металлов однотипны. Они относятся к ромбоэдрической системе с двумя атомами в ячейке, причем особенностью этих решеток является то, что они могут быть получены из простых кубических решеток с одним атомом на ячейку путем незначительного смещения атомов. Кристаллы с нечетным числом электронов на ячейку (напомним, что As, Sb и Bi имеют нечетное число электронов на атом — V группа!) должны быть хорошими металлами, т. е. иметь энергию Ферми где-то в середине зоны, поскольку всего в зону помещается два электрона на ячейку.

Однако изменение трансляционной симметрии, приводящее к удвоению объема ячейки, резко уменьшает число электронов в зоне проводимости и может, в принципе, даже перевести металл в диэлектрик. Напомним, что при удвоении объема ячейки кристалла объем ячейки в p -пространстве вдвое уменьшается.

На рис. 36 в виде примера рассмотрено удвоение периода в одномерном и двумерном случаях. В работе [7] путем теоретико-группового анализа показано, что при некоторых весьма

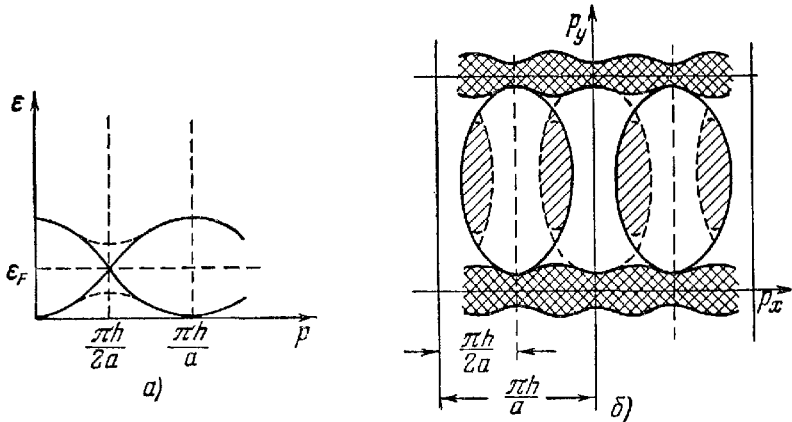


Рис. 36. Изменение электронного энергетического спектра в результате удвоения периода:

a — одномерный случай: в результате удвоения периода «металл» с электронами, заполняющими половину зоны, превращается в диэлектрик; b — двумерный случай: в результате удвоения периода по оси x число электронов проводимости в «металле» с первоначально наполовину заполненной зоной резко уменьшилось; появились малая электронная (ординарная штриховка) и малая дырочная (двойная штриховка) зоны.

общих предположениях энергетически выгодно возникновение малых (но конечных) внутренних деформаций в кубической решетке, которые приводят к понижению ее симметрии и к удвоению объема элементарной ячейки (см. также работу [7a]). Одно из условий такого превращения заключается в том, что поверхность Ферми праметалла (исходной кубической модификации) проходит в p -пространстве достаточно близко от точек обязательного вырождения. По-видимому, нет необходимости искать какие-либо специальные физические основания для объяснения того факта, что поверхность Ферми проходит близко от этих точек (расположенных на границах зоны Бриллюэна), поскольку поверхность сферы с объемом, соответствующим числу электронов в элементарной ячейке, проходит весьма близко (численно) от границ бриллюэновской зоны. Так как модель слабой связи, как мы говорили, дает хорошее приближение

к экспериментально определенным формам поверхности Ферми у поливалентных металлов, аргументация с помощью модели слабой связи достаточно убедительна *).

Полученный в работе [7] спектр металлов V группы весьма сложен, причем сложность спектра связана с учетом вырождения (§ 2 и 10). Если же не учитывать вырождения, то поверхность Ферми, расположенная вблизи того значения $\rho = \rho_0$, где энергия в данной зоне имеет минимум $\epsilon(\rho_0) = \epsilon_0$, есть эллипсоид с полуосями $\sqrt{2m_1(\epsilon_F - \epsilon_0)}$, $\sqrt{2m_2(\epsilon_F - \epsilon_0)}$, $\sqrt{2m_3(\epsilon_F - \epsilon_0)}$, где m_1 , m_2 , m_3 — главные значения тензора эффективных масс $(\partial^2\epsilon/\partial\rho_i\partial\rho_k)_{\rho=\rho_0}$. Из формулы (11.3) при этом легко находим

$$\epsilon_F - \epsilon_0 = \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \frac{(2\pi\hbar)^2}{2(m_1 m_2 m_3)^{1/3}}. \quad (11.5)$$

Если поверхность Ферми расположена вблизи того значения $\rho = \rho_1$, где $\epsilon(\rho)$ достигает максимума $\epsilon(\rho_1) = \epsilon_1$, то поверхность Ферми также является эллипсоид. Его полуоси $\sqrt{2m'_1(\epsilon_1 - \epsilon_F)}$, $\sqrt{2m'_2(\epsilon_1 - \epsilon_F)}$, $\sqrt{2m'_3(\epsilon_1 - \epsilon_F)}$ определяются главными значениями тензора эффективных масс m'_1 , m'_2 , m'_3 взятыми с обратным знаком. Величину $\epsilon_1 - \epsilon_F$ часто связывают с числом свободных электронных состояний в данной зоне (N'):

$$\epsilon_1 - \epsilon_F = \left(\frac{3N'}{8\pi V}\right)^{2/3} \frac{(2\pi\hbar)^2}{2(m'_1 m'_2 m'_3)^{1/3}}. \quad (11.6)$$

По поводу малого пересечения зон следует сделать еще одно замечание [8]. Как мы уже говорили, электроны вблизи максимума в зоне имеют отрицательную эффективную массу, вследствие чего их поведение напоминает поведение положительных частиц. В частности, они притягиваются электронами с положительной массой. Это кулоновское притяжение может привести к образованию квазиатома из двух электронов (с положительной и отрицательной массами), которое проявится в ликвидации пересечения зон и в появлении запрещенной зоны, т. е. щели между разрешенными зонами. Условие того, что это не произойдет, имеет следующий вид:

$$n^{1/3}/m^* > 2e^2/(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2$$

и может быть получено как условие того, что фермиевская (кинетическая) энергия больше энергии кулоновского притяжения. Таким образом, если существует малое пересечение зон

*) Подробное изложение теории электронной энергетической структуры Вi и сравнение с результатами эксперимента см. в работе [76].

(малые n), то электроны (или дырки) должны иметь очень малые массы. Носители заряда в висмуте и других металлах V группы удовлетворяют выписанному выше условию.

Мы рассмотрели те случаи, когда вся поверхность Ферми — эллипсоид. Возможно, что эллипсоид — только небольшая часть сложной поверхности Ферми. Как ясно из предыдущего, это бывает тогда, когда энергия Ферми ϵ_F близка к одному из тех критических значений энергии ϵ_k , при которых появляется новая отщепленная полость поверхности. Участок поверхности Ферми, который расположен вблизи точки $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k$ — точки, в которой возникает новая полость, хорошо описывается уравнением эллипсоида. Заметим, что число электронов внутри эллипсоида (если $\epsilon_F > \epsilon_k$) или число свободных состояний внутри эллипсоида (если $\epsilon_F < \epsilon_k$) связаны с величиной $\epsilon_F - \epsilon_k$ формулой (11.5) в первом случае и формулой (11.6) — во втором. Когда вблизи поверхности Ферми расположена коническая точка ϵ_k , т. е. энергия Ферми близка к одному из критических значений ϵ_k , при котором происходит изменение топологии изоэнергетических поверхностей, то, конечно, нельзя выяснить из общих соображений форму всей поверхности Ферми. Но участок поверхности, расположенный вблизи \mathbf{p}_k , хорошо аппроксимируется уравнением двуполостного гиперболоида. Как будет видно из дальнейшего, этот участок поверхности Ферми играет существенную роль, так как в точке $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k$ скорость обращается в нуль (§§ 2, 13).

В § 2 (а также в § 10) мы исследовали структуру энергетического спектра вблизи точек вырождения. Весьма специальный характер пересечения изоэнергетических зон заставляет изоэнергетические поверхности, проходящие через точку вырождения, считать одной самопересекающейся изоэнергетической поверхностью. Если совпадение энергии Ферми ϵ_F с одним из изолированных критических значений энергии ϵ_k , при котором меняется топология изоэнергетических поверхностей, следует считать случайностью (см., правда, § 13), то при пересечении зон весьма вероятно, что поверхность Ферми является самопересекающейся поверхностью, так как вырождение, как правило, происходит при значениях энергии, заполняющих некоторый конечный интервал. Следует к этому добавлять, что для ряда металлов на избранных линиях и плоскостях в \mathbf{p} -пространстве должно происходить обязательное вырождение. Так вот, если поверхность Ферми содержит точку вырождения, то естественно считать, что обе части поверхности Ферми (в одной и другой зоне) расположены в одном и том же \mathbf{p} -пространстве, учитывая, что часть \mathbf{p} -пространства двукратно заполнена электронами. Электроны, однородно заполняющие \mathbf{p} -пространство, т. е. электроны полностью заполненных зон, не учитываются вовсе. На

рис. 37 изображена поверхность Ферми графита (согласно [9]). Все p -пространство вне «дырочной» полости заполнено электронами, причем внутри электронной полости дважды. Заметим еще, что формула (11.3), связывающая объем, заключенный внутри поверхности Ферми Δ_F^s , с числом электронов в зоне n_s , не требует какого-либо исправления (или обобщения) на случай вырождения.

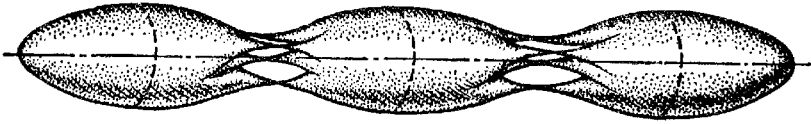


Рис. 37. Поверхность Ферми графита.

Избранный характер значений квазиимпульса, при которых наблюдается вырождение, приводит к тому, что при этих же значениях, как правило, энергия достигает своего минимального (либо максимального) значения. Если две зоны имеют общий минимум, то, хотя они, естественно, имеют одинаковые граничные энергии, числа электронов в этих зонах, конечно, не совпадают (рис. 38).

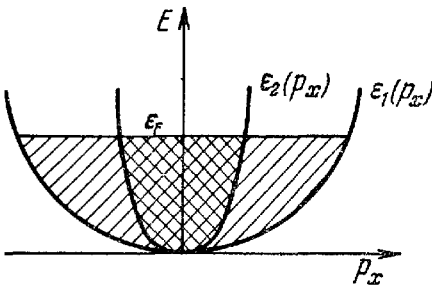


Рис. 38. Заполнение энергетических зон с общим минимумом. При общем уровне заполнения ($\epsilon_{1,2} < \epsilon_F$) числа электронов в зонах различны.

Несколько слов о граничной энергии Ферми диэлектрика (изолятора). Если считать, что диэлектрик получен из металла путем постепенного уменьшения числа электронов или «дырок» (например, благодаря внедрению акцепторных или донорных примесей), то, естественно, с уменьшением числа носителей поверхность Ферми стягивается в точку и энергия Ферми в пределе совпадает с границей зоны. Однако принято под энергией Ферми диэлектрика*) понимать предельное значение химического потенциала электронов при стремлении к нулю температуры. При таком определении уровень Ферми располагается в запрещенной области энергии — между последней заполненной и первой пустой зонами (для двух зон строго посреди запрещенной полосы).

*) Диэлектрик при рассмотрении его электронных свойств обычно именуют собственным полупроводником.

§ 12. Термодинамика электронов проводимости

Знание закона дисперсии, а следовательно, и плотности электронных состояний (§ 3) позволяет построить термодинамику электронов проводимости.

Как было сказано выше, структура электронного энергетического спектра металла в несверхпроводящем состоянии такова, что заряженные элементарные возбуждения, которые мы называем электронами проводимости, представляют собой газ квазичастиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака. Это означает, что равновесная функция распределения электронов $n_F(\epsilon)$ — это функция Ферми

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{T}} + 1}, \quad (12.1)$$

где T — температура, измеренная в эргах, а ζ — химический потенциал, определяемый условием нормировки

$$N = \int \frac{v(\epsilon) d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{T}} + 1}. \quad (12.2)$$

Интегрирование можно распространить на все энергии, так как зонная структура учтена функцией $v(\epsilon)$: в запрещенных областях энергии $v(\epsilon) \equiv 0$.

Построение термодинамики удобно начать с записи термодинамического потенциала [10]

$$\Omega = -T \int v(\epsilon) \ln \left[1 + e^{\frac{\zeta - \epsilon}{T}} \right] d\epsilon, \quad (12.3)$$

производная по химическому потенциалу от которого совпадает с полным числом частиц $\left(-\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = N \right)$.

После интегрирования по частям

$$\Omega = - \int \frac{N(\epsilon) d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{T}} + 1}. \quad (12.4)$$

С другой стороны, полная энергия электронного газа равна

$$E = \int \frac{\epsilon v(\epsilon) d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{T}} + 1}. \quad (12.5)$$

Сравнение формул (12.4) и (12.5) показывает, что известное соотношение $PV = \frac{2}{3}E$, где P — давление (напомним, что $\Omega = -PV$), имеет место только для свободных электронов, для

которых

$$v(\epsilon) = dN/d\epsilon \sim \epsilon^{1/2} \quad (\text{см. формулы (3.16) и (3.17)}).$$

Так как $\Omega = -PV$, уравнения (12.2) и (12.4) можно рассматривать как параметрическое задание уравнения состояния газа электронов проводимости, причем параметром является химический потенциал ζ . Как видно из этих формул, уравнение состояния существенно зависит от плотности состояний $v(\epsilon)$, т. е., по существу, от закона дисперсии.

Рассмотрим теперь наиболее важный случай низких температур, т. е. будем считать, что электронный газ сильно вырожден.

Условие вырождения очень просто формулируется в случае газа свободных электронов: $T \ll \epsilon_F$. В случае электронов проводимости — электронов со сложным законом дисперсии — условие вырождения означает, что

$$T \ll \min |\epsilon_F - \epsilon_k|, \quad (12.6)$$

где ϵ_k — особые (критические, экстремальные) значения энергии.

Если условие (12.6) имеет место, то при вычислении интегралов, содержащих функцию Ферми $n_F(\epsilon)$, можно пользоваться известным разложением по степеням температуры:

$$\int_0^{\zeta} \varphi(\epsilon) n_F(\epsilon) d\epsilon \approx \int_0^{\zeta} \varphi(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} T^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=\zeta} + \dots \quad (12.7)$$

Из выражений (12.4), (12.7) и (12.6) имеем

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{\pi^2}{6} v(\zeta) T^2 + \dots \quad (12.8)$$

Здесь Ω_0 — значение термодинамического потенциала Ω при $T = 0$:

$$\Omega_0 = - \int_0^{\zeta} N(\epsilon) d\epsilon. \quad (12.8a)$$

Рассматривая второй член в (12.8) как малую добавку к Ω_0 и выражая в нем ζ через плотность электронов с помощью нулевого приближения (т. е., попросту говоря, заменяя химический потенциал ζ граничной энергией ϵ_F , которая связана с плотностью электронов формулой (11.2)), мы можем записать для свободной энергии

$$F = F_0 - \frac{\pi^2}{6} v(\epsilon_F) T^2 + \dots, \quad F_0 = \int_0^{\epsilon_F} v(\epsilon) \epsilon d\epsilon. \quad (12.9)$$

Отсюда находим энтропию S_e и теплоемкость C_e газа электронов проводимости *):

$$S_e = \frac{\pi^2}{3} \nu(\epsilon_F) T, \quad C_e = \frac{\pi^2}{3} \nu(s_F) T. \quad (12.10)$$

Таким образом, электронная теплоемкость C_e при низких температурах (см. уравнение (12.6)) линейно зависит от температуры. Этот вывод не связан с законом дисперсии электронов проводимости. Более того, формула (12.10) остается справедливой, даже если учесть взаимодействие между электронами в духе теории ферми-жидкости Ландау [11].

Из формул (12.8) — (12.10) легко найти приближенные выражения для энергии E и для термодинамического потенциала Φ газа электронов проводимости:

$$E \approx E_0 + \frac{\pi^2}{6} \nu(\epsilon_F) T^2, \quad E_0 = \int_0^{\epsilon_F} \nu(\epsilon) \epsilon d\epsilon; \quad (12.11)$$

$$\Phi \approx \Phi_0 - \frac{\pi^2}{6} \nu(\epsilon_F) T^2, \quad \Phi_0 = N\epsilon_F. \quad (12.12)$$

Последнее выражение позволяет определить коэффициент температурного расширения α , равный $-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$:

$$\alpha \approx \frac{\pi^2}{3} V^{-1} \frac{\partial}{\partial P} [\nu(\epsilon_F)] T. \quad (12.13)$$

Отметим, что формула (12.13) имеет не меньшую общность, чем формула (12.10). В частности, формула (12.13) имеет место и при учете взаимодействия электронов. Действительно, $\alpha \sim \partial^2 \Phi / \partial T \partial P = \partial^2 \Phi / \partial P \partial T = \partial S / \partial P$, а энтропия электронов как величина, имеющая комбинаторный смысл, определяется систематикой состояний, не меняющейся при переходе от ферми-газа к ферми-жидкости.

У большинства металлов условие вырождения выполняется практически при всех температурах. Поэтому электроны проводимости вносят весьма малый вклад в термодинамические величины металла (в теплоемкость, во внутреннюю энергию и т. п.). Однако при низких температурах, когда внутренняя энергия колебательных степеней свободы быстро ($\sim T^4$) стремится к нулю, роль электронов проводимости резко возрастает. При температурах **) $T \ll \Theta \sqrt{\Theta/\epsilon_F}$, где Θ — температура Дебая, электроны проводимости определяют термодинамические свойства металлов. В частности, это означает, что теплоемкость

*) При принятом здесь определении температуры (в эргах) теплоемкость — безразмерная величина.

**) Мы считаем для оценки, что $\nu(\epsilon_F) \approx N/\epsilon_F$, а $N \approx \mathfrak{N}$.

металла, а также его коэффициент теплового расширения линейно зависят от температуры в области достаточно низких температур. Этот факт хорошо известен как из экспериментальных, так и из теоретических исследований.

Постоянная γ в «законе» Грюнайзена (т. е. не зависящее от температуры отношение коэффициента температурного расширения α к теплоемкости C) для металлов в этой области температур определяется зависимостью плотности состояний электронов от давления *)

$$\gamma \approx \frac{\partial}{\partial P} \ln \nu(\epsilon_F). \quad (12.14)$$

Как видно из формулы (12.10), измерение теплоемкости металлов при низких температурах позволяет определить очень важную характеристику электронного энергетического спектра — плотность электронных состояний при энергии, равной фермиевской, а измерение постоянной γ — изменение плотности состояний с давлением (формула (12.14)).

Из экспериментов по эффекту де Гааза — ван Альфена и родственным явлениям (§§ 15—17) выяснено, что большинство металлов обладает аномально мало заполненными или почти полностью заполненными зонами. Это, другими словами, означает, что поверхность Ферми в одной или нескольких зонах проходит вблизи экстремальных точек в p -пространстве.

Зону, число электронов или число свободных мест в которой N_a значительно меньше числа ячеек в кристалле \mathfrak{N} ($N_a \ll \mathfrak{N}$), мы будем называть аномальной. Существование аномальных зон приводит к своеобразной температурной зависимости термодинамических характеристик металла, обусловленной существенной зависимостью от температуры числа электронов в аномальной зоне.

По определению,

$$N_a(T) = \int \frac{\nu_a(\epsilon) d\epsilon}{e^{-\frac{\epsilon - \xi(T)}{T}} + 1}, \quad (12.15)$$

причем температурная зависимость общего для всех зон химического потенциала весьма слаба:

$$\xi(T) \approx \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} \frac{\nu'(\epsilon_F)}{\nu(\epsilon_F)} T^2. \quad (12.16)$$

*) Постоянная Грюнайзена определяется как отношение полного коэффициента теплового расширения к полной теплоемкости тела, поэтому при температурах $\Theta \sqrt{\Theta/\epsilon_F} \ll T \ll \Theta$ постоянная Грюнайзена, естественно, определяется зависимостью от давления дебаевской температуры,

Здесь $v(\epsilon)$ — суммарная по всем зонам плотность электронных состояний, а $v_a(\epsilon)$ — плотность состояний в аномальной зоне. Аномалия проявляется в том, что $|\epsilon_{\text{extr}}^{(a)} - \epsilon_F| \ll v(\epsilon_F)/v'(\epsilon_F)$, где $\epsilon_{\text{extr}}^{(a)}$ — минимальное значение энергии в почти пустой зоне или максимальное в почти полной, а $v(\epsilon_F)/v'(\epsilon_F)$ характеризует «расстояние» от энергии Ферми ϵ_F до критических значений энергии ϵ_K в основных (неаномальных) зонах.

Из (12.16), (12.15) и (12.7) имеем

$$N_a(T) \approx \begin{cases} N_a(0) + \frac{\pi^2}{6} v_a(\epsilon_F) \frac{d}{d\epsilon_F} \left[\ln \frac{v_a(\epsilon_F)}{v(\epsilon_F)} \right] T^2, \\ T \ll |\epsilon_F - \epsilon_{\text{extr}}^{(a)}|, \\ N_a(0) \frac{3(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \left\{ \frac{T}{|\epsilon_F - \epsilon_{\text{extr}}^{(a)}|} \right\}^{3/2}, \\ \frac{v(\epsilon_F)}{v'(\epsilon_F)} \gg T \gg |\epsilon_F - \epsilon_{\text{extr}}^{(a)}|. \end{cases} \quad (12.17)$$

При получении последней формулы мы воспользовались тем, что согласно выражениям (3.7) $v_a(\epsilon) \sim |\epsilon - \epsilon_{\text{extr}}^{(a)}|^{1/2}$.

Разложение теплоемкости металла по степеням температуры начинается с линейного члена; следующий после линейного член разложения электронной теплоемкости по температуре должен содержать не T^3 (как в обычных случаях), а $T^{3/2}$, если в металле имеются аномальные зоны [12]. Для других характеристик металла аномальная температурная зависимость $N_a(T)$ может оказаться более существенной. Возможны случаи, когда свойства металла целиком или главным образом определяются электронами аномальных зон. Тогда вся зависимость от температуры данного свойства — следствие температурной зависимости числа электронов в аномальной зоне.

По сути дела до сих пор мы игнорировали тот факт, что любой образец металла ограничен. Естественно, что при рассмотрении объемных эффектов в тех случаях, когда размеры образца значительно больше постоянной решетки, такой подход вполне оправдан.

Физические свойства металлических образцов малых размеров (особенно тонких пленок и проволок) подробно изучаются в самых различных условиях. Сколько-нибудь полное описание этих работ выходит за рамки настоящей монографии. Однако есть несколько вопросов, которые по своей постановке близки описываемым здесь. Мы кратко остановимся на них (подробное изложение читатель может найти в цитируемых статьях) в этом и в последующем параграфах.

Учитывая квантование энергий электрона в пленке (§ 7), можно показать [12], что каждая поверхность металла вносит в плотность состояний электронов вклад, равный

$$v_{\sigma}(\varepsilon) = - \frac{2\sigma}{(2\pi\hbar)^2} \oint_{C(\varepsilon, \mathbf{e})} \frac{dl}{v}, \quad (12.18)$$

где σ — площадь поверхности, а интегрирование ведется по контуру $C(\varepsilon, \mathbf{e})$, который является проекцией на плоскость с нормалью \mathbf{e} (единичный вектор \mathbf{e} перпендикулярен поверхности) кривой, заданной уравнениями *)

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon; \quad \mathbf{e}\mathbf{v} = 0. \quad (12.19)$$

Для образца произвольной формы, если радиус кривизны R значительно больше длины волны де Бройля электронов (т. е. при $R \gg \lambda_B$), формула (12.18), естественно, обобщается:

$$v_{\sigma}(\varepsilon) = - \frac{2}{(2\pi\hbar)^2} \int d\sigma \oint_{C(\varepsilon, \mathbf{e})} \frac{dl}{v}, \quad (12.20)$$

причем интегрирование ведется по всей поверхности металла (\mathbf{e} — функция координат на этой поверхности).

Учет поверхностной плотности состояний позволяет вычислить добавки ко всем термодинамическим характеристикам металла (к теплоемкости, к коэффициенту теплового расширения и т. д.). Эти добавки, конечно, малы в меру малости отношения a/L , где L — наименьшие размеры образца. Наибольший интерес, несомненно, представляет вычисление электронной части поверхностного натяжения металла $\kappa_e = -\partial F_e/\partial\sigma$, которая выражается следующей формулой [12]:

$$\kappa_e = \frac{1}{8\pi^2\hbar^2} \int_0^{\varepsilon_F} S(\varepsilon, \mathbf{e}) d\varepsilon, \quad (12.21)$$

где

$$S(\varepsilon, \mathbf{e}) = \int E[\varepsilon - \varepsilon_0(\mathbf{p}_{\perp})] d\mathbf{p}_{\perp}, \quad \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - (\mathbf{p}\mathbf{e})\mathbf{e},$$

а определение $\varepsilon_0(\mathbf{p}_{\perp})$ дано формулами (7.19) и (7.18).

В формуле (12.21) опущены зависящие от температуры слагаемые, которые, как обычно, начинаются с члена, пропорцио-

*) Для выпуклой поверхности кривая (12.19) — граница «света и тени» на поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$, освещенной параллельным пучком света по направлению \mathbf{e} .

нального $T^2(\kappa_e(T) \approx \kappa_e(0)[1 + \beta(T/\epsilon_F)^2]$, $\beta \approx 1$). Подчеркнем, что электронная часть поверхностного натяжения металла выражается в терминах закона дисперсии $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$, как и другие термодинамические величины.

§ 13. Об аномалиях электронных характеристик металла в области больших давлений

Как мы уже говорили (§ 3), изменение топологии изоэнергетических поверхностей приводит к особенности плотности состояний $\nu(\epsilon)$. Вообще говоря, значения ϵ_K расположены достаточно далеко от граничной энергии Ферми ϵ_F и о наличии особых точек ϵ_K можно судить лишь по рентгеновским спектрам. Однако если существует какой-либо непрерывно меняющийся параметр, при изменении которого $\epsilon_F - \epsilon_K$ проходит через нуль, т. е. если можно изменить топологию граничной поверхности Ферми, то особенности спектральной плотности $\nu(\epsilon)$ и динамики электронов вблизи критической поверхности приводят к своеобразным аномалиям термодинамических и кинетических характеристик электронного газа в металле [14].

Таким непрерывным параметром могут служить деформации решетки, в частности всестороннее сжатие при сильных давлениях. Известно, что при больших давлениях анизотропия большинства свойств уменьшается, и поэтому можно ожидать, например, что характерная для слоистых структур поверхности Ферми типа «гофрированный цилиндр» должна, постепенно деформируясь, переходить в замкнутую поверхность даже при постоянстве полного числа электронов в зоне проводимости (рис. 39). Разумеется, возможны и другие изменения топологии поверхности Ферми. Следует подчеркнуть, что они не связаны с изменением симметрии решетки и поэтому не отвечают фазовому переходу второго рода.

С другой стороны, первоначальная решетка может перестать быть термодинамически устойчивой еще до подхода к критической поверхности Ферми, так что фазовый переход

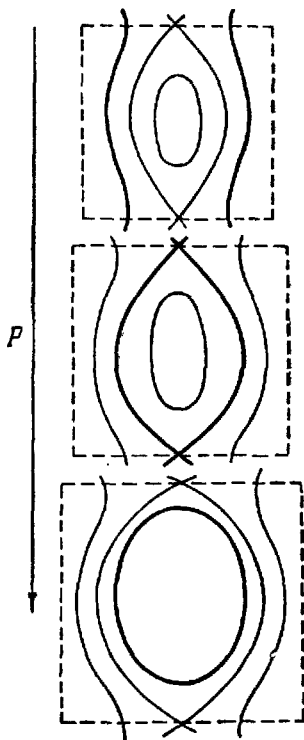


Рис. 39. Постепенный переход открытой поверхности Ферми (выделенной жирной линией на рисунке) в замкнутую. Следует обратить внимание на то, что с увеличением давления P ячейки обратной решетки несколько возрастают.

первого рода наступит раньше, чем проявятся аномалии, связанные с изменением топологии*). Однако вследствие малости времени электронной «подстройки» при деформировании металла по сравнению со временем перестройки решетки при фазовом переходе подобные аномалии могут наблюдаться и в кратковременном метастабильном состоянии; поэтому в дальнейшем вопрос о стабильности или метастабильности состояния вблизи точки изменения топологии поверхности Ферми может не рассматриваться.

Другой параметр — концентрация примеси или компонент в сплаве, — казалось бы, сильнее меняет химический потенциал ζ и поверхность Ферми. Однако для неупорядоченной решетки само понятие поверхности Ферми теряет точный смысл в связи с отсутствием трансляционной симметрии, поэтому особенность $v(\epsilon)$ размывается и фактически отсутствует**).

Ниже мы исследуем, какими свойствами обладает металл вблизи электронного перехода, вызванного изменением топологии поверхности Ферми.

Если химический потенциал ζ близок к ϵ_K , то в соответствии с формулами (12.4) и (3.8) термодинамический потенциал Ω будет иметь следующий вид:

$$\Omega(\zeta, T) = \Omega_0(\zeta, T) + \delta\Omega, \quad (13.1)$$

где

$$\delta\Omega = - \int_0^{\infty} \frac{\delta N(\epsilon) d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - \zeta}{T}} + 1}, \quad (13.2)$$

а

$$\delta N = \begin{cases} 0 & (\epsilon < \epsilon_K), \\ \frac{2}{3} \alpha (\epsilon - \epsilon_K)^{3/2} & (\epsilon > \epsilon_K). \end{cases} \quad (13.3)$$

Значение параметра α ясно из формул (3.9) и (3.6). Напомним: для определенности мы считаем, что новая полость существует при $\epsilon > \epsilon_K$. Полагая $\zeta - \epsilon_K = z$, получим, что при низких температурах ($T \ll z$) вблизи точки $z = 0$ изменение термодинамического потенциала Ω может быть представлено следующим образом:

$$\delta\Omega = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha T^{5/2} e^{-\frac{|z|}{T}}, & \text{(I)} \\ -\frac{4}{15} \alpha |z|^{5/2} - \frac{\pi^2}{6} \alpha T^2 |z|^{1/2}. & \text{(II)} \end{cases} \quad (13.4)$$

*) Такой случай, в частности, по-видимому, имеет место в так называемых изоморфных переходах, где скачком меняются параметры решетки при одном и том же типе структуры.

**) Это замечание не относится к сплавам Bi , на которых удается проследить существенное изменение поверхности Ферми, вводя в Bi акцепторные и донорные примеси [15].

Переход из области I в область II соответствует появлению новой полости у поверхности $\varepsilon(\rho) = \zeta$ (или уменьшению ее связности).

Обе формулы (13.4) справедливы при $T \ll |z|$. При абсолютном нуле температуры

$$\delta\Omega = \begin{cases} 0 & \text{(I),} \\ -\frac{4}{15} \alpha |z|^{5/2} & \text{(II).} \end{cases} \quad (13.5)$$

Это означает, что вторые производные Ω в точке $z = 0$, являющейся точкой электронной аномалии, имеют вертикальный излом, а третьи обращаются в бесконечность как $z^{-1/2}$.

Так как число электронов в зоне проводимости постоянно, для определения аномалий термодинамических величин удобно пользоваться не потенциалом Ω , а свободной энергией $F(T, V, N)$. При этом объем V является параметром, связанным с приложенным давлением; критическая энергия ε_K является непосредственной функцией объема $\varepsilon_K = \varepsilon_K(V)$, а химический потенциал ζ — тоже функция V в силу постоянства числа частиц *):

$$N(\zeta, V) = N. \quad (13.6)$$

Обозначим через V_K тот объем, при котором происходит изменение топологии поверхности Ферми, т. е.

$$\zeta(V_K) = \varepsilon_K(V_K). \quad (13.7)$$

Согласно (13.6) и (13.7), модуль величины z , который входит в формулы (13.4) и (13.5), можно выразить через $|V - V_K|$:

$$z = \gamma |V - V_K|; \quad \gamma = \left| v^{-1}(\varepsilon_K) \left\{ \frac{\partial N}{\partial V} + v(\varepsilon_K) \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial V} \right\} \right|, \quad (13.8)$$

причем мы воспользовались тем, что $\frac{\partial N}{\partial \zeta} = v(\zeta)$.

Запишем свободную энергию F в виде

$$F = F_0 + \delta F,$$

где F_0 — плавная часть свободной энергии, вычисляемая с помощью плотности состояний $\nu_0(\varepsilon)$. Легко убедиться, что δF количественно равна нерегулярной добавке $\delta\Omega$, выраженной в переменных V, T , т. е. δF задана формулами (13.4) и (13.5), в которых надо заменить $|z|$ по формуле (13.8):

$$\delta F = \begin{cases} -\frac{V\pi}{2} \alpha T^{1/2} e^{-\frac{|z|}{T}}, & \text{(I)} \\ -\frac{4}{15} \alpha |z|^{5/2} - \frac{\pi^2}{6} \alpha T^2 |z|^{3/2} & \text{(II)} \end{cases} \quad (T \ll |z|, |z| = \gamma |V - V_K|).$$

*) В случае нескольких перекрывающихся зон $N(\zeta, V)$ — полное число частиц во всех зонах.

Отсюда, при стремлении температуры к абсолютному нулю, получим

$$\delta \frac{C_e}{T} = -\delta \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \begin{cases} 0, & \text{(I)} \\ \frac{\pi^2}{3} \alpha |z|^{1/2}, & \text{(II)} \end{cases} \quad (13.9)$$

$$\delta \frac{\partial P}{\partial V} = -\delta \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = \begin{cases} 0, & \text{(I)} \\ \alpha \gamma^2 |z|^{1/2}, & \text{(II)} \end{cases} \quad (13.10)$$

$$\delta \left(\frac{\partial P}{\partial T} / T \right) = -\frac{1}{T} \delta \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \begin{cases} 0, & \text{(I)} \\ \frac{\pi^2}{3} \alpha \gamma |z|^{-1/2}. & \text{(II)} \end{cases} \quad (13.11)$$

Выражение (13.9) описывает аномалию электронной теплоемкости, выражение (13.10) — аномалию коэффициента электронной сжимаемости.

Полное давление в металле складывается из электронного давления и частично компенсирующего его давления решеточного «остова» металла. Поскольку, однако, решеточная часть сжимаемости $\partial P_p / \partial V$, вообще говоря, непрерывна в точке $z=0$, особенность полного коэффициента сжимаемости дается тем же уравнением *).

Как видно из (13.11), наиболее резкой особенностью обладает термический коэффициент давления $\partial P / \partial T$. Учитывая, что при низких температурах основную роль играет электронная часть термического коэффициента давления, имеем для плавной части

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = AT, \quad A = \frac{\pi^2}{3} \frac{\partial v}{\partial V}.$$

Таким образом, в области аномалии

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2}{3} T \left\{ \frac{\partial v}{\partial V} \pm \frac{1}{2} \alpha \gamma |z|^{-1/2} \right\}, \quad (13.12)$$

причем знак плюс имеет место в том случае, когда $V - V_K > 0$ в области II, а минус, когда $V - V_K < 0$ в области II. Такой же особенностью обладает и коэффициент теплового расширения

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V / \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{\pi^2 T}{3 \kappa_0} \left\{ \frac{\partial v}{\partial V} \pm \frac{1}{2} \alpha \gamma |z|^{-1/2} \right\}, \quad (13.13)$$

где

$$\kappa_0 = - \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T=0}.$$

*) Может оказаться, что часть «решеточной» энергии связи, обусловленная электронами проводимости, имеет в точке особенность того же характера, что и термодинамический потенциал электронов; это дало бы незначительную добавку к $\partial P / \partial V$, качественно не меняющую всех результатов.

Отметим специально, что если с увеличением давления в точке $P = P_K$ появляется новая полость, то коэффициент теплового расширения вблизи $P = P_K (V = V_K)$ со стороны больших давлений отрицателен и неограниченно возрастает по модулю при $P \rightarrow P_K$ (рис. 40).

Для того чтобы во всех формулах (13.9)—(13.11) можно было рассматривать аномалии по шкале давлений, достаточно учесть, что $P - P_K = -\kappa_0(V - V_K)$ и, следовательно,

$$|z| = \gamma |V - V_K| = \frac{\gamma}{\kappa_0} |P - P_K|. \quad (13.14)$$

При этом удобно оценить коэффициенты γ , γ/κ_0 и критическое давление P_K , выразив их через исходную разность энергий $z_0 = (\xi - \epsilon_K)_{P=0}$ (при нулевом давлении), а также критическую деформацию $(V - V_K)/V_0$, при которой осуществляется переход

$$\left. \begin{aligned} |z| &= \frac{|z_0| |P - P_K|}{P_K}, \\ P_K &= \kappa_0 |V - V_K|, \\ \gamma &= \frac{z_0}{|V_0 - V_K|}. \end{aligned} \right\} (13.15)$$

Разумеется, выражения (13.15) имеют лишь характер оценки, так как в большом интервале деформаций линейные соотношения между P и $V - V_0$ нарушаются. Если положить для критических деформаций $(V_0 - V_K)/V_0 \sim 0,05 \div 0,1$, то $P_K \sim 5 \cdot 10^4 \div 10^5 \text{ кг/см}^2$ *).

Строго говоря, формулы (13.9)—(13.11) справедливы при абсолютном нуле температуры. При конечных температурах особенности всех термодинамических величин размываются. Ширина температурного размытия аномалий $\Delta z \sim T$; в шкале давлений это дает

$$\frac{\Delta P}{P_K} \sim \frac{T}{|z_0|} = \frac{T}{|\xi - \epsilon_K|_{P=0}}. \quad (13.16)$$

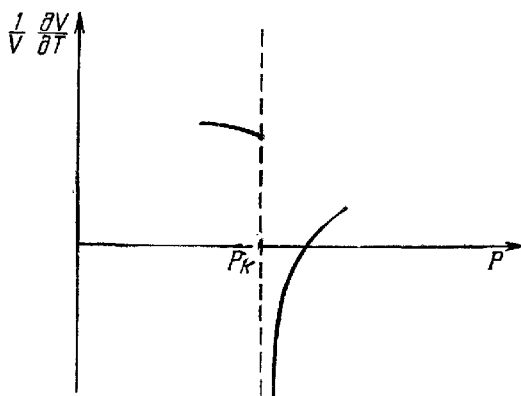


Рис. 40. Поведение коэффициента теплового расширения (при $T = 0$) вблизи критического давления P_K , если при $P = P_K$ число полостей у поверхности Ферми увеличивается.

*) Можно думать, что менее симметричные деформации (например, одно-стороннее сжатие или растяжение) сильнее меняют геометрию поверхности Ферми и требуют меньших напряжений. В частности, нарушение исходной симметрии кристалла при сколь угодно малых деформациях может привести к расщеплению поверхностей в точках обязательного самопересечения,

Как следует из формулы (13.10), в области аномалии отрицательная величина $(\partial P/\partial V)_0 = -\kappa_0$ получает положительную добавку $\sim z^{1/2}$. Если в результате $P(V)$ перестает быть монотонной функцией и на некотором участке $(\partial P/\partial V)$ оказывается положительной, то имеет место изоморфный фазовый переход первого рода со скачком объема. Записав разложение $(\partial P/\partial V)$ при малых положительных z и температуре, стремящейся к нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\kappa_0 + \alpha\gamma^2 z^{1/2} - \kappa_1 z,$$

убеждаемся, что область лабильности $\partial P/\partial V > 0$ может иметь место при условии $\alpha\gamma^2 > 2\sqrt{\kappa_0\kappa_1}$ и лежит справа от точки $z = 0$ в интервале

$$\alpha\gamma^2 - \sqrt{(\alpha\gamma^2)^2 - 4\kappa_0\kappa_1} < 2\kappa_0 z < \alpha\gamma^2 + \sqrt{(\alpha\gamma^2)^2 - 4\kappa_0\kappa_1}.$$

При этом сама точка электронного перехода $z = 0$ лежит в области метастабильности или стабильности.

Так как при конечной температуре особенность в точке $z = 0$ размывается, не следует называть электронный переход в этой точке фазовым переходом; в связи с этим все время говорится об «аномалиях» в точке $z = 0$, хотя по терминологии Эренфеста можно было бы условно назвать такие аномалии при $T = 0$ переходом $2^{1/2}$ -го рода, поскольку вторые производные от термодинамических потенциалов имеют особенность $\sim z^{1/2}$, а третьи — особенность $\sim z^{-1/2}$.

В § 2 мы указывали, что возможны случаи, когда плотность электронных состояний (во всяком случае, в грубом приближении) при некоторой энергии $\varepsilon = \varepsilon_k$ терпит конечный скачок (см. также формулу (3.12)). Если благодаря всестороннему сжатию (или какой-либо другой деформации кристалла) граничная энергия Ферми совпадает с такой критической энергией, то это должно проявиться в скачке электронной теплоемкости и других вторых производных от термодинамического потенциала. В этом, правда весьма специальном, случае электронная аномалия очень напоминала бы фазовый переход второго рода.

Оценка критического давления, приведенная выше, может оказаться значительно завышенной. Исследования последних лет с несомненностью показали, что поверхности Ферми большинства металлов содержат тонкие перемычки, очень малые отщепленные полости и т. п. (тонкая структура электронного энергетического спектра). Изменение топологии, связанное с тонким строением поверхности Ферми, может, по-видимому, наблюдаться при сравнительно небольших давлениях. Разнообразные экспериментальные исследования подтверждают эту точку зрения [15а]. Электронные аномалии, обусловленные изме-

нением топологии поверхности Ферми, должны проявляться не только в тех случаях, которые описываются формулами (13.9)—(13.11). К ним чувствительны магнитные свойства металла (см. следующий параграф); особенно ярко они должны проявиться в зависимости гальваномагнитных характеристик от давления (§ 27). И, наконец, неожиданно чувствительной к изменению топологии ферми-поверхности оказалась температура сверхпроводящего перехода [16].

Изменение топологии ферми-поверхности приводит, как ясно из предыдущего, к неаналитичности в зависимости химического потенциала от внешнего параметра (в данном случае от давления). Резкое изменение химического потенциала может наблюдаться в зависимости химического потенциала (а значит, и всех термодинамических величин) от магнитного поля, причем то обстоятельство, что аномалии в зависимости от магнитного поля могут происходить в достижимых полях, конечно, связано с существованием тонкой структуры электронного энергетического спектра (§ 19).

Поверхностная плотность состояний, обусловленная отражением электронов от границы, еще более чувствительна к изменению топологии, чем объемная. Формула (12.18) (или (12.20)) позволяет проанализировать зависимость плотности состояний $\nu_{\sigma}(\varepsilon)$ вблизи критических значений энергий ε_{κ} . При этом оказывается, что особенности $\nu_{\sigma}(\varepsilon)$ острее особенностей объемной части. Так, появление новой полости при $\varepsilon = \varepsilon_{\kappa}$ сопровождается скачком поверхностной плотности состояний, а если при $\varepsilon = \varepsilon_{\kappa}$ происходит разрыв перемычки (это значит, что на поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\kappa}$ имеется коническая точка), то $\nu_{\sigma}(\varepsilon)$ имеет логарифмическую особенность ($\delta\nu_{\sigma}(\varepsilon) \sim \ln|\varepsilon - \varepsilon_{\kappa}|$). Естественно, что обострение особенностей плотности состояний приводит к обострению особенностей термодинамических характеристик в области больших давлений, возникающих при изменении топологии поверхности Ферми, по сравнению с объемными характеристиками (см. выше). Например, коэффициент при температуре в поверхностной части теплоемкости металла C_{σ}/T должен испытывать скачок, если при $P = P_{\kappa}$ появляется (либо исчезает) полость ферми-поверхности. Если же при $P = P_{\kappa}$ происходит разрыв перемычки, то C_{σ}/T обладает логарифмической особенностью [12].

§ 14. Пара- и диамагнетизм (слабые магнитные поля)

Если поместить металл в магнитное поле, многие его свойства существенно изменяются. Так, например, в магнитных полях в несколько десятков килоэрстед при низких температурах в десятки, а иногда в сотни и тысячи раз увеличивается сопротивление чистых металлов. Как правило, особенно существенное

изменение претерпевают кинетические коэффициенты металлов (сопротивление, теплопроводность и др.). Однако и термодинамические равновесные характеристики металла также меняются под воздействием магнитного поля. В частности, все металлы в магнитном поле обладают магнитным моментом, который при низких температурах в больших полях сложным образом зависит от величины и направления магнитного поля.

Как известно [17], зависимость термодинамических величин от магнитного поля обусловлена квантованием энергии электронов и ядер. В отношении электронов это утверждение применимо и к электронам проводимости, электронам со сложным законом дисперсии. Действительно, при классическом рассмотрении учет магнитного поля соответствует переходу к кинетическим импульсам $\mathbf{p} = \mathbf{P} - (e/c)\mathbf{A}$ (см. §§ 1, 4). При вычислении термодинамических потенциалов интегрирование производится по всему \mathbf{P} -пространству. Делая замену переменных (переходя от \mathbf{P} к \mathbf{p}), убеждаемся, что термодинамические потенциалы вовсе не зависят от магнитного поля.

При квантовом рассмотрении зависимость от магнитного поля появляется по двум причинам. Во-первых, электроны и ядра имеют собственные (спиновые) магнитные моменты, а во-вторых, орбитальное (пространственное) движение заряженных частиц в магнитном поле квантуется. Наличие собственных магнитных моментов является причиной парамагнетизма и близких к нему явлений, а квантование орбитального движения — диамагнетизма.

Основная величина, подлежащая обсуждению в настоящем параграфе, — это статический магнитный момент металла. В магнитный момент металла вносят вклад не только электроны проводимости (т. е. не только электроны из частично заполненных энергетических полос). Если даже исключить ядра, вклад которых очень мал благодаря малости ядерных магнитных моментов, то остаются заполненные зоны, которые принимают участие в создании диамагнитного момента *).

Диамагнитную восприимчивость электронов проводимости удастся, исходя из газовой модели, выразить в терминах закона дисперсии [18], однако, во-первых, получающееся выражение крайне сложно, а во-вторых, зависит от свойств всех электронов, а не только от свойств электронов с $\epsilon \sim \epsilon_F$. С другой стороны, как мы указывали во введении, само понятие закона дисперсии применимо только вблизи поверхности Ферми. Поэтому нет оснований придавать особенно большое значение полученному в работе [18] выражению. При переходе к квадратичному и изо-

*) Деление момента на парамагнитный и диамагнитный возможно только в слабых полях, когда момент линейно зависит от магнитного поля.

тропному закону дисперсии значение диамагнитной восприимчивости из цитированной работы, естественно, совпадает со значением восприимчивости, найденным Ландау [19]:

$$\chi_d = \frac{1}{16 \cdot 3^{2/3} \pi^{1/3}} \frac{N^{1/3}}{m^* c^2} \quad (14.1)$$

(m^* — эффективная масса).

Спины электронов заполненных зон скомпенсированы*). Отсутствие свободных состояний в заполненных зонах приводит к экспоненциальной зависимости парамагнитного момента этих зон от температуры. Поэтому основную роль в парамагнетизме металла играют электроны проводимости (парамагнетизм Паули).

Как известно [20], парамагнитная восприимчивость металла χ_{Π} слабо зависит от температуры и при низких температурах $T \ll \epsilon_F$ определяется плотностью электронов на единичный интервал энергий при энергии, равной фермиевской:

$$\chi_{\Pi} = \mu^2 \nu(\epsilon_F). \quad (14.2)$$

Эта формула выведена в «газовой модели» металла, т. е. без учета взаимодействия между электронами. Учет межэлектронного взаимодействия изменяет формулу (14.2) в том смысле, что коэффициент при $\nu(\epsilon_F)$ нельзя считать равным μ^2 .

Вопрос о парамагнитной восприимчивости осложняется еще необходимостью в ряде случаев учитывать спин-орбитальную связь, которая может существенно изменить значение эффективного магнетона (такая ситуация наблюдается в Вi [21]). Фактически при этом уже нельзя вычислять отдельно диамагнитную и парамагнитную восприимчивости. Речь может идти о последовательном вычислении магнитного момента металла. По сути дела, разделение магнитной восприимчивости на диамагнитную и парамагнитную вообще лишено смысла, так как в металле это величины одного порядка**). Например, для газа свободных электронов диамагнитная восприимчивость составляет одну треть парамагнитной. Совпадение диамагнитной и парамагнитной восприимчивости по порядку величины — непосредственное следствие вырождения электронного газа ($T \ll \epsilon_F$).

*) Такая структура зон характерна для диамагнетиков. У парамагнетиков в заполненных зонах имеются электроны с нескомпенсированными спинами (аналогично тому, как у парамагнитных атомов имеются внутренние электроны с нескомпенсированными спинами). Обменное взаимодействие между спинами приводит, как правило, к их упорядочению, т. е. к появлению при достаточно низких температурах ферромагнетизма либо антиферромагнетизма.

** Вi и здесь составляет исключение: у Вi и его сплавов из-за малого расстояния между зонами диамагнитная восприимчивость аномально велика [18].

Во всяком случае, часть магнитной восприимчивости металла (в примитивной теории — парамагнитная) пропорциональна плотности электронных состояний на единичный интервал энергий (при энергии $\epsilon = \epsilon_F$). Это означает, что спиновый парамагнетизм испытывает аномалию при изменении топологии поверхности Ферми под воздействием давления (см. § 13, а также работу [14]). Выясним характер этой аномалии.

Для простоты рассмотрения ограничимся случаем идеального ферми-газа. Тогда

$$M_{\pi} = \frac{1}{2} \mu \{N(\zeta + \mu H) - N(\zeta - \mu H)\},$$

где $N(\epsilon)$ — число электронов с энергией, меньшей ϵ (§ 3). Отсюда парамагнитная восприимчивость χ_{π} вблизи аномалии имеет вид

$$\chi_{\pi} = \chi_{\pi}^{(0)} + \frac{1}{2} \mu^2 \{\delta v(\zeta + \mu H) + \delta v(\zeta - \mu H)\},$$

где

$$\delta v(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0), \\ \alpha z^{1/2} & (z > 0). \end{cases}$$

Рис. 41. Аномалия парамагнитной восприимчивости вблизи точки $P = P_{\kappa}$.

Значение параметра α ясно из формул (3.9). Таким образом, нерегулярная часть парамагнитной восприимчивости $\delta\chi_{\pi}$ такова:

$$\delta\chi_{\pi} = \begin{cases} 0, & z \pm \mu H < 0, \\ \frac{1}{2} \alpha \mu^2 (z + \mu H)^{1/2}, & z + \mu H > 0, z - \mu H < 0, \\ \frac{1}{2} \alpha \mu^2 (z - \mu H)^{1/2}, & z + \mu H < 0, z - \mu H > 0, \\ \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \{(z + \mu H)^{1/2} + (z - \mu H)^{1/2}\} & z \pm \mu H > 0. \end{cases}$$

Хотя действительная картина аномалии магнитной восприимчивости металла несколько осложняется наложением диамагнетизма, качественная картина, естественно, сохраняется. В частности, следует обратить внимание на резкую нерегулярную зависимость магнитной восприимчивости от магнитного поля вблизи критического давления. Правда, эта нерегулярность должна наблюдаться в весьма узком интервале давлений $\Delta P \sim (\mu H / \epsilon_F) P_{\kappa}$.

Зависимость $\delta\chi_{\pi}$ от z и магнитного поля изображена на рис. 41.

Наличие особенности у магнитной восприимчивости при больших давлениях — не единственное проявление своеобразных черт электронного энергетического спектра в поведении металла в слабых полях. Например, температурная зависимость магнитной восприимчивости ряда металлов может быть понята [13], только исходя из предположения о существовании «тонкой структуры» электронного спектра этих металлов (аномально мало заполненные зоны, небольшие расстояния между зонами и т. п.). К подобным выводам можно прийти, изучая зависимость магнитной восприимчивости сплавов от состава [22, 15].

§ 15. Эффект де Газа — ван Альфена (сильные магнитные поля)

Изучение диа- и парамагнетизма металлов (см. предыдущий параграф) показало, что построение строгой теории магнетизма в слабых полях — весьма сложная задача, которая, по-видимому, не может быть решена без специальных модельных предположений: значение магнитной восприимчивости существенно зависит от взаимодействия электронов друг с другом, а окончательный результат в принципе не может быть записан только в терминах закона дисперсии. Кроме того, ситуация усложняется тем, что величина магнитной восприимчивости электронов проводимости, вообще говоря, того же порядка, что и глубинных электронов (электронов заполненных зон). Поэтому экспериментальное выделение роли электронов проводимости также затруднительно.

В больших полях ($\mu H \gtrsim T$) картина совершенно иная. У всех металлов наблюдается специфическая осцилляционная зависимость магнитного момента и других характеристик от магнитного поля, которая отсутствует у диэлектриков и полупроводников. Как будет ясно из дальнейшего, основные характеристики осцилляций настолько существенно связаны с параметрами поверхности Ферми, что возможна не только постановка вопроса о восстановлении формы поверхности Ферми и распределения скоростей на ней по экспериментальным данным, но и положительный ответ на него. Экспериментально наиболее полно изучена осцилляционная зависимость от магнитного поля магнитного момента (эффект де Газа — ван Альфена). Однако это отнюдь не единственный осцилляционный эффект. Периодически меняется с магнитным полем теплоемкость, сопротивление (эффект Шубникова — де Газа) и другие физические величины. Природа этих осцилляций та же, что и осцилляций магнитного момента. Поэтому все эти явления мы будем называть эффектом де Газа — ван Альфена. В последнее время открыт ряд осцилляционных явлений в магнитном поле существенно другой

природы (циклотронный резонанс, геометрический резонанс в поглощении ультразвука и др.). Ниже (в конце этого параграфа) мы сформулируем признаки, позволяющие отличить эффект де Гааза — ван Альфена от других осцилляционных эффектов.

Уточним прежде всего условия наблюдения эффекта де Гааза — ван Альфена. Во-первых, он наблюдается только на достаточно чистых монокристаллических образцах. Требуемая чистота определяется соотношением между длиной пробега l и размером орбиты в магнитном поле r_H . Необходимо, чтобы было выполнено условие $l \gg r_H$ (монокристалличность мы оценим ниже). Во-вторых, магнитное поле должно быть достаточно велико ($\mu H \gtrsim T$), однако не слишком велико. Оно должно удовлетворять следующим условиям:

$$kT \leq \mu H \ll \epsilon_F, \quad (15.1)$$

причем второе неравенство позволит нам пользоваться величиной $\mu H/\epsilon_F$ (см. введение) как малым параметром задачи. Отметим, что осцилляционная зависимость не есть проявление какого-то особого состояния металла, никакой границы существования эффекта де Гааза — ван Альфена нет. Сформулированные выше условия выделяют область его наиболее четкого проявления — вне этой области амплитуда осцилляций экспоненциально мала.

Прежде чем изложить последовательную теорию эффекта де Гааза — ван Альфена, поясним качественно природу этого явления. Как все магнитные явления, эффект де Гааза — ван Альфена, конечно, имеет квантовое происхождение и обусловлен квантованием орбитального движения электронов проводимости по замкнутым орбитам в магнитном поле. Квантование энергии приводит к тому, что число заселенных энергетических уровней с фиксированным значением проекции импульса на магнитном поле p_z изменяется на единицу при изменении магнитного поля (точнее, обратного поля) $\Delta(1/H)$ на величину, равную $2\pi |e| \hbar / cS(\epsilon_F, p_z)$ (см. условие квантования (7.3)). Зависимость величины $\Delta(1/H)$ от p_z несколько смазывает резкую зависимость магнитного поля. Естественно, главную роль в осцилляционных эффектах играют электроны, имеющие те значения p_z , при которых $S(\epsilon_F, p_z)$ медленно меняется с изменением p_z , т. е. при которых $S(\epsilon_F, p_z)$ имеет экстремум. Таким образом, наиболее существенная характеристика эффекта де Гааза — ван Альфена — период осцилляций — определяется экстремальными сечениями поверхности Ферми (рис. 42):

$$\Delta \frac{1}{H} = \frac{2\pi |e| \hbar}{cS_{\text{extr}}(\epsilon_F)}. \quad (15.2)$$

Сложная форма поверхностей Ферми (много различных экстремальных сечений) у большинства металлов приводит к тому, что магнитный момент оказывается чрезвычайно сложной функцией магнитного поля, анализ которой весьма непростая задача.

Перейдем теперь к последовательному изложению теории эффекта де Гааза — ван Альфена. Необходимо вычислить термодинамический потенциал Ω , а с его помощью — интересующие нас физические величины: магнитный момент, теплоемкость и др. Мы будем производить вычисления в «газовом» приближении, а в специальном параграфе (§ 16) покажем, что учет ферми-жидкостного взаимодействия не меняет картины явления. Согласно общим формулам,

$$\Omega = -T \sum_{(s)} \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\xi - \varepsilon(s)}{T} \right\}. \quad (15.3)$$

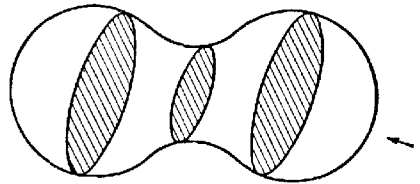


Рис. 42. Пример экстремальных сечений поверхности Ферми.

Направление магнитного поля обозначено стрелкой.

Суммирование производится по всем состояниям электрона *): по квантовому числу n (см. формулу (7.3)), по двум проекциям спина σ ($\sigma = \pm 1$), по всем значениям z -й проекции квазиимпульса p_z , а также по номерам s частично заполненных зон. Так как p_z изменяется непрерывно, суммирование по p_z можно заменить интегрированием.

Число состояний dn_{p_z} на интервал $(p_z, p_z + dp_z)$ при фиксированных значениях остальных параметров (s, n, σ) легко вычислить, если заметить, что

$$dn_{p_z} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \iint dp_x dp_y \right\} dp_z, \quad (15.4)$$

причем интегрирование надо производить по всем значениям p_x и p_y , расположенным между соседними классическими траекториями электрона в импульсном пространстве, т. е. между траекториями, отличающимися значениями n на единицу. Согласно формуле (7.3), интересующая нас площадь равна $2\pi|e|\hbar H/c$.

Поэтому

$$dn_{p_z} = \frac{|e|HV}{(2\pi\hbar)^2 c} dp_z. \quad (15.5)$$

Использование формулы квазиклассического квантования не означает, что выражение (15.5) справедливо только в квазиклассическом приближении. Согласно (15.4), плотность состояний

*) Мы не оговариваем интегрирования по координатам, которое сводится к умножению на объем металла V .

dn_{p_z}/dp_z определяется «площадью ячейки» в p_x, p_y -пространстве $\left(\int \int dp_x dp_y = \Delta p_x \Delta p_y\right)$, которая зависит только от условий коммутации операторов \hat{p}_x и \hat{p}_y . Используя правила коммутации (8.18), опять приходим к формуле (15.5).

Надо иметь в виду: при выводе формулы (15.5) мы предполагали, что электронный энергетический спектр устойчив в магнитном поле. Это, конечно, ограничивает величину магнитного поля. Однако для большинства металлов существенная перестройка спектра происходит только в недостижимых магнитных полях $H \gtrsim 10^7 \div 10^8$ э. Исключение составляют металлы типа Вi (подробнее см. § 19).

Используя формулу квазиклассического квантования (7.3) и выражение для плотности состояний (15.5), можно вычислить плотность состояний $\nu_H(\epsilon)$ на интервал энергии $d\epsilon$ в квантующем магнитном поле

$$\nu_H(\epsilon) = \frac{|e| HV}{(2\pi\hbar)^2 c} \frac{dp_z}{d\epsilon}.$$

При вычислении $\frac{dp_z}{d\epsilon}$ надо произвести суммирование по всем подзонам Ландау. Каждая подзона задается значением магнитного квантового числа n , а закон дисперсии в ней определяется как решение уравнения (7.3) относительно ϵ : $\epsilon = \epsilon_n(p_z)$. Из (7.3) видно, что при тех значениях $p_z^{(n)}$, где $S(\epsilon_n, p_z^{(n)}) = \frac{2\pi\hbar e H}{c} \left(n + \frac{1}{2}\right)$, а $\frac{\partial S(\epsilon_n, p_z^{(n)})}{\partial p_z} = 0$, функция $\epsilon_n(p_z)$ имеет экстремум. Если $S(\epsilon_n, p_z)$ при $p_z = p_z^{(n)}$ имеет максимальное значение $\epsilon_n(p_z)$ имеет минимум, а если $S(\epsilon_n, p_z)$ имеет минимальное значение, то — максимум. Отсюда ясно, что особенности плотности состояний должны быть в каждой подзоне Ландау при экстремальных значениях энергии. Легко убедиться (см. § 3), что при $\epsilon = \epsilon_n$ плотность $\nu_n(\epsilon)$ обращается в бесконечность корневым образом: $\nu_n(\epsilon) \sim |\epsilon - \epsilon_n|^{-1/2}$. Наличие зависящих от магнитного поля особенностей у плотности состояний, естественно, и приводит к периодической зависимости термодинамических величин от обратного магнитного поля (см. формулу (15.2)).

Воспользовавшись значением плотности dn_{p_z}/dp_z , можно выражение (15.3) переписать следующим образом:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n), \quad (15.6)$$

где

$$\varphi(n) = \frac{|e| HV}{(2\pi\hbar)^2 c} \sum_{(\sigma, s)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\xi - \epsilon_{s\sigma}(p_z, n)}{T} \right\} dp_z \quad (15.7)$$

Для дальнейшего удобно воспользоваться формулой Пуассона [23] *)

$$\sum_{n_0}^{\infty} \chi(n) = \int_a^{\infty} \chi(n) dn + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\infty} \chi(n) e^{2\pi i k n} dn. \quad (15.8)$$

Здесь $\chi(n)$ — произвольная функция, a — число между $n_0 - 1$ и n_0 . В наших условиях $n_0 = 0$ и удобно положить $a = -1/2$.

Тогда из (15.6) и (15.8) имеем

$$\Omega = \int_{-1/2}^{\infty} \varphi(n) dn + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{\infty} \varphi(n) e^{2\pi i k n} dn. \quad (15.9)$$

Дальнейшие вычисления можно производить, только зная зависимость энергии электрона от квантовых чисел. Будем считать, что уровни энергии заданы уравнениями (7.4) и (7.3). Следует только отметить, что при наличии спин-орбитальной связи необходимо учитывать отличие g -фактора электрона от двойки.

Использование квазиклассических уровней энергии оправдывается тем, что в осциллирующую часть термодинамического потенциала, если магнитное поле не слишком велико, основной вклад вносят электроны с большими квантовыми числами n , т. е. существенны такие значения ϵ и ρ_z , что выполнено условие

$$cS/2\pi |e| \hbar H \gg 1. \quad (15.10)$$

Первое слагаемое в выражении (15.9) описывает монотонную зависимость термодинамического потенциала от магнитного поля. Осцилляторная зависимость содержится в остальных слагаемых, исследованием которых мы и займемся. При этом мы будем опускать все монотонные слагаемые. Для осциллирующей части потенциала $\tilde{\Omega}$ мы примем обозначение $\tilde{\Omega}$.

Согласно (15.8) и (15.9),

$$\tilde{\Omega} = \sum_{\sigma} \tilde{\Omega}_{\sigma}, \quad \tilde{\Omega}_{\sigma} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} I_k, \quad (15.11)$$

*) Формулу Пуассона легко получить, если учесть, что

$$\sum_{(n)} \delta(x - n) = \sum_{(k)} e^{2\pi i k x}.$$

Суммирование проводится по всем целым положительным и отрицательным значениям n и k . Это равенство является разложением периодической функции

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$ в ряд Фурье.

где

$$I_k = \frac{V|e|HT}{(2\pi\hbar)^2 c} \int_{-1/2}^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\xi_\sigma - \varepsilon_n(p_z)}{T} \right\} e^{2\pi i k n}, \quad (15.12)$$

а

$$\xi_\sigma = \xi - \sigma \mu H, \quad \mu = \frac{e\hbar}{4m_0 c} g. \quad (15.13)$$

Выражение (15.12) можно преобразовать, если с помощью равенства (7.3) сначала перейти к интегрированию по энергиям (вместо интегрирования по n), а потом интегрирование по p_z заменить интегрированием по n , опять воспользовавшись равенством (7.3). В результате получим

$$I_k = \frac{2\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \xi_\sigma}{T}\right) + 1} \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \sum_{n_{\min}}^{n_{\max}} \int \frac{m^*(\varepsilon', n)}{\left| \frac{\partial n}{\partial p_z} \right|} e^{2\pi i k n} dn. \quad (15.14)$$

Знак суммы здесь означает суммирование по интервалам монотонного изменения функции $n(\varepsilon, p_z)$ при фиксированном ε .

Идея дальнейшего вычисления, т. е. выделения осцилляторной зависимости, связана с учетом того обстоятельства, что все величины, входящие в интеграл (15.14), кроме $\exp\left(\frac{\varepsilon - \xi_\sigma'}{T} + 1\right)^{-1}$ и $e^{2\pi i k n}$, медленно меняются с изменением ε и n . При $\varepsilon \sim \xi_\sigma$ величины n_{\min} и n_{\max} , как правило, значительно больше единицы*), т. е. $cS_{\text{extr}}/2|e|\hbar H \gg 1$. Это, как указывалось, соответствует тому, что электрон с энергией, близкой к фермиевской, описывает площадь, значительно большую квадрата межатомного расстояния. Последнее условие соответствует условию применимости квазиклассического приближения.

Так как $n \gg 1$, можно воспользоваться методом перевала и показать, что основной вклад во внутренний интеграл дает интегрирование в окрестностях экстремальных точек $n_m(\varepsilon')$. После вычислений получим

$$I_k \approx \frac{VeHe^{-i\pi/2}}{2\pi c (2\pi\hbar)^2 k^{3/2}} \sum_m e^{\pm i\pi/4} \int_0^\infty \frac{\exp(2\pi i k n_m(\varepsilon))}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \xi_\sigma}{T}\right) + 1} \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_{p_{zm}}^{-1/2} d\varepsilon. \quad (15.15)$$

*) При каждом значении энергии есть $n_{\min} = 0$ (при том значении p_z , при котором секущая плоскость $p_z = \text{const}$ касается изоэнергетической поверхности). Эти точки нас не интересуют, так как интегрирование вблизи них не дает вклада в осциллирующую часть потенциала [24]. В случае квадратичного изотропного закона дисперсии

$$\frac{cS_{\text{extr}}}{2\pi|e|\hbar H} \approx \frac{\varepsilon_F}{2\pi\mu H k}.$$

Суммирование ведется по всем экстремальным точкам функции $n(\varepsilon, p_z) = cS(\varepsilon, p_z)/2\pi|e|\hbar H$ при фиксированном ε . Точки, в которых $n_m = 0$, не учитываются. Знак плюс в выражении $e^{\pm i\pi/4}$ стоит в том случае, когда экстремальная точка является минимумом, а знак минус, когда экстремальная точка является максимумом.

Теперь воспользуемся тем, что основной вклад в осциллирующую часть I_k дает интегрирование вблизи точки резкой нестационарности фермиевской функции, т. е. вблизи $\varepsilon = \zeta_\sigma$. Это позволяет последнее выражение записать следующим образом:

$$I_k \approx \frac{V|e|He^{-i\pi/2}}{2\pi c(2\pi\hbar)^2 k^{3/2}} \sum_m \exp\left(-2\pi i k n_m(\zeta_\sigma) \pm \frac{i\pi}{4}\right) \times \\ \times \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_{\substack{\varepsilon=\zeta_\sigma \\ p_z=p_z^m}}^{-1/2} \int_0^\infty \frac{\exp\left\{2\pi i k \left(\frac{\partial n_m}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=\zeta_\sigma} (\varepsilon - \zeta_\sigma)\right\}}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \zeta_\sigma}{T}\right) + 1} d\varepsilon.$$

Вводя новую переменную интегрирования $x = \frac{\varepsilon - \zeta_\sigma}{T}$ и воспользовавшись тем, что $T \ll \zeta_\sigma$, распространим интегрирование от $-\infty$ до $+\infty$. После интегрирования, подставив найденное выражение в равенство (15.11), получим

$$\tilde{\Omega} \approx \frac{V}{2\pi^3 \sqrt{2\pi} \hbar^3} \left(\frac{e\hbar H}{c}\right)^{3/2} \sum_m \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_{\substack{\varepsilon=\zeta \\ p_z=p_z^m}}^{-1/2} \frac{1}{m^*(\zeta, p_z^m)} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k\lambda)}{k^{3/2}} \cos\left\{k\left(\frac{cS_m}{e\hbar H} - \pi \pm \frac{\pi}{4}\right)\right\} \cos\left(\pi k \frac{m^*}{m_0}\right), \quad (15.16)$$

где

$$\psi(z) = \frac{z}{\operatorname{sh} z}, \quad \lambda = 2\pi^2 \frac{T}{\hbar\omega_H}; \quad \omega_H = \frac{eH}{m^*c}.$$

При получении формулы (15.16), мы воспользовались тем, что при суммировании по двум направлениям спина (см. (15.11)) везде, кроме аргумента косинуса, можно заменить ζ_σ на ζ , так как $\mu H \ll \zeta$. В аргументе косинуса нужно разложить $S_m(\zeta_\sigma)$ по степеням μH , ограничившись первой степенью μH . Учет небольшого изменения S_m здесь необходим, так как, согласно условию, $cS/2\pi e\hbar H \gg 1$ и небольшое изменение S_m приводит к большому изменению аргумента.

Так как $\psi(z)$ — монотонно убывающая функция порядка или меньше единицы ($\psi(z) = 1$ при $z = 0$ и $\psi(z) \approx 2ze^{-z}$ при $z \gg 1$), а $\partial^2 S/\partial p_z^2 \sim 1$, при не слишком высоких температурах порядок величины $\tilde{\Omega}$ определяется множителем $(V/\hbar^3)(|e|\hbar H/c)^{3/2}1/m^*$.

Монотонная часть термодинамического потенциала при не слишком больших полях ($\mu H \ll \epsilon_F$) порядка его классического значения, т. е. порядка $\int_0^{\xi} N(\epsilon) d\epsilon$ (см. формулу (12.8a)). Если поверхность Ферми не обладает аномально большой анизотропией, то последнее выражение $\sim VS^{5/2}/\hbar^3 m^*$. Поэтому осциллирующая часть потенциала есть малая добавка $\sim (e\hbar H/cS)^{5/2}$ к его регулярному (по сути дела, классическому) значению. Отсюда следует, что осциллирующая часть свободной энергии \tilde{F} численно равна $\tilde{\Omega}$, если в формуле (15.16) выразить химический потенциал ζ через полное число электронов N и объем V в нулевом приближении по магнитному полю и по температуре. Но это означает, что вместо ζ надо просто подставить энергию Ферми ϵ_F .

Отметим, что зависимость химического потенциала от магнитного поля (даже не слишком большого, см. условие (15.1)), конечно, есть. Она должна быть учтена при вычислении таких величин, как контактная разность потенциалов, ток эмиссии в магнитном поле и т. п. (§ 22).

Итак, формулой (15.16) можно непосредственно пользоваться для вычисления интересующих нас наблюдаемых величин. Так, осциллирующая часть z -й проекции момента*) есть $\tilde{M}_z = -\partial\tilde{\Omega}/\partial H$, а соответствующая часть теплоемкости равна $\tilde{C} = -T\partial^2\tilde{\Omega}/\partial T^2$.

Формула (15.16) справедлива при произвольном соотношении между $\hbar\omega_H = |e|\hbar H/m^*c$ и температурой T . При ее получении мы предполагали только, что $T, \hbar\omega_H \ll \epsilon_F$.

При абсолютном нуле температуры ($T \ll \hbar\omega_H$) имеем

$$\tilde{\Omega} \approx \frac{V}{2\pi^3 \sqrt{2\pi} \hbar^3} \left(\frac{e\hbar H}{c} \right)^{5/2} \sum_m \frac{1}{m^*} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_m^{-1} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2} \cos \left\{ k \left(\frac{cS_m}{e\hbar H} - \pi \right) \pm \frac{\pi}{4} \right\} \cos \left(\pi k \frac{m^*}{m_0} \right). \quad (15.17)$$

При сравнительно высокой температуре ($\lambda = 2\pi^2 T/\hbar\omega_H \gg 1$) из всех слагаемых (при суммировании по k) надо оставить одно:

$$\tilde{\Omega} = \frac{V}{\hbar^3} \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \left(\frac{e\hbar H}{c} \right)^{5/2} T \sum_m \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_m^{-1/2} \exp \left(-\frac{2\pi^2 T}{\hbar\omega_H} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{cS_m}{e\hbar H} - \pi \pm \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\pi \frac{m^*}{m_0} \right). \quad (15.18)$$

) При вычислении x -й и y -й проекций магнитного момента надо при дифференцировании $\tilde{\Omega}$ учесть, что m^ и S_m зависят от направления магнитного поля (см. стр. 80').

Благодаря множителю $2\pi^2$ в условии применимости формулы (15.18), она справедлива даже при сравнительно низких температурах ($T \gg \hbar\omega_H/20$).

Согласно формулам (15.16) — (15.18), $\tilde{\Omega}$ — сложная осциллирующая функция магнитного поля, причем расстояние между нулями этой функции (ее «периоды») определяется экстремальными сечениями поверхности Ферми:

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2\pi|e|\hbar}{cS_m}. \quad (15.19)$$

Следует обратить внимание на то, что если откладывать $\tilde{\Omega}$ в зависимости от величины обратного поля $1/H$, то периоды не зависят от магнитного поля. Кроме того, $\Delta(1/H)$ не зависит от температуры.

Если $\Delta H \ll H$, то

$$\Delta H = \frac{2\pi e\hbar}{cS_m} H^2, \quad (15.20)$$

т. е. в больших полях период пропорционален квадрату магнитного поля.

Температурная зависимость $\tilde{\Omega}$ определяется величиной эффективной массы $m^*(\epsilon_F, p_z^m)$. Однако надо иметь в виду, что взаимодействие электронов с примесями, с колебаниями решетки и другими нарушениями периодичности кристалла приводит к уменьшению амплитуды осцилляций. Учет рассеяния электронов на примесях показывает, что эффект уменьшения амплитуды осцилляций можно учесть, если температуру заменить эффективной температурой, равной $T + \hbar/\tau$, где τ по порядку величины совпадает со временем свободного пробега электрона [25, 26]. Формулы, выведенные в [25, 26] в предположении о квадратичном законе дисперсии электронов проводимости, удобны для оценки величины амплитуды.

Подчеркнем, что без учета рассеяния магнитная восприимчивость $\partial M_z/\partial H$ при $T = 0$ обращалась бы в бесконечность. Поэтому при достаточно низких температурах учет конечности жизни электронных состояний необходим*).

Получим теперь выражение для компоненты магнитного момента вдоль магнитного поля. Так как $cS_m/|e|\hbar H \gg 1$, дифференцировать надо только косинус, а медленно меняющуюся

*) Следует отметить, что качественное рассмотрение не дает возможности полностью учесть роль столкновений в осцилляционных эффектах. В частности, величина $\frac{\partial M_z}{\partial H}$, вычисленная строго [25], существенно отличается от величины $\frac{\partial M_z}{\partial H}$, полученной из формул, найденных из качественных соображений [26].

амплитуду перед косинусом можно не дифференцировать:

$$\tilde{M}_z \approx -\frac{V}{\hbar^3} \frac{1}{2\pi^3 \sqrt{2\pi}} \left(\frac{e\hbar}{c}\right)^{3/2} \sqrt{H} \sum_m \frac{S_m}{m^* \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_m^{1/2}} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k\lambda)}{k^{3/2}} \sin \left[k \left(\frac{cS_m}{e\hbar H} - \pi \right) \pm \frac{\pi}{4} \right] \cos \left(\pi k \frac{m^*}{m_0} \right). \quad (15.21)$$

В сравнительно больших полях при низкой температуре, т. е. при $\psi \approx 1$, осциллирующая часть момента значительно больше его монотонной части. Действительно, можно показать [24], что монотонная часть момента в широком интервале магнитных полей ($\mu H \ll \epsilon_F$) порядка ее диамагнитного значения, т. е.

$$M \sim \frac{V}{\hbar^3} \left(\frac{e\hbar}{c}\right)^2 \frac{S^{1/2}}{m^*} H \text{ и, следовательно, } \frac{\tilde{M}}{M} \approx \left(\frac{cS}{e\hbar H}\right)^{1/2} \gg 1.$$

То, что осциллирующая часть момента оказалась значительно больше его монотонной части, не должно удивлять, так как весь момент (и монотонная часть также!) имеет квантовомеханическое происхождение. Формально это связано с тем, что каждое дифференцирование по магнитному полю умножает функцию на большой множитель $cS/e\hbar H$.

На рис. 43, а приведена типичная кривая зависимости магнитного момента от магнитного поля. У большинства металлов зависимость магнитного момента от магнитного поля не ограничивается одной гармоникой, а представляет из себя суперпозицию нескольких гармоник, причем, как правило, с резко различными периодами (рис. 43, б). Это означает, что у большинства металлов поверхность Ферми очень сложна, причем численные оценки показывают, что у всех металлов, кроме металлов первой группы, имеются сравнительно малые сечения, величина которых значительно меньше $(\hbar/a)^2$, где a — постоянная решетки ($S_0 = 4\pi(3/8\pi)^{2/3}(2\pi\hbar)^2/a^2$ — максимальное сечение сферы Ферми для свободного электронного газа с плотностью, равной $1/a^3$). Обычно при расшифровке экспериментальных данных считается, что малые сечения соответствуют существованию отдельных малых полостей или тонких перемычек у поверхности Ферми*). Оценка объема таких полостей показывает, что в них может находиться $\sim 10^{-5}$ электронов или «дырок» на атом. Оценка амплитуды, т. е. множителя перед косинусом, приводит к весьма малым значениям эффективных масс электронов, расположенных на малых сечениях ($m^* \sim (10^{-3} \div 10^{-2})m_0$, здесь m_0 — масса свободного электрона).

*) Согласно [27], существование особых малых сечений может быть связано не только с отщепившимися областями, но и с небольшими выпуклостями и вмятинами на большой поверхности Ферми.

Большое число экстремальных сечений, т. е. большое число гармоник в зависимости магнитного момента от магнитного поля, очень затрудняет расшифровку экспериментальных кривых.

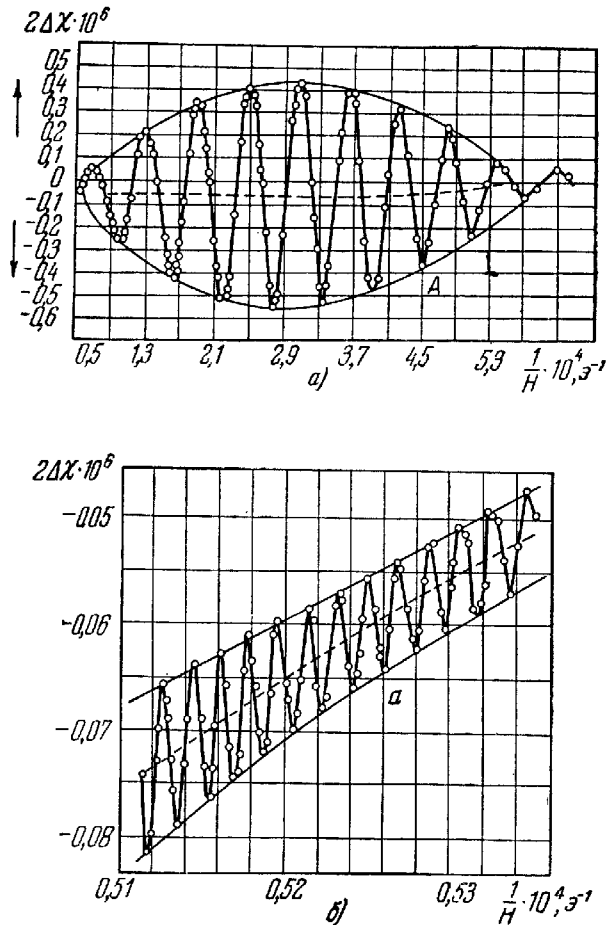


Рис. 43. а) Типичная кривая зависимости магнитной восприимчивости от обратного магнитного поля. б) Тонкая структура явления де Гааза — ван Альфена.

Кривая *а* представляет собой растянутый по обеим координатным осям начальный участок кривой *А* (кристалл Zn, $T = 4,2^\circ \text{K}$).³

Однако использование различных интервалов полей, а также тщательное измерение угловой зависимости периодов позволило не только расшифровать кривые $\tilde{M} = \tilde{M}(H)$, но и по измеренным периодам определить форму поверхности Ферми ряда металлов (§ 17).

Формулы (15.16) — (15.21) позволяют сформулировать черты эффекта де Гааза — ван Альфена, помогающие отличить его от других осцилляционных эффектов:

1) период в обратных полях зависит только от направления магнитного поля, а при фиксированном направлении является константой данного металла;

2) амплитуда осцилляций понижается с повышением температуры и с загрязнением образца.

Выше мы говорили о том, что наблюдение эффекта де Гааза — ван Альфена возможно только на монокристаллических образцах. Мозаичность смазывает эффект, так как фаза периодической функции очень резко зависит от направления — небольшое изменение S_m приводит к изменению фазы на величину порядка π .

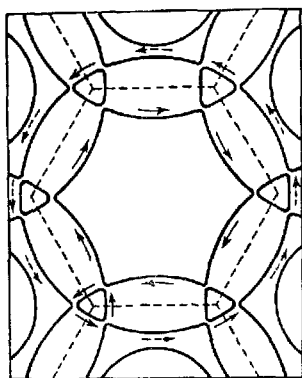


Рис. 44. «Магнитный пробой».

Сплошные стрелки указывают траекторию электрона в не слишком большом магнитном поле, пунктирные — в большом; пунктирные линии — граница зоны Бриллюэна.

Выведенные выше формулы, в частности формула (15.16), описывают только основной вклад в осциллирующую часть термодинамического потенциала. Они получены благодаря учету первых исчезающих членов разложения по степеням малого параметра $\mu H/\epsilon_F$ или, точнее, $e\hbar H/cS_{\text{extr}}$. Анализ выражения (15.14) показывает, что осциллирующие слагаемые обязаны тем значениям p_z , при которых $S(\xi, p_z)$ имеет экстремальное значение, либо $S(\epsilon, p_z)$ (как функция p_z) имеет особенность. Между тем вблизи каждой седловой точки поверхности Ферми в

широких интервалах направлений магнитного поля имеются особые сечения — «восьмерки», для которых $S(\xi, p_z)$ имеет особенность типа $\Delta p_z \ln \Delta p_z$ (§ 7). Интегрирование вблизи такого сечения дает конечный вклад в осциллирующую часть потенциала Ω , причем, согласно [27], амплитуда осцилляционных членов, обусловленных «восьмерками», в $cS/e\hbar H$ раз меньше, чем амплитуда осцилляций, обусловленных экстремальными сечениями.

Остановимся на роли «магнитного пробоя» в эффекте де Гааза — ван Альфена [28]. Как мы уже неоднократно говорили, при движении электрона по квазиклассической траектории обычно очень мала вероятность его перехода на близкую траекторию. Исключение составляют случаи, когда близко расположены в p -пространстве квазиклассические траектории, принадлежащие различным зонам. Тогда электрон в сравнительно небольших полях (соответствующие оценки см. в § 10), «не

замечая» небольших потенциальных барьеров, будет двигаться по траектории, состоящей из элементов нескольких различных траекторий (рис. 44). При этом среди гармоник в эффекте де Гааза — ван Альфена могут оказаться периоды, которым соответствуют площади, превышающие размеры сечения зоны Бриллюэна даже у металлов с закрытой поверхностью Ферми. Это наблюдалось на магнии [29], что и явилось открытием магнитного пробоя.

Энергетический спектр электронов в магнитном поле с учетом магнитного пробоя известен только при исключительных направлениях магнитного поля (см. § 10, а также [28]), однако существующих представлений о движении электронов в магнитном поле достаточно для построения теории осцилляционных эффектов с учетом вероятности перехода электрона с одной классической орбиты на другую. Основная черта эффекта де Гааза — ван Альфена при магнитном пробое — это уменьшение амплитуды изолированных траекторий, а при росте вероятности пробоя — увеличение амплитуды составных траекторий.

Последовательный вывод осциллирующей части потенциала $\tilde{\Omega}$ с учетом магнитного пробоя содержится в работе [29а].

В заключение этого параграфа оценим порядок величины осциллирующих частей магнитного момента \tilde{M} и дифференциальной магнитной восприимчивости $\tilde{\chi} \approx (\partial \tilde{M} / \partial H) / V$. Согласно формуле (15.21), при $T = 0$

$$\tilde{M} \approx N \mu^* \left(\frac{\mu^* H}{\epsilon_F} \right)^{1/2} \quad \left(\mu^* = \frac{e \hbar}{m^* c}, \quad \epsilon_F \approx \frac{S}{m^*} \right), \quad (15.22)$$

а

$$\tilde{\chi} \approx \frac{\mu^{*2} N}{\epsilon_F} \left(\frac{\epsilon_F}{\mu^* H} \right)^{3/2}.$$

При оценке мы опустили периодическую функцию. Хотя парамагнитная восприимчивость металла $\mu^{*2} N / \epsilon_F$ мала, за счет множителя $(\epsilon_F / \mu^* H)^{3/2}$ величина $\tilde{\chi}$ может принимать значения порядка единицы. Этот неожиданный результат (диамагнитная восприимчивость порядка единицы и тем больше, чем магнитное поле меньше!), как мы увидим в §§ 20, 21, приводит к весьма своеобразным следствиям, касающимся устойчивости электронного состояния металла в магнитном поле.

§ 16. Эффект де Гааза — ван Альфена и теория ферми-жидкости

Как мы уже говорили, большинство результатов, полученных в предыдущих параграфах, «устойчиво» к переходу от ферми-газа к ферми-жидкости. Однако надо иметь в виду, что закон дисперсии элементарных возбуждений, о котором речь

шла выше, естественно, включает в себя и взаимодействие между электронами. Это соответствует духу теории ферми-жидкости Ландау (см. введение). Выясним, как обстоит дело с формулами эффекта де Гааза—ван Альфена, выведенными без учета межэлектронного взаимодействия.

Учет столкновений электронов с примесями, а также с фонами показывает, что существование конечности длины свободного пробега электронов не приводит к изменению периодов осцилляций, а уменьшает их амплитуду. Межэлектронное взаимодействие проявляется несколько сложнее. Во-первых, столкновения между электронами, обеспечивающие электронную часть сопротивления, несколько уменьшают амплитуду осцилляций. Во-вторых, межэлектронное взаимодействие в духе теории ферми-жидкости, как указывалось, входит в закон дисперсии квазичастиц (которые мы выше называли электронами проводимости). Именно этот, включающий межэлектронные взаимодействия, закон дисперсии входит в условия квантования (7.3) и, следовательно, определяет периоды осцилляций. Следует обратить внимание на то, что взаимодействие между электронами входит в периоды только через закон дисперсии. Для доказательства последнего утверждения мы покажем, что расстояния между энергетическими уровнями взаимодействующих электронов проводимости в магнитном поле (в квазиклассическом приближении) определяются по-прежнему известной формулой*)

$$\Delta\varepsilon = \hbar\omega_H \quad \left(\omega_H = \frac{eH}{m^*c}; \quad m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right). \quad (16.1)$$

Подчеркнем еще раз: доказательство формулы (16.1) не означает, что взаимодействие между электронами «выпадает» из условия квантования. Оно означает, что взаимодействие входит в условие квантования только через закон дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$, который, как мы говорили, это взаимодействие включает.

Для доказательства формулы (16.1) воспользуемся тем обстоятельством, что в квазиклассическом приближении

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \Delta\varepsilon = \hbar\omega, \quad (16.2)$$

где ω — частота классического движения. Таким образом, нам следует найти частоты классического движения электронов в магнитном поле. Для этого рассмотрим колебания электронной жидкости в магнитном поле.

*) Чтобы результаты «газового» и «жидкостного» рассмотрений совпали, необходимо совпадение не только спектров, но и плотности состояний. Тот факт, что плотность состояний ферми-жидкости совпадает с плотностью состояний ферми-газа, будет доказан одновременно с формулой (16.1).

Состояние электронов описывается функцией распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, которая удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F} = 0. \quad (16.3)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость частицы

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_1(\mathbf{p}') d\tau_{p'}.$$

Все обозначения даны во введении (§ 1). Мы опустили интеграл столкновений, так как нас интересует случай $r_H \ll l$, что соответствует $\omega_H \tau_0 \gg 1$, где τ_0 — время релаксации.

В случае, который мы рассматриваем, сила, действующая на электрон, есть сила Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (16.4)$$

Линеаризуя уравнение (16.3) и учитывая пространственную однородность задачи, легко получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = - \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \frac{e}{c} \int \mathbf{v}_0 \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_1(\mathbf{p}') \right] d\tau_{p'}, \quad (16.5)$$

где $\mathbf{v}_0 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}$ — скорость частицы при $f_1 \equiv 0$; $f_1(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - n_F(\varepsilon(\mathbf{p}))$.

Если ввести новую искомую функцию χ ($f_1 = -(\partial n_F / \partial \varepsilon) \chi$), а также от переменных p_x, p_y, p_z перейти к переменным ε, p_z и τ , где τ — время движения по квазиклассической траектории, то кинетическое уравнение (16.5) легко записать в следующей форме*):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \int \int F(p_z, \tau; p'_z, \tau') \chi(p'_z, \tau') dp'_z d\tau'. \quad (16.6)$$

Вид функции $F(p_z, \tau; p'_z, \tau')$ определяется из сравнения с интегральной частью уравнения (16.5). Интегрирование в (16.6) ведется по ферми-поверхности, так как $\partial n_F / \partial \varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$. Решение уравнения (16.6) будем искать в следующей форме:

$$\chi(p_z, \tau; t) = i e^{-i\omega t} \sum_n \chi_n(p_z) e^{in\omega_H(p_z)\tau}, \quad (16.7)$$

что оправдано периодической зависимостью функции распределения от τ (мы не оговорили, что рассматриваем, естественно, замкнутые сечения ферми-поверхности).

*) Простота левой (полевой) части кинетического уравнения в переменных ε, p_z, τ связана с тем, что ε и p_z сохраняются в постоянном и однородном магнитном поле, а τ канонически сопряжено ε . (Эти переменные будут использоваться при построении теории гальваномагнитных явлений; см. § 27.)

Подставляя разложение (16.7) в уравнение (16.6), имеем

$$[\omega - \omega_H(p_z)]\chi_n(p_z) = \sum_{n'} \int F_{nn'}(p_z, p'_z)\chi_{n'}(p'_z) dp'_z \quad (16.8)$$

(мы не выписываем связи между F и $F_{nn'}$). Для простоты будем считать оператор $F_{nn'}$ вырожденным, т. е. предположим, что

$$F_{nn'} = \delta_{nn'} g_n(p_z) g_n^*(p'_z). \quad (16.9)$$

Из дальнейшего вывода будет ясно, что это упрощающее предположение не затрагивает основного результата. Из (16.9) и (16.8) получаем

$$[\omega - \omega_H(p_z)]\chi_n(p_z) = g_n(p_z) \langle \chi_n, g_n \rangle, \quad (16.10)$$

где

$$\langle \chi_n, g_n \rangle = \int g_n^*(p'_z) \chi_n(p'_z) dp'_z \quad (16.11)$$

скалярное произведение функций $g_n(p_z)$ и $\chi_n(p_z)$. Так как нас интересуют расстояния между соседними уровнями, рассмотрим случай $n = 1$:

$$[\omega - \omega_H(p_z)]\chi_1(p_z) = g_1 \langle \chi_1, g_1 \rangle.$$

Из последнего уравнения имеем

$$\langle \chi_1, g_1 \rangle = \int \frac{|g_1|^2 dp_z}{\omega - \omega_H(p_z)} \langle \chi_1, g_1 \rangle,$$

откуда дисперсионное уравнение для определения частот колебаний ω записывается следующим образом:

$$1 = \int \frac{|g_1|^2 dp_z}{\omega - \omega_H(p_z)}. \quad (16.12)$$

Для анализа этого уравнения удобно перейти от непрерывных значений импульса к дискретным, скажем, учтя квантование импульса, обусловленное границами металла. Тогда уравнение (16.12) имеет вид

$$1 = \sum \frac{|g_1|^2 \Delta p_z}{\omega - \omega_H(p_z)}, \quad (16.13)$$

в котором p_z принимает дискретный набор значений $p_z^{(k)}$. На рис. 45 изображено графическое решение уравнения (16.13), из которого видно, что корни его расположены между значениями $\omega_H(p_z^{(k)})$. Кроме того, может быть «отщепленный» корень (см. рис. 45). При «возвращении» к непрерывному спектру (скажем, при стремлении размеров образца к бесконечности) частоты колебаний стремятся к значениям $\omega_H(p_z)$. Кроме того, может по-

явиться отщепленная частота, которая соответствует нуль-звуку в ферми-жидкости [30]. Так как частоты ω расположены строго между значениями $\omega_H(p_z^{(k)})$, ясно, что спектральная плотность (количество частот на интервал $(p_z, p_z + dp_z)$) ферми-жидкости такая же, как спектральная плотность ферми-газа.

Заметим, что для квадратичного закона дисперсии ω_H не зависит от p_z . Частота колебаний при этом, естественно, равна eH/mc .

Итак, формула (16.1) определяет квазиклассическое квантование уровней энергии ферми-жидкости в магнитном поле.

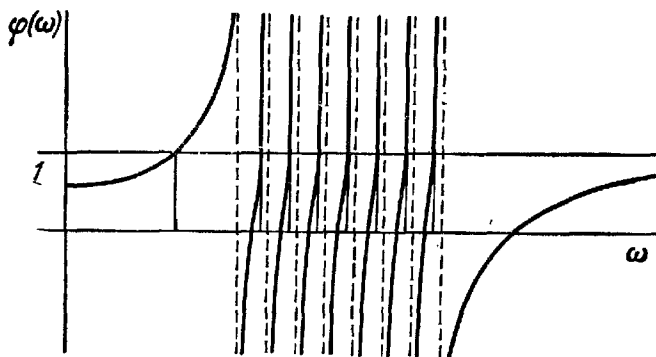


Рис. 45. Графическое решение дисперсионного уравнения

$$\psi(\omega) = 1 = \sum \frac{|q_1|^2 \Delta p_z}{\omega - \omega_H(p_z)}$$

Тем самым показано, что формулы предыдущего параграфа (в смысле периодов осцилляций) справедливы не только для ферми-газа, но и для ферми-жидкости, если под $\epsilon(p)$ понимать закон дисперсии, включающий взаимодействие между электронами в основном состоянии *).

§ 17. Определение электронного энергетического спектра по эффекту де Гааза — ван Альфена

Для определения энергетического спектра конденсированных систем используют весьма разнообразные методы (поглощение ультразвука, циклотронный резонанс, гальваномагнитные явления, аномальный скин-эффект, эффект де Гааза — ван Альфена, неупругое рассеяние нейтронов, характеристические потери электронов и др.). Этим вопросам посвящен § 48.

*) Этот факт подтвержден прямым вычислением в работе [31].

Настоящий параграф посвящен выяснению возможностей определения электронного энергетического спектра металлов (формы поверхности Ферми и распределение скоростей на ней) на основании наблюдения эффекта де Гааза — ван Альфена [36]. При изложении мы будем исходить из главных осцилляционных членов в магнитном моменте, т. е. из тех членов, которые обусловлены экстремальными сечениями поверхности Ферми (§ 15). Исходным выражением при этом является формула (15.21), из которой видно, что зависимость периода каждой гармоники $\Delta(1/H)$ от направления магнитного поля определяет зависимость от углов площадей экстремальных сечений S_m . Измерение амплитуды гармоник и их температурной зависимости дает возможность получить значение производной $\partial S_m / \partial \xi = 2\pi m^* (\xi, p_{zm})$. Однако, что касается определения эффективной массы, надо учитывать замечания, сделанные в § 15 и 16 о влиянии взаимодействий на величину амплитуды осцилляций. Так как период осцилляций даже при учете взаимодействий выражается в терминах закона дисперсии (§ 16), а амплитуда нет, то очевидно, что эффект де Гааза — ван Альфена весьма удобен для определения формы поверхности Ферми, но дает значительно менее надежные данные относительно распределения скоростей на ней (о связи между эффективной массой и скоростью $v = \partial \epsilon / \partial p$, см. ниже).

Пусть ξ — единичный вектор в направлении магнитного поля, а $\sigma(\xi) = [S_m(\xi)]_{\xi}$ — экстремальная площадь сечения поверхности Ферми $\epsilon(\rho) = \xi$ плоскостью, перпендикулярной к ξ . Тогда, согласно (15.21),

$$\sigma(\xi) = \frac{2\pi e \hbar}{c \Delta_{\xi}}, \quad (17.1)$$

где Δ_{ξ} — период (в обратных полях) соответствующей гармоники осцилляций.

Предполагается, что искомая поверхность Ферми имеет центр симметрии и что всякий луч, проведенный из центра, встречает поверхность лишь в одной точке. В том случае, когда поверхность Ферми распадается на несколько замкнутых поверхностей, дальнейшие рассуждения относятся к каждой из них.

Для поверхностей, обладающих указанным свойством, экстремальное сечение является центральным. Обозначим длину радиуса-вектора, проведенного из центра поверхности в направлении e , через $\rho(e)$. Тогда

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{2} \int \rho^2(e) \delta(e\xi) d\Omega_e, \quad (17.2)$$

где $\delta(x)$ — дираковская δ -функция, $d\Omega_e$ — элемент площади единичной сферы. Другими словами,

$$\sigma(\xi) = \pi \overline{\rho^2(e)} \Big|_{e\xi=0}, \quad (17.3)$$

т. е. $\sigma(\xi)$ — среднее значение квадрата радиуса-вектора $\rho(e)$ по экватору, заданному условием $e\xi = 0$.

Таким образом, построение поверхности сводится к задаче определения функции $\pi\rho^2(e)$ ($\rho(-e) = \rho(e)$) по ее средним значениям на экваторе $e\xi = 0$ при произвольном ξ .

Решение этой задачи может быть получено на основании следующего соотношения, справедливого, как в этом можно убедиться прямым вычислением, для произвольной функции $\psi(\xi) = \psi(-\xi)$, заданной на единичной сфере:

$$\int_{z^2 > \lambda^2} \bar{\psi}(\xi) d\Omega - \int_{z^2 > 1-\lambda^2} \frac{\bar{\psi}(\xi) z}{\sqrt{z^2 - \lambda^2}} d\Omega = \int_{z^2 > 1-\lambda^2} \psi(\xi) d\Omega, \quad z = (e\xi), \quad \lambda^2 < 1. \quad (17.4)$$

Здесь $\bar{\psi}(\xi)$ обозначает среднее значение функции $\psi(e)$ на экваторе $e\xi = 0$; область интегрирования на поверхности единичной сферы определена выписанными неравенствами.

Полагая $\psi(\xi) = \pi\rho^2(\xi)$, $\bar{\psi}(\xi) = \sigma(\xi)$, имеем при достаточно малых λ

$$\pi\rho^2(e) = \left\{ \int \sigma(\xi) d\Omega - \int_{z^2 > \lambda^2} \frac{\sigma(\xi) z}{\sqrt{z^2 - \lambda^2}} d\Omega \right\} / \pi\lambda^2, \quad z = e\xi; \quad (17.5)$$

Переходя к пределу $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\pi\rho^2(e) = \chi_e(0) - \int_0^1 [\chi_e(u) - \chi_e(0)] \frac{du}{u^2}, \quad (17.6)$$

где

$$\chi_e(u) = \overline{\sigma(\xi)}|_{\xi e = u} = \frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi) \delta(\xi e - u) d\Omega_\xi.$$

Если в каждом случае выбирать направление e за полярную ось координатной системы и ввести угол $\cos \theta = e\xi$, а также полярный угол φ в плоскости, перпендикулярной к e , то, обозначая $\sigma(\xi)$ через $\sigma_e(\cos \theta, \varphi)$, мы можем, проинтегрировав по частям, записать приведенное выражение в виде

$$\pi\rho^2(e) = \sigma(e) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\partial \sigma_e(\cos \theta, \varphi)}{\partial \cos \theta} \frac{d \cos \theta}{\cos \theta}. \quad (17.7)$$

Полученная формула решает поставленную задачу; впрочем, для численных расчетов удобнее, по-видимому, пользоваться формулой (17.5), выбрав конечное значение $\lambda \ll 1$.

Как видно из формулы (17.6), полученное решение является устойчивым; при этом средняя погрешность в определении формы поверхности связана с погрешностью определения площади $\sigma(\xi)$ (т. е. периода $\Delta(1/H)$). По порядку величины $\delta\rho^2 \sim \delta\sigma$.

Воспроизведя форму поверхности, мы тем самым получим значение $\partial^2 S(\xi, p_z)/\partial p_z^2$, которое, таким образом, не представляет собой независимого параметра. Дополнительным параметром является значение $\partial S_m/\partial \xi$, которое может быть определено из измерений величины амплитуд осцилляций или их температурной зависимости. Зная значение $\partial S_m/\partial \xi$ как функцию направлений магнитного поля ξ , мы можем восстановить величину скоростей электронов на граничной поверхности.

В самом деле, скорость \mathbf{v} определяется равенством $\mathbf{v} = \partial \epsilon/\partial \mathbf{p}$. Если мы рассмотрим наряду с поверхностью $\epsilon(\mathbf{p}) = \zeta$ соседнюю поверхность $\epsilon(\mathbf{p}) = \zeta + \delta\zeta$, то

$$v = |\nabla \epsilon| = \frac{\delta \zeta}{\delta n},$$

где δn обозначает расстояние между этими поверхностями по нормали. С другой стороны, для соседней поверхности площадь экстремального сечения будет

$$S_m(\zeta + \delta\zeta) = S_m(\zeta) + \frac{\partial S_m}{\partial \zeta} \delta\zeta.$$

Для поверхностей, о которых здесь идет речь, экстремальное сечение совпадает с центральным $p_z = 0$. Поэтому производная по химическому потенциалу, по сути дела, берется при постоянном p_z , т. е. $\partial S_m/\partial \zeta = 2\pi m^*$, или в прежних обозначениях

$$\delta\sigma(\xi) = \delta\zeta \left. \frac{\partial S_m}{\partial \zeta} \right|_{\xi}.$$

Согласно (17.6), это дает возможность вычислить $\delta\rho^2(\mathbf{e})$, а следовательно, и $\delta n = \delta\rho(\mathbf{en})$, что и решает задачу:

$$\frac{1}{v(\mathbf{e})} = \frac{(\mathbf{en})}{\rho(\mathbf{e})} \left\{ m^*(\mathbf{e}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\partial m^*(\cos\theta, \varphi)}{\partial \cos\theta} \frac{d \cos\theta}{\cos\theta} \right\}. \quad (17.8)$$

Зная форму поверхности $\rho(\mathbf{e})$, мы можем найти заключенный в ней объем и, следовательно, число электронов в соответствующей зоне.

Выведенные в этом параграфе формулы (17.7) и (17.8) показывают принципиальную возможность восстановления электронного спектра только на основании наблюдения эффекта де Гааза — ван Альфена. Однако для этого требуется весьма большое количество экспериментальных данных — знание периода и амплитуды осцилляций при всех направлениях магнитного поля. Кроме того, формулы (17.7) и (17.8) получены в предположении, что восстанавливаемая поверхность очень проста (см. выше). Из-за этого при фактическом восстановлении электронного спектра по осцилляционным эффектам [37]

всегда используют пробные модели, определяя с помощью эксперимента набор констант, описывающих модель. При этом в последнее время чаще всего пользуются одним из вариантов теории почти свободных электронов.

§ 18. Общая теория осцилляционных явлений

Рассмотрение осцилляций термодинамических величин в магнитном поле (§ 15) показывает, что причиной их является осцилляция плотности состояний, причем роль магнитного поля сводится только к квантованию уровней энергии. Очевидно, аналогичный эффект должен иметь место всегда, когда имеются условия для квантования энергии. При этом должна наблюдаться осциллирующая зависимость от параметров, определяющих положение уровней энергии электрона, если расстояние между уровнями порядка или больше температуры, но значительно меньше энергии Ферми [38].

Общая теория осцилляционных явлений может быть построена, если воспользоваться известными условиями квазиклассического квантования, согласно которым адиабатические инварианты I_i системы, совершающей финитное движение, приравниваются полуцелым значениям постоянной Планка

$$I_i = \left(n_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (18.1)$$

Если «классическая» задача о движении электрона с произвольным законом дисперсии решена, то его энергия может быть выражена через адиабатические инварианты:

$$\varepsilon = \varepsilon(I_1, I_2, I_3),$$

а с помощью условий (18.1) могут быть получены квантованные уровни энергии (см. (7.33)):

$$\varepsilon(\mathbf{n}) = \varepsilon\left[\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar; \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \hbar; \left(n_3 + \frac{1}{2}\right) \hbar\right]. \quad (18.2)$$

Вектором \mathbf{n} мы обозначили совокупность трех целых чисел n_1, n_2, n_3 .

Использование квазиклассических уровней энергии делает всю теорию применимой только к тому случаю, когда расстояния между уровнями значительно меньше граничной энергии ε_F . Этого приближения, конечно, достаточно, так как (как неоднократно указывалось) осцилляции возникают только в этом предельном случае.

Применявшееся раньше условие квантования (7.3), конечно, является частным случаем условий (18.2). Адиабатическим

инвариантом в случае электрона, движущегося в магнитном поле, является величина $cS/2\pi eH$ (4.18).

Знание квантовых уровней энергии (18.2) позволяет вычислить осцилляционную часть термодинамического потенциала

$$\Omega = -T \sum_n \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\xi - \varepsilon(n)}{T} \right\}.$$

Воспользовавшись трехмерным аналогом формулы Пуассона, имеем

$$\Omega = -T \int \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\xi - \varepsilon(n)}{T} \right\} dn + 2 \operatorname{Re} \sum_k L_k + \dots, \quad (18.3)$$

где

$$L_k = -T \int \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\xi - \varepsilon(n)}{T} \right\} \exp(2\pi i k n) dn,$$

а под вектором k следует понимать совокупность трех целочисленных индексов k_1, k_2, k_3 . Суммирование ведется по всем положительным значениям k_i ($i = 1, 2, 3$), кроме $k_i = 0$.

Так как интегрирование по n производится только в первом октанте ($0 \leq n_i \leq \infty, i = 1, 2, 3$), за счет разрыва подынтегральной функции на границе области интегрирования наряду с трехмерными интегралами L_k в результат войдут двумерные и одномерные интегралы, явного вида которых мы не выписываем.

Производя вычисления, аналогичные тем, которые были проведены в § 15, получим, что осциллирующая часть L_k имеет следующий вид:

$$\tilde{L}_k = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \sum_v \frac{\psi(\lambda_k) \exp[2\pi i k n_v(k, \xi) + i\varphi_v]}{\left(k \frac{\partial n_v}{\partial \xi} \right)^2 \left| \nabla \varepsilon(n_v) \right| \left| K_v(\xi) \right|}. \quad (18.4)$$

Через $n_v = n_v(k, \xi)$ здесь обозначены радиусы-векторы в пространстве n тех точек поверхности $\varepsilon(n) = \xi$, в которых направление нормали к поверхности параллельно вектору k ; $K_v(\xi)$ — гауссова кривизна поверхности в этих точках, $\lambda_k = 2\pi^2 \left(k \frac{\partial n_v}{\partial \xi} \right) T$; $\varphi_v = \pm \pi/2$, если n_v — эллиптическая точка, причем знак минус соответствует тому случаю, когда выпуклость поверхности в данной точке обращена в сторону k , а знак плюс — в противоположном случае (для гиперболической точки $\varphi_v = 0$). Двумерных и одномерных слагаемых мы опять не выписываем.

Подставляя асимптотические выражения для \tilde{L}_k (18.4) (а также опущенные здесь двумерные и одномерные слагаемые) в формулу (18.3), мы получим осциллирующую часть потенциала Ω . Для выяснения периода осцилляций необходимо знать за-

висимость n_v , т. е. адиабатических инвариантов I_i , от параметров, определяющих положение квантованных уровней энергии, причем из формулы (18.4) видно, что периоды осцилляций определяются условием

$$\Delta I_i^{(v)} = \hbar,$$

где символом ΔI_i обозначено изменение i -го адиабатического инварианта за счет изменения параметров, определяющих финитное движение электрона. Следует иметь в виду, что $\tilde{\Omega}$ является суммой большого числа слагаемых одного порядка, каждый из

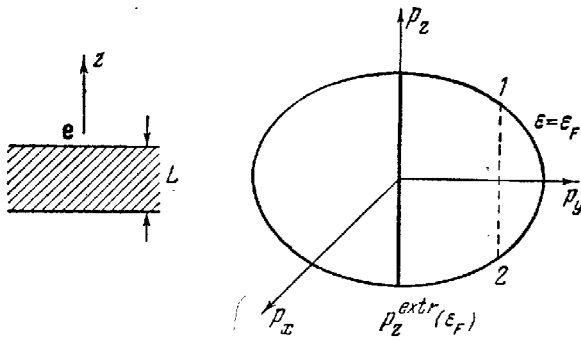


Рис. 46. Экстремальная хорда поверхности Ферми.

которых имеет свой период. Так как отношения этих периодов, вообще говоря, произвольны, осцилляции могут принимать очень сложный вид.

Можно конкретизировать выводы этого параграфа, рассмотрев осцилляции термодинамических величин, обусловленные квантованием уровней энергии электронов в пленке. Анализ осциллирующей части термодинамических характеристик газа электронов с произвольным законом дисперсии в этом случае [32, 33] показывает, что период осцилляций равен

$$\Delta L = \frac{2\pi\hbar}{P_e^{\text{extr}}(\epsilon_F)}, \tag{18.5}$$

где L — размеры пленки, а $P_e^{\text{extr}}(\epsilon_F)$ — экстремальная хорда поверхности Ферми, параллельная нормали e к поверхности пленки (рис. 46). Температурная зависимость амплитуды каждой гармоник при $T \gg \Delta\epsilon$ определяется множителем $\exp(-2\pi^2 T/\Delta\epsilon)$,

где $\Delta\epsilon = \frac{2\pi\hbar}{L} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)^{-1}$, а v_j — модуль проекции скорости электрона v на хорду в точке j ($j = 1, 2$). Таким образом, изучение размерных осцилляционных эффектов позволяет получить

значения экстремальных хорд поверхности Ферми и сумм обратных скоростей в точках пересечения экстремальной хорды с поверхностью Ферми. В случае центрально-симметричной поверхности возможно непосредственное определение величины радиус-вектора поверхности Ферми в данном направлении и проекции скорости на это направление. Если поверхность Ферми состоит из нескольких полостей, то размерные осцилляционные

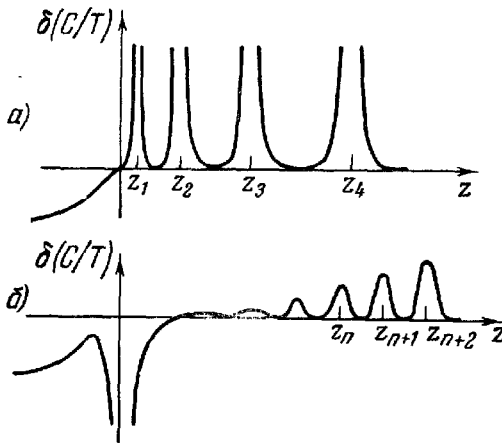


Рис. 47. Аномалия электронной теплоемкости пленки металла вблизи точки перехода (в функции от $z \sim \gamma(V - V_0)$):
 а — при $T = 0$; б — при $T/\Delta\varepsilon \gg 1$,
 $T/|z| \ll 1$.

эффекты могут оказаться чувствительными к взаимному расположению отдельных полостей.

Учет осциллирующей зависимости плотности состояний приводит к усложнению термодинамических характеристик как функций давления вблизи аномалии [32]. Вместо «одной особенности» (§ 13) возникает система особенностей, крайне чувствительная к температуре.

На рис. 47 изображена аномалия электронной теплоемкости пленки металла вблизи «перехода $2^{1/2}$ -го рода» при $T = 0$ и при темпе-

ратуре, отличной от нуля*). Усиление аномалии электронных характеристик обусловлено наложением двух явлений: осцилляции плотности состояний с размерами образца и фазового «перехода $2^{1/2}$ -го рода». Так как амплитуда осцилляций в этом случае не мала (в приведенном примере она равна бесконечности), то подобную ситуацию можно назвать «гигантскими осцилляциями».

Следует отметить, что гигантские осцилляции могут возникнуть не только при изменении топологии ферми-поверхности, но и в том, по сути дела, общем случае, когда поверхность Ферми содержит седловую точку, а плоскость $pe = \text{const}$ (соответствующая квантованному значению величины pe) касается седловой точки [32].

Статистико-термодинамические свойства электронного газа в ограниченных объемах могут быть изучены и при отличном от нуля магнитном поле [34, 32]. Не останавливаясь на подроб-

*) Анализ поведения различных величин с давлением и их температурная зависимость содержится в цитированной работе [32].

ностях, отметим только, что при не слишком больших магнитных полях должна наблюдаться зависимость периода осцилляций от размеров, которая исчезает, когда экстремальные орбиты полностью укладываются в образце.

При рассмотрении взаимодействия электронов с поверхностью мы ограничивались случаем зеркального отражения (см. стр. 81). При диффузном рассеянии электронов на границе все рассмотрение существенно усложняется, причем, естественно, осциллирующие зависимости, обусловленные квантованием энергии электронов за счет отражения от границ, расплываются и могут вообще не наблюдаться. Так, должна резко уменьшиться амплитуда тех гармоник в эффекте де Гааза — ван Альфена, которая обусловлена траекториями, не помещающимися в образце [35]. Это обстоятельство дает дополнительные возможности непосредственного определения размеров сечений поверхности Ферми.

§ 19. Сильный магнетизм электронов проводимости. Аномалии термодинамических величин в сильном магнитном поле

Мы неоднократно на протяжении всей книги подчеркивали то обстоятельство, что магнитное поле можно считать малым, так как расстояния между квантованными уровнями энергии $\Delta \epsilon$ становятся порядка атомной энергии e^2/a или энергии Ферми ϵ_F лишь при $H \sim 10^8 \div 10^9$ э. Это позволяло при всех расчетах использовать квазиклассическое приближение. С другой стороны, в § 15 (см. формулу (15.22)) отмечено, что магнитная восприимчивость из-за осциллирующей зависимости магнитного момента может быть порядка и больше единицы. Это показывает, что в металлах может наблюдаться сильный электронный магнетизм, теория которого построена в последние годы. Первый вопрос, возникающий из-за возможности сильного магнетизма, обусловленного электронами проводимости: какая из величин, магнитная индукция B или напряженность магнитного поля H , входит в выражение для осциллирующей добавки к термодинамическому потенциалу, вычисленной в § 15?

Задача о поведении заряженных квазичастиц — электронов проводимости в магнитном поле — типичная задача теории поля о поведении системы свободных зарядов в вакууме (в данном случае — вакууме для квазичастиц). Поэтому, строго говоря, следует рассматривать только микроскопическое магнитное поле, создаваемое в данной точке всеми зарядами, двигающимися по орбитам, радиус которых порядка ларморовского радиуса r_H . Если расстояние a между зарядами мало по сравнению с r_H , как это обычно бывает в металлах (где $a \sim 10^{-8}$, а r_H при

$B \sim 10^4$ э (порядка 10^{-3} см), микроскопическое магнитное поле в данной точке определяется $4\pi(r/a)^2$ электронами, а потому «самоусредняется».

Такое самосогласованное усредненное поле есть, по определению, магнитная индукция \mathbf{B} ; только она и ощущается каждым из электронов, только ею и будет определяться магнитный момент \mathbf{M} [39] (доказательство см. [40]). Понятно, что связь \mathbf{M} и \mathbf{B} нелокальна: \mathbf{M} в данной точке выражается через значения \mathbf{B} во всех точках, отстоящих от данной на расстоянии $4r_{\max}$ (то, что во все формулы должно входить именно \mathbf{B} , естественно, поскольку $\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, а $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$).

Прежде чем двигаться дальше, заметим, что значащий множитель перед периодической функцией в выражении для осциллирующей части термодинамического потенциала (см. формулу (15.16)) можно представить в форме $V \frac{H^2}{8\pi} \left(\frac{v_F}{c}\right)^2 \left(\frac{\hbar\omega_H}{\epsilon_F}\right)^{1/2}$, из которой, во-первых, отчетливо видна релятивистская квантовая природа диамагнетизма вырожденного электронного газа, а во-вторых, — осциллирующая часть потенциала мала по сравнению с энергией магнитного поля $VH^2/8\pi$. Сильный магнетизм, о котором шла речь выше, обусловлен не изменением энергетической структуры металла (как, скажем, при ферромагнитном упорядочении спинов), а лишь существованием осцилляций.

Однако есть причина (совсем другой природы), благодаря которой сравнительно малое магнитное поле ($H \ll 10^8 \div 10^9$ э) приводит к кардинальной перестройке энергетического спектра электронов проводимости.

Дело в том, что у многих металлов имеются, как мы говорили, аномально мало заполненные зоны с энергией вырождения порядка 10^2 °К. Электроны из этих зон, как правило, имеют аномально малую эффективную массу — порядка 0,1—0,01 массы свободного электрона. Напомним, что, согласно [8] (§ 11), малые массы и малое число носителей взаимосвязаны. У «полуметаллов» типа висмута (Bi, Sb, As) эти группы являются единственными. Для электронов из аномально мало заполненных зон квазиклассический подход перестает быть справедливым уже в полях порядка 10^4 — 10^5 э.

Исследования в области сильных магнитных полей (квантовый или даже ультраквантовый *) случаи) представляют особый интерес, так как позволяют, сдвигая край зоны, существенно менять энергию Ферми, влиять (при наличии нескольких

*) Под ультраквантовым случаем мы понимаем ситуацию, при которой расстояния между магнитными уровнями $\Delta\epsilon \gg \epsilon_F \gg T$ ($\Delta\epsilon$ — наибольший параметр задачи).

зон) на число носителей, наблюдать аномалии при прохождении уровнем Ферми особых критических значений энергии (§ 3, 13).

Подчеркнем еще раз: формирование электронного энергетического спектра металлов связано (даже в металлах типа Vi) с энергиями порядка кулоновской энергии взаимодействия электронов с ионами ($U \approx e^2/a$). Поэтому магнитное поле в определенном смысле всегда мало, если, конечно, $H \ll 10^8 \div 10^9$ э. Однако иногда свойства электронов проводимости существенно зависят от тонкой структуры спектра (малое пересечение зон в металлах типа Vi, малые энергетические барьеры в поливалентных металлах согласно модели Харрисона и т. п.). Поэтому применимость квазиклассического приближения часто определяется не кулоновской энергией, а характерной энергией тонкой структуры электронного спектра. Из-за этого сравнительно малое магнитное поле ($H \sim 10^4 \div 10^5$ э) может привести к существенной перестройке спектра. В некоторых случаях возникающий «новый» закон дисперсии может быть рассчитан в терминах «старого», как, например, при определенных направлениях магнитного поля в случае магнитного пробоя (§ 10). Однако, как правило, эта задача слишком сложна и не может быть решена без грубых модельных предположений. Поэтому естественным и соответствующим духу настоящего изложения является другой путь: считать известным квантованный закон дисперсии электронов в магнитном поле и попытаться установить связь характеристик этого нового закона дисперсии с экспериментально наблюдаемыми величинами.

Из весьма общих соображений ясно, что квантовые числа остаются прежними. Так как при вектор-потенциале (4.16) зависимость от координат x и z отсутствует (в основном приближении по a/r_H), то имеются два интеграла движения — p_z и P_x . В этом же приближении сохраняется бесконечнократное вырождение по P_x . Мы будем предполагать, что классическое движение в рассматриваемом магнитном поле финитно. Это обеспечивает наличие дискретного квантового числа n . Магнитное поле, естественно, снимает двукратное вырождение по спину. Следовательно, имеется две ветви спектра (обозначим их индексами (+) и (-), пусть $\epsilon^{(+)} > \epsilon^{(-)}$):

$$\epsilon = \epsilon_n^{(\pm)}(p_z), \quad (19.1)$$

расстояние между которыми отнюдь не равно $2\mu H$, где $\mu = e\hbar/2mc$, так как спин-орбитальную связь, вообще говоря, нельзя считать малой (см., например, [21], а также § 14).

Магнитное поле входит в закон дисперсии (19.1) как параметр. Волновые функции электрона (или матричные элементы) следует также считать известными.

Задача состоит, во-первых, в выяснении того, какие физические результаты не зависят от вида закона дисперсии (19.1), и, во-вторых, в определении метода экспериментального восстановления закона (19.1). Постановка аналогична теоретическим исследованиям с произвольным «классическим» законом дисперсии $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$.

В качестве примера решения подобной задачи приведем расчет магнитного момента электронного газа в ультраквантовом случае при наличии одной зоны [41]. Так как расстояние между уровнями с заданным p_z является, по предположению, наибольшим параметром задачи, то ясно, что существенны только состояния с энергией, близкой к наименьшей. Это означает, что из всех ветвей спектра (19.1) будет играть роль только одна, которую для сокращения записи обозначим $\epsilon(p_z)$. Таким образом, речь идет о построении низкотемпературной термодинамики своеобразного «одномерного» газа с законом дисперсии

$$\epsilon = \epsilon(p_z). \quad (19.2)$$

Плотность состояний на интервал dp_z задана формулой (15.5), а задание закона дисперсии (19.2) позволяет ввести плотность состояний на интервал энергий $\nu_H(\epsilon)$:

$$\nu_H(\epsilon) = \frac{2|e|HV}{(2\pi\hbar)^2 cv(\epsilon)}, \quad (19.3)$$

где $v = \left| \frac{d\epsilon}{dp_z} \right|$. Двойка возникла из-за четности закона дисперсии — следствия инвариантности направлений вдоль и против магнитного поля.

Используя выражение для $\nu_H(\epsilon)$, можно записать все формулы статистической термодинамики газа электронов (см. формулы (12.2) — (12.5)), однако для конкретизации их следует заметить, что с ростом магнитного поля растет плотность состояний (19.3), а это означает, что уровень Ферми прижимается к наименьшему значению энергии $\epsilon_{\min} = \epsilon_H$. Поэтому закон дисперсии $\epsilon = \epsilon(p_z)$ можно разложить по степеням p_z и ограничиться наименьшим членом разложения:

$$\epsilon(p_z) = \epsilon_H + \frac{p_z^2}{2m_H}, \quad (19.4)$$

где $1/m_H = (\partial^2\epsilon/\partial p_z^2)_{p_z=0}$ — эффективная масса электрона (определенная с помощью «нового» закона дисперсии).

Используя выражения (19.3), (19.4), а также формулы § 12, можно записать выражение для свободной энергии электронного газа при температурах, малых по сравнению

с расстояниями между уровнями:

$$F = N \left\{ \epsilon_H + \frac{(2\pi\hbar)^4 c^2}{2e^2 m_H H^2} \left(\frac{N}{V} \right)^2 \left[\xi - 2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{e^{\frac{u-\xi}{\tau}} + 1} \right] \right\}. \quad (19.5)$$

Функция $\xi = \xi(\tau)$ определяется из условия нормировки

$$1 = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u} \left(e^{\frac{u-\xi}{\tau}} + 1 \right)}, \quad (19.6)$$

где параметр τ есть безразмерная температура:

$$\tau = \frac{2e^2 m_H H^2}{(2\pi\hbar)^4 c^2} \left(\frac{V}{N} \right)^2 T. \quad (19.7)$$

Таким образом, формулы (19.5)–(19.7) описывают зависимость всех термодинамических величин от магнитного поля и от температуры, причем в широком интервале изменений H и T . Естественно, можно выписать различные предельные соотношения. Мы не будем на этом останавливаться. Из формулы (19.5) ясно, что при достаточно сильном магнитном поле $F \approx N\epsilon_H$, и, следовательно, $M \approx -N\partial\epsilon_H/\partial H$. Величину $-\partial\epsilon_H/\partial H$ естественно обозначить через μ_H . Тогда

$$M = N\mu_H. \quad (19.8)$$

Эта величина напоминает магнитный момент ферромагнетика — возникает «наведенный» ферромагнетизм. В данном случае нет проблемы выделения роли электронов проводимости на фоне электронов ионного остова, так как магнитный момент ионов $M_i \ll M$. Действительно, для ионов магнитное поле мало и, следовательно, M_i имеет обычный порядок величины *): $\chi_i H \approx \approx \mu N_i \frac{\mu H}{\epsilon_a}$. Хотя $N_i \gg N$, но $\mu_H \gg \mu$ (проявляется малость эффективной массы, см. выше), а главное — в формуле (19.8) отсутствует очень малый множитель $\mu H/\epsilon_a$, где ϵ_a — энергия порядка атомной $\epsilon_a \approx e^2/a$. Таким образом, измерение магнитного момента в описываемых условиях позволяет выяснить зависимость от магнитного поля минимальной энергии в зоне (19.4), а температурный ход позволяет оценить эффективную массу или, что то же самое, плотность состояний на дне зоны. Любопытно отметить, что в рассматриваемом случае химический потенциал имеет максимум по температуре.

*) Мы считаем, что χ_i порядка обычной парамагнитной восприимчивости металла.

Рассмотренный случай (однозонное приближение) пригоден только в качестве иллюстрации основной идеи: аномально мало заполненная зона в чистом металле никогда не бывает единственной — либо имеется несколько таких зон с равными числами электронов и «дырок» (полуметаллы типа Vi), либо кроме аномально мало заполненных зон имеются основные зоны с числом электронов порядка одного электрона на атом. Естественно, смещение в магнитном поле энергии «доньев» или «вершин» зон сопровождается перераспределением электронов между зонами. Это может привести либо к росту числа носителей, если перекрытие зон увеличивается, либо к «опустошению» определенных зон, причем в момент, когда зона оказывается пустой, естественно ожидать аномалий электронных характеристик металла; в случае полуметаллов наступит, в конце концов, полное заполнение одной зоны, полуметалл превратится в собственный полупроводник *).

Рассмотрим аномалии электронных характеристик на примере металла с двумя зонами — электронной и дырочной — с равными числами носителей. Пусть магнитное поле уменьшает «перекрытие» зон, т. е. величина $\delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ уменьшается с ростом магнитного поля (другими словами, основную роль играет диамагнетизм), так что при $H = H_K$ величина $\delta\varepsilon$ обращается в нуль, а при $H > H_K$ металл при абсолютном нуле температуры превращается в диэлектрик (рис. 48).

При $|H_K - H| \ll H_K$ можно разложить все величины по степеням отклонения магнитного поля от критического значения. Учитывая особенность плотности состояний на краю зоны, получаем:

$$n_1 = n_2 \sim (H_K - H)^{1/2}, \quad (19.9)$$

а добавка к термодинамическим потенциалам, обусловленная электронами и «дырками», пропорциональна $(H_K - H)^{3/2}$. Эти утверждения справедливы при достаточно низких температурах.

При $H > H_K$ и при $T = 0$ числа носителей равны нулю, соответственно равны нулю и добавки к термодинамическим потенциалам. При малых, но конечных температурах числа носителей экспоненциально зависят от температуры.

*) Впервые на принципиальную возможность превращения висмута в собственный полупроводник в очень сильных магнитных полях указано в работе [42]; экспериментальные поиски такого перехода у сурьмы предпринимались в работе [43]; изменение числа носителей у висмута наблюдалось в работах [44]; аномалии электронных характеристик предсказаны и исследованы в [45]. В последних экспериментах [46] на Vi с примесями наблюдался переход «диэлектрик — металл» в сильном магнитном поле. Резкое падение сопротивления с ростом магнитного поля (переход «диэлектрик — металл») наблюдалось в работе [46а], а изменение характера температурной зависимости магнитосопротивления — в работе [46б].

Из сказанного ясно, что при $T = 0$ магнитный момент $M_H = -\partial F/\partial H$ непрерывен, а магнитная восприимчивость $\kappa = \frac{\partial M_H}{\partial H}$ при $H = H_k$ испытывает бесконечный скачок. По аналогии с § 13 можно сказать, что по магнитному полю имеет место своеобразный фазовый переход « $2^{1/2}$ -го рода» (при $T = 0$). При конечной температуре, естественно, имеют место лишь существенные аномалии электронных характеристик*).

Электронные аномалии будут иметь место и при прохождении граничной фермиевской энергией особых значений энергии, при которых появляется новая изоэнергетическая поверхность,

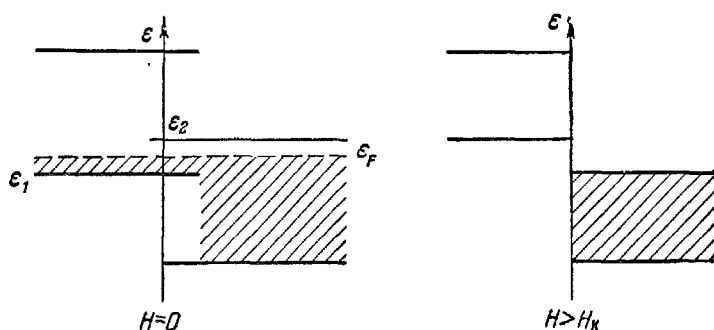


Рис. 48. Превращение металла в диэлектрик в сильном магнитном поле.

либо происходит переход от замкнутой ферми-поверхности к открытой и т. п. Эти особенности напоминают особенности при больших давлениях, предсказанные в работе [14] и описанные в § 13.

Если «перекрывание» зон $\delta\varepsilon$ растет с магнитным полем, то возможны аномалии только такого типа. Этот случай удобно использовать для исследования закона дисперсии и его особенностей в широком интервале энергий.

Естественно, что описанные здесь аномалии должны проявиться также в кинетических характеристиках металла (в частности, в гальваномагнитных; см. §§ 27, 28).

*) Следует отметить, что при достаточно малом числе носителей может произойти фазовый переход I рода к диэлектрику (см. работу [8], а также § 11).

Поскольку электронная добавка к $\frac{\partial P}{\partial V}$ может быть отрицательна, если она окажется достаточно большой, возможен изоморфный фазовый переход.

§ 20. Доменные и периодические структуры в магнитном поле

При достаточно низких температурах в чистых образцах, когда

$$\omega_H \gtrsim \frac{2\pi^2}{\tau}, \quad \frac{2\pi^2 T}{\hbar} \quad (20.1)$$

(τ — время релаксации), магнитная восприимчивость χ , согласно оценкам, приведенным в конце § 15 (см. также предыдущий параграф), может достигать сколь угодно больших значений. Это, как мы говорили, соответствует сильному магнетизму*).

Так, для того чтобы было $\chi \geq 1$, необходимо (при выполнении условий (20.1)):

$$\frac{\epsilon_F}{\hbar \omega_H} \gtrsim \left(\frac{c}{v_F}\right)^{1/3} \sim 10^3 \quad (20.2)$$

(c — скорость света).

Специфической особенностью электронного диамагнетизма является то, что при $T = 0$ и $\tau = \infty$ он тем сильнее, чем слабее магнитное поле ($M/B \sim B^{-1/2}$, $\chi \sim B^{-3/2}$).

Термин «диамагнетизм» здесь и всюду используется только в смысле происхождения сильного

магнетизма от диамагнитного квантования Ландау. Магнитная же восприимчивость, согласно § 15, вообще говоря, состоит из суммы «диамагнитных» и «парамагнитных» (в смысле знака) компонент и может соответствовать как сильному диамагнетизму ($-\chi \gtrsim 1$), так и сильному парамагнетизму ($\chi \gtrsim 1$). Последний приводит к неустойчивости однородного состояния (см. ниже).

Неосциллирующая добавка к термодинамическому потенциалу за счет магнитного поля, как можно показать, значительно больше осциллирующей, однако меняется она плавно, и при низких температурах (20.1) ее вклад в полные магнитную восприимчивость χ и момент M мал.

При достаточно малых полях ($T = 0$, $\tau = \infty$) магнитный момент M может оказаться больше магнитного поля ($|M| > |B|$), однако оценки показывают, что это возможно только при $T \leq 10^{-5} \div 10^{-4}$ °К, $l \gtrsim 10 \div 10^3$ см, т. е., на сегодняшний

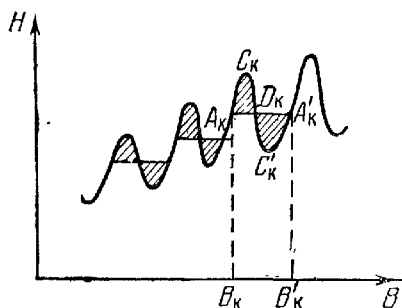


Рис. 49. Причина возникновения диамагнитных доменов — осциллирующая зависимость магнитного поля H от индукции B .

* На это впервые обращено внимание в [39].

день, в неосуществимых условиях. Поэтому мы будем предполагать, что $|M| \ll |B|$, хотя $|\kappa| \geq 1$.

Как известно, термодинамически устойчивыми являются лишь состояния, соответствующие $\partial H / \partial V > 0$ (см. [47]), т. е. $4\mu < 1$. Поэтому возрастание κ приводит к расслоению на магнитные фазы с различными значениями B (рис. 49), т. е. к появлению диамагнитных доменов [48]*).

Физически это связано с тем, что магнитное поле меняет плотность состояний, а следовательно, и внутреннюю энергию электронного газа, и при $4\mu_{\max} > 1$ оказывается выгодной «перестройка» плотности состояний, связанная с изменением B при расслоении на фазы.

Поскольку, согласно § 15, зависимость $M(B)$ осциллирует, кривая равновесия имеет ряд периодически повторяющихся плоских участков расслоения (показаны пунктиром на рис. 49).

Неустойчивым однородное состояние магнетика может оказаться и тогда, когда расслоение на домены еще термодинамически невыгодно, если в κ имеются как парамагнитные, так и диамагнитные компоненты ($\kappa = \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha}$, причем $4\mu < 1$); но для парамагнитных компонент в отсутствие взаимодействия уже возникла бы неустойчивость по отношению к расслоению, так как $4\mu_{\nu} = \sum_{\nu} 4\mu_{\nu} > 1$ (ν — те из α , для которых $\kappa_{\nu} > 0$). Расслоения не происходит из-за самосогласованного взаимодействия с компонентами, для которых устойчивым является однородное состояние. Это значит, что взаимодействие ведет к «перемешиванию», т. е. имеет характер эффективного притяжения диамагнитных ($\kappa_{\alpha} < 0$) и парамагнитных ($\kappa_{\alpha} > 0$) компонент**).

*) Расчет доменной стенки произведен в [49].

Непосредственное экспериментальное доказательство существования диамагнитных доменов было дано в работе [49а]: наблюдалось расщепление линии ядерного магнитного резонанса благодаря разным значениям магнитного момента в различных доменах (изложение результатов этой модели и ее обсуждение см. в работе [49б]).

**) Расслоение на магнитные фазы при $(\partial H / \partial V)_T < 0$ аналогично обычному расслоению в многокомпонентной системе на пар — жидкость при $(\partial P / \partial \rho)_T < 0$; давление соответствует напряженности магнитного поля, равной сумме парциальных напряженностей для компонент, отвечающих разным экстремальным сечениям или зонам, а удельный объем $V = \rho^{-1}$ — магнитной индукции. Все взаимодействие между компонентами формально сводится к тому, что «удельные объемы» разных компонент должны совпадать (B , очевидно, зависит только от координат). В результате, хотя для «компонент» ν расслоение на фазы с B и B' выгодно, оно запрещено остальными зонами, для которых такие удельные объемы невыгодны. Однако при неоднородной индукции B разные κ_{α} меняются по-разному, полная восприимчивость κ может возрасти, что термодинамически выгодно (см. ниже).

Таким образом, неустойчивость компонент ν создает тенденцию к расслоению на фазы, а притяжение между ними (отрицательная поверхностная энергия) — к перемешиванию. В таком случае естественно ожидать упорядочения фаз, т. е. возникновения самосогласованной периодической структуры, характеристики которой определяются свойствами термодинамической системы. Так, период структуры окажется макроскопическим и порядка «радиуса взаимодействия» — ларморовского радиуса r_H .

Из общих соображений можно понять, как будет происходить переход от однородной структуры к периодической*). Требование термодинамической устойчивости приводит к непрерывности при переходе соответствующего термодинамического потенциала (так, положительность теплоемкости C_V означает непрерывность и монотонность свободной энергии как функции температуры T). Это значит, что в точке перехода может появляться либо бесконечно малое количество новой фазы с существенно новыми свойствами, т. е. с конечной амплитудой A пространственных осцилляций, либо само новое состояние бесконечно мало отличается от старого (т. е. амплитуда осцилляций бесконечно мала).

В первом случае рождение новой фазы связано с флуктуационно возникающими зародышами, которые, для того чтобы оказаться термодинамически выгодными, должны быть достаточно велики (ибо имеется поверхностная энергия на границе разных фаз). Поэтому возможны перегрев и переохлаждение — сохранение метастабильной однородной фазы. Точка перехода есть, следовательно, точка пересечения термодинамических потенциалов однородных фаз и не является, в сущности, особой точкой (см. [10], §§ 81, 83) — это фазовый переход первого рода.

Во втором случае поверхностная энергия отсутствует, поэтому перегрев или переохлаждение невозможны; новое состояние появляется сразу во всем объеме, и точка перехода есть особая точка термодинамического потенциала системы (фазовый переход второго рода). Изменение состояния сразу во всем макроскопическом объеме должно быть, очевидно, «подготовлено»: размер флуктуационно возникающих областей невыгодного состояния (радиус корреляции r_c) по мере приближения к точке перехода должен неограниченно возрастать. В теории Ландау это происходит по закону ([10], § 119)

$$r_c \approx a \left| \frac{T - T_K}{T_K} \right|^{-1/2}$$

*) Впервые возможность появления периодической структуры была показана в [50]. Там же построена теория таких структур. В [51] отмечалось появление периодической структуры, однако найденное там решение соответствует $4\pi > 1$, термодинамически абсолютно неустойчиво и потому никогда не может физически реализоваться (см. также ниже).

(a — расстояние между частицами, T_K — температура перехода). Пока радиус корреляции мал по сравнению с радиусом взаимодействия ρ (если это возможно), в данном случае ларморовским радиусом, флуктуационную неоднородность амплитуды осцилляций можно не учитывать и считать эту амплитуду однородной и «достоверной» (a не случайной), определяемой из условий термодинамического равновесия. Неравенство $r_c \ll r_H$ соответствует $T \gg \left(\frac{a}{r_H}\right)^2 T_K$ ($a \sim 10^{-8}$ см, $r_H \sim 10^{-3}$ в магнитных полях $H \sim 10^4$ э и $T_K \sim 1^\circ\text{K}$ — только при таких температурах существенны квантовые осцилляции), т. е. $|T - T_K| \gg 10^{-10}$ °K. Нарушение этого неравенства находится далеко за пределами возможностей эксперимента.

Если $(a/r_H)^2 \leq N^{-1/2}$ (N — число частиц), то неравенство $r_c \ll r_H$ выполняется во всей области применимости термодинамики, так как измерение температуры имеет смысл лишь с точностью до флуктуаций: $\left|\frac{T_K - T}{T_K}\right| \gg N^{-1/2}$. (Заметим, что $(a/r_H)^2 \sim n^{-1/3}$, где n — плотность фермиевских частиц.)

В пренебрежении флуктуациями связанная с магнитным полем добавка к любому термодинамическому потенциалу (обозначим его через θ) зависит от «полной» индукции. Поскольку неоднородная добавка вблизи точки перехода II рода мала по сравнению с однородной ($A \rightarrow 0$ при $\tau = (T_K - T)/T \rightarrow 0$), θ может быть разложено в ряд по этой добавке. Считая период осцилляций λ заданным*) (т. е. обеспечивающим минимум термодинамического потенциала при данной амплитуде пространственных осцилляций A), получаем разложение θ по степеням A^2 , которое аналогично известному разложению Ландау:

$$\theta = \theta_0 + \alpha A^2 + \beta A^4 + \gamma A^6 + \dots \quad (20.3)$$

При $\alpha = 0$, $\beta > 0$ получаются фазовые переходы второго рода типа Ландау (см. [10], §§ 137, 138) с конечным скачком теплоемкости C_H (если переход происходит при фиксированном магнитном поле H и изменении температуры) или магнитной восприимчивости (если меняется H , а T фиксирована). Можно показать, что относительная величина скачка порядка $(\hbar\omega_H/\epsilon_F)^{1/2}$.

Кривая фазовых переходов второго рода может оканчиваться, пересекаясь с кривой фазовых переходов первого рода в критической точке фазовых переходов второго рода (см. [10], § 140); тогда в формуле (20.3) будет $\alpha(T_0, B_0) = \beta(T_0, B_0) = 0$. При $\alpha = a_1 T_1 + b_1 H_1$, $\beta = a_2 T_1 + b_2 H_1$ (где $T_1 = T - T_0$,

*) При $T = T_K$ он конечен; считая функцию $\lambda(T)$ регулярной, получаем линейную вблизи T_K добавку к λ_K по температуре. Доказательство этого дано ниже.

$H_1 = H - H_0$; $|T_1/T| \ll 1$, $|H_1/H| \ll 1$) исследование на минимум формы (20.3) удобно провести в системе координат (α, β) , а затем перейти к координатам (T_1, H_1) . При $\gamma > 0$ оказывается, что непосредственным продолжением кривой переходов второго рода является линия абсолютной неустойчивости однородной фазы с $A=0$ (об исследовании кривой, отделяющей область абсолютной неустойчивости, см. § 21); ее касаются

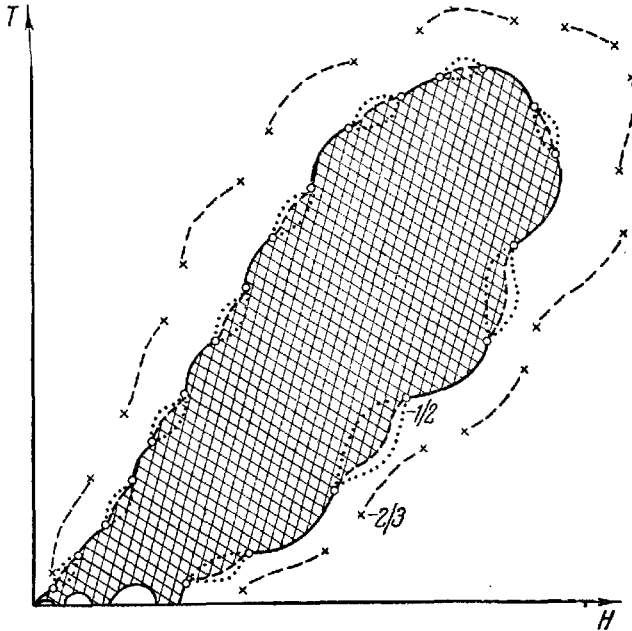


Рис. 50. Диаграмма состояния.

Сплошная линия — линия фазовых переходов второго рода, пунктирная — линия фазовых переходов первого рода, точечная — линия абсолютной неустойчивости; \circ — критическая точка фазовых переходов второго рода, \times — критическая точка; заштрихована область существования пространственно-периодической структуры.

в точке (T_0, H_0) линия фазовых переходов первого рода (соответствующих расслоению на однородную, с $A = 0$, и периодическую, с $A \neq 0$, фазы) и линия абсолютной неустойчивости периодической фазы с $A \neq 0$ (рис. 50). Теплоемкость C_H или соответственно восприимчивость χ на последней обращаются в бесконечность как $|T_1|^{-1/2}$ или $|H_1|^{-1/2}$ (§ 21).

Фазовый переход возможен, конечно, не только от однородной структуры к периодической, но и при появлении на фоне неоднородной структуры с конечной амплитудой добавки (конечной или бесконечно малой) с новым периодом, отличающимся от «старого» на конечную величину.

Периодическая зависимость квантовых осцилляций от B^{-1} в однородном случае приводит к повторяемости переходов по B^{-1} при изменении B (при заданном T).

Все трудности построения теории переходов второго рода относятся к области $r_c \geq \rho$, если таковая существует.

Фазовые переходы, связанные с диамагнитным квантованием, имеют место и при появлении доменной структуры. Во внешнем магнитном поле H_0 , параллельном поверхности образца, когда $H_t = H_0$, независимой переменной является H ; минимум имеет потенциал

$$\delta\theta_t = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \delta \mathbf{H}. \quad (20.4)$$

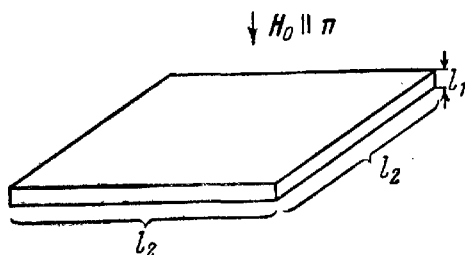


Рис. 51. Внешнее поле перпендикулярно поверхности образца.

При $H = H_K$ происходит «кипение» — фазовый переход первого рода от B_K к B'_K . Если поле H_0 нормально поверхности (рис. 51), оно совпадает со средним по поверхности образца значением магнитной индукции \bar{B} :

$$\mathbf{H}_0 = \bar{\mathbf{B}}. \quad (20.5)$$

Это соотношение следует из непрерывности интеграла $\int B_n dS$, взятого по поверхности, изображенной на рис. 51, при $l_2/l_1 \rightarrow \infty$ и $l_1 \rightarrow \infty$. Из (20.5) вытекает $H_K = cB_K + (1 - c) B'_K$, где c — концентрация фазы B_K ; Точки B_K и B'_K соответствуют $4\pi k < 1$ и находятся из минимума термодинамического потенциала. Поскольку, согласно (20.5), задано \bar{B} , независимой переменной является B и ищется минимум θ_t^* ($\delta\theta_t^* = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \delta \mathbf{B}$) при дополнительном условии (20.5). Значит, безусловный минимум имеет $\theta_t = \theta_t^* + \zeta_H \int B dv$. Определяя константу ζ_H из $\delta\theta_t/\delta B = 0$, находим:

$$\delta\theta_t = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \delta \mathbf{H} = -M \delta \mathbf{B} + 2\pi (\delta M)^2 + \frac{1}{8\pi} (\delta H)^2. \quad (20.6)$$

Таким образом, минимум по независимой переменной B имеет θ_t , так что (см. рис. 49) точки B_K и B'_K определяются равенством площадей $A_K C_K D_K$ и $D_K C'_K A'_K$. При изменении H_0 в интервале $B_K \leq H_0 \leq B'_K$ имеет место «испарение», сопровождающееся скачком восприимчивости и связанное с фазовым переходом второго рода типа Ландау. Ситуация аналогична, таким

образом, обычному расслоению в системе пар — жидкость. (При постоянном объеме независимая переменная — средний удельный объем v , неоднозначность $v(P)$ позволяет варьировать давление P при заданном v , и минимум имеет термодинамический потенциал $\Phi(d\Phi = v dP)$ как функция v ; значения Φ на одну частицу, т. е. химические потенциалы, при этом совпадают в обеих фазах).

Таким образом, фазовые переходы и первого, и второго рода могут соответствовать переходу как к периодической, так и к доменной структурам.

Для того чтобы отличить фазовые переходы, связанные с появлением периодической и доменной структур, следует использовать существенную зависимость от геометрии массивного образца доменной структуры и независимость периодической структуры. Так, например, если H_0 вращается в плоскости, перпендикулярной оси четвертого порядка (размеры образца $L_1, L_2, \sqrt{r_H L_1} \gg L_2 \gg r_H$), характер фазовых переходов при $H_0 \parallel x$ и $H_0 \parallel y$ будет совпадать для периодической и резко отличаться для доменной структур (переход первого рода для $H_0 \parallel x$ и второго рода для $H_0 \parallel y$).

Важной особенностью подобных фазовых переходов является макроскопичность радиуса взаимодействия. Конечность образца приводит при этом к относительной ширине перехода как по температуре, так и по магнитному полю порядка $(r_H/D)^2$, D — линейные размеры образца. Внутри этой области все термодинамические величины являются быстро изменяющимися, но аналитическими функциями.

Оценки (20.1) и (20.2) показывают, что неоднородные структуры возникают при слабых магнитных полях и низких температурах в чистых образцах (при $T = 0$ и $\tau = \infty$ восприимчивость $\chi \rightarrow \infty$ при $B \rightarrow 0$).

Интерференция различных периодов приведет к уменьшению магнитной восприимчивости и к размытию температуры перехода или вообще к невозможности неоднородной структуры, если χ окажется слишком малой. Это значит, что нужна весьма слабая мозаичность кристалла, высокая стабильность во времени и однородность в пространстве магнитного поля (вариации последнего должны быть малы по сравнению с периодом ΔB осцилляций χ , т. е. с величиной $B \hbar \omega_H / \epsilon_F \sim B^2$).

Появление неоднородного магнитного момента приведет к возникновению неоднородного электростатического потенциала ϕ . Согласно условиям термодинамического равновесия, химический потенциал ξ постоянен по системе, и для того, чтобы обеспечить постоянство полной электронной плотности, следующее из условия электронейтральности, которое выполняется с точностью до членов порядка $(a/r_H)^2$ (см., например, [52]), не-

обходимо существование $\varphi(\mathbf{r})$. Поскольку (это видно из результата) $e\varphi(\mathbf{r}) \ll \hbar\omega_H$, $\varphi(\mathbf{r})$ можно не учитывать при квантовании, так что, если $N = N_0 + \Delta N$ ($\Delta N = -\partial\Delta\Omega/\partial\xi$ — осциллирующая при постоянном ξ часть N , $\Omega(\mathbf{r})$ — плотность потенциала Ω , N_0 — в основном приближении не зависящая от магнитного поля монотонная часть электронной плотности), имеем:

$$N(\xi) = N_0(\xi + e\varphi) + \Delta N\{\mathbf{B}(\mathbf{r})\},$$

$$e\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{v(\varepsilon_F)} \Delta N\{\mathbf{B}(\mathbf{r})\} \sim \hbar\omega_H \left(\frac{\hbar\omega_H}{\varepsilon_F}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 T}{\hbar\omega_H} - \frac{2\pi^2}{\omega_H \tau}\right),$$

$$v = \frac{dN_0}{d\varepsilon_F}.$$
(20.7)

Величина ξ определяется из совпадения полного числа электронов в магнитном поле и в его отсутствие. Знание ξ и $\varphi(\mathbf{r})$ позволяет определить плотность электронов каждой зоны в точке \mathbf{r} .

Используя полученную формулу и приведенную ранее оценку для добавки к термодинамическому потенциалу, легко убедиться, что потенциал φ не сказывается в интересующем нас приближении не только на квантовании в магнитном поле, но и на магнитной восприимчивости. Поэтому все расчеты можно проводить, не учитывая φ , подставляя результаты расчетов в (20.7) для вычисления $\varphi(\mathbf{r})$.

Пространственная периодическая структура скажется и на других физических свойствах магнетика. Изменится распространение в нем электромагнитных и ультразвуковых волн при наличии периодической сверхструктуры; в частности, при достаточной амплитуде волны появятся особенности, связанные с периодическими по времени фазовыми переходами. Создадутся новые типы резонансов за счет новых ветвей собственных колебаний в сверхструктуре. Возникнет пространственная модуляция удельного объема (магнитострикция в периодическом поле).

Понятно, что периодические структуры, диамагнитные домены и все связанные с ними эффекты возможны и в ферромагнетике, где даже в отсутствие внешнего магнитного поля имеется $\mathbf{B} = 4\pi \mathbf{M}_0$, где $\mathbf{M}_0(T)$ — спонтанный магнитный момент.

Рассмотрим термодинамику доменных и периодических структур.

Чтобы упростить рассмотрение, ограничимся случаем, когда магнитное поле направлено по одной из главных кристаллографических осей, так что $\mathbf{M} \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{H} \parallel z$. Будем рассматривать только основное приближение по длине свободного пробега $l: l = \infty$. Тогда в направлении z характерная длина отсутствует и, стало быть, отсутствует координатная зависимость от z всех величин.

Так как $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, то это означает, что

$$H = H_z = \text{const}, \quad M = M_z(x, y), \quad B = B_z(x, y). \quad (20.8)$$

Для определения уравнения состояния — зависимости M от B , которая, как было сказано выше, носит в общем случае не-локальный характер, нужно вычислить добавку за счет диамагнитного и спинового квантования к соответствующему термодинамическому потенциалу. (Поскольку эта добавка, согласно оценкам, всегда мала, добавки ко всем термодинамическим потенциалам в соответствующих переменных совпадают; см. [10]).

Удобнее всего, как и в § 15, вычислять потенциал Ω :

$$\Omega = -T \sum_k \ln \left(\exp \frac{\xi - \varepsilon_k}{T} + 1 \right), \quad (20.9)$$

где сумма берется по всем состояниям.

В однородном случае уровни энергии нам известны. Неоднородная добавка, согласно (20.8), связана только с M , который всегда мал по сравнению с B (см. начало параграфа). Это позволяет для нахождения уровней энергии в неоднородном случае воспользоваться теорией возмущений по M ; вырождение по P_x снимается, поскольку в неоднородном поле становится существенным положение центра орбиты, определяемое P_x . В одномерном случае, когда \mathbf{B} зависит только от одной координаты и P_x по-прежнему остается интегралом движения, вычисление элементарно [53], в двумерном случае оно несколько сложнее, так как P_x больше не сохраняется и приходится определять «правильные» функции нулевого приближения в случае бесконечно-кратного вырождения [54].

Порядок относительной добавки к расстоянию между уровнями очевиден: это $M/H \leq (v_F/c)^2 (\varepsilon_F/\hbar\omega_H)^{1/2}$. Малая добавка не влияет на проводившиеся ранее оценки и скажется главным образом на аргументе быстроосциллирующей функции, где число уровней окажется уже не $\varepsilon_F/\hbar\omega_H$, а $(\varepsilon_F/\hbar\omega_H)(1 + bM/H)^{-1}$, $b \sim 1$. В линейном по M приближении появляется немалая добавка (порядка κ) к фазе. Следующее приближение дает заведомо малую поправку: $(v_F/c)^2 (\hbar\omega_H/\varepsilon_F)^{1/2}$. Значит, даже под знаком периодической функции достаточно ограничиться линейным по M приближением. А это означает возможность находить только первое приближение теории возмущений в правилах квантования и волновых функциях*). В общем случае «пра-

*) Именно благодаря этому можно не учитывать спин-орбитального взаимодействия в неоднородном поле, связанного с силой $\mu_0 \nabla(\sigma \mathbf{B})$. Это же позволяет использовать для получения правил квантования принцип соответ-

вильные» волновые функции нулевого приближения и уровни энергии с точностью до первого порядка включительно имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(0)} &= \int C(P_x) \psi_{np_z P_x}^{(0)} dP_x, \\ C(P_x) &= \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int^{P_x} x(P'_x) dP'_x \right\}, \\ \varepsilon &= \varepsilon_{np_z}^{(0)} + \varepsilon', \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

где ε' — непрерывное квантовое число, $x(P_x)$ — находится из уравнения

$$\varepsilon' = \frac{1}{H \frac{\partial s}{\partial \varepsilon}} \oint p_y(p_x) dp_x B_1 \left(x, \frac{c(p_x - P_x)}{eH} \right),$$

$$B_1 = 4\pi M = B - H, \quad (20.11)$$

а $\varepsilon_{np_z}^{(0)}$, $\psi_{np_z P_x}^{(0)}$ соответствуют нулевому приближению ($B = H$).

Вычисление термодинамического потенциала при известных уровнях энергии может быть проведено аналогично тому, как это делается в однородном случае (§ 15). Наиболее просто результат выйдет в одномерном случае [54]:

$$\Omega = \sum_{\alpha} \int dP_x \Omega^{(\alpha)} \left\{ \frac{cS_{\alpha}}{ehH} - \frac{2c}{ehH^2} \int_{p_{x\alpha}^{\min}}^{p_{x\alpha}^{\max}} p_y(p_x) M \left(\frac{p_x - P_x}{eH/c} \right) dp_x \right\}, \quad (20.12)$$

где $\sum_{\alpha} \Omega^{(\alpha)} (cS_{\alpha}/ehH)$ — потенциал в однородном магнитном поле, вычисленный в § 15 (см. также работу [55]).

Как и в однородном случае, достаточно заменить химический потенциал на граничную фермиевскую энергию.

Полученные формулы относятся только к идеальному электронному газу и не учитывают, например, ферми-жидкостного взаимодействия (впрочем, последнее не влияет на период осцилляций и порядок величины их амплитуды; см. § 16). Однако конкретный вид $M(r)$ мало существен, а характер этой функции может быть получен из весьма общих соображений.

Для нахождения классической частоты в неоднородном случае можно использовать теорию возмущений по M в классических уравнениях Гамильтона—Якоби — они при варьировании периода движения удобнее, чем уравнения Ньютона.

Как было показано в начале этого параграфа, в общем случае все величины являются периодическими функциями, аргумент которых — линейная функция магнитного момента. Это означает, что плотность любого термодинамического потенциала $\theta_1(\mathbf{r})$ магнетика должна, с учетом трансляционной симметрии, иметь вид (по-прежнему \mathbf{B} направлено по кристаллографической оси):

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(\mathbf{r}) &= \sum_{\alpha} f_{\alpha} \left\{ \int K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') M(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\}, \\ \theta &= \int \theta_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

причем центральная симметрия кристалла обеспечивает четность $K_{\alpha}(\mathbf{r})$.

Знание термодинамического потенциала позволяет определить момент $\mathbf{M} = \delta\theta/\delta\mathbf{B}$ и записать основное для определения $\mathbf{B}(x, y)$ уравнение задачи:

$$\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\{\mathbf{B}\} = \mathbf{H} = \text{const}. \quad (20.14)$$

Следует, однако, иметь в виду, что это уравнение само по себе может давать не только равновесные, но и метастабильные, и абсолютно неустойчивые решения. В самом деле, уравнение состояния обеспечивает лишь экстремум термодинамического потенциала, а не его наименьшее значение, и потому является только необходимым (но не достаточным) условием равновесия. Для того чтобы отбросить абсолютно неустойчивые решения, следует записать вторую вариационную производную от полного термодинамического потенциала, магнитная добавка к которому связана не только с квантованием, но и с изменением полей в магнетике. Было показано, что таким потенциалом является всегда потенциал θ ($\delta\theta = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\delta\mathbf{H}$, рассуждения, очевидно, не зависят от того, идет речь о доменах или периодических структурах). Так как H не варьируется ($H = \text{const}$), а $-\mathbf{M}\delta\mathbf{B} = \delta\theta$, то

$$\theta_t = \theta + 2\pi \int M^2 d\mathbf{r}, \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{H}}{4\pi} = -\frac{\delta\theta}{\delta\mathbf{B}}. \quad (20.15)$$

Формулы (20.15), (20.13) и (20.14) позволяют, в принципе, полностью построить термодинамику рассматриваемых нами магнетиков как в равновесном, так и в метастабильном состояниях. Поскольку термодинамические потенциалы в этих состояниях отличаются на конечную величину и имеют в обоих случаях минимум, исследование вариационных производных уже ничего не дает; равновесному состоянию будет соответствовать наименьшее значение θ_t , которое можно выделить, сравнив значение θ_t для различных решений, подставленных в (20.15).

Метастабильные решения в магнетиках, благодаря дальнему действию, могут оказаться весьма стабильными, поскольку всегда пужен макроскопический (порядка r_H , т. е. 10^{-3} — 10^{-4} см) размер зародышей новой фазы. (При кипении, как известно, уже при относительно небольшом перегреве достаточны зародыши атомных размеров.) Правда, закалка, например, изменением магнитного поля должна производиться весьма быстро, так как характерные времена релаксации имеют электронное происхождение и весьма малы (даже в весьма чистых металлах при гелиевых температурах $\tau \sim 10^{-9}$ сек). Обратимся к наиболее интересной области — появлению неоднородной структуры.

§ 21. Теория диамагнитных фазовых переходов

Исследуем сначала случай, когда диамагнитная пространственная структура появляется путем фазового перехода второго рода.

Основным уравнением теории периодических структур является, как уже говорилось, уравнение

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\{\mathbf{B}\} &= \mathbf{H} = \text{const}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} \equiv (x, y). \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

Уравнение (21.1) всегда имеет однородное решение \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{B}_0 - 4\pi\mathbf{M}\{\mathbf{B}_0\} = \mathbf{H}, \quad (21.2)$$

которое может оказаться не единственным. Выясним условия существования неоднородного решения, бесконечно близкого к однородному:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1. \quad (21.3)$$

Имеем

$$\mathbf{B}_1 = 4\pi\hat{\chi}\mathbf{B}_1, \quad (21.4)$$

где $\hat{\chi}$ — линейный интегральный (согласно сказанному выше) оператор. Из однородности пространства (сдвиг на период кристаллической решетки в основном приближении бесконечно мал по сравнению с r_H) следует, что этот оператор должен быть разностным, а инвариантность кристалла относительно инверсии ($\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$) обеспечивает его четность, так что (21.4) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \int \chi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{B}_1(\mathbf{R}') d\mathbf{R}', \quad \chi(-\mathbf{R}) = \chi(\mathbf{R}). \quad (21.5)$$

Полагая

$$\mathbf{B}_1 = \text{Re}(Ae^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}), \quad (21.6)$$

приходим к уравнению для периода пространственных осцилляций:

$$4\pi\tilde{\chi}(k_0) = 1, \quad \tilde{\chi}(k) = \int \chi(\mathbf{R}) \cos(k\mathbf{R}) d\mathbf{R}. \quad (21.7)$$

Условие разрешимости (21.7) является при $4\pi\chi < 1$ не только необходимым, но и достаточным условием возникновения периодической структуры.

Для доказательства этого разложим $\theta\{B\}$ по B_1 . Учитывая, что уравнение (20.15) должно при этом совпасть с (21.5) и принимая во внимание симметрию кристалла, находим

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 + \frac{1}{8\pi} \int B_1^2(\mathbf{R}) d\mathbf{R} - \frac{1}{2} \int \chi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}) B_1(\mathbf{R}') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' + \\ + \frac{1}{12\pi} \int f(\mathbf{R} - \mathbf{R}'; \mathbf{R} - \mathbf{R}'') B_1(\mathbf{R}) B_1(\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}'') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' + \\ + \frac{1}{16\pi} \int g(\mathbf{R} - \mathbf{R}'; \mathbf{R} - \mathbf{R}''; \mathbf{R} - \mathbf{R}''') B_1(\mathbf{R}) B_1(\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}'') \times \\ \times B_1(\mathbf{R}''') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' d\mathbf{R}'''. \quad (21.8) \end{aligned}$$

Линейный по B_1 член в (21.8) отсутствует потому, что он должен в силу трансляционной симметрии иметь вид $K_0(B_0) \int B_1(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$, а устойчивость по отношению к однородным возмущениям ($B_1 = \text{const}$) означает

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial B_1} \right)_{B_1=0} = K_0(B_0) = 0$$

$$\left(\text{а } \frac{\partial^2 \theta}{\partial B_1^2} \Big|_{B_1=0} = 1 - 4\pi\chi > 0 \text{ по предположению.} \right)$$

Запишем (21.8) в виде

$$\theta_i = \theta_0 + \frac{\pi}{2} \int (1 - 4\pi\tilde{\chi}(\mathbf{k})) |\tilde{B}_1(\mathbf{k})| d\mathbf{k} + \dots \quad (21.9)$$

(тильдой здесь и в дальнейшем обозначаются компоненты Фурье соответствующих функций).

Если (21.7) имеет решение, то $4\pi\tilde{\chi}_{\text{max}} \geq 4\pi\tilde{\chi}(k_0) = 1$ и малая неоднородность, согласно (21.9), заведомо выгодна, а однородное состояние неустойчиво. Как уже отмечалось, неустойчивость однородного состояния может быть связана как с появлением периодической структуры, так и с расщеплением на диамагнитные домены. Последнее происходит (см. рис. 45) уже при $4\pi\chi < 1$ (т. е. $\partial\theta/\partial B > 0$); только такие значения χ и реализуются. Поэтому для существования периодической структуры необходи-

мо*), чтобы $4\pi\tilde{\chi}_{\max} \geq 1$ (максимум берется по k) при $4\pi\tilde{\chi} = 4\pi\tilde{\chi}(0) < 1$.

Будем предполагать это условие выполненным. Точка фазового перехода второго рода соответствует тому, что впервые появляется корень уравнения (21.7), т. е. $4\pi\tilde{\chi}_{\max} = 1$, и, значит, возникает кратный корень уравнения (21.7) (рис. 52). Вблизи этой точки интервал k , в котором $1 - 4\pi\tilde{\chi} < 0$, очевидно, мал: $|\Delta k/k_0| \ll 1$. Это означает (см. рис. 48), что при $|\Delta k| \gg k_0$, где $1 - 4\pi\tilde{\chi}(k) \geq 1$, значение B_1 должно быть мало по сравнению с его значением в интервале, где $1 - 4\pi\tilde{\chi} < 0$,

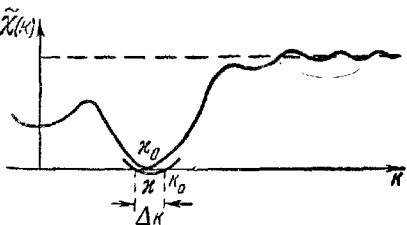


Рис. 52. Появление кратного корня.

так как член, выписанный в (21.9), является при малых (по исходному допущению) B_1 определяющим и состояние с немалым «разбросом» Δk заведомо невыгодно. Это значит, что даже с учетом следующих членов разложения вблизи точки перехода B_1 может быть представлено в виде

$$B_1(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{R}) + A^*(\mathbf{R}) \exp(-i\mathbf{x}\mathbf{R}) + C(\mathbf{R}), \quad (21.10)$$

$$|C| \ll |A|,$$

$$\tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \tilde{\chi}_{\max}, \quad \nabla \tilde{\chi}(k) = 0, \quad (21.11)$$

где $A(\mathbf{R})$ — медленно меняющаяся функция, изменяющаяся на расстояниях, больших по сравнению с радиусом взаимодействия в ядрах (21.8), т. е. с ларморовским радиусом r_{II} . Звездочка обозначает комплексное сопряжение, а $C(\mathbf{R})$ может соответствовать любым k , меняется произвольным образом, но мало по сравнению с $A(\mathbf{R})$.

Запись (21.10) позволяет решать методом последовательных приближений **) нелинейное уравнение для $B_1(\mathbf{R})$, которое

*) Можно показать, что для данной зоны и данного сечения $\chi_\mu(\mathbf{R})$ знаменитостанно, и

$$\text{sign } \chi_\mu(\mathbf{R}) = \text{sign } \chi_\mu, \quad 4\pi |\tilde{\chi}_\mu| \leq 4\pi |\tilde{\chi}_\mu(0)| = 4\pi |\chi_\mu|.$$

Поэтому для реализации периодического решения необходимо наличие нескольких экстремальных сечений и выполнение следующих условий: $4\pi\chi_0 > 1$ и $4\pi\chi < 1$ (определение χ_0 дано в § 20).

**) Ясно, что выбор нулевого приближения в виде (21.10) уже полностью определяет ход последовательных приближений (разумеется, с учетом условия разрешимости неоднородного уравнения в случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение). При этом решение уравнения

иня $\int h(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \Phi(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' = F(\mathbf{R}) \exp(is\mathbf{R})$ с медленно меняющейся функ-

следует из $\delta\theta/\delta B_1 = 0$:

$$B_1(\mathbf{R}) = 4\pi \int \chi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' + \\ + \int f(\mathbf{R} - \mathbf{R}'; \mathbf{R} - \mathbf{R}'') B_1(\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}'') d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' + \int g(\mathbf{R} - \mathbf{R}'; \\ \mathbf{R} - \mathbf{R}''; \mathbf{R} - \mathbf{R}''') B_1(\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}'') B_1(\mathbf{R}''') d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' d\mathbf{R}''' + \dots \quad (21.12)$$

Подставляя (21.10) в (21.12), находим (во втором по A приближении) величину C :

$$C = E \exp(2i\kappa\mathbf{R}) + E^* \exp(-2i\kappa\mathbf{R}) + 2D, \quad (21.13)$$

где

$$E = \frac{\tilde{f}(\kappa, -\kappa)}{1 - 4\pi\tilde{\chi}(\kappa)} A^2, \quad D = \frac{\tilde{f}(\kappa, -\kappa)}{1 - 4\pi\tilde{\chi}(0)} |A|^2. \quad (21.14)$$

В следующем приближении, помимо третьих гармоник, от члена третьего порядка по B_1 появляются первые гармоники. Соответствующее уравнение (совпадающее, конечно, с условием ортогональности «возмущающих» неоднородных членов в уравнении (21.12) решению однородного уравнения) имеет вид:

$$-2\pi \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 A}{\partial R_i^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \kappa_i^2} + \tau A - 4\beta A |A|^2 = 0, \\ \tau = 4\pi\tilde{\chi}(\kappa) - 1; \quad (21.15)$$

$$\alpha_i^{-1} = -2\pi \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \kappa_i^2} > 0. \quad (21.16)$$

Сравнительно громоздкое выражение для β мы опустили. Здесь $\alpha_i > 0$, так как $\tilde{\chi}$ в точке κ имеет максимум; направление осей (x, y) выбрано так, чтобы $\frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \kappa_x \partial \kappa_y} = 0$.

Введем κ_0 — точку, в которой

$$4\pi\tilde{\chi}(\kappa_0) = 1, \quad \nabla\tilde{\chi}(\kappa_0) = 0. \quad (21.17)$$

Уравнения (21.17) определяют, помимо κ_0 , еще и связь между T и H , т. е. кривую фазовых переходов от однородной к периодической структуре в плоскости (T, H) . Если переход наблюдается при фиксированном H , то $\tau \sim T - T_0(H)$ ($T_0(H)$ — точка перехода), если фиксировано T , то $\tau \sim H - H_0(T)$.

цней $F(\mathbf{R})$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{R}) = H^{-1} \left(i \frac{d}{d\mathbf{R}} \right) F(\mathbf{R}), \quad H(\xi) = \int \exp(i\mathbf{R}(\xi - s)) h(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Полагая в (21.15) $A = |A| \exp(i\psi)$, находим, что, если $\psi \neq 0$, то $\psi \sim |A|^{-2}$ и является быстро осциллирующей (так как $|A|$ по предположению мал) по \mathbf{R} функцией, что, как было показано выше, неверно. Поэтому $\psi = 0$ и A вещественно. Подстановка (21.10) при вещественном A в (21.9) приводит к выражению

$$\theta_i - \theta_0 = \int \left\{ -U(A) + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\alpha_i} \left(\frac{\partial A}{\partial R_i} \right)^2 \right\} d\mathbf{R} \equiv \int \theta_1 d\mathbf{R}, \quad (21.18)$$

где

$$U(A) = \frac{1}{4} \tau A^2 - \frac{1}{2} \beta A^4.$$

При том, что в точке перехода возникает, как следует из приведенных выше общих соображений, периодическая структура с периодом $2\pi\kappa_i^{-1} \sim r_H$, вид (21.18) разложения θ_i по медленно меняющейся (по сравнению с r_H) малой добавке A может быть получен непосредственно. Для этого достаточно принять во внимание что: а) из требования минимума θ_i (уже усредненного по расстояниям порядка r_H) по A в точке перехода вытекает $\delta\theta_i/\delta A = 0$; б) $\delta H/\delta A \sim \tau$ (так как $4\pi\tilde{\chi}(\kappa_0) = 1$), а это дает $\delta^2\theta_i/\delta A^2 \sim \tau$; в) наличие минимума $\theta_i(A)$ при $T = T_0$ требует $\delta^3\theta_i/\delta A^3 = 0$, $\delta^4\theta_i/\delta A^4 = \beta > 0$; г) разложение по малому ∇A вследствие медленного изменения $A(\mathbf{R})$ может содержать (в силу инвариантности по отношению к замене \mathbf{R} на $-\mathbf{R}$) лишь четные степени ∇A .

Поясним смысл требования $\beta > 0$ в рассматриваемом случае. Если $\beta < 0$, то из (21.18) следует, что точка $\tau = 0$ вообще не является особой — в ней уже существует периодическая структура с конечной амплитудой, переход произошел раньше и притом при конечном A (поскольку переход при $A \rightarrow 0$ как раз и исследуется), т. е. имеем фазовый переход первого рода.

Так как $\alpha_i > 0$ (см. (21.16)), то $\theta_1 \geq -U(A) \geq U_{\max}$, причем равенство $\theta_1 = -U_{\max}$ достигается для однородного A . При этом член с производными в (21.18) исчезает, θ_1 принимает форму, характерную для переходов второго рода типа Ландау (см. (20.3)), и приводит к переходу от $A = 0$ при $\tau < 0$ к $\pm A_0 = = 1/2 \sqrt{\tau/2\beta}$ при $\tau > 0$. Состояния с $\pm A_0$ отличаются только сдвигом по фазе. Это отличие может быть существенно в конечном образце (где такие состояния аналогичны доменам). Из определения κ и κ_0 легко найти зависимость пространственных периодов $2\pi\kappa_i^{-1}$ от τ : $\kappa - \kappa_0 \sim \tau$. Таким образом, период осцилляций меняется линейно по τ вблизи от точки перехода, а их амплитуда — пропорционально $\sqrt{\tau}$.

Все приведенные выше рассуждения особенно наглядны в одномерном случае $A = A(y)$, когда функционал (21.18) можно

формально интерпретировать как действие для одномерного движения частицы массы α во времени y по координате A с запрещенным уходом частицы на бесконечность (так как B должно быть конечным). Переход между состояниями с $+A$ и $-A$ в этом случае имеет доменный характер и происходит (при $\tau > 0$) по закону

$$A = A_0 \operatorname{th} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\tau \alpha} (y - y_0) \right\}. \quad (21.19)$$

Из определения (21.7) ясно, что при $k \rightarrow \infty$ функция $\tilde{\chi}(k)$, осциллируя, стремится к нулю. Это означает, что при изменении температуры (или магнитного поля) могут появляться новые корни уравнения (21.11) и в соответствии с этим иметь место новые фазовые переходы. Если какой-либо экстремум $\tilde{\chi}(k)$ при $k > 0$ окажется вырожденным, возможно расслоение на фазы с разными периодами.

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что имеется единственное решение уравнений (21.11). Понятно, что это так лишь для прямоугольной решетки в плоскости (x, y) ; наличие осей симметрии порядка выше второго обеспечит соответствующее число решений уравнений (21.11) — «звезду» векторов κ . Если никакие три из них в сумме не дают нуля, то все рассмотрение остается в силе, оказываясь лишь несколько более громоздким. Если же какие-либо три решения (21.11) в сумме дают нуль, в разложении $\theta_i(A)$ не исчезает член третьего порядка, фазовый переход второго рода оказывается невозможным, периодическая структура появляется в результате фазового перехода первого рода.

До сих пор мы предполагали, что неустойчивость однородного состояния наступает при $\kappa \neq 0$. Рассмотрим теперь противоположный случай, когда $\tilde{\chi}_{\max} = \tilde{\chi}(0) \neq \chi$. (Точка $\kappa = 0$ обязательно соответствует экстремуму в силу центральной симметрии кристалла $\tilde{\chi}(-k) = \chi(k)$, $\nabla \tilde{\chi}(-k) = -\nabla \tilde{\chi}(k)$, откуда $\nabla \tilde{\chi}(0) = 0$, и притом, вследствие исходной устойчивости однородного состояния, именно максимуму.) В этом случае можно воспользоваться теорией, развитой в предыдущем разделе, однако проще сразу заметить, что при $\kappa_0 = 0$ вся величина B медленно меняется, и потому $\theta_1\{B\}$ можно разложить по степеням ∇B . В основном приближении θ_1 совпадает с «локальной» однородной плотностью $\theta_1^0(B)$. В следующем приближении

$$\theta_1\{B\} = \theta_1^0(B) + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\alpha_i} \left(\frac{\partial B}{\partial R_i} \right)^2. \quad (21.20)$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным ниже, убеждаемся, что критическая точка относится к расслоению на доменные магнитные домены, переход между которыми происходит по за-

кону (21.19). Вне доменной стенки производные в $\theta_1\{B_1\}$ следует отбросить.

Поскольку $4\pi\chi = 1$ и, следовательно, в однородном случае $\partial H/\partial B = 0$, из устойчивости однородного состояния по одну сторону от точки перехода следует $\partial^2 H/\partial B^2 = 0$, $\partial^3 H/\partial B^3 = 0$. Полагая $B = B_0 + B_1$, $T = T_0 + T_1$, $H = H_0 + H_1$ и учитывая, что

$$\delta\theta_t = -\mathbf{B}\delta\mathbf{H}, \quad (21.21)$$

находим

$$\theta_t = \theta_0 + \left(a_2 T_1 - \frac{H_1}{4\pi}\right) B_1 + \frac{1}{3} a_3 T_1 B_1^2 + \frac{1}{4} a_4 B_1^4. \quad (21.22)$$

Это разложение (законность которого обосновывалась в § 20) аналогично гиббсовскому разложению вблизи обычной критической точки системы жидкость — пар (см., например, [10], § 84), только роль давления p играет H , а роль удельного объема v играет B . (Разумеется, вблизи «обычной» критической точки экспериментальное исследование при заданной связи p и v крайне затруднительно. Исследование же доменной критической точки в наклонном магнитном поле, по-видимому, не представляет особых трудностей.) Поэтому все результаты гиббсовского изучения критической точки немедленно переносятся на данный случай. Так, аналогично формуле (84.10) из работы [10] имеем

$$C_H \sim (a_3 T_1 + 3a_4 B_1^2)^{-1}. \quad (21.23)$$

В частности, на кривой равновесия, где $B_1 \sim |T_1|^{1/2}$, теплоемкость $C_H \sim T_1^{-1}$, а при магнитном поле, равном «критическому» ($H_1 = 0$), когда из минимума θ_t (т. е. из $\partial\theta_t/\partial B_1 = 0$) следует $B_1 \sim T_1^{-1/3}$, формула (21.23) дает $C_H \sim T_1^{-2/3}$.

Самостоятельный интерес представляет выяснение формы и размеров диамагнитных доменов. Наиболее интересен и важен случай, когда характерные линейные размеры образца L велики по сравнению с ларморовским радиусом r_H , так что размеры доменов g значительно больше толщины доменной стенки d . В этом случае решение задачи распадается на «микроскопическую» и «макроскопическую» части.

«Микроскопическая» задача состоит в выяснении формы доменной стенки, т. е. распределения индукции в слое толщиной порядка d . Так как $d \ll g$, в основном приближении по d/g стенку можно считать плоской, а задачу одномерной, так что, согласно уравнениям Максвелла, $B_n = \text{const}$, $H_t = \text{const}$ (n — нормаль, направление которой выберем дальше в качестве оси y , t — касательная к стенке).

При этом, согласно (21.1),

$$\left. \begin{aligned} H_t\{B_t(y), B_y\} &= H_t, \\ H_y\{B_t(y), B_y\} &= H_y(y). \end{aligned} \right\} \quad (21.24)$$

Уравнения (21.24) совершенно аналогичны «обычным» уравнениям состояния вблизи границ сосуществующих фаз, только B_y следует считать заданным параметром (поскольку в области вблизи поверхности образца B_n , вообще говоря, не совпадает с «объемным» равновесным значением). Поэтому и условия выхода B_t , H_y на насыщение при $y \rightarrow \pm \infty$ (т. е. при $y \gg d$, но, разумеется, $y \ll g$) совпадают с «обычным» условием равенства площадей на кривой $H_t = H_t(B_t)$ при заданном B_y , аналогичной кривой рис. 49, где H следует заменить на H_t , а B — на B_t . В результате «на бесконечности» ($y \rightarrow \pm \infty$) получается определенная связь H_t и B_y :

$$H_t = H_k(B_y). \quad (21.25)$$

Особенно очевидно это условие в изотропном случае, когда $H_y = H_y(B_y) = 0$, H_t не зависит от B_y и условие $H_t = H_k$ соответствует обычному равенству площадей на кривой $H_t = H_t(B_t)$.

Конкретный вид $B_t(y)$ и $H_y(y)$ может быть получен вблизи критической точки, когда имеет место приближение (21.20). Соответствующая формула в изотропном случае была впервые получена в работе [49]. Она, естественно, аналогична формуле (21.19) (толщина доменной стенки, в частности, порядка $r_H \mu^{-1/2}$) и позволяет получить поверхностную энергию Δ на границе доменов:

$$\Delta = \frac{r_H \mu^{1/2} (B - B')^2}{24 \sqrt{2\pi}}, \quad (21.26)$$

где $\mu = 1 - 4\pi\chi$, r_H — максимальный ларморовский радиус.

«Макроскопическая» задача состоит в выяснении формы и размеров доменов в основном приближении по $d/g \ll 1$, т. е. при $d = 0$. Задавая сначала период доменной структуры D , следует решить магнитостатическую задачу; при этом уравнение (21.25), играющее роль дополнительного граничного условия на границах доменов, определит форму границ (в ряде предельных случаев она найдена в работе [56]).

Уравнение (20.5) позволяет выразить g_1 и g_2 через D и H_0 :

$$g_1 = \frac{(H_0 - B') D}{B - B'}, \quad g_2 = D - g_1 = \frac{(B - H_0) D}{B - B'}. \quad (21.27)$$

Наконец, вычисляя при известной структуре полей полный термодинамический потенциал, учитывая в нем поверхностную энергию на границах доменов и минимизируя его по D , определим период D . Он оказывается порядка (см. [56]):

$$D \approx \sqrt{\mu r_H L}. \quad (21.28)$$

Из (21.26)—(21.28) ясна оправданность приближений:

$$\frac{d}{g} \approx \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{r_H}{L}} \ll 1, \quad \frac{g}{L} \approx \sqrt{\frac{r_H}{L\mu}} \ll 1.$$

Вдали от критической точки, при $\mu_A \gg 1$ (и соответственно $\kappa_{\max} \ll 1/4\pi$), расчеты значительно усложняются [56]. Доменная стенка имеет весьма сложный вид; $B(y)$ при переходе от A_k к A'_k осциллирует, имея множество постепенно затухающих узких и высоких максимумов и соответственно глубоких минимумов. Поверхностная энергия и размер домена по порядку величины определяются формулами (21.26), (21.28), только теперь, когда $\mu \gg 1$, в них вместо $\mu^{1/2}$ входит $\mu^{1/3}$.

Законность разложения термодинамического потенциала, аналогичного разложению Ландау в теории фазовых переходов, связана с дальнедействием на расстояниях $r \gg a$ и позволяет изучить особенность на кривой абсолютной неустойчивости (где в однородном случае $\partial H/\partial B = 0$). Пусть при заданных H и $T = T_0$ уравнение для B , которое запишем символически в виде

$$\hat{L}\{H, T_0; B\} = 0, \quad (21.29)$$

имеет частное решение $B_0(\mathbf{R})$, так что

$$\hat{L}\{H, T_0; B_0(\mathbf{R})\} = 0. \quad (21.30)$$

Выясним характер и устойчивость решения при $T = T_0 + T_1$. Положим $B = B_0 + \psi$. Тогда

$$\hat{L}_1\psi + T_1\hat{L}_2\{B_0(\mathbf{R})\} + \frac{1}{2}\hat{L}_3\psi^2 + \dots = 0, \quad (21.31)$$

где

$$\hat{L}_1 = \frac{\delta \hat{L}}{\delta B_0}, \quad \hat{L}_2\{B_0(\mathbf{R})\} = \frac{\partial}{\partial T_0} \hat{L}\{H, T_0; B_0(\mathbf{R})\}, \quad \hat{L}_3 = \frac{\delta^2 \hat{L}}{\delta B_0^2}. \quad (21.32)$$

То, что варьируется T при заданном H , делается только для конкретности: совершенно аналогично проводится рассмотрение при заданном T и варьируемом H .

Решение и исследование уравнения (21.31) проводится так же, как и ранее для (21.12), и характер решения также определяется наличием или отсутствием решения однородного уравнения $\hat{L}_1\psi = 0$; значения T , где впервые появляется такое решение, дают кривую $T_0 = T_0(H)$. Отличие состоит лишь в том, что кубические по амплитуде члены в термодинамическом потенциале могут либо исчезать (в силу симметрии или в изолированных по H точках), либо оставаться, поскольку в отличие от (21.12) ядра в уравнении (21.31) не обязаны быть разностными, так как неоднородность $B_0(\mathbf{R})$ нарушает, вообще говоря, трансляционную симметрию в системе. В последнем случае разложение

термодинамического потенциала по $A_1 = A - A_0$ (A_0 — значение амплитуды периодической структуры на кривой абсолютной неустойчивости) и $T_1 = T - T_0$ имеет вид:

$$\theta_t = \theta_0 + \alpha T_1 A_1 + \frac{1}{6} \beta A_1^3. \quad (21.33)$$

При $\alpha T_1 / \beta < 0$ минимум θ_t отсутствует, при $\alpha T_1 / \beta > 0$ имеется относительный минимум при

$$A_1 = (-2\alpha T_1 / \beta)^{1/2} \text{ и } \theta_t - \theta_0 \sim |T_1|^{3/2}.$$

Это означает, что при приближении к кривой абсолютной неустойчивости при заданном внешнем поле H_0 теплоемкость стремится к бесконечности, как $|T_1|^{-1/2}$. При изотермическом приближении к этой кривой ($H_0 = H + H_1$) восприимчивость стремится к бесконечности, как $|H_1|^{-1/2}$. Такова же особенность, в частности, в критической точке фазовых переходов второго рода.

Выясним, наконец, общий вид диаграммы состояния в магнитном поле с учетом возникновения периодических и доменных структур. При высоких температурах $T \gg (1/2\pi^2) \hbar \omega_H$ восприимчивость, связанная с диамагнетизмом Ландау и парамагнетизмом Паули, мала при любых температурах, и неоднородная структура невозможна даже как метастабильная. (Это легко показать, используя теорию возмущений.)

По мере понижения температуры, при некотором ее значении впервые появляется локальный минимум для неоднородного поля. При этом принципиально возможны несколько различных случаев.

Локальный минимум может впервые появиться при конечной амплитуде неоднородности, так что наименьшее значение θ_t будет по-прежнему обеспечиваться однородной индукцией B . При этом функция $\theta(A)$ получит по крайней мере два минимума, между которыми обязателен относительный максимум. Таким образом, у $\theta_t(A)$ появляются (помимо минимума при однородной индукции B , т. е. при $A = 0$) сразу относительные максимум и минимум, так что тогда температура «рождения» минимума T_k соответствует трехкратно вырожденному решению: $\partial \theta_t / \partial A = \partial^2 \theta_t / \partial A^2 = 0$, что и определит температуру T_k и амплитуду в этой точке (рис. 53, а). Появление локального минимума означает возможность существования соответствующей фазы, хотя бы как метастабильной, а его исчезновение — абсолютную неустойчивость такой фазы. Кривая «рождения» минимумов на плоскости (T, H) ограничивает, таким образом, область абсолютной неустойчивости данного состояния (аналогично кривой $(\partial p / \partial v)_T = 0$ при расслоении жидкость — пар).

Если затем минимум θ_t , углубляясь, при $T = T'_k$ достигнет того же значения, что и в «предшествовавшем» абсолютном ми-

нимуме при $A = 0$, то произойдет расслоение на однородную ($A = 0$) и неоднородную ($A \neq 0$) фазы — фазовый переход первого рода*). При $T < T'_K$ неоднородное состояние станет устойчивым, а однородное — метастабильным при $T'_K < T < T''_K$ и абсолютно неустойчивым при $T < T''_K$ (в последнем случае особенность вблизи $T = T_K$ — та же, что и выше; понятно, что мы считаем заданным H_0 , а не T только ради конкретности).

Может, однако, оказаться, что еще до того, как наступит расслоение на однородную и неоднородную фазы (если оно вообще произойдет — минимум при $A \neq 0$ может после некоторой температуры начать двигаться вверх), появится неустойчивость

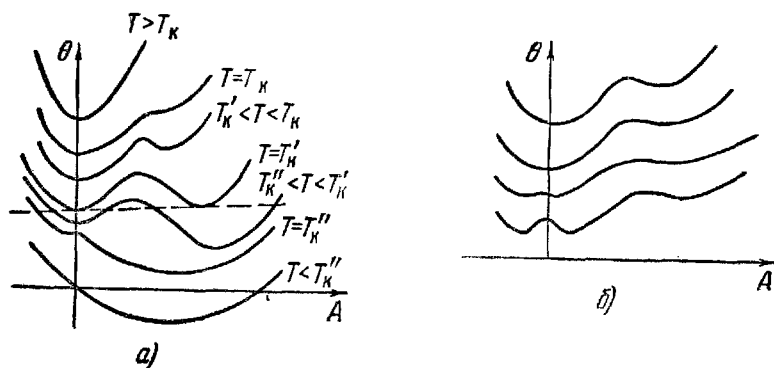


Рис. 53. Зависимости θ от A при наличии фазового перехода первого (а) и второго (б) рода.

однородного состояния при $A = 0$. Поскольку, как уже показано ранее, разложение $\theta_t(A)$ содержит лишь четные степени A , это будет означать рассмотренный выше фазовый переход второго рода (см. рис. 59, б); минимумы при $\pm A$ соответствуют фазам с одинаковыми периодами и разным «началом отсчета». Если же совпадут минимумы $\theta_t(A)$ при различных $A \neq 0$, произойдет расслоение на структуры с разным периодом.

Поскольку минимумы на кривых $\theta_t(A)$ при изменении внешних условий двигаются как «вверх», так и «вниз», то могут возникать различные комбинации упомянутых случаев**). В частности, новая структура может возникать при переходе первого

*) Отсюда ясно, что периодическое решение с конечной амплитудой всегда впервые возникает как метастабильное, «невыгодное» по сравнению с однородным.

***) При заданной температуре T и при изменении магнитного поля минимумы на кривых $\theta_t(A)$ двигаются заведомо периодически. Число переходов при $T < \hbar\omega_H/2\pi^2$ порядка $(1/4)(\epsilon_F/\hbar\omega_H)(\varphi_F/c)^{1/2}$. Напомним, что амплитуда пространственных осцилляций порядка амплитуды квантовых осцилляций магнитного момента, т. е. $B(\hbar\Omega/\epsilon_F)^{1/2}$.

рода только в одной точке (H_{00}, T_0) (см. рис. 54, где показан ход для двух структур I и II).

С учетом всего сказанного выше на рис. 50 изображена в переменных (T, H) диаграмма состояния магнетика; переход к переменным (T, H_0) ясен из указанной ранее связи H_0 и H . На рис. 50 принято во внимание, что кривая фазовых переходов не может оборваться для периодической структуры и может окончиться в критической точке для доменной; характер переходов к доменной структуре одинаков вдоль всей кривой и зависит только от ориентации H_0 (на рис. 50 для конкретности H_0 перпендикулярно поверхности образца). Принято также во внимание (помимо периодичности χ_α по B^{-1}), что согласно ограничениям, наложенным на магнитное поле, кривая переходов ограничена по B как сверху, так и снизу, а по температуре — сверху. Вид диаграммы состояния существенно усложнился бы в следующем приближении по a/r_H (a — межатомное расстояние), где важна соизмеримость a^2 и ehH/c (см. также [57]).

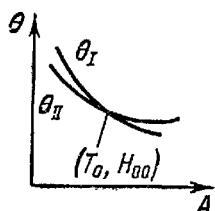


Рис. 54. Зависимость θ от A для двух структур вблизи точки (T_0, H_{00}) — точки фазового перехода первого рода.

§ 22. Замечание об эмиссионных свойствах металлов

Исходя из модели свободных электронов, можно объяснить характерные закономерности эмиссионных свойств металлов (экспоненциальную зависимость от температуры тока термоэлектронной эмиссии, своеобразную зависимость тока холодной эмиссии от электрического поля, пороговый характер внешнего фотоэффекта и др.). Исследования, учитывающие сложный характер закона дисперсии электронов проводимости [58—61], подтвердили основные выводы теории свободных электронов. Однако, кроме того, теория, свободная от ограничений на закон дисперсии электронов, предсказывает ряд эффектов, главные из которых: а) анизотропия работы выхода и б) отличие «работ выхода» разных эффектов.

Хотя исследование эмиссионных свойств металлов, по-видимому, не может служить методом реконструкции закона дисперсии электронов проводимости, они в ряде случаев могут дать сведения, весьма трудно добываемые из других экспериментов (например, в некоторых случаях можно высказать суждение о положении поверхности Ферми в пространстве квазиимпульсов [60]).

В сравнительно сильном квантующем поле должна наблюдаться зависимость эмиссионного тока от магнитного поля, при-

чем, естественно, наибольший интерес представляют осцилляции тока эмиссии, которые обусловлены осцилляциями химического потенциала электронов (§ 15), а также зависимостью от магнитного поля коэффициента прохождения электронов через потенциальный барьер на границе металла [62, 63].

Квантование энергии электрона в магнитном поле приводит к зависимости от магнитного поля контактной разности потенциалов между двумя металлами или между двумя гранями металлического монокристалла [63]. Это явление было обнаружено экспериментально [64].

Отметим еще одну возможность наблюдения поверхностных явлений — измерение тока в туннельном диоде в зависимости от приложенной разности потенциалов φ . Туннельный ток, как показывают расчеты [65], осциллирует не только с изменением магнитного поля (природа этих осцилляций та же, что и у эффекта де Гааза — ван Альфена), но и с изменением разности потенциалов φ . При этом период осцилляций по φ равен:

$$\Delta\varphi = 2\hbar\omega_H/e, \quad \omega_H = eH/m^*c. \quad (22.1)$$

Это, значит, что наблюдение осцилляций туннельного тока позволяет измерить одновременно и экстремальные сечения поверхности Ферми (по периодической зависимости от магнитного поля), и эффективные массы на этих сечениях *) (по периодической зависимости от разности потенциалов).

) Измерение эффективных масс с помощью измерения $\Delta\varphi$ (см. формулу (22.1)) не страдает тем недостатком, которым страдает измерение m^ по температурной зависимости амплитуд эффекта де Гааза — ван Альфена (§ 15, 17), так как период $\Delta\varphi$ не чувствителен к длине свободного пробега электронов. По сути дела, с помощью туннельного диода осуществляется резонансный метод измерения эффективной массы (часть IV).

Эта часть посвящена рассмотрению кинетических свойств металлов, главным образом при низкой температуре. При этом, как принято в настоящем издании, основное внимание уделено тем явлениям и свойствам, которые чувствительны к энергетическому спектру электронов проводимости. Математический аппарат, используемый в этой части, — кинетическое уравнение Больцмана.

Мы ограничимся описанием статических или квазистатических свойств. Это позволяет, как показано в § 23, пользоваться «газовым» приближением, так как ферми-жидкостное взаимодействие выпадает из окончательных формул.

Большинство кинетических явлений весьма чувствительно к характеру взаимодействия электронов проводимости с примесями, с фононами, друг с другом. В частности, от этого взаимодействия зависит температурный ход кинетических коэффициентов. В задачу монографии не входит изложение обширного теоретического материала, имеющегося в настоящее время по данному вопросу, хотя наиболее существенные (по нашему мнению) результаты нашли свое отражение в этой части. Особое внимание уделяется тем закономерностям и свойствам, которые более или менее безразличны к характеру взаимодействия. Иногда используется τ -приближение, т. е. интегральный оператор столкновения заменяется оператором умножения с феноменологической константой (временем релаксации τ); во всех случаях это особо оговаривается.

В этой части мы ограничились вопросами, связанными с вычислением коэффициентов электропроводности (сопротивления), теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов металла в отсутствие магнитного поля и в магнитном поле. При этом вначале мы не учитываем эффектов, обусловленных квантованием энергии в магнитном поле. Этим вопросам посвящен § 31.

Большинство квантовых кинетических явлений в магнитном поле имеет ту же природу, что и эффект де Гааза — ван Альфена (§§ 15—17). Однако в отличие от эффекта де Гааза — ван Альфена квантовые кинетические явления при $\mu H \ll \epsilon_F$ у большинства металлов проявляются в виде небольших по амплитуде

осцилляций, наложенных на кривую, изображающую сравнительно плавную зависимость кинетических коэффициентов от магнитного поля. Последняя объясняется классической теорией. Благодаря этому можно разделить расчет кинетических коэффициентов на две части: классическую и квантовую, причем в первой вовсе не учитывается квантование энергии магнитным полем.

Обычно из-за большого числа носителей в хорошем металле трудно создать нелинейную ситуацию. Надо, правда, иметь в виду, что тогда, когда сопротивление существенно зависит от магнитного поля, возможен «косвенный» нелинейный эффект — зависимость сопротивления от магнитного поля собственного тока. Мы не будем останавливаться на этих вопросах, всюду ограничиваясь линейным приближением.

§ 23. Кинетическое уравнение Больцмана

В тех случаях, когда движение электрона проводимости в кристаллической решетке можно представить себе как «свободное» *) (или как движение под действием внешних сил), изредка прерываемое столкновениями, справедливо кинетическое уравнение Больцмана. Длина свободного пробега l — среднее расстояние между столкновениями — определяется как свойствами электронов (в частности, их законом дисперсии), так и главным образом нарушениями периодической структуры кристалла: наличием химической и физической неоднородности, фононами, электрон-электронными столкновениями и пр.

Для построения кинетического уравнения фундаментальное значение имеет запись «интеграла столкновений» — члена в уравнении Больцмана, описывающего сравнительно редкие столкновения электронов.

Получение выражения для интеграла столкновений связано с решением задачи о рассеянии и требует знания законов взаимодействия электронов с фононами, с примесями, друг с другом. Однако развитие электронной теории металлов в последние годы показало, что имеется большое число неравновесных кинетических свойств металлов, слабо зависящих от детальной структуры интеграла столкновений и определяемых главным образом кинематикой электронов проводимости, т. е. их законом дисперсии. Естественно, что именно эти свойства, как правило, чувствительны к структуре электронного энергетического спектра. Это дает возможность основное внимание уделить полевой части кинетического уравнения, почти не занимаясь исследованием структуры интеграла столкновений.

*) Чтобы избежать недоразумений, подчеркнем: речь идет об электронах со сложным законом дисперсии, механика которых изложена в части I.

Как уже говорилось, мы не будем учитывать квантовые эффекты; точнее, вначале мы не будем учитывать квантование энергии электрона (например, в магнитном поле) — квантовый характер задачи проявляется в своеобразии закона дисперсии электронов проводимости и в их статистике. Между столкновениями (по предположению) электрон движется по классической траектории. Ограничения, налагаемые в связи с пренебрежением квантовым характером движения, изложены подробно во введении. Напомним только, что при классическом рассмотрении не нужно учитывать межзонные переходы, вызванные внешними полями. Этот эффект имеет квантовую природу. Однако многозонный характер электронного энергетического спектра проявляется при суммировании по состояниям и при расчете вероятностей различных столкновений. Последнее надо учесть при конкретной формулировке интеграла столкновений.

Состояние электронов в металле будем характеризовать функциями распределения электронов $f_s(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, имеющими смысл плотности электронов s -й зоны ($2f_s/(2\pi\hbar)^3 dp_x dp_y dp_z dx dy dz$ — число электронов s -й зоны в элементе фазового объема*) $dp_x dp_y dp_z dx dy dz$). Здесь \mathbf{r} — координата, t — время, а \mathbf{p} — кинематический импульс. В отсутствие магнитного поля кинематический импульс \mathbf{p} совпадает с импульсом, канонически сопряженным координате**) \mathbf{P} . Если же магнитное поле отлично от нуля, то

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (23.1)$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля \mathbf{H} ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$).

Все интересующие нас в дальнейшем величины: плотность тока \mathbf{j} , плотность потока энергии \mathbf{Q} и т. п. — могут быть вычислены, если известны функции распределения f_s . Так,

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \sum_s \int \mathbf{v}_s f_s(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p} \equiv e \int \mathbf{v} f d\Gamma, \quad (23.2)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_s \int \epsilon_s \mathbf{v}_s f_s(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p} \equiv \int \epsilon \mathbf{v} f d\Gamma, \quad (23.3)$$

где $\mathbf{v}_s = \frac{\partial \epsilon_s}{\partial \mathbf{p}}$ — скорость электрона с энергией $\epsilon_s(\mathbf{p})$, а интегрирование по $d\Gamma$ включает суммирование по всем частично заполненным зонам металла.

*) Пренебрежение квантовыми эффектами позволяет нам не учитывать спиновой переменной: каждое состояние электрона предполагается дважды вырожденным.

**) Напомним, что при классическом рассмотрении понятия «квазиимпульсы» и «импульс» совпадают.

Согласно теореме Лиувилля, в отсутствие столкновений изменение функции распределения со временем равно нулю, т. е.

$$\frac{df_s}{dt} \equiv \frac{\partial f_s}{\partial t} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (23.4)$$

Равенство (23.4) означает неизменность числа частиц в элементе фазового объема при движении электронов по фазовым траекториям. Величины $\dot{\mathbf{p}}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ должны быть взяты из уравнений движения, согласно которым $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, где \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на электрон, а $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_s$.

Так как $\mathbf{F} = -\partial \epsilon_s / \partial \mathbf{r}$ (здесь ϵ_s — полная энергия с учетом внешних полей), df_s/dt обращается в нуль, если f_s — произвольная функция энергии.

Если на электрон действуют электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле *) \mathbf{H} , то

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right). \quad (23.5)$$

Подчеркнем еще раз классический характер последнего выражения. В частности, не учтено взаимодействие магнитного момента электрона с магнитным полем. Это вполне оправдано в большинстве наиболее интересных случаев (в однородном же магнитном поле сила, действующая на магнитный момент, вообще равна нулю).

Внешняя сила, действующая на электрон проводимости, не всегда может быть выражена через напряженности макроскопических полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Так, например, при прохождении через металл звуковой волны на электрон проводимости действует кроме силы Лоренца (23.5) дополнительная сила, обязанная деформационному взаимодействию электрона с решеткой.

Столкновения нарушают условие (23.4). Мерой нарушения служит «интеграл столкновений»

$$\frac{df_s}{dt} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{ст}} \{f_s\}. \quad (23.6)$$

Интеграл столкновений — сложный нелинейный функционал от функций распределения, структура и конкретный вид которого определяются взаимодействием электронов с примесями, друг с другом или с другими квазичастицами. В последнем случае система (23.6) должна быть дополнена кинетическими уравнениями для функций распределения соответствующих ква-

*) В выражение для силы Лоренца входит индукция \mathbf{B} , а не микроскопическое поле \mathbf{H} . При расчете осцилляционных эффектов может возникнуть необходимость отличать \mathbf{B} от \mathbf{H} (см. §§ 19—21). Все же мы будем везде, где это не приведет к ошибкам, писать \mathbf{H} , а не \mathbf{B} .

зичастиц (например, для фононов). Запись кинетического уравнения (23.6), как указывалось, возможна только в тех случаях, когда движение частицы можно разделить на движение по фазовым траекториям и на столкновения — резкие изменения импульсов частиц без заметного (с макроскопической точки зрения) изменения координаты. Отсюда ясно, что интеграл столкновений — оператор, связанный с зависимостью функции распределения от импульса, но не от координаты или времени. Некоторые весьма общие свойства интеграла столкновений обсуждаются в § 24. Здесь отметим только, что интеграл столкновений обращается в нуль равновесной функцией Ферми с произвольными значениями параметров — температуры *) T и химического потенциала ζ ; T и ζ могут зависеть от координат и времени.

Кинетические уравнения Больцмана (23.6) — система сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которые при точном задании граничных и начальных условий однозначно определяют состояние твердого тела. В общем случае, естественно, эту систему решить невозможно и требуется значительное число упрощений, определяемых физической постановкой задачи.

Так как внешнее электрическое поле, непосредственно приложенное к металлу или возникшее в результате внешнего воздействия (например, звуковой волны), как правило, очень мало по сравнению с внутренним межатомным электрическим полем, отклонение системы электронов от состояния равновесия оказывается в большинстве случаев весьма малым. Это позволяет линеаризовать систему уравнений (23.6), подставляя вместо функций распределения f_s сумму

$$f_s = n_F + f_1, \quad (23.7)$$

где n_F — равновесная функция Ферми (нулевое приближение), а малость функции f_1 (первое приближение) обеспечивается малостью внешнего воздействия. Другими словами, функция f_1 пропорциональна тем внешним силам, которые вывели систему из состояния равновесия (например, функция f_1 пропорциональна электрическому полю, когда по изотермическому проводнику течет ток, или градиенту температуры, когда образец металла служит переносчиком тепла). Выбор нулевого приближения, точнее выбор параметров T и ζ в функции Ферми, определяются постановкой задачи. Чаще всего наиболее естественно исходить

*) Если интеграл столкновений описывает столкновения с другими квазичастицами (например, с фононами), он обращается в нуль только при подстановке всех равновесных функций: для электронов — функции Ферми, для фононов — функции Бозе и т. п. (с одной и той же температурой).

из предположения о локальном равновесии, считая, что параметры в функции Ферми выбраны так, что $T = T(\mathbf{r})$ определяет температуру в точке \mathbf{r} , а $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$ — химический потенциал. Это означает, что плотность электронов в точке \mathbf{r} и их средняя энергия определяются функцией нулевого приближения n_F , а

$$\int f_1 d\Gamma = 0, \quad \int \epsilon f_1 d\Gamma = 0. \quad (23.8)$$

Кроме того, в энергию $\epsilon_s(\mathbf{p})$ не включается энергия внешнего электрического поля.

Как мы уже говорили, основное содержание этой части — вычисление тензоров электропроводности, теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов. Поэтому естественно рассмотреть те случаи, когда выведение системы из состояния равновесия обусловлено электрическим полем \mathbf{E} и градиентом температуры ∇T , которые, по предположению, являются столь малыми, что обеспечивают законность линеаризации*).

Подставляя (23.7) в уравнение (23.6), учитывая выражение для силы Лоренца (23.5) и пренебрегая квадратичными членами, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] = - \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \mathbf{v} (e\mathbf{E} - \nabla \zeta) - \frac{\partial n_F}{\partial T} \mathbf{v} \nabla T + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{ст}}. \quad (23.9)$$

Здесь $(\partial f_1 / \partial t)_{\text{ст}}$ — линеаризованный интеграл столкновений:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = - \widehat{W} f_1,$$

где \widehat{W} — линейный оператор столкновений, равный

$$- \left[\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{ст}}(f)}{\delta f} \right]_{f=n_F}.$$

Наблюдаемая напряженность поля в проводнике \mathbf{E}' , т. е. сила, действующая на единичный заряд, есть сумма напряженности поля, обусловленной приложенной к проводнику внешней разностью потенциалов ($\mathbf{E} = -\nabla \varphi$) и величины $-(1/e)\nabla \zeta$, где ζ — химический потенциал электронов (см., например, [1], § 25), т. е.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{1}{e} \nabla \zeta,$$

Мы в дальнейшем будем опускать штрих у электрического поля, но помнить, что производная от функции Ферми по

*) Для возможности линеаризации достаточно, чтобы $l|\nabla T| \ll T$ и $eE \ll T$. Оба условия практически не ограничивают величины электрического поля и градиента температуры в металлах.

температуре берется при постоянном химическом потенциале ($\partial n_F / \partial T \equiv (\partial n_F / \partial T)_\zeta$).

Итак, кинетическое уравнение для линейной по возмущениям добавки к функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial r} v + \frac{\partial f_1}{\partial p} \frac{e}{c} [vH] + \widehat{W} \{f_1\} = - \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} e v E - \frac{\partial n_F}{\partial T} v \nabla T. \quad (23.10)$$

Часто для оценок, а иногда при решении сравнительно сложных задач кинетики линейный оператор столкновений заменяют оператором умножения на феноменологически вводимую постоянную τ^{-1} , т. е. полагают

$$\widehat{W} \{f_1\} = \frac{1}{\tau} f_1. \quad (23.11)$$

Положительная *) величина τ имеет размерность времени и названа временем релаксации или временем свободного пробега; величину $l = v\tau$ называют длиной свободного пробега, а равенство (23.11) — τ -приближением. Следует иметь в виду, что для анизотропного закона дисперсии τ -приближение не может быть теоретически обосновано и потому замена (23.11) может служить либо для оценок, либо в тех случаях, когда окончательный результат не зависит от вида интеграла столкновений.

Остановимся на первых двух слагаемых уравнения (23.10). Производная по времени от функции распределения $\partial f_1 / \partial t$ учитывает эффекты временной дисперсии кинетических коэффициентов, т. е. эффекты, связанные с запаздыванием реакции электронного газа на внешнее воздействие. Если характерная частота внешнего поля ω , то $\partial f_1 / \partial t \sim \omega f_1$. Это слагаемое играет существенную роль при частотах порядка и больше $\nu = 1/\tau$. При $\omega \ll \nu$ его можно опустить. Время релаксации изменяется в очень широких пределах: от 10^{-14} сек при комнатной температуре до 10^{-9} сек для уникально чистых образцов металла при температуре жидкого гелия ($T < 4,2^\circ\text{K}$).

Производные по координате (слагаемое $(\partial f_1 / \partial r) v$ в уравнении (23.10)) ответственны за эффекты пространственной дисперсии кинетических коэффициентов. Если характерное расстояние, на которое изменяется функция распределения, порядка d , то $(\partial f_1 / \partial r) v \sim (f_1 / d) v$. Это слагаемое существенно, если $v/d \gtrsim \nu$, т. е. $l \gtrsim d$. При $l \ll d$ можно опустить и это слагаемое. Так как для самых чистых образцов длина свободного пробега l не более $10^{-3} \div 10^{-1}$ см для расчета кинетических коэффициентов массивного металла **) пространственные производные могут быть

*) Положительность τ обеспечивает выполнение закона возрастания энтропии.

**) При низких температурах размерные эффекты могут оказаться существенными у весьма больших образцов ($d \leq 1$ мм).

опущены. Как мы увидим (часть IV), расчет высокочастотной проводимости и поглощения звука при определенных условиях требует учета пространственной дисперсии.

Неоднородность образца (наличие границы и т. п.) может проявиться не только в неоднородности функции f_1 , но и в распределении электронов проводимости (например, в разомкнутом проводнике). Однако в металлах (в отличие от полупроводников) эта реально имеющая место неоднородность не приводит к наблюдаемым макроскопическим эффектам, так как радиус Дебая — Хюккеля r_D (мера неоднородности распределения заряженных частиц) для вырожденного электронного газа *) очень мал ($r_D \leq 10^{-8}$ см). Это обстоятельство позволяет всегда при расчете кинетических коэффициентов считать функцию Ферми, входящую в уравнение (23.10), однородной (не зависящей от координат) функцией.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad (23.12)$$

$$\widehat{W}_p = \left(\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \widehat{W} \left\{ \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \dots \right\}, \quad (23.13)$$

$$\widehat{W}_\varepsilon = \left(\frac{\partial n_F}{\partial T} \right)^{-1} \widehat{W} \left\{ \frac{\partial n_F}{\partial T} \dots \right\}, \quad (23.14)$$

а вместо функции f_1 (при однородных \mathbf{E} и ∇T) — две вектор-функции ψ и φ :

$$\dot{f}_1 = -e \mathbf{E} \psi \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} - \nabla T \cdot \varphi \frac{\partial n_F}{\partial T}, \quad (23.15)$$

для которых легко получаем весьма компактные уравнения:

$$\frac{d\psi}{dt} + \widehat{W}_p \psi = \mathbf{v}, \quad (23.16)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \widehat{W}_\varepsilon \varphi = \mathbf{v}. \quad (23.17)$$

Сравнивая выражения (23.12) и (23.4), видим, что «время», по которому идет дифференцирование в уравнениях (23.16) и (23.17), это время движения электрона по фазовой траектории в магнитном поле (§ 4).

Подставляя выражение (23.15) для функции распределения через вектор-функции ψ и φ в формулы (23.2) и (23.3) и замечая,

*) По определению, $e^2/r_D = \hbar \omega_0$, где ω_0 — плазменная частота электронного газа ($\omega_0^2 = 4\pi n e^2/m$, n — плотность электронов, m — масса электрона); так как $n \sim 1/a^3$ (a — межатомные расстояния), то $r_D \approx a \sqrt{U_c/\varepsilon_F}$, а U_c — кулоновская энергия взаимодействия электронов.

что при $f = n_F$ плотность тока j и поток энергии Q равны нулю, получаем

$$j_i = -e^2 \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} v_i \Psi_k d\Gamma E_k - e \int \frac{\partial n_F}{\partial T} v_i \Phi_k d\Gamma \nabla_k T, \quad (23.18)$$

$$Q_i = -e \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \varepsilon v_i \Psi_k d\Gamma E_k - \int \frac{\partial n_F}{\partial T} \varepsilon v_i \Phi_k d\Gamma \nabla_k T. \quad (23.19)$$

Иногда в дальнейшем мы будем пользоваться обозначением

$$- \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \chi(p) \eta(p) d\Gamma \equiv \langle \chi \eta \rangle \quad (23.20)$$

и рассматривать подобные интегралы как скалярное произведение функций χ и η . Легко показать, что всеми необходимыми для скалярного произведения свойствами [2] подобные интегралы обладают.

В этих обозначениях

$$j_i = e^2 \langle v_i \Psi_k \rangle E_k - \frac{e}{T} \langle (\varepsilon - \xi) v_i \Phi_k \rangle \nabla_k T, \quad (23.21)$$

$$Q_i = e \langle \varepsilon v_i \Psi_k \rangle E_k - \frac{1}{T} \langle \varepsilon (\varepsilon - \xi) v_i \Phi_k \rangle \nabla_k T. \quad (23.22)$$

Рассмотрение конкретных механизмов рассеяния показывает [3], что оператор \hat{W}_p обладает следующими важными свойствами. Во-первых, он эрмитов:

$$\langle \chi \hat{W}_p \eta \rangle = \langle \eta \hat{W}_p \chi \rangle, \quad (23.23)$$

а во-вторых, положителен:

$$\langle \chi \hat{W}_p \chi \rangle > 0. \quad (23.24)$$

Аналогичными свойствами обладает оператор \hat{W}_ε .

Мы до сих пор молчаливо предполагали, что электроны проводимости представляют почти идеальный газ квазичастиц. Иначе говоря, мы не учитывали того факта, что энергия отдельной квазичастицы зависит от состояния всей системы, т. е. от ее функции распределения*). Эта зависимость учитывается теорией ферми-жидкости [4, 5].

Выясним, к каким изменениям в записи кинетического уравнения Больцмана приведет учет ферми-жидкостного взаимодействия между электронами.

Кинетическое уравнение для функции распределения в теории ферми-жидкости строится совершенно аналогично тому, как это делается в газовой модели, т. е. используется формула (23.6).

*) Напомним, что закон дисперсии элементарных возбуждений (электронов), о котором идет речь в этой и предыдущих частях, естественно, включает в себя взаимодействие между электронами (см. введение и § 16).

Надо только учесть, что энергия отдельной квазичастицы (электрона проводимости) ε определяется не только законом дисперсии $\varepsilon_0(\mathbf{p})$, но и функцией распределения $f(\mathbf{p})$. Для состояний, близких к равновесному,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{p}) &= \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \int \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_1(\mathbf{p}') d\Gamma' \equiv \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \eta, \\ f_1(\mathbf{p}) &= f(\mathbf{p}) - n_F(\varepsilon_0), \quad |f_1(\mathbf{p})| \ll n_F(\varepsilon_0). \end{aligned} \right\} \quad (23.25)$$

Здесь $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ — энергия электрона с импульсом \mathbf{p} в равновесном состоянии, описываемом функцией Ферми; $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — корреляционная функция (основная характеристика взаимодействия между электронами в теории ферми-жидкости). В микроскопической теории корреляционная функция $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ связывается с амплитудой рассеяния электрона на электроне [6]. Экспериментальное определение этой величины — важная задача физики металлического состояния. Как будет ясно из дальнейшего, квазистатические кинетические свойства непригодны для этого.

При принятом здесь определении энергии квазичастицы энергия $\varepsilon(\mathbf{p})$ является, естественно, функцией температуры. Ограничения на подобное рассмотрение, конечно, есть (температура должна быть значительно меньше фермиевской) и обусловлены тем, что время жизни одночастичных возбуждений быстро убывает с удалением от поверхности Ферми. При высоких же температурах во всех явлениях принимают участие электроны с энергиями, существенно отличающимися от энергии Ферми.

Вернемся к выводу линеаризованного кинетического уравнения. При использовании формулы (23.25) легко показать, что

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] - \frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{r}}, \quad (23.26)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} + \frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{p}}, \quad \dot{\varepsilon} = e\mathbf{E} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}},$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon_0/\partial\mathbf{p}$ — скорость электрона в состоянии термодинамического равновесия. Для дальнейшего удобно, кроме функции f_1 , описывающей отклонение системы от состояния термодинамического равновесия, ввести другую функцию, f_1^* следующим равенством:

$$f = n_F(\varepsilon_0) + f_1 \equiv n_F(\varepsilon) + f_1^*. \quad (23.27)$$

В линейном по f_1 приближении

$$f_1^* = f_1 - \frac{\partial n_F}{\partial\varepsilon} \eta. \quad (23.27a)$$

При использовании формулы (23.26) и последовательной линеаризации левой части кинетического уравнения (23.6) можно

получить *):

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{\partial n_F(\epsilon_0)}{\partial \epsilon_0} e v \mathbf{E} + \frac{\partial n_F(\epsilon_0)}{\partial T} \mathbf{v} \nabla T + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{p}} \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]. \quad (23.28)$$

При рассмотрении интеграла столкновений (правой части кинетического уравнения (23.6)) следует заметить, что зависимость от функции распределения содержится, во-первых, в вероятностях процессов столкновения (за счет статистических свойств электронов), а во-вторых, в δ -функции, описывающей закон сохранения энергии. Последняя зависимость — следствие ферми-жидкостных эффектов (см. формулу (23.25)). Обе зависимости мы учтем, записав

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{ст}} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{ст}} \{f, \epsilon\}. \quad (23.29)$$

Интеграл столкновений обращается в нуль при подстановке в него равновесной функции распределения (при произвольном законе дисперсии), т. е.

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{ст}} \{n_F(\epsilon), \epsilon(\mathbf{p})\} = 0. \quad (23.30)$$

Заметим, что $\epsilon(\mathbf{p})$ включает в себя ферми-жидкостную поправку η , т. е. является сложным функционалом от функции распределения.

Подставляя в (23.29) второе из разложений (23.27) и учитывая, что в линейном по возмущению приближении

$$\left\{ \frac{\delta \hat{\mathcal{L}}_{\text{ст}}}{\delta f} \right\}_{f=n_F(\epsilon)} \Big|_{\epsilon=\epsilon(\mathbf{p})} \approx \left\{ \frac{\delta \hat{\mathcal{L}}_{\text{ст}}}{\delta f} \right\}_{f=n_F(\epsilon_0)} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0(\mathbf{p})} f_1^*, \quad (23.31)$$

мы приходим к выводу, что в интеграле столкновений учет жидкостных эффектов приводит только к замене функции f_1 функцией f_1^* , а кинетическое уравнение (23.6) окончательно может быть записано в следующей форме:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \mathbf{p}} \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] - \left(\frac{\partial f_1^*}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = - \frac{\partial n_F(\epsilon_0)}{\partial \epsilon} e v \mathbf{E} - \frac{\partial n_F(\epsilon_0)}{\partial T} \mathbf{v} \nabla T. \quad (23.32)$$

*) Напомним, что линеаризация производится по электрическому полю \mathbf{E} (включающему градиент химического потенциала) и градиенту температуры ∇T . В нулевом по этим величинам приближении ϵ_0 совпадают, а скорость электрона $\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}$ равна $\mathbf{v} = \partial \epsilon_0 / \partial \mathbf{p}$.

Отсюда видно, что во всех тех случаях, когда членом $\partial f_1/\partial t$ можно пренебречь (квазистатика), т. е. при $\omega\tau \ll 1$, кинетическому уравнению можно придать «газовую» форму, введя новую функцию распределения f_1^* . Функция корреляции $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ выпадает из уравнения Больцмана. Если добавить, что потоки (плотность тока \mathbf{j} и поток энергии \mathbf{Q}) в линейном приближении также выражаются через функцию *) f_1^*

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_1^* d\Gamma, \quad \mathbf{Q} = \int \varepsilon \mathbf{v} f_1^* d\Gamma, \quad (23.33)$$

то становится очевидным, что при рассмотрении квазистатистических задач мы можем полностью игнорировать ферми-жидкостное взаимодействие между электронами. Корреляция между электронами проявляется только при достаточно высоких частотах ($\omega\tau \gtrsim 1$).

§ 24. Удельная электропроводность. Закон Ома

Рассмотрим прохождение постоянного тока через металл в отсутствие магнитного поля. Градиент температуры также отсутствует.

Используя результаты предыдущего параграфа, мы не будем учитывать ферми-жидкостное взаимодействие между электронами. Получаемые результаты (значения кинетических коэффициентов) можно сформулировать в «газовых» терминах. Надо, однако, помнить, что основная характеристика электрона — его закон дисперсии $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ — зависит от электрон-электронной корреляции. Аналогичная ситуация имеет место в эффекте де Гааза — ван Альфена (§ 16): периоды осцилляций определяются только формой поверхности Ферми $\varepsilon_0(\mathbf{p}) = \varepsilon_F$.

В рассматриваемом случае кинетическое уравнение естественным образом упрощается: можно ограничиться уравнением (23.16), опустив член $d\psi_i/dt$. Итак,

$$\hat{W}_{\mathbf{p}}\{\psi_i\} = v_i. \quad (24.1)$$

Пренебрежение слагаемыми с пространственными производными означает, что расстояние, на котором существенно меняется электрическое поле либо функция распределения, велико по сравнению с длиной свободного пробега, а пренебрежение временной производной означает, что частота поля ω значительно

*) Равенства (23.33) немедленно следуют из формул (23.2) и (23.3), если учесть, что

$$\int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n_F(\varepsilon) d\Gamma = \int \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n_F(\varepsilon) d\Gamma = 0,$$

меньше частоты столкновений ν (для оценок удобно пользоваться τ -приближением).

Вводя оператор \widehat{W}_p^{-1} , обратный оператору столкновений, из уравнения (24.1) получим

$$\psi_i = \widehat{W}_p^{-1} v_i. \quad (24.2)$$

Если уравнение (24.1) нужно дополнить линеаризованными кинетическими уравнениями для функций распределения фононов или других квазичастиц, с которыми сталкиваются электроны, то под оператором \widehat{W}_p^{-1} надо понимать оператор, получающийся после исключения всех функций распределения, кроме электронной.

Из формул (23.18), (23.21) и (24.2) имеем

$$j_i = -e^2 \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} v_i \widehat{W}_p^{-1} v_k d\Gamma E_k = e^2 \langle v_i \widehat{W}_p^{-1} v_k \rangle E_k. \quad (24.3)$$

Сравнивая выражение (24.3) с законом Ома

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad (24.4)$$

находим формальное выражение для тензора удельной электропроводности:

$$\sigma_{ik} = -e^2 \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} v_i \widehat{W}_p^{-1} v_k d\Gamma = e^2 \langle v_i \widehat{W}_p^{-1} v_k \rangle. \quad (24.5)$$

Сформулированные выше свойства оператора \widehat{W}_p (23.23) и (23.24), которыми, как легко убедиться, обладает и оператор \widehat{W}_p^{-1} , обеспечивают симметрию тензора σ_{ik} и положительность его главных значений.

Отметим, что симметрия тензора σ_{ik} ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$) — проявление общего принципа неравновесной термодинамики, принципа симметрии кинетических коэффициентов. Положительность главных значений тензора σ_{ik} обеспечивает выполнение закона возрастания энтропии.

Число независимых компонент тензора σ_{ik} определяется симметрией класса данного кристалла. Большинство металлов обладает либо кубической, либо гексагональной симметрией. В первом случае тензор вырождается в скаляр, а во втором имеет два совпадающих главных значения. Некоторые металлы (например, Mg) имеют три различных главных значения электропроводности — они принадлежат ромбической сингонии.

Следует отметить, что отсутствие анизотропии тензора удельной проводимости ни в коей мере не свидетельствует об изотропии закона дисперсии электронов проводимости (например, Au, Ag, Cu и другие металлы обладают кубической решеткой, одна-ко поверхности Ферми этих металлов очень далеки от сферы).

Если $\widehat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k$ — достаточно плавная функция энергии, что имеет место во всех тех случаях, когда изменение энергии электрона при столкновении мало по сравнению с его энергией*), в первой из формул (24.5) можно производную от функции Ферми заменить δ -функцией. Проинтегрировав по энергиям, получим

$$\sigma_{ik} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_s \oint_{\varepsilon_s(\mathbf{p})=\varepsilon_F} \frac{v_i^{(s)} \widehat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k^{(s)}}{v^{(s)}} dS_s. \quad (24.6)$$

Интегрирование в этом выражении ведется по поверхности Ферми, dS_s — элемент площади на s -й полости.

Температурный ход компонент тензора σ_{ik} определяется зависимостью от температуры множителя $\widehat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} v_k$ в подынтегральном выражении.

Формуле (24.6) можно придать несколько иной вид, если ввести «оператор длины свободного пробега», действующий на единичный вектор нормали к поверхности Ферми:

$$\widehat{l}_{\mathbf{p}} \{n_i\} \equiv \widehat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \{v n_i\}. \quad (24.7)$$

Тогда

$$\sigma_{ik} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_s \int_{\varepsilon_s(\mathbf{p})=\varepsilon_F} n_i^{(s)} \widehat{l}_{\mathbf{p}} \{n_k^{(s)}\} dS_s. \quad (24.8)$$

Из этой формы записи тензора электропроводности видно, что симметрия тензора σ_{ik} — следствие эрмитовости оператора длины свободного пробега.

Для кубического кристалла удобно ввести среднюю длину свободного пробега $l_{\mathbf{p}}$ следующим равенством:

$$\frac{1}{3} l_{\mathbf{p}} \delta_{ik} = \frac{1}{S_F} \oint_{\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon_F} n_i \widehat{l}_{\mathbf{p}} \{n_k\} dS,$$

где S_F — площадь поверхности Ферми, а суммирование по s мы для простоты опустили и будем опускать впредь. Тогда электропроводность σ ($\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}$) можно представить в весьма компактной форме:

$$\sigma = \frac{2e^2 S_F l_{\mathbf{p}}}{3 (2\pi\hbar)^3}, \quad (24.9)$$

или

$$\sigma (\text{сек}^{-1}) \approx 0,6 \cdot 10^{10} S_F \left(\frac{e^2 c m^2}{\text{сек}^2} \right) l_{\mathbf{p}} (c.m.). \quad (24.10)$$

Приведенные здесь выражения для тензора σ_{ik} носят весьма общий характер и требуют минимального числа оговорок

*) При столкновениях с фононами (см. ниже) условие $\Delta\varepsilon/\varepsilon \ll 1$ ($\Delta\varepsilon$ — изменение энергии при столкновении) означает, что $\theta/\varepsilon_F \ll 1$. Для плохих металлов типа Вi, С (графита) это условие может оказаться невыполненным.

(например, предположения о вырождении электронного газа). Часто вводят анизотропное время релаксации, используя следующее соотношение:

$$\widehat{W}_p^{-1} v_k = \tau_p(\rho) v_k, \quad (24.11)$$

которое следует считать определением времени релаксации $\tau_p(\rho)$. Формулу (24.6) можно тогда переписать в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon(\rho)=\varepsilon_F} \tau_p(\rho) \frac{v_i v_k}{v} dS \equiv \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon(\rho)=\varepsilon_F} \tau_p(\rho) v_i dS_k, \quad (24.12)$$

$$(dS = n dS, \quad n = v/v).$$

Для изотропного закона дисперсии время релаксации $\tau_p(\rho)$ зависит только от модуля квазимпульса $\tau_p(\rho) \equiv \tau_p(\rho)$, и из формулы (24.12) получается «обычное» выражение для удельной электропроводности:

$$\sigma = \frac{ne^2 l_p}{\rho_F}, \quad (24.13)$$

где n — плотность электронов, а $l_p = \tau_p(\rho_F) v_F$ — длина свободного пробега.

Формулы, выписанные в этом параграфе, носят несколько формальный, полуфеноменологический характер, — взаимодействие электронов, приводящее к конечной величине сопротивления, «спрятано» в длине свободного пробега l_p . Вычисление длины свободного пробега — одна из основных задач теории металлов. Этому вопросу посвящено огромное число работ, поток которых не прекращается до настоящего времени. Достаточно полный обзор работ по этому вопросу можно найти, например, в [7].

Как мы уже говорили (во введении к этой части), подробное изучение механизмов сопротивления не входит в нашу задачу. Сделаем только несколько замечаний.

Хотя до настоящего времени задачу вычисления длины свободного пробега электронов проводимости нельзя считать полностью решенной, совершенно очевидно, что основные механизмы сопротивления нам известны, это: 1) столкновения электронов с фононами; 2) столкновения электронов друг с другом и 3) столкновения электронов с примесными атомами и другими статическими дефектами кристаллической решетки*). Первые два механизма имеют место в идеальном кристалле и обусло-

*) Мы не будем обсуждать дополнительные механизмы рассеяния в металлах, обладающих каким-либо специфическим свойством. Например, в ферро- и антиферромагнитных металлах имеют место столкновения электронов со спиновыми волнами; в упорядочивающихся сплавах имеется рассеяние на флуктуациях дальнего порядка.

вливают так называемое идеальное сопротивление, которое обращается в нуль при абсолютном нуле температуры; третий механизм характерен для дефектных кристаллов и является причиной остаточного сопротивления, т. е. определяет значение сопротивления металла при абсолютном нуле температуры. Значение остаточного сопротивления существенно различно для различных образцов одного и того же металла.

Начнем с первого механизма. Все современные представления об энергетической структуре металла основываются на том, что электроны проводимости и фононы представляют собой две сравнительно слабо связанные подсистемы. Слабость взаимодействия между электронами проводимости и фононами (колебаниями решетки) обусловлена тем, что основное взаимодействие между электронами и решеткой входит в законы дисперсии электронов и фононов*). Слабость электрон-фононного взаимодействия позволяет при рассмотрении этого взаимодействия, как правило, ограничиваться однофононными процессами — поглощением и испусканием фононов электронами. Так как скорость электронов с энергией порядка энергии Ферми значительно больше скорости звука, эти процессы разрешены законами сохранения**).

Предполагая фононный газ равновесным, т. е. не учитывая увлечения фононов электронами, можно показать, что рассеяние электронов на фононах приводит к следующей температурной зависимости сопротивления:

$$\frac{\rho_{\text{эф}}(T)}{\rho(\Theta)} \approx \begin{cases} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^5 & (T \ll \Theta), \\ \frac{T}{\Theta} & (T \gg \Theta). \end{cases} \quad (24.14)$$

Здесь $\rho(\Theta)$ — сопротивление металла при температуре, равной температуре Дебая Θ , $\rho(\Theta) \approx m\Theta/ne^2\hbar$. Хотя эти результаты уже стали классическими, предположения, на которых они основаны, до конца не вполне ясны до сих пор. В частности, не выяснен вопрос о роли процессов увлечения фононов электронами при очень низких температурах [11].

Последовательный вывод выражения (24.14) содержится в любом сколько-нибудь подробном курсе электронной теории

*) См. работу [8].

**) Слабая связь между электронами и фононами, в частности, проявляется в том, что возможны ситуации, в которых каждая из подсистем описывается своей температурой. Время релаксации в этих условиях совпадает с временем выравнивания температур электронов и фононов [9]. Различие температур у фононов и электронов является одной из причин зависимости сопротивления от тока (отклонение от закона Ома), наблюдавшегося экспериментально на Bi при аномально больших плотностях тока ($j \sim 10^6 \text{ а/см}^2$) [10].

металлов (так называемое решение Блоха уравнения Больцмана). Как правило, он проводится на примере изотропной модели металла. Легко, однако, понять, что природа температурной зависимости сопротивления связана только с тем, что число фононов (N_ϕ) пропорционально T^3 при $T \ll \Theta$ и T при $T \gg \Theta$, а, кроме того, с тем, что при $T \ll \Theta$ столкновение электрона с фононом сопровождается очень малым изменением импульса электрона: $|\Delta p| = |\hbar \mathbf{k}| \sim (\hbar/a) T/\Theta$ (черта означает усреднение по равновесным фононам, \mathbf{k} — волновой вектор фонона, a — постоянная решетки). Так как $p_F \sim \hbar/a$, то электрону при $T \ll \Theta$ необходимо множество столкновений для того, чтобы потерять импульс $\simeq p_F$. Это означает, что процесс релаксации импульса можно при $T \ll \Theta$ описывать как диффузию электрона по ферми-поверхности. Оценку времени релаксации τ легко получить из выражения для коэффициента диффузии в импульсном пространстве $D_p = \overline{\Delta p^2} v_\phi$ ($v_\phi \sim N_\phi \sim T^3$ — частота столкновения с фононами) и из соотношения Эйнштейна, которое в данном случае принимает вид $p_F^2 \approx D_p \tau$. Отсюда немедленно следует, что $\tau \sim T^{-5}$, т. е. $\rho_{\text{эф}} \sim T^5$ (при $T \ll \Theta$). При высоких температурах наиболее вероятно столкновение с фононом, энергия которого Θ , а импульс $\approx \hbar/a$. Поэтому достаточно нескольких столкновений для релаксации электронного импульса $\approx p_F$ ($p_F \approx \hbar/a$), и вся зависимость сопротивления от температуры определяется только зависимостью от температуры числа фононов. Итак, при $T \gg \Theta$ $\rho_{\text{эф}} \sim T$.

Основная температурная зависимость фононной части сопротивления (см. формулу (24.14)) не зависит от закона дисперсии электронов проводимости. Однако значение всех коэффициентов, конечно, существенно определяется параметрами энергетического спектра. В последние годы в связи с развитием численных методов расчета электронного энергетического спектра металлов появляются работы, в которых рассчитывается зависимость сопротивления от температуры (при произвольных температурах, а не в предельных случаях).

В некоторых случаях учет формы поверхности Ферми позволяет выяснить детали температурного хода сопротивления (получить аналитические выражения) в промежуточной области температур. В частности, показано [12], что при неизотропном законе дисперсии переход от остаточного сопротивления к фонноному сложнее, чем для металлов со сферической поверхностью Ферми (рис. 55).

Столкновения электронов друг с другом являются причиной сопротивления только в тех случаях, когда столкновения сопровождаются перебросами. Благодаря тому что поверхности Ферми, как правило, имеют участки, расположенные достаточно

близко к границам зоны Бриллюэна, столкновения с перебросами не затруднены. Согласно работе [13], электрон-электронная часть сопротивления пропорциональна квадрату температуры:

$$\rho_{\text{эз}} \approx \frac{m}{ne^2} \frac{e_F}{\hbar} \left(\frac{T}{e_F} \right)^2. \quad (24.15)$$

Сравнение формул (24.14) и (24.15) показывает, что для всех металлов (кроме переходных) электрон-электронную часть сопротивления можно наблюдать только в области очень низких температур, да и то, если она не вуалируется полностью остаточным сопротивлением. Отметим, что сравнение экспериментальных данных по сопротивлению при низких температурах (когда может проявляться электрон-электронное взаимодействие) с теоретическими расчетами (речь идет не о «прикидочных» формулах типа (24.14) и (24.15), а о строгих расчетах [7]), по-видимому, указывает на систематическое несогласие между экспериментом и теорией. Теория дает завышенные значения величины электрон-электронного сопротивления.

Остаточное сопротивление полностью определяется чистотой металла и качеством монокристалла (наличием напряжений, дислокаций и пр.). В настоящее время удается получить столь чистые образцы, что длина свободного пробега электронов в них достигает нескольких миллиметров (у наиболее чистого вольфрама например, $l \approx 1 \text{ см}$).

Очень любопытный механизм сопротивления предсказан в работе [14]: изотопическая неоднородность металла является причиной сопротивления. По оценкам длина свободного пробега, связанная с этим механизмом, может достигать 0,1—1 см. Строгий расчет электропроводности изотопически неоднородных металлов проведен в работе [15]. Мы специально остановились на этом механизме сопротивления, так как причина его существования весьма нетривиальна. Надо помнить, что электронные оболочки изотопов тождественны (незначительное различие, обусловленное сверхтонкой структурой термов, заведомо можно не учитывать). Рассеяние связано только с неоднородностью нулевых колебаний решетки.

В большинстве теоретических работ по вычислению температурного хода сопротивления предполагается, что температура вырождения электронного газа значительно выше характери-



Рис. 55. Зависимость сопротивления от температуры при низких температурах для металлов с несферической поверхностью Ферми.

ческой температуры рассеивающих квазичастиц (например, фононов). Это позволяет использовать предельное значение для функции Ферми: $-\partial n_F / \partial \epsilon = \delta(\epsilon - \epsilon_F)$. Так сделано при выводе формул (24.6) и (24.9)—(24.13). Температурная зависимость тензора проводимостей в этих случаях определяется интегралом столкновений. Однако надо иметь в виду, что критерий вырождения для газа электронов проводимости значительно жестче, чем критерий вырождения для газа свободных электронов (§ 12). У тех металлов, у которых поверхность Ферми расположена вблизи особых точек в p -пространстве (Bi, As, Sb, графит и др.), температурная зависимость сопротивления существенно зависит от множителя $\frac{\partial n_F}{\partial \epsilon}$ под интегралом (24.5) и для ее вычисления необходимо подробное знание структуры электронного энергетического спектра данного металла.

Различные механизмы рассеяния в первом приближении дают аддитивный вклад в сопротивление (правило Матиссена). Это утверждение может быть «доказано» с помощью выражения (24.13), если заметить, что $1/l_p$ (по своему смыслу) — вероятность рассеяния электрона на единице пути. Если имеется несколько независимых причин рассеяния, то, согласно теореме о сложении вероятностей:

$$1/l = \sum_j 1/l_j, \quad (24.16)$$

где индекс j нумерует механизм рассеяния.

Из формулы (24.16) следует*):

$$\rho = \sum_j \rho_j. \quad (24.17)$$

Правило Матиссена не следует абсолютизировать. Совершенно очевидно, что при его «выводе» не учтена корреляция между процессами рассеяния. Однако даже если не учитывать корреляцию, т. е. считать, что вероятность рассеяния есть сумма вероятностей, то и в этом случае при анизотропном законе дисперсии удельное сопротивление более сложным образом зависит от механизмов рассеяния, чем это описывается формулой (24.16).

Если один из механизмов вносит малый вклад в рассеяние электронов по сравнению с остальными, то можно вывести правило, аналогичное правилу Матиссена, однако, как будет видно ниже, значительно более слабое.

*) Более привычная формулировка правила Матиссена: сопротивление металла — сумма остаточного (не зависящего от температуры) и идеального (изменяющегося с температурой) сопротивлений — непосредственное следствие формулы (24.17).

Итак, пусть оператор столкновений \widehat{W}_p содержит малую аддитивную добавку. Обозначим ее через \widehat{W}_1 :

$$\widehat{W}_p = \widehat{W}_0 + \widehat{W}_1, \quad (24.18)$$

причем $|\widehat{W}_1\{f\}| \ll |\widehat{W}_0\{f\}|$. Тогда решение кинетического уравнения (24.1) можно искать методом последовательных приближений. Расчет тензора удельных проводимостей и тензора удельных сопротивлений в линейном по \widehat{W}_1 приближении дает:

$$\rho_{ik} = \rho_{ik}^{(0)} + \Delta\rho_{ik}, \quad (24.19)$$

где

$$\Delta\rho_{ik} = \rho_{il}^{(0)} \Delta\sigma_{lm} \rho_{mk}^{(0)}, \quad \Delta\sigma_{ik} = - \int v_i \widehat{W}_0^{-2} \widehat{W}_1 v_k \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} d\Gamma. \quad (24.20)$$

Тензор удельных сопротивлений $\rho_{ik}^{(0)}$ связан с основным оператором столкновений \widehat{W}_0 .

При высоких температурах ($T \gg \Theta$, Θ — температура Дебая) основной причиной рассеяния, как правило, являются столкновения с фононами. В этой области температур $\rho_{ik}^{(0)} \sim T$ (с точностью до членов $\Theta/T \ll 1$), и, как ясно из соотношений (24.20), добавка к сопротивлению, обусловленная рассеянием на примесях (описываемом оператором \widehat{W}_1), вовсе не зависит от температуры (в первом приближении по параметру Θ/T). При низких температурах (для очень чистых образцов — при сверхнизких температурах) основной механизм сопротивления — рассеяние на примесях и прочих статических неоднородностях. Теперь оператор \widehat{W}_0 описывает примесное рассеяние. Роль малой добавки играет взаимодействие с фононами (оператор \widehat{W}_1). Температурная добавка к сопротивлению пропорциональна T^5 , а коэффициент при T^5 не зависит от общего числа примесных атомов (см. формулу (24.14)). Однако этот коэффициент зависит от характера рассеяния электронов на примесях и поэтому может меняться от образца к образцу. Даже в такой «облегченной» формулировке правило Матиссена выполняется отнюдь не всегда, причем наиболее существенные отклонения связаны, как показали работы последних лет, с рассеянием электронов на квазилокальных и локальных колебаниях кристалла, т. е., другими словами, с учетом неупругости столкновений с примесями, а также с перестройкой фононного спектра под влиянием примесей. Детально проведенное рассмотрение [16] объяснило основные экспериментальные факты, относящиеся к зависимости сопротивления от массы примеси, ее концентрации и т. д.

Неупругость столкновений сказывается особенно существенно при рассмотрении взаимодействия электронов с парамагнитными

примесями. Согласно [17], неборновский характер рассеяния приводит к наблюдающемуся у ряда металлов минимуму в температурной зависимости сопротивления.

К рассматриваемому кругу вопросов относятся работы, в которых изучены коллективные эффекты, обусловленные взаимодействием фермиевского газа электронов с локализованными спинами (см. [17а]).

С понижением температуры и повышением чистоты металла длина свободного пробега может оказаться сравнимой и даже значительно больше толщины пленки d или радиуса проволоки R . Естественно, что в этих условиях существенную роль начинают играть столкновения электронов с границами образца. В предельном случае $l \gg R$ среднее значение электропроводности по сечению цилиндрической проволоки или плоскопараллельной пластинки может быть вычислено без специальных предположений о законе дисперсии электронов проводимости [17б]. Порядок величины электропроводности в этом случае можно получить, если в обычной формуле (например, в формуле (24.13)), заменить длину пробега радиусом R для цилиндра и величиной $d \ln(l/d)$ для пластины. Появление большого логарифма связано с вкладом в электропроводность электронов,двигающихся параллельно поверхности и вовсе с ней не сталкивающихся.

Мы уже отмечали, что непосредственной причиной сопротивления могут быть только такие столкновения, которые приводят к диссипации квазиимпульса (поэтому, в частности, необходим учет процессов переброса при выводе формулы (24.15)). Однако возможны ситуации, когда процессы переброса затруднены, а столкновения с сохранением квазиимпульса происходят сравнительно часто. Если обозначить длину свободного пробега относительно столкновений с сохранением квазиимпульса через l_N , а длину свободного пробега относительно столкновений с перебросами через l_U , то ситуация, о которой мы говорим, означает, что $l_U \gg l_N$. Если при этом размеры проволоки или пленки занимают промежуточное положение: $l_U \gg d \gg l_N$, то диссипация импульса происходит на стенке образца (за счет вязкости электронного газа), причем электроны попадают на стенку в результате «диффузионного» блуждания. Легко понять, что необходимое для этого время по порядку величины равно $d^2/l_N v_F$ [17в]. Хотя поверхности Ферми ряда металлов имеют структуру, которая должна обеспечить существенное различие между l_U и l_N ($l_U \gg l_N$), вязкостный механизм сопротивления до настоящего времени не обнаружен экспериментально.

Формула (24.6) и все последующие показывают, что электропроводность существенным образом зависит от динамических свойств электронов, в частности, от характера закона дисперсии. Может показаться, что это утверждение, подтверждаемое всей

совокупностью экспериментов по сопротивлению металлов, находится в противоречии с классическими опытами Стюарта — Толмена, согласно которым величина e/m электронов в металле равна величине e/m_0 для свободных электронов. Это кажущееся противоречие проще всего разъясняется следующим образом. Если на электрон кроме электрического поля действует сила инерции, то кинетическое уравнение следует записать следующим образом [18]:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = -\frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \mathbf{v} (e\mathbf{E} - m_0\mathbf{a}), \quad (24.21)$$

где \mathbf{a} — ускорение. Такое выражение для силы инерции ($-m_0\mathbf{a}$) можно оправдать двояким образом: либо, используя принцип эквивалентности, заменить силу тяжести ускорением, либо рассмотреть уравнение Шредингера для электрона в периодическом поле в неинерциальной системе координат (подробно это проделано в работе [18]). Проводя оба доказательства, надо учесть, что число электронов проводимости (число квазичастиц) равно числу свободных электронов. Благодаря этому ферми-жидкостное взаимодействие не изменяет выражения для силы инерции. Из уравнения (24.21) следует, что возникающее в разомкнутом проводнике поле (это соответствует одной из постановок эксперимента) равно $m_0\mathbf{a}/e$, и мы видим, что измеряемая величина определяется отношением m_0/e для свободного электрона.

В другой постановке эксперимента Стюарта — Толмена измеряется отношение плотности импульса *) ρ к плотности тока \mathbf{j} . Легко показать, что

$$\rho = \frac{m_0}{e} \mathbf{j}.$$

Действительно, согласно общим принципам релятивистской механики, импульс частицы равен $\epsilon\mathbf{v}/c^2$, где ϵ — ее полная энергия, включающая энергию покоя. Так как энергия взаимодействия электрона как с решеткой, так и с другими электронами значительно меньше энергии покоя, импульс электрона с большой точностью равен $m_0\mathbf{v}$ (m_0 — масса свободного электрона). Отсюда сразу следует выписанное выше соотношение.

§ 25. Теплопроводность. Закон Видемана — Франца. Термоэлектрические явления

Электрон принимает участие не только в переносе заряда, но и в переносе тепла, причем в хороших металлах электроны являются основным его переносчиком. Существование термоэлектрических явлений обязано только свободным электронам.

*) Плотность импульса равна плотности потока массы.

Кинетические коэффициенты, описывающие связь между соответствующими потоками (потоком тепла q и плотностью тока j) и силами (напряженностью поля E и градиентом температуры ∇T), могут быть вычислены с помощью сформулированного выше кинетического уравнения.

Прежде чем провести вычисления, остановимся на феноменологическом описании теплопроводности и термоэлектрических явлений.

Оставаясь в рамках линейных соотношений и учитывая принцип симметрии кинетических коэффициентов (см., например, [1], § 25), можно записать связь между напряженностью электрического поля *) E , градиентом температуры ∇T , плотностью тока j и потоком тепла q :

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \rho_{ik} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i &= T \alpha_{ki} j_k - \kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

Здесь ρ_{ik} — тензор сопротивлений, κ_{ik} — тензор теплопроводности, а α_{ik} — тензор, характеризующий термоэлектрические свойства металла. Через компоненты тензора α_{ik} могут быть выражены коэффициенты Томсона, Пельтье и термоэлектродвижущая сила [1]. Заметим, что соотношения Онсагера (принцип симметрии кинетических коэффициентов), требующие симметрии тензоров ρ_{ik} и κ_{ik} , допускают существование проводников с несимметричным тензором термоэлектрических коэффициентов ($\alpha_{ik} \neq \alpha_{ki}$).

Перейдем теперь к вычислению тензоров теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов. Для дальнейшего удобно сформулированное выше кинетическое уравнение переписать, выписав непосредственно уравнение для функции распределения фононов χ .

Напомним, что столкновения с фононами почти всегда существенны. Кроме того, во всех твердых телах (и в металлах, конечно) фононы принимают участие в переносе тепла. Если неравновесную добавку к фермиевской функции по-прежнему обозначить через f_1 , а к равновесной функции фононов (функции Бозе — Эйнштейна $N_B = (e^{\hbar\omega/T} - 1)^{-1}$, где $\hbar\omega = \hbar\omega(\mathbf{p})$ — энергия фонона с квазиимпульсом \mathbf{p}) — через χ_1 , то система кинетических уравнений Больцмана может быть записана следующим образом (мы опускаем по указанным выше причинам

*) Как мы уже говорили, наблюдаемая напряженность поля в проводнике есть сумма напряженности поля, обусловленной приложенной к проводнику разностью потенциалов, и величины $-(1/e)\nabla\zeta$, где ζ — химический потенциал электронов [1]. Это означает, что изменение химического потенциала, обусловленное градиентом температуры, уже включено в величину E .

члены с производными от функций распределения по координатам и времени; кроме того, мы опускаем слагаемое, учитывающее действие магнитного поля):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{ст}}^{\text{э.э}} + \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right)_{\text{ст}}^{\text{э.}\phi} &= \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} e \mathbf{v} \mathbf{E} + \frac{\partial n_F}{\partial T} \mathbf{v} \nabla T, \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{ст}}^{\phi.\text{э}} + \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right)_{\text{ст}}^{\phi.\phi} &= \frac{\partial N_B}{\partial T} \mathbf{u} \nabla T. \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

Здесь $\mathbf{u} = \partial \hbar \omega / \partial \mathbf{p}$ — скорость фонона с квазиимпульсом \mathbf{p} , а линейаризованные интегралы столкновений определены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{ст}}^{\text{э.э}} &= -\widehat{W}_{\text{э.э}}\{f_1\}, \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{ст}}^{\phi.\text{э}} &= -\widehat{W}_{\phi.\text{э}}\{f_1\} \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

и т. д., где

$$\left. \begin{aligned} \widehat{W}_{\text{э.э}} &= - \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{ст}}^{\text{э}}}{\delta f} \right\}_{f=n_F, \chi=N_B}, \\ \widehat{W}_{\phi.\text{э}} &= - \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{ст}}^{\phi}}{\delta f} \right\}_{f=n_F, \chi=N_B} \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

и т. д. — линейные операторы, действующие на функции f_1 и χ_1 , $\mathcal{L}_{\text{ст}}^{\text{э}}$ и $\mathcal{L}_{\text{ст}}^{\phi}$ — электронный и фононный операторы столкновений; в них, естественно, включено взаимодействие не только между электронами и фононами, но и со всеми статическими неоднородностями (примесями, дислокациями и т. п.). Существование нескольких электронных и фононных зон предполагается и учитывается аналогично тому, как это сделано в § 23 (см. формулы (23.2) и (23.3)).

По аналогии с формулой (23.15) введем вектор-функции ψ , φ , μ и ν так, что

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -e E_i \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \psi_i - \nabla_i T \frac{\partial n_F}{\partial T} \varphi_i, \\ \chi_1 &= -e E_i \frac{\partial N_B}{\partial (\hbar \omega)} \mu_i - \nabla_i T \frac{\partial N_B}{\partial (\hbar \omega)} \nu_i. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

Тогда кинетическое уравнение Больцмана записывается как система векторных уравнений для функции ψ_i , φ_i , μ_i и ν_i :

$$\left. \begin{aligned} \widehat{W}_p^{\text{э.э}} \psi_i + \widehat{W}_p^{\text{э.}\phi} \mu_i &= \nu_i, & \widehat{W}_\varepsilon^{\text{э.э}} \varphi_i + \widehat{W}_\varepsilon^{\text{э.}\phi} \nu_i &= \nu_i, \\ \widehat{W}_p^{\phi.\text{э}} \psi_i + \widehat{W}_p^{\phi.\phi} \mu_i &= 0, & \widehat{W}_\varepsilon^{\phi.\text{э}} \varphi_i + \widehat{W}_\varepsilon^{\phi.\phi} \nu_i &= \mu_i, \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

а линеаризованные интегралы столкновений \hat{W} определены формулами типа (23.13) и (23.14).

Используя введенные здесь операторы, легко построить формально операторы \hat{W}_p и \hat{W}_e из § 23, например:

$$\hat{W}_p = \hat{W}_p^{e,e} - \hat{W}_p^{e,\phi} (\hat{W}_p^{\phi,\phi})^{-1} \hat{W}_p^{\phi,e}. \quad (25.7)$$

Обобщенными силами при пользовании кинетическим уравнением являются наблюдаемая напряженность электрического поля \mathbf{E} и градиент температуры ∇T . Согласно принципам термодинамики неравновесных процессов [19], потоки, соответствующие этим силам, должны быть определены так, чтобы производная от энтропии по времени \dot{S} (производство энтропии) выражалась следующим равенством:

$$\dot{S} = \mathbf{j}^* \mathbf{E} + \mathbf{q}^* (-\nabla T). \quad (25.8)$$

Легко показать, что при этом потоки \mathbf{j}^* и \mathbf{q}^* имеют следующий вид:

$$\mathbf{j}^* = \frac{e}{T} \int \mathbf{v} f_1 d\Gamma_e, \quad (25.9)$$

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{T^2} \left\{ \int \mathbf{u} \hbar \omega(\mathbf{p}) \chi_1 d\Gamma_\phi + \int \mathbf{v} (\varepsilon - \xi) f_1 d\Gamma_e \right\}. \quad (25.10)$$

Здесь символом $\int \dots d\Gamma_e$ обозначено интегрирование по всем электронным состояниям, а символом $\int \dots d\Gamma_\phi$ — по всем фоновым. Естественно, что при этом суммирование по зонам фонового спектра учитывается.

Обычно вместо потоков \mathbf{j}^* и \mathbf{q}^* используют плотность тока $\mathbf{j} = T\mathbf{j}^*$ и плотность потока тепла $\mathbf{q} = T^2\mathbf{q}^*$, для которых выписаны феноменологические соотношения (25.1).

Если считать обобщенными силами $-\nabla\phi$ и $-\nabla T$, то соответствующими потоками будут \mathbf{j}^* и \mathbf{q}^{*W} , который отличается от (25.10) заменой ξ на $W = -T^2\partial/\partial T(\xi/T)$ (W — тепловая функция в расчете на один электрон; $W \approx \xi$ при $T \ll \varepsilon_F$).

Используя формулы (25.5), (25.9) и (25.10), запишем выражения для \mathbf{j} и \mathbf{q} следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} j_i &= \sigma_{ik} E_k + b_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i &= c_{ik} E_k + d_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \end{aligned} \right\} \quad (25.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ik} &= e^2 \langle v_i \psi_k \rangle_{\mathfrak{S}}, & b_{ik} &= \frac{e}{T} \langle v_i \varphi_k (\varepsilon - \zeta) \rangle_{\mathfrak{S}}, \\ c_{ik} &= -e \{ \langle v_i \psi_k (\varepsilon - \zeta) \rangle_{\mathfrak{S}} + \langle u_i v_k \hbar \omega \rangle_{\Phi} \}, \\ d_{ik} &= -\frac{1}{T} \{ \langle v_i \varphi_k (\varepsilon - \zeta)^2 \rangle_{\mathfrak{S}} + \langle u_i v_k (\hbar \omega)^2 \rangle_{\Phi} \} \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

и введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} - \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \chi(\mathbf{p}) \eta(\mathbf{p}) d\Gamma_{\mathfrak{S}} &= \langle \chi \eta \rangle_{\mathfrak{S}}, \\ - \int \frac{\partial N_B}{\partial (\hbar \omega)} \chi(\mathbf{p}) \eta(\mathbf{p}) d\Gamma_{\Phi} &= \langle \chi \eta \rangle_{\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (25.13)$$

причем, как и в § 23, подобные интегралы можно рассматривать как скалярные произведения функций $\chi(\mathbf{p})$ и $\eta(\mathbf{p})$.

При записи потоков в виде (25.11) принцип симметрии кинетических коэффициентов Онсагера требует, чтобы между компонентами тензоров σ_{ik} , b_{ih} , c_{ik} и d_{ik} существовали следующие соотношения:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad d_{ik} = d_{ki}, \quad c_{ik} = -T b_{ik}. \quad (25.14)$$

Естественно, что эти соотношения — следствие определенных свойств интеграла столкновений. Мы на них не будем останавливаться, напомним только, что для доказательства ряда соотношений (25.14) достаточно воспользоваться эрмитовостью оператора \hat{W}_p (23.23) (см. также (25.22)).

Сравнив формулы (25.1) и (25.11), легко убеждаемся, что из (25.14) следуют онсагеровские соотношения, учтенные при записи (25.1), а

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ik} &= \sigma_{ik}^{-1}, & \alpha_{ik} &= -\sigma_{il}^{-1} b_{lk}, \\ \kappa_{ik} &= -d_{ik} + c_{im} \sigma_{ml}^{-1} b_{lk}. \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

Если, воспользовавшись последним из соотношений (25.14), заменить в формуле для тензора теплопроводности κ_{ik} тензор c_{im} равным ему тензором $-T b_{mi}$, то, согласно формулам (25.12), теплопроводность разбивается на сумму электронной и фононной частей:

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ik}^{\mathfrak{S}} + \kappa_{ik}^{\Phi}, \quad (25.16)$$

где

$$\kappa_{ik}^{\mathfrak{S}} = -d_{ik}^{\mathfrak{S}} - T b_{mi} \sigma_{ml}^{-1} b_{lk}, \quad d_{ik}^{\mathfrak{S}} = -\frac{1}{T} \langle v_i \varphi_k (\varepsilon - \zeta)^2 \rangle_{\mathfrak{S}}, \quad (25.17)$$

а

$$\kappa_{ik}^{\Phi} = \frac{1}{T} \langle u_i v_k (\hbar \omega)^2 \rangle_{\Phi}. \quad (25.18)$$

Такое разделение, конечно, не означает отсутствия взаимного влияния между электронной и фононной подсистемами. В широком интервале температур фононы — главная причина рассеяния электронов, которые, в свою очередь, практически при всех температурах являются главной причиной теплового сопротивления для потока фононов. Именно благодаря рассеянию электронами длина свободного пробега фононов мала и их роль в теплопроводности металлов незначительна. Формально это позволяет в формуле (25.16), а также в выражении для c_{ik} пренебречь вторыми слагаемыми.

Соотношение Видемана — Франца устанавливается между электронной частью коэффициента теплопроводности и электропроводностью.

Итак, электронная часть теплопроводности металла и термоэлектрические коэффициенты определяются через величины b_{ik} , d_{ik} и c_{ik} . Как мы видели в § 24, электропроводность выражается в виде интеграла по поверхности Ферми (см. формулы (24.6) и дальше). Аналогичный вид можно придать и формулам (25.15), разлагая полученные выражения по степеням температуры (точнее, по степеням $T/|\epsilon_F - \epsilon_k|$); коэффициенты разложения при этом — тоже функции температуры (за счет зависимости от температуры оператора столкновений). Все встречающиеся здесь тензоры можно записать, выделив явно интегрирование по энергии:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ik} &= -e^2 \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \psi_{ik}(\epsilon) d\epsilon, & b_{ik} &= \frac{e}{T} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} (\epsilon - \zeta) \varphi_{ik}(\epsilon) d\epsilon, \\ c_{ik} &= -e \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} (\epsilon - \zeta) \psi_{ik}(\epsilon) d\epsilon, & d_{ik} &= \frac{1}{T} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} (\epsilon - \zeta)^2 \varphi_{ik}(\epsilon) d\epsilon, \end{aligned} \right\} \quad (25.19)$$

где

$$\psi_{ik} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\epsilon(\mathbf{p})=\epsilon} \frac{v_i \psi_k}{v} dS, \quad \varphi_{ik} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\epsilon(\mathbf{p})=\epsilon} \frac{v_i \varphi_k}{v} dS, \quad (25.20)$$

а интегрирование ведется по изоэнергетической поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon$.

Используя хорошо известные свойства функции Ферми (см., например, формулу (12.7)), легко показать, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ik} &\approx e^2 \psi_{ik}(\epsilon_F), & b_{ik} &\approx -\frac{\pi^2}{3} eT \left(\frac{d\varphi_{ik}}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\epsilon_F}, \\ c_{ik} &\approx \frac{\pi^2}{3} eT^2 \left(\frac{d\psi_{ik}}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\epsilon_F}, & d_{ik} &\approx -\frac{\pi^2}{3} T \varphi_{ik}(\epsilon_F). \end{aligned} \right\} \quad (25.21)$$

Отметим, что в этом приближении соотношения Онсагера (25.14) означают, что

$$\left(\frac{d\varphi_{ik}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \left(\frac{d\psi_{ki}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_F}. \quad (25.22)$$

Подставляя выражения (25.21) в формулы (25.15) и оставляя только члены, содержащие наименьшую степень отношения $T/|\varepsilon_F - \varepsilon_k|$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ik} &\approx \frac{1}{e^2} \psi_{ik}^{-1}(\varepsilon_F), \\ \alpha_{ik} &\approx \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{e} \psi_{il}^{-1}(\varepsilon_F) \varphi'_{ik}(\varepsilon_F) = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{e} \psi_{il}^{-1}(\varepsilon_F) \varphi'_{kl}(\varepsilon_F), \\ \kappa_{ik} &\approx \frac{\pi^2}{3} T \varphi_{ik}(\varepsilon_F). \end{aligned} \right\} \quad (25.23)$$

Здесь, как и в § 24, удобно ввести операторы длины свободного пробега, действующие на единичный вектор $n_i = v_i/v$. Если воспользоваться для операторов столкновений обозначениями § 24, можно записать

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= \widehat{W}_p^{-1} \{v_i\} \equiv \widehat{l}_p \{n_i\}, \\ \varphi_i &= \widehat{W}_\varepsilon^{-1} \{v_i\} \equiv \widehat{l}_\varepsilon \{n_i\}. \end{aligned} \right\} \quad (25.24)$$

Индексы p и ε подчеркивают, что в первом случае при столкновении наиболее существенно изменение импульса, а во втором — энергии. Другими словами, по порядку величины $|\psi| \approx l_p$, где l_p — длина, на которой релаксирует импульс электрона, а $|\varphi| \approx l_\varepsilon$, где l_ε — длина релаксации энергии (вернее, $\varepsilon - \zeta$). При низких температурах ($T \ll \Theta$), когда главную роль играют столкновения с длинноволновыми фононами, эти длины существенно различны ($l_p \approx (\Theta/T)^2 l_\varepsilon$). Последнее обстоятельство приводит к наблюдаемому в эксперименте отклонению от закона Видемана — Франца. В тех случаях, когда неупругими столкновениями можно пренебречь*), различие между l_ε и l_p исчезает, что естественно, так как релаксация при этом связана только с изотропизацией движения электронов (в частности, различие между l_p и l_ε исчезает в тех редких случаях, когда оправдано τ -приближение).

В случае кубического кристалла удобно ввести усредненные длины свободного пробега. Они являются функциями энергии

*) Это означает не только возможность положить $\mu_i = v_i = 0$ (см. формулу (25.5)), но и главное пренебречь передачей энергии от электронов равновесным фононам в каждом акте столкновения. Напомним, что при $T \gg \Theta$ столкновения с фононами квазиупруги. Это причина выполнения закона Видемана — Франца при высоких температурах.

электрона и определяются следующей формулой:

$$\frac{1}{S(\varepsilon)} \oint n_i \hat{l}_{\mathbf{p}(\varepsilon)} \{n_k\} dS = \frac{1}{3} l_{\mathbf{p}(\varepsilon)}(\varepsilon) \delta_{ik}, \quad (25.25)$$

причем интегрирование ведется по поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$, площадь которой равна $S(\varepsilon)$.

Средняя длина свободного пробега $l_{\mathbf{p}}$, введенная в § 24, совпадает с вводимой здесь, если вместо энергии ε подставить значение энергии Ферми: $l_{\mathbf{p}} = l_{\mathbf{p}}(\varepsilon_F)$, аналогично $l_{\varepsilon} = l_{\varepsilon}(\varepsilon_F)$.

Используя формулы (25.20), (25.23) — (25.25), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ik} &= \sigma \delta_{ik}, & \sigma &= \frac{2e^2}{3(2\pi\hbar)^3} S(\varepsilon_F) l_{\mathbf{p}}, \\ \kappa_{ik} &= \kappa \delta_{ik}, & \kappa &= \frac{2\pi^2 T}{9(2\pi\hbar)^3} S(\varepsilon_F) l_{\varepsilon}; \\ \alpha_{ik} &= \alpha \delta_{ik}, & \alpha &= \frac{\pi^2 T}{3e} \left[\frac{d}{d\varepsilon} \ln(S(\varepsilon) l_{\mathbf{p}}(\varepsilon)) \right]_{\varepsilon=\varepsilon_F}. \end{aligned} \right\} \quad (25.26)$$

Отметим, что в новых обозначениях соотношения Онсагера (25.14) или (25.22) записываются особенно компактно:

$$\frac{d}{d\varepsilon} (S l_{\mathbf{p}})_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \frac{d}{d\varepsilon} (S l_{\varepsilon})_{\varepsilon=\varepsilon_F}. \quad (25.27)$$

Если $l_{\mathbf{p}} = l_{\varepsilon}$, то

$$\kappa = \frac{\pi^2 T}{3e^2} \sigma, \quad (25.28)$$

т. е. выполняется известный закон Видемана — Франца. Как видно из вывода формулы (25.28), это соотношение определяется только характером рассеяния (например, совершенно не зависит от закона дисперсии). В случае некубического кристалла это соотношение (при $\varphi_i = \varphi_j$) выполняется для каждой из компонент тензоров σ_{ik} и κ_{ik} .

Мы не будем останавливаться на изложении теорий, объясняющих (или, вернее, пытающихся объяснить) наблюдаемые экспериментальные факты, касающиеся термо-э. д. с. и теплопроводности (этому посвящен ряд параграфов в [11]). Отметим только, что обратный знак*) коэффициента α (т. е. термо-э. д. с.) у ряда металлов можно объяснить дырочным характером поверхности Ферми: если поверхность Ферми расположена вблизи той точки \mathbf{p} -пространства, где энергия достигает максимума, то с ростом энергии площадь поверхности уменьшается (поверхность сжимается). Кроме того, с приближением к экстремальной точке уменьшается скорость; медленные электроны чаще рассеиваются и потому с ростом энергии длина пробега также, по-видимому, уменьшается.

*) Для свободных электронов $\alpha < 0$.

§ 26. Гальваномагнитные явления. Введение

Влияние магнитного поля на проводимость металла обусловлено его влиянием на движение электронов (§§ 4, 5). При этом следует помнить, что в отличие от равновесных термодинамических свойств кинетические характеристики (удельное сопротивление, коэффициент теплопроводности и т. д.) существенно зависят от магнитного поля и в классическом приближении. Иначе говоря, зависимость от магнитного поля проявляется, даже если не учитывать квантование энергии электрона в магнитном поле (см. введение). Характерным безразмерным параметром, определяющим роль магнитного поля, является отношение r_H/l , где r_H — радиус орбиты электрона, а l — длина пробега. Так как радиус орбиты r_H обратно пропорционален магнитному полю, малыми полями следует считать те поля, для которых $r_H \gg l$, а большими — те, для которых выполняется обратное неравенство. Радиус орбиты r_H для свободного электрона равен cp/eH , где под p в этом случае следует понимать радиус ферми-сферы, а в общем случае $p = \sqrt{S}$, где S — выделенное (например, экстремальное) сечение поверхности Ферми.

Роль квантовых эффектов определяется двумя параметрами: $\hbar\omega/|\epsilon_F - \epsilon_k|$ и $\hbar\omega/T$ (§ 8). Первый параметр, как правило, всегда очень мал, что, по сути дела, и оправдывает возможность пренебрежения квантовыми эффектами. Параметр $\hbar\omega/T$ при различных полях и температурах изменяется в широких пределах. Если $\hbar\omega \gtrsim T$, то имеют место квантовые осцилляции гальваномагнитных характеристик — эффект Шубникова — де Гааза и прочие эффекты, аналогичные эффекту де Гааза — ван Альфена (§ 15). У большинства металлов квантовые осцилляции накладываются в виде мелкой ряби на существенную зависимость гальваномагнитных характеристик от магнитного поля. Это позволяет рассматривать сначала классические эффекты, а потом квантовые эффекты учитывать в виде поправок*).

Простейший вариант электронной теории кинетических явлений (τ -приближение, одна группа носителей с изотропным квадратичным законом дисперсии) не может даже качественно объяснить зависимость сопротивления от магнитного поля, хотя получающаяся оценка «константы» Холла R в ряде случаев верна ($R = 1/nes$, n — концентрация электронов). Исследования последних лет показали, что гальваномагнитные характеристики

*) Квантовые поправки всегда содержат множитель $(\hbar\omega/|\epsilon_F - \epsilon_k|)^n$, где $n > 0$. У некоторых металлов, например у Вi, квантовые эффекты существенным образом определяют зависимость сопротивления, и особенно «константы» Холла R , от магнитного поля. К этим металлам излагаемые здесь результаты надо применять с осторожностью. Теория квантовых осцилляций гальваномагнитных характеристик изложена в § 31.

в сильных полях весьма чувствительны к структуре электронного энергетического спектра. Они служат одним из надежных методов определения топологии поверхности Ферми.

Мы не будем приводить здесь сводку экспериментальных данных, а по мере изложения теории результаты экспериментов будем привлекать для иллюстрации ее выводов. Отметим

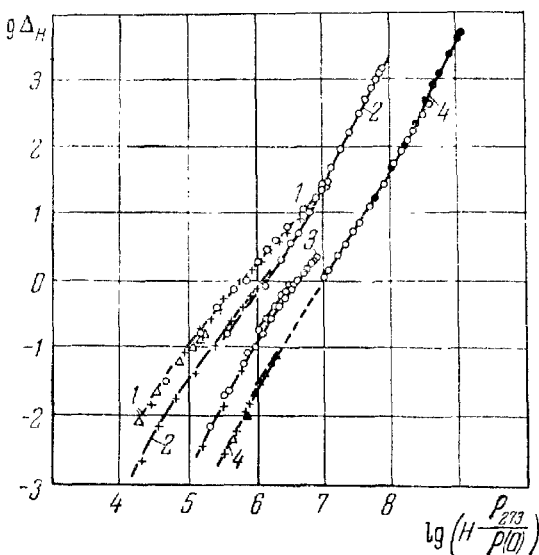


Рис. 56. Зависимость увеличения сопротивления в магнитном поле от эффективной

величины магнитного поля $H \frac{\rho_{273}}{\rho(0)}$:

1 — Mg; 2 — Cd; 3 — Cu; 4 — Pb; ● — $T = 2^\circ \text{K}$;
○ — $T = 4,22^\circ \text{K}$; ▲ — $T = 14^\circ \text{K}$; × — $T = 20,35^\circ \text{K}$;
△ — $T = 73^\circ \text{K}$.

только несколько широко известных фактов.

1. Для поликристаллов и ряда монокристаллов приближенно выполняется правило Колера [20], согласно которому величина

$$\Delta_H = \frac{\rho(H) - \rho(0)}{\rho(0)} \quad (26.1)$$

является функцией эффективного поля

$$H_{\text{эфф}} = H \frac{\rho_{273}}{\rho(0)},$$

где $\rho(H)$ — сопротивление в магнитном поле H , ρ_{273} — сопротивление при 273°K и при $H=0$. Это правило, иллюстрируемое рис. 56, подтверждает высказанное выше утверждение, что параметром, от которого зависит изменение

сопротивления, является r/l . Наблюдаемые значительные отклонения от правила Колера [21], которые находят естественное объяснение в строгой теории (см. следующие параграфы), неоднократно пытались описать с помощью «правил», содержащих большее число подгоночных параметров, чем правило Колера. Одна из недавних попыток [22] сделана на основании результатов [23] по сопротивлению Al в магнитном поле.

2. Все исследованные до настоящего времени металлы по зависимости сопротивления от магнитного поля можно разделить на три группы. К первой группе относятся металлы, у которых сопротивление стремится к насыщению при $H \rightarrow \infty$ вне зависимости от направления магнитного поля. Увеличение сопротивления (а сопротивление всегда увеличивается в больших полях) у этих металлов достигает сотен процентов (Δ_∞ составляет несколько единиц). Ко второй группе относятся металлы,

у которых сопротивление квадратично возрастает с ростом магнитного поля ($r \ll l$) опять-таки при всех направлениях магнитного поля. Сопротивление при этом может возрасти в миллионы раз (например, V_i); по сути дела, металл в сильном магнитном поле обладает свойствами диэлектрика-изолятора. Третья группа обладает промежуточными свойствами: при некоторых направлениях магнитного поля сопротивление квадратично возрастает, при других — стремится к насыщению.

Речь до сих пор шла о поперечном гальваномагнитном эффекте, т. е. о том случае, когда ток перпендикулярен к магнитному полю. Продольный гальваномагнитный эффект сравнительно мал: продольное сопротивление у всех металлов стремится к насыщению. В зависимости сопротивления от магнитного поля ($j \perp H$) у большинства металлов наблюдается большой участок, на котором сопротивление линейно зависит от магнитного поля (закон Капицы). У некоторых металлов этот участок является промежуточным либо между двумя квадратичными зависимостями, либо между квадратичной зависимостью и насыщением; у других металлов (или образцов) не удалось обнаружить отклонения от линейного закона в больших полях.

Большинство экспериментальных фактов находит свое объяснение в современной кинетической теории гальваномагнитных эффектов. Правда, некоторые наблюдения заставляют уточнять теорию, конкретизируя ее выводы на основании знания электронного энергетического спектра того или иного металла*).

Изложение теории гальваномагнитных явлений начнем с их феноменологического описания [1]. Связь между электрическим полем и током, естественно, носит линейный характер (закон Ома):

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad E_i = \rho_{ik} j_k, \quad \sigma_{ik}^{-1} = \rho_{ik}. \quad (26.2)$$

В магнитном поле тензоры σ_{ik} и ρ_{ik} — функции магнитного поля — не являются симметричными тензорами. Принцип симметрии кинетических коэффициентов требует несколько более сложного соотношения между компонентами тензора:

$$\sigma_{ik}(H) = \sigma_{ki}(-H). \quad (26.3)$$

Тензор σ_{ik} , как и всякий тензор второго ранга, можно представить в виде суммы симметричного s_{ik} и антисимметричного a_{ik} тензоров:

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \quad (26.4)$$

*) В частности, как выяснилось сравнительно недавно, магнитный пробой существенно изменяет зависимость сопротивления от магнитного поля (см. ниже).

Используя соотношения Онсагера (26.3), легко показать, что компоненты тензора s_{ik} — четные, а a_{ik} — нечетные функции магнитного поля:

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \quad (26.5)$$

Из компонент антисимметричного тензора a_{ik} можно построить дуальный вектор \mathbf{a} :

$$a_x = a_{yz}, \quad a_y = a_{zx}, \quad a_z = a_{xy}$$

или

$$a_i = \epsilon_{ikl} a_{kl},$$

где ϵ_{ikl} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Аналогичное разложение можно произвести и с тензором удельного сопротивления ρ_{ik} , обратным тензору σ_{ik} :

$$\rho_{ik} = \rho_{ik}^s + \rho_{ik}^a, \quad \rho_{ik}^s(\mathbf{H}) = \rho_{ik}^s(-\mathbf{H}), \quad \rho_{ik}^a(\mathbf{H}) = -\rho_{ik}^a(-\mathbf{H}).$$

Компоненты тензоров ρ_{ik}^s и ρ_{ik}^a можно выразить через компоненты тензоров s_{ik} и a_{ik} :

$$\rho_{ik}^s = \frac{|s| (s^{-1})_{ik} + a_i a_k}{|s| + (a \delta a)}, \quad b_i = \frac{(\delta a)_i}{|s| + (a \delta a)}. \quad (26.6)$$

Здесь $|s|$ — детерминант, составленный из компонент тензора s_{ik} , $a \delta a = a_i s_{ik} a_k$, \mathbf{b} — вектор, дуальный антисимметричному тензору ρ_{ik}^a : $b_i = \epsilon_{ikl} \rho_{kl}^a$.

Используя введенные величины, закон Ома в проводнике, помещенном в магнитное поле, можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E} = \hat{\rho}^s \mathbf{j} + [\mathbf{b} \mathbf{j}]. \quad (26.7)$$

Вектор $\hat{\rho}^s \mathbf{j}$ — вектор с компонентами $\rho_{ik}^s j_k$; второе слагаемое носит название поля Холла. Заметим, что оно, во-первых, перпендикулярно к току, а во-вторых, меняет знак с изменением знака магнитного поля. Джоулево тепло, выделяющееся в проводнике, определяется только тензором ρ_{ik}^s :

$$Q = \rho_{ik}^s j_i j_k, \quad (26.8)$$

поэтому тензор ρ_{ik}^s (т. е. симметричную часть тензора сопротивления) часто просто называют тензором сопротивления.

Из формулы (26.7) видно, что полное описание гальваномагнитных свойств возможно, если известны при всех значениях магнитного поля три главных значения тензора ρ_{ik}^s , направление его главных осей и три компоненты вектора \mathbf{b} . В общем случае главные направления тензора ρ_{ik}^s не совпадают с кристаллографическими направлениями, а зависят от величины и направления магнитного поля.

Определение плотности тока и напряженности электрического поля в образце конечных размеров — сложная математическая задача, решаемая только в ряде частных случаев*), поэтому, как правило, в эксперименте используют длинные цилиндрические проводники (провода), в которых направление токовых линий задается геометрией образца.

Компоненты тензора ρ_{ik}^s и вектора \mathbf{b} сложным образом зависят от магнитного поля. Если магнитное поле мало, то их можно разложить по степеням магнитного поля. Из условий (26.5) следует, что разложения имеют следующий вид:

$$\rho_{ik}^s(\mathbf{H}) = \rho_{ik}^s(0) + \lambda_{iklm} H_l H_m, \quad b_i = R_{ik} H_k. \quad (26.9)$$

Мы ограничились первыми, отличными от нуля, членами, содержащими магнитное поле; $\rho_{ik}(0)$ — тензор сопротивлений при $\mathbf{H} = 0$.

Число независимых компонент тензоров λ_{iklm} и R_{ik} определяется классом симметрии металла. Поэтому угловая зависимость (зависимость от направления магнитного поля и тока) сопротивления и поля Холла в случае малых полей целиком определяется классом кристалла. Например, в случае кубического кристалла, как и для изотропного тела, $R_{ik} = R\delta_{ik}$. Величина R носит название константы Холла. Эта величина для большинства металлов действительно сравнительно слабо зависит от температуры, чистоты образца и т. д. Однако более удобной характеристикой металлов (применимой отнюдь не для всех металлов), как мы увидим, является «константа» Холла в больших полях R_∞ (определение см. в § 27).

В случае изотропного металла (поликристалла) выделенным является только направление вдоль магнитного поля. Компоненту тензора вдоль поля обозначим ρ_{\parallel}^s , а в плоскости, перпендикулярной к полю, ρ_{\perp}^s . Из выражения (26.9) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ik}^s &= (\rho(0) + \lambda_{\parallel} H^2) \delta_{ik} + \lambda_{\perp} H_i H_k, \\ \rho_{\parallel}^s &= \rho(0) + \lambda_{\parallel} H^2 \quad (\lambda_{\parallel} = \lambda_1 + \lambda_2), \\ \rho_{\perp}^s &= \rho(0) + \lambda_{\perp} H^2 \quad (\lambda_{\perp} = \lambda_1). \end{aligned} \right\} \quad (26.10)$$

Как правило, постоянные λ_{\parallel} и λ_{\perp} положительны. Исключение представляют ферромагнетики, в которых обратный знак

*) Речь идет о достаточно больших образцах, чтобы можно было не учитывать поверхностные явления и пользоваться макроскопическим описанием (см., однако, § 29). В этом случае математическая формулировка задачи об определении плотности тока \mathbf{j} и напряженности поля \mathbf{E} такова: $\text{div } \mathbf{j} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, причем $\mathbf{j}\mathbf{v} = 0$ во всех точках границы, кроме тех, через которые осуществляется подвод тока; в точках подвода $\mathbf{j}\mathbf{v}$ непрерывно (\mathbf{v} — нормаль к поверхности тела).

гальваномагнитного эффекта (уменьшение сопротивления в слабом магнитном поле) находит специальное объяснение [24].

Формулы (26.9) и (26.10) носят феноменологический характер. Задачей микроскопической теории является вычисление тензоров λ_{iklm} и R_{ik} .

Однако, как правило, получающиеся формулы для λ_{iklm} и R_{ik} очень сложны и не могут быть использованы для наглядных выводов. Правда, удается показать [25], что соотношение Онсагера (26.3) есть следствие общих свойств оператора столкновений, сформулированных в § 23 (см. формулы (23.23) и (23.24)). На основании этих же условий показано, что главные значения тензора $\rho_{ik}(\mathbf{H})$ больше главных значений тензора $\rho_{ik}(0)$. Другими словами, сопротивление растет с ростом магнитного поля. (Надо, правда, иметь в виду, что этот вывод — следствие классической теории. Квантовые эффекты, обусловленные квантованием энергии в магнитном поле, могут привести к падению продольного сопротивления. Подобный эффект наблюдался на полупроводниках [26].)

Зависимость компонент тензора сопротивлений от величины и направления магнитного поля не может быть установлена при произвольной величине поля. Она зависит от деталей процесса рассеяния (не говоря уже о существенной зависимости от динамических свойств электронов проводимости). С другой стороны, асимптотическое поведение компонент тензора сопротивлений ρ_{ik} (при $r \ll l$) определяется главным образом структурой поверхности Ферми металла и мало зависит от характера рассеяния. Для строгого вывода зависимости компонент ρ_{ik} от магнитного поля при $r \ll l$ нужен анализ решения кинетического уравнения. Это будет сделано в следующем параграфе. Однако основные гальваномагнитные свойства металлов, их связь с формой поверхности Ферми (при $r \ll l$) можно установить из весьма наглядных соображений, используя «диффузионное» приближение, т. е. рассматривая движение электрона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитных полях как «скачки» с одной орбиты на другую.

Так как нас интересуют малые электрические поля (закон Ома), то следует рассматривать диффузионное блуждание в магнитном поле, а для определения электропроводности использовать соотношение Эйнштейна между коэффициентом диффузии D и электропроводностью σ , которое для вырожденного ферми-газа принимает вид *)

$$\sigma = \frac{e^2 D}{\partial \xi / \partial n} \approx \frac{D n e^2}{\epsilon_F}. \quad (26.11)$$

*) Мы опускаем множители порядка единицы — формулы носят прикладной характер.

Задача, таким образом, сводится к оценке коэффициента диффузии. Можно воспользоваться двумя формулами, справедливыми в противоположных предельных случаях:

$$D \approx l_p v_F, \quad \text{либо} \quad D \approx r_H^2 W \quad \left(W \approx \frac{1}{\tau_p} \right), \quad (26.12)$$

причем первая из формул (26.12) справедлива в тех случаях, когда движение в заданном направлении ограничено длиной свободного пробега: малые магнитные поля ($r_H \gg l$) либо инфинитное движение в магнитном поле (движение вдоль магнитного поля, а также движение в перпендикулярной магнитному полю плоскости вдоль открытой траектории*). Вторая формула относится к финитному движению в плоскости, перпендикулярной магнитному полю: движение по замкнутой траектории или при открытой траектории — в направлении, перпендикулярном направлению открытости $r_H \approx c\rho_F/eH$. Исходя из формул (26.11), (26.12), легко находим

$$\sigma \approx \frac{ne^2 l}{\rho_F}, \quad \text{либо} \quad \sigma \approx \frac{ne^2 l}{\rho_F} \left(\frac{r_H}{l} \right)^2. \quad (26.13)$$

Применимость формул (26.13) та же, что формул (26.12). Мы не указываем у σ компонент, но по смыслу вывода это диагональные (диссипативные) компоненты.

В случае металлов с замкнутой поверхностью Ферми $\sigma_{zz} \approx \sigma$, а $\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx \sigma \left(\frac{r_H}{l} \right)^2$. Для металлов с открытой поверхностью Ферми при определенной ориентации магнитного поля $\sigma_{xx} \approx \sigma$, а $\sigma_{yy} \sim \sigma \left(\frac{r_H}{l} \right)^2$ (σ_{zz} всегда $\approx \sigma$).

Из приведенного вывода отчетливо видно, что уменьшение проводимости в магнитном поле всегда связано с финитным характером движения электрона и с тем обстоятельством, что диффузионные «скачки» с одной траектории на соседнюю совершаются относительно редко: $W = 1/\tau_p \ll \omega_H$.

Холловскую компоненту σ_{xy} таким путем получить нельзя. Ее величина определяется не диффузионным, а чисто механическим движением — дрейфом электронов в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям.

Так как скорость дрейфа, согласно (4.26), равна $c/H^2[\mathbf{E}\mathbf{H}]$, то холловский ток определяется простой формулой

$$j_x = \frac{ec}{H^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}] (n_1 - n_2), \quad (26.14)$$

*) Напомним, если направление открытости совпадает с осью ρ_x , то в r -пространстве инфинитное движение происходит вдоль оси y .

где n_1 — число занятых электронных состояний с положительной эффективной массой, а n_2 — число свободных состояний с отрицательной эффективной массой. Отсюда холловская компонента электропроводности $\sigma_{xy} = \frac{(n_1 - n_2)ec}{H}$ (магнитное поле, как всегда, направлено вдоль оси z ; см. следующий параграф). Знание компонент σ_{ik} позволяет вычислить компоненты $\rho_{ik} = = \sigma_{ik}^{-1}$. Это будет сделано в § 27 после строгого вывода асимптотики $\sigma_{ik}(H)$.

Однако уже полученные формулы ясно демонстрируют принципиальную разницу между поведением массивного проводника без поля и в магнитном поле. Когда $H = 0$, все компоненты тензора проводимости с ростом длины свободного пробега стремятся к бесконечности (так как $\sigma_{ik} \sim l$). В магнитном поле ($H \neq 0$) при $l \rightarrow \infty$ (магнитное поле при этом автоматически сильное: $r_H \ll l \rightarrow \infty$), компоненты σ_{xx} , σ_{yy} , а при $n_1 = n_2$ и σ_{xy} , σ_{yx} стремятся к нулю, так как они пропорциональны $\sigma(r_H/l)^2 \sim 1/l$ согласно приведенным формулам. Особенно ясно отличие $H \neq 0$ от $H = 0$ при $n_1 = n_2$: при $H = 0$ образец с бесконечной длиной свободного пробега — идеальный проводник (сопротивление $\rho = 0$), а при $H \neq 0$ в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, — идеальный диэлектрик (проводимость $\sigma = 0$).

Кроме того, отчетливо видна связь между энергетической структурой металла и его гальваномагнитными свойствами.

§ 27. Гальваномагнитные явления. Большие поля.

Замкнутые траектории

Построение микроскопической теории гальваномагнитных явлений, т. е. вычисление тензора удельного сопротивления как функции магнитного поля, основывается на решении линейризованного кинетического уравнения Больцмана, которое удобно переписать в несколько иной форме, чем в § 23.

Характер движения электрона в постоянном и однородном магнитном поле (§ 4) показывает, что для описания положения электрона в импульсном пространстве удобно (при наличии магнитного поля) использовать не декартовы координаты (p_x , p_y , p_z), а координаты, связанные с траекторией электрона в импульсном пространстве. Положение электрона можно задать, задав его траекторию в импульсном пространстве, т. е. энергию ε и проекцию импульса на магнитное поле p_z (однородное и постоянное магнитное поле H направлено, как всегда, вдоль оси z), а также положение на траектории. Для задания положения электрона на траектории можно использовать либо длину дуги s , отсчитанную от какой-либо точки, либо (и это наи-

более удобно) время t движения электрона от фиксированной (начальной) точки в данную. Итак, положение электрона мы будем описывать тремя величинами (координатами): ε , p_z и t . Формулами преобразования координат (от p_x, p_y, p_z к ε, p_z и t) служат закон дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(p_x, p_y, p_z)$ и уравнения движения электрона в магнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}, \quad (27.1)$$

согласно которым

$$dt = \frac{c}{eH} \frac{ds}{v_{\perp}},$$

где v_{\perp} — проекция вектора \mathbf{v} на плоскость, перпендикулярную к магнитному полю.

В выбранных переменных кинетическое уравнение Больцмана на (23.6) имеет вид*)

$$\frac{\partial f}{\partial t} \dot{t} + \frac{\partial f}{\partial p_z} \dot{p}_z + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}, \quad (27.2)$$

причем обобщенные силы (\dot{t} , \dot{p}_z и $\dot{\varepsilon}$) описывают изменение состояния электрона, обусловленное внешними полями (электрическим \mathbf{E} и магнитным \mathbf{H}). Эти обобщенные силы следует вычислять с помощью уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (27.3)$$

Используя уравнения (27.1) и (27.3), легко находим

$$\dot{\varepsilon} = e\mathbf{v}\mathbf{E}, \quad \dot{p}_z = eE_z, \quad \dot{t} = 1 + \frac{dt}{dp} e\mathbf{E}. \quad (27.4)$$

Вектор dt/dp определяется уравнениями (27.1).

С помощью соотношений (27.4) уравнение (27.2) легко линеаризуется по электрическому полю и приобретает простой вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = -e\mathbf{v}\mathbf{E} \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon}. \quad (27.5)$$

Как и в § 23, введем вместо функции f_1 векторную функцию ψ соотношением

$$f_1 = -\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} e\psi\mathbf{E}. \quad (27.6)$$

*) Мы ограничиваемся в этом и следующем параграфах пространственно однородным случаем, т. е. пренебрегаем границами образца. Это означает, что полученные результаты можно применять для достаточно массивных образцов. Соответствующие оценки содержатся в § 23 (см. [27], а также § 29). Кроме того, мы рассматриваем только статический случай.

Тогда ψ удовлетворяет следующему уравнению (см. (23.16)):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{W}_p \{ \psi_i \} = v_i. \quad (27.7)$$

Оператор \widehat{W}_p определен в § 23 (см. формулу (23.13)).

Уравнение (27.7) не только формально, но и по существу совпадает с уравнением (23.16), так как без учета пространственной и временной неоднородности величина df/dt (см. формулу (23.12)) описывает изменение распределения электронов только за счет движения их в постоянном и однородном магнитном поле. Как мы видим уравнение (27.7) — дифференциальное уравнение по t . Обсудим условия, которые играют роль граничных. Если при данных ε и p_z траектория электрона в магнитном поле замкнута, то граничным условием служит условие периодичности

$$\psi_i(t + T) = \psi_i(t), \quad (27.8)$$

где $T = T(\varepsilon, p_z)$ — период ларморовской прецессии. Согласно формуле (4.11)

$$T(\varepsilon, p_z) = -\frac{c}{eH} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = -\frac{2\pi m^* c}{eH} = \frac{2\pi}{\omega_H},$$

где S — площадь сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$ плоскостью $p_z = \text{const}$.

Если же траектория открытая, то граничным условием служит условие конечности ψ при $t = \pm \infty$.

Наличие множителя $-\partial n_F / \partial \varepsilon$ в выражении (27.6) показывает, что главную роль играют электроны с энергией порядка энергии Ферми. Благодаря этому можно отдельно рассматривать случай замкнутых поверхностей, а отдельно — открытых (см. § 2). Последнему случаю посвящен следующий параграф.

Итак, мы будем в этом параграфе рассматривать только случай замкнутых поверхностей. Точнее, мы ограничимся случаем замкнутых траекторий. Во-первых, возможны случаи, когда открытые поверхности вовсе не имеют открытых сечений, а во-вторых, открытые поверхности при определенных направлениях магнитного поля могут иметь только замкнутые сечения (§ 2).

Усредняя уравнение (27.7) по t с учетом условия (27.8), получим

$$\overline{\widehat{W}_p \{ \psi_i \}} = \bar{v}_i, \quad (27.9)$$

где черта означает усреднение по периоду

$$\bar{u} = \frac{1}{T(\varepsilon, p_z)} \int_0^T u dt. \quad (27.10)$$

Равенство (27.9) мы будем рассматривать как граничное условие, наложенное на функцию ψ_i .

Большая величина магнитного поля проявляется в том, что в уравнении (27.7) член $\partial\psi_i/\partial t \approx \psi_i/T$ значительно больше «столкновительного» члена $\widehat{W}_p\{\psi_i\} \approx \psi_i/\tau_p$. Это справедливо при $T \ll \tau_p$ или $r \ll l$ (см. предыдущий параграф) и позволяет воспользоваться методом последовательных приближений, который соответствует разложению по степеням обратного магнитного поля [28]. Можно показать, что решение уравнения (27.7), удовлетворяющее условию (37.9), можно представить в следующей форме:

$$\psi_i = \widehat{W}_p^{-1} \bar{v}_i + \frac{\bar{q}}{1-\bar{q}} (\widehat{W}_p^{-1} \bar{v}_i - \widehat{W}_p^{-1} v_i), \quad (27.11)$$

причем оператор \bar{q} задан следующим равенством *):

$$\bar{q}\varphi = \widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p \int_{-\infty}^t \widehat{W}_p \varphi dt - \int_{-\infty}^t \widehat{W}_p \varphi dt. \quad (27.12)$$

Формулы (27.11) и (27.12) представляют собой алгоритм для вычисления функций ψ_i в виде ряда по степеням обратного магнитного поля. Для осуществления этого вычисления необходимо знать явный вид операторов \widehat{W}_p и \widehat{W}_p^{-1} . Однако для ряда существенных выводов, в частности для выяснения зависимости различных компонент тензора сопротивления от сильного магнитного поля, достаточно только знать топологию поверхности Ферми и близких к ней изоэнергетических поверхностей.

В случае замкнутых траекторий из уравнения движения (27.1) следует, что

$$\bar{v}_\alpha = 0, \quad \bar{v}_z \neq 0 \quad (\alpha = x, y). \quad (27.13)$$

Поэтому разложение ψ_α начинается с членов, пропорциональных $1/H$, а ψ_z — со слагаемого, не зависящего от магнитного поля. Используя формулы (27.11) и (27.12) и уравнение движения (27.1), можно легко получить:

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= -\frac{c}{eH} (\rho_y - \widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p \rho_y) + \dots, \\ \psi_y &= \frac{c}{eH} (\rho_x - \widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p \rho_x) + \dots, \\ \psi_z &= \widehat{W}_p^{-1} v_z + \dots \end{aligned} \right\} \quad (27.14)$$

*) Для того чтобы выражение (27.12) имело смысл, необходимо, чтобы функция φ удовлетворяла условию $\widehat{W}_p \varphi = 0$.

Для вычисления тензора электропроводности σ_{ik} надо подставить значение ψ_i в формулу (23.21) и перейти от интегрирования по p_x, p_y, p_z к интегрированию по ε, p_z и t . Якобиан перехода проще всего вычислить, воспользовавшись уравнением движения (27.1). Действительно, если записать (27.1) в компонентах в виде отношения детерминантов

$$\frac{\partial(p_x, \varepsilon, p_z)}{\partial(t, \varepsilon, p_z)} = \frac{eH}{c} \frac{\partial(\varepsilon, p_x, p_z)}{\partial(p_y, p_x, p_z)}, \quad \frac{\partial(p_y, \varepsilon, p_z)}{\partial(t, \varepsilon, p_z)} = -\frac{eH}{c} \frac{\partial(\varepsilon, p_y, p_z)}{\partial(p_x, p_y, p_z)}$$

и сократить числители, получим

$$\left| \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(\varepsilon, p_z, t)} \right| = \left| \frac{eH}{c} \right|. \quad (27.15)$$

Таким образом,

$$\sigma_{ik} = -\frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \int \int \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} v_i \psi_k d\varepsilon dp_z dt. \quad (27.16)$$

Используя эту форму записи тензора электропроводности, можно показать, что соотношения Онсагера в магнитном поле (26.3) не требуют от интеграла столкновений других предположений, кроме тех, которые сформулированы в § 23 (см. работу [25]).

Подставим теперь в (27.16) разложение (27.14). Начнем с вычисления компонент σ_{xy} и σ_{yx} , причем вместо v_x и v_y подставим их значения из уравнений движения (27.1):

$$\sigma_{xy} = -\frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \int dp_z \oint \frac{\partial p_y}{\partial t} [p_x - \widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p p_x] \frac{c}{eH} dt + \dots$$

Из этого выражения*) видно, что слагаемое, содержащее $\widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p p_x$, вовсе выпадает за счет интегрирования по t , а

$$\oint \frac{\partial p_y}{\partial t} p_x dt = \int_{(\varepsilon, p_z)} p_x dp_y = \pm S(\varepsilon, p_z). \quad (27.17)$$

Здесь $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$ плоскостью $p_z = \text{const}$. Знак определяется направлением обхода, т. е. знаком эффективной массы m^* (§ 4). Таким образом, асимптотически в больших полях

$$\sigma_{xy} = -\frac{ec}{H} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \int dp_z \{S_1(\varepsilon, p_z) - S_2(\varepsilon, p_z)\}, \quad (27.18)$$

причем первый интеграл берется по тем частям энергетических зон, где $m^* > 0$, а второй — по тем, где $m^* < 0$. Кроме того, предполагается суммирование по всем частично заполненным зонам.

*) Мы не выписываем очевидных пределов интегрирования. Напомним, что, по предположению, мы имеем дело с замкнутыми траекториями.

Если считать, что $-\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} = \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$, то

$$\sigma_{xy} = \frac{ec}{H} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \{S_1(\varepsilon, p_z) - S_2(\varepsilon, p_z)\} dp_z, \quad (27.19)$$

и, наконец,

$$\sigma_{xy} = \frac{2ec}{H(2\pi\hbar)^3} \{V_1(\varepsilon_F) - V_2(\varepsilon_F)\}. \quad (27.20)$$

Здесь $V_1(\varepsilon_F)$ — объем, ограниченный той частью многолистной поверхности Ферми, внутри которой энергия меньше энергии Ферми ($m^* > 0$), а $V_2(\varepsilon_F)$ — объем, ограниченный той частью поверхности Ферми, внутри которой энергия больше энергии Ферми ($m^* < 0$).

Если замкнутые траектории расположены на открытой поверхности Ферми, то $V_1(V_2)$ — объем, ограниченный поверхностью Ферми и границами ячейки обратной решетки.

Замечая, что при нулевой температуре электронами заняты все состояния с энергией меньше ε_F , получаем

$$\sigma_{xy} = \frac{ec(n_1 - n_2)}{H}, \quad (27.21)$$

где n_1 — число занятых электронных состояний с положительной эффективной массой, а n_2 — число свободных электронных состояний с отрицательной эффективной массой. Величину n_1 естественно назвать числом «электронов», а величину n_2 — числом «дырок».

Итак, если поверхность Ферми замкнута (или, в случае открытой поверхности Ферми, если при всех p_z имеются только замкнутые сечения), то асимптотика σ_{xy} определена формулой (27.21). Подчеркнем, что в этом случае σ_{xy} не зависит ни от направления магнитного поля, ни от характера столкновений электронов проводимости, а определяется только числами электронов и дырок. Компонента $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$. Это утверждение доказывается непосредственным вычислением, а также следует из соотношений Онсагера (как мы увидим, симметричная часть тензора асимптотически значительно меньше: она пропорциональна $1/H^2$).

Следует особо рассмотреть случай равенства чисел «электронов» и «дырок» ($n_1 = n_2$). В последнем случае разложение компонент σ_{xy} , σ_{yx} начинается с членов, пропорциональных $1/H^2$. При этом разложение антисимметричной части начинается с членов $\sim 1/H^3$. Выбором осей x и y можно добиться того, что симметричная часть тензора $\sigma_{ih}(s_{ih})$ будет диагональна; в этой системе координат разложение σ_{xy} и σ_{yx} начинается со слагаемых, пропорциональных $1/H^3$.

Заметим, что равенство чисел электронов и дырок не является чем-то исключительным: все металлы с четным числом электронов на ячейку имеют электроны проводимости только вследствие того, что энергетические зоны в этих металлах пересекаются. Число освобождающихся состояний (дырок) в нижней зоне равно числу занятых состояний (электронов) в верхней (рис. 57). Электрон и дырка — вполне однозначные понятия, если поверхность Ферми замкнута. Для открытой поверхности

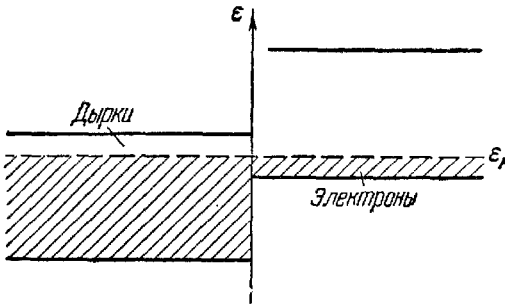


Рис. 57. Число электронов равно числу дырок для металлов с четным числом электронов на ячейку.

следует говорить об электронных либо дырочных орбитах, в зависимости от направления движения на них. Если пересечения энергетических зон невелики (см. рис. 57), как правило, изоэнергетические поверхности замкнуты (см. § 2).

Продолжим вычисление компонент тензора σ_{ik}. Поступая аналогично предыдущему, получим,

что разложение σ_{xx}, σ_{yy} начинается с членов ~ 1/H², а σ_{xz}, σ_{yz} — с членов ~ 1/H; σ_{zz} стремится к константе при стремлении поля к бесконечности. Таким образом, тензор электропроводностей в больших полях имеет вид (n₁ ≠ n₂)

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{a_{xx}}{H^2} & \frac{ec(n_1 - n_2)}{H} & \frac{a_{xz}}{H} \\ -\frac{ec(n_1 - n_2)}{H} & \frac{a_{yy}}{H^2} & \frac{a_{yz}}{H} \\ \frac{a_{zx}}{H} & \frac{a_{zy}}{H} & a_{zz} \end{pmatrix}, \quad (27.22)$$

причем компоненты матрицы a_{ik} стремятся к константам. В специально симметричных случаях отдельные компоненты матрицы могут обращаться в нуль. Например, в изотропном случае в τ-приближении при произвольной величине H тензор σ_{ik} имеет вид

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1 + \omega_H^2 \tau^2} & \pm \sigma \frac{\omega_H \tau}{1 + \omega_H^2 \tau^2} & 0 \\ \mp \sigma \frac{\omega_H \tau}{1 + \omega_H^2 \tau^2} & \frac{\sigma}{1 + \omega_H^2 \tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (27.23)$$

Здесь $\omega_H = eH/m^*c$, — как всегда, частота ларморовской прецессии, знак «+» соответствует электронной зоне, «—» — дырочной, $\sigma = ne^2\tau/|m^*|$. Если в электропроводности принимают участие электроны нескольких зон, то электропроводность — сумма аналогичных тензоров.

Из выражения (27.22) видно, что в тех случаях, когда поверхность Ферми замкнута, все компоненты тензора σ_{ik} , кроме σ_{zz} , обращаются в нуль при магнитном поле, стремящемся к бесконечности; при этом характер стремления к нулю различных компонент различен.

Учет размытия фермиевской ступеньки может привести к изменению полученных здесь результатов, однако возникающие при этом поправки чаще всего пренебрежимо малы.

В некоторых случаях удобно иметь более общее выражение для тензора электропроводности, справедливое во всем диапазоне изменения магнитного поля. Если ограничиться τ -приближением ($\hat{W}_p\{\psi\} = 1/\tau\psi$), из уравнения (27.7) с учетом условия (27.8) следует, что

$$\psi_i = \int_0^{\infty} v_i(t-t') e^{-t'/\tau} dt'. \quad (27.24)$$

Заметим, что это решение справедливо и в случае открытых траекторий. Оно, например, использовано для вычисления зависимости поперечного сопротивления благородных металлов от магнитного поля [29].

Существует [28] метод решения уравнения (27.7), справедливый при произвольном интеграле столкновений и при любой величине магнитного поля, однако ограниченный случаем замкнутых траекторий. Решения получаются в виде рядов.

Подставляя выражение (27.24) в формулу (27.16) для σ_{ik} , получаем *)

$$\sigma_{ik} = -e^2 \int \varphi_{ik}(\epsilon, p_z) \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} d\Gamma, \quad (27.25)$$

где

$$\varphi_{ik} = \int_0^{\infty} \overline{v_i(t) v_k(t-t')} e^{-t'/\tau} dt'. \quad (27.26)$$

Черта означает усреднение по периоду в случае замкнутых траекторий (см. (27.10)). В случае открытых траекторий среднее следует понимать в смысле предела при $T \rightarrow \infty$.

*) Близкая по форме запись решения кинетического уравнения используется в работе [30].

При экспериментальном исследовании гальваномангнитных явлений обычно пропускают через кристалл заданный по величине и направлению ток, измеряют же компоненты напряженности электрического поля по трем некопланарным направлениям (по возможности, по трем ортогональным направлениям; см., например, [31]). Это означает, что объектом изучения является тензор удельного сопротивления в магнитном поле $\rho_{ik}(\mathbf{H})$, обратный тензору электропроводности ($\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$).

Используя полученные ранее выражения для асимптотики тензора электропроводности $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$, легко найти асимптотику тензора сопротивлений в больших полях.

Если число электронов не равно числу дырок ($n_1 \neq n_2$), то согласно (27.22):

$$(\rho_{ik}(\mathbf{H})) = \begin{pmatrix} b_{xx} & \frac{H}{(n_1 - n_2) ec} & b_{xz} \\ -\frac{H}{(n_1 - n_2) ec} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix}, \quad (27.27)$$

причем компоненты матрицы b_{ik} стремятся к константам при $H \rightarrow \infty$. Их можно определить через асимптотические значения компонент матрицы a_{ik} . Если плотность тока \mathbf{j} перпендикулярна к магнитному полю, то вдоль направления тока можно направить ось x . Тогда сопротивление ρ (отношение напряженности электрического поля вдоль тока к плотности тока) есть ρ_{xx} (в общем случае $\rho = \rho_{ik} j_i j_k / j^2$), а величина ρ_{yx} / H совпадает с константой Холла $R = E_y / H j$. Таким образом, в этом случае (замкнутые траектории, $n_1 \neq n_2$) сопротивление всегда стремится к насыщению вне зависимости от направления магнитного поля и тока. Асимптотическое значение сопротивления, естественно, зависит от направления магнитного поля и тока в меру анизотропии компонент матрицы b_{ik} , что связано с анизотропией закона дисперсии и рассеяния. Как мы уже говорили, можно показать, что $\rho(H \rightarrow \infty)$ всегда больше $\rho(H = 0)$, причем этот вывод основан только на том, что оператор столкновений не зависит от магнитного поля [25]. Последнее обстоятельство не имеет места в квантовом случае [26].

Асимптотическое значение константы Холла R_∞ является важной характеристикой электронного энергетического спектра металлов. Если поверхность Ферми замкнута (или, в случае открытой поверхности Ферми, если при всех p_z имеются только замкнутые сечения),

$$R_\infty = \frac{1}{(n_1 - n_2) ec} \quad (27.28)$$

и не зависит от направления магнитного поля,

Исследования последних лет показали, что ряд металлов обладает замкнутой поверхностью Ферми с неравными числами электронов и дырок: In, Al, K, Na (см. [23, 32]).

Если поверхность Ферми замкнута, а число электронов равно числу дырок ($n_1 = n_2$), то благодаря тому, что $\sigma_{xy} \sim 1/H^2$, все поперечные (по отношению к магнитному полю) компоненты тензора ρ_{ik} стремятся к бесконечности, причем

$$\rho_{\alpha\beta} \sim H^2, \quad \rho_{\alpha z} \sim H \quad (\alpha, \beta = x, y), \quad (27.29)$$

и только продольная компонента ρ_{zz} стремится к константе.

Отсюда видно, что в этом случае сопротивление при любом направлении магнитного поля стремится к бесконечности, если только ток имеет поперечную составляющую по отношению к магнитному полю.

При $n_1 = n_2$ поле Холла не является основным в асимптотике электрического поля, перпендикулярного к току. В произвольном направлении имеется квадратичное по магнитному полю слагаемое, которое характеризует анизотропию сопротивления (отличие главных значений ρ_{xx} и ρ_{yy}).

Константа Холла в больших полях R_∞ (предельное значение величины $[\rho_{xy}(H) - \rho_{xy}(-H)]/2H$ при $H \rightarrow \infty$) зависит от направления магнитного поля и определяется не только энергетическим спектром, но и характером рассеяния электронов проводимости. Отметим, что при $n_1 \neq n_2$ вектор Холла (обозначенный буквой \mathbf{b} в § 26) с большой точностью параллелен магнитному полю, а при $n_1 = n_2$ все компоненты вектора Холла одного порядка.

Возрастание поперечного сопротивления при любом направлении магнитного поля четко установлено у ряда металлов (Bi, As, Sb). Этот результат прекрасно согласуется с нашим представлением о характере энергетического спектра этих металлов [33]. Однако, как правило, сопротивление возрастает несколько медленнее, чем H^2 .

Используя модельные предположения об электронах проводимости, удастся получить компактные формулы, описывающие зависимость сопротивления в широком интервале полей. Так, если считать, что имеются две зоны с квадратичными анизотропными законами дисперсии, причем тензоры подвижностей пропорциональны ($u_{ik}^{(1)} = k u_{ik}^{(2)}$), а число электронов равно числу дырок ($n_1 = n_2$), элементарный расчет приводит к следующим соотношениям:

$$\rho = \frac{\sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha}{\sigma_1 \sigma_2} \left(1 + \frac{H^2}{H_0^2} \right), \quad R = - \frac{1}{nec} \frac{1-k}{1+k}. \quad (27.30)$$

Здесь $H_0 = (c/e)[u_1^{(1)}u_2^{(1)}]^{-1/2}$, σ_1, σ_2 — главные значения тензора проводимости $\sigma_{ik} = ne^2u_{ik}(1+k)$; магнитное поле направлено вдоль одной из главных осей (третьей); ток перпендикулярен к магнитному полю; α — угол между первой осью и током. Заметим, что в этой простой модели получается единая квадратичная зависимость для сопротивления и отсутствие зависимости от поля у константы Холла. Это специфика двузонной модели с квадратичным законом дисперсии. Введение третьей зоны существенно меняет положение вещей. Можно показать [34] (при тех же предположениях о законе дисперсии), что коэффициенты при H^2 в малых ($r \gg l$) и больших ($r \ll l$) полях различны, причем в согласии с экспериментом [35] коэффициент при H^2 в малых полях всегда больше коэффициента в больших полях. Различное значение имеют также константы Холла в малых и больших полях.

Гальваномагнитные характеристики (вернее, их асимптотические значения в больших полях) весьма чувствительны к характеру энергетического спектра и, как мы увидим ниже, являются прекрасным инструментом для определения топологии поверхности Ферми.

Для металлов с замкнутыми поверхностями Ферми гальваномагнитные характеристики позволяют, во-первых, установить факт «замкнутости», а во-вторых, определить разность чисел электронов и дырок $n_1 - n_2$.

Наиболее важные сведения о характере электронного спектра можно получить, исследуя металлы с открытыми поверхностями Ферми (см. следующий параграф).

§ 28. Гальваномагнитные явления. Большие поля. Открытые траектории

В предыдущем параграфе были подробно исследованы гальваномагнитные явления для тех металлов, у которых поверхность Ферми замкнутая. В этом параграфе мы рассмотрим случай открытых поверхностей Ферми. Наиболее существенным отличием гальваномагнитных свойств металлов с открытыми поверхностями Ферми является их резкая анизотропия [28, 38]. При одних направлениях магнитного поля поперечное сопротивление в больших полях ($l_p \gg r_H$) стремится к насыщению, при других — квадратично возрастает. Это свойство, как известно, используется для исследования топологии поверхности Ферми.

Резкая анизотропия сопротивления, как было показано в § 26, — следствие различия в характере движения электронов по различным направлениям в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, в случае открытой поверхности Ферми. Эту ани-

зотропию можно продемонстрировать на примере простейшей такой поверхности. Рассмотрим металл, у которого поверхность Ферми (и примыкающие к ней изоэнергетические поверхности) — гофрированный цилиндр (рис. 58).

Если магнитное поле (как всегда, направленное вдоль оси z) не перпендикулярно к оси цилиндра, все сечения замкнуты. Этот случай мы рассматривали в предыдущем параграфе. Правда, особое рассмотрение требуется тогда, когда магнитное поле почти перпендикулярно к направлению открытости, а траектории электронов хотя и замкнуты, но очень вытянуты, так что их длина значительно больше размеров ячейки обратной решетки. Эта ситуация будет рассмотрена ниже.

При решении кинетического уравнения в случае открытых поверхностей надо учесть ряд обстоятельств. Во-первых, характерным временем движения (для определения порядка величины $|\partial\psi_i/\partial t|$ в уравнении (27.7)) следует считать то время, за которое импульс электрона изменится на величину порядка $|2\pi\hbar\mathbf{b}|$, где \mathbf{b} — вектор обратной решетки в направлении открытости (в рассматриваемом случае вдоль оси x); магнитное поле будет считаться большим, если время релаксации значительно больше этого времени (заметим, что из уравнений движения (27.1) ясно, что это время обратно пропорционально магнитному полю и по порядку величины равно периоду обращения электрона T). Во-вторых, следует уточнить граничные условия. Как сказано в § 27, в случае открытых траекторий граничным условием служит условием конечности функции ψ_i при больших значениях «времени» t (при $t \rightarrow \pm\infty$). Если обобщить определение среднего значения функции, положив

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad (28.1)$$

то граничное условие для функции ψ_i формально запишется так же, как в случае замкнутых траекторий:

$$\overline{\widehat{W}_p \{\psi_i\}} = \bar{v}_i. \quad (28.2)$$

В-третьих, среднее значение поперечных (по отношению к магнитному полю) компонент скорости не равно нулю. При нашем

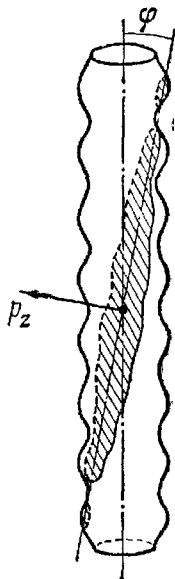


Рис. 58. Изоэнергетическая поверхность типа «гофрированный цилиндр». Сечение плоскостью $p_z = \text{const}$, перпендикулярной магнитному полю ($\varphi = \theta - \pi/2$).

выборе системы координат

$$\bar{v}_y = -\frac{c}{eH} \frac{\overline{\partial p_x}}{\partial t} \neq 0, \quad (28.3)$$

$$\bar{v}_x = \frac{c}{eH} \frac{\overline{\partial p_y}}{\partial t} = 0. \quad (28.4)$$

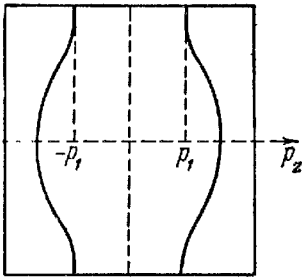
Уточним последнее утверждение: есть такие значения p_z ($|p_z| < p_1$, рис. 59), для которых сечения являются открытыми и $\bar{v}_y \neq 0$.

Формальное решение (27.11) уравнения (27.7) справедливо и в рассматриваемом случае гофрированного цилиндра, а разложение ψ_i по степеням обратного поля имеет следующий вид (ср. формулу (27.14)):

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= -\frac{c}{eH} (p_y - \overline{\widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p p_y}) + \dots, \\ \psi_z &= \overline{\widehat{W}_p^{-1} \bar{v}_z} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

$$\psi_y = \begin{cases} \overline{\widehat{W}_p^{-1} \bar{v}_y} + \dots & (|p_z| < p_1), \\ \frac{c}{eH} (p_x - \overline{\widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p p_x}) + \dots & (|p_z| > p_1). \end{cases}$$

Используя эти асимптотические значения ψ_i , можно вычислить асимптотические значения компонент тензора электропроводности:



$$(\sigma'_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{a'_{xx}}{H^2} & \frac{a'_{xy}}{H} & \frac{a'_{xz}}{H} \\ \frac{a'_{yx}}{H} & a'_{yy} & a'_{yz} \\ \frac{a'_{zx}}{H} & a'_{zy} & a'_{zz} \end{pmatrix}, \quad (28.6)$$

Рис. 59. Открытые траектории при $|p_z| < p_1$, замкнутые — при $|p_z| > p_1$.

причем разложение элементов матрицы a'_{ik} по степеням обратного поля начинается с нулевого члена. Обращая этот тензор, легко найдем асимптотические значения тензора сопротивления:

$$(\rho'_{ik}) = \begin{pmatrix} H^2 b'_{xx} & H b'_{xy} & H b'_{xz} \\ H b'_{yx} & b'_{yy} & b'_{yz} \\ H b'_{zx} & b'_{zy} & b'_{zz} \end{pmatrix}. \quad (28.7)$$

Элементы матрицы b'_{ik} определяются через элементы матрицы a'_{ik} .

Из-за того, что $\bar{v}_y \neq 0$, b'_{xy} и a'_{xy} , вообще говоря, зависят не только от энергетического спектра, но и от вида интеграла столкновений (см. вывод формулы (27.21)). Проанализируем полученные результаты.

Одна из компонент поперечного сопротивления (ρ_{xx}) квадратично возрастает с ростом магнитного поля, а другая (ρ_{yy}) стремится к насыщению. Заметим, что возрастает с магнитным полем сопротивление в направлении открытости*) (вдоль оси x). Асимптотическое различие между ρ_{xx} и ρ_{yy} показывает, что имеется резкая зависимость сопротивления от направления тока j (даже при $j \perp H$). При произвольном направлении тока сопротивление $\rho = \rho_{ik} j_i j_k / j^2$ квадратично возрастает, но при токе, направленном вдоль оси y , стремится к насыщению.

Если у металла, поверхность Ферми которого — гофрированный цилиндр, исследовать зависимость сопротивления от направления большого магнитного поля ($r_H \ll l_p$) при произвольном направлении тока, то должна наблюдаться следующая картина: при произвольном направлении магнитного поля сопротивление стремится к насыщению, при избранном (магнитное поле перпендикулярно к направлению открытости) — квадратично возрастает. Анализируя уравнение для функции ψ_i , можно показать [38], что переход от одной зависимости к другой происходит в узком интервале углов $\Delta\theta$ — порядка $H_0/H \ll 1$ (H_0 — магнитное поле, в котором отношение $2\pi\hbar bc/eH$ равно длине пробега). Это видно из того, что для вытянутых траекторий период обращения электрона обратно пропорционален углу θ между магнитным полем и плоскостью, перпендикулярной к направлению открытости.

Заметим, что кроме описанной здесь резкой угловой зависимости у сопротивления и других гальваномагнитных характеристик имеется плавная зависимость от направления магнитного поля. Ее можно выяснить только путем численного решения кинетического уравнения, и она не будет здесь обсуждаться.

В работе [38] получена аналитическая зависимость сопротивления ρ от величины и направления магнитного поля, которая имеет следующий вид:

$$\rho = \frac{\beta H^2 \cos^2 \alpha}{\theta^2 H^2 + \lambda^2 H_0^2} C(\eta) + A. \quad (28.8)$$

Здесь β , λ и A — плавные функции углов, $\lambda \sim 1$, $\eta = H/\theta H_0$, а $C(\eta)$ — плавная функция своего аргумента, причем $C(0) = C(\infty) = 1$, α — угол между направлением тока и осью x . На рис. 60 схематически изображена зависимость сопротивления от θ , соответствующая формуле (28.8).

*) В импульсном пространстве направление открытости (в данном случае) совпадает с направлением оси p_y .

В эксперименте практически всегда направление тока задано геометрией образца (его осью), а магнитное поле вращается в плоскости, перпендикулярной к току. Зная направление тока относительно главных осей кристалла, а также то направление магнитного поля, при котором сопротивление квадратично возрастает, можно определить плоскость, в которой лежит направление

открытости. Поэтому для однозначного определения направления открытости необходимы эксперименты по крайней мере на двух образцах с различными направлениями тока. Практически задача об определении направлений открытости — более сложная, чем это может показаться из нашего описания, так как требуется не только определить направления открытости, но и выяснить тип поверхности Ферми.

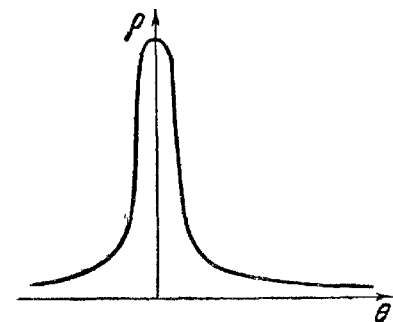


Рис. 60. Зависимость сопротивления от направления магнитного поля для металлов с поверхностью Ферми типа «гофрированный цилиндр».

Несколько слов о константе Холла. При произвольном направлении магнитного поля (не близком к плоскости (yz) , перпендикулярной к направлению открытости) константа Холла изотропна и определяется объемом V' , заключенным внутри той части поверхности Ферми, которая расположена в одной ячейке обратной решетки (мы для определенности предполагаем, что с ростом энергии гофрированный цилиндр увеличивается):

$$R_{\infty} = \frac{1}{n'ec}, \quad n' = \frac{2V'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

При направлении магнитного поля, близком к плоскости (yz) , величина константы Холла может резко измениться. Она зависит от интеграла столкновений (это связано с тем, что $\frac{\partial p_x}{\partial t} \neq 0$,

в результате чего $\widehat{W}_p^{-1} \widehat{W}_p \rho_y$ не выпадает из выражения для σ_{xy}). На рис. 61 изображена угловая зависимость сопротивления и константы Холла для металлов, у которых поверхность Ферми — гофрированный цилиндр.

Описанная здесь зависимость сопротивления от направления магнитного поля имеет место также в том случае, когда поверхность Ферми распадается на гофрированный цилиндр и произвольное число замкнутых областей, если только не происходит компенсации объемов, т. е. если разложение σ_{xy} при произвольном направлении магнитного поля не начинается с члена порядка $1/H^2$. В последнем случае сопротивление возрастает квад-

ратично при произвольном направлении магнитного поля (как у металла с числом электронов, равным числу дырок).

При рассмотрении гальваномагнитных свойств металлов, у которых поверхность Ферми — гофрированный цилиндр, мы убедились, что резкая зависимость от направления магнитного поля наблюдается в тех случаях, когда изменяется топология траектории электрона в магнитном поле. В рассмотренном случае особыми направлениями являются те, при которых магнитное поле перпендикулярно к оси цилиндра. На стереографической проекции *) это соответствует окружности радиуса единицы

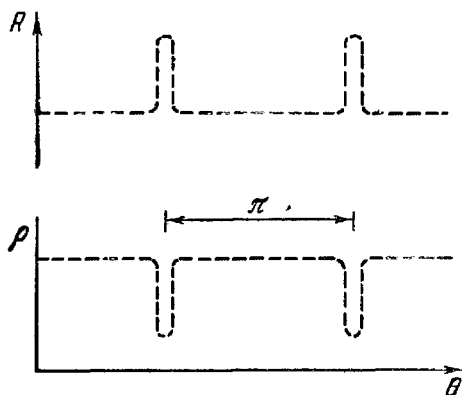


Рис. 61. Схематическая зависимость сопротивления и константы Холла от направления магнитного поля для металлов с поверхностью Ферми типа «гофрированный цилиндр».

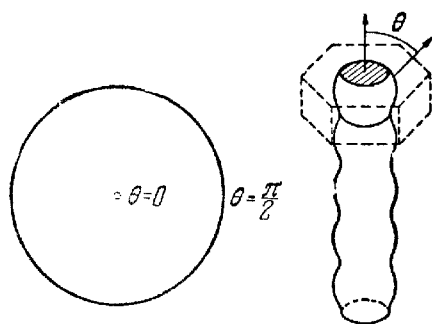


Рис. 62. Стереографическая проекция особых направлений для поверхности Ферми типа «гофрированный цилиндр».

(см. рис. 62, на котором полярная ось совпадает с направлением открытости).

Рассмотрим теперь открытую поверхность типа «пространственная сетка» (рис. 2). В этом случае открытые траектории встречаются весьма часто, хотя их довольно трудно себе представить (рис. 63). На рис. 64 изображены стереографические проекции направлений магнитного поля (заштрихованные области и сплошные линии), при которых возникают открытые траектории ($\epsilon = \epsilon_F, \rho_z = \text{const}$). Разные рисунки соответствуют пространственным сеткам, ориентированным различным образом **).

Рассмотрение стереографических проекций показывает, что имеются различные области направлений магнитного поля, в которых: а) отсутствуют открытые траектории (незаштрихованные);

*) См. примечание на стр. 33.

**) Здесь содержится только сводка основных результатов. Вывод приведенных в этом параграфе формул можно найти в работах [38, 40].

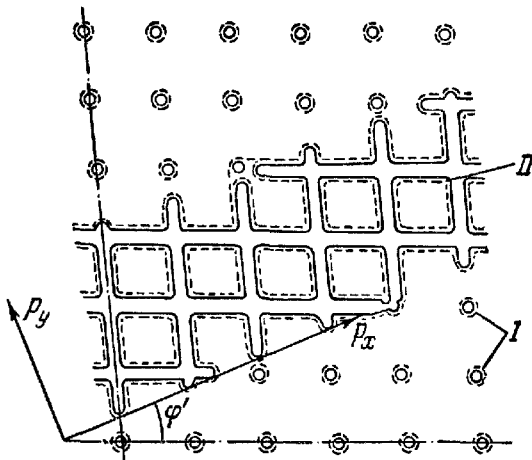


Рис. 63. Сечение плоскостью $p_z = \text{const}$ изоэнергетической поверхности $\varepsilon = \varepsilon_0$ типа «пространственная сетка» (сплошные линии). Пунктирные линии изображают сечение близкой изоэнергетической поверхности $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$.

Замкнутые траектории типа I охватывают области энергий $\varepsilon < \varepsilon_0$, а траектории типа II — области энергий $\varepsilon > \varepsilon_0$. Соответственно с этим направление обхода этих траекторий противоположно. Открытые траектории отделяют эти два типа линий друг от друга. Направление открытой траектории задано углом φ' , для которого $\cos \varphi' = \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \theta)^{-1/2}$.

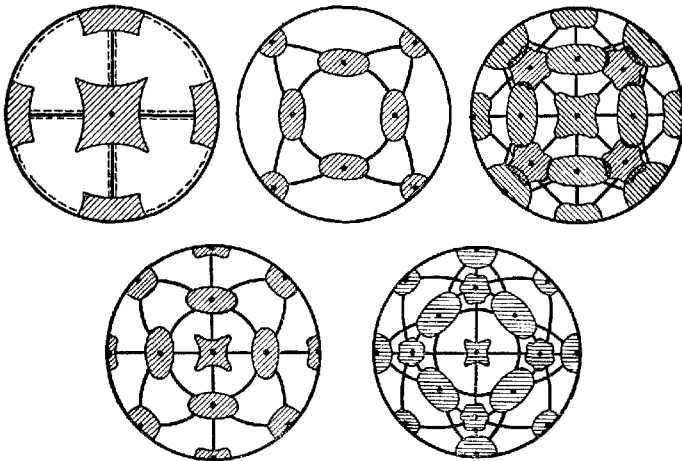


Рис. 64. Стереографические проекции направлений магнитного поля (заштрихованные области и сплошные линии), приводящих к открытым траекториям для различных видов поверхности Ферми типа «пространственная сетка».

б) имеются слои открытых траекторий с единым направлением открытости (заштрихованные); в) имеются слои открытых направлений с различным направлением открытости (дважды заштрихованные). Кроме того, имеются по крайней мере четыре типа особых направлений магнитного поля.

1. Направления магнитного поля, при которых существует слой открытых траекторий, образуют одномерное множество. Это бывает, в частности, если имеется изолированное направление открытых траекторий. Примерами могут служить направления, перпендикулярные к оси (для поверхности типа «гофрированный цилиндр»), и сплошные жирные линии на стереографических проекциях для поверхности типа «пространственная сетка» (см. рис. 64).

2. Границы двумерных областей (телесных углов), в которых имеются открытые траектории (границы заштрихованных областей на рис. 64).

3. Изолированное направление внутри области открытых траекторий, в котором слой открытых траекторий вырождается в изолированные сечения (точки на рис. 64). Как правило, это направление совпадает с направлением оси 3, 4 или 6-го порядка.

4. Граница области тех направлений магнитного поля, при которых имеются слои открытых траекторий с различными направлениями открытости (границы дважды заштрихованных областей на рис. 64).

При направлениях магнитного поля, не совпадающих с особыми, имеется следующая зависимость от магнитного поля: а) в незаштрихованных областях (область замкнутых сечений) сопротивление стремится к постоянному значению (насыщение); константа Холла определяется объемом, либо занятым электронами, либо свободным от дырок (§ 27); б) в однократно заштрихованных областях (есть слои открытых траекторий с общим направлением открытости) сопротивление возрастает пропорционально квадрату магнитного поля (за исключением того случая, когда электрический ток, перпендикулярный к магнитному полю, перпендикулярен к направлению открытости); константа Холла сложным образом зависит от интеграла столкновений (см. выше); в) в дважды заштрихованных областях (имеются слои открытых траекторий с различными направлениями открытости) сопротивление стремится к постоянной величине (насыщение); константа Холла зависит от интеграла столкновений и очень мала (при $H \rightarrow \infty$ она стремится к нулю).

Рассмотрим теперь зависимость сопротивления от величины и направления магнитного поля вблизи особых направлений.

1. Вблизи направлений, изображенных жирными линиями на рис. 64, ситуация вполне аналогична той, которая имеет место при поверхности Ферми типа «гофрированный цилиндр» вблизи

плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. В частности, справедлива формула (28.8). Угол θ в данном случае измеряет «расстояние» до жирных линий на стереографических проекциях.

2. Рассматривая поведение сопротивления вблизи границ двумерных областей, в которых имеются открытые траектории, нужно учесть, что в незаштрихованных областях содержатся лишь замкнутые траектории, а в заштрихованных наряду с ними открытые траектории, причем их количество (ширина слоя) обращается в нуль на границе. В связи с этим вне заштрихованной области стандартная зависимость сопротивления от магнитного поля (насыщение) осуществляется вплоть до самой границы, а при подходе к границе со стороны заштрихованной области зависимость сопротивления от величины и направления магнитного поля имеет следующий вид [39]:

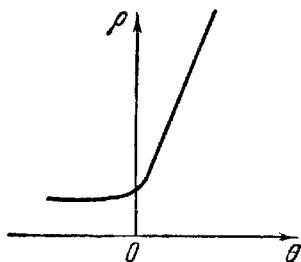


Рис. 65. Зависимость сопротивления от направления магнитного поля при переходе в область, где есть открытые траектории (на рисунке $\theta > 0$).

$$\rho = \theta\beta \left(\frac{H}{H_0} \right)^2 \cos^2 \alpha + A \quad (28.9)$$

(обозначения те же, что и в формуле (28.8)). На рис. 65 изображена зависимость сопротивления от направления магнитного поля вблизи рассматриваемых особых направлений.

3. Аналогичная ситуация имеет место и вблизи изолированных направлений, в которых слои открытых траекторий вырождаются в изолированные сечения (точки на рис. 64). В частности, сохраняет свою справедливость формула (28.9) и рис. 65.

При вращении магнитного поля в плоскости в ряде случаев может получиться розетка сопротивления (зависимость сопротивления от направления при фиксированной величине магнитного поля), содержащая три типа особенностей.

Для рассмотренных здесь зависимостей характерно, что при избранном направлении тока (при $\alpha = \pi/2$) аномалия в зависимости сопротивления исчезает.

4. На границах дважды заштрихованных областей сопротивление переходит от насыщения (внутри области) к квадратичной зависимости (вне области). Аналитическое выражение для сопротивления вблизи границы имеет следующий вид:

$$\rho = \frac{\rho'}{\theta A + (H_0/H)^2}, \quad (28.10)$$

где ρ' и A — плавные функции углов, причем $A \sim 1$.

Как мы видим, изучение открытой поверхности Ферми типа «пространственная сетка» приводит к самым разнообразным ситуациям и показывает, что сопоставление асимптотических зави-

симостей сопротивления от величины магнитного поля при различных его направлениях с теоретическими «картинками», т. е. со стереографическими проекциями типа тех, которые изображены на рис. 64, позволяет не только определить тип поверхности Ферми, но и достаточно подробно изучить ее форму.

Аналогичный анализ может быть проведен и для поверхностей других типов. Например, в работе [41] выяснена зависимость сопротивления от величины и направления магнитного поля металлов, поверхность Ферми которых — «плоская сетка» (рис. 66).

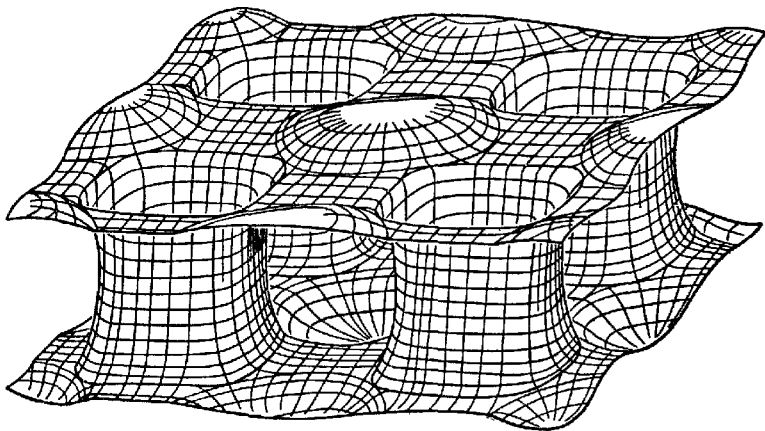


Рис. 66. Поверхность Ферми олова согласно работе [41].

Во всех случаях характерными свойствами металлов с открытой поверхностью Ферми являются, во-первых, резкая анизотропия поперечного (относительно магнитного поля) сопротивления, а во-вторых, существенная зависимость сопротивления от направления электрического тока (при $j \perp H$).

До сих пор мы рассматривали те случаи, когда в незаштрихованных областях, т. е. при тех направлениях магнитного поля, когда нет открытых сечений, сопротивление стремится к константе. Это означает, что отсутствует компенсация дырочных и электронных объемов. Если такая компенсация имеет место, то в незаштрихованных областях наблюдается квадратичный рост сопротивления (как и в заштрихованных областях.) На границах этих областей сопротивление испытывает излом. Аналогичные изломы наблюдаются при всех особых направлениях. Подробно этот случай в связи с исследованиями гальваномагнитных свойств олова*) изучен в цитированной работе [41]. Характерные

*) Поверхность Ферми олова состоит из открытой поверхности типа «плоская сетка» (см. рис. 66) и ряда замкнутых полостей, форму которых невозможно исследовать с помощью описываемых здесь методов. Для исследования формы замкнутых полостей используются осцилляционные, резонансные, магнитоакустические и другие методы (§§ 17 и 48).

стереографические проекции для поверхности Ферми типа «плоская сетка» изображены на рис. 67.

Отметим еще, что, как и в случае замкнутых поверхностей, компенсация дырочного и электронного объемов — не случайное явление. Она должна иметь место всегда, когда число электронов на ячейку кристалла четное.

Резкая зависимость сопротивления от направления магнитного поля в некоторых случаях позволяет объяснить линейное возрастание сопротивления поликристаллов с ростом магнитного поля (закон Капицы). Действительно, если квадратичный рост ($\rho \sim H^2$) наблюдается в узком интервале углов $\Delta\theta \sim H_0/H$ (см. формулу (28.8)), любое усреднение сопротивления по углам в интервале $\delta\theta \gg H_0/H$ (включающем $\Delta\theta$) приводит к линейному возрастанию сопротивления с ростом поля. При этом следует

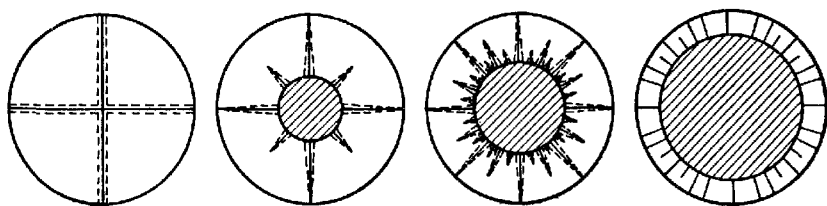


Рис. 67. Стереографические проекции особых направлений магнитного поля для изоэнергетических поверхностей типа «плоская сетка».

подчеркнуть, что характер усреднения ввиду малости ширины максимума не играет особой роли: в частности, усреднение проводимости и последующий переход к обратным величинам приводит к тому же результату — линейной зависимости сопротивления от магнитного поля [38]. Весьма возможно, что это не единственная причина линейного возрастания сопротивления. Как показано в работе [42], линейная зависимость часто наблюдается в переходной области (при $H \sim H_0$) от квадратичной зависимости в малых полях ($H \ll H_0$) к насыщению или ко второй квадратичной зависимости в больших полях ($H \gg H_0$). Поэтому в некоторых случаях линейная зависимость может означать, что измеренные значения сопротивления нельзя рассматривать как асимптотические.

За последние годы исследование гальваномагнитных характеристик в сильном магнитном поле (особенно сопротивления) стало одним из основных методов изучения электронного энергетического спектра [43]. Таким путем исследовано около тридцати металлов. Следует отметить, что наиболее часто встречаются открытые поверхности Ферми (металлы с целиком замкнутыми поверхностями Ферми — редкость). Хотя зависимость компонент тензора ρ_{ik} от направления магнитного поля связана

не только с формой поверхности Ферми, но и с характером рассеяния, все особенности в этой зависимости целиком связаны с геометрией изоэнергетических поверхностей. Поэтому, используя угловые диаграммы (типа тех, которые изображены на рис. 68), можно не только восстановить общие контуры поверхности Ферми, но и вычислить размеры отдельных ее деталей («перемычек», «шеек» и т. п.). Конечно, при этом приходится использовать пробные модели. Большую помощь при сравнении теории с экспериментом оказывает модель Харрисона [44], согласно которой основные черты поверхности Ферми можно определить из приближения почти свободных электронов (§ 11).

И в этом, и в предыдущем параграфе большинство формул выведено из самых общих предположений об электронных энергетических спектрах. Однако следует уточнить область их применимости. Если поверхность Ферми весьма проста (как у металлов первой группы, например), то приведенные выше неравенства ($r_H \ll l_p$) не требуют оговорок. При достаточно сложной поверхности Ферми (а у большинства металлов поверхности Ферми именно таковы) требуются уточнения. Рассмотрим простой пример. Как показано в § 27, при $n_1 \neq n_2$ (замкнутые поверхности Ферми) сопротивление в больших полях стремится к насыщению. А что, если $|n_1 - n_2| \ll n_1 + n_2$? В каких магнитных полях реально произойдет насыщение? Расчет [45] показывает, что оно произойдет только при $H \gg H_0 n / \Delta n$ ($n = n_1 + n_2$, $\Delta n = |n_1 - n_2|$), где H_0 — поле, при котором $r_H = l_p$. При меньших полях подобный металл будет вести себя как металл с равными числами электронов и дырок*).

Как было показано выше, у металлов с поверхностью Ферми типа «гофрированный цилиндр» при определенных направлениях магнитного поля наблюдается квадратичная зависимость сопротивления от магнитного поля ($r_H \ll l$). Однако если

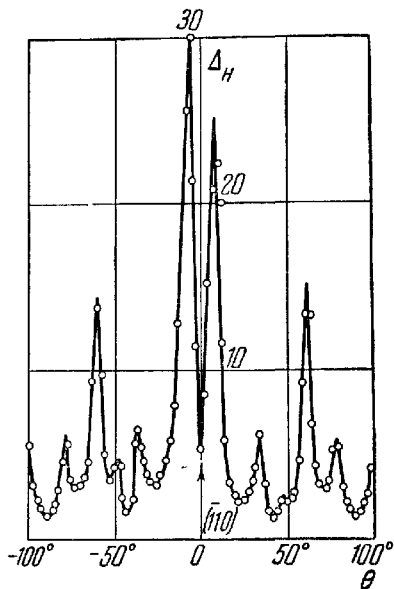


Рис. 68. Пример зависимости прироста сопротивления золота в сильном магнитном поле от его направления.

*) Так ведет себя В_i с малыми количествами примеси [46]. Примесные атомы служат «источниками» электронов или дырок, из-за чего нарушается компенсация объемов.

«гофры» таковы, что перемычки очень узки (рис. 69), то квадратичное возрастание проявится в полях, превышающих $H_0/\sqrt{\nu}$, где $\nu = \Delta\rho/\rho_F$, а $\Delta\rho$ — толщина перемычки. Роль узкого слоя открытых траекторий несколько подробнее обсуждается ниже (см. также [47]).

При сравнении экспериментальных данных по гальваномагнитным явлениям с выводами теории следует учитывать еще одно, пока не обсуждавшееся обстоятельство. С ростом магнитного поля из-за магнитного пробыа (§ 10) может измениться топология траектории электрона, что, естественно, скажется на зависимости компонент тензора сопротивлений от магнитного поля. На роли магнитного пробыа мы также остановимся ниже.

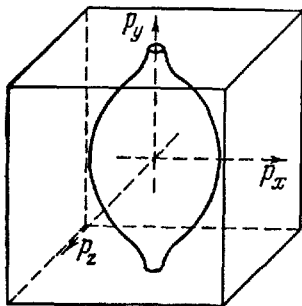


Рис. 69. Простейший пример открытой поверхности с очень узкими перемычками.

Обсудим теперь ряд специальных вопросов теории гальваномагнитных явлений. Начнем с роли узкого слоя открытых траекторий [47].

Узкий слой открытых траекторий проявляется в сильных магнитных полях и приводит к квадратичной зависимости соответствующей компоненты тензора сопротивления от магнитного поля. Этот вывод получается из выражения для σ_{yy} (направление открытости вдоль p_y), которое следует из приведенных в § 26 «диффузионных» оценок:

$$\sigma_{xx} = \left[\frac{\Delta\rho}{\rho_F} \frac{l_{\text{эфф}}}{l} + \left(\frac{r_H}{l} \right)^2 \right] \sigma, \quad (28.11)$$

где $\Delta\rho$ — толщина слоя открытых траекторий (по предположению $\Delta\rho/\rho_F \ll 1$; см. рис. 69).

Мы ввели здесь $l_{\text{эфф}}$, чтобы иметь возможность учесть следующее обстоятельство: вероятность ухода электрона из узкого слоя открытых траекторий значительно больше, чем вероятность попадания в этот слой. Если даже при каждом столкновении электрон лишь незначительно изменяет свой импульс (как при столкновении с длинноволновыми фононами), то при достаточно узком слое открытых траекторий уже одного столкновения достаточно, чтобы электрон вышел из слоя. Это, естественно, существенно изменит зависимость $l_{\text{эфф}}$ от температуры (например, при фоновом механизме сопротивления и при $\Delta\rho \leq T/s$, s — скорость звука, эффективная длина свободного пробега $l_{\text{эфф}} \ll l$ и $l_{\text{эфф}} \sim T^{-3}$).

Как мы уже говорили, слой открытых траекторий может возникнуть в результате магнитного пробыа. В этом случае его

толщина в определенном интервале полей будет существенно зависеть от магнитного поля. Это проявится в сложной зависимости $l_{\text{эфф}}$ от температуры и магнитного поля: с изменением магнитного поля может произойти переход от «привычной» зависимости ($l \sim T^{-5}$) к аномальной ($l \sim T^{-3}$). Отметим еще, что все рассмотренные здесь механизмы приводят к уменьшению той «части» эффективной длины свободного пробега*), которая зависит от рассеяния на малые углы. Это означает, что роль этих механизмов (в частности, фононного) усиливается и, следовательно, переход к остаточному сопротивлению произойдет при более низких температурах, чем в отсутствие магнитного поля.

Сложная зависимость сопротивления Al от магнитного поля и температуры [48] (в частности, нарушение правила Колера) дает основание думать, что у Al в больших магнитных полях существенную роль играет узкий слой открытых траекторий.

Диффузионный подход помогает понять весьма интересное явление [49, 50]. Оно получило название статического скин-эффекта и заключается в том, что иногда в сильном магнитном поле проходящий через образец постоянный ток сосредоточивается вблизи поверхности металла. Природа этого явления такова. Как было показано, при $l \gg r$ в случае замкнутой траектории поперечные составляющие тензора проводимости очень малы по сравнению с их значением при $H = 0$ ($\sigma_{xx} \sim \sigma_{yy} \sim \sigma(r_H/l)^2$), причем уменьшение связано с тем, что электрон в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, локализован на орбите, размеры которой r_H , а столкновения происходят с частотой, равной $1/\tau_p = v_F/l$. Если электроны диффузно рассеиваются на границе металла, то в каждом акте столкновения со стенкой теряется импульс (рис. 70). Поэтому для электронов из слоя толщины r_H частота столкновений W , входящая во вторую из формул (26.12), равна $\omega_H \gg 1/\tau_p$ (при $r_H \ll l$). Это обстоятельство приводит к тому, что в приповерхностном слое

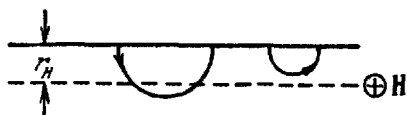


Рис. 70. Примеры траекторий электронов, сталкивающихся с границей диффузно.

$$\sigma_{xx}^{\text{пов}} \approx \sigma \frac{r_H}{l} \gg \sigma \left(\frac{r_H}{l} \right)^2 = \sigma_{xx}. \quad (28.12)$$

Если отражение от границы зеркальное, то, как легко видеть из рис. 71, электроны из пристеночного слоя совершают инфинитное движение, вследствие чего связанная с ними

*) Имеется в виду формула типа (24.16).

электропроводность порядка электропроводности металла без магнитного поля.

Ясно, что существенное возрастание проводимости пристеночного слоя может привести к сосредоточению токовых линий вблизи поверхности. Строгая теория, основанная на решении уравнения Больцмана [51], приводит к сложной зависимости плотности тока от расстояния от поверхности (см. следующий параграф).

Наконец, в заключение этого параграфа еще раз вернемся к роли магнитного пробоя в гальваномагнитных явлениях. Как

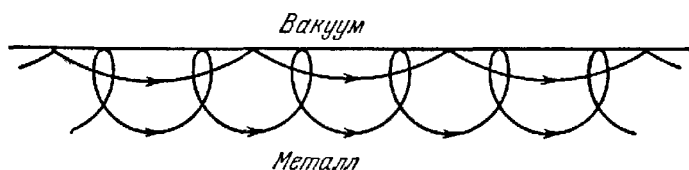


Рис. 71. Примеры траекторий электронов в магнитном поле, сталкивающихся зеркально с границей металл—вакуум.

мы уже отмечали, наиболее явственно магнитный пробой проявляется тогда, когда в результате изменения топологии траекторий электронов (из замкнутых траекторий превращаются в открытые или наоборот*). Если считать, что перескок с одного участка траектории на другой сопровождается расфазировкой волновых функций, то, используя диффузионное приближение, легко показать [52], что компонента электропроводности вдоль направления «открытости» по порядку величины равна

$$\sigma_{xx} \approx \sigma \frac{r_H}{l} \left(\frac{r_H}{l} + p \right), \quad (28.13)$$

где p — вероятность пробоя (§ 10). Эта оценка находится в качественном согласии с расчетами [53, 54]. Однако последняя формула верна только пока $p \ll r_H/l$. При $p \gg r_H/l$ следует строить теорию гальваномагнитных явлений, исходя из «новых» квазичастиц, совершающих в магнитном поле инфинитное движение. Электропроводность тогда, естественно, ограничена длиной свободного пробега. И если $r_H/l \ll p \ll 1$, то $\sigma_{xx} \approx p^2 \sigma$ (σ — электропроводность в отсутствие магнитного поля). Полная теория гальваномагнитных явлений с учетом магнитного пробоя до настоящего времени не построена.

*) Если исходить из модели Харрисона (§ 10, а также [44]), то электроны в достаточно сильных магнитных полях (но не слишком, во всяком случае меньших атомных) ведут себя как свободные. А это означает, что обе поперечные компоненты тензора проводимости должны убывать обратно пропорционально квадрату магнитного поля $\sigma_{xx} \sim \sigma_{yy} \sim \sigma (r_H/l)^2$, а сопротивление стремиться к насыщению.

§ 29. Теория статического скин-эффекта

В предыдущем параграфе мы уже отмечали, что рассеяние электронов на границе образца может существенно изменить величину компонент тензора проводимости: если в массивном образце соответствующая компонента $\sim \sigma (r_H/l)^2$, в пристеночном слое она может оказаться $\sim \sigma_H (r_H/l)$ или даже σ (при зеркальном отражении). Отметим еще, что в пристеночном слое может произойти раскомпенсация объемов, характерная для металлов с равным числом электронов и дырок, так как в неоднородном поле скорость дрейфа, естественно, зависит от локальных характеристик орбит носителей.

В достаточно чистых металлах при низких температурах условие $r_H \ll l$ (сильное поле) может выполняться при сравнительно больших (макроскопических) радиусах орбит ($r_H \leq 10^{-1}$ см). Поэтому перераспределение токовых линий вблизи границ образца — макроскопический эффект, доступный экспериментальному исследованию [50]. Если образец тонкий ($d \ll l$), основной вклад в полный ток вносит слой порядка r_H вблизи поверхности — статический скин-эффект проявляется в зависимости сопротивления от магнитного поля и от толщины образца, причем в данном случае полный ток не зависит от толщины пластины.

Перейдем к построению последовательной теории статического скин-эффекта.

Основная задача этого параграфа — вычисление сопротивления тонких образцов ($d \ll l$) в магнитном поле с учетом рассеяния на границе. Прежде всего обратим внимание на то, что математическая постановка задачи в данном случае отличается от таковой в «обычном» макроскопическом случае.

При рассмотрении геометрических эффектов и их влияния на распределение тока и поля в слабо неоднородном случае (когда геометрические размеры или интересующие нас расстояния велики по сравнению с r_H и l) связь плотности тока с напряженностью электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ (так как $\text{rot } \mathbf{E} = 0$) остается, очевидно, такой же, как в неограниченном металле:

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E} = -\hat{\sigma} \nabla \varphi, \quad (29.1)$$

где σ_{ik} не зависит от координат.

Основным уравнением распределения поля в образце является уравнение второго порядка относительно φ — уравнение непрерывности заряда в статическом случае:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (29.2)$$

т. е.

$$(\nabla, \hat{\sigma} \nabla \varphi) = 0, \quad (29.3)$$

Граничные условия к этому уравнению обеспечивают уравнение непрерывности заряда на поверхности. Заряды не проходят через поверхность проводника, т. е.:

$$j_n = 0. \quad (29.4)$$

Здесь n — внутренняя нормаль к поверхности проводника. В случае паличия контактов $j_n = i_n$, где i — ток, поступающий в данной точке поверхности через контакты, т. е.

$$(\hat{\sigma} \nabla \varphi)_n = \begin{cases} i_n & \text{на контакте,} \\ 0 & \text{на остальной поверхности.} \end{cases} \quad (29.5)$$

При известном φ плотность зарядов ρ' определяется уравнением*)

$$\rho' = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \nabla \varphi. \quad (29.6)$$

Благодаря высокой плотности зарядов электронов в проводнике в основном приближении можно считать (так как $\rho' \ll \rho_0$)

$$\rho' = 0. \quad (29.7)$$

В тонкой пластине ($d \ll l$) (а при построении микроскопической теории и в общем случае) связи j и φ должна определяться из микроскопической теории, причем благодаря неоднородности поля $\hat{\sigma}$ является оператором, действующим на функции координат. При этом сохранение заряда в правильной микроскопической теории обеспечивается автоматически и, каково бы ни было $\varphi(\mathbf{r})$, оператор $\hat{\sigma}$ должен получиться таким, чтобы уравнение (29.2) выполнялось автоматически, являясь следствием вида $\hat{\sigma}$.

В микроскопической теории условие отражения зарядов от границ проводника должно быть таким, чтобы автоматически обеспечивать условие сохранения заряда на поверхности, т. е. должно автоматически удовлетворяться условие (29.5).

Что же касается уравнения (29.7), то микроскопическая теория дает, естественно, не только связь j с φ , но и интегральную связь ρ' с φ . В результате (29.7) оказывается интегральным уравнение для определения φ (и потому не требующим дополнительных граничных условий).

В связи с тем что (29.7) оказывается основным уравнением для определения ρ' , проведем обоснование замены (29.6) на (29.7) более подробно. Из определения ρ' ясно, что $\rho' = e^2 v \hat{L} \varphi$,

*) $\rho' = \rho - \rho_0$, где ρ_0 — равновесная плотность заряда. По определению, $\rho' = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 d\mathbf{p}$, а f_1 должна быть найдена из линеаризованного по электрическому полю кинетического уравнения.

где $\nu = n/\epsilon_F$ — характерная плотность зарядов, а \hat{L} — линейный интегральный оператор «порядка единицы»: $\hat{L}\varphi \approx \varphi$. Если φ изменяется на расстояниях порядка λ , то из (29.6) следует $\hat{L}\varphi \sim (\lambda_0/\lambda)^2\varphi$, где λ_0 — радиус Дебая — Хюккеля для металлов, равный $(l\sqrt{4\pi\nu})^{-1}$. В хороших металлах с числом электронов порядка одного на атом, λ_0 — порядка межатомного расстояния, 10^{-8} см, в полуметаллах типа висмута $\lambda \approx 10^{-7}$ см ($\lambda_0 \sim n^{-1/2}$, т. е. очень слабо зависит от концентрации носителей).

Значит, удержание правой части в (29.6) является лишь превышением точности даже в области, где «формируется» граничное условие для рассеявшихся от поверхности электронов, так что уравнение (29.6) сводится к уравнению $\hat{L}\varphi = 0$, которое формально эквивалентно (29.7). В переменных полях замена (29.6) на (29.7) эквивалентна пренебрежению током смещения. Следует подчеркнуть, что ρ' отличается от крайне малого $\hat{L}\varphi$ размерным множителем, и потому для определения величины ρ' нужно, получив φ из уравнения (29.7), воспользоваться уравнением (29.6). Это соответствует последовательным приближениям при решении уравнения (29.6).

Как ясно из (29.6), радиус Дебая — Хюккеля λ_0 определяет глубину, на которой затухают внешние поля. Это значит, что только с точностью, определяемой отношением λ_0/λ , можно говорить о сопротивлении как о внутренней характеристике проводника, не зависящей от внешних электрических полей. Например, внося проводник с током между пластинами конденсатора и меняя потенциалы на его обкладках, можно с такой точностью менять выделение джоулева тепла в проводнике при заданной силе тока и заданных контактах.

Математически, определив ρ' внутри образца как функцию от φ и внешних токов на поверхности, мы приходим, согласно (29.6), к уравнению типа Пуассона, для однозначного решения которого необходимо задать потенциал на поверхности. Таким образом, полное решение требует либо одновременного задания на поверхности проводника плотности тока и потенциала, либо «выхода» за пределы проводника и рассмотрения внешней задачи *).

Перейдем к решению поставленной задачи в основном приближении по d/l , т. е. при $l = \infty$, для пластины $0 \leq \xi \leq d$ (рис. 72). Для дальнейшего нам удобно воспользоваться несколько иной, чем ранее, формой записи неравновесной функции распределения.

*) В частности, в отсутствие внешних полей (помимо сторонней э. д. с.) при $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ для определения φ нужно потребовать исчезновения φ на бесконечности. При этом $\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \lambda_0 d\varphi/dn$ конечен.

Внешнее поле приводит к тому, что квазичастица, имевшая энергию $\epsilon(\mathbf{p})$, приобретает энергию $\Delta\epsilon(\mathbf{p})$. Ясно, что число квазичастиц, имеющих «теперь» энергию ϵ , равно числу квазичастиц, имевших «раньше» энергию $\epsilon - \Delta\epsilon$, т. е.

$$f(\mathbf{p}) = n_F(\epsilon(\mathbf{p}) - \Delta\epsilon(\mathbf{p})),$$

или, в линейном приближении по полю,

$$f(\mathbf{p}) \approx n_F(\epsilon) - \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \Delta\epsilon.$$

Поскольку в равновесном состоянии (в отсутствие внешнего электрического поля) ток и нескомпенсированный заряд в нормальных металлах отсутствуют, то

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= - \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v} \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \Delta\epsilon(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ \rho' &= - \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \Delta\epsilon(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned} \right\} \quad (29.8)$$

При $-\frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} = \delta(\epsilon - \epsilon_F)$, учитывая выражение (15.5) для плотности состояний, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \sum_{\epsilon(\mathbf{p})=\epsilon_F} \int \mathbf{v} \Delta\epsilon dp_z dt, \\ \rho' &= \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \sum_{\epsilon(\mathbf{p})=\epsilon_F} \int \Delta\epsilon dp_z dt. \end{aligned} \right\} \quad (29.9)$$

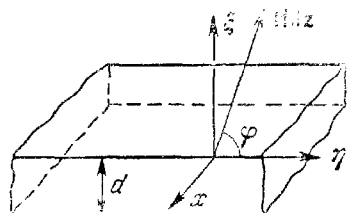
Сумма, как всегда, берется по различным зонам, если они перекрываются. Из $\dot{\epsilon} = e\mathbf{E}\mathbf{v}$ (§ 4) следует

$$\Delta\epsilon = c\mathbf{E} \Delta\mathbf{r}. \quad (29.10)$$

Первое из выражений (29.9) с подстановкой (29.10) позволяет получить формулу, удобную для оценок:

$$\sigma_{ik} = \sum \langle \overline{v_i \Delta r_k} \rangle. \quad (29.11)$$

Рис. 72. Пластина в наклонном магнитном поле.



Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение, смысл которого ясен из (29.9), а черта — усреднение по столкновениям, т. е. замену пройденного пути на среднюю длину между столкновениями. Для того чтобы найти ее, следует определить характер рассеяния электронов от поверхности. Будем считать, что рассеяние является диффузным, т. е. что после столкновения частица «забывает»

о своей предыстории и устанавливается фермиевское распределение. (Если магнитное поле не является слишком слабым (§ 7), так что дебройлевская длина волны мала по сравнению с характерными размерами искажений поверхности, это допущение оправдано.) Следует, однако, иметь в виду, что соответствующая функция распределения, вообще говоря, не является равновесной, имея другой химический потенциал. Его величина будет определяться плотностью отраженных частиц, даваемой законом сохранения заряда на поверхности. А это означает совпадение потоков падающих и отраженных частиц (но не плотности этих частиц!).

При диффузном отражении «дополнительная» к $\varepsilon = \varepsilon_F$ энергия $\delta\varepsilon$, с которой электрон уходит от точки поверхности \mathbf{r}_s , изотропна по углам и (поскольку $\varepsilon = \varepsilon_F$) может зависеть только от \mathbf{r}_s . Энергия, приобретаемая на пути от \mathbf{r}_s до \mathbf{r} (рис. 73), в отсутствие столкновений ($l = \infty$) есть, согласно (29.10), $-e\{\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_s)\}$, так что

$$\Delta\varepsilon = \delta\varepsilon(\mathbf{r}_s) + e\{\varphi(\mathbf{r}_s) - \varphi(\mathbf{r})\} = h(\mathbf{r}_s) - \varphi(\mathbf{r}), \quad (29.12)$$

где $h(\mathbf{r}_s)$ — неизвестная функция, которая, как было показано, должна определяться из условия сохранения заряда на поверхности, т. е. из граничного условия, обеспечивающего выполнение (29.4).

Если в данный момент «орбитального» времени электрон находится в точке \mathbf{r} и имеет данное p_z (t , p_z совместно с $\varepsilon = \varepsilon_F$ однозначно определяют в нулевом приближении по \mathbf{E} состояние электрона, т. е. его квазиимпульс \mathbf{p}), то $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s(\mathbf{r}, t, p_z)$ и находится из совпадения пути до поверхности и расстояния, пройденного электроном:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_s = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(\lambda) = \int_{\lambda}^t \mathbf{v}(t') dt', \quad (29.13)$$

где λ — момент столкновения с поверхностью. Так как формально продолженная за поверхность орбита может пересекать поверхность в нескольких точках (рис. 73), то λ — ближайший к t и меньший его корень уравнения (29.13); ясно, что столкновение происходит с поверхностью, на которой $v_n > 0$ (n — внутренняя нормаль к поверхности)*). В случае пластины уравнение

*) Три уравнения (29.13) совместно с уравнением поверхности проводника $G(\mathbf{r}_s) = 0$ определяют в общем случае четыре величины: \mathbf{r}_s и λ .

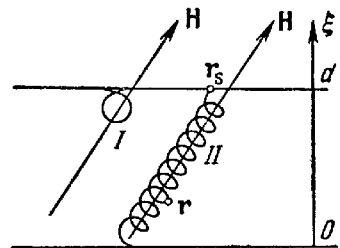


Рис. 73. Траектории электронов в пластине в магнитном поле.

(29.13) сводится к

$$\xi(\lambda) = \xi(t) - \xi + \xi_s \quad (\lambda < t, \lambda = \lambda_{\min}),$$

$$\xi_s = \begin{cases} 0 & \text{при } v_\xi(\lambda) > 0, \\ d & \text{при } v_\xi(\lambda) < 0. \end{cases} \quad (29.14)$$

Функция $h(\mathbf{r}_s)$ однозначно определяет как плотность тока, так и потенциал φ . Подстановка (29.12), (29.13) в (29.9) дает:

$$\mathbf{j} = \sum \langle \mathbf{v}h(\mathbf{r}_s) \rangle, \quad (29.15)$$

а из (29.7) следует:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\sum \langle h(\mathbf{r}_s) \rangle}{\sum \langle 1 \rangle}. \quad (29.16)$$

Поскольку $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, то E_x и E_η (выбор осей ясен из рис. 72) не зависит от ξ , так что

$$\varphi(r) = -E_x x - E_\eta \eta - \varphi_1(\xi).$$

Поэтому, учитывая (29.16), удобно находить

$$h(\mathbf{r}_s) = -E_x x - E_\eta \eta + h(\xi_s). \quad (29.17)$$

Перейдем к определению $h(\xi_s)$. Согласно (29.4),

$$\left. \begin{aligned} j_n^s &= \sum \langle v_n h \rangle^s = \sum \langle v_n h \rangle_+^s + \sum \langle v_n h \rangle_-^s = 0, \\ \langle f \rangle &= \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \int f dp_z dt, \end{aligned} \right\} \quad (29.18)$$

где индекс s означает, что берется точка на поверхности, а плюс и минус относятся соответственно к электронам, отразившимся от этой же поверхности (электроны типа I на рис. 73) и отразившимся от противоположной поверхности (электроны типа II). Подставляя (29.17) в (29.18), находим:

$$h(0) - h(d) = \frac{1}{\sum \langle v_\xi \rangle} \left\{ E_x \sum \langle v_\xi(t) (x(t) - x(\lambda_0)) \rangle + \right. \\ \left. + E_\eta \sum \langle v_\xi(t) (\eta(t) - \eta(\lambda_0)) \rangle \right\}, \quad (29.19)$$

где для электронов, сталкивающихся с поверхностью $\xi = 0$,

$$\xi(\lambda_0) = \xi(t), \quad \lambda < t, \quad (29.14a)$$

а для электронов, сталкивающихся с поверхностью $\xi = d$,

$$\xi(\lambda_0) = \xi(t) + d, \quad \lambda < t. \quad (24.14b)$$

Из (29.14) ясно, что в областях монотонности $\lambda(t)$

$$v_\xi(t) dt = v_\xi(\lambda) d\lambda, \quad (29.20)$$

что позволяет значительно упростить выражение (29.19). Для того чтобы не приводить слишком громоздких вычислений, продемонстрируем их на простейшем случае, когда ферми-поверхность не только замкнута, но и $\lambda = \lambda(\xi, t, p_z)$ при любых p_z является монотонной функцией t , т. е. $v_\xi \neq 0$ ни при каких t и p_z . Разумеется, это возможно только в исключительных случаях, например для пластины в нормальном к ее поверхности магнитном поле при квадратичном законе дисперсии носителей заряда. Однако расчет в общем случае не меняет результатов, а лишь усложняет вычисления.

В нашем простейшем случае для $\bar{v}_\xi > 0$, очевидно, $\lambda_0 = t$, а для $\bar{v}_\xi < 0$ следует:

$$J = \int_0^T v_\xi(t) g(\lambda_0) dt = \int_{\lambda_0(0)}^{\lambda_0(T)} v_\xi(\lambda_0) g(\lambda_0) d\lambda_0 = \int_{\lambda_0(0)}^{\lambda_0(0)+T} v_\xi(\lambda_0) g(\lambda_0) d\lambda_0, \quad (29.21)$$

и если $g(\lambda_0)$ периодическая по λ_0 функция (такими функциями являются

$$x(t) = x_0 - cp_y(t)/eH \quad \text{и} \quad y(t) = y_0 + cp_x(t)/eH,$$

то

$$J = \int_0^T v_\xi(t) g(t) dt.$$

Непериодической по λ_0 функцией в (29.19) является только $\eta(t)$, которая равна (см. рис. 72)

$$\eta(t) = \frac{y(t)}{\sin \varphi} + \xi(t) \operatorname{ctg} \varphi.$$

Поскольку $y(t)$ периодически, остается вычислить

$$J = \int_{\lambda_0(0)}^{\lambda_0(0)+T} v_\xi(t) \xi(t) dt = \xi^2(t) \Big|_{\lambda_0(0)}^{\lambda_0(0)+T} = 2\bar{v}_\xi \left(\xi(0) + d + \frac{1}{2} \bar{v}_\xi \right).$$

Учитывая, что

$$\int_0^T v_\xi(t) \xi(t) dt = 2\bar{v}_\xi \left(\xi(0) + \frac{1}{2} \bar{v}_\xi \right),$$

окончательно получаем (29.19) в виде (где знак минус соответствует теперь $\bar{v}_\xi = \bar{v}_z \sin \varphi < 0$, т. е., например, $p_z < 0$)

$$h(0) - h(d) = dE_\eta \operatorname{ctg} \varphi. \quad (29.22)$$

Этого достаточно для определения и разности потенциалов по (29.16) и плотности тока по (29.15) — изменение h на постоянную на них не сказывается; величину $h(r)$, которая требуется лишь при $\xi = 0, d$, можно записать в виде:

$$h = -E_x x - E_\eta \eta + E_\eta \xi \operatorname{ctg} \varphi = -E_x x - E_\eta y / \sin \varphi. \quad (29.23)$$

Формулы (29.15), (29.16), (29.23) дают точное решение поставленной задачи в любом (по величине и направлению) магнитном поле. Исключением является строго параллельное поверхности магнитное поле ($\varphi = 0$), когда полученное решение теряет смысл. Это естественно, так как всегда имеются электроны, орбиты которых «помещаются» в пластине и которые, двигаясь в этом случае без столкновений вдоль ее поверхности, обеспечивают бесконечную проводимость.

Подставим (29.23) в (29.15) и учтем, что

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} \xi(t) - \xi & (\bar{v}_z > 0, \lambda = \lambda^+), \\ \xi(t) - \xi + d & (\bar{v}_z < 0, \lambda = \lambda^-). \end{cases} \quad (29.24)$$

а

$$r_s = r + r(\lambda) - r(t).$$

Получим:

$$j = \sum \langle v(t) (K(t) - K(\lambda)) \rangle, \quad (29.25)$$

$$K(t) = -E_x x(t) - E_\eta y(t) / \sin \varphi,$$

причем $K(t)$ — периодическая с периодом T функция t . Заметим, что из (29.25) и (29.22) автоматически, как и следовало, вытекает $j_\xi(\xi) = 0$.

Из (29.25) имеем

$$j_\alpha(\xi) = \sigma_{\alpha\beta}(\xi) E_\beta. \quad (29.26)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}(\xi) \sim r_H$. Здесь α, β принимают значения x, η .

Для вычисления плотности тока по формуле (29.25) удобно воспользоваться тем, что $K(\lambda)$ периодически по λ с периодом T , а λ , согласно (29.24), изменяется на T при изменении ξ на \bar{v}_ξ . Разложим $K(\lambda^\pm)$ в ряд Фурье по ξ :

$$K(\lambda^\pm) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^\pm \exp(2\pi i n \xi / \bar{v}_\xi). \quad (29.27)$$

Получим:

$$j_\alpha = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_m^\alpha,$$

где

$$j_0^a = [\overline{v_a K} - \bar{v}_a \overline{K/\bar{v}_\xi}], \quad (29.28)$$

$$j_m^a = \frac{1}{2\pi i m} \left[T \exp \left\{ \frac{2\pi i m}{|\bar{v}_\xi|} \left[\frac{d}{2} + \text{sign } \bar{v}_\xi \left(\frac{d}{2} + \xi \right) \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times v_a(t) \exp \left(-\frac{2\pi i m \xi(t)}{\bar{v}_\xi} \right) K(t') \exp \left(\frac{2\pi i m \xi(t')}{\bar{v}_\xi} \right) \right]. \quad (29.29)$$

Рассмотрим теперь подробнее случай сильных магнитных полей $r_H \ll d$.

Замечая, что $\overline{v_x x} = \overline{v_y y} = 0$, $\sum \langle v_y y \rangle = -\sum \langle v_y x \rangle \sim n_1 - n_2$, находим при $d \gg r_H$:

$$j_0^{x, y} = \mp \frac{(n_1 - n_2) e c}{H \sin \varphi} E_{\eta, x}. \quad (29.30)$$

Выясним физический смысл этого результата. Если в металле число дырок равно числу электронов, то $j_0^x = 0$ и ток на любой глубине связан со слагаемыми типа (29.29). Но эти слагаемые, благодаря интегрированию по ρ_z , осциллируют и быстро убывают при удалении от поверхностей пластины (из-за $d \gg r_H$). Более того, основной вклад в полный ток также вносит лишь поверхностный слой толщины порядка r_H (для того чтобы убедиться в этом, достаточно подсчитать полный ток в области, далекой от поверхностей пластины). При этом в основном приближении по r_H (т. е. при $d \rightarrow \infty$) плотность тока на поверхности равна нулю (это легче всего увидеть из формулы (29.25)), на глубине порядка r_H возрастает до величины порядка $\text{нес } E/H$, а на больших глубинах $\xi \gg r_H$ затухает, осциллируя пропорционально $(r_0/\xi) \cos(\xi/r_0)$, $r_0 = (\bar{v}_\xi)_{\max}$ (рис. 74). Именно благодаря этому полный ток при $n_1 = n_2$ оказывается не зависящим от толщины пластины и пропорциональным r_H^2 . Ток в «глубинных» слоях металла приводит лишь к малым зондгаймеровским осцилляциям [55], детально рассматривавшимся в [56], для которых может быть из (29.28) — (29.29) получена точная формула. (При $d \gg r_H$ их вычисление не представляет труда: в (29.29) основной вклад дает область вблизи концов интегрирования по ρ_z , т. е. вблизи опорных точек ρ_0 .)

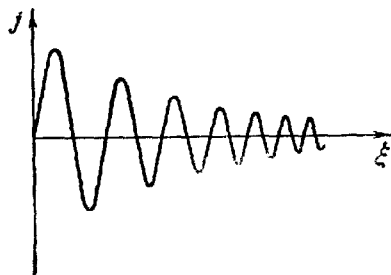


Рис. 74. Зависимость плотности тока в пластине от глубины.

Затухание тока в глубь металла, изображенное на рис. 74, и есть статический скин-эффект. Существенно, что он имеет

место лишь при $n_1 = n_2$ и не меняет зависимости сопротивления от магнитного поля. В самом деле, определим сопротивление пластины. Для этого необходимо учесть, что если в направлении μ пластина хотя и велика (даже по сравнению с d), но все же ограничена, то полный ток может течь лишь в направлении $\xi \perp \mu$, ξ и $J_\mu = \int j_\mu d\mu = 0$ (уравнение непрерывности в интегральной форме, обеспечивающее отсутствие потока заряда через границы пластины в направлении μ). Так как

$$J_{x, \eta} = \mp \frac{(n_1 - n_2) ec}{H \sin \varphi} dE_{\eta, x} + \frac{ne^2}{mv} r_H^2 a_\beta^{x, \eta} E_\beta, \quad a^{x, \eta} \approx 1,$$

то $R = E_\xi / J_\xi$ имеет вид:

$$R(H, d) \approx \begin{cases} R(0, d) \sim d^{-2} & (n_1 \neq n_2), \\ R(0, d) \left(\frac{d}{r_H}\right)^2 \sim r_H^{-2} & (n_1 = n_2), \end{cases}$$

причем полное сопротивление и при $n_1 = n_2$ не зависит от толщины пластины.

До сих пор речь шла только об одномерной задаче (пленка или проволока с токовыми линиями, параллельными границе). Из изложенного понятно, однако, что метод применим [57] к образцу произвольной формы с произвольными расположением и формой подводящих ток контактов. Последний вопрос представляет собой интерес, так как связан с фокусировкой тока в сильном магнитном поле. При этом существенно меняется и сопротивление образца, в частности при размерах контактов, малых по сравнению с r_H , оно обратно пропорционально площади контактов [57].

Рассеяние электронов от поверхности выше всюду предполагалось диффузионным. В полуметаллах оно может быть близким к зеркальному (вследствие большой дебройлевской длины волны). Это приводит [58] к линейной зависимости сопротивления от магнитного поля — закону Капицы. В хороших металлах отражение близко к зеркальному для электронов, сталкивающихся с поверхностью под малыми углами (§ 7). В результате появляется возможность определить по зависимости сопротивления от магнитного поля зависимость коэффициента отражения электронов от угла падения.

До сих пор речь шла только о замкнутых поверхностях Ферми. Открытые поверхности также приводят к существованию статического скин-эффекта; теория для этого случая построена в работе [59]. Экспериментально статический скин-эффект изучался на кадмии [50], вольфраме [60], индии и алюминии [61] и висмуте [61, 62].

§ 30. Теплопроводность и термоэлектрические явления в сильном магнитном поле

Магнитное поле изменяет не только сопротивление металла, но и его теплопроводность, коэффициенты Томсона, Пельтье и другие характеристики термоэлектрических явлений [63]. Это вполне естественно, так как за эти явления ответственны электроны, движение которых существенно изменяется в магнитном поле.

Зависимость теплопроводности и термоэлектрических коэффициентов от магнитного поля часто называют термомагнитными явлениями. Их, как и гальваномагнитные, можно разделить на поперечные и продольные, на четные и нечетные. Последние аналогичны эффекту Холла. Исходя из соображений симметрии, можно построить зависимость термомагнитных коэффициентов от слабого магнитного поля в виде разложения их по степеням магнитного поля. Число независимых компонент у возникающих при этом тензоров (коэффициентов пропорциональности) определяется классом симметрии кристалла. Традиционно (правда, в большинстве случаев на полупроводниках) термомагнитные исследования используются для выяснения механизмов рассеяния носителей заряда. По-видимому, еще нет работ, использующих обсуждаемые свойства металлов для определения параметров электронного энергетического спектра.

С другой стороны, как показывают теоретические работы [64, 65] (и как будет видно ниже), исследование термомагнитных свойств в больших полях позволяет определить своеобразную характеристику электронов, весьма полезную при восстановлении спектра.

Не повторяя утверждений, служащих для обоснования квазиклассического подхода, используем аппарат, разработанный с целью исследования гальваномагнитных явлений, для определения зависимости термомагнитных коэффициентов (см. начало § 27) от величины и направления большого магнитного поля ($r_H \ll l$).

Вся совокупность термомагнитных эффектов описывается зависимостью от магнитного поля коэффициентов α_{ik} и κ_{ik} в формуле (25.1). Последние формулами (25.15) связаны с коэффициентами σ_{ik} , b_{ik} , d_{ik} и c_{ik} , причем, согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов,

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}), \quad d_{ik}(\mathbf{H}) = d_{ki}(-\mathbf{H}), \quad -Tb_{ik}(\mathbf{H}) = c_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (30.1)$$

Тензоры d_{ik} и b_{ik} заданы формулами (25.12), в которые нужно подставить решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \hat{W}_e \{ \varphi_i \} = v_i. \quad (30.2)$$

Уравнение (30.2) выводится аналогично уравнению (27.7) и отличается от него только оператором столкновений. При его выводе не уточнялся вид функции распределения фононов, или, другими словами, не учитывалось увлечение фононов электронами (см. ниже).

Так как явный вид оператора столкновений не влияет на асимптотическое (в больших магнитных полях) поведение решения, анализ, проведенный в §§ 27, 28, применим и в рассматриваемом случае. При выяснении зависимости от большого магнитного поля компонент тензоров теплопроводности κ_{ik} и термоэлектрических коэффициентов α_{ik} можно, кроме того, воспользоваться формулами (25.21), утя, конечно, что $\kappa_{ik} \approx -d_{ik}$ (см. формулы (25.23)).

Совершенно ясно, что за исключением, быть может, особых случаев (см. ниже) характер зависимости компонент тензоров b_{ik} , c_{ik} и d_{ik} совпадает с зависимостью от магнитного поля компонент электропроводности. Это позволяет сразу воспользоваться результатами §§ 27, 28. Особым следует считать случай равенства чисел электронов и дырок. Как известно, своеобразие этого случая связано с тем, что благодаря компенсации объемов ($n_1 = n_2$) разложение компоненты σ_{xy} (ось z , как всегда, направлена по магнитному полю) начинается с квадратичного члена ($\sigma_{xy} \sim 1/H^2$). Это, в свою очередь, приводит к квадратичному возрастанию поперечного (относительно магнитного поля) сопротивления. Однако равенство чисел электронов и дырок не означает, что равны $\left(\frac{dV_1}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_F}$ и $\left(\frac{dV_2}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_F}$, где $V_{1(2)}(\varepsilon)$ — объем внутри (вне) электронной (дырочной) части поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$. Следовательно, даже при $n_1 = n_2$ ($n_{1(2)} = 2V_{1(2)}(\varepsilon)/(2\pi\hbar)^3$) разложение b_{xy} и c_{xy} начинается с члена, пропорционального $1/H$ (см. формулу (27.21)).

Приведем некоторые основные результаты (подробнее см. [64, 65]). Во-первых, при замкнутой поверхности Ферми и $n_1 \neq n_2$

$$\kappa_{yx} = \frac{\pi^2}{3} T \frac{c}{eH} (n_1 - n_2). \quad (30.3)$$

Это означает, что эффект Ледюка — Риги (как и эффект Холла) позволяет измерить разность между числами электронов и дырок $n_1 - n_2$. Во-вторых, при этих же условиях асимптотический

вид матрицы α_{ik} таков:

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \nu_{xx} & (1/H)\nu_{xy} & \nu_{xz} \\ (1/H)\nu_{yx} & \nu_{yy} & \nu_{yz} \\ (1/H)\nu_{zx} & (1/H)\nu_{zy} & \nu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (30.4)$$

Разложение всех компонент матрицы ν_{ik} начинается с нулевых по обратному магнитному полю членов, причем все компоненты ν_{ik} (кроме ν_{xx} и ν_{yy}) зависят от интеграла столкновений, а

$$\nu_{xx} \approx \nu_{yy} \approx \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{e} \left[\frac{d}{d\varepsilon} \ln(n_1 - n_2) \right]_{\varepsilon = \varepsilon_F}. \quad (30.5)$$

Следовательно, изучение эффекта Нернста — Эттингаузена в сильном магнитном поле позволяет измерить своеобразную характеристику электронного энергетического спектра $\frac{d}{d\varepsilon} \ln(n_1 - n_2)$, которую нельзя определить из гальваномагнитных (или каких-либо иных) экспериментов. В случае квадратичного изотропного закона дисперсии ($\varepsilon = p^2/2m$) при $n_2 = 0$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \ln(n_1 - n_2) \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} = \frac{3}{2\varepsilon_F}. \quad (30.6)$$

Если число электронов n_1 равно числу дырок n_2 и поверхность Ферми замкнута, то все компоненты тензора теплопроводности κ_{ik} зависят от характера рассеяния, причем естественно, что асимптотическая зависимость от магнитного поля совпадает с асимптотической зависимостью компонент тензора электропроводности. В частности поперечные составляющие κ_{xx} , κ_{yy} резко уменьшаются (κ_{xx} , $\kappa_{yy} \sim 1/H^2$). Это позволяет выделять фоновый (решеточный) вклад в теплоперенос в металлах. Асимптотика тензора α_{ik} имеет следующий вид:

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} H\nu_{xx} & H\nu_{xy} & H\nu_{xz} \\ H\nu_{yx} & H\nu_{yy} & H\nu_{yz} \\ \nu_{zx} & \nu_{zy} & \nu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (30.7)$$

В данном случае все компоненты матрицы ν_{ik} зависят от углов между вектором \mathbf{H} и направлениями кристаллографических осей, а их конкретный вид определяется интегралом столкновений. Следует обратить внимание на то, что металлы с $n_1 = n_2$ должны отличаться сравнительно большой термо-э. д. с. в сильном магнитном поле.

Рассмотрение различных случаев открытых поверхностей Ферми показывает, что, как и в случае гальваномагнитных явлений, наиболее характерным отличием от случая замкнутых

поверхностей является резкая анизотропия термомагнитных характеристик: при подходе к избранным (особым) направлениям резко меняется асимптотика компонент тензоров κ_{ik} и α_{ik} , причем, как ясно из предыдущего, асимптотика тензора κ_{ik} совершенно аналогична асимптотике тензора σ_{ik} (§ 28).

В работе [66] обращено внимание на то обстоятельство, что эффект увлечения фононов электронами в сильном магнитном поле может изменить асимптотику термомагнитных коэффициентов (по обратному магнитному полю). Дело в том, что роль увлечения сводится (как показано в работе в [66]) к появлению дополнительной «силы» в правой части уравнения (30.2), причем среднее значение ни одной из компонент этой «силы» не равно нулю (напомним, что в ряде случаев $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$). Благодаря этому, разложение всех компонент функции φ_i начинается с не зависящих от магнитного поля членов. Мы не выписываем окончательных результатов работы [66]. Отметим только: эффект увеличения наиболее существен при не слишком низких температурах (при $T \gg T_0$, где $T_0 = \Theta(\Theta/\epsilon_F)^{1/2}$), (что естественно, так как число фононов падает ($\sim T^3$) с понижением температуры).

§ 31. Квантовые осцилляции сопротивления металлов — эффект Шубникова — де Гааза

Мы уже говорили, что квантование уровней энергии электрона проводимости приводит к осцилляционной зависимости не только термодинамических величин (см. § 15—18), но и кинетических. Наиболее изученным примером осцилляций кинетических характеристик является эффект Шубникова — де Гааза — немонотонная осцилляционная зависимость сопротивления от магнитного поля.

Кроме осцилляционной зависимости, возникающей из-за осцилляций плотности состояний (совершенно аналогично эффекту де Гааза — ван Альфена), в сопротивлении могут наблюдаться и своеобразные осцилляции, обусловленные периодической зависимостью сечений различных процессов взаимодействия электронов с другими квазичастицами. Эти осцилляции, детально изученные в последние годы на полуметаллах [67], мы не будем рассматривать, ограничившись только «классическим» эффектом Шубникова — де Гааза. При этом, как мы увидим ниже, отнюдь нельзя полностью игнорировать квантование при рассмотрении столкновительного члена. Хотя по-прежнему нас будет интересовать квазиклассический случай (наиболее характерный для хороших металлов), классическое уравнение Больцмана (23.6) уже неприменимо. Естественным аппаратом, применяемым для вычисления осциллирующих слагаемых в кине-

тических коэффициентах, является аппарат квантового кинетического уравнения для матрицы плотности [68].

При этом, однако, (см. ниже) в стационарных полях уже в квазиклассическом случае квантование существенно сказывается на виде интеграла столкновений и требует его конкретной записи в каждом случае (ср. с классической теорией в предыдущих параграфах и с квантовой теорией в высокочастотном поле — § 39, 42, 43). Подобное рассмотрение удобнее во всех случаях (квазиклассическом, квантовом, ультраквантовом) проводить с помощью диаграммной техники [69]. Такой подход, естественно, оказывается за рамками принятого нами изложения, и потому мы лишь кратко остановимся на результатах в простейшем случае, тем более что в квантовом и ультраквантовом случаях число различных вариантов резко возрастает.

Выше мы подробно обсуждали условия наблюдения эффекта де Гааза — ван Альфена. Эффект Шубникова — де Гааза наблюдается при тех же условиях: эксперимент должен производиться на достаточно чистом монокристалле, причем температура и величина магнитного поля связаны следующими не слишком жесткими условиями

$$\omega_H \tau \gg 1, \quad \hbar \omega_H \gtrsim T.$$

Рассмотрим сначала (совершенно формально, только для простоты рассуждений) τ -приближение. Тогда квантовое кинетическое уравнение для матрицы плотности

$$\hat{f} = \hat{f}_0 + \hat{f}_1 \quad (31.1)$$

($\hat{f} = f_0(\hat{\epsilon}_0)$ — равновесная матрица плотности, а $\hat{\epsilon}_0$ — оператор Гамильтона в отсутствие электрического поля) в линейном по электрическому полю приближении принимает вид:

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{\epsilon}_0, \hat{f}_1] + \frac{1}{\tau} \hat{f}_1 = \frac{i}{\hbar} [e\mathbf{E}\hat{r}, \hat{f}_0]. \quad (31.2)$$

Переходя к матричным элементам, учитывая диагональность $\hat{\epsilon}_0$ и \hat{f}_0 и то, что

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} [\hat{r}, \hat{f}_0]_{nn'} &= \frac{i}{\hbar} \frac{f_0(\epsilon_{n'}) - f_0(\epsilon_n)}{\epsilon_{n'} - \epsilon_n} [\hat{r}, \hat{\epsilon}_0]_{nn'} = \\ &= - \frac{f_0(\epsilon_n) - f_0(\epsilon_{n'})}{\epsilon_n - \epsilon_{n'}} (\dot{\mathbf{r}})_{nn'} = - \frac{f_0(\epsilon_n) - f_0(\epsilon_{n'})}{\epsilon_n - \epsilon_{n'}} \mathbf{v}_{nn'}, \end{aligned} \quad (31.3)$$

находим из (31.2):

$$\left\{ \frac{i}{\hbar} (\epsilon_n - \epsilon_{n'}) + \frac{1}{\tau} \right\} f'_{nn'} = - e \frac{f_0(\epsilon_n) - f_0(\epsilon_{n'})}{\epsilon_n - \epsilon_{n'}} \mathbf{v}_{nn'} \mathbf{E}, \quad (31.4)$$

откуда

$$f'_{nn'} = - \frac{f_0(\varepsilon_{n'}) - f_0(\varepsilon_n)}{\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n} \frac{eE v_{nn'}}{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}) + \frac{1}{\tau}}. \quad (31.5)$$

Так как $\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n \approx (n' - n) \hbar \omega_H$, то из условий наблюдения эффекта Шубникова — де Гааза ясно, что как первый, так и второй сомножители в (31.5) имеют резкий максимум при $n' = n$.

Диагональные матричные элементы в квазиклассике, как известно, равны средним по времени от данной классической величины. Как было показано в § 15, квантовые осцилляции определяются экстремальными по площади сечениями ферми-поверхности. На экстремальных сечениях средняя скорость электрона обращается в нуль. Таким образом, оказывается, что член, который дал бы основной вклад в квантовые осцилляции, выпадает, причем это связано с его «равномерным» усреднением по всей орбите, т. е. с однородностью по координатам.

Поэтому ясно, что неоднородные в пространстве слагаемые в (31.5), даже если бы в уравнении они оказались малыми, в осцилляциях сопротивления могли бы оказаться определяющими.

Такие члены в кинетическом уравнении есть. Из сказанного ясно, что удержание их может оказаться обязательным.

Для конкретности рассмотрим упругое рассеяние на примесях. В классическом случае сохранение энергии при столкновении обеспечивается дельта-функцией $\delta(\varepsilon - \varepsilon')$, причем в основном приближении можно брать энергию в отсутствие электрического поля. В квантовом случае, когда в скрещенных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ возникают стационарные состояния, отвечающие при данном p_z ($z \parallel \mathbf{H}$) дискретным уровням, нужно записывать

$$\delta(\hat{\varepsilon} - eE_y \hat{y} - \hat{\varepsilon}' + eE_y \hat{y}').$$

При этом появляются (неоднородные в классике) члены, вклад которых следует оценить *). Соответствующие члены в правой части уравнения (31.4) порядка $\frac{eEr_H}{\hbar\omega_H} \frac{f_0}{\tau}$, так как $y \sim r_H$.

С другой стороны, правая часть (31.4) порядка $eEv \frac{f_0}{\hbar\omega_H} \frac{\Delta f}{f_0} \sim$

*) Может показаться, что при линеаризации квантового кинетического уравнения нет необходимости в интеграле столкновений учитывать электрическое поле из-за «локальности» оператора столкновений. Однако, в связи с тем, что при рассеянии электрон «перепрыгивает» с одной орбиты на другую, а их центры удалены на расстояние порядка r_H , учет электрического поля необходим [56]. То, что учет электрического поля сводится к замене аргумента δ -функции, строго показано в [70] с помощью метода Боголюбова [71].

$\sim eEv \frac{f_0}{\hbar\omega_H} \frac{\hbar\omega_H}{\varepsilon_0}$. Поскольку в однородном поле в недиагональных членах проводимости роль l играет r_H , т. е. вклад в ток дает лишь следующее приближение по $(\omega_H\tau)^{-1}$, вклад от «обычной» правой части (31.4) в ток соответствует члену порядка $eEv \frac{f_0}{\hbar\omega_H} \frac{\hbar\omega_H}{\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_H\tau}$. В итоге роль «добавочных» неоднородных членов оказывается в $(\varepsilon_0/\omega_H\hbar)$ раз значительнее, чем «обычных».

Подчеркнем, что полученный результат полностью обусловлен однородностью поля. Легко видеть, что в существенно неоднородном поле (в частности, при аномальном скин-эффекте; см. §§ 33, 34) «дополнительную» зависимость интеграла столкновений от электрического поля учитывать не следует (это подтверждается и прямыми вычислениями); она дает вклад в следующем приближении по $(\omega_H\tau)^{-1}$. Квантовые осцилляции в неоднородном случае не содержат ни \bar{v} (так как v усредняется по орбите в неоднородном поле), ни $(\omega_H\tau)^{-1}$ (так как определяющей является глубина скин-слоя, а случай равенства чисел «дырок» и электронов не является особым).

Мы приведем без вывода результат последовательного рассмотрения упругого рассеяния электронов на примесях. Квантовое кинетическое уравнение, как показано в работе [70], может быть записано следующим образом:

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{\varepsilon}_0, \hat{f}_1] + eE\hat{g}\hat{v}_y + D\{\hat{f}_1\} = eED\left\{\left(\frac{c\rho_x}{eH}\right)\frac{df_0}{d\varepsilon} - \xi g\right\} + \frac{i}{\hbar} [eE\hat{y}, \hat{F}_0], \quad (31.6)$$

где

$$g_{\mu\nu} = \frac{f_{0\mu} - f_{0\nu}}{\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu},$$

$$\{D_\rho\}^{\mu\nu} = N \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{l, l', s} \{\delta_+ (\varepsilon_l - \varepsilon_\mu) [\rho^{\mu l'} v_s^{l' l} v_{-s}^{l' \nu} - v_s^{\mu l'} \rho^{l' l} v_{-s}^{l s}] - \delta_+ (\varepsilon_\nu - \varepsilon_l) [v_s^{\mu l} \rho^{l l'} v_{-s}^{l' \nu} - v_s^{\mu l} v_{-s}^{l l'} \rho^{l' \nu}]\}, \quad (31.7)$$

$$F_0^{\mu\nu} = N \sum_{l, s} v_s^{\mu l} v_{-s}^{l \nu} (g^{\mu\nu} - g^{vl}) / (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu),$$

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{i}{2\pi x},$$

$$y = y_0 + \xi, \quad y_0 = -\frac{c\rho_x}{eH}, \quad \xi = \frac{c\rho_x(t)}{eH},$$

N — число рассеивающих центров, \hat{v} определяет вероятность перехода при столкновении, $\hat{g}\hat{v}_y$ понимается как прямое произведение матриц: $(\hat{g}\hat{v}_y)^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} v_y^{\mu\nu}$. Уравнение (31.6) аналогично

уравнению, полученному в [56], где впервые обращено внимание на роль электрического поля в интеграле столкновений и получена правильная формула для квантовых осцилляций проводимости *).

Решение (31.6) может быть получено в виде разложения \hat{f}_2 по степеням $(\omega_H \tau)^{-1}$:

$$\hat{f}_1 = \hat{f}_{01} + \hat{f}_{11}. \quad (31.8)$$

Первое слагаемое, не зависящее от времени релаксации, имеет вид

$$\hat{f}_{01} = -eE\hat{\xi}\hat{g}, \quad (31.9)$$

а в матричные элементы \hat{f}_{11} входят вероятности переходов из одного состояния электрона в другое:

$$\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_0, \hat{f}_{01}] = eED \left\{ \left(\frac{cp_x}{eH} \right) \frac{df_0}{d\varepsilon} \right\} + \frac{i}{\hbar} [eE_y, F_0]. \quad (31.10)$$

В классическом приближении выражения (31.9) и (31.10) переходят соответственно в

$$f_{01} = -eE\xi \frac{df_0}{d\varepsilon} \quad (31.11)$$

и

$$\frac{df_{11}}{dt} = e\omega_H ED_0 \left\{ \left(\frac{cp_x}{eH} \right) \frac{df_0}{d\varepsilon} \right\}, \quad (31.12)$$

где t — время обращения электрона по классической орбите. Определение $D_0\{\rho\}$ формально остается тем же, что и раньше, однако входящие в его запись квазиклассические матричные элементы заменяются, естественно, на компоненты Фурье (см. также [73]), а функции $\delta_+(x)$ — на $1/2\delta(x)$. Формулы (31.9) и (31.10) дают первые члены разложения по степеням $(\omega_H \tau)^{-1}$.

Эти же формулы позволяют определить поперечный магнитному полю ток:

$$j_\alpha = e \text{Sp} (\hat{f}_1, \hat{v}_\alpha) \quad (\alpha = x, y). \quad (31.13)$$

Из (31.13) и (31.7) сразу же следует, что в разложении элементов тензора электропроводности $\sigma_{\alpha\gamma}$ члены, пропорциональные $1/H$, в случае замкнутых поверхностей Ферми имеют вид

$$\sigma_{yy}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(0)} = \frac{(n_1 - n_2) ec}{H}, \quad (31.14)$$

где n_1 — число электронов и n_2 — число дырок.

*) Впервые квантовая теория магнетосопротивления построена в работе [72].

В выражении (31.14) для $\sigma_{xy}^{(0)}$ учитывается ток по оси x , обусловленный последним слагаемым в (31.10), вклад которого в σ_{xy} таков:

$$\Delta\sigma_{xy}^{(0)} = \frac{ec}{H} \text{Sp } \hat{F}_0. \quad (31.15)$$

Как ясно из смысла диагональных элементов матрицы $F_0^{\mu\nu}$, добавка (31.15) может быть включена в перенормированный химический потенциал электронного газа, поэтому она уже учтена в (31.14).

Та часть $\sigma_{\alpha\gamma}$, которая определяется «интегралом столкновений», может быть представлена в виде

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(1)} = -2 \sum_{e_n} \int \frac{df_0}{de} \chi_{\text{КВ}}^{\alpha\gamma} m^* \Delta e_n dp_z. \quad (31.16)$$

Входящие в (31.16) величины $\chi_{\text{КВ}}^{\alpha\gamma}$ очевидным образом определяются с помощью формул (31.14) и (31.10).

Если ввести усредненный тензор подвижности u_{ik} , то осциллирующую добавку к поперечным компонентам тензора электропроводности можно записать следующим образом:

$$\bar{\sigma}^{\alpha\gamma} \sim -H^2 u_{\text{extr}}^{\alpha\gamma}(e_F) \frac{d \ln S}{de_F} \frac{d\tilde{M}_z}{dH},$$

где S — площадь сечения поверхности Ферми плоскостью, перпендикулярной \mathbf{H} ; \tilde{M}_z — осциллирующая часть магнитного момента. Как обычно, осцилляции химического потенциала учитывать нет необходимости, так как они дают малый вклад (§ 15).

Другие элементы тензора $\bar{\sigma}_{ik}$ могут быть вычислены аналогичным образом *).

Отметим, что на эффекте Шубникова — де Гааза сказывается эффект де Гааза — ван Альфена, так как в обычных классических формулах для σ_{ik} (§§ 27—30) следует, строго говоря, писать не \mathbf{H} , а \mathbf{B} , которое определено в §§ 19—21. Этот эффект в определенных случаях (предельно чистые металлы, достаточно слабые поля) может стать определяющим.

Построение квантовой теории термомагнитных явлений может быть проведено в значительной степени аналогично изложенной квантовой теории гальваномагнитных явлений, однако требует тщательного анализа при введении соответствующих потоков [74].

*) Последовательный расчет тензора проводимости в магнитном поле как в квазиклассическом, так и в квантовом и ультраквантовом случаях с помощью диаграммной техники был проведен в работе [69].

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ

Эта часть книги посвящена исследованию высокочастотных свойств металлов. Свойства, исследуемые здесь, значительно сложнее, чем все рассмотренные выше. Это, во-первых, связано с существованием скин-эффекта — затухания электромагнитного поля на сравнительно небольшой глубине, из-за чего в большинстве случаев нельзя ограничиться изучением пространственно однородного случая. Необходимо поэтому при решении конкретных задач рассматривать (даже в простейших случаях) полуограниченный образец и заниматься выяснением поведения электронов проводимости на границе металла с вакуумом. Во-вторых, при рассмотрении высокочастотных свойств, особенно в магнитном поле, приходится учитывать очень большое число различных случаев.

Традиционно высокочастотные свойства металлов делят на две группы — радиочастотные и оптические, хотя, конечно, очень трудно провести четкую грань между ними. Мы будем считать, что граничная частота, отделяющая радиочастотные свойства от оптических, порядка ϵ_F/\hbar и в большей части будем использовать соотношение $\hbar\omega \ll \epsilon_F$ (радиочастотная область). Это позволит не учитывать непосредственного поглощения фотонов электронами, разрешенного только благодаря зонной структуре электронного энергетического спектра и обладающего порогом по частоте, сравнимым или даже большим ϵ_F/\hbar (оптическая область).

Оптическим свойствам металлов посвящен только § 47.

Экспериментальное исследование металлов в высокочастотной области всегда связано с измерением различных компонент тензора поверхностного сопротивления (импеданса), поэтому основной задачей теории высокочастотных свойств является вычисление компонент тензора поверхностного сопротивления как функции частоты, температуры, внешнего магнитного поля и т. п. В этом изложении мы, естественно, будем особое внимание уделять тем свойствам и случаям, когда импеданс существенно зависит от структуры электронного энергетического спектра, и обращать внимание на возможность использования высокочастотных свойств для реконструкции поверхности Ферми и распределения скоростей на ней.

Основным математическим аппаратом при рассмотрении высокочастотных свойств по-прежнему может служить кинетическое уравнение Больцмана или его квантовый аналог. Однако, в связи с тем что в наиболее интересных случаях можно строго ввести время релаксации вместо оператора столкновений, удается применять более непосредственный метод вычисления тока, который мы и будем главным образом использовать в этой части.

К сожалению, и здесь нам придется ограничиться только ссылками на эксперимент, который в высокочастотной области имеет особенно большие достижения в последние годы.

Часть IV состоит, в сущности, из двух разделов: «классического» (§§ 32—41, 47) и «квантового» (§§ 42—46).

§ 32. Общие закономерности поведения металлов в высокочастотных полях

Основной особенностью металлов с точки зрения их электронных свойств является большая плотность электронов и, как следствие этого, высокая проводимость, такая, что ее нужно считать наибольшим параметром размерности частоты.

Учитывая, что на высоких (по сравнению с частотой столкновений электронов ν) частотах проводимость определяет собственные колебания электронной плазмы в металле, запишем соответствующее условие для частоты ω в виде

$$\omega \ll \omega_0, \quad (32.1)$$

где ω_0 — плазменная частота, по порядку величины совпадающая с граничной фермиевской энергией. Если характерная скорость электронов v , а среднее расстояние между ними a , то характерная собственная частота должна быть, естественно, порядка v/a (это же следует и из оценки энергии нулевых колебаний: $\hbar\omega_0 \approx \hbar^2/2ma^2 \approx \hbar p/am \approx \hbar v/a$). Поэтому условие (32.1) эквивалентно

$$a \ll \frac{v}{\omega}, \quad (32.2)$$

т. е. условию того, что электроны образуют газ, а не «локализованы» по отношению к волне: путь, проходимый электроном за период поля, велик по сравнению со средним расстоянием между электронами.

Неравенство (32.1) является крайне слабым ограничением на частоты ω , так как в «хороших» металлах с числом электронов порядка одного на атом $\omega_0 \sim 10^{15} \div 10^{16} \text{ сек}^{-1}$, а в «плохих», типа висмута, $\hbar\omega_0 \approx 100^\circ \text{ К} \sim 10^{13} \text{ сек}^{-1}$. На обычно используемых в радиотехнике высоких и сверхвысоких частотах

($\omega \approx 10^{10} \div 10^{11} \text{ сек}^{-1}$) условие (32.1) выполняется превосходно и знания основного приближения по ω/ω_0 вполне достаточно, так что учет следующих приближений является зачастую просто превышением точности. Речь, конечно, не идет о металлооптике.

Но пренебрежение частотой по сравнению с проводимостью эквивалентно, очевидно, пренебрежению током смещения по сравнению с током проводимости в уравнении Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (32.3)$$

и записи этого уравнения в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (32.4)$$

Поскольку из уравнения (32.4) следует $\text{div } \mathbf{j} = 0$, то его использование соответствует пренебрежению нескомпенсированным зарядом (возникающим в металле во внешних полях) — пренебрежению, вполне естественному именно в связи с высокой плотностью электронов в металле. В вакууме (или диэлектрике), где пренебрежимо мал ток проводимости, уравнение (32.3) имело бы вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (32.5)$$

Отличие (32.4) от (32.5) обеспечивает основное отличие электродинамик «хороших» и «плохих» проводников: отсутствие тока смещения в первом случае и тока проводимости во втором.

Другое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

одинаково во всех случаях.

Различие между \mathbf{B} и \mathbf{H} у неферромагнитных металлов надо учитывать только при учете квантования электронных уровней энергии (см. ниже). В классической области уравнение (32.6) переписывается следующим образом:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (32.6a)$$

Длину волны в металле*) определяет ток проводимости, а в вакууме или диэлектрике — ток смещения. Поэтому длина волны в металле значительно меньше, чем в вакууме. Это означает, что при любом угле падения волны на металл, в достаточ-

*) Длина волны в плазме (каковой и является металл при $\omega \gg \nu$) порядка c/ω_0 , а в вакууме c/ω . Если же $\omega \ll \nu$, то роль длины волны играет глубина скин-слоя $\delta \approx (c/\omega_0)(\nu/\omega)^{1/2}$.

ной близости к поверхности металла, задача в основном приближении является одномерной, все величины зависят только от расстояния до поверхности металла. Характер отражения и прохождения электромагнитной волны через металл в основном приближении не зависит от формы поля, в частности от угла падения.

Для решения любой внешней по отношению к металлу задачи достаточно задать значения тангенциальных компонент напряженностей электрического E_t и магнитного H_t полей (из уравнения (32.6а) ясно, что это означает задание — для уравнения второго порядка для компонент электрического поля — величины электрического поля и его производной на поверхности). При этом свойства металла сказываются только на связи этих величин:

$$E_t^s = \hat{\xi} [Hn]^s; \quad \hat{\xi} = \hat{\xi}' + i\hat{\xi}'' \quad (32.7)$$

(n — вектор единичной нормали к поверхности, $\hat{\xi}$ — двумерный тензор поверхностного импеданса; часто поверхностным импедансом называется величина $(4\pi/c)\hat{\xi}$). Непрерывность двух проекций поля и их производных на поверхности металла совместно с (32.7) дает шесть уравнений с шестью неизвестными: две проекции напряженности полей в отраженной волне и по две проекции поля и его производной на поверхности металла. (Все время, конечно, предполагается, как это обычно бывает, что самыми большими размерами служат размеры и кривизна образца металла, так что достаточно исследовать падение волны на металлическое полупространство. В общем случае для сведения задачи к чисто внешней по отношению к металлу следует определить тензор импеданса во всех точках поверхности. Для тонких образцов импеданс, конечно, зависит от толщины образца.) Согласно сказанному выше, тензор поверхностного импеданса слабо зависит от формы поля; это и делает весьма удобным его использование.

Таким образом, большая проводимость металла приводит к тому, что достаточно определить двумерный тензор второго ранга $\hat{\xi}$ — тензор поверхностного импеданса. Этот тензор определяет (в том же основном приближении по ω/ω_0) и комплексное сопротивление металла, так как, согласно (32.7) и (32.4),

$$E_t^s = \frac{4\pi}{c} \hat{\xi} I, \quad (32.8)$$

где I — полный ток, текущий через металл (поскольку задача одномерна, то из (32.4) вытекает $\hat{j}_n = 0$). Действительная и мнимая части импеданса позволяют определить диссипируемое в металле Джоулево тепло и сдвиг фазы поля при отражении от металла.

Отметим в интересах дальнейшего еще одну форму записи поверхностного импеданса для монохроматической волны частоты ω . Используя (32.6а), имеем:

$$\mathbf{E}_t^s = \frac{ic}{\omega} \hat{\xi} \mathbf{E}_t'^s. \quad (32.8a)$$

Решение задачи об электродинамике металла в высокочастотном поле сводится, в сущности, к решению двух задач. Во-первых, следует определить плотность тока \mathbf{j} в заданных внешних полях, а во-вторых, решив уравнения (32.4), (32.6а), найти поверхностный импеданс, причем, согласно сказанному выше, достаточно рассмотреть только одномерный случай — случай нормального падения волны на металлическое полупространство. Поскольку при $E = 0$ ток отсутствует, уравнения однородны. Условие существования нетривиального решения однородных уравнений и определяет тензор $\hat{\xi}$.

Для решения первой задачи полезно заранее проанализировать структуру высокочастотного поля в металле.

Принципиально возможны два предельных случая. Если характерная глубина δ , на которой существенно изменяется поле, является наибольшим параметром размерности длины, то на микроскопических расстояниях (длина свободного пробега l электронов, радиус r_H их орбиты в постоянном магнитном поле) поле меняется слабо и в основном приближении связь \mathbf{j} и \mathbf{E} является локальной, значение плотности тока в данной точке определяется напряженностью поля в той же самой точке. В хороших металлах условие $\delta \gg l, r_H$ автоматически обеспечивает условие $\omega \ll \nu$ (так как при $\omega \gg \nu$, $\delta = c/\omega_0 \approx 10^{-6}$ см; т. е. даже при комнатных температурах δ не велико по сравнению с длиной свободного пробега). Это позволяет в основном приближении по ω/ν воспользоваться связью \mathbf{j} и \mathbf{E} в статическом случае, полученной ранее. При этом может оказаться, что во внешнем постоянном магнитном поле $\hat{\xi}$ остается конечным и не равным нулю даже при $l \rightarrow \infty$ (т. е. при формальном стремлении $l/r_H \rightarrow \infty$, хотя $l \ll \delta$; разумеется, это возможно лишь для $r_H \ll \delta$), благодаря тому, что остаются конечными и не равными нулю связанные с холловским током компоненты тензора проводимости (где роль l играет r_H). Поскольку $l = \infty$ соответствует отсутствию диссипации энергии, такой случай означает распространение в металле незатухающей (в данном приближении) волны (геликоидальная или спиральная волна), соответствующей собственным колебаниям электронной плазмы в металле в магнитном поле (подробнее см. § 39).

Существенно подчеркнуть, что, поскольку отражение электронов от поверхности металла сказывается на расстояниях, во всяком случае порядка или меньших l , а $l \ll \delta$, то в основном

приближении по l/δ характер столкновения электрона с поверхностью не играет роли^{*)}.

В металлах уже на сравнительно низких частотах реализуется случай так называемого предельно аномального скин-эффекта^{**}), когда δ является наименьшим параметром размерности длины:

$$\delta \ll l, r_H, v/\omega, \quad (32.9)$$

Знания только этого обстоятельства оказывается достаточно для того, чтобы сделать ряд важных физических выводов. Прежде всего выясним, какие электроны дают основной вклад в плотность тока. В квазиклассическом случае, как известно,

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v} f d\mathbf{p} \quad \left(\mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad (32.10)$$

$$\rho' = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int (f - n_F) d\mathbf{p}, \quad (32.10a)$$

где ρ' — некомпенсированная ионами плотность заряда. В случае невзаимодействующих квазичастиц легко установить связь между f и равновесной функцией распределения $n_F(\epsilon)$ (о роли ферми-жидкостных эффектов см. § 40). В самом деле, электромагнитное поле приводит к тому, что квазичастица с квазимпульсом \mathbf{p} , имевшая энергию $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$, к данному моменту времени приобретет дополнительно энергию $\Delta\epsilon(\mathbf{p})$. Ясно, что число квазичастиц, имеющих в данный момент энергию ϵ , равно в линейном приближении по полю числу частиц, имевших «раньше» энергию $\epsilon - \Delta\epsilon$, т. е. $f(\mathbf{p}) = n_F(\epsilon - \Delta\epsilon)$ или, все в том же линейном приближении по полю (которого практически вполне достаточно и которое только и будет нас интересовать), $f(\mathbf{p}) = n_F(\epsilon) - (\partial n_F / \partial \epsilon) \Delta\epsilon$. Поскольку в равновесном состоянии (в отсутствие внешних полей) ток и некомпенсированный заряд в нормальных металлах отсутствуют,

$$\mathbf{j} = - \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v} \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \Delta\epsilon(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (32.11)$$

$$\rho' = - \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \Delta\epsilon(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (32.11a)$$

^{*)} В следующем приближении характер столкновения окажется существенным. При этом нужно учитывать, что строго зеркальное отражение является особым случаем: уже тогда, когда доля незеркально отраженных электронов порядка $q \sim r_H/l \ll 1$, существенно отличие отражения от чисто зеркального.

^{**}) Впервые аномальный скин-эффект был экспериментально обнаружен Лондоном [1], а теория его в простейшем случае свободных электронов и отсутствия постоянного магнитного поля построена в работах [2] и [3].

Отметим, что на достаточно высоких частотах, где $v/\omega \gg \delta$, т. е. $\omega \gg \omega_0(v/c)$, неравенство (32.9) нарушается, и проводимое в дальнейшем рассмотрение несправедливо. Этой области частот посвящен § 47.

Слагаемое с $n_F(\varepsilon)$ в j обратилось в нуль благодаря центральной симметрии функции $\varepsilon(\mathbf{p})$: $\varepsilon(-\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})$.

В отсутствие столкновений

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (32.12)$$

и потому

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}\mathbf{v}. \quad (32.13)$$

Если среднее время, которое квазичастица проводит в поле между столкновениями, есть τ_f (разумеется, оно имеет смысл только по порядку величины), то

$$\Delta \varepsilon \approx e\mathbf{E}\mathbf{v}\tau_f. \quad (32.14)$$

Учтем теперь «предельную аномальность» (32.9) скин-эффекта. Почти для всех электронов (кроме малой их части, которая успевает испытать столкновение прежде, чем выйдет из скин-слоя)

$$\tau_f \approx \frac{\delta}{v_n} \quad (32.15)$$

и

$$\Delta \varepsilon \approx e\mathbf{E}\mathbf{v}\delta/v_n, \quad (32.16)$$

т. е. растет обратно пропорционально v_n при $v_n \rightarrow 0$ ($v_n = 0$ соответствует электронам, летящим параллельно поверхности металла). При этом в (32.11) возникает в j_t расходимость в точке $v_n = 0$. (В j_n расходимости, очевидно, нет!) Следовательно, в основном приближении по аномальности скин-эффекта существенна только малая часть всех электронов — те из них, которые «скользят» вдоль поверхности под малыми углами к ней. Это обстоятельство оказывается определяющим при построении теории аномального скин-эффекта. Выясним, к каким следствиям оно приводит.

Поскольку в j_n расходимость отсутствует, а E_n определяется, согласно (32.4), из $j_n = 0$ (напомним, что, как было показано выше, достаточно рассматривать только одномерный случай), то

$$E_n \approx E_t.$$

Так как при этом член с $E_t v_t$ в (32.16) приводит для j в (32.11) к расходимости (при $l = \infty$), а $E_n v_n$ нет, то при определении j_t (единственно нужного нам для определения ξ) достаточно учитывать только E_t , положив формально $E_n = 0$, и

$$\dot{\varepsilon} = e\mathbf{E}_t \mathbf{v}_t. \quad (32.13a)$$

Возможность пренебречь нормальным полем связана с тем, что над «скользящими» электронами почти нормальное их движению поле E_n почти не производит работы. Отметим, что, по-

сколько (32.13а) уже линейно по E , а нас интересует только линейное приближение, все остальные величины можно брать при $E = 0$. В приведенных выше рассуждениях неявно предполагалось, что параметр «аномальности» является самым малым параметром задачи, и потому достаточно учитывать малость только по нему. Для конкретности будем рассматривать только этот практически наиболее важный случай. Распространение теории на случай, например, крайне острого резонанса, когда наибольшим является уже параметр ω/v и может понадобиться учет E_n , производится без труда (§ 36). Математическое доказательство всех сделанных утверждений приведено в работе [4].

То, что в плотность тока существенный вклад вносят только «скользящие» электроны, было связано с тем, что неравновесная добавка к функции распределения имеет резкий (дающий для $l = \infty$ расходимость при интегрировании) максимум вблизи $v_n = 0$. Естественно, вероятность для электрона в результате столкновения уйти из узкой области вблизи $v_n = 0$ в любую другую точку пространства квазиимпульсов значительно выше, чем вероятность попасть после столкновения именно в эту узкую «избранную» область. Значит, в интеграле столкновений, описывающем изменение функции распределения в результате столкновений как вследствие прихода электронов в данное состояние, так и за счет ухода их из данного состояния, нужно учитывать лишь последний член. Он, очевидно, пропорционален «избыточному» по сравнению с равновесным числу электронов в данном состоянии, так что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \nu(\mathbf{p}) (f(\mathbf{p}) - n_F(\varepsilon)), \quad (32.17)$$

$$\nu(\mathbf{p}) = \int W(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}', \quad (32.18)$$

где $\nu(\mathbf{p})$ — число столкновений в единицу времени, а $W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — вероятность перехода из \mathbf{p} в \mathbf{p}' . (Интегральный член $\int W(\mathbf{p}', \mathbf{p}) [f(\mathbf{p}') - n_F(\varepsilon(\mathbf{p}'))] d\mathbf{p}'$ мал по сравнению с (32.17), так как интегрирование, естественно, уменьшает «остроту» особенности.)

Таким образом, аномальность скин-эффекта позволяет последовательно ввести при любых температурах время свободного пробега электронов (что в статических задачах возможно только в исключительных случаях).

Приведенное выше рассуждение справедливо, разумеется, только если сама вероятность перехода $W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ является плавной функцией и не имеет острых максимумов в некоторой узкой области \mathbf{p} и \mathbf{p}' . В случае электрон-фоонных столкновений при низких температурах ($T \ll \Theta$) это не так: наиболее вероятно

рассеяние на малые углы порядка T/Θ . Поэтому можно учитывать только электроны, «уходящие» из области $v_n = 0$, если

$$\delta/l, \quad \delta/r_H, \quad \omega\delta/v \ll T/\Theta. \quad (32.18a)$$

В случае (32.18a) отклонение на угол порядка T/Θ выводит электрон из скин-слоя (т. е. из области, где электрическое поле не мало) и, таким образом, оказывается столь же существенным, как и отклонение на большие углы. При этом число столкновений $\nu_{эфф}$ оказывается пропорциональным числу фононов при низких температурах, т. е. порядка $(\Theta/\hbar)(T/\Theta)^3$; не появляется дополнительный множитель $(T/\Theta)^2$ (§ 24). «Эффективная» частота электрон-фононных столкновений при $T/\Theta \ll 1$ быстро возрастает при увеличении «аномальности» скин-эффекта (при выполнении условий (32.18a) в $(\Theta/T)^2$ раз) и оказывается существенной даже при весьма низких температурах, когда в статике важно только остаточное сопротивление. При $\hbar\omega > T$ роль температуры берет на себя $\hbar\omega$; оно и входит во все выписанные выше соотношения, так что

$$\nu_{эфф} \approx \frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{T + \hbar\omega}{\Theta} \right)^3. \quad (32.18б)$$

Заметим, что если неравновесная добавка к функции распределения имеет по каким-либо причинам острый максимум в еще более узкой области импульсного пространства (например, когда электроны вблизи некоторых избранных значений p обуславливают резонанс — см. § 35, 36), относительная роль «ухода» электронов из этой области по сравнению с их приходом в нее еще больше возрастает, а ограничение (32.18a) на аномальность ослабляется (в случае резонанса слева появляется дополнительный малый множитель $(\nu/\omega)^{1/2}$).

По аналогичным причинам аномальность скин-эффекта приводит к тому, что ферми-жидкостное взаимодействие оказывается несущественным: оно связано с интегральной по f — n_F добавкой к энергии в газовом приближении. Исключение представляет случай очень острого резонанса, когда именно он определяет уширение резонансной кривой и ее конечную высоту (подробнее см. [4] и § 40).

Покажем, наконец, что при предельно аномальном скин-эффекте мало существен характер отражения электронов от поверхности металла [5]. Это чрезвычайно важное обстоятельство позволяет получить решение в замкнутом виде, так как «исключение» из рассмотрения поверхности металла означает возможность рассмотрения задачи во всем пространстве и решения ее обычным методом Фурье.

Продолжим формально электрическое поле четным образом на область вне металла.

Если теперь вообще не учитывать столкновения электронов с поверхностью, то даже та часть «скользящих» электронов, которая сталкивалась с поверхностью, в ее отсутствие приобретет от четно продолженного поля примерно вдвое большую энергию. Но даже увеличение проводимости вдвое приведет к увеличению эффективной глубины скин-слоя δ и к уменьшению поверхностного сопротивления всего в $\sqrt{2} \approx 1,2$ раза (это видно из соображений размерности, если учесть, что связь j и E носит интегральный характер: так как $l, r_H, v/\omega \gg \delta$, ток в данной точке определяется напряженностью поля во всем скин-слое толщины δ , который проходит электрон, $j \approx \sigma \frac{\delta}{l} E$ и $\delta \sim \sqrt{\frac{2}{\sigma \omega}}$ — см. также начало § 33).

Значит, с точностью до несущественного вещественного численного множителя, мало отличающегося от единицы*), можно решать задачу во всем пространстве**). При этом электрическое поле является четной функцией, вообще говоря, имеющей разрыв производной в начале координат (ибо, если $E_t(\xi) = E_t(-\xi)$, ξ — координата вдоль нормали к поверхности, то

$$E'_t(+0) = -E'_t(-0),$$

и когда $E'_t(+0) \neq 0$, разрыв обязателен; зависимость $E'_t(+0)$ от $E_t(0)$ и определяет, согласно (32.7) и (32.6), поверхностный импеданс).

Поскольку при нормальном скин-эффекте характер отражения от границы в основном приближении вообще несуществен, предложенное выше рассмотрение допустимо всегда, при любом характере скин-эффекта.

Резюмируем сказанное в этом параграфе.

1. В металлах всегда законно пренебрежение током смещения и нескомпенсированной плотностью заряда.

2. Для решения любой внешней по отношению к металлу задачи достаточно определить поверхностный импеданс, т. е. связь тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности металла (см. формулу (32.7)).

3. С точностью до несущественного численного вещественного множителя, близкого к единице, для определения импеданса достаточно рассмотреть металлическое пространство в поле $E(-\xi) = E(\xi)$ с разрывом производной в начале координат, где $\xi = 0$ — плоскость поверхности металла. (Исключение — § 41.)

*) Особым случаем может явиться строго зеркальное отражение (см. примечание на стр. 275), если электрон после столкновения возвращается к поверхности, как это имеет место в строго параллельном поверхности магнитного поле (см. §§ 22, 41 и 46, а также работу [6]).

**) Строгое доказательство этого утверждения содержится в [7].

4. В случае, когда наименьшим параметром является параметр, связанный с аномальностью скин-эффекта, законно:

а) введение времени релаксации электронов; для электрон-фононных столкновений при низких температурах $T \ll \Theta$ оно порядка $\frac{\hbar}{\Theta} \left(\frac{\Theta}{T + \hbar\omega} \right)^3$;

б) пренебрежение $E_{\xi}(\xi)$;

в) пренебрежение ферми-жидкостными эффектами, т. е. (благодаря пункту «а») рассмотрение одноэлектронной задачи в приближении времени свободного пробега $1/v(\mathbf{p})$.

Решающими упрощениями, позволяющими получить решение задачи в замкнутом виде, являются пункты 3 и 4а.

Заметим в заключение, что благодаря $\hbar\omega_0 \gg T$

$$-\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \approx \delta(\varepsilon - \varepsilon_F), \quad (32.19)$$

где ε_F — граничная фермиевская энергия, а n_F — равновесная фермиевская функция.

Мы не будем излагать теорию нормального скин-эффекта (ее можно найти в любом курсе электродинамики сплошных сред). Приведем только выражение для главных значений тензора поверхностного импеданса

$$\zeta_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega \rho_{1,2}}{4\pi i}}. \quad (32.20)$$

Здесь $\rho_{1,2}$ — главные значения тензора сопротивления в плоскости границы металла. Наложение магнитного поля даже в низкочастотной области может существенно изменить значение импеданса (см. ниже).

§ 33. Аномальный скин-эффект в отсутствие постоянного магнитного поля

Прежде чем перейти к построению количественной теории аномального скин-эффекта, покажем, как на основании выводов предыдущего параграфа можно представить себе картину явления.

Поскольку основной вклад в плотность тока вносят «скользящие» электроны,двигающиеся в скин-слое, т. е. в области неизменного по порядку величины электрического поля, связь плотности тока с напряженностью поля можно приближенно записать в виде обычного «локального» закона Ома. Следует лишь учесть, что плотность тока пропорциональна числу обуславливающих ток зарядов, а относительное количество электронов,двигающихся под углом $\lesssim \delta/l$ (δ — характерная толщина скин-слоя), порядка δ/l . Поэтому

$$\mathbf{j} = \sigma_{\text{эф}} \mathbf{E}, \quad \sigma_{\text{эф}} = \alpha \sigma \frac{\delta}{l}, \quad \alpha \approx 1. \quad (33.1)$$

Можно думать, что (33.1) сохранит свой вид, даже если δ комплексна (комплексность δ учитывает не только затухание поля с глубиной, но и изменение его фазы).

Для «обычного» закона Ома в случае полупространства, на которое нормально поверхности падает монохроматическая волна частоты ω , уравнения (32.4), (32.6а) для напряженности электрического поля E_t принимает вид

$$E_t'' = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_{\text{эфф}} E_t = \frac{4\pi i \omega \alpha \delta}{c^2 l} E_t,$$

откуда комплексная глубина скин-слоя

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{4\pi i \omega \sigma_{\text{эфф}}}{c^2} = \frac{4\pi i \omega \sigma \delta \alpha}{c^2 l} \quad (33.1a)$$

и

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{c^2 l}{4\pi i \omega \sigma \alpha}}, \quad (33.2)$$

а (см. формулу (32.8а))

$$\zeta = \zeta' + i\zeta'' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega^2 l}{4\pi c \alpha \sigma} \right)^{1/3}. \quad (33.3)$$

Точный расчет (см. ниже) подтверждает эту формулу (полученную подобным образом в работе [2]) и дает $\alpha = 3^5 \sqrt{3} \pi / 2^8$. Существенно, что формула (33.3) правильно описывает основные особенности импеданса при аномальном скин-эффекте: независимость от длины пробега (и, следовательно, от температуры), так как $\sigma \sim l$; зависимость от частоты ($\zeta \sim \omega^{2/3}$, при нормальном скин-эффекте, согласно (32.20), $\zeta \sim \omega^{1/2}$); комплексность ζ ($\zeta''/\zeta' = \sqrt{3}$, при нормальном скин-эффекте $\zeta'' = \zeta'$).

Займемся теперь построением последовательной теории аномального скин-эффекта.

Согласно формуле (32.11), для этого необходимо подсчитать

энергию, приобретенную электроном с квазимпульсом p к моменту t в точке ξ (рис. 75), используя (32.13а), причем скорость электрона v нужно считать постоянной. Путь от ξ' до $\xi' + d\xi'$ электрон пройдет за время $|d\xi'/v_\xi|$ и приобретет за это время в поле $E_t \exp(i\omega t)$ (амплитуда поля не выделена никаким значком, так как это не может привести к недоразумению) энергию

$$de' = eE_t(\xi') v_t \left| \frac{d\xi'}{v_\xi} \right| \exp \left\{ i\omega \left(t - \left| \frac{\xi - \xi'}{v_\xi} \right| \right) \right\}$$

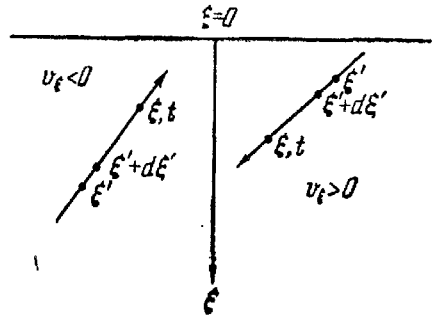


Рис. 75. Электроны, движущиеся к поверхности металла ($v_\xi < 0$) и от нее ($v_\xi > 0$).

(последний множитель учитывает изменение фазы поля со временем). Вероятность того, что электрон «донесет» эту энергию до точки ξ , т. е. не столкнется на пути от ξ' до ξ (за время $\left| \frac{\xi - \xi'}{v_\xi} \right|$), есть $\exp \left\{ - \left| \frac{\xi - \xi'}{v_\xi} \right| v(\rho) \right\} \equiv \exp \left\{ - \left| \frac{\xi - \xi'}{v_\xi \tau^*} \right| \right\}$.

В результате полная энергия $\Delta \varepsilon$ равна:

$$\Delta \varepsilon = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\xi} e \mathbf{E}_t(\xi') v_t \frac{d\xi'}{v_\xi} \exp \left\{ - \frac{|\xi - \xi'|}{v_\xi \tau^*} \right\} & v_\xi > 0, \quad \mathbf{E}(-\xi) = \mathbf{E}(\xi), \\ \int_{\infty}^{\xi} e \mathbf{E}_t(\xi') v_t \frac{d\xi'}{v_\xi} \exp \left\{ - \frac{|\xi - \xi'|}{v_\xi \tau^*} \right\} & v_\xi < 0; \end{cases} \quad (33.4)$$

$$\frac{1}{\tau^*} = v(\rho) + i\omega \equiv \frac{1}{\tau} + i\omega. \quad (33.4a)$$

Подставим (33.4) в (32.11) и сведем интегрирование по всем v_ξ к интегрированию по $v_\xi > 0$, используя центральную симметрию функции $v(\rho)$: $v(-\rho) = v(\rho)$. Получим для j_t (которое только и требуется):

$$j_\alpha(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(|\xi - \xi'|) E_\beta(\xi') d\xi', \quad (33.5)$$

где

$$K_{\alpha\beta}(W) = - \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\rho \exp \left(- \frac{W}{|v_\xi| \tau^*} \right) \frac{v_\alpha v_\beta}{|v_\xi|}. \quad (33.6)$$

(Изложенный метод получения связи между j и E , использующий идеи работы [8], конечно, эквивалентен решению кинетического уравнения.) Из уравнений (32.4) и (32.6a) для монохроматической волны $E_t \exp(i\omega t)$ находим:

$$E''_\alpha = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(|\xi - \xi'|) E_\beta(\xi') d\xi'. \quad (33.7)$$

Обратим внимание на то, что уравнение (33.7) допускает четное продолжение поля: $E_\alpha(-\xi) = E_\alpha(\xi)$.

Это естественно, так как при вычислении вклада электронов,двигающихся от границы, мы учли, что $E_t(-\xi) = E_t(\xi)$. Строго говоря, формула (33.5) справедлива только при зеркальном отражении электронов от границы образца [3]. При диффузном характере отражения выражение для ядра интегральной связи между полем и током имеет также вид (33.6), однако в формуле, аналогичной (33.5), интегрирование ведется от нуля до беско-

нечности, что весьма затрудняет получение замкнутого выражения для импеданса. Однако, как было сказано в предыдущем параграфе, в случае предельно аномального скин-эффекта импеданс несущественно зависит от характера отражения электронов.

Полученное уравнение немедленно решается, если взять компоненты Фурье от обеих частей равенства. Следует лишь учесть, что (см. § 32) $E'_\alpha(\xi)$ имеет скачок при $\xi=0$, и потому, интегрируя по частям, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} E''_\alpha(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{\infty} = -2E'_\alpha(+0) - k^2 e_\alpha(k), \quad (33.8)$$

где

$$e_\alpha(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} E_\alpha(\xi) d\xi = 2 \int_0^{\infty} \cos k\xi \cdot E_\alpha(\xi) d\xi, \\ E_\alpha(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ik\xi} e_\alpha(k) dk, \quad (33.9)$$

а (полагая $\xi = \xi' + \xi''$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(|\xi - \xi'|) E_\beta(\xi') d\xi' = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' E_\beta(\xi') e^{-ik\xi'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} K_{\alpha\beta}(|\xi - \xi'|) d\xi = e_\beta(k) K_{\alpha\beta}(k), \quad (33.10)$$

$$K_{\alpha\beta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(|\xi|) e^{-ik\xi} d\xi = 2 \int_0^{\infty} K_{\alpha\beta}(\xi) \cos k\xi d\xi. \quad (33.11)$$

Используя (33.8) — (33.11), из (33.7) находим:

$$-k^2 e_\alpha(k) - 2E'_\alpha(0) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} K_{\alpha\beta}(k) e_\beta(k), \quad (33.12)$$

где, согласно (33.6) и (33.11),

$$K_{\alpha\beta} = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\substack{\varepsilon = \varepsilon_F \\ v_\xi > 0}} \frac{\tau^* v_\alpha v_\beta}{v} \frac{ds}{1 + (k v_\xi \tau^*)^2}. \quad (33.13)$$

При записи (33.13) использовано, что $-\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \approx \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ — см.

(32.19) и что $dp = \frac{d\varepsilon ds}{v}$, где ds — элемент площади поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon$. Естественно, если имеется несколько ветвей

спектра, соответствующих различным сортам квазичастиц, следует просуммировать (33.12) по всем ветвям.

Из (33.12)

$$E_{\alpha}(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k\xi dk \left(k^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \widehat{K}(k) \right)_{\alpha 3}^{-1} E'_{\beta}(0),$$

так что, согласно (32.8а),

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{2i\omega}{\pi c} \int_0^{\infty} dk \left(k^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \widehat{K}(k) \right)_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (33.14)$$

Используя условие предельной аномальности скин-эффекта, легко убедиться, что существенны только $|k v \tau^*| \gg 1$ и, значит, в (33.13) существенны, как и было показано в § 32, только $v_{\xi} \ll 1$. В соответствии с этим для определения ζ достаточно асимптотики (33.13). Используя тот факт, что $ds = \frac{do}{\kappa}$ (do — телесный угол в пространстве скоростей), находим после вычисления асимптотики:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\pi}{k} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{n_{\alpha}(\varphi) n_{\beta}(\varphi)}{\kappa(\varphi)} \equiv \frac{3\pi}{4} \frac{B_{\alpha\beta}}{k}, \quad n = \frac{v}{v}, \quad (33.15)$$

где κ — гауссова кривизна, φ — угол, отсчитываемый по «пояску» $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$, $v_{\xi}(\mathbf{p}) = 0$.

Приводя тензор $B_{\alpha\beta}$ к главным осям, выбирая их в качестве осей координат в плоскости $\xi = 0$ и записывая импеданс в этих осях, получим:

$$\zeta_{\alpha} = (1 + i\sqrt{3}) \frac{2}{9} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi^2 c B_{\alpha}} \omega^2 \right)^{1/3}. \quad (33.16)$$

При предельно аномальном скин-эффекте могут быть получены точные формулы для импеданса в предельных случаях чисто зеркального и чисто диффузного рассеяния электронов от поверхности [3], [9]. В соответствии с выводами § 32 отражение слабо сказывается на импедансе: при зеркальном отражении формула для импеданса в точности совпадает с (33.16), при диффузном отличается от (33.16) множителем $9/8$.

Измерения поверхностного импеданса, как ясно из (33.15) и (33.16), позволяют непосредственно определить весьма важную характеристику электронного спектра — среднюю по «пояску» $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$, $v_{\xi} = 0$ обратную гауссову кривизну ферми-поверхности.

Для выяснения анизотропии приходится использовать результаты измерений на различных гранях монокристаллического

образца. В работе [10] удалось по измерениям импеданса меди при аномальном скин-эффекте восстановить форму ее ферми-поверхности.

Если закон дисперсии изотропен (калий, натрий и др.), то формуле (33.16) можно придать вид

$$\xi = (1 + i\sqrt{3}) \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\sqrt{3} \omega^2 l}{3\pi^2 c\sigma} \right)^{1/3}, \quad (33.17)$$

позволяющий использовать измерение импеданса в условиях аномального скин-эффекта как метод измерения длины свободного пробега электронов.

§ 34. Аномальный скин-эффект в постоянном магнитном поле

Так же как и в предыдущем параграфе, начнем с обсуждения физической картины явления. Выясним зависимость импеданса от частоты, магнитного поля, длины свободного пробега, определим наиболее интересные области, а затем уже в этих областях построим количественную теорию и проведем более детальное исследование результатов.

Как было показано в начале предыдущего параграфа, вычисление импеданса сводится, по существу, к записи эффективной проводимости $\sigma_{\text{эфф}}$ в соответствующих условиях. Для простоты ограничимся случаем замкнутых орбит, когда в постоянном магнитном поле \mathbf{H} электрон движется по спирали с осью вдоль магнитного поля; радиус спирали $r_H \approx \approx cr_{\perp}/eH$, где r_{\perp} — проекция импульса электрона на плоскость, перпендикулярную \mathbf{H} . Разумеется, речь будет идти только об основном приближении.

1. Пусть частота переменного поля относительно низкая:

$$\omega \ll \nu, \quad (34.1)$$

так что за время свободного пробега переменное поле в основном приближении не меняется, нестационарность поля проявляется только в возникновении очень тонкого скин-слоя.

Различные электроны проходят в скин-слое разный путь в зависимости от того, под каким углом они влетают в скин-слой (рис. 76). Наибольший путь AB в скин-слое в течение

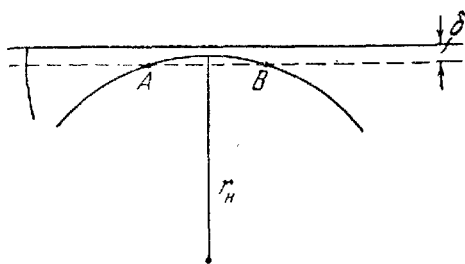


Рис. 76. Электроны проходят в скин-слое разный путь в зависимости от того, под каким углом они влетают в скин-слой.

одного оборота, очевидно, порядка $\sqrt{r_H \delta}$; его проходят «скользящие» электроны, которые, как было показано в § 32, только и существенны при аномальном скин-эффекте.

Если

$$\sqrt{r_H \delta} \gg l, \quad \text{т. е.} \quad r_H \gg \frac{l^2}{\delta} = r_1, \quad (34.2)$$

где $r_H = cr_F/eH$ — характерный радиус орбиты, то в основном приближении по r_1/r_H все «скользящие» электроны проходят в скин-слое без столкновений максимально возможный путь (порядка l) и магнитное поле не сказывается на импедансе.

Магнитное поле сокращает путь в скин-слое только для тех электронов, у которых $cr_{\perp}/eH \leq l^2/\delta$ (см. (34.2)); их оно «преждевременно» выводит из скин-слоя. Так как существенны только электроны ферми-поверхности (см. (32.11), (32.19)), а интересующие нас электроны принадлежат сектору радиуса $eHl^2/c\delta$ на поверхности радиуса $r_F \sim eHr_H/c$, то относительное число этих электронов (и соответственно относительный их вклад в импеданс) порядка

$$\Delta\xi/\xi \sim (l^2/\delta r_H)^2. \quad (34.3)$$

Это значит, что они обеспечивают заметный вклад в импеданс уже в весьма слабых полях, для которых $r_H \sim r_1$. Оценка показывает, что в весьма чистых металлах эти поля могут составлять 0,1—1 э. Когда по мере роста магнитного поля достигается

$$\sqrt{r_H \delta} \ll l, \quad (34.4)$$

хотя все еще

$$r_H \gg l, \quad (34.5)$$

«скользящие» электроны проходят в скин-слое путь порядка $\sqrt{r_H \delta} \ll l$, что в $\sqrt{r_H \delta}/l$ раз уменьшает проводимость (так как статическая σ пропорциональна l). Максимальный путь в скин-слое проходят те частицы, которые входят в скин-слой или выходят из него под углом порядка $\delta/\sqrt{r_H \delta}$; так как все углы равновероятны, то этим и определяется относительное число «скользящих» электронов. Таким образом,

$$\sigma_{\text{эфф}} \approx \sigma \frac{\sqrt{r_H \delta}}{l} \frac{\delta}{\sqrt{r_H \delta}} = \sigma \frac{\delta}{l}, \quad (34.6)$$

т. е. такого же порядка, как и в отсутствие магнитного поля, и в основном приближении $\sigma_{\text{эфф}}$ в магнитном поле уже не меняется. Область $r_H \approx r_1$ не допускает, естественно, простого качествен-

ного расчета; изменение импеданса в ней может оказаться не-монотонным, таким, какое наблюдалось в работах [11, 12]*).

Если магнитное поле направлено под заметным углом к поверхности металла, то ситуация не меняется и при

$$r_H \ll l, \quad (34.7)$$

так как электроны уходят из скин-слоя за время $\delta/v \ll \Omega^{-1}$, малое по сравнению со временем одного оборота. (Если $\delta \gg r_H$, ситуация существенно усложняется — см. § 41.)

Если же магнитное поле строго параллельно поверхности (так что угол наклона мал по сравнению с r_H/l), то эффективная проводимость возрастает по сравнению с (34.6) в число раз, равное числу возвратов в скин-слой за время свободного пробега, т. е. в $\sim l/2\pi r_H$ раз:

$$\sigma_{\text{эфф}} \approx \alpha \sigma \frac{\delta}{2\pi r_H}, \quad \alpha \approx 1. \quad (34.8)$$

В результате (см. (33.1)) импеданс по сравнению с (33.3) умножается на $(l/2\pi r_H)^{-1/2}$:

$$\zeta(H) \approx \zeta(0) \left(\frac{l}{2\pi r_H} \right)^{-1/2} \sim (lH)^{-1/2}. \quad (34.9)$$

(Впервые этот результат строго был получен в [13].)

2. Рассмотрим теперь случай относительно высокой частоты переменного поля

$$\omega \gg \nu, \quad (34.10)$$

когда электрон обычно приобретает энергию от поля в течение времени порядка периода поля; поскольку диссипации энергии при $\nu = 0$ в отсутствие поверхности не происходит, роль ν играет $i\omega$. Ясно, что в общем случае переменное поле приводит к замене ν на $\nu + i\omega$ (см., например (33.4а)), т. е. замене τ на τ^* . В результате можно просто переписать все результаты предыдущего пункта, производя всюду (в том числе и в $\sigma \sim \tau$) такую замену.

Дополнительное отличие появляется только в связи с тем, что раньше, сколько бы раз электрон ни появлялся в скин-слое, он заставлял поле почти неизменным. Теперь же, если

$$r_H \ll l, \quad (34.11)$$

но

$$\Omega \lesssim \omega, \quad (34.12)$$

нельзя использовать формулу (34.8): она будет иметь место, лишь если возможно «синхронное» ускорение электрона полем, т. е. резонанс; в противном случае время, в течение которого

*) По этому поводу см. §§ 22 и 46.

электрон будет ускоряться, может определяться одним оборотом, так что сохранится формула (34.6). Поскольку случай резонанса представляет, естественно, особый интерес, мы отдельно рассмотрим его в следующем параграфе.

Отметим еще два обстоятельства. До сих пор обсуждался только один тип квазичастиц. Наличие нескольких сортов квазичастиц не меняет результатов даже в случае равенства чисел электронов и дырок (в отличие от гальваномангнитных явлений в статике — см. § 27), так как из изложенного выше ясно, что существенна детальная структура орбит в узком скин-слое, где она, конечно, различна для дырок и электронов.

Мы не рассматривали также ограниченных образцов. Наличие второй границы при параллельном поверхности магнитном поле весьма интересно сказывается на результатах. Если толщина пластины D мала по сравнению с длиной свободного пробега l , но велика по сравнению с толщиной скин-слоя δ :

$$\delta \ll D \ll l, \quad (34.13)$$

то независимо от величины ω/v при H , большем совершенно определенного (с точностью до δ/D) значения H_D

$$H_D = \frac{cp_s^{\max}}{eD} \quad (34.14)$$

(s — направление на поверхности пластины, перпендикулярное магнитному полю), все орбиты начинают «помещаться» в пластине, так что все электроны многократно возвращаются в скин-слой. В результате при магнитном поле $H = H_D$ имеет место излом производной поверхностного импеданса по магнитному полю [14].

Это свойство получило название размерного эффекта и служит важным способом определения формы поверхности Ферми [15].

§ 35. Физическая картина циклотронного резонанса

Хорошо известно, что свободный электрон движется в постоянном магнитном поле H по спирали с осью вдоль магнитного поля. В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, его движение представляет собой равномерное вращение по окружности с частотой $\Omega = eH/mc$, не зависящей ни от величины, ни от направления скорости электрона. Независимость частоты обращения от скорости электрона сохраняется и в несколько более общем случае, при квадратичном законе дисперсии, когда поверхность постоянной энергии в импульсном пространстве представляет собой эллипсоид (§ 4); именно этот случай зачастую имеет место в полупроводниках, где зона является почти пустой или

почти полностью заполненной. Естественно ожидать, что в полупроводнике, помещенном в постоянное магнитное поле и в перпендикулярное ему циркулярно поляризованное высокочастотное электромагнитное поле частоты $\omega \sim \Omega$, будет иметь место резонанс. Этот резонанс был независимо предсказан Дорфманом [16] и Динглом [17] и затем неоднократно наблюдался на полупроводниках, сыграв весьма значительную роль в установлении закона дисперсии последних (см., например, [18]).

Весьма существенным при рассмотрении резонанса Дорфмана — Дингла было то, что, благодаря весьма малой концентрации носителей, электрическое поле в полупроводниках можно считать однородным (ниже будет показано, что это не всегда так даже в полупроводниках).

К металлам приведенные рассуждения неприменимы по двум причинам.

Прежде всего, как подчеркивалось в § 32, весьма высокая концентрация носителей в металле приводит к резкой неоднородности электромагнитного поля на расстоянии радиуса одной орбиты (предельно аномальный скин-эффект). В самом деле, для наличия существенного резонанса, во всяком случае, необходимо, чтобы электрон между двумя столкновениями (с примесями, искажениями решетки, фононами, другими электронами) успел совершить хотя бы несколько оборотов по орбите, т. е. чтобы выполнялись неравенства $\omega\tau > 1$, $l > r_H$. В этом случае глубина скин-слоя δ не зависит от τ и (§ 32) порядка c/ω_0 , где плазменная частота $\omega_0 \approx (ne^2/m)^{1/2}$. При обычной для металлов плотности электронов $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ глубина скин-слоя порядка $\delta \approx 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ см}$, в то время как радиус орбиты r_H даже для сантиметровых длин волн, которые соответствуют резонансным магнитным полям $\sim 10^4 \text{ э}$, порядка $r_H \approx v/\omega \approx 10^{-3} \text{ см}$.

Резкая неоднородность высокочастотного поля совершенно меняет механизм приобретения электроном энергии от поля и делает этот механизм чрезвычайно сильно зависящим от ориентации постоянного магнитного поля по отношению к поверхности металла (§ 34). В наклонном по отношению к поверхности металла магнитном поле практически все электроны (за исключением малой, порядка δ/r_H , доли электронов, имеющих скорость вдоль магнитного поля $\approx \omega\delta$) при первом же обороте уходят из скин-слоя, ускоряясь лишь на малой дуге (рис. 77). Совершенно ясно, что наличие магнитного поля в этом случае слабо влияет на поверхностный импеданс металла (этот факт был строго доказан в работах [7, 19—21]).

В строго параллельном поверхности металла поле имеются электроны, которые не сталкиваются с поверхностью и при каждом обороте вновь возвращаются в скин-слой; последний в этом случае выполняет роль, совершенно аналогичную роли зазора

в циклотроне. Если имеет место «синхронизация» и частота ω равна или кратна частоте Ω (время одного оборота равно или в целое число раз больше периода высокочастотного поля), то, как отмечалось в § 34, электроны $1/2\pi n$ раз ускоряются в скин-слое, обеспечивая специфический циклотронный резонанс.

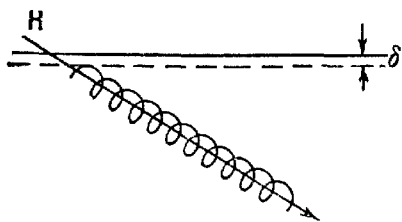


Рис. 77. Движение электрона в магнитном поле, наклонном к поверхности металла.

Вторая причина, усложняющая циклотронный резонанс в металлах, также обусловлена основной особенностью металлов — высокой концентрацией носителей тока, приводящей к заполнению ими конечной части зоны проводимости (исключением являются полуметаллы типа висмута — см. ниже). Поскольку электроны, уча-

ствующие в проводимости, не сосредоточены у края зоны, заранее, как мы знаем, нет оснований ожидать, что их закон дисперсии окажется близким к квадратичному*).

При неквадратичном законе дисперсии траектория электрона в импульсном пространстве, согласно § 4, описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbf{p}) &= \epsilon, \\ p_z &= \text{const.}\end{aligned}$$

Из уравнения движения вытекает также, что проекция траектории в координатном пространстве на плоскость xy , перпендикулярную магнитному полю, подобна траектории в импульсном пространстве, повернутой на 90° , с коэффициентом подобия c/eH (§ 4).

Электроны, движущиеся по незамкнутым в глубине металла орбитам, т. е. совершающие инфинитное движение, имеют бесконечный период обращения и не возвращаются в скин-слой. Очевидно, эти электроны во всяком случае не могут принимать участия в резонансе. (Возможен, однако, резонанс в наклонном магнитном поле, если направление «открытости» параллельно поверхности металла, см. [22].)

Будем рассматривать только замкнутые орбиты, которые практически всегда имеются при любом направлении магнитного поля, даже если граничная ферми-поверхность не является замкнутой.

Электроны,двигающиеся по замкнутым орбитам, совершают периодическое движение, однако уже с частотами, зависящими

*) Исключение составляют щелочные металлы (K, Na, Rb, Cs), у которых поверхность Ферми близка к сфере.

от p_z , так как

$$\Omega = eH/m^*c, \text{ а } m^* = (1/2\pi)\partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon.$$

Зависимость m^* от энергии также, конечно, имеется, но ее учитывать не приходится, так как в металлах существенны только электроны с энергиями, близкими к граничной энергии ϵ_F .

Поэтому в точном резонансе*) могут находиться только электроны отдельных сечений, для которых $\Omega(p_z) = \omega$. Это сразу же делает неочевидной возможность резонанса при произвольном законе дисперсии, и выяснение существования резонанса требует более подробного рассмотрения.

Однако уже из общих соображений можно понять, какие электроны находятся в более «привилегированном» положении.

При малом изменении p_z вблизи p_0 частота Ω , вообще говоря, линейно изменяется с $p_z - p_0$. Однако, если p_0 соответствует экстремальному значению циклотронной частоты ($\Omega'(p_0) = 0$), частота Ω меняется значительно более медленно, квадратично по $(p_z - p_0)$. Поэтому вблизи такого сечения значительно большее число электронов имеет частоту обращения, близкую к $\Omega(p_0)$, и потому именно на этой частоте естественно ожидать резонанса.

«Выделенными» оказываются, как обычно, также частоты, соответствующие границам (по p_z) непрерывного спектра (наибольшему и наименьшему значениям p_z), т. е. частоты, соответствующие опорным точкам ферми-поверхности (рис. 78, точки А и В,

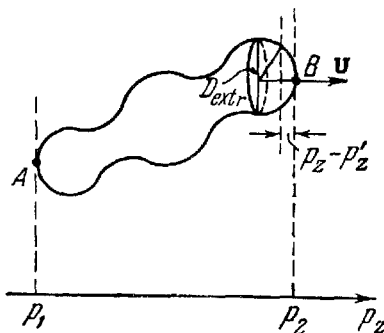


Рис. 78. $p_{1,2}$ — значения p_z , соответствующие опорным точкам поверхности Ферми ($v(p_{1,2}) \parallel H$).

в которых скорость параллельна магнитному полю). На этих частотах также естественно ожидать резонанса.

Отметим относительную глубину и полуширину резонансного минимума импеданса. (Поскольку при резонансе проводимость резко возрастает, сопротивление имеет минимум.) Вдали от резонанса электроны при каждом возвращении в скин-слой заставляют новую фазу электрического поля, то ускоряются, то замедляются полем, и полученная ими от поля энергия по порядку величины такая же, как при одном «посещении» скин-слоя. Если Ω не зависит от p_z (как это имеет место, например, при квадратичном законе дисперсии), то в резонансе ($\omega = q\Omega$, q — целое)

*) Здесь и в дальнейшем, когда указывается резонанс на определенной частоте, имеется в виду и резонанс на кратных частотах.

электроны при каждом попадании в скин-слой синхронно ускоряются полем, так что полученная ими от поля энергия (а значит, и проводимость) возрастает пропорционально числу оборотов в скин-слое (за время свободного пробега), т. е. в $l/2\pi r_H \sim \sim \Omega\tau/2\pi$ раз. Следовательно, относительная глубина резонансного минимума импеданса ζ , пропорционального $\delta \sim (\sigma_{эфф}/\sigma)^{-1/2}$ (см. (33.1a)), порядка $(\Omega\tau/2\pi)^{-1/2}$. (За счет того что глубина затухания и период осцилляции волны в металле вблизи резонанса оказываются резко различными, при малом отклонении от строгого резонанса достигается еще более глубокий минимум — см. § 37.)

Если Ω существенно зависит от p_z и резонанс реализуется на экстремальном значении Ω , то синхронно ускоряются полем те электроны, для которых $|\Omega(p_z) - \omega/q| \sim 1/\tau$, т. е. для которых $\Delta p_z/p_0 \sim 1/\sqrt{\Omega\tau}$ (p_0 — характерное значение p_z , например p_2 — p_1 ; см. рис. 78). Так как число оборотов, совершаемых этими электронами, равно $l/2\pi r_H \sim \Omega\tau/2\pi$, то именно они дают основной вклад в проводимость, обеспечивая ее резонансное возрастание в $(1/\sqrt{\Omega\tau})(\Omega\tau/2\pi) = \sqrt{\Omega\tau}/2\pi$ раз. Таким образом, относительно глубина минимума ζ порядка $(2\pi/\sqrt{\Omega\tau})^{1/2}$. При этом, как и в предыдущем случае, возможен более глубокий минимум на частоте, близкой к резонансной (§ 37).

Наконец, если Ω существенно зависит от p_z и резонанс происходит на частоте, соответствующей опорной точке (например, p_1 , где $\Delta\Omega(p_z) = \Omega'(p_1)(p_z - p_1) \sim \Omega\Delta p_z/p_0$), то при $\Delta\Omega \sim 1/\tau$ электроны синхронно ускоряются порядка $\Omega\tau$ раз.

В интересующем нас случае аномального скин-эффекта (который, как неоднократно подчеркивалось, практически только и интересен в металлах) следует учесть, что радиус орбиты вблизи опорной точки мал (в опорной точке он равен нулю) и потому относительный путь, проходимый в скин-слое, по сравнению с «другими» электронами соответственно возрастает (см. рис. 78) пропорционально $r_0/r(p_z) \sim \sqrt{p_0/\Delta p_z} \sim \sqrt{\Omega\tau}$ (r_0 — характерный ларморовский радиус). В результате при аномальном скин-эффекте возрастание проводимости при резонансе на опорной точке, так же как и раньше, обеспечивают электроны, совершающие максимальное число оборотов в скин-слое; так как их относительное количество порядка $\Delta p_z/p_0 \sim (\Omega\tau)^{-1}$, то относительное возрастание проводимости порядка $\Omega\tau \cdot (\Omega\tau)^{-1} \sqrt{\Omega\tau} = \sqrt{\Omega\tau}$ и относительная глубина резонанса такая же, как при резонансе на экстремальной частоте. Заметим, что при нормальном скин-эффекте малость радиуса орбиты вблизи опорной точки несущественна и резонанс на соответствующей этой точке граничной частоте сказывается логарифмическим.

Полуширина $\Delta\Omega$ резонансной кривой во всех случаях определяется, естественно, размытием резонансной частоты за счет столкновений и имеет порядок $1/\tau$.

Есть еще одна частота, на которой в следующем по аномальности приближении возможен циклотронный резонанс [23]. Ее происхождение обусловлено особым характером затухания высокочастотного электромагнитного поля в металле, помещенном в постоянное магнитное поле. В § 38 будет показано, что переменное поле имеет всплески в глубине металла, в частности на расстояниях, кратных D_{extr} — экстремальному по p_z диаметру орбиты (см. рис. 78). Электроны с таким диаметром находятся в «привилегированном» положении, и потому на соответствующей циклотронной частоте возможен резонанс. Полуширина этого резонанса (§ 36) определяется, помимо $(\omega\tau)^{-1}$, соотношением между эффективной глубиной скин-слоя и диаметром орбиты $\delta_{\text{эфф}}/r \sim (\omega_0 D/c)^{-2/3} \sim \rho$ и имеет порядок κ

$$\kappa \approx (\omega\tau)^{-1} + \rho^{1/2}, \quad (35.1)$$

где ω_0 — плазменная частота; относительная резонансная добавка порядка $\kappa^{-2}\rho^2$.

Циклотронный резонанс в металлах на экстремальных частотах был предсказан в 1956 г. [7]*.

Следует заметить, что (см. [5]) циклотронный резонанс может наблюдаться не только на «хороших» металлах, но и на «плохих», имеющих малое число носителей, таких, как висмут, сурьма, мышьяк, графит и т. п., и на легированных полупроводниках с концентрацией носителей порядка 10^{17} см^{-3} . Это связано с тем, что в резонансе проводимость резко (в $\Omega\tau$ раз при квадратичной дисперсии) возрастает, глубина скин-слоя уменьшается и может оказаться меньше радиуса ларморовской орбиты при данном направлении магнитного поля. Быть может, именно этим обусловлены расхождения экспериментов с обычной теорией, которые отмечаются рядом авторов (см., например, [24]).

Вскоре после того как циклотронный резонанс был предсказан теоретически, он был обнаружен экспериментально [25] на олове и — еще очень слабо выраженный — на меди.

С тех пор циклотронный резонанс наблюдался, кроме олова [26] и меди [27], на свинце [28], индии [29], цинке [30], алюминии [31], висмуте [32], ртути [33], галлии [34], серебре [35], золоте [36], натрии и калии [37], вольфраме [38], кадмии [39], сурьме [40], магнии [41]. Для всех этих металлов были определены

*) Для квадратичного закона дисперсии циклотронный резонанс содержался уже в формулах (1) — (2) работы [13], где плотность тока j при $\Omega\tau \gg 1$ пропорциональна $\gamma/\text{sh}(\pi\gamma)$, а $\gamma = r(1 + i\omega\tau)/l = i\omega/\Omega + 1/\Omega\tau$, так что $j \sim 1/\text{sin}(\pi\omega/\Omega - i\pi/\Omega\tau)$, и при $\omega = q\Omega$ имеет место резонанс ($q = 1, 2, 3, \dots$).

эффективные массы в соответствующем направлении, а в ряде случаев (о методе см. ниже) и экспериментальные диаметры ферми-поверхности, и скорости на ней. Следует подчеркнуть, что в настоящее время уже идет речь не об изучении явления циклотронного резонанса, а об изучении структуры электронного энергетического спектра различных металлов методом циклотронного резонанса — одним из наиболее эффективных сегодня.

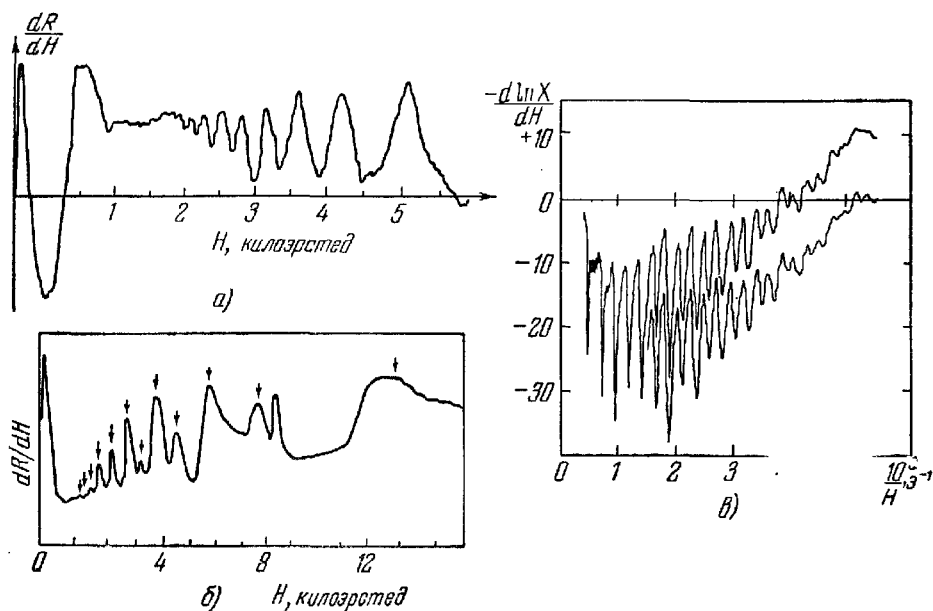


Рис. 79. Циклотронный резонанс: *а* и *б* — в олове, *в* — в меди.
На всех рисунках по оси ординат — произвольные единицы.

Характерные кривые циклотронного резонанса приведены на рис. 79. Отчетливо видна кратность резонансных частот.

Экспериментально подтверждена высокая чувствительность резонанса к углу между постоянным магнитным полем и поверхностью металла.

Остановимся в заключение на вопросе о возможности циклотронного резонанса в наклонном по отношению к поверхности металла магнитном поле.

В наклонном магнитном поле мог бы иметь место циклотронный резонанс [42], например на центральном сечении, где электроны не уходят в глубь металла (так как среднее значение их скорости на центральном сечении равно нулю). Однако относительное число электронов, не уходящих из скин-слоя после n -го оборота, порядка $\delta/(r_H n) \ll 1$, их относительный вклад в импеданс порядка δ/r_H и всегда мал (пока имеет место аномальный

скин-эффект, т. е. до частот $\omega \gg 10^{13}$ сек⁻¹, соответствующих магнитным полям $H \gtrsim 10^6$ э; см. [7]). Аналогичный характер имеет резонансное слагаемое на открытых траекториях [43].

Квантовые осцилляции в наклонном поле обуславливаются только электронами вблизи экстремальных по площади сечений (см. ниже) при $p_z \sim p_0(\Omega/\omega_0)^{1/2}$. Эти электроны возвращаются в скин-слой. Поэтому амплитуды квантовых осцилляций имеют резонансный характер, возрастая в резонансе в $\sim (r/\delta)(\Omega/\omega_0)^{1/2}$ раз; окончательный вклад их в импеданс становится при этом порядка $(r_H/\delta)(\Omega/\omega_0)$. (Формально классическая и квантовая резонансная добавка в наклонном поле соответствуют разложению импеданса по разным малым параметрам: «классическому» δ/r_H и «квантовому» $(\Omega/\omega_0)^{1/2}$.)

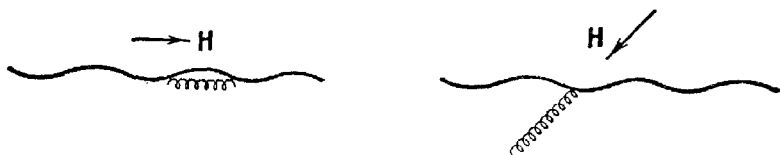


Рис. 80. Роль шероховатости поверхности при движении электрона в магнитном поле.

Все сказанное, разумеется, не относится к особым случаям, когда $\bar{v}_z = 0$ в целом интервале p_z и когда циклотронный резонанс возможен при любом наклоне магнитного поля, при котором имеются такие интервалы p_z .

Влияние наклона магнитного поля можно объяснить еще и иначе. Дрейф электронов вдоль магнитного поля приводит, с одной стороны, к доплеровскому сдвигу частоты, разному по знаку для электронов, летящих к поверхности металла и летящих от нее, и в соответствии с этим — к расщеплению резонансной частоты на две. С другой стороны, появление у частоты резонанса непрерывной (по волновому вектору волны) добавки приводит к «размытию» резонанса и уширению резонансной кривой. При малых наклонах поля, таким образом, будет наблюдаться расщепление частоты резонанса (и, возможно, вначале даже обострение резонанса, так как время свободного пробега, не уменьшаемое столкновениями с плавными искажениями поверхности, — рис. 80 — может возрасти), причем более «благоприятен» для резонанса случай центрального сечения, на котором $\bar{v}_z = 0$. Существенный же наклон для «неособых» сечений приводит к появлению нового типа резонанса, описанного в следующем параграфе и связанного с дальнейшим приближением по «параметру аномальности» δ/r . (Эксперименты по циклотронному резонансу в наклонном поле см. в работах [35, 44].)

§ 36. Теория циклотронного резонанса

Вычисление плотности тока в точке \mathbf{r} в момент времени t сводится к определению энергии $\Delta\epsilon$, полученной от внешнего поля электроном с квазиимпульсом \mathbf{p} , пришедшим в данную точку в данный момент времени (см. (32.11)).

Рассмотрим общий случай движения электрона в переменном электромагнитном поле и постоянном магнитном поле, произвольным образом ориентированном по отношению к поверхности металла (рис. 81).

Вместо трех проекций импульса будем характеризовать состояние электрона более удобными переменными (§ 27): энергией ϵ , проекцией p_z импульса

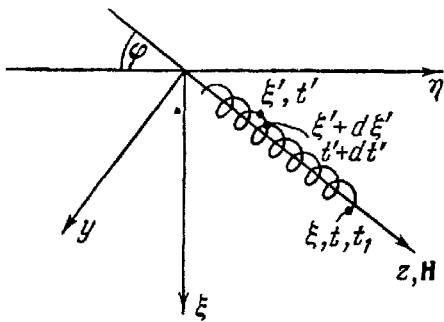


Рис. 81. Движение электрона в магнитном поле, произвольным образом ориентированном относительно поверхности металла.

на направление постоянного магнитного поля \mathbf{H} (это направление выбрано за ось z ; ось ξ перпендикулярна поверхности металла) и временем обращения электрона по орбите, отсчитанным от некоторой точки на орбите. Очевидно, эти три величины однозначно определяют квазиимпульс электрона; очевидно также, что t и $t + T$ ($T = 2\pi/\Omega = 2\pi m^*c/eH$) отвечают одному и тому же \mathbf{p} , так что все величины, связанные с

движением электрона в импульсном пространстве, периодичны по t с периодом T .

Найдем $\Delta\epsilon$ для электрона, пришедшего в точку ξ в момент t_1 и имеющего (в нулевом приближении по E) энергию ϵ , проекцию квазиимпульса p_z и находящегося в этот момент в точке орбиты, характеризуемой временем t .

Определим энергию, приобретенную за время (отсчитываемое по орбите) от t' до $t' + dt'$.

За время от t' до t электрон прошел путь $\xi(t) - \xi(t') = \int_{t'}^t v_{\xi}(t') dt'$; функция $v_{\xi}(t)$ известна, коль скоро известна функ-

ция $\epsilon(\mathbf{p})$ и связь \mathbf{p} с ϵ , p_z , t . Следовательно, в момент t' электрон находился в точке $\xi - \xi(t) + \xi(t')$. (Напомним, что ξ — координата точки в обычном пространстве, а $\xi(t)$ описывает движение данного электрона в магнитном поле.) В этой точке электрон находился в момент времени $t_1 - (t - t')$, поэтому уравнение (32.13а) принимает вид (как и раньше, поле и его амплитуда

обозначаются одной буквой):

$$\dot{\xi}(t') = ev_\alpha(t') E_\alpha(\xi - \xi(t) + \xi(t')) \exp\{i\omega t_2 - i\omega(t - t')\} \quad (36.1)$$

(α — координаты x, y в плоскости поверхности металла; по дважды повторяющемуся α происходит суммирование), так что $d\xi(t') = \dot{\xi}(t') dt'$.

Вероятность «донести» полученную энергию без столкновений в течение времени $t - t'$ есть $\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)$; поэтому окончательно

$$\Delta\xi(\xi, t_1) = \int_{-\infty}^t ev_\alpha(t') E_\alpha(\xi - \xi(t) + \xi(t')) \exp\{i\omega t_1 - i\omega(t - t')\} dt \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right). \quad (36.2)$$

Подставляя (36.2) в (32.11) и переходя от \mathbf{p} к новым переменным, находим для амплитуды плотности тока $j_\alpha(\xi)$:

$$j_\alpha(\xi) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \int_{p_z^{\min}(e_F)}^{p_z^{\max}} dp_z \int_0^{T(e_F, v_z)} dt v_\alpha(t) \int_{-\infty}^t v_\beta(t') dt' \times \\ \times E_\beta(\xi - \xi(t) + \xi(t')) \exp\left\{-\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)(t - t')\right\}, \quad (36.3)$$

$$\xi(t) - \xi(t') = \int_{t'}^t v_\xi(t_1) dt_1.$$

Полученное выражение для $j_\alpha(\xi)$ следует подставить в уравнение Максвелла (32.4), (32.6а) для монохроматической волны частоты ω в одномерном случае:

$$E_\alpha''(\xi) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_\alpha(\xi). \quad (36.4)$$

Как и следовало, уравнения (36.3) (36.4) допускают четное решение, так как при $E_\alpha(-\xi) = E_\alpha(\xi)$ плотность тока $j_\alpha(\xi)$ также оказывается четной функцией*). Для того чтобы в этом убедиться, нужно использовать центральную симметрию $\xi(\mathbf{p})$; в новых переменных замена \mathbf{p} на $-\mathbf{p}$ соответствует замене $p_z \rightarrow -p_z$, $t \rightarrow t + T_1$. Учитывая периодичность функции от t под интегралом в (36.3) и делая замену переменных $p_z \rightarrow -p_z$, $t \rightarrow t + T_1$, $t' \rightarrow t' + T_1$, убеждаемся в четности $j_\alpha(\xi)$.

*) См. § 33.

Беря фурье-компоненту от обеих частей (36.3), (36.4) и принимая во внимание скачок $E'_\alpha(\xi)$ при $\xi = 0$, находим:

$$-k^2 \varepsilon_\alpha(k) - 2E'_\alpha(0) = \frac{4\pi i \omega 2e^2}{c^2 (2\pi\hbar)^3} \left| \frac{eH}{c} \right| K_{\alpha\beta}(k) \varepsilon_\beta(k),$$

$$E'_\alpha(0) \equiv E'_\alpha(+0); \quad (36.5)$$

$$\varepsilon_\alpha(k) = 2 \int_0^\infty E_\alpha(\xi) \cos k\xi d\xi, \quad E_\alpha(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon_\alpha(k) \cos k\xi dk, \quad (36.6)$$

$$K_{\alpha\beta}(t) = \int_{p_z^{\min}(\varepsilon_F)}^{p_z^{\max}(\varepsilon_F)} dp_z \int_0^{T(p_z, \varepsilon_F)} dt v_\alpha(t) \exp\left\{-ik\xi(t) - \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)t\right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^t dt' v_\beta(t') \exp\left\{ik\xi(t') + \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)t'\right\}, \quad (36.7)$$

или, сводя в (36.7) $\int_{-\infty}^t$ к интегралу по периоду,

$$K_{\alpha\beta}(k) = \int_{p_z^{\min}}^{p_z^{\max}} \left[1 - \exp\left(ik\bar{v}_z T \sin \varphi - 2\pi i \frac{\omega}{\Omega} - \frac{2\pi}{\Omega\tau}\right)\right]^{-1} dp_z \times$$

$$\times \int_0^T v_\alpha(t) \exp\left\{-ik\xi(t) - \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)t\right\} dt \times$$

$$\times \int_{t-T}^t v_\beta(t') \exp\left\{ik\xi(t') + \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)t'\right\} dt', \quad (36.8)$$

где

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt, \quad T = 2\pi/\Omega. \quad (36.9)$$

При выводе формулы (36.8) использовано, что $\bar{v}_x \sim \bar{p}_y = 0$, $\bar{v}_y \sim \bar{p}_z = 0$.

Заметим, что учет зависимости τ от p не меняет формулы (36.8), если $1/\tau$ в ней понимать как обозначение для τ^{-1} . Это естественно, так как орбиты характеризуются в основном приближении только интегралами движения ε и p_z , а по t имеет место вырождение, которое и приводит к усреднению.

Примем теперь во внимание, что характерная величина k определяется затуханием поля, т. е. эффективной глубиной скин-слоя (это подтверждается и верификацией): $k \sim 1/\delta_{\text{эфф}}$, так что $kr_H \gg 1$ и интегралы по t и t' в (36.8) можно вычислить методом перевала. В результате существенными, как и предполагалось все время, оказываются «скользящие» электроны с $v_x = 0$.

Из формул (36.5)—(36.8) могут быть получены все результаты, найденные из физических соображений в § 35. Обратимся, однако, лишь к наиболее интересному (в связи с резонансом) случаю магнитного поля, параллельного поверхности металла, когда $\varphi = 0$, $\eta \equiv z$, а $\xi = y$ и $y(t) = cp_x(t)/eH$.

Обратим внимание на то, что вблизи резонанса особенно просто учитывается граничное условие в (36.3). Электроны, сталкивающиеся с поверхностью, при не строго зеркальном отражении от нее заведомо не могут участвовать в резонансе и, следовательно, дают малый вклад в плотность тока. Поэтому их следует просто исключить из рассмотрения, вставив в (36.3) множитель $E(y - y(t) + y_{\text{min}})$, где $E(W) = 1$ для $W > 0$ и $E(W) = 0$ для $W < 0$.

Уже из формулы (36.8) видны как существование циклотронного резонанса на частоте $\Omega = \omega$ и частотах $\Omega = \omega/2$, $\omega/3$, ..., так и существенная разница глубины резонанса при квадратичном и неквадратичном законе дисперсии.

При квадратичном законе дисперсии Ω , как указывалось выше, не зависит от p_z и потому $j_a \sim \left[1 - \exp\left(-2\pi i \frac{\omega}{\Omega} - \frac{2\pi}{\Omega\tau}\right) \right]^{-1}$, так что при $\tau \rightarrow \infty$ плотность тока в резонансе (при $\omega = \Omega$, 2Ω , ...) неограниченно возрастает пропорционально $\Omega\tau$.

При неквадратичном законе дисперсии легко убедиться, что совпадение ω с одной из частот Ω , отличной от экстремальной или граничной, в основном приближении по аномальности не приводит ни к какой особенности.

Совпадение или кратность ω одному из экстремальных или граничных значений $\Omega = \Omega_0$ ($\omega = q\Omega_0$, $q = 1, 2, \dots$) приводит к резонансу, однако в отличие от квадратичного закона дисперсии, $j \sim \sqrt{\Omega\tau}$, т. е. высота резонанса значительно меньше.

Для получения формулы для импеданса остается лишь воспользоваться предельной аномальностью скин-эффекта (тем, что $kr_H \approx r_H/\delta \gg 1$) и вычислить внутренние интегралы в (36.8) методом перевала. При этом существенными оказываются, как и считалось все время (§ 32), точки, где $\dot{y} = v_y = 0$, т. е. соответствующие «скользящим» электронам. Плавные функции v_x , v_y просто выносятся в этих точках за знак интеграла. Если закон дисперсии не близок к квадратичному, то существенны только «избранные» значения p_z , обеспечивающие резонанс; тогда v_x и v_y следует брать только в этих точках, и они оказываются

вообще вне интегрирования. Естественно, это позволяет сразу привести $K_{\alpha\beta}(k)$ к главным осям (так как $K_{\alpha\beta}(k)$ пропорционально вещественному тензору, не зависящему от k).

Если закон дисперсии квадратичный и Ω не зависит от p_z , так что резонансный множитель $\left[1 - \exp\left(-2\pi i \frac{\Omega}{\omega} - \frac{2\pi}{\Omega\tau}\right)\right]^{-1}$ выносится за знак интеграла, асимптотика остающегося выражения при $\Omega\tau \gg 1$ не зависит от Ω и потому имеет в общем такой же вид, как и в случае отсутствия магнитного поля (см. (33.15)). В результате и в этом случае $K_{\alpha\beta}(k)$ удается сразу привести к главным осям.

Не останавливаясь на выполнении указанной программы простых, но довольно громоздких вычислений, перейдем сразу к результатам. Заметим лишь, что поскольку основой при вычислениях является аномальность скин-эффекта, получаются результаты, качественно справедливые в любых магнитных полях (ср., например, (36.10) с (33.16) и (33.15); вещественные множители порядка 1 не учитываются нами во всех случаях).

Рассмотрим квадратичную и неквадратичную дисперсии отдельно.

Квадратичный закон дисперсии. Импеданс имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\alpha}(H) &\approx \zeta_{\alpha}(0) \left[1 - \exp\left(-2\pi i \frac{\omega}{\Omega} - \frac{2\pi}{\Omega\tau}\right)\right]^{-1/2}, \\ \zeta_{\alpha}(0) &= \left(\frac{\sqrt{3}\omega^2}{\pi^2 c B_{\alpha}}\right)^{1/2} (1 + i\sqrt{3}), \\ B_{\alpha\beta} &= \frac{8e^2}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{v_{\alpha}v_{\beta}}{\kappa v^2}\right]_{v_y=0} d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (36.10)$$

где B_{α} — главные значения вещественного тензора $B_{\alpha\beta}$, κ — гауссова кривизна, а φ — угол, отсчитываемый вдоль «пояска» $\epsilon = \epsilon_F$, $v_y = 0$. Оба главных значения тензора поверхностного импеданса имеют резонансный характер, причем в резонансе как ζ' , так и ζ'' минимальны. Поскольку измерения соответствуют заданной напряженности поля, это отвечает, в частности, минимуму поглощения.

Неквадратичный закон дисперсии. В этом случае неравенства $\Omega\tau \gg 1$ и $r_H/\delta \gg 1$ приводят к тому, что, как и указывалось выше из физических соображений, существенны лишь электроны с $v_y = 0$ и $p_z \approx p_0$, $\Omega(p_0) = \Omega_{\text{extr}}$, т. е. электроны,двигающиеся почти параллельно поверхности металла с частотой обращения по орбите, близкой к экстремальной (по φ).

Импеданс приводится к главным значениям одновременно с тензором $A_{\alpha\beta}$, и главные значения ζ_{α} импеданса выражаются

через главные значения A_α тензора $A_{\alpha\beta}$ формулой:

$$\xi_\alpha = \frac{4}{9} \left(\frac{\sqrt{3} \omega^2}{\pi^2 c A_\alpha} \right)^{1/3} \exp \left(\frac{i\pi}{3} \right),$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{16e^2}{3(2\pi\hbar)^3} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{v_\alpha v_\beta}{\alpha \kappa v^2} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \int_0^\pi \left[1 - \exp \left(-2\pi i \frac{\omega}{\Omega} - \frac{2\pi}{\Omega\tau} \right) \right]^{-1} d\varphi. \quad (36.11)$$

Переменные в (36.11) те же, что и в формуле (36.10), так что интегрирование происходит по углу, соответствующему «пояску» $v_y = 0$ на фермиевской поверхности (рис. 82); $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\alpha$ — точки, где Ω имеет данное экстремальное по φ значение; при извлечении кубического корня в (36.10) и (36.11) следует выбирать корень, соответствующий $\xi'_\alpha > 0$ (такой корень всегда имеется). Строго говоря, в формулах (36.10) и (36.11) следовало бы учесть и нерезонансные члены, в частности, связанные со сталкивающимися с поверхностью электронами. Дело в том, что малость комплексного знаменателя дроби, вообще говоря, не обеспечивает большой величины одновременно и вещественной, и мнимой части дроби (например, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{Im} \frac{1}{\alpha - i\alpha^2} = 1$).

Поскольку, однако, «дополнительная» нерезонансная добавка (в A_α и B_α) может привести к появлению в окончательных формулах лишь вещественных множителей порядка единицы, которые все равно для нас несущественны, нет необходимости ее выписывать.

В дальнейшем, как и выше, мы все время будем предполагать, что основной вклад в плотность тока дают «резонансные» электроны. В случае весьма сложной ферми-поверхности может оказаться, что доля электронов, находящихся на данном участке ферми-поверхности, численно столь невелика, что при достижимых в эксперименте $\Omega\tau$ основную роль играют нерезонансные электроны [45]. Рассмотрение этого случая также проводится без труда.

До сих пор речь шла только об основном приближении по аномальности, т. е. по параметру δ/r_H . В следующем приближении по аномальности появляются новые резонансные частоты. При $\varphi = 0$ это циклотронная частота, соответствующая экстремальным значениям диаметра D орбиты ($kD \gg 1$); полуширина

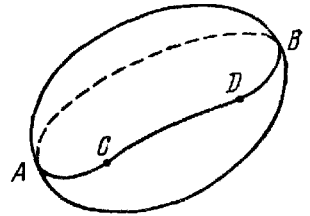


Рис. 82. Поясок на поверхности Ферми.

резонанса в этом случае была записана ранее (формула (35.1)). При $\varphi \neq 0$ особой является точка, где $v_{\xi} = \dot{v}_{\xi} = 0$ и $d = 0$. Вычисление интегралов по t и t' в (36.8) вблизи этой точки происходит существенно по-разному для значений p_z , при которых существует точка на орбите с $v_{\xi} = 0$, и для значений p_z , при которых $\xi(t)$ является монотонной функцией. В результате точки $p_z = p_0$ оказываются выделенными и дают «свой» (хотя и малый) вклад в $K_{\alpha\beta}$. Вычисление импеданса удобно производить, разлагая $(k^2\delta_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta})^{-1}$ в ряд по малой добавке; во втором приближении члены, содержащие произведение $e^{ikd(p_0)}e^{-ikd(-p_0)} = 1$, приводят к резонансу в наклонном поле на частотах

$$2\omega = n\Omega(p_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (36.12)$$

Поясним физическую причину резонанса в наклонном поле.

Рассмотрим изменение с φ резонанса на опорной точке. Начиная с $\varphi \sim \delta_{\text{эфф}}$ электроны вблизи опорной точки не возвращаются в скин-слой, а при $\varphi \gg \delta/r_H$ только электроны, достаточно далекие от опорной точки, могут быть «скользящими» вдоль поверхности, имея $v_{\xi}(t) = 0$. В выделенном положении оказываются последние «эффективные» (т. е. долго ускоряющиеся в скин-слое) электроны вблизи $p_z = p_0$ (p_0 и t_0 определяются из $v_{\xi} = 0$, $dv_{\xi}/dt = 0$). Такие электроны «фокусируются» в магнитном поле на определенных глубинах; в результате этого возникают всплески поля и тока при ξ , кратных «граничному» $d_0 = d(p_0)$ (d — путь, проходимый за период T):

$$d = \int_0^T v_{\xi}(t) dt.$$

Эти всплески затухают только в связи с объемными столкновениями электронов на глубине порядка длины свободного пробега. Если 2ω будет кратно $\Omega_0 = \Omega(p_0)$, электроны с $p_z = -p_0$ будут синхронно проходить многочисленные всплески. (Так, при $\omega = \Omega_0/2$ электроны с $p_z = -p_0$, заставшие на глубине $\xi = d_0$ максимум поля, унесенного от поверхности электронами с $p_z = p_0$ время T_0 назад, попадут через время T_0 опять в максимум поля около поверхности $\xi = 0$, причем автоматически исключится пространственный сдвиг фазы, приобретенный электронами с $p_z = p_0$.) В результате возникает резонанс, затухание которого обусловлено только затуханием всплесков и который поэтому имеет относительную полуширину $\sim \gamma = T_0/\tau$. При этом

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} \approx \left(\frac{\delta}{r_H}\right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-2i\omega^* T_0 n) \sim \left(\frac{\delta}{r_H}\right)^{3/2} A^{-1} \ln A^{-1}, \quad (36.13)$$

где

$$A = 1 - \exp(-2i\omega^*T_0).$$

(Впервые подобный резонанс был указан в работах [46], случай $\varphi \ll 1$ см. в [47]; физическое объяснение доплеровского расщепления частот при $\varphi \ll 1$ дано в [48]; теорию резонанса см. в [49].)

Резонанс не возникнет, только если интервал $2p_0$ выродится в точку, т. е. (при плоском сечении $v_{\xi} = 0$) если p_z перпендикулярно сечению $v_{\xi} = 0$. При изотропной дисперсии это соответствует \mathbf{H} , перпендикулярному поверхности металла.

Экспериментальное исследование этого резонанса принципиально позволяет определить эффективную массу m^* и площадь сечения S ферми-поверхности как функцию от p_z при любом направлении z (используя то, что $d = (c/eH) (\partial S / \partial p_z)_z$, т. е. ту же информацию, которую может, в принципе, дать квантовый циклотронный резонанс (§ 43). При $\varphi \ll 1$ можно таким образом найти гауссову кривизну κ и (по доплеровскому расщеплению) скорость v на поверхности Ферми. По тем же причинам, что и для $\varphi = 0$, при $\varphi \ll 1$ необходима поляризация электрического поля вдоль скорости в опорной точке.

Резонанс для любого φ при $2\omega = n\Omega$ (n — целое) обеспечат (если они имеются) также сечения, где d имеет экстремум. Резонанс на таких сечениях соответствует $\Delta\zeta/\zeta \sim \delta/r_H \ln A^{-1}$, где в формуле (36.13) T берется на этих сечениях.

Открытые сечения дают $\zeta/\zeta \sim \delta A^{-1}/r_H$ с Ω , соответствующим экстремальным по p_z диаметрам $D = \xi_{\max} - \xi_{\min}$ (максимум и минимум ξ берутся по t в пределах одного периода; рис. 83). Отметим, что резонанс в наклонном поле может быть более острым, чем при $\varphi = 0$, так как τ не уменьшается столкновениями с неровностями поверхности. Естественно, все приведенные результаты не относятся к особым углам φ (при которых, например, исчезает экстремум d , или одновременно $d' = 0$, $d'' = 0$, или совпадают резонансные частоты от разных сечений).

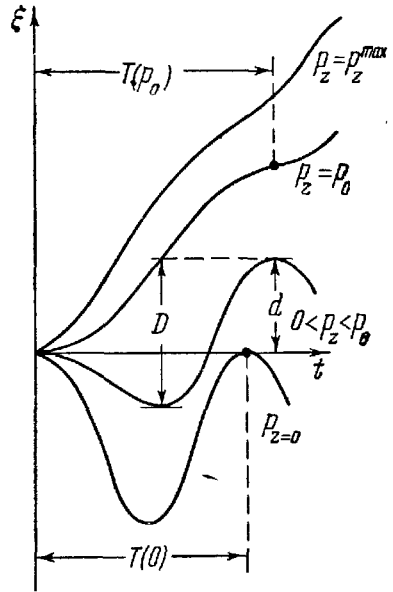


Рис. 83. Различные варианты зависимости $\xi = \xi(t)$.

§ 37. Исследование поверхностного импеданса при циклотронном резонансе

Исследование поверхностного импеданса вблизи резонанса также естественно проводить отдельно для квадратичного и неквадратичного законов дисперсии.

Поскольку экспериментально часто измеряются не $\zeta' = \text{Re } \zeta$ и $\zeta'' = \text{Im } \zeta$, а их производные (например, $d\zeta'/dH$, $d \ln \zeta''/dH$), исследуем также производные от импеданса.

Квадратичный закон дисперсии. При квадратичном законе дисперсии может быть построена вся резонансная кривая при

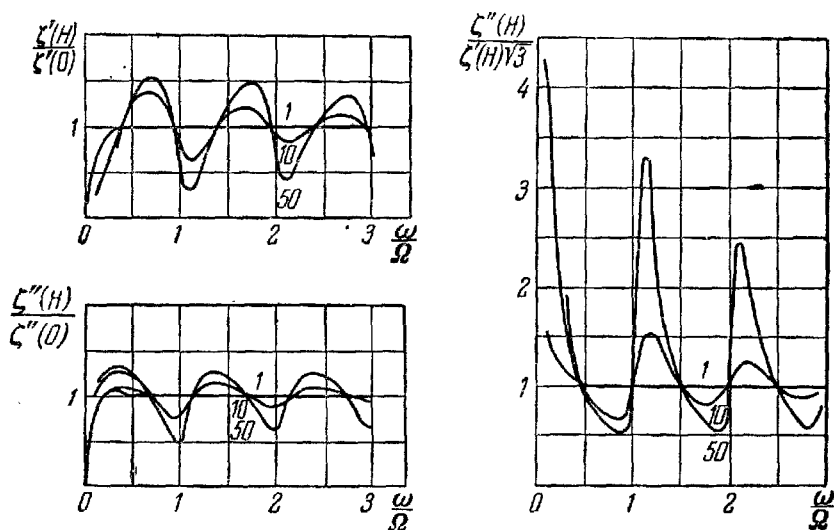


Рис. 84. Теоретически рассчитанные резонансные кривые для $\omega\tau = 1, 10$ и 50 при квадратичном законе дисперсии.

любых (как близких, так и не близких к резонансным значениям) H ; вид кривых $\zeta'(H)/\zeta'(0)$, $\zeta''(H)/\zeta''(0)$ и $\zeta''(H)/\zeta'(H)\sqrt{3}$ для $\omega\tau = 1, 10, 50$ показан на рис. 84. Максимумы ζ' и ζ'' при $\omega \approx (q + 1/2)\Omega$ не связаны с резонансом, при $\Omega\tau \rightarrow \infty$ значения импеданса в этих точках стремятся к постоянному значению, отличному от нуля.

Существенно отметить, что при конечном τ глубина резонансного минимума и сдвиг его частоты по сравнению с ω/q резко различны у ζ' и у ζ'' :

$$\zeta'_{\text{рез}} = \zeta'(H'_{\text{рез}}) \approx \zeta'(0) \left(\frac{2\pi q}{\omega\tau} \right)^{2/3}, \quad \frac{\omega - q\Omega'_{\text{рез}}}{\omega} \approx (2\pi q\omega\tau)^{-1/2},$$

$$\zeta''_{\text{рез}} = \zeta''(H''_{\text{рез}}) \approx \zeta''(0) \left(\frac{2\pi q}{\omega\tau} \right)^{1/3}, \quad \frac{\omega - q\Omega''_{\text{рез}}}{\omega} \approx (\omega\tau)^{-1}.$$

Сдвиг частоты у ζ' и ζ'' объясняется различными причинами. Сдвиг у ζ'' связан с тем, что малое увеличение магнитного поля, почти не изменяя условий резонанса, приводит к «выгодному» увеличению числа оборотов электронов между столкновениями. Чтобы понять сдвиг частоты у ζ' , рассмотрим, как сказывается на результатах изменение с глубиной фазы электрического поля. Изменение фазы, нарушая резонансную синхронизацию, уменьшает энергию, приобретаемую электроном от поля, и потому «ухудшает» резонанс. Как видно из формулы (36.10) и зависимости $\zeta''(H)/\zeta'(H) \sqrt{3}$ (см. рис. 84) от магнитного поля, уже весьма малое изменение магнитного поля приводит к $\zeta'' \gg \zeta'$, т. е. к тому, что на глубине δ затухания поля его фаза почти не меняется. Это оказывается выгодным, несмотря на то, что при этом после $\sim |\omega - q\Omega'_{\text{рез}}| \tau$ оборотов электрон застаёт вблизи поверхности существенно изменившуюся фазу поля.

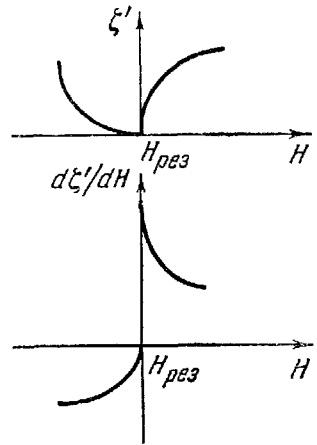


Рис. 85. Поведение ζ' и $d\zeta'/dH$ как функции магнитного поля H вблизи резонанса для квадратичного закона дисперсии и для неквадратичного при минимальной эффективной массе $m_{\text{мин}}^*$.

Перейдем к исследованию $d\zeta'/dH$, $d\zeta''/dH$. На первый взгляд может показаться, что в резонансе, где ζ' и ζ'' минимальны, их производные окажутся равными нулю.

Однако в действительности резонанс соответствует не нулю $d\zeta'/dH$, $d\zeta''/dH$, а их максимальным значениям. Это связано с тем, что при $\omega\tau = \infty$ функции $\zeta'(H)$ и $\zeta''(H)$ имеют в резонансе не минимум, а наименьшее значение (равное нулю), соответствующее излому этих функций. Так, при $\omega\tau = \infty$ из формулы (36.10) мы получим, что слева от резонанса (где $H < H'_{\text{рез}}$) $\zeta'(H) \sim (H'_{\text{рез}} - H)^{1/3}$ и $\frac{d\zeta'}{dH} \rightarrow 0$ при подходе к резонансу слева, а справа от резонанса (где $H > H'_{\text{рез}}$) $\zeta'(H) \sim (H - H'_{\text{рез}})^{1/3}$ и при подходе к резонансу справа $\frac{d\zeta'}{dH} \rightarrow \infty$ (рис. 85).

Функции $\zeta''(H)$ и $\frac{d\zeta''}{dH}$ ведут себя аналогичным образом. Поэтому $(d\zeta/dH)_{\text{рез}} \approx \zeta(0) (q^2\omega\tau)^{2/3} / H_{\text{рез}}^{(1)}$ и при $\tau \rightarrow \infty$, $(1/\zeta(0)) \times \times d\zeta/dH \rightarrow \infty$ (а не к нулю), а $(\omega - q\Omega_{\text{рез}})/\omega \approx (\omega\tau)^{-1}$. Здесь $H_{\text{рез}}^{(1)}$ — магнитное поле, соответствующее резонансу на основной гармонике ($q = 1$). Относительная высота максимумов $d\zeta'/dH$, $d\zeta''/dH$ значительно больше, чем величина, обратная относи-

тельному значению минимума $\zeta''(H)$, а сдвиг резонансной частоты такой же, как у ζ'' , и значительно меньше, чем у ζ' .

Неквадратичный закон дисперсии. В формулу (36.11) для неквадратичного закона дисперсии входит величина $\Omega(\varphi)$, а не $\Omega(p_z)$, которая рассматривалась до сих пор. Поскольку функция $p_z(\varphi)$ имеет, очевидно, экстремумы только в опорных точках поверхности (см. рис. 78), а $d\Omega/d\varphi = (d\Omega/dp_z)(dp_z/d\varphi)$, то $\Omega(\varphi)$ имеет экстремумы, во-первых, там же, где и $\Omega(p_z)$, а во-вторых, в точках экстремума $p_z(\varphi)$, т. е. в эллиптических опорных точках поверхности (о чем говорилось выше). На гиперболических опорных точках $m^* = \infty$, $\Omega = 0$ и резонанс невозможен. Однако, поскольку в эллиптических опорных точках $r_H = 0$, в них может не выполняться основное для циклотронного резонанса соотношение $r_H/\delta \gg 1$. Так как вблизи опорной точки существенны значения

$$r_H \approx \frac{v}{\Omega} (\omega\tau)^{-1/2} \approx \frac{v}{\omega} (\omega\tau)^{-1/2},$$

то необходимо

$$\frac{r_H}{\delta} \approx \frac{\omega_0 \frac{v}{c}}{\omega} (\omega\tau)^{-1/2} \gg 1. \quad (37.1)$$

Если основную роль играют столкновения с фононами, то при применении формулы (32.18а) возникает требование

$$\frac{v}{c} \frac{\omega_0}{\omega_{\Theta}} \left(1 + \frac{kT}{\hbar\omega}\right)^{3/2} \gg 1, \quad \omega_{\Theta} = \frac{\Theta}{\hbar},$$

где Θ — дебаевская температура.

Так как обычно в хороших металлах $\omega_0 v/c \sim \omega_{\Theta}$, то необходимо, чтобы $\hbar\omega$ было значительно меньше kT . Практически, однако, условие (37.1) весьма слабое, так как при низких температурах обычно $\tau \ll \tau_{\text{эфф}}$, $\omega_{\Theta} \approx 10^{13} \text{ сек}^{-1}$, $\omega \approx 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ и достаточно $\omega\tau \ll 10^4$.

Итак, резонанс имеет место на центральном сечении (так как из центральной симметрии ферми-поверхности следует $\Omega(p_z) = \Omega(-p_z)$, $\Omega'(p_z) = -\Omega'(-p_z)$ и $\Omega'(0) = 0$), на частотах, соответствующих эллиптическим опорным точкам (где, как можно показать [7], $m^* = (v \sqrt{\kappa})^{-1}$, v и κ — скорость и гауссова кривизна в опорной точке), и на экстремальных по p_z «нецентральных» значениях Ω .

При этом резонанс на центральном сечении и на опорных точках существенно отличается от резонанса на других экстремальных значениях Ω .

В первых двух случаях вследствие центральной симметрии ферми-поверхности резонансный член в $A_{\alpha\beta}$ пропорционален тензору $v_{\alpha}(\varphi_1)v_{\beta}(\varphi_1)$, одно из главных значений которого равно

нулю, а второе единице. Следовательно, только одно из главных значений импеданса имеет резонансный характер. Поскольку в резонансе ζ' и ζ'' минимальны, а не максимальны, при произвольной поляризации падающей на металл волны импеданс, вообще говоря, будет определяться в основном большим нерезонансным главным значением, и «резонансная» часть будет составлять в импедансе малую добавку.

Существенный резонанс будет иметь место лишь в том случае, когда падающая волна поляризована вдоль направления скорости v_F в точке $\varepsilon = \varepsilon_F$, $v_y = 0$, $\varphi = \varphi_1$ (для опорной точки это направление совпадает с направлением постоянного магнитного поля; см. рис. 78).

Плотность тока, соответствующая электрическому полю, перпендикулярному v_F , не имеет резонансного характера потому, что в этом случае электрическое поле в области скин-слоя почти нормально скорости и в соответствии с этим почти не совершает работы.

Производная от импеданса по магнитному полю определяется в основном функциями, сильно зависящими от H , и имеет резонансный характер при всех направлениях E , за исключением направления, перпендикулярного v_F .

Впрочем, область углов, в которой как для ζ' и ζ'' , так и для $\frac{d\zeta'}{dH}$, $\frac{d\zeta''}{dH}$ должна в соответствии со сказанным наблюдаться сильная анизотропия, весьма широка. Так, для поглощения, равного $p = \zeta'_\alpha (E_\alpha^{\text{пад}})^2 + \zeta'_\beta (E_\beta^{\text{пад}})^2$, область углов определяется величиной $[\zeta'_{\text{рез}}/\zeta(0)]^{1/2}$, которая обычно не слишком отличается от единицы.

В случае резонанса на нецентральной сечении имеется по крайней мере два центрально-симметричных сечения, на которых происходит резонанс, и две точки (C и D , см. рис. 82), вносящие существенный вклад в плотность тока. Скорости в точках C и D , вообще говоря, не параллельны, и при любом направлении электрического поля плотность тока (а значит, и оба главных значения импеданса) имеет резонансный характер. Это связано с тем, что в общем случае ни одно из главных значений тензора $v_\alpha(\varphi_1)v_\beta(\varphi_1) + v_\alpha(\varphi_2)v_\beta(\varphi_2)$ не равно нулю.

В дальнейшем мы будем исследовать только резонансные значения ζ_α .

Формулы для резонансных значений импеданса имеют различный вид в зависимости от того, соответствует данное сечение минимуму или максимуму $\Omega = eH/m^*c$.

В формулах для ζ''_α это сказывается лишь на численных константах; в обоих случаях $\zeta''_\alpha / \zeta''_\alpha(0) \approx (q^2/\omega\tau)^{1/6}$, $(\omega - q\Omega''_{\text{рез}})/\omega \approx (\omega\tau)^{-1}$.

Формулы же, дающие ζ'_α для m_{\min}^* и m_{\max}^* , отличаются качественно. Это отличие объясняется тем, что случай минимальной эффективной массы $m_{\min}^* = (1/2\pi) (\partial S/\partial \epsilon)_{\min}$ аналогичен случаю квадратичного закона дисперсии в том отношении, что малое изменение H вблизи резонанса приводит к $\zeta'' \gg \zeta'$ и значительному углублению резонанса для ζ' . В случае же максимальной m_{\max}^* достигнуть соотношения $\zeta'' \gg \zeta'$ малым сдвигом H невозможно (все это можно показать, исходя из формулы (36.11)).

Исключительно для определенности будем говорить об электронах $\partial S/\partial \epsilon > 0$, а не о дырках $\partial S/\partial \epsilon < 0$; все рассуждения для них совершенно аналогичны, а в ответ входит $|\partial S/\partial \epsilon|$. Случай равенства чисел дырок и электронов не приводит ни к какой особенности, что естественно, так как поле Холла E_y вообще не входит в формулы.

Для максимальной m^* действительная часть импеданса равна мнимой и $(\omega - q\Omega_{\text{рез}})/\omega \approx (\omega\tau)^{-1}$.

Для минимальной m^* глубина резонанса ζ'_α и сдвиг резонансной частоты имеют порядок

$$\zeta_\alpha^{\text{рез}}/\zeta_\alpha(0) \approx (\omega\tau/q^2)^{-1/3}, \quad (\omega - q\Omega'_{\text{рез}})/\omega \sim (q\omega\tau)^{-2/3}.$$

Существенно различный вид имеют в случае минимальной и максимальной m^* и кривые $d\zeta'_\alpha/dH$. Для m_{\min}^* они аналогичны кривым при квадратичном законе дисперсии (см. рис. 85). Для m_{\max}^* слева от резонанса ($H = H'_{\text{рез}} - 0$) $d\zeta'_\alpha/dH$ обращается в $-\infty$, справа от резонанса ($H = H'_{\text{рез}} + 0$) — в $+\infty$ и кривые имеют вид, показанный на рис. 86.

В обоих случаях (m_{\min}^*, m_{\max}^*) , $(d\zeta'_\alpha/dH)_{\max} \approx H_1^{-1} \zeta'_\alpha(0) q^{1/3} (\omega\tau)^{5/6}$, а сдвиг частоты $(\omega - q\Omega_{\max})/\omega \sim (\omega\tau)^{-1}$, где H_1 — магнитное поле, соответствующее резонансу на основной гармонике $q = 1$. Существенно, что относительная высота резонанса для $d\zeta'_\alpha/dH$ значительно больше, чем величина, обратная относительной глубине резонанса как для ζ'_α , так и для ζ''_α , что делает измерение $d\zeta'_\alpha/dH$ более желательным, чем измерение ζ'_α или ζ''_α .

Как ясно из изложенного, поведение ζ'_α и $d\zeta'_\alpha/dH$ в резонансе весьма чувствительно к особенностям ферми-поверхности (резонансы на опорной точке, на центральном и нецентральном сечениях, на максимальной и минимальной массе существенно отличаются).

До сих пор речь шла о резонансе в массивном образце металла, который можно рассматривать как полупространство. Как и в слабых полях (§ 34), интересные особенности появляются

ся в случае пластины, толщина D которой удовлетворяет неравенствам

$$\delta \ll D \ll l.$$

В этом случае резонансы будут наблюдаться, естественно, только на тех гармониках, у которых соответствующие им орбиты помещаются в пластине (иначе электрон уже при первом обороте столкнется со второй поверхностью пластины и «выйдет из игры»). Если n -я гармоника $n = \omega / \Omega_{\text{extr}}$ уверенно наблюдается на эксперименте, а $(n + 1)$ -я — нет (такие эксперименты следует для контроля сравнивать с экспериментами на массивном образце), то это значит, что диаметр $d_{\text{рез}}^{(1)}$ орбиты, соответствующей первой гармонике $\omega = q\Omega_{\text{extr}}$, заключен в пределах

$$\frac{D}{n+1} < d_{\text{рез}}^{(1)} = \frac{cp_x^{\text{рез}}}{eH_1} < \frac{D}{n}.$$

При большом n этот метод отсечки резонансных орбит, предложенный в работе [50], позволяет с высокой точностью определять диаметры ферми-поверхности, соответствующие экстремальным эффективным массам (см. также расчет [51] и эксперименты на вольфраме [52]).

Таким образом, циклотронный резонанс позволяет непосредственно определить эффективную массу и экстремальные диаметры ферми-поверхности для электронов проводимости, являясь эффективным средством (в сочетании с другими методами) для восстановления ее формы.

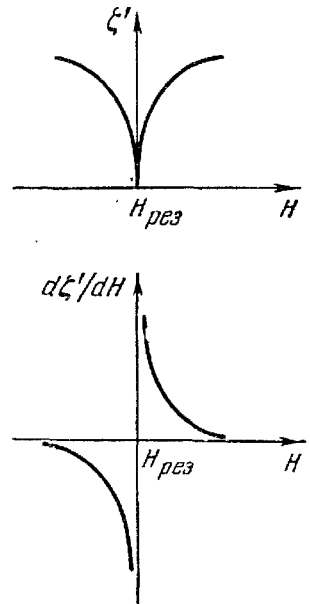


Рис. 86. Поведение ξ' и $d\xi'/dH$ вблизи резонанса для неквадратичного закона дисперсии при максимальной эффективной массе m_{max} .

§ 38. Затухание высокочастотного поля в металле

До сих пор мы не детализировали проникновения высокочастотного поля в металл, ограничиваясь лишь определением характерной глубины затухания поля (ее можно связать, например, с поверхностным импедансом) и сравнением ее с микроскопическими характеристиками движения электрона — длиной свободного пробега, радиусом ларморовской орбиты, расстоянием, проходимым электроном за период высокочастотного поля, и в соответствии с этим говорили о нормальном и аномальном скин-эффекте.

При нормальном скин-эффекте, как известно, поле в металле полностью описывается комплексной глубиной скин-слоя.

При аномальном скин-эффекте сразу ясно, что это невозможно. Так, в отсутствие магнитного поля электрон, получивший в скин-слое энергию от поля, «беспрепятственно» понесет ее в глубь металла на расстояние порядка длины свободного пробега, создавая на этом пути высокочастотное поле. Разумеется, поскольку уходящие вглубь электроны, как было показано еще в § 32, получают значительно меньшую энергию от поля, чем «скользящие», не уходящие в глубину, и поскольку ток, который они несут, распределится не на слой δ , а на слой l , плотность тока и поле в глубине металла окажутся значительно меньшими, чем в скин-слое, но в дальнейшем будут затухать, очевидно, на

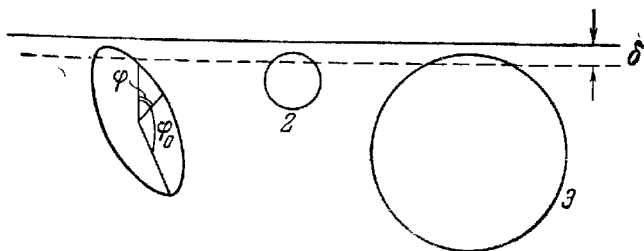


Рис. 87. Движение электронов в магнитном поле, строго параллельном поверхности металла.

глубине порядка длины свободного пробега. Таким образом, затухание поля при аномальном скин-эффекте характеризуется по крайней мере двумя различными по порядку величины комплексными величинами [3], причем глубины затухания поля и тока могут существенно отличаться [7].

Рассмотрим теперь случай строго параллельного поверхности металла магнитного поля, когда затухание высокочастотной волны имеет весьма своеобразный характер. Для того чтобы понять ситуацию в этом случае, обратимся сначала к движению электронов по одной из орбит (рис. 87, орбита 1), проходящих через «обычный» скин-слой вблизи поверхности, где электрическое поле, во всяком случае, не мало (постоянное магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка).

В слое порядка δ электроны на дуге длины $\sqrt{r_H \delta}$ ($r_H \gg \delta$) получают направленную скорость и создают ток и соответствующую ему плотность тока $j \sim I/\delta$.

При движении вниз по орбите будет, во-первых, меняться скорость движения электронов параллельно поверхности металла (только так и течет ток) и в соответствии с этим пропорционально $\cos \varphi$ изменяться сила тока. Во-вторых, электроны

будут «разбегаться» по глубине, распределяясь (при $\varphi > \sqrt{\delta/r_H}$) на слой $\sqrt{r_H \delta} \cos \varphi$.

Таким образом, плотность тока, создаваемая электронами данной орбиты, окажется порядка $(I/\sqrt{\delta r_H}) \operatorname{ctg} \varphi$, т. е. быстро убывающей с глубиной и при $\varphi \sim 1$ в $\sqrt{r_H/\delta}$ раз меньшей, чем в слое δ .

На глубине $y > r_H$ плотность тока меняет знак, оставаясь малой по абсолютной величине по сравнению с I/δ , до тех пор пока угол φ не приблизится к φ_0 , соответствующему «низу» орбиты, так, чтобы было $|\varphi_0 - \varphi| \leq \sqrt{\delta/r_H}$. На глубине d , где электроны снова «собираются» в слое δ , плотность тока снова резко возрастает и отличается в этом случае от плотности тока на поверхности лишь знаком.

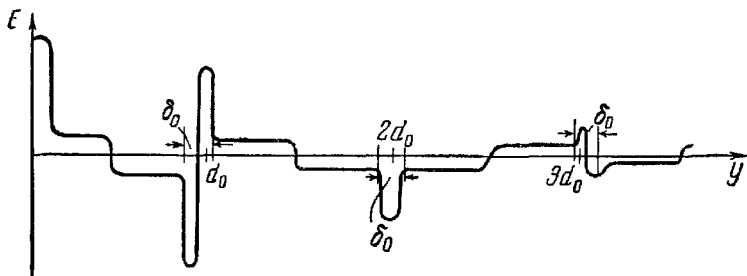


Рис. 88. Затухание электрического поля с глубиной, когда есть всплески поля.

Очевидно, подобная картина имеет место для всех траекторий данного радиуса, проходящих через узкий скин-слой параллельно поверхности. Поэтому, если бы все электроны двигались лишь по орбитам одного радиуса (т. е. имели бы одинаковую величину скорости в плоскости xy), плотность тока, создаваемая скользящими в скин-слое электронами, вызвала бы всплески тока, а с ними и электромагнитного поля на глубине $y = d$. Такие всплески, в свою очередь, приводили бы к ускорению новых электронов, скользящих в слое на глубине $2d$, вследствие чего картина повторялась бы на глубинах $2d, 3d$ и т. д.

В результате пришлось бы, разумеется, решать задачу об определении этой самосогласованной системы токов и полей, однако стала бы физически понятной картина, изображенная на рис. 88.

Явление существенно меняется при учете орбит с разными радиусами (орбит типа 2, 3 на рис. 87), соответствующих различным сечениям ферми-поверхности (напомним, что, например, для свободных электронов $r_H = p_{\perp} c/eH = (c/eH) \sqrt{2m\epsilon - p_z^2}$ и r_H изменяется от нуля до $(c/eH) \sqrt{2m\epsilon}$). Разброс по радиусам

приводит к тому, что на любой глубине в слое порядка δ «собирается» лишь небольшая часть электронов (порядка δ/r_H) и поле, «протаскиваемое» в глубину, естественно, будет быстро убывать в последующих «звеньях».

В случае, когда циклотронная частота обращения по орбите Ω не зависит от сечения (т. е. в случае эллипсоидальной ферми-поверхности), этот разброс по радиусам в параллельном поверхности поле H ликвидировать нельзя.

Если же циклотронная частота зависит от сечения ферми-поверхности, т. е. от p_z , то можно для устранения значительного разброса по радиусам использовать циклотронный резонанс, в котором участвуют как раз только электроны вблизи экстремальных циклотронных частот, с разбросом по p_z порядка $\Delta p_z \sim p_F / \sqrt{\omega\tau}$ (так как $|\omega - \Omega| \sim 1/\tau$, а p_F порядка граничного фермиевского импульса). Разброс по радиусам, задаваемый $\omega\tau$, существенно различен для центрального сечения, где, как ясно из соображений симметрии, имеют экстремум одновременно и Ω , и диаметр d , для опорных точек, где, как указывалось в § 35, 36, $d \sim \sqrt{\Delta p_z}$, и для других нецентральных сечений. Для опорных точек разброс диаметров орбит $\Delta d \sim d \sim r_H / \sqrt{\omega\tau}$, так что $\Delta d \gg \delta$ и слабозатухающие всплески тока на большой глубине возникнуть не могут. На других нецентральных сечениях $\Delta d \sim d / \sqrt{\omega\tau}$; для всплесков поля и плотности тока необходимо $\Delta d \sim \delta$, т. е. $\omega\tau \sim (r/\delta)^2$. Для центрального сечения, где $d'(0) = 0$, разброс $\Delta d = \frac{1}{2} d''(0) p_z^2$ и структура, показанная на рис. 88, возникает при $\omega\tau \geq r/\delta$, $\omega \geq v/\sqrt{l\delta}$, что при $l \approx 10^{-1}$ см, $\delta \approx 10^{-5}$ см, $v \approx 10^8$ см/сек соответствует длине волны порядка 1 см и $H \approx 10^4$ э, т. е. вполне достижимым величинам, встречающимся в экспериментах по циклотронному резонансу.

Легко понять, что нарушение неравенства $\omega\tau < r_H/\delta$ приведет к уменьшению величины последовательных всплесков в геометрической прогрессии пропорционально степени $\delta/\Delta d \sim (\delta/r)\omega\tau$ «размытия» тока «внизу», что, естественно, быстро погашает всплески. Более точная оценка показывает, что всплески при $\omega\tau < r/\delta$, $y = ad(0)$ порядка $E(0) a^{-1/3} (\delta/r_H)^{a/3} (\omega\tau)^{5a/12}$; относительное возрастание поля вблизи $y = ad(0) \equiv ad_0$ порядка $(\omega\tau)^{1/2}$; относительная добавка к импедансу от всплесков порядка $(\delta/r_H)^{2/3} (\omega\tau)^{3/8}$, а от следующего «неособенного» члена разложения — порядка $(\delta/r_H)^{1/3} (\omega\tau)^{-1/12}$. Таким образом, при определенных условиях возникает своеобразная цепочка всплесков поля в глубине металла.

Получим формулу для затухания поля в металле. Для этого нужно решить уравнения (36.5) — (36.8). Исключительно ради простоты рассмотрим структуру всплесков поля в случае точ-

ного резонанса на центральном сечении: $\omega = q\Omega_0$, q — целое, $\Omega_0 = \Omega(p_z)|_{p_z=0}$.

Учитывая, что $\omega\tau \gg 1$ и $\omega = q\Omega_0$, во внутренних интегралах (36.8) можно положить $\tau = \infty$. Далее, так как наибольшим параметром является теперь «резонансный» параметр $\omega\tau$ ($\omega\tau \gg r_H/\delta$), а резонанс имеет место при $p_z \approx 0$, то всюду, кроме $\exp(-2\pi i\omega/\Omega)$, следует взять $p_z = 0$. Это позволяет в последнем

из интегралов в (36.8) заменить \int_{t-T}^t на \int_0^T .

Ввиду того что благодаря предельной аномальности скин-эффекта $r_H/\delta \gg 1$, существенны только две центрально-симметричные точки орбиты, «верхняя» и «нижняя», где $v_y = 0$ (как уже говорилось в § 36, это следствие метода перевала), значения v_α и v_β берутся в точке $\varepsilon = \varepsilon_F$, $p_z = 0$, $v_y = 0$ и, например, $v_x > 0$, и (с точностью до знака) выносятся из-под знака интеграла. Выбирая за ось α направление скорости в этой точке (нижний индекс «нуль» обозначает эту точку), мы тем самым получим для $\varepsilon_\alpha(k)$ ($\varepsilon_\beta(k)$ не имеет резонансного характера и потому нас не интересует):

$$-k^2\varepsilon_\alpha(k) - 2E'_\alpha(0) = iaK_{\alpha\alpha}(k)\varepsilon_\alpha(k), \quad (38.1)$$

где

$$a = \frac{8\pi i\omega |e^3| H}{(2\pi c\hbar)^3},$$

$$K_{\alpha\alpha}(k) = v_0^2 \int_{p_z^{\min}}^{p_z^{\max}} \left[1 - \exp\left(-2\pi iq \frac{\Omega_0}{\Omega} - \frac{2\pi}{\Omega_0\tau}\right) \right]^{-1} dp_z \times \\ \times \left| \int_0^T \text{sign } v_\alpha(t) e^{-iky(t) - iq\Omega_0 t} dt \right|_{p_z=0}^2. \quad (38.2)$$

Наконец, разлагая $\Omega(p_z)$: $\Omega(p_z) = \Omega(0) + 1/2\Omega''(0)p_z^2$ вблизи единственной существенной точки $p_z = 0$ — и вычисляя $\int dp_z \dots$ и $\int dt \dots$ (методом перевала), получим окончательно

$$E_\alpha(\xi) = -\frac{2d_0}{\pi} E'_\alpha(0) I(\xi), \quad (38.3)$$

где

$$I(\xi) = \int_0^\infty [x^3 + ie^{-i\pi\sigma/4} M^4 (1 + \sin x)] x \cos \xi x dx, \quad (38.4)$$

а

$$\zeta = \frac{y}{d_0}, \quad \sigma = \text{sign} \frac{\Omega_1}{\Omega_0}, \quad M^3 \sim 10q^3 \sqrt{\omega\tau_0} \left(\frac{v}{\omega\delta} \right)^2. \quad (38.5)$$

Точное выражение для M^3 довольно громоздко и потому не выписано здесь; его можно найти в работе [5].

При ζ , близком к целому числу a ($\zeta = a + \zeta'$, $\zeta' \ll 1$), удобно преобразовать $I(\zeta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} I(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} dx \dots \approx \\ &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{2\pi n \cos(ax + 2\pi n \zeta') dx}{(2\pi n)^3 + i \exp(-i\pi\sigma/4) M^3 (1 + \sin x)} \approx \\ &\approx \frac{1}{2\pi M} \int_0^{\infty} y dy \int_0^{2\pi} \frac{\cos(ax + \zeta' My) dx}{y^3 + i \exp(-i\pi\sigma/4) (1 + \sin x)} = \\ &= \frac{(-1)^a}{M} \int_0^{\infty} \frac{y \cos(\zeta' My + \pi a/2) dy}{\sqrt{g^2 - 1} (g - \sqrt{g^2 - 1})^a}, \quad (38.6) \end{aligned}$$

где $g = 1 + y^3 \exp\left(-i\pi \frac{2-\sigma}{4}\right)$. Выбирается та ветвь квадратного корня, которая для положительных чисел соответствует его арифметическому значению.

Исследование полученной формулы приводит к следующим результатам.

1. Вблизи $y = ad_0$ поле в \sqrt{M} раз превышает поле между максимумами.

2. Расстояние от максимума, на котором достигается максимальное значение поля, порядка $d_0 M^{-1}$.

3. С ростом номера максимума его высота при $a \gg 1$ падает пропорционально $a^{-1/3}$, а «ширина» растет. На расстояниях $y < r_H^2/\delta$ поле между максимумами почти не затухает. Постепенно максимумы исчезают, на больших расстояниях ($y \gg r_H^2/\delta$) поле осциллирует как $\cos(Py/r_H)$, где $P \approx 1$, и затухает на расстояниях порядка $r_H M^{3/2} \approx r_H^2/\delta$.

4. При $y \approx 2bd_0$ ($b = 0, 1, 2, \dots$) имеются одиночные экстремумы величины поля, знаки которых чередуются как $(-1)^b$.

5. При $y \approx y_b = (2b + 1)d_0$ ($b = 0, 1, 2, \dots$) имеются два экстремума, отличающихся только знаком; поле вблизи этих точек антисимметрично: $E_\alpha(y_b + y') = -E_\alpha(y_b - y')$. Знаки первой пары соседних экстремумов чередуются как $(-1)^{b+1}$, первый экстремум при $y \approx d_0$ имеет знак, противоположный знаку поля при $y = +0$.

Возникновение всплесков поля должно, естественно, приводить к ряду новых физических эффектов.

1. Наиболее просто наблюдаемым является изменение импеданса или производной по магнитному полю от импеданса массивного металла ($d\zeta'/dH$, $d\zeta''/dH$, $d \ln \zeta''/dH$); при этом следует иметь в виду, что сам импеданс, как указывалось, имеет резонансный характер лишь при избранной поляризации электромагнитной волны.

Однако уверенно можно было бы наблюдать лишь немонотонное изменение импеданса с появлением всплесков. Дело в том, что приближение магнитного поля к резонансному приводит к резонансному уменьшению ζ' и ζ'' примерно в 1,84 раза за счет появления всплесков, уменьшающих полный ток при заданной напряженности поля. Подобная немонотонность, однако, не всегда имеет место. Удобнее измерять $f(H) = (H - H_{\text{рез}})/d \ln \zeta'/dH$ ($H_{\text{рез}}$ — резонансное значение H); появление всплесков обуславливает «горб» на зависимости $f(H)$ вблизи $H_{\text{рез}}$.

2. Наиболее надежным и однозначно доказывающим наличие всплесков эффектом являются скачки резонансных значений импеданса и его производной в пластинках толщиной 10^{-3} — 10^{-1} см при увеличении частоты. Эти скачки будут наблюдаться при «обрезании» очередного всплеска, т. е. в случае резонанса, при $q = q\omega_H$, и $D = ad_0$.

Одновременно с этим будет скачком происходить увеличение на единицу числа наблюдаемых гармоник (от a к $a + 1$; рис. 89), так что это число также позволит определить a и $d_0 = D/a = = 2\pi r_x^{\text{extr}}/eH$, т. е. непосредственно получить диаметр ферми-поверхности. Использование пластинок позволяет также для каждого из сечений получить сразу $(\partial S/\partial e)_{\text{extr}}$ и (по квантовым осцилляциям) S_{extr} .

Эффект будет, по-видимому, заметен даже при $a < M^{1/2} \sim 100$.

Аналогичный, но, конечно, гораздо легче наблюдаемый эффект должен иметь место и для фиксированного ω при вращении постоянного магнитного поля в плоскости монокристаллической пленки. Для тех углов, при которых вследствие анизотропии будут иметь место скачки и исчезновение или появление гармоник, также можно определить r_x^{extr} в соответствующих направлениях.

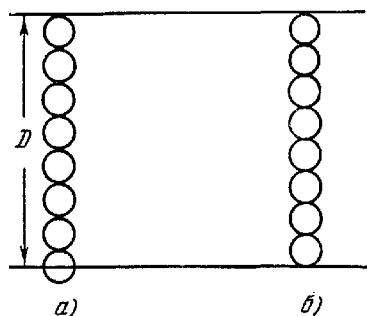


Рис. 89. Орбита не помещается в пластине толщиной D целое число раз (а); орбита помещается в пластине целое число раз (б).

Разумеется, для того чтобы непосредственно построить ферми-поверхность, необходимы эксперименты на пластинах разной толщины и с различной ориентацией поверхности относительно кристаллографических осей.

3. Третьим эффектом, к которому приводит наличие всплесков, является селективная прозрачность пластин при резонансе, когда $D = ad_0 \sim H$ (для наблюдения этого эффекта также необходимо менять частоту ω или вращать H в плоскости пленки), и наблюдение поля, «пролезающего» на глубину $(r_H^2/\delta)(\omega\tau)^{1/4}$. Однако наблюдение этого эффекта крайне затруднено из-за почти идеальной «зеркальности» металла: уже только отражение от двух поверхностей пленки само по себе ослабляет интенсивность поля в $(10\delta/\lambda)^4$ раз, где λ — длина падающей волны. Для «протаскиваемого» же поля имеется добавочное ослабление в $r_H/\delta \sim v_F\lambda/2\pi c\delta$ раз.

4. Следующим эффектом является пространственное электронное «эхо», аналогичное в некотором смысле известному спиновому эху. Если подать на металл, находящийся в постоянном магнитном поле, таком, что $\Omega_0\tau \gg 1$, импульс длительности $\Delta t \ll 2\pi/\Omega_0$, то через времена $2\pi/\Omega_0$, $4\pi/\Omega_0$, ..., когда наибольшее число ускорившихся электронов опять соберется к поверхности металла (в случае квадратичной дисперсии это все электроны), будут наблюдаться «отзвуки» — всплески поля.

5. Своеобразный характер имеют при $\Omega\tau \gg 1$ и флуктуации в металле, однако на этом вопросе мы не будем останавливаться.

Из изложенной выше физической картины возникновения всплесков поля ясно, что для их появления необходимо лишь существование механизма, отбирающего из всех орбит электронов лишь малую их часть с разбросом диаметров порядка или меньше глубины скин-слоя. Подобный механизм существует при наклоне магнитного поля относительно поверхности металла. Механизм работает и в отсутствие циклотронного резонанса. Всплески возникают как на высоких, так и на низких частотах, и условие существования структуры поля, изображенной на рис. 88, оказывается значительно более мягким, чем в случае резонанса [53].

Действительно, пусть магнитное поле наклонено к поверхности металла под углом $\varphi \ll 1$. Тогда электроны с малой дрейфовой скоростью *) \bar{v}_z и все остальные будут находиться в совершенно различных условиях по отношению к высокочастотному полю. Электроны с $\bar{v}_z \sim v$ в лучшем случае один раз попадут

*) То есть электроны вблизи экстремальных по площади сечений ферми-поверхности (для $S = S_{\text{extr}}$, как легко видеть, $\bar{v}_z = -(\partial S/\partial p_z)_e/(\partial S/\partial \epsilon)_{p_z} = 0$) и, в частности, вблизи центрального сечения, где $S = S_{\text{extr}}$ вследствие центральной симметрии ферми-поверхности.

в скин-слой, их вклад в эффективную проводимость (порядка $\sigma\delta/l$) будет малым по сравнению с вкладом электронов с $\bar{v}_z = 0$, которые многократно возвращаются к поверхности металла и, например, при $\omega \ll \Omega$ дают $\sigma_{\text{эфф}} \approx \sigma(\delta/l\varphi)(\delta/r_H)$ (соответствующие рассуждения аналогичны приведенным в § 34). Если $\delta/l \ll \ll \varphi \ll \delta/r_H$, то определяющую роль играют электроны, относительная скорость которых (и, следовательно, относительное удаление $\Delta p_z/p_F$ от экстремального по площади сечения) порядка $\delta/l\varphi$. Вблизи наиболее благоприятного для всплесков центрального сечения, где экстремален диаметр орбит, это соответствует разбросу диаметров $\Delta d \approx r_H(\Delta p_z/p_F)^2 \approx r_H(\delta/l\varphi)^2$, который должен быть порядка или меньше δ . В результате условия возникновения всплесков принимают вид:

$$\frac{\delta}{r_H} \gg \varphi \gg \frac{\delta}{l}, \quad \varphi \gg \sqrt{\frac{r_H \delta}{l^2}} \quad (38.7)$$

и необходимо

$$\Omega\tau \gg \left(\frac{r}{\delta}\right)^{1/2}. \quad (38.8)$$

Понятно, что в случае аномально слабой зависимости диаметра орбит от p_z (как, например, тогда, когда поверхность Ферми близка к цилиндру постоянного диаметра), условие возникновения всплесков существенно облегчается.

Наличие даже слабых, но медленно затухающих всплесков, возникающих всякий раз, когда появляются выделенные орбиты, приводит к целому ряду важных физических следствий. В параллельном магнитном поле «особые» орбиты, имеющие экстремальный диаметр, обеспечивают циклотронный резонанс на соответствующей частоте. В наклонном по отношению к поверхности металла магнитном поле всплески обуславливают циклотронный резонанс (на частотах, указанных в § 36).

В пластине всплески приводят к ряду осцилляционных по магнитному полю эффектов, которые подробно описаны в обзорах [54].

Естественно, при невыполнении условий (38.7) — (38.8), как отмечалось в начале параграфа, всплески, хотя и возникают (в местах, где собираются электроны вблизи выделенных сечений), но быстро затухают (однако тем медленнее, в частности, чем слабее зависимость $d(p_z)$). Тем не менее использование пластины, отсекающей всплески, позволило экспериментально их обнаружить по периодическим по H аномалиям импеданса [55].

Теория всплесков, связанных с наклоном магнитного поля относительно поверхности металла, и «затухающих» всплесков

может быть выведена из уравнений (36.5)—(36.9) аналогично тому, как это было сделано в этом параграфе для всплесков, связанных с циклотронным резонансом (детальное рассмотрение см. в работе [53]).

§ 39. Собственные колебания и слабозатухающие волны в металле

Возникновение аномально медленно (т. е. на расстояниях, больших по сравнению с δ) затухающего поля и всплесков его в глубине указывает на существование в металле слабозатухающих волн, т. е. (при $\tau = \infty$) собственных колебаний [5]. Действительно, наличие сильного постоянного магнитного поля, параллельного (или почти параллельного) поверхности металла, означает, что единственным характерным размером для движения электронов в направлении, нормальном поверхности, является r_H , и, следовательно, ядро K в уравнении (33.7) убывает на расстоянии порядка r_H . Предельная же аномальность скин-эффекта означает, что $|K_{\alpha\beta}| \approx \sigma_{эфф}/r_H$, причем $(4\pi\omega\sigma_{эфф}/c^2)^{-1/2} \ll r_H$.

Следовательно, в безразмерных переменных уравнение (33.7) принимает вид

$$\frac{1}{N} E''_{\alpha}(\xi) = i \int K_{\alpha\beta}(\xi, \xi') E_{\beta}(\xi') d\xi', \quad (39.1)$$

где $|K_{\alpha\beta}| \sim 1$, $K_{\alpha\beta}$ убывает на расстоянии порядка 1, а $N \gg 1$.

Если E убывает по y на расстояниях, больших по сравнению с r_H , то при $N \rightarrow \infty$ это означает, что уравнение (39.1) имеет нулевое собственное значение.

Так, например, уравнение (39.1) при $\tau = \infty$ имеет бесконечнократно вырожденное нулевое собственное значение, соответствующее $E_{\alpha}(y) = E_0 \exp(-ik_n y)$, где $K_{\alpha\alpha}(k_n) = 0$.

При этом возникновение всплесков — естественная особенность решения уравнения вблизи его собственного значения.

Наличие же собственного решения у уравнения (39.1) означает существование незатухающих собственных колебаний в металле. Для того чтобы показать это, выясним условия возникновения незатухающих волн в общем случае.

Прежде всего ясно, что незатухающие колебания возможны только вдали от поверхности металла, в той мере, в какой можно пренебречь обязательно сопровождающимися диссипацией импульса столкновениями электронов с поверхностью. Значит, уравнения Максвелла (33.7) следует рассматривать в неограниченном пространстве, где плоскость $\xi = 0$ не является особой, так что скачки $E'_{\alpha}(0)$, естественно, отсутствуют. Следовательно, в случае одномерных колебаний в уравнении (39.1) (для конкретности, будем говорить о нем) отсутствует член с $E'_{\alpha}(0)$. Ясно,

что нетривиальное решение соответствует (дискретным) корням уравнения

$$k_n^2 + iaK_{\alpha\alpha}(k_n) = 0, \quad k_n = k(\omega, n). \quad (39.2)$$

Для того чтобы решение $E_0 \exp(ik_n y)$ имело физический смысл, оно не должно нарастать по y на $\pm\infty$, т. е. необходимо

$$\text{Im } k_n = 0. \quad (39.3)$$

Это уравнение, естественно, в реальном случае строго выполняться не может, его следует рассматривать как условие, определяющее области существования слабозатухающих волн. Например, уравнение (39.3) дает физически очевидное условие $\tau = \infty$, а слабозатухающие волны существуют при

$$\omega\tau \gg \frac{v}{\omega\delta} \gg 1. \quad (39.4)$$

В случае всплесков, при $\tau = \infty$, реализуется, как ясно из сказанного выше, именно подобная ситуация (причем в уравнении (39.2) $aK_{\alpha\alpha}(K_n) \gg k_n^2$ и в основном приближении k_n определяется из $K_{\alpha\alpha}(k_n) = 0$). Собственные колебания при этом имеют дискретные собственные частоты [5]

$$\omega q = q\Omega_0 \quad (q - \text{целое}) \quad (39.5)$$

и соответствуют дискретным волновым векторам (39.3), которые при больших n имеют вид:

$$k_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi \omega_q m_0^* (2q p_x^{\text{extr}})^{-1}. \quad (39.6)$$

Природа этих собственных колебаний, естественно, связана с вращением электронов без затухания ($\tau = \infty$) по дискретным (отобраным условиям резонанса) ларморовским орбитам.

В общем случае собственных колебаний на произвольных частотах (или при произвольных волновых векторах) нельзя, конечно, подобным образом упростить уравнения для высоких частот, можно только пренебречь током смещения и рассмотреть уравнения для неограниченного пространства. Запишем уравнения Максвелла в компонентах Фурье по пространству и времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), & \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{H} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \\ \mathbf{j} &\rightarrow \mathbf{j} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \end{aligned} \quad (39.7)$$

$$[\mathbf{k}\mathbf{E}] = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad [\mathbf{k}\mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (39.8)$$

Линейная связь \mathbf{j} и \mathbf{E} для данных \mathbf{k} и ω в общем случае имеет вид

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{is}(\omega, \mathbf{k}) E_s. \quad (39.9)$$

Она может быть найдена совершенно аналогично тому, как это делалось в § 36, и в классическом случае имеет вид:

$$\sigma_{is}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{2|e|^3 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} d\epsilon \int dp_z \int_0^T v_i(t) dt \times \\ \times \int_{-\infty}^t v_s(t') dt' \exp \left[\int_t^{t'} \left(i\mathbf{k}\mathbf{v}(t_1) + i\omega + \frac{1}{\tau} \right) dt_1 \right]. \quad (39.10)$$

Требование существования нетривиального решения уравнений (39.8), (39.9) приводит к уравнению

$$\left| k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\sigma_{\alpha\xi} \sigma_{\xi\beta}}{\sigma_{\xi\xi}} \right) \right| = 0 \quad (39.11)$$

(ось ξ выбрана по направлению \mathbf{k} , угол между \mathbf{k} и \mathbf{H} есть φ), из которого определяется

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = \omega_1(\mathbf{k}) - i\omega_2(\mathbf{k}) \quad (39.12)$$

Вещественная часть $\omega(\mathbf{k})$ дает закон дисперсии собственных колебаний, а мнимая — их затухание (см. (39.7)). Естественно, говорить о собственных колебаниях имеет смысл лишь тогда, когда за время их жизни имеет место большое число колебаний, т. е. когда

$$|\omega_1(\mathbf{k})| \gg |\omega_2(\mathbf{k})|. \quad (39.13)$$

Это неравенство, куда в качестве параметра входит постоянное магнитное поле \mathbf{H} , определяет область \mathbf{k} и \mathbf{H} (а значит, по (39.12), и ω), в которой существуют слабозатухающие электромагнитные волны в металле. Возбуждение их будет, естественно, носить резонансный характер, поэтому значительный интерес представляет исследование импеданса в области (39.13).

Совершенно ясно, что для существования слабозатухающих волн, во всяком случае, необходима достаточно малая диссипация энергии, т. е. (в отсутствие столкновений с поверхностью) достаточно большое $\tau = 1/\nu$. Любопытно, однако, что ν не обязательно должно быть наименьшей характерной частотой. В самом деле, если даже $\nu \gg \omega$, но \mathbf{k} достаточно мало (достаточно велика длина волны), так что имеет место нормальный скин-эффект, то σ_{ik} в основном приближении можно брать при $\omega = 0$, $\mathbf{k} = 0$, т. е. таким, как в статическом случае. При этом ω является собственным значением некоторой матрицы, определяемой уравнением (39.11). При $\Omega\tau \gg 1$ затуханием в σ_{ih} в основном приближении можно пренебречь, так что оператор σ_{ih} оказывается антиэрмитовским. Это значит, что в основном приближении ω является собственным значением эрмитовского оператора

(см. (39.11)), т. е. вещественным, а это и означает существование слабозатухающих колебаний (геликондалных волн).

Ясно, что слабозатухающие волны обеспечат высокую прозрачность металла для соответствующих электромагнитных волн (так как, разрешая (39.12) относительно k при заданной частоте ω , получим малую мнимую часть k , которая и ответственна за затухание). Такая прозрачность в простейшем случае нормального скин-эффекта была предсказана в работе [56].

Весьма интересна возможность резонансного возбуждения собственных колебаний в металле; оно позволяет получить дополнительную информацию об электронном спектре металлов.

Подробное рассмотрение различных типов собственных колебаний и возможностей их возбуждения проведено в работах [57—59]. Рассмотрены как электромагнитные волны в классическом [57] и квантовом [58] случаях (см. также обзор [60]), так и возникновение связанных магнитоакустических волн [59]. Поскольку вопросам, связанным с распространением и поглощением ультразвука в металлах, посвящены отдельные параграфы настоящей книги, связанные магнитоакустические колебания мы сейчас рассматривать не будем. Что же касается квантового случая, то для него уравнение (39.11) сохраняется, только для σ_{ih} следует заменить формулу (39.10) соответствующей квантовой формулой. Последнюю можно заимствовать из § 31, где в квантовом случае получена связь между j и E .

Наличие большого числа параметров в рассматриваемой задаче *) приводит к множеству различных предельных случаев, каждый из которых требует довольно громоздких вычислений. Поэтому, отсылая читателя к работам [57, 58, 60], сформулируем их основные результаты.

1. Классический случай [57].

1. Длина волны велика по сравнению с ларморовским радиусом, а пространственная неоднородность переменного поля вдоль H является сильной **):

$$\left. \begin{aligned} kr_H \ll 1 \ll kv \cos \varphi \left(\frac{1}{\tau} + \omega \right)^{-1}, \\ \cos \varphi = \frac{kH}{kH}, \quad r_H \sim \frac{v}{\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (39.14)$$

*) Даже в классическом случае имеются следующие характерные длины: путь, проходимый электроном за период поля, длина свободного пробега, радиус ларморовской орбиты, длина волны в металле вдоль H и перпендикулярно ему, расстояние, на котором затухает волна.

**) Квазистатистический случай, когда пространственная неоднородность является слабой, был рассмотрен в работе [61] (см. также [56]).

В этом предельном случае

$$\mathbf{j} = \frac{(n_1 - n_2) ec}{kH} [k\mathbf{E}] + \sum A\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}^*\mathbf{E}) + SH(\mathbf{HE})H^{-2} + \hat{S}\mathbf{E}, \quad (39.15)$$

где

$$A = \frac{(2\pi e)^2}{(2\pi\hbar)^3} \left| \frac{m^*}{k_z \bar{v}'_z(p_z)} \right|_{\bar{v}_z=0}, \quad (39.16)$$

комплексный вектор «скорости» $\boldsymbol{\omega}$ равен

$$\omega_z = -\frac{i\omega}{k_z}, \quad \omega_\alpha = \overline{k v \rho_\alpha} \Big|_{\bar{v}_z=0}, \quad (39.17)$$

$$\rho_x = \frac{c(p_y - \bar{p}_y)}{eH}, \quad \rho_y = -\frac{c(p_x - \bar{p}_x)}{eH}$$

(черта означает усреднение по времени обращения по орбите), $\boldsymbol{\omega}^*$ — комплексно-сопряженное от $\boldsymbol{\omega}$, n_1 и n_2 — числа электронов и дырок соответственно, а

$$S = \frac{2e^2}{k_z^2} \sum \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) |v(\epsilon_F)|, \\ S_{\alpha\beta} = \frac{4\pi e^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) \int dp_z |m^* \overline{\rho_\alpha \rho_\beta}| \quad (39.18)$$

(сумма берется по различным «сортам» квазичастиц, $v(\epsilon_F)$ — плотность состояний при $\epsilon = \epsilon_F$).

Первое слагаемое в (39.15) представляет собой недиссипативный «холловский» ток. В условиях сильной пространственной дисперсии этот ток ортогонален \mathbf{k} и \mathbf{E} , а не \mathbf{H} и \mathbf{E} , как в статическом случае. Второй член в \mathbf{j} также связан с пространственной неоднородностью поля. Соответствующие поперечные элементы проводимости $\sum A\omega_\alpha\omega_\beta$ обусловлены электронами, движущимися в фазе с волной $\omega = k_z \bar{v}_z$ (вблизи центрального сечения поверхности Ферми $p_z = 0$). Эти слагаемые описывают черенковское поглощение электромагнитного поля электронами и аналогичны известному затуханию Ландау в бесстолкновительной плазме.

Продольный относительно \mathbf{H} ток $SH(\mathbf{FH})H^{-2}$ в $|k_z v| (1/\tau + \omega)^{-2}$ раз меньше, чем в отсутствие пространственной дисперсии. Тензор $S_{\alpha\beta}$ представляет собой поперечную относительно \mathbf{H} проводимость металла в пределе однородного высокочастотного поля (когда отсутствует зависимость от \mathbf{k}) при $n_1 = n_2$. Если магнитное поле направлено по оси симметрии третьего или более высокого порядка (а также при изотропном спектре), то $v_z \rho_\alpha = 0$, $\rho_x \rho_y = 0$, и тензор $S_{\alpha\beta}$ является диагональным.

а) Если $n_1 \neq n_2$, то $|S_{\alpha\beta}| / \sum A\omega_\alpha\omega_\beta \sim (1 + \omega\tau) (k_z l)^{-1} \ll 1$, величинами $S_{\alpha\beta}$ в (39.15) можно пренебречь, и закон дисперсии

слабозатухающей спиральной волны имеет вид:

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{ck|\mathbf{kH}|}{4\pi(n_1 - n_2)e}. \quad (39.19)$$

Декремент затухания и поляризация волны существенно зависят от формы и топологии поверхности Ферми, а также от взаимной ориентации векторов \mathbf{k} , \mathbf{H} и осей кристалла.

Если \mathbf{H} параллельно оси симметрии высокого порядка, то

$$\frac{\omega''}{\omega} = \frac{2\pi\omega}{k^2c^2} \sum A\omega_x^2 \sim kr_H \sin^2\varphi, \quad \omega'' = -\text{Im}\omega. \quad (39.20)$$

При $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ ($\varphi = 0$) пространственная дисперсия оказывается незначительной и затухание Ландау (39.20) исчезает. Затухание возбуждений в этом случае обусловлено только рассеянием электронов:

$$\frac{\omega''}{\omega} \sim \frac{1}{\Omega\tau}. \quad (39.21)$$

При этом $\mathbf{EH} = 0$ и вектор \mathbf{E} вращается в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} .

Если направление \mathbf{H} не совпадает с осью симметрии кристалла, а поверхность Ферми является односвязной, затухание спиральной волны имеет немонотонный характер. При $\omega\tau < 1$ в относительно слабом магнитном поле затухание растет с полем:

$$\frac{\omega''}{\omega} \sim (k_z l kr_H \sin^2\varphi)^{-1} \sim \frac{H}{k^2} \quad (k_y^2 r_H^2 k_z l \gg 1), \quad (39.20a)$$

причем $\mathbf{E}\omega' = 0$, затем достигает максимума $(\omega''/\omega)_{\max} \sim (k_z l k_y^2/k^2)^{-1/2}$; потом, в области сильных полей, монотонно убывает:

$$\frac{\omega''}{\omega} \sim kr_H, \quad (39.21a)$$

причем $\mathbf{EH} = 0$.

При $\omega\tau > 1$ затухание также имеет немонотонный характер; максимум смещается в сторону меньших магнитных полей.

В общем случае двух или большего числа групп носителей декремент затухания возбуждений порядка kr_H и монотонно убывает при возрастании H . Поляризация спиральной волны при этом меняется так же, как и в случае одной группы носителей. Физическая причина отмеченных особенностей в затухании и поляризации спиральной волны — возможность ее взаимодействия с продольной волной.

б) Обратимся к случаю, когда числа электронов и дырок равны: $n_1 = n_2$. В этом случае существуют высокочастотные ($\omega\tau \gg 1$) волны магнитогидродинамического типа с линейным

спектром и плоской поляризацией. Их фазовые скорости порядка альфвеновской скорости $v_A = H(4\pi nm^*)^{-1/2}$.

В сильном магнитном поле ($v_A \gg v$) пространственная дисперсия не играет роли и затухание определяется столкновениями электронов: $\omega'' \sim 1/\tau$. Имеются две волны магнитогидродинамического типа: альфвеновская и быстрая магнитозвуковая, причем фазовая скорость первой не превосходит фазовой скорости второй.

В области магнитных полей, когда

$$1/\tau \ll \omega \ll kv \ll \Omega,$$

слабозатухающие волны возможны лишь тогда, когда \mathbf{H} направлено по оси симметрии. При этом имеются две линейно поляризованные магнитогидродинамические волны с одинаковым спектром, если $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$, и одна альфвеновская волна с электрическим полем, поляризованным по y (перпендикулярно \mathbf{H} в плоскости \mathbf{k}, \mathbf{H}), если \mathbf{k} не параллельно \mathbf{H} .

В области магнитных полей

$$\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll v \left| \frac{\omega}{cr_D} \operatorname{ctg} \varphi \right|^{1/2} \ll \Omega \quad (39.22)$$

($r_D = |4\pi e^2 \sum v(\epsilon_F)|^{-1/2}$ — радиус экранирования Дебая — Хюккеля) при непараллельных \mathbf{k} и \mathbf{H} , $\omega_y \neq 0$, $k_y \neq 0$ и \mathbf{H} , не направленным по оси симметрии, существует слабозатухающая продольная волна со спектром

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{cr_D k^2}{2} |\sin 2\varphi|. \quad (39.23)$$

2. Длина волны мала по сравнению с ларморовским радиусом:

$$kr_H \gg 1. \quad (39.24)$$

Если

$$\frac{1}{\Omega\tau} < \left| \frac{\pi}{2} - \varphi \right| < \frac{1}{\alpha_n^4}, \quad (39.25)$$

где $1 \ll \alpha_n^4 \ll (v/v_A)^2$, $kr_H = \alpha_n = \pi(n + 1/4)$, то основную роль играют электроны вблизи центрального сечения, разброс радиусов орбит которых мал по сравнению с длиной электромагнитной волны. При этом существуют слабозатухающие волны с дискретным спектром:

$$\omega_n = \frac{2}{3} \pi v_A^2 v^{-2} \alpha_n^4 \left[\Omega \varphi' \left(\frac{\pi \alpha_n}{2} \right)^{1/2} - \frac{i}{\tau} \right] \quad \left(\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad (39.26)$$

поперечная часть электрического поля в которых поляризована по кругу.

Если же

$$\varphi \ll (\Omega\tau)^{-1}, \quad 1 < \left(\frac{v_A \Omega}{v\omega}\right)^{1/2} \ll \frac{\Omega}{\omega}, \quad (39.27)$$

то существует слабозатухающая волна, поляризованная в плоскости \mathbf{k} , \mathbf{H} перпендикулярно \mathbf{k} , с непрерывным спектром:

$$\omega = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} (kr_H)^{3/2} |k_z| v_A - \frac{i}{2\tau}. \quad (39.28)$$

II. Квантовый случай. Одной из основных причин затухания собственных колебаний является затухание Ландау, которое в основном обусловлено электронами, движущимися в фазе с волной. Квантование электронных состояний приводит к тому, что такие электроны находятся вблизи энергии Ферми только при определенных значениях магнитного поля. Поэтому естественно, что затухание собственных электромагнитных колебаний должно в квантовом случае резко уменьшиться и испытывать существенные осцилляции [58].

Приведем результаты в наиболее интересном случае

$$\hbar\omega \ll T \ll \hbar\Omega. \quad (39.29)$$

Пусть

$$A = \frac{ck_y e_F}{eH} \left| \frac{k_z v}{1/\tau + \omega} \right| M \ll 1, \quad (39.30)$$

где

$$M = \frac{\hbar\Omega}{8T} \sum_{\sigma=\pm 1} c\hbar^{-2} \left(\frac{\epsilon_{0\sigma} - \xi}{2T} \right), \quad (39.31)$$

а $\epsilon_{j\sigma} = \epsilon_{\sigma} |_{n=n_0, p_z=p_{z0}}$. Здесь p_{z0} — решение уравнения $\bar{v}_z(\epsilon_F, p_z) = - (2\pi m^*)^{-1} \frac{\partial \bar{S}}{\partial p_z} = \frac{\omega}{k_z}$, а n_0 — значение магнитного квантового числа, для которого $|\epsilon_F - \epsilon_{n p_{z0}}^{\sigma}|$ минимален.

В этом случае

$$\frac{\omega''}{\omega} \sim \sum kr_H M(H). \quad (39.32)$$

Таким образом, квантование не влияет на спектр и поляризацию собственных колебаний, но затухание их испытывает гигантские квантовые осцилляции, описываемые функцией $M(H)$.

В случае, когда (см. 39.30)

$$A \gg 1, \quad (39.33)$$

формула (39.32) усложняется так что относительное затухание волны всегда порядка $kr_H M_{\min} \sim kr_H \frac{\hbar\Omega}{T} \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{2T}\right)$, т. е. относительная амплитуда осцилляций затухания порядка единицы. При этом поперечная часть поля \mathbf{E}_{\perp} поляризована по кругу. Продольная компонента \mathbf{E}_{\parallel} испытывает гигантские осцилляции.

Таким образом, в случае (39.33) квантование существенно меняет не только затухание, но и поляризацию спиральной волны.

Мы выписали результаты для наиболее интересного эффекта — влияния квантования на затухание Ландау. В работе [57] учтено также влияние рассеяния электронов на квантовые осцилляции спиральной волны в случае (39.29).

Мы не выписываем также полученных в работе [57] формул для поверхностного импеданса и проникновения поля в глубину металла в условиях, когда внешнее электромагнитное поле возбуждает слабозатухающие волны (проникновение поля в металл при возбуждении собственных колебаний было описано в предыдущем параграфе).

Экспериментально высокочастотные магнитогидродинамические волны наблюдались в висмуте [62]; низкочастотные спиральные волны были обнаружены на большом числе металлов [63] (в натрии, индии, меди, серебре, золоте, свинце, олове, цинке, кадмий и других) и в вырожденном сплаве $\text{In} - \text{Sb}$ [64] (в условиях, когда пространственная дисперсия не играет роли); слабозатухающие волны вблизи циклотронного резонанса в калли изучались в работе [65].

Плазменным эффектам, связанным с собственными колебаниями в металлах, посвящен ряд обзоров [60, 66].

§ 40. Ферми-жидкостные эффекты в высокочастотных явлениях в металлах

Вопрос о роли ферми-жидкостных эффектов рассматривался в § 23. Однако проанализируем его еще раз, так как ранее не учитывалась специфика высокочастотного случая (пространственная и временная неоднородность функции распределения).

Учет ферми-жидкостного коллективного взаимодействия сразу исключает возможность использования одноэлектронного приближения. Для вычисления функции распределения n необходимо обратиться к кинетическому уравнению (см. (23.6), (23.25) и дальше).

Так как интеграл столкновений $(\partial n / \partial t)_{\text{ст}}$ обращается в нуль равновесной фермиевской функцией от полной энергии квазичастицы ϵ , то удобно поэтому, следуя [4], ввести корреляционную функцию, связывающую (в линейном по внешнему полю приближении) ферми-жидкостную добавку к энергии с добавкой к $n_F(\epsilon)$:

$$\delta \epsilon = \int G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (n - n_F(\epsilon')) d\mathbf{p}'. \quad (40.1)$$

Полагая

$$n = n_F(\epsilon_0(\mathbf{p})) - en' \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon_0}, \quad (40.2)$$

ТАК ЧТО

$$\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0(\mathbf{p}) = -e \int \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon_0'} n'(\mathbf{p}') d\mathbf{p}' \equiv -e\hat{\Phi}n' \quad (40.3)$$

И

$$n' = (1 + \hat{\Phi})^{-1} n_1, \quad (40.4)$$

получим в линейном приближении:

$$\hat{G} = \hat{\Phi}(1 + \hat{\Phi})^{-1}, \quad (40.5)$$

и ($\hat{L}n_1$ — оператор, получившийся из $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\text{ст}}$ в линейном по n_1 приближении):

$$i\omega(1 - \hat{G})n_1 + \frac{\partial n_1}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_1}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{r}} + \hat{L}n_1 = \mathbf{v}\mathbf{E}, \quad (40.6)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v}n_1 \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} d\mathbf{p} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{\varepsilon_0(\mathbf{p})=\varepsilon_F} \frac{\mathbf{v}n_1 dS}{v}. \quad (40.7)$$

Из уравнений (40.6) и (40.7) ясна роль ферми-жидкостного взаимодействия. Введем характерное время свободного пробега τ ($\hat{L}n_1 \sim n_1/\tau$).

Если $\omega\tau \ll 1$, то в основном приближении по $\omega\tau$ член, пропорциональный ω , должен быть отброшен, и, следовательно, ферми-жидкость не влияет на результаты (§ 23). Если $\omega\tau \gg 1$, то, как говорилось в § 32, для хороших металлов имеет место предельно аномальный скин-эффект (разумеется, пока $\omega \ll v/\delta$; обратный предельный случай см. ниже), и член $\hat{G}n_1$ может быть отброшен в основном приближении по аномальности (§ 32). Для плохих же металлов типа висмута, где возможен нормальный скин-эффект, член $\hat{G}n_1$ мал, так как мало [67] ферми-жидкостное взаимодействие.

В условиях аномального скин-эффекта ферми-жидкостной член, как указывалось в § 32, может быть существен лишь в условиях очень острого циклотронного резонанса. Наметим путь решения задачи в этом случае [4]. Для простоты будем рассматривать лишь строго параллельные поверхности металла постоянное магнитное поле, квадратичный закон дисперсии и резонанс на центральном сечении. Переходя в (34.8), (34.9) к переменным ε , p_z , t (напомним, что t — время обращения электрона по орбите), получим:

$$i\omega(1 - \hat{G})n_1 + \mathbf{v}_y \frac{\partial n_1}{\partial y} + \frac{\partial n_1}{\partial t} + \hat{L}n_1 = v_\beta E_\beta + v_y E_y \quad (40.8)$$

$$\beta = x, z,$$

$$\mathbf{j} = \frac{2|e|^3 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \oint_{\varepsilon=\varepsilon_F} \mathbf{v}n_1 dp_z dt \equiv \frac{2|e|^3 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \langle \mathbf{v}n_1 \rangle. \quad (40.9)$$

Положим

$$n_1 = v_1 - \varphi = v_1 - \int_y^{\infty} E_y(y') dy', \quad (40.10)$$

что соответствует выбору в качестве нулевого приближения $n_0(\varepsilon^t - \zeta_0)$, где ε^t — полная (кинетическая и потенциальная) энергия электрона в поле: $\varepsilon^t = \varepsilon + e\varphi$, а ζ_0 — химический потенциал в отсутствие поля. Такое приближение естественно, так как химический потенциал не успевает следить за быстропеременным полем ($\omega\tau \gg 1$).

Функция φ (а значит, и $E_y(y)$) легко определяется из условия отсутствия нескомпенсированного заряда (§ 32): $\rho' = 0$ — условия, эквивалентного, согласно уравнению непрерывности, равенству нулю нормальной компоненты тока. Так как

$$\rho' = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int (n - n_0(\varepsilon_0)) dp = \frac{2|e|^3 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \langle (1 - \hat{G}) n_1 \rangle, \quad (40.11)$$

то

$$\varphi = \frac{\langle (1 - \hat{G}) v_1 \rangle}{\langle (1 - \hat{G}) 1 \rangle}. \quad (40.12)$$

Подставляя (40.10) в (40.8), (40.9) и учитывая (40.12), получаем уравнение, уже не содержащее поля E_y :

$$\begin{aligned} i\omega(1 - \hat{G})v_1 + \left(v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L} \right) v_1 = \\ = v_\beta E_\beta + i\omega \frac{\langle (1 - \hat{G}) v_1 \rangle}{\langle (1 - \hat{G}) 1 \rangle} (1 - \hat{G}) 1. \end{aligned} \quad (40.13)$$

Из формулы (40.13) и из ее вывода ясно, что ферми-жидкостное взаимодействие играет в некотором смысле роль, аналогичную роли поля E_y .

Функция v_1 имеет острый максимум при $v_y \approx 0$ (заметим, что n_1 , которое содержит не зависящую от углов функцию ψ , этим свойством не обладало. Ранее это было для нас несущественно, так как величиной φ (§ 32) можно было вообще пренебречь).

Кроме того, при резонансе функция v_1 имеет острый максимум вблизи $p_z = 0$. Совместно с $\varepsilon = \zeta_0$ это определяет две центрально-симметричные точки на поверхности Ферми, в которых и выносятся $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Благодаря острому максимуму v_1 , вместо $\hat{L}v_1$ может быть последовательным образом введено время релаксации (§ 32). Дальнейшее решение уже совершенно аналогично проведенному в § 36 (подробности его см. в работе [4]).

Оказывается, что ферми-жидкость существенно влияет на глубину и ширину резонанса лишь при

$$\omega\tau > \left(\frac{r_H}{\delta} \right)^2, \quad \omega > v(\delta^2 l)^{-1/2}. \quad (40.14)$$

Заметим кстати, что это — условие логарифмического резонанса на опорных точках, где скин-эффект при условии (40.14) оказывается нормальным. Экспериментальное исследование резонанса в этом случае позволило бы определить «диагональные элементы» $G(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ на ферми-поверхности.

Как показывают результаты этого параграфа и § 23, ферми-жидкостное взаимодействие электронов не изменяет качественно характера практически всех явлений, рассмотренных в настоящей монографии. Это обстоятельство делает понятным успех «одноэлектронного» приближения, основанного на представлении об электронах проводимости как о газе заряженных фермионов со сложным законом дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$. Правда, следует помнить, что численные значения большинства величин, описывающих электроны проводимости (в частности, и закон дисперсии), содержат в себе ферми-жидкостное взаимодействие.

При описании ферми-жидкостного взаимодействия мы, по сути дела, игнорировали спиновую корреляцию между электронами (несущественную при описании «орбитального» движения электронов). Учет спиновой корреляции при рассмотрении парамагнитного резонанса (§ 44) приводит к существенному усложнению спектра волн в металле. Оказывается, за счет ферми-жидкостного взаимодействия в металлах могут распространяться своеобразные спиновые волны [67а], которые недавно были экспериментально обнаружены [67б]*).

§ 41. Поверхностный скин-эффект и резонанс на сверхнизких частотах

В § 29 (а особенно в приложении I), было показано, что даже слабая неоднородность может существенно изменить сопротивление проводника в сильном магнитном поле ($r_H/l \ll 1$). Поскольку член, учитывающий неоднородность, пропорционален r_H/l , а однородный — $(r_H/l)^2$, достаточно, чтобы характерное расстояние, связанное с неоднородностью, было порядка $r_H/l/r_H = l$. Неоднородность может возникать по разным причинам. Одним из наиболее простых способов ее создания является скин-эффект. В этом случае естественно ожидать новой (по сравнению с «обычным» скин-эффектом, который определяется проводимостью в однородном поле) зависимости сопротивления от магнитного поля уже на очень низких частотах, когда «обычная» глубина скин-слоя становится порядка длины свободного пробега:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega_2\sigma(H)}} \sim l. \quad (41.1)$$

*) Подробное изложение теории спиновых волн в немагнитных металлах см. в работе [67в].

В хороших предельно чистых металлах при низких температурах, когда $l \sim 1 \div 3$ мм, это соответствует $\omega_1 \sim 1-100$ сек⁻¹.

Заранее ясно, что затухание поля и тока при $\omega \gg \omega_1$ будет носить весьма своеобразный характер под влиянием статического скин-эффекта. «Почти однородное» электрическое поле, как и в § 38, создает ток, убывающий главным образом на расстоянии порядка ларморовского радиуса r_H . Благодаря тому, что поле и плотность тока затухают на различных расстояниях, задачу на не слишком высоких частотах можно решать методом последовательных приближений [68]. Сначала следует определить напряженность электрического поля. Пока она меняется на расстояниях, больших по сравнению с r_H (это определяет область «не слишком высоких» частот), характер рассеяния электронов от поверхности несуществен и наличие поверхности не сказывается на тензоре проводимости. Это позволяет четко продолжить напряженность поля на полупространство вне проводника и записать

$$j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(|z - z'|) E(z') dz'. \quad (41.2)$$

Уравнения Максвелла в одномерном случае (нормальное падение):

$$E''_{\alpha} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{\alpha} \quad (\alpha = x, y), \quad (41.3)$$

$$j_z = 0$$

решаются переходом к компонентам Фурье по координате (разумеется, с учетом скачка E'_{α} при $z = 0$, связанного с четным продолжением E_{α}):

$$\left. \begin{aligned} -k^2 e_{\alpha}(k) - 2E'_{\alpha}(0) &= \frac{4\pi i \omega}{c^2} \bar{\sigma}_{\alpha j}(k) e_j(k), \\ \bar{\sigma}_{z j}(k) e_j(k) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (41.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(k) &= 2 \int_0^{\infty} \cos(kz) \sigma_{ij}(z) dz \\ \varepsilon(k) &= 2 \int_0^{\infty} \cos(kz) E(z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (41.4a)$$

Определив из (41.4) $E(z)$, следует записать следующее приближение — быстро убывающее слагаемое в плотности тока (которое, естественно, зависит от характера отражения от поверхности), аналогично тому, как это делается в приложении I. В ин-

тересующем нас случае, когда E меняется на расстояниях, больших по сравнению с r_H , добавка, учитывающая характер отражения, будет такой же, как в статическом случае. (Поскольку характерное расстояние, на котором меняется E , есть δ , можно E считать однородным.) В результате полный ток I_α равен (см. приложение I):

$$I_\alpha = I_\alpha^{(0)} + I_\alpha^{\text{стат}} = (\hat{Z}_0^{-1})_{\alpha\beta} E_\beta(0) + (1-q) \frac{ne^2 r_H^2}{p} a_{\alpha\beta} E_\beta(0), \quad (41.5)$$

где \hat{Z}_0 определяется уравнениями (41.4), $a_{\alpha\beta} \sim 1$ и не зависит от ω и l , а q — коэффициент отражения зарядов от поверхности. В сильных магнитных полях при большой глубине скин-слоя для хороших металлов параметр q близок к нулю (диффузное отражение), так как не малы углы столкновения зарядов с поверхностью.

Используя определение импеданса $E_\alpha(0) = Z_{\alpha\beta} I_\beta$, находим [68]:

$$\hat{Z}^{-1} = \hat{Z}_0^{-1} + \frac{ne^2 r_H^2}{p} \hat{a} (1-q). \quad (41.6)$$

Порядок $\sigma_{\alpha\beta}(k)$ легко определяется так же, как это делалось ранее, принимая во внимание, что $\sigma_{\alpha\beta}(k) = \sigma_{\alpha\beta}(-k)$ (§ 39).

Не приводя результатов расчета для всей области частот и магнитных полей, остановимся на своеобразном резонансе на сверхнизких частотах (впервые полученном для зеркального отражения электронов от поверхности в работе [68а]), который имеет место при $n_1 = n_2$ в нормальном к поверхности металла магнитном поле, когда поверхность металла совпадает с кристаллографической плоскостью. В этом случае в силу симметрии задачи электрическое поле, расположенное в плоскости xy , создает ток только в этой же плоскости, так что $\sigma_{\alpha z} = \sigma_{z\alpha} = 0$ и в (41.4) $E_z = 0$, а $\sigma_{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$\hat{\sigma} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{11} & -\gamma^2 a_{12} + \gamma(kr)^2 b_{12} \\ \gamma^2 a_{12} - \gamma(kr)^2 b_{12} & \gamma^2 a_{22} \end{pmatrix} \left(\gamma = \frac{r_H}{l} \right). \quad (41.7)$$

При

$$4\pi\omega\sigma_0\gamma r_H^2/c^2 = 1 \quad (41.8)$$

детерминант уравнений (41.4), (41.7) обращается в нуль — уравнения перестают иметь решение. Причиной этого является резонанс, приводящий к обращению в бесконечность одного из главных значений импеданса. Для того чтобы вычислить \hat{Z}_0 вблизи резонанса, нужно продолжить разложение $\sigma_{xy}(\gamma, k) = \sigma_{yx}(-\gamma, k) = \sigma_{xy}(\gamma, -k)$:

$$\sigma_{xy} = \sigma_0 (\gamma^2 a_{12} + \gamma(kr_H)^2 b_{12} + \gamma(kr_H)^4 d_{12}). \quad (41.9)$$

Обратим внимание на смысл этого разложения: оно означает, например, что

$$j_x = \sigma_0 \{ \gamma^2 a_{11} E_x + \gamma^2 a_{12} E_y + \gamma r_H^2 b_{12} E_y'' + \gamma r_H^4 d_{12} E_y''' \}, \quad (41.10)$$

т. е. что при $l = \infty$ плотность тока существенно зависит от четвертой производной от электрического поля по координате.

Полуширина резонанса порядка $\sqrt{r_H/l}$, эффективная глубина затухания поля в резонансе $r_H(l/r_H)^{1/4}$. Как вещественная, так и мнимая части импеданса \hat{Z}_0 (а стало быть, при зеркальном отражении зарядов от поверхности, и \hat{Z}) в резонансе возрастают в $(l/r_H)^{1/4}$ раз. При отражении, отличном от зеркального [68], слабая пространственная дисперсия E приводит, как и в статическом случае, к сильной пространственной дисперсии плотности тока, которая затухает на расстоянии порядка r_H . В результате в основном приближении по r_H/l импеданс вообще не зависит от частоты и совпадает со статическим сопротивлением пластины с $l = \infty$ при $d \rightarrow \infty$ и заданным q . В следующем приближении появляется зависимость от ω и резонансная добавка к импедансу; в резонансе она порядка $(r_H/l)^{3/4}$; соответствующая добавка к $Z'(H)$ порядка $(r_H/l)^{1/4}$.

Резонанс весьма чувствителен к указанной геометрии задачи (в этом можно убедиться, рассматривая общий случай).

Характерная особенность резонанса — своеобразная зависимость резонансной частоты от магнитного поля. Из (41.8) имеем:

$$\omega = \omega_H \left(\frac{c\omega_H}{v\omega_0} \right)^2 \sim H^3 \quad (41.11)$$

(ω_0 — плазменная частота). Условие $\omega_H \tau \gg 1$ означает, что при частотах, больших $\frac{1}{\tau} \left(\frac{v\omega_0 \tau}{c} \right)^{-2}$, условие (41.1) будет выполнено.

Резонансные соотношения особенно наглядны при кубической симметрии решетки, когда в (41.7) $a_{12} = 0$, и σ_{xy} полностью определяется неоднородностью переменного поля. При этом импеданс диагонален при круговой поляризации волны

$$E_{\pm} = E_x \pm iE_y, \quad (41.12)$$

уравнения (41.4) дают

$$E_{\pm}'' = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{\pm} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \{ \gamma^2 \sigma_0 a_{11} E_{\pm} \pm i \sigma_0 \gamma r_H^2 b_{12} E_{\pm}'' \}, \quad (41.13)$$

и в резонансе E_{\pm}'' (в 41.13) сокращается, так что приходится удерживать E_{\pm}''' .

В нерезонансной области существенный интерес представляет появление нового типа скин-эффекта, отличного как от нормального, так и от аномального: переменное электрическое поле, с одной стороны, и магнитное поле и ток, с другой, убывают на разных по порядку величины расстояниях. Этот скин-эффект имеет место в широкой области частот (или постоянных магнитных полей), соответствующей $\delta_{ан} \ll r \ll \delta_n$ (δ_n и $\delta_{ан}$ — глубины скин-слоя при нормальном и аномальном скин-эффекте соответственно). Поскольку он имеет ту же природу, что и статический скин-эффект (§ 29), при котором электрическое поле является однородным, а ток затухает в глубь металла, его естественно назвать «поверхностным» скин-эффектом. Теория поверхностного скин-эффекта построена в работах [68б] (случай полупространства) и [68в] (случай тонкой пластины).

§ 42. Квантовая теория высокочастотных явлений

Все предыдущее рассмотрение высокочастотных свойств основывалось на классическом рассмотрении движения электронов проводимости, «квантовой» была только статистика. Такое приближение вполне оправдано, так как в кинетике существенны только электроны с энергиями, близкими к фермиевской, а расстояние между квантовыми уровнями *) (как диамагнитными, так и парамагнитными, спиновыми) весьма мало по сравнению с этой энергией (см. введение), и спектр поэтому можно с высокой точностью считать непрерывным. Однако в ряде случаев дискретность уровней может оказаться определяющей характер явления. Это, во-первых, относится к специфически квантовым явлениям, таким, как парамагнитный резонанс, связанный с резонансными переходами между дискретными спиновыми парамагнитными уровнями; квантовый циклотронный резонанс [69, 69а], обусловленный переходами между диамагнитными уровнями, когда они не строго эквидистантны (результат неквадратичности закона дисперсии) и расстояние между соседними резонансными частотами велико по сравнению с размытием частот вследствие столкновений; комбинированный резонанс, связанный с переходом между диамагнитными уровнями, соответствующими различным значениям проекции спина.

Во-вторых, это относится к квантовым эффектам, которые хотя и малы, но приводят к существенно отличным от классических зависимостям, легко выделяемым на эксперименте.

*) Квантование может быть, естественно, связано и с конечными размерами образца (§ 22). Мы ограничимся наиболее важным случаем квантования, обусловленного постоянным магнитным полем.

Таковы квантовые осцилляции поверхностного импеданса, аналогичные осцилляциям намагниченности при эффекте де Гааза — ван Альфена или сопротивления при эффекте Шубникова — де Гааза. Рассмотрению квантовых эффектов в высокочастотной области посвящены § 42—43.

Прежде чем перейти непосредственно к построению квантовой теории поверхностного импеданса, обсудим одну специфическую квантовую особенность этой задачи [70].

Как и в классическом случае, задача определения поверхностного импеданса распадается на две части: определение связи плотности тока с напряженностью электрического поля и затем решение при такой связи уравнений Максвелла. В классическом случае магнитная индукция \mathbf{B} совпадала с напряженностью магнитного поля \mathbf{H} .

В квантовом случае уже «выделение» в качестве независимых физических величин магнитного момента \mathbf{M} и плотности тока \mathbf{j} имеет смысл, строго говоря, только в статическом случае, когда разделяются магнитоэлектрика — и в ней термодинамическая величина \mathbf{M} — и электростатика — и в ней кинетическая величина \mathbf{j} . В общем же случае речь идет о типичной задаче теории поля — о системе свободных зарядов во внешних полях \mathbf{E} и \mathbf{H} (магнитный момент атомных, локализованных электронов не дает интересующих нас осцилляций, а поскольку он мал, им можно пренебречь). В этом случае следует определять плотность тока \mathbf{j} , которая, вообще говоря, не разбивается однозначно на «ток проводимости» и $\text{rot } \mathbf{M}$. (Это не приводит к недоразумениям в уравнениях Максвелла, поскольку они записываются так же, как для системы зарядов в вакууме, с граничными условиями для \mathbf{E} и \mathbf{B} .)

Легко проследить, как меняется ситуация по мере перехода от статики ко все более высоким частотам.

На низких частотах: $\omega\tau \ll 1$, $\delta \gg l \gg r_H$, в основном приближении по $\omega\tau$ имеет смысл запись уравнений Максвелла с током проводимости и магнитным моментом. Поскольку система «усневает» следить за частотой, а скин-эффект является нормальным, можно воспользоваться формулами, полученными в статике. При этом квантовые осцилляции проводимости определяются только «параметром квазиклассичности» и их относительная величина имеет порядок $\kappa_1 = (eHh/cS)^{1/2}$. Амплитуда осцилляций магнитной восприимчивости $\chi_{ik} = \partial M_i / \partial B_k$ порядка $\chi \approx \kappa_1^{-3} e^2 S^{1/2} / (m^* c^2) \sim \kappa_1^{-3} \rho^2$, где $\rho = v_F / c$. На низких частотах вклад осцилляций проводимости всегда мал и дополнительно уменьшается из-за того, что осцилляции обычно определяются не основными, а аномально мало заполненными электронными группами. Поэтому осцилляции поверхностного импеданса на низких частотах определяются эффектом де Гааза — ван Аль-

фена, и относительная амплитуда осцилляций *) порядка $\Delta\xi/\xi \sim (4\pi\chi)^{-1}$.

То, что полученный результат не зависит от частоты и сохраняется при $\omega \rightarrow 0$, обусловлено неявным предположением о «неограниченности» металла по сравнению с глубиной скин-слоя δ ($\delta \sim \omega^{-1/2}$ на низких частотах). В очень тонкой пластине толщиной $D \ll \delta\chi|\rho|^{-2} \ll \delta$ осцилляциями, определяющими импеданс, становятся осцилляции проводимости — эффект Шубникова — де Гааза.

По мере повышения частоты относительная роль осцилляций магнитного момента уменьшается. Это происходит, во-первых, благодаря нелокальной при аномальном скин-эффекте связи высокочастотного магнитного момента с напряженностью высокочастотного магнитного поля, когда «работает» лишь узкий скин-слой — это даст малый множитель δ/r_H при строго параллельном поверхности постоянном магнитном поле и δ/l — при наклонном; во-вторых, при $\omega\tau \gg 1$ система не успевает следить за изменением переменного поля, что даст дополнительный множитель $(\omega\tau)^{-1}$ в магнитном моменте. (В проводимости оба эти обстоятельства одинаково сказываются как на осциллирующей, так и на монотонной, классической части проводимости.) Поэтому на достаточно высоких частотах (оценку можно получить из приведенных выше соображений) осцилляции поверхностного импеданса определяются осцилляциями тока проводимости **). Легко угадать, как при этом должна выглядеть квантовая формула для тока проводимости. Ранее была выписана классическая формула для j ; нас интересует квазиклассический случай, когда $\chi_1 \ll 1$. Как известно [72], при этом всем величинам, меняющимся на расстояниях, больших по сравнению с «квантовым» расщеплением (по энергиям это соответствует расстояниям, большим по сравнению с $\hbar\Omega$), следует сопоставить оператор с матричными элементами, равными фурье-компонентам по времени от данной физической величины. В формуле для j медленно (на расстояниях порядка ϵ_F) меняются все величины, кроме $dn_i/d\epsilon$, меняющейся на расстояниях порядка T . При $\hbar\Omega \ll T$, как говорилось выше, квантовые осцилляции экспоненциально малы и несутся. При $\epsilon_F \gg \hbar\Omega \gg T$ естественно

*) Отметим, что периодическая зависимость квантовых членов от iS/ehH приведет к связанным с этими членами своеобразным нелинейным по переменному магнитному полю эффектам в относительно слабых переменных полях H , порядка периода осцилляций $H\chi_1^2$ [71].

**) Таким образом, при заданной толщине пластины по мере повышения частоты в осцилляциях сурствивления происходит переход от эффекта Шубникова — де Гааза к эффекту де Гааза — ван Алфвена и затем опять к эффекту Шубникова — де Гааза.

думать, что производная $\partial n_F / \partial \epsilon$ должна быть заменена на отношение конечных разностей

$$\frac{\Delta n_F}{\Delta \epsilon} = \frac{n_F(\epsilon_{n+l, p_z}^\sigma) - n_F(\epsilon_{n, p_z}^\sigma)}{\epsilon_{n+l, p_z}^\sigma - \epsilon_{n, p_z}^\sigma}.$$

Для того чтобы записать правило соответствия, остается заметить, что интегрирование в классической механике по фазовому пространству соответствует взятию шнура в квантовой механике. Классические формулы для тока содержали интегрирование только по импульсам; для того чтобы получить интегрирование по всему фазовому пространству, т. е. и по координатам тоже, нужно ввести δ -функцию по координатам. В результате имеем (шнур берется и по проекциям спина, поэтому исчезает «спиновая» двойка):

$$\begin{aligned} j(\xi) &= -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} v \Delta \epsilon dp = \\ &= -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} v \Delta \epsilon(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dp dr' \rightarrow \\ &\rightarrow -e \int dp_z \sum_{\substack{n, l \\ \sigma = \pm 1}} \frac{n_F(\epsilon_{n+l, p_z}^\sigma) - n_F(\epsilon_{n, p_z}^\sigma)}{\epsilon_{n+l, p_z}^\sigma - \epsilon_{n, p_z}^\sigma} \times \\ &\times \left[\int_0^T v \Delta \epsilon \delta(\xi - \xi(t)) e^{-i\hbar\Omega t} dt \right]_{\epsilon = \epsilon_{n, p_z}^\sigma}. \quad (42.1) \end{aligned}$$

Ниже эта формула будет строго доказана. Обратим внимание на то, как влияют столкновения электронов с поверхностью на квантовые осцилляции. У электронов, отразившихся от поверхности, снимается вырождение по P_x , так как оказывается существенным положение центра орбиты относительно поверхности, и в формуле для тока появляется дополнительное интегрирование по P_x . При этом по P_x , так же как и по p_z , «отбираются» лишь электроны с экстремальными периодами, что дополнительно уменьшает амплитуду соответствующих этим периодам квантовых осцилляций. Поэтому в точных формулах такие электроны следовало бы просто исключить.

Прежде чем перейти к построению теории осцилляций, заметим, что экспериментально квантовые осцилляции поверхностного импеданса уже наблюдались на висмуте в работах [73] (на низких частотах) и [74].

Для построения теории осцилляций импеданса необходимо прежде всего записать плотность тока \mathbf{j} . Из определения \mathbf{j}

следует, что

$$\mathbf{j} = \text{Sp } \hat{n} \hat{\mathbf{j}}_1, \quad (42.2)$$

где \hat{n} — статистический оператор, а $\hat{\mathbf{j}}_1$ — оператор плотности тока, создаваемой одним электроном.

В классической механике плотность тока, создаваемая в точке \mathbf{R} электроном, движущимся со скоростью \mathbf{v} и находящимся в точке \mathbf{r} , равна, очевидно,

$$\mathbf{j}_1 = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \quad (42.3)$$

$$\left(\text{при } \mathbf{R} \neq \mathbf{r}, \mathbf{j}_1 = 0, \text{ а } \int_{\Delta \mathbf{r} \in \mathbf{R}} e\mathbf{v}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}) d\mathbf{r} = e\mathbf{v} \right).$$

Нас интересует только квазиклассический случай. При этом любой эрмитовский оператор с точностью до \hbar^2 однозначно определяется своим классическим аналогом, так как любой способ симметризации приводит к одинаковому результату. Последнее легко показать, если учесть [72], что с точностью до \hbar^2 ,

$$[\hat{a}\hat{b}] = -i\hbar [a, b] \quad (42.4)$$

($[a, b]$ — классическая скобка Пуассона), и различные способы симметризации после сведения соответствующих выражений с помощью (42.4) к одинаковому порядку операторов не могут содержать \hbar , так как \hbar входит только вместе с i .

Поэтому с точностью до \hbar^2 из (42.3) следует

$$\mathbf{j}_1 = \frac{1}{2} e \{ \hat{\mathbf{v}}\delta(\mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}}) + \delta(\mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{v}} \} \quad (42.5)$$

и из (42.2)

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} e \text{Sp } \hat{n} \{ \hat{\mathbf{v}}\delta(\mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}}) + \delta(\mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{v}} \}. \quad (42.6)^*$$

Для определения \hat{n} воспользуемся кинетическим уравнением

$$0 = \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{E}}, \hat{n}] + \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} \right)_{\text{ст}}. \quad (42.7)$$

Для конкретности будем рассматривать лишь наиболее интересный для нас случай высоких частот: $\omega\tau \gg 1$. При этом

*) Формула (42.6) может быть получена и непосредственно из определения плотности тока:

$$\overline{\delta\hat{\mathcal{E}}} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \delta A dV,$$

где $\hat{\mathcal{E}}$ — гамильтониан, δA — вариация вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{R})$; интегрирование производится по всему пространству; при преобразовании усредненно-го $\overline{\delta\hat{\mathcal{E}}}$ учитывается отмеченное выше соответствие между эрмитовским оператором и его классическим аналогом. Формула (42.6) получается и из квантовомеханической формулы $\mathbf{j} = (\Psi^* \hat{\mathbf{p}} \Psi + \Psi \hat{\mathbf{p}}^* \Psi^*)/m$ заменой $\Psi^*(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}')$ на $n(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$, а $\hat{\mathbf{p}}/m$ на $\hat{\mathbf{v}}$.

в основном приближении система не успевает следить за высокочастотным полем, ее химический потенциал в этом приближении не меняется, и в качестве нулевого приближения (обращающего в нуль интеграл столкновений) естественно взять $n_F(\hat{\epsilon})$, где n_F — равновесная фермиевская функция. Линеаризуем уравнение (42.7), положив

$$\hat{n} = n_F(\hat{\epsilon}) + \hat{n}', \quad \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}', \quad (42.8)$$

где $\hat{\epsilon}_0$ — гамильтониан в отсутствие высокочастотного поля. Обратим внимание на то, что подстановка $n_F(\hat{\epsilon})$ вместо \hat{n} в уравнение (42.6) не дает нулевой плотности тока. Соответствующий член соответствует «мгновенно-равновесному» состоянию, он и приводит в высокочастотном случае к магнитному моменту, который, как мы говорили, не существует на достаточно высоких частотах и потому ниже отбрасывается.

Из (42.7) и (42.8) получаем:

$$\frac{\partial \hat{n}'}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\epsilon}_0, \hat{n}'] + \left(\frac{\partial \hat{n}'}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = - \frac{d}{dt} n_F(\hat{\epsilon}). \quad (42.9)$$

По тем же причинам, что и в классическом случае, благодаря предельной аномальности скин-эффекта можно ввести время свободного пробега. Для простоты изложения будем считать его не зависящим от n и ρ_z , так что

$$\left(\frac{\partial \hat{n}'}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = \frac{\hat{n}'}{\tau}. \quad (42.10)$$

Запишем (42.9), (42.10) в матричных элементах, соответствующих системе не зависящих от времени волновых функций Ψ_k :

$$\hat{\epsilon}_0 \Psi_k = \epsilon_k \Psi_k \quad (42.11)$$

(k — полный набор квантовых чисел). Учитывая независимость Ψ_k от времени, перепишем правую часть уравнения (42.9) (удерживая всюду только линейное приближение):

$$\left(\frac{dn_F(\hat{\epsilon})}{dt} \right)_{kk'} = \frac{n_F(\epsilon_k) - n_F(\epsilon_{k'})}{\epsilon_k - \epsilon_{k'}} e(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{E}})_{kk'}, \quad (42.12)$$

где

$$\widehat{\mathbf{v}\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{v}}\widehat{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{v}}).$$

Теперь формулы (42.9) — (42.12) дают (при $\hat{n}' \rightarrow \hat{n}' e^{i\omega t}$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} e^{i\omega t}$):

$$\left\{ i\omega + \frac{i}{\hbar} (\epsilon_k - \epsilon_{k'}) + \frac{1}{\tau} \right\} n'_{kk'} = - \frac{n_F(\epsilon_k) - n_F(\epsilon_{k'})}{\epsilon_k - \epsilon_{k'}} e(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{E}})_{kk'}, \quad (42.13)$$

$$n'_{kk'} = - \frac{n_F(\varepsilon_k) - n_F(\varepsilon'_k)}{\varepsilon_k - \varepsilon'_k} \frac{e(\widehat{vE})_{kk'}}{i\omega + \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) + \frac{1}{\tau}}. \quad (42.14)$$

Вспоминая, что квазиклассические матричные элементы $e\widehat{vE}$ суть компоненты Фурье по времени, а в общем случае — по угловым переменным W , сопряженным переменным действия I (это доказывается аналогично [72], если учесть $\dot{W} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial I}$), находим:

$$n'_{kk'} = \frac{n_F(\varepsilon_k) - n_F(\varepsilon_{k'})}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}} \psi_{kk'}, \quad (42.15)$$

где ψ удовлетворяет классическому уравнению, а $\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \psi$ есть неравновесная добавка к классической функции распределения, которая определялась в части III. В результате, если магнитное поле параллельно поверхности металла, из (42.15) и (42.6) следует сформулированное выше правило перехода от классического j к квантовому. Роль k играют n, p_z, σ . По спину уравнение (42.7), очевидно, диагонально; зависящая от спина добавка к $\hat{\varepsilon}$ всегда мала и ее следует учитывать лишь при рассмотрении парамагнитного резонанса (§ 44, 45), а $\varepsilon_{n, p_z}^\sigma$ определяется формулой (7.3).

В наклонном магнитном поле зависимость от ξ приводит к зависимости как от y (в частности, благодаря тому, что $A_x = -Hy$), так и от z . Это означает, что в (42.15) есть недиагональные члены как по n , так и по p_z . Оценим относительную роль этих недиагональных членов. Так как неоднородность по координатам характеризуется глубиной скин-слоя δ , то соответствующая ей неопределенность импульса порядка $\Delta p_z \sim \hbar/\delta$, а неопределенность энергии

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_0(n, p_z + \Delta p_z) - \varepsilon_0(n, p_z) = \bar{v}_z(n, p_z) \Delta p_z.$$

Учитывая то, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_z} \right)_n &= \frac{\partial(\varepsilon, n)}{\partial(p_z, n)} = \frac{\partial(\varepsilon, S)}{\partial(p_z, S)} = \frac{\partial(\varepsilon, S)}{\partial(\varepsilon, p_z)} \Big/ \frac{\partial(p_z, S)}{\partial(\varepsilon, p_z)} = \\ &= - \left(\frac{\partial S}{\partial p_z} \right)_\varepsilon \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right)_{p_z}, \end{aligned}$$

а

$$\frac{\Delta p_z}{p_F} \sim \left(\frac{e\hbar H}{cS} \right)^{1/2}$$

и, наконец, то, что квантовым осцилляциям соответствует $\bar{v}_z = 0$, получаем вблизи экстремальных сечений

$$\Delta\varepsilon \sim v \left(\frac{e\hbar H}{cS_{\text{extr}}} \right)^{1/2} \frac{\hbar \sin \varphi}{\delta} \sim \hbar \Omega \left(\frac{e\hbar H}{cS_{\text{extr}}} \right)^{1/2} \frac{r_H \sin \varphi}{\delta},$$

где φ — угол между H и поверхностью металла. В результате, если

$$\left(\frac{e\hbar H}{cS_{\text{extr}}} \right)^{1/2} \frac{r_H \sin \varphi}{\delta} \ll \frac{T}{\hbar \Omega}, \quad (42.16)$$

во всех членах $\Delta n_F / \Delta\varepsilon$ можно пренебречь недиагональностью по p_z ; если же

$$\left(\frac{e\hbar H}{cS_{\text{extr}}} \right)^{1/2} \frac{r_H \sin \varphi}{\delta} \ll 1, \quad (42.16a)$$

недиагональностью по p_z можно пренебречь во всех членах, не диагональных по n .

Физический смысл условия (42.16a) очень прост: оно означает большое число оборотов электронов, обеспечивающих осцилляции, в скин-слое и соответствует весьма сильному магнитному полю или магнитному полю, почти параллельному поверхности.

Вдали от квантового циклотронного резонанса (см. следующий параграф) при $\omega \gtrsim \omega_H$ условие (42.16a) позволяет вообще пренебречь в $n'_{kk'}$ недиагональностью по p_z и получить формулу (42.1), где коэффициент пропорциональности (учитывающий плотность состояний при данном n в интервале dp_z) проще всего определить предельным переходом к классическому случаю.

Дальнейшие вычисления удобно проводить, используя формулу суммирования Пуассона. В результате для осциллирующей части плотности тока вдали от резонанса получаем

$$\Delta j_s(\xi) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2\pi} H^2 \sum_i \left[\chi_s \left(\frac{\partial \ln S}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial \Delta M_z}{\partial H} \right]_{\varepsilon=\varepsilon_F, p_z=p_0^i}, \quad (42.17)$$

где

$$\chi_i = \frac{4\pi e^2}{(2\pi\hbar)^3 (i\omega + \tau^{-1})} \int_0^T dt v_i(t) \int_0^T v_i(t') E_j(\xi - \int_{t'}^t v_\xi(t_1) dt_1) dt',$$

$$S(p_0^i) = S_{\text{extr}},$$

а ΔM_z — осциллирующая часть магнитного момента (§ 15).

Впервые теория квантовых осцилляций поверхностного импеданса для общего случая была построена в работах [75, 76]; несколько позднее для простейшего случая квадратичного за-

кона дисперсии и параллельного поверхности металла магнитного поля формулы были независимо получены в работе [77]. Вблизи циклотронного резонанса (в параллельном поверхности металла магнитном поле) при выполнении условия (42.16а) амплитуда осцилляций имеет резонансный характер, при этом формула имеет более громоздкий вид, чем (42.17), и потому не выписывается.

Формула (42.17) позволяет теми же методами, что и ранее, получить квантовую добавку к поверхностному импедансу. Отметим, что подтверждаются основные результаты, указанные в начале параграфа.

§ 43. Квантовый циклотронный резонанс

Циклотронный резонанс, о котором шла речь в § 35—37, имел, в сущности, чисто классическое происхождение. При произвольном законе дисперсии частоты Ω образовывали непрерывный спектр $\Omega = \Omega(\epsilon_F, p_z)$, и резонанс соответствовал границам спектра (т. е. опорным точкам ферми-поверхности) и особым точкам спектра, где число участвующих в резонансе электронов было относительно велико (благодаря обращению в бесконечность плотности состояний при данной частоте), т. е. осуществлялся резонанс на экстремальных частотах ($\Omega'(p_z) = 0$).

Квантование уровней (7.4) в магнитном поле приводит к тому, что при данной энергии (близкой к ϵ_F) появляется дискретный спектр частот

$$\hbar\Omega_n = \mu_n H, \quad (43.1)$$

где

$$\mu_n = \mu(\epsilon, p_{zn}) = \frac{e\hbar}{m^*c}, \quad m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \epsilon}, \quad S(\epsilon, p_{zn}) = n \frac{2\pi e\hbar H}{c}. \quad (43.2)$$

Значит, в принципе возможен резонанс на множестве дискретных частот, удовлетворяющих условию [69, 69а]

$$\hbar\omega = l_0 \mu_n H = l_0 \hbar \Omega_n, \quad l_0 - \text{целое}. \quad (43.2a)$$

Уравнения (43.2) и (43.2a) определяют «резонансные» p_z и H . Удобно записать S в переменных ϵ, μ . Тогда μ определяется из (43.2a): $\mu = \hbar\omega/l_0 H$, а уравнение (43.2) дает резонансные значения H . Принимая во внимание, что в основном приближении $\epsilon = \epsilon_F$, имеем:

$$cS(\epsilon_F, \hbar\omega/l_0 H)/l_0 \hbar H = n. \quad (43.2b)$$

Ясно, что, так как $n \gg 1$, расстояния между резонансными уровнями малы по сравнению с H , квазиэквидистантны, соот-

ветствуют $\Delta n = 1$ и определяются, согласно (43.2б), формулой

$$\Delta \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{2\pi e \hbar}{c} \left\{ S(\epsilon_F, \mu) + \mu \frac{\partial S(\epsilon_F, \mu)}{\partial \mu} \right\}_{\mu = \hbar \omega / l_0 H}^{-1}. \quad (43.2в)$$

Если расстояние между соседними частотами спектра порядка или больше времени свободного пробега, т. е.

$$\Delta \Omega_n = \Omega_{n+1} - \Omega_n \gtrsim 1/\tau, \quad \gamma = \Delta \Omega_n \tau \gtrsim 1, \quad (43.3)$$

то на каждой из дискретных частот будет наблюдаться резонанс.

Для «обычных» сечений $\Delta \Omega_n \approx \Omega'(n) \sim \Omega/n_0$, $n_0 \sim cS/2\pi e \hbar H$, и условие резонанса (так как $\Omega_n \sim \omega$) принимает вид

$$\omega \tau \gtrsim \frac{S}{\omega m^* \hbar} \approx \frac{\epsilon_F}{\hbar \omega}. \quad (43.4)$$

Более «выгодны», так как дают более слабое условие, чем (крайне жесткое) условие (43.4), сечения, на которых

$$(\partial \Omega / \partial n)_\epsilon \sim (\partial \Omega / \partial S)_\epsilon = \infty. \quad \text{Так как } (\partial S / \partial p_z) / (\partial \Omega / \partial p_z)_\epsilon = (\partial S / \partial \Omega)_\epsilon,$$

то эти сечения соответствуют экстремальным по площади сечениям ферми-поверхности, где $(\partial S / \partial p_z)_\epsilon = 0$, и сечениям с самопересечением, где $(\partial \Omega / \partial p_z)_\epsilon = \infty$. В первом случае, когда $n(\epsilon, \Omega)$ экстремально по Ω , $1 = \Delta n = \frac{1}{2} n''(\Omega) (\Delta \Omega)^2 \approx n_0 (\Delta \Omega / \Omega)^2$, и условие (43.3) принимает вид:

$$\omega \tau \gtrsim (\epsilon_F / \hbar \omega)^{1/2}. \quad (43.5)$$

В случае сечений с самопересечением $\omega \sim \Omega_0 / \ln(\epsilon_F / \hbar \omega)$ (Ω_0 — характерная циклотронная частота) и условие квантового циклотронного резонанса принимает вид:

$$\omega \tau \gtrsim \frac{\epsilon_F}{\hbar \omega} e^{-\Omega_0 / \omega} \ln^3 \frac{\epsilon_F}{\hbar \omega}. \quad (43.6)$$

Наименее «выгодны» для наблюдения резонанса сечения, где расстояние между частотами $\Delta \Omega$ аномально мало. Таковы, как следует из $(\partial \Omega / \partial n)_\epsilon \sim (\partial \Omega / \partial p_z)_\epsilon (\partial S / \partial p_z)_\epsilon^{-1}$, нецентральные сечения с экстремальной по p_z частотой Ω , т. е. как раз сечения, близкие к тем, на которых наблюдается классический циклотронный резонанс. Условие $\Delta \Omega \gtrsim 1/\tau$ в этом случае требует $\omega \tau \gtrsim (\epsilon_F / \hbar \omega)^2$, что практически совершенно недостижимо экспериментально; вблизи частот классического циклотронного резонанса квантовый циклотронный резонанс отсутствует. Исключением являются частоты, соответствующие сечениям, близким к центральному, где $(\partial S / \partial p_z)_\epsilon$ также обращается в нуль, а $(\partial \Omega / \partial n)_\epsilon$ такого же порядка, как на «обычных» сече-

ниях. Вблизи этих частот квантовые резонансные осцилляции «накладываются» на картину классического резонанса, происходят вблизи сечений, где плотность состояний обращается в бесконечность, и имеют поэтому амплитуду, в $(\epsilon_F/\hbar\omega)^{1/2}$ раз большую, чем на «обычных» сечениях. Существенная (вблизи классического резонанса) зависимость классических амплитуд от магнитного поля может при $|\omega/q - \Omega| \leq 1/\tau$ привести к апериодичности квантовых резонансных осцилляций по $1/H$, сделав тем самым несправедливой формулу (43.2в). При $\gamma \ll 1$ (см. формулу (43.3)) имеет место классический циклотронный резонанс на избранных частотах, а амплитуда резонансных осцилляций стремится к нулю как $\exp(-\pi\gamma^{-1})$.

По тем же причинам, что и классический циклотронный резонанс, квантовый циклотронный резонанс, предсказанный в работе [69], требует строгой параллельности постоянного магнитного поля поверхности металла.

Так же как и для квантовых осцилляций (§ 42), для неэкспоненциальной малости амплитуды квантового циклотронного резонанса необходимо, как легко понять, выполнение неравенства

$$2\pi^2 T \leq \hbar\Omega_1, \quad (43.7)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{eH}{m_1^*c}, \quad m_1^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial S}{\partial \nu} \right)_\Omega. \quad (43.8)$$

Поскольку $m_1^* = m^* \left(\frac{\partial m^*}{\partial p_z} \right)_S / \left(\frac{\partial m^*}{\partial p_z} \right)_\epsilon$, на сечениях, где $\left(\frac{\partial m^*}{\partial p_z} \right)_S = 0$ и $\left(\frac{\partial m^*}{\partial p_z} \right)_\epsilon \neq 0$, условие (43.7) выполняется практически при любых температурах (лишь бы, конечно, τ при этих температурах удовлетворяло условиям (43.3)).

Итак, при достаточно низких температурах в достаточно чистых металлах должен иметь место квантовый циклотронный резонанс на дискретном спектре частот.

Экспериментальное исследование квантового циклотронного резонанса, как ясно из изложенного, может дать весьма детальную информацию об электронном спектре, позволяя непосредственно найти зависимости $m^*(p_z)$ (по резонансной частоте — формула (43.2а)) и $S(\mu)$ (по расстоянию между частотами — формула (43.2в)).

«Обрезание» квантового резонанса в пластине позволило бы получить дополнительно зависимость от p_z всех диаметров ферми-поверхности.

При построении теории квантового циклотронного резонанса [69а] ограничимся наиболее важным случаем строго параллельного поверхности металла постоянного магнитного поля

При этом можно воспользоваться формулой (42.1), при доказательстве которой для случая параллельного поля (§ 42) не предполагалось отсутствие резонанса. Подставляя выражение для $\Delta \epsilon$, имеем (коэффициент пропорциональности, как отмечалось в § 42, получается, например, переходом к классическому случаю):

$$j = \frac{e^3 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \sum_{n, l, \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{n_F(\epsilon_{n+l, p_z}^{\sigma}) - n_F(\epsilon_{n, p_z}^{\sigma})}{\epsilon_{n+l, p_z}^{\sigma} - \epsilon_{n, p_z}^{\sigma}} \times \\ \times \frac{\mathbf{A}_l(y, p_z)}{-i\omega + i\Omega_n(p_z) + 1/\tau}, \quad (43.9)$$

где

$$\mathbf{A}_l(y, p_z) = \frac{1}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T dt' v(t) e^{-i\Omega(t-t')} v(t') \mathbf{E} \left(y - \int_t^t v_y(t_1) dt_1 \right).$$

Проще всего вычисления проводятся при абсолютном нуле температуры ($T = 0$), когда благодаря Δn_F интегрирование в (43.9) производится по интервалу

$$\Delta p(n, l) = p_z(n+l) - p_z(n) \quad (43.10)$$

и (43.9) сводится к сумме вида

$$I = \sum \varphi(n) \Delta p(n) = \sum g(n). \quad (43.11)$$

При условии (43.3) удобнее всего использовать при суммировании формулу котангенсов. Интеграл

$$\frac{1}{2i} \int \operatorname{ctg} \pi z \cdot g(z) dz, \quad (43.12)$$

взятый по контуру, который состоит из прямой, проходящей ниже вещественной оси, и замыкающей ее в верхней полуплоскости полуокружности, не проходящей через целые вещественные точки, будет давать вычеты в целых точках — сумма по ним приводит к (43.11) — и (если они есть) вычеты в полюсах функции $g(z)$. Интеграл по прямой можно вычислить, дополняя его полуокружностью в нижней полуплоскости, интеграл по которой, как и интеграл по верхней полуокружности, легко находится. В итоге весь интеграл определяется главным образом вычетами $g(z)$ в нижней полуплоскости.

В результате получаем [69а] (известный классический член опущен):

$$j(y) = \frac{e^3 H A_{l_0}(y, \omega/H)}{2i\hbar^3 c \pi^2 (\partial\Omega/\partial p_z)_S} \left\{ \ln \frac{\sin \pi n_2}{\sin \pi n_1} - \pi i \kappa_1 \operatorname{sign} \left(\frac{\partial S}{\partial \Omega} \right)_{\epsilon_F} \right\}_{\epsilon = \epsilon_F}^{\mu(\epsilon_F, p_z) H = \omega \hbar}, \quad (43.13)$$

где

$$n_2 = n_1 - \kappa_2, \quad n_1 = \frac{cS(\omega/H)}{2\pi e\hbar H} - \frac{ic(\partial S/\partial\Omega)}{2\pi e\hbar H\tau},$$

$$\kappa_2 = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial p_z}\right)_S / \left(\frac{\partial\Omega}{\partial p_z}\right)_\varepsilon.$$

В общем случае произвольной температуры удобно перейти от переменной p_z к ε . Учитывая, что нас интересует только область вблизи резонанса, нужно вычислить (имея в виду (43.11), (43.12)) интеграл типа

$$J = \frac{1}{i\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \{n_F(\varepsilon + \hbar\omega) - n_F(\varepsilon)\} \left\{ \operatorname{ctg} \pi \left(\frac{cS}{2\pi e\hbar H} + i\gamma \right) + i \operatorname{sign} \gamma \right\} d\varepsilon,$$

$$\gamma = \frac{\pi c}{2\pi e\hbar H\tau} \left(\frac{\partial S}{\partial\Omega} \right)_\varepsilon. \quad (43.14)$$

Сводя этот интеграл к интегралу по контуру, аналогичному использованному ранее, приходим к сумме вычетов, причем существенной, как и следовало ожидать, оказывается $\varepsilon = \varepsilon_F$, так что $S = S\left(\varepsilon_F, \frac{\omega}{H}\right) + (\partial S/\partial\varepsilon)_\Omega(\varepsilon - \varepsilon_F)$. В итоге

$$J = -\frac{2\pi T}{\hbar\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{ctg} \pi \left(\frac{cS_0}{2\pi e\hbar H} + 2\pi iT \left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon} \right)_\Omega \frac{m^*c}{2\pi e\hbar H} + i\gamma \right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ctg} \pi \left(\frac{cS_0}{2\pi e\hbar H} + 2\pi iT \left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon} \right)_\Omega \frac{m^*c}{2\pi e\hbar H} - \left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon} \right)_\Omega \frac{i\omega c}{eH} + i\gamma \right) \right\}, \quad (43.15)$$

$$S_0 = S(\varepsilon_F, \omega/H).$$

Получив формулу для плотности тока, весь остальной расчет импеданса можно провести совершенно так же, как в классическом случае.

Поскольку он подтверждает все формулы, выводы и оценки, сделанные ранее из качественных соображений, а только они и могут быть проверены на эксперименте, мы не будем выписывать довольно громоздких окончательных формул, полученных в работе [69a].

§ 44. Парамагнитный резонанс в металлах

Хорошо известно, что в постоянном магнитном поле спины электронов выстраиваются либо по направлению магнитного поля, либо против.

Энергия спина в магнитном поле равна $-\mu_0 H$ в первом случае и $+\mu_0 H$ — во втором, где μ_0 — магнитный момент свободного электрона.

В переменном электромагнитном поле возникает вероятность «перебрасывания» спина электрона. Эта вероятность, как известно из квантовой механики, имеет резонансный характер и максимальна, когда энергия кванта электромагнитного поля оказывается равной энергии перебрасывания спина (т. е. расстоянию между уровнями энергии, соответствующими разным ориентациям спина):

$$\hbar\omega = 2\mu_0 H, \quad \omega = \Omega_0 = 2\mu_0 H/\hbar.$$

Разумеется, вероятности перебрасывания спина как в ту, так и в другую сторону равны.

Однако числа электронов, ориентированных в постоянном магнитном поле по (N_+) и против (N_-) поля, не равны, так как

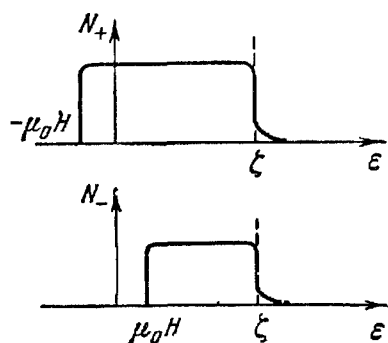


Рис. 90. Распределение по энергиям «верхних» и «нижних» спинов при низких температурах.

выгоднее ориентация по полю; в равновесии разность $N_+ - N_-$ определяется равенством химических потенциалов (рис. 90). Так как число перебрасываемых переменным полем спинов пропорционально их числу в исходном состоянии, то переменное поле будет приводить к увеличению числа спинов, ориентированных против поля, и уменьшению разности $\Delta N = N_+ - N_-$, т. е. к некоторой «деполяризации» электронного газа. Поскольку столкновения, сопровождающиеся переброном спина, стремятся восстановить состояние, соответствующее тепловому

равновесию, т. е. разность $2\Delta N_0 = N_0(\varepsilon - \mu_0 H) - N_0(\varepsilon + \mu_0 H) = -2\mu_0 H \frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon}$, то в однородном поле устанавливается разность ΔN , соответствующая $\Delta N \cdot \alpha = (\Delta N_0 - \Delta N)/T_s$, т. е. $\Delta N = \Delta N_0(1 + \alpha T_s)^{-1}$, где T_s — время свободного пробега между столкновениями с переброном спина (время релаксации), α — вероятность переброса спина в единицу времени. В резонансе $\alpha = 4\mu_0^2 H_1^2 T_s / \hbar^2$, $2H_1$ — амплитуда переменного магнитного поля.

Изменение магнитного момента электронного газа в резонансе максимально и, следовательно, соответствующая добавка к импедансу также будет иметь резонансный характер.

В нелинейном приближении изменяются не только переменные по времени составляющие магнитного момента, но и его постоянная составляющая, направленная вдоль магнитного поля, причем, поскольку T_s весьма велико (оно достигает порядка $10^{-6} - 10^{-7}$ (см. [78]), нелинейные эффекты наступают при

вполне достижимых значениях напряженности переменного магнитного поля. Это может быть использовано для очень важной цели — поляризации ядер, поскольку перебрасывание спина электрона в результате столкновений с ядром сопровождается перебросом спина ядра (поэтому, в частности, велико T_s), а, как было показано выше, тепловые столкновения перебрасывают в резонансе больше спинов по полю, чем против поля [79].

Однако в случае металлов все формулы, непосредственно использующие известную квантовомеханическую вероятность α переброса спина в единицу времени, являются неправильными.

В самом деле, вероятность переброса в единицу времени может быть введена лишь в том случае, когда электрон находится в почти однородном поле время, превышающее период поля. Поскольку глубина скин-слоя $\delta \sim c[(\omega^{-1} + \tau)^{-1} 2\pi\sigma]^{-1/2}$ (σ — проводимость металла), а за период поля проходит при свободном движении путь $vT \sim v/\omega$, то необходимо

$$v/\omega \ll c(2\pi\sigma)^{-1/2}(\omega^{-1} + \tau)^{1/2}, \text{ т. е. } \omega \gg v/c(2\pi\sigma/\tau)^{1/2} \gtrsim 10^{13} \text{ сек}^{-1}$$

и магнитное поле $H = \hbar\omega/2\mu_0 \gg 10^6$ э. Это означает, что при реально достижимых магнитных полях и частотах электрон уходит из скин-слоя за время, значительно меньшее периода электромагнитного поля.

Может показаться, что это делает вообще невозможным наблюдение парамагнитного резонанса в металлах, так как электрон не успевает даже «почувствовать» частоту поля. Это, однако, не так по следующей причине. Как уже говорилось, время свободного пробега электрона, соответствующее перебросу спина, весьма велико и гораздо больше обычного времени свободного пробега τ , соответствующего изменению импульса. Поэтому электроны, многократно сталкиваясь, медленно диффундируют в глубь металла, проходя в результате диффузии за время T_s путь $\delta_{эфф} = v\sqrt{\tau T_s}/3$. Это означает, что электрон многократно успевает вернуться в скин-слой и проведет там в целом время

порядка $T_s \frac{\delta}{\delta_{эфф}} \sim \frac{\delta}{v} \sqrt{\frac{T_s}{\tau}}$. Поэтому условие резонанса приобретает вид $\left(\frac{\delta}{v}\right) \sqrt{\frac{T_s}{\tau}} \gtrsim \frac{2\pi}{\omega}$, или $\omega \gtrsim \frac{2\pi\sigma v^2}{c^2} \frac{\tau}{T_s}$, что соответствует вполне реализуемым условиям.

Таким образом, парамагнитный резонанс в металлах может быть наблюден, а для построения теории этого явления необходимо учесть диффузию спинов в глубь металла. Сравнение теории с экспериментом должно дать возможность определить основные параметры теории: время спиновой релаксации T_s и g -фактор (точнее, его отличие от двойки, соответствующей свободным электронам).

Проведенные рассуждения показывают, что переносимое спинами высокочастотное поле будет затухать крайне медленно, на глубине порядка $\delta_{эфф} = v \sqrt{\frac{1}{3} \tau T_s}$. Это значит, что на такой же глубине будет затухать и поляризация ядер, обусловленная парамагнитным резонансом.

Как ясно из предыдущего, построение теории парамагнитного резонанса распадается на две независимые задачи: определение спинового времени релаксации T_s и, при заданном T_s , вычисление поверхностного импеданса металла.

Время релаксации T_s вычислялось в работе [79], однако лишь в работе [80] была учтена основная причина релаксации (помимо очевидных столкновений с парамагнитными примесями) — спин-орбитальная связь электронов с решеткой — и получено согласие вычисленного T_s с экспериментально наблюдаемым.

Последовательным образом возможность введения спинового времени релаксации была показана в работе [81], где был использован метод статистических операторов для квантовых систем [82]. В той же работе [81] доказано совпадение «поперечного» и «продольного» времен спиновой релаксации.

Поскольку таким образом было строго показано, что в интересующую нас теорию парамагнитного резонанса время T_s входит просто как параметр, мы не будем останавливаться на методе вычисления T_s , а приведем только результат. Оказывается, что при температуре T , низкой по сравнению с дебаевской температурой Θ , $T_s \approx \alpha T^{-1} \ln(Tv/\mu_0 H_s)$, а при $T \gg \Theta$ $T_s \approx T^{-1} \ln(\Theta v/\mu_0 H_s)$, где s — скорость звука, $\alpha \approx \approx \rho s^2 [\omega_0 N (g - 2)^2]^{-1}$, $\omega_0 = \varepsilon_F/\hbar$ — частота вырождения, ρ — плотность металла, N — число электронов в единице объема.

При заданном T_s теория поглощения при парамагнитном резонансе в нормальном к поверхности металла постоянном магнитном поле как в случае пластины конечной толщины, так и в случае массивного металла впервые была построена в работе [83]. В этой работе был определен магнитный момент путем решения уравнения движения для оператора спина электрона [85] с учетом диффузии спина в переменном неоднородном поле. Диффузия учитывалась тем, что переменное магнитное поле бралось в точке, где в данный момент оказался диффундирующий электрон, и после этого проводилось усреднение по всем траекториям, соответствующим случайным блужданиям электрона. Подобный метод вычисления момента является, естественно, весьма сложным.

Поэтому приведем лишь основные выводы и формулы из работы [83] в случае, когда несущественна поверхностная релаксация.

1. Для тонких по сравнению с глубиной скин-слоя δ -образцов: $D < 4\delta$ (как и раньше, D — толщина пленки), линия поглощения P на единицу объема имеет обычную симметричную форму:

$$P = \frac{1}{4} \omega^2 H_1^2 T_s \chi (1 + \alpha_1^2)^{-1},$$

где χ — магнитная восприимчивость, $2H_1$ — амплитуда переменного магнитного поля, $\alpha_1 = (\omega - \Omega_0) T_s$, а $\Omega_0 = 2\mu_0 H / \hbar$.

2. Для толстых образцов линия имеет центральную структуру с шириной, равной естественной ширине $1/T_s$, с «крыльями», распространенными на область $T_s^{-1} (\delta_{эфф}/\delta)^2$, если $\delta < \delta_{эфф}$.

3. Центральная структура всегда выражена более четко, чем «крылья», поэтому при обычных экспериментальных условиях видимая ширина линии будет порядка T_s^{-1} .

4. Характерным эффектом является то, что диффузия электронов приводит не к уширению линии, а к существенному изменению ее формы.

5. Для толстых образцов с малой естественной шириной: $D \gg \delta_{эфф} \gg \delta$, линия поглощения P на единицу поверхности имеет асимметричную форму и описывается формулой:

$$P = - (4 \sqrt{3})^{-1} \omega^2 H_1^2 \chi T_s \frac{\delta^2}{\delta_{эфф}^2} \text{sign}(\alpha_1) (V \overline{1 + \alpha_1^2} - 1)^{1/2} (1 + \alpha_1^2)^{-1/2}.$$

6. Для толстых образцов с большой естественной шириной: $D \gg \delta \gg \delta_{эфф}$, линия поглощения на единицу поверхности описывается формулой:

$$P \approx \frac{1}{8} \omega^2 H_1^2 \chi T_s \delta (1 - \alpha_1) (1 + \alpha_1^2)^{-1}.$$

7. Для толстых образцов интенсивность линии в центре уменьшается вследствие диффузии в $\sim \delta/\delta_{эфф}$ раз. Когда $\delta \ll \delta_{эфф}$, интегральная интенсивность линии связана в основном с диффузионными «крыльями», а не с центром.

Теория оказалась в хорошем согласии с экспериментами [78]. Наблюдался парамагнитный резонанс на литии, натрии, бериллии в интервале температур от 4 до 296° К и на калии при 4° К. Впервые электронный парамагнитный резонанс на металлах был обнаружен в 1952 г. [86]; из последующих экспериментов следует упомянуть, например, работу [87], где наблюдался резонанс на растворах Na, Li, K, Cs, Rb, Ca в аммиаке; исследование парамагнитного резонанса в олове [88], в сурьме [40] и в висмуте [89], и работу [90], где наблюдалась прозрачность пленок лития при парамагнитном резонансе (объяснение этого эффекта см. ниже). Из последних работ, посвященных теории резонанса, назовем [91].

Согласие теории с экспериментами отчетливо видно из рис. 91 и из сравнения теоретических кривых рис. 92 и экспериментальных рис. 93 (все рисунки взяты из работы [86]).

Из сравнения экспериментов с теорией удалось определить два основных параметра, характеризующих парамагнетизм электронного газа: спиновое время релаксации и его зависимость от температуры (которая в случае, когда примеси были незначительны, совпала с вычисленной в работе [80]) и фактор g (точнее, его отличие от 2) для металлов, на которых наблюдался резонанс.

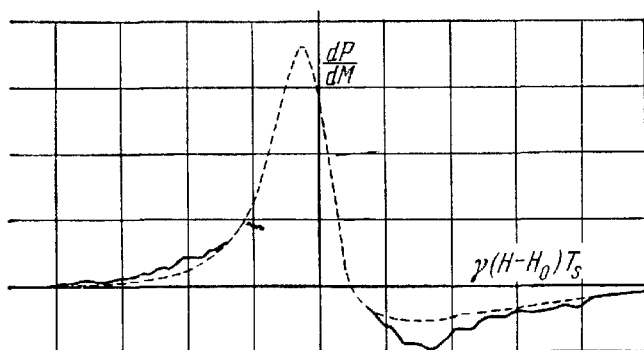


Рис. 91. Сравнение теории (пунктирная кривая) с экспериментом (сплошная кривая) по электронному парамагнитному резонансу при предельно аномальном скин-эффекте ($T=4^\circ\text{K}$, частота -314 МГц).

Дальнейшее развитие теории дано в работах [92]. Такое развитие было необходимым в силу ряда ограничений, использованных в работе [83]. Следовало заменить свободные электроны с законом дисперсии $\varepsilon = p^2/2m$ на частицы с произвольным законом дисперсии, рассмотреть нелинейные по магнитному полю H_1 эффекты (в частности, насыщение резонанса, существенное для вопросов о поляризации ядер, не рассмотренных в работе [83]). Кроме того, в работе [83] не был изучен характер проникновения поля в глубину металла; как показано в работах [92], своеобразие этого проникновения приводит к селективной прозрачности металлических пленок в условиях резонанса. Наконец, в работе [83] изучен лишь случай постоянного магнитного поля, перпендикулярного поверхности металла.

Все эти ограничения устранены в работах [92]. Использование кинетического уравнения позволило, кроме того, последовательно учесть граничные условия и оценить характер приближения в диффузионной теории.

Для вычисления магнитного момента M в работах [92] используется его связь с матрицей плотности \hat{n} : $M = \mu_0 (2\pi\hbar)^3 \int \text{Sp}(\hat{\sigma}\hat{n}) dp$, $\hat{\sigma}$ — оператор спина. Матрица плотности \hat{n} находится с помощью кинетического уравнения, запись которого существенно облегчается тем, что \hat{n} вблизи резонанса (в основном приближении) достаточно считать оператором только по спинам, но отнюдь не по координатам и импульсам. Гамильтониан состоит из классической части, дающей обычную полную производную

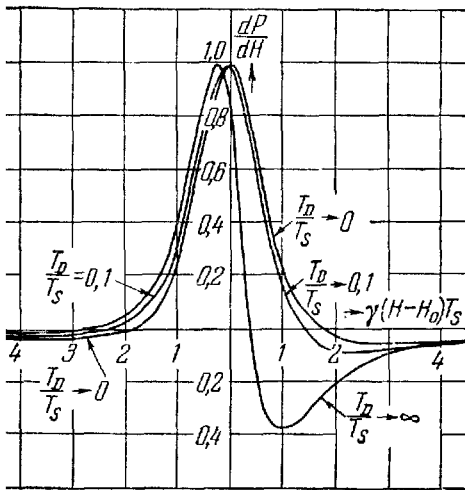


Рис. 92. Теоретические резонансные кривые поглощения при парамагнитном резонансе в толстой металлической пластине лития для различных отношений T_D/T_S :

T_D — время диффузии спина на расстояние D , T_S — время релаксации.

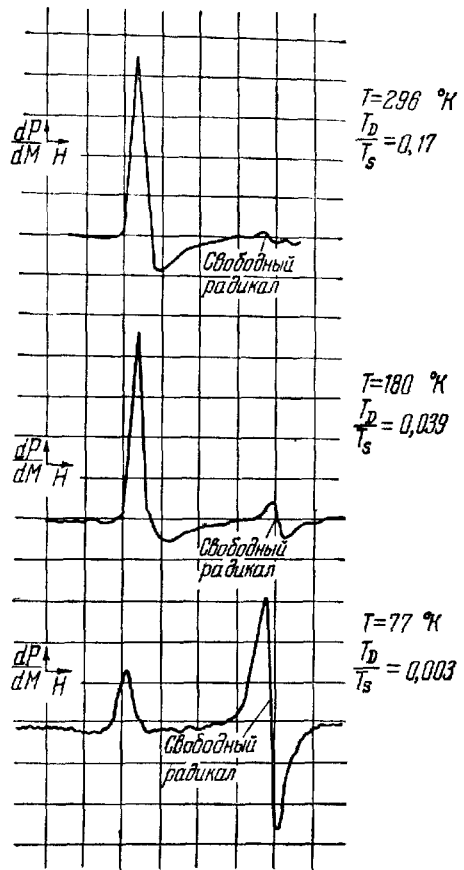


Рис. 93. Экспериментальные резонансные кривые парамагнитного резонанса в толстой пластине при различных отношениях T_D/T_S (частота — 320 Мгц).

по времени, и квантового члена $\mu_0\hat{\sigma}\mathbf{B}$, так что

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{p}} \left\{ e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} + \frac{i}{\hbar} [\mu_0\hat{\sigma}\mathbf{B}, \hat{n}] + \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} \right)_{\text{cr}} = 0$$

(\mathbf{B} — магнитная индукция). При этом следует иметь в виду, что, строго говоря, сам коммутант $[\hat{\sigma}\mathbf{B}, \hat{n}] = [\hat{\sigma}, \hat{n}]\mathbf{B} + \hat{\sigma}[\mathbf{B}, \hat{n}]$ состоит из первого, «квантового», члена, ответственного за

выравнивание переменным полем чисел спинов, ориентированных параллельно и антипараллельно постоянному магнитному полю, и второго, «классического», члена (сводящегося к произведению \hbar/i и скобок Пуассона для \mathbf{B} и \hat{n}), ответственного за силу, действующую на спин в неоднородном магнитном поле. Первый член ведет к резонансным перебросам спина, и именно он определяет степень деполяризации электронов при резонансе; второй приводит лишь к «подстраиванию» спинов к направлению \mathbf{B} и при определении деполяризации ядер может быть с большой степенью точности отброшен.

Интеграл столкновений $(\partial\hat{n}/\partial t)_{\text{ст}}$ также состоит из двух членов, так как связан, во-первых, с быстрой релаксацией по энергиям и импульсам (со временем релаксации τ) и, во-вторых, с медленной релаксацией по спинам (со временем релаксации T_s). Поскольку $T_s \gg \tau$, можно рассматривать оба типа столкновений отдельно. Первые, естественно, не могут изменить оператор полного спина системы и приводят к частичному равновесию с матрицей $\hat{n}^{\text{равн}}$, зависящей только от энергии, при фиксированном числе частиц и значении спинового момента, равно

$$\text{Sp} \int \hat{n}^{\text{равн}} d\mathbf{p} = \text{Sp} \int \hat{n} d\mathbf{p}, \quad \text{Sp} \int \hat{n}^{\text{равн}} \hat{\sigma} d\mathbf{p} = \text{Sp} \int \hat{n} \hat{\sigma} d\mathbf{p}.$$

При достаточно низких температурах и в достаточно слабых магнитных полях ($\mu_0 H \ll T$)

$$\hat{n}^{\text{равн}} = \langle \hat{n} \rangle = \frac{\oint_{\varepsilon=\varepsilon_F} \hat{n} v^{-1} dS}{\oint_{\varepsilon=\varepsilon_F} v^{-1} dS},$$

$$\left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} \right)_{\text{ст}}^{\varepsilon, \mathbf{p}} = \frac{\hat{n} - \langle \hat{n} \rangle}{\tau}.$$

Вторые столкновения ведут к полностью равновесной как по импульсам, так и по спинам матрице

$$\hat{n}_0 = \begin{pmatrix} n_F(\varepsilon - \mu_0 B) & 0 \\ 0 & n_F(\varepsilon + \mu_0 B) \end{pmatrix}.$$

При этом $(\partial\hat{n}/\partial t)_{\text{ст}}^{\sigma} = (\hat{n} - \hat{n}_0)/T$. Вид кинетического уравнения позволяет разделить в функции распределения части, обуславливающие ток и магнитный момент, положив $\hat{n} = n_1 \hat{I} + n \hat{\sigma}$ (\hat{I} — единичная матрица).

Решение получающегося для n уравнения оказывается все же сложным, поэтому, как и для работы [83], сформулируем только результаты.

1. Полный магнитный момент равен $\mathbf{M} = \chi(\mathbf{B} - \mathbf{b})$, где, если выбрать, как это все время делалось, ось z по направлению

постоянного магнитного поля,

$$b_z(\xi) = \operatorname{Re} \{ u(0) u_0^*(\xi) \} \{ 1 + \operatorname{Re} [u(0) u_0^*(0)] \}^{-1},$$

$$iH_0 b = b_x + ib_y = u(\xi) \{ 1 + \operatorname{Re} [u(0) u_0^*(0)] \}^{-1}, \quad (44.1)$$

причем $\mathbf{y} \perp [z\xi]$. Направление ξ совпадает с внутренней нормалью к поверхности металла; нулевой индекс у u^* означает, что u^* берется в резонансе, при $\omega = \Omega_0$.

Функция $u(\xi)$ вблизи резонанса равна, с точностью до численного множителя порядка 1 (при $\delta \ll \delta_{\text{эфф}}$),

$$u(\xi) \approx c [E_x(0) + iE_y(0)] \tilde{\delta}_{\text{эфф}} l (vH_0 l r_H^2 a)^{-1} \exp(-\xi/\tilde{\delta}_{\text{эфф}}), \quad (44.2)$$

где

$$\tilde{\delta}_{\text{эфф}} = avT_s^{1/2} \{ 3 [1 + i(\omega - \Omega_0) T_s] \tau^{-1} \}^{-1/2}.$$

Величина a , определяющая как величину магнитного момента, так и глубину затухания, в сильном магнитном поле существенно различна для наклонного и строго параллельного поверхности металла постоянного магнитного поля. Физически это связано с тем, что в строго параллельном поле электроны уходят в глубину металла только в результате столкновений, так как между столкновениями все они (в случае замкнутых орбит) имеют нулевую среднюю скорость в направлении ξ , и диффузия при $r_H \ll l$ за время T_s происходит не на расстояние $l \sqrt{T_s/3\tau}$, а на расстояние, в l/r_H раз меньшее, т. е. $r_H \sqrt{T_s/3\tau}$.

Для сильного поля ($r_H \ll l$), составляющего с поверхностью металла угол $\varphi \sim 1$, величина a порядка 1, для $\varphi \ll r_H/l$ величина $a \sim r_H/l$.

В слабом магнитном поле ($r_H \geq l$) всегда $a \sim 1$. Поле $E_\alpha(0)$ определяется через амплитуду падающего на поверхность металла поля с помощью обычных формул для поверхностного импеданса, вычисленного для различных случаев ранее.

Формулы (44.1) и (44.2) позволяют исследовать как зависимость эффекта (например, форму линии поглощения) от угла φ , так и нелинейные эффекты.

Кроме того, с помощью этих же формул легко найти поверхностный импеданс и прозрачность пленок [92].

Для вычисления импеданса следует, конечно, рассмотреть линейное приближение. В линейном приближении по переменному полю формулы (44.1) — (44.2) позволяют связать проекцию магнитного момента на поверхность металла с проекцией \mathbf{E}_\parallel (использовав связь E_ξ с \mathbf{E}_\parallel , найденную при $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ из уравнения $j_\xi = 0$): $M_\alpha(0) = g_{\alpha\beta} E_\beta(0)$. Поскольку

$$E_\alpha(0) = \frac{ic}{\omega} \zeta_{\alpha\beta} E'_\beta(0) = \xi_{\alpha\beta} B_\beta(0),$$

где $\xi_{\alpha\beta}$ и $\bar{\xi}_{\alpha\beta}$ связаны очевидным соотношением, а

$$B_{\alpha}(0) = H_{\alpha}(0) + 4\pi M_{\alpha}(0),$$

то

$$E_{\alpha}(0) = \xi_{\alpha\beta} H_{\beta}(0) + 4\pi \xi_{\alpha\gamma}^{(0)} g_{\gamma\beta} E_{\beta}(0)$$

(во втором слагаемом, естественно, взято «обычное» классическое $\xi_{\alpha\beta}^{(0)}$). С другой стороны, по определению $\xi_{\alpha\beta}^{(0)}$ в отсутствие резонанса, когда $\mathbf{B} = \mathbf{H}$,

$$E_{\alpha}(0) = \xi_{\alpha\beta}^{(0)} H_{\beta}(0).$$

Поэтому

$$\xi_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta}^{(0)} - 4\pi \xi_{\alpha\gamma}^{(0)} g_{\gamma\beta} \xi_{\gamma\beta}^{(0)},$$

что решает задачу.

Из формулы (44.2) видно, что при приближении к резонансу глубина, на которой происходит затухание \mathbf{M} , резко возрастает и, следовательно, имеет место селективная прозрачность пленок при парамагнитном резонансе, так как через пленку толщиной D ($\delta \ll D \leq \delta_{\text{эфф}}$) небольшая часть поля, связанная с \mathbf{M} , проходит почти без затухания. К сожалению, эффект чрезвычайно ослаблен отражением от границ пленки.

В простейшем случае постоянного магнитного поля, перпендикулярного поверхности металла, коэффициент прохождения k через такую пленку (определяемый как отношение интенсивностей прошедшей и падающей волн) с точностью до численного множителя порядка единицы равен в резонансе [92]

$$k \approx |16\pi^2 \chi T_s c \zeta^{(0)}|^2 [2\pi d (1 + |4\pi c \zeta^{(0)} T_s H_1^{\text{пад}} / 2\pi d H_0|^2)]^{-2}.$$

Мощность прошедшей волны $W^{\text{пр}}$ будет максимальной, если напряженность магнитного поля $H_1^{\text{пад}}$ в падающей волне равна

$$H_1^{\text{пад}} = 2\pi d H_0 (4\pi c T_s \zeta^{(0)})^{-1};$$

при этом

$$W_{\text{max}}^{\text{пр}} = \pi (2\chi \hbar c |\zeta^{(0)}| / 4\mu_0 \lambda)^2$$

не зависит от толщины пленки (λ — длина волны переменного поля).

Работы [78, 83, 92] дают строгое, но весьма сложное решение задачи о парамагнитном резонансе в металлах.

В работе [93] предложен простой метод рассмотрения, который позволяет получить основные качественные выводы этих работ. Использовано уравнение из работы [94] (известное блоховское уравнение, дополненное релаксационным и диффузионным членами). В перпендикулярном поверхности магнитном поле при $\epsilon = p^2/2m$ уравнение для переменной части магнитного

момента имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma [\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{M}}{T_s} + D \Delta \mathbf{M},$$

где $\gamma = e/mc$, $D = v^2\tau/3$, или в линейном по переменному полю H_1 приближении

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma [\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_1] + \gamma [\mathbf{M}, \mathbf{H}_0] - \frac{\mathbf{M}}{T_s} + D \Delta \mathbf{M}. \quad (44.3)$$

Здесь $\mathbf{M}_0 = \chi \mathbf{H}_0$, $\gamma \mathbf{H}_0 = \Omega_0$.

Вместо того чтобы записывать граничное условие (как это делалось в работе [93]), которое все равно слабо сказывается на характере решения, продолжим в (44.3) как \mathbf{H}_1 , так и \mathbf{M} четным образом на область $z < 0$ (магнитное поле, как всегда, направлено по оси z).

Переходя к компонентам Фурье, получим:

$$\alpha \mathbf{M}_k - \gamma [\mathbf{M}_k, \mathbf{H}_0] = \gamma \chi [\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_{1k}], \quad \alpha = i\omega + Dk^2 + \frac{1}{T_s},$$

откуда

$$\mathbf{M}_k = \chi (\alpha^2 + \Omega_0^2)^{-1} \{ \Omega_0^2 \mathbf{H}_{1k} + \alpha [\Omega_0, \mathbf{H}_{1k}] \}.$$

Учитывая, что $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{-k}$, можно получить формулу, соответствующую (при перпендикулярном к поверхности металла \mathbf{H}_0) основным при подсчете импеданса формулам (44.1) и (44.2), где

принято во внимание, что $\delta \ll \delta_{\text{эфф}}$ и $\int_0^{\infty} \mathbf{H}_{1k} dk = \pi \mathbf{H}_1(0)$.

Вся изложенная теория относится к нормальному состоянию металла, в сверхпроводниках [95] парамагнитный резонанс невозможен.

Итак, приведенные в этом параграфе результаты относятся практически ко всем случаям парамагнитного резонанса и, как указывалось выше, позволяют экспериментально определить время спиновой релаксации и g -фактор для электронов проводимости.

Отметим в заключение, что учет диамагнитного квантования уровней может привести лишь к наложению на резонансную кривую диамагнитных осцилляций (если их период мал по сравнению с шириной резонансной кривой).

§ 45. Комбинированный резонанс

До сих пор речь шла о резонансах, связанных с переходами между двумя типами уровней: между различными диамагнитными уровнями, соответствующими одной и той же проекции спина — циклотронный резонанс на частотах $\omega = q\Omega_{\text{extr}}$ (см.

рис. 94, где переходы изображены штриховыми линиями), и между различными парамагнитными уровнями с разной проекцией спина, соответствующими одному диамагнитному уровню — парамагнитный резонанс на частотах $\omega = 2\mu_0 H/\hbar = \Omega_0$ (рис. 94, переходы изображены пунктирными линиями).

Если пренебречь спин-орбитальной связью и считать спин и квазиимпульс независимыми величинами (в том смысле, что их

операторы строго коммутируют), то в однородном переменном магнитном поле недиагональные по спину матричные элементы гамильтониана диагональны по номеру диамагнитного уровня. Следовательно, резонанс, связанный с переходами, сопровождающимися одновременным изменением как проекции спина, так и диамагнитного уровня (комбинированный резонанс на частотах $\omega = q\Omega_{\text{extr}} \pm \Omega_0$; см. рис. 94, переходы изображены сплошными линиями), невозможен.

В хороших металлах спин-орбитальная связь обычно пренебрежимо мала, и потому существенный комбинированный резонанс

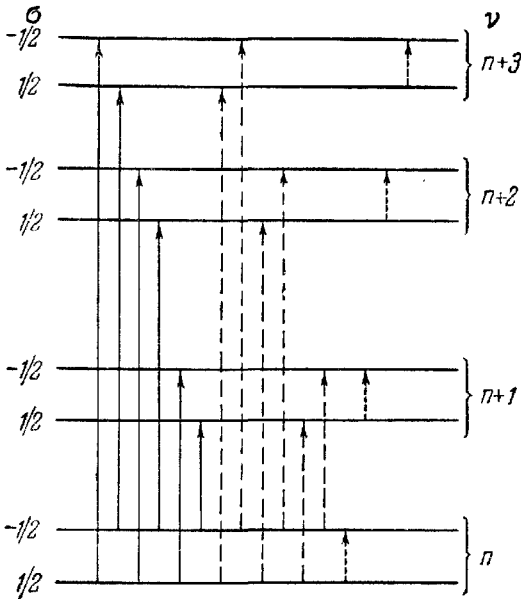


Рис. 94. Комбинированный резонанс (сплошные линии); циклотронный резонанс (штриховые линии), парамагнитный резонанс (пунктирные линии).

обусловленный спин-орбитальным взаимодействием, реализуется, главным образом, в полупроводниках и полуметаллах. Этот тип резонанса был предсказан и подробно исследован в работе [96] (см. также [97]; из экспериментов назовем, например, [98]). Поскольку нас интересуют металлы, на этом типе резонанса мы останавливаться не будем. Отметим лишь, что из-за спин-орбитального взаимодействия нельзя для определения частот непосредственно использовать квазиклассическое квантование (7.4). Требуется сначала, исходя из тех или иных соображений (например, используя метод эффективной массы [96]), найти вид гамильтониана в интересующем нас случае. Знание спектра в магнитном поле позволяет решить задачу (например, так, как это делалось ранее для циклотронного и парамагнитного резонансов).

Однако даже в хороших металлах, в пренебрежении спин-орбитальной связью, комбинированный резонанс возможен [99] благодаря существенной неоднородности поля. Действительно, при этом спиновый член $\mu_0 \hat{\sigma} \mathbf{H}$ в гамильтониане ($\hat{\sigma}$ — оператор спина, \mathbf{H} — полное магнитное поле, включающее нестационарную и существенно неоднородную часть $\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)$) оказывается зависящим как от оператора спина, так и от координат. Это значит, что матричные элементы этого члена недиагональны как по проекции спина σ , так и по номеру ν диамагнитного уровня, т. е. обеспечивают комбинированный резонанс. Физически это очевидно: в неоднородном магнитном поле орбита электрона изменяется, в частности, за счет сил, действующих на спин электрона.

Ясно, что комбинированный резонанс требует осуществления условий как циклотронного резонанса (строгая параллельность магнитного поля поверхности металла при $\delta \ll r_H$), так и парамагнитного (\mathbf{H} и \mathbf{H}_1 непараллельны).

Интенсивность комбинированного резонанса можно определить так же, как это делалось для парамагнитного резонанса в § 44. Резонанс обусловлен членом $[1 - \exp(-T/\tau^*)]^{-1}$, где T — период обращения по ларморовской орбите, а $1/\tau^* = 1/\tau + 1/T_s + i(\omega \mp \Omega_0)$ и соответствует, как говорилось выше, $\omega = q\Omega_{\text{extr}} \pm \Omega_0$.

При квадратичном законе дисперсии интенсивность комбинированного резонанса в $(1 + T_s/\tau)^{1/2}$ раз меньше интенсивности парамагнитного резонанса; при произвольном законе дисперсии происходит дополнительное ослабление интенсивности в $\sqrt{\omega(\tau^{-1} + T_s^{-1})^{-1}}$ раз. Ширина комбинированного резонанса $\Delta\Omega \sim \tau^{-1} + T_s^{-1}$. Отметим, что, поскольку комбинированный резонанс связан с квазистационарностью состояния не только с данным σ , но и с данным ν (т. е. квазистационарностью данной орбиты), то такого «протаскивания» поля, как при парамагнитном резонансе, при комбинированном резонансе не происходит.

§ 46. Осцилляции импеданса в слабых магнитных полях

Все предыдущее рассмотрение, даже в области аномального скин-эффекта, по сути дела, учитывало только объемные свойства металлов — в частности, принимались в расчет электронные энергетические уровни в неограниченном образце. С другой стороны, как показано в § 7 и 8, движение в магнитном поле электронов, падающих на поверхность металла под малыми углами и потому отражающихся от поверхности почти зеркально, квантуется, причем вблизи поверхности возникает

своеобразная система уровней, подробно описанная в тех же параграфах (см. формулы (7.25) — (7.32) и (8.22) — (8.26)).

Поверхностные уровни проявятся в высокочастотных свойствах металла, если окажутся существенны скользящие электроны. Именно это имеет место при аномальном скин-эффекте, когда эффективная глубина скин-слоя $\delta_{эфф} \approx (\delta^2 l)^{1/3}$ мала по сравнению с длиной свободного пробега l и в отсутствие магнитного поля существенны электроны, скорость которых составляет с поверхностью угол $\varphi \approx (\delta/l)^{2/3}$ (§ 33). При низких температурах и на хороших образцах φ может оказаться порядка 10^{-3} . В слабом

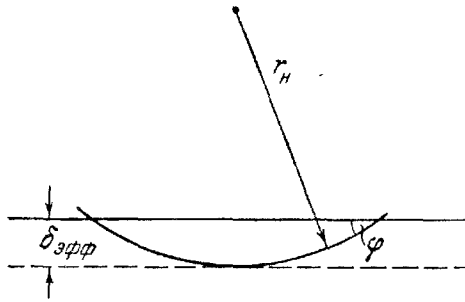


Рис. 95. Угол встречи электрона с поверхностью металла в слабом магнитном поле.

магнитном поле ($r_H \gg l$) существенны углы $\varphi \approx (\delta_{эфф}/r_H)^{1/2}$, что легко устанавливается из рис. 95. И в этом случае $\varphi \ll 1$.

Приведенные оценки показывают, что поверхностные уровни должны проявляться в высокочастотных свойствах металлов в условиях аномально-го скин-эффекта.

Как ясно из результатов § 7 и 8, особенно отчетливо поверхностные уровни проявятся в случае цилиндрической поверхности Ферми (т. е. если у поверхности Ферми имеется цилиндрический или близкий к цилиндру участок). Тогда должно наблюдаться резонансное поглощение энергии высокочастотного поля, причем формула (7.31) (или более точная, следующая из (7.25)) определяет резонансные частоты:

$$\omega = k\omega_n, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (46.1)$$

Так как, согласно (7.30), $\omega_n \sim H^{2/3}$, то при фиксированной частоте резонансные значения магнитного поля пропорциональны частоте в степени $3/2$: $H_{рез} \sim \omega^{3/2}$. Резонансные ларморовские частоты $\omega_H^{рез} = eH_{рез}/m^*c$ весьма малы и не зависят от глубины скин-слоя. Интервал магнитных полей, в котором может наблюдаться резонансное поглощение энергии на поверхностных уровнях, ограничен как снизу (см. второе из неравенств (7.32)), так и сверху, ибо с ростом H растет $\varphi_1 \sim H^{1/3}$, а при достаточно больших φ отражение от поверхности становится существенно диффузным. Это, по-видимому, не относится к электронам в металлах типа Вi и в аномально мало заполненных зонах обычных металлов, длина волны де Бройля которых значительно больше постоянной решетки.

В общем случае произвольной ферми-поверхности, когда ε_n и $\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m$ зависят от p_z , резонанс, как и в случае класси-

ческого циклотронного резонанса, имеет место при $p_z = p_0$, при котором частоты ω_{nm} медленнее всего отходят от резонансной, т. е. там, где максимальна плотность состояний по частоте $\omega'_H(p_0) = 0$. (Понятно, что зеркальность отражения при малых углах может в достаточно слабом магнитном поле сказаться и на классических эффектах, в частности на циклотронном резонансе, который исчезает [10] при $q = 1$. Для этого требуется, естественно, $q((\delta/l)^{1/2}) \ll 1$.

Полуширина резонанса определяется естественной шириной уровней, и потому (§ 7)

$$\Delta\omega/\omega_n \approx q^{-1}(\varphi_n) + (\omega\tau)^{-1}. \quad (46.2)$$

Относительная высота резонанса существенно различна для цилиндрической и нецилиндрической ферми-поверхностей. Поскольку в последнем случае в резонансе участвуют только электроны в интервале $(\Delta p_z/p_0) \sim (\Delta\omega/\omega)^{1/2}$ (так как $\omega_n \sim (p_z - p_0)^2$), относительная высота резонанса будет соответственно меньше.

Важно также, помещается или не помещается резонансная орбита в скин-слое, так как от этого (т. е. от величины $(r_H/\delta)(\hbar\omega_H/\epsilon_F)^{2/3}$) зависят как эффективный путь в поле, так и относительное количество ускоряющихся в поле электронов. В квазиклассической области ($n \gg 1$) может быть получена точная формула для импеданса. При $\hbar\omega \ll T$ она выглядит особенно просто, так как при этом можно воспользоваться принципом соответствия, заменив при произвольном q (в формулах (9) — (10) работы [84]) $1/\tau$ на $1/\tau + i\omega$, α на ∞ , «классическое» интегрирование по φ на «квантовомеханическое» суммирование по φ_n и внося под знак интеграла $E(\mu)$. При $\hbar\omega \gtrsim T$ вместо $\frac{\partial n_F}{\partial \epsilon}$ входит $[n_F(\epsilon_{k+k'}) - n_F(\epsilon_k)]/(\epsilon_{k+k'} - \epsilon_k)$, где k — набор квантовых чисел (n, p_z, P_x) (см. также § 42).

Значительный интерес представляет получение формы резонансной кривой при произвольном $q(\varphi)$ (в квазиклассике, учитывая сказанное выше, это нетрудно сделать). Сравнение эксперимента с теорией позволило бы получить информацию о виде $q(\varphi)$.

Действительно, переход от «помещающихся» в скин-слое резонансных орбит к нерезонансным, который скажется на виде кривой, позволит из соотношения $y_{\max} = R\varphi_n^2 \sim \delta_{\text{эфф}}$, где $\delta_{\text{эфф}}$ выражается через импеданс, определить R (так как $R\varphi_n \sim R^{1/2}$, см. (7.28)). Резонансные частоты, согласно (7.30), дадут v_x^n . Зная R и v_x^0 , можно по зависимости ширины резонанса от n при $\omega\tau \gg q^{-1}$ найти $q(\varphi)$ (см. формулу (46.2)).

Наклон магнитного поля ослабит резонанс при $p_z \neq 0$ (электроны будут уходить в глубь металла, совершая неперiodические

столкновения с поверхностью металла). Однако наличие нового параметра — угла наклона поля — расширит получаемую информацию (особенно для резонанса при $p_z = 0$, когда нет дрейфа в глубь металла).

Должен существовать классический резонанс в слабых полях в тонкой ($d \ll l$) строго плоскопараллельной пластине на частотах, соответствующих $\sqrt{Rd}/v_0 = n2\pi/\omega$, когда $H \sim (\omega/n)^2$ [100a]. Природа резонанса ясна из рис. 96. Этот эффект также можно использовать для определения $q(\varphi)$, так как резонанс имеет по-

луширину $\left(\frac{1}{\omega\tau} + q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{d}}\right)\right)^{-1}$. Для нахождения $q(\varphi)$ пригодны, естественно, и другие эффекты, чувствительные к углу столкновения электронов с поверхностью. Поиски и исследование этих

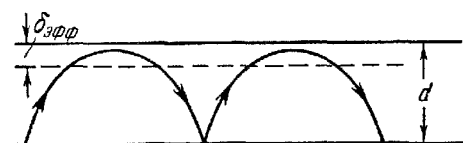


Рис. 96. Классический циклотронный резонанс в тонкой ($d \ll l$) пластине.

эффектов, представляющих значительный интерес, сейчас, в сущности, только начинаются.

Описанные в этом параграфе резонансные осцилляции были открыты в 1961 г. [101] и неоднократно наблюдались [102, 103]. Первое классическое объяснение, связывающее осцилляции с электронами, не сталкивающимися с поверхностью, было предложено в [102]. В работе [105] указана определяющая роль зеркально отраженных от поверхности металла электронов; в [106] обнаружен чисто квантовый характер осцилляций и получена правильная частотная зависимость их периода. Наконец, в [107] была вскрыта резонансная природа осцилляций и предложена их теория (более подробное теоретическое рассмотрение этих осцилляций содержится в [113]). В [104] дан квазиклассический расчет поверхностных уровней, проведено экспериментальное исследование осцилляций на висмуте и сравнение его с теорией. Подробный обзор теоретических и экспериментальных работ по диамагнитным поверхностным уровням дан в работе [114].

§ 47. Инфракрасная оптика

В предыдущих параграфах, посвященных исследованию высокочастотных свойств металлов, главное внимание было уделено предельно аномальному скин-эффекту в указанном в § 32 смысле (см. неравенство (32.9)). Так как при $\omega\tau \gg 1$ роль длины свободного пробега играет путь, проходимый электроном за период поля v/ω , а глубина скин-слоя δ стремится к константе, равной c/ω_0 (где ω_0 — плазменная частота электронов металла), то условие предельной аномальности ограничивает область

частот сверху:

$$\omega \ll \frac{v}{\delta} \approx \omega_0 \frac{v}{c}. \quad (47.1)$$

Нас в этом параграфе будет интересовать поведение металла при высоких частотах в условиях, когда наименьшим параметром размерности длины является v/ω , т. е.

$$\omega \gg \omega_0 \frac{v}{c}, \frac{1}{\tau}. \quad (47.2)$$

Однако при этом в первой части параграфа мы будем считать, что частота меньше границы внутреннего фотоэффекта (см. ниже). Как правило, граница внутреннего фотоэффекта, ширина электронной зоны (в частотных единицах) и плазменная частота одного порядка. Поэтому мы потребуем только, чтобы выполнялось условие

$$\omega \ll \omega_0. \quad (47.3)$$

Условия (47.2) и (47.3) выполняются в инфракрасной области спектра, а для хороших металлов и при низких температурах вплоть до миллиметрового диапазона длин волн. Раздел физики металлов, изучающий поведение в диапазоне частот, ограниченных неравенствами (47.2) и (47.3), называют инфракрасной металлооптикой.

Так как наибольшим параметром размерности обратного времени теперь является частота, то в основном приближении добавка к равновесной функции распределения определяется членом с частной производной по времени (в кинетическом уравнении) — интеграл столкновений можно опустить. При учете ферми-жидкостного взаимодействия линейная по электрическому полю добавка к функции распределения имеет вид

$$\hat{f}_1 = (i\omega)^{-1} e\mathbf{E} (1 + \hat{\Phi}) \mathbf{v} \frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon}. \quad (47.4)$$

Оператор $\hat{\Phi}$ учитывает ферми-жидкостную корреляцию в движении электронов (см. § 40). В газовом приближении $\hat{\Phi} \equiv 0$.

Из (47.4) плотность тока равна

$$j_i = - \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3 (i\omega)} \oint_{\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon_F} v_i (1 + \hat{\Phi}) v_k \frac{ds}{v} E_k. \quad (47.5)$$

Из последней формулы видно, что плотность тока и напряженность электрического поля сдвинуты по фазе на $\pi/2$ (проводимость — чисто мнимая величина). Это означает, что в исследуемом интервале частот электромагнитные свойства металла удобней описывать не тензором электропроводностей, а тензором диэлектрических постоянных, который определяется из

выражения (47.5):

$$\epsilon_{ik} = -\frac{8\pi e^2}{(2\pi\hbar)^3 \omega^2} \oint_{\epsilon(p)=\epsilon_F} v_i (1 + \hat{\Phi}) v_k \frac{dS}{v}. \quad (47.6)$$

Если ограничиться этим приближением, то главные значения тензора поверхностного импеданса — чисто мнимые величины

$$\zeta_{1,2} = -i \epsilon_{1,2}^{-1/2}, \quad (47.7)$$

где $\epsilon_{1,2}$ — главные значения тензора ϵ_{ik} . Главные значения тензора ϵ_{ik} по порядку величины равны $-\omega_0^2/\omega^2$, где ω_0 — плазменная частота; $\omega_0^2 = 4\pi n e^2/m$, если для оценки, как всегда, воспользоваться квадратичным изотропным законом дисперсии и газовым приближением ($\hat{\Phi} \equiv 0$).

Чисто мнимый импеданс описывает полное отражение электромагнитной волны от поверхности металла — коэффициент отражения равен единице. Металл в диапазоне частот, определенных неравенствами (47.2) и (47.3), очень напоминает электронную плазму.

К сожалению, симметричный тензор ϵ_{ik} , компоненты которого могут быть измерены по сдвигу фазы волны при отражении, может дать весьма малую информацию о корреляционной функции — основной характеристики ферми-жидкостного описания электронов проводимости.

Поглощение в инфракрасной оптике, описать которое можно, если учесть следующее приближение по обратной частоте, существенно зависит от конкретных механизмов взаимодействия электронов с примесями, с фононами и электронов друг с другом. Другими словами, поглощение электромагнитной энергии, существенно зависит от вида интеграла столкновений. Поскольку основной задачей настоящего изложения является рассмотрение эффектов, которые определяются энергетическим спектром электронов и не чувствительны к характеру столкновений, мы не будем подробно останавливаться на вычислении коэффициента поглощения в инфракрасной оптике, отсылая читателей к работам [108, 109]. Оценим лишь порядок величины поглощения в инфракрасной оптике.

Главные значения тензора диэлектрических постоянных в следующем по параметру v/ω члене разложения имеют мнимую добавку, которая, естественно, и описывает поглощение

$$\delta\epsilon \approx -i \frac{v}{\omega} \epsilon \approx \frac{\omega_0^2 v}{\omega^3} i, \quad v = \frac{1}{\tau}. \quad (47.8)$$

Действительная часть поверхностного импеданса при этом пропорциональна v/ω_0 . Таким образом, зависимость коэффициента

поглощения электромагнитной энергии от частоты, температуры и других параметров определяется зависимостью от этих параметров частоты столкновения ν , подробно изученной в работе [110].

Прежде, чем выписывать оценки для частоты столкновений, которая, естественно, есть сумма частот столкновений, обязанных разным механизмам, отметим два обстоятельства, существенных для получения приводимых ниже оценок:

1) Так как импульс электрона p_F велик по сравнению с импульсом фотона в металле ($p_F \gg \hbar\omega_0/c$), то претерпевают изменения за счет перехода в высокочастотную область только частоты неупругих столкновений, частоты упругих столкновений те же, что в статическом случае;

2) так как энергия Ферми приблизительно равна средней энергии кулоновского взаимодействия между электронами ($\epsilon_F \approx \approx p_F v \approx e^2/a$, a — среднее расстояние между электронами), то

$$\omega'_0 \approx \frac{v}{a} \approx \frac{\epsilon_F}{\hbar}, \quad (47.9)$$

а $\epsilon_F v/c$, как правило, численно совпадает с дебаевской температурой, т. е. в нашем случае

$$\omega_0 \gg \omega \gg \nu, \frac{\Theta}{\hbar}. \quad (47.3')$$

Итак,

$$\nu = \nu_{пр} + \nu_{ээ} + \nu_{эф}, \quad (47.10)$$

где

$$\nu_{пр} \approx \frac{v}{a} c_i \sim \omega_0 c_i$$

— частота столкновений с примесями (c_i — их концентрация);

$$\nu_{ээ} \approx \frac{\omega_0}{(\hbar\omega_0)^2} \left[T^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{2\pi} \right)^2 \right] \quad (47.11)$$

— частота столкновений электронов друг с другом, а $\nu_{эф}$ — частота столкновений с фононами, которая при $\hbar\omega \gg \Theta$ равна частоте электрон-фононных столкновений при температуре Дебая ($\nu_{эф} \sim \Theta/\hbar$).

Формулы (47.8)—(47.11) показывают, что в инфракрасной оптике зависимость поглощения от частоты, по-видимому, обязана электрон-электронным столкновениям. Постоянное слагаемое в коэффициенте поглощения не исчерпывается объемным поглощением. Столкновения электронов с границей металла (особенно сопровождающиеся диффузным рассеянием) приводят к поверхностному поглощению, которое можно связать с пространственной неоднородностью поля на расстоянии $\delta \approx c/\omega_0$.

Поверхностное поглощение можно описать эффективной частотой столкновений порядка

$$\nu_{\text{эфф}} \approx \frac{v}{\delta} \approx \omega_0 \frac{v}{c}. \quad (47.12)$$

Конкретное вычисление поверхностного поглощения для случая произвольного закона дисперсии электронов довольно сложно [109]. Приходится учитывать, что электрическое поле даже в основном приближении нельзя считать медленно меняющимся на расстоянии порядка δ , так как даже в однородном переменном поле при движении электронов в глубь металла будет создаваться ток (и связанное с ним нормальное к поверхности металла электрическое поле), меняющийся на расстояниях порядка v/ω . Однако по порядку величины поверхностные потери правильно описываются эффективной частотой (47.12). Отметим: вещественная и мнимая части тензора поверхностного импеданса в анизотропном металле не могут быть одновременно приведены к главным осям [109, 110а].

Повышение частоты, естественно, приводит к нарушению условия (47.3). Уже одно это (даже если абстрагироваться от внутреннего фотоэффекта) должно привести к существенному изменению высокочастотных характеристик металла. При $\omega > \omega_0$ диэлектрическая постоянная металла положительна (в формуле (47.6) мы опустили диэлектрическую проницаемость ионного остова, которая вдали от собственных частот ионов порядка единицы), в металле может распространяться электромагнитная волна. При этом (если пренебречь затуханием) реальная часть импеданса отлична от нуля, а мнимая отсутствует ($\text{Re } \zeta \neq 0$; $\text{Im } \zeta = 0$).

Однако, по-видимому, раньше, чем диэлектрическая проницаемость меняет знак, превышает порог внутреннего фотоэффекта $\omega_{\text{пор}}$. Прямое поглощение фотонов электронами проводимости обусловлено межзонными переходами (непосредственное внутризонное поглощение противоречит законам сохранения энергии и импульса, так как $v < c$). Так как импульс фотона пренебрежимо мал, то закон сохранения энергии выглядит следующим образом:

$$\varepsilon_s(\mathbf{p}) + \hbar\omega = \varepsilon_{s'}(\mathbf{p}) \quad (s \neq s'). \quad (47.13)$$

Как правило, $\min[\varepsilon_{s'}(\mathbf{p}) - \varepsilon_s(\mathbf{p})] \neq 0$, благодаря чему поглощение начинается с пороговой частоты $\omega_{\text{пор}} = \min[\varepsilon_{s'}(\mathbf{p}) - \varepsilon_s(\mathbf{p})]$. Зависимость коэффициента поглощения света Γ от частоты вблизи порога ($\omega \lesssim \omega_{\text{пор}}$) обладает рядом общих для всех металлов черт, которые могут быть связаны с энергетической структурой электронного спектра [111]. Существенную роль в этом анализе играет положение точки \mathbf{p}_0 в импульсном пространстве (\mathbf{p}_0 —

точка, в которой функция $\varepsilon_{s'}(\mathbf{p}) - \varepsilon_s(\mathbf{p})$ имеет минимальное значение), если $\varepsilon_F - \hbar\omega < \varepsilon_s(\mathbf{p}_0) < \varepsilon_F$, то в большинстве случаев $\Gamma \sim \sqrt{\omega - \omega_{\text{пор}}}$ (разрешенный переход), а иногда $\Gamma \sim (\omega - \omega_{\text{пор}})^{3/2}$ (запрещенный переход). Может оказаться, что $\min[\varepsilon_{s'}(\mathbf{p}) - \varepsilon_s(\mathbf{p})]$ не достигается в области \mathbf{p} -пространства, ограниченной неравенствами $\varepsilon_F - \hbar\omega < \varepsilon_s(\mathbf{p}) < \varepsilon_F$. Тогда пороговая частота определяется условием касания поверхности $\varepsilon_{s'}(\mathbf{p}) - \varepsilon_s(\mathbf{p}) = \hbar\omega$ с одной из поверхностей, ограничивающих упоминавшуюся выше область (либо с поверхностью $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon_F$, либо с поверхностью $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \varepsilon_F - \hbar\omega$). Коэффициент поглощения в этом случае линейно зависит от частоты вблизи порога ($\Gamma \sim \omega - \omega_{\text{пор}}$).

Если поверхность Ферми является самопересекающейся изоэнергетической поверхностью, то внутренний фотоэффект (поглощение фотона) не имеет порога. Коэффициент поглощения при этом пропорционален кубу частоты ($\Gamma \sim \omega^3$; $\omega \gg \nu$), что непосредственно связано с существованием конической точки у самопересекающейся поверхности [111] (см. § 2).

У графита (у которого, как мы уже говорили, поверхность Ферми — самопересекающаяся) кубическая зависимость сравнительно быстро сменяется квадратичной ($\Gamma \sim \omega^2$). Это обусловлено тем, что в грубом приближении (при пренебрежении малыми энергиями взаимодействия) четыре конические точки самопересечения сливаются — возникает самопересечение с касанием [112].

За порогом внутреннего фотоэффекта зависимость коэффициента поглощения Γ от частоты сложна. Каждый металл обладает своими специфическими особенностями, которые нельзя сформулировать в достаточно общих терминах: линии поглощения, описывающие переходы между разными зонами, накладываясь друг на друга, создают сложную зависимость от частоты $\Gamma(\omega)$. Кроме того, надо иметь в виду, что и коэффициент внутризонного поглощения с увеличением частоты сложным образом зависит от частоты, если не ограничиваться случаем $\omega \ll \omega_0$. В работе [113] показано, что даже за порогом внутреннего фотоэффекта (в области высоких частот), благодаря межэлектронному взаимодействию, внутризонные переходы могут дать существенный вклад в поглощение.

§ 48. О восстановлении энергетического спектра металлов

Большинство описанных в предыдущих параграфах свойств металлов обнаружено, некоторые тщательно изучены, другие только начали изучаться. Изучение разнообразных свойств металлов позволяет получить исчерпывающую информацию об электронах проводимости: их закон дисперсии, корреляционную функцию, длину свободного пробега и т. п.

Естественно, одной из первых задач является определение закона дисперсии или, более широко, — реконструкция энергетического спектра металла. Для определения энергетического спектра конденсированных систем в настоящее время используют весьма разнообразные методы.

Если речь идет об определении бозевских ветвей спектра, то, по-видимому, наиболее перспективными и дающими наиболее полную информацию методами являются те, которые основаны на взаимодействии проникающих частиц с известным энергетическим спектром (нейтронов, электронов со сравнительно большой энергией, фотонов) с изучаемыми элементарными возбуждениями. Так как при выполнении условий, аналогичных условию черенковского излучения, проникающая частица рождает одно элементарное возбуждение (бозон с энергией ϵ и квазиимпульсом или импульсом \mathbf{p}), то по исследованию неупруго рассеянных частиц (нейтронов и т. д.) можно полностью восстановить закон дисперсии $\epsilon(\mathbf{p})$ элементарных возбуждений. Такой метод успешно применялся для экспериментального определения фонон-ротоного спектра в He II, фононного спектра ряда твердых тел (по неупругому рассеянию нейтронов), плазменных колебаний электронов в металле (по спектрам характеристических потерь электронов, прошедших через тонкие пленки) и др.

Как известно, для расчета термодинамических характеристик достаточно знания плотности уровней $\nu(\epsilon)$, которая в случае бозевских ветвей спектра принципиально может быть определена по температурной зависимости теплоемкости и других термодинамических величин [115]. Однако этот метод слабо устойчив и потому требует огромной точности экспериментальных данных [116].

Вернемся к электронам проводимости.

Высокая плотность электронов в металлах, приводящая к предельному вырождению электронного газа, позволяет сузить задачу и искать корреляционную функцию $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ при $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p}') = \epsilon_F$, а функцию $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$ — вблизи $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$. Полагая $\mathbf{p} = \mathbf{p}_F + \delta\mathbf{p}$, где $\epsilon(\mathbf{p}_F) = \epsilon_F$, так что $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F + v\delta p$, приходим к выводу, что достаточно определить форму ферми-поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ и абсолютные значения скоростей на ней $|\partial\epsilon/\partial\mathbf{p}|_{\epsilon=\epsilon_F}$ (направление скорости — нормаль к поверхности постоянной энергии — определяется формой поверхности Ферми).

О виде корреляционной функции $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ в настоящее время известно очень мало. Это связано с тем, что, как было показано ранее, ферми-жидкостное взаимодействие оказывается существенным только в инфракрасной области спектра, где определяет тензор диэлектрической постоянной (по этим нескольким константам нельзя что-либо сказать о виде функции от четырех

переменных) и при циклотронном резонансе на столь высоких частотах, что соответствующие эксперименты пока отсутствуют (хотя и представляли бы значительный интерес, позволив определить диагональные элементы $\Phi(\rho, \rho)|_{\epsilon(\rho)=\epsilon_F}$ корреляционной функции).

Благодаря наблюдению спиновых волн в нормальных металлах удалось получить сведения об обменной части корреляционной функции для нескольких металлов [67в]. Что же касается закона дисперсии, то о нем получена весьма полная информация.

В приложении III собраны основные данные по определению закона дисперсии электронов проводимости и приведена подробная библиография.

Следует иметь в виду, что поверхности Ферми большинства металлов очень сложны, состоят (и без учета периодичности) из нескольких полостей или причудливо проходят через всю обратную решетку. Даже такое естественное свойство, как центральная симметрия, удовлетворяется не каждой полостью, а всей многосвязной поверхностью Ферми.

Естественно, определение формы столь сложных поверхностей не может быть сделано без пробных моделей. Наибольшее распространение получила модель почти свободных электронов, согласно которой для определения грубых черт поверхности Ферми достаточно учесть пространственную симметрию решетки. Сложные поверхности Ферми в этой модели получаются в результате соответствующего «разрезания» сферы Ферми свободного электронного газа по линиям вырождения. Уточненная теория позволяет поправить закон дисперсии вблизи точек вырождения и в большинстве случаев добиться хорошего согласия с экспериментом.

Различные явления, описанные выше, чувствительны к разным свойствам закона дисперсии. Так, гальваномагнитные эффекты в сильных магнитных полях позволяют установить направления открытых сечений в случае ферми-поверхности, проходящей через всю обратную решетку.

Квантовые осцилляции, в частности хорошо изученный экспериментально эффект де Гааза — ван Альфена, весьма точно определяют экстремальные площади сечений ферми-поверхности. Для замкнутой выпуклой центрально-симметричной поверхности этого уже достаточно, чтобы полностью восстановить ее форму. Для односвязной или невыпуклой поверхности периоды квантовых осцилляций определяются всеми экстремальными и особыми сечениями, и гармонический анализ, необходимый для выделения отдельных периодов, довольно труден. Можно, однако, проводить его «физически», используя пластину для последовательной «отсечки» сечений с разными диаметрами.

Эффект де Гааза — ван Альфена определяет и эффективную массу электронов проводимости, однако весьма неточно, так как она связана с амплитудой осцилляций, весьма чувствительной к трудно контролируемой неидеальности кристаллической решетки.

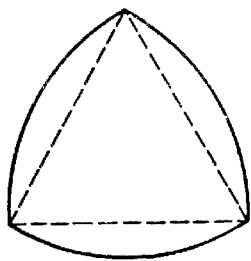
Удобнее и значительно точнее экстремальная эффективная масса находится из циклотронного резонанса, где она определяется резонансными значениями магнитного поля. При пайденой форме ферми-поверхности знания эффективной массы для всех направлений достаточно, чтобы определить скорости на ферми-поверхности при указанных выше условиях. Следует, однако, учитывать, что экстремальная эффективная масса и экстремальная площадь сечения могут достигаться на разных сечениях.

На эллиптических опорных точках эффективная масса (которая также измеряется при циклотронном резонансе) определяет величину $v\sqrt{\kappa}$, где v — скорость, а κ — гауссова кривизна в соответствующей точке.

Усредненное значение гауссовой кривизны может быть найдено по аномальному скин-эффекту в отсутствие постоянного магнитного поля. В области же эллиптических точек гауссова кривизна определяет форму поверхности. Скорость v можно определить по доплеровскому расщеплению частоты циклотронного резонанса в постоянном магнитном поле, составляющем малый угол с поверхностью металла.

Ультразвуковые измерения и отсечка в пластинах резонансных и нерезонансных орбит дают возможность непосредственно измерить экстремальные диаметры ферми-поверхности. Для центрального сечения это дает без дополнительных вычислений его форму.

Рис. 97. Кривая равной ширины.



Экспериментальное исследование квантового циклотронного резонанса позволило бы определить площади всех (а не только экстремальных) сечений ферми-поверхности и (при использовании пластин, отсекающих орбиты) все диаметры ферми-поверхности.

Использование различных экспериментальных методов, а также теоретических моделей, правильно учитывающих симметрию задачи, позволяет правильно воссоздать поверхность Ферми.

Ограниченная точность как экспериментальных, так и теоретических моделей ставит вопрос о том, достаточно ли в принципе экспериментальных данных, которые могут быть получены известными методами, для однозначного восстановления ферми-

поверхности и скоростей на ней. Для того чтобы пояснить, сколь важен этот вопрос, приведем (исключительно в качестве иллюстрации) следующий грубый пример.

В двумерном случае поверхности соответствует кривая, а экстремальной площади — экстремальный диаметр. Пусть известно, что все экстремальные диаметры равны. Тогда в случае выпуклой центрально-симметричной кривой это однозначно определяет окружность, а в случае кривой без центральной симметрии (даже выпуклой) — любую кривую равной ширины (например, изображенную на рис. 97). Если кривая центрально-симметричная, но не выпуклая, постоянство экстремальных диаметров также, как легко понять, еще не определяет вида кривой. Этот пример, во всяком случае, показывает, что доверять можно только результатам, удовлетворяющим различным экспериментам.

Расшифровка поверхностей Ферми металлов показала, что электронный энергетический спектр их весьма сложен; кроме основных групп электронов (~ 1 электрона на атом) у большинства металлов есть малые группы ($\sim 10^{-3} \div 10^{-5}$ электронов на атом); энергетические барьеры, отделяющие одни участки поверхности от других, также малы. В связи с этим при использовании того или другого метода исследования электронного энергетического спектра надо помнить, что сравнительно легко внешним воздействием изменить структуру спектра. Хорошим примером является магнитный пробой, из-за которого могут возникнуть открытые направления при замкнутой поверхности Ферми и замкнуться траектории при открытой поверхности.

Роль малых электронных групп до конца еще не понята. Весьма возможно, что именно они определяют свойства металлов, далекие от тех, которые описаны в настоящей монографии: пластичность и упругость, изменение характеристик при легировании и т. п. Дело в том, что электроны малых групп обладают аномально малыми массами, кроме того, их длина волны де Бройля \hbar/p_F аномально велика, и, наконец, именно эти группы наиболее подвержены внешним воздействиям.

Определение электронного энергетического спектра, естественно, не завершает исследования металлов. Скорее надо считать, что сделаны первые шаги. Предстоит воссоздание корреляционной функции, детальное исследование процессов взаимодействия электронов с другими квазичастицами и главное — изучение всех новых свойств металлов, предсказать и рассчитать которые можно, только зная энергетический спектр электронов.

КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

Пока речь идет о статическом случае, когда электростатика и магнитостатистика разделяются, можно отдельно говорить о квантовых осцилляциях магнитного момента и электросопротивления. В переменном электромагнитном поле измеряется одна величина — тензор полного поверхностного импеданса, — связывающая напряженность поля на поверхности проводника и протекающий через него полный ток. В хороших проводниках с высокой плотностью зарядов удержание в уравнениях Максвелла тока смещения является обычно превышением точности. Поэтому полный ток определяется напряженностью переменного магнитного поля на поверхности. В одномерном случае проводника, заполняющего полупространство*), импеданс \hat{Z} выражается равенством (t обозначает тангенциальную компоненту, s — поверхность, n — нормаль к поверхности, \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности переменных полей):

$$\mathbf{E}_t^{(s)} = \frac{c}{4\pi} \hat{Z} [\mathbf{H}n]^{(s)}. \quad (\text{I. 1})$$

Знание тензора \hat{Z} позволяет свести решение к чисто внешней задаче о поле в вакууме с граничными условиями (I. 1) и выразить комплексный коэффициент отражения волны через \hat{Z} .

Квантовые осцилляции \hat{Z} определяются, естественно, квантовыми осцилляциями как магнитного момента \mathbf{M} , так и плотности тока проводимости \mathbf{j} . Строго говоря, эти две величины в нестационарном случае нельзя даже разделить. Речь идет о типичной задаче теории поля — поведении свободных зарядов в полях \mathbf{E} и $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}$ (§ 19); \mathbf{B}_0 определяется постоянным магнитным полем, а \mathbf{B} — переменным. При этом уравнения Максвелла записываются как в вакууме:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{полн}}, \quad (\text{I. 2})$$

*) Этот случай практически наиболее важен. Высокая проводимость означает малую длину волны в проводнике, по сравнению с которой все характерные размеры проводника можно считать бесконечными.

причем $j_{\text{полн}}$ связано с матрицей плотности \hat{n} во внешних полях \mathbf{E} и \mathbf{B} следующим образом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} e \text{Sp} \{ \hat{v} \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) + \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \hat{v} \} \hat{n}. \quad (I. 3)$$

Физический смысл этой формулы очевиден — в классике $e v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ — плотность тока, создаваемая в точке \mathbf{r} зарядом, находящимся в точке $\mathbf{r}(t)$. Формула может быть получена в квазиклассике непосредственно из определения \mathbf{j} : $\mathbf{j} = -c \delta \bar{\mathcal{H}} / \delta \mathbf{A}$, $\bar{\mathcal{H}} = \text{Sp} (\hat{\mathcal{H}} \hat{n})$ — среднее значение оператора Гамильтона.

На низких частотах ($\omega \ll \nu$, ν — характерная частота столкновений) в основном приближении можно положить $\hat{n} = \hat{n}_0 + \hat{n}_1$, где \hat{n}_0 — равновесная функция, соответствующая «мгновенным» значениям полей. При этом ток проводимости \mathbf{j} определяется \hat{n}_1 , а $c \text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}_0$, $\delta \bar{\mathcal{H}} = \int \mathbf{M} \delta \mathbf{B} dV$; система «почти успевает» следить за мгновенными значениями переменных полей, и для \mathbf{M} и \mathbf{j} можно в основном приближении по ω/ν воспользоваться формулами в стационарных неоднородных полях, подставив в эти формулы значения переменных полей в данный момент времени.

В случае столь низких частот, что имеет место нормальный скин-эффект (§ 32, 33), глубина скин-слоя δ имеет в изотропном проводнике такой вид:

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma(1 + 4\pi\chi)}}. \quad (I. 4)$$

Порядок величины χ оценивался ранее (15, 20). Из таких же соображений легко оценивается и относительная величина квантовых осцилляций проводимости $\Delta\sigma/\sigma$ (§ 31). Ее зависимость от T и τ такая же, как у χ ; вклад в $\Delta\sigma$, как и в χ , вносит часть $(\hbar\Omega/\epsilon_0)^{1/2}$ электронов вблизи экстремальных сечений, однако отсутствует множитель $(v/c)^2$, так как $\Delta\sigma$ (в отличие от χ) не имеет релятивистского происхождения. В результате

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim \left(\frac{\hbar\Omega}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{2\pi^2 T}{\hbar\Omega} - \frac{2\pi^2}{\Omega\tau} \right) \ll 1. \quad (I. 5)$$

В действительности величина $\Delta\sigma/\sigma$ может оказаться еще меньше, так как σ определяется всеми электронными группами, а наблюдаемые обычно осцилляции $\Delta\sigma$ связаны с аномально малыми зонами.

Сравнивая $\Delta\sigma/\sigma$ и χ , убеждаемся, что

$$\frac{4\pi\chi}{\Delta\sigma/\sigma} \sim \left(\frac{v}{c} \frac{\epsilon_0}{\hbar\Omega} \right)^2 = S. \quad (I. 6)$$

Оценка для κ не годится при $4\pi\kappa \gg 1$, однако в этом случае вклад $\Delta\sigma/\sigma \ll 1$ заведомо мал по сравнению с вкладом $4\pi\kappa$.

В обычно достигаемых магнитных полях $\hbar\Omega \ll \epsilon_0 v/c$, и осцилляции поверхностного сопротивления определяются осцилляциями магнитного момента.

Ситуация изменится лишь при переходе к достаточно высоким и к предельно низким частотам. В области низких частот ω , при которых $\delta \gg Sd \gg d$ (d — толщина проводника), в формулу (I.1) входит разность значений H_t на поверхностях образца (ею определяется полный ток). Оценка показывает, что определяющими оказываются осцилляции σ (эффект Шубникова — де Гааза).

На достаточно высоких частотах, когда наступает аномальный скин-эффект и $\delta < r$, магнитный момент определяется переменным полем лишь на малой части орбиты, и κ уменьшается в $\delta_{\text{эфф}}/r$ раз ($\delta_{\text{эфф}}$ — эффективная глубина затухания \mathbf{B}). При $\omega t \gg 1$ происходит дополнительное уменьшение κ в ωt раз, так как магнитный момент не успевает следовать*) за изменением \mathbf{B} . В результате осцилляции \hat{Z} на достаточно высоких частотах определяются осцилляциями j .

Характерная особенность квантовых осцилляций в переменных полях — существование нелинейных эффектов уже при сравнительно небольшой интенсивности падающей волны. При $\omega t \ll 1$ в выражение для κ , по сказанному выше, входит «полная» индукция $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}$. Поэтому достаточно напряженности поля в падающей волне порядка периода квантовых осцилляций, т. е.

$$B \sim B_0 \frac{\hbar\Omega}{\epsilon_0} \sim \Delta B, \quad (\text{I.7})$$

чтобы нелинейные эффекты оказались существенными. Случай $B \gg \Delta B$ особенно интересен, так как приводит к своеобразному «псевдорезонансу»: резкому максимуму коэффициента отражения n -й гармоники ($n \gg 1$) при определенном значении $B/\Delta B \sim n$. Ширина максимума стремится к нулю, а его относительная высота — к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

*) Разумеется, обе эти причины уменьшают и квантовые осцилляции Δj , но уменьшают так же, как и классическую величину j , поэтому относительная величина $\Delta j/j$ остается неизменной.

**РОЛЬ ЭЛЕКТРОНОВ В РАСПРОСТРАНЕНИИ
И ПОГЛОЩЕНИИ ЗВУКА В МЕТАЛЛАХ**

На первый взгляд, распространение звука в металлах, как и в других твердых телах, — целиком решеточное свойство. Роль электронов проводимости, которые в каком-то смысле «свободны» от взаимодействия с ионами идеальной кристаллической решетки, кажется несущественной. Однако прямые эксперименты, проведенные при низких температурах ($T \ll \Theta$), показывают, что это не так. Наиболее наглядным результатом в этом смысле является резкое уменьшение коэффициента поглощения звука при переходе металла в сверхпроводящее состояние. Как известно, при $T = T_k$ меняется только состояние электронов проводимости и никакого изменения кристаллической решетки не наблюдается. Влияние электронов проводимости на распространение звука обусловлено ролью, которую играют электроны в формировании сил, действующих между ионами кристаллической решетки. Упругие свойства металла в значительной степени определяются электронами. Без электронов устойчивая система одноименно заряженных ионов вовсе не могла бы существовать.

Один из возможных подходов к исследованию динамических свойств кристаллической решетки, получивший в последние годы существенное развитие в связи с применением электронных вычислительных машин, состоит в расчете фоновых спектров с непосредственным учетом взаимодействия ионов друг с другом, электронов с ионами и электронов друг с другом [1]. Естественно, при этом приходится использовать более или менее реалистические модели (например, одну из модификаций приближения почти свободных электронов).

Другой подход, по сути дела, полуфеноменологичен. Движение в металле описывается введением квазичастиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, — фононов, и квазичастиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, — электронов проводимости. Законы дисперсии квазичастиц (фононов и электронов проводимости) считаются заданными. Тем самым, естественно, надо считать известной скорость распространения звука,

так как макроскопическая звуковая волна есть когерентно возбужденный поток длинноволновых фононов. При полуфеноменологическом подходе, которого мы придерживаемся, задача состоит не в вычислении скорости звука s , а в вычислении коэффициента поглощения и дисперсии звука, обусловленных взаимодействием звуковой волны с электронами. Для хороших металлов (с числом электронов, приблизительно равным одному электрону на атом) электронный механизм поглощения и дисперсии звука является основным. Взаимодействием звуковой волны с тепловыми фононами можно пренебречь.

Мы только что сказали, что макроскопическая звуковая волна — это когерентно возбужденный поток длинноволновых фононов. Однако в обычных экспериментах возбуждается столь большое число фононов, что вполне оправданным является классическое рассмотрение. Поэтому, исследуя взаимодействие звуковой волны с электронами проводимости, можно звуковую волну описывать как классическое поле. При этом надо иметь в виду, что скорость распространения звуковой волны значительно меньше, чем скорость фермиевских электронов ($s \ll v_F$, $s \approx 10^5$ см/сек, а $v_F \approx 10^8$ см/сек). Поэтому «с точки зрения электронов» звук частоты ω создает в металле переменное и неоднородное (но практически «неподвижное») поле сил с длиной волны $\lambda_{зв} = 2\pi s/\omega$.

Последовательное определение роли электронов в распространении звука связано с выводом уравнений теории упругости для металлов или, что тоже самое, с определением временной и пространственной дисперсии упругих модулей, обусловленных динамическими свойствами электронов. Так как динамика электронов проводимости существенно зависит от магнитного поля, то, естественно, динамические модули упругости будут также зависеть от магнитного поля. Мы не будем излагать здесь вывод уравнений теории упругости для металла (см., например, работу [2]) и следствий из них при различных соотношениях параметров. Это потребовало бы не меньше места, чем рассмотрение высокочастотных свойств металлов (часть IV). Мы изложим только основные результаты, относящиеся к распространению звука в металлах, и разясним их физическую природу.

Рассмотрим сначала поглощение низкочастотного звука. При разделении звуковых колебаний на низкочастотные и высокочастотные надо иметь в виду следующее обстоятельство. Естественными параметрами электронного газа, с которыми надо сравнивать частоту звука ω и его длину волны $\lambda_{зв}$, являются частота релаксации $1/\tau$ и длина свободного пробега l . Так как $v_F \gg s$, 10

$$kl = v_F \omega \tau / s \gg \omega \tau \quad (k = 2\pi / \lambda_{зв} = \omega / s). \quad (\text{II. 1})$$

Поэтому пространственная дисперсия проявляется при весьма низких частотах. Соотношение между длиной свободного пробега и длиной волны звука надо учитывать при более низких частотах, чем соотношение между частотой и величиной $1/\tau$. Более того, оказалось [3], что при $kl \gg 1$ коэффициент поглощения звука слабо зависит от величины $\omega\tau$, что позволяет распространить классический расчет вплоть до частот, больших по сравнению с частотой релаксации (см. ниже).

Итак, низкочастотной звуковой волной следует считать волну, в которой $kl \ll 1$. Это не означает, что при всех частотах, где $kl \ll 1$, отсутствует дисперсия коэффициента поглощения Γ и он, как это следует из макроскопического рассмотрения, пропорционален квадрату частоты [4]. Макроскопический подход при вычислении коэффициента поглощения Γ в этом случае действительно допустим. Это означает, что Γ можно выразить через квазистатистические («гидродинамические») характеристики металла (вязкость, теплопроводность, коэффициент теплопередачи от электронов решетке*) и т. п.). Однако обилие механизмов релаксации, отличающихся своими скоростями, приводит к сложной частотной зависимости коэффициента поглощения в низкочастотной области [5]. В некоторых предельных случаях, когда механизмы диссипации существенно различаются по временам релаксации, коэффициент $\Gamma(\omega)$ можно записать следующим образом:

$$\Gamma(\omega) = \sum_j A_j \frac{\omega^2 \tau_j}{1 + \omega^2 \tau_j^2}, \quad (\text{II. 2})$$

где A_j — коэффициент, характеризующий изменение j -го макроскопического параметра под воздействием звуковой волны; τ_j — время релаксации этого параметра. Например, если поглощение звука обусловлено теплопроводностью, то соответствующее время релаксации равно $\kappa/C_V s^2$, где κ — коэффициент теплопроводности, а C_V — теплоемкость единицы объема. Исследование частотной зависимости коэффициента поглощения, в частности нахождение максимумов на кривой $\Gamma = \Gamma(\omega)$, носящих название релаксационных резонансов, позволяет нащупать самые различные, в том числе и слабые, взаимодействия, приводящие к диссипации звуковой энергии.

Для вычисления коэффициента поглощения высокочастотного звука ($kl \gg 1$) необходим кинетический подход. Прохождение звуковой волны через металл приводит к тому, что энергия электрона ϵ приобретает добавку $\delta\epsilon$, пропорциональную пространственным и временным производным от вектора

* Кинетическое рассмотрение позволяет установить зависимость от температуры и магнитного поля этих макроскопических параметров.

смещения [2, 3, 6]:

$$\delta\varepsilon = \lambda_{ik}(\rho) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (\rho - m\nu) \dot{\mathbf{u}}. \quad (\text{II.3})$$

Здесь $\lambda_{ik}(\rho) = \left[\frac{\partial \varepsilon(\rho)}{\partial u_{ik}} \right]_{u_{ik}=0} + p_i v_k$ — тензор второго ранга, характеризующий изменение закона дисперсии электрона проводимости при неоднородной деформации кристаллической решетки и перенос импульса из одной точки пространства в другую (конечно, предполагается, что локальная периодичность решетки — на расстояниях порядка длины волны де Бройля — не нарушается). Тензор $\lambda_{ik}(\rho)$ играет роль «фононного заряда» — он описывает взаимодействие электронов с фононами. Несимметричная часть тензора $\partial u_i / \partial x_k$ входит вследствие того, что при прохождении звуковой волны с произвольным волновым вектором \mathbf{k} элемент объема кристаллической решетки не только совершает поступательное движение, но и вращается с угловой скоростью $\frac{1}{2} \text{rot } \dot{\mathbf{u}}$. При переходе к изотропному закону дисперсии антисимметричная часть исчезает. Сравнение слагаемых, содержащих временную производную, со слагаемыми, содержащими пространственные производные, показывает, что последние в v_F/s раз больше. Поэтому член $(\rho - m\nu) \dot{\mathbf{u}}$, описывающий инерционные эффекты, попросту можно опустить.

Зависимость энергии электрона от времени (из-за зависимости от времени, содержащейся в $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$) приводит к тому, что система электронов выводится из состояния равновесия. Диссипативные процессы (столкновения электронов с примесями, тепловыми фононами, друг с другом; см. § 24) — причина затухания звука, а коэффициент затухания Γ определяется диссипативной функцией ($T\dot{S}$) единицы объема:

$$\Gamma = T\dot{S}/2E_{\text{зв}}, \quad (\text{II.4})$$

где $E_{\text{зв}}$ — энергия звуковой волны, отнесенная к единице объема, а \dot{S} — производство энтропии в единице объема. Производство энтропии с помощью формул статистической механики [7] выражается через временную производную от функции распределения. Последняя должна быть найдена из кинетического уравнения. Вынуждающей «силой» служат производные от $\delta\varepsilon$ (см. формулу (II.3)).

При записи кинетического уравнения надо учесть, что колебания электронного газа приводят к возникновению электромагнитного поля, для нахождения которого надо использовать уравнения Максвелла с плотностью тока и плотностью заряда, по-

лучаемыми соответствующим усреднением функции распределения электронов *).

Диссипативная функция распадается на сумму двух слагаемых. Первое описывает «вязкие» потери и обусловлено непосредственным влиянием изменения во времени тензора деформации. Это слагаемое имеет структуру $1/2 \overline{\Lambda_{iklm} \dot{u}_{ik}^* \dot{u}_{lm}}$ и может служить определением тензора динамической вязкости металла $\Lambda_{iklm}(\omega, \mathbf{k}/k)$, черта означает усреднение по объему и по периоду $2\pi/\omega$. Второе слагаемое описывает джоулевы потери, т. е. зависит от тензора деформаций только через электрическое поле. (Естественно, соответствующей подстановкой можно придать этому слагаемому структуру вязкого члена и «перенормировать» тензор вязкости.) Соотношение между вязкими и джоулевыми потерями существенно зависит от соотношения между длиной волны звука $\lambda_{зв} = 2\pi s/\omega$ и длиной электромагнитной волны в металле $\lambda_{эм} = c/\sqrt{2\pi\sigma(k)\omega}$, которая должна быть вычислена с учетом пространственной дисперсии электропроводности. При $kl \gg 1$, согласно § 33, $\sigma(k) \approx \sigma_0/kl$, а $\lambda_{эм} \approx c/\omega_0 \cdot (v_F/s)^{1/2}$, где $\omega_0 = 4\pi n e^2/m$ — плазменная частота электронного газа (мы, конечно, для оценок используем квадратичный изотропный закон дисперсии). Если $\lambda_{зв} \ll \lambda_{эм}$, то главную роль играют вязкие потери ($\Gamma \approx \Gamma_{вязк}$), в обратном предельном случае потери на джоулево тепло сравнимы с вязкими [2] ($\Gamma_{дж} \leq \Gamma_{вязк}$).

При $kl \gg 1$ активно взаимодействуют со звуковой волной не все электроны с энергией порядка фермиевской, а только те, которые движутся вместе со звуковой волной, т. е. те, для которых $v_n = s$, где v_n — проекция скорости электрона на волновой вектор звуковой волны \mathbf{k} . Так как $v_F \gg s$, то можно считать, что активно взаимодействуют со звуком только электроны, для которых $v_n = 0$. Естественным следствием этого обстоятельства является то, что коэффициент поглощения $\Gamma(\omega)$ выражается в виде интеграла по пояску $\mathbf{v}_F \mathbf{k} = 0$ на фермиевской поверхности [3, 8]:

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\pi\omega}{(2\pi\hbar)^3 \rho s} \int_0^{2\pi} \frac{|\Lambda|^2 d\varphi}{v^2 \kappa(\varphi)}. \quad (\text{II. 5})$$

Здесь ρ — плотность металла, $\kappa(\varphi)$ — гауссова кривизна поверхности Ферми на пояске $\mathbf{v}_F \mathbf{k} = 0$, $|\Lambda|^2$ — символически изображает существенно положительную величину, квадратично зависящую от компонент тензора λ_{ik} . Особая роль электронов, двигающихся перпендикулярно волновому вектору звуковой волны, напоминает ситуацию аномального скин-эффекта (§ 33), в котором

*) Необходимо уточнить, что уравнения Максвелла следует использовать для нахождения поперечных составляющих полей. Продольное электрическое поле, как всегда (§ 24), находится из условия $\rho' = 0$.

эффективны только электроны, двигающиеся параллельно поверхности металла. Так же как в скин-эффекте, поглощение при высоких частотах из-за неоднородности звукового поля растет медленнее, чем при низких частотах. Правильный порядок величины $\Gamma(\omega)$ при $kl \gg 1$ можно получить, если выражение для $\Gamma(\omega)$, полученное в кинетической теории при условии $kl \ll 1$ [6]

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{N e_F \omega^2 \tau}{\rho s^2}, \quad (\text{II. 6})$$

разделить на kl ($1/kl$ — доля электронов, принимающих участие в диссипации звуковой энергии при $kl \gg 1$).

Вернемся к роли джоулевых потерь. Так как при $kl \gg 1$ вязкие потери выражаются формулой (II.5) независимо от соотношения между $\lambda_{зв}$ и $\lambda_{эм}$, а $\Gamma_{дж}(\omega) \ll \Gamma_{вязк}$ при $\lambda_{зв} \ll \lambda_{эм}$ и $\Gamma_{дж}(\omega) \sim \Gamma_{вязк}$ при $\lambda_{зв} \gg \lambda_{эм}$, то полный коэффициент затухания зависит приблизительно линейно от частоты в обоих предельных случаях. Коэффициент при частоте меняется при $\lambda_{зв} \approx \lambda_{эм}$, т. е. при $\omega \approx \omega_0 (s^3/c^2 v_F)^{1/2}$. Переход в зависимости $\Gamma(\omega)$ от одного наклона к другому (меньшему) должен сопровождаться усилением дисперсии скорости звука. Действительно, при $\omega \approx \omega_0 (s^3/v_F c^2)^{1/2}$ изменение скорости звука $\Delta s/s$ достигает величины $\Gamma(\omega)/\omega$ [2].

При очень больших частотах ($\omega\tau \gg 1$) для вычисления коэффициента затухания можно использовать теорию возмущений, рассматривая $\delta\epsilon$ (II.3) как причину переходов в системе равновесных электронов. Таким способом легко получить [3]*):

$$\Gamma(\omega) \sim \omega \int |\Lambda|^2 (n_F - n'_F) \delta(\epsilon + \hbar\omega - \epsilon') d\tau_p, \quad (\text{II. 7})$$

где $\epsilon' \equiv \epsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})$, а $n'_F = n_F(\epsilon')$. Так как, согласно закону сохранения энергии, $\epsilon' = \epsilon + \hbar\omega$, а $\hbar\omega$ заведомо значительно меньше ϵ_F (даже для дебаевских фононов, поскольку $\Theta \ll \epsilon_F$), то

$$\Gamma(\omega) \sim -\omega^2 \int |\Lambda|^2 \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \delta(\epsilon + \hbar\omega - \epsilon') d\tau_p. \quad (\text{II. 8})$$

Аргумент δ -функции при $\hbar k \ll p_F$ записывается в виде $\hbar k v - \omega = \hbar k v (\cos \theta - s/v)$. Производя интегрирование с учетом двух δ -функций ($-\partial n_F/\partial \epsilon = \delta(\epsilon - \epsilon_F)$), приходим к формуле (II.5), которая тем самым оказывается справедливой в очень широкой области частот [3].

Ограничение подобного рассмотрения со стороны больших частот связано с выбором вида взаимодействия между электро-

*) Мы опустили множители, не содержащие частоту. Частота перед интегралом появляется из-за того, что коэффициент поглощения при подобном рассмотрении пропорционален поглощенной при переходе энергии, а $\epsilon' - \epsilon = \hbar\omega$.

нами и решеткой. Как видно из самой формулы, принятое выражение (II.3) должно быть справедливо, пока $ka \ll 1$ (a — постоянная решетки). Таким образом, формула (II.5), которая хорошо подтверждается экспериментом (линейный закон в зависимости коэффициента затухания от частоты наблюдался на различных металлах при низких температурах *)), дает возможность оценить время жизни дебаевских фононов ($\hbar\omega \sim T \ll \Theta$), а эксперименты по поглощению высокочастотного звука ($kl \gg 1$) дают возможность непосредственно измерить константу взаимодействия электронов с длинноволновыми фононами.

Если отказаться от условия $ak \ll 1$, заведомо выполненного для возбуждаемого внешним источником звука, то структура коэффициента поглощения фонона будет очень похожа на формулу (II.7):

$$\Gamma(k) = \int |M|^2 (n_F - n'_F) \delta(\varepsilon + \hbar\omega - \varepsilon') d\tau_p. \quad (\text{II. 9})$$

Все множители (типа $2\pi/\hbar$ и т. п.) внесены в квадрат матричного элемента $|M|^2$, зависимость которого от импульсов электронов и фононов не может быть получена в общем случае. При малых импульсах фонона применим макроскопический подход и, согласно (II.3), $|M|^2 \sim k^2/\omega(\mathbf{k})$.

Выражение (II.9) позволяет установить наличие особенностей $\Gamma(\mathbf{k})$ при значениях \mathbf{k} , равных диаметру ферми-поверхности [9].

Действительно, так как $\hbar\omega(\mathbf{k}) \ll \varepsilon_F$ при всех \mathbf{k} , то из (II.9) имеем:

$$\Gamma(\mathbf{k}) \approx \hbar\omega(\mathbf{k}) \int |M|^2 \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F) \delta(\varepsilon_{p+\hbar\mathbf{k}} - \varepsilon_F) d\tau_p \quad (\text{II. 10})$$

и, следовательно, коэффициент поглощения отличен от нуля только в том случае, когда ферми-поверхность $\varepsilon_p = \varepsilon_F$ и ее сдвинутый на $-\mathbf{k}$ аналог пересекаются. В общем случае геометрическое место особых точек $\Gamma(\mathbf{k})$ находится как совокупность тех значений вектора \mathbf{k} , при которых поверхности $\varepsilon_p = \varepsilon_F$ и $\varepsilon_{p+\hbar\mathbf{k}} = \varepsilon_F$ касаются [10]. Характер касания определяет тип особенности [11, 12]. При обычном точечном касании коэффициент поглощения скачком обращается в нуль [9]. При более «плотном» касании (по линии, либо с уплощением) $\Gamma(\mathbf{k})$ обращается в бесконечность. (Более точное рассмотрение без разложения $n_F = n_F(\varepsilon + \hbar\omega)$ по степеням $\hbar\omega$ несколько сглаживает особенности, в частности $\Gamma(\mathbf{q})$ не обращается в бесконечность, а имеет острый максимум [12].) Причиной существования особенностей коэффициента поглощения фононов, как явствует из вывода, является

*) Низкие температуры нужны, чтобы выполнялось условие $kl \gg 1$.

неоднородное заполнение электронами p -пространства. Температура, как и различные механизмы рассеяния электронов, приводит к сглаживанию особенностей. При $T \gg \hbar/\tau$ главную роль играет температура, а в обратном предельном случае — рассеяние ($\hbar/\tau \approx 1^\circ\text{K}$ при $l \approx 10^{-3}\text{ см}$).

Неоднородное распределение импульсов в p -пространстве приводит к особенностям не только в коэффициенте поглощения, но и в законе дисперсии фононов $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Это можно установить непосредственно [9, 11], а можно воспользоваться соотношениями, связывающими энергию фонона $\hbar\omega(\mathbf{k})$ с коэффициентом затухания $\Gamma(\mathbf{k})$ (эти соотношения похожи на известные соотношения Крамерса — Кронига; см., например, работу [13]). Особенности $\omega(\mathbf{k})$ (они получили название мигдал-коновских) расположены при тех же значениях импульса фонона $\hbar\omega$, что и особенности коэффициента затухания $\Gamma(\mathbf{k})$, и могут быть классифицированы по характеру касания поверхностей $\varepsilon_p = \varepsilon_F$ и $\varepsilon_{p+\hbar\mathbf{k}} = \varepsilon_F$ [12]. При обычном касании групповая скорость фононов $\partial\omega(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k}$ обладает логарифмической особенностью [9]. При более плотном касании особенность обостряется.

Из сказанного ясно, что геометрическое место особенностей $\omega(\mathbf{k})$ и $\Gamma(\mathbf{k})$ является своеобразным изображением ферми-поверхности металла, однако надо иметь в виду, что особенности должны наблюдаться при всех значениях импульсов фононов, равных значениям опорных диаметров (как внутренних, так и внешних) поверхности Ферми. При периодичности поверхности Ферми это обстоятельство очень усложняет картину. Экспериментально, по-видимому, пока удастся наблюдать только случаи особо плотного касания (по линии либо по участку плоскости).

До сих пор мы не рассматривали влияния постоянного магнитного поля на распространение и поглощение звука металлами. Хотя наиболее интересные результаты, в смысле использования электроакустических эффектов для расшифровки электронного энергетического спектра металлов, связаны с исследованиями в сильном магнитном поле, мы остановимся на этом вопросе очень бегло; подробное изложение явно выходит за рамки этого приложения.

Прежде всего включение магнитного поля заставляет снова обсудить границу, отделяющую низкочастотный звук от высокочастотного, так как кроме времени релаксации τ и длины свободного пробега l появляются новые характерные величины ω_H и r_H . Однако поскольку наиболее интересен случай большого поля:

$$r_H \ll l, \quad \omega_H \gg \tau^{-1}, \quad (\text{II. 11})$$

то сформулированное выше условие $kl \ll 1$ автоматически приводит к выполнению двойных неравенств:

$$kr_H \ll kl \ll 1 \quad \text{и} \quad \omega \ll \omega_H \ll \tau^{-1}. \quad (\text{II. 12})$$

В случае распространения низкочастотного звука роль магнитного поля сводится к изменению тех макроскопических («гидродинамических») величин, которые определяют коэффициент затухания и дисперсию (теплопроводность, электропроводность и т. п.). Не следует думать, что эти изменения незначительны. Как ясно из результатов § 25, например, теплопроводность металла в сильном магнитном поле может измениться во много раз ($\kappa_H \sim \kappa_0 (r_H/l)^2$), что приведет к соответствующему увеличению времени релаксации звуковой энергии.

При низких температурах, когда квантование энергии электронов в магнитном поле существенно ($\hbar\omega_H \gtrsim T$), проявляются квантовые осцилляции, природа которых та же, что у осцилляций магнитного момента (§ 15) или сопротивления (§ 31): коэффициент поглощения и скорость звука периодически зависят от обратного магнитного поля.

Наибольший интерес представляет, конечно, высокочастотный случай. Все особенности динамики электрона со сложным законом дисперсии в магнитном поле проявятся при его взаимодействии со звуковой волной. Так как звуковая волна создает в металле «квазистатическое» поле с длиной волны $\lambda_{зв}$, то возникает ситуация, характерная для размерного эффекта. Как мы уже говорили, главную роль в поглощении звуковой энергии играют фермиевские электроны, скорость которых перпендикулярна волновому вектору. Если, однако, электроны движутся в постоянном магнитном поле, то их скорость все время меняет свое направление. Пусть магнитное поле перпендикулярно волновому вектору звуковой волны. Тогда эффективность взаимодействия электронов со звуковой волной будет существенно зависеть от соотношения между размером экстремального диаметра орбиты $(\Delta p_x^F)_{\text{extr}}$ и длиной звуковой волны $\lambda_{зв}$ (ось z , как всегда, направлена по магнитному полю, ось y — по волновому вектору).

Если

$$\frac{c}{eH} (\Delta p_x^F)_{\text{extr}} = (n + 1/2) \lambda_{зв} \quad \text{для поперечного звука,} \quad (\text{II. 13})$$

$$\frac{c}{eH} (\Delta p_x^F)_{\text{extr}} = n \lambda_{зв} \quad \text{для продольного звука}$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots),$$

то взаимодействие электронов со звуковой волной усиливается. Если же условия (II.13) не выполнены, то такого усиления

взаимодействия нет вовсе. Так как эффективно взаимодействуют электроны со звуком только малую долю своего периода, когда скорость их приблизительно перпендикулярна волновому вектору, то выполнение условий (II.13) приводит не к резонансным пикам, а к периодической зависимости коэффициента затухания. Период в обратных полях при этом равен [14, 15]

$$\Delta \frac{1}{H} = \frac{e\lambda_{зв}}{c (\Delta p^F)_{extr}}. \quad (\text{II. 14})$$

Описанное здесь явление получило название геометрического, или пиппардовского, резонанса и служит удобным методом определения экстремальных диаметров поверхности Ферми. Обратим внимание, что находится диаметр, перпендикулярный волновому вектору. Это проявление описанного в § 4 соответствия между траекториями в координатном и импульсном пространствах (траектории подобны с точностью до поворота на $\pi/2$ и переводного множителя c/eH). Особенно ярко это соответствие проявляется в случае открытой поверхности Ферми. Пусть \mathbf{k} ($k_y = k$) и \mathbf{H} ($H_z = H$) по-прежнему перпендикулярны друг другу и ориентированы так, что направление открытости можно совместить с осью p_x . Тогда в импульсном пространстве электроны в основном движутся вдоль оси p_x , а в координатном — вдоль оси y . Если период открытой поверхности Ферми равен Δp_x^F (он, как правило, совпадает с соответствующим размером обратной решетки и не зависит от p_x), то особо «выгодная» ситуация будет в том случае, когда период траектории в координатном пространстве равен длине звуковой волны или ей кратен [16]:

$$\frac{c (\Delta p_x^F)}{eH} = n\lambda_{зв}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{II. 15})$$

Последнее условие приводит к прежней формуле (II.14) для периода, однако интенсивность взаимодействия в данном случае значительно больше. Не будь диссипативных процессов, коэффициент поглощения обратился бы в бесконечность [16]. Учет диссипативных процессов делает коэффициент затухания конечным ($\Gamma \sim \tau$). Этот своеобразный размерный эффект естественно назвать «гигантским геометрическим резонансом».

Как и следовало ожидать, и в магнитном поле при взаимодействии электронов со звуком главную роль играет пространственная периодичность звуковой волны, а не временная. Однако если

$$\omega - k\bar{v} = \frac{1}{n} \omega_H, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{II. 16})$$

то может наблюдаться акустический циклотронный резонанс [17] (слагаемое $k\bar{v}$ описывает доплеровский сдвиг частоты). Акустический циклотронный резонанс, как всегда, требует довольно жестких условий для своего наблюдения ($\omega\tau \gg 1$ и др.).

Приведенное беглое описание взаимодействия электронов со звуком при $H \neq 0$, конечно, не исчерпывает всех особенностей электроакустических явлений в магнитном поле. В частности, мы пока не учитывали тех изменений в картине поглощения высокочастотного звука, которые приносит квантование энергии электронов в магнитном поле. Звук в этом случае будем также описывать квантовым образом. Другими словами, сформулируем условия поглощения фонона квантованным электронным газом. Законы сохранения энергии и z -й проекции импульса требуют выполнения равенства

$$e_n(p_z) + \hbar\omega = e_m(p_z + \hbar k_z). \quad (\text{II.17})$$

Так как учет квантования необходим только в сильных полях ($\hbar\omega_H > T$), то энергия фонона в рассматриваемых условиях всегда значительно меньше расстояния между электронными уровнями ($\hbar\omega \ll \Delta e = \hbar\omega_H$). Поэтому условию (II.17) можно удовлетворить только при $m = n$. Энергия электрона до и после поглощения фонона (ср. с формулой (II.10)) должна равняться энергии Ферми. Это вместе с законом сохранения приводит к двум уравнениям относительно одной величины p_z . При произвольном значении волнового вектора и магнитного поля уравнения вовсе не имеют решения. Однако при фиксированном значении волнового вектора существует дискретное множество значений магнитного поля, при которых уравнения имеют решения и поглощение фонона возможно [18], следовательно, должна наблюдаться весьма своеобразная зависимость коэффициента поглощения Γ от магнитного поля: резкое возрастание Γ при фиксированных значениях магнитного поля с глубокими провалами в промежутках. Чем ниже температура и больше время релаксации, тем отчетливее наблюдаются «гигантские осцилляции» *) коэффициента поглощения.

Как видно из уравнения (II.17), истинная причина гигантских осцилляций — существование в квантующем магнитном поле дискретных уровней энергии электрона при фиксированном значении p_z . Квантование энергии — следствие финитности движения электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Однако если поверхность Ферми открытая, то при определенных

*) Такое название получило описанное выше явление. Теория его [18] находится в хорошем согласии с экспериментом.

направлениях магнитного поля движение электрона в плоскости x, y инфинитно, чему соответствует своеобразная зонная структура (при $p_z = \text{const}$): между широкими полосами разрешенных значений энергий $\delta\varepsilon \sim \hbar\omega_H$ узкие запрещенные промежутки (§ 8). В этих условиях картина поглощения, как легко понять, обратна гигантским осцилляциям: коэффициент затухания Γ вблизи фиксированных значений магнитного поля резко уменьшается, а в промежутках слабо зависит от магнитного поля [19].

**ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФЕРМИ МЕТАЛЛОВ
(СПРАВОЧНАЯ ТАБЛИЦА)**

Поверхности Ферми большинства металлов исследованы достаточно подробно. В частности, известно, являются они замкнутыми или открытыми; определены топологические типы открытых поверхностей Ферми.

Приложение составлено с целью дать самые общие сведения о топологии поверхностей Ферми металлов.

Приложение состоит из трех частей: таблицы, рисунков основных типов открытых поверхностей Ферми, обнаруженных экспериментально, и библиографии. В таблице даны: а) сведения о топологическом типе поверхностей Ферми, о соотношении между числом электронов n_1 и дырок n_2 и б) ссылки на основные экспериментальные и теоретические работы, в которых исследовалась зонная структура металлов.

В связи с магнитным пробоем понятия «открытая» и «замкнутая» носят условный характер: в магнитном поле замкнутая поверхность Ферми может стать открытой и, наоборот, открытая — замкнутой. Поэтому в таблице указана приблизительно величина магнитного поля пробоя и отмечено, как меняется топология поверхности Ферми в результате пробоя.

В приложении нет ссылок на экспериментальные методы, которые либо сами являются объектом исследования, либо не дают дополнительных сведений по сравнению с более простыми. Нет также ссылок на методы, которые еще не имеют широкого распространения и с помощью которых получена пока что скромная информация.

Немногочисленные работы по аномальному скин-эффекту (АСЭ) и аннигиляции позитронов (АП) помещены в конце списка литературы, а соответствующие ссылки на них даны в таблице в разделе «Примечания».

Металлы в таблице расположены по алфавиту. В конце таблицы приведены данные о нескольких сравнительно подробно изученных интерметаллических соединениях.

Библиография к приложению не является всеобъемлющей, однако достаточно полно представляет основные работы по исследованию поверхностей Ферми металлов.

*) Составлено Ю. П. Гайдуковым.

Металл	Кристаллическая решетка	Топологический тип и другие сведения о поверхности Ферми	Метод исследования поверхности Ферми						Примечания
			Гальванометрические эффекты	Де Гааза-ван Альфена в Шубникова-де Гааза эффекты	Циклотронный резонанс	Магнетотокмический эффект	Радиочастотный эффект	Радиочастотная спектроскопия	
Алюминий	ГЦК	$n_1 \neq n_2$; $H < 30$ кэ, закрытая; $H > 30$ кэ, магнитный пробой	1-4	5-8 337	9-13	14-17 333	18	19-21, 324	314 (АСЭ)
Бериллий	ГПУ	$n_1 = n_2$; $H < 50$ кэ, закрытая; $H > 50$ кэ, магнитный пробой в базисной плоскости, открытая; плоская сетка гофрированных цилиндров по осям $\langle 1\bar{2}10 \rangle$ и $\langle 10\bar{1}0 \rangle$	23 330	23 339				31-26	318, 319 (АП); (рис. 1)
Ванадий	ОЦК	$n_1 \neq n_2$, открытая (?)	27, 28					29	В 27 найдено, что поверхность Ферми закрытая
Висмут	Ромбоэдр.	$n_1 = n_2$, закрытая	30	31-36, 340	37, 38	39-42	43, 44	45-47	415 (АСЭ)
Вольфрам	ОЦК	$n_1 = n_2$, закрытая	27, 48	49, 50	51, 52	341	53	23, 54	
Галлий	ГПУ	$n_1 = n_2$, открытая; гофрированный цилиндр вдоль оси c	58-60	61	62, 63	64	65	55-57	320 (АП)
Галлий	Объемно-центр. орторомб.	$n_1 = n_2$, открытая; гофрированный цилиндр вдоль оси c						66, 325	
Графит	ОЦК	Закрытая, самопересечение	72-74	67, 68 74	69, 70			71, 342	321 (АП) (рис. 2)
Железо	ОЦК	$n_1 = n_2$, открытая; пространственная сетка гофрированных цилиндров по осям $\langle 001 \rangle$						75-77	
Золото	ГЦК	$n_1 = 0$; открытая пространственная сетка гофрированных цилиндров по осям $\langle 111 \rangle$ (основное открытое направление) и осям $\langle 110 \rangle$ и $\langle 100 \rangle$ (вторичные открытые направления)	78, 79	80-82	83	84, 85		86, 326, 327, 343	(Рис. 3)

Индий Иттербий	Тетрагон. ГЦК	$n_1 = n_2$, закрытая Закрытая	4, 87—89 98	90—92, 344, 99, 343	93	94, 95	96	93, 97	По модели संबодных электронов поверхность Ферми должна быть открытой (Рис. 4)
Иттрий Кадмий	ГПУ ГПУ	Открытая (расчет) $n_1 = n_2$; открытая: гофрированный цилиндр вдоль оси [0001]	102, 103, 34*	104—106	107, 108	109—112 347	113—117	100, 101 118, 119	
Калий	ОЦК	$n_1 = 1$ электрон/атом, $n_2 = 0$; $H < 50$ кэ, закрытая, сфера; $H > 50$ кэ, магнитный пробой; открытая	120—122	123	124	125—128 348	129, 130 348	131—133, 328	
Кальций	ГЦК	Открытая (расчет), подобна на поверхности Ферми свинца		134				135, 329, 349	
Кобальт Литий Магний	ГЦК ОЦК ГПУ	$n_1 \neq n_2$; закрытая $n_1 = n_2$; $H > 5$ кэ, магнитный пробой в плоскости (0001), открытая; плоская сетка гофрированных цилиндров по осям $(\bar{1}\bar{2}10)$ и $(10\bar{1}0)$; $H > 70$ кэ, магнитный пробой, возникают открытые направления вдоль оси [0001]	120 136, 137	138—141	142	143—144		131, 132, 350 145—147	14 (АСЭ) (рис. 1)
Медь	ГЦК	$n_1 = 1$ электрон/атом, $n_2 = 0$; открытая; пространственная сетка гофрированных цилиндров вдоль осей (111), подобна поверхности Ферми золота	148—151	80, 82, 152—154	155, 156	85, 157, 158 338, 351	852	86, 150, 328, 327, 343, 353	314 (АСЭ) (рис. 3)
Молибден	ОЦК	$n_1 = n_2$; закрытая	47, 48, 160	49, 161	162	163, 164	165	166, 167	
Мышьяк	Ромбоэдр.	$n_1 = n_2$; закрытая	168, 330	169—171, 336	172, 354	173, 174		46, 175—177 131, 132, 328	
Натрий	ОЦК	$n_1 = 1$ электрон/атом, $n_2 = 0$; закрытая; сфера	120, 178	179	124				

Металл	Кристаллическая решетка	Топологический тип и другие сведения о поверхности Ферми	Метод исследования поверхности Ферми						Примечания
			Гальванометричные эффекты	Де Лаза-ван Альфена и Шубникова — Де Лаза эффект	Циклотронные резонансы	Магнетокристаллический эффект	Разностный размерный эффект	Расчет зонной структуры и сравнение с экспериментом	
Никель	ГЦК	$n_1 = n_2$; открытая, пространственная сетка гофрированных цилиндров вдоль осей $\langle 111 \rangle$, подобна поверхности Ферми золота	180	181—184				185, 186 355	(Рис. 3)
Ниобий	ОЦК	$n_1 \neq n_2$; магнитный пробой, открытая; сетка гофрированных цилиндров вдоль осей $\langle 001 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$	187—189	190 356			29, 187 357		(Рис. 5)
Олово	Тетрагон.	$n_1 = n_2$; открытая плоская сетка гофрированных цилиндров вдоль осей $\langle 010 \rangle$ и $\langle 110 \rangle$; $H > 50$ кэ, магнитный пробой	191—193	194—197	198—200	201	202, 203	196, 204, 205	317 (АСЭ) (рис. 6) (см. также рисунки в разделах 196 и 197)
Осьмий	ГПУ	$n_1 = n_2$; открытая; плоская сетка гофрированных цилиндров, параллельных плоскости $\langle 0001 \rangle$ и оси $\langle 0001 \rangle$, магнитный пробой	206	358					
Палладий	ГЦК	$n_1 = n_2$; открытая; пространственная сетка гофрированных цилиндров вдоль осей $\langle 001 \rangle$	207	208—210				211, 331	(Рис. 7)
Платина	ГЦК	$n_1 = n_2$ открытая; пространственная сетка гофрированных цилиндров вдоль осей $\langle 001 \rangle$; подобна поверхности Ферми палладия	136, 212	213—215 359		216		217 331, 360	(Рис. 7)
Рений	ГПУ	$n_1 = n_2$; $H < 30$ кэ, открытая; гофрированный цилиндр	218, 219	190, 220		221, 222		222, 223	(Рис. 8)

Родий Ртуть	ГЦК Ромбоэдр.	вдоль оси [0001]; $H > 30$ кэ, магнитный пробой, появляются дополнительные открытые направления вдоль осей [0001] и [1010] Закрытая (расчет) $n_1 = n_2$; открытая, открытые направления параллельны осям (100) и (011) $n_1 = 1$ электрон/атом, $n_2 = 0$; закрытая, сфера	226-228	224, 225 229	230, 361	362	224 231	322 (АП) (рис. 10)
Рубидий	ОЦК			123, 232			131-133, 328	
Рутений Свинец	ГПУ ГЦК		234, 235, 332	233, 363 236-238	239, 240	95, 241	242, 243	(Рис. 9)
Серебро	ГЦК		244, 245	80, 82, 246	247	85, 248	86, 87, 249, 250, 327, 333 343	(Рис. 3)
Скандий	Полиморфн. ГЦК, ГПУ		251				101, 252	Согласно рас- чету, поверхность Ферми должна быть открытой
Стронций Сурьма Таллий	Полиморфн. Ромбоэдр. ГПУ	Открытая (расчет) $n_1 = n_2$; закрытая $n \neq n_2$; открытая; две гофрированные плоскости (0001), соединенные узкими перемычками вдоль оси [0001]; $H > 30$ кэ, магнитный пробой $n_1 \neq n_2$; магнитный пробой, открытая; пространственная сетка гофрированных цилиндров, вдоль осей (001), подбора на поверхности Ферми ниобия	254 102, 268, 269, 270 364	255-260 271 365, 366	261	262-266; 272-274 368	253 46, 267 275	(Рис. 11)
Тантал	ОЦК		187	190, 276 277	278		29 357	(Рис. 5)

Продолжение

Металл	Кристаллическая решетка	Топологический тип и другие сведения о поверхности Ферми	Метод исследования поверхности Ферми						Примечания
			Гальванометрические эффекты	Альфа-ван-Шубникова - Альфена и де Гааза эффекты	Пиклоупонный резонанс	Магнетоструктурный эффект	Радиочастотный размерный эффект	Расчет зонной структуры и сравнение с экспериментом	
Титан	ГПУ	$n_1 = n_2$; закрытая	279					101 369	Согласно расчету поверхность Ферми должна быть открытой
Торий	Полиморфная	$n_1 = n_2$; $H > 60$ кэ, магнитный пробой, открытая	279, 283	280, 281				282	(Рис. 12)
Хром	ОЦК			284-286			287, 288	167, 289	
Цезий	ОЦК	$n_1 = 1$ электрон/атом, $n_2 = 0$; закрытая, сфера		123, 290, 291		370		131, 132, 291	
Цинк	ГПУ	$n_1 = n_2$; $H < 2,5$ кэ, открытая; гофрированный цилиндр вдоль оси [0001]; $H > 2,5$ кэ, магнитный пробой, проявляются открытые направления вдоль осей [1210] и [1101]	102, 292-294	31, 295-297	298-301	111, 112	302-304	118, 119, 305	(Рис. 13)
Ирикий AuSn AuAl ₂	ГПУ	Открытая (расчет)		306				307	323 (АП)
	Гексаг.	Открытая	308						(Рис. 3)
	ГЦК	Открытая, аналогична по топологии поверхности Ферми золота	309						
AgZn, CuZn PdIn	β-латунь	Открытые (расчет)		310				311 371	(Рис. 3)
AuGa ₂ AuIn ₂	ГЦК	Открытые, аналогичны по топологии поверхности Ферми золота	309, 334	312				335	(Рис. 3)
MgZn ₂	Гексаг.			313					

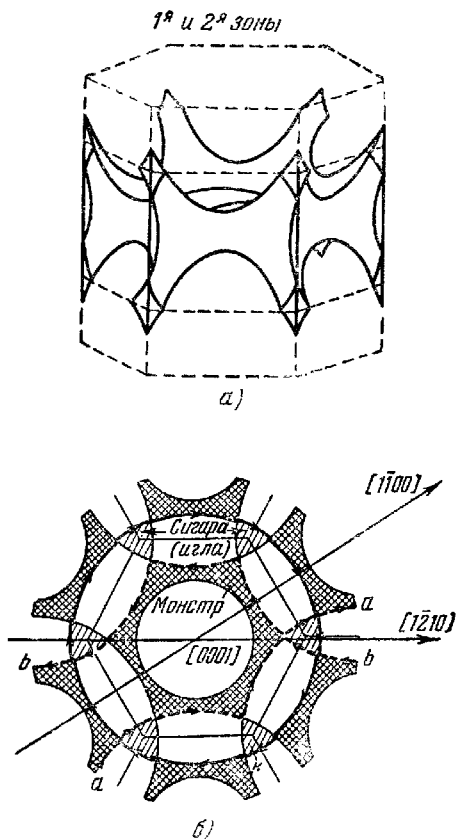


Рис. 1. а — Открытая поверхность Ферми («монстр») для бериллия и магния (без учета спин-орбитального взаимодействия электронов [118]); б — образование открытых направлений $[1\bar{1}00]$ и $[1\bar{2}10]$ вследствие магнитного пробоя между двумя частями поверхности Ферми — «монстром» и «сигарой» (иглой) для бериллия, магния, цинка.

Показано сечение плоскостью $[0001]$, aa и bb — открытые траектории вдоль $[1\bar{1}00]$ и $[1\bar{2}10]$.

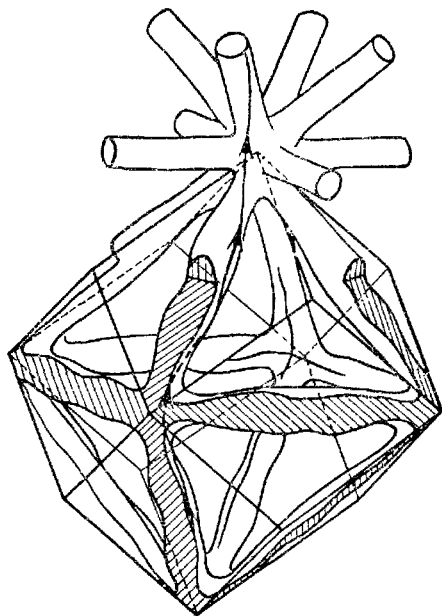


Рис. 2. Один из вариантов открытой поверхности Ферми железа⁷⁵.
Кривая со стрелками — открытая траектория вдоль оси [001].

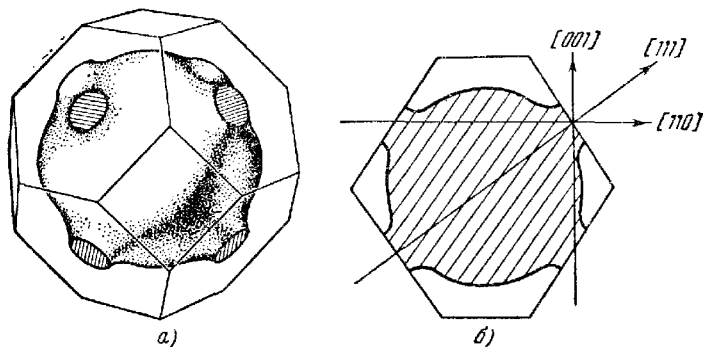


Рис. 3. а — Открытая поверхность Ферми золота, меди и серебра³¹⁶; б — сечение плоскостью [110]. Видно существование открытых направлений [111], [110] и [001]^[244].

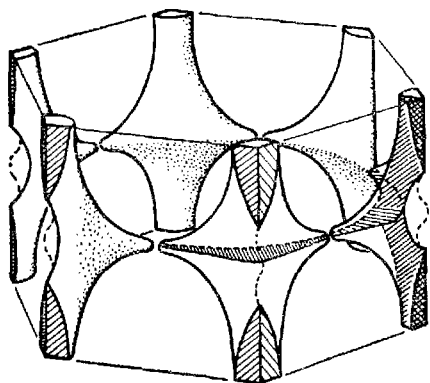


Рис. 4. Открытая поверхность кадмия. В базисной плоскости имеются разрывы. Вследствие этого не образуются открытые направления вдоль осей $\langle 1210 \rangle$ и $\langle 1\bar{1}00 \rangle$ (см. рис. 1, б) [107].

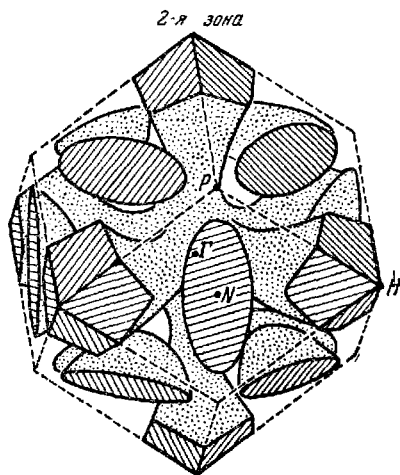


Рис. 5. Открытая поверхность Ферми для V В группы металлов (V, Nb, Ta) согласно расчетам [187].

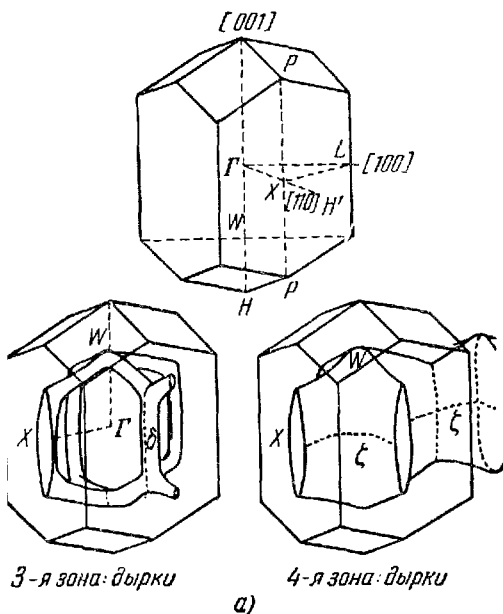
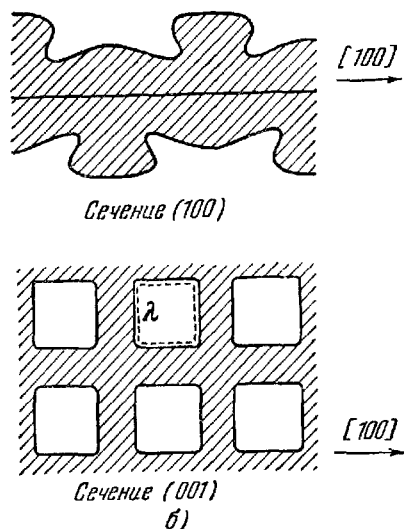


Рис. 6. Открытые поверхности Ферми для олова согласно расчетам (их существование подтверждено в работах [191, 191, 196; 198, 202, 203]); а — дырочные открытые поверхности в 3-й и 4-й зонах [194] (по поводу этих поверхностей см. также рисунки в работах [196, 197]); б — сечения открытой электронной поверхности в пятой зоне [205].



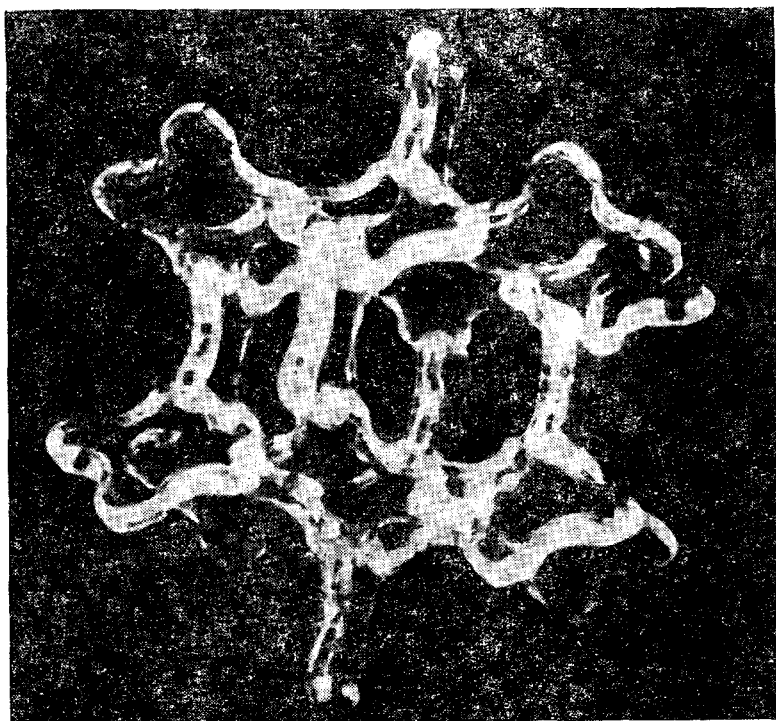


Рис. 7. Модель открытой поверхности Ферми палладия и платины [212].

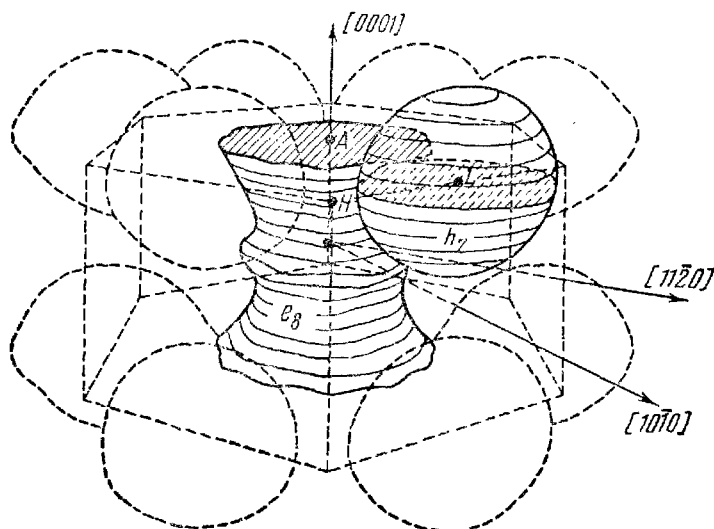


Рис. 8. Поверхность Ферми рения согласно расчетам [222]. e_8 — открытая в направлении $[0001]$ электронная поверхность (зона 8); h_7 — замкнутая дырочная поверхность (зона 7). Магнитный пробой между e_8 и h_7 приводит к образованию открытых направлений вдоль осей $(\bar{1}100)$.

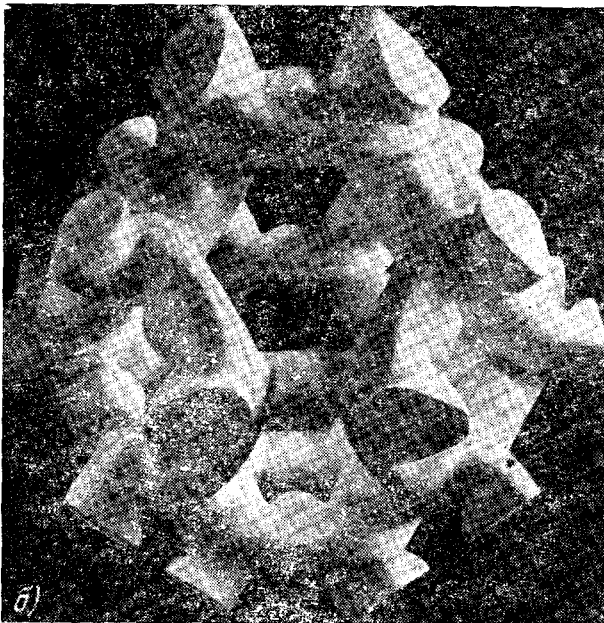
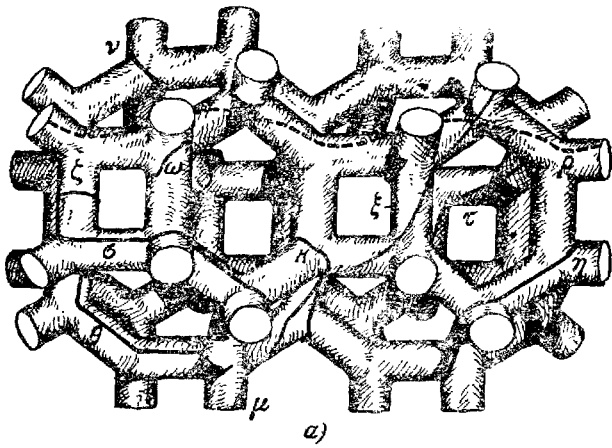


Рис. 9. Открытая электронная поверхность Ферми свинца (третья зона);
 а — линии μ и ρ — открытые траектории [236, 237]; б — та же поверхность в одной ячейке
 обратной решетки, выполненная с соблюдением масштаба всех размеров, полученных
 экспериментально (М. С. Хайкин, Р. Т. Мина).

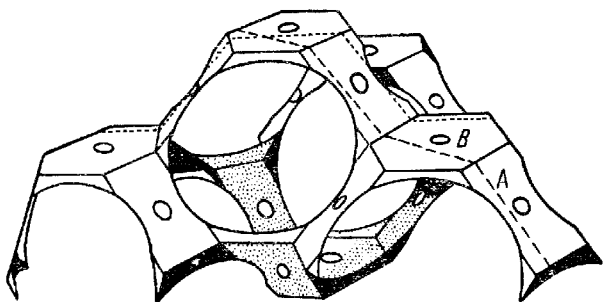


Рис. 10. Открытая дырочная поверхность Ферми ртути в первой зоне согласно расчетам [231].
Линии, обозначенные штрихами и пунктиром, — открытые траектории (см. также рисунки в [230]).

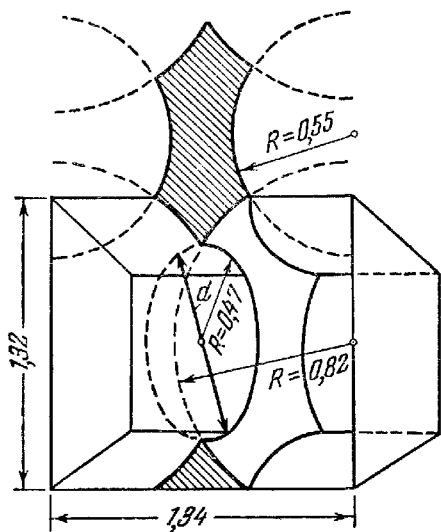


Рис. 11. Сечение плоскостью $(10\bar{1}0)$ открытой дырочной поверхности Ферми ртути по модели Харрисона [118, 102]. Согласно измерению диаметр d значительно меньше расчетного: $d_{\text{эксп}} = 0,1$ (все значения размеров даны в единицах

$$b = 1,16 \frac{2\pi}{a}, \quad a = 3,45 \text{ \AA}.$$

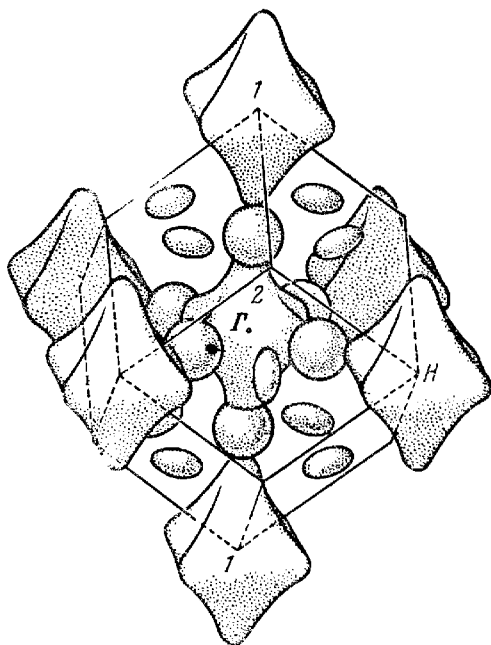


Рис. 12. Поверхность Ферми металлов типа хрома [29].

Открытые направления возникают вдоль осей (001) вследствие магнитного пробоя между закрытыми поверхностями 1 и 2.

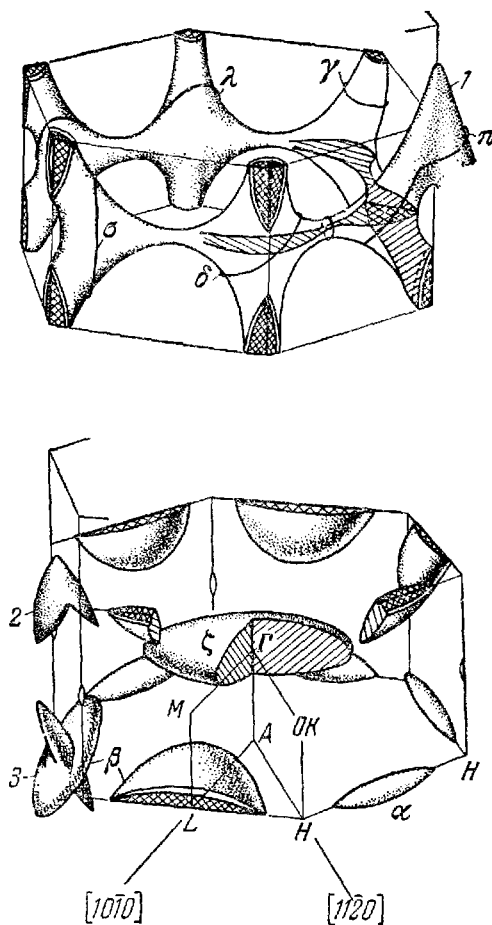


Рис. 13. Схематическое изображение полностью определенной поверхности Ферми цинка [118, 297].

1 — открытая дырочная поверхность (вторая зона); в отличие от Cd в базисной плоскости у поверхности нет разрывов, поэтому магнитный пробой приводит к образованию открытых направлений вдоль осей $[1\bar{2}10]$ и $[1\bar{1}00]$ (см. рис. 1, б); 2 — замкнутые части поверхности, расположенные в различных зонах с учетом магнитного пробоя между поверхностями α и β («сигара» и «бабочка»); 3 — то же без учета магнитного пробоя между «сигарой» и «бабочкой».

ЛИТЕРАТУРА

К части I

1. Дж. Займан, Принципы теории твердого тела, изд-во «Мир», 1966.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
3. А. Б. Мигдал, В. М. Галицкий, ЖЭТФ 34, 139 (1958).
4. У. Харрисон, Псевдопотенциал в теории металлов, изд-во «Мир», 1968.
5. Г. Е. Зильберман, Я. Е. Айзенберг, ФММ 4, 216 (1957).
6. F. G. Mollieg, Phil. Mag. 3, 207 (1958).
7. Г. Джонс, Теория зон Бриллюэна и электронные состояния в кристаллах, изд-во «Мир», 1968.
8. Э. И. Рашба, В. И. Шека, ФТТ 1, 162 (1959).
9. А. М. Ермолаев, ФТТ 8, 560 (1966).
10. L. Van Hove, Phys. Rev. 89, 1189 (1953).
11. А. А. Слуцкий, Письма ЖЭТФ 5, 90 (1967).
12. А. А. Слуцкий, ЖЭТФ 45, 978 (1963).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд-во «Наука», 1967.
14. В. М. Набутовский, А. А. Слуцкий, ФММ 12, 170 (1961).
15. И. М. Лифшиц, А. А. Слуцкий, В. М. Набутовский, ЖЭТФ 41, 939 (1961).
16. И. М. Лифшиц, А. А. Слуцкий, В. М. Набутовский, ДАН СССР 137, 553 (1961).
17. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, В. Б. Фикс, ФТТ 6, 2723 (1964).
18. Л. А. Фальковский, ЖЭТФ 49, 609 (1965).
19. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ 32, 296 (1957).
20. М. Я. Азбель, ЖЭТФ 39, 1276 (1960); 46, 929 (1964); ДАН СССР 159, 703 (1964).
21. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ 32, 296 (1957); 33, 387 (1957); 34, 515 (1958).
22. См., например, Ю. А. Богод, В. В. Еременко, Доклад на XV совещании по физике низких температур.
23. Э. И. Рашба, ЖЭТФ 48, 1427 (1965); З. С. Грибников, В. А. Когелад, Э. И. Рашба, ЖЭТФ 51, 266 (1966).
24. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН 69, 419 (1959).
25. И. М. Лифшиц, ДАН СССР 48, 83 (1945); ЖЭТФ 17, 1017 (1947).
26. А. А. Слуцкий, ЖЭТФ 53, 767 (1967).
27. E. J. Blount, Phys. Rev. 126, 1636 (1962).
28. R. W. Stark, L. M. Falicov, Progress in low Temperature Physics, v. 5, p. 235, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1967.

К части II

1. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, 1962.
2. См., например, Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956.

3. У. Харрисон, Псевдопотенциал в теории металлов, изд-во «Мир», 1968.
4. F. G. Moliner, *Phil. Mag.* **3**, 207 (1958).
5. Г. Е. Зильберман, Я. Е. Айзенберг, *ФММ* **4**, 216 (1957).
6. Ю. П. Гайдуков, Приложение III к настоящему изданию.
7. А. Абрикосов, Л. А. Фальковский, *ЖЭТФ* **43**, 1089 (1962).
- 7а. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956, гл. 5, § 3, 4.
- 7б. Л. А. Фальковский, *УФН* **94**, 3 (1968).
8. Р. Г. Архипов, *ЖЭТФ* **43**, 349 (1962).
9. T. W. Mc Clure, *Phys. Rev.* **108**, 612 (1957); Ph. Nozieres, *Phys. Rev.* **109**, 1510 (1958).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика и термодинамика, изд-во «Наука», 1964.
11. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1058 (1956).
12. С. С. Недорезов, *ЖЭТФ* **51**, 868, 1575 (1966).
13. E. W. Fiscock, *Proc. Roy. Soc. A* **222**, 239 (1954); Г. Е. Зильберман, Ф. И. Ицкович, *ЖЭТФ* **32**, 158 (1957).
14. И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **38**, 1569 (1960).
15. Н. Б. Брандт, Л. Г. Любутина, *ЖЭТФ* **52**, 686 (1967).
16. В. Г. Барьяхтар, Б. Г. Лазарев, В. И. Макаров, *ФММ* **24**, 829 (1967).
17. См., например, Ф. Блох, Молекулярная теория магнетизма, Госнаучтехиздат Украины, 1964.
18. E. N. Adams, *Phys. Rev.* **89**, 633 (1953); М. В. Ницович, *ФММ* **7**, 641 (1959).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
20. См., например, Р. Пайерлс, Электронная теория металлов, ИЛ, 1947.
21. M. H. Cohen, E. I. Blount, *Phil. Mag.* **5**, 115 (1960); *Phys. Rev.* **121**, 387 (1961); И. Б. Брандт, Т. Долгополенко, Н. Ступоченко, *ЖЭТФ* **45**, 1319 (1963); Л. А. Фальковский, *ЖЭТФ* **49**, 609 (1965).
22. Б. И. Веркин, И. Свечкарев, *ЖЭТФ* **47**, 404 (1964); **54**, 74 (1968).
23. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951, стр. 70.
24. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **29**, 730 (1955).
25. Ю. А. Бычков, *ЖЭТФ* **39**, 1401 (1960).
26. R. V. Dingle, *Proc. Roy. Soc. A* **211**, 517 (1952).
27. М. Я. Азбель, *ЖЭТФ* **39**, 878 (1960).
28. R. W. Stark, L. M. Falicov, *Progress in Low Temperature Physics*, v. 5, p. 235, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1967.
29. M. G. Priestley, *Proc. Roy. Soc. A* **276**, 258 (1963).
- 29а. А. П. Кочин, *ЖЭТФ* **54**, 603 (1968).
30. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **32**, 59 (1957).
31. Ю. А. Бычков, Л. П. Горьков, *ЖЭТФ* **41**, 1592 (1962).
32. С. С. Недорезов, *ЖЭТФ* **51**, 1575 (1966).
33. И. О. Кулик, Письма *ЖЭТФ* **6**, 652 (1967).
34. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, *ДАН СССР* **91**, 795 (1953).
35. М. Я. Азбель, *ЖЭТФ* **34**, 754 (1958).
36. И. М. Лифшиц, А. В. Погорелов, *ДАН СССР* **96**, 1143 (1954).
37. A. V. Gold, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* **A251**, 85 (1958); A. V. Gold, M. G. Priestley, *Phil. Mag.* **5**, 1089 (1960); M. Gunnepersen, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **249**, 299 (1957).
38. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, *Изв. АН СССР (сер. физ.)* **19**, 395 (1955).
39. D. Shoenberg, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* **A255**, 85 (1962); D. Shoenberg, J. J. Vallentin, *ET--10* **3**, 67 (1967).

40. A. V. Piprard, Proc. Roy. Soc. (London) **A272**, 192 (1963).
41. М. Я. Азбель, Е. Г. Скромная, ЖЭТФ **47**, 1958 (1964).
42. А. С. Давыдов, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **9**, 1294 (1939).
43. И. М. Цидольковский, В. И. Соколов, И. М. Аксельрод, ФММ **16**, 318 (1963).
44. С. G. Grenier, J. M. Reynolds, J. R. Sybert, Phys. Rev. **132**, 58 (1963); Е. П. Вольский, ЖЭТФ **46**, 2035 (1964); И. Е. Алексеевский, Т. И. Костина, ЖЭТФ **48**, 1209 (1965); Н. Б. Брандт, Л. Г. Любутина, ЖЭТФ **47**, 1711 (1964); G. E. Smith, G. A. Baraff, J. M. Rowell, Phys. Rev. **135A**, 1118 (1964).
45. М. Я. Азбель, Н. Б. Брандт, ЖЭТФ **48**, 1206 (1965).
46. Н. Б. Брандт, Л. Г. Любутина, Н. А. Крючкова, ЖЭТФ **53**, 134 (1967); Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Г. Х. Табиева, Письма ЖЭТФ **4**, 27 (1966); Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Т. В. Горская, ЖЭТФ **53**, 1274 (1967).
- 46а. Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Ю. Г. Каширский, Л. В. Линько, ЖЭТФ **56**, 65 (1969).
- 46б. Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Р. Г. Валеев. Письма ЖЭТФ **6**, 724 (1967).
47. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1958, § 30.
48. J. H. Condon, Phys. Rev. **145**, 526 (1965).
49. И. А. Привороцкий, Письма ЖЭТФ **5**, 280 (1967); ЖЭТФ **53**, 1755 (1967).
- 49а. J. H. Condon, R. E. Wolstedt, Phys. Rev. Lett. **21**, 612 (1968).
- 49б. И. А. Привороцкий, УФН **97**, 547 (1969).
50. М. Я. Азбель, Письма ЖЭТФ **5**, 282 (1967); ЖЭТФ **53**, 1751 (1967).
51. J. J. Quinn, Phys. Chem. Solids **24**, 933 (1963).
52. М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **49**, 571 (1965).
53. А. М. Косевич, ЖЭТФ **35**, 738 (1958).
54. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **53**, 2131 (1967).
55. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, ЖЭТФ **29**, 730 (1955); **33**, 88 (1957); J. Phys. Chem. Solids **4**, 11 (1958).
56. И. А. Привороцкий, М. Я. Азбель, ЖЭТФ **56**, 388 (1969).
57. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **46**, 929 (1964); ДАН СССР **159**, 703 (1964).
58. Ф. И. Ицкович, ЖЭТФ **50**, 1425 (1966).
59. Ф. И. Ицкович, ЖЭТФ **51**, 301 (1966).
60. Ф. И. Ицкович, ЖЭТФ **52**, 1720 (1967).
61. Ф. И. Ицкович, ЖЭТФ **53**, 705 (1967).
62. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, К. Д. Синельников, ЖЭТФ **32**, 605 (1957).
63. И. О. Кулик, Г. А. Гогадзе, ЖЭТФ **44**, 530 (1963).
64. A. R. Salawa, R. H. Rediker, V. Lax, A. L. McWhorter, Phys. Rev. Lett. **5**, 55 (1960).
65. В. Г. Барьяхтар, В. И. Макаров, ДАН СССР **149**, 64 (1962).

К части III

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1958.
2. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.
3. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
4. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956); **32**, 59 (1957).
5. В. П. Силин, ЖЭТФ **33**, 495 (1957).
6. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **35**, 97 (1958).
7. Дж. Займан, Электроны и фононы, ИЛ, 1962.
8. Е. Г. Бровман, Ю. Каган, ЖЭТФ **52**, 557 (1967).

9. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, Л. В. Танатаров, ЖЭТФ 31, 232 (1956).
10. Е. С. Боровик, ДАН СССР 91, 771 (1953); В. Л. Гинзбург, В. П. Шабанский, ДАН СССР 100, 445 (1955); М. И. Каганов, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 33, 1261 (1957).
11. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956.
12. Р. Н. Гуржи, ЖЭТФ 47, 1415 (1964).
13. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 7, 379 (1937).
14. И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 35, 992 (1958).
15. Ю. Каган, А. П. Жернов, ЖЭТФ 53, 1744 (1967).
16. Ю. Каган, А. П. Жернов, ЖЭТФ 50, 1107 (1966).
17. Z. Kondo, Progr. Theor. Phys. 32, 37 (1964); А. А. Абрикосов, УФН 97, 403 (1969).
- 17а. А. А. Абрикосов, Physics 2, 21 (1965); С. В. Малеев, ЖЭТФ 53, 1038 (1967); В. Л. Гинзбург, С. В. Малеев, ЖЭТФ 55, 1483 (1968).
- 17б. М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ 27, 762 (1954); K. Fuchs, Proc. Camb. Phil. Soc. 34, 100 (1938); R. V. Dingle, Proc. Roy. Soc. A201, 545 (1950); Б. Н. Александров, М. И. Каганов, ЖЭТФ 41, 1333 (1961).
- 17в. Р. Н. Гуржи, УФН 94, 689 (1968).
18. В. Л. Гинзбург, в сб. «Памяти А. А. Андропова», Изд-во АН СССР, 1955, стр. 622.
19. С. Х. Гроот, П. Мазур, Термодинамика неравновесных процессов, изд-во «Мир», 1964.
20. M. Koler, Ann. d. Phys. 32, 211 (1938).
21. См., например, J. Z. Olsen, B. Luti, Helv. Phys. Acta 31, 713 (1958).
22. M. C. Jones, E. H. Sondheimer, Phys. Lett. 11, 112 (1964).
23. Е. С. Боровик, В. Г. Волоцкая, Н. Я. Фогель, ЖЭТФ 45, 46 (1963).
24. С. В. Вонсовский, Я. С. Шур, Ферромагнетизм, ОГИЗ, 1948 (см., кроме того, М. И. Каганов, в сб. «Магнитная структура ферромагнетиков», Изд-во АН СССР, 1960, стр. 79).
25. М. И. Каганов, В. Г. Песчанский, в сб. «Исследование энергетического спектра электронов в металлах», изд-во «Наукова думка», Киев, 1965, стр. 4.
26. Л. С. Дубинская, Диссертация. Ленинград, ИПАН, 1969.
27. М. Я. Азбель, ЖЭТФ 44, 983 (1963); М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 49, 572 (1965).
28. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ 31, 63 (1956).
29. R. V. Coleman, A. I. Funes, J. S. Plaskett, C. M. Tarr, Phys. Rev. 133A, 521 (1964).
30. W. G. Chambers, Proc. Phys. Soc. 81, 877 (1963).
31. Е. С. Боровик, ЖЭТФ 30, 262 (1956).
32. В. Г. Волоцкая, ЖЭТФ 45, 49 (1963); С. С. Grimexs, A. F. Kip, Phys. Rev. 132A, 1991 (1963); A. C. Thorsen, T. G. Berlincourt, Phys. Rev. A270, 417 (1962); K. Okumura, J. M. Templeton, Phil. Mag. 7, 1239 (1962); D. Shoenberg, P. J. Stiles, Proc. Roy. Soc. A281, 62 (1964).
33. P. V. Alers, R. T. Webber, Phys. Rev. 91, 1060 (1953); G. N. Rao, N. H. Lebonni, C. G. Grenier, J. M. Reynolds, Phys. Rev. 133A, 141 (1964).
34. Ф. Г. Басс, М. И. Каганов, В. В. Слезов, ФММ 5, 407 (1957).
35. Е. С. Боровик, ЖЭТФ 23, 91 (1952).

36. L. Esaki, Phys. Rev. Lett. 8, 4 (1962).
37. С. Г. Калашников, ФТТ 6, 2435 (1964).
38. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 35, 1251 (1958).
39. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 38, 188 (1960).
40. В. Г. Песчанский, Диссертация, Харьковский гос. университет, 1959.
41. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 39, 1201 (1960).
42. Е. С. Боровик, ЖЭТФ 23, 83, 91 (1952).
43. Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 37, 1281 (1959).
44. У. Харрисон, Псевдопотенциал в теории металлов, изд-во «Мир», 1968.
45. М. И. Каганов, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 35, 1052 (1958).
46. Н. Е. Алексеевский, Н. Б. Брандт, Т. И. Костина. ДАН СССР 105, 46 (1955).
47. М. И. Каганов, А. М. Кадигробов, А. А. Слуцкии, ЖЭТФ 53, 1335 (1967).
48. Е. С. Боровик, В. Г. Волоцкая, ЖЭТФ 43, 1554 (1965).
49. М. Я. Азбель, ЖЭТФ 44, 983 (1963).
50. Г. А. Зайцев, ЖЭТФ 45, 1267 (1963); Г. А. Зайцев, С. В. Степанова, В. И. Хоткевич, ЖЭТФ 48, 760 (1965).
51. М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 49, 572 (1965).
52. М. И. Каганов, А. М. Кадигробов, И. М. Лифшиц, А. А. Слуцкии, Письма ЖЭТФ 5, 269 (1967).
53. L. M. Falicov, P. R. Sievert, Phys. Rev. 138A, 88 (1965).
54. В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 52, 1312 (1967).
55. E. H. Sondheimer, Phys. Rev. 80, 401 (1950).
56. E. N. Adams, T. D. Holstein, J. Phys. Chem. Solids 10, 254 (1959)
57. М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 52, 1003 (1967).
58. В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 54, 137 (1969).
59. В. Г. Песчанский, М. Я. Азбель, ЖЭТФ 52, 1003 (1967); 55, 1980 (1968).
60. Г. А. Зайцев, С. В. Степанова, В. И. Хоткевич, Тезисы, Москва, 1966.
61. Г. А. Зайцев, С. В. Степанова, В. И. Хоткевич, Труды международного совещания, Цюрих, 1968.
62. Ю. А. Богод, В. В. Еременко, Л. Н. Губовой, Phys. Stat. Solids 28, 155 (1968); Ю. А. Богод, В. В. Еременко, Л. К. Чубова, ЖЭТФ 56, 32 (1969).
63. W. S. Boyle, F. S. L. Hsu, J. E. Kunzler, Phys. Rev. Lett. 4, 278 (1960); J. Lepage, M. Garber, F. J. Blatt, Phys. Lett. 11, 102 (1964).
64. М. Я. Азбель, М. И. Каганов, М. И. Лифшиц, ЖЭТФ 32, 1188 (1957).
65. Ю. А. Бычков, Л. Э. Гуревич, Г. М. Недлин, ЖЭТФ 37, 534 (1959).
66. Л. Э. Гуревич, Г. М. Недлин, ЖЭТФ 37, 765 (1959).
67. М. С. Бреслер, Р. В. Парфенов, С. С. Шалыт, ФТТ 8, 1776 (1966).
68. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 32, 1509 (1957).
69. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 56, 1391 (1969).
70. А. М. Косевич, В. В. Андреев, ЖЭТФ 38, 882 (1960); 43, 1061 (1962).
71. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1947; К. П. Гуров, ЖЭТФ 17, 614 (1947).
72. Titeica, Ann. Phys. 22, 129 (1935).
73. N. W. Aschcroft, Phil. Mag. 8, 2055 (1963); W. A. Harrison, Phys. Rev. 118, 1182 (1960).
74. Ю. Н. Образцов, ФТТ 6, 414 (1964); 7, 573 (1965).

К части IV

1. H. London, Proc. Roy. Soc. **A176**, 522 (1940).
2. A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. **A191**, 385 (1947).
3. G. E. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. **A195**, 336 (1949).
4. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **39**, 1138 (1960).
5. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **39**, 400 (1960).
6. Э. А. Канер, ЖЭТФ **34**, 658 (1958).
7. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ **32**, 896 (1957); Phys. Chem. Solids **3**, 113 (1958).
8. R. Chambers, Proc. Phys. Soc. (London) **A65**, 458 (1952).
9. М. И. Каганов, М. Я. Азбель, ДАН СССР **102**, 49 (1955).
10. A. B. Pippard, Trans. Roy. Soc. **A250**, 325 (1957).
11. М. С. Хайкин, ЖЭТФ **39**, 212 (1960).
12. Proc. 18-th Int. Conf. on Low Temp. Phys., Univ. of Toronto Press, Toronto, Canada (1961); A. F. Kip, D. N. Langenberg, B. Rosenblum, G. Wagoner, Phys. Rev. **108**, 494 (1957); E. Fawcett, W. W. Walsh, Phys. Rev. Lett. **8**, 476 (1962); J. F. Koch, A. F. Kip, Proc. 9-th Int. Conf. on Low Temp. Phys., part B, Columbus, Ohio, Plenum Press, N. Y. (1965).
13. М. Я. Азбель, ДАН СССР **100**, 437 (1955).
14. Э. А. Канер, ДАН СССР **119**, 471 (1958); ЖЭТФ **45**, 1430 (1963); D. M. Sparlin, D. S. Shreiber, Proc. 9-th Int. Conf. on Low Temp. Phys., part B, Columbus, Ohio, Plenum Press, New York (1965), p. 823.
15. Е. П. Вольский, В. Ф. Гантмахер, ЖЭТФ **42**, 1416 (1962); **44**, 811 (1963).
16. Я. Г. Дорфман, ДАН СССР **81**, 765 (1951).
17. R. B. Dingle, Proc. Roy. Soc. **A212**, 38 (1952).
18. G. Dresselhaus, A. Kip, C. Kittel, Phys. Rev. **92**, 827 (1953); B. Lax, H. Zeiger, R. Dexter, F. Rosenblum, Phys. Rev. **93**, 1418 (1954).
19. М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ДАН СССР **95**, 41 (1954).
20. R. G. Chambers, Phil. Mag. **1**, 459 (1956).
21. Э. А. Канер, ЖЭТФ **33**, 1472 (1952).
22. В. Г. Песчанский, В. С. Лехциер, ЖЭТФ **46**, 764 (1964).
23. М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, Письма ЖЭТФ **5**, 26 (1967); ЖЭТФ **54**, 477 (1968).
24. В. Лак, Rev. Mod. Phys. **30**, 122 (1958).
25. E. Fawcett, Phys. Rev. **103**, 1582 (1956).
26. П. А. Безуглый, А. А. Галкин, ЖЭТФ **33**, 857, 1076 (1957); **34**, 237 (1958); A. F. Kip, D. N. Langenberg, B. Rosenblum, G. Wagoner, Phys. Rev. **108**, 414 (1958); М. С. Хайкин, ЖЭТФ **37**, 1473 (1959); **39**, 513 (1960); **42**, 27 (1962); **43**, 59 (1962).
27. D. N. Langenberg, A. F. Kip, B. Rosenblum, Bull. Amer. Phys. Soc. **3**, 416 (1958); A. F. Kip, D. N. Langenberg, T. W. Moore, Phys. Rev. Lett. **7**, No. 4 (1961); Phys. Rev. **124**, 359 (1961); D. N. Langenberg, T. W. Moore, Phys. Rev. Lett. **3**, 328 (1959); J. F. Koch, D. Stradling, A. F. Kip, Phys. Rev. **133**, A240 (1964).
28. П. А. Безуглый, А. А. Галкин, ЖЭТФ **34**, 236 (1959); G. Young, Phil. Mag. **7**, 2035 (1962); G. E. Aubrey, Phil. Mag. **5**, 1001 (1960); М. С. Хайкин, Р. Т. Минна, ЖЭТФ **42**, 35 (1962); **45**, 1304 (1963); **51**, 62 (1966).
29. П. А. Безуглый, А. А. Галкин, ЖЭТФ **37**, 1480 (1959); J. S. Castle, B. S. Chandrasekhar, J. A. Rayne, Phys. Rev. Lett. **6**, 409 (1961); М. С. Хайкин, Р. Т. Минна, ЖЭТФ **48**, 111 (1965); Письма в ЖЭТФ **1**, 34 (1965); **1**, 3 (1966).

30. J. K. Galt, F. R. Merritt, W. A. Yager, K. W. Dail, Phys. Rev. Lett. **2**, 282 (1959); I. K. Galt, F. R. Merritt, The Fermi Surface, John Wiley and Sons Inc., N—Y, 1960, p. 159.
31. D. N. Langenberg, T. W. Moore, Phys. Rev. Lett. **3**, 137 (1959); E. Fawcett, Phys. Rev. Lett. **3**, 139 (1959); F. W. Spong, A. F. Kip, Phys. Rev. **137A**, 431 (1965); T. W. Moore, F. W. Spong, Phys. Rev. **125**, 846 (1962); C. C. Grimes, A. F. Kip, F. W. Spong, R. Stradling, Phys. Rev. Lett. **11**, 455 (1963); A. A. Галкин, В. П. Набережных, В. А. Мельник, ФТТ **5**, 201 (1963).
32. S. Foner, H. J. Zeiger, Powell, W. M. Walsh, Lax, Bull. Amer. Phys. Soc. **11**, 1, 117 (1956); **47**, 879 (1964); **49**, 107 (1965); L. C. Hebel, Phys. Rev. **138**, 1691 (1965); Y-Hao-Kao, Phys. Rev. **129**, 1122 (1963); B. Lax, K. J. Button, H. J. Zeiger, L. M. Roth, Phys. Rev. **102**, 715 (1956); G. E. Aubrey, J. Phys. Chem. Solids **19**, 321 (1961); Tinkham, Phys. Chem. Solids **3**, 128 (1957); J. K. Galt, W. A. Yager, F. R. Merritt, B. B. Cerlin, H. W. Dail, Phys. Rev. **100**, 748 (1955); G. B. Galt, W. A. Yager, F. R. Merritt, B. B. Cerlin, A. D. Brailsford, Phys. Rev. **114**, 1396 (1959).
33. A. E. Dixon, W. R. Datars, Solid State Comm. **3**, 377 (1965); A. Ron, M. Revzen, Phys. Lett. **20**, 106 (1966).
34. T. W. Moore, G. E. Schenectady, Phys. Rev. Lett. **16**, 581 (1966).
35. D. G. Howard, Phys. Rev. **190A**, 1705 (1965).
36. D. N. Langenberg, J. A. Marcus, Phys. Rev. **136A**, 1383 (1964).
37. C. C. Grimes, A. F. Kip Phys. Rev. **132**, 1991 (1963).
38. E. Fawcett, W. M. Walsh, Phys. Rev. Lett. **8**, 476 (1962); W. M. Walsh, Phys. Rev. Lett. **12**, 161 (1964).
39. J. K. Galt, F. R. Merritt, P. N. Schmidt, Phys. Rev. Lett. **6**, 458 (1961); C. C. Grimes et al., Phys. Rev. Lett. **11**, 455 (1963); M. P. Show, T. G. Eck, Proc. 9-th Int. Conf. on Low Temp. Phys., part B, (1965), p. 761.
40. W. R. Datars, Phys. Rev. **126**, 975 (1962); Canad. J. Phys. **39**, 1922 (1961); **40**, 1784 (1962); W. R. Datars, R. N. Dexter, Phys. Rev. **124**, 75 (1961); W. R. Datars, J. Vanderkley, Bull. Amer. Phys. Soc. **11**, 9, 598 (1964).
41. T. G. Eck, M. P. Shaw, Proc. 9-th Conf. on Low Temp. Phys., part B, (1965), p. 759.
42. R. G. Chambers, Canad. J. Phys. **34**, 1395 (1956).
43. E. J. Blount, Phys. Rev. Lett. **4**, 114 (1960).
44. G. E. Everett, Phys. Rev. **128**, 2564 (1962); J. Kirsch, A. G. Redfield, Bull. Amer. Phys. Soc. **11**, 7, 477 (1962); J. F. Koch, A. F. Kip, Phys. Rev. Lett. **8**, 478 (1962).
45. R. G. Chambers, Proc. Phys. Soc. **86**, 305 (1965); **88**, 695, 701 (1966).
46. C. C. Grimes, A. F. Kip, F. W. Spong, R. Stradling, P. PinCUS, Phys. Rev. Lett. **11**, 455 (1963); F. W. Spong, A. F. Kip, Phys. Rev. **137A**, 431 (1965).
47. P. E. Bloomfield, Тезисы LT-X, Москва, 1966; Э. А. Канер, А. Я. Бланк, там же; Phys. Chem. Solids **28**, 1735 (1967).
48. М. С. Хайкин, ЖЭТФ **42**, 27 (1962); Р. Т. Минна, М. С. Хайкин, Письма ЖЭТФ **1**, 34 (1965); D. G. Koward, Phys. Rev. **140A**, 1705 (1965).
49. М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, Письма ЖЭТФ **5**, 26 (1967); ЖЭТФ **54**, 477 (1968).
50. М. С. Хайкин, ЖЭТФ **41**, 1773 (1961); **42**, 27 (1962); **43**, 59 (1962).
51. H. Suzuki, K. Ariyama, J. Phys. Soc. Jap. **17**, 704, 1077 (1962).
52. W. W. Walsh, C. C. Grimes, G. Adams, L. W. Rapp, Proc. 9-th Int. Conf. on Low Temp. Phys., part B, (1965), p. 765.
53. Э. А. Канер, ЖЭТФ **44**, 1036 (1963).

54. V. F. Gantmacher, *Progr. Low Temp. Phys.* 5, 181 (1967); Э. А. Канер, В. Ф. Гантмахер, *УФН* 94, 123 (1968).
55. В. Ф. Гантмахер, *ЖЭТФ* 43, 345 (1962).
56. О. В. Константинов, В. И. Перель, *ЖЭТФ* 38, 161 (1960).
57. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, *ЖЭТФ* 45, 610 (1963); 46, 1106 (1964).
58. В. Г. Скобов, Э. А. Канер, *ЖЭТФ* 46, 1809 (1964).
59. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, *ЖЭТФ* 46, 273 (1964).
60. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, *УФН* 89, 367 (1966).
61. Ф. Г. Басс, А. Я. Бланк, М. И. Каганов, *ЖЭТФ* 45, 10 (1963).
62. J. Aubrey, R. Chambers, *J. Phys. Chem. Solids* 3, 128 (1957); S. Buchsbaum, J. Galt, *Phys. Fluids* 4, 1514 (1961); J. Kirsh, P. Miller, *Phys. Rev. Lett.* 9, 421 (1962); P. Miller, R. Herring, *Phys. Rev.* 128, 126 (1962); М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, Р. Т. Мина, *ЖЭТФ* 44, 2190 (1963); 49, 1965 (1965); М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, Л. А. Фальковский, *ЖЭТФ* 45, 826, 1704 (1963).
63. F. Rose, M. Taylor, R. Bowers, *Phys. Rev.* 127, 1122 (1962); M. Taylor, J. Merritt, R. Bowers, *Phys. Rev.* 129, 2525 (1963); I. I. Quinn, S. Rodriguez, *Phys. Rev.* 128, 2487 (1962); A. V. Pipard, *Rept. Progr. Phys.* 23, 176 (1960); R. Bowers, C. Lengendy, F. Rose, *Phys. Rev. Lett.* 7, 339 (1961); P. Cotti, O. Wyder, A. Quattronani, *Phys. Rev. Lett.* 1, 50 (1965).
64. A. Libchaber, R. Veilex, *Phys. Rev.* 127, 774 (1962).
65. W. M. Walsh, P. M. Platzman, *Phys. Rev. Lett.* 15, 784 (1966).
66. A. K. Jonscher, *Brit. J. Appl. Phys.* 15, 365 (1964).
67. А. А. Абрикосов, Л. А. Фальковский, *ЖЭТФ* 43, 1089 (1963).
- 67а. В. П. Силин, *ЖЭТФ* 35, 1243 (1958).
- 67б. S. Schultz, G. Dunifer, *Phys. Rev. Lett.* 18, 283 (1967).
- 67в. В. П. Силин, Спиновые волны в неферромагнитных металлах (дополнение к монографии А. И. Ахнезера, В. Г. Барьяхтара и С. В. Пелетминского «Спиновые волны», изд-во «Наука», 1967).
68. М. Я. Азбель, С. Я. Рахманов, *Письма ЖЭТФ* 9, 252 (1968).
- 68а. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, *ЖЭТФ* 46, 1106 (1964).
- 68б. М. Я. Азбель, С. Я. Рахманов, *ЖЭТФ* 57, 983 (1969).
- 68в. М. Я. Азбель, С. Я. Рахманов, *ФТТ* 11, 3183 (1969).
69. И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* 40, 1235 (1961).
- 69а. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, А. А. Слуцкий, *ЖЭТФ* 43, 1464 (1962).
70. М. Я. Азбель, Г. А. Бегиашвили, *Письма ЖЭТФ* 3, 201 (1966).
71. М. Я. Азбель, Л. Б. Дубовский, *Письма ЖЭТФ* 5, 414 (1967).
72. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, 1963.
73. Е. П. Вольский, *ЖЭТФ* 43, 1120 (1962); 46, 2035 (1964).
74. М. С. Хайкин, Р. Т. Мина, В. С. Эдельман, *ЖЭТФ* 43, 2063 (1962); J. E. Aubrey, N. W. A. March, *Nature* 205, 894, 4974 (1965).
75. М. Я. Азбель, *ЖЭТФ* 34, 969 (1958).
76. М. Я. Азбель, *ЖЭТФ* 34, 1158 (1958).
77. D. C. Mattis, G. Dresselhaus, *Phys. Rev.* 111, 403 (1958).
78. G. Feher, A. F. Kip, *Phys. Rev.* 98, 337 (1955).
79. A. W. Overhauser, *Phys. Rev.* 89, 689; 92, 411 (1953).
80. R. J. Elliott, *Phys. Rev.* 96, 266 (1954).
81. В. В. Андреев, В. И. Герасименко, *ЖЭТФ* 35, 1210 (1958).
82. Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров, *ЖЭТФ* 17, 614 (1947).
83. F. Dyson, *Phys. Rev.* 96, 349 (1955).
84. М. Я. Азбель, *ДАН СССР* 99, 519 (1954).
85. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, Гостехиздат, 1949, § 62.

86. Criswold, A. F. Kip, C. Kittel, Phys. Rev. 82, 951 (1952).
87. R. Levy, Phys. Rev. 102, 31 (1956).
88. М. С. Хайкин, ЖЭТФ 39, 809 (1960).
89. G. E. Smith, J. K. Golt, F. R. Merritt, Phys. Rev. Lett. 4, 276 (1960).
90. R. B. Lewis, T. R. Carver, Phys. Rev. Lett. 12, 693, 695 (1964).
91. L. C. Hebel, Blount, G. E. Smith, Phys. Rev. 138A, 1636 (1965).
92. М. Я. Азбель, В. И. Герасименко, И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 31, 357 (1956); 32, 1212 (1957); 35, 691 (1958); Phys. Chem Solids 1, 164 (1956).
93. J. I. Kaplan, Phys. Rev. 115, 575 (1959).
94. H. C. Torrey, Phys. Rev. 104, 563 (1956).
95. М. Я. Азбель, И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 33, 792 (1957).
96. Э. И. Рашба, УФН 84, 557 (1964).
97. P. E. Bloomfield, Bull. Amer. Phys. Soc. 11, 8, 206 (1963).
98. G. E. Smith, L. C. Hebel, S. J. Buchsbaum, Phys. Rev. 129, 154 (1963).
99. М. Я. Азбель, ФТТ 4, 568 (1962).
100. Э. А. Канер, ЖЭТФ 33, 1472 (1957).
- 100а. В. Г. Песчанский, Письма ЖЭТФ 7, 489 (1968).
101. М. С. Хайкин, ЖЭТФ 12, 152 (1961).
102. J. F. Koch, A. F. Kip, LT-9, B818 (1965).
103. J. F. Koch, C. C. Kuo, Phys. Rev. 143, 430 (1965).
104. М. С. Хайкин, ЖЭТФ 55, 1966 (1968).
105. М. С. Хайкин, Письма ЖЭТФ 4, 113 (1966).
106. A. P. Van Gelder, Phys. Lett. 22, 7 (1966).
107. Tsu—Wei Nee, R. E. Prange, Phys. Lett. 25A, 582 (1967); R. E. Prange, Phys. Rev. 171, 737 (1968).
108. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 34, 942 (1968).
109. Р. Н. Гуржи, М. Я. Азбель, Хао Бай Линь, ФТТ 5, 759 (1963).
110. Р. Н. Гуржи, ЖЭТФ 35, 965 (1958).
- 110а. М. И. Каганов, В. В. Слезов, ЖЭТФ 32, 1496 (1957).
111. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 45, 948 (1963).
112. J. C. Slouczewski, P. R. Weiss, Phys. Rev. 109, 272 (1958).
113. Р. Н. Гуржи, М. И. Каганов, ЖЭТФ 49, 941 (1965).
114. М. С. Хайкин, УФН 98, 409 (1968).
115. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 28, 551 (1954).
116. R. G. Chambers, Proc. Phys. Soc. 78, 941 (1961).

К приложению II

1. Ю. Каган, Е. Г. Бровман, ЖЭТФ 52, 557 (1967).
2. В. М. Конторович, ЖЭТФ 45, 1638 (1963).
3. А. И. Ахнезер, М. И. Каганов, Г. Я. Любарский, ЖЭТФ 32, 837 (1957).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
5. М. И. Каганов, В. Г. Песчанский, ФТТ 9, 3670 (1967); 5, 3215 (1963).
6. А. И. Ахнезер, ЖЭТФ 8, 1330 (1938).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд-во «Наука», 1964, § 54.
8. A. V. Pippard, Phil. Mag. 46, 1104 (1955).
9. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ 34, 1438 (1958); W. Kohn, Phys. Rev. Lett. 3, 393 (1959).
10. P. L. Taylor, Phys. Rev. 131, 1995 (1963).
11. А. М. Афанасьев, Ю. Каган, ЖЭТФ 43, 1456 (1962).
12. М. И. Каганов, А. И. Семенов, ЖЭТФ 59, 630 (1966).

13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957, § 62.
14. А. В. Рёрард, *Phil. Mag.* **2**, 1147 (1955).
15. В. Л. Гуревич, *ЖЭТФ* **37**, 71 (1959).
16. Э. А. Канер, В. Г. Песчанский, И. А. Привороцкий, *ЖЭТФ* **40**, 214 (1961).
17. Э. А. Канер, *ЖЭТФ* **43**, 216 (1962).
18. В. Л. Гуревич, В. Г. Скобов, Ю. Д. Фирсов, *ЖЭТФ* **40**, 786 (1961).
19. В. Л. Гуревич, Ю. М. Гальперин, С. В. Ганцевич, *ЖЭТФ* **56**, 1728 (1969).

К приложению III

1. R. J. Balcombe, *Proc. Roy. Soc.* **A275**, 113 (1963).
2. Е. С. Боровик, В. Г. Волоцкая, *ЖЭТФ* **48**, 1554 (1965).
3. R. A. Parker, R. J. Balcombe, *Phys. Lett.* **27A**, 197 (1968).
4. R. Lück, *Phys. Stat. Solidi* **18**, 49 (1966).
5. E. M. Gunnerson, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **249**, 299 (1957).
6. M. G. Priestley, *Phil. Mag.* **7**, 1205 (1962).
7. Е. П. Вольский, *ЖЭТФ* **46**, 123 (1964).
8. W. L. Larson, W. L. Gordon, *Phys. Rev.* **156**, 703 (1967).
9. T. W. Moore, F. W. Spong, *Phys. Rev.* **125**, 846 (1962).
10. А. А. Галкин, В. П. Набережных, В. А. Мельник, *ЖЭТФ* **44**, 127 (1963).
11. В. П. Набережных, В. П. Толстолужский, *ЖЭТФ* **46**, 18 (1964).
12. F. W. Spong, A. F. Kip, *Phys. Rev.* **137**, 431 (1965).
13. Р. Т. Мина, В. С. Эдельман, М. С. Хайкин, *ЖЭТФ* **51**, 1363 (1966).
14. П. А. Безуглый, А. А. Галкин, А. И. Пушкин, *ЖЭТФ* **44**, 71 (1963).
15. G. N. Kamn, H. V. Bohm, *Phys. Rev.* **131**, 111 (1963).
16. K. Fossheim, T. Olsen, *Phys. Status Solidi* **6**, 867 (1964).
17. H. P. Aubaueg, *Phys. Rev.* **155**, 673 (1967).
18. J. F. Koch, T. K. Wagner, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **11**, 170 (1969).
19. V. Heine, *Proc. Roy. Soc.* **A240**, 261 (1957).
20. B. Segall, *Phys. Rev.* **131**, 121 (1963).
21. N. W. Ashcroft, *Phil. Mag.* **96**, 2055 (1963).
22. Н. Е. Алексеевский, В. С. Егоров, *ЖЭТФ* **55**, 1153 (1968).
23. B. R. Watts, *Phys. Lett.* **3**, 284 (1963); *Proc. Roy. Soc.* **A282**, 521 (1964).
24. T. L. Loucks, P. H. Cutler, *Phys. Rev.* **133**, 819 (1964).
25. T. L. Loucks, *Phys. Rev.* **134**, 1618 (1964).
26. J. H. Terrell, *Phys. Rev.* **149**, 526 (1966).
27. Н. Е. Алексеевский, В. С. Егоров, *ЖЭТФ* **46**, 1205 (1964).
28. K. S. Nelson, J. L. Stanford, F. A. Schmidt, *Phys. Lett.* **28A**, 402 (1968).
29. L. F. Mattheiss, *Phys. Rev.* **139**, 1893 (1965).
30. R. N. Zitter, *Phys. Rev.* **127**, 1471 (1962).
31. J. S. Dhillon, D. Shoenberg, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A248**, 1 (1955).
32. L. S. Lerner, *Phys. Rev.* **130**, 605 (1963).
33. Н. Б. Бранд, Т. Ф. Долголенко, Н. Н. Ступоченко, *ЖЭТФ* **45**, 1319 (1963).
34. Y. Eckstein, J. B. Ketterson, *Phys. Rev.* **137**, 1777 (1965).
35. C. G. Grenier, J. M. Reynolds, J. R. Subert, *Phys. Rev.* **132**, 58 (1963).
36. R. J. Balcombe, A. M. Forrest, *Phys. Rev.* **151**, 550 (1966).
37. Kao Yi-Han, *Phys. Rev.* **129**, 1122 (1963).

38. В. С. Эдельман, М. С. Хайкин, ЖЭТФ **49**, 107 (1965).
39. D. H. Rencker, Phys. Rev. **115**, 303 (1959).
40. А. П. Корольюк, ЖЭТФ **49**, 1009 (1965); **51**, 697 (1966).
41. Y. Sawada, E. Burstein, L. Testardi, J. Phys. Soc. Japan **21**, 760 (1966).
42. S. Masc, Y. Fujimori, H. Mori, J. Phys. Soc. Japan **21**, 1744 (1966).
43. М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, ЖЭТФ **47**, 878 (1964).
44. V. F. Gantmaher, Progr. Low. Temp. Phys. **5**, 181 (1967).
45. L. S. Lerner, Phys. Rev. **127**, 1480 (1962).
46. А. А. Абрикосов, Л. А. Фальковский, ЖЭТФ **43**, 1089 (1962).
47. L. G. Ferreira, J. Phys. Chem. Solids **29**, 357 (1968).
48. E. Fawcett, Phys. Rev. **128**, 154 (1962).
49. D. M. Sparlin, J. A. Marcus, Phys. Rev. **144**, 484 (1966).
50. R. F. Girvan, A. V. Gold, R. A. Phillips, J. Phys. Chem. Solids **29**, 1485 (1968).
51. E. Fawcett, W. W. Walsh, Phys. Rev. Lett. **8**, 476 (1962).
52. Р. Германн, В. С. Эдельман, ЖЭТФ **53**, 1563 (1967).
53. W. M. Walsh, C. C. Grimes, G. Adams, L. W. Rupp, Proc. IX Conf. Low. Temp. Phys., vol. B, New York, 1965, стр. 765.
54. T. L. Loucks, Phys. Rev. **143**, 506 (1966).
55. J. O. Dimmock, A. J. Freeman, R. E. Watson, J. Appl. Phys. **36**, 1142 (1965).
56. A. J. Freeman, J. O. Dimmock, R. E. Watson, Phys. Rev. Lett. **16**, 94 (1966).
57. S. C. Keeton, T. L. Loucks, Phys. Rev. **146**, 429 (1966); **168**, 672 (1968).
58. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ **37**, 672 (1959).
59. W. A. Reed, J. A. Marcus, Phys. Rev. **126**, 1298 (1962).
60. J. A. Munarin, J. A. Marcus, P. E. Bloomfield, Phys. Rev. **172**, 718 (1968).
61. A. Goldstein, S. Foner, Phys. Rev. **146**, 442 (1966).
62. T. W. Moore, Phys. Rev. Lett., **18**, 310 (1967); Phys. Rev. **165**, 864 (1968).
63. M. Surma, Acta Phys. Polon. **32**, 677 (1967).
64. П. А. Безуглый, А. А. Галкин, С. Е. Жеваго, ЖЭТФ **47**, 825 (1964); ФТТ **7**, 480 (1965).
65. A. Fukumoto, M. W. Stradberg, Phys. Rev. **155**, 685 (1967).
66. J. C. Slater, G. F. Koster, J. H. Wood, Phys. Rev. **126**, 1307 (1962).
67. D. E. Saule, J. W. McClure, L. B. Smith, Phys. Rev. **134**, 453 (1964).
68. S. J. Williamson, S. Foner, M. S. Dresselhaus, Phys. Rev. **140**, 1429 (1965).
69. S. J. Williamson, M. Surma, H. C. Praddaude, R. A. Patten, J. L. Furdyna, Solid State Comm. **4**, 37 (1966).
70. R. F. O'Brien, S. Foner, Phys. Lett. **25**, 310 (1967).
71. M. S. Dresselhaus, J. G. Mavroides, IBM J. Res. **8**, 262 (1964).
72. W. A. Reed, E. Fawcett, Phys. Rev. Lett. **9**, 336 (1962), Phys. Rev. **131**, 2463 (1963); **136**, 422 (1964).
73. A. Isin, R. V. Coleman, Phys. Rev. **137**, 1609 (1965).
74. A. V. Gold, J. Appl. Phys. **39**, 768 (1968).
75. S. Wakon, J. Yamashita, J. Phys. Soc. Japan **21**, 1712 (1966).
76. J. H. Wood, Phys. Rev. **126**, 517 (1962).
77. L. F. Mattheiss, Phys. Rev. **134**, 970 (1964).
78. E. Justi, Phys. Zs. **41**, 563 (1940).
79. Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ **37**, 1281 (1959).
80. D. Shoenberg, Phil. Trans, Roy. Soc. **A255**, 1 (1962).
81. A. S. Joseph, A. C. Thorsen, Phys. Rev. **140**, 2046 (1965).

82. J. P. Jan, J. M. Templeton, *Phys. Rev.* **161**, 556 (1967).
83. D. N. Langenberg, S. M. Marcus, *Phys. Rev.* **136**, 1383 (1964).
84. R. W. Morse, A. Myers, C. T. Walker, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 605 (1960).
85. H. V. Bohm, V. J. Easterling, *Phys. Rev.* **128**, 1021 (1962).
86. D. J. Roaf, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A255**, 135 (1962).
87. Е. С. Боровик, *ДАН СССР* **69**, 768 (1949).
88. Е. С. Боровик, В. Г. Волоцкая, *ЖЭТФ* **38**, 261 (1960).
89. Ю. П. Гайдуков, *ЖЭТФ* **49**, 1049 (1965).
90. G. B. Brandt, J. A. Rayne, *Phys. Lett.* **12**, 87 (1964); *Phys. Rev.* **132**, 1512 (1963).
91. W. J. O'Sullivan, J. E. Shirber, J. R. Anderson, *Phys. Lett.* **27A**, 144 (1968).
92. A. J. Hughes, A. H. Lettington, *Phys. Lett.* **27A**, 241 (1968).
93. Р. Т. Мина, М. С. Хайкин, *ЖЭТФ* **48**, 111 (1965); **51**, 62 (1966).
94. J. A. Rayne, B. S. Chandrasekhar, *Phys. Rev.* **125**, 1952 (1962); **129**, 652 (1963).
95. R. J. Balcombe, E. W. Guptill, M. H. Jericho, *Phys. Lett.* **13**, 287 (1964).
96. В. Ф. Гантмахер, И. П. Крылов, *ЖЭТФ* **49**, 1054 (1965).
97. N. W. Ashcroft, W. E. Lawrence, *Phys. Rev.* **175**, 938 (1968).
98. W. R. Datars, S. Tanuma, *Phys. Lett.* **27A**, 182 (1968).
99. S. Tanuma, Y. Ishizawa, H. Nagasawa, T. Sugawara, *Phys. Lett.* **25**, 669 (1967).
100. T. L. Loucks, *Phys. Rev.* **144**, 504 (1966).
101. S. L. Altmann, C. J. Bradley, *Proc. Phys. Soc.* **92**, 764 (1967).
102. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, *ЖЭТФ* **43**, 2094 (1962).
103. D. C. Tsui, R. W. Stark, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1317 (1967).
104. J. G. Anderson, W. F. Love, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **8**, 258 (1963).
105. A. D. C. Grassie, *Phil. Mag.* **9**, 101 (1964).
106. D. C. Tsui, R. W. Stark, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 19 (1966).
107. J. K. Galt, F. R. Merritt, J. R. Klauder, *Phys. Rev.* **139**, 823 (1965).
108. M. P. Shaw, T. G. Eck, D. A. Zych, *Phys. Rev.* **142**, 406 (1966).
109. J. D. Gavenda, B. C. Deaton, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 208 (1962).
110. M. R. Daniel, L. Mackinnon, *Phil. Mag.* **8**, 537 (1963).
111. D. F. Gibbons, L. M. Falicov, *Phil. Mag.* **8**, 177 (1963).
112. B. C. Deaton, *Phys. Rev.* **136**, 1096 (1964).
113. N. H. Zebouni, R. E. Hamburg, H. J. Mackey, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 260 (1963).
114. А. А. Марьяхин, В. П. Набережных, *Письма ЖЭТФ* **3**, 205 (1966).
115. В. П. Набережных, А. А. Марьяхин, В. А. Мельник, *ЖЭТФ* **52**, 617 (1967).
116. R. G. Goodrich, R. C. Jones, *Phys. Rev.* **156**, 745 (1967).
117. R. C. Jones, R. G. Goodrich, L. M. Falicov, *Phys. Rev.* **174**, 672 (1968).
118. W. A. Harrison, *Phys. Rev.* **118**, 1190 (1960).
119. R. W. Stark, L. M. Falicov, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 795 (1967).
120. R. G. Chambers, B. K. Jones, *Proc. Roy. Soc.* **A270**, 417 (1962).
121. P. A. Penz, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 725 (1968).
122. J. R. Reitz, A. W. Overhauser, *Phys. Rev.* **171**, 749 (1968).
123. D. Shoenberg, P. J. Stiles, *Proc. Roy. Soc.* **A281**, 62 (1964).
124. C. C. Grimes, A. F. Kip, *Phys. Rev.* **132**, 1991 (1963).
125. H. J. Foster, P. H. Meijer, E. V. Mielczarek, *Phys. Rev.* **139**, 1849 (1965).
126. J. Trivelpino, M. S. Said, L. A. Pauer, *Phys. Rev.* **147**, 518 (1966).
127. T. G. Blaney, *Phil. Mag.* **17**, 405 (1968); **20**, 23 (1969).
128. J. R. Peverley, *Phys. Rev.* **173**, 689 (1968).
129. J. F. Koch, T. K. Wagner, *Phys. Rev.* **151**, 467 (1966)

130. P. S. Peercy, W. M. Walsh, L. M. Rupp, P. H. Schidt, *Phys. Rev.* **171**, 713 (1968).
131. F. S. Ханн, *Phys. Rev.* **128**, 2524 (1962).
132. V. Heine, A. Abarenkov, *Phil. Mag.* **9**, 451 (1964).
133. N. W. Ashcroft, *Phys. Rev.* **140**, 935 (1965).
134. J. H. Condon, J. A. Marcus, *Phys. Rev.* **134**, 446 (1964).
135. S. L. Altmann, A. P. Cracknell, *Proc. Phys. Soc.* **84**, 761 (1964).
136. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, *ЖЭТФ* **38**, 1720 (1960).
137. R. W. Stark, T. G. Eck, W. L. Gordon, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 360 (1962); *Phys. Rev.* **133**, 443 (1964).
138. M. G. Priestley, *Proc. Roy. Soc.* **A276**, 258 (1963).
139. M. G. Priestley, L. M. Falicov, G. Weisz, *Phys. Rev.* **131**, 617 (1963).
140. R. W. Stark, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **11**, 169 (1966).
141. R. W. Stark, *Phys. Rev.* **162**, 589 (1967).
142. T. G. Eck, M. P. Shaw, *Proc. IX Conf. Low. Temp. Phys.*, vol. B, New York, 1965, стр. 759.
143. E. W. Hartmann, J. M. Luttinger, *Phys. Rev.* **151**, 430 (1966).
144. J. B. Ketterson, R. W. Stark, **156**, 748 (1967).
145. L. M. Falicov, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A255**, 55 (1962).
146. L. M. Falicov, M. H. Cohen, *Phys. Rev.* **130**, 92 (1963).
147. L. M. Falicov, A. B. Pippard, R. R. Silvert, *Phys. Rev.* **151**, 498 (1966).
148. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, *ЖЭТФ* **37**, 672 (1959).
149. J. E. Kunzler, J. R. Klauder, *Phil. Mag.* **6**, 1045 (1961).
150. A. J. Funes, R. V. Coleman, *Phys. Rev.* **131**, 2084 (1963).
151. J. R. Klauder, W. A. Reed, C. E. Brenner, J. E. Kunzler, *Phys. Rev.* **141**, 592 (1966).
152. D. Shoenberg, *Nature* **183**, 171 (1959).
153. A. S. Joseph, A. C. Thorsen, *Phys. Rev.* **134**, 979 (1964).
154. A. S. Joseph, A. C. Thorsen, E. Gertner, L. E. Valby, *Phys. Rev.* **148**, 569 (1966).
155. D. N. Langenberg, T. W. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 328 (1959).
156. A. F. Kip, D. N. Langenberg, T. W. Moore, *Phys. Rev.* **124**, 359 (1961).
157. J. R. Boyd, J. D. Gavenda, *Phys. Rev.* **152**, 645 (1966).
158. R. E. McFarlane, J. A. Rayne, C. K. Jones, *Phys. Lett* **24**, 197 (1967).
159. E. J. Zornberg, F. M. Mueller, *Phys. Rev.* **151**, 557 (1966).
160. В. Е. Старцев, И. В. Волькенштейн, Н. А. Новоселов, *ЖЭТФ* **51**, 1311 (1966).
161. G. Leaver, A. Myers, *Phil. Mag* **19**, 437 (1969).
162. R. Hermann, *Phys. Status Solidi* **25**, 661 (1968).
163. П. А. Безуглый, С. Е. Жеваго, В. И. Денисенко, *ЖЭТФ* **49**, 1457 (1965).
164. А. А. Галкин, С. Е. Жеваго, Т. Ф. Бутенко, *Укр. физ. ж.* **13**, 1106 (1968).
165. В. В. Бойко, В. П. Гаспаров, Н. Г. Гвердцители, *Письма ЖЭТФ* **6**, 737 (1967); *ЖЭТФ* **53**, 489 (1969).
166. W. H. Lomer, *Proc. Phys. Soc.* **84**, 327 (1964).
167. T. L. Loucks, *Phys. Rev.* **139**, 1181 (1965).
168. A. P. Jeavons, G. A. Saunders, *Phys. Lett.* **27A**, 19 (1968).
169. M. G. Priestley, L. R. Windmiller, J. B. Ketterson, Y. Eckstein, *Phys. Rev.* **154**, 671 (1967).
170. J. Vanderkooy, W. R. Datars, *Phys. Rev.* **156**, 671 (1967).
171. Ishizawa Yoshio, *J. Phys. Soc. Japan* **25**, 160 (1968).
172. W. R. Datars, J. Vanderkooy, *J. Phys. Soc. Japan* **21**, 657 (1966).

173. Y. Shapira, S. J. Williamson, Phys. Lett. **14**, 73 (1965).
174. J. B. Ketterson, Y. Eckstein, Phys. Rev. **140**, 1355 (1965).
175. L. M. Falicov, S. Golin, Phys. Rev. **137**, 871 (1965).
176. S. Golin, Phys. Rev. **140**, 993 (1965).
177. P. J. Lin, L. M. Falicov, Phys. Rev. **146**, 441 (1966).
178. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ **36**, 447 (1959).
179. M. J. G. Lee, Proc. Roy. Soc. A295, 440 (1966).
180. E. Fawcett, W. A. Reed, Phys. Rev. Lett. **9**, 336 (1962); J. Appl. Phys. **35**, 754 (1964).
181. A. S. Joseph, A. C. Thorsen, Phys. Rev. Lett. **11**, 554 (1963).
182. D. C. Tsui, R. W. Stark, Phys. Rev. Lett. **17**, 871 (1966).
183. D. C. Tsui, Phys. Rev. **164**, 669 (1967).
184. J. Ruvalds, L. M. Falicov, Phys. Rev. **172**, 509 (1968).
185. J. Yamashita, M. Fukuchi, S. Wakon, J. Phys. Soc. Japan **18**, 999 (1963).
186. J. C. Phillips, Phys. Rev. **133**, 1020 (1964).
187. E. Fawcett, W. A. Reed, R. R. Soden, Phys. Rev. **159**, 533 (1967).
188. Н. Е. Алексеевский, К. Х. Бергель, А. В. Дубровин, Г. Э. Карстенс, Письма ЖЭТФ, **6**, 637 (1967).
189. W. A. Reed, R. R. Soden, Phys. Rev. **173**, 677 (1968).
190. A. C. Thorsen, T. G. Berlincourt, Phys. Rev. Lett. **7**, 244 (1961).
191. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **39**, 1201 (1960).
192. R. C. Young, Phys. Rev. **152**, 659 (1956).
193. J. G. Anderson, R. C. Young, Phys. Rev. **168**, 696 (1968).
194. A. V. Gold, M. G. Priestley, Phil. Mag. **5**, 1089 (1960).
195. J. A. Woolam, Phys. Lett. **27A**, 246 (1968).
196. M. D. Stalfen, A. R. Vroomen, Phys. Status Solidi **23**, 675, 685 (1967).
197. J. E. Craven, R. W. Stark, Phys. Rev. **168**, 849 (1968).
198. J. F. Koch, A. F. Kip, Phys. Rev. Lett. **8**, 473 (1962).
199. М. С. Хайкин, ЖЭТФ **42**, 27 (1962).
200. М. С. Хайкин, С. М. Черемисин, ЖЭТФ **54**, 69 (1968).
201. T. Olsen, J. Phys. Chem. Solids **24**, 649 (1963).
202. М. С. Хайкин, ЖЭТФ **41**, 1773 (1961).
203. В. Ф. Гантмахер, ЖЭТФ **44**, 811 (1963); **46**, 2028 (1964); **48**, 1576 (1965).
204. M. Miasek, Phys. Rev. **130**, 11 (1963).
205. G. Weisz, Phys. Rev. **149**, 504 (1966).
206. Н. Е. Алексеевский, Н. Н. Михайлов, ЖЭТФ **46**, 1979 (1964); **54**, 350 (1968).
207. Н. Е. Алексеевский, Г. Э. Карстенс, В. В. Можяев, ЖЭТФ **46**, 1979 (1964).
208. J. J. Vuillemin, M. G. Priestley, Phys. Rev. Lett. **14**, 307 (1965).
209. J. J. Vuillemin, Phys. Rev. **144**, 395 (1966).
210. F. M. Mueller, M. G. Priestley, Phys. Rev. **148**, 638 (1966).
211. A. J. Freeman, A. M. Furdyna, J. O. Dimmock, J. Appl. Phys. **37**, 1256 (1966).
212. Н. Е. Алексеевский, Г. Э. Карстенс, В. В. Можяев, Труды X Междунар. конф. по физике низких температур, т. 3, М., изд. ВИНТИ, 1967, стр. 169.
213. M. D. Stalfen, A. R. Vroomen, Phys. Lett. **19**, 81 (1965).
214. J. B. Ketterson, M. G. Priestley, J. J. Vuillemin, Phys. Lett. **20**, 452 (1966).
215. L. R. Windmiller, J. B. Ketterson, Phys. Rev. Lett. **20**, 324 (1968).
216. R. Fletcher, I. Mackinnon, W. D. Wallace, Phys. Lett. **25**, 395 (1967).
217. A. R. Mackintosh, Bull. Amer. Phys. Soc. **11**, 215 (1966).

218. Н. Е. Алексеевский, В. С. Егоров, Б. И. Казак, ЖЭТФ 44, 1116 (1963).
219. W. A. Reed, E. Fawcett, R. R. Soden, Phys. Rev. 139, 215 (1965).
220. A. S. Joseph, A. C. Thorsen, Phys. Rev. Lett. 11, 67 (1963); Phys. Rev. 133, 1546 (1964); 150, 523 (1966).
221. C. K. Jones, J. A. Rayne, Phys. Rev. 139, 1876 (1965).
222. L. R. Testardi, R. R. Soden, Phys. Rev. 158, 581 (1967).
223. L. F. Mattheiss, Phys. Rev. 151, 450 (1966).
224. P. T. Colledge, Phys. Lett. 15, 223 (1965); Proc. Roy. Soc. 295, 458 (1966).
225. J. V. Ketterson, L. R. Windmiller, S. Hörnfeldt, Phys. Lett. 26, 115 (1968).
226. J. M. Dishman, J. A. Rayne, Phys. Lett., 20, 348 (1966).
227. W. R. Datars, A. E. Dixon, Phys. Rev. 154, 576 (1967).
228. J. M. Dishman, J. A. Rayne, Phys. Rev. 166, 728 (1968).
229. G. B. Brandt, J. A. Rayne, Phys. Rev. 148, 644 (1966).
230. A. E. Dixon, W. R. Datars, Solid State Comm. 3, 377 (1965); Phys. Rev. 175, 928 (1968).
231. S. C. Keeton, T. L. Loucks, Phys. Rev. 152, 548 (1966).
232. К. Okumura, I. M. Templeton, Phil. Mag. 7, 1237 (1962).
233. P. T. Colledge, Phys. Lett. 22, 367 (1966).
234. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 41, 354 (1961).
235. J. E. Shirber, Phys. Rev. 131, 2459 (1963).
236. A. V. Gold, Phil. Trans. Roy. Soc. A251, 85 (1958).
237. J. R. Anderson, A. V. Gold, Phys. Rev. 139, 1459 (1965).
238. P. J. Tobin, D. J. Sellmyer, D. J. Averbach, Phys. Lett. 28A, 723 (1969).
239. М. С. Хайкин, Р. Т. Мина, ЖЭТФ 42, 35 (1962).
240. R. C. Young, Phil. Mag. 7, 2065 (1962).
241. A. S. Mackintosh, Proc. Roy. Soc. A271, 1344 (1963).
242. T. L. Loucks, Phys. Rev. Lett. 14, 1072 (1965).
243. К. Ш. Агабабян, Р. Т. Мина, В. С. Погосян, ЖЭТФ 54, 721 (1968).
244. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 42, 69 (1962).
245. H. J. Fink, Phys. Lett. 13, 105 (1964).
246. A. C. Joseph, A. S. Thorsen, Phys. Rev., 138, 1159 (1965).
247. D. C. Howard, Phys. Rev. 140, 1705 (1965).
248. V. J. Easterling, H. V. Bohm, Phys. Rev. 125, 812 (1962).
249. S. Chatterjee, S. K. Sen, Proc. Phys. Soc. 87, 779 (1966), 91, 749 (1967).
250. W. E. Christensen, Phys. Status Solidi 31, 635 (1968).
251. Yu. A. Bogod, V. V. Eremenko, Phys. Status Solidi 11, 51 (1965).
252. G. S. Fleming, T. L. Loucks, Phys. Rev. 173, 685 (1968).
253. A. P. Cracknell, Phys. Lett. 24, 263 (1967).
254. S. Epstein, H. J. Juretschke, Phys. Rev. 129, 1148 (1963).
255. L. S. Lerner, P. C. Eastman, Can. J. Phys. 41, 1523 (1963).
256. J. Ketterson, Y. Eckstein, Phys. Rev. 132, 1885 (1963).
257. G. W. Rao, N. H. Zebuni, C. G. Grenier, J. M. Reynolds, Phys. Rev. 133, 141 (1964).
258. L. R. Windmiller, Phys. Rev. 149, 472 (1966).
259. S. Tanuma, Y. Ishizawa, S. Ishiguro, J. Phys. Soc. Japan 21, 662 (1966).
260. И. Б. Брандт, Н. Я. Миника, Чжэнь Ган-чон, ЖЭТФ 51, 108 (1966).
261. W. R. Datars, J. Vanderkooy, IBM J. Res. Developm. 8, 247 (1964).
262. Y. Eckstein, Phys. Rev. 129, 12 (1963).
263. O. Beckman, L. Eriksson, S. Hörnfeldt, Solid State Comm., 2, 7 (1964).

264. L. Eriksson, O. Beckman, S. Hörnfeldt, *J. Phys. Chem. Solids* **25**, 1339 (1964).
265. T. Fukase, T. Fukuroi, *J. Phys. Soc. Japan* **21**, 751 (1966).
266. А. Р. Королук, Л. Я. Мацаков, *ЖЭТФ* **52**, 415 (1967).
267. L. M. Falicov, P. J. Lin, *Phys. Rev.* **141**, 562 (1966).
268. A. R. Mackintosh, L. E. Spanel, R. C. Young, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 434 (1963).
269. J. C. Milliken, R. C. Young, *Phys. Rev.* **148**, 558 (1966).
270. R. C. Young, *Phys. Rev.* **163**, 667 (1967).
271. M. G. Priestley, *Phys. Rev.* **148**, 580 (1966).
272. J. A. Rayne, *Phys. Rev.* **131**, 653 (1963).
273. Y. Eckstein, J. B. Ketterson, M. G. Priestley, *Phys. Rev.* **148**, 586 (1966).
274. J. B. Coon, C. G. Grenier, J. M. Reynolds, *J. Phys. Chem. Solids* **28**, 301 (1967).
275. P. Soven, *Phys. Rev.* **137**, 1706, 1717 (1965).
276. A. C. Thorsen, T. G. Berlincourt, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 244 (1961).
277. J. H. Condon, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **11**, 170 (1966).
278. W. L. Dahlquist, R. G. Goodrich, *Phys. Rev.* **164**, 944 (1967).
279. Н. Е. Алексеевский, В. С. Егоров, *Письма ЖЭТФ* **1**, 31 (1965).
280. A. C. Thorsen, A. S. Joseph, L. E. Valby, *Phys. Rev.* **162**, 574 (1967).
281. D. J. Boyle, A. V. Gold, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 461 (1969).
282. R. L. Gupta, T. L. Loucks, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 458 (1969).
283. A. J. Arko, J. A. Marcus, W. A. Reed, *Phys. Lett.* **23**, 617 (1966); *Phys. Rev.* **176**, 671 (1968).
284. B. R. Watts, *Phys. Lett.* **10**, 275 (1964).
285. G. B. Brandt, J. A. Rayne, *Phys. Rev.* **132**, 1945 (1963).
286. J. E. Graebner, J. A. Marcus, *Phys. Rev.* **175**, 659 (1968).
287. W. D. Wallace, N. Tepley, H. B. Bohm, Y. Shapira, *Phys. Lett.* **17**, 184 (1965).
288. W. D. Wallace, H. V. Bohm, *J. Phys. Chem. Solids* **29**, 271 (1968).
289. L. M. Falicov, M. J. Zuckermann, *Phys. Rev.* **160**, 372 (1967).
290. К. Okumura, I. M. Templeton, *Phil. Mag.* **8**, 889 (1963).
291. К. Okumura, I. M. Templeton, *Proc. Roy. Soc.* **A287**, 89 (1965).
292. W. A. Reed, G. F. Brenner, *Phys. Rev.* **130**, 565 (1963).
293. R. W. Stark, *Phys. Rev.* **135**, 1698 (1964).
294. A. C. Thorsen, L. E. Valby, A. S. Joseph, *Proc. IX Conf. Low Temp. Phys.*, vol. B, New York, 1965, стр. 867.
295. A. S. Joseph, W. L. Gordon, *Phys. Rev.* **126**, 489 (1962).
296. R. J. Higgins, J. A. Marcus, *Phys. Rev.* **137**, 1172 (1965).
297. В. А. Вентцель, А. И. Лухтер, А. В. Руднев, *ЖЭТФ* **53**, 108 (1967).
298. J. K. Galt, F. R. Merritt, W. A. Yager, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 292 (1967).
299. В. П. Набережных, В. А. Мельник, *ЖЭТФ* **47**, 873 (1964).
300. M. P. Shaw, P. J. Sampath, T. G. Eck, *Phys. Rev.* **142**, 399 (1966).
301. J. O. Henningsen, *Phys. Status Solidi* **22**, 441 (1967).
302. А. А. Галкин, А. П. Королук, *ЖЭТФ* **38**, 1688 (1960).
303. D. F. Gibbons, L. M. Falicov, *Phil. Mag.* **8**, 177 (1963).
304. A. Myers, J. R. Bosnell, *Phil. Mag.* **13**, 1273 (1966).
305. W. A. Harrison, *Phys. Rev.* **126**, 497 (1962); **129**, 2512 (1963).
306. A. C. Thorsen, A. S. Joseph, *Phys. Rev.* **131**, 2078 (1963).
307. T. L. Loucks, *Phys. Rev.* **159**, 554 (1967).
308. D. J. Sellmyer, P. A. Schroeder, *Phys. Lett.* **16**, 100 (1965).
309. J. T. Longo, P. A. Schroeder, D. J. Sellmyer, *Phys. Lett.* **25A**, 747 (1967).

310. J. P. Jan, W. B. Pearson, Y. Saito, Proc. Roy. Soc. **A297**, 275 (1967).
311. H. Amar, K. H. Johnson, K. P. Wang, Phys. Rev. **148**, 672 (1966).
312. J. P. Yan, W. B. Pearson, Y. Saito, M. Springford, I. M. Templeton, Phil. Mag. **12**, 1271 (1965).
313. B. W. Veal, J. A. Rayne, Phys. Lett. **6**, 12 (1963).
314. E. Fawcett, J. Phys. Chem. Solids **4**, 320 (1961).
315. G. E. Smith, Phys. Rev. **115**, 1561 (1959).
316. A. B. Pippard, Phil. Trans. Roy. Soc. **A250**, 325 (1957).
317. E. Fawcett, Proc. Roy. Soc. **A232**, 519 (1955).
318. A. T. Stewart, J. B. Shand, J. J. Donaghy, J. H. Kusmiss, Phys. Rev. **128**, 118 (1962).
319. S. Berko, Phys. Rev. **128**, 2166 (1962).
320. R. W. Williams, A. R. Mackintosh, Phys. Rev. **168**, 679 (1968).
321. S. Berko, J. Zuckerman, Phys. Rev. Lett. **13**, 339 (1964).
322. D. R. Gustafson, A. R. Mackintosh, D. J. Zaffarano, Phys. Rev. **130**, 1455 (1963).
323. R. P. Gupta, T. L. Loucks, Phys. Rev. **176**, 848 (1968).
324. E. C. Snow, Phys. Rev. **158**, 683 (1967).
325. J. H. Wood, Phys. Rev. **146**, 432 (1966).
326. S. Chatterjee, S. K. Sen, Proc. Phys. Soc. (J. Phys. C) **1**, 759 (1968).
327. J. P. Yan, J. Phys. Chem. Solids **29**, 561 (1968).
328. M. J. G. Lee, L. M. Falicov, Proc. Roy. Soc. A-304, 323 (1968); Phys. Rev. **178**, 953 (1969).
329. B. Vasvary, A. O. E. Animalu, V. Heine, Phys. Rev. **154**, 535 (1967).
330. J. R. Subert, H. J. Mackey, K. L. Hathcox, Phys. Rev. **166**, 710 (1968).
331. O. K. Andersen, A. R. Mackintosh, Solid State Comm., **6**, 285 (1968).
332. R. Lück, Phys. Stat. Solidi **18**, 59 (1966).
333. P. E. Lewis, P. Lee, Phys. Rev. **175**, 795 (1968).
334. J. T. Longo, P. A. Schraeder, D. J. Sellmyer, Phys. Rev. **182**, 658 (1969).
335. J. P. Jan, W. B. Pearson, Y. Saito, M. Springford, I. M. Templeton, Phil. Mag. **12**, 1271 (1965).
336. C. Miziumski, A. W. Lawson, Phys. Rev. **180**, 749 (1969).
337. J. R. Andersen, S. S. Lane, Phys. Rev. **B2**, 298 (1970).
338. A. G. Beattie, Phys. Rev. **184**, 668 (1969).
339. W. A. Reed, J. H. Condon, Phys. Rev. **B3504** (1970).
340. R. D. Brown, Phys. Rev. **B2**, 928 (1970).
341. J. W. Dooley, N. Tepley, Phys. Rev. **187**, 781 (1969).
342. W. Van Haeringen, H. G. Junginger, Solid State Comm. **7**, 1723 (1969).
343. W. J. O'Sullivan, A. C. Switendick, Phys. Rev. **B1**, 1443 (1970).
344. A. J. Hugenes, J. P. G. Shepherd, Proc. Phys. Soc. **C2**, 661 (1969).
345. S. Tanuma, W. R. Datars, H. Doy, A. Dunswoirn, Solid State Comm. **8**, 1107 (1970).
346. W. R. Datars, J. R. Cook, Phys. Rev. **187**, 769 (1969).
347. J. D. Gavenda, F. H. S. Chang, Phys. Rev. **186**, 630 (1969).
348. A. Libchaber, G. Adams, C. C. Grimes, Phys. Rev. **B1**, 361 (1970).
349. S. Chatterjee, D. K. Chakraborti, J. Phys. **C3**, 120 (1970).
350. R. E. Borland, J. R. A. Cooper, J. Phys. **C3**, 253 (1970).
351. G. W. Kamm, Phys. Rev. **B1**, 554 (1970).
352. B. Perrin, G. Weisbuch, A. Libchaber, Phys. Rev. **B1**, 1501 (1970).
353. M. J. G. Lee, Phys. Rev. **187**, 901 (1969).
354. C. S. Ih, D. N. Langenberg, Phys. Rev. **B1**, 1425 (1970).

355. E. I. Zornberg, Phys. Rev. **B1**, 244 (1970).
356. M. H. Holleran, J. H. Condon, J. E. Graebener, J. E. Kunzler, F. S. L. Hsu, Phys. Rev. **B1**, 366 (1970).
357. L. F. Mattheiss, Phys. Rev. **B1**, 373 (1970).
358. G. W. Kamm, J. R. Andersen, Phys. Rev. **B2**, 2944 (1970).
359. J. B. Ketterson, L. R. Windmiller, Phys. Rev. **B2**, 4813 (1970).
360. J. B. Ketterson, F. M. Mueller, L. R. Windmiller, Phys. Rev. **186**, 656 (1969).
361. V. L. Melnik, I. V. Svechkarev, Phys. Status Solidi **33**, 33 (1969).
362. T. E. Bogle, J. B. Coon, Phys. Rev. **177**, 1122 (1969).
363. R. T. Coleridge, J. Low, Temp. Phys. **1**, 577 (1969).
364. R. E. Hamberg, C. G. Grenier, J. M. Reynolds, Phys. Rev. Lett. **23**, 236 (1969).
365. Y. Ishizawa, W. R. Datars, Phys. Rev. **B2**, 3875 (1970).
366. F. A. Capocci, P. M. Holtman, D. Parsons, M. J. Priestley, J. Phys. **C3**, 208 (1970).
367. W. L. Dahquist, R. G. Goodrich, Phys. Rev. **196**, 944 (1967).
368. J. C. Shaw, G. E. Everet, Phys. Rev. **B1**, 537 (1970).
369. E. H. Hygh, R. M. Welch, Phys. Rev. **B1**, 2424 (1970).
370. J. Trivisonno, J. A. Murphy, Phys. Rev. **B1**, 3341 (1970).
371. F. J. Arlinghaus, Phys. Rev. **186**, 609 (1969).

Илья Михайлович Лифшиц
Марк Яковлевич Азбель
Моисей Исаакович Кагацов

ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

М., 1971 г., 416 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 19/I 1971 г.
Подписано к печати 18/V 1971 г.
Бумага 60×90^{1/16}.
Физ. печ. л. 26, Условн. печ. л. 26.
Уч.-изд. л. 26,75. Тираж 9 000 экз.
Т-06588. Цена книги 1 р. 89 к. Заказ № 968.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В 71, Ленинский проспект, 15.

Орден Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.