ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Ю.В. ЛИННИК, И.В. ОСТРОВСКИЙ

РАЗЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ВЕКТОРОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Ю. В. ЛИННИК, И. В. ОСТРОВСКИЙ

РАЗЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ВЕКТОРОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

517.8
Л 59
УДК 519.21

Разложения случайных величин и векторов. Ю. В. Линник, И. В. Островский. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972.

Основной задачей теории разложений случайных величин является исследование возможных представлений данной случайной величины в виде суммы независимых случайных величин. В книге излагаются важнейшие результаты этой теории и некоторые приложения. Подробно изучены аналитические свойства характеристических функций случайных величин и векторов. Одна из глав посвящена изложению предельных теорем без условия предельной пренебрегаемости. В книге существенно используются результаты и методы теории функций комплексного переменного.

Книга рассчитана на специалистов-математиков, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся теорией вероятностей, гармоническим анализом и приложениями теории функций одного и нескольких комплексных переменных к теории вероятностей.

$\frac{2-2-3}{62-72}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

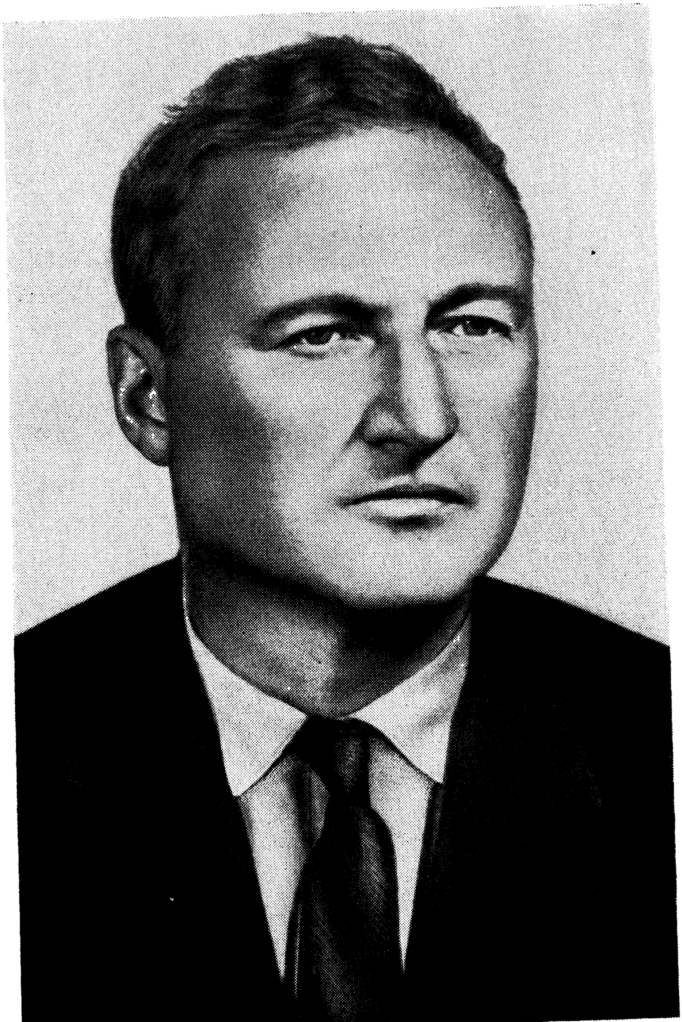
30 июня 1972 г., когда книга была в наборе, скоропостижно скончался

ЮРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЛИННИК.

Наука лишилась одного из выдающихся математиков современности.

В этой монографии отражено развитие идей Юрия Владимировича, открывших новый подход к разложениям вероятностных законов. Больно сознавать, что он не увидит эту книгу напечатанной.

Сентябрь 1972 г. *И. В. Островский*



ЮРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЛИННИК

ВВЕДЕНИЕ

В силу центральной предельной теоремы последовательность нормированных и центрированных сумм неограниченно возрастающего числа независимых случайных величин при выполнении условий Линдеберга сходится по распределению к нормальной случайной величине. Другими словами, сумма большого числа независимых случайных величин, как правило, приближенно нормальна. Возникает вопрос, при каких условиях эта сумма будет в точности нормальна. Оказывается, что это имеет место лишь в том случае, когда каждое из слагаемых является нормальной случайной величиной. Этот результат, предугаданный П. Леви и доказанный в 1936 г. Г. Крамером, привел к возникновению новой области теории вероятностей, занимающейся изучением разложений случайных величин на независимые слагаемые.

Приведем точную формулировку задачи. Случайную величину X_1 назовем компонентой случайной величины X, если можно указать случайную величину X_2 такую, что X_1 и X_2 независимы и

$$X = X_1 + X_2. \tag{0.1}$$

Задача состоит в следующем: дана случайная величина X, требуется получить возможно более полное описание множества всех ее компонент.

Если в определении компоненты опустить условие независимости X_1 и X_2, задача станет бессодержательной, так как величину X_1 можно взять совершенно произвольной и (0.1) будет выполняться с $X_2 = X - X_1$. Условие независимости может накладывать весьма жесткие ограничения на вид компонент. Так, из упомянутого выше результата Г. Крамера следует, что все компоненты нормальной случайной величины нормальны.

В 1937—1938 гг. в области разложений случайных величин интенсивно работали П. Леви, А. Я. Хинчин, Д. А. Райков, которые получили ряд фундаментальных результатов. Наметились аналогии между этой областью и арифметикой. Оказалось, что существуют неразложимые случайные величины, играющие роль простых чисел. Однако, в отличие от арифметики, где всякое целое число имеет простой делитель, не всякая случайная величина имеет неразложимую компоненту. А. Я. Хинчин доказал такую теорему, аналогичную основной теореме арифметики: всякая случайная величина, имеющая неразложимую компоненту, представляется в виде суммы двух независимых слагаемых, одно из которых не имеет неразложимых компонент, а второе есть сумма конечного или счетного числа неразложимых независимых компонент. В отличие от арифметики, такое представление, как правило, не единственно. А. Я. Хинчин доказал также, что класс случайных величин, не имеющих неразложимых компонент (он теперь обозначается через I_0), является собственным подклассом класса безгранично делимых случайных величин. В связи с этим возник вопрос об условиях, выделяющих класс I_0 в классе безгранично делимых случайных величин.

После двадцатилетнего перерыва интерес к разложениям случайных величин возобновился. В конце 50-х годов в работах, посвященных изучению класса I_0, были развиты идеи, установившие глубокие связи проблемы с теорией целых функций. Эти идеи оказались весьма плодотворными и послужили началом многочисленных и разнообразных исследований.

Положение дел в области разложений случайных величин к 1960 г. отражено в монографии Ю. В. Линника [10]. За последующие десять лет в этой области произошли существенные изменения. Некоторые проблемы, отмеченные в упомянутой монографии как нерешенные, получили полное или частичное решение. Результаты, которые первоначально получались с помощью сложной и громоздкой техники, теперь удается получать довольно просто. Возник ряд новых методов, и появились новые проблемы и результаты, представляющие несомненный интерес. Эти изменения отчасти отражены в монографиях Б. Рамачандрана [3] и Э. Лукача [5], однако туда не вошли многие важные достижения, в частности, развившееся в последние годы обобщение — разложения случайных векторов, а также приложения теории к вопросам суммирования случайных величин, не удовлетворяющих условию предельной пренебрегаемости.

В настоящей монографии мы стремились по мере возможности описать состояние теории разложений на 1971 год, но, конечно, не можем претендовать на полноту. В частности, в монографию не вошли тесно связанные с разложениями случайных величин и векторов теории «дельфийских» полугрупп Д. Кендалла [2] и обобщенных сверток К. Урбаника [1].

Главы I и X написаны авторами совместно, главы IV, VII и приложение I написаны Ю. В. Линником, главы II, III, V, VI и приложения II—IV — И. В. Островским. Главы VIII и IX написаны С. Г. Малошевским и Я. Ю. Никитиным; существенную помощь им оказал Ю. Ю. Мачис, предоставивший рукопись находившейся в печати статьи и варианты доказательств.

Сведения, относящиеся к истории рассматриваемых вопросов и ссылки на литературу приведены в комментариях в конце книги.

В. С. Азарин и Л. З. Лившиц внимательно прочитали всю рукопись, и мы благодарны им за замечания, которые в ряде мест позволили избежать неточностей и улучшить текст. Отдельными ценными замечаниями мы обязаны Б. Я. Левину, А. А. Гольдбергу, М. И. Гордину, Л. С. Кудиной и Г. П. Чистякову, которым выражаем искреннюю признательность.

ГЛАВА I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И АНАЛИЗУ

Значительная часть результатов этой главы неоднократно излагалась в различных учебных руководствах и монографиях. Поэтому мы будем приводить доказательства лишь в тех немногих случаях, когда в литературе не удавалось найти удобную для наших приложений формулировку.

§ 1. Результаты по теории вероятностей

Одномерным *вероятностным законом* будем называть неубывающую функцию $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющую условиям:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$
$$F(x) = F(x-0) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

В тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, вместо «одномерный вероятностный закон» будем писать просто «закон». Заметим, что если $F(x)$ — закон, то и $F(ax+b)$, где $a > 0$, $-\infty < b < \infty$,— тоже закон.

Композицией законов $F_1(x)$ и $F_2(x)$ называется закон $F(x)$, определяемый равенством

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-s)\,dF_2(s). \tag{1.1.1}$$

Соотношение (1.1.1) будем символически записывать в виде

$$F = F_1 * F_2.$$

Как известно, операция композиции коммутативна и ассоциативна.

Закон F_1 называется *компонентой* закона F, если существует такой закон F_2, что $F = F_1 * F_2$.

Задачу теории разложений случайных величин можно переформулировать следующим образом. Дан закон F, требуется получить возможно более полное описание множества всех его компонент.

Доказательство эквивалентности этой формулировки и той, которая приводилась во введении, легко получается, так как каждой случайной величине X можно сопоставить закон $F(x) = \text{вер}\,\{X < x\}$, при этом сумме независимых случайных величин отвечает композиция соответствующих законов.

Всякий закон $F(x)$ имеет компоненты. В самом деле, обозначим через $\varepsilon_a(x)$ и будем называть *единичным* закон вида

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 1, & x > a, \\ 0, & x \leqslant a, \end{cases} \qquad -\infty < a < \infty.$$

Тогда имеем $F = \varepsilon_a * (F * \varepsilon_{-a})$, т. е. ε_a и $F * \varepsilon_{-a}$ являются компонентами закона F. Компоненты такого вида называются *несобственными*. В гл. III мы покажем, что существуют законы, имеющие только несобственные компоненты. Такие законы называются *неразложимыми*, они играют роль, аналогичную роли простых чисел в арифметике.

Законы G и H называются *эквивалентными*, $G \sim H$, если для некоторого a, $-\infty < a < \infty$, выполняется $G = H * \varepsilon_a$, т. е. $G(x) = H(x + a)$. Если закон F_1 является компонентой закона F, то и любой закон, эквивалентный F_1, является компонентой для F. В самом деле, из соотношения $F = F_1 * F_2$, очевидно, следует, что $F = (F_1 * \varepsilon_a) * (F_2 * \varepsilon_{-a})$. Поэтому задача об описании множества всех компонент данного закона есть задача об описании всех классов эквивалентных компонент.

Закон $F(x)$ называется *дискретным*, если он является функцией скачков. Всякий *абсолютно непрерывный* закон представляется в виде $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(u)\,du$, где $p(u) = F'(u)$ — неотрицательная суммируемая по Лебегу функция, называемая *вероятностной плотностью*. Непрерывный закон $F(x)$, для которого почти всюду в смысле меры Лебега выполняется $F'(x) = 0$, называется *сингулярным*. По классической теореме Лебега всякий закон $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + a_3F_3(x),$$

где F_1 — дискретный, F_2 — абсолютно непрерывный, F_3 — сингулярный законы, a_1, a_2, a_3 — неотрицательные постоянные, такие, что $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Дискретный закон $F(x)$, точки разрыва которого содержатся в арифметической прогрессии с разностью $h > 0$, называется *решетчатым* законом с *шагом* h.

Моментом k-го порядка закона $F(x)$ называется величина

$$m_k(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\,dF(x) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

а *абсолютным моментом* k-го порядка — величина

$$n_k(F) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k\,dF(x) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Существование k-го момента, очевидно, эквивалентно существованию k-го абсолютного момента *), причем выполнено неравенство $|m_k(F)| \leqslant n_k(F)$, которое для четных k обращается в равенство.

Аналитический аппарат, который будет использован в настоящей монографии, основан на понятии характеристической функции.

Характеристической функцией закона $F(x)$ называется функция $\varphi(t;\ F)$, $-\infty < t < \infty$, определяемая равенством

$$\varphi(t;\ F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x).$$

---

*) Мы считаем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{\substack{M\to+\infty \\ N\to-\infty}} \int\limits_{N}^{M}$.

Если закон $F(x)$ абсолютно непрерывен, то

$$\varphi(t;\ F)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx,$$

где $p(x)$ — вероятностная плотность.

В дальнейшем для записи термина «характеристическая функция» будем использовать сокращение «х. ф.».

Легко видеть, что всякая х. ф. $\varphi(t)=\varphi(t;\ F)$ обладает свойствами:

(i) $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0)=1, \quad -\infty < t < \infty;$ (1.1.2)

(ii) $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < t < \infty$;

(iii) $\varphi(t)=\overline{\varphi(-t)}, \quad -\infty < t < \infty$

(черта обозначает переход к комплексно-сопряженной величине).

Если закон F_1 связан с законом F равенством $F_1(x) = F(ax+b),\ a>0,\ -\infty<b<\infty$, то

$$\varphi(t;\ F_1)=e^{-ibt/a}\,\varphi(t/a;\ F),$$

а если равенством $F_1(x)=1-F(-x+0)$, то

$$\varphi(t;\ F_1)=\varphi(-t;\ F)=\overline{\varphi(t;\ F)}.$$

Приведем теоремы о х. ф., используемые в последующих главах книги. В тех случаях, когда мы не помещаем доказательство, его можно найти в книгах Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1], В. Феллера [1].

Теорема 1.1.1. *Закон однозначно определяется своей х. ф. Справедлива формула обращения*

$$F(b)-F(a)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\,\varphi(t;\ F)\,dt,$$

где a и b, $-\infty<a<b<\infty$, — любые точки непрерывности закона F.

Теорема 1.1.2. *Соотношение $F=F_1 * F_2$ эквивалентно соотношению*

$$\varphi(t;\ F)=\varphi(t;\ F_1)\,\varphi(t;\ F_2), \qquad -\infty<t<\infty.$$

Таким образом, задача об описании множества всех компонент данного закона эквивалентна задаче об описании разложений его х. ф. на множители, являющиеся х. ф. Заметим, что $\varphi(t;\ \varepsilon_a) = e^{iat}$, поэтому х. ф. эквивалентных законов отличаются множителем e^{iat}.

Задаче можно придать еще одну формулировку.

Напомним, что непрерывная функция $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, называется *эрмитово-положительной*, если для любого конечного набора действительных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$ квадратичная форма

$$\sum_{j,\ k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k$$

неотрицательна.

Теорема 1.1.3 (С. Бохнер — А. Я. Хинчин). *Для того чтобы функция $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 1$, являлась х. ф. некоторого закона, необходимо и достаточно, чтобы она была эрмитово-положительной.*

Отсюда следует, что задача об описании множества компонент данного закона эквивалентна задаче об описании разложений некоторой эрмитово-положительной функции (именно, х. ф. этого закона) на множители, являющиеся эрмитово-положительными функциями.

Теорема 1.1.4 (Леви). а) *Если последовательность законов $F_k(x)$ слабо сходится* *) *к закону $F(x)$, то последовательность х. ф. $\varphi(t;\ F_k)$ сходится к х. ф. $\varphi(t;\ F)$ равномерно на каждом конечном интервале.*

б) *Если последовательность законов $F_k(x)$ такова, что соответствующая последовательность х. ф. $\varphi(t;\ F_k)$ поточечно сходится к некоторой функции $\varphi(t)$, непрерывной в точке $t = 0$, то последовательность $F_k(x)$ слабо сходится к некоторому закону $F(x)$, причем $\varphi(t) = \varphi(t;\ F)$.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что класс всех х. ф. замкнут относительно операции предельного перехода, равномерного на каждом конечном интервале. По теореме 1.1.2 этот класс замкнут относительно операции умножения. Легко видеть, что имеет место замкнутость и относительно операции взятия выпуклой линей-

*) Напомним, что последовательность законов $F_k(x)$ называется слабо сходящейся к закону $F(x)$, если $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = F(x)$ в каждой точке непрерывности закона $F(x)$.

ной комбинации, т. е. функция

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(t;\ F_k) \qquad \left(c_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} c_k = 1\right)$$

является х. ф., именно х. ф. закона $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k F_k(x)$.

Теорема 1.1.5. *Пусть* $g(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k$ — *степенной ряд с неотрицательными коэффициентами, сходящийся в замкнутом круге* $|\zeta| \leqslant 1$, *а* $\varphi(t) = \varphi(t;\ F)$ — *некоторая х. ф. Тогда функция* $\psi(t) = g(\varphi(t))/g(1)$ *является х. ф.*

Доказательство. Функция

$$\psi_N(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \varphi^k(t) / \sum_{k=0}^{N} b_k$$

является выпуклой линейной комбинацией х. ф.:

$$1\ (= \varphi\ (t;\ \varepsilon_0)),\ \varphi\ (t),\ \varphi^2\ (t),\ \ldots,\ \varphi^N\ (t),$$

поэтому $\psi_N\ (t)$ — х. ф. Так как последовательность $\psi_N\ (t)$ равномерно на всей оси $-\infty < t < \infty$ сходится к функции $\psi\ (t)$, то, в силу замкнутости класса х. ф. относительно операции равномерного предельного перехода, $\psi\ (t)$ является х. ф.

Из теоремы 1.1.5 следует, что если $\varphi\ (t)$ — х. ф., то и $\exp\ \{\varphi\ (t) - 1\}$ — х. ф. Этот результат известен под названием теоремы де Финетти.

Заметим, что квадрат модуля х. ф. является х. ф. Действительно, если

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \quad \text{то} \quad \varphi(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_1(x),$$

где $F_1(x)$ — закон, определяемый равенством $F_1(x) = 1 - F(-x+0)$. По теореме 1.1.2 является х. ф. функция

$$\varphi(t)\, \varphi(-t) = \varphi(t)\, \overline{\varphi(t)} = |\varphi(t)|^2.$$

Существуют х. ф. отличные от нуля лишь на конечном интервале. Простейшим примером является функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

Прямым вычислением нетрудно убедиться в том, что она является х. ф. абсолютно непрерывного закона с вероятностной плотностью

$$p(x)=\frac{2}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{2}.$$

Можно указать две различные х. ф., совпадающие в некоторой окрестности точки $t=0$. В самом деле, пусть $\varphi_1(t)$ — функция, являющаяся периодическим продолжением с периодом 2 функции $1-|t|$ ($|t|\leqslant 1$). Разложение функции $\varphi_1(t)$ в ряд Фурье имеет вид

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi t.$$

Поэтому можно записать, что

$$\varphi_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF_1(x),$$

где $F_1(x)$ — дискретный закон, скачок которого в точке 0 равен 1/2, а скачки в точках $(2n+1)$ и $(-2n-1)$ равны $2(2n+1)^{-2}\pi^{-2}$ ($n=0, 1, 2, \ldots$). Мы имеем $\varphi(t)=\varphi_1(t)$ при $|t|\leqslant 1$, но $\varphi(t)\neq\varphi_1(t)$ при $|t|>1$. Заметим, что $\varphi(t)\varphi_1(t)=\varphi^2(t)$, следовательно, для соответствующих законов выполняется $F*F_1=F*F$, хотя $F_1\neq F$.

Рассмотрим х. ф. решетчатых законов. Очевидно, если закон $F(x)$ — решетчатый с шагом $h>0$, то

$$\varphi(t;\ F)=e^{it\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikht},$$

где α — действительное число, $c_k=F(\alpha+kh+0)-F(\alpha+kh)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Поэтому $|\varphi(t;\ F)|$ является периодической с периодом $2\pi/h$ функцией. Это необходимое условие решетчатости закона является также и достаточным, более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.6. *Если для некоторого $h>0$ выполняется*

$$|\varphi(2\pi/h;\ F)|=1,$$

то закон F является решетчатым с шагом h.

В самом деле, полагая $\varphi(2\pi/h;\ F) = e^{i\alpha}$, имеем

$$0 = 1 - |\varphi(2\pi/h;\ F)| = \operatorname{Re}[1 - e^{-i\alpha}\varphi(2\pi/h;\ F)] =$$
$$= \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - \exp\left(\frac{2\pi i x}{h} - \alpha i\right)\right] dF(x) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{h}x - \alpha\right)\right] dF(x).$$

Так как подынтегральная функция в последнем интеграле неотрицательна и обращается в нуль при $x = \frac{\alpha h}{2\pi} + kh$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то закон $F(x)$ не может иметь точек роста *) вне множества $\left\{\frac{\alpha h}{2\pi} + kh\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$; это означает, что он является решетчатым с шагом h.

Очевидно, из теорем 1.1.6 и 1.1.2 следует, что композиция решетчатых законов с шагом h является решетчатым законом с шагом h. Нетрудно доказать также следующее утверждение.

Теорема 1.1.7. *Если закон $F(x)$ — решетчатый с шагом $h > 0$, то и все его компоненты — решетчатые с шагом h.*

Действительно, пусть $F = F_1 * F_2$, тогда

$$\varphi(t;\ F) = \varphi(t;\ F_1)\,\varphi(t;\ F_2), \qquad -\infty < t < \infty.$$

Так как закон F — решетчатый с шагом h, то $|\varphi(2\pi/h;\ F)| = 1$, и, следовательно,

$$1 = |\varphi(2\pi/h;\ F_1)|\,|\varphi(2\pi/h;\ F_2)|.$$

Учитывая (1.1.2), получаем $|\varphi(2\pi/h;\ F_1)| = |\varphi(2\pi/h;\ F_2)| = 1$. По теореме 1.1.6 законы F_1 и F_2 являются решетчатыми с шагом h.

Среди решетчатых законов выделяются законы, скачки которых расположены в целых точках. Условимся называть такие законы *целочисленными*. Заметим, что рассмотрение решетчатого закона с шагом h можно свести к рассмотрению целочисленного закона переходом от $F(x)$ к $F(xh + \alpha)$, где α — некоторое действительное число.

---

*) Точка x называется точкой роста неубывающей функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) > 0$.

Х. ф. целочисленного закона имеет вид

$$\varphi(t;\ F)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \tag{1.1.3}$$

где $c_k = F(k+0) - F(k)$.

При изучении целочисленных законов удобно пользоваться, вместо х. ф., *производящими функциями*, которые определяются на окружности $|z| = 1$ равенством

$$\psi(z;\ F)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \qquad (c_k=F(k+0)-F(k)).$$

Производящие функции, очевидно, связаны с х. ф. равенством $\varphi(t;\ F) = \psi(e^{it};\ F)$, поэтому, если законы F_1 и F_2 целочисленны и $F = F_1 * F_2$, то

$$\psi(z;\ F) = \psi(z;\ F_1)\,\psi(z;\ F_2).$$

Пусть F — целочисленный закон и $F = F_1 * F_2$, где F_1 и F_2 — некоторые законы. По теореме 1.1.7 законы F_1 и F_2 являются решетчатыми с шагом 1. Поэтому

$$\varphi(t;\ F_j)=e^{it\alpha_j}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kj} e^{ikt}$$

$$(c_{kj}=F_j(k+\alpha_j+0)-F(k+\alpha_j)).$$

Так как $\varphi(t;\ F)$ представляется в виде (1.1.3) и $\varphi(t;\ F) = \varphi(t;\ F_1)\,\varphi(t;\ F_2)$, то сумма $\alpha_1 + \alpha_2$ должна быть целым числом. Отсюда следует, что законы

$$\widetilde{F}_1 = F_1 * \varepsilon_{\alpha_2},\quad \widetilde{F}_2 = F_2 * \varepsilon_{-\alpha_2}$$

являются целочисленными. Очевидно, $F = \widetilde{F}_1 * \widetilde{F}_2$ и, следовательно, $\psi(z;\ F) = \psi(z;\ \widetilde{F}_1)\,\psi(z;\ \widetilde{F}_2)$.

Тем самым доказано, что при изучении компонент целочисленного закона можно ограничиться изучением его целочисленных компонент и это сводится к изучению разложений его производящей функции на множители, являющиеся производящими функциями.

Закон F называется *безгранично делимым* (сокращенно — б. д.), если, каково бы ни было натуральное число n, закон F можно представить в виде композиции n одинаковых законов. С помощью х. ф. определение б. д. закона можно переформулировать так. Закон F называется б. д., если для любого натурального n существует х. ф. $\varphi_n(t)$ такая, что $\varphi(t;\ F)=\varphi_n^n(t)$.

Доказательства теорем 1.1.8—1.1.10, связанных с х. ф. б. д. законов, можно найти в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1]. В Приложении I приводится другое доказательство теоремы 1.1.8, основанное на теореме Крейна — Мильмана.

Теорема 1.1.8. *Для того, чтобы функция* $\varphi(t)$ *являлась х. ф. б. д. закона, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление* (формула Леви — Хинчина)

$$\varphi(t)=\exp\left\{i\beta t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}, \tag{1.1.4}$$

где β *— действительное число,* $G(x)$ *— неубывающая функция ограниченной вариации на оси* $(-\infty,\ \infty)$, *а подынтегральное выражение при* $x=0$ *считается равным* $(-t^2/2)$. *При нормировке* $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=0$, $G(x-0)=G(x)$ *указанное представление единственно.*

Теорема 1.1.9. *Для того, чтобы функция* $\varphi(t)$ *являлась х. ф. б. д. закона, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление* (формула Леви)

$$\varphi(t)=\exp\left\{i\beta t-\gamma t^2+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dM(x)+\right.$$
$$\left.+\int_{+0}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dN(x)\right\}, \tag{1.1.5}$$

где β *— действительное,* γ *— неотрицательное числа,* $M(x)$ *и* $N(x)$ *— неубывающие функции соответственно на* $(-\infty,\ 0)$ *и* $(0,\ \infty)$, *причем выполнены условия:*

$$\lim_{x\to-\infty}M(x)=\lim_{x\to+\infty}N(x)=0,\quad M(x-0)=M(x),$$
$$N(x-0)=N(x),$$
$$\int_{-\infty}^{-0}\frac{x^2}{1+x^2}\,dM(x)+\int_{+0}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,dN(x)<\infty.$$

Указанное представление единственно.

Заметим, что теоремы 1.1.8 и 1.1.9 легко выводятся одна из другой. В частности, чтобы вывести теорему 1.1.9 из теоремы 1.1.8, достаточно положить

$$M(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u),\qquad -\infty<x<0,$$

$$N(x)=-\int_{x}^{\infty}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\qquad 0<x<\infty,$$

$$2\gamma=G(+0)-G(0).$$

Теорема 1.1.10. *Если х. ф. некоторого закона допускает представление формулой* (1.1.4), *где* $G(x)$ — *функция ограниченной вариации на оси* (*не обязательно неубывающая*), *удовлетворяющая условиям* $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$, $G(x-0)=G(x)$, *то такое представление единственно.*

Заметим, что теорема, аналогичная теореме 1.1.10, справедлива и для представления (1.1.5).

Будем называть *пуассоновым спектром* б. д. закона F множество всех отличных от нуля точек роста функции $G(x)$, фигурирующей в представлении его х. ф. формулой Леви — Хинчина. Очевидно, вместо точек роста функции $G(x)$ можно брать точки роста функций $M(x)$ и $N(x)$, фигурирующих в формуле Леви. Говорим, что б. д. закон имеет гауссову компоненту, если в формуле Леви — Хинчина имеем $G(+0)-G(0)>0$ или — что эквивалентно — в формуле Леви имеем $\gamma>0$.

Теорема 1.1.11. *Решетчатый б. д. закон не имеет гауссовой компоненты, и его пуассонов спектр содержится во множестве чисел вида* $x=kh$ $(k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, *где* h — *шаг закона.*

Действительно, если б. д. закон F является решетчатым с шагом $h>0$, то имеем

$$1=|\varphi(2\pi/h;\ F)|=$$

$$=\left|\exp\left\{i\beta\frac{2\pi}{h}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{2\pi ix/h}-1-\frac{2\pi ix/h}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}\right|=$$

$$=\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos\frac{2\pi x}{h}-1\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{h}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)=0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна и обращается в нуль лишь при $x = kh$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то точки роста функции $G(x)$ находятся среди точек $x = kh$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 2. Результаты по теории функций комплексного переменного

Мы приведем только результаты, выходящие за рамки обычных университетских курсов.

Теорема 1.2.1 (Э. Фрагмен и Э. Линделеф). *Пусть D — угол раствора π/α $(1/2 \leqslant \alpha < \infty)$ с вершиной в начале координат, а $f(z)$ — функция, аналитическая внутри и на границе D. Предположим, что на границе D выполняется*

$$|f(z)| \leqslant M, \tag{1.2.1}$$

а всюду в D выполняется

$$f(z) = O(\exp(|z|^{\rho})), \qquad |z| \to \infty, \tag{1.2.2}$$

где $\rho < \alpha$. Тогда неравенство (1.2.1) выполняется всюду в D.

Теорема 1.2.2 (Э. Фрагмен и Э. Линделеф). *Утверждение теоремы 1.2.1 сохранит силу, если условие (1.2.2) заменить более слабым:*

$$|f(z)| \leqslant \exp\{o(|z|^{\alpha})\}, \qquad |z| \to \infty.$$

В частности, если D — полуплоскость и на ее границе выполняется (1.2.1), а всюду в D выполняется

$$|f(z)| \leqslant \exp\{o(|z|)\}, \qquad |z| \to \infty,$$

то (1.2.1) справедливо всюду в D.

Доказательства этих теорем можно найти в книгах: Б. Я. Левин [1], стр. 69—71, А. И. Маркушевич [1], стр. 211, Е. Титчмарш [1], стр. 204—205.

Целой функцией называется функция, аналитическая во всей комплексной плоскости C^1. Нам понадобится ряд теорем о целых функциях. Доказательство этих теорем можно найти в гл. I книги Б. Я. Левина [1], гл. VII книги А. И. Маркушевича [1], гл. VIII книги Е. Титчмарша [1].

Теорема 1.2.3. *Если целая функция $f(z)$ допускает оценку*

$$f(z) = O(|z|^n), \qquad |z| \to \infty,$$

то $f(z)$ — полином степени не выше n.

Теорема 1.2.4. *Если целая функция $f(z)$ не имеет корней, то она допускает представление $f(z) = e^{g(z)}$, где $g(z)$ — целая функция. Если $f(0) = 1$, то можно считать, что $g(0) = 0$.*

Пусть $f(z)$ — целая функция. Положим

$$M(r, f) = \max_{|z| \leqslant r} |f(z)|.$$

Порядком функции $f(z)$ называется число

$$\rho = \rho(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}.$$

Порядок можно определять также как точную нижнюю грань множества чисел $A > 0$ таких, что для всех достаточно больших r выполняется

$$M(r, f) < \exp(r^A)$$

(если таких чисел A нет, то порядок считается равным ∞).

Теорема 1.2.5. *Пусть целые функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют соответственно порядки ρ_1 и ρ_2. Тогда порядки функций $f_1(z) f_2(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$ не превосходят* $\max(\rho_1, \rho_2)$.

Рост целых функций одного и того же порядка ρ различается с помощью *величины типа*. Величиной типа целой функции $f(z)$ порядка ρ называется число

$$\sigma = \sigma(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho}.$$

Величину типа можно определять также как точную нижнюю грань множества чисел $B > 0$ таких, что для всех достаточно больших r выполняется

$$M(r, f) < \exp(Br^\rho)$$

(если таких чисел B нет, то величина типа считается равной ∞). Если $\sigma = 0$, то говорят, что целая функция $f(z)$ имеет минимальный, если $0 < \sigma < \infty$,— нормальный, если $\sigma = \infty$,— максимальный тип.

В качестве примеров приведем целые функции $\exp\{Cz^n\}$, $\sin\{Cz^n\}$ $(C>0)$, $\cos\sqrt{z}$, $1/\Gamma(z)$. Первые две из них имеют порядок n $(=1, 2, \ldots)$ и величину типа C, третья — порядок $1/2$ и величину типа 1, четвертая — порядок 1 и величину типа ∞. Существуют целые функции любого наперед заданного порядка $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$ с любой наперед заданной величиной типа $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$.

Нам понадобится еще понятие о показателе сходимости последовательности. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечной предельной точки. Будем считать, что последовательность занумерована в порядке неубывания величин $|a_k|$, и не будем исключать возможности, что некоторые из чисел a_k совпадают. *Показателем сходимости* последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется точная нижняя грань множества тех чисел $\lambda>0$, для которых сходится ряд

$$\sum_{a_k\neq 0} |a_k|^{-\lambda}$$

(если этот ряд расходится при любом $\lambda>0$, показатель сходимости считается равным ∞).

Теорема 1.2.6. *Показатель сходимости последовательности корней целой функции не превосходит порядка этой функции.*

Класс целых функций, для которых порядок равен показателю сходимости последовательности корней, можно выделить следующим образом. Пусть последовательность $\{a_k\}$ не содержит нуля и имеет конечный показатель сходимости. Обозначим через q наименьшее целое неотрицательное число такое, что $\sum\limits_k |a_k|^{-q-1}<\infty$.

Каноническим множителем Вейерштрасса назовем функцию

$$E(z;q)=\begin{cases} 1-z, & \text{если } q=0,\\ (1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^q}{q}\right), & \text{если } q>0.\end{cases}$$

Теорема 1.2.7. *Бесконечное произведение*

$$\pi(z;q)=\prod_k E\left(\frac{z}{a_k},q\right)$$

сходится абсолютно и равномерно в любом конечном круге *) *и является целой функцией, обращающейся в нуль в точках* a_k *и только в них. Эта функция называется каноническим произведением Вейерштрасса рода* q.

Теорема 1.2.8. *Порядок канонического произведения Вейерштрасса равен показателю сходимости последовательности корней.*

Следующая теорема, принадлежащая Адамару, дает общий вид целой функции конечного порядка.

Теорема 1.2.9. *Если целая функция* $f(z)$ *имеет конечный порядок* ρ, *то она представляется в виде*

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \pi(z;\ q), \tag{1.2.3}$$

где m — *целое неотрицательное число,* $P(z)$ — *полином степени не выше* ρ, $\pi(z;\ q)$ — *каноническое произведение Вейерштрасса рода* $q \leqslant \rho$ (*если* $f(z)$ *не имеет корней, считаем, что* $\pi(z;\ q) \equiv 1$).

Следствие. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция конечного порядка* ρ, ρ_1 — *показатель сходимости последовательности ее корней. Справедливо представление* $f(z) = e^{P(z)} \pi(z)$, *где* $P(z)$ — *полином степени* $\leqslant \rho$, *а* $\pi(z)$ — *целая функция порядка* ρ_1.

Для доказательства следствия представим функцию $f(z)$ в форме (1.2.3). Так как все корни функции $f(z)$, кроме, быть может, корня в нуле, совпадают с корнями $\pi(z;\ q)$, то показатель сходимости последовательности корней последней функции тоже равен ρ_1. По теореме 1.2.8 порядок $\pi(z;\ q)$ равен ρ_1. Полагая $\pi(z) = z^m \pi(z;\ q)$ и замечая, что от умножения на z^m порядок измениться не может, получаем доказываемое утверждение.

Теорема 1.2.10. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция порядка* $\rho < \beta < \infty$. *Можно указать на плоскости систему кружков с конечной суммой радиусов такую, что если точка* z *не принадлежит кружкам, то справедлива оценка снизу*

$$\ln |f(z)| > -|z|^{\beta}.$$

Теорема 1.2.11. *Для того чтобы степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

*) Точнее говоря, в каждом конечном круге сходится абсолютно и равномерно некоторый остаток произведения.

представлял целую функцию порядка ρ с величиной типа σ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln (1/|c_n|)}, \quad (\sigma e \rho)^{1/\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} (n^{1/\rho} |c_n|^{1/n}).$$

В частности, если $c_n = o(n^{-2n})$, то $f(z)$ — целая функция, допускающая оценку

$$|f(z)| \leqslant \exp\{o(|z|^{1/2})\}, \qquad |z| \to \infty.$$

Наконец, отметим следующую теорему, дополняющую теорему 1.2.4.

Теорема 1.2.12. *Пусть $g(z)$ — целая функция и $f(z) = e^{g(z)}$. Справедливо неравенство*

$$M(r, g) \leqslant 4 \ln M\left(\frac{3}{2} r, f\right) + 5 |g(0)|.$$

Эта теорема является простым следствием известного неравенства Каратеодори, дающего оценку модуля целой функции через ее действительную часть. Это неравенство имеет вид (см., например, Б. Я. Левин [1], стр. 28)

$$M(r, g) \leqslant \frac{2r}{R-r} [A(R, g) - \operatorname{Re} g(0)] + |g(0)|,$$

$$0 \leqslant r < R < \infty,$$

где $A(R, g) = \max\limits_{|z| \leqslant R} \operatorname{Re} g(z)$. Так как $\operatorname{Re} g(z) = \ln |f(z)|$, то

$$A(R, g) = \ln M(R, f).$$

Полагая в неравенстве Каратеодори $R = \frac{3}{2} r$, получим

$$M(r, g) \leqslant 4A\left(\frac{3}{2} r, g\right) + 5|g(0)| =$$

$$= 4 \ln M\left(\frac{3}{2} r, f\right) + 5|g(0)|,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Производные числа Дини и их свойства

Пусть $f(x)$ — однозначная функция, заданная на сегменте $[a, b]$.

Выражения

$$D_x^+ f = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad d_x^+ f = \underline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D_x^- f = \overline{\lim_{h\to-0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad d_x^- f = \underline{\lim_{h\to-0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

называются производными числами Дини, соответственно правым верхним, правым нижним, левым верхним и левым нижним. Для них допускаются и значения $\pm\infty$.

Нам важна будет следующая теорема (см. Валле-Пуссен [1], стр. 97, 98).

Теорема 1.3.1. *Пусть L и l — точные верхняя и нижняя грани какого-либо одного из четырех производных чисел Дини функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$* *). *Тогда*

$$l \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant L. \tag{1.3.1}$$

Рассмотрим для определенности правую верхнюю производную (этого достаточно, ибо при заменах $x \to -x$, $f \to -f$ ее можно перевести в любую из трех остальных). Докажем сперва правое неравенство в (1.3.1). Если бы оно не выполнялось, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имели бы

$$f(b) - f(a) - (L+\varepsilon)(b-a) > 0.$$

Составим непрерывную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (L+\varepsilon)(x-a).$$

При значениях x, достаточно близких к a, она отрицательна, ибо $D_a^+ f \leqslant L < L + \varepsilon$. Далее, $\varphi(b) > 0$. Значит, $\varphi(x)$ имеет корни в интервале (a, b). Пусть c — крайний правый ее корень (множество этих корней замкнуто в силу непрерывности $\varphi(x)$). Тогда $\varphi(x) - \varphi(c) > 0$, если $b \geqslant x > c$, т. е.

$$f(x) - f(c) - (L+\varepsilon)(x-c) > 0 \qquad (b \geqslant x > c).$$

*) При определении верхней и нижней грани производные справа в точке b и слева в точке a в расчет не принимаются, так как они не определены.

Но тогда $D_c^+ f \geqslant L + \varepsilon > L$, что невозможно. Итак, правое неравенство в (1.3.1) верно.

Пусть нарушается левое неравенство в (1.3.1). Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$f(b) - f(a) - (l - \varepsilon)(b - a) < 0.$$

Полагаем $\varphi(x) = f(x) - f(a) - (l - \varepsilon)(x - a)$, $\varphi(b) < 0$.

При значениях x, близких к a, $\varphi(x) > 0$, ибо $D_a^+ f \geqslant \geqslant l > l - \varepsilon$, так что $\varphi(x)$ имеет корни в (a, b).

Пусть c — крайний правый корень; при $b \geqslant x > c$ имеем $\varphi(x) < 0$ и $\varphi(x) - \varphi(c) < 0$, так что $f(x) - f(c) - (l - \varepsilon)(x - c) < 0$ при $b \geqslant x > c$. Тогда $D_c^+ f \leqslant l - \varepsilon < l$, что невозможно. Этим (1.3.1) доказано полностью.

§ 4. Простейшие свойства непрерывных дробей

В теории разложения б. д. законов нам понадобятся некоторые элементарные свойства непрерывных (цепных) дробей, изложенные, например, в первых параграфах книги А. Я. Хинчина [6]. Всякое положительное число α можно изобразить в виде $\alpha = a_0 + \alpha_1$, где $a_0 = [\alpha]$ — целая часть α, а $\alpha_1 = \{\alpha\}$ — дробная часть α. Если $\alpha_1 \neq 0$, полагаем $\alpha_1 = 1/r_1$, $r_1 > 1$; $r_1 = a_1 + \alpha_2$, где $a_1 = [r_1]$, $\alpha_2 = \{r_1\}$. Если $\alpha_2 \neq 0$, полагаем $\alpha_2 = 1/r_2$, $r_2 > 1$ и действуем далее таким же образом. Получаем разложение α в непрерывную дробь

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} \tag{1.4.1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — неполные частные дроби. Если α рационально, то дробь получается конечной; если же α иррационально, то дробь бесконечна; разложение числа α в непрерывную дробь однозначно.

В дроби (1.4.1) мы можем выделить часть, содержащую первые $n + 1$ неполных частных $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots \, \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{1.4.2}$$

Записывая (1.4.2) в виде несократимой дроби P_n/Q_n, получим n-ю подходящую дробь P_n/Q_n для числа α.

При этом имеют место формулы (см., например, А. Я. Хинчин [6], стр. 11—17) для любого $n \geqslant 2$:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, \end{aligned}\right\} \tag{1.4.3}$$

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}, \tag{1.4.4}$$

$$Q_n \geqslant 2Q_{n-2}, \quad Q_n > 2^{(n-1)/2}, \tag{1.4.5}$$

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leqslant \frac{1}{Q_n \tau}, \tag{1.4.6}$$

где $\tau > 1$ — любое число, а P_n/Q_n есть подходящая дробь, такая, что знаменатель ее Q_n есть наибольшее из чисел ряда Q_1, Q_2, Q_3, ..., не превосходящее τ.

§ 5. Элементарная формула преобразования тэта-функций

При изучении б. д. законов, имеющих гауссову компоненту, нам понадобятся свойства простейшей тэта-функции $\vartheta(\omega, \xi)$. Пусть ω — комплексное число с $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ (лежащее в правой полуплоскости), а ξ — реальное число.

Тэта-функции $\vartheta(\omega, \xi)$ определяется рядом

$$\vartheta(\omega, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2 \omega) \exp(2\pi i m \xi). \tag{1.5.1}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно по своим переменным при $\mathrm{Re}\,\omega \geqslant \delta_0 > 0$; при данном ω его можно рассматривать как задание $\vartheta(\omega, \xi)$ рядом Фурье.

Для нас важна будет

Т е о р е м а 1.5.1. *Справедлива формула*

$$\vartheta(\omega, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2 \omega) \exp(2\pi i m \xi) =$$

$$= \omega^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi \frac{(\xi - m)^2}{\omega}\right). \tag{1.5.2}$$

Здесь берется значение $\omega^{-1/2}$, положительное при положительных ω.

При $\xi = 0$ формула (1.5.2) дает известную формулу преобразования простейших тэта-функций

$$\vartheta(\omega, 0) = \omega^{-1/2}\vartheta(1/\omega, 0). \tag{1.5.3}$$

Для доказательства формулы (1.5.2) рассмотрим, при данных ω и ξ, вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi(m+x)^2\omega). \tag{1.5.4}$$

Это — непрерывная периодическая функция x с периодом 1, она имеет ограниченную производную $\varphi'(x)$ и потому совпадает со своим рядом Фурье всюду. Если положим

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i n x), \tag{1.5.5}$$

то

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x)\exp(-2\pi i n x)\,dx =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \exp(-\pi(m+x)^2\omega - 2\pi i n x)\,dx =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \exp(-\pi(m+x)^2\omega - 2\pi i n(x+m))\,dx, \tag{1.5.6}$$

ибо $\exp(-2\pi i n m) = 1$ для любых целых m и n. Почленное сложение интегралов (1.5.6) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi y^2\omega)\exp(-2\pi i n y)\,dy. \tag{1.5.7}$$

При этом легко видеть законность такого сложения. Для вычисления интеграла (1.5.7) будем сначала считать $\omega > 0$ и введем новую переменную $v = y\sqrt{2\pi\omega}$, так что (1.5.7) перепишется в виде

$$\omega^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\exp\left(-ivn\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\right)dv. \tag{1.5.8}$$

Написанный интеграл есть х. ф. нормального закона при аргументе $n\sqrt{2\pi/\omega}$. Поэтому (1.5.8) дает

$$\omega^{-1/2}\exp(-\pi n^2/\omega). \tag{1.5.9}$$

Если теперь ω уже не положительное, а комплексное число с $\operatorname{Re}\omega > 0$, то для (1.5.8) сохраняется значение (1.5.9) по принципу аналитического продолжения; при этом для $\omega^{-1/2}$ берется значение, положительное при положительных ω.

Теперь (1.5.5) дает

$$\varphi(x)=\omega^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi n^2/\omega)\exp(2\pi inx)=$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi(m+x)^2\omega) \tag{1.5.10}$$

в силу (1.5.4). Далее, из (1.5.10) видно, что $\varphi(x)$ — четная функция x: $\varphi(x)=\varphi(-x)$. Полагая $x=-\xi$ и заменяя ω на $1/\omega$ (что не выводит значений из правой полуплоскости), приходим к формуле (1.5.2).

Более подробные сведения о свойствах тэта-функций можно найти, например, в книге Н. И. Ахиезера [2].

§ 6. Простейшие применения метода перевала

Метод перевала, называемый иногда методом седловых точек или методом наискорейшего спуска, восходит еще к Б. Риману; первые его применения к проблемам теоретической физики были даны П. Дебаем в 1909 г. Нам он понадобится в применении к наиболее простому классу задач — выводу асимптотики интегралов вида

$$I(X)=\int_C \exp(Xf(z)+\psi(z))\,dz, \tag{1.6.1}$$

при этом $f(z)$ и $\psi(z)$ будут предполагаться регулярными в некоторой односвязной замкнутой области комплексного переменного z; контур C — спрямляемый контур между данными точками A и B этой области; X — реальный параметр. По теореме Коши значение (1.6.1) не зависит от контура C в классе спрямляемых контуров между A и B, лежащих в указанной области регулярности. Мы интересуемся асимптотикой $I(X)$ при $X\to\infty$. Примем, что при z, приближающихся к концам контура, и при $X \to \infty$ подынтегральная функция достаточно быстро стремится к 0. (Мы специально ограничиваемся описательным изложением метода перевала, имея в виду его безупречное применение в нужных нам частных случаях.) Имеем

$$|\exp(Xf(z) + \psi(z))| = \exp(X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re} \psi(z)). \tag{1.6.2}$$

Если рассмотрим поверхность модуля (1.6.2) в декартовых координатах u, x, y, то ввиду того, что функция $X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re} \psi(z)$ гармоническая, поверхность модуля не будет иметь внутри нашей области ни максимумов, ни минимумов. Если внутри области есть точки, где $Xf'(z) + \psi'(z) = 0$, то в этих точках $\frac{\partial}{\partial x}(X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re} \psi(z)) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re} \psi(z)) = 0$. В силу монотонности экспонентной функции такие точки будут седловыми (точками перевала) для нашей поверхности модуля: седла будут иметь простейший вид, если в этих точках $Xf''(z) + \psi''(z) \neq 0$.

Во многих случаях для вывода асимптотики $I(X)$ полезно провести контур C через точку перевала так, чтобы выражение $X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re} \psi(z)$ как можно быстрее уменьшалось (происходил наискорейший спуск). Если седло простейшего типа, то можно заметить, что наискорейший спуск будет происходить по ортогональной к линии уровня траектории $X \operatorname{Im} f(z) + \operatorname{Im} \psi(z) = \mathrm{const}$. Таким образом, целесообразно выбрать контур C так, чтобы в окрестности точки перевала он проходил через эту точку и на этом контуре $X \operatorname{Im} f(z) + \operatorname{Im} \psi(z) = \mathrm{const}$. Мы можем рассматривать эти соображения как эвристические и, проведя контур требуемого ими вида, производить с его помощью асимптотическое вычисление $I(X)$, если это оказывается удобным. Иногда удобнее заменять этот контур на какой-либо близкий к нему, но более простой (скажем, прямолинейный) в окрестности точки перевала.

Более подробные сведения о методе перевала можно найти, например, в книге Н. Г. де Брейна [1].

Г Л А В А II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аналитические свойства х. ф. $\varphi(t;\ F)$ связаны со скоростью убывания при $x \to +\infty$ «хвостов» закона $F(x)$: функций $1 - F(x)$ и $F(-x)$. Мы найдем сначала условия, обеспечивающие дифференцируемость х. ф. заданное число раз, а затем перейдем к условиям аналитичности и изучим свойства аналитических х. ф.

§ 1. Условия дифференцируемости характеристической функции

Т е о р е м а 2.1.1. *Существование момента* $m_k(F)$ *влечет существование непрерывной производной* $\varphi^{(k)}(t;\ F)$, $-\infty < t < \infty$, *и справедливость соотношений*

$$\varphi^{(p)}(t;\ F) = i^p \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{itx}\, dF(x), \quad 0 \leqslant p \leqslant k. \qquad (2.1.1)$$

Существование производной $\varphi^{(k)}(0;\ F)$ *влечет существование момента* $m_k(F)$, *если* k *— четное, и момента* $m_{k-1}(F)$, *если* k *— нечетное.*

Из теоремы 2.1.1 непосредственно вытекают такие следствия.

С л е д с т в и е 1. *Если х. ф.* $\varphi(t;\ F)$ *дифференцируема* $2p$ *раз в точке* $t = 0$, *то она* $2p$ *раз непрерывно дифференцируема на всей оси* $-\infty < t < \infty$.

С л е д с т в и е 2. *Для существования производной* $\varphi^{(2p)}(0;\ F)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал момент* $m_{2p}(F)$.

Следствие 3. *Если существует* $m_k(F)$, *то*

$$\varphi^{(n)}(0;\ F) = i^n m_n(F),\quad 0 \leqslant n \leqslant k; \tag{2.1.2}$$

$$\operatorname{sign} \varphi^{(2p)}(0;\ F) = (-1)^p,\quad 0 \leqslant p \leqslant 2\,[k/2].$$

Докажем первое утверждение теоремы 2.1.1. Напомним, что из существования момента $m_k(F)$ следует существование абсолютного момента $n_p(F)$ при всех $p \leqslant k$. Пусть уже известно, что для некоторого p, $0 \leqslant p < k$, существует производная $\varphi^{(p)}(t;\ F)$ и выполняется соотношение (2.1.1). Запишем

$$\frac{\varphi^{(p)}(t+h;\ F) - \varphi^{(p)}(t;\ F)}{h} = i^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihx}-1}{h}\, x^p e^{itx}\, dF(x).$$

Так как

$$\left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\, x^p e^{itx}\right| \leqslant |x|^{p+1},$$

то, в силу существования $n_{p+1}(F)$, при помощи теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла заключаем, что существует $\varphi^{(p+1)}(t;\ F)$ и соотношение (2.1.1) сохраняет силу при замене p на $p+1$.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы 2.1.1. Обозначим через $2q_0$ наибольшее четное число, не превосходящее k. Нам достаточно доказать существование моментов $m_{2q}(F)$, $0 \leqslant q \leqslant q_0$. Пусть уже известно, что $m_{2q}(F)$ существует для некоторого $q < q_0$. Тогда в силу первого утверждения теоремы существует производная $\varphi^{(2q)}(t;\ F)$ и имеет место (2.1.1) с $p = 2q$. Отсюда следует равенство

$$\frac{1}{h^2}\{\varphi^{(2q)}(h;\ F) + \varphi^{(2q)}(-h;\ F) - 2\varphi^{(2q)}(0;\ F)\} =$$

$$= 4(-1)^{q+1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2q}\, \frac{\sin^2(hx/2)}{h^2}\, dF(x). \tag{2.1.3}$$

Поскольку производная $\varphi^{2(q+1)}(0;\ F)$ по условию существует, то левая часть (2.1.3) имеет при $h \to 0$ предел (равный $\varphi^{2(q+1)}(0;\ F)$). Пользуясь известной леммой

Фату, получаем

$$(-1)^{q+1}\varphi^{2(q+1)}(0;\ F)=4\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2q}\frac{\sin^2(hx/2)}{h^2}\,dF(x)\geqslant$$

$$\geqslant 4\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0}\left(x^{2q}\frac{\sin^2(hx/2)}{h^2}\right)dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2q+2}\,dF(x).$$

Тем самым мы доказали существование $m_{2(q+1)}(F)$, а вместе с тем и справедливость утверждения теоремы.

По теореме 2.1.1 существование производной $\varphi^{(k)}(0;\ F)$ для четного k обеспечивает существование соответствующего момента $m_k(F)$. Заметим, что для нечетного k такой связи между производными и моментами нет.

Пример 1. Рассмотрим х. ф.

$$\varphi(t)=c\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\cos jt}{j^2\ln j},\quad \frac{1}{c}=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^2\ln j}. \tag{2.1.4}$$

Так как частные суммы ряда $\sum\limits_{j=2}^{\infty}(\sin jt)/j$ равномерно ограничены, то ряд

$$-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\ln j}\cdot\frac{\sin jt}{j},$$

полученный формальным дифференцированием (2.1.4), сходится равномерно. Поэтому х. ф. $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема. Однако, легко видеть, закон F, соответствующий х. ф. $\varphi(t)$, не имеет момента $m_1(F)$.

Теорема 2.1.1 связывает существование производных х. ф. с наличием моментов соответствующего закона. Покажем, что наличие моментов закона $F(x)$ связано со скоростью убывания при $x\to+\infty$ его «хвостов»: $1-F(x)$ и $F(-x)$. Для измерения этой скорости введем функцию

$$W_F(x)=1-F(x)+F(-x),\qquad x\geqslant 0.$$

Очевидно, функция $W_F(x)$ невозрастающая и стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Существование момента $m_k(F)$, $k \geqslant 1$, эквивалентно сходимости интеграла

$$\int_0^\infty x^{k-1} W_F(x)\,dx. \tag{2.1.5}$$

Действительно, с помощью интегрирования по частям получаем тождество ($0 < A$ — точка непрерывности $W_F(x)$)

$$\int_{-A}^{A} |x|^k\,dF(x) = -\int_0^A x^k\,dW_F(x) =$$

$$= -A^k W_F(A) + k\int_0^A x^{k-1} W_F(x)\,dx. \tag{2.1.6}$$

Поскольку выражение $A^k W_F(A)$ неотрицательно, то из (2.1.6) сразу следует, что сходимость интеграла (2.1.5) влечет существование момента $n_k(F)$. Пусть теперь известно, что существует момент $m_k(F)$. Тогда существует $n_k(F)$ и

$$A^k W_F(A) = A^k \int_A^\infty dF(x) + A^k \int_{-\infty}^{-A} dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_A^\infty x^k\,dF(x) + \int_{-\infty}^{-A} |x|^k\,dF(x) \to 0 \tag{2.1.7}$$

при $A \to +\infty$. Поэтому из (2.1.6) следует сходимость интеграла (2.1.5).

Заметим, что, как показывает соотношение (2.1.7), из существования момента $m_k(F)$, $k \geqslant 1$, следует, что

$$W_F(x) = o(x^{-k}), \quad x \to +\infty.$$

§ 2. Условия аналитичности характеристической функции

Пусть G — область комплексной t-плоскости, замыкание которой содержит некоторую действительную окрестность Γ точки $t = 0$. Будем предполагать, что Γ лежит либо внутри G, либо на границе; причем в последнем случае будем считать, что на Γ нет точек сгущения множества недействительных точек границы G.

Определение. Х. ф. $\varphi(t; F)$ называется *аналитической в области* G, если существует функция $f(t)$, аналитическая в G и непрерывная в $G \cup \Gamma$, удовлетворяющая условию $\varphi(t; F) = f(t)$, $t \in \Gamma$.

В силу теоремы единственности теории аналитических функций такая функция $f(t)$ может быть только одна. Поэтому не может возникнуть недоразумения из-за того, что мы в дальнейшем ее будем обозначать тоже через $\varphi(t; F)$.

Найдем сначала условия аналитичности х. ф. в круге вида $|t| < R$.

Теорема 2.2.1. *Для того чтобы х. ф.* $\varphi(t; F)$ *была аналитична в круге* $|t| < R$, *необходимо и достаточно, чтобы при любом* r, $0 \leqslant r < R$, *выполнялось условие*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{r|x|}\, dF(x) < \infty \qquad (0 \leqslant r < R). \tag{2.2.1}$$

Достаточность. Из неравенства $|e^{itx}| \leqslant e^{|\mathrm{Im}\, t|\,|x|}$ и условия (2.2.1) следует, что интеграл

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

сходится абсолютно и равномерно в полосе $|\mathrm{Im}\, t| \leqslant \leqslant r < R$. По классической теореме Вейерштрасса предел равномерно сходящейся последовательности аналитических функций является аналитической функцией. Поэтому функция $f(t)$ аналитична в полосе $|\mathrm{Im}\, t| < R$ и подавно в круге $|t| < R$. При действительных t выполняется $f(t) = \varphi(t; F)$, следовательно, в силу определения аналитической х. ф. $\varphi(t; F)$ аналитична в круге $|t| < R$.

Необходимость доказывается сложнее. Поскольку ряд с неотрицательными членами можно почленно интегрировать, то мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{r|x|}\, dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k\, dF(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} n_k(F). \tag{2.2.2}$$

Существование моментов $n_k(F)$ следует из теоремы 2.1.1, так как из аналитичности функции $\varphi(t; F)$ в точке $t = 0$ вытекает существование всех производных $\varphi^{(k)}(0; F)$, $k = 1, 2, \ldots$ Чтобы доказать сходимость ряда в (2.2.2) при $r < R$, нужно получить оценки для $n_k(F)$.

Функция $\varphi(t; F)$, будучи аналитической в круге $|t| < R$, представима там степенным рядом

$$\varphi(t; F) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

причем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leqslant 1/R.$$

Пусть $r < R_1 < R$, тогда найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$|a_k| \leqslant c/R_1^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Поскольку $a_k = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0; F)$, а в силу (2.1.2) $\varphi^{(k)}(0; F) = i^k m_k(F)$, то для четных значений k получаем оценку

$$n_k(F) = m_k(F) \leqslant ck!/R_1^k.$$

Если k — нечетное, то $k+1$ и $k-1$ — четные и, следовательно, по неравенству Коши — Буняковского,

$$n_k(F) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{(k+1)/2} |x|^{(k-1)/2} dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \{n_{k+1}(F)\, n_{k-1}(F)\}^{1/2} \leqslant c\{(k+1)!\,(k-1)!\}^{1/2}/R_1^k \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{2}\, k!/R_1^k.$$

Таким образом, для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется

$$n_k(F) \leqslant c\sqrt{2} k!/R_1^k,$$

откуда следует сходимость ряда (2.2.2). Теорема доказана.

Полученное в теореме 2.2.1 условие аналитичности х. ф. $\varphi(t; F)$ в круге $|t| < R$ целесообразно выразить в терминах убывания при $x \to +\infty$ функции $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$.

Теорема 2.2.2. *Для того чтобы х. ф.* $\varphi(t; F)$ *была аналитична в круге* $|t| < R$, *необходимо и достаточно,* *чтобы при любом $r < R$ выполнялось условие*

$$W_F(x) = O(e^{-rx}), \qquad x \to +\infty \quad (0 < r < R). \tag{2.2.3}$$

Доказательство. Достаточно показать, что сходимость при любом $r < R$ интеграла (2.2.1) эквивалентна выполнению при любом $r < R$ условия (2.2.3).

Предположим, что интеграл (2.2.1) сходится. Так как тогда ($0 < y$ — точка непрерывности W_F)

$$e^{ry}W_F(y) = \int_y^\infty e^{ry}\,dF(x) + \int_{-\infty}^{-y} e^{ry}\,dF(x) \leqslant$$
$$\leqslant \int_y^\infty e^{rx}\,dF(x) + \int_{-\infty}^{-y} e^{r|x|}\,dF(x) \to 0, \qquad y \to +\infty,$$

то условие (2.2.3) выполнено.

Пусть r_1 — любое, $0 < r_1 < R$, а r_2 выбрано так, чтобы $r_1 < r_2 < R$. Запишем

$$\int_{-A}^{A} e^{r_1|x|}\,dF(x) \leqslant -\int_{+0}^{A} e^{r_1x}\,dW_F(x) + 1 =$$
$$= -W_F(x)\,e^{r_1x}\Big|_{+0}^{A} + r_1\int_0^A e^{r_1x}W_F(x)\,dx + 1. \tag{2.2.4}$$

Пусть (2.2.3) выполняется при любом $r < R$. Тогда $W_F(x) = O(e^{-r_2x})$, $x \to +\infty$, и, следовательно, сходится интеграл $\int_{+0}^{\infty} e^{r_1x}\,W_F(x)\,dx$. Из (2.2.4) вытекает, что тогда будет сходиться и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{r_1|x|}\,dF(x)$. Теорема доказана.

Докажем теперь такое замечательное свойство аналитических х. ф.

Теорема 2.2.3. *Если х. ф. $\varphi(t; F)$ аналитична в некоторой области G, содержащей интервал мнимой t-оси (ia, ib), $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$, $b - a > 0$, то она аналитична* *в полосе* $a < \operatorname{Im} t < b$ *и представляется там формулой*

$$\varphi(t; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \tag{2.2.5}$$

где интеграл сходится абсолютно и равномерно в любой полосе вида $a < a_1 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b_1 < b$.

Если $a = 0$ $(b = 0)$, *то можно утверждать, что* $\varphi(t; F)$ *аналитична в полосе* $0 < \operatorname{Im} t < b$ $(a < \operatorname{Im} t < 0)$, *непрерывна в полосе* $0 \leqslant \operatorname{Im} t < b$ $(a < \operatorname{Im} t \leqslant 0)$ *и представляется там формулой* (2.2.5), *где интеграл сходится абсолютно и равномерно в любой полосе вида* $0 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b_1 < b$ $(a < a_1 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant 0)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда область G — круг $|t| < R$. По теореме 2.2.1 из аналитичности в G вытекает выполнение условия (2.2.1). Отсюда, как мы отмечали при доказательстве достаточности в теореме 2.2.1, следует, что интеграл в (2.2.5) сходится абсолютно и равномерно в любой полосе вида $|\operatorname{Im} t| \leqslant r < R$ и является там аналитической функцией. Поэтому (2.2.5) выполняется во всей полосе $|\operatorname{Im} t| < R$.

Рассмотрим теперь случай $a = 0$. Положим

$$\varphi_1(t) = \int_{0}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \quad \varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{-0} e^{itx}\, dF(x). \tag{2.2.6}$$

Заметим, что каждая из функций $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2$, либо $\equiv 0$, либо является х. ф. с точностью до положительного множителя.

Легко видеть, что первый из интегралов (2.2.6) сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im} t \geqslant 0$. Поэтому функция $\varphi_1(t)$ непрерывна в $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ и аналитична в $\operatorname{Im} t > 0$. Аналогично, функция $\varphi_2(t)$ непрерывна в $\operatorname{Im} t \leqslant 0$ и аналитична в $\operatorname{Im} t < 0$.

Записывая для действительных t равенство $\varphi_2(t) = \varphi(t; F) - \varphi_1(t)$, видим, что правая его часть, а следовательно и функция $\varphi_2(t)$, аналитически продолжается в область $G \cap \{\operatorname{Im} t > 0\}$. Так как, с другой стороны, функция $\varphi_2(t)$ аналитична в $\operatorname{Im} t < 0$ и непрерывна в $\operatorname{Im} t \leqslant 0$, то, в силу принципа непрерывного продолжения, функция $\varphi_2(t)$ продолжается до аналитической в области $G \cup \{\operatorname{Im} t < 0\} \cup \Gamma$, где Γ — действительная окрестность точки $t = 0$, лежащая на границе области G.

Обозначим через $b_1 \geqslant 0$ точную верхнюю грань тех значений y, для которых функция $\varphi_2(t)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im} t < y$. Докажем, что $b_1 \geqslant b$. Если $b_1 < b$, то, легко видеть, существует круг $|t| < b_2$, $b_1 < b_2 < b$, в который функция $\varphi_2(t)$ может быть аналитически продолжена. Так как для случая круга теорема 2.2.3 уже доказана, а функция $\varphi_2(t)$ с точностью до постоянного множителя является х. ф., то мы заключаем, что функция $\varphi_2(t)$ аналитически продолжается в полосу $|\operatorname{Im} t| < b_2$. Но тогда $\varphi_2(t)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} t < b_2$, что противоречит определению числа b_1.

Таким образом, функция $\varphi_2(t)$ продолжается до аналитической в $\operatorname{Im} t < b$. Поскольку функция $\varphi_1(t)$ аналитична в $\operatorname{Im} t > 0$ и непрерывна в $\operatorname{Im} t \geqslant 0$, то функция $\varphi(t; F) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ аналитична в полосе $0 < \operatorname{Im} t < b$ и непрерывна в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} t < b$.

Далее, функция $\varphi_2(t)$ аналитична в круге $|t| < b$, поэтому, в силу сказанного в начале доказательства теоремы 2.2.3, второй из интегралов (2.2.6) сходится абсолютно и равномерно в любой полосе вида $|\operatorname{Im} t| \leqslant b_1 < b$. Поскольку первый, как уже было отмечено, сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im} t \geqslant 0$, то мы заключаем об абсолютной и равномерной сходимости интеграла (2.2.5) в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b_1 < b$.

Итак, теорема в случае $a = 0$ доказана. Случай $b = 0$ рассматривается аналогично. Если $a < 0 < b$, то, применяя результаты рассмотренных случаев к областям $G \cap \{\operatorname{Im} t > 0\}$ и $G \cap \{\operatorname{Im} t < 0\}$, получаем, что х. ф. $\varphi(t; F)$ аналитична в полосах $a < \operatorname{Im} t < 0$ и $0 < \operatorname{Im} t < b$ и непрерывна в полосах $a < \operatorname{Im} t \leqslant 0$ и $0 \leqslant \operatorname{Im} t < b$ и, кроме того, интеграл в (2.2.5) сходится абсолютно и равномерно в любой полосе вида $a < a_1 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b_1 < b$. Требуемый результат получается с помощью принципа непрерывного продолжения. Теорема доказана.

Для целочисленных законов F удобнее, как мы уже отмечали в гл. I, использовать, вместо характеристических функций $\varphi(t; F)$, производящие функции $\psi(z; F)$, определяемые на окружности $|z| = 1$ равенством

$$\psi(z; F) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m z^m \qquad (p_m = F(m+0) - F(m)). \quad (2.2.7)$$

Так как $\psi(e^{it}; F) = \varphi(t; F)$, то из теоремы 2.2.3 с помощью замены переменной $z = e^{it}$ получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть F — целочисленный закон, $\psi(z; F)$ — его производящая функция. Если функция $\psi(z; F)$ аналитически продолжается в некоторую область, содержащую интервал (α, β) $(0 \leqslant \alpha < 1 < \beta \leqslant \infty)$, то она аналитически продолжается в кольцо $\alpha < |z| < \beta$ и представляется там в виде* (2.2.7), *где ряд сходится абсолютно и равномерно в любом кольце $\alpha < \alpha_1 \leqslant |z| \leqslant \leqslant \beta_1 < \beta$.*

Отметим еще такой результат, который нам понадобится в гл. III.

Теорема 2.2.4. *Для того чтобы х. ф. $\varphi(t; F)$ была аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, $a \leqslant 0 \leqslant b$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия* $(x \to +\infty)$:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= O(e^{-rx}) \quad \textit{при любом} \quad r < |a|, \\ F(-x) &= O(e^{-rx}) \quad \textit{при любом} \quad r < b. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Доказательство. Заметим, что для аналитичности х. ф. $\varphi(t; F)$ в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, определенные соотношениями (2.2.6), были аналитичны соответственно в полосах $|\operatorname{Im} t| < |a|$ и $|\operatorname{Im} t| < b$ (необходимость была установлена при доказательстве теоремы 2.2.3, а достаточность очевидна).

Если $\varphi_1(t) \not\equiv 0$, то $F(0) < 1$ и функция $\varphi_1(t)/(1 - F(0))$ является х. ф. для закона

$$F_1(x) = \begin{cases} (F(x) - F(0))/(1 - F(0)), & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 2.2.2 аналитичность $\varphi_1(t)$ в полосе $|\operatorname{Im} t| < |a|$ эквивалентна условию $W_{F_1}(x) = O(e^{-rx})$, $x \to +\infty$, при любом $r < |a|$. Из выражения для закона $F_1(x)$ видно, что это условие эквивалентно первому из соотношений (2.2.8).

Аналогично, если $\varphi_2(t) \not\equiv 0$, то $F(0) > 0$ и функция $\varphi_2(t)/F(0)$ является х. ф. для закона

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ F(x)/F(0), & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Применяя теорему 2.2.2, убеждаемся, что аналитичность $\varphi_2(t)$ в полосе $|\operatorname{Im} t| < b$ эквивалентна второму из условий (2.2.8).

Если одна из функций $\varphi_1(t)$ или $\varphi_2(t)$ тождественно равна нулю, то доказательство, очевидно, только упрощается.

В заключение этого параграфа укажем на возможность обобщения теоремы 2.2.3.

Область G комплексной t-плоскости назовем *областью аналитичности х. ф.*, если существует х. ф., аналитическая в области G и не допускающая аналитического продолжения за ее пределы. Теорема 2.2.3 дает необходимое условие для того, чтобы область была областью аналитичности х. ф.: вместе с интервалом (ia, ib) мнимой t-оси ($a \leqslant 0 \leqslant b$, $a < b$) область должна содержать полосу $a < \operatorname{Im} t < b$. Более общим, чем теорема 2.2.3, результатом следует считать полное описание класса областей аналитичности х. ф. Для случая областей, содержащих точку $t = 0$, такое описание будет получено в § 1 гл. VI.

§ 3. Хребтовые функции

Понятие хребтовой функции возникает в связи со следующей теоремой.

Теорема 2.3.1. *Если х. ф. $\varphi(t; F)$ аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, $a \leqslant 0 \leqslant b$, то в этой полосе выполнено неравенство*

$$|\varphi(t; F)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t; F). \tag{2.3.1}$$

Действительно, так как по теореме 2.2.3 во всей полосе выполняется (2.2.5), то

$$|\varphi(t; F)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{Im} t}\, dF(x) = \varphi(i \operatorname{Im} t; F).$$

Неравенство (2.3.1) означает, что поверхность модуля х. ф., аналитической в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, имеет над интервалом (ia, ib) мнимой t-оси «хребет».

О п р е д е л е н и е. Функция $\varphi(t)$, аналитическая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, называется *хребтовой функцией* в этой полосе, если там выполнено неравенство

$$|\varphi(t)| \leqslant |\varphi(i \operatorname{Im} t)|. \qquad (2.3.2)$$

При $a = -\infty$, $b < +\infty$ ($a > -\infty$, $b = +\infty$) будем говорить, что $\varphi(t)$ является хребтовой в полуплоскости $\operatorname{Im} t < b$ ($\operatorname{Im} t > a$), а если $a = -\infty$, $b = +\infty$, то — целой хребтовой.

В случае, когда точка $t = 0$ является внутренней или граничной точкой полосы, введем еще такое определение.

О п р е д е л е н и е. Функция $\varphi(t)$, хребтовая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, $a < 0 < b$, называется *нормированной*, если $\varphi(0) = 1$. Функция $\varphi(t)$, хребтовая в полосе $0 < \operatorname{Im} t < b$ ($a < \operatorname{Im} t < 0$), называется нормированной, если она допускает непрерывное продолжение в полосу $0 \leqslant \operatorname{Im} t < b$ ($a < \operatorname{Im} t \leqslant 0$) и продолженная функция удовлетворяет условию $\varphi(0) = 1$.

По теореме 2.3.1 всякая х. ф., аналитическая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, $a \leqslant 0 \leqslant b$, является там нормированной хребтовой функцией. Это обстоятельство придает интерес изучению класса хребтовых функций.

Следующая теорема дает сведения о поведении функций, хребтовых в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, на интервале (ia, ib) мнимой t-оси.

Т е о р е м а 2.3.2. *Пусть $\varphi(t) \not\equiv 0$ — функция, хребтовая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$. Справедливы такие утверждения:*

а) *функция $\varphi(i\eta)$ не обращается в нуль при $a < \eta < b$;*

б) $\arg \varphi(i\eta) = \text{const}$, $a < \eta < b$;

в) *функция $B(\eta) = \ln |\varphi(i\eta)|$ выпукла на интервале $a < \eta < b$;*

г) *при любых η_1 и η_2, $a < \eta_1$, $\eta_2 < b$, справедливо соотношение*

$$\ln |\varphi(i\eta_1)/\varphi(i\eta_2)| \geqslant -|\varphi'(i\eta_2)/\varphi(i\eta_2)|\,|\eta_1 - \eta_2|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Если бы при некотором η, $a < \eta < b$, мы имели $\varphi(i\eta) = 0$, то из (2.3.2) следовало бы, что $\varphi(t) = 0$ на всей прямой $\operatorname{Im} t = \eta$. Но тогда в силу теоремы единственности теории аналитических функций мы имели бы $\varphi(t) \equiv 0$, что противоречит предположению $\varphi(t) \not\equiv 0$.

б) В силу а) функция $\varphi(t)$ не обращается в нуль в некоторой области G, содержащей интервал (ia, ib). Поэтому в области G функция $\ln\varphi(t) = \ln|\varphi(t)| + i\arg\varphi(t)$ является аналитической. В силу условий Коши — Римана имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\ln|\varphi(\xi+i\eta)| = \frac{\partial}{\partial\eta}\arg\varphi(\xi+i\eta), \qquad \xi+i\eta\in G.$$

Так как функция $\ln|\varphi(\xi+i\eta)|$, рассматриваемая как функция от ξ при фиксированном η, имеет в силу (2.3.2) максимум при $\xi=0$, то мы заключаем, что $\frac{\partial}{\partial\eta}\arg\varphi(i\eta) = 0$ $(a<\eta<b)$ и, следовательно, $\arg\varphi(i\eta) = \text{const}$.

в) Из аналитичности функции $\ln\varphi(t)$ в области G следует, что функция $\ln|\varphi(t)|$ является в G гармонической. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\ln|\varphi(\xi+i\eta)| = 0, \qquad \xi+i\eta\in G. \quad (2.3.3)$$

Поскольку $\ln|\varphi(\xi+i\eta)|$ имеет при $\xi=0$ максимум, то

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\ln|\varphi(\xi+i\eta)|\Big|_{\xi=0}\leqslant 0, \qquad a<\eta<b.$$

Поэтому из (2.3.3) получаем

$$B''(\eta) = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\ln|\varphi(\xi+i\eta)|_{\xi=0} = -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\ln|\varphi(\xi+i\eta)|\Big|_{\xi=0}\geqslant 0, \qquad a<\eta<b.$$

г) В силу выпуклости функции $B(\eta)$ имеем

$$B(\eta_1)\geqslant B(\eta_2)+B'(\eta_2)(\eta_1-\eta_2), \qquad a<\eta_1,\ \eta_2<b,$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

Следствие 1. *Если $\varphi(t)$ — нормированная хребтовая функция в полосе $a<\operatorname{Im}t<b$ $(a\leqslant 0\leqslant b)$, то $\varphi(i\eta)>0$ при $a<\eta<b$.*

Действительно, в силу пункта б) теоремы 2.3.2 имеем $\arg\varphi(i\eta) = \text{const} = \arg\varphi(0)\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $a<\eta<b$.

Следствие 2. *Целая нормированная хребтовая функция $\varphi(t)$ без корней допускает представление $\varphi(t) = \exp\{f(t)\}$, где $f(t)$ — целая функция, действительная на мнимой t-оси, и $f(0)=0$.*

В самом деле, по теореме 1.2.4 функцию $\varphi(t)$ можно представить в виде $\varphi(t) = \exp\{f(t)\}$, где $f(t)$ — целая функция, $f(0) = 0$. Так как в силу следствия 1 функция $\varphi(t)$ принимает на мнимой t-оси положительные значения, то на этой оси должно выполняться равенство $\operatorname{Im} f(t) = 2\pi k(t)$, где $k(t)$ — целозначная функция. Поскольку функция $f(t)$ непрерывна и $f(0) = 0$, то $k(t) \equiv 0$, что и требовалось.

Следствие 3. *Корни функции $\varphi(t)$, хребтовой в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b)$, расположены симметрично относительно мнимой t-оси.*

Действительно, в силу пункта б) теоремы 2.3.2 функция $\varphi(t)\exp\{-i\arg\varphi(0)\}$ принимает на интервале (ia, ib) мнимой t-оси действительные значения. Поэтому утверждение следствия 3 вытекает из классического принципа симметрии аналитических функций.

Следствие 4. *Если $\varphi(t) \not\equiv 0$ — хребтовая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} t < b$ $(\operatorname{Im} t > a)$, то существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{-1}\ln|\varphi(-i\eta)| > -\infty$$

$$\left(\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{-1}\ln|\varphi(i\eta)| > -\infty\right).$$

В частности, всякая функция $\varphi(t)$, хребтовая в полуплоскости $\operatorname{Im} t < b$ $(\operatorname{Im} t > a)$, допускает на мнимой оси оценку снизу

$$|\varphi(i\eta)| \geqslant e^{-c|\eta|}, \quad \eta < b \qquad (\eta > a),$$

где $c \geqslant 0$ не зависит от η.

Действительно, для всякой выпуклой на полуоси $x > x_0$ функции $\vartheta(x)$ существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}\vartheta(x) > -\infty$. Поэтому следствие 4 вытекает из пункта в) теоремы 2.3.2.

Следствие 5. *Если $\varphi(t) \not\equiv \text{const}$ — целая хребтовая функция, то существует конечный или бесконечный положительный предел*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}\ln M(r, \varphi) \qquad \left(M(r, \varphi) = \max_{|t|=r}|\varphi(t)|\right).$$

Заметим, что в терминах шкалы роста целых функций (см. § 2 гл. I) этот результат означает, что непостоянная целая хребтовая функция имеет рост не ниже нормального типа порядка 1. Пример функции $\varphi(t) = e^{imt}$, $0 < m < \infty$, показывает, что эту оценку роста улучшить нельзя.

Для доказательства следствия 5 достаточно установить, что $\ln M(r, \varphi)$ является возрастающей выпуклой функцией от r. То, что эта функция является возрастающей, следует из принципа максимума. Ее выпуклость вытекает из пункта в) теоремы 2.3.2 и следующего утверждения, которое нам понадобится и в дальнейшем.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\varphi(t)$ — целая хребтовая функция. Тогда*

$$M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(ir)|, |\varphi(-ir)|\}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \not\equiv \mathrm{const}$ и пусть t_0 — точка окружности $|t| = r$ такая, что $M(r, \varphi) = |\varphi(t_0)|$. В силу (2.3.2) имеем соотношение $M(r, \varphi) = |\varphi(t_0)| \leqslant |\varphi(i \operatorname{Im} t_0)|$. Если $t_0 \neq \pm ir$, то точка $i \operatorname{Im} t_0$ лежит в круге $|t| < r$ и это соотношение противоречит принципу максимума модуля аналитических функций.

Заметим, что в силу теоремы 2.3.1 свойства хребтовых функций, устанавливаемые теоремой 2.3.2 и ее следствиями, сохраняют силу для характеристических функций.

Возникает вопрос, не является ли всякая нормированная хребтовая функция характеристической. Покажем, что ответ на этот вопрос — отрицательный.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \exp\left\{-\frac{1}{a+e^{it}} + \frac{1}{a+1}\right\}, \qquad a > 1.$$

Эта функция является нормированной хребтовой в полуплоскости $\operatorname{Im} t > -\ln a$, так как при $\eta > -\ln a$ имеем

$$|\varphi(\xi + i\eta)| = \exp\left\{-\operatorname{Re}\frac{1}{a+e^{i\xi}e^{-\eta}} + \frac{1}{a+1}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{a+e^{-\eta}\cos\xi}{a^2+e^{-2\eta}+2ae^{-\eta}\cos\xi} + \frac{1}{a+1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{a+e^{-\eta}} + \frac{1}{a+1}\right\} = \varphi(i\eta)$$

(мы воспользовались тем обстоятельством, что при $e^{-\eta} < a$ функция $(a + e^{-\eta}x)/(a^2 + e^{-2\eta} + 2ae^{-\eta}x)$ — убывающая по x).

Однако функция $\varphi(t)$ не является характеристической. Действительно, ее особенности расположены в точках

$$t = -i \ln a + (2k+1)\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

и, следовательно, она аналитична в области $G = \{|\operatorname{Re} t| < \pi\}$. Эта область содержит всю мнимую ось, поэтому, если бы $\varphi(t)$ была х. ф., то по теореме 2.2.3 она была бы аналитической во всей t-плоскости.

Приведем примеры целых нормированных хребтовых функций, не являющихся х. ф.

Пример 2. Рассмотрим полином

$$g(z) = 1 + 2z - z^2 + 3z^3 + 3z^4.$$

Этот полином обладает следующим свойством: полиномы $g^n(z)$, $n = 2, 3, \ldots$, имеют неотрицательные коэффициенты. Действительно, для $n = 2$ и $n = 3$ это проверяется непосредственно:

$$g^2(z) = 1 + 4z + 2z^2 + 2z^3 + 19z^4 + 6z^5 + 3z^6 + 18z^7 + 9z^8,$$

$$g^3(z) = 1 + 6z + 9z^2 + 5z^3 + 36z^4 + 60z^5 + 8z^6 + 81z^7 + 117z^8 + 27z^9 + 54z^{10} + 81z^{11} + 27z^{12}.$$

Для $n > 3$ это вытекает из того, что n можно представить либо в виде $n = 2q$, либо в виде $n = 2q + 3$, где q — натуральное число.

Положим $(\alpha > 0)$

$$f_\alpha(z) = \exp\{\alpha(g(z) - 8)\} = e^{-8\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n g^n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) z^k.$$

Очевидно, все коэффициенты $c_k(\alpha)$, за исключением, возможно, $c_2(\alpha)$, неотрицательны и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) = f_\alpha(1) = 1$. Так как

$$c_2(\alpha) = \frac{1}{2} f''_\alpha(0) = \frac{1}{2} e^{-7\alpha} \{\alpha^2 g'^2(0) + \alpha g''(0)\} = \alpha e^{-7\alpha}(2\alpha - 1),$$

то при $\alpha \geqslant 1/2$ имеем $c_2(\alpha) \geqslant 0$, а при $0 < \alpha < 1/2$ имеем $c_2(\alpha) < 0$.

Положим теперь

$$\varphi_\alpha(t) = f_\alpha(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha)\, e^{ikt}.$$

Из установленных нами свойств коэффициентов $c_k(\alpha)$ следует, что при $\alpha \geqslant 1/2$ функция $\varphi_\alpha(t)$ является х. ф., а при $0 < \alpha < 1/2$ — не является. В силу теоремы 2.3.1 функция $\varphi_\alpha(t)$ является при $\alpha \geqslant 1/2$ хребтовой. Однако так как при любом $\alpha > 0$ мы имеем

$$\varphi_\alpha(t) = \{\varphi_1(t)\}^\alpha,$$

то из того, что функция $\varphi_1(t)$ удовлетворяет условию (2.3.2), следует, что и $\varphi_\alpha(t)$ при любом $\alpha > 0$ удовлетворяет (2.3.2). Таким образом, при $0 < \alpha < 1/2$ функция $\varphi_\alpha(t)$ является нормированной хребтовой, но не х. ф. Заметим, что $\varphi_\alpha(t)$ — целая функция бесконечного порядка.

Приведем пример целой функции конечного порядка, которая является нормированной хребтовой, но не характеристической.

Пример 3. Положим

$$\varphi_\alpha(t) = (1 - t^2)\, e^{-\alpha t^2}, \qquad \alpha > 0.$$

Неравенство $|\varphi_\alpha(\xi + i\eta)| \leqslant \varphi_\alpha(i\eta)$ равносильно неравенству

$$\frac{1}{\xi^2} \ln \frac{|1 - t^2|}{1 + \eta^2} \leqslant \alpha \qquad (t = \xi + i\eta),$$

поэтому функция $\varphi_\alpha(t)$ является хребтовой для тех и только для тех значений α, которые удовлетворяют неравенству

$$\alpha \geqslant \lambda = \sup_{-\infty < \xi,\ \eta < \infty} f(\xi, \eta),$$

где

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi^2} \ln \frac{|1 - t^2|}{1 + \eta^2} = \frac{1}{2\xi^2} \ln \left\{ 1 + \xi^2 \frac{\xi^2 + 2\eta^2 - 2}{(1 + \eta^2)^2} \right\}.$$

Покажем, что

$$0{,}27 < \lambda < 0{,}28. \tag{2.3.4}$$

Рассмотрим кривые C_ρ с уравнением

$$\frac{\xi^2 + 2\eta^2 - 2}{(1 + \eta^2)^2} = \rho.$$

На кривой C_ρ имеем

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\xi^2} \ln(1+\rho\xi^2).$$

Если $\rho \leqslant 0$, то на кривой C_ρ выполняется $f(\xi, \eta) \leqslant 0$, поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением кривых C_ρ при $\rho > 0$. Пусть $G(\rho) = \max\limits_{-\infty < \xi, \eta < \infty} f(\xi, \eta)$.

Так как функция $y^{-1} \ln(1+y)$ является убывающей на полуоси $y \geqslant 0$, то

$$G(\rho) = \frac{1}{2\xi^2(\rho)} \ln(1+\rho\xi^2(\rho)),$$

где

$$\xi^2(\rho) = \min_{(\xi, \eta) \in C_\rho} \xi^2.$$

Замечая, что на кривой C_ρ выполняется

$$\xi^2 = \rho(1+\eta^2)^2 + 2 - 2\eta^2, \tag{2.3.5}$$

и находя минимум стоящего в правой части (2.3.5) выражения (являющегося квадратным трехчленом относительно η^2), получаем

$$\xi^2(\rho) = \begin{cases} 2+\rho, & \rho \geqslant 1, \\ 4-1/\rho, & 1/4 \leqslant \rho \leqslant 1, \\ 0, & 0 < \rho \leqslant 1/4. \end{cases}$$

Таким образом,

$$G(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\rho+1)}{\rho+2}, & \rho \geqslant 1, \\ \dfrac{\rho\ln(4\rho)}{2(4\rho-1)}, & 1/4 \leqslant \rho \leqslant 1, \\ \rho/2, & 0 < \rho \leqslant 1/4. \end{cases}$$

С помощью стандартных приемов нахождения максимума получаем, что максимум $G(\rho)$ достигается для значения ρ, удовлетворяющего уравнению

$$(\rho+1)\ln(\rho+1) = \rho+2,$$

и вычисления показывают, что при этом значении ρ выполняется $0{,}27 < G(\rho) < 0{,}28$. Очевидно, $\max\limits_{\rho>0} G(\rho) = \lambda$, и, таким образом, соотношение (2.3.4) доказано.

Итак, функция $\varphi_\alpha(t)$ является нормированной хребтовой при $\alpha \geqslant \lambda$ ($<0{,}28$).

Однако $\varphi_\alpha(t)$ является х. ф. только при $\alpha \geqslant 0{,}5$, а при $\alpha < 0{,}5$ она не является х. ф. Действительно, функция $\varphi_\alpha(t)$ будет х. ф. в том и только том случае, когда интеграл

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha(t)\, e^{-itx}\, dt$$

неотрицателен при всех x, $-\infty < x < \infty$. Но мы имеем

$$2\pi p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - itx}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\alpha t^2 - itx}\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-x^2/(4\alpha)} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-x^2/(4\alpha)}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} + \frac{x^2}{4\alpha^2}\right) e^{-x^2/(4\alpha)},$$

откуда видно, что $p(x) \geqslant 0$ при всех x тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant 0{,}5$.

Таким образом, при $\lambda \leqslant \alpha < 0{,}5$ функция $\varphi_\alpha(t)$ не является х. ф., но является нормированной хребтовой функцией.

В заключение этого параграфа отметим один результат относительно возможного убывания хребтовых функций.

Теорема 2.3.3. *Если $\varphi(t)$ — хребтовая функция в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, то при любых a_1 и b_1, $a < a_1 < b_1 < b$, неравенство*

$$\min_{a_1 \leqslant \eta \leqslant b_1} |\varphi(\xi + i\eta)| \geqslant \exp\left\{-K \exp\left(\frac{\pi}{b_1 - a_1} |\xi|\right)\right\}, \qquad K > 0,$$

выполняется для всех ξ, $-\infty < \xi < \infty$, за исключением, возможно, множества E такого, что $\operatorname{mes} E < \infty$.

Для доказательства мы воспользуемся следующим результатом, содержащимся в работе У. К. Хеймана [1].

Если функция $f(z)$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, то она допускает оценку

$$\inf_{0 < \theta < \pi} |f(re^{i\theta})| \geqslant e^{-Kr}$$

для всех $r > 1$, за исключением, быть может, множества $E_1 \subset [1, \infty)$ такого, что $\int_{E_1} d \ln r < \infty$. Здесь $K > 0$ — не зависящая от r постоянная.

Пусть $\varphi(t)$ — хребтовая функция в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$. В силу (2.3.2) в полосе $a_1 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b_1$ выполняется

$$|\varphi(t)| \leqslant \max_{a_1 \leqslant \eta \leqslant b_1} |\varphi(i\eta)| < \infty.$$

Так как преобразование $t = \frac{1}{\pi}(b_1 - a_1)\ln z + ia_1$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на полосу $a_1 < \operatorname{Im} t < b_1$, то функция

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{\pi}(b_1 - a_1)\ln z + ia_1\right)$$

аналитична и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Используя для ее оценки теорему Хеймана и замечая, что $\xi = \frac{1}{\pi}(b_1 - a_1)\ln r$ ($\xi = \operatorname{Re} t$, $r = |z|$), получаем доказываемый результат для $\xi > 0$. Для $\xi < 0$ доказательство аналогично, но берем преобразование $t = \frac{1}{\pi}(a_1 - b_1)\ln z + ib_1$.

Оценка в теореме 2.3.3 в существенном неулучшаема не только для хребтовых, но и для характеристических функций. Действительно, функция

$$\varphi(t) = (1 + \delta)(\operatorname{ch}\sqrt{\delta})\,\{\operatorname{ch} t\cdot(1 + \delta\operatorname{ch} t)\operatorname{ch}\sqrt{\delta\operatorname{ch} t}\}^{-1}$$

при достаточно малом $\delta > 0$ является х. ф. (см. Приложение II). Легко видеть, что эта функция аналитична в полосе $|\operatorname{Im} t| < \pi/2$ и допускает при $t > 1$ оценку $|\varphi(t)| \leqslant \exp\{-K\exp(t/2)\}$, где $K > 0$ — не зависящая от t постоянная.

§ 4. Целые характеристические функции

Х. ф., аналитическую во всей комплексной t-плоскости, будем называть *целой х. ф.* Из теоремы 2.2.2 следует, что для того, чтобы х. ф. $\varphi(t; F)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы при любом $r > 0$ выполнялось условие

$$W_F(x) = O(e^{-rx}), \qquad x \to +\infty,$$

где

$$W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x).$$

Рассмотрим вопрос о том, каким может быть рост целой х. ф. и каким условиям должен удовлетворять закон $F(x)$ для того, чтобы х. ф. $\varphi(t; F)$ имела заданный рост.

Для единичного закона $\varepsilon_0(x)$ имеем $\varphi(t; \varepsilon_0) \equiv 1$, поэтому для любого закона $F(x) \not\equiv \varepsilon_0(x)$ выполняется $\varphi(t; F) \not\equiv 1$. В силу следствия 5 из теоремы 2.3.2, если $\varphi(t; F) \not\equiv \mathrm{const}$ — целая, то ее рост не ниже нормального типа порядка 1. Найдем условия, при которых целая х. ф. $\varphi(t; F)$ имеет рост в точности нормального типа порядка 1.

Пусть $\varphi(t;\ F)$ — целая х. ф. Положим

$$h_+(F) = \lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln \varphi(ir;\ F),$$

$$h_-(F) = \lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln \varphi(-ir;\ F),$$

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r,\ \varphi).$$

Существование всех пределов обеспечено следствиями 4 и 5 теоремы 2.3.2. Заметим, что в силу леммы 2.3.1 выполняется

$$\sigma = \max\{h_+(F),\ h_-(F)\}. \qquad (2.4.1)$$

Обозначим через $\operatorname{rext} F$ точную верхнюю грань чисел x таких, что правее x есть точки роста $F(x)$, а через $\operatorname{lext} F$ — точную нижнюю грань чисел x таких, что левее x есть точки роста $F(x)$. Очевидно, всегда $\operatorname{lext} F \leqslant \operatorname{rext} F$, $-\infty \leqslant \operatorname{lext} F < \infty$, $-\infty < \operatorname{rext} F \leqslant \infty$.

Т е о р е м а 2.4.1. *Пусть* $\varphi(t;\ F)$ — *целая х. ф. Тогда*

$$h_+(F) = -\operatorname{lext} F, \quad h_-(F) = \operatorname{rext} F, \qquad (2.4.2)$$

$$\sigma = \max\{-\operatorname{lext} F,\ \operatorname{rext} F\}. \qquad (2.4.2')$$

Ограничимся доказательством первого из соотношений (2.4.2): второе соотношение доказывается аналогично, а (2.4.2′) является следствием (2.4.2) и (2.4.1).

Покажем сначала, что $h_+(F) \leqslant -\operatorname{lext} F$. Если $\operatorname{lext} F = -\infty$, то это неравенство тривиально. Пусть $\lambda = \operatorname{lext} F > -\infty$. Тогда, так как соотношение (2.2.5) выполняется во всей t-плоскости, мы имеем

$$\varphi(ir;\ F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rx}\, dF(x) =$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} e^{-rx}\, dF(x) \leqslant e^{-r\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} dF(x) = e^{-r\lambda},$$

откуда видно, что $h_+(F) \leqslant -\lambda$.

Теперь установим, что $h_+(F) \geqslant -\operatorname{lext} F$. Если это не так, то по определению величины $\operatorname{lext} F$ найдется точка роста x_0 закона F такая, что $\operatorname{lext} F < x_0 < -h_+(F)$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $x_0 + \varepsilon < -h_+(F)$.

Имеем

$$\varphi(ir;\,F)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-rx}\,dF(x)\geqslant\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-rx}\,dF(x)\geqslant$$
$$\geqslant e^{-r(x_0+\varepsilon)}\{F(x_0+\varepsilon)-F(x_0-\varepsilon)\},$$

откуда

$$h_+(F)=\lim_{r\to\infty} r^{-1}\ln\varphi(ir;\,F)\geqslant-(x_0+\varepsilon)>h_+(F),$$

и мы пришли к противоречию.

Из теоремы 2.4.1 легко вытекает такая теорема.

Теорема 2.4.2. *Для того чтобы х. ф. $\varphi(t;\,F)$ была целой функцией порядка 1 и имела величину типа $\sigma<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma=\max\{-\operatorname{lext}F,\,\operatorname{rext}F\}$ или, другими словами,*

$$W_F(x)>0 \quad \textit{при} \quad 0<x<\sigma,$$
$$W_F(x)=0 \quad \textit{при} \quad x>\sigma.$$

Необходимость непосредственно вытекает из теоремы 2.4.1; чтобы получить из нее также и достаточность, нужно сначала заметить, что х. ф. $\varphi(t;\,F)$ является целой функцией.

Заметим, что в рассуждении, проведенном при доказательстве теоремы 2.4.1, мы использовали представление х. ф. $\varphi(t;\,F)$ формулой (2.2.5) лишь в полуплоскости $\operatorname{Im}t>0$. Так как это представление имеет место для любой х. ф., аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im}t>0$, то нами доказана следующая более общая теорема.

Теорема 2.4.3. *Пусть $\varphi(t;\,F)$ — х. ф., аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im}t>0$ $(\operatorname{Im}t<0)$. Справедливо равенство*

$$h_+(F)=-\operatorname{lext}F \qquad (h_-(F)=\operatorname{rext}F).$$

Так как из конечности величины $\operatorname{lext}F$, очевидно, вытекает аналитичность х. ф. $\varphi(t;\,F)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}t>0$, то из теоремы 2.4.3 вытекает такое следствие.

Следствие. *Для того чтобы х. ф. $\varphi(t;\,F)$ была аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im}t>0$ $(\operatorname{Im}t<0)$ и при этом величина $h_+(F)$ $(h_-(F))$ была конечной, необходимо и достаточно, чтобы была конечной величина $\operatorname{lext}F$ $(\operatorname{rext}F)$.*

В силу теоремы 2.4.2, если х. ф. $\varphi(t; F)$ имеет рост выше нормального типа порядка 1, то при всех x, $0 < x < \infty$, выполняется $W_F(x) > 0$. Для измерения скорости убывания функции $W_F(x)$ при $x \to +\infty$ введем величину

$$\varkappa(F) = \varliminf_{x \to \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ (1/W_F(x))}{\ln x}.$$

Если величина $\varkappa = \varkappa(F)$ конечна, то для более точного описания убывания $W_F(x)$ введем еще величину

$$\lambda(F) = \varliminf_{x \to \infty} x^{-\varkappa} \ln^+ (1/W_F(x)).$$

Сформулированное в начале параграфа условие, необходимое и достаточное для того, чтобы х. ф. $\varphi(t; F)$ была целой, очевидно, эквивалентно следующему: $\varkappa(F) \geqslant 1$, причем если $\varkappa(F) = 1$, то $\lambda(F) = \infty$.

Для целой х. ф. $\varphi(t; F)$ связь порядка $\rho(\varphi)$ и величины типа $\sigma(\varphi)$ с величинами $\varkappa(F)$ и $\lambda(F)$ дается следующей теоремой.

Теорема 2.4.4. *Справедливы формулы* ($\rho = \rho(\varphi)$, $\sigma = \sigma(\varphi)$, $\varkappa = \varkappa(F)$, $\lambda = \lambda(F)$):

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\varkappa} = 1 \qquad (1 \leqslant \rho \leqslant \infty), \tag{2.4.3}$$

$$(\varkappa\lambda)^{\rho-1} \sigma\rho = 1 \qquad (1 < \rho < \infty). \tag{2.4.4}$$

Доказательство. Пусть при $r > r_0$ мы имеем оценку

$$M(r, \varphi) \leqslant K \exp\{Ar^B\}, \quad K > 0,\ A > 0,\ B > 1. \tag{2.4.5}$$

Покажем, что тогда при $x > x_0$ выполняется

$$W_F(x) \leqslant 2K \exp\left\{-\left(\frac{1}{AB}\right)^{\frac{1}{B-1}} \left(1 - \frac{1}{B}\right) x^{\frac{B}{B-1}}\right\}. \tag{2.4.6}$$

Действительно, так как

$$\varphi(-ir; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rs}\, dF(s) \geqslant \int_{x}^{\infty} e^{rs}\, dF(s) \geqslant e^{rx}(1 - F(x)),$$

$$\varphi(ir; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rs}\, dF(s) \geqslant \int_{-\infty}^{-x} e^{-rs}\, dF(s) \geqslant e^{rx} F(-x),$$

то, используя лемму 2.3.1, имеем

$$M(r, \varphi) = \max\{\varphi(ir; F),\ \varphi(-ir; F)\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\{\varphi(ir; F) + \varphi(-ir; F)\} \geqslant \frac{1}{2} e^{rx} W_F(x).$$

Таким образом, при $r \geqslant r_0$ и любом $x > 0$ выполняется

$$W_F(x) \leqslant 2K \exp\{Ar^B - rx\}. \qquad (2.4.7)$$

Выражение в правой части достигает по r минимума при $r = r_x = (xA^{-1}B^{-1})^{1/(B-1)}$. Будем считать, что $x \geqslant x_0 = r_0^{B-1}AB$. Тогда $r_x \geqslant r_0$, и, полагая в (2.4.7) $r = r_x$, получаем оценку (2.4.6).

Покажем теперь, что оценка $(x \geqslant x_0)$

$$W_F(x) \leqslant K \exp\{-Cx^D\},\ C > 0,\quad D > 1,\quad K > 0, \qquad (2.4.8)$$

влечет оценку $(r \geqslant r_0)$

$$M(r, \varphi) \leqslant K_1 r \exp\{A_1 r^{D/(D-1)}\}, \qquad (2.4.9)$$

где $K_1 > 0$, A_1 — любое число, большее числа $(D-1)\ C^{-1/(D-1)}\ D^{-D/(D-1)}$.

Имеем

$$M(r, \varphi) = \max\{\varphi(ir; F),\ \varphi(-ir, F)\} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{r|x|}\, dF(x) \leqslant$$
$$\leqslant -\int_{+0}^{\infty} e^{rx}\, dW_F(x) + 1 \leqslant W_F(+0) + r\int_0^{\infty} e^{rx} W_F(x)\, dx + 1 \leqslant$$
$$\leqslant W_F(+0) + 1 + r\int_0^{x_0} e^{rx} W_F(x)\, dx + Kr\int_{x_0}^{\infty} \exp\{rx - Cx^D\}\, dx.$$

Для оценки последнего интеграла в известном неравенстве Юнга

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \left(a > 0,\ b > 0,\ p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

положим

$$a = \left(A_1 \frac{D}{D-1}\right)^{(D-1)/D} r, \quad b = \left(A_1 \frac{D}{D-1}\right)^{(1-D)/D} x,$$
$$p = \frac{D}{D-1}, \quad q = D.$$

Получим

$$rx \leqslant A_1 r^{D/(D-1)} + \frac{1}{D}\left(A_1 \frac{D}{D-1}\right)^{1-D} x^D,$$

откуда следует

$$M(r, \varphi) \leqslant W_F(+0) + 1 + O(e^{rx_0} r) + Kr \exp(A_1 r^{D/(D-1)}) \times$$
$$\times \int_{x_0}^{\infty} \exp\{-[C - A_1^{1-D}(D-1)^{D-1} D^{-D}] x^D\} \, dx.$$

Так как, в силу ограничения на A_1, выражение в квадратных скобках положительно, то интеграл сходится, и мы получаем оценку (2.4.9).

Из (2.4.6) видно, что

$$\varkappa \geqslant B/(B-1).$$

Это неравенство верно при любом $B > \rho$, так как для таких B верно (2.4.5). Устремляя $B \to \rho$, получаем, что

$$\varkappa \geqslant \rho/(\rho-1), \quad \text{если} \quad 1 < \rho < \infty;$$
$$\varkappa = \infty, \quad \text{если} \quad \rho = 1.$$

Аналогично, замечая, что (2.4.8) верно при любом D, $1 < D < \varkappa$, из (2.4.9) получаем

$$\rho \leqslant \varkappa/(\varkappa-1), \quad \text{если} \quad 1 < \varkappa < \infty;$$
$$\rho = 1, \quad \text{если} \quad \varkappa = \infty.$$

Тем самым справедливость равенства (2.4.3) доказана.

Далее, если $\sigma < \infty$, то (2.4.5) выполняется при $B = \rho$ и любом $A > \sigma$. Полагая в (2.4.6) $B = \rho$ и замечая, что $\varkappa = \rho/(\rho-1)$, получим

$$\lambda \geqslant \left(\frac{1}{A\rho}\right)^{1/(\rho-1)}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{A\rho}\right)^{1/(\rho-1)} \frac{1}{\varkappa}.$$

Устремляя A к σ, имеем

$$\lambda \geqslant \left(\frac{1}{\sigma\rho}\right)^{1/(\rho-1)} \frac{1}{\varkappa}, \quad \text{если} \quad \sigma > 0;$$
$$\lambda = \infty, \quad \text{если} \quad \sigma = 0.$$

Аналогично, из (2.4.8) и (2.4.9) заключаем, что

$$\sigma \leqslant (\varkappa - 1)\,\lambda^{-1/(\varkappa-1)}\,\varkappa^{-\rho} = \frac{1}{\rho}\lambda^{1-\rho}\varkappa^{1-\rho}, \quad \text{если} \quad \lambda < \infty;$$
$$\sigma = 0, \quad \text{если} \quad \lambda = \infty.$$

Тем самым мы доказали справедливость (2.4.4).

С л е д с т в и е. *Существуют х. ф. любого порядка* ρ, $1 < \rho \leqslant \infty$, *с заданной величиной типа* $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$. *Существуют х. ф. порядка* $\rho = 1$ *с величиной типа* $0 < \sigma \leqslant \infty$.

Пусть сначала $1 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty$. Возьмем закон

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - \exp\{-\lambda x^{\varkappa}\}, & x > 0, \end{cases}$$

где λ и $\varkappa$ связаны с ρ и σ соотношениями (2.4.3), (2.4.4). По теореме 2.4.4 х. ф. $\varphi(t; F)$ будет иметь порядок ρ и величину типа σ. Если $1 < \rho < \infty$, $\sigma = 0$ (соответственно $\sigma = \infty$), то возьмем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - \exp\{-x^{\varkappa} \ln^+ x\}, & x > 0, \end{cases}$$

(соответственно

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - \exp\{-x^{\varkappa}(1 + \ln^+ x)^{-1}\}, & x > 0). \end{cases}$$

Если $\rho = \infty$, то возьмем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - \exp\{-x \ln^+ x\}, & x > 0, \end{cases}$$

а если $\rho = 1$, $\sigma = \infty$, возьмем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - \exp\{-e^{x}\}, & x > 0. \end{cases}$$

Наконец, если $\rho = 1$, $0 < \sigma < \infty$, то возьмем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x/\sigma, & 0 < x \leqslant \sigma, \\ 1, & x > \sigma, \end{cases}$$

и воспользуемся теоремой 2.4.2.

З а м е ч а н и е. Для целых х. ф., имеющих бесконечный порядок, с помощью некоторой модификации рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.4.4, можно получить формулы (Б. Рамачандран [1]), связывающие величины ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\rho_k = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{k+2}^{+} M(r, \varphi)}{\ln r}, \quad \varkappa_k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln_{k+2}^{+}(1/W_F(x))}{\ln x},$$

где $\ln_m^+ x = \ln^+ (\ln_{m-1}^+ x)$, $\ln_1^+ x = \ln^+ x$ ($m = 1, 2, \ldots$). С помощью этих формул можно строить х. ф., для которых $M(r, \varphi)$ растет быстрее, чем $\exp_k r$ для фиксированного $k = 1, 2, \ldots$ ($\exp_k r = \exp(\exp_{k-1} r)$, $\exp_1 r = \exp r$).

В заключение покажем, что, какова бы ни была неубывающая функция $V(r) \to +\infty$, существует целая х. ф. $\varphi(t)$, для которой $M(r, \varphi) \geqslant V(r)$, $r \geqslant r_0$.

Положим $v(x) = V^2(\ln^+ x)$ и рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = v(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n+1)}{n^{p_n}} z^{p_n},$$

где p_n — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $\{v(n+1)\}^{1/p_n} \to 1$. Очевидно, рассматриваемый ряд сходится во всей z-плоскости, поэтому функция $f(z)$ является целой. Далее, при $x > 0$ выполняется $f(x) \geqslant v(x)$; действительно, полагая $n = [x]$, имеем

$$f(x) \geqslant v(n+1)\, n^{-p_n} x^{p_n} \geqslant v(n+1) \geqslant v(x).$$

Целая функция $\varphi(t) = f(e^{it})/f(1)$, очевидно, является х. ф. и для нее

$$M(r, \varphi) = \varphi(-ir) = f(e^r)/f(1) \geqslant$$
$$\geqslant v(e^r)/f(1) = V^2(r)/f(1) \geqslant V(r), \quad r \geqslant r_0.$$

§ 5. Теорема Марцинкевича

Результаты предыдущего параграфа показывают, что на рост непостоянных целых х. ф., а следовательно, и хребтовых функций в общем случае нет никаких ограничений, кроме следующего: он должен быть не ниже нормального типа порядка 1. Марцинкевич [1] обнаружил, что если целая хребтовая функция имеет в некотором смысле «мало» нулей, то имеются и другие ограничения на рост.

Теорема 2.5.1 (Марцинкевич). *Пусть* $\varphi(t) \not\equiv \not\equiv \mathrm{const}$ — *целая хребтовая функция конечного порядка* ρ, *показатель сходимости последовательности корней которой равен* ρ_1. *Если* $\rho_1 < \rho$, *то* $\rho \leqslant 2$.

Доказательство. По следствию из теоремы 1.2.9 функция $\varphi(t)$ допускает представление

$$\varphi(t) = e^{Q(t)}\,\pi(t), \tag{2.5.1}$$

где

$$Q(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

— полином степени $n \leqslant \rho$, а $\pi(t)$ — целая функция порядка ρ_1. Легко видеть, что $n = \rho$, так как из $n < \rho$ в силу теоремы 1.2.5 следует, что $\rho \leqslant \max\{n, \rho_1\} < \rho$.

Рассмотрим на t-плоскости лучи

$$\arg t = \theta_k = -\frac{1}{n}\{\arg a_n + 2k\pi\}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{2.5.2}$$

Очевидно,

$$Q(re^{i\theta_k}) = |a_n|\, r^n(1 + o(1)), \qquad r \to \infty,$$
$$k = 0, \ldots, n-1.$$

По теореме 1.2.10 вне системы C кружков с конечной суммой радиусов выполняется

$$\ln|\pi(t)| > -|t|^{\beta}, \qquad \rho_1 < \beta < \rho.$$

Поэтому при $re^{i\theta_k} \overline{\in} C$ имеем

$$\ln|\varphi(re^{i\theta_k})| \geqslant |a_n|\, r^n(1 + o(1)) - r^{\beta} =$$
$$= |a_n|\, r^n(1 + o(1)), \qquad r \to \infty.$$

С другой стороны, учитывая, что

$$\ln|\varphi(t)| \leqslant |Q(t)| + \ln M(|t|, \pi) =$$
$$= |a_n|\,|t|^n(1 + o(1)) + o(|t|^n), \qquad |t| \to \infty,$$

в силу определения хребтовой функции имеем

$$\ln|\varphi(re^{i\theta_k})| \leqslant \ln|\varphi(ir\sin\theta_k)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n|\, r^n|\sin\theta_k|^n + o(r^n), \qquad r \to \infty.$$

Таким образом, при $re^{i\theta} \overline{\in} C$, $r \to \infty$, выполняется

$$|a_n|\, r^n(1 + o(1)) \leqslant |a_n|\, r^n|\sin\theta_k|^n + o(r^n).$$

Отсюда заключаем, что $|\sin\theta_k| = 1$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, и, следовательно,

$$\theta_k \equiv \pm\pi/2 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi). \tag{2.5.3}$$

Очевидно, это возможно только в случае $n \leqslant 2$. Поскольку $n = \rho$, то теорема доказана.

Заметим, что если $n = 2$, то из (2.5.2) и (2.5.3) следует, что $\arg a_2 \equiv \pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, т. е. что a_2 — число действительное отрицательное.

Следствие. *Если целая нормированная хребтовая функция $\varphi(t)$ конечного порядка не имеет корней, то она представима в виде*

$$\varphi(t) = \exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}, \qquad \gamma \geqslant 0, \quad \mathrm{Im}\,\beta = 0,$$

и, таким образом, является х. ф. закона Гаусса или закона вида $\varepsilon_\beta(x)$.

Действительно, при доказательстве теоремы 2.5.1 нами установлено, что функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \exp\{a_2 t^2 + a_1 t + a_0\},$$

где $a_2 \leqslant 0$. Так как $\varphi(0) = 1$, то можно принять $a_0 = 0$. Далее, так как при действительных t имеем $\mathrm{Re}\,\varphi(t) \leqslant \varphi(0)$, то $\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\,\varphi(t)\,|_{t=0} = 0$, следовательно,

$$\mathrm{Re}\,a_1 = \mathrm{Re}\,\varphi'(0) = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\,\varphi(t)\,|_{t=0} = 0.$$

Тем самым следствие доказано.

Замечание. Если нормированная хребтовая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5.1 и имеет корни, то она допускает представление

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t^2 + i\beta t} \prod_k \left(1 - 2it\,\mathrm{Im}\frac{1}{d_k} - \frac{t^2}{|d_k|^2}\right) e^{2it\,\mathrm{Im}\frac{1}{d_k}},$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\mathrm{Im}\,\beta = 0$, $\mathrm{Re}\,d_k > 0, \sum_k |d_k|^{-2} < \infty$.

Действительно, в силу теорем 2.5.1 и 1.2.9 функцию $\varphi(t)$ можно представить в виде (2.5.1), где $Q(t)$ — полином степени не выше 2, а $\pi(t)$ — каноническое произведение рода 0 или 1. Так как каноническое произведение рода 0 можно преобразовать в каноническое произведение рода 1:

$$\prod_k \left(1-\frac{t}{a_k}\right) = e^{ct} \prod_k \left(1-\frac{t}{a_k}\right) e^{t/a_k}, \quad c = -\sum_k \frac{1}{a_k},$$

то мы всегда имеем представление

$$\varphi(t) = e^{b_2 t^2 + b_1 t - b_0} \prod_k \left(1-\frac{t}{a_k}\right) e^{t/a_k},$$

где $\{a_k\}$ — множество всех корней функции $\varphi(t)$. Рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы 2.5.1, доказывает, как мы уже отмечали, что $b_2 \leqslant 0$. Из $\varphi(0) = 1$ следует, что можно принять $b_0 = 0$. Число b_1 является чисто мнимым, так как

$$0 = \operatorname{Re} \varphi'(0) = \operatorname{Re} \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} =$$
$$= \operatorname{Re} \left\{ 2b_2 t + b_1 + \sum_k \frac{t}{a_k (t-a_k)} \right\} \Bigg|_{t=0} = \operatorname{Re} b_1.$$

Учитывая, что по следствию 3 из теоремы 2.3.2 корни хребтовой функции расположены симметрично относительно мнимой оси, т. е. если a_k — корень, то и $(-\bar{a}_k)$ — корень, а

$$\left(1-\frac{t}{a_k}\right)\left(1+\frac{t}{\bar{a}_k}\right) = 1 - 2it \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} - \frac{t^2}{|a_k|^2},$$

получаем доказываемое утверждение.

Теорема 2.5.2. *Пусть* $P(w) \not\equiv \text{const}$ — *целая функция, а* $Q(t)$ — *полином. Если функция*

$$\varphi(t) = P(Q(t)) \tag{2.5.4}$$

является целой хребтовой, то степень $Q(t)$ *не превосходит* 2.

Если дополнительно предположить, что $\varphi(t)$ — *нормированная хребтовая,* $Q(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$, $P(r) = M(r, P)$, *то можно утверждать, что* $Q(t)$ *имеет вид*

$$Q(t) = -\gamma t^2 + i\beta t, \qquad \gamma \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} \beta = 0.$$

Эту теорему можно рассматривать как обобщение следствия теоремы 2.5.1, так как по теореме 1.2.4 целая функция конечного порядка без корней представима в виде (2.5.4) с $P(w) = e^w$.

Для доказательства теоремы 2.5.2 положим

$$Q(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

При $w \to \infty$ корни уравнения $Q(t) = w$, очевидно, уходят на бесконечность. Поэтому из соотношения

$$Q(t) = a_n t^n (1 + o(1)), \qquad t \to \infty,$$

следует такое асимптотическое равенство для этих корней $t_0(w), t_1(w), \ldots, t_{n-1}(w)$:

$$t_k(w) = (1 + o(1)) |w/a_n|^{1/n} \times \\ \times \exp\left\{i\left(\frac{\arg w - \arg a_n}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right\}, \qquad k = 0, \ldots, n-1. \tag{2.5.5}$$

Заметим, что под $o(1)$ мы здесь понимаем величину, стремящуюся к 0 при $w \to \infty$ равномерно относительно $\arg w$.

Предположим, что $n > 2$. В силу (2.5.5) возможно найти такое $k_0 = k_0(w)$, что для достаточно больших $|w|$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im} t_{k_0}(w)| \leqslant |t_{k_0}(w)| \cos\frac{\pi}{2n}. \tag{2.5.6}$$

Будем считать w достаточно большим и таким, что

$$|P(w)| = M(|w|, P). \tag{2.5.7}$$

Имеем

$$|\varphi(t_{k_0}(w))| = |P(Q(t_{k_0}(w)))| = |P(w)| = \\ = M(|w|, P) = M(|Q(t_{k_0}(w))|, P). \tag{2.5.8}$$

С другой стороны, поскольку функция $\varphi(t)$ является хребтовой, имеем

$$|\varphi(t_{k_0}(w))| \leqslant |\varphi(i \operatorname{Im} t_{k_0}(w))| = \\ = |P(Q(i \operatorname{Im} t_{k_0}(w)))| \leqslant \\ \leqslant M(|Q(i \operatorname{Im} t_{k_0}(w))|, P). \tag{2.5.9}$$

Так как функция $M(r, P)$ строго монотонно возрастает по r, то из (2.5.8) и (2.5.9) заключаем, что

$$|Q(t_{k_0}(w))| \leqslant |Q(i \operatorname{Im} t_{k_0}(w))|.$$

Отсюда следует, что $(w \to \infty)$

$$|a_n| \, |t_{k_0}(w)|^n + o(|t_{k_0}(w)|^n) \leqslant \\ \leqslant |a_n| \, |\operatorname{Im} t_{k_0}(w)|^n + o(|t_{k_0}(w)^u|),$$

а это противоречит (2.5.6). Таким образом, мы доказали, что $n \leqslant 2$.

Докажем второе утверждение теоремы. Мы имеем $Q(t) = a_2 t^2 + a_1 t$ (использовали, что $Q(0) = 0$). Предположим, что $a_2 \neq 0$ и $\arg a_2 \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$. Из (2.5.5) следует, что при $w > 0$ выполняется $\arg t_0(w) \to -\frac{1}{2}\arg a_2$, откуда при достаточно большом $w > 0$ следует:

$$|\operatorname{Im} t_0(w)| \leqslant \delta |t_0(w)| \qquad \left(1 > \delta > \left|\sin\left(\frac{1}{2}\arg a_2\right)\right|\right). \tag{2.5.10}$$

По условию, наложенному на $P(w)$, соотношение (2.5.7) выполняется при всех $w > 0$. Поэтому, полагая в (2.5.8) и (2.5.9) $w > 0$, $k_0 = 0$, приходим к противоречию с (2.5.10).

Таким образом, $a_2 \leqslant 0$. Так как $0 = \operatorname{Re} \varphi'(0) = \operatorname{Re}\{a_1 P'(0)\}$, а число $P'(0)$ действительно и отлично от нуля, то $\operatorname{Re} a_1 = 0$. Теорема доказана полностью *).

Первое утверждение теоремы 2.5.2 допускает такое усиление:

Т е о р е м а 2.5.3. *Пусть* $P(w) \not\equiv \mathrm{const}$ *и* $Q(t)$ — *целые функции. Если функция* $\varphi(t) = P(Q(t))$ *является хребтовой, то либо* $Q(t)$ — *полином степени* $\leqslant 2$, *либо* $Q(t)$ — *целая функция такая, что*

$$\varlimsup_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r, Q) > 0. \tag{2.5.11}$$

В качестве примера хребтовой функции, удовлетворяющей условиям теоремы 2.5.3 и такой, что выполнено (2.5.11), приведем х. ф. закона Пуассона $\varphi(t) = \exp(e^{it} - 1)$. Для нее $P(w) = e^w$, $Q(t) = e^{it} - 1$.

Соотношение (2.5.11) означает, что рост $Q(t)$ не ниже нормального типа порядка 1, а пример х. ф. закона Пуассона показывает, что в условиях теоремы 2.5.3 рост нормального типа порядка 1 действительно возможен. Заметим, что в условиях теоремы 2.5.3 возможен сколь угодно

---

*) Условие $P(r) = M(r, P)$ можно, очевидно, заменить более слабым, именно, что соотношение (2.5.7) выполняется для некоторой последовательности $w_p \to \infty$ такой, что $\arg w_p \to 0$.

большой рост для $Q(t)$. Действительно, как было указано в конце § 4, для любой неубывающей функции $V(r) \to \infty$ $(r \to \infty)$ можно построить х. ф. $\varphi_1(t)$ такую, что $M(r, \varphi_1) \geqslant V(r) + 1$. В силу теоремы 1.1.5 функция $\varphi(t) = \exp\{\varphi_1(t) - 1\}$ является х. ф. Для нее $P(w) = e^w$, $Q(t) = \varphi_1(t) - 1$, $M(r, Q) \geqslant V(r)$.

Доказательство теоремы 2.5.3 мы приводить не будем из-за его громоздкости, отсылая читателя к работе И. В. Островского [1]. Заметим только, что в основе доказательства лежит закономерность, обнаруженная Виманом и Валироном (об этом см. книгу Валирона [1]) и состоящая в том, что любая целая трансцендентная функция $Q(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 такой, что $|Q(t_0)| = M(|t_0|, Q)$, ведет себя приблизительно как моно́м, точнее, в этой окрестности справедливо соотношение

$$Q(t) = Q(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{N(t_0)}(1 + \omega(t, t_0)),$$

где $\omega(t, t_0)$ в определенном смысле мало, а $N(t_0) \uparrow \infty$ при $t_0 \uparrow \infty$. Это соотношение играет при доказательстве теоремы 2.5.3 роль, аналогичную той, которую играет соотношение $Q(t) = a_n t^n (1 + o(1))$ при доказательстве теоремы 2.5.2.

§ 6. Аналитические характеристические функции безгранично делимых законов

В силу теоремы 2.2.3, если х. ф. $\varphi(t; F)$ аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b,\ a < b)$, то она там представима в виде

$$\varphi(t; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x),$$

где интеграл сходится абсолютно и равномерно в любой полосе вида $a < a_1 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b_1 < b$ и даже вида $0 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b_1 < b$ $(a < a_1 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant 0)$, если $a = 0$ $(b = 0)$.

Пусть теперь $\varphi(t; F)$ — х. ф. безгранично делимого закона F. По теореме 1.1.8 Леви — Хинчина при $-\infty <$

$< t < \infty$ справедливо представление

$$\varphi(t;\,F)=\exp\left\{i\beta t+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}, \tag{2.6.1}$$

где β — действительное число, а $G(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на оси $-\infty < x < \infty$.

Теорема 2.6.1. *Если х. ф. $\varphi(t;\,F)$ б. д. закона F аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b,\ a < b)$, то она там представима в виде* (2.6.1), *причем интеграл справа сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ (в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} t < b$ $(a < \operatorname{Im} t \leqslant 0)$, если $a = 0$ $(b = 0)$).*

Доказательство. При действительных t положим

$$\begin{aligned} f(t) &= i\beta t+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)=\\ &= i\beta t+\int\limits_{|x|\leqslant 1}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)+\\ &+\int\limits_{|x|>1} e^{itx}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)+\\ &+\int\limits_{|x|>1}\left(-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)=\\ &= i\beta t+I_1(t)+I_2(t)+I_3(t). \end{aligned}$$

Интеграл $I_1(t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте t-плоскости. Это легко следует из соотношения

$$\begin{aligned} &\left|\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\right|=\\ &\qquad=\left|\left(\left[\frac{(itx)^2}{2!}+\frac{(itx)^3}{3!}+\ldots\right]+\frac{itx^3}{1+x^2}\right)\right|\frac{1+x^2}{x^2}\leqslant\\ &\qquad\qquad\leqslant |t|^2(1+x^2)\,e^{|t|\,|x|}+|t|\,|x|. \end{aligned}$$

Поэтому $I_1(t)$ — целая функция от t. Интеграл $I_3(t)$, очевидно, тоже сходится абсолютно и равномерно на любом компакте и является линейной функцией.

Покажем, что интеграл $I_2(t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ (в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} t < b$ ($a < \operatorname{Im} t \leqslant 0$), если $a = 0$ ($b = 0$)). Можем считать, что функция $G(x)$ не является постоянной одновременно при $x < -1$ и при $x > 1$, так как иначе утверждение о сходимости $I_2(t)$ тривиально.

При действительных t имеем $f(t) = \ln \varphi(t; F)$. В силу теорем 2.3.1 и 2.3.2, а) функция $\varphi(i\eta; F)$ не обращается в нуль при $a < \eta < b$ и, следовательно, функция $f(t)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую область D, содержащую интервал (ia, ib). Так как при действительных t

$$I_2(t) = f(t) - i\beta t - I_1(t) - I_3(t),$$

то $I_2(t)$ тоже аналитически продолжается в область D.

Заметим, что $I_2(t)$ является х. ф. с точностью до постоянного множителя, а именно х. ф. закона

$$\frac{1}{c} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1+u^2}{u^2} \chi(u)\, dG(u),$$

где $\chi(u) = 0$ при $|u| \leqslant 1$, $\chi(u) = 1$ при $|u| > 1$, а $c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + u^2)\, u^{-2} \chi(u)\, dG(u)$. Поэтому к $I_2(t)$ можно применить теорему 2.2.3, из которой следует, что $I_2(t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ ($0 \leqslant \operatorname{Im} t < b$ ($a < \operatorname{Im} t \leqslant 0$), если $a = 0$ ($b = 0$)). В силу сказанного ранее об интегралах $I_1(t)$ и $I_3(t)$, на любом таком компакте будет абсолютно и равномерно сходиться также и интеграл, стоящий в правой части (2.6.1). Следовательно, последний является аналитической в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ функцией. Так как соотношение (2.6.1) верно при действительных t, то оно сохранит силу и во всей полосе. Теорема доказана.

В некоторых случаях для представления х. ф.б. д. закона удобнее пользоваться, вместо формулы Леви —

Хинчина (2.6.1), формулой Леви (см. теорему 1.1.9)

$$\varphi(t;\ F)=\exp\left\{i\beta t-\gamma t^2+\int\limits_{-\infty}^{-0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dM(x)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{+0}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dN(x)\right\}, \qquad (2.6.2)$$

где $\operatorname{Im}\beta=0$, $\gamma\geqslant 0$, $M(x)$ и $N(x)$ — неубывающие функции соответственно на $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, удовлетворяющие условию

$$\int\limits_{-\infty}^{-0}\frac{x^2}{1+x^2}\,dM(x)+\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,dN(x)<\infty.$$

Теорема 2.6.2. *Теорема* 2.6.1 *сохраняет силу, если в ее формулировке представление Леви — Хинчина* (2.6.1) *заменить представлением Леви* (2.6.2).

Для того чтобы вывести эту теорему из теоремы 2.6.1, достаточно воспользоваться соотношениями, связывающими γ, $M(x)$ и $N(x)$ в формуле (2.6.2) с функцией $G(x)$ в формуле (2.6.1):

$$2\gamma = G(+0) - G(0);$$

$$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u), \quad x<0;$$

$$N(x)=-\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u),\ x>0. \qquad (2.6.3)$$

Из теоремы 2.6.1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если х. ф. б. д. закона аналитична в полосе* $a<\operatorname{Im} t<b$ $(a\leqslant 0\leqslant b,\ b>a)$, *то она в этой полосе не обращается в нуль.*

В частности, целая х. ф. б. д. закона не имеет нулей во всей комплексной t-плоскости. Поэтому с помощью следствия из теоремы 2.5.1 получаем

Следствие 2. *Если целая х. ф.* $\varphi(t;\ F)$ *б. д. сакона* F *имеет конечный порядок, то она имеет вид*

$$\varphi(t;\ F) = \exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}, \qquad \gamma\geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\beta = 0.$$

Заметим, что существуют целые х. ф., не являющиеся х. ф. б. д. законов и не имеющие нулей во всей комплексной t-плоскости. В качестве примера можно взять х. ф. $\varphi_\alpha(t)$, $\alpha \geqslant 1/2$, рассмотренную в примере 2 из § 3 (стр. 47). Так как

$$\varphi_\alpha(t) = \exp\{\alpha[2e^{it} - e^{2it} + 3e^{3it} + 3e^{4it} - 7]\},$$

то функция $\varphi_\alpha(t)$ не имеет нулей. С другой стороны, так как при $n > 2\alpha$ функция $\{\varphi_\alpha(t)\}^{1/n}$ не является х. ф., то $\varphi_\alpha(t)$ не может быть х. ф. б. д. закона.

Может случиться, что х. ф. б. д. закона, аналитическая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b,\ b > a)$, допускает аналитическое продолжение за пределы этой полосы и там уже имеет нули.

Пример 1. Положим $(w = a + ib,\ a > 0,\ b > 0)$

$$\varphi(t) = \frac{(1 - it/w)(1 - it/\bar{w})}{(1 - it/a)^2},$$

$$\beta = 2\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(1 - \cos bx)}{1 + x^2}\,dx,$$

$$N(x) = -2\int_x^\infty e^{-au}(1 - \cos bu)\,u^{-1}\,du, \qquad 0 < x < \infty.$$

С помощью прямого подсчета убеждаемся в том, что

$$\varphi(t) = \exp\left\{\beta it + \int_{+0}^\infty \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2}\right) dN(x)\right\},$$

и, следовательно, $\varphi(t)$ является х. ф. б. д. закона. Функция $\varphi(t)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} t > -a$, а на ее границе, в точках $\pm b - ia$, обращается в нуль.

Представляет интерес нахождение связи между величинами $\operatorname{rext} F$ и $\operatorname{lext} F$, введенными в § 4, и функцией $G(x)$, входящей в представление (2.6.1) х. ф. $\varphi(t; F)$ б. д. закона F.

Теорема 2.6.3. *Пусть F — б. д. закон. Для того чтобы величина* $\operatorname{lext} F$ ($\operatorname{rext} F$) *была конечной, необходимо и достаточно, чтобы функция $G(x)$, входящая в представ-*

ление (2.6.1), *была постоянной на полуоси* $x \leqslant 0$ $(x \geqslant 0)$ *и, кроме того, выполнялось условие*

$$\int_0^\infty \frac{dG(x)}{x} < \infty \qquad \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dG(x)}{|x|} < \infty \right). \tag{2.6.4}$$

Справедлива формула

$$\operatorname{lext} F = \beta - \int_0^\infty x^{-1}\, dG(x) \tag{2.6.5}$$

$$\left(\operatorname{rext} F = \beta - \int_{-\infty}^0 x^{-1}\, dG(x) \right).$$

Достаточность. Мы имеем

$$\ln \varphi(t;\ F) =$$
$$= i\beta t + \int_0^\infty \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x), \qquad -\infty < t < \infty.$$

Представим интеграл, стоящий в правой части, в виде суммы двух интегралов — по отрезку [0, 1] и по полуоси $(1, \infty)$. Первый, как было установлено при доказательстве теоремы 2.6.1, сходится абсолютно и равномерно на любом компакте t-плоскости и является целой функцией, а второй, очевидно, сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в полуплоскости $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ и является аналитической при $\operatorname{Im} t > 0$ функцией. Отсюда следует, что $\varphi(t;\ F)$ является аналитической х. ф. в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$, и в силу теоремы 2.4.3 имеем $\operatorname{lext} F = -h_+(F)$, где $h_+(F) = \lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln \varphi(ir;\ F)$. Для подсчета величины $h_+(F)$ запишем $(r \geqslant 0)$:

$$\ln \varphi(ir;\ F) = -\beta r + \int_0^\infty \left(e^{-rx} - 1 + \frac{rx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) =$$

$$= r\left(-\beta + \int_0^\infty \frac{dG(x)}{x} \right) - \int_0^\infty (1 - e^{-rx}) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) \tag{2.6.6}$$

(мы использовали условие $\int\limits_0^\infty x^{-1}\,dG(x) < \infty$). Покажем, что последний интеграл есть $o(r)$ при $r \to \infty$. Действительно, пусть ε — любое положительное, выберем $0 < \delta < 1$ таким, чтобы $\int\limits_0^\delta x^{-1}\,dG(x) < \varepsilon$. Используя элементарное неравенство

$$1 - e^{-y} \leqslant y, \qquad -\infty < y < \infty, \tag{2.6.7}$$

получаем

$$\int\limits_0^\infty (1-e^{-rx})\,\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x) = \left(\int\limits_0^\delta + \int\limits_{\delta+0}^\infty\right)(1-e^{-rx})\,\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\delta rx\,\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x) + \int\limits_\delta^\infty \frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon r + \frac{1+\delta^2}{\delta^2}\int\limits_0^\infty dG(x) = 2\varepsilon r + O(1), \qquad r \to \infty.$$

Поэтому из (2.6.6) получаем

$$h_+(F) = -\beta + \int\limits_0^\infty x^{-1}\,dG(x) < \infty,$$

и тем самым конечность величины $\operatorname{lext} F$ и справедливость формулы (2.6.5) доказаны.

Необходимость. Пусть $\operatorname{lext} F < \infty$. Тогда в силу теоремы 2.4.3 и ее следствия функция $\varphi(t;\,F)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$ и $h_+(F) = -\operatorname{lext} F$. По теореме 2.6.1 интеграл в (2.6.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$ и представление (2.6.1) зохраняет силу во всей этой полуплоскости. Поэтому имеем

$$\ln\varphi(ir;\,F) = -\beta r + \int\limits_{-\infty}^\infty \left(e^{-rx} - 1 + \frac{rx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x), \qquad r \geqslant 0.$$

Положим

$$I_1(r)=\int\limits_{-\infty}^{-0}\left(e^{-rx}-1+\frac{rx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x),$$

$$I_2(r)=\int\limits_{0}^{1-0}(e^{-rx}-1+rx)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x),$$

$$I_3(r)=\int\limits_{1}^{\infty}\left(e^{-rx}-1+\frac{rx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x).$$

Тогда имеем

$$\ln\varphi(ir;\,F)=-r\left(\beta+\int\limits_{0}^{1-0}x^{-1}\,dG(x)\right)+I_1(r)+I_2(r)+I_3(r). \tag{2.6.8}$$

Заметим, что $I_3(r)=O(r)$, $r\to\infty$, и так как $h_+(F)<\infty$, то и

$$\ln\varphi(ir;\,F)=O(r),\qquad r\to\infty.$$

Легко видеть, что из неравенства (2.6.7) следует неотрицательность подынтегральных выражений в интегралах $I_1(r)$ и $I_2(r)$. Поэтому $I_1(r)\geqslant 0$, $I_2(r)\geqslant 0$, и из (2.6.8) следует, что $I_1(r)=O(r)$, $I_2(r)=O(r)$. Далее воспользуемся леммой Фату. В силу этой леммы имеем соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{-0}\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1+\frac{rx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\,I_1(r), \tag{2.6.9}$$

$$\int\limits_{0}^{1-0}\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}(e^{-rx}-1+rx)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\,I_2(r). \tag{2.6.10}$$

Очевидно, что в интеграле, стоящем в левой части (2.6.9), подынтегральная функция равна тождественно $+\infty$, а в интеграле, стоящем в левой части (2.6.10),— она равна $(1+x^2)/x$. Так как выражения в правых частях (2.6.9) и (2.6.10) конечны, то из (2.6.9) следует, что G-мера полуоси $(-\infty,\ 0)$ равна нулю, а из (2.6.10) следует сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{1-0}(1+x^2)\,x^{-1}\,dG(x)$. Тем самым доказано, что

$G(x) \equiv \text{const}$ на полуоси $-\infty < x \leqslant 0$ и сходится интеграл $\int\limits_0^\infty x^{-1}\,dG(x)$.

Теорема, аналогичная теореме 2.6.3, для представления формулой Леви (2.6.2) выглядит так.

Теорема 2.6.4. *Пусть F — б. д. закон. Для того чтобы величина* $\operatorname{lext} F$ ($\operatorname{rext} F$) *была конечной, необходимо и достаточно, чтобы в представлении* (2.6.2) *функция* $M(x)$ ($N(x)$) *была постоянной,* $\gamma = 0$ *и, кроме того, выполнялось*

$$\int\limits_{+0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dN(x) < \infty \qquad \left(\int\limits_{-\infty}^{-0} \frac{|x|}{1+x^2}\,dM(x) < \infty\right).$$

Справедлива формула

$$\operatorname{lext} F = \beta - \int\limits_{+0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dN(x)$$

$$\left(\operatorname{rext} F = \beta - \int\limits_{-\infty}^{-0} \frac{x}{1+x^2}\,dM(x)\right).$$

Эта теорема получается из теоремы 2.6.3 с помощью формулы (2.6.3). Равенство $\gamma = 0$ эквивалентно непрерывности функции $G(x)$ в точке $x = 0$ и поэтому следует из (2.6.4).

Отметим также непосредственное следствие *) теоремы 2.6.3.

Следствие. *Если для б. д. закона F обе величины* $\operatorname{lext} F$ *и* $\operatorname{rext} F$ *конечны, то этот закон — единичный.*

Пример 2. Найдем условия конечности величины $\operatorname{lext} F$ для законов, х. ф. которых даются формулой

$$\varphi(t;\ F) = \exp\{i\beta t - \varkappa\,|t|^\alpha\,\{1 + ic\omega(t,\ \alpha)\operatorname{sign} t\}\}, \tag{2.6.11}$$

*) Его можно получить также, применяя следствие 2 теоремы 2.6.1 и теорему 2.4.2.

где $\operatorname{Im}\beta = 0$, $\varkappa \geqslant 0$; $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant c \leqslant 1$,

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Эти законы называются устойчивыми.

Случаи 1) $\varkappa = 0$ и 2) $\alpha = 2$, $\varkappa > 0$ тривиальны. В первом закон F является единичным и для него $\operatorname{lext} F = \beta \neq \infty$. Во втором закон F является законом Гаусса и для него $\operatorname{lext} F = -\infty$.

Будем теперь считать, что $0 < \alpha < 2$, $\varkappa > 0$. Как известно (см., например, Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров [1], стр. 177—178), эти законы безгранично делимы, и в представлении х. ф. (2.6.11) формулой Леви (2.6.2) имеем

$$\gamma = 0, \quad M(x) = c_1 \mid x \mid^{-\alpha}, \quad N(x) = -c_2 x^{-\alpha}, \tag{2.6.12}$$

где $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$, $\varkappa = (c_1 + c_2)\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}$.

Из теоремы 2.6.4 следует, что для конечности $\operatorname{lext} F$ необходимо и достаточно, чтобы $c_1 = 0$, $0 < \alpha < 1$. Таким образом, общий вид х. ф. устойчивого закона с конечной величиной $\operatorname{lext} F$ таков:

$$\varphi(t; F) = \exp\left\{i\beta t - \varkappa |t|^{\alpha}\left\{1 - i\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\operatorname{sign} t\right\}\right\},$$

где $\operatorname{Im}\beta = 0$, $\varkappa \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$. При этом имеем

$$\operatorname{lext} F = \beta - \int_{+0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dN(x) = \beta - \alpha c_2 \cdot \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi\alpha}{2} =$$
$$= \beta - \varkappa\Gamma(\alpha+1)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Пример 3. Рассмотрим закон вида

$$F(x) = A_0 \int_{-\infty}^{x} \exp\left[bu - Ae^{au}\right] du,$$

где A_0, A, a, b — положительные постоянные. Докажем, что F — б. д. закон. Имеем ($v=e^{au}$)

$$\varphi(t;\,F)=A_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[itu+bu-Ae^{au}\right]du=$$

$$=(A_0/a)\int\limits_0^{\infty}e^{u(it+b-a)}e^{-Av}\,dv=$$

$$=(A_0/a)\int\limits_0^{\infty}v^{\frac{it+b}{a}-1}e^{-Av}\,dv=\frac{A_0}{a}A^{-\frac{it+b}{a}}\,\Gamma\left(\frac{it+b}{a}\right).$$

Так как $\varphi(0;\,F)=1$, то заключаем, что

$$A_0=aA^{b/a}/\Gamma(b/a),$$

и, следовательно,

$$\varphi(t;\,F)=A^{-it/a}\Gamma\left(\frac{it+b}{a}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{b}{a}\right).$$

Далее нам понадобится формула Мальмстена (Уиттекер и Ватсон [1], п. 12.31)

$$\ln\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{e^{-(z-1)x}-1}{1-e^{-x}}+z-1\right\}\frac{e^{-x}}{x}\,dx\qquad(\operatorname{Re}z>0).$$

В силу этой формулы имеем

$$\ln\varphi(t;\,F)=-\frac{it}{a}\ln A+\ln\Gamma\left(\frac{it+b}{a}\right)-\ln\Gamma\left(\frac{b}{a}\right)=$$

$$=-\frac{it}{a}\ln A+\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{e^{-\left(\frac{b}{a}-1\right)x}\left(e^{-\frac{it}{a}x}-1\right)}{1-e^{-x}}+\frac{it}{a}\right\}\frac{e^{-x}}{x}\,dx=$$

$$=-\frac{it}{a}\ln A-\int\limits_{-\infty}^{0}\left\{\frac{(e^{ity}-1)\,e^{(b-a)y}}{1-e^{ay}}+\frac{it}{a}\right\}\frac{e^{ay}}{y}\,dy=$$

$$=-\frac{it}{a}\ln A+\int\limits_{-\infty}^{0}\left\{e^{ity}-1+\frac{1-e^{ay}}{ae^{(b-a)y}}\,it\right\}\frac{e^{by}\,dy}{|y|\,(1-e^{ay})}=$$

$$=-\frac{it}{a}\ln A+\int\limits_{-\infty}^{0}\left\{e^{ity}-1-\frac{ity}{1+y^2}\right\}\frac{e^{by}\,dy}{|y|\,(1-e^{ay})}-$$

$$-it\int\limits_{-\infty}^{0}\left\{\frac{e^{ay}}{ay}+\frac{e^{by}}{(1+y^2)(1-e^{ay})}\right\}dy.$$

Тем самым доказано, что функция $\varphi(t;\ F)$ представляется формулой Леви (2.6.2) с $\gamma = 0$,

$$\beta = -\frac{1}{a}\ln A - \int_{-\infty}^{0}\left\{\frac{e^{ay}}{ay} + \frac{e^{by}}{(1+y^2)(1-e^{ay})}\right\} dy,$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{by}\,dy}{|y|(1-e^{ay})}, \quad N(x) \equiv 0. \qquad (2.6.13)$$

Следовательно, закон F является б. д.

Для закона F имеем $\operatorname{lext} F = -\infty$, $\operatorname{rext} F = +\infty$ и — что находится в соответствии с теоремой 2.6.4 — выполняется

$$\int_{-\infty}^{-0} \frac{|x|}{1+x^2}\,dM(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{bx}\,dx}{(1+x^2)(1-e^{ax})} = \infty.$$

ГЛАВА III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Как уже говорилось во введении, основной задачей теории разложений вероятностных законов является описание всех компонент данного вероятностного закона.

Большинство полученных в этой теории результатов установлено с помощью доказанной независимо Д. А. Райковым и П. Леви теоремы, гласящей, что если х. ф. закона F является целой, то и все компоненты закона F имеют целые х. ф. Эта теорема позволяет в широком классе случаев свести задачу об описании компонент закона с целой х. ф. к некоторой задаче теории аналитических функций, решая которую можно получить искомое описание.

В § 1 мы докажем теорему, несколько более общую, чем указанная выше теорема Райкова — Леви, и наметим путь, позволяющий в ряде случаев свести задачу об описании компонент к задаче теории аналитических функций. Этим путем мы будем постоянно пользоваться в гл. V; в настоящей же главе ограничимся доказательством теоремы Крамера о компонентах закона Гаусса.

Для изучения компонент закона часто оказывается полезным понятие спектра закона и соотношения между спектрами закона и его компонент. Эти соотношения мы устанавливаем в § 2.

В § 3 мы показываем, что класс неразложимых законов — законов, не имеющих собственных компонент, — довольно широк (в частности, он является плотным в смысле слабой сходимости множеством во множестве всех вероятностных законов). Возникает вопрос, справедлива ли для вероятностных законов теорема, аналогичная основной теореме обычной арифметики, где роль простых чисел играют неразложимые законы.

В § 4 этот вопрос получает в известной мере полное решение. Мы доказываем фундаментальную теорему А. Я. Хинчина о том, что всякий закон F, имеющий неразложимые компоненты, допускает представление

$$F = G * G_1 * G_2 * \ldots \tag{3.0.1}$$

где G — закон, не имеющий неразложимых компонент, а законы G_1, G_2, ... — неразложимые (их число может быть конечным или счетным *)). Приводимые примеры показывают, что представление (3.0.1), вообще говоря, не единственно.

В связи с теоремой А. Я. Хинчина возникает проблема описания класса (он обозначается через I_0) законов, не имеющих неразложимых компонент.

В § 5 мы доказываем теорему А. Я. Хинчина, гласящую, что этот класс является собственным подклассом класса безгранично делимых законов.

Подробнее проблемой описания класса I_0 мы будем заниматься в гл. IV, V и VI.

§ 1. Компоненты законов с аналитическими характеристическими функциями

Теорема 3.1.1. *Пусть F — закон, х. ф. которого $\varphi(t;\ F)$ аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b)$, F_1 — компонента закона F. Тогда х. ф. $\varphi(t;\ F_1)$ тоже аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.2.4 (необходимость) закон F удовлетворяет условиям $(x \to +\infty)$

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= O(e^{-rx}), \quad r < |a|; \\ F(-x) &= O(e^{-rx}), \quad r < b. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Нам нужно показать, что таким же условиям удовлетворяет и закон F_1: тогда, используя теорему 2.2.4 (достаточность), получим аналитичность х. ф. $\varphi(t;\ F_1)$ в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$.

---

*) Мы говорим, что закон H является композицией счетного множества законов G_1, G_2, ..., если он является слабым пределом законов $G_1 * G_2 * \ldots * G_n$, $n \to \infty$.

По определению компоненты закона существует закон F_2 такой, что $F = F_1 * F_2$. Пусть $\varepsilon > 0$, а x_0 — произвольная точка роста *) закона F_2. Имеем

$$1 - F(x) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_1(x-s)]\, dF_2(s) \geqslant \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} [1 - F_1(x-s)]\, dF_2(s) \geqslant$$
$$\geqslant [1 - F_1(x - x_0 + \varepsilon)]\,[F_2(x_0+\varepsilon) - F_2(x_0-\varepsilon)].$$

Отсюда следует, что

$$1 - F_1(y) \leqslant \frac{1 - F(y + x_0 - \varepsilon)}{F_2(x_0+\varepsilon) - F_2(x_0-\varepsilon)}.$$

Аналогично получаем неравенство

$$F_1(-y) \leqslant \frac{F(-y + x_0 + \varepsilon)}{F_2(x_0+\varepsilon) - F_2(x_0-\varepsilon)}.$$

Отсюда видно, что условия (3.1.1) сохраняются для закона F_1. Теорема доказана.

Заметим, что теорему 3.1.1 нельзя усилить в том смысле, что аналитическое продолжение х. ф. $\varphi(t;\, F_1)$ за пределы полосы $a < \operatorname{Im} t < b$ может оказаться невозможным даже в том случае, когда $\varphi(t;\, F)$ аналитически продолжается в некоторую область, более широкую, чем эта полоса.

Пример 1. Рассмотрим законы F, F_1 и F_2 (композиции счетного множества законов Пуассона), х. ф. которых даются формулами

$$\varphi(t;\, F) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}(e^{imt} - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}(e^{-imt} - 1)\right\},$$

$$\varphi(t;\, F_1) = \exp\left\{\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r!}(e^{ir!t} - 1) + \sum_{r=1}^{\infty} e^{-r!}(e^{-ir!t} - 1)\right\},$$

$$\varphi(t;\, F_2) = \exp\left\{{\sum_{m=1}^{\infty}}' e^{-m}(e^{imt} - 1) + {\sum_{m=1}^{\infty}}' e^{-m}(e^{-imt} - 1)\right\}$$

*) То есть такая точка, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $F_2(x_0 + \varepsilon) - F_2(x_0 - \varepsilon) > 0$.

(штрих у знака суммы означает, что пропускаются все значения m вида $r!$, $r = 1, 2, \ldots$). Очевидно, $F = F_1 * F_2$.

Так как

$$\varphi(t; F) = \exp\left\{\frac{e^{it}}{e - e^{it}} + \frac{e^{-it}}{e - e^{-it}} - \frac{2}{e-1}\right\},$$

то х. ф. $\varphi(t; F)$ аналитически продолжается на всю t-плоскость с исключенными точками $\pm i + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). С другой стороны, так как функция $S(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-r!} z^{r!}$ непродолжаема аналитически за пределы круга $|z| < e$ (Е. Титчмарш [1], п. 4.7), то х. ф. $\varphi(t; F_1) = \exp\{S(e^{it}) + S(e^{-it}) - 2S(1)\}$ непродолжаема аналитически за пределы полосы $|\operatorname{Im} t| < 1$.

Отметим такое непосредственное следствие теоремы 3.1.1 и принципа единственности аналитического продолжения.

Следствие 1. *Пусть F — закон, х. ф. которого $\varphi(t; F)$ аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$, $a \leqslant 0 \leqslant b$. Если $F = F_1 * F_2$, то х. ф. $\varphi(t; F_1)$ и $\varphi(t; F_2)$ аналитичны в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ и в этой полосе выполняется равенство*

$$\varphi(t; F) = \varphi(t; F_1)\,\varphi(t; F_2).$$

Отсюда вытекает такое следствие о компонентах целочисленных законов с аналитическими производящими функциями.

Следствие 2. *Пусть F — целочисленный закон, производящая функция которого $\psi(z; F)$ аналитична в кольце $\alpha < |z| < \beta$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \leqslant \beta \leqslant \infty)$, и пусть $F = F_1 * F_2$. Обозначим через $\widetilde{F}_1$ и $\widetilde{F}_2$ целочисленные законы, эквивалентные F_1 и F_2 соответственно* (они существуют в силу сказанного в § 1 гл. I, стр. 18). *Тогда производящие функции $\psi(z; \widetilde{F}_1)$ и $\psi(z; \widetilde{F}_2)$ аналитичны в кольце $\alpha < |z| < \beta$ и в этом кольце выполняется равенство*

$$\psi(z; F) = \psi(z; \widetilde{F}_1)\,\psi(z; \widetilde{F}_2).$$

Определение. Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi(t)$ — нормированные хребтовые функции в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$. Функцию $\varphi_1(t)$ будем называть *хребтовой компонентой* функции $\varphi(t)$, если существует такая нормированная хребтовая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ функция $\varphi_2(t)$, что в этой полосе выполняется $\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$.

Так как всякая х. ф., аналитическая в полосе, является там нормированной хребтовой функцией, то из следствия 1 теоремы 3.1.1 вытекает такой факт.

Теорема 3.1.2. *Пусть F — закон, х. ф. которого $\varphi(t;\ F)$ аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b)$. Х. ф. любой компоненты закона F содержится во множестве всех хребтовых компонент функции $\varphi(t;\ F)$.*

Значение теоремы 3.1.2 состоит в том, что она открывает такой путь к решению задачи об описании компонент закона F с х. ф. $\varphi(t;\ F)$, аналитической в полосе: сначала нужно описать все хребтовые компоненты функции $\varphi(t;\ F)$, а затем отобрать те из компонент, которые сами являются х. ф.

В силу теоремы 3.1.2 таким способом мы опишем все компоненты закона F.

Описать все хребтовые компоненты целой хребтовой функции иногда удается с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.1.3. *Пусть $\varphi(t)$ — нормированная целая хребтовая функция, $\varphi_1(t)$ — ее хребтовая компонента. Справедлива оценка*

$$M(r,\ \varphi_1) \leqslant e^{Cr} M(r,\ \varphi), \quad r \geqslant 0, \tag{3.1.2}$$

где $C \geqslant 0$ — не зависящая от r постоянная.

Доказательство. Пусть $\varphi_2(t)$ — целая хребтовая функция такая, что $\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$. В силу следствия 4 из теоремы 2.3.2 имеем оценку

$$|\varphi_2(i\eta)| \geqslant \exp\{-C\,|\eta|\}, \quad -\infty < \eta < \infty,$$

где $C \geqslant 0$ не зависит от η. Учитывая эту оценку, с помощью леммы 2.3.1 получаем нужный результат:

$$M(r,\ \varphi_1) = \max\{\varphi_1(ir),\ \varphi_1(-ir)\} = \\ = \max\left\{\frac{\varphi(ir)}{\varphi_2(ir)},\ \frac{\varphi(-ir)}{\varphi_2(-ir)}\right\} \leqslant \\ \leqslant e^{Cr}\max\{\varphi(ir),\ \varphi(-ir)\} = e^{Cr} M(r,\ \varphi).$$

Следствие 1. *Множество всех хребтовых компонент функции*

$$\varphi(t) = \exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}, \quad \gamma \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\beta = 0 \tag{3.1.3}$$

состоит из функций вида

$$\varphi_1(t) = \exp\{-\gamma_1 t^2 + i\beta_1 t\}, \qquad 0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma, \qquad \operatorname{Im}\beta_1 = 0. \tag{3.1.4}$$

Доказательство. Очевидно, всякая хребтовая компонента $\varphi_1(t)$ функции $\varphi(t)$ не имеет корней. Кроме того, в силу (3.1.2) рост $\varphi_1(t)$ не выше нормального типа порядка 2. Применяя следствие теоремы 2.5.1, заключаем, что функция $\varphi_1(t)$ должна иметь вид $\varphi_1(t) = \exp\{-\gamma_1 t^2 + i\beta_1 t\}$, $\gamma_1 \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\beta_1 = 0$. Нужно еще показать, что $\gamma_1 \leqslant \gamma$. Пусть $\varphi_2(t)$ — нормированная целая хребтовая функция такая, что $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$. Тогда $\varphi_2(t)$ — тоже хребтовая компонента $\varphi(t)$ и, по доказанному, $\varphi_2(t) = \exp\{-\gamma_2 t^2 + i\beta_2 t\}$, $\gamma_2 \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\beta_2 = 0$. Очевидно, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, откуда следует $\gamma \geqslant \gamma_1$.

То, что всякая функция вида (3.1.4) является хребтовой компонентой для функции вида (3.1.3), следует из равенства

$$\exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\} = \\ = \exp\{-\gamma_1 t^2 + i\beta_1 t\}\exp\{-(\gamma - \gamma_1)t^2 + i(\beta - \beta_1)t\}.$$

Мы можем теперь легко получить теорему, высказанную П. Леви и доказанную Г. Крамером [1], которая исторически была первым результатом, относящимся к теории разложений вероятностных законов.

Теорема 3.1.4 (Г. Крамер). *Множество всех собственных компонент закона Гаусса с дисперсией* $\sigma^2 > 0$ *состоит из всех законов Гаусса с дисперсиями* σ_1^2, $0 < \sigma_1^2 < \sigma^2$.

Действительно, пусть F — закон Гаусса с дисперсией σ^2; тогда $\varphi(t; F) = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + i\beta t\}$, $\operatorname{Im}\beta = 0$. По теореме 3.1.2 х. ф. любой компоненты закона F содержится во множестве всех хребтовых компонент функции $\varphi(t; F)$. Но это множество описано в следствии 1 теоремы 3.1.3 — оно состоит из функций, которые допускают представление вида $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2 + i\beta_1 t\}$, $0 \leqslant \sigma_1^2 \leqslant \sigma^2$, $\operatorname{Im}\beta_1 = 0$. Эти функции сами являются х. ф.; в случае $\sigma_1 = 0$ — единичного закона $\varepsilon_{\beta_1}(x)$, в случае $\sigma_1 > 0$ — закона Гаусса с дисперсией σ_1^2.

Тем самым доказано, что всякая собственная компонента закона F является законом Гаусса с дисперсией $\sigma_1^2 < \sigma^2$. То, что всякий закон Гаусса с дисперсией $\sigma_1^2 < \sigma^2$ является компонентой закона F, очевидно.

Замечание 1. В силу следствия 1 теоремы 3.1.3 множество всех хребтовых компонент функции $e^{i\beta t}$, $\operatorname{Im} \beta = 0$, состоит из функций вида $e^{i\beta_1 t}$, $\operatorname{Im} \beta_1 = 0$. Опираясь на теорему 3.1.2, получаем описание множества всех компонент любого единичного закона: оно состоит из всех единичных законов.

Замечание 2. В следствии 1 теоремы 3.1.3 мы наблюдаем такое явление: все хребтовые компоненты х. ф. сами оказались х. ф. С таким явлением нам еще придется встречаться и в гл. V. Однако в общем случае хребтовые компоненты х. ф. не обязаны быть х. ф.

Пример 2. Пусть $\varphi_\alpha(t)$ — функция из примера 2 § 3 гл. II. Эта функция при $\alpha \geqslant 1/2$ является х. ф., а при $0 < \alpha < 1/2$ не является, оставаясь, однако, нормированной целой хребтовой функцией. Так как при любом $\alpha > 0$ выполняется $\varphi_\alpha(t) = [\varphi_1(t)]^\alpha$, то функция $\varphi_{1/4}(t)$ является хребтовой компонентой х. ф. $\varphi_{1/2}(t)$.

Пример 3. Пусть $\varphi_\alpha(t)$ — функция из примера 3 § 3 гл. II; она является х. ф. при $\alpha \geqslant 1/2$, а при $0{,}28 \leqslant \alpha < 1/2$ не является, оставаясь нормированной целой хребтовой. Так как

$$\varphi_{1/2}(t) = \varphi_\alpha(t) \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) t^2\right\},$$

то функция $\varphi_\alpha(t)$ при $0{,}28 \leqslant \alpha < 1/2$ является хребтовой компонентой х. ф. $\varphi_{1/2}(t)$.

Отметим еще такое следствие теоремы 3.1.3.

Следствие 2. *Пусть* $\varphi(t) \not\equiv 1$ — *нормированная целая хребтовая функция,* $\varphi_1(t)$ — *ее хребтовая компонента. Тогда для их порядков имеем* $\rho(\varphi_1) \leqslant \rho(\varphi)$. *Кроме того, если* $\rho(\varphi_1) = \rho(\varphi) > 1$, *то для величин типов имеем* $\sigma(\varphi_1) \leqslant \sigma(\varphi)$.

Действительно, в силу следствия 5 из теоремы 2.3.2 функция $\varphi(t)$ имеет рост не ниже нормального типа порядка 1, поэтому множитель e^{Cr} в (3.1.2) не может привести к увеличению порядка. Если $\rho(\varphi) > 1$, то, очевидно, множитель e^{Cr} не может привести и к увеличению величины типа.

Заметим, что в случае $\rho(\varphi) = 1$ увеличение величины типа может произойти. Например, в силу равенства $e^{it} = e^{2it} \cdot e^{-it}$ функция e^{2it} порядка 1 с величиной типа 2 является хребтовой компонентой функции e^{it} порядка 1 с величиной типа 1.

Более сильным, чем теорема 3.1.3, средством для описания множества хребтовых компонент является, как мы увидим в гл. V, следующая теорема.

Теорема 3.1.5 («о сглаживании хребта»). *Если функция $\varphi_1(t)$ является хребтовой компонентой нормированной хребтовой в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b)$ функции $\varphi(t)$, то во всей полосе имеет место неравенство*

$$1 \leqslant \left| \frac{\varphi_1(i \operatorname{Im} t)}{\varphi_1(t)} \right| \leqslant \left| \frac{\varphi(i \operatorname{Im} t)}{\varphi(t)} \right|. \tag{3.1.5}$$

Доказательство. По определению хребтовой компоненты найдется хребтовая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ функция $\varphi_2(t)$ такая, что $\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$. Из этого равенства следует, что

$$\frac{\varphi(i \operatorname{Im} t)}{\varphi(t)} = \frac{\varphi_1(i \operatorname{Im} t)}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{\varphi_2(i \operatorname{Im} t)}{\varphi_2(t)}.$$

Так как $\varphi_2(t)$ — хребтовая функция, то выполняется $|\varphi_2(i \operatorname{Im} t)/\varphi_2(t)| \geqslant 1$, и мы получаем правое из неравенств (3.1.5). Левое имеет место по определению хребтовой функции.

§ 2. Спектры закона и их связь со спектрами компонент

Определение. *Спектром $S(F)$ закона F называется множество всех точек роста* *) *закона F.*

Очевидно, спектр $S(F)$ является непустым замкнутым множеством и любое непустое замкнутое множество на прямой является спектром $S(F)$ для некоторого закона F. Заметим еще, что

$$\operatorname{lext} F = \inf_{x \in S(F)} x, \quad \operatorname{rext} F = \sup_{x \in S(F)} x.$$

*) Напомним, что точка x называется точкой роста закона $F(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$.

О п р е д е л е н и е. *Дискретным спектром* $D(F)$ закона F называется множество всех точек разрыва закона F.

Дискретный спектр $D(F)$ не более чем счетен и, вообще говоря, может быть пустым. Очевидно, $D(F) \subset S(F)$ и любая изолированная точка $S(F)$ принадлежит $D(F)$. Легко видеть, что если A — любое замкнутое множество, а B — не более чем счетное его подмножество, содержащее все изолированные точки из A, то существует закон F, для которого $S(F) = A$, $D(F) = B$.

С дискретным спектром закона F мы свяжем величины

$$d(F) = \sum_{x \in D(F)} \{F(x+0) - F(x)\},$$

$$\widetilde{d}(F) = \max_{x \in D(F)} \{F(x+0) - F(x)\},$$

считая по определению $d(F) = \widetilde{d}(F) = 0$, если $D(F) = \varnothing$. Очевидно, что всегда $0 \leqslant \widetilde{d}(F) \leqslant d(F) \leqslant 1$.

Чтобы установить связь между спектрами закона и спектрами его компонент, нам понадобится понятие арифметической суммы множеств.

О п р е д е л е н и е. Пусть A и B — два множества на прямой. *Арифметической суммой* этих множеств называется множество

$$A + B = \{x\colon\ x = x_1 + x_2,\quad x_1 \in A,\ x_2 \in B\}.$$

Заметим, что если хотя бы одно из множеств, A или B, пусто, то $A + B$, по определению, тоже пусто. Если множество B состоит из одной точки b (точки $(-b)$), условимся писать $A + b$ $(A - b)$ вместо $A + B$.

Очевидно, что операция арифметического суммирования множеств ассоциативна и коммутативна. Вообще говоря, арифметическая сумма двух замкнутых множеств не обязательно замкнута *). Если же дополнительно предположить, что хотя бы одно из множеств ограничено или оба множества ограничены с одной и той же стороны, то, легко видеть, арифметическая сумма будет замкнутым множеством.

---

*) Например, если $A = \left\{n + \frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$, $B = \{-n\}_{n=2}^{\infty}$, то $0 \overline{\in} A + B$, но $0 \in \overline{A + B}$.

Т е о р е м а 3.2.1. *Пусть F, F_1 и F_2 — законы такие, что*

$$F = F_1 * F_2.$$

Справедливы соотношения

$$S(F) = \overline{S(F_1) + S(F_2)}, \tag{3.2.1}$$

(черта означает замыкание),

$$\operatorname{lext} F = \operatorname{lext} F_1 + \operatorname{lext} F_2, \quad \operatorname{rext} F = \operatorname{rext} F_1 + \operatorname{rext} F_2, \tag{3.2.2}$$

$$D(F) = D(F_1) + D(F_2), \tag{3.2.3}$$

$$d(F) = d(F_1)\, d(F_2), \tag{3.2.4}$$

$$\tilde{d}(F) \leqslant \min\{\tilde{d}(F_1), \tilde{d}(F_2)\}. \tag{3.2.4'}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in S(F_1) + S(F_2)$. Тогда $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in S(F_1)$, $x_2 \in S(F_2)$, и для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} F(x+2\varepsilon) - F(x-2\varepsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x+2\varepsilon-s) - F_1(x-2\varepsilon-s)]\, dF_2(s) \geqslant \\ &\geqslant \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} [F_1(x+2\varepsilon-s) - F_1(x-2\varepsilon-s)]\, dF_2(s) \geqslant \\ &\geqslant [F_1(x-x_2+\varepsilon) - F_1(x-x_2-\varepsilon)]\,[F_2(x_2+\varepsilon) - F_2(x_2-\varepsilon)] = \\ &= [F_1(x_1+\varepsilon) - F_1(x_1-\varepsilon)]\,[F_2(x_2+\varepsilon) - F_2(x_2-\varepsilon)]. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Таким образом, $x \in S(F)$. Мы доказали, что $S(F_1) + S(F_2) \subset S(F)$, но так как множество $S(F)$ замкнуто, то верно и $\overline{S(F_1) + S(F_2)} \subset S(F)$.

Пусть теперь $x \overline{\in} \overline{S(F_1) + S(F_2)}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap \overline{S(F_1) + S(F_2)} = \varnothing. \tag{3.2.5'}$$

Имеем

$$\begin{aligned} F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x+\varepsilon-s) - F_1(x-\varepsilon-s)]\, dF_2(s) = \\ &= \int_{S(F_2)} [F_1(x+\varepsilon-s) - F_1(x-\varepsilon-s)]\, dF_2(s). \end{aligned}$$

Заметим, что при $s \in S(F_2)$ на отрезке $[x-\varepsilon-s,\ x+\varepsilon-s]$ нет ни одной точки множества $S(F_1)$: если бы такая точка y нашлась, то точка $s+y$ принадлежала бы множеству $S(F_1)+S(F_2)$ и вместе с тем отрезку $[x-\varepsilon,\ x+\varepsilon]$, что противоречит (3.2.5′). Таким образом, на отрезке $[x-\varepsilon-s,\ x+\varepsilon-s]$ при $s \in S(F_2)$ нет ни одной точки роста закона F_1; поэтому $F_1(x+\varepsilon-s)-F_1(x-\varepsilon-s)=0$ при $s \in S(F_2)$, и, следовательно, $F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)=0$, т. е. $x \overline{\in} S(F)$. Мы доказали, что $\overline{S(F_1)+S(F_2)} \supset S(F)$, и, таким образом, доказали соотношение (3.2.1). Равенства (3.2.2) непосредственно вытекают из (3.2.1).

Для доказательства (3.2.3) воспользуемся соотношением

$$F(x+0)-F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[F_1(x-s+0)-F_1(x-s)]\,dF_2(s).$$

Так как подынтегральная функция отлична от нуля только при $x-s \in D(F_1)$, то мы можем его записать в виде

$$F(x+0)-F(x)=$$
$$=\sum_{\{s:\ x-s \in D(F_1)\}}[F_1(x-s+0)-F_1(x-s)]\,[F_2(s+0)-F_2(s)]. \tag{3.2.6}$$

Величина $F_2(s+0)-F_2(s)$ положительна тогда и только тогда, когда $s \in D(F_2)$. Среди этих значений s такие, для которых $x-s \in D(F_1)$, найдутся в том и только в том случае, когда $x \in D(F_1)+D(F_2)$. Таким образом, правая часть (3.2.6) положительна при $x \in D(F_1)+D(F_2)$ и равна нулю при остальных x. Тем самым соотношение (3.2.3) доказано.

Для доказательства (3.2.4) просуммируем (3.2.6) по всем $x \in D(F)$. Учитывая, что суммирование в правой части можно производить по $s \in D(F_2)$, получим

$$d(F)=\sum_{x\in D(F)}[F(x+0)-F(x)]=$$
$$=\sum_{x\in D(F)}\sum_{s\in D(F_2)}[F_1(x-s+0)-F_1(x-s)]\,[F_2(s+0)-F_2(s)]=$$
$$=\sum_{s\in D(F_2)}[F_2(s+0)-F_2(s)]\sum_{x\in D(F)}[F_1(x-s+0)-F_1(x-s)]=$$

$$= \sum_{s \in D(F_2)} [F_2(s+0) - F_2(s)] \sum_{y \in D(F_1)} [F_1(y+0) - F_1(y)] =$$
$$= d(F_2)\, d(F_1).$$

Соотношение (3.2.4′) непосредственно вытекает из (3.2.6).

Перейдем к следствиям теоремы 3.2.1.

Следствие 1. *Если F_1 — компонента закона F и $D(F) \neq \varnothing$, то и $D(F_1) \neq \varnothing$. Другими словами, если закон имеет непрерывную компоненту, то он сам непрерывен.*

Это утверждение непосредственно вытекает из (3.2.4).

Следствие 2. *Если F_1 — компонента закона F, то для некоторого а имеем*

$$S(F_1) \subset S(F) + a. \tag{3.2.7}$$

Если $D(F) \neq \varnothing$, то число а в (3.2.7) *можно выбрать таким, чтобы выполнялось и*

$$D(F_1) \subset D(F) + a. \tag{3.2.8}$$

Действительно, пусть $F = F_1 * F_2$, $b \in S(F_2)$. Тогда из (3.2.1) получаем $S(F) \supset S(F_1) + b$, откуда следует (3.2.7) с $a = -b$. Далее, если $D(F) \neq \varnothing$, то в силу следствия 1 будет $D(F_2) \neq \varnothing$. Выбирая $b \in D(F_2) \subset S(F_2)$, будем иметь в силу (3.2.1) и (3.2.3) соотношения $S(F) \supset S(F_1) + b$, $D(F) \supset D(F_1) + b$, откуда следует справедливость доказываемого утверждения.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия следствия 2. Тогда найдется компонента G_1, эквивалентная F_1 и такая, что*

$$S(G_1) \subset S(F), \quad D(G_1) \subset D(F). \tag{3.2.9}$$

Достаточно положить $G_1(x) = F_1(x+a) = F_1 * \varepsilon_{-a}$, где a — постоянная, фигурирующая в (3.2.7) и (3.2.8).

Замечание. При изучении компонент закона F, удовлетворяющего условию $\operatorname{lext} F > -\infty$, можно, не уменьшая общности, считать, что выполнены соотношения

$$\operatorname{lext} F = \operatorname{lext} F_1 = 0, \quad S(F_1) \subset S(F),$$

где F_1 — любая компонента закона F.

Действительно, пусть $F = F_1 * F_2$, $\alpha = \operatorname{lext} F$, $\alpha_j = \operatorname{lext} F_j$ $(j = 1, 2)$. Тогда в силу (3.2.2) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, откуда $\alpha_j > -\infty$ $(j = 1, 2)$. Положим $\widetilde{F} = F * \varepsilon_\alpha$,

$\widetilde{F}_j = F_j * \varepsilon_{\alpha_j}$ $(j = 1, 2)$. Тогда $\operatorname{lext} \widetilde{F} = \operatorname{lext} \widetilde{F}_1 = \operatorname{lext} \widetilde{F}_2 = 0$ и $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 * \widetilde{F}_2$. Кроме того, в силу (3.2.1) имеем $S(\widetilde{F}) = \overline{S(\widetilde{F}_1) + S(\widetilde{F}_2)} \supset \overline{S(\widetilde{F}_1) + 0} = S(\widetilde{F}_1)$.

Следствие 4. *Все компоненты дискретного закона являются дискретными законами.*

Для доказательства заметим, что закон F дискретен тогда и только тогда, когда $d(F) = 1$. Так как для любого закона F выполняется $0 \leqslant d(F) \leqslant 1$, то из условий $F = F_1 * F_2$, $d(F) = 1$ в силу (3.2.4) следует, что $d(F_1) = d(F_2) = 1$.

Заметим, что в случае, когда все точки $S(F)$ изолированы, следствие 4 можно получить из (3.2.1).

В частности, если закон F решетчатый, то множество $S(F)$ содержится в некоторой арифметической прогрессии, поэтому из (3.2.7) вытекает уже доказанная ранее другим путем теорема 1.1.7. Сейчас мы не опирались, в отличие от доказательства, приведенного в гл. I, на свойства характеристических функций.

Мы можем получить также другое доказательство такого утверждения (стр. 18) из § 1 гл. I: если F — целочисленный закон и $F = F_1 * F_2$, то существуют целочисленные законы $\widetilde{F}_1 \sim F_1$, $\widetilde{F}_2 \sim F_2$ такие, что $F = \widetilde{F}_1 * \widetilde{F}_2$.

Действительно, пусть F — целочисленный закон и $F = F_1 * F_2$. В силу следствия 3 можно найти компоненту $\widetilde{F}_1 \sim F_1$ такую, что $S(\widetilde{F}_1) \subset S(F)$. Пусть $\widetilde{F}_1 = F_1 * \varepsilon_{-a}$, положим $\widetilde{F}_2 = F_2 * \varepsilon_a$. Тогда будем иметь $F = \widetilde{F}_1 * \widetilde{F}_2$ и в силу (3.2.1)

$$S(F) = \overline{S(\widetilde{F}_1) + S(\widetilde{F}_2)}.$$

Так как $S(F)$ и $S(\widetilde{F}_1) \subset S(F)$ являются подмножествами множества целых чисел, то мы заключаем, что и $S(\widetilde{F}_2)$ является подмножеством множества целых чисел.

§ 3. Неразложимые законы

Напомним, что всякий закон F имеет среди своих компонент компоненты вида $F * \varepsilon_a$ и ε_a, где a — любое действительное число. Эти компоненты называются несобственными компонентами закона F, а остальные компоненты (если они существуют) — собственными.

О п р е д е л е н и е. Закон F называется *разложимым*, если он имеет хотя бы одну собственную компоненту.

Условимся, по определению, единичные законы $\varepsilon_a(x)$ не относить ни к разложимым, ни к неразложимым.

Примеры разложимых законов строить легко. Действительно, пусть F_1 и F_2 — два произвольных не единичных закона. Тогда закон $F = F_1 * F_2$ — разложимый.

Строить примеры неразложимых законов труднее. Мы начнем с построения примеров целочисленных неразложимых законов.

Пусть F — целочисленный закон с производящей функцией

$$\psi(z;\ F)=\sum_{k=0}^{n} p_k z^k, \qquad 0<n<\infty,$$

и пусть $F = F_1 * F_2$. Рассмотрим целочисленные законы $\widetilde{F}_1 \sim F_1$, $\widetilde{F}_2 \sim F_2$ с производящими функциями

$$\psi(z;\ \widetilde{F}_j)=\sum_{k=0}^{n_j} p_k^{(j)} z^k, \qquad 0<n_j<\infty,$$

такие, что $F = \widetilde{F}_1 * \widetilde{F}_2$; тогда имеем

$$\psi(z;\ F) = \psi(z;\ \widetilde{F}_1)\,\psi(z;\ \widetilde{F}_2).$$

Таким образом, для разложимости закона F необходимо, чтобы полином $\psi(z;\ F)$ мог быть нетривиально *) разложен в произведение полиномов с неотрицательными коэффициентами.

Легко видеть, что полином $q+pz$ $(0<p,\ q<1,\ p+q=1)$ не разлагается нетривиально в произведение полиномов с неотрицательными коэффициентами. Так как этот полином является производящей функцией биномиального закона

$$F_{p,q}(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ q, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases} \tag{3.3.1}$$

то имеем

П р и м е р 1. Биномиальный закон (3.3.1) является неразложимым.

*) То есть так, чтобы ни один из сомножителей не был мономом.

Другие примеры целочисленных неразложимых законов даются следующей теоремой.

Теорема 3.3.1. *Целочисленный закон F с производящей функцией*

$$\psi(z;\ F)=\frac{1}{p}(1+z+z^2+\ldots+z^{p-1}),$$

где p — простое число, является неразложимым.

Для доказательства достаточно установить, что полином

$$1+z+z^2+\ldots+z^{p-1}=\frac{1-z^p}{1-z}$$

(p — простое) не может быть представлен в виде произведения непостоянных полиномов с неотрицательными коэффициентами. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.3.1. *Пусть мы имеем тождество*

$$1+z+z^2+\ldots+z^q=Q(z)\,R(z), \tag{3.3.2}$$

где q — натуральное число,

$$Q(z)=1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_{m-1}z^{m-1}+a_mz^m,$$
$$R(z)=1+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_{n-1}z^{n-1}+b_nz^n,$$
$$a_\mu\geqslant 0\ (1\leqslant\mu\leqslant m),\quad b_\nu\geqslant 0\ (1\leqslant\nu\leqslant n),$$
$$a_mb_n>0,\quad m+n=q.$$

Тогда каждый из коэффициентов a_μ и b_ν равен 0 или 1.

Утверждение теоремы 3.3.1 получается с помощью леммы так. Пусть

$$1+z+z^2+\ldots+z^{p-1}=Q(z)\,R(z), \tag{3.3.3}$$

где $Q(z)$ и $R(z)$ — непостоянные полиномы с неотрицательными коэффициентами. Не уменьшая общности, можно считать, что $Q(0)=R(0)=1$. Применим лемму 3.3.1. Из нее следует, что числа $Q(1)$ и $R(1)$ будут натуральными, отличными от 1. Полагая в (3.3.3) $z=1$, получим равенство $p=Q(1)\,R(1)$, которое невозможно, так как число p — простое.

Приведем доказательство леммы 3.3.1.

Корни полинома $1+z+z^2+\ldots+z^q=(1-z^{q+1})/(1-z)$ лежат на окружности $|z|=1$, поэтому корни полиномов Q и R тоже лежат на этой окружности. Если точка z_0 является корнем для Q (для R), то, поскольку коэффициенты полинома действительны, точка $\overline{z_0}$ тоже является корнем. Но так как $|z_0| = 1$, то $\overline{z_0} = 1/z_0$. Таким образом, если z_0 является корнем для Q (для R), то и $1/z_0$ является корнем. Отсюда заключаем, что полиномы Q и R симметрические, т. е. $a_m = b_n = 1$, $a_\mu = a_{m-\mu}$ $(1 \leqslant \mu \leqslant m-1)$, $b_\nu = b_{n-\nu}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n-1)$.

Заметим, что случай $m = n$ невозможен, так как тогда коэффициент при z^n в правой части (3.3.3) будет $\geqslant 2$. Можно считать, не уменьшая общности, что $m < n$. Сравнивая коэффициенты при z^j в обеих частях (3.3.3), получим равенства

$$1 = b_j + b_{j-1}a_1 + b_{j-2}a_2 + \ldots + b_1 a_{j-1} + a_j, \qquad (3.3.4_1)$$
$$1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

$$1 = b_m + b_{m-1}a_1 + b_{m-2}a_2 + \ldots + b_1 a_{m-1} + 1, \qquad (3.3.4_2)$$

$$1 = b_j + b_{j-1}a_1 + b_{j-2}a_2 + \ldots$$
$$\ldots + b_{j-m+1}a_{m-1} + b_{j-m}, \qquad (3.3.4_3)$$
$$m+1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

В силу $(3.3.4_2)$ и неотрицательности a_μ и b_μ имеем

$$b_m = b_{m-1}a_1 = b_{m-2}a_2 = \ldots = b_1 a_{m-1} = 0,$$

откуда, пользуясь равенством $a_{m-j} = a_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$, заключаем, что

$$a_j b_j = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant m-1). \qquad (3.3.5)$$

Из $(3.3.4_1)$ и (3.3.5) при $j = 1$ получаем $a_1 + b_1 = 1$, $a_1 b_1 = 0$; поэтому числа a_1, b_1 могут равняться 0 или 1. Применим метод индукции. Пусть доказано, что числа a_k и b_k при $k < j \leqslant m-1$ могут равняться лишь 0 или 1. Тогда из $(3.3.4_1)$ заключаем, что число $b_j + a_j$ — целое. Так как оно, кроме того, неотрицательно и $\leqslant 1$, то оно равно 0 или 1. Учитывая (3.3.5), заключаем, что числа a_j, b_j могут равняться 0 или 1. Так как $b_m = 0$, $a_m = 1$, то остается рассмотреть числа b_j, $m+1 \leqslant j \leqslant n-1$. То, что они могут равняться либо 0, либо 1, легко получается из $(3.3.4_3)$ с помощью индукции. Лемма доказана, а вместе с ней и теорема 3.3.1.

З а м е ч а н и е 1. Если число p не является простым, то полином $1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1}$ допускает нетривиальное разложение на множители с неотрицательными коэффициентами. Действительно, в (3.3.2) можно взять

$$Q(z)=\frac{1-z^p}{1-z^q}, \qquad R(z)=\frac{1-z^q}{1-z},$$

где q — произвольный делитель числа p. М. Краснер и Б. Ранулак [1] доказали, что любые полиномы $Q(z)$ и $R(z)$ с неотрицательными коэффициентами, удовлетворяющие (3.3.2) и условию $Q(0)=R(0)=1$, должны иметь вид

$$\prod_{j=0}^{m}\frac{1-z^{q_{2j}}}{1-z^{q_{2j+1}}}, \qquad p=q_0\geqslant q_1\geqslant\ldots\geqslant q_{2m+1}=1,$$

где числа q_s $(s=0, 1, \ldots, 2m+1)$ — натуральные и q_{s+1} является делителем q_s. Тем самым ими получено полное описание множества компонент целочисленных законов с производящими функциями вида

$$\psi(z; F)=\frac{1}{p}\,\frac{1-z^p}{1-z}.$$

Класс примеров неразложимых законов, даваемых теоремой 3.3.1, можно расширить с помощью следующего замечания.

Замечание 2. Если закон F с х. ф. $\varphi(t; F)$ неразложимый, то будет неразложимым и закон с х. ф. $e^{ict}\varphi(bt; F)$, где $b\neq 0$ и c — произвольные действительные постоянные.

В самом деле, из равенства $e^{ict}\varphi(bt; F)=\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — х. ф. собственных законов, следует, что $\varphi(t; F)=e^{-ict}\varphi_1(t/b)\,\varphi_2(t/b)$, т. е. закон F — разложимый.

В силу этого замечания из неразложимости законов с х. ф. вида

$$\frac{1}{p}\left(1+e^{it}+e^{2it}+\ldots+e^{(p-1)it}\right), \qquad p \text{ — простое число},$$

которая имеет место по теореме 3.3.1, следует, например, неразложимость законов с х. ф. вида

$$\cos bt,\ \frac{1}{p}\left(1+2\cos bt+2\cos 2bt+\ldots+2\cos\frac{p-1}{2}\,bt\right), \tag{3.3.6}$$

где b — любое действительное число, а $p\geqslant 3$ — простое.

Кроме того, получается такое обобщение теоремы 3.3.1. Целочисленный закон с производящей функцией вида

$$\psi(z;\ F)=\frac{1}{p}\left(1+z^h+z^{2h}+\ldots+z^{(p-1)h}\right),$$

где h — натуральное, а p — простое число, является неразложимым.

Дадим теперь условия неразложимости другого характера, применимые в широком классе случаев. Чтобы их сформулировать, введем такое определение.

Определение. Множество A назовем *разложимым*, если его можно представить в виде арифметической суммы $A=B+C$, где каждое из множеств B и C содержит по меньшей мере две точки.

Теорема 3.3.2. *Пусть F — закон, для которого хотя бы одна из величин* $\operatorname{lext} F$ *или* $\operatorname{rext} F$ *конечна. Если спектр $S(F)$ — неразложимое множество, то закон F — неразложимый.*

Если F — дискретный закон и спектр $D(F)$ — неразложимое множество, то (без предположения о конечности $\operatorname{lext} F$ *или* $\operatorname{rext} F$*) закон F — неразложимый.*

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $F=F_1*F_2$, где F_1 и F_2 — законы, не являющиеся единичными. В силу соотношения (3.2.2) из конечности величины $\operatorname{lext} F$ ($\operatorname{rext} F$) следует конечность величин $\operatorname{lext} F_1$ и $\operatorname{lext} F_2$ ($\operatorname{rext} F_1$ и $\operatorname{rext} F_2$). Поэтому множества $S(F_1)$ и $S(F_2)$ ограничены снизу (сверху) и, следовательно, множество $S(F_1)+S(F_2)$ замкнуто. Это позволяет записать соотношение (3.2.1) в виде

$$S(F)=S(F_1)+S(F_2).$$

Так как законы F_1 и F_2 — не единичные, то каждое из множеств $S(F_1)$ и $S(F_2)$ содержит хотя бы две точки, и мы доказали разложимость множества $S(F)$.

Пусть теперь F — дискретный закон и $F=F_1*F_2$, где F_1 и F_2 — собственные компоненты. В силу теоремы 3.2.1 имеем

$$D(F)=D(F_1)+D(F_2).$$

Остается показать, что каждое из множеств $D(F_1)$ и $D(F_2)$ содержит хотя бы две точки. Но в силу следствия 4 теоремы 3.2.1 законы F_1 и F_2 являются дискретными, а дискретный спектр дискретного закона, отличного от единичного, не может, очевидно, состоять из одной точки.

Для того чтобы с помощью теоремы 3.3.2 строить примеры неразложимых законов, нужно иметь достаточные признаки неразложимости множества. Укажем два таких признака; нам их удобно сформулировать как необходимые условия разложимости.

Лемма 3.3.2. *Если множество A разложимо, то в нем можно найти хотя бы две различные пары точек $\{x, y\}$ и $\{u, v\}$ такие, что $x - y = u - v$.*

Доказательство. Пусть множество A представляется в виде $A = B + C$, причем множество B содержит две различные точки b_1 и b_2 и множество C содержит две различные точки c_1 и c_2. Полагая $x = b_1 + c_1$, $y = b_2 + c_1$, $u = b_1 + c_2$, $v = b_2 + c_2$, получим пары, о которых говорится в формулировке леммы.

Следствие 1. *Множество A, состоящее из двух точек, неразложимо.*

Следствие 2. *Если множество A таково, что для любых двух различных пар его точек $\{x, y\}$ и $\{u, v\}$ выполняется $x - y \neq u - v$, то множество A неразложимо.*

Лемма 3.3.3. *Если неограниченное справа множество A разложимо, то в нем можно указать последовательность пар точек $\{x_k, y_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, такую, что $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \ldots$*

Доказательство. Пусть множество A представляется в виде $A = B + C$ и каждое из множеств B и C содержит хотя бы по две точки. Очевидно, оба множества, B и C, не могут быть ограниченными справа. Пусть B не ограничено справа, $b_k \in B$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \infty$. Искомую последовательность пар получим, полагая $x_k = b_k + c_1$, $y_k = b_k + c_2$, где c_1 и c_2 — две различные точки из множества C.

Из теоремы 3.3.2 и следствия 1 леммы 3.3.2 вытекает, что всякий закон F, для которого $S(F)$ состоит из двух точек, является неразложимым, и мы снова доказали неразложимость закона (3.3.1).

Пользуясь теоремой 3.3.2 и леммой 3.3.3, получаем такой пример неразложимого закона.

Пример 2. Пусть E — любое ограниченное замкнутое множество, а $\{b_k\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям: $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} (b_{k+1} - b_k) = +\infty$. Тогда закон F, для которого $S(F) = E \cup \{b_k\}$, — неразложимый. В частности, является неразложимым закон

$$F(x) = \sum_{1 \leqslant k^{\alpha} < x} 2^{-k}, \quad \alpha > 1$$

(здесь $E = \varnothing$, $b_k = k^{\alpha}$).

Следствие 2 леммы 3.3.2 позволяет строить широкие классы неразложимых законов.

Пример 3. Пусть E — любое совершенное множество на прямой. Построим неразложимый закон F такой, что $S(F) = E$.

Для этого покажем, что во множестве E можно указать плотное счетное подмножество A, попарные расстояния между точками которого различны.

Рассмотрим множества, являющиеся пересечениями E с интервалами вида $\left(\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ Каждое из этих множеств либо пусто, либо имеет мощность континуума. Занумеруем непустые множества в последовательность: $E_1, E_2, E_3, \ldots$ Пусть $x_1 \neq 0$ — любая точка из E_1. Так как E_2 имеет мощность континуума, а множество точек, которые могут быть представлены в виде $x = rx_1$, где r — рациональное число, счетно, то существует точка $x_2 \in E_2$, не представимая в таком виде. Аналогично получаем, что существует точка $x_3 \in E_3$, которую нельзя представить в виде $x_3 = r_1x_1 + r_2x_2$, где r_1 и r_2 — рациональные числа; существует точка $x_4 \in E_4$, которую нельзя представить в виде $x_4 = r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3$, где r_1, r_2, r_3 — рациональные числа, и т. д. Множество $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, очевидно, плотно в E. Покажем, что попарные расстояния между его точками различны. Действительно, предположим, что во множестве A есть точки $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}$ такие, что $x_{k_2} - x_{k_1} = x_{k_4} - x_{k_3}$. Из этого равенства следует, что та из этих четырех точек, которая имеет наибольший номер, представляется линейной комбинацией с рациональными коэффициентами точек с меньшими номерами, что невозможно по построению множества A.

Пусть F — любой дискретный закон такой, что $D(F) = A$; такой закон можно, например, задать формулой

$$F(x) = \sum_{x_k < x} 2^{-k}.$$

В силу второго утверждения теоремы 3.3.2 и следствия 2 леммы 3.3.2 закон F — неразложимый. Очевидно, $S(F) = \overline{D(F)} = \overline{A} = E$.

Построенный пример показывает, что разложимость множества $S(F)$ не влечет (даже в предположении конечности $\operatorname{lext} F$ и $\operatorname{rext} F$) разложимости закона F: мы могли брать множество E ограниченным и разложимым.

Заметим, что и разложимость множества $D(F)$ (даже в предположении дискретности закона F) не влечет разложимости закона F. Действительно, целочисленный закон F с производящей функцией $\psi(z; F) = \frac{1}{3}(1 + z + z^2)$ в силу теоремы 3.3.1 является неразложимым, в то время как $D(F) = \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} + \{0, 1\}$ — разложимое множество.

Пример 4. Пусть $\rho > 1$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ или $\rho = 1$, $0 < \sigma \leqslant \infty$. Построим неразложимый закон F, х. ф. которого целая и имеет порядок ρ и величину типа σ.

Сначала рассмотрим случай $\rho = 1$, $0 < \sigma < \infty$. В этом случае в качестве F возьмем закон из примера 3 при $E = [0, \sigma]$. У этого закона $\operatorname{lext} F = 0$, $\operatorname{rext} F = \sigma$. В силу теоремы 2.4.2 х. ф. $\varphi(t; F)$ имеет порядок 1 и величину типа σ.

В остальных случаях нужный закон F построим следующим образом.

Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — счетное множество такое, что $k < x_k < k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и такое, что все попарные расстояния между его точками различны. (Это множество можно построить приемом, аналогичным использованному в примере 3). Пусть $\widetilde{F}$ — закон, х. ф. которого имеет порядок ρ и величину типа σ, построенный при доказательстве следствия теоремы 2.4.4. Положим

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1, \\ \widetilde{F}(x_k), & x_k < x \leqslant x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varkappa(F) = \varkappa(\widetilde{F})$, $\lambda(F) = \lambda(\widetilde{F})$, поэтому порядок и величина типа у х. ф. $\varphi(t; F)$ те же самые, что у $\varphi(t; \widetilde{F})$. Так как закон F дискретен и $D(F) = A$, то в силу второго утверждения теоремы 3.3.2 и следствия 2 леммы 3.3.2 закон F — неразложимый.

Теорема 3.3.2 и следствие 2 леммы 3.3.2 позволяют доказать такую теорему.

Теорема 3.3.3. *Множество неразложимых законов является плотным в смысле слабой сходимости во множестве всех вероятностных законов.*

Доказательство. Построим последовательность счетных множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots$,

$$A_n = \{\ldots, x_{-2,n}, x_{-1,n}, x_{0,n}, x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots\},$$

удовлетворяющую условиям: 1) попарные расстояния между точками множества A_n различны ($n = 1, 2, \ldots$), 2) справедливы неравенства

$$\frac{k}{n} < x_{k,n} < \frac{k+1}{n} \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad n=1, 2, \ldots).$$

Пусть F — произвольный отличный от единичного закон. Положим ($n = 1, 2, \ldots$)

$$F_n(x) = F(x_{k,n}), \; x_{k,n} < x \leqslant x_{k+1,n} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Очевидно, законы $F_n(x)$, начиная с некоторого номера, не могут быть единичными и слабо сходятся к закону $F(x)$. Кроме того, эти законы дискретны и $D(F_n) \subset A_n$, поэтому законы F_n неразложимы.

Если $F(x) = \varepsilon_a(x)$, то в качестве $F_n(x)$ можно взять законы, для которых $S(F_n) = \{a, a + \frac{1}{n}\}$. Эти законы, как было отмечено, неразложимы.

Во всех приведенных выше примерах неразложимые законы были дискретными. Недискретные неразложимые законы с ограниченным спектром $S(F)$ можно построить с помощью следующей леммы.

Лемма 3.3.4. *Пусть F — разложимый закон,*

$$-\infty < a = \operatorname{lext} F < b = \operatorname{rext} F < \infty.$$

Тогда можно указать числа α и β,

$$a < \alpha < b, \quad a < \beta < b, \tag{3.3.7}$$

такие, что выполняется

$$[F(\alpha + 0) - F(\alpha)]\,[F(\beta + 0) - F(\alpha)] \geqslant \\ \geqslant F(a + 0)\,[1 - F(b)] \tag{3.3.8}$$

и для всех $\varepsilon > 0$ выполняется

$$[F(\alpha + 2\varepsilon) - F(\alpha - 2\varepsilon)]\,[F(\beta + 2\varepsilon) - F(\beta - 2\varepsilon)] \geqslant \\ \geqslant F(a + \varepsilon)\,[1 - F(b - \varepsilon)]. \tag{3.3.9}$$

Доказательство. Неравенство (3.3.8) получается из (3.3.9) предельным переходом при $\varepsilon \to 0$. Для доказательства (3.3.9) запишем закон F в виде

$$F = F_1 * F_2,$$

где ни один из законов F_1, F_2 не есть закон вида ε_c, $-\infty < c < \infty$. Пусть

$$a_j = \operatorname{lext} F_j, \quad b_j = \operatorname{rext} F_j \qquad (j = 1,\ 2);$$

заметим, что

$$a_j < b_j \qquad (j = 1,\ 2).$$

По теореме 3.2.1 имеем

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2,$$

поэтому числа

$$\alpha = a_1 + b_2, \quad \beta = b_1 + a_2$$

удовлетворяют неравенствам (3.3.7).

Полагая в неравенстве (3.2.5) один раз $x_1 = a_1$, $x_2 = b_2$, а другой раз $x_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, получим два неравенства:

$$\left.\begin{aligned} F(\alpha+2\varepsilon) - F(\alpha-2\varepsilon) &\geqslant F_1(a_1+\varepsilon)\,[1 - F_2(b_2-\varepsilon)], \\ F(\beta+2\varepsilon) - F(\beta-2\varepsilon) &\geqslant [1 - F_1(b_1-\varepsilon)]\,F_2(a_2+\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{3.3.10}$$

Далее, имеем

$$F(a+\varepsilon) = \int_{a_2}^{b_2+\varepsilon} F_1(a_1+a_2+\varepsilon-s)\,dF_2(s) =$$
$$= \int_{a_2}^{a_2+\varepsilon} F_1(a_1+a_2+\varepsilon-s)\,dF_2(s) \leqslant F_1(a_1+\varepsilon)\,F_2(a_2+\varepsilon), \tag{3.3.11}$$

$$1 - F(b-\varepsilon) = \int_{a_2}^{b_2+\varepsilon} [1 - F_1(b_1+b_2-\varepsilon-s)]\,dF_2(s) =$$
$$= \int_{b_2-\varepsilon}^{b_2+\varepsilon} [1 - F_1(b_1+b_2-\varepsilon-s)]\,dF_2(s) \leqslant$$
$$\leqslant [1 - F_1(b_1-\varepsilon)]\,[1 - F_2(b_2-\varepsilon)]. \tag{3.3.12}$$

Перемножая неравенства (3.3.10) и учитывая (3.3.11), (3.3.12), получаем (3.3.9).

Пример 5. Пусть E — произвольное ограниченное замкнутое множество. Построим неразложимый закон F, для которого $S(F) = E$, причем закон F не будет дискретным, если E несчетно.

Пусть G — произвольный закон, для которого $S(G) = E$; если E — несчетное, возьмем G недискретным. Обозначим через H закон

$$H(x) = \frac{1}{2}[\varepsilon_a(x) + \varepsilon_b(x)],$$

где $a = \operatorname{lext} G$, $b = \operatorname{rext} G$, и положим

$$F(x) = \delta G(x) + (1 - \delta) H(x), \qquad 0 < \delta < 1/3.$$

Очевидно, что $F(x)$ — закон и $S(F) = E$; кроме того,

$$F(a+0) \geqslant \frac{1-\delta}{2}, \quad 1 - F(b) \geqslant \frac{1-\delta}{2}.$$

Поэтому для любого x, $a < x < b$, имеем

$$F(x+0) - F(x) \leqslant \delta.$$

Если бы закон F был разложимым, то по лемме 3.3.4 выполнялось бы неравенство

$$\delta^2 \geqslant \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^2,$$

а это невозможно из-за $0 < \delta < 1/3$.

В связи с примером 5 отметим, что для недискретного закона F неразложимость спектра $D(F)$ не влечет неразложимости F. Действительно, пусть F_1 и F_2 — недискретные законы, причем $D(F_1)$ состоит из двух точек, а $D(F_2)$ — из одной. Тогда закон $F = F_1 * F_2$ — разложимый, в то время как множество $D(F)$ состоит из двух точек и поэтому (следствие 1 леммы 3.3.2) неразложимо. Таким образом, сделанное во второй половине теоремы 3.3.2 предположение о дискретности закона F существенно.

Укажем пример абсолютно непрерывного неразложимого закона с ограниченным спектром $S(F)$.

Пример 6. Рассмотрим абсолютно непрерывный закон $F(x)$ с вероятностной плотностью

$$p_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}(1-x)^{\mu-1}x^{\nu-1}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \,\overline{\in}\, (0, 1), \end{cases} \tag{3.3.13}$$

где $\mu > 0$, $\nu > 0$. Плотность такого вида называется бета-плотностью (см. В. Феллер [1], гл. II, § 4). Покажем, что при $\mu + \nu < 2$ закон F является неразложимым.

В самом деле, предположив противное, воспользуемся неравенством (3.3.9) леммы 3.3.4 ($a = 0$, $b = 1$). Деля это неравенство на ε^2, получим

$$16 \left\{\frac{1}{4\varepsilon} \int\limits_{\alpha-2\varepsilon}^{\alpha+2\varepsilon} p_{\mu,\nu}(x)\,dx\right\} \left\{\frac{1}{4\varepsilon} \int\limits_{\beta-2\varepsilon}^{\beta+2\varepsilon} p_{\mu,\nu}(x)\,dx\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{0}^{\varepsilon} p_{\mu,\nu}(x)\,dx\right\} \left\{\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} p_{\mu,\nu}(x)\,dx\right\}.$$

Устремим теперь $\varepsilon \to 0$. Поскольку $\mu + \nu < 2$, предел выражения в правой части равен $+\infty$. Но так как $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, то предел выражения в левой части конечен, и мы получаем противоречие.

В случае, когда $\mu + \nu = 1$, вероятностная плотность (3.3.13) называется обобщенной арксинус-плотностью (В. Феллер [1], стр. 71). По доказанному, законы, обладающие такой плотностью, неразложимы. В частности, неразложимым является и классический закон арксинуса

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

(он получается при $\mu = \nu = 1/2$). Заметим, что этот закон имеет важные приложения (В. Феллер [1], гл. XII, § 8; гл. XIV, § 3).

П р и м е р 7. Построим сингулярный неразложимый закон.

О п р е д е л е н и е. Множество A называется множеством *с независимыми точками*, если ни одна его точка не выражается конечной линейной комбинацией других с рациональными коэффициентами.

Примеры счетных множеств с независимыми точками были указаны в примерах 3 и 4. Однако существуют и совершенные множества с независимыми точками. Это вытекает из следующей теоремы, доказательство которой мы приводить не будем, отсылая читателя к монографии И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и Г. Е. Шилова [1] (стр. 209).

Теорема 3.3.4 (Д. А. Райков). *Всякое совершенное множество содержит совершенное подмножество с независимыми точками.*

Заметим, что всякое совершенное множество с независимыми точками нигде не плотно и все попарные расстояния между его точками различны.

Пусть A — любое ограниченное совершенное множество с независимыми точками. Как известно, для любого совершенного нигде не плотного множества существует сингулярный закон, спектр которого совпадает с этим множеством. Пусть F — такой закон, построенный по множеству A. Тогда $S(F) = A$ и, в силу первого утверждения теоремы 3.3.2 и следствия 2 леммы 3.3.2, закон F является неразложимым.

Абсолютно непрерывные неразложимые законы из примера 6 обладали неограниченными вероятностными плотностями. Построим примеры абсолютно непрерывных неразложимых законов с ограниченными плотностями.

Пример 8. Рассмотрим закон

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} u^2 e^{-u^2/2}\, du.$$

Х. ф. этого закона имеет вид

$$\varphi(t;\ F) = (1 - t^2)\, e^{-t^2/2} \tag{3.3.14}$$

и является целой функцией. Поэтому для описания компонент закона F можно применить результаты из § 1 этой главы.

Пусть $F = F_1 * F_2$, тогда

$$(1 - t^2)\, e^{-t^2/2} = \varphi(t;\ F_1)\, \varphi(t;\ F_2).$$

По теореме 3.1.1 функции $\varphi(t;\ F_1)$ и $\varphi(t;\ F_2)$ являются целыми хребтовыми. Так как корни хребтовых функций располагаются симметрично относительно мнимой t-оси (следствие 3 теоремы 2.3.2), то одна из функций $\varphi(t;\ F_j)$, $j = 1, 2$, имеет два корня (в точках $(+1)$ и (-1)), а другая вовсе не имеет корней. Пусть, для определенности, $\varphi(t;\ F_2)$ не имеет корней. Так как рост $\varphi(t;\ F_2)$, в силу следствия 2 теоремы 3.1.3, не выше порядка 2, то, применяя следствие из теоремы 2.5.1, получаем

$$\varphi(t;\ F_2) = \exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}, \qquad \gamma \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\beta = 0.$$

Отсюда

$$\varphi(t;\ F_1) = \varphi(t;\ F)/\varphi(t;\ F_2) =$$
$$= (1-t^2)\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)t^2 - i\beta t\right\} = \varphi_{\frac{1}{2}-\gamma}(t)\,e^{-i\beta t},$$

где через $\varphi_\alpha(t)$ обозначена функция из примера 3 § 3 гл. II. Мы видим, что функция $\varphi_{\frac{1}{2}-\gamma}(t) = \varphi(t;\ F_1)\,e^{i\beta t}$ является х. ф. Но, как было показано, функция $\varphi_\alpha(t)$ является х. ф. только при $\alpha \geqslant 1/2$. Таким образом, $\gamma = 0$, а это означает, что $F_2 = \varepsilon_\beta$. Другими словами, закон F нельзя представить в виде $F = F_1 * F_2$, где оба закона F_1 и F_2 — собственные компоненты, поэтому он — неразложимый.

Используя замечание 2 на стр. 92, получаем, что закон с х. ф.

$$(1 - b^2t^2)\exp\{-b^2t^2/2 + ict\}, \tag{3.3.15}$$

где $b \neq 0$ и c — произвольные действительные постоянные, является неразложимым.

Заметим, что из теоремы 3.1.2 непосредственно вытекает такое утверждение.

Теорема 3.3.5. *Для того чтобы закон F, х. ф. которого $\varphi(t;\ F)$ аналитична в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b)$, был неразложимым, достаточно, чтобы множество хребтовых компонент функции $\varphi(t;\ F)$ состояло из функций вида $e^{i\beta t}$ и $\varphi(t;\ F)\,e^{i\beta t}$,* $\operatorname{Im}\beta = 0$.

Закон F, рассмотренный в примере 8, показывает, что это достаточное условие не является необходимым. Действительно, так как функция $\varphi_\alpha(t)$ из примера 3 § 3 гл. II является хребтовой при $\alpha \geqslant 0{,}28$, то множество всех хребтовых компонент функции (3.3.14) содержит *) все функции $\exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}$, $0 < \gamma \leqslant 0{,}22$, $\operatorname{Im}\beta = 0$.

---

*) Множество всех хребтовых компонент функции (3.3.14) состоит, как нетрудно показать, из функций вида $\exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2} - \lambda$, и $(1 - t^2)\exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}$, $\lambda \leqslant \gamma \leqslant 1/2$, $\operatorname{Im}\beta = 0$, где $\lambda = \sup f(\xi, \eta)$, а $f(\xi, \eta)$ — функция, исследуемая при построении примера 3 § 3 гл. II.

Построим абсолютно непрерывный неразложимый закон с ограниченной плотностью, обладающий ограниченным спектром $S(F)$. Конструкция, приводимая ниже, позволяет, как мы убедимся, требование ограниченности плотности заменять более жесткими, например, требованием ее дифференцируемости заданное число раз.

П р и м е р 9. Пусть $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условиям

$$p_0>0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k=1,$$

а $\{H_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность законов таких, что

$$0=\operatorname{lext} H_k \leqslant \operatorname{rext} H_k \leqslant \delta<1/2 \quad (k=0,1,\ldots). \tag{3.3.16}$$

Рассмотрим закон

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k H_k(x-k). \tag{3.3.17}$$

Исследуем множество компонент закона F. Пусть $F = F_1 * F_2$, где F_1 и F_2 — некоторые законы. Не уменьшая общности (см. замечание на стр. 87), можно считать, что $\operatorname{lext} F_1=\operatorname{lext} F_2=0$ и $S(F_j)\subset S(F)$ $(j=1,2)$.

Л е м м а 3.3.5. *Законы F_1 и F_2 представляются в виде*

$$F_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{kj} H_{kj}(x-k), \qquad j=1,2, \tag{3.3.18}$$

где p_{kj} — неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям

$$p_{0j}>0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}=1,$$

а $H_{kj}(x)$ — законы такие, что

$$0 \leqslant \operatorname{lext} H_{kj} \leqslant \operatorname{rext} H_{kj} \leqslant \delta<1/2. \tag{3.3.19}$$

Составим целочисленные законы $G(x)$, $G_1(x)$ и $G_2(x)$ с производящими функциями

$$\psi(z; G)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad \psi(z; G_j)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{kj} z^k \qquad (j=1,2). \tag{3.3.20}$$

Справедливо соотношение

$$G = G_1 * G_2. \tag{3.3.21}$$

Доказательство. Положим

$$p_{kj} = F_j\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_j(k).$$

Так как $S(F_j) \subset S(F) \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left[k,\ k+\delta\right]$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{kj} = 1$, а поскольку $\operatorname{lext} F_j = 0$, то $p_{0j} > 0$. Законы $H_{kj}(x)$ в случае $p_{kj} > 0$ определим равенствами

$$H_{kj}(x-k) = \begin{cases} 0, & x \leqslant k, \\ \dfrac{F_j(x) - F_j(k)}{F_j\left(k+\frac{1}{2}\right) - F_j(k)}, & k < x \leqslant k + \frac{1}{2}, \\ 1, & x > k + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

а в случае $p_{kj} = 0$ возьмем их произвольно, лишь бы удовлетворялось условие (3.3.19). Тогда мы имеем представление (3.3.18), и остается показать, что для законов G, G_1 и G_2, определяемых равенствами (3.3.20), выполняется соотношение (3.3.21). Это соотношение, очевидно, эквивалентно равенствам

$$p_k = \sum_{r+s=k} p_{r1} p_{s2} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.3.22}$$

Подставим в соотношение $F = F_1 * F_2$ имеющиеся выражения для законов F, F_1 и F_2. Преобразуя правую часть полученного равенства, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k H_k(x-k) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r+s=k} p_{r1} p_{s2} \{H_{r1}(x-r) * H_{s2}(x-s)\}. \tag{3.3.23}$$

Множества

$$S_k = S\Big(\sum_{r+s=k} p_{r1} p_{s2} \{H_{r1}(x-r) * H_{s2}(x-s)\}\Big)$$

попарно не пересекаются, так как

$$S_k \subset \bigcup_{r+s=k} S(H_{r1}(x-r) * H_{s2}(x-s)) =$$
$$= \bigcup_{r+s=k} \{S(H_{r1}(x-r)) + S(H_{s2}(x-s))\} \subset$$
$$\subset \bigcup_{r+s=k} \{[r, r+\delta] + [s, s+\delta]\} = \bigcup_{r+s=k} [r+s, r+s+2\delta] =$$
$$= [k, k+2\delta] \subset [k, k+1).$$

Так как $S(H_k(x-k)) \subset [k, k+1)$, то из равенства (3.3.23) следует, что

$$p_k H_k(x-k) = \sum_{r+s=k} p_{r1} p_{s2} \{H_{r1}(x-r) * H_{s2}(x-s)\}.$$

Устремляя в этом равенстве x к $+\infty$ и учитывая, что стоящее в правой части в фигурных скобках выражение является законом, получаем равенства (3.3.22).

Построим теперь, опираясь на лемму 3.3.5, нужный пример.

Выберем числа p_k так, чтобы целочисленный закон $G(x)$ с производящей функцией

$$\psi(z; G) = \sum_{k=0}^{N} p_k z^k, \qquad 1 \leqslant N < \infty, \tag{3.3.24}$$

был неразложимым. Например, можно взять любой закон с производящей функцией вида $\frac{1}{p}(1 + z + \ldots + z^{p-1})$, где p — простое число: такой закон неразложим по теореме 3.3.1.

В качестве $H_k(x)$ возьмем абсолютно непрерывные законы, удовлетворяющие условию (3.3.16) и такие, что х. ф. $\varphi(t; H_k)$ законов H_k, отвечающих положительным p_k, не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке комплексной t-плоскости (эти х. ф. являются целыми функциями по теореме 2.4.2). Например, можно взять

$$\varphi(t; H_k) = \left(\frac{\sin \delta_k t}{\delta_k t}\right)^{n_k} e^{i n_k \delta_k t}, \tag{3.3.25}$$

где n_k — натуральные числа, а числа δ_k, $0 < 2n_k\delta_k \leqslant \leqslant \delta < 1/2$, таковы, что не все отношения δ_k/δ_m $(k \neq m)$ являются рациональными.

Легко видеть, что закон $F(x)$, даваемый соотношением (3.3.17), будет абсолютно непрерывным и $\operatorname{lext} F = 0$, $\operatorname{rext} F \leqslant \operatorname{rext} G + \delta < \infty$. Покажем, что закон $F(x)$ будет неразложимым.

Пусть $F = F_1 * F_2$. Как и ранее, не уменьшая общности, будем считать, что $\operatorname{lext} F_1 = \operatorname{lext} F_2 = 0$. В силу леммы 3.3.5 для законов F_1 и F_2 имеет место представление (3.3.18), причем соответствующие целочисленные законы G_1 и G_2 связаны с законом G равенством (3.3.21). Но закон G — неразложимый, поэтому один из законов G_1 или G_2 является несобственным. Пусть это будет закон $G_2(x)$. Поскольку $p_{02} > 0$, имеем $\psi(z;\ G_2) \equiv 1$, следовательно,

$$\psi(z;\ G) \equiv \psi(z;\ G_1), \quad p_{02} = 1, \quad p_{k2} = 0 \qquad (k \geqslant 1),$$
$$p_{k1} = p_k \quad (k \geqslant 0), \qquad F_2(x) = H_{02}(x).$$

Равенство $F = F_1 * F_2$ теперь можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{N} p_k H_k(x-k) = \sum_{k=0}^{N} p_k \{H_{k1}(x-k) * H_{02}(x)\}.$$

Так как спектры слагаемых с номером k в левой и правой частях лежат в полуинтервале $[k,\ k+1)$ и не пересекаются со спектрами других слагаемых, то мы заключаем, что

$$p_k H_k(x-k) = p_k \{H_{k1}(x-k) * H_{02}(x)\}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Переходя к х. ф., заключаем, что для тех номеров k, для которых $p_k > 0$, выполняется

$$\varphi(t;\ H_k) = \varphi(t;\ H_{k1})\, \varphi(t;\ H_{02}).$$

Мы предположили, что для указанных номеров k функции $\varphi(t;\ H_k)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке t-плоскости. Поэтому функция $\varphi(t;\ H_{02})$ не должна иметь корней. Так как ее рост не выше нормального типа порядка 1, то по следствию из теоремы 2.5.1 имеем $\varphi(t;\ H_{02}) = e^{i\beta t}$, $\operatorname{Im} \beta = 0$. Следовательно, закон $H_{02}(x)$, а вместе с ним и закон $F_2(x)$ — единичные. Неразложимость закона $F(x)$ тем самым доказана.

Заметим, что если определять законы H_k равенством (3.3.25), то закон F будет абсолютно непрерывным вместе с производными до $n-1$-го порядка включительно, где $n = \min n_k$.

Сделаем еще такое замечание. При доказательстве неразложимости закона F мы не использовали ограниченности $S(G)$, поэтому неразложимость сохранится и для неограниченных $S(G)$. Если в (3.3.17) считать, что $p_k > 0$ при $k = q^2$ ($q = 0, 1, \ldots$) и $p_k = 0$ в остальных случаях, то закон G будет частным случаем законов из примера 2 и, следовательно, неразложимым. Определяя законы H_k равенствами (3.3.25), $n_k = 1$ ($k = 0, 1, \ldots$) и выбирая числа p_{q^2} убывающими надлежащим образом, можно получить пример абсолютно непрерывного неразложимого закона $F(x)$, х. ф. которого $\varphi(t; F)$ является целой функцией и имеет наперед заданный порядок $\rho > 1$ и величину типа $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$.

§ 4. Теорема А. Я. Хинчина о факторизации

Не всякий закон можно представить в виде композиции не только конечного, но и счетного множества неразложимых.

Рассмотрим, например, закон Гаусса. В силу теоремы 3.1.4 Г. Крамера все его компоненты являются законами Гаусса или единичными. Поэтому закон Гаусса не имеет неразложимых компонент и, следовательно, не может быть представлен в виде композиции какого-нибудь множества неразложимых законов.

А. Я. Хинчину принадлежит следующая фундаментальная теорема.

Теорема 3.4.1 (А. Я. Хинчин). *Всякий закон F, имеющий неразложимые компоненты, можно представить в виде*

$$F = G * G_1 * G_2 * \ldots, \tag{3.4.1}$$

где закон G не имеет неразложимых компонент, а законы G_1, G_2, ... — неразложимые (их множество может быть конечно или счетно).

Эту теорему можно рассматривать как некоторый аналог теоремы обычной арифметики о представлении каждого целого числа в виде произведения простых.

Доказательство теоремы А. Я. Хинчина использует свойства одного специального функционала на характеристических функциях.

Определение. Будем называть *функционалом Хинчина* зависящий от параметра $a > 0$ функционал

$$N_a[\varphi] = -\int_0^a \ln|\varphi(t)|\,dt \tag{3.4.2}$$

на классе всех х. ф. $\varphi(t)$.

Так как $|\varphi(t)| \leqslant 1$, $-\infty < t < \infty$, то интеграл в (3.4.2) всегда имеет смысл, но может равняться $+\infty$. Поскольку $\varphi(0) = 1$, то для каждой х. ф. $\varphi(t)$ можно указать значение $a = a_\varphi > 0$ такое, что $N_a[\varphi] < +\infty$.

Очевидны такие свойства функционала Хинчина.

(i) $0 \leqslant N_a[\varphi] \leqslant +\infty \quad (0 < a < \infty)$.

(ii) $N_a[e^{i\beta t}] = 0 \quad (0 < a < \infty,\ \operatorname{Im}\beta = 0)$.

(iii) $N_a\left[\prod_{k=1}^n \varphi_k\right] = \sum_{k=1}^n N_a[\varphi_k] \quad (0 < a < \infty)$.

(iv) *Если последовательность х. ф.* $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ *равномерно на* $[0, a]$ *сходится к х. ф.* $\varphi(t)$, *то*

$$N_a[\varphi] = \lim_{n\to\infty} N_a[\varphi_n].$$

Заметим, что из свойств (i) и (iii) следует, что значение функционала Хинчина не возрастает при переходе от х. ф. $\varphi(t)$ закона F к х. ф. $\varphi_1(t)$ компоненты закона F, а из свойств (ii) и (iii) — что значение функционала не меняется при переходе от х. ф. $\varphi(t)$ закона F к х. ф. любого эквивалентного ему закона.

Для доказательства других нужных нам свойств функционала Хинчина понадобится следующая лемма.

Лемма 3.4.1. *Пусть* $\varphi(t)$ — *х. ф.*, λ — *медиана закона* F. *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $a > 0$ *справедливо неравенство*

$$\int_{|x-\lambda|>\varepsilon} dF(x) \leqslant C(a, \varepsilon)\, N_a[\varphi],$$

где $C(a, \varepsilon)$, $0 < C(a, \varepsilon) < \infty$, — *величина, зависящая от* a *и* ε, *но не зависящая от закона* F.

Сначала докажем два таких неравенства:

$$1 - \operatorname{Re}\psi(2t) \leqslant 4\,(1 - \operatorname{Re}\psi(t)), \tag{3.4.3}$$

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} dG(x) \leqslant 7\varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} (1 - \operatorname{Re}\psi(t))\,dt, \qquad \varepsilon > 0, \tag{3.4.4}$$

где $\psi(t)$ — произвольная х. ф., а $G(x)$ — соответствующий ей закон.

Неравенство (3.4.3) доказывает выкладка:

$$1-\operatorname{Re}\psi(2t)=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2tx)\,dG(x)=$$
$$=2\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos^2 tx)\,dG(x)\leqslant 4\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dG(x)=$$
$$=4(1-\operatorname{Re}\psi(t)).$$

Неравенство (3.4.4) получается так:

$$\int_0^{1/\varepsilon}(1-\operatorname{Re}\psi(t))\,dt=\int_0^{1/\varepsilon}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dG(x)\right\}dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{1/\varepsilon}(1-\cos tx)\,dt\right\}dG(x)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1-\frac{\varepsilon\sin(x/\varepsilon)}{x}\right\}dG(x)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\left\{1-\frac{\varepsilon\sin(x/\varepsilon)}{x}\right\}dG(x)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\varepsilon}(1-\sin 1)\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dG(x)\geqslant\frac{1}{7\varepsilon}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dG(x)$$

(мы воспользовались теоремой Фубини о перемене порядка интегрирования и неравенством $(\sin u)/u\leqslant\sin 1<6/7$ при $|u|\geqslant 1$).

Докажем лемму 3.4.1. Из элементарного неравенства

$$-\ln x\geqslant\frac{1}{2}(1-x^2),\qquad 0<x\leqslant 1,$$

следует, что

$$N_a[\varphi]\geqslant\frac{1}{2}\int_0^a(1-|\varphi(t)|^2)\,dt. \tag{3.4.5}$$

Функция $|\varphi(t)|^2$ является х. ф. симметризованного закона

$$F^*(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[1-F(-x+s+0)]\,dF(s).$$

Выберем натуральное число $q=q(a,\varepsilon)$ таким, чтобы выполнялось $2^q a>1/\varepsilon$. Применяя q раз неравенство (3.4.3), получим

$$1-|\varphi(2^q t)|^2\leqslant 4^q(1-|\varphi(t)|^2).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{1/\varepsilon}(1-|\varphi(t)|^2)\,dt\leqslant\int_0^{2^q a}(1-|\varphi(t)|^2)\,dt=$$
$$=2^q\int_0^a(1-|\varphi(2^q t)|^2)\,dt\leqslant 2^q 4^q\int_0^a(1-|\varphi(t)|^2)\,dt. \qquad (3.4.6)$$

Поскольку неравенство (3.4.4) в применении к х. ф. $|\varphi(t)|^2$ записывается в виде

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dF^*(x)\leqslant 7\varepsilon\int_0^{1/\varepsilon}(1-|\varphi(t)|^2)\,dt,$$

то из (3.4.5) и (3.4.6) следует:

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dF^*(x)\leqslant 7\cdot 2^{3q+1}\varepsilon N_a[\varphi]. \qquad (3.4.7)$$

Далее, имеем (λ — медиана закона F)

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dF^*(x)\geqslant 2(1-F^*(\varepsilon+0))=2\int_{-\infty}^{\infty}F(-\varepsilon+s)\,dF(s)\geqslant$$
$$\geqslant 2\int_{\lambda}^{\infty}F(-\varepsilon+s)\,dF(s)\geqslant F(-\varepsilon+\lambda),$$

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dF^*(x)\geqslant 2F^*(-\varepsilon)=2\int_{-\infty}^{\infty}[1-F(\varepsilon+s+0)]\,dF(s)\geqslant$$
$$\geqslant 2\int_{-\infty}^{\lambda+0}[1-F(\varepsilon+s+0)]\,dF(s)\geqslant 1-F(\varepsilon+\lambda+0).$$

Поэтому из (3.4.7) следует:

$$\int\limits_{|x-\lambda|>\varepsilon} dF(s) = 1 - F(\varepsilon+\lambda+0) + F(-\varepsilon+\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF^*(x) \leqslant 7\cdot 2^{3q+2}\varepsilon N_a[\varphi],$$

что и доказывает лемму.

Из леммы 3.4.1 непосредственно вытекает такое свойство функционала Хинчина *).

(v) *Если для некоторого* $a>0$ *имеем* $N_a[\varphi]=0$, *то*

$$\varphi(t) = e^{i\beta t}, \quad \operatorname{Im}\beta = 0.$$

Заметим, что из свойств (i), (iii) и (v) следует, что при переходе от х. ф. закона F к х. ф. его собственной компоненты значение функционала Хинчина строго убывает (если оно было конечным).

Применим лемму 3.4.1 для доказательства такого свойства.

(vi) *Если* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... — *последовательность х. ф. такая, что для некоторого* $a>0$ *выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} N_a[\varphi_n] = 0, \tag{3.4.8}$$

то существует последовательность действительных чисел λ_1, λ_2, ... *такая, что*

$$\varphi_n(t)\, e^{-i\lambda_n t} \to 1 \qquad (n\to\infty)$$

равномерно на каждом конечном отрезке.

Действительно, пусть F_1, F_2, ... — законы, соответствующие х. ф. $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., а λ_1, λ_2, ... — медианы этих законов. В силу леммы 3.4.1 из (3.4.8) следует, что при любом $\varepsilon>0$

$$\int\limits_{|x-\lambda_n|>\varepsilon} dF_n(x) = 1 - F_n(\varepsilon+\lambda_n+0) +$$

$$+ F_n(-\varepsilon+\lambda_n) \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

откуда

$$F_n(2\varepsilon+\lambda_n)\to 1, \quad F_n(-2\varepsilon+\lambda_n)\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

*) Это свойство можно было бы получить и с помощью теоремы 1.1.6.

т. е. законы $F_n(x+\lambda_n)$ слабо сходятся к закону $\varepsilon_0(x)$. В силу теоремы Леви 1.1.4 последовательность соответствующих х. ф. $\varphi(t;\ F_n(x+\lambda_n)) = \varphi_n(t)\,e^{-i\lambda_n t}$ равномерно на любом конечном отрезке сходится к $\varphi(t;\ \varepsilon_0) \equiv 1$, что и требовалось.

С помощью свойства (vi) докажем следующую лемму.

Лемма 3.4.2. *Пусть* $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ — *последовательность х. ф. и для некоторого* $a > 0$ *выполняется* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} N_a[\varphi_n] < \infty$. *Тогда существует последовательность действительных постоянных* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *такая, что бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(t)\,e^{-i\eta_n t}\} \tag{3.4.9}$$

равномерно сходится *) *на любом конечном отрезке.*

Доказательство. Из условия следует, что

$$\lim_{m,\,n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} N_a[\varphi_k] = 0.$$

Это равенство в силу свойства (iii) можно записать в виде

$$\lim_{m,\,n\to\infty} N_a\Big[\prod_{k=m}^{n} \varphi_k\Big] = 0.$$

Из свойства (vi) следует существование последовательности действительных постоянных λ_{mn} такой, что

$$e^{-i\lambda_{mn} t} \prod_{k=m}^{n} \varphi_k(t) \to 1 \qquad (m,\ n \to \infty) \tag{3.4.10}$$

равномерно на любом конечном отрезке.

Отсюда следует, что, каков бы ни был отрезок t-оси, функции $\varphi_k(t)$ не будут обращаться на нем в 0 при достаточно больших k. Пусть k_1 таково, что при $k \geqslant k_1$ функ-

*) Чтобы устранить неудобства обычного определения равномерной сходимости бесконечного произведения, обусловленные возможным обращением сомножителей в 0, мы здесь и в дальнейшем равномерную сходимость бесконечного произведения понимаем как равномерную в обычном смысле сходимость произведения, получающегося из исходного удалением некоторого конечного числа сомножителей.

ции $\varphi_k(t)$ не обращаются в нуль на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Обозначим через $\omega_k(t)$ непрерывную на этом отрезке ветвь $\arg \varphi_k(t)$, $k \geqslant k_1$, такую, что $\omega_k(0) = 0$. Так как (3.4.10) выполняется равномерно на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, то равномерно на этом отрезке также и

$$\exp\left\{-i\lambda_{mn}t + i\sum_{k=m}^{n}\omega_k(t)\right\} \to 1.$$

Поэтому справедливо соотношение $(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$$-\lambda_{mn}t + \sum_{k=m}^{n}\omega_k(t) = 2\pi l_{mn}(t) + \varepsilon_{mn}(t), \qquad (3.4.11)$$

где $l_{mn}(t)$ — целозначная функция от t, а $\varepsilon_{mn}(t)$ равномерно относительно t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, стремится к 0 при m, $n \to \infty$.

Так как в левой части (3.4.11) стоит непрерывная функция, равная 0 при $t = 0$, то $l_{mn}(t) = 0$ $(m, n \geqslant k_2)$. Поэтому, полагая в (3.4.11) $\eta_k = \omega_k(1)$, $k \geqslant k_2$, имеем

$$-\lambda_{mn} + \sum_{k=m}^{n}\eta_k = \varepsilon_{mn}(1) \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Отсюда и из (3.4.10) следует, что произведение

$$\prod_{k=m}^{n}\left\{\varphi_k(t)\, e^{-i\eta_k t}\right\} = \left\{e^{-i\lambda_{mn}t}\sum_{k=m}^{n}\varphi_k(t)\right\} e^{-i\varepsilon_{mn}(1)t}$$

равномерно на любом конечном отрезке стремится к 1 при m, $n \to \infty$. Тем самым установлено, что при указанном выше выборе постоянных η_k бесконечное произведение (3.4.9) сходится равномерно на любом конечном отрезке (при этом выбор постоянных η_k при $k \leqslant k_2$ не имеет значения, возьмем их, для определенности, равными 0).

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы А. Я. Хинчина. Нам будет удобно говорить, что х. ф. $\varphi(t) = \varphi(t; F)$ обладает некоторым свойством (например, неразложимость, наличие или отсутствие неразложимых компонент и т. д.), если этим свойством обладает закон F.

Мы докажем, что всякая х. ф. $\varphi(t)$, имеющая неразложимые компоненты, представляется в виде

$$\varphi(t) = \varphi^{(1)}(t)\,\varphi^{(2)}(t),$$

где х. ф. $\varphi^{(2)}(t)$ не имеет неразложимых компонент, а х. ф. $\varphi^{(1)}(t)$ допускает представление

$$\varphi^{(1)}(t) = \prod_{k=1}^{\omega} \varphi_k(t), \qquad 1 \leqslant \omega \leqslant \infty,$$

где $\varphi_k(t)$ — неразложимые х. ф., причем в случае $\omega = \infty$ бесконечное произведение равномерно сходится на любом конечном отрезке t-оси. Тем самым и будет доказана теорема А. Я. Хинчина.

Выберем число $a > 0$ столь малым, чтобы величина $\alpha = N_a[\varphi]$ была конечной. Обозначим через A_1 множество всех неразложимых компонент х. ф. $\varphi(t)$. По условию теоремы это множество непусто. Положим

$$\beta_1 = \sup_{\psi \in A_1} N_a[\psi].$$

Пусть неразложимая х. ф. $\psi_1(t) \in A_1$ такова, что

$$N_a[\psi_1] \geqslant \beta_1/2.$$

Так как $\psi_1(t)$ — компонента х. ф. $\varphi(t)$, то

$$\varphi(t) = \psi_1(t)\, \vartheta_1(t),$$

где $\vartheta_1(t)$ — некоторая х. ф.

Если х. ф. $\vartheta_1(t)$ не имеет неразложимых компонент, то доказательство окончено. В противном случае мы для функции $\vartheta_1(t)$ проведем построение, аналогичное тому, которое мы только что провели для функции $\varphi(t)$, и придем к соотношению

$$\varphi(t) = \psi_1(t)\, \psi_2(t)\, \vartheta_2(t),$$

где $\vartheta_2(t)$ — некоторая х. ф., а $\psi_2(t)$ — неразложимая х. ф. такая, что

$$N_a[\psi_2] \geqslant \beta_2/2, \quad \beta_2 = \sup_{\psi \in A_2} N_a[\psi],$$

где $A_2\ (\neq \varnothing)$ — множество неразложимых компонент х. ф. ϑ_1.

Продолжая далее, мы либо на некотором шаге придем к соотношению

$$\varphi(t) = \psi_1(t)\, \psi_2(t) \ldots \psi_k(t)\, \vartheta_k(t), \tag{3.4.12}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — неразложимые х. ф., а ϑ_k — х. ф., не имеющая неразложимых компонент, — и тогда доказательство окончено, — либо получим бесконечную последовательность соотношений вида (3.4.12). Дальнейшему рассмотрению подлежит лишь последний случай. Заметим, что в этом случае согласно построению мы имеем ($k = 1, 2, \ldots$)

$$N_a[\psi_k] \geqslant \beta_k/2, \quad \beta_k = \sup_{\psi \in A_k} N_a[\psi], \tag{3.4.13}$$

где A_k ($\neq \varnothing$) — множество неразложимых компонент х. ф. $\vartheta_{k-1}(t)$, и, кроме того, имеем ($n > m$)

$$\vartheta_m(t) = \psi_{m+1}(t)\,\psi_{m+2}(t)\ldots\psi_n(t)\,\vartheta_n(t). \tag{3.4.14}$$

В силу свойств (i) и (iii) функционала Хинчина выполняется

$$N_a[\varphi] = \sum_{j=1}^{k} N_a[\psi_j] + N_a[\vartheta_k] \geqslant \sum_{j=1}^{k} N_a[\psi_j],$$

откуда видно, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} N_a[\psi_j] < \infty.$$

По лемме 3.4.2 существует последовательность действительных постоянных $\eta_1, \eta_2, \ldots$ такая, что бесконечное произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} \{\psi_j(t)\, e^{-i\eta_j t}\}$$

сходится равномерно на любом конечном отрезке.

Положим

$$\varphi_k(t) = \psi_k(t)\, e^{-i\eta_k t}, \quad \theta_k(t) = \vartheta_k(t) \exp\left\{it \sum_{j=1}^{k} \eta_j\right\},$$

тогда соотношения (3.4.12) и (3.4.14) запишутся в виде

$$\varphi(t) = \left\{\prod_{j=1}^{k} \varphi_j(t)\right\} \theta_k(t), \tag{3.4.15}$$

$$\theta_m(t) = \left\{\prod_{j=m+1}^{n} \varphi_j(t)\right\} \theta_n(t) \quad (n > m). \tag{3.4.16}$$

Так как $\prod\limits_{j=m+1}^{n} \varphi_j(t) \to 1$ ($m, n \to \infty$) равномерно на любом конечном отрезке, то из (3.4.16) следует, что

$\theta_m(t) - \theta_n(t) \to 0$ $(m,\ n \to \infty)$ равномерно на любом конечном отрезке. Таким образом, последовательность х. ф. $\{\theta_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на любом конечном отрезке, и по теореме П. Леви 1.1.4 функция

$$\varphi^{(2)}(t) = \lim_{k\to\infty} \theta_k(t)$$

является х. ф.

По той же теореме П. Леви и функция

$$\varphi^{(1)}(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t)$$

является х. ф. Устремляя в соотношении (3.4.15) $k \to \infty$, получим

$$\varphi(t) = \varphi^{(1)}(t)\,\varphi^{(2)}(t),$$

и остается показать, что х. ф. $\varphi^{(2)}(t)$ не имеет неразложимых компонент.

Устремляя в (3.4.16) $n \to \infty$, получим равенство

$$\theta_m(t) = \Big\{\prod_{j=m+1}^{\infty} \varphi_j(t)\Big\}\,\varphi^{(2)}(t), \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{3.4.17}$$

Пусть х. ф. $\varphi^{(2)}(t)$ имеет неразложимую компоненту $\varkappa(t)$. Из (3.4.17) видно, что $\varkappa(t)$ является неразложимой компонентой для всех х. ф. $\theta_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, для всех х. ф. $\vartheta_m(t) = \theta_m(t) \exp\left(-it \sum_{j=1}^{m} \eta_j\right)$, $m = 1, 2, \ldots$ Другими словами, х. ф. $\varkappa(t)$ будет принадлежать всем множествам A_k, $k = 1, 2, \ldots$. Полагая $\beta = N_a[\varkappa]$, будем иметь

$$\beta_k = \sup_{\psi \in A_k} N_a[\psi] \geqslant N_a[\varkappa] = \beta > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что в силу свойства (v) функционала Хинчина число β положительно, поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ должен расходиться. Но в силу (3.4.13) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k/2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} N_a[\psi_k],$$

а последний ряд, как мы уже отмечали, сходится.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы А. Я. Хинчина.

Покажем теперь на примерах, что представление (3.4.1) в теореме А. Я. Хинчина, вообще говоря, *не является единственным.*

Пример 1. Рассмотрим целочисленный закон F с производящей функцией

$$\psi(z;\ F)=\frac{1}{6}(1+z+z^2+z^3+z^5).$$

По теореме 3.3.1 и замечанию 2 к ней законы $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ с производящими функциями

$$\psi(z;\ G_1^{(1)})=\frac{1}{2}(1+z),\qquad \psi(z;\ G_2^{(1)})=\frac{1}{3}(1+z^2+z^4),$$

$$\psi(z;\ G_1^{(2)})=\frac{1}{2}(1+z^3),\qquad \psi(z;\ G_2^{(2)})=\frac{1}{3}(1+z+z^2)$$

неразложимы. Очевидно,

$$F=G_1^{(1)}*G_2^{(1)}=G_1^{(2)}*G_2^{(2)}.$$

Пример 2. Пусть F — закон равномерного распределения на отрезке $[-1,\ 1]$,

$$\varphi(t;\ F)=\frac{\sin t}{t}.$$

Из тождества

$$\frac{\sin t}{t}=\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{t}{2^k}=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(1+2\cos\frac{2t}{3^k}\right)\right\}$$

следует, что

$$F=G_1^{(1)}*G_2^{(1)}*\ldots=G_1^{(2)}*G_2^{(2)}*\ldots,$$

где

$$\varphi(t;\ G_k^{(1)})=\cos\frac{t}{2^k},\qquad \varphi(t;\ G_k^{(2)})=\frac{1}{3}\left(1+2\cos\frac{2t}{3^k}\right).$$

Все эти законы неразложимы, так как их х. ф. имеют вид (3.3.6).

Можно построить множество мощности континуума различных разложений $F=G_1*G_2*\ldots$ закона F на неразложимые компоненты $G_1,\ G_2,\ \ldots$

Из тождества

$$\frac{\sin t}{t}=\frac{\sin(t/p)}{t/p}\cdot\frac{1}{p}\left\{1+2\cos\frac{2t}{p}+\right.$$
$$\left.+2\cos\frac{4t}{p}+\ldots+2\cos\frac{p-1}{p}t\right\},$$

где $p \geqslant 3$ — нечетное число, следует, что, какова бы ни была последовательность $p_1, p_2, \ldots$ нечетных чисел $\geqslant 3$, справедливо

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{p_k}\left[1+2\cos\frac{2t}{p_1\ldots p_k}+\ldots+2\cos\frac{p_k-1}{p_1\ldots p_k}\,t\right]\right\}.$$

Если число p_k — простое, то функция

$$\frac{1}{p_k}\left[1+2\cos\frac{2t}{p_1\ldots p_k}+\ldots+2\cos\frac{p_k-1}{p_1\ldots p_k}\,t\right] \tag{3.4.18}$$

является х. ф. неразложимого закона, так как она имеет вид (3.3.6) с $b = 2/(p_1 \ldots p_k)$.

Беря последовательность $p_1, p_2, \ldots$ состоящей из простых чисел $\geqslant 3$ (не обязательно различных), мы можем сопоставить каждой такой последовательности разложение закона F на неразложимые компоненты.

Пример 3. Пусть F — закон с х. ф. $\varphi(t; F) = e^{-t^2/4}\cos t$. Обозначая через G закон с х. ф. $\varphi(t; G) = e^{-t^2/4}$, а через G_1 — закон с х. ф. $\varphi(t; G_1) = \cos t$, получаем равенство $F = G * G_1$. Закон G не имеет неразложимых компонент (теорема Г. Крамера), а закон G_1 — неразложимый.

С другой стороны, рассматривая законы $G_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, с х. ф.

$$\varphi(t;\ G_k^{(1)}) = \left\{1-\frac{4t^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right\}\exp\left\{-\frac{2t^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right\},$$

видим, что

$$F = G_1^{(1)} * G_2^{(1)} * \ldots$$

Но законы $G_k^{(1)}$ являются частным случаем законов с х. ф. (3.3.15) и, следовательно, неразложимы.

Замечание. Предыдущий пример интересен еще и в таком отношении: он показывает, что композиция счетного множества законов, не имеющих гауссовой компоненты, более того — неразложимых, может иметь гауссову компоненту. Можно привести пример двух неразложимых одинаковых законов, композиция которых имеет гауссову компоненту.

Действительно, пусть F — закон с х. ф.

$$\varphi(t;\ F) = (1-t^2)\,e^{-t^2/2};$$

этот закон, как мы знаем (пример 8 из § 3), — неразложимый. Рассмотрим закон $F * F$, его х. ф. равна

$$(1-t^2)^2 e^{-t^2} = [(1-t^2)^2 e^{-3t^2/4}]\, e^{-t^2/4}.$$

Нетрудно убедиться в том, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-t^2)^2 e^{-3t^2/4} e^{-itx}\, dt$$

неотрицателен при всех x, $-\infty < x < \infty$, и поэтому функция $(1-t^2)^2 e^{-3t^2/4}$ является х. ф. некоторого закона.

§ 5. Проблема описания класса I_0

В связи с теоремой А. Я. Хинчина о факторизации возникает проблема описания класса законов, не имеющих неразложимых компонент. Этот класс будем обозначать в дальнейшем через I_0.

Теорема 3.5.1 (А. Я. Хинчин). *Класс I_0 является собственным подклассом класса безгранично делимых законов.*

Доказательство опирается на следующую теорему, представляющую самостоятельный интерес.

Теорема 3.5.2 (о компактности множества компонент). *Из всякого множества компонент $\{H_\alpha(x)\}$ закона F можно выделить последовательность $H_{\alpha_1}(x)$, $H_{\alpha_2}(x)$, ..., для которой существует последовательность постоянных x_1, x_2, ... такая, что законы $H_{\alpha_n}(x+x_n)$ при $n\to\infty$ слабо сходятся к некоторой компоненте закона F.*

При доказательстве этой теоремы мы будем использовать такой известный критерий компактности семейства законов (см., например, Феллер [1], стр. 326). Если семейство законов $\{H_\alpha(x)\}$ удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $a = a(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $H_\alpha(x)$

$$1 - H_\alpha(a) + H_\alpha(-a) < \varepsilon,$$

то можно выделить последовательность H_{α_1}, H_{α_2}, ..., слабо сходящуюся к некоторому закону.

Кроме того, нам потребуется такое простое утверждение. Пусть закон F представляется в виде $F = F_1 * F_2$, где F_1 и F_2 — законы с медианами λ_1 и λ_2 соответственно.

Тогда
$$-\infty < y_1 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant y_2 < \infty, \tag{3.5.1}$$
где y_1 и y_2 зависят лишь от закона F (но не зависят от законов F_1 и F_2).

Это утверждение получается так. В качестве y_1 и y_2 возьмем квартили закона F, т. е. такие точки, для которых
$$F(y_1) \leqslant 1/4 \leqslant F(y_1+0), \qquad F(y_2) \leqslant 3/4 \leqslant F(y_2+0).$$
Тогда (3.5.1) следует из неравенств
$$1/4 \leqslant F_1(\lambda_1+0)\,F_2(\lambda_2+0) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\lambda_2+0} F_1(\lambda_1+\lambda_2-s+0)\,dF_2(s) \leqslant$$
$$\leqslant F(\lambda_1+\lambda_2+0),$$
$$1/4 \leqslant [1-F_1(\lambda_1)]\,[1-F_2(\lambda_2)] \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\lambda_2}^{\infty} [1-F_1(\lambda_1+\lambda_2-s)]\,dF_2(s) \leqslant 1-F(\lambda_1+\lambda_2).$$

Докажем теорему 3.5.2. Пусть G_α — компоненты закона F такие, что
$$F = H_\alpha * G_\alpha,$$
λ_α и μ_α — медианы законов H_α и G_α соответственно. Заметим, что
$$-\infty < y_1 \leqslant \lambda_\alpha + \mu_\alpha \leqslant y_2 < \infty, \tag{3.5.2}$$
где y_1 и y_2 зависят только от закона F.

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $a = a(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы выполнялось $1 - F(a) + F(-a) < \varepsilon/2$. Так как
$$1-F(x)+F(-x) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} [1-H_\alpha(x-s)]\,dG_\alpha(s) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_\alpha(-x-s)\,dG_\alpha(s) \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\mu_\alpha}^{\infty} [1-H_\alpha(x-s)]\,dG_\alpha(s) + \int\limits_{-\infty}^{\mu_\alpha+0} H_\alpha(-x-s)\,dG_\alpha(s) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}[1-H_\alpha(x-\mu_\alpha)] + \frac{1}{2}H_\alpha(-x-\mu_\alpha),$$

то

$$1 - H_\alpha(a - \mu_\alpha) + H_\alpha(-a - \mu_\alpha) < \varepsilon. \qquad (3.5.3)$$

Аналогично получаем

$$1 - G_\alpha(a - \lambda_\alpha) + G_\alpha(-a - \lambda_\alpha) < \varepsilon. \qquad (3.5.4)$$

В силу (3.5.3) из семейства законов $\{H_\alpha(x - \mu_\alpha)\}$ можно выделить последовательность

$$H_{\alpha_1}(x - \mu_{\alpha_1}), \quad H_{\alpha_2}(x - \mu_{\alpha_2}), \; \ldots,$$

слабо сходящуюся к некоторому закону F_1. Покажем, что F_1 является компонентой закона F.

Мы имеем

$$F(x) = H_{\alpha_n}(x - \mu_{\alpha_n}) * G_{\alpha_n}(x + \mu_{\alpha_n}), \qquad (3.5.5)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Полагая $y = \max(|y_1|, |y_2|)$, из (3.5.4) и (3.5.1) получаем

$$1 - G_{\alpha_n}(a + y + \mu_{\alpha_n}) + G_{\alpha_n}(-a - y + \mu_{\alpha_n}) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - G_{\alpha_n}(a - \lambda_{\alpha_n}) + G_{\alpha_n}(-a - \lambda_{\alpha_n}) < \varepsilon.$$

Поэтому из последовательности законов $\{G_{\alpha_n}(x + \mu_{\alpha_n})\}$ можно выделить слабо сходящуюся к некоторому закону F_2 подпоследовательность. Пусть этой подпоследовательности отвечают значения $n = n_1, n_2, \ldots$ Устремляя в (3.5.5) $n \to \infty$ по последовательности $n_1, n_2, \ldots$, получаем равенство $F = F_1 * F_2$, т. е. закон F_1 является компонентой для F, что и требовалось.

З а м е ч а н и е. Мы доказали несколько более сильное, чем теорема 3.5.2, утверждение. Именно, если $\{H_\alpha(x)\}$ — семейство компонент закона F и $F = G_\alpha * H_\alpha$, то существуют последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ значений α и последовательность действительных чисел $x_1, x_2, \ldots$ такие, что законы $H_{\alpha_k}(x + x_k)$ и $G_{\alpha_k}(x - x_k)$ при $k \to \infty$ слабо сходятся к некоторым законам H и G таким, что $F = H * G$.

Перейдем к доказательству теоремы 3.5.1. Как и при доказательстве теоремы 3.4.1, мы будем пользоваться языком характеристических функций.

Покажем, что если х. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых компонент, то для любых $\varepsilon > 0$ и $a > 0$ среди ее собственных компонент найдется компонента $\varphi_{\varepsilon, a}(t)$ такая, что $0 < N_a[\varphi_{\varepsilon, a}] < \varepsilon$.

Действительно, в противном случае нашлись бы числа $\delta > 0$ и $a_0 > 0$ такие, что $\inf\limits_{\{\varphi_\alpha\}} N_{a_0}[\varphi_\alpha] = \delta$, где $\{\varphi_\alpha\}$ — множество всех собственных компонент для $\varphi(t)$. В силу теоремы 3.5.2, теоремы 1.1.4 и свойства (iv) функционала Хинчина можно указать х. ф. $\varphi_{\alpha_0}(t) \in \{\varphi_\alpha\}$ такую, что $N_{a_0}[\varphi_{\alpha_0}] = \delta$. Но $\varphi_{\alpha_0}(t)$, являясь компонентой для $\varphi(t)$, разложима. На ее собственных компонентах значение функционала N_{a_0} будет строго меньше δ. Эти компоненты являются одновременно и собственными компонентами для $\varphi(t)$, и мы пришли к противоречию.

Докажем, что если х. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых компонент, то она безгранично делима. Выберем число $a > 0$ таким, чтобы $N_a[\varphi] < \infty$. Фиксируя натуральное число $n \geqslant 2$, рассмотрим всевозможные наборы $\{\varphi_{1\alpha}, \varphi_{2\alpha}, \ldots, \varphi_{n\alpha}\}$ компонент *) функции $\varphi(t)$ такие, что

$$\varphi(t) = \varphi_{1\alpha}(t)\,\varphi_{2\alpha}(t)\ldots\varphi_{n\alpha}(t). \tag{3.5.6}$$

Будем нумеровать х. ф. $\varphi_{1\alpha}, \ldots, \varphi_{n\alpha}$ так, чтобы

$$N_a[\varphi_{1\alpha}] \leqslant N_a[\varphi_{2\alpha}] \leqslant \ldots \leqslant N_a[\varphi_{n\alpha}]. \tag{3.5.7}$$

Пусть

$$\gamma = \sup_\alpha N_a[\varphi_{1\alpha}].$$

Из теорем 3.5.2, 1.1.4 и свойства (iv) функционала Хинчина легко следует, что среди наборов, рассмотренных выше, есть такой набор $\{\varphi_{1\alpha_0}, \varphi_{2\alpha_0}, \ldots, \varphi_{n\alpha_0}\}$, что $\gamma = N_a[\varphi_{1\alpha_0}]$.

Покажем, что для этого набора выполняется

$$N_a[\varphi_{1\alpha_0}] = N_a[\varphi_{2\alpha_0}] = \ldots = N_a[\varphi_{n\alpha_0}]. \tag{3.5.8}$$

*) Не обязательно собственных.

Действительно, пусть для некоторого s, $1 \leqslant s \leqslant n$, $N_a[\varphi_{1\alpha_0}] = N_a[\varphi_{2\alpha_0}] = \ldots$

$$\ldots = N_a[\varphi_{s\alpha_0}] < N_a[\varphi_{s+1,\alpha_0}] \leqslant \ldots \leqslant N_a[\varphi_{n\alpha_0}]. \quad (3.5.9)$$

Х. ф. $\varphi_{s+1,\alpha_0}(t)$, будучи компонентой для $\varphi(t)$, сама не имеет неразложимых компонент. Поэтому, как было отмечено в начале доказательства, каково бы ни было положительное число, среди ее собственных компонент найдутся такие, для которых значение функционала Хинчина меньше этого числа. Эти компоненты в свою очередь тоже обладают аналогичным свойством. Поэтому х. ф. $\varphi_{s+1,\alpha_0}(t)$ можно представить в виде

$$\varphi_{s+1,\,\alpha_0}(t) = \varphi^{(1)}_{s+1,\,\alpha_0}(t) \ldots \varphi^{(s)}_{s+1,\,\alpha_0}(t)\, \varphi^{(s+1)}_{s+1,\,\alpha_0}(t),$$

где

$$0 < N_a[\varphi^{(1)}_{s+1,\,\alpha_0}] \leqslant \ldots \leqslant N_a[\varphi^{(s)}_{s+1,\,\alpha_0}] \leqslant N_a[\varphi^{(s+1)}_{s+1,\,\alpha_0}], \quad (3.5.10)$$

причем величины $N_a[\varphi^{(1)}_{s+1,\,\alpha_0}], \ldots, N_a[\varphi^{(s)}_{s+1,\,\alpha_0}]$ настолько малы, что

$$2\sum_{k=1}^{s} N_a[\varphi^{(k)}_{s+1,\,\alpha_0}] < N_a[\varphi_{s+1,\,\alpha_0}] - N_a[\varphi_{s,\,\alpha_0}]. \quad (3.5.11)$$

Рассмотрим набор х. ф. $\{\varphi_{1\alpha_1}, \ldots, \varphi_{n\alpha_1}\}$, где

$$\varphi_{k\alpha_1}(t) = \varphi_{k\alpha_0}(t)\, \varphi^{(k)}_{s+1,\,\alpha_0}(t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant s,$$

$$\varphi_{s+1,\,\alpha_1}(t) = \varphi^{(s+1)}_{s+1,\,\alpha_0}(t),$$

$$\varphi_{k\alpha_1}(t) = \varphi_{k\alpha_0}(t), \qquad s+1 < k \leqslant n.$$

Очевидно, $\varphi(t) = \varphi_{1\alpha_1}(t) \ldots \varphi_{n\alpha_1}(t)$, а из (3.5.9) в силу соотношений (3.5.10) и (3.5.11) следует, что

$$N_a[\varphi_{1\alpha_1}] \leqslant N_a[\varphi_{2\alpha_1}] \leqslant \ldots \leqslant N_a[\varphi_{n\alpha_1}].$$

Поэтому указанный набор принадлежит множеству рассмотренных выше. Однако

$$N_a[\varphi_{1\alpha_1}] = N_a[\varphi_{1\alpha_0}] + N_a[\varphi^{(1)}_{s+1,\,\alpha_0}] > \gamma,$$

что невозможно. Итак, (3.5.9) не может иметь места, а имеет место (3.5.8).

Заметим, что в силу свойства (iii) функционала Хинчина мы имеем

$$N_a[\varphi_{1\alpha_0}] = \ldots = N_a[\varphi_{n\alpha}] = \frac{1}{n} N_a[\varphi].$$

Полученный результат можно сформулировать так. Если х. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых компонент, то можно указать последовательность разложений на компоненты

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_{12}(t)\,\varphi_{22}(t), \\ \varphi(t) &= \varphi_{13}(t)\,\varphi_{23}(t)\,\varphi_{33}(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(t) &= \varphi_{1n}(t)\,\varphi_{2n}(t)\,\varphi_{3n}(t)\ldots\varphi_{nn}(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

такую, что

$$N_a[\varphi_{kn}] = \frac{1}{n} N_a[\varphi], \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Пусть F — закон, отвечающий х. ф. $\varphi(t)$, F_{kn} — законы, отвечающие х. ф. $\varphi_{kn}(t)$, λ_{kn} — их медианы ($1 \leqslant k \leqslant n$, $n = 2, 3, \ldots$). Тогда

$$F = F_{1n} * F_{2n} * \ldots * F_{nn} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

и по лемме 3.4.1 имеем для любого $\varepsilon > 0$, $k = 1, \ldots, n$

$$\int\limits_{|x-\lambda_{kn}|>\varepsilon} dF_{kn}(x) \leqslant C(a, \varepsilon)\, N_a[\varphi_{kn}] = \frac{1}{n} C(a, \varepsilon)\, N_a[\varphi].$$

Воспользуемся теперь известной теоремой А. Я. Хинчина о предельных распределениях сумм независимых и равномерно бесконечно малых случайных величин (см., например, Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров [1], стр. 123; М. Лоэв [1], стр. 324). В силу этой теоремы справедливо такое утверждение. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — последовательность законов, представимых в виде

$$G_n = G_{1n} * G_{2n} * \ldots * G_{nn} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

где законы G_{kn} удовлетворяют условию: для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \int\limits_{|x-a_{kn}|>\varepsilon} dG_{kn}(x) < \varepsilon, \qquad n > n(\varepsilon), \quad (3.5.12)$$

при каком-нибудь выборе постоянных a_{kn}. Если последовательность законов G_1, G_2, ... слабо сходится к закону G, то закон G — безгранично делимый.

В нашем случае $G_1 = G_2 = \ldots = F$, $G_{kn} = F_{kn}$ и условие (3.5.12) выполнено при $a_{kn} = \lambda_{kn}$. Поэтому закон F — безгранично делимый.

Итак, доказано, что класс I_0 является подклассом класса безгранично делимых законов. Остается убедиться, что включение строгое. Для этого построим примеры безгранично делимых законов, не принадлежащих классу I_0.

Пример 1. Положим

$$\varphi(t) = \frac{1-a}{1-ae^{it}}, \qquad 0 < a < 1.$$

Из равенства

$$\varphi(t) = \exp\{\ln(1-a) - \ln(1-ae^{it})\} = \\ = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}(e^{int}-1)\right\}$$

видно, что $\varphi(t)$ является пределом произведений х. ф. законов Пуассона. Поэтому (М. Лоэв [1], стр. 312) $\varphi(t)$ является х. ф. б. д. закона.

С другой стороны, из тождества

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k}), \qquad |x| < 1,$$

следует, что

$$\varphi(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+a^{2^k}e^{i2^kt}}{1+a^{2^k}}.$$

Но функция

$$\frac{1+a^{2^k}e^{i2^kt}}{1+a^{2^k}}$$

является, очевидно, х. ф. закона, спектр которого состоит из двух точек 0 и 2^k, а такой закон, как было установлено в § 3,— неразложимый.

Таким образом, закон, отвечающий х. ф. $\varphi(t)$, имеет неразложимые компоненты и, более того, представляется в виде счетной композиции неразложимых законов.

Пример 2. Рассмотрим функции $(0 < q < p < 1)$

$$\varphi_1(t) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n}(e^{2nit}-1)\right\},$$

$$\varphi(t) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n-1}(e^{(2n-1)it}-1)\right\}.$$

Так как эти функции являются пределами произведений х. ф. законов Пуассона, то они являются х. ф. б. д. законов.

В силу тождества

$$p + qe^{it} = \exp\left\{\ln p + \ln\left(1 + \frac{q}{p}e^{it}\right)\right\} = \\ = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{q}{p}\right)^k (e^{ikt}-1)\right\}$$

имеем

$$\varphi(t) = (p + qe^{it})\,\varphi_1(t),$$

и, следовательно, закон, отвечающий х. ф. $\varphi(t)$, имеет неразложимую компоненту — именно биномиальный закон с х. ф. $p + qe^{it}$.

Таким образом, теорема 3.5.1 полностью доказана.

По теореме 3.5.1 закон, не являющийся безгранично делимым, обязательно имеет неразложимые компоненты. Поэтому справедливо такое утверждение.

Следствие 1. *Законы, принадлежащие классу I_0, имеют только безгранично делимые компоненты.*

В силу теоремы Леви — Хинчина 1.1.8 из теоремы 3.5.1 вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Для того чтобы закон F принадлежал классу I_0, необходимо, чтобы его х. ф. допускала представление*

$$\varphi(t;\ F) = \exp\left\{i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}, \tag{3.5.13}$$

где β — действительное число, а G — неубывающая функция ограниченной вариации на оси $(-\infty, \infty)$.

Это условие не является достаточным.

Таким образом, проблему описания класса I_0 можно формулировать как проблему описания класса неубывающих функций $G(x)$ ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$ таких, что закон F, х. ф. которого дается формулой (3.5.13), не имеет неразложимых компонент. В эквивалентной форме эту проблему, очевидно, можно также сформулировать, заменяя формулу (3.5.13) формулой Леви:

$$\varphi(t;\ F) = \exp\left\{i\beta t - \gamma t^2 + \int\limits_{+\infty}^{-0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) dM(x) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{+0}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) dN(x)\right\},$$

где β — действительное число, $\gamma \geqslant 0$, а $M(x)$ и $N(x)$ — неубывающие функции соответственно на $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ такие, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-0} \frac{x^2}{1+x^2}\, dM(x) + \int\limits_{+0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dN(x) < \infty.$$

ГЛАВА IV

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ К I_0 ЗАКОНОВ С ГАУССОВОЙ КОМПОНЕНТОЙ

§ 1. Формулировка основной теоремы

Напомним, что пуассоновым спектром б. д. закона F называется множество отличных от нуля точек роста функции $G(x)$, фигурирующей в представлении х. ф. закона F формулой Леви — Хинчина

$$\varphi(t;\ F)=\exp\left\{i\beta t+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}.$$

Пуассонов спектр можно определять также как множество точек роста функций $M(x)$ и $N(x)$, фигурирующих в формуле Леви

$$\varphi(t;\ F)=\exp\left\{i\beta t-\gamma t^2+\int\limits_{-\infty}^{-0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dM(x)+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{+0}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dN(x)\right\}. \qquad (4.1.1)$$

Напомним также, что мы условились говорить, что б. д. закон F имеет гауссову компоненту, если в формуле Леви — Хинчина имеем $G(+0)-G(0)>0$ или — что равносильно — в формуле Леви имеем $\gamma>0$. Легко видеть, что б. д. закон F имеет гауссову компоненту тогда и только тогда, когда $F=G*F_1$, где G — невырожденный закон Гаусса, а F_1 — б. д. закон.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ класс, состоящий из б. д. законов, пуассонов спектр которых является подмножеством некоторого множества вида

$$\{\mu_{k1}\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{\infty}, \tag{4.1.2}$$

где $\mu_{k1} > 0$, $\mu_{k2} < 0$, а числа $\mu_{k+1,r}/\mu_{kr}$ ($r = 1, 2$; $k = 0, \pm 1, \ldots$) — натуральные, отличные от единицы.

Примером множества вида (4.1.2) является множество

$$\{2^k\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{-2^k\}_{k=-\infty}^{\infty}.$$

В общем случае множество $\{\mu_{k1}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ есть последовательность вида

$$\ldots, k_{-2}k_{-1}\mu,\ k_{-1}\mu,\ \mu,\ \frac{\mu}{k_1},\ \frac{\mu}{k_1k_2},\ \ldots, \frac{\mu}{k_1k_2\ldots k_n}, \ldots,$$

а множество $\{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — последовательность вида

$$\ldots, l_{-2}l_{-1}\nu,\ l_{-1}\nu,\ \nu,\ \frac{\nu}{l_1},\ \frac{\nu}{l_1l_2},\ \ldots, \frac{\nu}{l_1l_2\ldots l_n}, \ldots,$$

где $\mu > 0$, $\nu < 0$, а

$$\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_1, k_2, \ldots; \ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, \ldots$$

— какие-либо наборы натуральных чисел, больших единицы (допускаются повторения).

Класс $\mathfrak{L}$ играет весьма важную роль при исследовании структуры класса I_0 потому, что справедлива следующая теорема, доказательству которой посвящена эта глава.

Теорема 4.1.1. *Если б. д. закон, имеющий гауссову компоненту, принадлежит классу I_0, то он принадлежит классу $\mathfrak{L}$. Другими словами, для б. д. законов, имеющих гауссову компоненту, принадлежность классу $\mathfrak{L}$ является необходимым условием принадлежности к I_0.*

Заметим сразу же, что требование наличия гауссовой компоненты в теореме 4.1.1 существенно. В § 4 гл. VI будут указаны классы б. д. законов без гауссовой компоненты, не входящие в класс $\mathfrak{L}$, но входящие в класс I_0.

Доказательство теоремы 4.1.1 довольно сложно. Оно опирается на три основные леммы, имеющие и самостоятельный интерес.

§ 2. Три основные леммы

Основная лемма I. *Пусть $\alpha = p/q$ — рациональное число, причем дробь p/q несократима и*

$$1 < p < q. \tag{4.2.1}$$

Составим случайную величину X с х. ф. *)

$$\varphi(z) = \mathsf{E}\exp(zX) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1)), \tag{4.2.2}$$

где $\gamma > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. При достаточно малом $\nu > 0$ функция

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp(-\nu(e^{z/q} - 1)) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1) - \nu(e^{z/q} - 1)) \tag{4.2.3}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y.

Основная лемма II. *Пусть $\alpha \in (0, 1)$ — иррациональное число. Составим случайную величину X с х. ф.*

$$\varphi(z) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1)); \quad \gamma,\ \lambda_i > 0;\ i = 1,2 \tag{4.2.4}$$

При достаточно малом $\nu > 0$ и надлежаще выбранном малом $\eta_0 > 0$ функция

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp(-\nu(e^{\eta_0 z} - 1)) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)) \tag{4.2.5}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y.

Основная лемма III. *Пусть $G(u)$ — непрерывная неубывающая на сегменте $[\beta, 1]$, $0 < \beta < 1$, функция и $G(1) - G(\beta) > 0$. Составим случайную величину X с х. ф.*

$$\varphi(z) = \exp\left(\gamma z^2 + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dG(u)\right). \tag{4.2.6}$$

*) В §§ 2—22 этой главы под х. ф. будем понимать $\varphi(z) = \mathsf{E}\exp(zX)$ для тех комплексных z, для которых соответствующие интегралы сходятся.

При достаточно малом $\nu > 0$ и подходяще выбранном малом $\eta_0 > 0$ функция

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp\left(-\nu\left(e^{\eta_0 z} - 1\right)\right) =$$
$$= \exp\left(\gamma z^2 + \int\limits_{\beta}^{1} \left(e^{zu} - 1\right) dG(u) - \nu\left(e^{\eta_0 z} - 1\right)\right) \tag{4.2.7}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y.

Доказательство этих лемм производится методом перевала; сначала оно идет одинаково во всех трех случаях, затем разветвляется на специфические для каждого из трех случаев приемы.

Для проведения общей части доказательства запишем каждую из трех х. ф. (4.2.2), (4.2.4), (4.2.6) в виде

$$\varphi(z) = \exp\left(\gamma z^2 + \int\limits_{\beta}^{1} \left(e^{zu} - 1\right) dH(u)\right), \tag{4.2.8}$$

где $\beta < 1$, а $H(u)$ — ограниченная неубывающая функция, причем

$$H(1) - H(\beta) = c > 0. \tag{4.2.9}$$

Докажем, что случайная величина X с х. ф. (4.2.8) имеет плотность вероятности $g(x) > 0$ при всех x.

Составим интеграл

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(it)\, e^{-ixt}\, dt. \tag{4.2.10}$$

Из (4.2.8) заключаем, что этот интеграл сходится абсолютно и равномерно по x, так что плотность вероятности $g(x)$ существует и непрерывна на всей реальной оси. Далее, из (4.2.8) видим, что случайную величину X с х. ф. (4.2.8) можно представить в виде суммы двух независимых случайных величин X_1 и X_2:

$$X = X_1 + X_2, \tag{4.2.11}$$

причем $\mathsf{E}\exp zX_1 = \exp(\gamma z^2)$, т. е. X_1 нормально и не вырождено ($\gamma > 0$) и

$$\mathsf{E}\exp zX_2 = \exp\left(\int\limits_{\beta}^{1} \left(e^{zu} - 1\right) dH(u)\right).$$

Рассмотрим случайную величину X_2. Существует точка ξ такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{\xi - \varepsilon \leqslant X_2 \leqslant \xi + \varepsilon\} > 0. \tag{4.2.12}$$

Пусть F_1 — нормальный закон распределения (з. р.), отвечающий X_1, а F_2 — з. р. X_2. Тогда X имеет з. р.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,dF_2(y).$$

Дифференцируя по x, находим

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1'(x-y)\,dF_2(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y), \tag{4.2.13}$$

где интеграл справа, очевидно, сходится равномерно по x в каждом конечном сегменте значений x и $\sigma^2 = \mathsf{D}(X_1)$. Очевидно, при любом $\varepsilon > 0$

$$g(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{|y-\xi|\leqslant\varepsilon} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y) >$$

$$> c(x) \int_{|y-\xi|\leqslant\varepsilon} dF_2(y) > 0,$$

где $c(x)$ — некоторая положительная константа, зависящая от x, и учитывается (4.2.12). Этим доказано желаемое.

Пусть теперь $\eta_0 > 0$ — какое-либо число, меньшее β, $\nu > 0$ — малое число; составим

$$\psi(it) = \varphi(it)\exp\left[-\nu\left(e^{\eta_0 it} - 1\right)\right] \tag{4.2.14}$$

и

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(it)\, e^{-ixt}\,dt. \tag{4.2.15}$$

Покажем, что

$$g_\nu(x) > 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant X_0(\nu), \tag{4.2.16}$$

где $X_0(\nu)$ — сколь угодно большая константа при достаточно малом ν.

При заданной константе $X_0 > 0$ находим $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $g(x) \geqslant \varepsilon_0$ при $|x| \leqslant X_0$, что возможно на основании предыдущего утверждения. Выберем теперь T_0 так, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \geqslant T_0} |\psi(it)|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \geqslant T_0} |\varphi(it)|\, dt < \frac{\varepsilon_0}{4}, \qquad (4.2.17)$$

что возможно согласно (4.2.8) и (4.2.14).

Пусть, далее, $\nu > 0$ столь мало, что при $|t| \leqslant T_0$

$$|\varphi(it) - \psi(it)| < \frac{\varepsilon_0}{8T_0}. \qquad (4.2.18)$$

Отсюда из (4.2.10) и (4.2.15) имеем:

$$|g_\nu(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(it) - \psi(it)|\, dt < T_0 \frac{\varepsilon_0}{8T_0} + \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{\varepsilon_0}{2}. \qquad (4.2.19)$$

В силу того, что $g(x) \geqslant \varepsilon_0$ при $|x| \leqslant X_0$, имеем

$$g_\nu(x) > g(x) - \frac{\varepsilon_0}{2} > \frac{\varepsilon_0}{2}$$

при $|x| \leqslant X_0$, что и доказывает (4.2.16).

§ 3. Применение метода перевала при $x \leqslant 0$

Общим для доказательства трех основных лемм будет изучение поведения $g_\nu(x)$ при $x \leqslant 0$. Обратимся к выражениям (4.2.8) и (4.2.10).

При данном γ выбираем X_0 столь большим, как это нам понадобится далее; соответственно ему выбираем малое $\nu > 0$ в (4.2.14); полагаем η_0 малым заданным числом. Имеем (см. (4.2.15))

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma=0} \psi(z)\, e^{-zx}\, dz, \qquad (4.3.1)$$

где $z = \sigma + it$. Далее,

$$\psi(z)\, e^{-xz} = \exp\left(\gamma z^2 - zx + \int\limits_{\beta}^{1} (e^{zu} - 1)\, dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right) =$$

$$= \exp\left[\gamma\left(z - \frac{x}{2\gamma}\right)^2 - \frac{x^2}{4\gamma} + \int\limits_{\beta}^{1} (e^{zu} - 1)\, dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right]. \qquad (4.3.2)$$

Здесь считаем $x < 0$. Из теоремы Коши непосредственно явствует, что контур интегрирования в (4.3.1) можно переносить на любую вертикальную прямую. Естественно выбрать контур

$$\sigma = \frac{x}{2\gamma} = \sigma_0$$

(при $x < 0$ точка $z = \frac{x}{2\gamma}$ мало отличается от точки перевала для $\ln(\psi(z)\, e^{-xz})$, см. § 6 гл. I). Тогда получим

$$g_\nu(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4\gamma} - H(1) + H(\beta) + \nu\right] J, \tag{4.3.3}$$

где

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\gamma t^2 + \int_{\beta}^{1} e^{\sigma_0 u} e^{itu}\, dH(u) - \nu e^{\eta_0\sigma_0}\, e^{\eta_0 it}\right] dt. \tag{4.3.4}$$

Далее имеем

$$\int_{\beta}^{1} e^{\sigma_0 u} e^{itu}\, dH(u) - \nu e^{\eta_0\sigma_0} e^{it\eta_0} = \theta c_0 \exp\left(-\eta_0 \frac{|x|}{2\gamma}\right) \tag{4.3.5}$$

(c_0, c_1, ... — в дальнейшем положительные константы; $|\theta| \leqslant 1$; θ в дальнейшем не всегда одно и то же). Отсюда

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\gamma t^2 + \theta c_0 \exp\left(-\eta_0\frac{|x|}{2\gamma}\right)\right) dt >$$

$$> \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\left(1 - c_0 \exp\left(-\eta_0\frac{|x|}{2\gamma}\right)\right) dt >$$

$$> \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\,\frac{1}{2}\, dt > \frac{c_1}{\sqrt{\gamma}} \tag{4.3.6}$$

при $|x|$ достаточно большом сравнительно с γ и $1/\eta_0$, что и будем предполагать. Таким образом, $g_\nu(x) > 0$ при $x < -X_0$ и, при достаточно малом ν, $g_\nu(x) > 0$ при $x \leqslant 0$.

§ 4. Применение метода перевала при положительных x

Перейдем к случаю $x \gg X_0$. Рассмотрим выражение вида (4.3.1), где

$$\psi(z)e^{-xz} =$$
$$= \exp\left[\gamma z^2 - zx + \int_\beta^1 (e^{zu}-1)\,dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z}-1)\right]. \quad (4.4.1)$$

Чтобы найти точки перевала, берем производную в экспоненте и приравниваем ее к нулю:

$$2\gamma z + \int_\beta^1 e^{zu} u\,dH(u) - \nu\eta_0 e^{\eta_0 z} - x = 0.$$

Это уравнение при достаточно малом ν, очевидно, имеет положительный корень $z = \sigma_0$, зависящий от x и монотонно возрастающий вместе с ним,

$$2\gamma\sigma_0 + \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u} u\,dH(u) - \nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0} - x = 0. \quad (4.4.2)$$

Полагаем $z = \sigma_0 + it$ и переносим контур интегрирования на $\sigma = \sigma_0$. Имеем на этом контуре из (4.4.1)

$$\psi(z)\,e^{-xz} = \exp U_1(x) \exp V_1(t) \exp V_2(t), \quad (4.4.3)$$

где

$$U_1(x) = \gamma\sigma_0^2 - \sigma_0 x + h_0, \quad h_0 = -\int_\beta^1 dH(u) + \nu, \quad (4.4.4)$$

$$V_1(t) = -\gamma t^2 + it(2\gamma\sigma_0 - x), \quad (4.4.5)$$

$$V_2(t) = \int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}(\cos tu + i\sin tu)\,dH(u) -$$
$$- \nu e^{\eta_0\sigma_0}(\cos\eta_0 t + i\sin\eta_0 t). \quad (4.4.6)$$

Положим

$$U^0(\sigma_0)=\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}\,dH(u)-\nu e^{\eta_0\sigma_0},$$

$$V_3(t)=2\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}\sin^2\frac{tu}{2}\,dH(u)-2\nu e^{\eta_0\sigma_0}\sin^2\frac{\eta_0 t}{2}, \tag{4.4.7}$$

$$V_4(t)=\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}\sin tu\,dH(u)-\nu e^{\eta_0\sigma_0}\sin\eta_0 t+t(2\gamma\sigma_0-x); \tag{4.4.8}$$

тогда

$$\psi(z)\,e^{-xz}=\exp\left(U_1(x)+U^0(\sigma_0)\right)\times$$
$$\times\exp(-\gamma t^2)\exp(-V_3(t))\exp(iV_4(t)), \tag{4.4.9}$$

разумеется, $V_3(t)$ и $V_4(t)$ зависят от x.

Вычислим производную от $V_4(t)$:

$$V_4'(t)=\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}u\cos tu\,dH(u)-\nu e^{\eta_0\sigma_0}\eta_0\cos\eta_0 t+2\gamma\sigma_0-x.$$

В силу (4.4.2) имеем

$$2\gamma\sigma_0-x-\nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0}+\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}u\,dH(u)=0,$$

так что

$$V_4'(t)=-2\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}u\sin^2\frac{tu}{2}\,dH(u)+2\nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0}\sin^2\frac{\eta_0 t}{2}. \tag{4.4.10}$$

§ 5. Преобразования в условиях леммы I

Теперь обратимся отдельно к основной лемме I. В условиях этой леммы (см. (4.2.1) — (4.2.3)) положим, что функция $H(u)$ в (4.4.1) кусочно постоянная со скачками $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ в точках $u=1$ и $u=\alpha$. Кроме того, положим $\eta_0=1/q$; $\nu\in(0,1)$ пока не фиксируем. Получим при $x\geqslant X_0$

$$\psi(z)\,e^{-xz}=\exp\left[U_0(x)\right]\exp(-\gamma t^2)\times$$
$$\times\exp\left(-2e^{\sigma_0}U(t)\right)\exp(iV(t)), \tag{4.5.1}$$

где

$$U(t)=\lambda_1\sin^2\frac{t}{2}+\lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{pt}{2q}-$$
$$-\nu\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{t}{2q}, \qquad (4.5.2)$$

$$V(t)=\lambda_1\exp(\sigma_0)\sin t+\lambda_2\exp\left(\frac{p}{q}\sigma_0\right)\sin\frac{pt}{q}-$$
$$-\nu\exp\left(\frac{\sigma_0}{q}\right)\sin\frac{t}{q}+t(2\gamma\sigma_0-x), \qquad (4.5.3)$$

$$U_0(x)=\gamma\sigma_0^2-\sigma_0x-\lambda_1-\lambda_2+\nu+U^0(\sigma_0). \qquad (4.5.4)$$

Считая X_0, а следовательно, и σ_0 достаточно большими, рассмотрим такие значения t, для которых

$$|U(t)|\leqslant\exp\left[-\left(1-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \qquad (4.5.5)$$

Пусть в дальнейшем B означает ограниченную для всех значений встречающихся параметров функцию, не всегда одну и ту же. Из (4.5.5) и (4.5.2) следует:

$$\lambda_1\sin^2\frac{t}{2}+\lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{pt}{2q}=B\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right). \qquad (4.5.6)$$

Отсюда

$$\sin^2\frac{t}{2}=B\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right), \quad \sin^2\frac{pt}{2q}=B\exp\left(\frac{1-p}{q}\sigma_0\right) \qquad (4.5.7)$$

и

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right|=B\exp\left(\frac{1-q}{q}\cdot\frac{\sigma_0}{2}\right), \quad \left|\sin\frac{pt}{2q}\right|=B\exp\left(\frac{1-p}{q}\cdot\frac{\sigma_0}{2}\right). \qquad (4.5.8)$$

Заметим, что в силу соотношения (4.2.1) обе оценки (4.5.8) нетривиальны при достаточно большом σ_0. Из них выводим:

$$t=2k_1\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right), \quad \frac{p}{q}t=2k_2\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right),$$

где k_1, k_2 — целые числа. Умножая эти равенства на q, найдем новые равенства:

$$qt=2k_1q\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right), \quad pt=2k_2q\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right). \qquad (4.5.9)$$

Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то целые числа p и q взаимно просты. Ввиду этого найдутся целые числа a и b ($|a| < q$, $|b| < p$) такие, что $ap + bq = 1$. Умножая первое из соотношений (4.5.9) на a, второе на b и складывая, найдем

$$t = 2kq\pi + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right) \qquad (k\text{ — целое}), \quad (4.5.10)$$

если $U(t)$ удовлетворяет (4.5.5). Итак, для значений t под условием (4.5.5) можем положить

$$t = 2kq\pi + v, \quad |v| < c_1 \exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right) \qquad (4.5.11)$$

(далее $c_1, c_2, \ldots$ — положительные константы).

Допустим теперь, что $U(t)$ удовлетворяет (4.5.5). Тогда имеет место (4.5.11). Пользуясь (4.5.2), находим

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2\frac{v}{2} + \lambda_2 \exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{v}{2}\right) - \\ - \nu\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\left(\frac{1}{q}\cdot\frac{v}{2}\right).$$

Ввиду малости $|v|$ согласно (4.5.11) имеем

$$U(t) = \lambda_1\frac{v^2}{4}(1 + \Delta(\sigma_0, v)), \qquad (4.5.12)$$

где $\Delta(\sigma_0, v) \to 0$ при увеличении σ_0 равномерно по v при (4.5.11). Это рассуждение годно при любом значении параметра $\nu \in (0, 1)$.

Если условие (4.5.5) удовлетворяется, то, как мы видим, выполняется (4.5.12). Допустим теперь, что при условии (4.5.11) имеем

$$|v| > \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right) = \xi_1. \qquad (4.5.13)$$

Тогда из (4.5.12) находим

$$U(t) > \frac{1}{8}\exp\left[-\left(1 - \frac{1}{2q}\right)\sigma_0\right] > \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \qquad (4.5.14)$$

§ 6. Исследование $U(t)$

Докажем, что при всех значениях t имеем

$$U(t) \geqslant 0. \tag{4.6.1}$$

В самом деле, $U(t)$ — тригонометрический полином от $t/2q$. При $t = \pi$ и достаточно большом σ_0 (что предполагается здесь и в дальнейшем) имеем, очевидно, $U(t) > 0$. Если для какого-либо t_1 $U(t_1) < 0$, то должен иметься хоть один нуль t_0 функции $U(t)$ нечетной кратности, так что

$$U(t_0) = 0, \tag{4.6.2}$$

$$U(t_0 - \delta)\, U(t_0 + \delta) < 0 \tag{4.6.3}$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$. Сопоставляя (4.6.2) с (4.5.5), находим $t_0 = 2k_0 q\pi + v_0$, где k_0 — целое и v_0 имеет оценку (4.5.11). При достаточно малых δ получим из (4.5.12) $U(t_0 - \delta) \geqslant 0$, $U(t_0 + \delta) \geqslant 0$, что противоречит (4.6.3) и доказывает (4.6.1).

Рассмотрим теперь значения t, нарушающие неравенство (4.5.5). В силу (4.6.1) для таких t имеем

$$U(t) > \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{4.6.4}$$

Вернемся теперь к основной формуле

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \psi(z)\, e^{-zx}\, dt, \qquad z = \sigma_0 + it \tag{4.6.5}$$

(см. §§ 2 и 3). Ось интегрирования по t разобьем на два множества: множество T тех значений t, для которых выполняется (4.5.5), и дополнительное множество D, где верно (4.6.4). Заметим, что в силу сказанного выше из (4.5.5) следует более сильное неравенство

$$0 \leqslant U(t) \leqslant \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{4.6.6}$$

Множество T, как доказано в § 5, содержится в системе сегментов

$$|t - 2kq\pi| = |v| \leqslant \xi_1 = \left[-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{4.6.7}$$

которую мы обозначим T_q; дополнение к T_q, которое мы обозначим D_q, содержится в D. Соответственно этому разобьем (4.6.5) на два интеграла:

$$g_\nu(x) = J_{1\nu}(x) + J_{2\nu}(x), \tag{4.6.8}$$

где

$$J_{1\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t \in T_q} \psi(z) e^{-zx}\, dt, \tag{4.6.9}$$

$$J_{2\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t \in D_q} \psi(z) e^{-zx}\, dt. \tag{4.6.10}$$

Оценим $J_{2\nu}(x)$. При $t \in D_q$ выполняется (4.6.4). Ввиду этого при $z = \sigma_0 + it$ в силу (4.5.1)

$$|\psi(z) e^{-zx}| \leqslant \exp U_0(x) \exp(-\gamma t^2) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right), \tag{4.6.11}$$

откуда

$$|J_{2\nu}(x)| \leqslant \exp U_0(x) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\, dt = \\ = \frac{B}{\sqrt{\gamma}} \exp(U_0(x)) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right). \tag{4.6.12}$$

§ 7. Исследование $J_{1\nu}(x)$

Обратимся к $J_{1\nu}(x)$. Из T_q выделим те значения t, для которых

$$|2\pi k q| \leqslant \frac{\sigma_0 q}{\sqrt{\gamma}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) = \rho_0. \tag{4.7.1}$$

Это множество обозначим T_{0q}, а дополнение T'_{0q} в T_q обозначим T_{1q}. Имеем, в силу (4.5.1) и (4.6.1), при $t \in T_{1q}$

$$|\psi(z) e^{-zx}| \leqslant \exp(U_0(x)) \exp(-\gamma t^2), \tag{4.7.2}$$

так что

$$\left|\frac{1}{2\pi} \int\limits_{t \in T_{1q}} \psi(z) e^{-zx}\, dt\right| \leqslant \exp[U_0(x)] \int\limits_{\rho_0}^{\infty} \exp[-\gamma t^2]\, dt = \\ = \frac{B}{\sqrt{\gamma}} \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{q^2}{2}\sigma_0^2\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} + 2\right)\right]. \tag{4.7.3}$$

Остается интеграл

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t\in T_{0q}}\psi(z)\,e^{-zx}\,dt. \qquad (4.7.4)$$

Он является реальным числом в силу симметричности T_{0q} относительно 0. Мы будем оценивать его снизу.

Рассмотрим один из сегментов, входящих в T_{0q}:

$$\omega_k\colon\ |v|=|t-2kq\pi|\leqslant\xi_1=\exp\left(-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right). \qquad (4.7.5)$$

Обращаясь к (4.5.11), находим для таких t

$$\gamma t^2=\gamma\,(2kq\pi+v)^2=4\pi^2\gamma k^2q^2+4\pi\gamma kqv+\gamma v^2.$$

Ввиду (4.7.1) и (4.7.5)

$$4\pi\gamma kqv+\gamma v^2=B\gamma\exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right)\ ^{*)}. \qquad (4.7.6)$$

Таким образом, при $t\in\omega_k$

$$\exp(-\gamma t^2)=\exp(-4\pi^2\gamma q^2k^2)\left(1+B\gamma\exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right)\right). \qquad (4.7.7)$$

Далее, в силу (4.5.12)

$$\exp(-2e^{\sigma_0}U(t))=\exp\left[-\frac{v^2}{2}\lambda_1e^{\sigma_0}(1+\Delta(\sigma_0,v))\right]. \qquad (4.7.8)$$

Перейдем к функции $V(t)$ (см. (4.5.3)). В силу (4.4.10) имеем

$$\left.\begin{aligned} V'(2kq\pi)&=V''(2kq\pi)=0,\\ V^{(m)}(2kq\pi)&=Be^{\sigma_0}\quad(m\geqslant 3).\end{aligned}\right\} \qquad (4.7.9)$$

Таким образом,

$$V(t)=V(2kq\pi)+Be^{\sigma_0}\xi_1^3=V(2kq\pi)+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{5}\right). \qquad (4.7.10)$$

Собирая эти оценки и подставляя в (4.5.1) при $t\in T_{0q}$, находим

$$\begin{aligned}\psi(z)\,e^{-zx}=\exp[U_0(x)]\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\times&\\ \times\exp\left[-\frac{v^2\lambda_1}{2}e^{\sigma_0}(1+\Delta(\sigma_0,v))\right]\times&\\ \times\exp[iV(2kq\pi)]\left(1+B\exp\left[-\frac{\sigma_0}{5}\right]\right).&\end{aligned} \qquad (4.7.11)$$

---

*) $\gamma>0$ — константа, и (4.7.6) будет иметь место при $x>x_0(\gamma)$.

Рассмотрение интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_k}\psi(z)\,e^{-zx}\,dt \tag{4.7.12}$$

приводится к рассмотрению

$$\int\limits_{|v|\leqslant\xi_1}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\lambda_1 e^{\sigma_0}(1+\Delta(\sigma_0, v))\right)dv. \tag{4.7.13}$$

Полагая $v\sqrt{\lambda_1 e^{\sigma_0}}=w$, приведем наш интеграл к виду

$$\lambda_1^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\sigma_0}{2}}\int\limits_{|w|\leqslant\xi_1\sqrt{\lambda_1 e^{\sigma_0}}}\exp\left[-\frac{w^2}{2}(1+\delta(w))\right]dw, \tag{4.7.14}$$

где $|\delta(w)|\leqslant\delta(\sigma_0)$ при всех w сегмента интегрирования и $\delta(\sigma_0)\to 0$ при $\sigma_0\to\infty$. Ввиду того, что $\xi_1 e^{\frac{\sigma_0}{2}}=$ $=\exp\left(\frac{\sigma_0}{4q}\right)$, элементарными рассуждениями находим для (4.7.14) выражение

$$\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma_0}{2}}(1+\Delta_1(\sigma_0)), \tag{4.7.15}$$

где $\Delta_1(\sigma_0)\to 0$ при $\sigma_0\to\infty$. Из (4.7.7)—(4.7.15) находим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_k}\psi(z)\,e^{-zx}\,dt=$$

$$=\frac{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma_0}{2}}\exp[U_0(x)]\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\exp[iV(2\pi qk)]+$$

$$+Be^{-\frac{\sigma_0}{2}}\exp[U_0(x)]\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\,\Delta_1(\sigma_0);$$

$$\Delta_1(\sigma_0)\to 0 \quad \text{при} \quad \sigma_0\to\infty.$$

При этом согласно (4.5.3)

$$V(2\pi qk)=2\pi qk\,(2\gamma\sigma_0-x). \tag{4.7.16}$$

§ 8. Завершение доказательства леммы I

Вернемся к интегралу (4.7.4). Имеем

$$J_\nu(x) = \frac{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp[U_0(x)] \times$$
$$\times \sum_{|2\pi qk| \leqslant \rho_0} \exp[-4\pi^2\gamma q^2 k^2] \exp[iV(2\pi qk)] +$$
$$+ Be^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp[U_0(x)] \Big(\sum_{|2\pi kq| \leqslant \rho_0} \exp[-4\pi^2\gamma q^2 k^2] \Big) \Delta_1(\sigma_0) \tag{4.8.1}$$

(см. (4.7.1)). Если мы распространим суммирование на все целые числа k в (4.8.1), то получим погрешность

$$Be^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp[U_0(x)] \Delta_2(\sigma_0), \qquad \Delta_2(\sigma_0) \to 0, \tag{4.8.2}$$

как, очевидно, следует из (4.7.1). Таким образом,

$$J_\nu(x) = \frac{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp[U_0(x)] S +$$
$$+ B(1+\gamma) e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp[U_0(x)] \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-4\pi^2\gamma q^2 k^2] \Big) \Delta_2(\sigma_0); \tag{4.8.3}$$

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-4\pi^2\gamma q^2 k^2 + i(2\pi qky)], \tag{4.8.4}$$

где $y = 2\gamma\sigma_0 - x$ (см. (4.7.16)).

Согласно теореме 1.5.1 (формула (1.5.2)) при $\operatorname{Re}\omega > 0$

$$\theta(\omega, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2 \omega) \exp 2\pi i m\xi =$$
$$= \omega^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\pi \frac{(\xi - m)^2}{\omega}\Big).$$

Таким образом,

$$S = \theta(4\pi\gamma q^2, qy) = \frac{1}{2q\sqrt{\gamma\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{(qy-k)^2}{4\gamma q^2}\Big). \tag{4.8.5}$$

Далее, очевидно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(qy-k)^2}{4\gamma q^2}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{1}{8\gamma q^2}\right),$$

таким образом,

$$S > c_2 (q\sqrt{\gamma})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8\gamma q^2}\right). \tag{4.8.6}$$

Далее, очевидно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-4\pi^2\gamma q^2 k^2) = B\left(1 + \gamma^{-\frac{1}{2}} q^{-1}\right).$$

Подставляя полученные оценки в (4.8.3), находим

$$J_\nu(x) > c_2 \gamma^{-\frac{1}{2}} q^{-1} \exp\left[-\frac{1}{8\gamma q^2}\right] \times$$
$$\times \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \left(1 - B\left(1 + \gamma^{-\frac{1}{2}} q^{-1}\right) \Delta_2(\sigma_0)\right).$$

Таким образом, при достаточно большом σ_0 имеем ($c_2' > 0$)

$$J_\nu(x) > c_2' \gamma^{-\frac{1}{2}} q^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8\gamma q^2}\right) e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp[U_0(x)]. \tag{4.8.7}$$

Обратимся к (4.6.5). Сравнивая (4.7.3) с (4.8.7), находим

$$J_{1\nu}(x) = J_\nu(x)(1 + B\,\Delta(\sigma_0));\ \ \Delta(\sigma_0) \to 0 \text{ при } \sigma_0 \to \infty.$$

Далее, сравнивая (4.6.12) с (4.8.7), находим $J_{2\nu}(x) = BJ_\nu\,\Delta(\sigma_0)$. Обращаясь к (4.6.8), находим

$$g_\nu(x) = J_\nu(x)(1 + B\,\Delta(\sigma_0)). \tag{4.8.8}$$

Это верно при любом $\nu \in (0, 1)$ и $\Delta(\sigma_0) \to 0$ равномерно по ν при $\sigma_0 \to \infty$.

Теперь можно завершить доказательство основной леммы I. Выберем X_0 столь большим, чтобы при $x \geqslant X_0$ и любом $\nu \in (0, 1)$ $g_\nu(x) > \frac{1}{2} J_\nu(x) > 0$. Затем выберем ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ при $|x| \leqslant X_0$. Мы можем, согласно § 3, считать X_0 столь большим и соответственно ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ при $x \leqslant -X_0$. Этим основная лемма I доказана.

§ 9. Применение непрерывных дробей в доказательстве леммы II

Перейдем к доказательству основной леммы II. Оставляя в (4.2.5) $\nu \in (0, 1)$ и $\eta_0 \in \left(0, \frac{\alpha}{8}\right)$ пока неопределенными, как и в § 5 (4.5.1) — (4.5 3), напишем при $x \geqslant X_0 > 1$

$$\psi(z)\, e^{-zx} = \exp[U_0(x)] \exp[-\gamma t^2] \times \times \exp[-2e^{\sigma_0} U(t)] \exp[iV(t)], \tag{4.9.1}$$

где

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp[(\alpha - 1)\sigma_0] \sin^2 \frac{\alpha t}{2} - -\nu \exp[(\eta_0 - 1)\sigma_0] \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}, \tag{4.9.2}$$

$$V(t) = \lambda_1 e^{\sigma_0} \sin t + \lambda_2 e^{\alpha\sigma_0} \sin \alpha t - -\nu \exp(\eta_0\sigma_0) \sin \eta_0 t + t(2\gamma\sigma_0 - x), \tag{4.9.3}$$

$U_0(x)$ определяются формулой (4.5.4).

Иррациональное число $\alpha \in (0, 1)$ разложим в непрерывную дробь

$$\alpha = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}};$$

$q_i \geqslant 1$ — целые числа, неполные частные α. Зададим ряд подходящих дробей α: $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. Как известно (см. § 4 гл. I), имеем

$$Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad (n \geqslant 3), \qquad Q_n \geqslant 2Q_{n-2}, \qquad Q_n \geqslant 2^{\frac{(n-1)}{2}},$$

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Далее, если задано любое $\tau > 1$ и Q_n — наибольшее из чисел Q_i, не превосходящих τ, то

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leqslant \frac{1}{Q_n \tau}. \tag{4.9.4}$$

Рассмотрим ряд знаменателей подходящих дробей

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, Q_{n+1}. \tag{4.9.5}$$

С помощью ряда (4.9.5) построим числа

$$\eta_n' = \frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} + \ldots + \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m}} + \ldots, \qquad (4.9.6)$$

где целые числа ξ_{in} последовательно определяются следующим образом: $\xi_{0n} = 1$; $\xi_{1n} + \xi_{0n} Q_{n+1} \equiv 0 \pmod{Q_n}$; $0 \leqslant \xi_{1n} < Q_n$; $\xi_{2n} + \xi_{1n} Q_{n+2} + \xi_{0n} Q_{n+1} Q_{n+2} \equiv 0 \pmod{Q_n Q_{n+1}}$; $0 \leqslant \xi_{2n} < Q_n Q_{n+1}$. Если $\xi_{0n}, \ldots, \xi_{m-1,n}$ определены, то ξ_{mn} определяются сравнением

$$\xi_{mn} + \xi_{m-1,n} Q_{n+m} + \xi_{m-2,n} Q_{n+m-1} Q_{n+m} + \ldots$$
$$\ldots + \xi_{0n} Q_{n+1} Q_{n+2} \ldots Q_{n+m} \equiv 0$$
$$\pmod{Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m-1}},$$

$0 \leqslant \xi_{mn} < Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m-1}$. При таком определении чисел ξ_{in} получим

$$\left| \eta_n' - \frac{\xi_{0n}}{Q_n} - \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} - \ldots - \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{m+n}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_{n+m+1}} + \frac{1}{Q_{n+m+2}} + \ldots < \frac{32}{Q_{n+m+1}} \qquad (4.9.7)$$

в силу свойств чисел ξ_{in} и Q_j. При этом $\eta_n' \to 0$. Далее,

$$\frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} + \ldots + \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m}} = \frac{a_{mn}}{Q_{m+n}} \ (a_{mn} - \text{целое}) \qquad (4.9.8)$$

при $n \to \infty$ и $\eta_n' > 0$ при всех n. Число η_0 будет выбираться как одно из чисел η_n'.

§ 10. Исследование $U(t)$ в условиях леммы II

Обратимся к $U(t)$ и будем исследовать ее малые значения. Пусть в некоторой точке t имеем

$$|U(t)| \leqslant \exp(\xi - 1)\sigma_0 = \xi_0, \qquad (4.10.1)$$

причем

$$\xi = 4\eta_0 \qquad (4.10.2)$$

и $\nu \in (0, 1)$ как-либо фиксировано. Из (4.9.2) выводим

$$\lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp[(\alpha - 1)\sigma_0] \sin^2 \frac{\alpha t}{2} = B \exp[(4\eta_0 - 1)\sigma_0]. \qquad (4.10.3)$$

Отсюда, как и в § 5,

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| = B\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right), \quad \left|\sin\frac{\alpha t}{2}\right| = B\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right), \tag{4.10.4}$$

$$\left.\begin{aligned} t &= 2k_1\pi + v_1, \quad v_1 = B\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right), \\ \alpha t &= 2k_2\pi + v_2, \quad v_2 = B\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.10.5}$$

Пусть $\tau > 1$ — заданное число, Q_n — наибольшее из чисел (4.9.5), не превышающее τ, $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$, так что

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad q \leqslant \tau, \qquad (p, q) = 1. \tag{4.10.6}$$

Подставляя (4.10.6) в (4.10.5) и умножая на q, найдем

$$\left.\begin{aligned} qt &= 2k_1q\pi + Bq\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right), \\ pt &= 2k_2q\pi + \frac{\theta|t|}{\tau} + Bq\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.10.7}$$

Числа p и q — взаимно простые; поэтому найдутся a и b такие, что $ap - bq = 1$, $0 < a < q$, $0 < b < p < q$; при этом из (4.10.7) следует:

$$t = 2\pi q(k_2a - k_1b) + Bqb\exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right) + \\ + Bqa\exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right) + \theta\frac{|t|a}{\tau}. \tag{4.10.8}$$

Обозначим, далее,

$$\min\left(\frac{\alpha-4\eta_0}{4}, \frac{1-\alpha}{4}\right) = \beta, \qquad \beta_1 = 0{,}99\beta, \tag{4.10.9}$$

$\beta > \min\left(\frac{\alpha}{8}, \frac{1-\alpha}{4}\right) > 0$, так как $\eta_0 < \frac{\alpha}{8}$. Положим, далее,

$$\tau = \exp(\beta_1\sigma_0). \tag{4.10.10}$$

Тогда из (4.10.8) получаем

$$t = 2\pi q(k_2a - k_1b) + B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + \theta\frac{|t|a}{\tau}. \tag{4.10.11}$$

Мы будем рассматривать большие значения σ_0, начиная со значения, определяемого большим значением параметра X_0. Такие σ_0 (и отвечающие им x в выражении

(4.4.2)) будем разбивать на два класса A_1 и A_2:

$$\sigma_0 \in A_1, \quad \text{если} \quad q \leqslant \tau^{10^{-5}};$$
$$\sigma_0 \in A_2, \quad \text{если} \quad q > \tau^{10^{-5}}.$$

Рассмотрим сначала поведение $\psi(z)\, e^{-zx}$ при t, удовлетворяющих (4.10.1), и $\sigma_0 \in A_2$. Будем впредь считать, что η_0 выбрано в классе чисел η_n' так, что

$$0 < \eta_0 < 10^{-10}\beta_1. \qquad (4.10.12)$$

§ 11. Случаи $|t| \leqslant \sqrt{q}$, $\sigma_0 \in A_2$

Пусть

$$|t| \leqslant \sqrt{q}. \qquad (4.11.1)$$

В силу того, что $\sigma_0 \in A_2$, при достаточно большом σ_0 число q велико:

$$q \geqslant \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0). \qquad (4.11.2)$$

Поэтому при достаточно большом σ_0 выводим из (4.11.1) и (4.10.11)

$$k_1 a - k_2 b = 0. \qquad (4.11.3)$$

Так как a и b взаимно просты, имеем $k_1 = k_3 b$, $k_2 = k_4 a$ (k_3, k_4 — целые), $k_3 = k_4$.

Из равенства (4.10.5) выводим

$$t = 2k_3 b\pi + v_1, \quad \alpha t = 2k_3 a\pi + v_2 \quad (v_1,\ v_2 \text{ малы}). \qquad (4.11.4)$$

Докажем теперь, что t должно быть мало. Для этого рассмотрим поведение чисел a и b. Если $b \geqslant q^{2/3}$, то в силу (4.11.1) при большом σ_0 (что будем предполагать) из (4.11.4) следует: $k_3 = 0$, $t = v_1$. Если $b < q^{2/3}$, то $a = \frac{1+bq}{p} < \frac{4}{\alpha}\, b < \frac{4}{\alpha}\, q^{2/3}$ и из (4.10.11) и (4.11.3) выводим

$$t = B \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + \theta\,|t|\,q^{-\frac{1}{3}},$$

откуда

$$t = B \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right).$$

Итак, мы вывели, что при $\sigma_0 \in A_2$ и $|t| \leqslant \sqrt{q}$ соотношение (4.10.1) приводит к оценке

$$t = B \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + B \exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma\right) = \\ = B \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right). \qquad (4.11.5)$$

Итак, имеем: при $|t| \leqslant \sqrt{q}$ имеет место (4.11.5) либо

$$|U(t)| > \exp[(4\eta_0 - 1)\sigma_0] = \xi_0. \qquad (4.11.6)$$

При t, удовлетворяющих (4.11.5), имеем из (4.9.2)

$$U(t) = \frac{\lambda_1}{4} t^2 (1 + B\Delta(\sigma_0)). \qquad (4.11.7)$$

Отсюда видно, что $U(t) \geqslant 0$ при $|t| \leqslant \sqrt{q}$, ибо если бы $U(t)$ меняло знак в точке $t_0 \neq 0$, то $U(t) = 0$ было бы малым и $U(t_0)$ выражалось бы формулой (4.11.7), так что было бы $U(t_0) \neq 0$, что противоречиво. Если же $t_0 = 0$, то в окрестности t_0 имело бы место (4.11.7) и не могла бы происходить перемена знака.

Далее, из (4.9.3), (4.4.8) и (4.4.10) находим

$$V(t) = \frac{t^3}{6} V'''(\theta t) = Be^{\sigma_0}|t|^3. \qquad (4.11.8)$$

Из (4.11.7) выводим при $\exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1 - 1)\right] < |t| < c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right)$, где ζ_1 — какая-либо константа, $\zeta_1 \in (\eta_0, 0, 01)$:

$$U(t) \geqslant \frac{\lambda_1}{4} \exp[\sigma_0(\zeta_1 - 1)](1 + B\Delta(\sigma_0)) > \\ > \frac{\lambda_1}{8} \exp[\sigma_0(\zeta_1 - 1)]. \qquad (4.11.9)$$

Если же $|t| \leqslant \exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1 - 1)\right]$, то

$$V(t) = B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \qquad (4.11.10)$$

Вернемся теперь к интегралу вида (4.6.5)

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-zx}\, dt, \qquad (4.11.11)$$

где $\psi(z)\,e^{-zx}$ определяется формулой (4.9.1); предполагаем, что $\sigma_0 \in A_2$. Разобьем ось изменения t на области:

$$D_q\colon\ |t| > \sqrt{q};\quad T_{1q}\colon\ c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) < |t| \leqslant \sqrt{q};$$

$$T_{2q}\colon\ \exp\left(-0{,}99\frac{\sigma_0}{2}\right) \leqslant |t| \leqslant c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right);$$

$$T_{0q}\colon\ |t| \leqslant \exp\left(-0{,}99\,\frac{\sigma_0}{2}\right)$$

(здесь $c_2 = \sup B$ в соотношении (4.11.5)); соответствующие части интеграла (4.11.11) назовем

$$J(D_q),\quad J(T_{1q}).\quad J(T_{2q}),\quad J(T_{0q}).$$

Оценим $J(D_q)$. Так как $\sigma_0 \in A_2$, то

$$q > \tau^{10^{-5}} > \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0). \tag{4.11.12}$$

Далее, из (4.9.1), (4.9.2) очевидно, что при любом t

$$|\psi(z)\,e^{-zx}| \leqslant \exp[U_0(x)] \times \\ \times \exp[\nu \exp[\eta_0\sigma_0]] \exp(-\gamma t^2). \tag{4.11.13}$$

Таким образом,

$$J(D_q) = B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0\sigma_0)] \int\limits_{\sqrt{q}}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\,dt =$$

$$= B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0\sigma_0)] \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\,q\right]. \tag{4.11.14}$$

Учитывая (4.10.12) и (4.11.12), находим для (4.11.14) оценку

$$J(D_q) = B \exp[U_0(x)] \exp\left[\nu \exp(\eta_0\sigma_0) - \frac{\gamma}{2} \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)\right] =$$

$$= B \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{\gamma}{4} \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)\right]. \tag{4.11.15}$$

§ 12. Дальнейшее исследование случая $\sigma_0 \in A_2$

Рассмотрим теперь $J(T_{1q})$. Из § 11 явствует, что в области T_{1q}

$$U(t) > \exp[(4\eta_0 - 1)\,\sigma_0]. \tag{4.12.1}$$

Отсюда

$$J(T_{1q}) = B \exp[U_0(x)] \exp[-2 \exp(4\eta_0\sigma_0)]. \tag{4.12.2}$$

Переходим к $J(T_{2q})$. В силу (4.11.9) в области T_{2q} имеем

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8} \exp(-0{,}99\sigma_0).$$

Отсюда

$$J(T_{2q}) = B \exp[U_0(x)] \exp\left(-\frac{\lambda_1}{4} \exp 0{,}01\sigma_0\right). \qquad (4.12.3)$$

Наконец, в области T_{0q}, полагая $\xi_1 = \exp\left(-0{,}99\frac{\sigma_0}{2}\right)$, имеем

$$J(T_{0q}) = \frac{1}{2\pi} \exp[U_0(x)] \int\limits_{|t| \leqslant \xi_1} \exp(-\gamma t^2) \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{\lambda_1}{2} e^{\sigma_0} t^2 (1 + B\Delta(\sigma_0))\right] \exp\left[B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right)\right] dt.$$

При достаточно большом σ_0 (что, как обычно, предполагается) можно заменить три подынтегральных множителя соответственно оценками снизу $^1/_2$; $\exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0} t^2)$, $^1/_2$, так что

$$J(T_{0q}) > \frac{1}{8\pi} \exp[U_0(x)] \int\limits_{|t| \leqslant \xi_1} \exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0} t^2)\, dt >$$
$$> c_3 \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}}. \qquad (4.12.4)$$

Сопоставляя (4.12.4), (4.12.3), (4.12.2) и (4.11.15), находим

$$g_\nu(x) > \frac{c_3}{2} \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} > 0 \qquad (4.12.5)$$

для $\nu \in (0, 1)$; $\sigma_0 \in A_2$ при достаточно большом x (а следовательно, и σ_0).

§ 13. Переход к случаю $\sigma_0 \in A_1$

Переходя к случаю $\sigma_0 \in A_1$, имеем

$$q \leqslant \tau^{10^{-5}}. \qquad (4.13.1)$$

Положение будет сходно со случаем рационального α, разобранным ранее. Здесь, однако, в силу иррациональности α, q не будет фиксированным числом, а необходимо $q \to \infty$ при возрастании x, а вместе с ним σ_0 и τ. При данном (большом) $\sigma_0 \in A_1$ и соответствующем по формуле

(4.10.10) τ ось изменения t разбиваем на множества

$$D_\tau: \ |t| \geqslant \tau^{0,01} \tag{4.13.2}$$

и

$$T_\tau: \ |t| < \tau^{0,01}. \tag{4.13.3}$$

Соответствующие части интеграла (4.11.11) обозначим $J(D_\tau)$ и $J(T_\tau)$. Займемся сперва $J(D_\tau)$. В силу оценки (4.11.13), верной для любого t, находим

$$J(D_\tau) = B \exp\,[U_0(x)] \exp\,[\nu \exp(\eta_0\sigma_0)] \int\limits_{\tau^{0,01}}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\,dt.$$

Совершенно так же, как в § 11 (формулы (4.11.14), (4.11.15)), получаем оценку

$$J(D_\tau) = B \exp\,[U_0(x)] \exp\left[-\frac{\gamma}{4}\exp(0{,}01\beta_1\sigma_0)\right]. \tag{4.13.4}$$

Теперь пусть $t \in T_\tau$, так что верно (4.13.3). Обратимся к формуле (4.10.11). Здесь $0 < a < \tau^{10^{-5}}$, так что получаем: если верно (4.10.1), то $t = 2\pi qk + B\tau^{-0,01} + \theta t\tau^{10^{-5}-1}$; k — целое число. Отсюда

$$t = 2\pi qk + B\tau^{-0,01}. \tag{4.13.5}$$

Полагая $t - 2\pi qk = w$, видим, что (4.10.1) приводит к соотношениям

$$|t - 2\pi qk| = |w| \leqslant c_4\tau^{-0,01}. \tag{4.13.6}$$

Обратимся к (4.9.1) — (4.9.3). Число q есть одно из чисел ряда (4.9.5). Мы можем считать, что $q > K_0$, где K_0 — любая назначенная нами константа (от этого будет зависеть выбор параметров X_0, ν, η_0). Если Q_{n_0} — наименьшее число ряда (4.9.5), большее K_0, то полагаем впредь $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ (см. (4.9.6)); при этом n_0 должно быть столь большим, чтобы η_0 было достаточно малым, в частности удовлетворяло (4.10.12). Пусть теперь $q = Q_n$; $n \geqslant n_0$. Из (4.9.7) выводим

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\,\theta}{Q_{n+1}}; \qquad l,\ q \text{ — целые числа.}$$

Но мы имеем $q = Q_n < \tau$, $Q_{n+1} > \tau$. В силу (4.13.1)

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\theta}{\tau}; \qquad q \leqslant \tau^{10^{-5}}. \tag{4.13.7}$$

При выбранном и теперь уже фиксированном значении $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ и t, подчиняющемся условию (4.13.6), рассмотрим поведение $U(t)$ и $V(t)$ (см. (4.9.2) и (4.9.3)). Имеем в области T_τ

$$\frac{\eta_0 t}{2} = \frac{lt}{2q} + \frac{16\theta t}{\tau}; \qquad |t| \leqslant \tau^{0,01}. \tag{4.13.8}$$

Мы имеем, далее, $\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$. Здесь $(p, q) = 1$. Кроме того, $0 < l < p/2$, ибо $\eta_0 < \alpha/8$. Имеем, далее,

$$\frac{\alpha t}{2} = \frac{pt}{2q} + \frac{\theta t}{2q\tau}, \tag{4.13.9}$$

$\theta| \leqslant 1$; θ не всегда одно и то же. Рассмотрим значения $t \in T_\tau$ при условиях (4.13.6). Имеем

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{w}{2} + \lambda_2 \exp[(\alpha - 1)\sigma_0] \sin^2\left(\frac{p}{q}\frac{w}{2} + \frac{\theta t}{2q\tau}\right) - \\ - \nu \exp[(\eta_0 - 1)\sigma_0] \sin^2\left(\frac{l}{q}\cdot\frac{w}{2} + \frac{16\theta t}{\tau}\right). \tag{4.13.10}$$

Докажем неравенство: при условиях (4.13.6)

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8} w^2 + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\beta\sigma_0}{200}\right). \tag{4.13.11}$$

В самом деле,

$$\sin^2\left(\frac{l}{q}\cdot\frac{w}{2} + \frac{16\theta t}{\tau}\right) = B\left(w + \frac{t}{\tau}\right)^2 = \\ = B\tau^{-0,02} = B \exp(-0{,}02\beta_1\sigma_0). \tag{4.13.12}$$

Из (4.13.10), (4.13.12) и (4.10.12) следует (4.13.11).

§ 14. Поведение $U(t)$ при $\sigma_0 \in A_1$

Из (4.13.11) выводим: при $|w| \geqslant \exp\left[(\zeta - 1)\frac{\sigma_0}{2}\right]$ имеем ($0 < \zeta < 1$ — константа)

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{16} \exp[(\zeta - 1)\sigma_0]. \tag{4.14.1}$$

Таким образом, $U(t)$ может не подчиняться неравенству (4.14.1) лишь для таких t, в условиях (4.13.6) для которых

$$|w| \leqslant \exp\left[(\zeta - 1)\frac{\sigma_0}{2}\right] = \xi_0. \tag{4.14.2}$$

Обозначим теперь: $T_{\tau q} \subset T_\tau$ — множество точек t, входящих в T_τ и подчиненных условию (4.14.2), т. е.

$$|t - 2\pi qk| \leqslant \xi_0; \tag{4.14.3}$$

$T'_\tau = T_\tau \diagdown T_{\tau q}$; $T_{\tau q0}$ — множество точек $t \in T_{\tau q}$, где $k = 0$, т. е.

$$|t| \leqslant \xi_0; \tag{4.14.4}$$

$T_{\tau q1} = T_{\tau q} \diagdown T_{\tau q0}$, т. е. множество точек $t \in T_\tau$ при условии (4.14.3), где $k \neq 0$. Соответствующие интегралы от $\psi(z)\, e^{-zx}$ обозначим $J(T'_\tau)$, $J(T_{\tau q0})$, $J(T_{\tau q1})$. Оценим сперва $J(T'_\tau)$. Имеем согласно (4.14.1) и (4.9.1) на T'_τ:

$$|\psi(z)\, e^{-zx}| = B \exp(-\gamma t^2) \exp\left(-\frac{\lambda_1}{8} \exp \zeta\sigma_0\right) \exp[U_0(x)]. \tag{4.14.5}$$

Отсюда

$$J(T'_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp[-c_5 \exp \zeta\sigma_0]. \tag{4.14.6}$$

Мы приняли, что $q \geqslant K_0$, где, как говорилось ранее, K_0 — выбранная нами по параметрам γ, α достаточно большая константа. Исходя из этого, оценим $|J(T_{\tau q1})|$ через K_0. Согласно (4.13.11) и (4.9.1) имеем

$$J(T_{\tau q1}) = B \exp[U_0(x)] \sum_{k \neq 0} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} 4\pi^2 q^2 k^2\right) \times \\ \times \int\limits_{|w| \leqslant \xi_0} \exp\left[-\frac{\lambda_1 e^{\sigma_0}}{4}\left(w^2 + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\beta\sigma_0}{200}\right)\right)\right] dw. \tag{4.14.7}$$

Интеграл в (4.14.7), очевидно, равен следующему:

$$\int\limits_{|w| \leqslant \xi_0} \exp\left(-\frac{\lambda_1 e^{\sigma_0} w^2}{4}\right)\left(1 + B \exp\left[-\frac{\beta\sigma_0}{200}\right]\right) dw = B e^{-\sigma_0/2}. \tag{4.14.8}$$

Таким образом,

$$J(T_{\tau q1}) = B \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2} \sum_{k \neq 0} \exp(-2\gamma\pi^2 k^2 q^2).$$

Если $K_0 > K_1/\sqrt{\gamma}$, то $\sum\limits_{k \neq 0} \exp(-2\gamma\pi^2 k^2 q^2) < \exp(-K_1^2)$, так что

$$J(T_{\tau q1}) = B \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2} \exp(-K_1^2). \tag{4.14.9}$$

При этом ограниченная функция B в (4.14.9) имеет оценку модуля сверху, не зависящую от K_1.

§ 15. Завершение доказательства леммы II

Интеграл $J(T_{\tau q0})$ оценим снизу. Из (4.14.4) находим

$$U(t)=t^2\left\{\frac{\lambda_1}{4}+\lambda_2\frac{\alpha^2}{4}\exp\left[(\alpha-1)\sigma_0\right]-\right.$$

$$\left.-\nu\frac{\eta_0^2}{4}\exp\left[(\eta_0-1)\sigma_0\right]\right\}(1+Bt). \qquad (4.15.1)$$

Далее,

$$V(t)=V(0)+V'(0)t+V''(0)\frac{t^2}{2}+V'''(\theta t)\frac{t^3}{6}$$

при $t\in T_{\tau q0}$. Из (4.4.10) видим, что $V'(0)=V''(0)=0$, $V'''(t)=Be^{\sigma_0}$; из (4.9.3) явствует, что $V(0)=0$; поэтому

$$V(t)=Be^{\sigma_0}\xi_0^3=B\exp\left[\left(\frac{3}{2}\zeta-\frac{1}{2}\right)\sigma_0\right].$$

Будем считать $\zeta=10^{-3}$, тогда

$$V(t)=B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \qquad (4.15.2)$$

Отсюда

$$J(T_{\tau q0})>\frac{1}{2}\exp\left[U_0(x)\right]\int\limits_{|t|\leqslant\xi_0}\exp\left(-\lambda_1e^{\sigma_0}t^2\right)\times$$

$$\times\left(1+B\exp\left[-\frac{\sigma_0}{4}\right]\right)dt>c_6e^{-\sigma_0/2}\exp\left[U_0(x)\right]. \qquad (4.15.3)$$

Сопоставляя (4.15.3), (4.14.9), (4.14.6) и (4.13.4), видим, что если константа K_1 в (4.14.9) была заранее выбрана достаточно большой, то

$$g_\nu(x)>\frac{1}{2}c_6e^{-\sigma_0/2}\exp\left[U_0(x)\right] \qquad (4.15.4)$$

при $\sigma_0\in A_1$ достаточно большом и $\nu\in(0,\ 1)$. Как известно из предыдущего, выбирая достаточно малое $\nu>0$, можно сделать $g_\nu(x)>0$ при $|x|\leqslant X_0$; $X_0>1$ можно заранее выбрать сколь угодно большим. Далее, при $\sigma_0\in A_2$ и достаточно большом имеем (4.12.5). При $x<-X_0$ также имеем $g_\nu(x)>0$. Это и доказывает основную лемму II.

§ 16. Применение производных чисел Дини в доказательстве леммы III

Переходим к доказательству основной леммы III. Обратимся к (4.2.6). $G(u)$ в (4.2.6) — непрерывная неубывающая функция. Обозначим $G(1) - G(\beta) = \Delta_0 > 0$. Рассмотрим производные числа Дини функции $G(u)$ на сегменте $[\beta, 1]$ (см. § 3 гл. I). Согласно теореме 1.3.1 имеем следующее.

Пусть $f(u)$ непрерывна в интервале (a, b), l и L — точные верхняя и нижняя грани какого-либо одного из четырех производных чисел Дини $f(u)$. Тогда

$$l \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant L.$$

Пусть $(a, b) \subset [\beta, 1]$ — такой интервал, что $G(b) - G(a) > 0$; в силу непрерывности $G(u)$ он должен существовать при a и b, достаточно близких к числам β и 1.

Очевидно, все четыре производных числа Дини (допускающие, как известно, и бесконечное значение) неотрицательны, так что $l \geqslant 0$. Рассмотрим левое нижнее производное число Дини

$$\lambda'_u = \varliminf_{h \to +0} \frac{G(u) - G(u-h)}{h}.$$

Пусть $L = \sup_u \lambda'_u$ $(L \leqslant \infty)$, тогда $L > 0$. В самом деле, будь $L = 0$, то ввиду того, что $l \geqslant 0$, из вышеуказанной леммы следовало бы, что $G(b) - G(a) = 0$, что невозможно. Итак, должна существовать точка $u_0 \in [\beta, 1]$, где $\lambda'_{u_0} > 0$. Легко видеть, что существует константа $c > 0$ такая, что при достаточно малых $h > 0$, $h \leqslant h^{(0)}$

$$G(u_0) - G(u_0 - h) > ch. \tag{4.16.1}$$

Рассмотрим сегмент I_0: $[u_0 - h^{(0)}, u_0] \subset [\beta, 1]$.

Выберем $h^{(1)}$ столь малым, что

$$1 - 10^{-10} < \frac{u_0 - h^{(1)}}{u_0} < 1; \quad h^{(1)} < h^{(0)}. \tag{4.16.2}$$

Пусть $G(u_0) - G(u_0 - h^{(1)}) = \Delta_1 > 0$. В силу непрерывности $G(u)$ можно выбрать $h^{(2)}$ так, что $G(u_0) - G(u_0 - h^{(2)}) = \Delta_1/2$; $h^{(2)} < h^{(1)}$. Тогда $G(u_0 - h^{(2)}) - G(u_0 - h^{(1)}) = \Delta_1/2$.

Рассмотрим сегменты I_1: $[u_0-h^{(2)}, u_0]$, I_2: $[u_0-h^{(1)}, u_0-h^{(2)}]$.

Положим $u/u_0=v$, $u=vu_0$, $G(u)=G(u_0v)=G_1(v)$. Тогда сегменты I_1 и I_2 превратятся в сегменты изменения

$$v\colon\ I_1'=[1-h_1^{(2)}, 1],\ I_2'=[v^{(1)}, v^{(2)}],$$

где

$$\frac{h^{(2)}}{u_0}=h_1^{(2)},\ v^{(1)}=1-\frac{h^{(1)}}{u_0},\ v^{(2)}=1-\frac{h^{(2)}}{u_0}.$$

Из (4.16.1) вытекает неравенство для $G_1(v)$:

$$G_1(1)-G_1(1-h)>cu_0h \tag{4.16.3}$$

при $h\leqslant h^{(0)}/u_0$. Кроме того, $G_1(1)-G_1(1-h^{(2)})=\Delta_1/2$, $G(v^{(2)})-G(v^{(1)})=\Delta_1/2$ и, в силу (4.16.2),

$$1-10^{-10}<v^{(1)}<v^{(2)}<1. \tag{4.16.4}$$

Теперь осуществим в сегменте I_2' следующую конструкцию. Задается большое число S_0. На сегменте I_2' отмечаем все рациональные дроби r/s со знаменателями $1<s\leqslant S_0$. Возле каждой из них опишем интервал $(r/s-\delta_{r/s}, r+\delta_{r/s})$, где $\delta_{r/s}$ избраны так, что сумма приращений $G_1(v)$ по этим интервалам не превосходит $\Delta_1/4$.

В оставшейся системе сегментов выберем сегмент $I_2^{(S_0)}$ такой, что приращение $G_1(u)$ на нем равно $\Delta_2>0$ (что, очевидно, возможно). На сегменте $I_2^{(S_0)}$ к функции $G_1(u)$ применяем то же рассуждение о левом нижнем производном числе Дини, что и раньше. Оно доказывает, что найдется число $\alpha\in I_2^{(S_0)}$ такое, что

$$G_1(\alpha)-G_1(\alpha-h)>c'h \tag{4.16.5}$$

при $0<h<h^{(3)}$; $c'>0$ — константа.

§ 17. Сегменты π_1 и $\pi(S_0)$

Дальнейшие рассуждения будут вестись о сегменте I_1' и сегменте $[\alpha-h^{(3)}, \alpha]$. Эти сегменты переобозначим π_1 и $\pi(S_0)$, переобозначим также $h_1^{(2)}=h_0$, $h^{(3)}=\rho_0$ так, что будет

$$\pi_1=[1-h_0, 1],\quad \pi(S_0)=[\alpha-\rho_0, \alpha]. \tag{4.17.1}$$

Теперь введем новую случайную величину X_0 такую, что

$$\varphi_0(z) = \mathsf{E}\exp(zX_0) = \exp\left(\gamma z^2 + \int_{\pi_1} (e^{zv} - 1)\, dG_1(v) + \right.$$
$$\left. + \int_{\pi(\mathring{S}_0)} (e^{zv} - 1)\, dG_1(v)\right). \qquad (4.17.2)$$

Мы будем доказывать сначала, что при достаточно малом $\nu_0 > 0$ и подходяще выбранном малом $\eta_0 > 0$ функция

$$\psi_0(z) = \varphi_0(z)\exp(-\nu_0(e^{\eta_0 z} - 1)) \qquad (4.17.3)$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y. Положим $G_1(1 + v) = \Lambda(v)$, $G_1(\alpha + v) = \Lambda_1(v)$. Тогда

$$\int_{\pi_1} (e^{zv} - 1)\, dG_1(v) = \int_{-h_0}^{0} (e^{z(1+v)} - 1)\, d\Lambda(v), \qquad (4.17.4)$$

$$\int_{\pi(\mathring{S}_0)} (e^{zv} - 1)\, dG_1(v) = \int_{-\rho_0}^{0} (e^{z(\alpha+v)} - 1)\, d\Lambda_1(v). \qquad (4.17.5)$$

Считая $x \geqslant X_0$ ($X_0 > 1$ — большое), находим точку перевала $\sigma_0 = \sigma_0(x)$, соответственно (4.4.2), и полагаем, как и ранее, $z = \sigma_0 + it$. Положим, далее,

$$h(\sigma_0) = \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v) \qquad (4.17.6)$$

и $\nu_0 \in (0, 1)$. Получим в обозначениях, аналогичных (4.9.1) — (4.9.3),

$$\psi_0(z)\, e^{-zx} = \exp[U_0(x)]\exp[-\gamma t^2]\exp[-2e^{\sigma_0}U(t)]\exp[iV(t)], \qquad (4.17.7)$$

$$U(t) = \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) +$$
$$+ \exp[(\alpha - 1)\sigma_0]\int_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t(\alpha+v)}{2}\, d\Lambda_1(v) -$$
$$- \nu_0\exp[(\eta_0 - 1)\sigma_0]\sin^2\frac{\eta_0 t}{2}, \qquad (4.17.8)$$

$$V(t)=e^{\sigma_0}\int_{-h_0}^{0}\sin t(1+v)\,d\Lambda(v)+$$
$$+e^{\alpha\sigma_0}\int_{-\rho_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\sin[t(\alpha+v)]\,d\Lambda_1(v)-$$
$$-\nu_0\exp(\eta_0\sigma_0)\sin(\eta_0 t)+t(2\gamma\sigma_0-x). \qquad (4.17.9)$$

Полагая $\Delta=\int_{-h_0}^{0}d\Lambda(v)$, из (4.17.6) находим

$$h(\sigma_0)\leqslant\int_{-h_0}^{0}d\Lambda(v)=\Delta. \qquad (4.17.10)$$

В дальнейшем a_0, a_1, ... будут означать положительные константы, ζ_0, ζ_1, ... — малые положительные константы, K_0, K_1, ... — большие положительные константы; σ_0 будет считаться достаточно большим.

Имеем

$$\dot{h}(\sigma_0)=\int_{-h_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\frac{a_0}{\sigma_0}. \qquad (4.17.11)$$

В самом деле, при достаточно большом σ_0 имеем

$$h(\sigma_0)>\frac{1}{e}\int_{-\frac{1}{\sigma_0}}^{0}d\Lambda(v)>\frac{a_0}{\sigma_0}$$

в силу (4.16.3).

Пусть, далее, $R(\sigma_0)=4\ln\sigma_0$, $h_1(\sigma_0)=\frac{R(\sigma_0)}{\sigma_0}$. Тогда

$$\int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)}e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)<$$
$$<\exp[-R(\sigma_0)]\int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)}d\Lambda(v)<\frac{\Delta}{\sigma_0^4}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a_0}{\sigma_0}.$$

В силу (4.17.11) отсюда выводим

$$\int_{-h_1(\sigma_0)}^{0}e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\frac{1}{2}\,h(\sigma_0). \qquad (4.17.12)$$

Совершенно аналогично трактуется интеграл $\rho(\sigma_0) = \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda_1(v)$. Имеем $\rho(\sigma_0) \geqslant a_0/\sigma_0$,

$$\int\limits_{-h_1(\sigma_0)}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda_1(v) > \frac{1}{2} \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda_1(v) = \frac{1}{2}\rho(\sigma_0). \qquad (4.17.13)$$

Нам нужно будет еще очевидное равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\xi^2 e^{\sigma_0} \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v)\right] d\xi \doteq a_1 e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2}. \qquad (4.17.14)$$

В дальнейшем будем считать

$$|t| \leqslant \exp(0{,}51\eta_0\sigma_0). \qquad (4.17.15)$$

Значениями t, не удовлетворяющими (4.17.15), мы можем пренебречь. На основании очевидного аналога (4.11.13) имеем

$$\int\limits_{|t|>\exp(0{,}51\eta_0\sigma_0)} |\psi_0(z)\, e^{-zx}|\, dt =$$

$$= B\exp(U_0(x))\exp(-\exp(0{,}01\eta_0\sigma_0)), \qquad (4.17.16)$$

чем, как видно из дальнейшего, можно будет пренебречь.

§ 18. Малые значения $U(t)$ в условиях леммы III

Рассмотрим теперь те значения $U(t)$, для которых

$$|U(t)| < K_1 e^{-\sigma_0}\sigma_0. \qquad (4.18.1)$$

Из (4.17.8) находим

$$0 < \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) +$$

$$+ \exp[(\alpha-1)\sigma_0] \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(\alpha+v)}{2}\, d\Lambda_1(v) =$$

$$= B\nu_0 \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0. \qquad (4.18.2)$$

При этом в силу (4.16.4) $1-\alpha \leqslant 10^{-10}$ мы будем считать взятым в интервале $(0, 10^{-10})$. Докажем, что

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\left(-\sigma_0 \frac{1-1{,}52\eta_0}{3}\right) = \xi_1. \tag{4.18.3}$$

Пусть это не так и $\left|\sin\frac{t}{2}\right| > \xi_1$. Положим $\xi_1' = \xi_1 \exp(-0{,}51\eta_0\sigma_0)$. Тогда при $|v| \leqslant \xi_1'$ имеем, учитывая (4.17.15),

$$\left|\sin\frac{t(1+v)}{2}\right| > \frac{\xi_1}{4}.$$

Отсюда

$$\int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2\frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) > \frac{\xi_1^2}{16} \int_{-\xi_1'}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v) >$$

$$> \frac{a_0}{16}\, \xi_1^3 \exp(-0{,}51\eta_0\sigma_0)$$

в силу (4.16.3). Далее, $\xi_1^3 = K_1^3 \exp(-\sigma_0(1-1{,}52\eta_0))$, и полученное равенство противоречит (4.18.2). Этим (4.18.3) доказано.

Аналогично из (4.18.1) следует:

$$\left|\sin\frac{\alpha t}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\left(-\sigma_0 \frac{\alpha-1{,}52\eta_0}{3}\right) = \xi_2. \tag{4.18.4}$$

Причем $\xi_2 = \xi_1 \exp\frac{1-\alpha}{3}\sigma_0$, $1-\alpha \leqslant 10^{-10}$.

§ 19. Случай рационального α в лемме III

Дальнейшие рассуждения будут зависеть от того, является ли α рациональным или иррациональным числом. Начнем со случая рационального $\alpha = p/q$ (дробь p/q несократима). При этом в силу (4.16.4) $1 < p < q$. Далее, по конструкции сегмента $\pi(S_0)$ должно быть

$$q > S_0, \tag{4.19.1}$$

ибо все рациональные числа с меньшими знаменателями были выброшены. Выбираем

$$\eta_0 = \frac{1}{q}, \tag{4.19.2}$$

считая $S_0 > 10^{20}$. Из (4.18.4) и (4.18.3) имеем

$$\sin\frac{t}{2} = \theta\xi_2, \quad \sin\frac{t}{2}\frac{p}{q} = \theta_1\xi_2. \tag{4.19.3}$$

Отсюда в силу взаимной простоты p и q, как и ранее, выводим

$$t = 2\pi kq + 2\theta q^2\xi_2 = 2\pi kq + \theta\xi_3 \tag{4.19.4}$$

(k — целое; $|\theta| \leqslant 1$, θ не всегда одно и то же), или

$$t = 2\pi kq + w, \quad |w| \leqslant \xi_3. \tag{4.19.5}$$

Пусть $U(t)$ подчиняется (4.18.1). Тогда для t имеем соотношение (4.19.5). Имеем

$$t\frac{(1+v)}{2} = k\pi qv + \frac{w}{2}(1+v) + \pi kq,$$

$$\frac{t}{2}\left(\frac{p}{q}+v\right) = k\pi qv + \frac{w}{2}\left(\frac{p}{q}+v\right) + \pi kp.$$

Таким образом, $\frac{t}{2}(1+v) - \frac{t}{2}\left(\frac{p}{q}+v\right) = \frac{w}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right) + \pi k(q-p)$ при любом значении v. Отсюда видно, что при w под условием (4.19.5) либо $\sin^2\frac{t}{2}(1+v)$, либо $\sin^2\frac{t}{2}(\alpha+v)$ будет не меньше $\frac{w^2}{16}$. Далее, $\sin^2\frac{\eta_0 t}{2} = \sin^2\frac{t}{2q} = \sin^2\frac{w}{2q} = \frac{w^2}{4q^2}(1+B|w|)$. Поэтому из (4.17.8) и (4.17.11) следует:

$$U(t) > w^2\left(\frac{1}{16}\exp\left[(\alpha-1)\sigma_0\right]\frac{a_0}{\sigma_0} - \nu_0\frac{1}{2q^2}\exp\left(\frac{1}{q}-1\right)\sigma_0\right) >$$

$$> w^2(a_2\exp(\alpha-1)\sigma_0)\frac{1}{\sigma_0}. \tag{4.19.6}$$

Отсюда мы выводим, прежде всего, $U(t) \geqslant 0$ при всех реальных t, ибо если $U(t_1) = 0$, то в окрестности t_1 функция $U(t)$ не может менять знак. Далее, если имеет место (4.18.1), то из (4.19.6) заключаем:

$$\left.\begin{aligned}
&w^2 a_2\frac{1}{\sigma_0}\exp(\alpha-1)\sigma_0 < K_2 e^{-\sigma_0}\sigma_0,\\
&|w| \leqslant \frac{K_2^{1/2}}{a_2^{1/2}}\sigma_0\exp\left(-\frac{\alpha\sigma_0}{2}\right) \leqslant\\
&\qquad \leqslant \exp\left(-\frac{3}{4}\sigma_0\right) = \xi_4.
\end{aligned}\right\} \tag{4.19.7}$$

Теперь, считая S_0 и, стало быть, q достаточно большими, разберем поведение интеграла $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t-2\pi kq| \leqslant \xi_4} \psi_0(z) e^{-zx} dt$.

Мы будем считать $k \neq 0$.

Если

$$|k| \geqslant 4\sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}, \tag{4.19.8}$$

то

$$|t| \geqslant 4\pi q \sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}. \tag{4.19.9}$$

Ввиду того, что $U(t) \geqslant 0$, из (4.17.7) находим

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \geqslant 4\pi q \sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}} |\psi_0(z) e^{-zx}| \, dt =$$

$$= B \exp [U_0(x)] \exp(-\pi q \sigma_0). \tag{4.19.10}$$

Как мы увидим далее, такой величиной можно пренебречь. Рассмотрим поведение $U(t)$ при $|t - 2\pi qk| \leqslant \xi_4$ и k, не удовлетворяющем неравенству (4.19.8).

Обратим внимание на последний член $U(t)$ в (4.17.8). Он имеет вид ($\eta_0 = 1/q$, $w = t - 2\pi kq$)

$$B \exp\left[\left(\frac{1}{q} - 1\right)\sigma_0\right] \sin^2 \frac{w}{2q} = B \exp\left(-\frac{3}{2}\sigma_0\right). \tag{4.19.11}$$

Отсюда

$$-2e^{\sigma_0} U(t) = -2e^{\sigma_0} \left(\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2\left[\frac{t}{2}(1+v)\right] d\Lambda(v) + \right.$$

$$\left. + \exp[(\alpha - 1)\sigma_0] \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2\left[\frac{t}{2}(\alpha + v)\right] d\Lambda_1(v) \right) +$$

$$+ B \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_0\right).$$

Стало быть,

$$2e^{\sigma_0} U(t) \geqslant$$

$$\geqslant 2e^{\sigma_0} \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t}{2}(1+v) \, d\Lambda(v) + B \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_0\right). \tag{4.19.12}$$

Далее,

$$\frac{t}{2}(1+v)=\frac{2\pi qk+w}{2}(1+v)=\pi kq+\frac{w}{2}(1+v)+\pi kqv$$

и

$$\sin^2\frac{t}{2}(1+v)=\sin^2\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right).$$

Далее, h_0 было фиксировано, а $q>S_0$, и вся конструкция, связанная с S_0, производится независимо от h_0. При достаточно большом q и $|k|\geqslant 1$ имеем

$$\int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v)\geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v). \qquad (4.19.13)$$

Так как $|\pi kqv|\leqslant\pi/4$, в этом случае

$$\int_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v)>$$

$$>\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right)^2 d\Lambda(v). \qquad (4.19.14)$$

Из (4.17.7), (4.17.8), (4.19.12), (4.19.13) и (4.19.14) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t-2\pi qk|\leqslant\xi_4} |\psi_0(z)\,e^{-zx}|\,dt=B\exp\,[U_0(x)]\exp\,(-\gamma\pi^2k^2q^2)\times$$

$$\times\int_{|w|\leqslant\xi_4}\exp\left[-e^{\sigma_0}\int_{-\frac{1}{4|k|q}} e^{\sigma_0 v}\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right)^2 d\Lambda(v)\right]dw. \qquad (4.19.15)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\,[-(aw^2+2bw+c)]\,dw,$$

где $aw^2+2bw+c$ — положительный квадратный полином с дискриминантом $D=b^2-ac<0$.

Имеем

$$J=\frac{a_3}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{D}{a}\right)<\frac{a_3}{\sqrt{a}}. \tag{4.19.16}$$

Обращаясь к (4.19.15), находим

$$e^{\sigma_0}\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right)^2 d\Lambda(v)=aw^2+2bw+c,$$

где

$$a=e^{\sigma_0}\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\frac{(1+v)^2}{4}\,d\Lambda(v). \tag{4.19.17}$$

Ввиду этого последний интеграл в (4.19.15) имеет оценку сверху

$$4a_3e^{-\frac{\sigma_0}{2}}\left(\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)\right)^{-1/2}. \tag{4.19.18}$$

Обратимся теперь к (4.17.12). Если σ_0 достаточно велико сравнительно с q (что предполагается), то

$$\frac{1}{4|k|q}>\frac{a_4}{\sqrt{\sigma_0}\,q}>\frac{4\ln\sigma_0}{\sigma_0}=h_1(\sigma_0) \tag{4.19.19}$$

и, в силу (4.17.12),

$$\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\int\limits_{-h_1(\sigma_0)}^{0} e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\frac{1}{2}h(\sigma_0);$$

(4.19.18) не превосходит

$$6a_3e^{-\sigma_0/2}(h(\sigma_0))^{-1/2}, \tag{4.19.20}$$

а выражение (4.19.15) не превосходит

$$B\exp[U_0(x)]\,e^{-\sigma_0/2}(h(\sigma_0))^{-1/2}\exp(-\gamma\pi^2k^2q^2). \tag{4.19.21}$$

§ 20. Завершение рассмотрения случая рационального α

Суммируя выражения (4.19.21) по всем k с $|k| \geqslant 1$, получаем оценку

$$B \exp [U_0 (x)] e^{-\sigma_0/2} (h (\sigma_0))^{-1/2} \exp \left(-\frac{\gamma}{2} \pi^2 q^2 \right). \tag{4.20.1}$$

Далее, рассмотрим значения t, для которых (4.18.1) не выполнено. Так как $U(t) \geqslant 0$, то

$$U(t) > K_1 e^{-\sigma_0} \sigma_0. \tag{4.20.2}$$

Если A — множество таких значений t, то, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_A \psi_0 (z) e^{-zx} \, dt =$$

$$= B \exp [U_0 (x)] \exp [-2K_1 \sigma_0] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp [-\gamma t^2] \, dt =$$

$$= B \exp [U_0 (x)] e^{-\sigma_0/2} \exp (-K_1 \sigma_0). \tag{4.20.3}$$

Наконец, остается случай $k = 0$, т. е. интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \xi_4} \psi_0 (z) e^{-zx} \, dt. \tag{4.20.4}$$

Здесь

$$U(t) < t^2 \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \, d\Lambda (v). \tag{4.20.5}$$

Далее, согласно (4.4.10)

$$V(t) = V(0) + V''' (\theta t) \frac{t^3}{6} = B e^{\sigma_0} \xi_4^3 = B \exp \left(-\frac{1}{4} \sigma_0 \right). \tag{4.20.6}$$

Ввиду этого, из (4.20.5), (4.20.6) и (4.17.7) вытекает

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \xi_4} \psi_0 (z) e^{-zx} \, dt >$$

$$> a_5 e^{-\sigma_0/2} \left(\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \, d\Lambda (v) \right)^{-1/2} \exp [U_0 (x)] =$$

$$= a_5 e^{-\sigma_0/2} (h (\sigma_0))^{-1/2} \exp [U_0 (x)]. \tag{4.20.7}$$

Сопоставив (4.20.7), (4.20.3), (4.20.1) и (4.19.10), находим, что при достаточно больших $x > X_0$ (и, стало быть, σ_0) и S_0

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt >$$

$$> \frac{a_5}{2}\, e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp[U_0(x)] > 0. \qquad (4.20.8)$$

При $|x| \leqslant X_0$ и достаточно малом $\nu_0 > 0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как доказывается в § 2, а при $x < -X_0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как явствует из § 3.

§ 21. Переход к случаю иррационального α

Перейдем к случаю, когда α иррационально. Здесь будем действовать во многом аналогично §§ 9—15. Мы делаем конструкцию сегмента π (S_0), как и ранее; из предыдущего видно, что если S_0 достаточно велико (сравнительно с уже выбранным h_0 и $1/\gamma$), а $\alpha = p/q$ рационально, то $g_{1\nu_0}(x) > 0$. Выберем такое S_0, что если бы соответствующее α было рациональным, то получилось бы $g_{1\nu_0}(x) > 0$, и зафиксируем его. Остается предположить, что избираемое нами соответственно § 16 число α является иррациональным. Разложим его в непрерывную дробь, составим ряд подходящих дробей P_n/Q_n и числа η_n', как и в § 9; число η_0 будет избираться одним из них. Рассуждения §§ 17 и 18, разумеется, не меняются. Соотношения (4.18.3) и (4.18.4) используются, как в § 10. Вводится большое число $\tau > 1$. Если Q_n — наибольшее из чисел (4.9.5), не превосходящее τ, и если $U(t)$ подчинено (4.18.1), то будет иметь место соотношение, аналогичное (4.10.8). Вводим число (4.10.9) и определяем τ с помощью (4.10.10). Тогда имеем (4.10.11). Считаем σ_0 большим; σ_0 будем разделять, как и в § 10, на такие же классы A_1 и A_2. Начнем со случая $\sigma_0 \in A_2$. Выбираем η_0 в классе чисел η_n' столь малым, что удовлетворяется (4.10.12); полагаем $\nu_0 \in (0,\ 1)$.

Далее, считая $|t| \leqslant \sqrt{q}$, повторяем рассуждение § 11 и находим, что имеет место либо (4.11.5), либо (4.11.6), причем, разумеется, в (4.11.6) $U(t)$ отвечает так же обозначенной функции в (4.17.8). При t, удовлетворяющих

(4.11.5), имеем из (4.17.8)

$$U(t)=t^2\left\{\int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\left(\frac{1+v}{2}\right)^2(1+Bt)\,d\Lambda(v)+\right.$$

$$+\exp[(\alpha-1)\sigma_0]\int_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\left(\frac{\alpha+v}{2}\right)^2(1+Bt)\,d\Lambda_1(v)-$$

$$\left.-\nu_0\exp[(\eta_0-1)\sigma_0]\frac{\eta_0^2}{4}(1+Bt)\right\}.$$

Таким образом, считая, как обычно, σ_0 достаточно большим и учитывая, что $h(\sigma_0)>a_0/\sigma_0$ (см. (4.17.11)), находим

$$U(t)\geqslant\frac{t^2}{8}\int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)=\frac{t^2}{8}h(\sigma_0). \tag{4.21.1}$$

Мы видим отсюда, что $U(t)\geqslant 0$ при $|t|\leqslant\sqrt{q}$. Далее, при

$$|t|\geqslant\exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1-1)\right]=\xi_0 \tag{4.21.2}$$

(ζ_1 — константа, $0<\zeta_1<1$) имеем

$$U(t)\geqslant\frac{1}{8}\exp[\sigma_0(\zeta_1-1)]\,h(\sigma_0)>\exp\sigma_0(\zeta_2-1) \tag{4.21.3}$$

при $\zeta_2=\frac{1}{2}\zeta_1$.

Далее, как и в (4.20.6), находим, что при $|t|\leqslant\xi_0$ $V(t)=B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right)$. При $|t|\leqslant\xi_0$ легко находим из (4.17.8)

$$U(t)<16t^2h(\sigma_0). \tag{4.21.4}$$

Теперь обращаемся к интегралу

$$g_{1\nu_0}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt. \tag{4.21.5}$$

Как и в § 11, вводим области изменения t: D_q, T_{1q}, T_{2q}, T_{0q} и интегралы $J(D_q)$, $J(T_{1q})$, $J(T_{2q})$, $J(T_{0q})$. Имеем (4.11.13), где $\psi(z)$ нужно заменить на $\psi_0(z)$, и оценку (4.11.15) для $J(D_q)$. Как в § 12, имеем оценку (4.12.2) для $J(T_{1q})$ и (4.12.3) для $J(T_{2q})$. Переходим к оценке $J(T_{0q})$ снизу. Имеем

$$J(T_{0q})=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\xi_0}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt, \tag{4.21.6}$$

В силу (4.21.4) и (4.17.7) находим

$$J(T_{0q}) > \frac{1}{4\pi} \exp[U_0(x)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-32e^{\sigma_0}h(\sigma_0)t^2]\,dt >$$
$$> a_5 \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2}(h(\sigma_0))^{-1/2}. \qquad (4.21.7)$$

Сравнивая (4.21.7), (4.12.2), (4.12.3) и (4.11.15), приходим к выводу: $g_{1\nu_0}(x) > a_6 \exp(U_0(x))\, e^{-\sigma_0/2}(h(\sigma_0)^{-1/2}) > 0$ при достаточно большом $\sigma_0 \in A_2$.

§ 22. Завершение доказательства леммы III

Теперь рассмотрим случай $\sigma_0 \in A_1$, следуя §§ 13 и 15. Как и в § 13, вводим области D_τ и T_τ. Интеграл $J(D_\tau)$ оценивается (4.13.4). При $U(t)$, подчиненном (4.18.1), будем иметь соотношение (4.10.11), из которого следует (4.13.5) или (4.13.6). Далее, имеем (4.13.7) — (4.13.9). Из (4.13.8) следует (4.13.12), после чего (4.17.8) дает

$$U(t) > \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\,dv + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\beta\sigma_0}{200}\right). \qquad (4.22.1)$$

Положим сперва $k \neq 0$,

$$t = 2\pi kq + w; \quad |w| \leqslant c_4\tau^{-0,01} = \xi_0. \qquad (4.22.2)$$

Далее рассуждаем, как в § 19 (см. (4.19.12) и (4.19.13)). Имеем (4.19.13), считая q достаточно большим. Затем получаем (4.19.14) и (4.19.15), где вместо ξ_4 нужно брать ξ_0. Далее, с помощью (4.19.16) — (4.19.20) находим для интеграла $\int\limits_{|t-2\pi kq| \leqslant \xi_0} \psi_0(z)\, e^{-zx}\,dt$ оценку

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2}(h(\sigma_0))^{-1/2} \exp(-\gamma\pi^2k^2q^2). \qquad (4.22.3)$$

Суммируя по $k \neq 1$, получаем оценку

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2}(h(\sigma_0))^{-1/2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\pi^2q^2\right). \qquad (4.22.4)$$

Для значений $U(t)$, не подчиняющихся (4.18.1), т. е. подчиненных (4.20.2), получаем, как и в § 20, оценку интеграла вида (4.20.3):

$$B \exp [U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2} \exp(-K_1\sigma_0). \tag{4.22.5}$$

Наконец, при $k=0$ имеем из (4.17.8)

$$U(t) < 2 \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\beta\sigma_0}{200}\right) <$$

$$< 4t^2 h(\sigma_0) + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\beta\sigma_0}{200}\right). \tag{4.22.6}$$

Отсюда

$$U(t) > \exp \sigma_0 (\zeta_1 - 1) \quad \text{при} \quad |t| \geqslant \exp \frac{\sigma_0}{2}(2\zeta_1 - 1)$$

($\zeta_1 > 0$ — константа). Это позволяет написать

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leqslant \xi_0} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leqslant \xi_1} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt +$$

$$+ B \exp\left(-\exp\left(-\frac{\zeta_1}{2}\sigma_0\right)\right), \tag{4.22.7}$$

где $\xi_1 = \exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(2\zeta_1 - 1)\right]$. После этого $V(t)$ при $|t| \leqslant \xi_1$ оценивается, как в (4.20.6), и мы получаем, как в (4.20.7),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leqslant \xi_1} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt > a_5 e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp[U_0(x)]. \tag{4.22.8}$$

Сопоставляя (4.22.8), (4.22.7), (4.22.5), (4.22.4) и (4.13.4), находим при $x \geqslant X_0$ и $\sigma_0 \in A_1$

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt >$$

$$> \frac{a_5}{2} e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp[U_0(x)] > 0. \tag{4.22.9}$$

При достаточно малом $\nu_0 > 0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$ при $|x| \leqslant X_0$ и $g_{1\nu_0}(x) > 0$ при $x \leqslant -X_0$. Таким образом, при достаточно малом $\nu_0 > 0$ функция (4.17.3) будет х. ф. случайной величины Y_0.

Обращаясь к (4.17.7), замечаем, что

$$\psi(z)=\exp\left[\gamma z^2+\int\limits_{I_1}\left(e^{z\frac{u}{u_0}}-1\right)dG(u)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{I_2^{(S_0)}u_0}\left(e^{z\frac{u}{u_0}}-1\right)dG(u)-\nu_0\left(e^{\eta_0 z}-1\right)\right],$$

где $I_2^{(S_0)}\,u_0$ — сегмент $I_2^{(S_0)}$, растянутый в u_0 раз.

Если заменим $\gamma>0$ числом $\gamma/u_0^2>0$, то, очевидно, рассуждения такие же, только число ν_0, быть может, придется еще уменьшить. Таким образом, функция

$$\psi_1(z)=\exp\left[\frac{\gamma}{u_0^2}z^2+\int\limits_{I_1}\left(e^{\frac{z}{u_0}u}-1\right)dG(u)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{I_2^{(S_0)}u_0}\left(e^{\frac{z}{u_0}u}-1\right)dG(u)-\nu\left(e^{\eta_0 u_0\frac{z}{u_0}}-1\right)\right] \qquad (4.22.10)$$

будет х. ф. случайной величины Y_1 при $\nu>0$, $\nu\leqslant\nu_0$. Но тогда и

$$\psi_2(z)=\psi_1(zu_0)=\exp\left[\gamma z^2+\int\limits_{I_1}\left(e^{zu}-1\right)dG(u)+\right.$$

$$+\int\limits_{I_2^{(S_0)}u_0}\left(e^{zu}-1\right)dG(u)-\nu\left(e^{\eta_0 u_0 z}-1\right) \qquad (4.22.11)$$

будет х. ф. случайной величины Y_2.

Обращаясь к (4.2.6), обозначим множество $[\beta,\,1]\diagdown I_1\diagdown I_2^{(S_0)}u_0$, где первый член содержит сумму второго и третьего, через D. Очевидно, функция

$$\psi_3(z)=\exp\left[\int\limits_D\left(e^{zu}-1\right)dG(u)\right] \qquad (4.22.12)$$

будет х. ф. случайной величины Y_3, притом безгранично делимой.

Считая Y_3 независимым от Y_2, получаем, что $\psi_2(z)\,\psi_3(z)=\mathsf{E}\exp z\,(Y_2+Y_3)$ есть х. ф. случайной величины Y_2+Y_3. Но $\psi_2(z)\,\psi_3(z)=\psi(z)$, как видно из (4.2.7), и лемма III доказана.

§ 23. Вывод теоремы 4.1.1 из трех основных лемм

Если в (4.2.2) — (4.2.7) переменить знак у переменной z, то, очевидно, леммы I, II, III останутся в силе. Кроме того, если в (4.2.6) берется интеграл не от β до 1, а от β_1 до β_2, $\beta_2 > \beta_1 > 0$, то, очевидно, лемма III остается в силе; достаточно произвести соответствующие замены переменных u и z, состоящие в умножении этих переменных на положительные числа.

Теперь мы можем доказать теорему 4.1.1. Сперва покажем, что если имеющий гауссову компоненту б. д. закон F принадлежит I_0, то функции $M(x)$ и $N(x)$, фигурирующие в представлении х. ф. закона F формулой Леви (4.1.1), не могут иметь непрерывных компонент. Пусть это не так и пусть непрерывная компонента имеется, например, у $N(x)$, т. е. $N(x)$ представляется в виде $N(x) = N_1(x) + G(x)$, где N_1 и G — неубывающие функции, причем $G(x)$ непостоянна и непрерывна. Тогда случайная величина X, отвечающая закону F, разлагается на сумму двух независимых случайных величин $X = X_1 + X_2$, причем X_1 имеет х. ф. $\varphi_1(t)$ вида

$$\varphi_1(t) = \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t^2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2}(e^{itu} - 1)\,dG(u)\right], \quad (4.23.1)$$

где $G(u)$ — непрерывная функция. Согласно лемме III при достаточно малом $\nu > 0$ функция вида

$$\varphi_3(t) = \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t^2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2}(e^{itu} - 1)\,dG(u) - \nu(e^{i\eta_0 t} - 1)\right] \quad (4.23.2)$$

будет х. ф. случайной величины X_3. Очевидно, функция $\varphi_4(t) = \exp[\nu(e^{i\eta_0 t} - 1)]$ будет х. ф. пуассоновой случайной величины X_4, и $X_1 = X_3 + X_4$; X_3, X_4 независимы и не зависят от X_2. Тогда $X = X_3 + (X_2 + X_4)$, где все компоненты независимы и X_3 не является безгранично делимой, как следует из (4.23.2). Аналогично действуем, если функция $M(x)$ содержит непрерывную компоненту. Итак, закон $F \in I_0$, имеющий гауссову компоненту, может иметь лишь счетный или конечный пуассонов спектр. Продолжим исследование спектра. Пусть

$\mu = \mu_{m_1}$ и $\mu' = \mu_{m_2}$ — два любых скачка функции $N(x)$ в (4.1.1) и $\mu < \mu'$. Докажем, что $\mu'/\mu = n$ — целое число. В самом деле, рассмотрим

$$\varphi_1(t) = \exp\left[-\gamma t^2 + \lambda_{m_1}(e^{it\mu} - 1) + \lambda_{m_2}(e^{it\mu'} - 1)\right].$$

Если $\mu/\mu' = \alpha$ иррационально, то согласно лемме II, действуя, как было сказано выше, найдем разложение $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)\,\varphi_3(t)$, где $\varphi_2(t)$ будет отвечать не б. д. закону; значит, исходный закон F будет иметь не б. д. компоненту. Итак, $\alpha = p/q$ рационально. Тогда по таким же соображениям из леммы I вытекает, что $p = 1$ (считаем $(p, q) = 1$), иначе исходный закон F имел бы не б. д. компоненту. Итак, если $\mu_{m_2} > \mu_{m_1}$, то μ_{m_2}/μ_{m_1} — целое число. Совершенно то же касается функции $M(x)$ в (4.1.1): если $\nu_{m_2} > \nu_{m_1}$, то ν_{m_2}/ν_{m_1} — целое число. Отсюда следует, что числа μ_m могут иметь только две предельные точки: 0 или $+\infty$. В самом деле, если бы у них существовала предельная точка $\mu \neq 0, \infty$, то в сегменте $\left[\frac{3}{4}\mu, \frac{5}{4}\mu\right]$ существовали бы два скачка μ_1 и $\mu' > \mu_1$, причем, очевидно, $\mu'/\mu_1 \leqslant \frac{5}{3}$ не могло бы быть целым числом. Совершенно аналогично, числа ν_m могут иметь лишь две предельные точки 0 или ∞.

Пусть $\mu > 0$ — одно из чисел μ_m (если их множество непусто). Все числа $\mu_m > \mu$, в силу сказанного выше, можно упорядочить по возрастанию, и отношение каждого из них к предыдущему будет целым числом, а числа левее μ можно упорядочить по убыванию, и каждое из них будет также делить предыдущее. То же касается и чисел ν_m.

Таким образом, $F \in \mathfrak{L}$, и теорема 4.1.1 доказана.

ГЛАВА V

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ЗАКОНА КЛАССА $\mathfrak{L}$ КЛАССУ I_0

В предыдущей главе было доказано, что для б. д. законов, имеющих гауссову компоненту, необходимым условием для принадлежности I_0 является принадлежность классу $\mathfrak{L}$. Класс $\mathfrak{L}$ определяется как класс всех б. д. законов, пуассонов спектр которых содержится в некотором множестве вида

$$\{\mu_{k1}\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{\infty}, \tag{5.0.1}$$

где $\mu_{k1} > 0$, $\mu_{k2} < 0$, а числа $\mu_{k+1,r}/\mu_{kr}$ ($r = 1, 2$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) натуральные, отличные от единицы.

Возникает вопрос, не является ли это необходимое условие также и достаточным.

Основной результат этой главы — теорема 5.3.1 — показывает, что при дополнительном предположении о быстром убывании величины $\int\limits_{|x|>y} dG(x)$, где $G(x)$ — функция, фигурирующая в формуле Леви — Хинчина, $y \to \infty$, принадлежность классу $\mathfrak{L}$ влечет принадлежность I_0. С другой стороны, будет построен (см. § 5) пример, показывающий, что одна только принадлежность классу $\mathfrak{L}$ еще не влечет включение в I_0.

В гл. VI будут указаны достаточные условия для принадлежности I_0 законов, не принадлежащих классу $\mathfrak{L}$. В силу теоремы 4.1.1 законы, удовлетворяющие этим условиям, конечно, не должны иметь гауссовой компоненты.

§ 1. Теорема о разложениях композиции законов Гаусса и Пуассона

Доказательство теоремы 5.3.1, дающей достаточные условия принадлежности закона класса $\mathfrak{L}$ классу I_0, довольно сложно. Чтобы яснее выделить лежащие в его основе идеи, мы в этом параграфе приведем доказательство менее общей теоремы — о принадлежности I_0 композиции законов Гаусса и Пуассона. Ее доказательство свободно от громоздких деталей, которых мы не можем избежать при доказательстве теоремы 5.3.1.

Композициями законов Гаусса и Пуассона мы будем в этом параграфе называть законы F с х. ф. вида

$$\varphi(t;\ F) = \exp\{-\gamma t^2 + \lambda(e^{it} - 1) + i\beta t\},$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\beta = 0$. Этот класс законов содержит, таким образом, кроме композиций законов Гаусса и Пуассона в строгом смысле слова, также законы Гаусса, законы Пуассона и единичные законы.

Т е о р е м а 5.1.1 (Ю. В. Линник). *Всякая композиция законов Гаусса и Пуассона принадлежит классу I_0. Если* *) *закон F имеет х. ф.*

$$\varphi(t;\ F) = \exp\{-\gamma t^2 + \lambda(e^{it} - 1) + i\beta t\} \tag{5.1.1}$$
$$(\gamma \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0,\ \operatorname{Im}\beta = 0),$$

то х. ф. любой компоненты F_1 закона F представляется в виде

$$\varphi(t;\ F_1) = \exp\{-\gamma_1 t^2 + \lambda_1(e^{it} - 1) + i\beta_1 t\} \tag{5.1.2}$$
$$(0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma,\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda,\ \operatorname{Im}\beta_1 = 0).$$

Очевидно, теорема 5.1.1 содержит теорему 3.1.4 Г. Крамера. Кроме того, в ней содержится следующая теорема.

Т е о р е м а 5.1.2 (Д. А. Райков). *Все собственные компоненты закона Пуассона являются законами Пуассона.*

Доказательство теоремы 5.1.1 опирается на теорему 3.1.2.

Пусть F — композиция законов Гаусса и Пуассона с х. ф. (5.1.1). Нам достаточно доказать, что х. ф. любой

*) Нетрудно показать (см. доказательство следствия теоремы 5.3.1, стр. 192), что второе утверждение теоремы содержится в первом.

компоненты закона F имеет вид (5.1.2). По теореме 3.1.2 х. ф. любой компоненты закона F содержится во множестве всех хребтовых компонент функции (5.1.1). Поэтому теорема 5.1.1 будет доказана, если удастся установить такой факт.

Теорема 5.1.1′. *Множество всех хребтовых компонент функции*

$$\varphi(t) = \exp\{-\gamma t^2 + \lambda(e^{it} - 1) + i\beta t\}$$
$$(\gamma \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0,\ \operatorname{Im}\beta = 0)$$

состоит из функций вида

$$\varphi_1(t) = \exp\{-\gamma_1 t^2 + \lambda_1(e^{it} - 1) + i\beta_1 t\}$$
$$(0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma,\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda,\ \operatorname{Im}\beta_1 = 0).$$

Приступим к доказательству теоремы 5.1.1′.

По определению хребтовой компоненты функция $\varphi_1(t)$ является нормированной целой хребтовой. Она не обращается в нуль, так как функция $\varphi(t)$ не имеет корней, поэтому (следствие 2 из теоремы 2.3.2) ее можно представить в виде $\varphi_1(t) = \exp\{f(t)\}$, где $f(t)$ — целая функция, действительная на мнимой t-оси, и $f(0) = 0$. Обозначим через $g(z)$ целую функцию $g(z) = f(-iz)$. Эта функция действительна при действительных z и $g(0) = 0$. Нам нужно показать, что

$$g(z) = \gamma_1 z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \beta_1 z \tag{5.1.3}$$
$$(0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma,\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda,\ \operatorname{Im}\beta_1 = 0).$$

Рассмотрим действительную часть функции $g(z)$:

$$u(x,\ y) = \operatorname{Re} g(x + iy).$$

По теореме 3.1.5 «о сглаживании хребта» имеем

$$1 \leqslant \left|\frac{\varphi_1(-ix)}{\varphi_1(y - ix)}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(-ix)}{\varphi(y - ix)}\right|.$$

Так как

$$\left|\frac{\varphi_1(-ix)}{\varphi_1(y - ix)}\right| = |\exp[g(x) - g(x + iy)]| = \\ = \exp[u(x,\ 0) - u(x,\ y)],$$

$$\left|\frac{\varphi(-ix)}{\varphi(y - ix)}\right| = \exp\left[2\lambda e^x \sin^2\frac{y}{2} + \gamma y^2\right],$$

то функция $u(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, y) \leqslant 2\lambda e^x \sin^2 \frac{y}{2} + \gamma y^2, \qquad -\infty < x,\ y < \infty. \tag{5.1.4}$$

Наша задача сводится к доказательству такой теоремы о целых функциях.

Теорема 5.1.1″. *Пусть* $g(z)$ — *целая функция,* $g(0) = 0$, *действительная при действительных* z. *Если действительная часть* $u(x, y)$ *функции* $g(z)$ *удовлетворяет неравенству* (5.1.4), *то функция* $g(z)$ *допускает представление* (5.1.3).

Доказательство этой теоремы расчленим на ряд лемм.

Лемма 5.1.1. *При действительных* x *справедлива оценка*

$$|u(x, 0)| \leqslant \lambda e^x + \gamma x^2 + O(|x|), \qquad x \to \infty. \tag{5.1.5}$$

Доказательство. Так как функция $g(z)$ при действительных z действительна, то в силу принципа симметрии функция $u(x, y)$ является четной по y. Поэтому

$$u(x, 0) - u(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} y^2 + o(y^2), \qquad y \to 0.$$

Подставляя это в (5.1.4), а затем деля на y^2 и устремляя $y \to 0$, получим

$$0 \leqslant -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} \leqslant \frac{1}{2} \lambda e^x + \gamma.$$

Так как функция $u(x, y)$ гармонична, то отсюда следует оценка

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} \leqslant \frac{1}{2} \lambda e^x + \gamma.$$

Интегрируя два раза по x, получаем утверждение леммы.

Лемма 5.1.2. *При действительных* x *и* y *справедлива оценка*

$$|u(x, y)| \leqslant 3\lambda e^x + \gamma(x^2 + y^2) + O(|x|), \qquad x^2 + y^2 \to \infty. \tag{5.1.6}$$

Это утверждение непосредственно следует из неравенства

$$|u(x, y)| \leqslant |u(x, 0)| + |u(x, 0) - u(x, y)|$$

и неравенств (5.1.5) и (5.1.4).

Лемма 5.1.3. *Справедлива оценка*

$$g(z) = O(|z|e^x + |z|^3), \quad z \to \infty \qquad (x = \operatorname{Re} z).$$

Доказательство. Применяя формулу Шварца (А. И. Маркушевич [1], стр. 153) к функции $q(\zeta) = g(\zeta + z)$ в круге $|\zeta| < 1$, получим

$$g(\zeta+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+\cos\varphi,\ y+\sin\varphi)\frac{e^{i\varphi}+\zeta}{e^{i\varphi}-\zeta}\,d\varphi + i\operatorname{Im} g(z)$$
$$(x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z).$$

Дифференцируя по ζ и полагая затем $\zeta = 0$, будем иметь

$$g'(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x+\cos\varphi,\ y+\sin\varphi)\,e^{-i\varphi}\,d\varphi.$$

В силу леммы 5.1.2 отсюда следует:

$$g'(z) = O(e^x + |z|^2), \qquad z \to \infty.$$

Пользуясь очевидным неравенством

$$|g(z)| = \left|z\int_0^1 g'(zt)\,dt\right| \leqslant |z| \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |g'(zt)|,$$

получаем утверждение леммы.

Лемма 5.1.4. *Функция $u(x, y)$ при каждом фиксированном действительном y аналитически продолжается как функция от x на всю комплексную x-плоскость. Полученная в результате продолжения целая функция от x (будем обозначать ее снова через $u(x, y)$) допускает в x-плоскости оценку*

$$u(x, y) = O(|x|\,e^{\operatorname{Re} x} + |x|^3), \qquad x \to \infty. \tag{5.1.7}$$

Доказательство. Так как при действительных z функция $g(z)$ принимает действительные значения, то при действительных x и y числа $g(x+iy)$ и $g(x-iy)$ являются комплексно-сопряженными и, следовательно,

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\{g(x+iy) + g(x-iy)\}. \tag{5.1.8}$$

Правая часть этого соотношения является целой функцией от x, что и доказывает первое утверждение леммы *). Второе утверждение вытекает из (5.1.8) и леммы 5.1.3.

Рассмотрим теперь целую функцию

$$\varkappa(x) = u(x, 0) - u(x, 2\pi).$$

Центральным пунктом доказательства теоремы 5.1.1″ является следующая лемма.

Лемма 5.1.5. *Функция* $\varkappa(x)$ *постоянна.*

Доказательство. В силу неравенства (5.1.4) при действительных x имеем

$$\varkappa(x) = O(1). \tag{5.1.9}$$

Из леммы 5.1.4 следует, что при чисто мнимых x выполняется

$$\varkappa(x) = O(|x|^3), \qquad x \to \infty,$$

а во всей x-плоскости выполняется

$$\varkappa(x) = O(\exp(|x|^{3/2})), \qquad x \to \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$\vartheta(x) = \varkappa(x)(x+1)^{-3}.$$

Эта функция аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} x \geqslant 0$ и ограничена на луче $x \geqslant 0$ и прямой $\operatorname{Re} x = 0$. В каждом из углов $(-\pi/2) \leqslant \arg x \leqslant 0$ и $0 \leqslant \arg x \leqslant \pi/2$ мы можем применить к функции $\vartheta(x)$ теорему 1.2.1 с $\alpha = \pi/2$, $\rho = 3/2$. По теореме 1.2.1 в каждом из этих углов, а следовательно, и во всей полуплоскости $\operatorname{Re} x \geqslant 0$ выполняется $\vartheta(x) = O(1)$, $x \to \infty$. Таким образом, при $\operatorname{Re} x \geqslant 0$

$$\varkappa(x) = O(|x|^3), \qquad x \to \infty. \tag{5.1.10}$$

Справедливость этой оценки в полуплоскости $\operatorname{Re} x \leqslant 0$ непосредственно вытекает из оценки (5.1.7) в лемме 5.1.4.

Итак, соотношение (5.1.10) выполняется во всей x-плоскости. В силу теоремы 1.2.3 отсюда следует, что $\varkappa(x)$ — полином не выше третьей степени. Это совместимо с оценкой (5.1.9), имеющей место при действительных x, лишь в случае $\varkappa(x) = \text{const}$. Лемма доказана.

---

*) Из (5.1.8) видно, что $u(x, y)$ можно продолжить и по y до целой функции; это обстоятельство мы в дальнейшем не используем.

Лемма 5.1.6. *Функция $g(z)$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению*

$$g(z+2\pi i)+g(z-2\pi i)-2g(z)=C, \qquad (5.1.11)$$

где C — постоянная.

Доказательство. В силу (5.1.8) имеем

$$u(z, 0)=g(z), \quad u(z, 2\pi)=\frac{1}{2}\{g(z+2\pi i)+g(z-2\pi i)\},$$

следовательно,

$$2\varkappa(z)=2g(z)-g(z-2\pi i)-g(z-2\pi i),$$

и утверждение леммы непосредственно следует из леммы 5.1.5.

Для исследования уравнения (5.1.11) нам понадобится следующая лемма о периодических целых функциях.

Лемма 5.1.7. *Пусть $f(z)$ — целая функция с периодом T ($\neq 0$), допускающая оценку $|f(z)|\leqslant Ke^{L|z|}$, где $K>0$ и $L>0$ — постоянные. Тогда*

$$f(z)=\sum_{p=-\omega}^{\omega} d_p \exp\left\{\frac{2\pi izp}{T}\right\}, \quad \omega=\left[\frac{|T|L}{2\pi}\right]. \qquad (5.1.12)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $T>0$: если $T=|T|e^{i\alpha}$, то функция $f_1(z)=f(ze^{i\alpha})$ имеет период $|T|$; записывая для нее представление (5.1.12), легко приходим к доказываемому представлению для $f(z)$.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье. Имеем *)

$$f(x)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} d_p \exp\left\{\frac{2\pi ixp}{T}\right\}, \qquad -\infty<x<\infty,$$

где

$$d_p=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\exp\left\{-\frac{2\pi ixp}{T}\right\}dx, \qquad p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Покажем, что

$$d_p=0 \quad \text{при} \quad |p|>\omega. \qquad (5.1.13)$$

*) Ряд Фурье абсолютно сходится к функции $f(x)$, так как она имеет производные всех порядков.

Проинтегрируем функцию $\lambda(z) = f(z) \exp\left\{-\frac{2\pi i z p}{T}\right\}$ по контуру прямоугольника с вершинами в точках 0, $i\theta$, $i\theta + T$, T, где θ — произвольное действительное число ($\neq 0$). В силу теоремы Коши интеграл равен нулю. Замечая, что интегралы по вертикальным сторонам в силу периодичности функции $\lambda(z)$ взаимно уничтожаются, получаем равенство

$$d_p = \frac{1}{T}\int_0^T f(x+i\theta)\exp\left\{\frac{2\pi\theta p}{T} - \frac{2\pi i x p}{T}\right\}dx, \quad p = 0, \pm 1, \ldots$$

Отсюда следует оценка

$$|d_p| \leqslant K e^{L(T+|\theta|)} \exp\left\{\frac{2\pi\theta p}{T}\right\}, \qquad p = 0, \pm 1, \ldots$$

Чтобы получить (5.1.13), достаточно при $p > \omega$ устремить θ к $-\infty$, а при $p < -\omega$ к $+\infty$. Лемма доказана *).

Завершим теперь доказательство теоремы 5.1.1″. Положим

$$g_1(z) = g(z) - g(z - 2\pi i) - \frac{Cz}{2\pi i},$$

где C — постоянная из (5.1.11). В силу (5.1.11) функция $g_1(z)$ периодична с периодом $2\pi i$, а из леммы 5.1.3 следует, что она допускает оценку $|g_1(z)| \leqslant K e^{3|z|/2}$, где $K > 0$ — постоянная. Применяя лемму 5.1.7 ($T = 2\pi i$, $L = 3/2$), заключаем, что

$$g_1(z) = A_0 + A_1 e^z + A_2 e^{-z},$$

где A_0, A_1 и A_2 — постоянные. Постоянная A_2 должна равняться нулю, так как по лемме 5.1.3 функция $g(x)$, а следовательно и $g_1(x)$, есть $O(|x|^3)$ при $x \to -\infty$. Таким образом, мы имеем

$$g(z) - g(z - 2\pi i) = B_0 + B_1 z + B_2 e^z, \tag{5.1.14}$$

где B_0, B_1 и B_2 — постоянные.

---

*) Заметим, что возможен другой путь доказательства леммы 5.1.7, основанный на том обстоятельстве, что функция $\Phi(\zeta) = f\left(\frac{T \ln \zeta}{2\pi i}\right)$ является однозначной аналитической в области $0 < |\zeta| < \infty$. Мы этим путем воспользуемся при доказательстве лемм 5.2.2 и 5.2.3 в § 2.

Положим теперь

$$g_2(z)=g(z)-\frac{B_0+i\pi B_1}{2\pi i}z-\frac{B_1}{4\pi i}z^2-\frac{B_2}{2\pi i}ze^z.$$

В силу (5.1.14) эта функция имеет период $2\pi i$. Поэтому для нее, так же как и для функции $g_1(z)$, получаем представление $g_2(z)=C_0+C_1e^z$, где C_0 и C_1 — постоянные. Отсюда следует соотношение

$$g(z)=D_0+D_1z+D_2z^2+D_3e^z+D_4ze^z, \qquad (5.1.15)$$

где D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 — постоянные.

Так как функция $g(z)$ при действительных z действительна, то при действительных, а следовательно, и при комплексных z выполняется равенство

$$g(z)=\operatorname{Re}D_0+(\operatorname{Re}D_1)z+(\operatorname{Re}D_2)z^2+\\+(\operatorname{Re}D_3)e^z+(\operatorname{Re}D_4)ze^z.$$

Другими словами, постоянные в (5.1.15) можно считать действительными. Так как $g(0)=0$, то $D_0=-D_3$.

Отделяя в (5.1.15) действительную часть, имеем

$$u(x,\ y)=D_1x+D_2(x^2-y^2)+D_3(e^x\cos y-1)+\\+D_4e^x(x\cos y-y\sin y).$$

Из леммы 5.1.2 заключаем, что $D_4=0$. Далее, имеем

$$u(x,0)-u(x,y)=D_2y^2+2D_3e^x\sin^2\frac{y}{2}.$$

Подставим это выражение в неравенство (5.1.4). Беря $y=2\pi$, убеждаемся, что $0\leqslant D_2\leqslant\gamma$. Беря $y=\pi$ и устремляя $x\to+\infty$, убеждаемся, что $0\leqslant D_3\leqslant\lambda$. Полагая $\gamma_1=D_2$, $\lambda_1=D_3$, $\beta_1=D_1$, получаем (5.1.3).

Теорема 5.1.1 доказана. Вместе с ней доказаны теоремы 5.1.1′ и 5.1.1″.

§ 2. Некоторые вспомогательные результаты из теории аналитических функций

Этот параграф содержит вспомогательные утверждения, которые будут использованы в § 3, где мы сформулируем и докажем теорему 5.3.1, являющуюся основным результатом этой главы.

Сначала докажем лемму о росте функций, аналитических в полуплоскости, являющуюся следствием теоремы 1.2.1 Фрагмена — Линделефа.

Лемма 5.2.1. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *и удовлетворяет условиям*:

(i) $|f(z)| \leqslant M_1 |z+1|^a$ *при* $\operatorname{Re} z = 0$,

(ii) $|f(z)| \leqslant M_2 e^{bz}(z+1)^c$ *при* $\operatorname{Im} z = 0$,

(iii) $|f(z)| \leqslant M_3 e^{d(\operatorname{Re} z)^2} |z+1|^c$ *при* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$,

где M_1, M_2, M_3 *— положительные, а* a, b, $c \geqslant a$ *и* d *— неотрицательные постоянные.*

Тогда во всей полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant M_1 |z+1|^a e^{b \operatorname{Re} z}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что функция

$$\Theta(z) = (z+1)^{-c} e^{-bz} f(z)$$

ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Условимся полагать $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Пусть z_0 — некоторая точка квадранта $\{x > 0,\ y > 0\}$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы точка z_0 попала в угол D_ε, образованный лучами $l = \{y = 0,\ x \geqslant 0\}$ и $l_\varepsilon = \left\{y = \frac{d}{2\varepsilon} x,\ x \geqslant 0\right\}$. Рассмотрим функцию

$$\Theta_\varepsilon(z) = \Theta(z) \exp(i\varepsilon z^2).$$

Так как

$$|\Theta_\varepsilon(z)| = |\Theta(z)| \exp(-2\varepsilon xy) \leqslant M_3 \exp(dx^2 - 2\varepsilon xy),$$

то на l имеем $|\Theta_\varepsilon(z)| \leqslant M_2$, на l_ε имеем $|\Theta_\varepsilon(z)| \leqslant M_3$, в D_ε имеем $|\Theta_\varepsilon(z)| \leqslant M_3 \exp(d|z|^2)$. Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 1.2.1 ($f(z) = \Theta_\varepsilon(z)$, $D = D_\varepsilon$, $\alpha = \left(\operatorname{arctg} \frac{d}{2\varepsilon}\right)^{-1} \pi > 2$, $M = \max(M_2, M_3)$, в качестве ρ можно взять любое число такое, что $2 < \rho < \alpha$). Поэтому всюду в D_ε

$$|\Theta_\varepsilon(z)| \leqslant \max(M_2, M_3),$$

откуда

$$|\Theta(z_0)| \leqslant \max(M_2, M_3) \exp(2\varepsilon x_0 y_0), \qquad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Устремляя в последнем неравенстве ε к 0, будем иметь

$$|\Theta(z_0)| \leqslant \max(M_2, M_3).$$

Так как z_0 — любая точка квадранта $\{x>0, y>0\}$, то функция $\Theta(z)$ ограничена в замкнутом квадранте $\{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Аналогичным образом ($\Theta_\varepsilon(z)$ нужно ввести соотношением $\Theta_\varepsilon(z) = \Theta(z)\exp(-i\varepsilon z^2)$) доказывается, что функция $\Theta(z)$ ограничена в квадранте $\{x \geqslant 0, y \leqslant 0\}$. Итак, функция $\Theta(z)$ ограничена в полуплоскости $\{x \geqslant 0\}$.

Положим теперь

$$\Theta_1(z) = (z+1)^{-a} e^{-bz} f(z) = (z+1)^{c-a}\Theta(z).$$

На границе полуплоскости $\{x \geqslant 0\}$ мы, очевидно, имеем

$$|\Theta_1(z)| \leqslant M_1, \tag{5.2.1}$$

а во всей полуплоскости

$$\Theta_1(z) = O(|z+1|^{c-a}).$$

Применяя к $\Theta_1(z)$ теорему 1.2.1 ($D = \{x \geqslant 0\}$, $\alpha = 1$, $M = M_1$, $\rho = 1/2$), заключаем, что (5.2.1) справедливо во всей полуплоскости $\{x \geqslant 0\}$, откуда следует доказываемое неравенство.

Далее докажем две леммы, связанные с периодическими целыми функциями.

Л е м м а 5.2.2. *Всякая целая функция $g(z)$, обладающая периодом iT $(T \neq 0)$, представляется в виде*

$$g(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \exp\left\{\frac{2\pi pz}{T}\right\}, \tag{5.2.2}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте.

Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению

$$f(z+iT) - 2f(z) + f(z-iT) = 0, \tag{5.2.3}$$

то она представляется в виде

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (a_p + b_p z)\exp\left\{\frac{2\pi pz}{T}\right\},$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте.

Доказательство. Чтобы получить первое утверждение, рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta)=g\left(\frac{T\ln\zeta}{2\pi}\right).$$

В силу периодичности функции $g(z)$ функция $\Phi(\zeta)$ является однозначной аналитической в области $0<|\zeta|<\infty$ (т. е. в ζ-плоскости с выколотой точкой 0). Разложим ее в этой области в ряд Лорана:

$$\Phi(\zeta)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} d_p\zeta^p.$$

Этот ряд, как известно, сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в $0<|\zeta|<\infty$. Полагая в нем $\zeta=\exp\left(\frac{2\pi z}{T}\right)$, получаем представление (5.2.2).

Пусть теперь функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (5.2.3). Тогда функция

$$f_1(z)=f(z+iT)-f(z) \tag{5.2.4}$$

периодична с периодом iT и, следовательно, представляется в виде

$$f_1(z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p\exp\left(\frac{2\pi pz}{T}\right), \tag{5.2.5}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. Положим

$$f_2(z)=f(z)-\frac{z}{iT}f_1(z).$$

Из равенства (5.2.4) видно, что $f_2(z)$ тоже периодична с периодом iT, поэтому и для нее имеет место представление, аналогичное (5.2.5). Так как $f(z)=f_2(z)+\frac{z}{iT}f_1(z)$, то мы получаем доказываемое представление для $f(z)$.

Лемма 5.2.3. *Пусть целая функция $f(z)$ представляется в виде*

$$f(z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}(a_p+b_pz)\exp\left(\frac{2\pi pz}{T}\right), \tag{5.2.6}$$

где $T > 0$, *а ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте.*

Предположим, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ $(\operatorname{Re} z \leqslant 0)$ *при некотором* $K \geqslant 0$ *выполняется*

$$f(z) = O(\exp\{(K+\varepsilon)\,|z|\}), \qquad z \to \infty, \qquad (5.2.7)$$

где ε *— любое положительное число. Тогда при* $p > \omega$ $(p < -\omega)$, *где* $\omega = [KT/(2\pi)]$, *будем иметь* $a_p = b_p = 0$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда (5.2.7) выполняется при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Сначала будем предполагать, что в представлении (5.2.6) все коэффициенты b_p равны нулю. В этом случае функция $f(z)$ — периодическая с периодом iT, а функция $\Phi(\zeta) = f\left(\frac{T\ln\zeta}{2\pi}\right)$ — однозначная аналитическая в $0 < |\zeta| < \infty$ и представляется рядом Лорана $\Phi(\zeta) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} a_p \zeta^p$, где a_p те же самые, что в (5.2.6). Заметим, что из (5.2.7) вытекает оценка

$$\Phi(\zeta) = O(|\zeta|^{(K+\varepsilon)t/(2\pi)}), \qquad \zeta \to \infty. \qquad (5.2.8)$$

Рассмотрим целую функцию от ζ

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \zeta^p.$$

Так как

$$\Phi_1(\zeta) = \Phi(\zeta) - \sum_{p=-\infty}^{-1} a_p \zeta^p = \Phi(\zeta) + o(1), \qquad \zeta \to \infty,$$

то оценка (5.2.8) сохраняет силу и для функции $\Phi_1(\zeta)$. Применяя теорему 1.2.3, заключаем, что эта функция является полиномом степени не выше ω. Следовательно, $a_p = 0$ при $p > \omega$.

Освободимся от предположения, что все коэффициенты b_p равны нулю. Положим

$$f_1(z) = f(z+iT) - f(z) = iT \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p \exp\left(\frac{2\pi pz}{T}\right).$$

Оценка (5.2.7), очевидно, сохранится и для функции $f_1(z)$. Поэтому в силу только что доказанного имеем $b_p = 0$ при $p > \omega$.

Далее, положим

$$f_2(z)=f(z)-\frac{z}{iT}f_1(z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}a_p\exp\left(\frac{2\pi pz}{T}\right).$$

Так как оценка (5.2.7) сохраняется и для $f_2(z)$, то имеем также и $a_p=0$ при $p>\omega$. Тем самым лемма доказана.

Докажем две леммы об оценке интеграла, фигурирующего в правой части формулы Леви — Хинчина (1.1.4).

Лемма 5.2.4. *Пусть $G(x)$ — неубывающая функция на отрезке $[0, a]$, $a>0$. Тогда интеграл*

$$q(t)=\int_{+0}^{a}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте t-плоскости и, следовательно, функция $q(t)$ является целой. Справедлива оценка

$$q(t)=o\left(|t|^2\left(1+e^{-a\operatorname{Im}t}\right)\right),\qquad t\to\infty. \tag{5.2.9}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы было получено при доказательстве теоремы 2.6.1 (см. стр. 65). Докажем справедливость оценки (5.2.9).

Будем пользоваться равенством

$$e^z=1+z+z^2k(z),$$

где

$$|k(z)|\leqslant 1+e^{\operatorname{Re}z}.$$

Справедливость этого равенства вытекает из соотношения

$$k(z)=z^{-2}(e^z-1-z)=z^{-2}\int_0^z(z-\zeta)e^{\zeta}d\zeta.$$

Мы имеем

$$\left|e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right|=\left|(itx)^2k(itx)+\frac{itx^3}{1+x^2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant|t|^2x^2\left(1+e^{-x\operatorname{Im}t}\right)+\frac{x^3|t|}{1+x^2}\leqslant$$
$$\leqslant 2x^2(1+|t|^2)(1+e^{-x\operatorname{Im}t}). \tag{5.2.10}$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем δ, $0<\delta<a$, таким, чтобы

$$\int_{+0}^{\delta}(1+x^2)\,dG(x)<\varepsilon.$$

Используя (5.2.10), получаем

$$|q(t)| \leqslant \int_{+0}^{\delta} \left| e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right| \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) + \int_{\delta+0}^{a} \left| e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right| \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1+|t|^2) \int_{+0}^{\delta} (1+e^{-x \operatorname{Im} t})(1+x^2)\, dG(x) + \int_{\delta+0}^{a} e^{-x \operatorname{Im} t} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) + \int_{\delta+0}^{a} \left(1 + \frac{|t|\, x}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) \leqslant$$

$$\leqslant 4(1+|t|^2)(1+e^{-\delta \operatorname{Im} t})\varepsilon + (1+e^{-a \operatorname{Im} t}) \int_{\delta}^{a} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) + \left(1 + \frac{1}{2}|t|\right) \int_{\delta}^{a} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x).$$

Тем самым соотношение (5.2.9) доказано.

Л е м м а 5.2.5. *Пусть $G(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, удовлетворяющая при некоторых $K > 0$ и $\alpha > 1$ условию*

$$\int_{y}^{\infty} dG(x) = O(\exp\{-Ky^{\alpha}\}), \quad y \to +\infty.$$

Тогда интеграл

$$q(t) = \int_{+0}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте t-плоскости и, следовательно, функция $q(t)$ является целой. Справедлива оценка

$$q(t) = o\{|t|^2 \exp(N |\operatorname{Im} t|^{\alpha/(\alpha-1)})\}, \qquad t \to \infty,$$

где $N > 0$ — постоянная.

Доказательство. Имеем

$$q(t)=\int_{+0}^{1}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)+$$

$$+\int_{1+0}^{\infty}e^{itx}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)+\int_{1+0}^{\infty}\left(-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)=$$

$$=I_1(t)+I_2(t)+I_3(t).$$

К интегралу $I_1(t)$ применяем лемму 5.2.4. В силу этой леммы он сходится абсолютно и равномерно на любом компакте и допускает оценку

$$I_1(t)=o\{|t|^2(1+e^{-\operatorname{Im}t})\},\qquad t\to\infty. \tag{5.2.11}$$

Интеграл $I_3(t)$, очевидно, тоже сходится и является линейной функцией, поэтому

$$I_3(t)=O(|t|),\qquad t\to\infty. \tag{5.2.12}$$

Рассмотрим интеграл $I_2(t)$. Не уменьшая общности, можем считать, что функция $G(x)$ непостоянна на интервале $(1,\infty)$, иначе $I_2(t)\equiv 0$ и лемма доказана. Пусть $H(x)$ — закон, равный 0 при $x\leqslant 1$ и определяемый при $x>1$ равенством

$$H(x)=c\int_{1+0}^{x}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u),\qquad c=\left(\int_{1+0}^{\infty}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right)^{-1}.$$

Очевидно, $I_2(t)=c^{-1}\varphi(t;H)$. Так как $(x>1)$

$$W_H(x)=1-H(x)+H(-x)=$$

$$=c\int_{x}^{\infty}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\leqslant 2c\int_{x}^{\infty}dG(u)=O(\exp\{-Kx^{\alpha}\}),\quad x\to\infty,$$

то в силу теорем 2.2.2 и 2.4.4 интеграл $I_2(t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте и является целой функцией не выше порядка $\alpha/(\alpha-1)$ и нормального типа. Поэтому

$$|I_2(t)|\leqslant I_2(i\operatorname{Im}t)\leqslant M(|\operatorname{Im}t|,I_2)=$$

$$=O(\exp\{N|\operatorname{Im}t|^{\alpha/(\alpha-1)}\}), \tag{5.2.13}$$

где $N>0$ — постоянная. Из (5.2.11), (5.2.12) и (5.2.13) следует доказываемая оценка.

В заключение докажем такую лемму, ссылка на которую при доказательстве теоремы 5.3.1 заменит леммы, аналогичные леммам 5.1.1—5.1.3 предыдущего параграфа.

Лемма 5.2.6. *Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — целые функции, действительные при действительных z, и пусть*

$$u_j(x, y) = \operatorname{Re} f_j(z) \qquad (x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z;\ j = 1, 2).$$

Предположим, что выполнены условия:

$$\text{(i) } 0 \leqslant u_1(x, 0) - u_1(x, y) \leqslant u_2(x, 0) - u_2(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty,$$

$$\text{(ii) } |f_2(z)| \leqslant A(|x|)\, B(|z|),$$

где $A(s) \geqslant 1$ и $B(s) \geqslant 1$ — неубывающие функции *), $0 \leqslant s < \infty$.

Тогда справедлива оценка

$$|f_1(z)| \leqslant 6\, |z|\, A(|x| + 1)\, B(|z| + 1) + O(|z|^2), \quad z \to \infty.$$

Доказательство. Так как функции $f_j(z)$ действительны при действительных z, то функции $u_j(x, y)$ являются четными по y. Поэтому имеем

$$u_j(x, 0) - u_j(x, y) = -\frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 u_j(x, 0)}{\partial y^2}\, y^2 + o(y^2), \qquad y \to \infty,$$

и из неравенства (i) заключаем, что

$$0 \leqslant -\frac{\partial^2 u_1(x, 0)}{\partial y^2} \leqslant -\frac{\partial^2 u_2(x, 0)}{\partial y^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Поскольку функции $u_j(x, y)$ гармоничны, то отсюда следует неравенство

$$0 \leqslant \frac{\partial^2 u_1(x, 0)}{\partial x^2} \leqslant \frac{\partial^2 u_2(x, 0)}{\partial x^2},$$

интегрируя которое два раза по x, получим

$$O(|x|) \leqslant u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0) + O(|x|), \quad x \to \infty. \tag{5.2.14}$$

Далее, используя неравенства (i) и (ii), будем иметь

$$|u_1(x, y)| \leqslant |u_1(x, 0)| + |u_1(x, 0) - u_1(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant |u_2(x, 0)| + O(|x|) + |u_2(x, 0) - u_2(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\, |f_2(x)| + |f_2(z)| + O(|z|).$$

*) В приложениях леммы функция $B(s)$ будет значительно медленнее растущей, чем $A(s)$.

Учитывая условие (ii), получим

$$|u_1(x, y)| \leqslant 3A(|x|)B(|z|) + O(|z|). \qquad (5.2.15)$$

Чтобы получить оценку функции $f_1(z)$, воспользуемся формулой Шварца. Применяя ее к функции $q(\zeta) = f_1(z+\zeta)$, а затем дифференцируя по ζ и полагая $\zeta = 0$, получим (ср. доказательство леммы 5.1.3)

$$f_1'(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_1(x+\cos\varphi,\ y+\sin\varphi)\, e^{-i\varphi}\, d\varphi$$

$$(x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z).$$

Отсюда и из (5.2.15) следует неравенство

$$|f_1'(z)| \leqslant 6A(|x|+1)B(|z|+1) + O(|z|).$$

Учитывая, что

$$|f_1(z) - f_1(0)| = \left| z\int_0^1 f_1'(zt)\, dt \right| \leqslant |z| \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f_1'(zt)|,$$

получаем доказываемое неравенство.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Теорема 5.3.1. *Пусть F — б. д. закон класса $\mathfrak{L}$, удовлетворяющий следующему условию:*

(A) *для некоторого $K > 0$ справедливо соотношение*

$$\int_{|x|\geqslant y} dG(x) = O(\exp\{-Ky^2\}), \qquad y \to +\infty, \qquad (5.3.1)$$

где $G(x)$ — функция, фигурирующая в представлении х. ф. закона F формулой Леви — Хинчина.

Тогда закон F принадлежит классу I_0.

Следствие. *В условиях теоремы 5.3.1 любая компонента F_1 закона F тоже принадлежит классу $\mathfrak{L}$, и для соответствующей закону F_1 по формуле Леви — Хинчина функции $G_1(x)$ выполняется*

$$\begin{gathered} G_1(b) - G_1(a) \leqslant G(b) - G(a), \\ -\infty < a < b < \infty. \end{gathered} \qquad (5.3.2)$$

Справедливость этого следствия будет установлена попутно при доказательстве теоремы 5.3.1, однако покажем сейчас, как его можно получить прямо из формулировки теоремы.

Пусть закон F удовлетворяет условиям теоремы 5.3.1, а F_1 — компонента для F. Тогда можно найти такую компоненту F_2 закона F, что $F = F_1 * F_2$. По теореме 5.3.1 законы F_1 и F_2 являются б. д. Обозначая соответствующие этим законам по формуле Леви — Хинчина функции через $G_1(x)$ и $G_2(x)$, будем иметь $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$, откуда в силу монотонности $G_2(x)$ следует (5.3.2). Из (5.3.2) видно, что множество точек роста $G_1(x)$ содержится во множестве точек роста $G(x)$. Поэтому пуассонов спектр закона F_1 содержится в пуассоновом спектре закона F и, следовательно, лежит во множестве вида (5.0.1), т. е. $F_1 \in \mathfrak{L}$.

Заметим, что условию (A) удовлетворяют все законы класса $\mathfrak{L}$ с ограниченным пуассоновым спектром. В частности, этому условию удовлетворяют композиции законов Гаусса и Пуассона: их пуассонов спектр состоит не более чем из одной точки. Поэтому теорема 5.3.1 (вместе со следствием) содержит теорему 5.1.1.

Доказательство теоремы 5.3.1, как уже говорилось выше, основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы 5.1.1, и схема его, в общем, такая же, но придется встречаться со значительно большими техническими трудностями.

Как и при доказательстве теоремы 5.1.1, мы с помощью теоремы 3.1.2 сведем дело к исследованию множества хребтовых компонент функции $\varphi(t; F)$. Но сначала нужно показать, что в условиях теоремы 5.3.1 функция $\varphi(t; F)$ является целой.

Для этого положим

$$\psi(t) = i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x), \tag{5.3.3}$$

где β и $G(x)$ отвечают закону F по формуле Леви — Хинчина. Запишем

$$\psi(t) = i\beta t - \frac{1}{2}(G(+0) - G(0))\, t^2 + \\ + \int_{+0}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) +$$

$$+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)=$$

$$=i\beta t-\frac{1}{2}(G(+0)-G(0))\,t^2+I_1(t)+I_2(t).$$

Так как функция $G(x)$ удовлетворяет условию (5.3.1), то к интегралу $I_1(t)$ непосредственно применима лемма 5.2.5 с $\alpha=2$. Поэтому $I_1(t)$ является целой функцией и справедлива оценка

$$I_1(t)=o\left\{|t|^2 e^{N(\operatorname{Im} t)^2}\right\},\qquad t\to\infty \tag{5.3.4}$$

($N>0$ — постоянная). К интегралу $I_2(t)$ лемма 5.2.5 с $\alpha=2$ применима после простой замены переменных, поэтому $I_2(t)$ тоже является целой функцией и оценка (5.3.4) сохраняется и для $I_2(t)$.

Таким образом, мы не только доказали, что функция $\varphi(t;\,F)=\exp\{\psi(t)\}$ является целой функцией без корней, но и получили оценку

$$\psi(t)=O\left(|t|^2 e^{N(\operatorname{Im} t)^2}\right),\qquad t\to\infty,\quad N>0, \tag{5.3.5}$$

которая нам в дальнейшем понадобится.

Пользуясь теперь теоремой 3.1.2, заключаем, что теорема 5.3.1 является следствием такой теоремы, обобщающей теорему 5.1.1'.

Теорема 5.3.1'. *Пусть* $\varphi(t)$ — *целая хребтовая функция вида*

$$\varphi(t)=\exp\left\{i\beta t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\},$$

где $\operatorname{Im}\beta=0$, $G(x)$ — *неубывающая функция с точками роста во множестве вида* (5.0.1), *удовлетворяющая условию* (A). *Множество всех хребтовых компонент функции* $\varphi(t)$ *состоит из функций вида*

$$\varphi_1(t)=\exp\left\{i\beta_1 t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_1(x)\right\},$$

где $\operatorname{Im}\beta_1=0$, *а* $G_1(x)$ — *неубывающая функция, удовлетворяющая условию*

$$G_1(b)-G_1(a)\leqslant G(b)-G(a), \tag{5.3.6}$$

$$-\infty<a<b<\infty.$$

Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 5.1.1′, заключаем, что функция $\varphi_1(t)$ представляется в виде $\varphi_1(t) = \exp\{f(t)\}$, где $f(t)$ — целая функция, действительная на мнимой оси, $f(0) = 0$. Далее, обозначим через $g(z)$ целую функцию $g(z) = f(-iz)$. Эта функция действительна при действительных z, $g(0) = 0$. Нужно показать, что $g(z)$ допускает представление

$$g(z) = \beta_1 z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zx} - 1 - \frac{zx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG_1(x), \quad (5.3.7)$$

где $\operatorname{Im} \beta_1 = 0$, $G_1(x)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая (5.3.6).

Рассматривая действительную часть функции $g(z)$,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} g(x + iy),$$

и пользуясь теоремой 3.1.5 «о сглаживании хребта», но учитывая, что теперь

$$\left|\frac{\varphi(-ix)}{\varphi(y-ix)}\right| = \exp\{\psi(-ix) - \operatorname{Re}\psi(y-ix)\},$$

где $\psi(t)$ — целая функция, определяемая соотношением (5.3.3), приходим к выводу, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, y) \leqslant \psi(-ix) - \operatorname{Re}\psi(y - ix). \quad (5.3.8)$$

Заметим, что это неравенство можно переписать в форме

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, y) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \sin^2 \frac{sy}{2} \cdot \frac{1+s^2}{s^2}\, dG(s), \qquad -\infty < x, y < \infty. \quad (5.3.9)$$

Задача сводится к доказательству такой теоремы, обобщающей теорему 5.1.1″.

Теорема 5.3.1″. *Пусть $g(z)$ — целая функция, $g(0) = 0$, действительная при действительных z. Если действительная часть $u(x, y)$ функции $g(z)$ удовлетворяет неравенству* (5.3.9), *где $G(x)$ — неубывающая функция с точками роста во множестве вида* (5.0.1), *удовлетворяющая условию* (A), *то функция $g(z)$ допускает представление* (5.3.7).

Доказательство этой теоремы, как и доказательство теоремы 5.1.1″, расчленим на ряд лемм.

Следующая лемма аналогична лемме 5.1.3.

Лемма 5.3.1. *Справедлива оценка*

$$g(z) = O\{|z|^3 \exp(N(\operatorname{Re} z)^2)\}, \qquad z \to \infty.$$

Доказательство. Положим

$$f_1(z) = g(z), \quad f_2(z) = \psi(-iz),$$
$$u_1(x, y) = u(x, y), \quad u_2(x, y) = \operatorname{Re}\psi(y - ix).$$

В силу (5.3.8) и (5.3.5) видим, что выполнены условия леммы 5.2.6 с $A(s) = \exp\{Ns^2\}$, $B(s) = N_1(s^2+1)$, где $N_1 > 0$ — постоянная. Применяя лемму 5.2.6, получаем

$$|g(z)| \leqslant 6\,|z| \exp\{N(|x|+1)^2\} \times$$
$$\times N_1\{(|z|+1)^2+1\} + O(|z|^2), \qquad z \to \infty,$$

откуда следует доказываемая оценка.

Прежде чем перейти к дальнейшим леммам, запишем неравенство (5.3.9) в другой форме. Для этого положим

$$\left.\begin{aligned} &2\gamma = G(+0) - G(0),\\ &\lambda_{mr} = \frac{1+\mu_{mr}^2}{\mu_{mr}^2}\{G(\mu_{mr}+0) - G(\mu_{mr})\}\\ &(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ r = 1, 2), \end{aligned}\right\} \tag{5.3.10}$$

где μ_{mr} — точки множества (5.0.1). Тогда неравенство (5.3.9) приобретает вид

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, y) \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{r=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_{mr} e^{\mu_{mr}x} \sin^2\frac{\mu_{mr}y}{2} + \gamma y^2, \tag{5.3.11}$$
$$-\infty < x,\ y < \infty.$$

Заметим, что утверждение теоремы 5.3.1″ будет доказано, если мы установим, что функция $g(z)$ допускает представление

$$g(z) = \beta_1 z + \gamma_1 z^2 + \sum_{r=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_{mr}\left(e^{\mu_{mr}z} - 1 - \frac{\mu_{mr}z}{1+\mu_{mr}^2}\right), \tag{5.3.12}$$

где

$$\operatorname{Im}\beta_1 = 0, \quad 0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma, \quad 0 \leqslant \tilde{\lambda}_{mr} \leqslant \lambda_{mr} \tag{5.3.13}$$
$$(m = 0, \pm 1, \ldots;\ r = 1, 2).$$

Действительно, (5.3.7) получается из (5.3.12), если в качестве $G_1(x)$ возьмем функцию скачков, скачок которой в точке 0 равен $2\gamma_1$, а скачки в точках μ_{mr} равны

$$G_1(\mu_{mr}+0)-G_1(\mu_{mr})=\frac{\widetilde{\lambda}_{mr}\mu_{mr}^2}{1+\mu_{mr}^2}. \tag{5.3.14}$$

При этом из (5.3.10), (5.3.13) и (5.3.14) следует (5.3.2).

Лемма 5.3.2. *Справедливы соотношения*

$$0\leqslant u(x,0)-u(x,2\pi\mu_{s1}^{-1})\leqslant$$
$$\leqslant 2(\lambda_{s-1,1}+o(1))\left(\sin\frac{\pi\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}}\right)^2\exp(\mu_{s-1,1}x) \tag{5.3.15}$$
$$(x\to+\infty,\ s=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

$$0\leqslant u(x,0)-u(x,2\pi\mu_{s2}^{-1})\leqslant$$
$$\leqslant 2(\lambda_{s-1,2}+o(1))\left(\sin\frac{\pi\mu_{s-1,2}}{\mu_{s2}}\right)^2\exp(\mu_{s-1,2}x) \tag{5.3.16}$$
$$(x\to-\infty,\quad s=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Доказательство. Нужно убедиться лишь в справедливости правых сторон соотношений (5.3.15), (5.3.16).

Для доказательства правой стороны (5.3.15) подставим в (5.3.11) $y=2\pi\mu_{s1}^{-1}$. Так как числа μ_{m1}/μ_{s1} при $m\geqslant s$ являются целыми, получим

$$u(x,0)-u(x,2\pi\mu_{s1}^{-1})\leqslant 2\sum_{m=-\infty}^{s-1}\lambda_{m1}e^{\mu_{m1}x}\left(\sin\frac{\pi\mu_{m1}}{\mu_{s1}}\right)^2+$$
$$+2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\lambda_{m2}e^{\mu_{m2}x}\left(\sin\frac{\pi\mu_{m2}}{\mu_{s1}}\right)^2+\gamma\left(\frac{2\pi}{\mu_{s1}}\right)^2. \tag{5.3.17}$$

Заметим, что из (5.3.10) следует сходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_{mr}\mu_{mr}^2}{1+\mu_{mr}^2}. \tag{5.3.18}$$

Поэтому с помощью очевидного неравенства $\sin^2 x \leqslant \leqslant 2x^2(1+x^2)^{-1}$ получаем $(x \geqslant 0)$

$$\sum_{m=-\infty}^{s-2} \lambda_{m1} e^{\mu_{m1} x}\left(\sin\frac{\mu_{m1}\pi}{\mu_{s1}}\right)^2 \leqslant e^{\mu_{s-2,\,1}x} \sum_{m=-\infty}^{s-2} \frac{2\pi^2\lambda_{m1}\mu_{m1}^2}{\mu_{s1}^2+\pi^2\mu_{m1}^2} =$$

$$= e^{\mu_{s-2,\,1}x} O(1) = o\left(e^{\mu_{s-1,\,1}x}\right), \qquad x \to +\infty, \quad (5.3.19)$$

а учитывая еще, что $\mu_{m2} < 0$, получаем $(x \geqslant 0)$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_{m2} e^{\mu_{m2} x}\left(\sin\frac{\mu_{m2}\pi}{\mu_{s1}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^2\lambda_{m2}\mu_{m2}^2}{\mu_{s1}^2+\pi^2\mu_{m2}^2} = O(1), \qquad x \to +\infty. \quad (5.3.20)$$

Из (5.3.17), (5.3.19) и (5.3.20) следует правая сторона (5.3.15).

Правая сторона (5.3.16) доказывается аналогично.

Пусть q — некоторое целое число $(-\infty < q < \infty)$. Положим $(r = 1, 2)$

$$g_{qr}(z) = g(z)\exp(-\mu_{qr} z), \quad (5.3.21)$$

$$u_{qr}(x, y) = \operatorname{Re} g_{qr}(x+iy), \qquad -\infty < x,\ y < \infty.$$

Лемма 5.3.3. *При действительных x справедливы оценки*

$$u_{q1}(x, 0) - u_{q1}(x, 2\pi\mu_{q1}^{-1}) = O(1), \qquad x \to +\infty,$$

$$u_{q2}(x, 0) - u_{q2}(x, 2\pi\mu_{q2}^{-1}) = O(1), \qquad x \to -\infty.$$

Доказательство. Имеем $(r = 1, 2)$

$$u_{qr}(x, 0) - u_{qr}(x, 2\pi\mu_{qr}^{-1}) = g(x)\exp(-\mu_{qr}x) -$$

$$- \operatorname{Re}\{g(x + 2\pi i\mu_{qr}^{-1})\exp(-\mu_{qr}(x + 2\pi i\mu_{qr}^{-1}))\} =$$

$$= \{u(x, 0) - u(x, 2\pi\mu_{qr}^{-1})\}\exp(-\mu_{qr}x),$$

в силу чего доказываемая лемма вытекает из соотношений (5.3.15) и (5.3.16) леммы 5.3.2.

Лемма 5.3.4. *Имеют место соотношения*

$$g_{qr}(z) = g_{qr}^{(+)}(z) + g_{qr}^{(-)}(z) \qquad (r = 1, 2), \quad (5.3.22)$$

где $g_{qr}^{(+)}(z)$ *и* $g_{qr}^{(-)}(z)$ — *целые функции, действительные при действительных* z *и допускающие оценки* ($r = 1, 2$, $z \to \infty$)

$$g_{qr}^{(+)}(z) = \begin{cases} O\{|z|^5 \exp(N(\operatorname{Re} z)^2)\}, & \operatorname{Re} z > 0, \\ O(|z|^5), & \operatorname{Re} z \leqslant 0; \end{cases}$$
$$g_{qr}^{(-)}(z) = \begin{cases} O(|z|^5), & \operatorname{Re} z \geqslant 0, \\ O\{|z|^5 \exp(N(\operatorname{Re} z)^2)\}, & \operatorname{Re} z < 0. \end{cases} \tag{5.3.23}$$

Доказательство. Предварительно заметим, что функция $g_{qr}(z)$ при действительных z действительна и что в силу леммы 5.3.1

$$g_{qr}(z) = O\{|z|^3 \exp(N(\operatorname{Re} z)^2)\}. \tag{5.3.23'}$$

Проинтегрируем по переменной ζ функцию $\dfrac{z^5 g_{qr}(\zeta)}{2\pi i \zeta^5(\zeta - z)}$ вдоль контура прямоугольника с вершинами в точках $a + iH$, $b + iH$, $b - iH$, $a - iH$, где $0 < a < b$, $H > 0$. По теореме Коши интеграл равен $g_{qr}(z)$ или 0, в зависимости от того, лежит ли z внутри или вне прямоугольника. При фиксированных a и b и $H \to +\infty$ интегралы по горизонтальным сторонам прямоугольника стремятся к нулю, так как в силу (5.3.23') при $a < \operatorname{Re} \zeta < b$ имеем $g_{qr}(\zeta) = O(|\zeta|^3)$. Поэтому справедливо соотношение

$$\frac{z^5}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{g_{qr}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^5(\zeta - z)} - \frac{z^5}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{g_{qr}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^5(\zeta - z)} =$$
$$= \begin{cases} g_{qr}(z), & \text{если } a < \operatorname{Re} z < b, \\ 0, & \text{если } \operatorname{Re} z > b \text{ или } \operatorname{Re} z < a. \end{cases} \tag{5.3.24}$$

Определим функцию $g_{qr}^{(+)}(z)$ при $\operatorname{Re} z < 1$ равенством

$$g_{qr}^{(+)}(z) = \frac{z^5}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{g_{qr}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^5(\zeta - z)}.$$

Из (5.3.24) следует, что интеграл, стоящий в правой части этого равенства, не изменится, если его пределы заменить соответственно на $b - i\infty$ и $b + i\infty$, где b — любое число, большее единицы. Поэтому $g_{qr}^{(+)}(z)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} z \geqslant 1$ и является, следовательно, целой функцией от z. Каково бы ни было z, $\operatorname{Re} z > 1$, мы можем, выбрав $b > \operatorname{Re} z$, представить $g_{qr}^{(+)}(z)$ в виде

$$g_{qr}^{(+)}(z)=\frac{z^5}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{g_{qr}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^5(\zeta-z)}\qquad (b>\operatorname{Re} z), \tag{5.3.25}$$

откуда в силу (5.3.24) следует соотношение

$$g_{qr}^{(+)}(z)=\frac{z^5}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{g_{qr}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^5(\zeta-z)}+g_{qr}(z)\qquad (\operatorname{Re} z>1). \tag{5.3.26}$$

Замечая, что при фиксированном $b>0$

$$\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{g_{qr}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^5(\zeta-z)}=O(1),\qquad |\operatorname{Re} z-b|\geqslant 1,$$

из представлений (5.3.25), (5.3.26) и соотношения (5.3.23′) получаем требуемую оценку для $g_{qr}^{(+)}(z)$. То обстоятельство, что функция $g_{qr}^{(+)}(z)$ при действительных z действительна, легко следует из представлений (5.3.25) и (5.3.26). Полагая

$$g_{qr}^{(-)}(z)=g_{qr}(z)-g_{qr}^{(+)}(z),$$

при помощи (5.3.25) и (5.3.26) без труда убеждаемся в справедливости леммы.

При действительных x и y $(r=1, 2)$ положим

$$u_{qr}^{(+)}(x, y)=\operatorname{Re} g_{qr}^{(+)}(x+iy),$$

$$u_{qr}^{(-)}(x, y)=\operatorname{Re} g_{qr}^{(-)}(x+iy).$$

Теперь получим аналог леммы 5.1.4.

Лемма 5.3.5. *Функции $u_{qr}^{(+)}(x, y)$ и $u_{qr}^{(-)}(x, y)$ при каждом фиксированном действительном y аналитически продолжаются по x на всю комплексную x-плоскость. Полученные в результате продолжения целые функции от x (будем обозначать их снова через $u_{qr}^{(+)}(x, y)$ и $u_{qr}^{(-)}(x, y)$) допускают в комплексной x-плоскости оценки* $(r=1, 2,\ x\to\infty)$

$$u_{qr}^{(+)}(x, y)=\begin{cases} O(|x|^5\exp\{N(\operatorname{Re} x)^2\}), & \operatorname{Re} x>0,\\ O(|x|^5), & \operatorname{Re} x\leqslant 0;\end{cases}$$

$$u_{qr}^{(-)}(x, y)=\begin{cases} O(|x|^5), & \operatorname{Re} x\geqslant 0,\\ O(|x|^5\exp\{N(\operatorname{Re} x)^2\}), & \operatorname{Re} x<0.\end{cases}$$

Доказательство. Так как функции $g_{qr}^{(+)}(z)$ и $g_{qr}^{(-)}(z)$ при действительных z действительны, то справедливы формулы

$$\left.\begin{aligned} u_{qr}^{(+)}(x, y) &= \frac{1}{2}\{g_{qr}^{(+)}(x+iy)+g_{qr}^{(+)}(x-iy)\}, \\ u_{qr}^{(-)}(x, y) &= \frac{1}{2}\{g_{qr}^{(-)}(x+iy)+g_{qr}^{(-)}(x-iy)\}. \end{aligned}\right\} \quad (5.3.27)$$

В правых частях этих соотношений стоят целые функции от x. Принимая эти соотношения при комплексных x за определение функций $u_{qr}^{(+)}(x, y)$ и $u_{qr}^{(-)}(x, y)$ и используя оценки леммы 5.3.4, получаем доказываемое утверждение.

Введем в рассмотрение целые функции

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{q1}(x) &= u_{q1}^{(+)}(x, 0)-u_{q1}^{(+)}(x, 2\pi\mu_{q1}^{-1}), \\ \varkappa_{q2}(x) &= u_{q2}^{(-)}(x, 0)-u_{q2}^{(-)}(x, 2\pi\mu_{q2}^{-1}). \end{aligned}\right\} \quad (5.3.28)$$

В силу леммы 5.3.5 справедливы оценки ($x \to \infty$)

$$\begin{gathered} \varkappa_{q1}(x) = \begin{cases} O\{|x|^5 \exp(N(\operatorname{Re} x)^2)\}, & \operatorname{Re} x > 0, \\ O(|x|^5), & \operatorname{Re} x \leqslant 0; \end{cases} \\ \varkappa_{q2}(x) = \begin{cases} O(|x|^5), & \operatorname{Re} x \geqslant 0, \\ O\{|x|^5 \exp(N(\operatorname{Re} x)^2)\}, & \operatorname{Re} x < 0. \end{cases} \end{gathered} \quad (5.3.29)$$

Аналогом леммы 5.1.5 и центральным пунктом в доказательстве теоремы 5.3.1″ является такая лемма.

Лемма 5.3.6. *Функции $\varkappa_{qr}(x)$, $r = 1, 2$, являются полиномами степени не выше* 5.

Доказательство. Вначале заметим, что при действительных $x \to +\infty$

$$\varkappa_{q1}(x) = O(|x|^5). \quad (5.3.30)$$

Действительно, так как

$$u_{qr}(x, y) = u_{qr}^{(+)}(x, y) + u_{qr}^{(-)}(x, y),$$

то имеет место соотношение

$$\varkappa_{q1}(x) = \{u_{q1}(x, 0) - u_{q1}(x, 2\pi\mu_{q1}^{-1})\} - \\ - \{u_{q1}^{(-)}(x, 0) - u_{q1}^{(-)}(x, 2\pi\mu_{q1}^{-1})\}.$$

Используя для оценки величины, стоящей в первых фигурных скобках, лемму 5.3.3, а для оценки величины, стоящей во вторых фигурных скобках, лемму 5.3.5, получаем (5.3.30) при $x \to +\infty$.

Далее, в полуплоскости $\operatorname{Re} x \geqslant 0$ мы имеем

$$\varkappa_{q1}(x) = O\{|x|^5 \exp(N(\operatorname{Re} x)^2)\}.$$

Таким образом, мы находимся в условиях леммы 5.2.1 ($f = \varkappa_{q1}$, $a = c = 5$, $b = 0$, $d = N$). Поэтому оценка (5.3.30) имеет место во всей полуплоскости $\operatorname{Re} x \geqslant 0$. Но так как в силу (5.3.29) она имеет место и при $\operatorname{Re} x \leqslant 0$, то (5.3.30) справедливо во всей x-плоскости.

В силу теоремы 1.2.3 отсюда следует, что $\varkappa_{q1}(x)$ — полином степени не выше 5. Для $\varkappa_{q2}$ рассуждения проводятся аналогично.

Лемма 5.3.7. *Функция $g_{q1}^{(+)}(z)$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению*

$$g_{q1}^{(+)}\left(z+\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right)+g_{q1}^{(+)}\left(z-\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right)-2g_{q1}^{(+)}(z)=P_{q1}(z), \quad (5.3.31)$$

а функция $g_{q2}^{(-)}(z)$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению

$$g_{q2}^{(-)}\left(z+\frac{2\pi i}{\mu_{q2}}\right)+g_{q2}^{(-)}\left(z-\frac{2\pi i}{\mu_{q2}}\right)-2g_{q2}^{(-)}(z)=P_{q2}(z),$$

где $P_{q1}(z)$ и $P_{q2}(z)$ — полиномы степени не выше 5.

Доказательство. Так как в силу (5.3.27), (5.3.28) имеем

$$2\varkappa_{q1}(z)=2g_{q1}^{(+)}(z)-g_{q1}^{(+)}\left(z+\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right)-g_{q1}^{(+)}\left(z-\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right),$$

$$2\varkappa_{q2}(z)=2g_{q2}^{(-)}(z)-g_{q2}^{(-)}\left(z+\frac{2\pi i}{\mu_{q2}}\right)-g_{q2}^{(-)}\left(z-\frac{2\pi i}{\mu_{q2}}\right),$$

то утверждение леммы непосредственно вытекает из леммы 5.3.6.

Лемма 5.3.8. *Справедливы соотношения*

$$\left.\begin{aligned} g_{q1}^{(+)}(z) &= \sum_{p=1}^{\infty}\left(a_{p1}^{(q)}+b_{p1}^{(q)}z\right)\exp(\mu_{q1}pz)+S_{q1}(z), \\ g_{q2}^{(-)}(z) &= \sum_{p=1}^{\infty}\left(a_{p2}^{(q)}+b_{p2}^{(q)}z\right)\exp(\mu_{q2}pz)+S_{q2}(z), \end{aligned}\right\} \quad (5.3.32)$$

где ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте, $a_{pr}^{(q)}$ и $b_{pr}^{(q)}$ — действительные постоянные, $S_{qr}(z)$ — полиномы степени не выше 7 с действительными коэффициентами.

Доказательство. Ограничимся доказательством первого из соотношений (5.3.32), так как второе доказывается аналогично.

Выберем (что, очевидно, возможно) полином $R_{q1}(z)$ степени не выше 7 таким, чтобы выполнялось равенство

$$R_{q1}\left(z+\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right)+R_{q1}\left(z-\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right)-2R_{q1}(z)=P_{q1}(z),$$

где $P_{q1}(z)$ — полином из (5.3.31). Тогда функция

$$f_{q1}(z) = g_{q1}^{(+)}(z) - R_{q1}(z) \tag{5.3.33}$$

будет удовлетворять уравнению

$$f_{q1}\left(z+\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right)+f_{q1}\left(z-\frac{2\pi i}{\mu_{q1}}\right)-2f_{q1}(z)=0.$$

Применяя лемму 5.2.2 ($T=2\pi\mu_{q1}^{-1}$), получим представление

$$f_{q1}(z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}(a_{p1}^{(q)}+b_{p1}^{(q)}z)\exp(\mu_{q1}pz), \tag{5.3.34}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте.

Из (5.3.33) и (5.3.23) следует, что функция $f_{q1}(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ допускает оценку

$$f_{q1}(z) = O(|z|^7), \qquad z\to\infty,$$

и подавно

$$f_{q1}(z) = O(\exp(\varepsilon|z|)), \qquad z\to\infty,$$

для любого $\varepsilon>0$. Применяя к этой функции лемму 5.2.3 ($T=2\pi\mu_{q1}^{-1}$, $K=0$, $\omega=0$), заключаем, что $a_{p1}^{(q)}=b_{p1}^{(q)}=0$ при $p<0$. Таким образом, имеем представление

$$g_{q1}^{(+)}(z)=f_{q1}(z)+R_{q1}(z)=$$
$$=\sum_{p=1}^{\infty}(a_{p1}^{(q)}+b_{p1}^{(q)}z)\exp(\mu_{q1}pz)+\widetilde{S}_{q1}(z),$$

где через $\widetilde{S}_{q1}(z)$ мы обозначили полином $R_{q1}(z)+a_{01}^{(q)}+b_{01}^{(q)}z$.

Так как функция $g_{q1}^{(+)}(z)$ при действительных z действительна, то при действительных z имеем

$$g_{q1}^{(+)}(z)=\sum_{p=1}^{\infty}(\operatorname{Re}a_{p1}^{(q)}+z\operatorname{Re}b_{p1}^{(q)})\exp(\mu_{q1}pz)+\sum_{s=0}^{7}z^s\operatorname{Re}c_{qs}, \tag{5.3.35}$$

где c_{qs} — коэффициенты полинома $\widetilde{S}_{q1}(z)$. Из абсолютной и равномерной сходимости на любом компакте ряда (5.3.34) следует, очевидно, абсолютная и равномерная сходимость на любом компакте ряда в (5.3.35). Поэтому выражение в правой части (5.3.35) является целой функцией от z и из справедливости соотношения (5.3.35) при действительных z следует его справедливость во всей z-плоскости. Обозначая $\operatorname{Re}a_{p1}^{(q)}$, $\operatorname{Re}b_{p1}^{(q)}$ снова через $a_{p1}^{(q)}$, $b_{p1}^{(q)}$ и полагая $S_{q1}(z)=\sum_{s=0}^{7}z^s\operatorname{Re}c_{qs}$, получаем доказываемое соотношение.

Лемма 5.3.9. *Для каждого $q=0, \pm1, \pm2, \ldots$ функция $g(z)$ допускает представление*

$$g(z)=\sum_{r=1}^{2}\sum_{p=2}^{\infty}(a_{pr}^{(q)}+b_{pr}^{(q)}z)\exp(\mu_{qr}pz)+L_q(z),$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, $a_{pr}^{(q)}$ и $b_{pr}^{(q)}$ — действительные постоянные, а $L_q(z)$ — целая функция, действительная при действительных z и допускающая оценку

$$L_q(z)=\begin{cases} O\{|z|^7\exp(\mu_{q1}\operatorname{Re}z)\}, & \operatorname{Re}z\geqslant 0,\\ O\{|z|^7\exp(\mu_{q2}\operatorname{Re}z)\}, & \operatorname{Re}z\leqslant 0.\end{cases} \tag{5.3.36}$$

Доказательство. Положим

$$l_q(z)=g(z)-g_{q1}^{(+)}(z)\,e^{\mu_{q1}z}-g_{q2}^{(-)}(z)\,e^{\mu_{q2}z}.$$

При помощи соотношений (5.3.21) и (5.3.22) получаем следующие два представления для $l_q(z)$:

$$l_q(z)=g_{q1}^{(-)}(z)\,e^{\mu_{q1}z}-g_{q2}^{(-)}(z)\,e^{\mu_{q2}z},$$
$$l_q(z)=g_{q2}^{(+)}(z)\,e^{\mu_{q2}z}-g_{q1}^{(+)}(z)\,e^{\mu_{q1}z}.$$

Из первого представления в силу оценки леммы 5.3.4 имеем

$$l_q(z)=O(|z|^5\exp(\mu_{q1}\operatorname{Re}z)),\quad \operatorname{Re}z\geqslant 0.$$

Аналогично из второго имеем

$$l_q(z) = O(|z|^5 \exp(\mu_{q2} \operatorname{Re} z)), \quad \operatorname{Re} z \leqslant 0.$$

Пользуясь представлениями для $g_{q1}^{(+)}(z)$ и $g_{q2}^{(-)}(z)$ по лемме 5.3.8 и полагая

$$L_q(z) = l_q(z) + S_{q1}(z)\, e^{\mu_{q1} z} + S_{q2}(z)\, e^{\mu_{q2} z}$$

(S_{q1} и S_{q2} — полиномы, фигурирующие в лемме 5.3.8), приходим к доказываемому утверждению.

Лемма 5.3.10. *Существуют не зависящие от q постоянные $\widetilde{\lambda}_{mr}$:*

$$0 \leqslant \widetilde{\lambda}_{mr} \leqslant \lambda_{mr} \tag{5.3.37}$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; r = 1, 2),$$

такие, что для каждого $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ функция $g(z)$ допускает представление

$$g(z) = \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=q+1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_{mr} \exp(\mu_{mr} z) + L_q(z),$$

где $L_q(z)$ — функция, фигурирующая в формулировке леммы 5.3.9, а ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте.

Доказательство. Запишем представление для $g(z)$ по лемме 5.3.9 в форме

$$g(z) = \sum_{r=1}^{2} h_{qr}(z) + L_q(z).$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}_{qr}(x, y) &= h_{qr}(x) - \frac{1}{2}\{h_{qr}(x+iy) + h_{qr}(x-iy)\}, \\ \Lambda_{qr}(x, y) &= L_q(x) - \frac{1}{2}\{L_q(x+iy) + L_q(x-iy)\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.38}$$

Так как

$$h_{q1}(z) = g_{q1}^{(+)}(z)\, e^{\mu_{q1} z} - S_{q1}(z)\, e^{\mu_{q1} z},$$

$$h_{q2}(z) = g_{q2}^{(-)}(z)\, e^{\mu_{q2} z} - S_{q2}(z)\, e^{\mu_{q2} z},$$

то при помощи оценок леммы 5.3.4 получаем, что при каждом фиксированном действительном y функции

$H_{qr}(x, y)$ — целые относительно x и удовлетворяют условиям

$$H_{q1}(x, y) = \begin{cases} O\{|x|^7 \exp(N(\operatorname{Re} x)^2\}, & \operatorname{Re} x > 0, \\ O(|x|^7), \quad \operatorname{Re} x \leqslant 0; \end{cases} \qquad (5.3.39)$$

$$H_{q2}(x, y) = \begin{cases} O(|x|^7), \quad \operatorname{Re} x \geqslant 0, \\ O\{|x|^7 \exp(N(\operatorname{Re} x)^2)\}, & \operatorname{Re} x < 0. \end{cases} \qquad (5.3.40)$$

Из леммы 5.3.9 следует, что при каждом фиксированном действительном y функция $\Lambda_q(x, y)$ — целая относительно x и удовлетворяет оценке

$$\Lambda_q(x, y) = \begin{cases} O\{|x|^7 \exp(\mu_{q1} \operatorname{Re} x)\}, & \operatorname{Re} x \geqslant 0, \\ O\{|x|^7 \exp(\mu_{q2} \operatorname{Re} x)\}, & \operatorname{Re} x \leqslant 0. \end{cases} \qquad (5.3.41)$$

Так как при действительных x и y

$$H_{qr}(x, y) = h_{qr}(x) - \operatorname{Re} h_{qr}(x + iy),$$
$$\Lambda_q(x, y) = L_q(x) - \operatorname{Re} L_q(x + iy),$$

то мы имеем

$$u(x, 0) - u(x, y) = \sum_{r=1}^{2} H_{qr}(x, y) + \Lambda_q(x, y). \qquad (5.3.42)$$

Поэтому из (5.3.15), (5.3.40) и (5.3.41) вытекает, что при действительных $x \to +\infty$

$$\left.\begin{aligned} H_{q1}(x, 2\pi\mu_{q+1,\,1}^{-1}) &= O\{|x|^7 \exp(\mu_{q1} x)\}, \\ H_{q1}(x, 2\pi\mu_{m1}^{-1}) &= O\{\exp(\mu_{m-1,\,1} x)\} \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.43)$$
$$(m = q + 2,\ q + 3,\ \ldots).$$

В силу (5.3.39) и (5.3.43) мы можем к функции $H_{q1}(x, 2\pi\mu_{m1}^{-1})$, $m = q + 1,\ q + 2,\ \ldots$, применить в полуплоскости $\operatorname{Re} x \geqslant 0$ лемму 5.2.1. Поэтому имеет место оценка

$$H_{q1}(x, 2\pi\mu_{m1}^{-1}) = O\{|x|^7 \exp(\mu_{m-1,1} \operatorname{Re} x)\}, \qquad (5.3.44)$$
$$\operatorname{Re} x \geqslant 0.$$

Из (5.3.38) и выражения для $h_{q1}(z)$ вытекает справедливость представления

$$H_{q1}(x, y) = \sum_{p=2}^{\infty} \left\{2(a_{p1}^{(q)} + b_{p1}^{(q)} x)\left(\sin\frac{\mu_{q1} p y}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + b_{p1}^{(q)} y \sin(\mu_{q1} p y)\right\} \exp(\mu_{q1} p x). \qquad (5.3.45)$$

Положим в этом представлении $y = 2\pi\mu_{m1}^{-1}$ ($m = q+1, q+2, \ldots$). Получим ряд такого же вида, как и в лемме 5.2.3 с $T = 2\pi\mu_{q1}^{-1}$,

$$\left.\begin{aligned} a_p &= 2a_{p1}^{(q)}\left(\sin\frac{\mu_{q1}p\pi}{\mu_{m1}}\right)^2 + b_{p1}^{(q)}\frac{2\pi}{\mu_{m1}}\sin\frac{2\mu_{q1}p\pi}{\mu_{m1}}, \\ b_p &= 2b_{p1}^{(q)}\left(\sin\frac{\mu_{q1}p\pi}{\mu_{m1}}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.46)$$

Оценка (5.3.44) позволяет применить лемму 5.2.3 ($K = \mu_{m-1,1}$, $\omega = \mu_{m-1,1}\mu_{q1}^{-1}$) и заключить, что выражения, стоящие в правых частях (5.3.46), равны нулю при $p > \mu_{m-1,1}\mu_{q1}^{-1}$ ($m = q+1, q+2, \ldots$).

Отсюда вытекает, что ($m = q+1, \ldots$)

$$b_{p1}^{(q)} = 0 \quad \text{при} \quad \mu_{m-1,1}\mu_{q1}^{-1} < p < \mu_{m1}\mu_{q1}^{-1}. \qquad (5.3.47)$$

Учитывая это, из (5.3.46) получаем также

$$a_{p1}^{(q)} = 0 \quad \text{при} \quad \mu_{m-1,1}\mu_{q1}^{-1} < p < \mu_{m1}\mu_{q1}^{-1} \qquad (5.3.48)$$
$$(m = q+1, \ldots).$$

Таким образом, числа $a_{p1}^{(q)}$ и $b_{p1}^{(q)}$ могут отличаться от нуля лишь при

$$p \in \{\mu_{q+1,1}\mu_{q1}^{-1}, \ \mu_{q+2,1}\mu_{q1}^{-1}, \ \ldots\}. \qquad (5.3.49)$$

Покажем, что числа $b_{p1}^{(q)}$ равны нулю также и при выполнении (5.3.49). Если бы при некотором $p = \mu_{m-1,1}\mu_{q1}^{-1}$ ($m \geqslant q+2$) мы имели бы $b_{p1}^{(q)} \neq 0$, то из (5.3.45), (5.3.47) и (5.3.48) следовало бы, что при $x \to +\infty$

$$\mathrm{H}_{q1}(x, 2\pi\mu_{m1}^{-1}) = 2b_{p1}^{(q)}x(1+o(1))\left(\sin\frac{\mu_{m-1,1}\pi}{\mu_{m1}}\right)^2 e^{\mu_{m-1,1}x},$$

а это противоречило бы соотношениям (5.3.43). Итак,

$$b_{p1}^{(q)} = 0 \quad \text{при} \quad p = 2, 3, 4, \ldots \qquad (5.3.50)$$

Покажем теперь, что ($m = q+2, q+3, \ldots$)

$$0 \leqslant a_{p1}^{(q)} \leqslant \lambda_{m-1,1} \quad \text{при} \quad p = \mu_{m-1,1}\mu_{q1}^{-1}. \qquad (5.3.51)$$

Если бы при некотором $m \geqslant q+2$ соотношение (5.3.51) не выполнялось, то при этом m мы в силу (5.3.45), (5.3.48) и (5.3.50) имели бы

$$\mathrm{H}_{q1}(x, 2\pi\mu_{m1}^{-1}) = \\ = 2a_{p1}^{(q)}(1+o(1))\left(\sin\frac{\mu_{m-1,1}\pi}{\mu_{m1}}\right)^2 e^{\mu_{m-1,1}x}, \qquad x \to +\infty,$$

что повлекло бы за собой в силу (5.3.41), (5.3.40) и (5.3.42) соотношение

$$u(x,\ 0)-u(x,\ 2\pi\mu_{m1}^{-1})=$$
$$=2a_{p1}^{(q)}(1+o(1))\left(\sin\frac{\mu_{m-1,\,1}\pi}{\mu_{m1}}\right)^2 e^{\mu_{m-1,\,1}x}, \qquad x\to+\infty,$$

противоречащее соотношению (5.3.15) леммы 5.3.2.

Проводя аналогичные рассуждения для функции $H_{q2}(x,\ y)$, получим, что

$$b_{p2}^{(q)}=0 \quad \text{при} \quad p=2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

а числа $a_{p2}^{(q)}$ могут отличаться от нуля лишь при

$$p\in\{\mu_{q+1,2}\mu_{q2}^{-1},\ \mu_{q+2,2}\mu_{q2}^{-1},\ \ldots\},$$

причем

$$0\leqslant a_{p2}^{(q)}\leqslant\lambda_{m-1,2} \quad \text{при} \quad p=\mu_{m-1,2}\mu_{q2}^{-1}$$
$$(m=q+2,\ q+3,\ \ldots).$$

Полагая теперь

$$a_{pr}^{(q)}=\lambda_{mr}^{(q)} \quad \text{при} \quad p=\mu_{mr}\,\mu_{qr}^{-1}$$
$$(r=1,\ 2;\quad m=q+1,\ q+2,\ \ldots),$$

получим для функции $g(z)$ представление

$$g(z)=\sum_{r=1}^{2}\ \sum_{m=q+1}^{\infty}\lambda_{mr}^{(q)}\exp(\mu_{mr}z)+L_q(z), \tag{5.3.52}$$

где

$$0\leqslant\lambda_{mr}^{(q)}\leqslant\lambda_{mr} \qquad (m=q+1,\ q+2,\ \ldots). \tag{5.3.53}$$

Это представление имеет место для каждого $q=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Выберем произвольно два целых числа q_1 и q_2, $q_1<q_2$, и запишем (5.3.52) с $q=q_1$ и $q=q_2$. Вычитая, получим соотношение

$$\sum_{m=q_2+1}^{\infty}\{\lambda_{m1}^{(q_1)}-\lambda_{m1}^{(q_2)}\}\exp(\mu_{m1}z)=$$
$$=-\sum_{m=q_2+1}^{\infty}\{\lambda_{m2}^{(q_1)}-\lambda_{m2}^{(q_2)}\}\exp(\mu_{m2}z)-$$
$$-\sum_{r=1}^{2}\ \sum_{m=q_1+1}^{q_2}\lambda_{mr}^{(q_1)}\exp(\mu_{mr}z)-L_{q_1}(z)+L_{q_2}(z). \tag{5.3.54}$$

Обозначим левую часть этого соотношения через $A(z)$. Из (5.3.53) в силу сходимости ряда $\sum\limits_{m=q_2+1}^{\infty} \lambda_{m1}$, которая следует из сходимости ряда (5.3.18), вытекает, что

$$A(z) = O(1), \qquad z \to \infty, \quad \operatorname{Re} z \leqslant 0.$$

Так как $\mu_{m2} < 0$, то из (5.3.53) и сходимости ряда $\sum\limits_{m=q_2+1}^{\infty} \lambda_{m2}$ в силу оценки (5.3.36) получим, что правая часть (5.3.54) при $z \to \infty$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ есть

$$O(1) + O(\exp(\mu_{q_2 1} \operatorname{Re} z)) + O\{|z|^7 \exp(\mu_{q_1 1} \operatorname{Re} z)\} + \\ + O\{|z|^7 \exp(\mu_{q_2 1} \operatorname{Re} z)\},$$

и, следовательно,

$$A(z) = O\{|z|^7 \exp(\mu_{q_2 1} \operatorname{Re} z)\}, \ z \to \infty, \ \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Применим к функции $A(z)$ лемму 5.2.3 ($K = \mu_{q_2 1}$; $a_p = 0$ при $p \,\overline{\in}\, \{\mu_{m1}\mu_{q_2 1}^{-1}\}_{m=q_2+1}^{\infty}$; $a_p = \lambda_{m1}^{(q_1)} - \lambda_{m1}^{(q_2)}$ при $p = \mu_{m1}\mu_{q_2 1}^{-1}$, $m = q_2+1, q_2+2, \ldots$; $b_p = 0$ при $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $T = 2\pi\mu_{q_2 1}^{-1}$; $\omega = 1$), получим, что

$$\lambda_{m1}^{(q_1)} - \lambda_{m1}^{(q_2)} = 0 \qquad (m = q_2+1, q_2+2, \ldots).$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\lambda_{m2}^{(q_1)} - \lambda_{m2}^{(q_2)} = 0 \qquad (m = q_2+1, q_2+2, \ldots).$$

Тем самым установлено, что в представлении (5.3.52) числа $\lambda_{mr}^{(q)}$ не зависят от q. Обозначая эти числа просто через $\widetilde{\lambda}_{mr}$, получаем доказываемое утверждение.

Завершим теперь доказательство теоремы 5.3.1″. Нам достаточно установить, что функция $g(z)$ допускает представление (5.3.12).

Положим

$$\widetilde{\psi}(z) = \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widetilde{\lambda}_{mr} \left(e^{\mu_{mr} z} - 1 - \frac{\mu_{mr} z}{1+\mu_{mr}^2}\right).$$

Эту функцию можно записать в виде

$$\widetilde{\psi}(z)=\Big(\int\limits_{+\infty}^{-0}+\int\limits_{+0}^{\infty}\Big)\Big(e^{zx}-1-\frac{zx}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_1(x), \qquad (5.3.55)$$

где $G_1(x)$ — неубывающая функция, растущая только на множестве (5.0.1), скачки которой в точках μ_{mr} равны $\widetilde{\lambda}_{mr}\mu_{mr}^2(1+\mu_{mr}^2)^{-1}$. Так как $0\leqslant\widetilde{\lambda}_{mr}\leqslant\lambda_{mr}$, то имеем

$$\int\limits_{|x|\geqslant y} dG_1(x)\leqslant\int\limits_{|x|\geqslant y} dG(x)=O(\exp\{-Ky^2\}), \qquad y\to+\infty.$$

Поэтому, применяя лемму 5.2.5 с $\alpha=2$, для функции $\widetilde{\psi}(z)$ получаем оценку

$$\widetilde{\psi}(z)=o(|z|^2\exp\{N(\operatorname{Re} z)^2\}), \qquad z\to\infty. \qquad (5.3.56)$$

Рассмотрим функцию $L(z)=g(z)-\widetilde{\psi}(z)$. Теорема 5.3.1″ будет доказана, если мы установим, что эта функция имеет вид $L(z)=\gamma_1 z^2+\beta_1 z$, где β_1 действительно, а $\gamma_1\geqslant 0$. Покажем сначала, что функция $L(z)$ — полином степени не выше 3.

Из леммы 5.3.1 и оценки (5.3.56) следует, что существует постоянная $A>0$ такая, что

$$|L(z)|\leqslant A\,|z\pm 1|^3 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z=0. \qquad (5.3.57)$$

В силу леммы 5.3.10 функция $L(z)$ при любом $q=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ допускает представление

$$L(z)=\sum_{r=1}^{2}\sum_{m=q+1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_{mr}\Big(1+\frac{\mu_{mr}z}{1+\mu_{mr}^2}\Big)-$$
$$-\sum_{r=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{q}\widetilde{\lambda}_{mr}\Big(e^{\mu_{mr}z}-1-\frac{\mu_{mr}z}{1+\mu_{mr}^2}\Big)+L_q(z)=$$
$$=\Sigma_1(z)-\Sigma_2(z)+L_q(z).$$

Очевидно, $\Sigma_1(z)$ — линейная функция от z, следовательно,

$$\Sigma_1(z)=O(|z|), \qquad z\to\infty.$$

Функцию $\Sigma_2(z)$ можно записать в виде

$$\Sigma_2(z)=\Big(\int\limits_{\mu_{q2}}^{-0}+\int\limits_{+0}^{\mu_{q1}+0}\Big)\Big(e^{zx}-1-\frac{zx}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_1(x),$$

где $G_1(x)$ — та же самая функция, что и в (5.3.55). Применяя лемму 5.2.4, получаем оценку

$$\Sigma_2(z) = o\left(|z|^2 (1 + \exp\{\mu_{q2} \operatorname{Re} z\})\right) + \\ + o\left(|z|^2 (1 + \exp\{\mu_{q1} \operatorname{Re} z\})\right).$$

Учитывая оценку для функции $L_q(z)$, получаем ($z \to \infty$)

$$L(z) = \begin{cases} O\{|z|^7 \exp(\mu_{q1} \operatorname{Re} z)\}, & \operatorname{Re} z \geqslant 0, \\ O\{|z|^7 \exp(\mu_{q2} \operatorname{Re} z)\}, & \operatorname{Re} z \leqslant 0. \end{cases}$$

Применим к функции $L(z)$ лемму 5.2.1 ($M_1 = A$, $a = 3$, $c = 7$, $b = d = \mu_{q1}$). Получим оценку

$$|L(z)| \leqslant A\, |z + 1|^3 \exp(\mu_{q1} \operatorname{Re} z), \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

где A — та же самая постоянная, что и в (5.3.57). Применяя лемму 5.2.1 к функции $L(-z)$ ($M_1 = A$, $a = 3$, $c = 7$, $b = d = -\mu_{q2}$), получим оценку

$$|L(z)| \leqslant A\, |z - 1|^3 \exp(\mu_{q2} \operatorname{Re} z), \qquad \operatorname{Re} z \leqslant 0.$$

В этих оценках для функции $L(z)$ постоянная A не зависит от q, а q мы можем брать любым из чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Устремляя q к $-\infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{q \to -\infty} \mu_{qr} = 0$, приходим к оценке

$$|L(z)| \leqslant A\, (|z| + 1)^3,$$

имеющей место во всей z-плоскости. Отсюда следует в силу теоремы 1.2.3, что $L(z)$ — полином степени не выше 3.

Так как $L(0) = g(0) - \widetilde{\psi}(0) = 0$ и при действительных z функция $L(z)$ действительна, то

$$L(z) = \delta_1 z^3 + \gamma_1 z^2 + \beta_1 z,$$

где δ_1, γ_1, β_1 — действительные постоянные. Мы имеем (x и y действительны)

$$u(x, 0) - u(x, y) = \\ = \widetilde{\psi}(x) - \operatorname{Re} \widetilde{\psi}(x + iy) + 3\delta_1 x y^2 + \gamma_1 y^2.$$

Если бы не было выполнено хотя бы одно из соотношений $\delta_1 = 0$, $\gamma_1 \geqslant 0$, то можно было бы выбрать x таким, чтобы $3\delta_1 x + \gamma_1 < 0$. Фиксируя после этого x, мы получили бы в силу (5.3.56), что при $y \to \infty$

$$u(x, 0) - u(x, y) = o(y^2) + (3\delta_1 x + \gamma_1)\, y^2 \to -\infty.$$

Это соотношение противоречит левой стороне соотношения (5.3.8).

Итак,

$$g(z)=\beta_1 z+\gamma_1 z^2+\sum_{r=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widetilde{\lambda}_{mr}\left(e^{\mu_{mr}z}-1-\frac{\mu_{mr}z}{1+\mu_{mr}^2}\right),$$

что и доказывает теорему 5.3.1″. Вместе с тем доказаны теоремы 5.3.1′ и 5.3.1.

§ 4. Решетчатые законы класса $\mathfrak{L}$

Возникает вопрос, является ли условие (A) в теореме 5.3.1 необходимым. В § 5 мы покажем, что класс $\mathfrak{L}/I_0$ непуст и, следовательно, условие (A) нельзя просто отбросить. Однако возможно, что его можно заменить менее ограничительным условием. Мы сейчас подтвердим это предположение в случае решетчатых законов.

Теорема 5.4.1. *Пусть F — решетчатый закон с шагом $\xi>0$, принадлежащий классу $\mathfrak{L}$ и удовлетворяющий следующему условию:*

(A′) *справедливо соотношение*

$$\int\limits_{|x|>y} dG(x)=o\left(\exp\left\{-2\frac{y}{\xi}\ln\frac{y}{\xi}\right\}\right),\qquad y\to+\infty, \tag{5.4.1}$$

где $G(x)$ — функция, фигурирующая в представлении х. ф. закона F формулой Леви — Хинчина.

Тогда закон F принадлежит классу I_0.

Из этой теоремы, рассуждая так же, как в начале § 3, можно получить следствие, аналогичное следствию из теоремы 5.3.1.

Доказательство теоремы 5.4.1 существенно опирается на то обстоятельство, что все компоненты решетчатого закона решетчаты (теорема 1.1.7).

Докажем сначала две леммы.

Лемма 5.4.1. *Пусть $f(z)$ — целая функция, представимая абсолютно сходящимся рядом*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{nz}.$$

Если в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *выполняется*

$$|f(z)| \leqslant \exp\{o(e^{|z|/2})\}, \qquad z \to \infty,$$

а на луче $z > 0$ *выполняется*

$$f(z) = O(e^{\sigma z}), \qquad z \to \infty,$$

то при $n > \sigma$ *имеем* $c_n = 0$.

Доказательство. Полагая

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{nz}, \quad f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{nz},$$

будем иметь при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $z \to \infty$

$$f_2(z) = O(1), \quad f_1(z) = f(z) - f_2(z) = f(z) + O(1).$$

Поэтому

$$|f_1(z)| \leqslant \exp\{o(e^{|z|/2})\}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \quad z \to \infty,$$

$$f_1(z) = O(e^{\sigma z}), \qquad z > 0, \quad z \to +\infty.$$

Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n.$$

Эта функция — целая и удовлетворяет условиям

$$|g(\zeta)| \leqslant \exp\{o(|\zeta|^{1/2})\}, \qquad \zeta \to \infty,$$

$$g(\zeta) = O(\zeta^{\sigma}), \qquad \zeta > 0, \quad \zeta \to +\infty.$$

Положим $h(w) = g(w^2)(w+i)^{-2\sigma}$. Функция $h(w)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ и допускает там оценку

$$|h(w)| \leqslant \exp\{o(|w|)\}, \qquad w \to \infty,$$

а на действительной w-оси выполняется

$$h(w) = O(1).$$

Применяя теорему 1.2.2, заключаем, что $h(w) = O(1)$ при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ и, следовательно, $g(w^2) = O(|w|^{2\sigma})$ при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, $w \to \infty$. Когда w пробегает полуплоскость $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, то w^2 пробегает всю плоскость. Поэтому, применяя теорему 1.2.3, получим, что $g(w^2)$ — полином степени не выше 2σ, откуда следует, что $g(\zeta)$ — полином степени не выше σ, и, значит, $c_n = 0$ при $n > \sigma$.

Лемма 5.4.2. *Пусть* $\varphi(t)$ — *функция, непрерывная на оси* $-\infty < t < \infty$, *не обращающаяся в нуль и периодическая с периодом* 2π, $\varphi(0) = 1$. *Тогда справедливо представление*

$$\ln \varphi(t) = ict + h(t), \qquad -\infty < t < \infty,$$

где $\ln \varphi(t)$ — *та ветвь логарифма, для которой* $\ln \varphi(0) = 0$, c — *целочисленная постоянная*, $h(t)$ — *непрерывная функция, периодическая с периодом* 2π, $h(0) = 0$.

Доказательство. Пусть $\arg \varphi(t)$ — та ветвь аргумента $\varphi(t)$, которая обращается в нуль при $t = 0$. В силу периодичности функции $\varphi(t)$ имеем

$$\arg \varphi(t + 2\pi) - \arg \varphi(t) = 2\pi c(t),$$

где $c(t)$ принимает только целые значения. Так как $c(t)$ — непрерывная функция от t, то $c(t) \equiv c = \text{const}$. Рассматривая функцию $\arg \varphi(t) - ct$, убеждаемся, что она имеет период 2π. Поэтому и функция

$$h(t) = \ln |\varphi(t)| + i(\arg \varphi(t) - ct)$$

имеет период 2π. Отсюда следует утверждение леммы.

Приступим к доказательству теоремы 5.4.1. Очевидно, ее достаточно доказать для случая, когда закон F является целочисленным. При этом можно исследовать (см. § 1 гл. I) только целочисленные компоненты F_1 закона F.

В силу теоремы 1.1.11 пуассонов спектр целочисленного б. д. закона лежит во множестве целых чисел. Так как закон F принадлежит классу $\mathfrak{L}$, то заключаем, что его пуассонов спектр содержится во множестве вида $\{\nu_{m1}\}_{m=1}^{\infty} \cup \{\nu_{m2}\}_{m=1}^{\infty}$, где $\nu_{m1} > 0$ и $\nu_{m2} < 0$ — целые числа такие, что отношения $\nu_{m+1,r}/\nu_{mr}$ ($m = 1, 2, \ldots$; $r = 1, 2$) являются натуральными, отличными от единицы. Полагая

$$\lambda_{mr} = \frac{1+\nu_{mr}^2}{\nu_{mr}^2}[G(\nu_{mr}+0) - G(\nu_{mr})],$$

формулу Леви—Хинчина для $\varphi(t; F)$ можем записать в виде

$$\varphi(t; F) = \exp\left\{i\beta t + \sum_{r=1}^{2}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mr}(e^{i\nu_{mr}t} - 1)\right\},$$

где $\operatorname{Im}\beta = 0$, $\lambda_{mr} \geqslant 0$, причем из условия (A′) теоремы 5.4.1 следует, что

$$\lambda_{mr} = o(\exp\{-2\,|\nu_{mr}|\ln|\nu_{mr}|\}),\quad m\to+\infty,\quad r=1,\ 2. \tag{5.4.2}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = i\beta t + \sum_{r=1}^{2}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{mr}(e^{i\nu_{mr}t}-1).$$

Из условия (5.4.2) и теоремы 1.2.11 следует, что функции

$$f_r(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{mr}z^{|\nu_{mr}|},\qquad r=1,2,$$

являются целыми и допускают оценку

$$|f_r(z)| \leqslant \exp\{o(|z|^{1/2})\},\qquad z\to\infty,\quad r=1,\ 2.$$

Поэтому функция $\psi(t)$ является целой, а $\varphi(t;\ F) = \exp\{\psi(t)\}$ — целой без корней и выполняется

$$|\psi(t)| \leqslant \exp\{o(e^{|t|/2})\},\qquad t\to\infty. \tag{5.4.3}$$

Пусть теперь F_1 — целочисленная компонента закона F. По теореме 3.1.1 х. ф. $\varphi(t;\ F_1)$ — целая функция, причем она не имеет корней, так как $\varphi(t;\ F)$ их не имеет. Поэтому в силу следствия 2 из теоремы 2.3.2 $\varphi(t;\ F_1) = \exp\{f(t)\}$, где $f(t)$ — целая функция, действительная на мнимой t-оси, и $f(0) = 0$.

В силу целочисленности закона F_1 х. ф. $\varphi(t;\ F_1)$ периодична с периодом 2π. Применяя лемму 5.4.2, получаем, что функция $f(t)$ представляется в виде

$$f(t) = ict + h(t), \tag{5.4.4}$$

где c — целое число, $h(t)$ — функция с периодом 2π, $h(0) = 0$. Из равенства (5.4.4) следует, что функция $h(t)$ является целой и действительной на мнимой t-оси. Теорема 5.4.1 будет доказана, если мы установим, что имеет место представление

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2}\sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_{mr}(e^{i\nu_{mr}t}-1), \tag{5.4.5}$$

где $\widetilde{\lambda}_{mr}$ — постоянные, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant \widetilde{\lambda}_{mr} \leqslant \lambda_{mr}$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots;\ r = 1,\ 2)$.

Положим $g(z) = h(-iz)$. Функция $g(z)$ — целая, периодическая с периодом $2\pi i$, действительная при действительных z и $g(0) = 0$. Введем функцию $u(x, y) = \operatorname{Re} g(x + iy)$ (x и y действительны). Как и при доказательстве теоремы 5.3.1, для функции $u(x, y)$ получаем неравенство

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, y) \leqslant \psi(-ix) - \operatorname{Re}\psi(y - ix) = \\ = 2 \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mr} e^{\nu_{mr} x} \left(\sin \frac{\nu_{mr} y}{2}\right)^2, \qquad -\infty < x, y < \infty, \tag{5.4.6}$$

откуда получаем

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant u(x, 0) - u(x, 2\pi\nu_{m1}^{-1}) \leqslant \\ &\quad \leqslant 2\lambda_{m-1,\,1} e^{\nu_{m-1,\,1} x} \left(\sin \frac{\pi\nu_{m-1,\,1}}{\nu_{m1}}\right)^2 + o\left(e^{\nu_{m-1,\,1} x}\right) \\ &\quad (x \to +\infty;\ m = 1, 2, \ldots;\ \lambda_{01} = \nu_{01} = 0), \\ &0 \leqslant u(x, 0) - u(x, 2\pi\nu_{m2}^{-1}) \leqslant \\ &\quad \leqslant 2\lambda_{m-1,\,2} e^{\nu_{m-1,\,2} x} \left(\sin \frac{\pi\nu_{m-1,\,2}}{\nu_{m2}}\right)^2 + o\left(e^{\nu_{m-1,2} x}\right) \\ &\quad (x \to -\infty;\ m = 1, 2, \ldots;\ \lambda_{02} = \nu_{02} = 0). \end{aligned}\right\} \tag{5.4.7}$$

Функцию $u(x, y)$ с помощью соотношения

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\{g(x + iy) + g(x - iy)\}$$

можно аналитически продолжить на комплексную x-плоскость. Из (5.4.3) и (5.4.6) в силу леммы 5.2.6 получаем

$$|g(z)| \leqslant \exp\{o(e^{|z|/2})\}, \qquad z \to \infty.$$

Поэтому функция $u(x, y)$ при каждом фиксированном действительном y во всей комплексной x-плоскости допускает оценку

$$|u(x, y)| \leqslant \exp\{o(e^{|x|/2})\}, \qquad x \to \infty. \tag{5.4.8}$$

Так как функция $g(z)$ периодична с периодом $2\pi i$, то в силу первого утверждения леммы 5.2.2 для нее имеем представление

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{nz}, \tag{5.4.9}$$

в котором ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. Из того, что функция $g(z)$ действительна при действительных z, следует, что коэффициенты a_n можно считать действительными (ср. аналогичное замечание в конце доказательства леммы 5.3.8). Из (5.4.9) следует, что

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{nx} \cos ny. \tag{5.4.10}$$

Положим

$$\varkappa_{m1}(x) = u(x, 0) - u(x, 2\pi\nu_{m1}^{-1}), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Функция $\varkappa_{m1}(x)$ — целая и в силу (5.4.8) допускает во всей x-плоскости оценку

$$|\varkappa_{m1}(x)| \leqslant \exp\{o(e^{|x|/2})\}, \qquad x \to \infty.$$

Из (5.4.10) получаем представление

$$\varkappa_{m1}(x) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\sin\frac{n\pi}{\nu_{m1}}\right)^2 e^{nx}. \tag{5.4.11}$$

Кроме того, в силу (5.4.7) на луче $x>0$ выполняется

$$0 \leqslant \varkappa_{m1}(x) \leqslant 2\lambda_{m-1,1}\left(\sin\frac{\pi\nu_{m-1,1}}{\nu_{m1}}\right)^2 e^{\nu_{m-1,1}x} + o(e^{\nu_{m-1,1}x}),$$
$$x \to +\infty. \tag{5.4.12}$$

Таким образом, мы находимся в условиях леммы 5.4.1 (с $\sigma = \nu_{m-1,1}$). С помощью леммы заключаем, что при $n > \nu_{m-1,1}$ выполняется

$$a_n\left(\sin\frac{n\pi}{\nu_{m1}}\right)^2 = 0.$$

Так как $\sin(n\pi/\nu_{m1}) \neq 0$ при $\nu_{m-1,1} < n < \nu_{m1}$, $m = 1, 2, \ldots$, то приходим к выводу, что коэффициенты a_n с $n > 0$ могут отличаться от нуля лишь при $n = \nu_{11}$, ν_{21}, ν_{31}, ... Учитывая это, из (5.4.11) получаем, что при действительных $x \to +\infty$ выполняется

$$\varkappa_{m1}(x) = 2a_{\nu_{m-1,1}}\left(\sin\frac{\pi\nu_{m-1,1}}{\nu_{m1}}\right)^2 e^{\nu_{m-1,1}x} + o(e^{\nu_{m-1,1}x}).$$

Сравнение этого соотношения с (5.4.12) показывает, что

$$0 \leqslant a_{\nu_{m1}} \leqslant \lambda_{m1} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Рассматривая аналогичным образом функцию

$$\varkappa_{m2}(x) = u(x, 0) - u(x, 2\pi\nu_{m2}^{-1}) \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

убеждаемся, что коэффициенты a_n с $n < 0$ могут отличаться от нуля лишь при $n = \nu_{12}, \nu_{22}, \nu_{32}, \ldots$, причем $0 \leqslant a_{\nu_{m2}} \leqslant \lambda_{m2}$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Положим теперь $\widetilde{\lambda}_{mr} = a_{\nu_{mr}}$ $(m = 1, 2, \ldots; r = 1, 2)$. Тогда имеем

$$0 \leqslant \widetilde{\lambda}_{mr} \leqslant \lambda_{mr} \qquad (m = 1, 2, \ldots; r = 1, 2)$$

и представление (5.4.9) для функции $g(z)$ приобретает вид

$$g(z) = \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_{mr} e^{\nu_{mr} z} + a_0.$$

Учитывая, что $g(0) = 0$, получаем равенство

$$g(z) = \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_{mr} (e^{\nu_{mr} z} - 1),$$

откуда для функции $h(t) = g(it)$ следует представление (5.4.5). Теорема доказана.

§ 5. Пример закона, принадлежащего $\mathfrak{L} \setminus I_0$

Докажем, что закон F, х. ф. которого дается формулой

$$\varphi(t; F) = \exp\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^k} (e^{2^k it} - 1) \right\}, \tag{5.5.1}$$

принадлежит $\mathfrak{L} \setminus I_0$. То, что этот закон принадлежит $\mathfrak{L}$, очевидно. Чтобы доказать, что он не принадлежит I_0, положим

$$\varphi_1(t) = \exp\{a e^{-3} (e^{3it} - 1)\}, \qquad 0 < a < (2/3)^3,$$

$$\varphi_2(t) = \exp\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^k} (e^{2^k it} - 1) - a e^{-3} (e^{3it} - 1) \right\}.$$

Очевидно, что $\varphi_1(t)$ является х. ф. (закона Пуассона) и $\varphi(t; F) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$. Покажем, что $\varphi_2(t)$ — х. ф. закона, не являющегося б. д. Тем самым и будет установлено, что $F \,\overline{\in}\, I_0$.

Будем опираться на следующую лемму, доказательство которой приведем в конце параграфа.

Лемма 5.5.1. *Положим*

$$g(z)=\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}-az^3\right\}=\sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m. \tag{5.5.2}$$

Если $0<a<(2/3)^3$, *то все коэффициенты* A_m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ *положительны.*

Сохраняя за A_m тот же смысл, что и в (5.5.2), имеем

$$\varphi_2(t)=B\sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{-m}e^{imt},$$

где

$$B=\exp\left\{-\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^k}+ae^{-3}\right\}.$$

В силу леммы 5.5.1 коэффициенты A_m положительны. Так как $\varphi_2(0)=1$, то $B\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m e^{-m}=1$. Поэтому функция $\varphi_2(t)$ является х. ф. некоторого закона, а именно целочисленного закона $H(x)$ такого, что

$$H(m+0)-H(m)=0, \qquad m<0,$$
$$H(m+0)-H(m)=BA_m e^{-m}, \qquad m\geqslant 0.$$

Покажем, что закон $H(x)$ не является б. д. Для этого запишем функцию $\varphi_2(t)$ в виде

$$\varphi_2(t)=\exp\left\{i\beta t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\widetilde{G}(x)\right\}, \tag{5.5.3}$$

полагая

$$\beta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{1+2^{2k}}e^{-2^k}-0{,}3ae^{-3}$$

и беря в качестве $\widetilde{G}(x)$ функцию скачков, имеющую скачки в точках $x=2^k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$:

$$\widetilde{G}(2^k+0)-\widetilde{G}(2^k)=e^{-2^k}\frac{2^{2k}}{1+2^{2k}}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и в точке $x = 3$:

$$\widetilde{G}(3+0) - \widetilde{G}(3) = -0{,}9ae^{-3}.$$

По теореме 1.1.10, если некоторую функцию $\varphi_2(t)$ можно представить в форме (5.5.3), где β — действительное число, а $\widetilde{G}(x)$ — функция ограниченной вариации на оси $-\infty < x < \infty$, $\widetilde{G}(-\infty) = 0$, то такое представление единственно. Поэтому, если бы закон $H(x)$ был б. д., то в силу теоремы Леви — Хинчина функция $\widetilde{G}(x)$ в (5.5.3) была бы неубывающей. Таким образом, $\varphi_2(t)$ — х. ф. закона, не являющегося б. д., и, следовательно, $F \in \mathfrak{L} \setminus I_0$.

Замечание 1. Записывая х. ф. (5.5.1) закона F формулой Леви — Хинчина, видим, что для соответствующей функции $G(x)$ выполняется

$$\int\limits_{|x|>y} dG(x) = \sum_{2^k>y} e^{-2^k} = O(\exp(-y)), \qquad y \to +\infty.$$

Поскольку закон F целочисленный, то приходим к выводу, что в условии (A′) теоремы 5.4.1 правую часть (5.4.1) нельзя заменить на $O(\exp(-y/\xi))$.

Замечание 2. Законы F_n, $n = 1, 2, \ldots$, с х. ф.

$$\varphi(t;\ F_n) = \exp\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{-2^k}(e^{2^k it} - 1)\right\}$$

принадлежат классу I_0 в силу теоремы 5.4.1 (или также 5.3.1). Так как законы F_n при $n \to \infty$ слабо сходятся к закону F, то мы заключаем, что класс I_0 не замкнут относительно слабой сходимости.

Класс, состоящий из б. д. законов, не принадлежащих I_0, тоже не замкнут относительно слабой сходимости. Действительно, рассмотрим последовательность законов F_n, $n = 1, 2, \ldots$, с х. ф.

$$\varphi(t;\ F_n) = \exp\left\{-t^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{h}(e^{ijt} - 1)\right\}, \qquad h \geqslant 2.$$

Эти законы слабо сходятся к закону Гаусса ($\in I_0$), но сами не принадлежат I_0 в силу теоремы 4.1.1.

Доказательство леммы 5.5.1. Сначала докажем такое утверждение. Пусть

$$f(z)=\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Тогда $a_0=1$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{2}{3}\qquad (n=0,1,\ldots). \tag{5.5.4}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $a_0=a_1=1$, поэтому (5.5.4) выполняется при $n=0$. Далее применим индукцию по n. Для этого нам понадобятся рекуррентные формулы $(k=0,1,2,\ldots)$

$$\left.\begin{aligned} a_{2k}&=a_k+\frac{a_{k-1}}{2!}+\frac{a_{k-2}}{4!}+\ldots+\frac{a_0}{(2k)!},\\ a_{2k+1}&=a_k+\frac{a_{k-1}}{3!}+\frac{a_{k-2}}{5!}+\ldots+\frac{a_0}{(2k+1)!}.\end{aligned}\right\} \tag{5.5.5}$$

Эти формулы легко получаются, если заметить, что

$$f(z)=e^z f(z^2),$$

и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z в тождестве

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} a_q z^{2q}\right).$$

Предположим, что (5.5.4) выполняется при $n<N$, и будем доказывать, что тогда оно выполняется и при $n=N$.

Рассмотрим сначала случай, когда N — четное, $N=2k$, $k\geqslant 1$. Из (5.5.5), используя предположение индукции, получаем

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}=\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{3!}+\ldots+\frac{a_0}{(2k+1)!}}{a_k+\frac{a_{k-1}}{2!}+\ldots+\frac{a_0}{(2k)!}}>$$

$$>\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{6}}{a_k+\frac{a_{k-1}}{2}\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots\right)}>$$

$$>\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{6}}{a_k+\frac{a_{k-1}}{2}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots\right)}=\frac{a_k+\frac{1}{6}a_{k-1}}{a_k+\frac{4}{7}a_{k-1}}.$$

Так как функция $\left(a_k+\frac{1}{6}x\right)\Big/\left(a_k+\frac{4}{7}x\right)$ убывает с возрастанием x, а в силу предположения индукции имеем $a_{k-1}<\frac{3}{2}a_k$, то заключаем, что

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}>\frac{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{35}{52}>\frac{2}{3}.$$

Пусть теперь N — нечетное, $N=2k+1$, $k\geqslant 0$. Из (5.5.5), используя предположение индукции, получаем

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}=\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\frac{a_{k+1}+\frac{a_k}{2!}+\ldots+\frac{a_0}{(2k+2)!}}{a_k+\frac{a_{k-1}}{3!}+\ldots+\frac{a_0}{(2k+1)!}}>$$

$$>\frac{a_{k+1}+\frac{1}{2}a_k}{a_k\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots\right)}>$$

$$>\frac{a_{k+1}+\frac{1}{2}a_k}{a_k\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)}=\frac{3}{4}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}+\frac{1}{2}\right)>\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)>\frac{2}{3}.$$

Таким образом, справедливость (5.5.4) полностью доказана.

Перейдем к доказательству положительности коэффициентов A_m в (5.5.2).

Имеем

$$g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s a^s\frac{z^{3s}}{s!}\right)$$

и, следовательно,

$$A_m=\sum_{n+3s=m}a_n(-1)^s a^s\frac{1}{s!}=$$

$$=a_m-a_{m-3}\frac{a}{1!}+a_{m-6}\frac{a^2}{2!}-a_{m-9}\frac{a^3}{3!}+\ldots\geqslant$$

$$\geqslant\left(a_m-a_{m-3}\frac{a}{1!}\right)+\left(a_{m-6}\frac{a^2}{2!}-a_{m-9}\frac{a^3}{3!}\right)+\ldots \quad (5.5.6)$$

(знак $\geqslant$ пишем потому, что если сумма (5.5.6) содержит нечетное число слагаемых, то последнее положительное слагаемое отбрасываем). Легко видеть, что $A_m = a_m$ при $m = 0, 1, 2$, а при $m \geqslant 3$ получаем

$$A_m \geqslant a_{m-3}\left(\frac{a_m}{a_{m-3}} - a\right) + a_{m-9}\frac{a^2}{2!}\left(\frac{a_{m-6}}{a_{m-9}} - \frac{2!}{3!}\,a\right) + \ldots,$$

откуда в силу (5.5.4) следует, что

$$A_m \geqslant a_{m-3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 - a\right) + a_{m-9}\frac{a^2}{2!}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 - a\right) + \ldots > 0.$$

Лемма доказана.

ГЛАВА VI

РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАКОНОВ

В предыдущих главах рассматривались только одномерные законы. В §§ 1—3 этой главы будут перенесены на многомерные законы некоторые теоремы из гл. II, III и V. Параграфы 4—7 посвящены результатам, которые удобно рассматривать сразу для произвольной размерности $n \geqslant 1$, и поэтому случай $n = 1$ не изучался в предыдущих главах.

Условимся придерживаться следующих обозначений:

R^n — действительное, C^n — комплексное n-мерные евклидовы пространства;

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, ... — их векторы (точки);

$$\operatorname{Re} x = (\operatorname{Re} x_1, \ldots, \operatorname{Re} x_n), \operatorname{Im} x = (\operatorname{Im} x_1, \ldots, \operatorname{Im} x_n),$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \ \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad |x| = \sqrt{\langle x, \bar{x}\rangle};$$

S^n — единичная сфера в R^n, $S^n = \{x\colon x \in R^n, \ |x| = 1\}$.

Все множества $E \subset R^n$, которые будут рассматриваться в дальнейшем, считаем борелевскими.

Будем называть *n-мерным вероятностным законом* неотрицательную меру $P = P(E)$, определенную на всех (борелевских) множествах $E \subset R^n$ и нормированную условием $P(R^n) = 1$. В тех случаях, когда это не может повлечь недоразумения, вместо «n-мерный вероятностный закон» будем писать просто «закон». Через ε_a, $a \in R^n$, обозначим закон такой, что $\varepsilon_a(\{a\}) = 1$; этот закон будем называть *единичным*. *Композицией* законов P_1 и P_2 называется закон $P = P(E) = (P_1 * P_2)(E)$, определяемый равенством

$$P(E)=\int_{R^n} P_1(E-x)\,P_2(dx), \qquad E\subset R^n,$$

где через $E-x$ обозначено множество, получаемое из E сдвигом на вектор $(-x)$, а интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса *). Законы P_1 и P_2 называются при этом *компонентами* закона P.

Характеристической функцией (х. ф.) n-мерного вероятностного закона P называется функция

$$\varphi(t;\, P)=\int_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle}P(dx), \qquad t\in R^n.$$

В этой главе мы предполагаем у читателя знакомство со свойствами n-мерных законов и их х. ф. в объеме гл. IX книги Г. Крамера [3]. Напомним только, что закон вполне определяется своей х. ф. и что

$$\varphi(t;\ P_1*P_2)=\varphi(t;\ P_1)\,\varphi(t;\ P_2).$$

§ 1. Метод проекций. Аналитические характеристические функции

Определение. *Проекцией n-мерного вероятностного закона P* на вектор $e\in S^n$ называется одномерный закон P_e, определяемый равенством

$$P_e(E)=P(\{x:\ \langle x,\ e\rangle\in E\}), \qquad (6.1.1)$$

где E — любое борелевское множество в R^1.

Очевидно, х. ф. n-мерного закона P связана с х. ф. его проекции P_e равенством

$$\varphi(t;\ P_e)=\varphi(te;\ P). \qquad (6.1.2)$$

Х. ф. $\varphi(t;\ P_e)$ мы будем называть также *проекцией х. ф.* $\varphi(t;\ P)$ на вектор e.

Переход к проекциям позволяет в некоторых случаях свести многомерную задачу к аналогичной одномерной.

*) Как известно, функция $P_1(E-x)$ как функция от x измерима по Борелю при любом фиксированном борелевском $E\subset R^n$ (Г. Крамер [3], стр. 131).

Такой метод был применен впервые в работе Крамера и Уолда [1].

Возникает вопрос, однозначно ли определяется закон всеми своими проекциями. Ответ на этот вопрос утвердителен. Справедливо более общее предложение.

Теорема 6.1.1. *Пусть множество $A \subset S^n$ таково, что* *) $A \cup (-A)$ *является плотным на* S^n. *Если* $P^{(1)}$ *и* $P^{(2)}$ *— два закона и при любом* $e \in A$ *выполняется*

$$P_e^{(1)} \equiv P_e^{(2)}, \tag{6.1.3}$$

то

$$P^{(1)} \equiv P^{(2)}.$$

Доказательство. Из определения проекции видно, что

$$P_{-e}(E) = P_e(-E),$$

поэтому (6.1.3) будет выполняться и при $e \in -A$. Таким образом, при $e \in A \cup (-A)$ имеем

$$\varphi(te;\ P^{(1)}) = \varphi(te;\ P^{(2)}), \qquad -\infty < t < \infty. \tag{6.1.4}$$

Так как множество $A \cup (-A)$ плотно на S^n, то в силу непрерывности х. ф. соотношение (6.1.4) справедливо при всех $e \in S^n$. Последнее обстоятельство эквивалентно тому, что при всех $t \in R^n$ справедливо $\varphi(t;\ P^{(1)}) = \varphi(t;\ P^{(2)})$. Поэтому $P^{(1)} \equiv P^{(2)}$, что и требовалось.

Условия теоремы 6.1.1 ослабить нельзя: если множество $A \cup (-A)$ не является плотным на S^n, то существуют два различных закона $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ таких, что при $e \in A$ выполняется (6.1.3).

Пример 1. Если множество $A \cup (-A)$ не является плотным на S^n, то существует вектор $e_0 \in S^n$ и такая его окрестность U на S^n, что множество $U \cup (-U)$ не пересекается с $A \cup (-A)$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$e_0 = (1, 0, \ldots, 0), \quad U = \{e\colon e \in S^n, \quad |e - e_0| < \varepsilon\}.$$

Определим закон $P^{(1)}$ равенством

$$P^{(1)}(E) = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_E \frac{dx}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)}$$

(E — любое борелевское множество в R^n).

*) Через $(-A)$ мы обозначаем множество $\{x\colon -x \in A\}$.

Для построения закона $P^{(2)}$ возьмем произвольную функцию $\psi(t) = \psi(t_1, \ldots, t_n) \not\equiv 0$, определенную во всем пространстве R^n и удовлетворяющую условиям:

а) $\psi(t) = 0$ всюду вне множества $K = \{t\colon t = \xi e, e \in U, 0 < |\xi| < 1\}$;

б) существуют и непрерывны все производные вида

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}} \psi(t), \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n} k_j \leqslant 2;$$

в) функция $\psi(t_1, \ldots, t_n)$ — действительная и четная по каждой из переменных $t_1, \ldots, t_n$.

Легко видеть, что такие функции $\psi(t)$ существуют. Функция

$$q(x) = \int\limits_{R^n} \psi(t) e^{-i\langle t, x\rangle} dt$$

в силу свойства в) действительна. Из теории преобразования Фурье известно (см., например, Бохнер [2], стр. 273), что свойства а) и б) влекут справедливость оценки

$$|q(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x_1^2) \ldots (1+x_n^2)}, \qquad x \in R^n, \tag{6.1.5}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Заметим еще, что оценка (6.1.5) позволяет воспользоваться формулой обращения Фурье и записать равенство

$$\psi(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{R^n} q(x) e^{i\langle t, x\rangle} dx, \qquad t \in R^n. \tag{6.1.6}$$

Положим теперь

$$P^{(2)}(E) = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_E \left\{\frac{1}{(1+x_1^2) \ldots (1+x_n^2)} + \frac{1}{C} q(x)\right\} dx.$$

Подынтегральная функция в силу (6.1.5) неотрицательна. Кроме того, используя (6.1.6) и свойство а), имеем

$$P^{(2)}(R^n) = 1 + \frac{1}{\pi^n C} \int\limits_{R^n} q(x)\, dx = 1 + \frac{2^n}{C} \psi(0) = 1.$$

Отсюда следует, что функция $P^{(2)}(E)$ является n-мерным вероятностным законом.

Очевидно,

$$\varphi(t;\ P^{(2)}) = \varphi(t;\ P^{(1)}) + \frac{2^n}{C}\psi(t).$$

Так как $\psi(t) \not\equiv 0$, то $P^{(1)} \not\equiv P^{(2)}$. Но при $t = |t|\,e$, $e \in A$, в силу свойства а) выполняется $\psi(t) = 0$. Поэтому $\varphi(te;\ P^{(2)}) = \varphi(te;\ P^{(1)})$, $-\infty < t < \infty$, $e \in A$, и, следовательно, $P_e^{(1)} = P_e^{(2)}$, $e \in A$.

Как следует из построенного примера, х. ф. n-мерного закона ($n > 1$), вообще говоря, не определяется проекциями на n линейно независимых векторов. Однако оказывается, что аналитические свойства х. ф. в значительной мере определяются аналитическими свойствами таких проекций.

Теорема 6.1.2. *Пусть n-мерный закон P таков, что х. ф. $\varphi(t;\ P_{e_1}), \ldots, \varphi(t;\ P_{e_n})$ его проекций на n линейно независимых векторов $e_1, \ldots, e_n \in S^n$ имеют $2k$ производных в точке $t = 0$. Тогда существуют и непрерывны всюду в R^n производные*

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}}\varphi(t;\ P), \qquad k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2k.$$

Доказательство. По теореме 2.1.1 из существования производной $\varphi^{(2k)}(0;\ P_{e_j})$ следует существование момента $m_{2k}(P_{e_j})$. Заметим, что

$$m_{2k}(P_{e_j}) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2k} P_{e_j}(d\xi) = \int_{R^n} \langle x,\ e_j\rangle^{2k} P(dx). \qquad (6.1.7)$$

Так как векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то справедливо неравенство

$$|x| \leqslant C \sum_{j=1}^{n} |\langle x,\ e_j\rangle|,$$

где $C > 0$ не зависит от x. Поэтому имеем

$$|x_1|^{k_1} \ldots |x_n|^{k_n} \leqslant |x|^{k_1+\ldots+k_n} \leqslant 1 + |x|^{2k} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + C^{2k}\Big(\sum_{j=1}^{n} |\langle x,\ e_j\rangle|\Big)^{2k} \leqslant 1 + C^{2k} n^{2k} \sum_{j=1}^{n} |\langle x,\ e_j\rangle|^{2k}.$$

Интегрируя по $P(dx)$ и учитывая (6.1.7), получаем

$$\int\limits_{R^n} |x_1|^{k_1} \ldots |x_n|^{k_n} P(dx) \leqslant 1 + C^{2k} n^{2k} \sum_{j=1}^{n} m_{2k}(P_{e_j}). \quad (6.1.8)$$

Отсюда, очевидно, следует утверждение теоремы.

Определение. Пусть G — область пространства C^n, содержащая точку $t = 0$. Х. ф. $\varphi(t;\ P)$ называется *аналитической в области* G, если существует аналитическая в области G функция $f(t)$ такая, что при $t \in G \cap R^n$ выполняется $\varphi(t;\ P) = f(t)$.

В дальнейшем функцию $f(t)$ мы будем обозначать тоже через $\varphi(t;\ P)$, что, в силу известной теоремы единственности аналитических функций, не может повлечь недоразумения.

Как мы видели в гл. II, при изучении аналитических х. ф. одномерных законов важную роль играют области вида $a < \operatorname{Im} t < b$. В многомерном случае аналогичную роль играют так называемые трубчатые области.

Определение. Область $G \subset C^n$ называется *трубчатой*, если она имеет вид

$$G = \{t\colon\ t \in C^n,\ \operatorname{Im} t \in B\},$$

где B — область в R^n, называемая *основанием* области G.

Заметим, что трубчатая область выпукла тогда и только тогда, когда выпукло ее основание.

Теорема 6.1.3. *Пусть n-мерный закон P таков, что х. ф. $\varphi(t;\ P_{e_1}) \ldots \varphi(t;\ P_{e_n})$ аналитичны соответственно при*

$$a_1 < \operatorname{Im} t < b_1,\ \ldots,\ a_n < \operatorname{Im} t < b_n$$
$$(a_j < 0 < b_j,\quad j = 1,\ \ldots,\ n).$$

Тогда х. ф. $\varphi(t;\ P)$ аналитична в выпуклой трубчатой области G, основанием которой служит внутренность выпуклой оболочки множества векторов $a_1e_1,\ \ldots,\ a_ne_n,\ b_1e_1,\ \ldots,\ b_ne_n$.

При этом во всей области G справедливо представление

$$\varphi(t;\ P) = \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\ x\rangle} P(dx), \quad (6.1.9)$$

где интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в G.

Доказательство. По теореме 2.2.3 из аналитичности х. ф. $\varphi(t;\ P_{e_j})$ в полосе $a_j < \operatorname{Im} t < b_j$ следует сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta\xi} P_{e_j}(d\xi) = \int_{R^n} e^{-\eta\langle x,\ e_j\rangle} P(dx), \qquad a_j < \eta < b_j. \quad (6.1.10)$$

Пусть K — любой компакт, лежащий в области G. Покажем, что интеграл в (6.1.9) сходится на K абсолютно и равномерно.

Легко видеть, что найдется число α, $0 < \alpha < 1$, такое, что для любого вектора $t \in K$ справедливо соотношение $\operatorname{Im} t = \sum_{j=1}^{n} \theta_j y_j e_j$, где числа y_j удовлетворяют условиям $\alpha a_j \leqslant y_j \leqslant \alpha b_j$ $(j = 1,\ \ldots,\ n)$, а $\theta_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} \theta_j = 1$. Используя очевидное неравенство

$$\prod_{j=1}^{n} d_j^{\theta_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} d_j \qquad (d_j \geqslant 0,\ j = 1,\ \ldots,\ n),$$

получаем

$$|\exp\{i\langle t,\ x\rangle\}| = \exp\{-\langle \operatorname{Im} t,\ x\rangle\} = \prod_{j=1}^{n} \exp\{-\theta_j y_j \langle e_j,\ x\rangle\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \exp\{-y_j\langle e_j,\ x\rangle\} \leqslant \sum_{j=1}^{n} [\exp\{-\alpha a_j\langle e_j,\ x\rangle\} +$$
$$+ \exp\{-\alpha b_j\langle e_j,\ x\rangle\}]. \qquad (6.1.11)$$

Так как интегралы (6.1.10) сходятся, в частности, при $\eta = \alpha a_j$ и $\eta = \alpha b_j$, то из (6.1.11) следует, что функция $\exp\{i\langle t,\ x\rangle\}$ имеет при $t \in K$ суммируемую по мере $P(dx)$ мажоранту, не зависящую от t. Тем самым доказано, что интеграл в (6.1.9) сходится абсолютно и равномерно на K. В силу классической теоремы отсюда следует, что указанный интеграл является аналитической функцией на K, и в силу произвольности K — во всей области G. Используя определение аналитической х. ф., получаем утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть* $\varphi(t;\ P) = \varphi(t_1,\ \ldots,\ t_n;\ P)$ — *х. ф. n-мерного закона* P. *Если функции*

$$\varphi(t_1,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ P),\quad \varphi(0,\ t_2,\ \ldots,\ 0;\ P),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \varphi(0,\ 0,\ \ldots,\ t_n;\ P)$$

аналитичны соответственно при

$$|\operatorname{Im} t_1| < r_1, \quad |\operatorname{Im} t_2| < r_2, \ \ldots, \ |\operatorname{Im} t_n| < r_n,$$

то х. ф. $\varphi(t; P)$ *аналитична в трубчатой области*

$$\left\{t\colon t = (t_1, \ldots, t_n) \in C^n, \ \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im} t_j|/r_j < 1\right\}.$$

Получим теперь обобщение теоремы 2.2.3 на многомерный случай.

Теорема 6.1.4. *Пусть H — некоторая область в R^n, содержащая точку $t = 0$. Если х. ф. $\varphi(t; P)$ аналитична в некоторой области, содержащей множество $\{t\colon \operatorname{Re} t = 0, \operatorname{Im} t \in H\}$, то $\varphi(t; P)$ аналитична в выпуклой трубчатой области G, основанием которой служит выпуклая оболочка области H.*

При этом во всей области G справедливо представление (6.1.9), *в котором интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в G.*

Доказательство. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — не лежащие в одной $n - 1$-мерной гиперплоскости точки области H, отличные от 0 и такие, что каждую из них можно соединить с 0 отрезком, лежащим в H. Полагая

$$x^{(j)} = b_j e_j, \ e_j \in S^n, \quad b_j > 0, \ j = 1, \ldots, n,$$

видим, что х. ф. $\varphi(t; P_{e_j}) = \varphi(te_j; P)$ аналитична в некоторой области t-плоскости, содержащей интервал $(-i\varepsilon_j, i(b_j + \varepsilon_j))$ мнимой t-оси, где $\varepsilon_j > 0$ — достаточно малое число ($j = 1, \ldots, n$). По теореме 2.2.3 х. ф. $\varphi(t; P_{e_j})$ будет аналитической в полосе $-\varepsilon_j < \operatorname{Im} t < b_j + \varepsilon_j$. Применяя теорему 6.1.3, заключаем, что х. ф. $\varphi(t; P)$ аналитична в выпуклой трубчатой области, основанием которой служит внутренность выпуклой оболочки векторов $-\varepsilon_1 e_1, \ldots, -\varepsilon_n e_n, (b_1 + \varepsilon_1) e_1, \ldots, (b_n + \varepsilon_n) e_n$, и представляется в этой области в виде (6.1.9).

Если область H выпукла, то, пользуясь произволом в выборе точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, получаем утверждение теоремы.

Если выпуклость области H не предполагается, то из проведенного рассуждения во всяком случае следует, что существуют содержащие точку 0 выпуклые трубчатые области, в которых функция $\varphi(t; P)$ аналитична и представляется в виде (6.1.9). Пусть G_1 — объединение всех таких областей. Очевидно, G_1 — трубчатая область. Обозначим через H_1 ее основание. Покажем, что H_1 содержит выпуклую оболочку области H, и тем самым теорема будет доказана.

По построению область H_1 является объединением выпуклых областей, содержащих точку 0. Поэтому любую точку из H_1 можно соединить с точкой 0 отрезком, лежащим в H_1. Выбирая произвольным образом не лежащие в одной $n-1$-мерной гиперплоскости точки $x^{(1)}, \ldots$ $\ldots, x^{(n)} \in H_1$ и повторяя (с заменой H на H_1) рассуждение, проведенное в начале доказательства, убеждаемся, что область H_1 выпукла. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $H_1 \supset H$.

Предположим, что $H \diagdown H_1 \neq \varnothing$. Тогда в области $H \cup H_1$ можно указать содержащую точку 0 выпуклую подобласть H_2 такую, что $H_2 \diagdown H_1 \neq \varnothing$. Функция $\varphi(t; P)$ аналитична в некоторой области пространства C^n, содержащей множество $\{t\colon \operatorname{Re} t = 0, \operatorname{Im} t \in H_2\}$. Так как теорема для выпуклой области доказана, то отсюда следует, что $\varphi(t; P)$ аналитична и представляется в виде (6.1.9) в трубчатой области G_2, для которой H_2 служит основанием. Так как $H_2 \diagdown H_1 \neq \varnothing$, то и $G_2 \diagdown G_1 \neq \varnothing$. С другой стороны, по определению области G_1 должно выполняться $G_2 \subset G_1$, и мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Из второго утверждения теоремы 6.1.4 непосредственно вытекает такое обобщение теоремы 2.3.1.

Теорема 6.1.5. *Если х. ф.* $\varphi(t; P)$ *аналитична в содержащей точку* 0 *выпуклой трубчатой области* $G \subset C^n$, *то в этой области выполняется неравенство*

$$|\varphi(t; P)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t; P). \tag{6.1.12}$$

В связи с этим можно было бы ввести понятие функции, хребтовой в трубчатой области, и получить аналог теоремы 2.3.2, но мы этого делать не будем из-за отсутствия применений в дальнейшем изложении. Отметим только такое утверждение, близкое к утверждению г) теоремы 2.3.2.

Теорема 6.1.6. *В условиях теоремы* 6.1.5 *функция* $\varphi(t; P)$ *не обращается в нуль на множестве* $\{t\colon t \in G, \operatorname{Re} t = 0\}$ *и допускает на нем оценку* $\ln \varphi(t; P) > -K_\varphi |t|$, *где* $K_\varphi > 0$ — *постоянная*.

Доказательство. Пусть $\eta \in R^n$ таково, что $i\eta \in G$. Положим $\vartheta_\eta(\lambda) = \varphi(\lambda\eta; P)$. Функция $\vartheta_\eta(\lambda)$, очевидно, аналитична в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$, и так как $\vartheta_\eta(0) = 1$, то $\vartheta_\eta(\lambda) \not\equiv 0$. Кроме того, из (6.1.12) следует, что $\vartheta_\eta(\lambda)$ является хребтовой функцией. По теореме 2.3.2, г) имеем

$$\ln \vartheta_\eta(i\varkappa) \geqslant -\left|\vartheta'_\eta(i\varkappa)\right|_{\varkappa=0} |\varkappa| =$$

$$= -|\varkappa| \left| i \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial\varphi(i\varkappa\eta; P)}{\partial\eta_k}\right|_{\varkappa=0} \geqslant$$

$$\geqslant -|\varkappa|\,|\eta| \left\{\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial\varphi(i\eta; P)}{\partial\eta_k}\right|^2\right\}^{1/2}_{\eta=0}.$$

Полагая $\varkappa = 1$ и замечая, что $\vartheta_\eta(i) = \varphi(i\eta; P)$, получаем доказываемое.

Вернемся к теореме 6.1.4. Покажем, что она является неулучшаемой в том смысле, что аналитическое продолжение за пределы трубчатой области, основанием которой служит выпуклая оболочка области H, может оказаться невозможным.

Теорема 6.1.7. *Для любой содержащей точку 0 выпуклой трубчатой области $G \subset C^n$ существует х. ф. $\varphi(t; P)$, аналитическая в области G и не допускающая аналитического продолжения за ее пределы.*

Доказательство. Будем опираться на следующий результат Картана и Туллена (см., например, Бохнер и Мартин [1], стр. 117—119).

Пусть G — некоторая область в C^n, Γ — множество точек границы G, плотное на этой границе. Предположим, что имеется семейство $\mathfrak{J}_\Gamma$ функций, аналитических в G, такое, что для каждой точки $z \in \Gamma$ можно указать функцию $f_z(t) \in \mathfrak{J}_\Gamma$, модуль которой неограниченно возрастает вдоль некоторой последовательности точек $t_m \in G$, $t_m \to z$. Тогда, применяя к функциям семейства $\mathfrak{J}_\Gamma$ операции: 1) умножения на положительную постоянную, 2) сложения, 3) возведения в целую положительную степень, 4) предельного перехода, равномерного на всяком лежащем в G компакте, можно построить функцию, аналитическую в области G и не допускающую аналитического продолжения за ее пределы.

Пусть G — заданная выпуклая трубчатая область, содержащая точку 0. Будем считать, что $G \neq C^n$, так как, если $G = C^n$, существование искомой х. ф. тривиально: например, можно взять $\varphi(t; P) \equiv 1$.

Обозначим через Γ множество тех точек z границы области G, у которых $\operatorname{Re} z$ — вектор с рациональными координатами. Построим семейство $\mathfrak{I}_\Gamma$ следующим образом. Пусть $z \in \Gamma$. Точка $\operatorname{Im} z$ является граничной точкой основания H области G. Проведем через точку $\operatorname{Im} z$ опорную к H гиперплоскость

$$L(y) = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n + \gamma = 0.$$

Знаки коэффициентов в уравнении этой гиперплоскости будем считать выбранными так, чтобы $L(y) < 0$ при $y \in H$.

Обозначим через s наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел, являющихся координатами вектора $\operatorname{Re} z$, и построим целочисленные векторы $p(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, все координаты которых делятся на s и удовлетворяют неравенствам

$$|p_k(m) - \alpha_k m| \leqslant s$$
$$(k = 1, \ldots, n; \quad m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как тогда

$$|mL(y) - [\langle p(m), y\rangle + m\gamma]| \leqslant s(|y_1| + \ldots + |y_n|),$$

то мы имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{m\gamma} e^{\langle p(m),\, y\rangle} = \rho(y) \sum_{m=0}^{\infty} e^{mL(y)}, \tag{6.1.13}$$

где $\rho(y)$ — величина, допускающая оценку

$$\exp[-s(|y_1| + \ldots + |y_n|)] \leqslant \rho(y) \leqslant$$
$$\leqslant \exp[s(|y_1| + \ldots + |y_n|)].$$

Обозначим ряд, стоящий в левой части (6.1.13), через $\psi_z(y)$.

Среди векторов $p(m)$ могут оказаться одинаковые. Соединяя вместе соответствующие члены ряда $\psi_z(y)$, мы можем записать этот ряд в виде

$$\psi_z(y) = \sum_{r_1, \ldots, r_n = -\infty}^{\infty} a_r e^{\langle r,\, y\rangle},$$

где $a_r \geqslant 0$ и могут отличаться от 0 лишь в том случае, когда все координаты вектора r делятся на s. Так как $L(y) < 0$ при $y \in H$, $L(y) \to 0$ при $y \to \operatorname{Im} z$, то из соотношения (6.1.13) следует, что ряд $\psi_z(y)$ сходится при $y \in H$ и $\psi_z(y)$ неограниченно возрастает при $y \to \operatorname{Im} z$.

Положим

$$f_z(t) = \psi_z(-it) = \sum_{r_1, \ldots, r_n = -\infty}^{\infty} a_r e^{-i\langle r, t\rangle}.$$

Очевидно, функция $f_z(t)$ аналитична в области G. Так как она периодична по каждой из переменных $t_1, \ldots, t_n$ с периодом $2\pi/s$, то если $t \to z$ ($t \in G$) так, что $\operatorname{Re} t = \operatorname{Re} z$, то $f_z(t) = f_z(i \operatorname{Im} t) = \psi_z(\operatorname{Im} t) \to \infty$.

Построив для каждой точки $z \in \Gamma$ функцию $f_z(t)$, получаем искомое семейство $\mathfrak{J}_\Gamma$. Заметим, что каждая из функций $f_z(t)$ с точностью до постоянного множителя является х. ф., именно х. ф. закона

$$P_z(E) = (1/\psi_z(0)) \sum_{r \in E} a_r,$$

где r — векторы с целыми координатами.

Применим теперь результат Картана и Туллена и получим при помощи указанных там операций 1)—4) над функциями семейства $\mathfrak{J}_\Gamma$ функцию $f(t)$, аналитическую в области G и не допускающую аналитического продолжения за ее пределы. Так как класс функций, являющихся х. ф. с точностью до постоянного положительного множителя, замкнут относительно операций 1)—4), то функция $f(t)$ также принадлежит этому классу. Полагая $\varphi(t; P) = f(t)/f(0)$, получаем искомую х. ф.

Определение. Область $G \subset C^n$ будем называть *областью аналитичности х. ф.*, если существует n-мерный закон P, х. ф. которого $\varphi(t; P)$ аналитична в области G и не допускает аналитического продолжения за ее пределы.

Обозначим через $\mathfrak{Z}$ класс всех содержащих точку 0 областей аналитичности х. ф.

Теорема 6.1.7 показывает, что классу $\mathfrak{Z}$ принадлежат все содержащие точку 0 выпуклые трубчатые области; другими словами, эту теорему можно рассматривать как достаточное условие принадлежности классу $\mathfrak{Z}$. С другой стороны, теорема 6.1.4 дает необходимое условие принадлежности классу $\mathfrak{Z}$:

(i) область $G \in \mathfrak{Z}$ вместе с множеством вида

$$\{t\colon \operatorname{Re} t = 0, \operatorname{Im} t \in H\},$$

где H — содержащая точку 0 область в R^n, должна содержать трубчатую область, основанием которой служит выпуклая оболочка области H.

Очевидно, что необходимым является также следующее условие:

(ii) область $G \in \mathfrak{Z}$ должна быть областью аналитичности (т. е. должна существовать функция, не обязательно являющаяся х. ф., аналитическая в G и не допускающая аналитического продолжения за ее пределы).

Замечая, что в силу теоремы 6.1.5 аналитическая х. ф. принимает на векторах вида $t = i\eta$, $\eta \in R^n$, лежащих в достаточно малой окрестности точки 0, положительные значения, и используя принцип симметрии аналитических функций, получаем еще одно необходимое условие принадлежности классу $\mathfrak{Z}$:

(iii) область $G \in \mathfrak{Z}$ должна быть симметрична в том смысле, что если $t \in G$, то и $t^* = -\overline{t} \in G$.

Легко видеть, что (даже в одномерном случае) класс областей, удовлетворяющих условиям (i), (ii), (iii), значительно шире класса выпуклых трубчатых областей. Поэтому между достаточным условием из теоремы 6.1.7 и необходимыми условиями (i), (ii), (iii) имеется существенный разрыв.

Возникает вопрос, являются ли условия (i), (ii), (iii) в совокупности не только необходимыми, но и достаточными условиями для принадлежности области, содержащей точку 0, классу $\mathfrak{Z}$.

Ответ на этот вопрос для размерности $n > 1$ неизвестен. В одномерном случае ответ утвердителен. Заметим, что в этом случае условие (ii) отпадает, поскольку любая область в C^1 является областью аналитичности.

Теорема 6.1.8. *Для того чтобы содержащая точку 0 область $G \subset C^1$ была областью аналитичности х. ф., необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия:*

(i′) *если интервал (ia, ib), $a < 0 < b$, лежит в G, то в G лежит и полоса $a < \operatorname{Im} t < b$;*

(iii′) *область G симметрична относительно мнимой t-оси.*

Можно ограничиться доказательством достаточности. Будем снова опираться на результат Картана и Туллена, цитированный при доказательстве теоремы 6.1.7. В силу этого результата достаточно для каждой *) точки z границы области G построить х. ф. $\varphi_z(t)$, аналитическую в G, модуль которой неограниченно возрастает вдоль некоторой последовательности $t_m \in G$, $t_m \to z$.

Пусть $z = x - iy$ — точка границы области G. Заметим, что в силу условия (iii′) точка $z^* = -x - iy$ тоже лежит на этой границе. Из условия (i′) следует, что $y \neq 0$. Будем считать, что $y > 0$,— случай $y < 0$ рассматривается аналогично. Обозначим через d точную верхнюю грань тех значений η, для которых $(-i\eta) \in G$. Точка $(-id)$ является точкой границы области G, причем из условия (i′) следует, что $0 < d \leqslant y$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_z(t) = \left(\frac{1}{d} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)^{-1} \left\{\frac{1}{d-it} + \frac{1/2}{y-ix-it} + \frac{1/2}{x+ix-it}\right\}.$$

Эта функция имеет три особые точки: $t = -id$, $t = z$, $t = z^*$. Все они лежат на границе области G, поэтому функция $\varphi_z(t)$ аналитична в G. Ясно, что $\varphi_z(0) = 1$, и при $t \to z$ имеем $\varphi_z(t) \to \infty$. Далее, легко проверить, что $(-\infty < t < \infty)$

$$\varphi_z(t) = \left(\frac{1}{d} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)^{-1} \int\limits_0^\infty e^{its}\left(e^{-ds} + e^{-ys}\cos xs\right) ds.$$

Так как из $0 < d \leqslant y$ следует, что $e^{-ds} + e^{-ys}\cos xs \geqslant 0$ $(s \geqslant 0)$, то функция $\varphi_z(t)$ является х. ф. Таким образом, функция $\varphi_z(t)$ обладает всеми нужными свойствами. Тем самым теорема доказана.

В заключение этого параграфа рассмотрим аналитические х. ф. многомерных б. д. законов.

Напомним, что по теореме П. Леви [2], стр. 220, общий вид х. ф. n-мерного б. д. закона дается формулой

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{i\langle\beta,\ t\rangle - Q(t) + \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle t,\ x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\ x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu_P(dx)\right\}, \quad (6.1.14)$$

*) Можно, конечно, было бы ограничиться плотным множеством на границе.

где $\beta \in R^n$, $Q(t) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k$ — неотрицательная квадратичная форма, ν_P — вполне σ-конечная мера на классе борелевских множеств в R^n, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{R^n \setminus \{0\}} |x|^2 (1+|x|^2)^{-1} \nu_P(dx) < \infty. \tag{6.1.15}$$

Меру ν_P условимся называть *спектральной мерой Леви* б. д. закона P.

Формула (6.1.14) является, очевидно, многомерным обобщением формулы Леви (2.6.5); формула (2.6.1) Леви — Хинчина на многомерный случай не переносится. В связи с этим из теорем 2.6.1 и 2.6.2 многомерное обобщение допускает только вторая. Это обобщение таково.

Теорема 6.1.9. *Если х. ф.* $\varphi(t; P)$ *n-мерного б. д. закона P аналитична в содержащей точку* 0 *выпуклой трубчатой области* $G \subset C^n$, *то формула* (6.1.14) *сохраняет силу во всей области G, причем интеграл, стоящий в правой части* (6.1.14), *сходится абсолютно и равномерно на любом компакте* $K \subset G$.

Доказательство получается несущественной модификацией доказательства теоремы 2.6.1. Полагаем при $t \in R^n$

$$f(t) = i\langle \beta, t\rangle + \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle t,\,x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\,x\rangle}{1+|x|^2}\right) \nu_P(dx) =$$

$$= i\langle \beta, t\rangle + \int\limits_{0<|x|\leqslant 1} \left(e^{i\langle t,\,x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\,x\rangle}{1+|x|^2}\right) \nu_P(dx) +$$

$$+ \int\limits_{|x|>1} e^{i\langle t,\,x\rangle} \nu_P(dx) + \int\limits_{|x|>1} \left(-1 - \frac{i\langle t,\,x\rangle}{1+|x|^2}\right) \nu_P(dx) =$$

$$= i\langle \beta, t\rangle + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).$$

Используя оценку

$$\left| e^{i\langle t,\,x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\,x\rangle}{1+|x|^2} \right| = \left| \frac{i\langle t,\,x\rangle\,|x|^2}{1+|x|^2} + \frac{(i\langle t,\,x\rangle)^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(i\langle t,\,x\rangle)^3}{3!} + \ldots \right| \leqslant |t|^2\,|x|^2\, e^{|t|\,|x|} + \frac{|t|\,|x|^3}{1+|x|^2},$$

заключаем (учитывая (6.1.15)), что интеграл $I_1(t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в C^n

и является целой функцией от t. Аналогичное утверждение относительно интеграла $I_3(t)$ тривиально.

Так как при $t \in R^n$ имеем $f(t) = \ln \varphi(t; P)$, а функция $\varphi(t; P)$ в силу теоремы 6.1.6 не обращается в нуль при $t \in G$, $\operatorname{Re} t = 0$, то функция $f(t)$ аналитически продолжается в некоторую область D, содержащую множество $\{t \in G, \operatorname{Re} t = 0\}$. Из соотношения

$$I_2(t) = f(t) - i\langle \beta, t\rangle - I_1(t) - I_3(t)$$

заключаем, что $I_2(t)$ также допускает аналитическое продолжение в область D. Но если $I_2(t) \not\equiv 0$, то $I_2(t)$ является с точностью до положительного множителя х. ф., именно х. ф. закона

$$P^{(1)}(E) = \nu_P(E \cap \{x\colon |x| > 1\})/\nu_P(\{x\colon |x| > 1\}).$$

Применяя к $I_2(t)$ теорему 6.1.4, убеждаемся в справедливости доказываемой теоремы.

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание.

Замечание. Проекция n-мерного б. д. закона P на любой вектор $e_1 \in S^n$ является (одномерным) б. д. законом. Спектральные меры Леви законов P и P_{e_1} связаны равенством

$$\nu_{P_{e_1}}(E) = \nu_P(\{x\colon \langle x, e_1\rangle \in E\}). \tag{6.1.16}$$

Если закон P не имеет гауссовой компоненты (т. е. в (6.1.14) $Q(t) \equiv 0$), то и закон P_{e_1} ее не имеет.

Действительно, из формулы (6.1.14) имеем

$$\varphi(t; P_{e_1}) = \varphi(te_1; P) = \exp\Big\{it\langle\beta, e_1\rangle - t^2 Q(e_1) + \\ + \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \left(e^{it\langle e_1, x\rangle} - 1 - \frac{it\langle e_1, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu_P(dx)\Big\}. \tag{6.1.17}$$

Введем меру $\nu_{P_{e_1}}$ равенством (6.1.16). Так как функция $y^2(1+y^2)^{-1}$ неубывающая при $y \geqslant 0$, то из условия (6.1.15) следует:

$$\int\limits_{R^1\setminus\{0\}} \frac{y^2}{1+y^2}\nu_{P_{e_1}}(dy) = \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \frac{\langle x, e_1\rangle^2}{1+\langle x, e_1\rangle^2}\nu_P(dx) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\nu_P(dx) < \infty.$$

Поэтому абсолютно сходится при $t \in R^n$ интеграл

$$\int\limits_{R^1 \setminus \{0\}} \left(e^{ity} - 1 - \frac{ity}{1+y^2}\right) \nu_{P_{e_1}}(dy) =$$
$$= \int\limits_{R^n \setminus \{0\}} \left(e^{it\langle e_1, x\rangle} - 1 - \frac{it\langle e_1, x\rangle}{1+\langle e_1, x\rangle^2}\right) \nu_P(dx).$$

Так как стоящий в (6.1.17) интеграл тоже сходится абсолютно, то конечна величина

$$\beta_1 = \int\limits_{R^n \setminus \{0\}} \left(\frac{\langle e_1, x\rangle}{1+\langle e_1, x\rangle^2} - \frac{\langle e_1, x\rangle}{1+|x|^2}\right) \nu_P(dx).$$

Учитывая это, равенство (6.1.17) можем записать в виде

$$\varphi(t;\ P_{e_1}) = \exp\left\{it\left[\langle \beta, e_1\rangle + \beta_1\right] - Q(e_1)\, t^2 + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{R^1 \setminus \{0\}} \left(e^{ity} - 1 - \frac{ity}{1+y^2}\right) \nu_{P_{e_1}}(dy)\right\}.$$

В силу одномерного случая формулы Леви (6.1.14) заключаем, что P_e является б. д. законом, а $\nu_{P_{e_1}}$ — его спектральной мерой Леви. Замечание доказано.

Возникает вопрос, существуют ли n-мерные ($n \geqslant 2$) не безгранично делимые законы, все проекции которых безгранично делимы. В § 7 мы покажем (следствие из теоремы 6.7.4, стр. 295), что ответ на этот вопрос утвердителен.

§ 2. Общие теоремы о разложениях многомерных законов

Займемся перенесением на многомерный случай результатов гл. III.

Предварительно сделаем следующее замечание, которым часто будем пользоваться. Если закон $P^{(1)}$ является компонентой закона P, а e — любой вектор из S^n, то проекция $P_e^{(1)}$ является компонентой проекции P_e. Действительно, пусть $P = P^{(1)} * P^{(2)}$, тогда

$$\varphi(t;\ P) = \varphi(t;\ P^{(1)})\, \varphi(t;\ P^{(2)}), \quad t \in R^n, \tag{6.2.1}$$

и, следовательно,

$$\varphi(te;\ P) = \varphi(te;\ P^{(1)})\, \varphi(te;\ P^{(2)}), \quad t \in R^1.$$

В силу (6.1.2) это равенство равносильно $P_e = P_e^{(1)} * P_e^{(2)}$.

Обобщение теоремы 3.1.1 на многомерный случай дает следующая теорема.

Теорема 6.2.1. *Пусть P — закон, $P^{(1)}$ — его компонента. Если х. ф. $\varphi(t; P)$ аналитична в содержащей точку 0 выпуклой трубчатой области G, то в той же области аналитична и х. ф. $\varphi(t; P^{(1)})$.*

Доказательство. Пусть H — основание области G. Для любого вектора $e \in S^n$ положим

$$a(e) = \inf_{xe \in H} x, \quad b(e) = \sup_{xe \in H} x.$$

Очевидно, $a(e) < 0 < b(e)$, и х. ф. $\varphi(t; P_e) = \varphi(te; P)$ аналитична в полосе $a(e) < \operatorname{Im} t < b(e)$. Так как закон $P_e^{(1)}$ является компонентой закона P_e, то по теореме 3.1.1 х. ф. $\varphi(t; P_e^{(1)})$ будет аналитической в полосе $a(e) < \operatorname{Im} t < b(e)$. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — любая система n линейно независимых векторов из S^n. Тогда х. ф. $\varphi(t; P_{e_1}^{(1)}), \ldots, \varphi(t, P_{e_n}^{(1)})$ аналитичны соответственно в полосах $a(e_1) < \operatorname{Im} t < b(e_1), \ldots, a(e_n) < \operatorname{Im} t < b(e_n)$. Применяя теорему 6.1.3, заключаем, что х. ф. $\varphi(t; P^{(1)})$ аналитична в трубчатой области, основанием которой служит выпуклая оболочка векторов

$$a(e_1)e_1, \ldots, a(e_n)e_n, \quad b(e_1)e_1, \ldots, b(e_n)e_n.$$

В силу произвола в выборе векторов $e_1, \ldots, e_n$ отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 6.2.2 (о «сглаживании хребта»). *В условиях теоремы 6.2.1 во всей области G выполняется неравенство*

$$1 \leqslant \left| \frac{\varphi(i \operatorname{Im} t; P^{(1)})}{\varphi(t; P^{(1)})} \right| \leqslant \left| \frac{\varphi(i \operatorname{Im} t; P)}{\varphi(t; P)} \right|.$$

Действительно, если $P = P^{(1)} * P^{(2)}$, то по теореме 6.2.1 х. ф. $\varphi(t; P^{(1)})$ и $\varphi(t; P^{(2)})$ будут аналитичны в G, и, следовательно, (6.1.12) выполняется всюду в G. Поэтому

$$\left| \frac{\varphi(i \operatorname{Im} t; P^{(1)})}{\varphi(t; P^{(1)})} \right| \left| \frac{\varphi(i \operatorname{Im} t; P^{(2)})}{\varphi(t; P^{(2)})} \right| = \left| \frac{\varphi(i \operatorname{Im} t; P)}{\varphi(t; P)} \right|, \qquad t \in G,$$

и, применяя теорему 6.1.5, получим доказываемое.

Рассмотрим теперь понятие о спектре n-мерного закона.

Спектром n-мерного закона P назовем множество $S(P)$ всех $y \in R^n$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$P(\{x: \ |x - y| < \varepsilon\}) > 0.$$

Дискретным спектром закона P назовем множество $D(P)$ всех $y \in R^n$ таких, что

$$P(\{y\}) > 0.$$

Как и в одномерном случае, спектр $S(P)$ является непустым замкнутым множеством, а дискретный спектр не более чем счетен и, вообще говоря, может быть пустым. С дискретным спектром свяжем величины

$$d(P) = \sum_{y \in D(P)} P(\{y\}), \quad \tilde{d}(P) = \max_{y \in D(P)} P(\{y\}),$$

считая $d(P) = \tilde{d}(P) = 0$, если $D(P) = \varnothing$.

Арифметическую сумму $A + B$ двух множеств A и B $(A, B \subset R^n)$ определяем равенством

$$A + B = \{x: \ x = x_1 + x_2, \ x_1 \in A, \ x_2 \in B\},$$

полагая, по определению,

$$A + \varnothing = \varnothing, \quad A \pm x = A + \{\pm x\} \qquad (x \in R^n),$$

$$(0)\,A = \{0\}, \ (m)\,A = A + (m-1)\,A \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Множество $(m)\,A$ $(m = 2, 3, \ldots)$ можно получить из множества A следующим образом. Возьмем любые m точек $x_1, \ldots, x_m \in A$, поместим в них единичные массы и построим центр тяжести $x = \frac{1}{m}(x_1 + \ldots + x_m)$. Множество всех таких центров тяжести обозначим через A_m,

$$A_m = \left\{x: \ x = \frac{1}{m}(x_1 + \ldots + x_m); \ \ x_1, \ldots, x_m \in A\right\}.$$

Применяя к A_m преобразование гомотетии с центром в 0 и коэффициентом m, получим множество $(m)\,A$.

Как мы уже отмечали в одномерном случае, арифметическая сумма двух замкнутых множеств может не быть замкнутым множеством. Очевидно, это и подавно возможно в многомерном случае. Но если дополнительно предположить, что хотя бы одно из множеств ограничено или оба множества лежат в остром конусе (т. е. в замкнутом выпуклом конусе, вершина которого является крайней точкой), то замкнутость арифметической суммы, как нетрудно показать, имеет место.

Следующая теорема является многомерным обобщением теоремы 3.2.1.

Теорема 6.2.3. *Пусть P, $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ — законы такие, что*

$$P = P^{(1)} * P^{(2)}.$$

Справедливы соотношения

$$S(P) = \overline{S(P^{(1)}) + S(P^{(2)})}, \tag{6.2.2}$$

$$D(P) = D(P^{(1)}) + D(P^{(2)}), \tag{6.2.3}$$

$$d(P) = d(P^{(1)})\, d(P^{(2)}), \tag{6.2.4}$$

$$\tilde{d}(P) \leqslant \min [\tilde{d}(P^{(1)}),\ \tilde{d}(P^{(2)})]. \tag{6.2.5}$$

Доказательство этой теоремы мы опускаем, так как оно является тривиальной модификацией доказательства теоремы 3.2.1. Отметим, что следствия 1—4 теоремы 3.2.1 сохраняют силу и в многомерном случае; рассуждения, с помощью которых они выводились в одномерном случае, можно дословно повторить.

Остановимся на некоторых свойствах неразложимых законов. По аналогии с одномерным случаем n-мерный закон P будем называть неразложимым, если все его компоненты — несобственные, т. е. имеют вид $P * \varepsilon_a$ и ε_a, $a \in R^n$.

Множество $A \subset R^n$ будем называть разложимым, если его можно представить в виде $A = B + C$, где B и C — множества, каждое из которых содержит не менее двух точек.

Теорема 6.2.4. *Пусть P — закон, спектр которого $S(P)$ лежит в некотором остром конусе. Если $S(P)$ — неразложимое множество, то закон P — неразложимый.*

Если закон P дискретен и $D(P)$ — неразложимое множество, то (без каких-либо дополнительных предположений о $D(P)$ или $S(P)$) закон P — неразложимый.

Эта теорема является многомерным обобщением теоремы 3.3.2; доказательство ввиду его очевидности опускаем. По той же причине опускаем доказательство следующей леммы, являющейся многомерным обобщением леммы 3.3.2.

Лемма 6.2.1. *Если множество $A \subset R^n$ разложимо, то в нем можно найти хотя бы две различные пары векторов $\{x, y\}$ и $\{u, v\}$ такие, что $x - y = u - v$.*

С помощью этой леммы и теоремы 6.2.4 можно строить примеры многомерных неразложимых законов, аналогичные примерам 1 и 3 из § 3 гл. III. Мы этого делать здесь не будем.

Отметим, что в многомерном случае появляется возможность строить примеры неразложимых множеств и законов, аналогичные которым в одномерном случае невозможны.

Пример 1. Рассмотрим закон P равномерного распределения на трехмерной сфере $S^3 = \{x: |x| = 1\}$. Докажем, что этот закон — неразложимый, в то время как все его проекции — разложимые.

Для доказательства неразложимости закона P достаточно установить, что всякая сфера в R^3 является неразложимым множеством.

Пусть сфера $S \subset R^3$ представляется в виде $S = A + B$, причем каждое из множеств A и B содержит хотя бы две точки. Ясно, что $\overline{A} + \overline{B} = S$, поэтому множества A и B можно считать замкнутыми. Можно считать также, что сфера S лежит в полупространстве $\{x: x_1 \geqslant 0\}$ и $0 \in S$.

Из равенства $S = A + B$ вытекает, что множества A и B ограничены. Пусть вектор $r = (r_1, r_2, r_3) \in A$ таков, что $r_1 = \min_{x \in A} x_1$. Множество $A - r$ лежит в полупространстве $\{x: x_1 \geqslant 0\}$ и $0 \in A - r$, поэтому из равенства $S = (A - r) + (B + r)$ видно, что множество $B + r$ тоже лежит в полупространстве $\{x: x_1 \geqslant 0\}$. Отсюда легко заключаем, что $0 \in B + r$. Таким образом, мы установили, что можно, не уменьшая общности, считать, что $0 \in A$, $0 \in B$: действительно, вместо A и B можно рассмотреть соответственно $A - r$ и $B + r$. Из соотношений $S = A + B$, $0 \in A$, $0 \in B$ вытекает, что $A \subset S$, $B \subset S$.

Множества A и B, очевидно, не могут быть оба конечными; пусть бесконечным является, например, множество B. Возьмем два произвольных отличных от нуля вектора $x \in A$, $y \in B$. Четыре точки $0, x, y, x + y$ являются вершинами параллелограмма и лежат на S, поэтому указанный параллелограмм является прямоугольником. Таким образом, векторы x и y ортогональны, и можно утверждать, что множество B расположено в плоскости, проходящей через точку 0 и ортогональной вектору x. Если во множестве A, кроме вектора x, найдется еще хотя бы один отличный от нуля вектор z, то мы придем к заключению, что множество B должно располагаться на одной прямой, и так как $B \subset S$, то B может состоять не более чем из двух точек. Это невозможно, так как B — бесконечное множество. Если же во множестве A имеется только один ненулевой вектор x, то сумма $A + B = \{0, x\} + B$, очевидно, не может покрыть всю сферу S.

Итак, закон P равномерного распределения на сфере S^3 является неразложимым.

В силу сферической симметрии все проекции закона P одинаковы, и достаточно рассмотреть проекцию на вектор $e = (1, 0, 0)$. Имеем

$$P_e([a, b)) = P(\{x\colon \langle x, e\rangle \in [a, b)\}) =$$
$$= P(\{x\colon a \leqslant x_1 < b\}) = \frac{Q_{ab}}{4\pi},$$

где Q_{ab} — площадь части поверхности сферы S^3, расположенной между плоскостями $x_1 = a$ и $x_1 = b$. Непосредственный подсчет показывает, что P_e — закон равномерного распределения на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, является разложимым (см. пример 2 из § 4 гл. III, стр. 117).

В начале параграфа мы отмечали, что проекция компоненты закона является компонентой его проекции. Из примера 1 следует, что не всегда компонента проекции является проекцией компоненты. Действительно, указанный в этом примере закон P имеет лишь несобственные компоненты, в то время как его проекции имеют собственные компоненты. Любая из этих собственных компонент, конечно, не является проекцией компоненты закона P.

Укажем теперь примеры неразложимых законов с безгранично делимыми проекциями.

П р и м е р 2. Зададим двумерный закон P условиями

$$S(P) = \{x\colon x_2 = x_1^2\},$$

$$P(\{x\colon a \leqslant x_1 < b\}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-\tau^2}\, d\tau,$$

которые, очевидно, однозначно его определяют. Парабола $x_2 = x_1^2$ лежит в остром конусе $x_1^2 - x_2^2 \leqslant -1$, $x_2 \geqslant -1$, и на ней невозможно найти две различные пары точек $\{x, y\}$ и $\{u, v\}$ такие, что $x - y = u - v$. Поэтому из теоремы 6.2.4 и леммы 6.2.1 следует, что P — неразложимый закон.

Рассмотрим проекции закона P на векторы $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Нетрудно подсчитать, что

$$P_{e_1}(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_E e^{-\tau^2} d\tau, \quad P_{e_2}(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{E \cap (0,\, \infty)} e^{-\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

Первый из этих законов — закон Гаусса, а второй — закон χ^2-распределения с одной степенью свободы (В. Феллер, [1], стр. 68, 645). Оба закона являются безгранично делимыми.

Покажем теперь, что разложимый закон не может иметь «очень много» неразложимых проекций.

Теорема 6.2.5. *Предположим, что n-мерный ($n \geqslant 2$) закон P удовлетворяет условию: существует $m \geqslant 2n - 1$ векторов $e_1, \ldots, e_m \in S^n$, из которых никакие n не являются линейно зависимыми, такие, что проекции $P_{e_1}, \ldots, P_{e_m}$ неразложимы. Тогда закон P — неразложимый.*

Действительно, пусть имеем разложение $P = P^{(1)} * P^{(2)}$. По замечанию, сделанному в начале параграфа, выполняется $P_{e_k} = P^{(1)}_{e_k} * P^{(2)}_{e_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Поскольку закон P_{e_k} неразложимый, то либо $P^{(1)}_{e_k}$, либо $P^{(2)}_{e_k}$ является одномерным единичным законом. Учитывая, что $m \geqslant 2n - 1$, заключаем, что по крайней мере один из законов $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ обладает свойством: его проекции на n линейно независимых векторов являются одномерными единичными законами. Но закон, обладающий таким свойством, является n-мерным единичным законом. Таким образом, либо закон $P^{(1)}$, либо закон $P^{(2)}$ является единичным. Теорема доказана.

Покажем, что условие $m \geqslant 2n - 1$ в теореме 6.2.5 ослабить нельзя. Рассмотрим n-мерный ($n \geqslant 2$) закон P с х. ф.

$$\varphi(t;\, P) = \frac{1}{4}(1 + e^{it_1} + e^{it_2} + e^{i(t_1+t_2)}) = \\ = \frac{1}{2}(1 + e^{it_1}) \cdot \frac{1}{2}(1 + e^{it_2}).$$

Легко видеть, что проекция закона P на любой вектор $e \in S^n$, лежащий в гиперплоскости $\{x\colon x_1 = 0\}$ или лежащий в гиперплоскости $\{x\colon x_2 = 0\}$, имеет спектр, состоящий из двух точек, и, следовательно, является неразложимым законом. В указанном множестве векторов $e \in S^n$ можно, очевидно, выбрать $2n-2$ вектора, из которых никакие n не являются линейно зависимыми.

Покажем теперь, что теоремы 3.4.1 и 3.5.1 А. Я. Хинчина распространяются на многомерный случай. Обобщением теоремы 3.4.1 является следующая теорема.

Теорема 6.2.6. *Всякий n-мерный закон P, имеющий неразложимые компоненты, можно представить в виде*

$$P = P^{(0)} * P^{(1)} * P^{(2)} * \ldots,$$

где закон $P^{(0)}$ не имеет неразложимых компонент, а законы $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ — неразложимые (их множество может быть конечным или счетным).

Доказательство теоремы 6.2.6 в основном повторяет доказательство теоремы 3.4.1, поэтому мы подробно остановимся лишь на тех местах, где проявляется специфика многомерного характера.

Функционал Хинчина на классе х. ф. n-мерных законов определим равенством

$$N_a[\varphi] = -\sum_{j=1}^{n} \int_0^a \ln|\varphi(te_j)|\,dt,$$

где $a > 0$, $\varphi(t)$ — х. ф. n-мерного закона,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$$
$$\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1). \qquad (6.2.6)$$

Свойства (i) — (iv) одномерного функционала Хинчина (стр. 108) переносятся на многомерный случай тривиально. Многомерное обобщение леммы 3.4.1 выглядит так.

Лемма 6.2.2. *Пусть $\varphi(t)$ — х. ф. n-мерного закона P; $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где λ_j — медиана закона P_{e_j} ($j = 1, \ldots, n$, e_j — векторы (6.2.6)). Для любых $\varepsilon > 0$, $a > 0$ справедливо неравенство*

$$\int_{|x-\lambda|>\varepsilon} P(dx) \leqslant C(a, \varepsilon, n)\,N_a[\varphi],$$

где $C(a, \varepsilon, n)$, $0 < C(a, \varepsilon, n) < \infty$, не зависит от закона P.

Для доказательства заметим, что из леммы 3.4.1 следуют неравенства ($j = 1, \ldots, n$)

$$\int\limits_{|x-\lambda_j|>\varepsilon/\sqrt{n}} P_{e_j}(dx) \leqslant -C\left(a, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \int\limits_0^a \ln|\varphi(te_j)|\,dt. \quad (6.2.7)$$

Так как

$$\{x\colon |x-\lambda| > \varepsilon\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{x\colon |x_j-\lambda_j| > \varepsilon/\sqrt{n}\},$$

то получаем

$$\int\limits_{|x-\lambda|>\varepsilon} P(dx) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x_j-\lambda_j|>\varepsilon/\sqrt{n}} P(dx) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x-\lambda_j|>\varepsilon/\sqrt{n}} P_{e_j}(dx).$$

Отсюда и из (6.2.7) следует утверждение леммы.

Используя лемму 6.2.2, легко переносим на многомерный случай свойства (v) и (vi) одномерного функционала Хинчина (в (v) вместо $e^{i\beta t}$ следует писать $e^{i\langle\beta, t\rangle}$, а в (vi) говорить о последовательности векторов $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots \in R^n$ такой, что $\varphi_k(t)\,e^{-i\langle\lambda^{(k)}, t\rangle} \to 1$ равномерно на любом компакте в R^n). Далее переносим на многомерный случай лемму 3.4.2, рассуждая так же, как в одномерном случае, но заменяя $\lambda_{mn}t$ на $\langle\lambda_{mn}, t\rangle$ и выбирая вместо чисел η_k векторы $\eta_k = (\omega_k(e_1), \ldots, \omega_k(e_n))$. После этого все рассуждения из доказательства теоремы 3.4.1 могут быть повторены и в многомерном случае, и мы убеждаемся в справедливости теоремы 6.2.6.

В связи с теоремой 6.2.6 возникает проблема описания класса n-мерных законов, не имеющих неразложимых компонент. Условимся обозначать этот класс через I_{0n}, отождествляя, таким образом, I_{01} с I_0. Перенесем на многомерный случай теорему 3.5.1 А. Я. Хинчина.

Теорема 6.2.7. *Класс I_{0n} является собственным подклассом класса n-мерных безгранично делимых законов.*

Чтобы иметь право повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.5.1, достаточно заметить, что теорема А. Я. Хинчина о предельных распределениях сумм независимых и равномерно бесконечно малых случайных величин переносится на n-мерные случайные векторы, и перенести на многомерный случай теорему 3.5.2 о компактности множества компонент.

Многомерное обобщение последней имеет вид:

Теорема 6.2.8. *Пусть* $\{H^{(\alpha)}\}$ — *произвольное семейство компонент n-мерного закона P. Можно выделить последовательность* $H^{(\alpha_1)}, H^{(\alpha_2)}, \ldots,$ *для которой существуют векторы* $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots \in R^n$ *такие, что законы* $H^{(\alpha_k)}(E + x^{(k)})$ *при* $k \to \infty$ *слабо сходятся к некоторой компоненте закона P.*

Эту теорему можно вывести из замечания (стр. 121) к теореме 3.5.2 следующим образом. Предварительно заметим, что критерий компактности семейства законов переносится на многомерный случай в таком виде. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $a = a(\varepsilon) > 0$ такое, что $\int\limits_{|x|>a} H^{(\alpha)}(dx) < \varepsilon$, то из семейства законов $\{H^{(\alpha)}\}$ можно выделить последовательность, слабо сходящуюся к некоторому закону.

Пусть теперь $\{H^{(\alpha)}\}$ — заданное семейство компонент закона P и пусть $P = H^{(\alpha)} * G^{(\alpha)}$, где $G^{(\alpha)}$ — некоторые законы. Обозначая через e_j векторы (6.2.6), имеем $P_{e_j} = H^{(\alpha)}_{e_j} * G^{(\alpha)}_{e_j}$. Применяя к семействам одномерных законов $\{H^{(\alpha)}_{e_1}\}$ и $\{G^{(\alpha)}_{e_1}\}$ замечание к теореме 3.5.2 (стр. 121), заключаем, что существует последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ значений α и последовательность действительных чисел $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots$ такие, что законы $H^{(\alpha_k)}_{e_1}(E + x_1^{(k)})$ и $G^{(\alpha_k)}_{e_1}(E - x_1^{(k)})$ слабо сходятся к некоторым компонентам закона P_{e_1}. Далее применим аналогичным образом замечание к теореме 3.5.2 к семействам одномерных законов $\{H^{(\alpha_k)}_{e_2}\}$ и $\{G^{(\alpha_k)}_{e_2}\}$ и т. д. После n таких шагов получим последовательность $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots$ значений α и последовательность $\widetilde{x}^{(1)}, \widetilde{x}^{(2)}, \ldots$ векторов из R^n такие, что законы $H^{(\widetilde{\alpha}_k)}_{e_j}(E + \widetilde{x}_j^{(k)})$ и $G^{(\widetilde{\alpha}_k)}_{e_j}(E - \widetilde{x}_j^{(k)})$ при $k \to \infty$ и любом фиксированном j, $1 \leqslant j \leqslant n$, слабо сходятся к некоторым компонентам закона P_{e_j}. Отсюда следует, что для любого

$\varepsilon > 0$ найдется $b = b(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$H_{e_j}^{(\widetilde{\alpha}_k)}(\{x\colon |x-\widetilde{x}_j^{(k)}| \geqslant b\}) < \varepsilon, \quad G_{e_j}^{(\widetilde{\alpha}_k)}(\{x\colon |x+\widetilde{x}_j^{(k)}| \geqslant b\}) < \varepsilon \tag{6.2.8}$$

для всех $j=1, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots$ Так как

$$\{x\colon |x-x^{(k)}| \geqslant b\sqrt{n}\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{x\colon |x_j - x_j^{(k)}| \geqslant b\},$$

то из (6.2.8) следует, что

$$H^{(\widetilde{\alpha}_k)}(\{x\colon |x-\widetilde{x}^{(k)}| \geqslant b\sqrt{n}\}) < n\varepsilon,$$

$$G^{(\widetilde{\alpha}_k)}(\{x\colon |x-\widetilde{x}^{(k)}| \geqslant b\sqrt{n}\}) < n\varepsilon.$$

Таким образом, оба семейства n-мерных законов $\{H^{(\widetilde{\alpha}_k)}(E+\widetilde{x}^{(k)})\}$ и $\{G^{(\widetilde{\alpha}_k)}(E-\widetilde{x}^{(k)})\}$ компактны. Выделяя последовательность $\{k_s\}$ значений k так, чтобы соответствующие этим значениям законы слабо сходились, и переходя по этой последовательности к пределу в равенстве

$$P(E) = H^{(\widetilde{\alpha}_k)}(E+\widetilde{x}^{(k)}) * G^{(\widetilde{\alpha}_k)}(E-\widetilde{x}^{(k)}),$$

получаем утверждение теоремы 6.2.8. Тем самым доказана и справедливость теоремы 6.2.7.

Из теоремы 6.2.7 следует, что законы класса I_{0n} имеют лишь безгранично делимые компоненты.

С помощью теоремы Леви об общем виде х. ф. n-мерного безгранично делимого закона из теоремы 6.2.7 выводим, что проблема описания класса I_{0n} эквивалентна проблеме описания класса вполне σ-конечных мер ν (на классе борелевских множеств в R^n), удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{R^n \setminus \{0\}} |x|^2 (1+|x|^2)^{-1} \nu(dx) < \infty,$$

и неотрицательных квадратичных форм $Q(t)$ таких, что закон P с х. ф.

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{i\langle\beta, t\rangle - Q(t) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{R^n \setminus \{0\}} \left(e^{i\langle t, x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu(dx)\right\}$$

не имеет неразложимых компонент.

Нетрудно проверить, что если $P \in I_{0n}$, а $\mathfrak{J}$ — любое невырожденное линейное преобразование пространства R^n в себя, то закон $P_{\mathfrak{J}}(E) = P(\mathfrak{J}(E))$ принадлежит I_{0n}. Этой инвариантностью класса I_{0n} относительно невырожденных линейных преобразований мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

§ 3. Теорема о разложениях композиции многомерных законов Гаусса и Пуассона

Понятие многомерного закона Гаусса хорошо известно. Напомним менее употребительное понятие многомерного закона Пуассона.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимые векторы в R^n. Обозначим через Λ множество всех вершин параллелепипеда, образованного этими векторами, т. е. множество, состоящее из 2^n векторов вида $\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1.

Определение. Закон P называется *n-мерным законом Пуассона*, если его х. ф. имеет вид ($t \in R^n$)

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{i\langle\beta, t\rangle + \sum_{\xi \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda(\xi)\left[e^{i\langle t, \xi\rangle} - 1\right]\right\}, \quad (6.3.1)$$

где $\beta \in R^n$, а числа $\lambda(\xi)$ неотрицательны.

Заметим, что проекции n-мерного ($n \geqslant 2$) закона Пуассона, вообще говоря, не являются одномерными законами Пуассона, но являются композициями не более чем $2^n - 1$ таких законов. В случае, когда векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют ортогональный базис в R^n, проекции n-мерного закона Пуассона (у которого параллелепипед Λ образован $e_1, \ldots, e_n$) на направления векторов $e_1, \ldots, e_n$ будут одномерными законами Пуассона.

Говоря в дальнейшем об n-мерных законах Гаусса и Пуассона, мы не будем исключать возможности вырождения, в частности, не будем предполагать, что в (6.3.1) хотя бы одно из чисел $\lambda(\xi)$ отлично от нуля.

Теорема 6.3.1. *Если закон P является композицией n-мерного закона Гаусса и n-мерного закона Пуассона, то $P \in I_{0n}$. Более того, если закон P имеет х. ф.*

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{i\langle\beta, t\rangle - Q(t) + \sum_{\xi \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda(\xi)\left[e^{i\langle t, \xi\rangle} - 1\right]\right\} \quad (6.3.2)$$

($Q(t)$ — неотрицательная квадратичная форма), то х. ф. любой компоненты $P^{(1)}$ закона P имеет вид

$$\varphi(t;\ P^{(1)}) = \exp\{i\langle\beta^{(1)},\ t\rangle - Q^{(1)}(t) + \sum_{\xi\in\Lambda\setminus\{0\}} \lambda^{(1)}(\xi)[e^{i\langle t,\ \xi\rangle} - 1]\},$$

где $\beta^{(1)} \in R^n$, $0 \leqslant \lambda^{(1)}(\xi) \leqslant \lambda(\xi)$, а квадратичная форма $Q^{(1)}(t)$ такова, что $0 \leqslant Q^{(1)}(t) \leqslant Q(t)$ $(t \in R^n)$.

Очевидно, частными случаями теоремы 6.3.1 являются следующие теоремы.

Теорема 6.3.2. *Все компоненты n-мерного закона Гаусса являются n-мерными законами Гаусса.*

Теорема 6.3.3. *Все компоненты n-мерного закона Пуассона являются n-мерными законами Пуассона.*

Теоремы 6.3.1, 6.3.2 и 6.3.3 являются многомерными обобщениями теорем 5.1.1, 5.1.2 и 3.1.4 соответственно.

Заметим, что проекции закона с х. ф. вида (6.3.2), вообще говоря, не являются композициями одномерных законов Гаусса и Пуассона и не принадлежат классу $\mathfrak{L}$, поэтому, вообще говоря, не принадлежат классу I_0 (теорема 4.1.1). В связи с этим теорему 6.3.1 нельзя получить, если методом проекций пользоваться так, как при доказательствах теорем 6.1.4 и 6.2.1. Мы выведем теорему 6.3.1 из ее одномерного случая — теоремы 5.1.1 — иначе.

В основе нашего рассуждения лежит такой факт (мы сформулируем его для простоты только в случае $n = 2$): если $\varphi(t;\ P) = \varphi(t_1,\ t_2;\ P)$ — целая х. ф., то при любом y, $-\infty < y < \infty$, функции

$$\varphi_y(t) = \frac{\varphi(t,\ iy;\ P)}{\varphi(0,\ iy;\ P)}, \qquad \psi_y(t) = \frac{\varphi(iy,\ t;\ P)}{\varphi(iy,\ 0;\ P)} \tag{6.3.3}$$

являются х. ф. Для доказательства достаточно рассмотреть одномерные законы

$$F_y(E) = \int_{E\times R^1} e^{-yx_2} P(dx) \left[\int_{R^2} e^{-yx_2} P(dx)\right]^{-1},$$

$$G_y(E) = \int_{E\times R^1} e^{-yx_1} P(dx) \left[\int_{R^2} e^{-yx_1} P(dx)\right]^{-1}.$$

Очевидно, $\varphi_y(t)$ является х. ф. для F_y, а $\psi_y(t)$ — для G_y.

При доказательстве теоремы 6.3.1 можно, не уменьшая общности, считать, что параллелепипед Λ, фигурирующий в (6.3.2), является единичным кубом $\{x\colon\ 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k =$

$= 1, \ldots, n\}$: общий случай сводится к этому переходом от закона $P = P(E)$ к закону $P_{\mathfrak{J}} = P(\mathfrak{J}(E))$, где $\mathfrak{J}$ — подходящее невырожденное линейное преобразование R^n в себя. Будем считать также, что $n = 2$, так как случай любого $n \geqslant 3$ отличается лишь усложнением записи. Тогда выражение для х. ф. закона P записывается в виде

$$\varphi(t;\ P) = \varphi(t_1,\ t_2;\ P) = \exp\{i(\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2) - \gamma_{11}t_1^2 - 2\gamma_{12}t_1t_2 - \\ -\gamma_{22}t_2^2 + \lambda_{10}(e^{it_1} - 1) + \lambda_{11}(e^{i(t_1+t_2)} - 1) + \lambda_{01}(e^{it_2} - 1)\}, \quad (6.3.4)$$

где β_1 и β_2 действительны, λ_{10}, λ_{11}, λ_{01} неотрицательны, $\gamma_{11}t_1^2 + 2\gamma_{12}t_1t_2 + \gamma_{22}t_2^2$ — неотрицательная квадратичная форма.

Пусть $P = P^{(1)} * P^{(2)}$, где $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ — некоторые законы. Так как проекции P_{e_1} и P_{e_2}, где $e_1 = (1,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1)$, являются одномерными композициями законов Гаусса и Пуассона, а $P_{e_k} = P^{(1)}_{e_k} * P^{(2)}_{e_k}$ $(k = 1,\ 2)$, то по теореме 5.1.1 проекции $P^{(1)}_{e_k}$ и $P^{(2)}_{e_k}$ являются одномерными композициями законов Гаусса и Пуассона. Таким образом $(k,\ j = 1,\ 2)$,

$$\varphi(t;\ P^{(j)}_{e_k}) = \exp\{i\beta_k^{(j)}t - \gamma_k^{(j)}t^2 + \lambda_k^{(j)}(e^{it} - 1)\}, \quad (6.3.5)$$

где $\beta_k^{(j)}$ — действительные, $\gamma_k^{(j)}$ и $\lambda_k^{(j)}$ — неотрицательные постоянные.

Так как х. ф. $\varphi(t;\ P)$ является целой функцией от t, то по теореме 6.2.1 х. ф. $\varphi(t;\ P^{(j)})$, $j = 1,\ 2$,— тоже целые функции, и, следовательно, соотношение

$$\varphi(t;\ P) = \varphi(t;\ P^{(1)})\,\varphi(t;\ P^{(2)}) \quad (6.3.6)$$

выполняется во всем пространстве C^2.

Обозначим через $\varphi_y^{(0)}(t)$, $\psi_y^{(0)}(t)$; $\varphi_y^{(1)}(t)$, $\psi_y^{(1)}(t)$; $\varphi_y^{(2)}(t)$, $\psi_y^{(2)}(t)$ функции (6.3.3), построенные соответственно для законов P, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$. Эти функции являются х. ф., обозначим соответствующие законы $F_y^{(j)}$, $G_y^{(j)}$, $j = 0,\ 1,\ 2$. Из (6.3.6) следует, что

$$\varphi_y^{(0)}(t) = \varphi_y^{(1)}(t)\,\varphi_y^{(2)}(t), \quad \psi_y^{(0)}(t) = \psi_y^{(1)}(t)\,\psi_y^{(2)}(t), \\ t \in C^1, \quad y \in R^1,$$

поэтому $F_y^{(0)} = F_y^{(1)} * F_y^{(2)}$, $G_y^{(0)} = G_y^{(1)} * G_y^{(2)}$.

Из (6.3.3) и (6.3.4) видно, что законы $F_y^{(0)}$ и $G_y^{(0)}$ являются одномерными композициями законов Гаусса и Пуассона. По теореме 5.1.1 законы $F_y^{(j)}$ и $G_y^{(j)}$, $j = 1, 2$, тоже являются одномерными композициями законов Гаусса и Пуассона. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\varphi_y^{(1)}(t) &= \exp\{i\beta(y)t - \gamma(y)t^2 + \lambda(y)(e^{it}-1)\},\\ \psi_y^{(1)}(t) &= \exp\{i\widetilde{\beta}(y)t - \widetilde{\gamma}(y)t^2 + \widetilde{\lambda}(y)(e^{it}-1)\},\end{aligned}\right\} \tag{6.3.7}$$

где β и $\widetilde{\beta}$ — действительные, а γ, $\widetilde{\gamma}$, λ, $\widetilde{\lambda}$ — неотрицательные функции параметра y, $-\infty < y < \infty$.

Вспоминая, что

$$\varphi_y^{(1)}(t) = \frac{\varphi(t, iy; P^{(1)})}{\varphi(0, iy; P^{(1)})}, \quad \psi_y^{(1)}(t) = \frac{\varphi(iy, t; P^{(1)})}{\varphi(iy, 0; P^{(1)})},$$

$$\varphi(0, iy; P^{(1)}) = \varphi(iy; P_{e_2}^{(1)}), \quad \varphi(iy, 0; P^{(2)}) = \varphi(iy; \dot{P}_{e_1}^{(1)}),$$

из (6.3.7) и (6.3.5) получим

$$\varphi(t, iy; P^{(1)}) = \exp\{i\beta(y)t - \gamma(y)t^2 + \lambda(y)(e^{it}-1) - \\ -\beta_2^{(1)}y + \gamma_2^{(1)}y^2 + \lambda_2^{(1)}(e^{-y}-1)\}, \tag{6.3.8}$$

$$\varphi(iy, t; P^{(1)}) = \exp\{i\widetilde{\beta}(y)t - \widetilde{\gamma}(y)t^2 + \widetilde{\lambda}(y)(e^{it}-1) - \\ -\beta_1^{(1)}y + \gamma_1^{(1)}y^2 + \lambda_1^{(1)}(e^{-y}-1)\}. \tag{6.3.9}$$

Положим в (6.3.8) $t = iu$, $y = v$, а в (6.3.9) $t = iv$, $y = u$, где u, $v \in R^1$. Тогда левые части в (6.3.8) и (6.3.9) совпадут. Отсюда следует, что при u, $v \in R^1$ справедливо равенство

$$-\beta(v)u + \gamma(v)u^2 + \lambda(v)(e^{-u}-1) - \beta_2^{(1)}v + \gamma_2^{(1)}v^2 + \\ + \lambda_2^{(1)}(e^{-v}-1) = -\widetilde{\beta}(u)v + \widetilde{\gamma}(u)v^2 + \widetilde{\lambda}(u)(e^{-v}-1) - \\ - \beta_1^{(1)}u + \gamma_1^{(1)}u^2 + \lambda_1^{(1)}(e^{-u}-1).$$

Подставляя в это равенство последовательно $u = 1$, $u = 2$ и $u = 3$, получим три соотношения, которые можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\beta(v)$, $\gamma(v)$, $\lambda(v)$. Определитель этой системы отличен от нуля; решая ее, получим

$$\begin{aligned}\beta(v) &= \mathrm{B}_1 e^{-v} + \mathrm{B}_2 v^2 + \mathrm{B}_3 v + \mathrm{B}_4,\\ \gamma(v) &= \Gamma_1 e^{-v} + \Gamma_2 v^2 + \Gamma_3 v + \Gamma_4,\\ \lambda(v) &= \Lambda_1 e^{-v} + \Lambda_2 v^2 + \Lambda_3 v + \Lambda_4,\end{aligned}$$

где B_m, Γ_m, Λ_m $(m = 1, 2, 3, 4)$ — действительные постоянные. Отсюда заключаем, что при действительных u и v

$$\varphi(iu, iv; P^{(1)}) = \exp \{Q(u, v) + D_1 e^{-u} + \\ + D_2 e^{-v} + D_3 e^{-u-v} + D_4 u e^{-v} + D_5 v e^{-u} + \\ + D_6 u^2 e^{-v} + D_7 v^2 e^{-u}\}, \qquad (6.3.10)$$

где $Q(u, v)$ — полином с действительными коэффициентами не выше второй степени по каждой из переменных, а D_k $(1 \leqslant k \leqslant 7)$ — действительные постоянные. Так как в обеих частях (6.3.10) стоят целые функции от u и v, то (6.3.10) выполняется и при комплексных u, v. Следовательно, для х. ф. $\varphi(t_1, t_2; P^{(1)})$ имеем выражение

$$\varphi(t_1, t_2; P^{(1)}) = \exp\{Q(-it_1, -it_2) + D_1 e^{it_1} + \\ + D_2 e^{it_2} + D_3 e^{i(t_1+t_2)} - D_4 i t_1 e^{it_2} - D_5 i t_2 e^{it_1} - \\ - D_6 t_1^2 e^{it_2} - D_7 t_2^2 e^{it_1}\}.$$

Избавимся теперь от некоторых постоянных. Для этого заметим, что функция $\varphi(t_1, t_2; P^{(1)})$ при любом фиксированном значении одной из переменных t_1, t_2 является ограниченной функцией от второй, если эта вторая остается действительной. Это замечание непосредственно вытекает из теоремы 6.1.5.

Если возьмем $t_1 = -iu$, где $u > 0$ достаточно велико, а t_2 заставим пробегать все действительные значения, то получим, что $D_7 \geqslant 0$. Если же возьмем $t_1 = \pi - iu$, где $u > 0$ достаточно велико, а t_2 заставим пробегать все действительные значения, то получим, что $D_7 \leqslant 0$. Итак, $D_7 = 0$. Аналогичным образом получаем, что $D_6 = 0$.

Так как $|\varphi(t_1, t_2; P^{(1)})| \leqslant 1$ при действительных t_1 и t_2, то коэффициент при $t_1^2 t_2^2$ в полиноме $Q(-it_1, -it_2)$ должен быть неположительным. С другой стороны, беря $t_1 = iu$, где u достаточно велико, и заставляя t_2 пробегать все действительные значения, видим, что этот коэффициент должен быть неотрицательным и, следовательно, равняться нулю.

Далее заключаем, беря $t_1 = iu$, где u достаточно велико и имеет знак, противоположный знаку коэффициента при $it_1 t_2^2$ в полиноме $Q(-it_1, -it_2)$, что этот коэффициент равен нулю. Аналогичным образом равен нулю и коэффициент при $it_1^2t_2$.

Учитывая, что $\varphi(0, 0; P^{(1)}) = 1$, можем выражение для $\varphi(t_1, t_2; P^{(1)})$ записать в виде

$$\varphi(t_1, t_2; P^{(1)}) = \exp\{i(\beta_1' t_1 + \beta_2' t_2) - \gamma_{11}' t_1^2 - \\ - 2\gamma_{12}' t_1 t_2 - \gamma_{22}' t_2^2 + \lambda_{10}'(e^{it_1} - 1) + \lambda_{11}'(e^{i(t_1+t_2)} - 1) + \\ + \lambda_{01}'(e^{it_2} - 1) + \mu_1 it_1 e^{it_2} + \mu_2 it_2 e^{it_1}\}, \quad (6.3.11)$$

где постоянные β_1', β_2', γ_{11}', γ_{12}', γ_{22}', λ_{10}', λ_{11}', λ_{01}', μ_1, μ_2 действительны. Квадратичная форма $\gamma_{11}'t_1^2 + 2\gamma_{12}'t_1t_2 + \gamma_{22}'t_2^2$ должна быть неотрицательной, иначе неравенство $|\varphi(t_1, t_2; P^{(1)})| \leqslant 1$ не могло бы выполняться при всех действительных t_1, t_2. Покажем, что постоянные λ_{10}', λ_{11}', λ_{01}' неотрицательны, а $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Пусть u, v, x, y — действительные числа. Из (6.3.11) следует, что

$$|\varphi(u + iv, x + iy; P^{(1)})| / \varphi(iv, iy; P^{(1)}) = \\ = \exp\left\{-\gamma_{11}'u^2 - 2\gamma_{12}'ux - \gamma_{22}'x^2 - 2\lambda_{10}'e^{-v}\sin^2\frac{u}{2} - \right. \\ - 2\lambda_{11}'e^{-v-y}\sin^2\frac{u+x}{2} - 2\lambda_{01}'e^{-y}\sin^2\frac{x}{2} + \\ \left. + \mu_1 e^{-y}\left(2v\sin^2\frac{x}{2} - u\sin x\right) + \mu_2 e^{-v}\left(2y\sin^2\frac{u}{2} - x\sin u\right)\right\}.$$

Обозначим выражение, стоящее справа в фигурных скобках, через $H(u, v, x, y)$. В силу теоремы 6.1.5 при всех действительных значениях u, v, x, y должно выполняться

$$H(u, v, x, y) \leqslant 0.$$

Если бы $\mu_1 \neq 0$, то можно было бы подобрать u_0 и x_0 такими, чтобы

$$\mu_1 u_0 \sin x_0 + 2\lambda_{11}' \sin^2\frac{u_0 + x_0}{2} + 2\lambda_{01}' \sin^2\frac{x_0}{2} < 0,$$

и мы имели бы

$$\lim_{y \to -\infty} H(u_0, 0, x_0, y) = +\infty.$$

Следовательно, $\mu_1 = 0$. Аналогичным образом доказываем, что и $\mu_2 = 0$.

Если бы $\lambda'_{11} < 0$, то мы имели бы

$$\lim_{y \to -\infty} H\left(\frac{\pi}{2}, y, \frac{\pi}{2}, y\right) = +\infty,$$

а если бы $\lambda'_{10} < 0$ $(\lambda'_{01} < 0)$, то имели бы

$$\lim_{v \to -\infty} H(\pi, v, \pi, 0) = +\infty \qquad \left(\lim_{y \to -\infty} H(\pi, 0, \pi, y) = +\infty\right).$$

Поэтому постоянные λ'_{10}, λ'_{11}, λ'_{01} неотрицательны.

Таким образом, доказано, что закон $P^{(1)}$ является композицией законов Гаусса и Пуассона. Так как проведенные рассуждения можно повторить для закона $P^{(2)}$, то теорема тем самым доказана.

Методом, которым мы пользовались при доказательстве теоремы 6.3.1, можно доказать более общие утверждения. Легко, например, получается, что классу I_{0n} принадлежат законы, х. ф. которых имеют вид (6.3.1), но суммирование в (6.3.1) распространяется на векторы вида $\xi = \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n$, где числа ε_k могут принимать значения 0, 1 и (—1).

§ 4. Достаточные условия принадлежности безгранично делимых законов без гауссовой компоненты классу I_{0n}

В этом параграфе будут рассматриваться n-мерные б. д. законы без гауссовой компоненты (т. е. такие, для которых в (6.1.14) $Q(t) \equiv 0$), обладающие вполне конечной спектральной мерой Леви. Формула (6.1.14) для х. ф. таких законов может быть записана в форме

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{i\langle\beta, t\rangle + \int_{R^n} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\, \nu_P(dx)\right\}, \qquad t \in R^n.$$

Доказательства основных теорем 6.4.1—6.4.3 отложим до § 6.

Определение. Будем говорить, что мера μ *сосредоточена на (борелевском) множестве* $A \subset R^n$, если для любого $E \subset R^n$ такого, что $E \cap A = \varnothing$, выполняется $\mu(E) = 0$.

Теорема 6.4.1. *Если n-мерный б. д. закон P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера Леви сосредоточена на выпуклом ограниченном открытом* *множестве* $A \subset R^n$ *таком, что* *) $A \cap (2)\,A = \varnothing$, *то закон* P *принадлежит классу* I_{0n}.

Заметим, что в условиях теоремы точка 0 не может быть предельной для множества A. Поэтому из условия $\int\limits_{R^n \setminus \{0\}} |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} \nu_P(dx) < \infty$ следует вполне конечность спектральной меры Леви ν_P.

В одномерном случае теорема 6.4.1 утверждает, что если спектральная мера Леви б. д. закона P, не имеющего гауссовой компоненты, сосредоточена на интервале (a, b), где $0 < a < b \leqslant 2a$, то $P \in I_0$. В частности, принадлежит I_0 б. д. закон P с х. ф.

$$\varphi(t;\, P) = \exp\left\{\int\limits_1^2 (e^{itx} - 1)\, dx\right\}.$$

Этот закон, конечно, не входит в класс $\mathfrak{L}$, поэтому требование наличия гауссовой компоненты в теореме 4.1.1 существенно.

В одномерном случае теорему 6.4.1 можно значительно усилить.

Теорема 6.4.2. *Пусть одномерный б. д. закон* P *не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера Леви сосредоточена на множестве вида*

$$A = [a, b] \cup \{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}, \tag{6.4.1}$$

где $0 < a \leqslant b \leqslant 2a$, *а числа* $\mu_m > b$ *таковы, что отношения* μ_{m+1}/μ_m $(m = 1, 2, \ldots)$ *являются натуральными числами, отличными от единицы. Предположим, что для некоторого* $K > 0$ *выполнено условие*

$$\int\limits_{x \geqslant y} \nu_P(dx) = O(\exp\{-Ky^2\}), \qquad y \to +\infty.$$

Тогда закон P *принадлежит классу* I_0.

Вернемся к многомерному случаю.

---

*) Напомним, что через $(m)\,A$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, обозначаются множества, определяемые равенствами

$$(0)\,A = \{0\}, \quad (m)\,A = A + (m-1)\,A \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что если A — выпуклое множество, то множество $(m)\,A$ получается применением к A гомотетии с центром в точке 0 и коэффициентом, равным m.

Определение*). Будем говорить, что множество $A \subset R^n$ является *множеством с независимыми точками*, если ни один его вектор не выражается конечной линейной комбинацией других его векторов с рациональными коэффициентами.

Из теоремы 6.4.1 мы выведем в § 6 такой результат.

Теорема 6.4.3. *Пусть n — мерный б. д. закон P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера Леви вполне конечна и сосредоточена на множестве с независимыми точками.*

Тогда закон P принадлежит классу I_{0n}.

Следствие. *Существуют законы класса I_0, х. ф. которых не допускают аналитического продолжения ни в какую полосу вида $0 < \operatorname{Im} t < \varepsilon$ или $0 > \operatorname{Im} t > -\varepsilon$.*

Действительно, пусть $A = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — множество с независимыми точками, такое, что $k < x_k < k+1$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Такое множество можно построить приемом, аналогичным использованному в примере 3 из § 3 главы III. Пусть ν — мера, сосредоточенная на A и такая, что $\nu(\{x_k\}) = k^{-2}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Рассмотрим б. д. закон P с х. ф.

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{\int_{R^1} (e^{itx} - 1)\,\nu(dx)\right\}.$$

В силу теоремы 6.4.3 закон P принадлежит I_0. Так как интеграл

$$\int_{R^1} (e^{-\eta x} - 1)\,\nu(dx) = \sum_{|k|=1}^{\infty} k^{-2}(e^{-\eta x_k} - 1)$$

не сходится ни при каком $\eta \neq 0$, то с помощью теоремы 2.6.1 заключаем, что х. ф. $\varphi(t; P)$ не может аналитически продолжаться ни в какую полосу вида $0 < \operatorname{Im} t < \varepsilon$ или $0 > \operatorname{Im} t > -\varepsilon$.

С помощью теоремы 6.4.3 можно доказать такой общий факт относительно класса I_{0n}.

Теорема 6.4.4. *Класс I_{0n} является плотным в смысле слабой сходимости множеством в классе всех n-мерных б. д. законов.*

---

*) В одномерном случае это определение встречалось в § 3 гл. III.

Покажем, как теорема 6.4.4 получается из теоремы 6.4.3. Достаточно для каждого n-мерного б. д. закона P построить слабо сходящуюся к нему последовательность законов $\{P_m\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 6.4.3.

Можно считать, что квадратичная форма $Q(t)$ в представлении х. ф. закона P формулой Леви

$$\varphi(t; P) = \\ = \exp\left\{i\langle\beta, t\rangle - Q(t) + \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle t, x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu_P(dx)\right\}$$

имеет вид

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k^2, \quad \gamma_k \geqslant 0,$$

так как общий случай сводится к этому невырожденным линейным преобразованием.

Для каждого $m = 1, 2, 3, \ldots$ и целочисленного вектора q, $|q| < m^2$, рассмотрим n-мерные полуинтервалы

$$U^{(m, q)} = \{x\colon q_j/m \leqslant x_j < (q_j+1)/m,\ j = 1, \ldots, n\}$$

и возьмем только те из них, которые лежат вне гиперкуба

$$U^{(m)} = \{x\colon |x_j| < 1/m,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Фиксируя m, выберем внутри каждого из полуинтервалов $U^{(m, q)}$ по одной точке $x^{(m, q)}$, а также подберем n точек

$$x_1^{(m)} = (x_{11}^{(m)}, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad x_n^{(m)} = (0, 0, \ldots, x_{nn}^{(m)})$$

в гиперкубе $U^{(m)}$ таким образом, чтобы составленное из этих точек конечное множество A_m было множеством с независимыми точками. Выбор точек можно производить с помощью приема, использованного в примере 3 из § 3 гл. III.

Определим меру $\nu^{(m)}$ равенством

$$\nu^{(m)}(E) = \sum_{x^{(m, q)} \in E} \nu_P(U^{(m, q)}) + \sum_{x_k^{(m)} \in E} 2\gamma_k (x_{kk}^{(m)})^{-2}.$$

Очевидно, что при $m \to \infty$

$$\int\limits_{R^n\setminus U^{(m)}} \left(e^{i\langle t, x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu^{(m)}(dx) \to \\ \to \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle t, x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu_P(dx)$$

и

$$\int\limits_{U^{(m)}} \left(e^{i\langle t,\,x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\,x\rangle}{1+|x|^2}\right) \nu^{(m)}(dx) \to -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k^2,$$

причем сходимость равномерна по t на любом компакте в R^n. Следовательно, б. д. законы P_m с х. ф.

$$\varphi(t;\,P_m) = \exp\left\{i\langle\beta,\,t\rangle + \int\limits_{R^n} \left(e^{i\langle t,\,x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\,x\rangle}{1+|x|^2}\right) \nu^{(m)}(dx)\right.$$

слабо сходятся к закону P. Законы P_m, очевидно, удовлетворяют условиям теоремы 6.4.3.

§ 5. Вспомогательные результаты

Для доказательства теорем 6.4.1—6.4.3 понадобятся некоторые теоремы о компонентах n-мерных б. д. законов, представляющие самостоятельный интерес.

Введем сначала некоторые определения и обозначения.

Условимся называть *зарядом* любую функцию множеств λ, представимую в виде $\lambda = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — вполне конечные меры на классе борелевских множеств в R^n. *Преобразованием Фурье* заряда λ назовем функцию

$$\varphi(t;\,\lambda) = \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\,x\rangle} \lambda(dx), \qquad t \in R^n.$$

Как известно, заряд однозначно определяется своим преобразованием Фурье. *Сверткой* зарядов λ_1 и λ_2 назовем заряд

$$\lambda(E) = (\lambda_1 * \lambda_2)(E) = \int\limits_{R^n} \lambda_1(E-x)\,\lambda_2(dx).$$

Напомним, что операция свертки коммутативна и ассоциативна и соотношение $\lambda = \lambda_1 * \lambda_2$ эквивалентно соотношению

$$\varphi(t;\,\lambda) = \varphi(t;\,\lambda_1)\,\varphi(t;\,\lambda_2), \qquad t \in R^n.$$

Обозначим через λ^{n*}, $n = 0, 1, 2, \ldots$, заряды, определяемые равенствами

$$\lambda^{0*} = \varepsilon_0, \quad \lambda^{n*} = \lambda * \lambda^{(n-1)*}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Понятие «заряд сосредоточен на множестве» определяется так же, как и в случае мер. Напомним, что мы условились рассматривать только борелевские множества. По известной теореме (П. Халмош [1], стр. 63) для любой меры μ и борелевского множества E существует множество E_1 класса F_σ такое, что $E_1 \subset E$, $\mu(E \setminus E_1) = 0$. Отсюда следует, что множество, на котором сосредоточен заряд, можно, не уменьшая общности, считать принадлежащим классу F_σ.

Заметим, что если множества A_1 и A_2 принадлежат классу F_σ, то их арифметическая сумма $A_1 + A_2$ тоже принадлежит классу *) F_σ. В самом деле, беря неубывающие последовательности $\{A_1^{(m)}\}$ и $\{A_2^{(m)}\}$ ограниченных замкнутых множеств, сходящиеся соответственно к A_1 и A_2, видим, что множества $A_1^{(m)} + A_2^{(m)}$ также образуют неубывающую последовательность ограниченных замкнутых множеств и эта последовательность сходится к $A_1 + A_2$.

Введем еще такие операции над множеством $A \subset R^n$. Обозначим через $M(A)$ множество всех конечных линейных комбинаций векторов множества A с целыми коэффициентами, а через $M^+(A)$ — подмножество множества $M(A)$, состоящее из всех конечных линейных комбинаций векторов множества A с натуральными коэффициентами. Заметим, что $M^+(A) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (k) A$, поэтому, если множество A принадлежит классу F_σ, то и множество $M^+(A)$ принадлежит классу F_σ.

Теорема 6.5.1. *Пусть n-мерный б. д. закон P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера Леви ν_P вполне конечна и сосредоточена на множестве A класса F_σ. Предположим, что выполняется условие*

$$\nu_P(A) < \ln 2. \tag{6.5.1}$$

Тогда х. ф. любой компоненты P_1 закона P имеет вид

$$\varphi(t; P_1) = \exp\left\{i\langle\beta, t\rangle + \int\limits_{R^n} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\,\lambda(dx)\right\}, \tag{6.5.2}$$

*) Арифметическая сумма двух борелевских множеств может не быть борелевским множеством. П. Эрдеш и А. Стоун [1] получили более сильный результат: арифметическая сумма двух множеств, из которых одно принадлежит классу F_σ, а другое — классу G_δ, может не быть борелевским множеством.

где $\beta \in R^n$, *а* λ — *заряд, сосредоточенный на множестве* $M^+(A)$ *и такой, что*

$$\lambda(E) \geqslant 0, \quad \text{если} \quad E \cap (2) M^+(A) = \varnothing. \qquad (6.5.3)$$

Для доказательства этой теоремы понадобятся три леммы.

Лемма 6.5.1. *Пусть заряды* λ_1 *и* λ_2 *сосредоточены соответственно на множествах* A_1 *и* A_2 *класса* F_σ. *Тогда заряд* $\lambda = \lambda_1 * \lambda_2$ *сосредоточен на множестве* $A = A_1 + A_2$.

Действительно, возьмем любое множество E такое, что $E \cap A = \varnothing$. Имеем

$$\lambda(E) = \int_{R^n} \lambda_1(E - x)\,\lambda_2(dx) = \int_{A_2} \lambda_1(E - x)\,\lambda_2(dx) = \int_{A_2} \lambda_1((E - x) \cap A_1)\,\lambda_2(dx).$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле равна нулю, так как из $x \in A_2$, $E \cap A = \varnothing$ следует $(E - x) \cap A_1 = \varnothing$. Следовательно, $\lambda(E) = 0$, что и требовалось.

Лемма 6.5.2. *Пусть* μ_1 *и* μ_2 — *вполне конечные меры,* $\mu = \mu_1 * \mu_2$ — *их свертка. Если мера* μ *сосредоточена на множестве* A *класса* F_σ, *а* $\mu_2(\{0\}) > 0$, *то мера* μ_1 *сосредоточена на множестве* A.

Доказательство. Пусть E — любое множество такое, что $E \cap A = \varnothing$. Имеем

$$0 = \mu(E) = \int_{R^n} \mu_1(E - x)\,\mu_2(dx) \geqslant \int_{\{0\}} \mu_1(E - x)\,\mu_2(dx) = \mu_1(E)\,\mu_2(\{0\}),$$

откуда $\mu_1(E) = 0$.

Лемма 6.5.3. *Если х. ф. n-мерного б. д. закона* P *представима в виде*

$$\varphi(t; P) = \exp\left\{\int_{R^n} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\,\nu_P(dx)\right\}, \qquad t \in R^n, \qquad (6.5.4)$$

где мера ν_P *вполне конечна и сосредоточена на множестве* A *класса* F_σ, *то закон* P *сосредоточен на множестве* $\{0\} \cup M^+(A)$ *и*

$$P(\{0\}) \geqslant \exp(-\nu_P(A)). \qquad (6.5.5)$$

Доказательство. Из (6.5.4) имеем

$$\varphi(t; P) = e^{-\nu_P(A)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \int_{R^n} e^{i\langle t, x\rangle} \nu_P(dx) \right\}^m =$$

$$= e^{-\nu_P(A)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{R^n} e^{i\langle t, x\rangle} \nu_P^{m*}(dx) =$$

$$= e^{-\nu_P(A)} \int_{R^n} e^{i\langle t, x\rangle} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \nu_P^{m*} \right\} (dx),$$

откуда следует, что

$$P = e^{-\nu_P(A)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \nu_P^{m*}. \tag{6.5.6}$$

По лемме 6.5.1 мера ν_P^{m*} сосредоточена на множестве $(m)\,A$, поэтому закон P будет сосредоточен на множестве $\bigcup_{m=0}^{\infty} (m)\,A = \{0\} \cup M^+(A)$. Далее, из (6.5.6) видно, что

$$P(\{0\}) \geqslant e^{-\nu_P(A)} \nu_P^{0*}(\{0\}) = e^{-\nu_P(A)}.$$

Приступим к доказательству теоремы 6.5.1. Не уменьшая общности, можно считать, что х. ф. закона P представляется в виде (6.5.4). По лемме 6.5.3 закон P сосредоточен на множестве

$$\{0\} \cup M^+(A). \tag{6.5.7}$$

Из условия $\nu_P(A) < \ln 2$ и неравенства (6.5.5) следует, что $P(\{0\}) > 1/2$. Пусть $P = P_1 * P_2$, где P_1 и P_2 — законы. Применяя неравенство (6.2.5) теоремы 6.2.3, убеждаемся, что существует точка $\beta \in R^n$ такая, что $P_1(\{\beta\}) > 1/2$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\beta = 0$, так как в противном случае можно перейти от законов P_1 и P_2 к законам $P_1 * \varepsilon_{-\beta}$ и $P_2 * \varepsilon_\beta$. Далее, заметим, что из $P(\{0\}) > 1/2$, $P_1(\{0\}) > 1/2$ следует, что $P_2(\{0\}) > 0$, так как иначе мы имели бы

$$\frac{1}{2} < P(\{0\}) = \int_{R^n} P_1(\{0\} - x)\, P_2(dx) =$$

$$= \int_{R^n \setminus \{0\}} P_1(\{-x\})\, P_2(dx) \leqslant \int_{R^n \setminus \{0\}} P_1(R^n \setminus \{0\})\, P_2(dx) < \frac{1}{2},$$

В силу леммы 6.5.2 заключаем, что закон P_1 сосредоточен на множестве (6.5.7).

Положим $c = P_1(\{0\})$ и рассмотрим меру $\mu = P_1 - c\varepsilon_0$. Очевидно, мера μ сосредоточена на множестве $M^+(A)$. Так как $\mu(R^n) = 1 - c < \frac{1}{2} < c$, то

$$\left| \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle} \mu(dx) \right| \leqslant 1 - c < c \qquad (t \in R^n),$$

и, следовательно, х. ф.

$$\varphi(t; P_1) = c + \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle} \mu(dx)$$

не обращается в нуль при $t \in R^n$. Рассмотрим ветвь $\ln \varphi(t; P_1)$ такую, что $\ln \varphi(0; P_1) = 0$. Имеем

$$\ln \varphi(t; P_1) = \ln \left\{ c + \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle} \mu(dx) \right\} =$$

$$= \ln c + \ln \left\{ 1 + \frac{1}{c} \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle} \mu(dx) \right\} =$$

$$= \ln c + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mc^m} \left\{ \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle} \mu(dx) \right\}^m =$$

$$= \ln c + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mc^m} \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle} \mu^{m*}(dx). \qquad (6.5.8)$$

Так как $\mu^{m*}(E) \leqslant \mu^{m*}(R^n) < c^m$, то ряд

$$\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mc^m} \mu^{m*} \qquad (6.5.9)$$

сходится абсолютно и равномерно на классе борелевских множеств пространства R^n. Отсюда следует, что функция множеств λ является зарядом. Вспоминая, что мера μ сосредоточена на множестве $M^+(A)$, с помощью леммы 6.5.1 заключаем, что заряд λ сосредоточен на множестве

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} (m) M^+(A) = M^+(A).$$

В силу (6.5.8) и (6.5.9) получаем

$$\ln \varphi(t; P_1) = \ln c + \int_{R^n} e^{i\langle t, x\rangle} \lambda(dx).$$

Полагая в этом равенстве $t=0$, имеем $\ln c = -\int_{R^n} \lambda(dx)$, и, следовательно,

$$\ln \varphi(t; P_1) = \int_{R^n} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\lambda(dx).$$

Тем самым формула (6.5.2) доказана.

Остается установить, что если $E \cap (2)M^+(A) = \varnothing$, то $\lambda(E) \geqslant 0$. В силу леммы 6.5.1 заряд $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mc^m}\mu^{m*}$ сосредоточен на множестве

$$\bigcup_{m=2}^{\infty} (m)M^+(A) = (2)M^+(A).$$

Поэтому из (6.5.9) вытекает, что если $E \cap (2)M^+(A) = \varnothing$, то

$$\lambda(E) = \frac{1}{c}\mu(E) \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Определение. *Опорной функцией* множества $D \subset R^n$ называется функция $H(x; D)$, определенная на единичной сфере S^n пространства R^n равенством

$$H(x; D) = \sup_{y \in D} \langle x, y\rangle.$$

Заметим, что

$$H(x; D) = H(x; D_1),$$

где D_1 — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее множество D.

Теорема*) 6.5.2. *Если спектральная мера Леви n-мерного б. д. закона P сосредоточена на ограниченном множестве $A \subset R^n$, то х. ф. любой компоненты P_1 закона P допускает представление*

$$\varphi(t; P_1) = \exp\{f_1(t)\}, \qquad (6.5.10)$$

*) В этой теореме отсутствие гауссовой компоненты и вполне конечность спектральной меры Леви не предполагаются.

где $f_1(t)$ — *целая функция*, $f_1(0) = 0$, *принимающая при* $\operatorname{Re} t = 0$ *действительные значения. Для функции* $f_1(t)$ *справедлива оценка* ($t \in C^n$)

$$|f_1(t)| \leqslant K(1+|t|^3)\left\{1+\exp\left[H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ -A\right)|\operatorname{Im} t|\right]\right\}, \tag{6.5.11}$$

где $K > 0$ — *постоянная.*

Доказательство. Если закон P удовлетворяет условиям теоремы, то его х. ф. допускает представление

$$\varphi(t;\ P) = \exp\{i\langle\beta,\ t\rangle - Q(t) + \psi(t)\},$$

где $\beta \in R^n$, $Q(t)$ — неотрицательная квадратичная форма, а

$$\psi(t) = \int\limits_{A\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle t,\ x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\ x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu_P(dx). \tag{6.5.12}$$

Покажем, что функция $\psi(t)$ аналитически продолжается на все пространство C^n как целая и допускает оценку ($t \in C^n$)

$$|\psi(t)| \leqslant K(1+|t|^2)\left\{1+\exp\left[H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ -A\right)|\operatorname{Im} t|\right]\right\} \tag{6.5.13}$$

(буквой K здесь и ниже обозначаем положительные постоянные, зависящие лишь от функции).

Из соотношения

$$e^z = 1 + z + z^2 k(z), \qquad |k(z)| \leqslant 1 + e^{\operatorname{Re} z},$$

доказанного в § 2 гл. V (стр. 187), вытекает, что при $t \in C^n$, $x \in R^n$ выполняется

$$\left|e^{i\langle t,\ x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t,\ x\rangle}{1+|x|^2}\right| = \left|-\langle t,\ x\rangle^2 k(i\langle t,\ x\rangle) + \frac{i\langle t,\ x\rangle|x|^2}{1+|x|^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |t|^2|x|^2(1+e^{-\langle \operatorname{Im} t,\ x\rangle}) +$$
$$+\frac{|t||x|^3}{1+|x|^2} \leqslant 2|x|^2(1+|t|^2)(1+e^{-\langle \operatorname{Im} t,\ x\rangle}).$$

Если t пробегает некоторый компакт в C^n, а $x \in A$, то величина $(1+|t|^2)(1+e^{-\langle \operatorname{Im} t,\ x\rangle})$ ограничена некоторой не зависящей от t и x постоянной. Отсюда и из условия $\int\limits_{R^n\setminus\{0\}} |x|^2(1+|x|^2)^{-1}\nu_P(dx) < \infty$, которому всегда удовлетворяет спектральная мера Леви, следует, что интеграл в (6.5.12) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в C^n. Тем самым доказано, что функция $\psi(t)$ продолжается до целой в C^n. Оценка (6.5.13) получается так:

$$|\psi(t)| \leqslant 2 \int\limits_{A \setminus \{0\}} |x|^2 (1+|t|^2)(1+e^{-\langle \mathrm{Im}\, t,\, x\rangle}) \nu_P(dx) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1+|t|^2)(1+\exp[\sup_{x\in A} \langle \mathrm{Im}\, t, -x\rangle]) \int\limits_{A\setminus\{0\}} |x|^2 \nu_P(dx) =$$

$$= K(1+|t|^2)\left(1+\exp\left[H\left(\frac{\mathrm{Im}\, t}{|\mathrm{Im}\, t|};\ -A\right)|\mathrm{Im}\, t|\right]\right).$$

Так как функция $\psi(t)$ целая, то $\varphi(t; P)$ — целая функция без нулей. Пусть $P = P_1 * P_2$. По теореме 6.2.1 х. ф. $\varphi(t; P_1)$ и $\varphi(t; P_2)$ являются целыми функциями и, следовательно, соотношение

$$\varphi(t; P) = \varphi(t; P_1)\, \varphi(t; P_2)$$

выполняется во всем пространстве C^n. Поэтому функции $\varphi(t; P_1)$ и $\varphi(t; P_2)$ не имеют нулей в C^n. Полагая

$$f_j(t) = \int\limits_0^1 \left\{\sum_{k=1}^n t_k \frac{\partial\varphi(t\tau; P_j)}{\partial t_k}\right\} \frac{d\tau}{\varphi(t\tau; P_j)}, \qquad j=1, 2,$$

видим, что функции $f_j(t)$ — целые, действительные при $\mathrm{Re}\, t = 0$, $f_j(0) = 0$ и, кроме того,

$$\varphi(t; P_j) = \exp\{f_j(t)\}, \qquad j=1, 2.$$

Будем доказывать оценку для $f_1(t)$ с помощью рассуждений, близких к использованным в §§ 1, 2 гл. V. Положим

$$U(\xi, \eta) = \mathrm{Re}\, f_1(\xi + i\eta), \qquad \xi \in R^n,\ \eta \in R^n.$$

Используя теорему 6.2.2 «о сглаживании хребта», получаем неравенство

$$0 \leqslant U(0, \eta) - U(\xi, \eta) \leqslant Q(\xi) + \psi(i\eta) - \mathrm{Re}\, \psi(\xi + i\eta).$$

В силу оценки (6.5.13) отсюда следует

$$0 \leqslant U(0, \eta) - U(\xi, \eta) \leqslant$$
$$\leqslant K(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)\left(1 + \exp\left[H\left(\frac{\eta}{|\eta|}; -A\right)|\eta|\right]\right). \tag{6.5.14}$$

По теореме 6.1.6 имеем

$$U(0, \eta) = \ln \varphi(i\eta; P_1) \geqslant -K|\eta|,$$
$$U(0, \eta) = \ln \varphi(i\eta; P) - \ln \varphi(i\eta; P_2) \leqslant$$
$$\leqslant \ln \varphi(i\eta; P) + K|\eta| =$$
$$= -\langle\beta, \eta\rangle + Q(\eta) + \psi(i\eta) + K|\eta|.$$

Учитывая (6.5.13), получаем

$$|U(0, \eta)| \leqslant K(1 + |\eta|^2)\left(1 + \exp\left[H\left(\frac{\eta}{|\eta|}; -A\right)|\eta|\right]\right).$$

Отсюда и из (6.5.14) следует, что

$$|U(\xi, \eta)| \leqslant |U(0, \eta)| + |U(0, \eta) - U(\xi, \eta)| \leqslant$$
$$\leqslant K(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)\left(1 + \exp\left[H\left(\frac{\eta}{|\eta|}; -A\right)|\eta|\right]\right), \quad \xi, \eta \in R^n. \tag{6.5.15}$$

Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Положим $\theta_k(\zeta) = f_1(t + e_k\zeta)$, $\zeta \in C^1$. По формуле Шварца имеем

$$\theta_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\operatorname{Re}\theta_k(e^{i\delta})] \frac{e^{i\delta} + \zeta}{e^{i\delta} - \zeta} d\delta + i \operatorname{Im}\theta_k(0), \qquad |\zeta| < 1.$$

Дифференцируя по ζ и полагая затем $\zeta = 0$, получим

$$\theta_k'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\operatorname{Re}\theta_k(e^{i\delta})] e^{-i\delta} d\delta,$$

откуда

$$|\theta_k'(0)| \leqslant 2 \max_{0 \leqslant \delta \leqslant 2\pi} |\operatorname{Re}\theta_k(e^{i\delta})|.$$

Это неравенство в силу определения функции $\theta_k(\zeta)$ можно переписать так ($\xi = \operatorname{Re} t$, $\eta = \operatorname{Im} t$):

$$\left|\frac{\partial f_1(t)}{\partial t_k}\right| \leqslant 2 \max_{0 \leqslant \delta \leqslant 2\pi} |U(\xi + e_k \cos\delta, \eta + e_k \sin\delta)|.$$

Из (6.5.15) следует

$$\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi} |U(\xi+e_k\cos\delta,\ \eta+e_k\sin\delta)|\leqslant$$
$$\leqslant K[1+(|\xi|+1)^2+(|\eta|+1)^2]\times$$
$$\times\left\{1+\exp\left[\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi} H\left(\frac{\eta+e_k\sin\delta}{|\eta+e_k\sin\delta|};\ -A\right)|\eta+e_k\sin\delta|\right]\right\}.$$

Так как

$$\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi} H\left(\frac{\eta+e_k\sin\delta}{|\eta+e_k\sin\delta|};\ -A\right)|\eta+e_k\sin\delta|=$$
$$=\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}\ \sup_{x\in -A}\langle x,\ \eta+e_k\sin\delta\rangle\leqslant$$
$$\leqslant\max_{0\leqslant\delta\leqslant 2\pi}\left[\sup_{x\in -A}\langle x,\ \eta\rangle+\sup_{x\in -A}\langle x,\ e_k\sin\delta\rangle\right]\leqslant$$
$$\leqslant H\left(\frac{\eta}{|\eta|};\ -A\right)|\eta|+K,$$

то приходим к оценке

$$\left|\frac{\partial f_1(t)}{\partial t_k}\right|\leqslant K(1+|t|^2)\left\{1+\exp\left[H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ -A\right)|\operatorname{Im} t|\right]\right\}.$$

Пользуясь тождеством

$$f_1(t)=\int_0^1\frac{d}{d\tau}f_1(\tau t)\,d\tau=\sum_{k=1}^n t_k\int_0^1\frac{\partial f_1(\tau t)}{\partial t_k}\,d\tau,$$

получаем

$$|f_1(t)|\leqslant\sum_{k=1}^n|t_k|\int_0^1\left|\frac{\partial f_1(\tau t)}{\partial t_k}\right|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^n|t_k|\int_0^1 K(1+|t|^2)\times$$
$$\times\left\{1+\exp\left[H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ -A\right)\tau|\operatorname{Im} t|\right]\right\}d\tau\leqslant$$
$$\leqslant K(1+|t|^3)\left\{1+\exp\left[H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ -A\right)|\operatorname{Im} t|\right]\right\}.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 6.5.3. *Если в теореме* 6.5.1 *дополнительно предположить, что множество* A *ограничено, то можно* *утверждать, что заряд λ, фигурирующий в соотношении* (6.5.2), *сосредоточен на множестве $A_1 \cap M^+(A)$, где A_1 — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее множество A.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая теоретико-функциональная лемма.

Лемма 6.5.4. *Пусть λ — заряд и пусть его преобразование Фурье $\varphi(t;\ \lambda)$ аналитически продолжается на все пространство C^n как целая функция. Предположим, что продолженная функция (будем обозначать ее снова через $\varphi(t;\ \lambda)$, $t \in C^n$) при любом $\theta > 0$ допускает оценку*

$$|\varphi(t;\ \lambda)| \leqslant K_\theta (1 + |t|^d) \exp\left\{\left[H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ D\right) + \theta\right] |\operatorname{Im} t|\right\},$$

где d — натуральное число, K_θ — постоянная, зависящая лишь от θ, D — ограниченное замкнутое выпуклое множество в R^n. Тогда заряд λ сосредоточен во множестве $(-D)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и положим $\mu_\delta(E) = \delta^{-n}\omega_n(E \cap \{x\colon |x_1| \leqslant \delta, \ldots, |x_n| \leqslant \delta\})$, где ω_n — лебегова мера в R^n.

Обозначим через λ_δ свертку $\lambda * (\mu_\delta)^{(d+1)*}$. Так как

$$\varphi(t;\ \lambda_\delta) = \varphi(t;\ \lambda)[\varphi(t;\ \mu_\delta)]^{d+1} = \varphi(t;\ \lambda)\left[\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin \delta t_k}{\delta t_k}\right]^{d+1},$$

то функция $\varphi(t;\ \lambda_\delta)$ продолжается до целой в C^n и продолженная функция (обозначаем ее снова через $\varphi(t;\ \lambda_\delta)$) удовлетворяет условиям:

$$\int_{R^n} |\varphi(t;\ \lambda_\delta)|^2\, dt < \infty,$$

$$|\varphi(t;\ \lambda_\delta)| \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{K}_\theta \exp\left\{\left[H\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ D\right) + n(d+1)\delta + \theta\right] |\operatorname{Im} t|\right\},$$
$$t \in C^n.$$

Заметим, что сумма $H(x;\ D) + n(d+1)\delta$ является опорной функцией множества D_δ, получаемого из D присоединением всевозможных замкнутых шаров радиуса $n(d+1)\delta$ с центрами в D.

Применим к функции $\varphi(t;\ \lambda_\delta)$ известную теорему Полиа — Планшереля *), являющуюся многомерным обобщением теоремы Винера — Пэли. Получим для функции $\varphi(t;\ \lambda_\delta)$ представление

$$\varphi(t;\ \lambda_\delta)=\int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\ x\rangle}\,\psi_\delta(x)\,dx,$$

где $\psi_\delta(x)$ — измеримая по Лебегу функция, равная нулю вне множества $(-D_\delta)$ и такая, что $\int\limits_{R_n} |\psi_\delta(x)|^2\,dx<\infty$.

Таким образом, заряд λ_δ имеет вид $\lambda_\delta(E)=\int\limits_{E}\psi_\delta(x)\,dx$ и, следовательно, сосредоточен в $(-D_\delta)$.

Пусть $\lambda=\mu^{(1)}-\mu^{(2)}$, где $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ — вполне конечные меры, а E — интервал в R^n, являющийся интервалом непрерывности (Г. Крамер [3], стр. 124) и для $\mu^{(1)}$ и для $\mu^{(2)}$. Если мы покажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\lambda_\delta(E)=\lambda(E), \tag{6.5.16}$$

то отсюда будет следовать утверждение леммы.

Свертка $\mu^{(j)}*(\mu_\delta)^{(d+1)*}$ является мерой, и при $\delta\to 0$ имеем

$$\varphi(t;\ \mu^{(j)}*\mu_\delta^{(d+1)*})=\varphi(t;\ \mu^{(j)})\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\delta t_k}{\delta t_k}\right]^{d+1}\to$$
$$\to\varphi(t;\ \mu^{(j)})\qquad (j=1,\ 2;\ t\in R^n).$$

По теореме о непрерывном соответствии между вполне конечными мерами и их преобразованиями Фурье (Г. Крамер [3], стр. 129) получаем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\,[\mu^{(j)}*(\mu_\delta)^{(d+1)*}](E)=\mu^{(j)}(E)$$

(для каждого интервала $E\subset R^n$, являющегося интервалом непрерывности для $\mu^{(j)}$). Так как $\lambda_\delta=\mu^{(1)}*(\mu_\delta)^{(d+1)*}-\mu^{(2)}*(\mu_\delta)^{(d+1)*}$, то отсюда следует (6.5.16). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 6.5.3. Пусть P — закон, удовлетворяющий условиям

*) См., например, Л. И. Ронкин [1], стр. 275.

теоремы, P_1 — его компонента. По теореме 6.5.2 имеем представление

$$\varphi(t;\ P_1) = \exp\{f_1(t)\},$$

где $f_1(t)$ — целая функция, $f_1(0) = 0$, допускающая оценку (6.5.11). В силу теоремы 6.5.1 при $t \in R^n$ выполняется

$$f_1(t) = i\langle\beta,\ t\rangle + \int\limits_{R^n} (e^{i\langle t,\ x\rangle} - 1)\,\lambda(dx).$$

Обозначим через $\psi(t)$ преобразование Фурье заряда λ:

$$\psi(t) = \int\limits_{R^n} e^{i\langle t,\ x\rangle}\,\lambda(dx).$$

Так как

$$\psi(t) = f_1(t) - i\langle\beta,\ t\rangle + \lambda(R^n), \qquad t \in R^n,$$

то функция $\psi(t)$ аналитически продолжается на все пространство C^n, а из (6.5.11) следует, что получающаяся в результате продолжения целая функция (будем обозначать ее снова через $\psi(t)$) допускает оценку

$$|\psi(t)| \leqslant K(1 + |t|^3)\exp\left[H^+\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|};\ -A\right)|\operatorname{Im} t|\right], \tag{6.5.17}$$

где $H^+ = \max(H,\ 0)$.

Заметим, что $H^+(x;\ -A)$ является опорной функцией наименьшего замкнутого выпуклого множества (будем обозначать его через $(-A_2)$), содержащего множество $\{0\} \cup (-A)$. В силу леммы 6.5.4 из (6.5.17) следует, что заряд λ сосредоточен на множестве A_2. Так как по теореме 6.5.1 заряд λ сосредоточен также и на множестве $M^+(A)$, то мы заключаем, что он сосредоточен на множестве $A_2 \cap M^+(A)$.

Покажем, что множество $A_2 \cap M^+(A)$ совпадает с $A_1 \cap M^+(A)$. Для этого заметим, что если D_1 и D_2 — два замкнутых выпуклых множества, то $H(x;\ D_1 + D_2) = H(x;\ D_1) + H(x;\ D_2)$. Если бы множество $A_1 \cap M^+(A)$ не совпадало с $A_2 \cap M^+(A)$, то существовал бы вектор y, удовлетворяющий условиям $y \bar{\in} -A_1$, $y \in -A_2$, $y \in -M^+(A)$. Тогда можно было бы найти вектор $x \in S^n$ такой, что $\langle x,\ y\rangle > H(x;\ -A)$, $\langle x,\ y\rangle \leqslant H^+(x;\ -A)$

и, следовательно, $H(x;\ -A) < 0$. Так как $M^+(A) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (m) A$, то при некотором натуральном m мы имели бы $y \in -(m) A \subset -(m) A_1$, откуда следует $\langle x, y\rangle \leqslant mH(x;\ -A)$, что невозможно. Теорема доказана.

§ 6. Доказательства теорем 6.4.1, 6.4.2, 6.4.3

Доказательство теоремы 6.4.1. Предположим сначала, что спектральная мера Леви ν_P закона P удовлетворяет условию

$$\nu_P(A) < \ln 2. \tag{6.6.1}$$

Применяя теоремы 6.5.1 и 6.5.3, заключаем, что х. ф. любой компоненты P_1 закона P допускает представление

$$\varphi(t;\ P_1) = \exp\left\{i\langle\beta, t\rangle + \int\limits_{R^n} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\,\lambda(dx)\right\}, \tag{6.6.2}$$

где $\beta \in R^n$, а заряд λ сосредоточен на множестве $A_1 \cap M^+(A)$ и удовлетворяет условию

$$\lambda(E) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad E \cap (2) M^+(A) = \varnothing. \tag{6.6.3}$$

Так как множество A выпукло, то множество $(m) A$ получается применением к A операции гомотетии с центром в точке 0 и коэффициентом, равным m. Поэтому из $A \cap (2) A = \varnothing$ и $M^+(A) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (m) A$ вытекает, что $A_1 \cap M^+(A) = A$, $A \cap (2) M^+(A) = \varnothing$. Следовательно, заряд λ сосредоточен на множестве A и при $E \subset A$ выполняется $\lambda(E) \geqslant 0$. Это означает, что заряд λ является мерой, а закон P_1 безгранично делим. Тем самым доказано, что $P \in I_{0n}$.

Избавимся от предположения (6.6.1). В условиях теоремы 6.4.1 х. ф. закона P, а следовательно, и х. ф. всех его компонент являются целыми функциями. При любом $r \in R^n$ положим $c(r) = \int\limits_{R^n} e^{-\langle r, x\rangle} P(dx)$ и обозначим через $P^{(r)}$ закон

$$P^{(r)}(E) = (1/c(r)) \int\limits_E e^{-\langle r, x\rangle} P(dx).$$

Пусть J_r — оператор, определенный равенством $J_rP = P^{(r)}$. Легко видеть, что

$$\varphi(t; J_rP) = \frac{\varphi(t+ir; P)}{\varphi(ir; P)}, \tag{6.6.4}$$

и поэтому если закон P_1 является компонентой закона P, то закон J_rP_1 является компонентой J_rP.

С помощью (6.6.4) легко проверяется, что закон J_rP безгранично делимый, причем

$$\nu_{J_rP}(E) = \int_E e^{-\langle r, x\rangle}\nu_P(dx).$$

Отсюда следует, что закон J_rP тоже удовлетворяет условиям теоремы 6.4.1. Предположим, что $r \in R^n$ удалось выбрать таким, чтобы

$$\nu_{J_rP}(A) = \int_A e^{-\langle r, x\rangle}\nu_P(dx) < \ln 2. \tag{6.6.5}$$

Тогда по доказанному будем иметь $J_rP \in I_{0n}$. Отсюда заключаем, что если закон P_1 является компонентой P, то закон J_rP_1 безгранично делим, причем $\nu_{J_rP_1}(E) \leqslant \nu_{J_rP}(E)$ для любого множества $E \subset R^n$. Записывая для х. ф. закона J_rP_1 представление формулой Леви, с помощью равенства

$$\varphi(t; P_1) = \frac{\varphi(t-ir; J_rP_1)}{\varphi(-ir; J_rP_1)}$$

убеждаемся, что х. ф. $\varphi(t; P_1)$ тоже представляется формулой Леви. Следовательно, закон P_1 является б. д., а это значит, что $P \in I_{0n}$. Остается показать, что вектор $r \in R^n$ можно выбрать таким, чтобы выполнялось (6.6.5).

Как уже говорилось (стр. 257), из условий теоремы 6.4.1 следует, что точка 0 не является предельной для множества A. В силу выпуклости множества A отсюда следует, что найдется вектор $s \in S^n$ такой, что $H(s; -A) < 0$. Пусть $k > 0$; имеем

$$\int_A e^{-\langle ks, x\rangle}\nu_P(dx) \leqslant \nu_P(A) \sup_{x\in A} \exp\{-\langle ks, x\rangle\} =$$

$$= \nu_P(A) \exp\{k \sup_{x\in -A} \langle s, x\rangle\} = \nu_P(A)\exp\{kH(s; -A)\} < \ln 2$$

при достаточно большом k. Полагая $r = ks$, получим (6.6.5).

Несколько дополняя проведенные рассуждения, можно получить такое усиление теоремы 6.4.1.

Теорема 6.6.1. *Пусть n-мерный б. д. закон P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера Леви сосредоточена на ограниченном открытом множестве $A \subset R^n$ таком, что*

$$A^* \cap (2)\, M^+(A) = \varnothing, \qquad (6.6.6)$$

где A^* — наименьшее открытое выпуклое множество, содержащее множество A. Тогда закон P принадлежит классу I_{0n}.

Эта теорема содержит теорему 6.4.1, так как если множество A выпукло, то $(m)\, A$ получается из A преобразованием гомотетии с центром в нуле и коэффициентом m, поэтому из $A \cap (2)\, A = \varnothing$ следует $A \cap (2)\, M^+(A) = \varnothing$. Можно проверить, что в одномерном случае теорема 6.6.1 равносильна теореме 6.4.1, так как в этом случае из $A^* \cap (2)\, M^+(A) = \varnothing$ следует $A^* \cap (2)\, A^* = \varnothing$. Однако в случае размерности $n \geqslant 2$ теорема 6.6.1 сильнее теоремы 6.4.1, так как существуют множества A, удовлетворяющие условиям теоремы 6.6.1, но такие, что $A^* \cap \cap (2)\, A^* \neq \varnothing$. Пример такого множества приведен в § 7 (см. пример 6, стр. 296).

Докажем теорему 6.6.1. Сначала предположим, что спектральная мера Леви удовлетворяет условию (6.6.1). Как и при доказательстве теоремы 6.4.1, заключаем, что х. ф. любой компоненты P_1 закона P допускает представление (6.6.2), где $\beta \in R^n$, а заряд λ сосредоточен на множестве $A_1 \cap M^+(A)$ и удовлетворяет условию (6.6.3).

Так как множества A^* и $(2)\, M^+(A)$ открытые, а $\overline{A^*} = A_1$, то из (6.6.6) следует, что

$$A_1 \cap (2)\, M^+(A) = \varnothing,$$

откуда

$$A_1 \cap M^+(A) = A_1 \cap [A \cup (2)\, M^+(A)] = \\ = [A_1 \cap A] \cup [A_1 \cap (2)\, M^+(A)] = A \cup \varnothing = A.$$

Таким образом, заряд λ сосредоточен на множестве A. Если $E \subset A$, то и подавно $E \subset A^*$, поэтому в силу (6.6.3) и (6.6.6) имеем $\lambda(E) \geqslant 0$. Тем самым доказано, что заряд λ является мерой и $P \in I_{0n}$.

От предположения (6.6.1) освобождаемся с помощью того же приема, что и в доказательстве теоремы 6.4.1. Чтобы закон $J_r P$ удовлетворял условию (6.6.1), должно в силу (6.6.5) выполняться

$$\int\limits_{A} e^{-\langle r,\, x\rangle} \nu_P(dx) < \ln 2. \tag{6.6.7}$$

Убедимся, что найдется $r \in R^n$, для которого это имеет место.

Сначала покажем, что мера ν_P вполне конечна. В силу условия $\int\limits_{R^n} |x|^2 (1+|x|^2)^{-1} \nu_P(dx) < \infty$ достаточно проверить, что $0 \overline{\in} \bar{A}$. Если $0 \in \bar{A}$, то существует последовательность $\{y_q\}_{q=1}^{\infty} \subset A$, $y_q \to 0$. Для любого $x \in A$ имеем $y_q + x \in (2)\,A$. С другой стороны, так как множество A открыто и $y_q + x \to x$, то для всех достаточно больших q имеем $y_q + x \in A$. Поэтому $A \cap (2)\,A \neq \varnothing$ и условие (6.6.6) не выполняется. Итак, $0 \overline{\in} \bar{A}$ и мера ν_P вполне конечна.

Далее заметим, что $0 \overline{\in} A^*$. В самом деле, если $0 \in A^*$, то $0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, где $x_1, x_2 \in A$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Так как множество A открыто, то небольшим изменением x_1 и x_2 можно добиться, чтобы отношение λ_1/λ_2 было рациональным числом. Пусть $\lambda_1/\lambda_2 = p/q$, где p и q — натуральные. Тогда имеем $0 = px_1 + qx_2$, а это означает, что $0 \in (p+q)\,A$. Поэтому $0 \in A^* \cap (2)\,M^+(A)$ и условие (6.6.6) не выполняется.

Так как $0 \overline{\in} A^*$, то существует вектор $s \in S^n$ такой, что $H(s;\, -A) \leqslant 0$. Множество A лежит в полупространстве $\{x\colon \langle s,\, x\rangle > 0\}$. Пусть $A_\delta = A \cap \{x\colon \langle s,\, x\rangle \geqslant \delta\}$, где $\delta > 0$. Очевидно, $H(s;\, -A_\delta) \leqslant -\delta$; кроме того, так как множество A открыто, имеем $\lim\limits_{\delta\to 0} \nu_P(A \setminus A_\delta) = 0$. Выкладка, аналогичная проведенной в конце доказательства теоремы 6.4.1, дает $(k > 0)$

$$\int\limits_{A} e^{-\langle ks,\, x\rangle} \nu_P(dx) = \int\limits_{A \setminus A_\delta} e^{-\langle ks,\, x\rangle} \nu_P(dx) + \int\limits_{A_\delta} e^{-\langle ks,\, x\rangle} \nu_P(dx) \leqslant$$
$$\leqslant \nu_P(A \setminus A_\delta) \exp\{kH(s;\, -A)\} + \nu_P(A_\delta) \exp\{kH(s;\, -A_\delta)\} \leqslant$$
$$\leqslant \nu_P(A \setminus A_\delta) + \nu_P(A) \exp\{kH(s;\, -A_\delta)\}.$$

Выбирая δ достаточно малым, а затем k достаточно большим и полагая $r = ks$, получаем (6.6.7).

Доказательство теоремы 6.4.2. Предположим, что закон P, кроме условий теоремы 6.4.2, удовлетворяет еще и условию

$$\nu_P(A) < \ln 2. \tag{6.6.8}$$

Тогда по теореме 6.5.1 х. ф. любой компоненты P_1 закона P допускает представление

$$\varphi(t;\ P_1) = \exp\left\{i\beta t + \int_{R^1} (e^{itx} - 1)\, \lambda(dx)\right\}, \quad t \in R^1, \tag{6.6.9}$$

где $\beta \in R^1$, а λ — заряд, сосредоточенный на множестве $M^+(A)$ и удовлетворяющий условию

$$\lambda(E) \geqslant 0, \quad \text{если} \quad E \cap (2)\, M^+(A) = \varnothing.$$

Чтобы доказать, что закон P является б. д., нужно установить, что заряд λ является мерой. Так как $A \subset [a, \infty)$, то $(2)\, M^+(A) \subset [2a, \infty)$, и мы имеем

$$\lambda(E) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad E \subset (-\infty, 2a).$$

Остается установить, что

$$\lambda(E) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad E \subset [2a, \infty). \tag{6.6.10}$$

По лемме 5.2.5 ($\alpha = 2$) функция

$$f(t) = \int_{R^1} (e^{itx} - 1)\, \nu_P(dx) \tag{6.6.11}$$

аналитически продолжается на всю t-плоскость и получающаяся в результате продолжения целая функция допускает оценку

$$f(t) = O\{|t|^2 \exp[K(\operatorname{Im} t)^2]\}, \qquad t \to \infty. \tag{6.6.12}$$

Поэтому х. ф. $\varphi(t;\ P)$ является целой функцией без нулей. Отсюда заключаем, что и х. ф. $\varphi(t;\ P_1)$ является целой функцией без нулей и, следовательно, ее можно записать в виде

$$\varphi(t;\ P_1) = \exp\{f_1(t)\}, \tag{6.6.13}$$

где $f_1(t)$ — целая функция, $f_1(0) = 0$, действительная на мнимой t-оси. В силу теоремы «о сглаживании хребта» имеем неравенство

$$0 \leqslant f_1(i \operatorname{Im} t) - \operatorname{Re} f_1(t) \leqslant f(i \operatorname{Im} t) - \operatorname{Re} f(t). \quad (6.6.14)$$

Учитывая (6.6.13) и применяя лемму 5.2.6 ($x = -\operatorname{Im} t$, $y = \operatorname{Re} t$; $A(s) = Ks^2 + 1$, $B(s) = \exp\{Ks^2\}$), заключаем, что функция $f_1(t)$ допускает оценку

$$f_1(t) = O\{|t|^3 \exp[K(\operatorname{Im} t)^2]\}, \qquad t \to \infty. \quad (6.6.15)$$

Положим

$$g(\sigma, \tau) = f_1(i\tau) - \frac{1}{2}[f_1(\sigma + i\tau) + f_1(-\sigma + i\tau)], \quad \sigma \in R^1, \quad \tau \in C^1. \quad (6.6.16)$$

Эта функция, как функция от $\tau \in C^1$ при фиксированном $\sigma \in R^1$, является целой и допускает в силу (6.6.15) оценку

$$g(\sigma, \tau) = O(|\tau|^3 \exp[K(\operatorname{Re} \tau)^2]), \qquad \tau \to \infty. \quad (6.6.17)$$

Так как при $\sigma, \tau \in R^1$ имеем $f_1(\sigma + i\tau) = \overline{f_1(-\sigma + i\tau)}$, то

$$g(\sigma, \tau) = f_1(i\tau) - \operatorname{Re} f_1(\sigma + i\tau), \qquad \sigma \in R^1, \quad \tau \in R^1;$$

поэтому из (6.6.11) и (6.6.14) следует неравенство

$$0 \leqslant g(\sigma, \tau) \leqslant 2 \int\limits_{R^1} e^{-\tau x} \sin^2 \frac{\sigma x}{2} \nu_P(dx), \qquad \sigma \in R^1, \quad \tau \in R^1.$$

Вводя обозначения

$b = \mu_0$, $\nu_P(\{b\}) = a_0$, $\nu_P(\{\mu_m\}) = a_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, можем это неравенство записать в виде $(\sigma, \tau \in R^1)$

$$0 \leqslant g(\sigma, \tau) \leqslant \\ \leqslant 2 \int\limits_{[a,\, b)} e^{-\tau x} \sin^2 \frac{\sigma x}{2} \nu_P(dx) + 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\mu_m x} \sin^2 \frac{\mu_m \sigma}{2}.$$

Положим в этом неравенстве $\sigma = 2\pi/\mu_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как числа μ_m/μ_n при $m \geqslant n$ являются целыми, то будем иметь $(\tau \in R^1)$

$$0 \leqslant g(2\pi/\mu_n, \tau) \leqslant \\ \leqslant 2 \int\limits_{[a,\, b)} e^{-\tau x} \sin^2 \frac{\pi x}{\mu_n} \nu_P(dx) + 2 \sum_{m=0}^{n-1} a_m e^{-\mu_m \tau} \sin^2 \frac{\pi \mu_m}{\mu_n}. \quad (6.6.18)$$

Рассмотрим целую функцию $g_n(\tau) = g(2\pi/\mu_n, \tau)$. В силу (6.6.17) эта функция допускает во всей τ-плоскости оценку

$$g_n(\tau) = O(|\tau|^3 \exp[K(\mathrm{Re}\,\tau)^2]), \qquad \tau \to \infty.$$

Из (6.6.18) следует, что на действительной τ-оси имеем

$$\begin{aligned} &0 \leqslant g_n(\tau) \leqslant a_{n-1} e^{-\tau\mu_{n-1}} \sin^2 \frac{\pi\mu_{n-1}}{\mu_n} + o(e^{-\tau\mu_{n-1}}), \qquad \tau \to -\infty, \\ &0 \leqslant g_n(\tau) \leqslant O(1), \qquad \tau \to +\infty. \end{aligned} \tag{6.6.19}$$

Применяя лемму 5.2.1 к обеим полуплоскостям $\mathrm{Re}\,\tau \geqslant 0$ и $\mathrm{Re}\,\tau \leqslant 0$, получаем, что во всей τ-плоскости выполняется

$$g_n(\tau) = O(|t|^3 \exp\{\mu_{n-1} |\mathrm{Re}\,\tau|\}), \qquad \tau \to \infty. \tag{6.6.20}$$

Сравнивая (6.6.9) и (6.6.13), видим, что

$$f_1(t) = i\beta_1 t + \int_{R^1} (e^{itx} - 1)\,\lambda(dx), \qquad t \in R^1,$$

откуда в силу (6.6.16) следует, что

$$g(\sigma, i\xi) = 2 \int_{R^1} e^{-i\xi x} \sin^2 \frac{\sigma x}{2}\,\lambda(dx), \qquad \sigma, \xi \in R^1.$$

Поэтому справедливо равенство

$$g_n(i\xi) = 2 \int_{R^1} e^{-i\xi x} \sin^2 \frac{\pi x}{\mu_n}\,\lambda(dx), \qquad \xi \in R^1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Перепишем это равенство в виде

$$g_n(i\xi) = \int_{R^1} e^{-i\xi x} \lambda_n(dx), \qquad \xi \in R^1, \tag{6.6.21}$$

где λ_n — заряд, определяемый формулой

$$\lambda_n(E) = 2 \int_E \sin^2 \frac{\pi x}{\mu_n}\,\lambda(dx).$$

Из соотношений (6.6.21) и (6.6.20) с помощью леммы 6.5.4 заключаем, что заряд λ_n сосредоточен на отрезке $[-\mu_n, \mu_n]$. Так как $\sin^2 \frac{\pi x}{\mu_n} > 0$ при $\mu_{n-1} < x < \mu_n$, то для любого $E \subset (\mu_{n-1}, \mu_n)$ имеем $\lambda(E) = 0$. Это утверждение верно для всех $n = 1, 2, \ldots$, поэтому заряд λ сосредоточен на множестве

$$(-\infty, \mu_0] \cup \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} = (-\infty, b] \cup \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

С другой стороны, нам известно, что заряд λ сосредоточен на множестве $M^+(A) \subset [a, \infty)$. Отсюда следует, что он сосредоточен на

$$[a, b] \cup \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty},$$

т. е. на множестве A. Так как $b \leqslant 2a$, то для доказательства (6.6.10) достаточно установить, что

$$\lambda(\{b\}) \geqslant 0, \quad \lambda(\{\mu_m\}) \geqslant 0, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{6.6.22}$$

Так как заряд λ_n сосредоточен на отрезке $[-\mu_{n-1}, \mu_{n-1}]$, то интеграл в (6.6.21) сходится при всех $\xi \in C^1$ и соотношение (6.6.21) сохраняет силу. Полагая $\xi = -i\tau$, $\tau \in R^1$, получим

$$g_n(\tau) = \int\limits_{[-\mu_{n-1}, \mu_{n-1}]} e^{-\tau x} \lambda_n(dx),$$

откуда следует такое асимптотическое выражение:

$$g_n(\tau) = e^{-\tau\mu_{n-1}} \lambda_n(\{\mu_{n-1}\}) + o(e^{-\tau\mu_{n-1}}) =$$
$$= e^{-\tau\mu_{n-1}} \left(2 \sin^2 \frac{\pi\mu_{n-1}}{\mu_n}\right) \lambda(\{\mu_{n-1}\}) + o(e^{-\tau\mu_{n-1}}), \qquad \tau \to -\infty.$$

Сравнивая с (6.6.19), заключаем, что

$$\lambda(\{\mu_{n-1}\}) \geqslant 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Так как $\mu_0 = b$, то это равносильно (6.6.22). Таким образом, теорема 6.4.2 доказана при дополнительном предположении (6.6.8).

Чтобы освободиться от этого предположения, применим прием, использованный в конце доказательства теоремы 6.4.1. Число $r > 0$ можно выбрать таким, чтобы $\int\limits_A e^{-rx} \nu_P(dx) < \ln 2$, потому что $A \subset (0, \infty)$. ▪

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6.4.3. Сначала сделаем одно замечание общего характера.

Пусть A и A' — множества в R^n с независимыми точками, имеющие одинаковую мощность и принадлежащие классу F_σ. Обозначим

$$B = \{0\} \cup M^+(A), \quad B' = \{0\} \cup M^+(A').$$

Напомним, что, в силу сказанного в начале § 5, множества B и B' принадлежат классу F_σ. Замечание состоит в следующем. Между классом вполне конечных мер, сосредоточенных на B, и классом вполне конечных мер, сосредоточенных на B', можно установить взаимно-однозначное соответствие, при котором свертке мер отвечает свертка соответствующих мер, закону отвечает закон, единичному закону — единичный закон. В частности, композиции законов отвечает композиция соответствующих законов. Докажем высказанное замечание.

По известной теореме (К. Куратовский [1], гл. III, § 37, стр. 462), каковы бы ни были борелевские множества A и A', имеющие одинаковую мощность, существует взаимно-однозначное отображение множества A на A', при котором образы и прообразы борелевских множеств являются борелевскими множествами. Пусть A и A' — заданные множества,

$$y = h(x) \qquad (x \in A,\ y \in A')$$

— отображение, существование которого обеспечено цитированной теоремой. Так как A — множество с независимыми точками, то каждый вектор из B единственным образом представляется линейной комбинацией векторов множества A с целыми коэффициентами. То же самое справедливо относительно множеств B' и A'. Поэтому отображение $y = h(x)$ можно продолжить до взаимно-однозначного отображения

$$y = H(x) \qquad (x \in B,\ y \in B')$$

множества B на B', полагая

$$H\Big(\sum_k \alpha_k x_k\Big) = \sum_k \alpha_k h(x_k),$$

где α_k — целые числа, $x_k \in A$. Заметим, что полученное отображение H обладает свойством

$$H\Big(\sum_k \alpha_k x_k\Big) = \sum_k \alpha_k H(x_k) \qquad (\alpha_k = \text{целые},\ x_k \in B) \quad (6.6.23)$$

Далее нам понадобится следующая лемма, доказательство которой приведем в конце параграфа.

Л е м м а 6.6.1. *При отображении $y = H(x)$ образы и прообразы борелевских множеств являются борелевскими множествами.*

Пусть ν — вполне конечная мера, сосредоточенная на множестве B, а E' — любое борелевское множество в R^n. Положим

$$\nu'(E') = \nu(H^{-1}(E' \cap B')). \tag{6.6.24}$$

Правая часть этого равенства имеет смысл, так как по лемме 6.6.1 множество $H^{-1}(E' \cap B')$ является борелевским. Легко проверяется, что $\nu'(E')$ является вполне конечной мерой, сосредоточенной на B', и формула (6.6.24) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами вполне конечных мер, сосредоточенных на B и на B'. Очевидно, что закону отвечает закон, единичному закону — единичный закон.

Покажем, что свертке мер отвечает свертка соответствующих мер. В самом деле, пусть $\nu = \nu_1 * \nu_2$. Тогда для соответствующих мер ν', ν_1' и ν_2' имеем, используя (6.6.23) и (6.6.24):

$$\begin{aligned}
\nu'(E') &= \nu(H^{-1}(E' \cap B')) = \\
&= \int_B \nu_1(H^{-1}(E' \cap B')) - x)\, \nu_2(dx) = \\
&= \int_{B'} \nu_1(H^{-1}(E' \cap B') - H^{-1}(y))\, \nu_2'(dy) = \\
&= \int_{B'} \nu_1(H^{-1}(E' \cap B' - y))\, \nu_2'(dy) = \\
&= \int_{B'} \nu_1(H^{-1}((E' - y) \cap B'))\, \nu_2'(dy) = \\
&= \int_{B'} \nu_1'(E' - y)\, \nu_2'(dy) = (\nu_1' * \nu_2')(E').
\end{aligned}$$

Таким образом, соответствие, даваемое формулой (6.6.24), обладает всеми нужными свойствами.

Заметим, что при изучении компонент законов P, сосредоточенных на B и таких, что $P(\{0\}) > 0$, можно ограничиться компонентами, сосредоточенными на B. В самом деле, если $P = P_1 * P_2$, то по теореме 6.2.3 выполняется

$$D(P) = D(P_1) + D(P_2).$$

Так как $P(\{0\}) > 0$, то $0 \in D(P)$. Поэтому существуют векторы $c_1 \in D(P_1)$, $c_2 \in D(P_2)$, такие, что $c_1 + c_2 = 0$. Тогда для законов $\widetilde{P}_1 = P_1 * \varepsilon_{-c_1}$, $\widetilde{P}_2 = P_2 * \varepsilon_{-c_2}$ имеем $P = \widetilde{P}_1 * \widetilde{P}_2$, и, кроме того, $0 \in D(\widetilde{P}_1)$, $0 \in D(\widetilde{P}_2)$, т. е. $\widetilde{P}_j(\{0\}) > 0$, $j = 1, 2$. Применяя лемму 6.5.2, видим, что законы $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$ сосредоточены на множестве B.

Из доказанного следует, что соответствие, устанавливаемое формулой (6.6.24) обладает таким свойством: наличие неразложимой компоненты у закона P эквивалентно наличию неразложимой компоненты у соответствующего закона P'.

Теперь мы можем вывести теорему 6.4.3 из теоремы 6.4.1.

Пусть закон P удовлетворяет условиям теоремы 6.4.3, A — множество, на котором сосредоточена его спектральная мера Леви. Как уже говорилось в начале § 5 (стр. 261), можно считать, что множество A принадлежит классу F_σ. Кроме того, можно считать, что х. ф. закона P имеет вид (6.5.4). По лемме 6.5.3 закон P сосредоточен на множестве

$$\{0\} \cup M^+(A) = B.$$

Заметим, что в силу (6.5.6) имеем

$$P = e^{-\nu_P(A)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu_P^{m*}}{m!}.$$

Возьмем в качестве A' множество класса F_σ с независимыми точками, имеющее одинаковую мощность с A и лежащее в гиперкубе $Q = \{y\colon 3 < y_1 < 5, \ldots, 3 < y_n < 5\}$. При соответствии (6.6.24) закону P будет отвечать закон

$$P' = e^{-\nu_P(A)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu_P')^{m*}}{m!},$$

х. ф. которого, очевидно, имеет вид

$$\varphi(t;\, P') = \exp\left\{\int_{R^n} (e^{i\langle t,\, y\rangle} - 1)\, \nu_P'(dy)\right\}.$$

Так как $Q \cap (2)\,Q = \varnothing$, то в силу теоремы 6.4.1 закон P' не имеет неразложимых компонент. Используя отмеченное выше свойство соответствия (6.6.24), заключаем, что и закон P не имеет неразложимых компонент, т. е. $P \in I_{0n}$.

З а м е ч а н и е. Можно было бы избежать ссылки на теорему, гарантирующую существование отображения $h(x)$. В самом деле, с самого начала можно считать, что множество A не лежит в подпространстве размерности $m < n$ (иначе можно свести дело к случаю, когда $A \subset R^m$ и закон P является m-мерным). Далее, с помощью невырожденного линейного преобразования R^n в себя можно свести дело к случаю, когда множество A содержит векторы $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Определим отображение $y = h(x)$, полагая

$$h(e_j) = e_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$h(x) = (x_1 - [x_1] + 4, \ldots, x_n - [x_n] + 4)$$

при $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Нетрудно убедиться, что отображение h переводит множество A взаимно-однозначно в некоторое множество A' с независимыми точками, лежащее в гиперкубе Q и принадлежащее классу F_σ. Легко проверить, что при отображении h образы и прообразы борелевских множеств являются борелевскими множествами.

Д о к а ж е м л е м м у 6.6.1.

Мы имеем

$$B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (k) A, \quad B' = \bigcup_{k=0}^{\infty} (k) A'.$$

Так как A и A' — множества с независимыми точками, то при $k_1 \neq k_2$

$$(k_1) A \cap (k_2) A = \varnothing, \quad (k_1) A' \cap (k_2) A' = \varnothing.$$

Из построения отображения H следует, что

$$H((k) A) = (k) H(A) = (k) A', \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому достаточно установить, что для каждого $k = 2, 3, \ldots$ сужение отображения H на множество $(k) A$ обладает свойством: для любых борелевских множеств E и E', $E \subset (k) A$, $E' \subset (k) A'$, множества $H(E)$ и $H^{-1}(E')$ — борелевские. Докажем только, что $H(E)$ — борелевское, относительно $H^{-1}(E')$ это доказывается аналогично.

Рассмотрим декартовы произведения

$$A_k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{(k \text{ раз})}, \quad A'_k = \underbrace{A' \times A' \times \ldots \times A'}_{(k \text{ раз})}$$

Множества A_k и A'_k лежат в R^{kn}. Пусть h_k — взаимно-однозначное отображение A_k на A'_k, индуцированное отображением h, т. е., если $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $x_j \in A$, то

$$h_k(x) = (h(x_1), \ldots, h(x_k)).$$

Покажем, что при отображении h_k борелевские подмножества из A_k переходят в борелевские подмножества из A'_k. В самом деле, пусть $\mathfrak{S}$ — класс тех подмножеств из A_k, которые переходят в борелевские подмножества из A'_k. Легко видеть, что класс $\mathfrak{S}$ является σ-алгеброй множеств с единицей A_k. Так как отображение h переводит борелевские подмножества из A в борелевские, то отображение h_k переводит борелевские подмножества из A_k вида

$$C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_k, \tag{6.6.25}$$

(где C_j, $j = 1, \ldots, k$, — борелевские подмножества из A) в борелевские подмножества из A'_k. Таким образом, множества вида (6.6.25) принадлежат $\mathfrak{S}$. Поскольку класс борелевских подмножеств из A_k является минимальной σ-алгеброй с единицей A_k, содержащей множества вида (6.6.25), то все борелевские подмножества из A_k принадлежат $\mathfrak{S}$.

Обозначим через π_k отображение множества A_k, переводящее вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_j \in A$, в вектор

$$\pi_k(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_k.$$

Это отображение переводит множество A_k на $(k) A$. Поскольку A — множество с независимыми точками, то из равенства

$$\pi_k(x) = \pi_k(y) \quad (x = (x_1, \ldots, x_k),\ y = (y_1, \ldots, y_k))$$

следует, что система векторов $y_1, \ldots, y_k$ есть некоторая перестановка системы векторов $x_1, \ldots, x_k$. Поэтому при отображении π_k прообраз одноточечного множества состоит из конечного числа (не более, чем $k!$) точек.

Аналогичным образом определяем отображение π'_k, переводящее A'_k на $(k) A'$, при этом отображении прообраз одноточечного множества также состоит из конечного числа (не более, чем $k!$) точек.

Пусть E — любое борелевское множество из $(k)\,A$. Легко видеть, что

$$H(E) = \pi_k'(h_k(\pi_k^{-1}(E))).$$

Поскольку отображение π_k непрерывно, множество $\pi_k^{-1}(E)$ — борелевское. Учитывая, что h_k переводит борелевские множества в борелевские, заключаем, что множество $h_k(\pi_k^{-1}(E))$ — борелевское. Таким образом, остается установить, что отображение π_k' переводит борелевские подмножества из A_k' в борелевские подмножества из $(k)\,A'$. Поскольку отображение π_k' непрерывно и прообраз любого одноточечного множества конечен, то нужное заключение непосредственно вытекает из такого результата, представляющего частный случай одной теоремы Н. Н. Лузина (полную формулировку см. К. Куратовский [1], гл. III, § 39, стр. 508): если непрерывное отображение таково, что прообраз любого одноточечного множества не более чем счетен, то это отображение переводит борелевские множества в борелевские.

§ 7. Достаточные условия непринадлежности безгранично делимого закона классу I_{0n}

Теорема 6.7.1. *Пусть спектральная мера Леви n-мерного б. д. закона P удовлетворяет условию $\nu_P(E) \geqslant k\omega_n(E \cap A)$, где $k > 0$ — постоянная, ω_n — лебегова мера в R^n, A — открытое множество в R^n такое, что*

$$A \cap (2)\,M^+(A) \neq \varnothing. \tag{6.7.1}$$

Тогда закон P не принадлежит классу I_{0n}.

Из этой теоремы следует, что теорема 6.4.1 является в некотором отношении неулучшаемой. В самом деле, если множество A удовлетворяет всем условиям теоремы 6.4.1, кроме условия $A \cap (2)\,A = \varnothing$, то б. д. закон со спектральной мерой Леви $\nu_P(E) = \omega_n(E \cap A)$ в силу теоремы 6.7.1 не принадлежит классу I_{0n}.

Непосредственным следствием теоремы 6.7.1 является такой результат.

Теорема 6.7.2. *Пусть P — одномерный б. д. закон, $M(x)$ и $N(x)$ — функции, фигурирующие в представлении х. ф. $\varphi(t;\ P)$ формулой Леви (2.6.2). Если можно указать* *числа a и b, $0 \leqslant a \leqslant 2a < b < \infty$, такие, что выполнено хотя бы одно из условий:*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{-b \leqslant x \leqslant -a} M'(x) > 0, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{a \leqslant x \leqslant b} N'(x) > 0, \tag{6.7.2}$$

то закон P не принадлежит классу I_0.

Пример 1. Устойчивые законы (см. пример 2 из § 6 гл. II) все, за исключением закона Гаусса и единичного, не принадлежат классу I_0. Действительно, для этих законов в формуле (2.6.11) имеем $0 < \alpha < 2$, $\varkappa > 0$. В силу формул (2.6.12) имеем

$$M(x) = c_1 |x|^{-\alpha}, \quad N(x) = -c_2 x^{-\alpha},$$

где c_1, c_2 — неотрицательные постоянные, из которых хотя бы одна положительна. Поэтому по меньшей мере одно из условий (6.7.2) выполняется с $a = 0$ и любым b, $0 < b < \infty$.

Пример 2. Законы, рассмотренные в примере 3 из § 6 гл. II, тоже не принадлежат классу I_0. В самом деле, в силу формулы (2.6.13) имеем

$$M'(x) = \frac{e^{bx}}{|x|(1 - e^{ax})}, \qquad -\infty < x < 0.$$

Поэтому первое из условий (6.7.2) выполняется с $a = 0$ и любым b, $0 < b < \infty$.

Теорему 6.7.1 мы получим как следствие более общей теоремы. Прежде чем ее сформулировать, введем одно условие, связанное с арифметическим сложением множеств.

Будем говорить, что множество $A \subset R^n$ удовлетворяет условию (K), если можно указать непустые ограниченные открытые в R^n множества D_1, D_2 и D_3 такие, что

(i) $D_1 \subset A$,

(ii) $D_1 \cap D_3 = \varnothing$,

(iii) $\overline{D}_2 \subset D_3$,

(iv) для всех достаточно больших m выполняется

$$(m) D_1 = (m)(D_1 \cup D_3), \tag{6.7.3}$$

(v) для некоторого $q > 1$ выполняется

$$\overline{D}_2 \subset (q) D_1. \tag{6.7.4}$$

Заметим, что если некоторое подмножество множества A удовлетворяет условию (K), то и само множество A удовлетворяет условию (K).

Приведем примеры множеств, удовлетворяющих условию (K).

Пример 3. В одномерном случае множество

$$A = (a, b) \cup (c, d),$$

где $0 < a < 2a < b < c < d$, удовлетворяет условию (K). В самом деле, положим

$$D_1 = (a, 2a) \cup (c, d), \quad D_2 = (\alpha, \beta), \quad D_3 = (\gamma, \delta),$$

где $2a < \gamma < \alpha < \beta < \delta < \min(c, 4a)$. Тогда условия (i) — (iii), очевидно, выполнены; условие (v) выполняется при $q = 2$, а условие (iv) выполнено потому, что для достаточно больших m

$$(m) D_1 = (ma, md) \quad \text{и} \quad (m)(D_1 \cup D_3) = (ma, md).$$

Пример 4. В одномерном случае множество вида

$$A = (a, b) \cup (c, d),$$

где $a < b < c < d$ и $a < 0 < d$ или $0 < 2a < d$, удовлетворяет условию (K). Проверку этого утверждения предоставляем читателю.

Пример 5. В случае произвольной размерности $n \geqslant 1$ множество

$$A = \{x: a < |x| < b\},$$

где $0 \leqslant a < b$, удовлетворяет условию (K). Действительно, положим

$$D_1 = \{x: c < |x| < b\}, \quad D_2 = \{x: |x| < \alpha\},$$
$$D_3 = \{x: |x| < \beta\},$$

где $c > a$, $0 < \alpha < \beta < c$. Проверка выполнения условий (i) — (v) тривиальна, поскольку для достаточно больших m (в случае $n \geqslant 2$ уже для всех $m \geqslant 2$) выполняется

$$(m) D_1 = \{x: |x| < mb\}.$$

Лемма 6.7.1. *Если множество A удовлетворяет условиям теоремы 6.7.1, то оно удовлетворяет условию (K).*

Доказательство. Так как $(2)\, M^+(A) = \bigcup_{q=2}^{\infty} (q)\, A$, то из условия $A \cap (2)\, M^+(A) \neq \varnothing$ следует, что существует $q \geqslant 2$ такое, что $A \cap (q)\, A \neq \varnothing$.

Пусть $y \in A \cap (q)\, A$. Так как $y \in (q)\, A$, то существуют точки $y_1, \ldots, y_q \in A$ такие, что $y = y_1 + \ldots + y_q$. Построим лежащие во множестве A открытые шары $U_1, \ldots, U_q$ с центрами в этих точках. Очевидно, имеем $y \in U_1 + \ldots + U_q$. Учитывая, что $y \in A$, а множество A открыто, можем указать открытый шар U с центром в точке y такой, что $U \subset A$, $U \subset U_1 + \ldots + U_q$. Пусть $U = \{x\colon |x - y| < \varepsilon\}$. Положим

$$D_1 = \{x\colon \varepsilon/2 < x - y| < \varepsilon\} \cup \bigcup_{r=1}^{q} U_r,$$

$$D_2 = \{x\colon |x - y| < \varepsilon/4\}, \quad D_3 = \{x\colon |x - y| < \varepsilon/2\}.$$

Проверку выполнения условий (i) — (v) опускаем.

Лемма показывает, что теорема 6.7.1 является следствием такой теоремы.

Теорема 6.7.3. *Пусть спектральная мера Леви n-мерного б. д. закона P удовлетворяет условию*

$$\nu_P(E) \geqslant k\omega_n(E \cap A),$$

где $k > 0$ — постоянная, ω_n — лебегова мера в R^n, $A \subset R^n$ — множество, удовлетворяющее условию (K). Тогда закон P не принадлежит классу I_{0n}.

Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 6.7.4. *Пусть D_1, D_2 и D_3 — непустые ограниченные открытые множества в R^n, удовлетворяющие условиям* (ii) — (v), $k > 0$ — *постоянная. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция*

$$\varphi_\varepsilon(t) = \exp\left\{k \int_{D_1} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\, dx - \varepsilon k \int_{D_2} (e^{i\langle t, x\rangle} - 1)\, dx\right\} \tag{6.7.5}$$

является х. ф. некоторого n-мерного закона.

Нам понадобится такой простой факт.

Лемма 6.7.2. *Пусть B_1 и B_2 — ограниченные открытые множества в R^n, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — функции, непрерывные на B_1 и B_2 соответственно и такие, что* $(j = 1, 2)$

$0 < p_j(x) < K$ *при* $x \in B_j$; $p_j(x) = 0$ *при* $x \overline{\in} B_j$. *Тогда функция*

$$p(y) = \int_{R^n} p_1(y-x)\, p_2(x)\, dx \tag{6.7.6}$$

непрерывна в R^n, *строго положительна на* $B_1 + B_2$ *и равна нулю вне* $B_1 + B_2$.

Доказательство. При помощи классической теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что $\lim\limits_{y \to x} p(y) = p(x)$, и, следовательно, функция $p(y)$ непрерывна.

Пусть найдется точка $y \in B_1 + B_2$ такая, что $p(y) = 0$. Так как

$$p(y) = \int_{B_2} p_1(y-x)\, p_2(x)\, dx, \tag{6.7.7}$$

то имеем $p_1(y-x)\, p_2(x) = 0, \quad x \in B_2$. Поскольку $p_2(x) > 0$ при $x \in B_2$, то отсюда следует, что $p_1(y-x) = 0$, $x \in B_2$. Далее, из $y \in B_1 + B_2$ следует, что $x \in B_2$ можно выбрать таким, чтобы $y - x \in B_1$. Но тогда по условию леммы $p_1(y-x) > 0$, и мы получили противоречие.

Если $y \overline{\in} B_1 + B_2$, то при любом $x \in B_2$ имеем $y - x \overline{\in} B_1$, $p_1(y-x) = 0$, и из (6.7.7) видно, что $p(y) = 0$. Лемма доказана.

Докажем теорему 6.7.4. При доказательстве этой теоремы будем понимать знак $*$ в смысле, отличном от того, в котором он понимается в остальном тексте книги. Именно, под $p_1 * p_2$, где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — конечные линейные комбинации функций, удовлетворяющих условиям леммы 6.7.2, будем понимать функцию $p = p(y)$, определенную равенством (6.7.6). Запись $p = p_1^{m*}$ ($m = 1, 2, \ldots$) условимся понимать как $p = p_1$ при $m = 1$ и $p = p_1 * p_1^{(m-1)*}$ ($m \geqslant 2$).

Положим

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_j, \\ 0, & x \overline{\in} D_j, \end{cases} \qquad j = 1, 2.$$

Тогда выражение для функции $\varphi_\varepsilon(t)$ можно записать в виде

$$\varphi_\varepsilon(t) = \exp\left\{k \int_{R^n} (e^{i\langle t,\, x\rangle} - 1)(\chi_1(x) - \varepsilon\chi_2(x))\, dx\right).$$

Полагая

$$c = \exp\left\{-k \int_{R^n} (\chi_1(x) - \varepsilon\chi_2(x))\, dx\right\},$$

имеем

$$\varphi_\varepsilon(t) = c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!}\left[\int_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle}(\chi_1(x) - \varepsilon\chi_2(x))\, dx\right]^m =$$

$$= c\left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{m!} \int_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle}[\chi_1 - \varepsilon\chi_2]^{m*}(x)\, dx\right\}.$$

Отсюда видно, что функция $\varphi_\varepsilon(t) - c$ представляется в виде

$$\varphi_\varepsilon(t) - c = \int_{R^n} e^{i\langle t,\, x\rangle} g_\varepsilon(x)\, dx,$$

где

$$g_\varepsilon(x) = c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{m!}[\chi_1 - \varepsilon\chi_2]^{m*}(x).$$

Покажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $g_\varepsilon(x)$ будет неотрицательной во всем пространстве R^n. Тем самым будет установлено, что функция $\varphi_\varepsilon(t)$ является х. ф. закона

$$P_\varepsilon(E) = c\varepsilon_0(E) + \int_E g_\varepsilon(x)\, dx,$$

и, таким образом, будет доказано утверждение теоремы.

Рассмотрим функцию

$$[\chi_1 - \varepsilon\chi_2]^{m*}(x) = \chi_1^{m*}(x) +$$

$$+ \left\{\sum_{k=1}^{m-1} C_m^k (-1)^k \varepsilon^k [\chi_1^{(m-k)*} * \chi_2^{k*}](x) + \right.$$

$$\left. + (-1)^m \varepsilon^m \chi_2^{m*}(x)\right\} = \chi_1^{m*}(x) + \vartheta_{m\varepsilon}(x).$$

Пусть $m \geqslant m_0$, где $m_0 \geqslant 2$ — число, начиная с которого выполняется равенство (6.7.3).

По лемме 6.7.2 функция $\chi_1^{m*}(x)$ непрерывна в R^n и строго положительна на множестве $(m) D_1$. По той же лемме функции $[\chi_1^{(m-k)*} * \chi_2^{k*}](x)$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, $\chi_2^{m*}(x)$ непрерывны в R^n и равны нулю соответственно вне множеств $(m-k) D_1 + (k) D_2$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, $(m) D_2$. Следовательно, функция $\vartheta_{m\varepsilon}(x)$ непрерывна в R^n и равна нулю вне множества

$$Q_m = \bigcup_{k=1}^{m} [(m-k) D_1 + (k) D_2]. \tag{6.7.8}$$

Заметим, что при $1 \leqslant k \leqslant m$ имеем

$$\begin{aligned}(m-k) D_1 + (k) D_2 \subset (m-k)(D_1 \cup D_2) + \\ + (k-1)(D_1 \cup D_2) + D_2 = \\ = (m-1)(D_1 \cup D_2) + D_2 \subset (m-1)(D_1 \cup D_3) + D_2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$Q_m \subset (m-1)(D_1 \cup D_3) + D_2,$$

откуда

$$\overline{Q}_m \subset (m-1)(\overline{D_1 \cup D_3}) + \overline{D}_2 \subset (m-1)(\overline{D_1 \cup D_2}) + D_3.$$

Учитывая, что для любых открытых множеств A и B выполняется $\overline{A} + B = A + B$, получаем

$$\overline{Q}_m \subset (m-1)(D_1 \cup D_3) + D_3 \subset (m)(D_1 \cup D_3),$$

откуда в силу (6.7.3) заключаем, что

$$\overline{Q}_m \subset (m) D_1.$$

Отсюда следует, что число $\varepsilon_m > 0$ $(m \geqslant m_0)$ можно выбрать таким образом, чтобы при любом ε, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_m$, выполнялось во всем пространстве R^n неравенство

$$[\chi_1 - \varepsilon\chi_2]^{m*}(x) \geqslant 0,$$

причем знак $\geqslant$ можно заменить на $>$ при $x \in (m) D_1$. Положим

$$\varepsilon^{(1)} = \min[\varepsilon_{m_0}, \varepsilon_{m_0+1}, \ldots, \varepsilon_{2m_0-1}].$$

Так как любое число $m \geqslant 2m_0$ можно представить в виде $m = am_0 + b$, где a и b — натуральные числа,

$m_0 \leqslant b \leqslant 2m_0 - 1$, то при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon^{(1)}$ имеем

$$[\chi_1 - \varepsilon\chi_2]^{m*}(x) = \\ = \{[(\chi_1 - \varepsilon\chi_2)^{m_0 *}]^{a*} * (\chi_1 - \varepsilon\chi_2)^{b*}\}(x) \geqslant 0, \quad x \in R^n,$$

причем (лемма 6.7.2) неравенство строгое при $x \in (m) D_1$. Итак, мы показали, что при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon^{(1)}$ выполняется

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{k^m}{m!}[\chi_1 - \varepsilon\chi_2]^{m*}(x) \geqslant 0, \qquad x \in R^n,$$

причем неравенство строгое при $x \in \bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} (m) D_1$.

Функцию $g_\varepsilon(x)$ можно записать в виде

$$g_\varepsilon(x) = g_\varepsilon^{(1)}(x) + g_\varepsilon^{(2)}(x),$$

где

$$g_\varepsilon^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{m_0-1} \frac{k^m}{m!} \chi_1^{m*}(x) + \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{k^m}{m!}[\chi_1 - \varepsilon\chi_2]^{m*}(x),$$

$$g_\varepsilon^{(2)}(x) = \sum_{m=1}^{m_0-1} \frac{k^m}{m!} \vartheta_{m\varepsilon}(x).$$

При $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon^{(1)}$ функция $g_\varepsilon^{(1)}(x)$ неотрицательна всюду в R^n, непрерывна и строго положительна на открытом множестве $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (m) D_1 = M^+(D_1)$. Функция $g_\varepsilon^{(2)}(x)$ равна нулю вне множества $R = \bigcup\limits_{m=1}^{m_0-1} Q_m$, где Q_m определяется равенством (6.7.8). В силу условия (6.7.4) имеем

$$\overline{Q}_m = \bigcup_{k=1}^{m} [(m-k)\overline{D}_1 + (k)\overline{D}_2] \subset \\ \subset \bigcup_{k=1}^{m} [(m-k)\overline{D}_1 + (kq) D_1] = \bigcup_{k=1}^{m} (m-k+kq) D_1 \subset M^+(D_1)$$

и, следовательно, $\overline{R} \subset M^+(D_1)$. Пусть

$$\alpha(\varepsilon) = \inf_{x \in \overline{R}} g_\varepsilon^{(1)}(x), \quad \beta(\varepsilon) = \sup_{x \in \overline{R}} |g_\varepsilon^{(2)}(x)|.$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \beta(\varepsilon) = 0$, а $\alpha(\varepsilon)$ непрерывно зависит от ε и $\alpha(\varepsilon) > 0$ при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon^{(1)}$. Поэтому число $\varepsilon^{(2)}$, $0 < \varepsilon^{(2)} \leqslant \varepsilon^{(1)}$, можно выбрать столь малым, чтобы при $0 < \varepsilon < \varepsilon^{(2)}$ выполнялось $\alpha(\varepsilon) > \beta(\varepsilon)$. Но тогда при $0 < \varepsilon < \varepsilon^{(2)}$ будем иметь $g_\varepsilon(x) \geqslant 0$, $x \in R^n$, что и требовалось.

Докажем теорему 6.7.3. Нам понадобится такой факт. Пусть х. ф. n-мерного закона P_0 допускает представление $(t \in R^n)$

$$\varphi(t; P_0) = \exp\Big\{i\langle\beta, t\rangle - Q(t) + \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle t, x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\lambda(dx)\Big\}, \qquad (6.7.9)$$

где $\beta \in R^n$, $Q(t)$ — неотрицательная квадратичная форма, λ — заряд, не являющийся мерой, т. е. принимающий на некоторых $E \subset R^n$ отрицательные значения. Тогда закон P_0 не может быть б. д. законом. Для доказательства заметим, что если х. ф. закона допускает представление вида (6.7.9), то это представление единственно. (В одномерном случае это утверждение равносильно теореме 1.1.10; многомерный случай не вызывает дополнительных трудностей; можно повторить с очевидными изменениями рассуждение, проведенное в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1], стр. 86—87). Если бы закон P_0 был б. д., то по теореме П. Леви его х. ф. допускала бы представление вида (6.7.9), где λ — мера. Ввиду единственности λ получили бы противоречие.

Пусть закон P удовлетворяет условиям теоремы 6.7.3. Запишем представление его х. ф. формулой Леви:

$$\varphi(t; P) = \exp\Big\{i\langle\beta, t\rangle - Q(t) + \int\limits_{R^n\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle t, x\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu_P(dx)\Big\} \qquad (6.7.10)$$

($\beta \in R^n$, $Q(t)$ — неотрицательная квадратичная форма). Пусть D_1, D_2, D_3 — непустые ограниченные открытые множества, удовлетворяющие условиям (i) — (v). По теореме 6.7.4 функция $\varphi_\varepsilon(t)$, определенная равенством (6.7.5), является для некоторого $\varepsilon > 0$ х. ф. Обозначим соответствующий закон через P_1; в силу сказанного ранее этот закон не является б. д. Функция

$$\psi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(t; P)/\varphi_\varepsilon(t),$$

очевидно, представляется формулой (6.7.10), но роль ν_P играет заряд

$$\nu(E) = \nu_P(E) - k\omega_n(E \cap D_1) + k\varepsilon\omega_n(E \cap D_2).$$

Так как $\nu_P(E) \geqslant k\omega_n(E \cap A)$ и $A \supset D_1$, то заряд $\nu(E)$ является мерой. Следовательно, функция $\psi_\varepsilon(t)$ является х. ф. некоторого б. д. закона P_2. Очевидно, $P = P_1 * P_2$, и, таким образом, закон P имеет компоненту P_1, не являющуюся б. д. законом. По теореме 6.2.7 закон P_1 имеет неразложимую компоненту. Отсюда следует, что и закон P имеет неразложимую компоненту, т. е. $P \overline{\in} I_{0n}$.

Отметим такое следствие теоремы 6.7.4.

Следствие. *При $n \geqslant 2$ существуют n-мерные не безгранично делимые законы, все проекции которых безгранично делимы.*

Действительно, пусть D_1 — шаровой слой $\{x: 1 < |x| < 2\}$, а D_2 и D_3 — шары радиусов δ_1 и δ_2 соответственно $(0 < \delta_1 < \delta_2 < 1)$ с центрами в нуле. Рассмотрим заряд

$$\lambda_\varepsilon(E) = \omega_n(E \cap D_1) - \varepsilon\omega_n(E \cap D_2), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Легко видеть, что число δ_1 можно выбрать столь малым, что для любого вектора r из единичной сферы S^n пространства R^n проекция заряда λ_ε на r, то есть одномерный заряд, определенный формулой

$$\lambda_{\varepsilon r}(E) = \lambda_\varepsilon(\{x: \langle x, r\rangle \in E\}),$$

будет мерой. (В силу сферической симметрии достаточно убедиться в этом для одного вектора $r \in S^n$, скажем для $r = (1, 0, \ldots, 0)$.) Фиксируем выбранное таким образом δ_1 и рассмотрим функцию $\varphi_\varepsilon(t)$, определенную равенством (6.7.5). Так как множества D_1, D_2, D_3 удовлетворяют (см. пример 5) условиям (ii) — (v), то по теореме 6.7.4 функция $\varphi_\varepsilon(t)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ является х. ф. некоторого n-мерного закона P. В силу сказанного в начале доказательства теоремы 6.7.3 закон P не является б. д. Для любого вектора $r \in S^n$ имеем ($t \in R^1$)

$$\varphi(t; P_r) = \varphi_\varepsilon(tr) = \exp\left\{k \int\limits_{R^n} (e^{it\langle x, r\rangle} - 1)\, \lambda_\varepsilon(dx)\right\} =$$
$$= \exp\left\{k \int\limits_{R^1} (e^{ity} - 1)\, \lambda_{\varepsilon r}(dy)\right\}.$$

Поскольку заряд $\lambda_{\varepsilon r}$ является мерой, то закон P_r является б. д.

В заключение этого параграфа рассмотрим такой вопрос: могут ли законы класса I_{0n} ($n \geqslant 2$) иметь проекции, не принадлежащие I_0? Ответ на этот вопрос утвердителен, более того, существуют законы $P \in I_{0n}$ ($n \geqslant 2$), все проекции которых не принадлежат I_0. Приведем пример такого закона в случае $n = 2$.

Пример 6. Пусть B — множество на плоскости, состоящее из двух отрезков, один из них соединяет точку (0, 2) с точкой (2, 5), а второй — точку (2, 5) с точкой (4, 2). Тогда множество $(2)\,B$ состоит из параллелограмма с вершинами в точках (2, 7), (4, 10), (6, 7), (4, 4) и двух отрезков, один соединяет (0, 4) и (2, 7), а второй — (6, 7) и (8, 4). Обозначая через B_1 наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество B (B_1 является треугольником с вершинами в точках (0, 2), (2, 5), (4, 2)), видим, что $B_1 \cap (2)\,B = \varnothing$. Так как все точки множеств $(m)\,B$, $m \geqslant 3$, имеют ординаты $\geqslant 6$, то отсюда заключаем, что

$$B_1 \cap (2)\,M^+(B) = \varnothing.$$

Обозначим через $A = A(\varepsilon)$ объединение всех открытых кругов радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами в точках множества B. Очевидно, при достаточно малом ε будем иметь

$$A^* \cap (2)\,M^+(A) = \varnothing,$$

где A^* — наименьшее открытое выпуклое множество, содержащее множество A. Рассмотрим б. д. закон P без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви которого дается равенством

$$\nu_P(E) = \omega_2(E \cap A), \qquad E \subset R^2.$$

По теореме 6.6.1 закон P принадлежит классу I_{02}.

В силу замечания, сделанного в конце § 1, проекция P_e закона P на вектор $e \in S^n$ является б. д. законом, спектральная мера Леви которого выражается формулой

$$\nu_{P_e}(E) = \nu_P(\{x: \langle x, e\rangle \in E\}), \qquad E \subset R^1.$$

Проекция множества B на направление вектора e является отрезком; обозначим его концы через $a_e e$ и $b_e e$, где $a_e, b_e \in R^1$, $a_e < b_e$. С помощью элементарного подсчета убеждаемся, что либо a_e и b_e имеют разные знаки, либо $b_e/a_e > 2$, либо $a_e/b_e > 2$. Поэтому множество $B_e = (a_e, b_e) \subset R^1$ удовлетворяет условию

$$B_e \cap (2)\, M^+(B_e) \neq \varnothing.$$

Легко видеть, что найдется такая постоянная $k > 0$, что для любого $E \subset R^1$ выполняется

$$\omega_2(\{x: \langle x, e\rangle \in E\} \cap A) \geqslant k\omega_1(E \cap B_e).$$

Поэтому спектральная мера Леви закона P_e удовлетворяет условию

$$\nu_{P_e}(E) \geqslant k\omega_1(E \cap B_e), \qquad E \subset R^1.$$

По теореме 6.7.1 закон P_e не принадлежит I_0.

Замечание. Построенное выше множество A, очевидно, таково, что $A^* \cap (2)\, A^* \neq \varnothing$.

ГЛАВА VII

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗЛОЖЕНИЯХ

§ 1. α-разложения

При выводе формул Леви — Хинчина на основе теоремы Крейна — Мильмана о крайних точках выпуклых компактов (см. Приложение I) используется то, что для б. д. х. ф. $f(t)$ при любом $\alpha > 0$ $(f(t))^\alpha$ есть х. ф.; при этом берется ветвь $(f(t))^\alpha$, обращающаяся в 1 при $t = 0$, и существенно необращение в нуль б. д. х. ф. для всех $t \in R^1$. Если $f(t)$ — любая х. ф., то она не обращается в нуль в некоторой окрестности нуля: $|t| \leqslant \delta$, и мы можем составить функцию $(f(t))^\alpha$ при любом $\alpha > 0$ и $|t| \leqslant \leqslant \delta$, снова беря ту ветвь $(f(t))^\alpha$, которая обращается в 1 при $t = 0$. Если $f(t)$ не обращается в нуль, то можно рассматривать $(f(t))^\alpha$ на всей реальной оси. Можно рассматривать совокупность $\mathfrak{U}$ всех х. ф., не обращающихся в нуль на R^1, естественно рассматривать их замыкание $\overline{\mathfrak{U}}$ в подходящей топологии. Однако для топологии равномерной сходимости на R^1 это не выделяет нового класса х. ф. Именно, И. А. Ибрагимов доказал следующую теорему *).

Теорема 7.1.1. *Замыкание $\overline{\mathfrak{U}}$ множества $\mathfrak{U}$ в топологии равномерной сходимости на всей оси совпадает с множеством $\mathfrak{F}$ всех х. ф.: $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Множество $\mathfrak{U}_0$ х. ф. $f(t)$ вида

$$f(t) = \int_{-T}^{T} e^{itx}\, dF(x), \qquad T < \infty, \quad F \text{ несимметрична},$$

*) Сообщена автором вместе с доказательством в ноябре 197

плотно в $\mathfrak{F}$. Достаточно доказать поэтому, что любую функцию из $\mathfrak{U}_0$ можно равномерно приблизить функциями из $\mathfrak{U}$. Пусть $f \in \mathfrak{U}_0$. Тогда

$$r_f(t) = \int_{-T}^{T} \cos tx\, dF = \operatorname{Re} f, \qquad i_f(t) = \int_{-T}^{T} \sin tx\, dF = \operatorname{Im} f$$

— целые функции t. При этом $i_f(t) \not\equiv 0$ и, значит, $i_f(t)$ имеет не более чем счетное число нулей $t_1, t_2, \ldots$

Положим

$$f_\varepsilon(t) = (1-\varepsilon) f(t) + \varepsilon, \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1.$$

Все f_ε — х. ф. Кроме того,

$$f_\varepsilon(t) = [(1-\varepsilon) r_f(t) + \varepsilon] + i(1-\varepsilon) i_f(t)$$

может обращаться в нуль лишь в нулях $i_f(t)$, т. е. в точках $t_1, t_2, \ldots$ При этом $f_\varepsilon(t_\nu) = 0$, лишь и если лишь

$$\operatorname{Re} f_\varepsilon(t_\nu) = (1-\varepsilon) r_f(t_\nu) + \varepsilon = 0.$$

Следовательно, $f_\varepsilon(t_\nu) = 0$, лишь если

$$\varepsilon = \frac{1}{r_f(t_\nu) - 1} = \varepsilon_\nu.$$

Таким образом, для всех $\varepsilon \neq \varepsilon_\nu$ $f_\varepsilon \in \mathfrak{U}$ и

$$| f(t) - f_\varepsilon(t) | \leqslant 2\varepsilon,$$

что и доказывает теорему 7.1.1.

Ввиду этого, рассматривая достаточно обширные множества х. ф., замкнутые в подходящей топологии, мы должны брать х. ф., имеющие нули.

Будем рассматривать указанные выше ветви $(f(t))^\alpha$ и их логарифмов $\alpha \ln f(t)$ в окрестности нуля, где $f(t) \neq 0$. Разложения вида

$$f(t) = (f_1(t))^{\alpha_1} \ldots (f_s(t))^{\alpha_s}, \tag{7.1.1}$$

где $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, $f_i(t)$ — х. ф., $|t| < \delta$, и $f(t) \neq 0$ при $-\delta < t < \delta$, будем называть *α-разложениями*. Соответствующее разложение $\ln f(t)$ имеет вид

$$\ln f(t) = \alpha_1 \ln f_1(t) + \ldots + \alpha_s \ln f_s(t); \qquad -\delta < t < \delta.$$

Соответственно такому разложению можно ввести понятие крайних точек соответствующего компакта во множестве $\mathfrak{F}$ х. ф. В приложении I мы найдем крайние точки таких компактов, отвечающие множеству б. д. х. ф., далее в § 5 мы укажем «грани», состоящие из б. д. х. ф. Задача об описании всех крайних точек компакта множества $\mathfrak{F}$ и соответствующих «граней» может быть также сформулирована, но она не исследовалась. Мы будем рассматривать далее также *счетные* α-*разложения* ($s = \infty$ в (7.1.1)); при $s < \infty$ будем говорить о *конечных* α-*разложениях*. α-разложение можно рассматривать также для некоторой последовательности точек $t_k \downarrow 0$.

§ 2. Вспомогательные теоремы о конечных α-разложениях

Пусть $\varphi(t)$ — х. ф. Так как $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t)$ непрерывна, то существует сегмент $|t| \leqslant \delta_0$, где $\varphi(t) \neq 0$. Пусть $\alpha > 0$ — положительное число. Составим $\ln \varphi(t)$ при $|t| \leqslant \delta_0$, выбирая ту ветвь логарифма, которая реальна при положительном аргументе, так что $\ln \varphi(0) = 0$. Далее, полагаем $(\varphi(t))^\alpha = \exp(\alpha \ln \varphi(t))$ при $|t| \leqslant \delta_0$. Как было замечено в § 3 гл. II, $(\varphi(t))^\alpha$ не всегда является х. ф.

Теорема 7.2.1. *Пусть $\varphi(t)$ регулярна и не имеет нулей в круге $|t| < R$, а также обладает свойством эрмитовости: $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$. Пусть для последовательности различных реальных чисел $t_k \to 0$ имеет место соотношение*

$$(\varphi_1(t_k))^{\alpha_1} (\varphi_2(t_k))^{\alpha_2} \dots (\varphi_s(t_k))^{\alpha_s} = \varphi(t_k), \tag{7.2.1}$$

где $\varphi_j(t)$ — характеристические функции, $\alpha_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, s$).

Тогда $\varphi_j(t)$ регулярны в том же круге, не имеют там нулей и равенство (7.2.1) *верно для всех $|t| < R$.*

Заметим, что в случае целых α_j эта теорема сразу сводится к теореме 3.1.1, ибо в этом случае $(\varphi_j(t))^{\alpha_j}$, очевидно, будут х. ф.; их произведения будут также х. ф. Если числа α_j рациональные, то эту теорему также можно свести к теореме 3.1.1. Именно можно положить $\alpha_j = m_j/n$, где n и m_j — целые числа. Возводя равенство (7.2.1) в степень n, получим слева произведение х. ф.

Если же числа α_j иррациональные, то подобные приемы не действуют; попытки применить здесь теорию диофантовых приближений пока не привели к результату.

Доказательство теоремы 7.2.1 потребует ряда лемм. Вводим

$$f(t)=\varphi(t)\,\varphi(-t),\quad f_j(t)=\varphi_j(t)\,\varphi_j(-t) \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,s), \tag{7.2.2}$$

где $f(t)$ — четная функция, регулярная в круге $|t|<R$, и $f_j(t)$ — четные х. ф., положительные в некоторой окрестности $|t|<\delta_0$. Изменяя в случае надобности нумерацию чисел $t_k\to 0$ и считая их положительными (что, очевидно, допускается в силу четности $f(t)$ и $f_j(t)$), можем считать, что $0<t_k<\delta_0$ и что

$$(f_1(t_k))^{\alpha_1}\ldots(f_s(t_k))^{\alpha_s}=f(t_k). \tag{7.2.3}$$

Далее, считаем, что $f(t)=\exp g(t)$ при $|t|\leqslant\delta_0$, где $g(t)$ — непрерывная четная функция.

Лемма 7.2.1. *Функции $f_j(t)$ $(j=1,\,2,\,\ldots,\,s)$ дважды дифференцируемы на всей оси.*

Для доказательства используем неравенство $1-u\leqslant\leqslant e^{-u}$, из него выводим

$$f_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,dF_j(x)=$$

$$=1-2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}\,dF_j(x)\leqslant\exp\left(-2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}\,dF_j(x)\right).$$

Из (7.2.3) выводим

$$-2\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{t_kx}{2}\,dF_j(x)\geqslant g(t_k). \tag{7.2.4}$$

Далее, ввиду того, что $\alpha_j>0$ $(j=1,\,2,\,\ldots,\,s)$, заключаем, что

$$-\frac{1}{2}g(t_k)\geqslant\alpha_0\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{t_kx}{2}\,dF_j(x)\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,s),$$

где $\alpha_0=\min(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_s)$.

Полагая $-\frac{1}{2}g(t_k)=\beta t_k^2+O(t_k^4)$ (ибо $g(t)$ — четная функция, регулярная в $|t|\leqslant\delta_0$), видим, что должно быть $\beta\geqslant 0$ и

$$\beta t_k^2+O(t_k^4)\geqslant\alpha_0\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{t_kx}{2}\,dF_j(x). \tag{7.2.5}$$

Пусть $t_k\to 0$. Деля (7.2.5) на t_k^2 и применяя лемму Фату, находим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF_j(x)<\infty$, что и доказывает лемму.

Лемма 7.2.2. *Функции $f_j(t)$ имеют производные всех порядков на реальной оси.*

Эта лемма доказывается по индукции. Мы доказали существование $f_j''(t)$ $(j=1, 2, \ldots, s)$. Допустим, что существуют $f_j^{(2q)}(t)$, и докажем существование $f_j^{(2q+2)}(t)$. Составим равенство

$$((f_1(t))^{\alpha_1}\ldots(f_s(t))^{\alpha_s})^{(2q)}=S_1(t)+S_2(t)+S_3(t), \tag{7.2.6}$$

где $S_1(t)$ содержит $f_j^{(2q)}(t)$ $(j=1, \ldots, s)$, $S_2(t)$ содержит хотя бы одну производную нечетного порядка, а $S_3(t)$ состоит из производных только четного порядка, меньшего, чем $2q$. Возвращаясь к равенству (7.2.3), имеющему место для всех t_k, заметим, что обе его части дифференцируемы $2q$ раз и реальны.

Применим известную теорему Ролля: между двумя корнями дифференцируемой функции лежит корень ее производной. Отсюда следует, что если продифференцировать обе части равенства (7.2.3), то они будут совпадать в последовательности чисел $t'_m\to 0$, лежащих между числами t_k или совпадающих с ними. Снова дифференцируем обе получающиеся функции и применяем теорему Ролля. Получаем, что вторые производные будут совпадать в бесконечной последовательности различных реальных чисел $t_{k_2}\to 0$. Действуя далее таким образом, найдем, что существует последовательность различных положительных чисел $t'_k\to 0$ таких, что (7.2.6) при $t=t'_k$ совпадает с $(f(t))^{(2q)}$. Далее,

$$S_1(t)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j f_j^{(2q)}(t)\frac{1}{f_j(t)}\prod_{j=1}^{s}(f_j(t))^{\alpha_j}. \tag{7.2.7}$$

$S_2(t)$ должна иметь в каждом своем слагаемом по крайней мере две производные нечетных порядков (может быть повторение одной и той же). Далее, $S_3(t)$, состоящая из производных четных порядков $<2q$ и, стало быть, дважды дифференцируемая,— четная функция. Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_3(t'_k)-S'_3(0)}{t'^2_k}=s_3. \tag{7.2.8}$$

Далее, $S_2(0)=0$; каждое слагаемое $S_2(t)$ содержит по крайней мере два множителя вида $f^{(2k+1)}(t)$, являющихся нечетными функциями. Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_2(t'_k)-S_2(0)}{t'^2_k}=s_2 \tag{7.2.9}$$

существует и конечен.

Мы видим далее, что

$$\frac{1}{f_j(t)}\prod_{j=1}^{s}(f_j(t))^{\alpha_j}=\psi_j(t)$$

— четные и дважды дифференцируемые в окрестности 0 функции, причем $\psi_j(0)=1$, так что

$$\psi_j(t)=1+b_jt^2+o(t^2). \tag{7.2.10}$$

Таким образом,

$$S_1(t)-S_1(0)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_jf_j^{(2q)}(t)\,\psi_j(t)-\sum_{j=1}^{s}\alpha_jf_j^{(2q)}(0)=$$
$$=S_{11}(t)+t^2S_{12}(t)+S_{13}(t), \tag{7.2.11}$$

где

$$S_{11}(t)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j(f_j^{(2q)}(t)-f_j^{(2q)}(0)), \tag{7.2.12}$$

$$S_{12}(t)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_jb_jf_j^{(2q)}(t), \tag{7.2.13}$$

$$S_{13}(t)=o(t^2). \tag{7.2.14}$$

Кроме того,

$$f^{(2q)}(t)=f^{(2q)}(0)+c_0t^2+O(t^4). \tag{7.2.15}$$

Выражение (7.2.6) совпадает с (7.2.15) в точках $t = t'_k$. Используя (7.2.6) — (7.2.15), находим, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{11}(t'_k)}{t'^2_k} = s_{11}$$

существует и конечен. Отсюда

$$(-1)^q \, 2 \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t'_k x}{2} x^{2q} \, dF_j(x) = O(t'^2_k).$$

Так как $\alpha_j > 0$, то отсюда выводим (ср. вывод леммы 7.2.1) существование

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2q+2} \, dF_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

что и доказывает лемму 7.2.2.

Лемма 7.2.3. *Функции $f_j(t)$ регулярны в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство этой леммы сложнее, чем предыдущих. Прежде всего предполагаем, что $\alpha_j > 1$. Этого можно достигнуть за счет возведения исходного равенства (7.2.3) в надлежащую целую степень.

Теперь для получения оценки $| f_j^{(2q)}(0) |$ возведем уравнение (7.2.3) в степень $2q$ и продифференцируем его левую часть $2q$ раз. Функцию $(f(t))^{2q}$ временно обозначим $f_0(t)$. Важно заметить, что при $t = 0$ все производные нечетного порядка в левой части исчезнут.

Все остальные слагаемые при $t = 0$ будут иметь знак $(-1)^q$.

При этом важно, что все коэффициенты вида

$$2q\alpha_1 (2q\alpha_1 - 1)(2q\alpha_1 - 2), \ldots, 2q\alpha_s (2q\alpha_s - 1) \ldots$$

будут положительны, ибо $2q\alpha_j > 2q$. Полученные справа и слева выражения будут совпадать в последовательности точек $t'_k \to 0$, и так как они являются непрерывными в окрестности нуля, то будут совпадать и при $t = 0$. Оставляя в сумме, получившейся в левой части, с членами одного и того же знака $(-1)^q$ только члены, содержащие

$f_j^{(2q)}(0)$, находим

$$\Big|\sum_{j=1}^{s} 2q\alpha_j f_j^{(2q)}(0)\Big| \leqslant |f_0^{(2q)}(0)|.$$

Таким образом,

$$|f_j^{(2q)}(0)| \leqslant \frac{1}{2q\alpha_j} |f_0^{(2q)}(0)|; \qquad j=1, 2, \ldots, s.$$

Правую часть оцениваем с помощью интеграла Коши

$$f_0^{(2q)}(0) = \frac{(2q)!}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=R/2} \frac{(f(t))^{2q}}{t^{2q+1}}\, dt. \qquad (7.2.16)$$

Пусть $M_0 = \sup\limits_{|t|=R/2} |f(t)|$. Тогда из (7.2.16) выводим

$$|f_0^{(2q)}(0)| \leqslant (2q)!\, M_0^{2q} \left(\frac{2}{R}\right)^{2q} = (2q)!\, M_1^{2q},$$

где $M_1 = \frac{2M_0}{R}$. Отсюда заключаем, что

$$|f_j^{(2q)}(0)| \leqslant \frac{1}{2q\alpha_j} (2q)!\, M_1^{2q} < (2q)!\, M_1^{2q} \quad \text{при} \quad j=1, 2, \ldots, s.$$

Отсюда с помощью теоремы 2.2.3 о х. ф. $f_j(t)$ заключаем, что она регулярна в полосе $|\operatorname{Im} t| < 1/M_1$. Итак, справа и слева в равенстве (7.2.3) стоят функции голоморфные, отличные от 0 и совпадающие в последовательности точек $t_k \to 0$. Отсюда следует, что равенство (7.2.3) имеет место во всем круге $|t| < 1/M_1$ (если бы было известно, что $f(t) \neq 0$ в полосе $|\operatorname{Im} t| < 1/M_1$, то равенство имело бы место во всей полосе). Лемма доказана.

Положим теперь $it = z = x_1 + ix_2$, так что

$$f_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zu}\, dF_j(u) = v_j(z). \qquad (7.2.17)$$

Интеграл в правой части (7.2.17) сходится по крайней мере при $|z| < M_1^{-1}$. При $z = x_1$ $v_j(z) = v_j(x_1)$ образуют четные ряды с положительными коэффициентами. Имеем при $|z| < M_1^{-1}$

$$\prod_{i=1}^{s} (v_j(z))^{\alpha_j} = v(z), \qquad (7.2.18)$$

где $v(z)$ регулярна в круге $|z| < R$.

Лемма 7.2.4. *Функции $f_j(t)$ регулярны в круге $|t| < R$.*

Нам нужно доказать, что $v_j(z)$ регулярны в $|z| < R$. Пусть это не так, тогда радиусы сходимости некоторых из этих рядов должны быть меньше R. Пусть минимальный из них r_1 для ряда $v_1(z)$ (что, разумеется, не нарушает общности) и $r_1 < R$.

Функции $v_j(z)$ разлагаются в ряды с неотрицательными коэффициентами. Согласно теореме Прингсхейма — Ландау точка $z = r_1$ должна быть особой точкой $v_1(z)$. Рассмотрим точку $r_\Delta = r_1 - \Delta$, где $\Delta < r_1/2$ — малое положительное число. Имеем из (7.2.18)

$$\prod_{j=1}^{s} (v_j(r_\Delta + \xi))^{\alpha_j} = v(r_\Delta + \xi) \quad \text{при} \quad |\xi| < \Delta. \tag{7.2.19}$$

Ряды $v_j(r_\Delta + \xi)$ по степеням ξ имеют неотрицательные коэффициенты. Оценим коэффициент при ξ^q, равный

$$\frac{1}{q!}(v_j(r_\Delta + \xi))^{(q)}\big|_{\xi=0}.$$

Для этого возведем (7.2.19) в степень q, продифференцируем q раз и положим $\xi = 0$.

В силу того, что $q\alpha_j > q$, как и ранее (при доказательстве леммы 7.2.3), получим суммы положительных членов, так что найдем

$$\sum_{j=1}^{s} q\alpha_j \frac{d^q}{d\xi^q} v_j(r_\Delta + \xi)\big|_{\xi=0} \leqslant \frac{d^q}{d\xi^q}(v(r_\Delta + \xi))^q\big|_{\xi=0}. \tag{7.2.20}$$

Все производные, участвующие в этих соотношениях, неотрицательны. Правую часть оценим с помощью интеграла Коши. Функция $v(r_\Delta + \xi)$ регулярна при $|\xi| < R - r_1$. Считая ξ комплексным и полагая $\delta_1 = (R - r_1)/2$, положим $\sup\limits_{|\xi|=\delta_1} |v(r_\Delta + \xi)| = \rho(r_\Delta)$.

Очевидно, $\rho(r_\Delta) < C(r_1)$, где $C(r_1)$ — некоторая положительная функция r_1. Далее,

$$\frac{d^q}{d\xi^q}(v(r_\Delta + \xi))^q\big|_{\xi=0} = \frac{q!}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=\delta_1} \frac{(v(r_\Delta + \xi))^q}{\xi^{q+1}}\, d\xi.$$

Отсюда

$$\frac{d^q}{d\xi^q}(v(r_\Delta + \xi))^q\big|_{\xi=0} \leqslant q!\left(\frac{C(r_1)}{\delta_1}\right)^q.$$

Но $C(r_1)/\delta_1 = C_1(r_1)$ не зависит от Δ. Учитывая (7.2.20) (в левой части стоят неотрицательные величины), получим

$$\frac{d^q}{d\xi^q} v_j(r_\Delta + \xi)\big|_{\xi=0} \leqslant q!\,(C_1(r_1))^q \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Таким образом, при всяком достаточно малом $\Delta \in (0, r_1/2)$ радиус сходимости рядов $v_j(r_\Delta + \xi)$ по ξ не меньше $1/C_1(r_1)$. Но так как $z = r_1$ — особая точка, то такой радиус не может быть больше Δ. При достаточно малых Δ получается противоречие, доказывающее лемму 7.2.4.

Итак, $f_j(t)$ регулярны в круге $|t| < R$ и, следовательно, по теореме 2.2.3 — в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$.

Так как на реальной оси $f_j(t) = \varphi_j(t)\,\varphi_j(-t)$, где $\varphi_j(t)$ и $\varphi_j(-t)$ — х. ф., то по теореме 3.1.1 $\varphi_j(t)$ и $\varphi_j(-t)$ регулярны в той же полосе. Далее, в равенстве (7.2.1) все участвующие функции регулярны и не имеют нулей в круге $|t| < R$. Равенство имеет место в последовательности точек $t_k \to 0$, а следовательно, и во всем круге $|t| < R$. Теорема 7.2.1 доказана. Для случая $R = \infty$ ($\varphi(t)$ — целая функция без нулей) $\varphi_j(t)$ — также целые х. ф. без нулей.

В том же направлении интересная теорема доказана Э. Лукачем ([5], стр. 301).

Теорема 7.2.2. *Если функция $\varphi(t)$ в равенстве (7.2.1) — целая функция конечного порядка ρ, то каждая функция $\varphi_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ в этом равенстве — также целая функция порядка не выше ρ.*

В § 3 мы изложим более общую теорему Б. Рамачандрана ([3], стр. 152—153).

§ 3. Вспомогательные теоремы о счетных α-разложениях

Обобщением теоремы 7.2.1 на случай счетных α-разложений занималась Л. В. Мамай [1]. В наиболее общей и строгой форме такое обобщение дано Б. Рамачандраном в 1955 г. Мы изложим здесь его результат в этом направлении, следуя его книге [3].

Теорема 7.3.1. *Пусть φ — аналитическая, не исчезающая в круге $D = \{|t| < R\}$ функция, имеющая* *эрмитово свойство в* D. *Пусть* $\{\alpha_j\}$ — *последовательность констант, ограниченных снизу константой* $\alpha_0 > 0$ $(\alpha_j > > \alpha_0 > 0)$, *и* $\{\varphi_j\}$ — *последовательность х. ф., не исчезающих в некотором интервале* I: $-\delta < t < \delta$ $(\delta > 0)$. *Пусть* $\varphi(0) = 1$ *и соотношение*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(t))^{\alpha_j} = \varphi(t) \tag{7.3.1}$$

имеет место для последовательности $\{t_k\}$ *точек, принадлежащих* I *и стремящихся к* 0. *Тогда каждая функция* φ_j *является аналитической и не исчезающей в* D *и соотношение* (7.3.1) *верно всюду в* D.

Заметим, что требование эрмитовости φ можно заменить требованием, чтобы (7.3.1) имело место во всех точках последовательностей $\{t_k\}$ и $\{-t_k\}$, где первая последовательность состоит из положительных чисел $t_k \to 0$. Это возможно, поскольку $\varphi_j(-t) = \overline{\varphi_j(t)}$ для всех реальных t и всех j. Условие $\varphi(0) = 1$ эквивалентно требованию, чтобы (7.3.1) имело место и для $t = 0$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 7.3.1. Мы предполагали, что φ_j не обращаются в нуль в I; $\varphi_j(0) = 1$, и мы можем рассматривать ветвь $\ln \varphi_j$, непрерывную на I и исчезающую в начале координат; функцию $\varphi_j^{\alpha_j}$ будем понимать как $\exp(\alpha_j \ln \varphi_j)$. В том же смысле будем рассматривать $\ln \varphi$ в D.

Можно считать, что $\alpha_0 < {}^1/_2$ и $\alpha_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$. В самом деле, всегда можем заменить положительную константу α_0 на любую меньшую положительную константу. Далее, для всякого j можно рассматривать функции $g_j = = \varphi_j^{m_j}$, где m_j — целое число $\geqslant \alpha_j$, и доказывать нашу теорему для х. ф. g_j. Заметим, что если $\alpha_j > 1$, то можно найти m_j таким, чтобы $\alpha_j/m_j \geqslant {}^1/_2 > \alpha_0$. Итак, можем считать, что

$$\alpha_0 < \alpha_j \leqslant 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим сперва случай, когда D есть круг $|t| < R$. Наш первый шаг будет состоять в переходе от х. ф. φ_j к симметрической х. ф. $\Phi_j(t) = \varphi_j(t)\,\varphi_j(-t)$. Если определим $\Phi(t)$ в области D соотношением $\Phi(t) = \varphi(t)\,\varphi(-t)$, то, поскольку $\Phi(t)$ имеет эрмитово свойство в D, соотношение (7.3.1) имеет место и в точках $(-t_k)$, так что соотношение

$$\prod_{j=1}^{\infty}(\Phi_j(t))^{\alpha_j}=\Phi(t) \tag{7.3.2}$$

имеет место во всех точках t_k. Поэтому можно допустить, что последовательность $\{t_k\}$ состоит из положительных точек и $t_k \downarrow 0$.

Пусть F_j — законы, отвечающие х. ф. Φ_j; F_j отвечает симметрическим законам, так что для всех $t \in R^1$ имеем

$$\Phi_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,dF_j(x)=$$

$$=1-2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)dF_j(x)\leqslant\exp\left[-2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)dF_j(x)\right]$$

(см. вывод неравенства (7.2.4)). Поэтому из (7.3.2) выводим для каждого k:

$$(\Phi(t_k))^{-2/t_k^2}\geqslant\exp\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\int_{-\infty}^{\infty}\left[4\sin^2\frac{t_kx}{2}\right]\frac{1}{t_k^2}\,dF_j(x).$$

Логарифмируя и полагая $\psi=\ln\Phi$, будем иметь

$$-\frac{2}{t_k^2}\psi(t_k)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\int_{-\infty}^{\infty}\left[4\sin^2\left(\frac{t_kx}{2}\right)\frac{1}{t_k^2}\right]dF_j(x).$$

При $k\to\infty$ имеем $\dfrac{2\psi(t_k)}{t^2}=\psi''(0)+o(1)$; мы обозначим $\psi''(0)=-a_2<0$, так что получим соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\int_{-\infty}^{\infty}\left[4\sin^2\left(\frac{t_kx}{2}\right)\frac{1}{t_k^2}\right]dF_j(x)\leqslant a_2+o(1)\quad\text{при}\quad k\to\infty.$$

Слева стоит ряд с неотрицательными членами, и неравенство будет годно для любых его частных сумм $\sum\limits_{j=1}^{n}$. Рассуждая, как при выводе леммы 7.2.1, найдем, что $\mu_{2j}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF_j(x)$ существует для любого j и что

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_{2j} \leqslant a_2$ для любого n, так что $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{2j} \leqslant a_2$. Так как $\alpha_j > \alpha_0$, то отсюда выводим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{2j} \leqslant \frac{a_2}{\alpha_0}. \qquad (7.3.3)$$

Поскольку μ_{2j} существуют для всех j, то Φ_j имеют производные двух первых порядков при $t \in R^1$, и притом

$$\Phi_j'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} x \sin(tx)\, dF_j(x), \quad \Phi_j''(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(tx)\, dF_j(x).$$

Лемма 7.3.1. *Ряды* $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln \Phi_j(t)$, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{\Phi_i'(t)}{\Phi_j(t)}$ *и* $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{\Phi_j''(t)}{\Phi_j(t)}$ *мажорируются в* I *сходящимися рядами с положительными членами.* (*Поскольку* $\alpha_j > \alpha_0 > 0$, *то это же верно для рядов* $\sum_{j=1}^{\infty} \ln \Phi_j(t)$, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j'(t)}{\Phi_j(t)}$ *и* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j''(t)}{\Phi_j(t)}$.) *Если положим* $\xi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln \Phi_j$, *то* $\xi(t)$ *будет иметь две производные, непрерывные в* I *и получаемые почленным дифференцированием указанного выше ряда.*

Доказательство. Ввиду (7.3.3) $\mu_{2j} \to 0$ при $j \to \infty$. Далее, можно подобрать константу $\delta^2 > 0$ такую, что для $t \in I$ $\sin^2 \frac{tx}{2} \leqslant \delta^2 \frac{x^2}{4}$. Тогда получим

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2}\, dF_j(x) \leqslant \frac{\delta^2 \mu_{2j}}{4} < \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad j \geqslant j_0,$$

где j_0 — некоторая константа. Из неравенства

$$0 \leqslant -\ln(1-\theta) \leqslant 2\theta \quad \text{при} \quad 0 \in [0, 1/2]$$

выводим, что для всех $t \in I$ и $j \geqslant j_0$

$$0 \leqslant -\ln \Phi_j(t) = -\ln\left[1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right) dF_j(x)\right] \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right) dF_j(x) \leqslant \delta^2\mu_{2j}.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln \Phi_j(t)$ мажорируется в I (после $j_0 - 1$ первых членов) сходящимся рядом $\delta^2 \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{2j}$, состоящим из положительных членов. Ввиду этого сумма $\xi(t)$ непрерывна в I.

Положим теперь $\chi(t) = \exp \xi(t)$. Эта функция совпадает с $\Phi(t)$ при $t = t_k$. В интервале I имеем

$$\prod_{j=1}^{\infty} \Phi_j^{\alpha_j}(t) = \chi(t).$$

Возведем это соотношение в целую положительную степень p такую, что $p\alpha_0 \geqslant 1$, так что $\beta_j = p\alpha_j > 1$ для всех j, и мы получим соотношение: при $t \in I$

$$\prod_{j=1}^{\infty} (\Phi_j(t))^{\beta_j} = \chi^p(t).$$

Поскольку $\chi(0) = 1$, а χ непрерывна в I и положительна там, существует реальная окрестность нуля, которую, не нарушая общности, можем считать равной I, где $(\chi(t))^p > 1/2$. Заметим, что

$$\frac{(\chi(t))^p}{\Phi_j(t)} = (\Phi_j(t))^{\beta_j - 1} \prod_{k \neq j} (\Phi_k(t))^{\beta_k} \leqslant 1,$$

поскольку $\Phi_k(t) \leqslant 1$ для всех k и $\beta_j \geqslant 1$. Отсюда при $t \in I$

$$1 \geqslant \Phi_j(t) \geqslant (\chi(t))^p > \frac{1}{2}. \tag{7.3.4}$$

Теперь рассмотрим ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \Phi_j'(t)$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \Phi_j''(t)$, Поскольку $|\sin tx| \leqslant \delta |x|$ при $t \in I$, имеем

$$|\Phi_j'(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \sin tx \, dF_j(x) \right| \leqslant \delta \mu_{2j},$$

$$|\Phi_j''(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos tx \, dF_j(x) \right| \leqslant \mu_{2j},$$

ввиду чего ряды $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \Phi_j'(t)$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \Phi_j''(t)$ мажорируются в I сходящимися рядами с положительными членами. Ввиду неравенства (7.3.4) то же верно для рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{\Phi_j'(t)}{\Phi_j(t)} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{\Phi_j''(t)}{\Phi_j(t)}.$$

Тем более это верно для ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{\Phi_j'(t)}{\Phi_j(t)} \right)^2$. Этим доказано, что первые две производные ξ существуют и допускается почленное дифференцирование соответствующих рядов, этим доказывается непрерывность их.

Мы доказали, таким образом, что ξ и ψ дифференцируемы в I и совпадают в точках $t_k \downarrow 0$ и в начале. По теореме Ролля существует последовательность точек $\{t_k'\}$, $t_k' \downarrow 0$ (с $t_{k+1} \leqslant t_k' \leqslant t_k$) такая, что $\xi'(t) = \psi'(t)$ в этих точках и также в начале по непрерывности ξ' и ψ' на I. Аналогично $\xi''(t) = \psi''(t)$ в последовательности точек $t_k'' \downarrow 0$ и при $t = 0$.

Далее мы обобщим лемму 7.3.1.

Лемма 7.3.2. *Функции Φ_j имеют производные всех порядков, и для любого целого положительного числа q ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{\Phi_j^{(q)}(t)}{\Phi_j(t)}$ мажорируется в I сходящимся рядом с положительными членами (зависящими от q). То же верно для ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j^{(\ )}(t)}{\Phi_j(t)}$. Функция ξ имеет непрерывные производные всех порядков на I, которые можно получить последовательным почленным дифференцированием ряда для ξ. Далее, $\xi^{(q)}(0) = \psi^{(q)}(0)$ для всех q.*

Доказательство проводится по индукции. Верность нашего утверждения установлена для $q = 1, 2$. Допустим, что оно верно для $q \leqslant 2m$, и докажем его верность для $q = 2m + 1$ и $q = 2m + 2$. При $q \leqslant 2m$ имеем по предположению индукции

$$\xi^{(q)}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left\{ \frac{\Phi_j^{(q)}(t)}{\Phi_j(t)} + P_q \left(\frac{\Phi_j^{(q-1)}(t)}{\Phi_j(t)}, \ldots, \frac{\Phi_j'(t)}{\Phi_j(t)} \right) \right\}, \tag{7.3.5}$$

где P_q — полином (один для всех значений j) такой, что если составляющие его одночлены представить в виде $C \prod_{r=1}^{q-1} \left[\frac{\Phi_j^{(r)}(t)}{\Phi_j(t)} \right]^{n_r}$, то $\sum_{r=1}^{q-1} r n_r = q$.

Для четных значений q отсюда следует, что если $r \leqslant q-1$ — какое-либо нечетное число, то либо n_r четное, либо для какого-либо другого нечетного s $n_s > 0$. Пусть $q = 2m$. Ввиду сказанного можно разбить полином P_{2m} на сумму двух полиномов. Один из них имеет только одночлены, содержащие $\Phi_j^{(r)}(t)/\Phi_j(t)$ с нечетным r и еще содержащие $\Phi_j^{(s)}(t)/\Phi_j(t)$ с нечетным s, либо $\Phi_j^{(r)}(t)/\Phi_j(t)$ с нечетным r будет иметь степень не меньше двух. Другой состоит сплошь из выражений $\Phi_j^{(r)}(t)/\Phi_j(t)$ с четными значениями r, и притом $r \leqslant 2m-2$. Обозначим эти две функции t через $g_{j1}(t)$ и $g_{j2}(t)$. Ввиду предположения индукции ряды $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j^{(q)}(t)}{\Phi_j(t)}$ при $1 \leqslant q \leqslant 2m$ мажорируются сходящимися рядами с положительными членами, так что можно осуществлять суммирование в (7.3.5) в любом порядке. Пусть при этом $S_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j g_{j1}(t)$, $S_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j g_{j2}(t)$. Обозначая $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{\Phi_j^{(2m)}(t)}{\Phi_j(t)} = S_3(t)$, найдем

$$\xi^{(2m)}(t) = S_1(t) + S_2(t) + S_3(t). \tag{7.3.6}$$

При этом $S_1(0) = 0$, ибо все члены $S_1(t)$ содержат выражение $\Phi_j^{(r)}(t)/\Phi_j(t)$ с нечетными значениями r, а $\Phi^{(r)}(0) = 0$

при нечетном r. Далее, так как каждый одночлен, входящий в $S_1(t)$, содержит произведение по крайней мере двух выражений $\Phi^{(r)}(t)/\Phi(t)$ с нечетными r (может быть, совпадающими), порядков $\leqslant 2m-1$, то мы легко проверим, что

$$\frac{S_1(t)-S_1(0)}{t^2}=\frac{S_1(t)}{t^2}$$

стремится к конечному пределу при $t\to 0$; при этом надо учесть соотношение (7.3.4) и то, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^{2q-1}|\,|\sin tx|\,dF_j(x)\leqslant |t|\,\mu_{2q,j},$$

так как $|\sin tx|\leqslant |tx|$.

Далее, $S_2(t)$ есть ряд, j-й член которого есть полином от выражений вида $\Phi_j^{(2q)}(t)/\Phi_j(t)$, $1\leqslant q\leqslant m-1$.

Из предположения индукции следует, что $S_2''(t)$ существует при всех t и может быть получено почленным дифференцированием ряда для $S_2(t)$ дважды. Поскольку $S_2(-t)=S_2(t)$, то находим, что $(S_2(t)-S_2(0))/t^2$ стремится к конечному пределу при $t\to 0$; этот предел равен $S_2''(0)/2$.

Теперь применим теорему Ролля. Согласно этой теореме $\xi^{(2m)}$ и $\psi^{(2m)}$ совпадают на последовательности точек, сходящихся к 0; обозначим эту последовательность $\{t_k\}$, $t_k\downarrow 0$; далее, $\xi^{(2m)}(0)=\psi^{(2m)}(0)$. Поскольку ψ — аналитическая функция в D и четная функция на I, то

$$(\xi^{(2m)}(t_k)-\xi^{(2m)}(0))/t_k^2=$$
$$=(\psi^{(2m)}(t_k)-\psi^{(2m)}(0))/t_k^2\to\psi^{(2m+2)}(0)/2\quad\text{при } k\to\infty.$$

В силу (7.3.6) и сказанного выше находим, что $\dfrac{S_3(t_k)-S_3(0)}{t_k^2}$ стремится к конечному пределу при $k\to\infty$:

$$\frac{S_3(t_k)-S_3(0)}{t_k^2}=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\left[\frac{\Phi_j^{(2m)}(t_k)-\Phi_j^{(2m)}(0)}{t_k^2\Phi_j(t_k)}+\frac{\Phi_j^{(2m)}(0)(1-\Phi_j(t_k))}{t_k^2\Phi_j(t_k)}\right]=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\,[h_{j1}(t_k)+h_{j2}(t_k)],$$

где мы обозначили $h_{j1}(t_k)$ и $h_{j2}(t_k)$ две соответствующие дроби.

Заметим теперь, что

$$0 \leqslant 1-\Phi_j(t) \leqslant \frac{\mu_{2,j}t^2}{2} \quad \text{для всех } t \in R^1.$$

Ввиду (7.3.4) отсюда получаем, что

$$0 \leqslant (-1)^m \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h_{j2}(t_k) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{2m,j}\mu_{2,j}.$$

Последний ряд сходится ввиду сходимости рядов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{2m,j}$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{2,j}$. Определим теперь $h_{j2}(0)$ по непрерывности. Тогда легко вывести, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j h_{j2}(t)$ равномерно сходится в I и стремится к пределу

$$(-1)^m \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{2m,j}\mu_{2j} \quad \text{при } t \to 0.$$

Отсюда следует, что и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j [\Phi_j^{(2m)}(0)-\Phi_j^{(2m)}(t_k)] \times$ $\times \frac{1}{t_k^2 \Phi_j(t_k)}$ стремится к пределу при $k \to \infty$, так что ввиду (7.3.4) имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2m} \frac{\sin^2\left(\frac{t_k x}{2}\right)}{t_k^2} dF_j(x) < C$$

для всех k; здесь C — положительная константа.

Для частных сумм $\sum\limits_{j=1}^{n}$ нашего ряда будет иметь место такое же неравенство. Отсюда выводим, как и ранее, что $\mu_{2m+2,\,j}$ существует для любого j и $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_{2m+2,\,j} \leqslant C$ для всех n, так что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_{2m+2,\,j} < \infty$. Ввиду (7.3.4) отсюда следует утверждение леммы о ряде

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{\Phi_j^{(2m+2)}(t)}{\Phi_j(t)}.$$

Далее, имеем

$$|\Phi_j^{(2r-1)}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r-1} \sin tx \, dF_j(x) \right| \leqslant \mu_{2q,\,j} |t|$$

в силу неравенства $|\sin tx| \leqslant |tx|$, откуда в силу доказанного ранее следует утверждение леммы для нечетных значений q. Таким образом, ряд ξ можно дифференцировать до порядка $2m+2$, т. е. соотношение (7.3.5) будет иметь место для $q = 2m+1$ и $q = 2m+2$. Так как производные порядка $2m$ функций ξ и ψ совпадают в последовательности точек $t_k' \downarrow 0$, то из теоремы Ролля выводим, что то же верно для производных порядков $2m+1$ и $2m+2$; поскольку они также непрерывны, то $\xi^{(q)}(0) = \psi^{(q)}(0)$ при $q = 2m+1$ и $2m+2$. Это завершает доказательство леммы.

Для всех $t \in I$ имеем соотношение $\prod \Phi_j^{\alpha_j}(t) = \chi(t)$. Пусть p — натуральное число, для которого, как и ранее, имеем неравенство $p\alpha_0 \geqslant 1$, так что $p \geqslant \beta_j = p\alpha_j > 1$, m — какое-либо натуральное число. Возведем наше соотношение в степень $2mp$ и продифференцируем обе стороны нового соотношения $2m$ раз по t. Ввиду того, что при каждом q ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j^{(q)}(t)}{\Phi_j(t)}$ мажорируется сходящимся рядом из положительных членов, имеем

$$\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (\chi(t))^{2mp} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \Phi_j^{2m\beta_j}(t) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} 2m\beta_j \left[\frac{\Phi_j^{(2m)}(t)}{\Phi_j(t)} \right] + S_{2m}(t) \right\}, \quad (7.3.7)$$

где

$$S_{2m} = \sum_{r=2}^{2m} \sum{}^{*} \sum{}^{**} c(j_1, \ldots, j_r; l_{r1}, \ldots, l_{rr}; n_{r1}, \ldots, n_{rr}) \times$$

$$\times \left[\frac{\Phi_{j_1}^{(l_{r1})}}{\Phi_{j_1}} \right]^{n_{r1}} \cdots \left[\frac{\Phi_{j_r}^{(l_{rr})}}{\Phi_{j_r}} \right]^{n_{rr}};$$

в $\sum^{**}$ числа l_{rk} и n_{rk} фиксированы и удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{r} l_{rk} n_{rk} = 2m$, суммирование берется по всем системам r чисел $(j_1, \ldots, j_r)$ при условии $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant j_r$, константы c все неотрицательны (легко проверяется, что они ограничены сверху константой, зависящей только от m, ввиду неравенства $\beta_j \leqslant p$); в $\sum^*$ суммирование производится по различным l_{rk}, n_{rk}, удовлетворяющим условию $\sum\limits_{k=1}^{r} l_{rk}n_{rk} = 2m$.

Например, в случае $m=1$ имеем

$$S_2 = \sum_{j=1}^{\infty} 2\beta_j(2\beta_j - 1)\left(\frac{\Phi_j'}{\Phi_j}\right)^2 + \sum_{j \neq k} 2\beta_j 2\beta_k \left(\frac{\Phi_j'}{\Phi_j}\right)\left(\frac{\Phi_k'}{\Phi_k}\right).$$

Далее, производные Φ_j нечетного порядка исчезают в начале координат, а производные четного порядка $2l$ имеют там знак $(-1)^l$.

Ввиду соотношения $\sum\limits_{k=1}^{r} l_{rk}n_{rk} = 2m$ при $2 \leqslant r \leqslant 2m$ видим, что каждый член, входящий в выражение для S_{2m}, есть либо 0, либо имеет знак $(-1)^m$.

Умножим обе части (7.3.7) на $(-1)^m$ и опустим положительное количество $(-1)^m S_{2m}(0)$ справа. Мы получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2m\beta_j\mu_{2m,\,j} \leqslant (-1)^m \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (\chi(t))^{2mp}\Big|_{t=0} = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (\Phi(t))^{2mp}\Big|_{t=0}. \qquad (7.3.8)$$

Здесь мы учли, что производные ξ и ψ, а также χ и Φ совпадают в нуле; то же касается одинаковых степеней этих функций. Это дает нам оценку $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j\mu_{2m,j}$ через Φ.

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 7.3.3. *Каждая функция Φ_j — аналитическая и не исчезающая в круге $|t| < r$ (r не зависит от j).*

Доказательство. По теореме Коши для функции Φ, аналитической в $|t| < R$, имеем

$$\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (\Phi(t))^{2mp}\Big|_{t=0} = \frac{(2m)!}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=R/2} \frac{(\Phi(t))^{2mp}}{t^{2m+1}}\, dt.$$

Полагая $M = \max\limits_{|t| \leqslant \frac{R}{2}} |\Phi(t)|$, имеем $M \geqslant 1$; далее, полагаем $\lambda = 2M^p/R$; тогда из (7.3.8) и только что выведенного соотношения следует

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \mu_{2m,j} \leqslant (2m)!\, \lambda^{2m}. \tag{7.3.9}$$

Поэтому $|\Phi_j^{(2m)}(0)| \leqslant (2m)!\, \mu_{2m,j} \leqslant \lambda^{2m}$, откуда видно, что $\Phi_j(t)$— аналитические в круге $|t| < 1/\lambda$. Далее, $\Phi_j(0) = 1$, но

$$|\Phi_j(t) - \Phi_j(0)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{2m,\,j} \frac{|t|^{2m}}{(2m)!} \leqslant \frac{\lambda^2 |t|^2}{1 - \lambda^2 |t|^2} < 1$$

при $|t| < r = 1/(\lambda\sqrt{2})$. Поэтому Φ_j не исчезают в круге $|t| < r$.

Лемма 7.3.4. *При* $|t| < r$ *имеем*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (\Phi_j(t))^{\alpha_j} = \Phi(t). \tag{7.3.10}$$

Доказательство. Каждая $\Phi_j(iy)$ определена при $-r < y < r$, и в этом интервале $\Phi_j(iy) \geqslant \Phi_j(0) = 1$. Заметим, далее, что $\ln \Phi_j$ определен в круге $|t| < r$ и что $\ln(1 + x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$. Отсюда имеем

$$0 \leqslant \alpha_j \ln \Phi_j(iy) \leqslant \alpha_j [\Phi_j(iy) - 1] = \alpha_j \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{2m,\,j} \frac{y^{2m}}{(2m)!}.$$

Ввиду (7.3.9) имеем для любого целого положительного n и для $y \in (-r, r)$

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln \Phi_j(iy) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda y)^{2m} < 1.$$

Далее, $|\Phi_j(x + iy)| \leqslant \Phi_j(iy)$ при $y \in (-r, r)$ и $x \in R^1$. Поэтому в круге $|t| < r$ последовательность аналитических функций $g_n = \prod\limits_{j=1}^{n} \Phi_j^{\alpha_j}$ равномерно ограничена числом e. Далее, при $y \in (-r, r)$ последовательность $\{g_n(i_y)\}$ не убывает и ограничена, стало быть, стремится к пределу $\sigma(y)$. По известной теореме Витали о сходимости аналитических функций $\{g_n\}$ сходится к функции, аналитической в круге $|t|<r$. Эта предельная функция совпадает с Φ в последовательности точек $t_k \downarrow 0$ и в точке 0; значит, она совпадает с Φ в круге $|t|<r$, что доказывает лемму 7.3.4.

Докажем теперь, что функции Φ_j являются аналитическими в круге $|t|<R$ и там (7.3.10) также имеет место. Пусть это не так и пусть $r_0 = \sup r$, где r — радиусы кругов $|t|<r$, в которых Φ_j — аналитические функции и имеет место (7.3.10). Тогда $r_0 < R$.

Пусть $v_j(t) = \Phi_j(it)$ и $v(t) = \Phi(it)$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{\infty} (v_j(t))^{\alpha_j} = v(t) \quad \text{при} \quad |t|<r.$$

Каждая функция v_j имеет ряд Маклорена с неотрицательными коэффициентами, сходящийся в $|t|<r$. Поэтому v_j и все ее производные неотрицательны и не убывают при $0 \leqslant t < r$.

Мы покажем сперва, что для каждого положительного q ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{v_j^{(q)}(y)}{v_j(y)}$ сходится для всех $y \in [0, r)$. Так как для всех j $v_j(y) \geqslant 1$ и $(v_j(y)) \leqslant (v(y))^{1/\alpha_0}$, то это же верно для ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j v_j^{(q)}(y)$. Поскольку $v_j^{(q)}(y)$ не убывают в $[0, r)$, сходимость будет равномерна в любом сегменте $[0, y]$, $y<r$. Ввиду того, что $v_j(y) \geqslant 1$, это же будет верно для ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{v_j^{(q)}(y)}{v_j(y)}.$$

Пусть $y \in (0, r)$ фиксировано. Рассмотрим х. ф. $g_j(t) = \frac{v_j(y+it)}{v_j(y)}$ и х. ф. $h_j(t) = g_j(t)\exp(-i\lambda_j t)$, где $\lambda_j = -ig_j'(0) = \frac{v_j'(y)}{v_j(y)} \geqslant 0$.

Пусть

$$u_j(t) = g_j(t)\, g_j(-t) = h_j(t)\, h_j(-t),$$

$$u(t) = \frac{v(y+it)\, v(y-it)}{(v(y))^2}.$$

Тогда соотношение $\prod_{j=1}^{\infty} (u_j(t))^{\alpha_j} = u(t)$ имеет место в круге $|t| < \delta(y) = r - y$.

Поскольку u_j — х. ф. симметрических законов и u — аналитическая в $|t| < \delta(y)$ функция, то аналог соотношения (7.3.8) будет иметь место для функций u_j и u, так что, в частности, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left| u_j^{(2m)}(0) \right|$$

будет сходиться для всех натуральных m.

Пусть теперь H_j — закон с х. ф. h_j; тогда $u_j = h_j\bar{h}_j$ есть х. ф., отвечающая разности $Y_j - X_j$, где Y_j и X_j — независимые случайные величины, обе распределенные по закону H_j. Имеем, далее,

$$\left| u_j^{(2m)}(0) \right| = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x-y)^{2m}\, dH_j(x)\, dH_j(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dH_j(y) \int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^{2m}\, dH_j(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} dH_j(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x-y)\, dH_j(x) \right]^{2m}$$

в силу неравенств Ляпунова для моментов.

Далее, заметим, что $h_j'(0) = 0$, откуда $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dH_j(x) = 0$, так что

$$\left| u^{(2m)}(0) \right| \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} y^{2m}\, dH_j(y) = \left| h_j^{(2m)}(0) \right|.$$

Таким образом, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left| h_j^{(2m)}(0) \right|$ сходится. Отсюда, как и ранее, заключаем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h_j^{(q)}(0) \tag{7.3.11}$$

сходится при всех натуральных q.

Далее, поскольку h_j — аналитические х. ф. в круге $|t| < \delta(y)$, то по теореме 2.3.2 $\ln h_j(\pm i\xi)$ — выпуклые функции переменной $\xi \in [0, \delta(y))$, исчезающие при $\xi = 0$, так что $\xi^{-1}\ln h_j(\pm i\xi)$ — неубывающие функции ξ при $0 < \xi < \delta(y)$. Обе они стремятся к 0 при $\xi \downarrow 0$, ибо $h_j'(0) = 0$, $h_j(0) = 1$.

Отсюда следует, что функции $\ln h_j(\pm i\xi)$ обе неотрицательны при $0 < \xi < \delta(y)$, и ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln h_j(i\xi)$ сходится, поскольку он мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [\ln h_j(i\xi) + \ln h_j(-i\xi)].$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln g_j(i\xi)$ также сходится, то из равенства $h_j = g_j \exp(-i\lambda_j t)$, $\lambda_j = \dfrac{v_j'(y)}{v_j(y)} \geqslant 0$, следует, что и ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\lambda_j$ сходится. Тогда, очевидно, и ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\lambda_j^q$ сходится для каждого натурального q. Далее, имеем

$$|g_j^{(2m)}(0)| \leqslant |h_j^{(2m)}(0)| + C_{2m}^1\lambda_j |h_j^{(2m-1)}(0)| + \ldots + \lambda_j^{2m}.$$

В силу сходимости ряда (7.3.11) и доказанного выше ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j |g_j^{(2m)}(0)|$ сходится, так что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \dfrac{v_j^{(q)}(y)}{v_j(y)}$ сходится для всех четных q.

В силу определения λ_j это верно и для $q = 1$.

Далее, воспользуемся неравенством

$$2v_j^{(2m+1)}(y) \leqslant v_j^{(2m)}(y) + v_j^{(2m+2)}(y),$$

которое легко получается из интегрального представления для $v_j(y)$. Применяя его, выводим верность нашего утверждения для всех значений q. Сходимость получается равномерной в соответствующих сегментах.

Поскольку ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \dfrac{v_j^{(q)}(y)}{v_j(y)}$ равномерно сходятся во всем сегменте $[0, y] \subset [0, r)$, то законной является следующая процедура: для всякого $y \in (0, r)$ мы записываем соотношение, верное для достаточно малых ξ:

$$\prod_{j=1}^{\infty} (v_j(y+\xi))^{\alpha_j} = v(y+\xi),$$

и возводим его в степень npq, где p — целое число под условием $p\alpha_0 \geqslant 1$ (так что $\beta_j = p\alpha_j > 1$, $j = 1, 2, \ldots$); n, q — произвольные положительные числа.

Далее дифференцируем обе части нашего соотношения q раз по ξ и полагаем $\xi = 0$. Члены, содержащие производные v_j порядков $<q$, неотрицательны, и мы можем написать

$$\sum_{j=1}^{\infty} nq\beta_j \frac{v_j^{(q)}(y)}{v_j(y)} \prod_{k=1}^{\infty} (v_k(y))^{nq\beta_k} \leqslant \frac{d^q}{d\xi^q} (v(y+\xi))^{npq} \Big|_{\xi=0}.$$

Ввиду четности $v_j(y)$ получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} nq\beta_j \frac{v_j^{(q)}(y)}{v_j(y)} \prod_{k=1}^{\infty} (v_k(y))^{nq\beta_k} \leqslant \frac{d^q}{d\xi^q} (v(|y|+\xi))^{npq} \Big|_{\xi=0}. \tag{7.3.12}$$

Пусть теперь z — какая-либо точка в круге $|t| < r$; пусть $z = u + iy$. Тогда соотношение (7.3.10) имеет место для $t = z$, а соотношение (7.3.12) — для данного y. Заметим теперь соотношение: при фиксированном $j \geqslant 1$

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} (v_k(y))^{nq\beta_k}}{v_j(y) \prod\limits_{k=1}^{\infty} |\Phi_k(z)|^{nq\beta_k}} =$$

$$= \left\{ \prod_{k \neq j} \frac{(v_k(y))^{nq\beta_k}}{|\Phi_k(z)|^{nq\beta_k}} \right\} \left(\frac{v_j(y)}{|\Phi_j(z)|} \right)^{n(q\beta_j - 1)} (v_j(y))^{n-1} |\Phi_j(z)|^{-n}.$$

Ввиду того, что $\dfrac{v_k(y)}{|\Phi_k(z)|} \geqslant 1$ и $v_k(y) \geqslant 1$, замечаем, что наше выражение $\geqslant |\Phi_j(z)|^{-n}$.

Разделим теперь обе части соотношения (7.3.12) на

$$\prod_{k=1}^{\infty} |\Phi_k(z)|^{nq\beta_k} = |\Phi(z)|^{npq}.$$

Тогда для $y \in (-r, r)$ получим соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty} nq\beta_j \frac{v_j^{(q)}(y)}{|\Phi_j(z)|^n} \leqslant \frac{d^q}{d\xi^q} \left.\frac{(v(|y|+\xi))^{npq}}{|\Phi(z)|^{npq}}\right|_{\xi=0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q!}{2\pi |\Phi(z)|^{npq}} \left| \oint\limits_{|\xi|=\rho} \frac{(v(|y|+\xi))^{npq}}{\xi^{q+1}} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant q! \left(\frac{M_0}{m_0}\right)^{npq} \rho^{-q}, \qquad (7.3.13)$$

где положено $\rho = \frac{R-r}{2}$, $m_0 = \inf\limits_{|t| \leqslant R_1} |\Phi(t)|$, $M_0 = \sup\limits_{|t| \leqslant R_1} |\Phi(t)|$, $R_1 = \frac{R+r}{2}$.

Отсюда выводим для всех j, n:

$$|\Phi_j^{(q)}(iy)| = |v_j^{(q)}(y)| \leqslant q! \left(\frac{M_0}{m_0}\right)^{npq} \rho^{-q} |\Phi_j(z)|^n. \qquad (7.3.14)$$

Теперь применим легко доказываемые свойства х. ф. Φ_j:

(I) $|\Phi_j^{(2q)}(z)| \leqslant |\Phi_j^{(2q)}(iy)|$,

(II) $|\Phi_j^{(2q-1)}(z)| \leqslant \frac{1}{2} [\,|\Phi_j^{(2q)}(iy)| + |\Phi_j^{(2q-2)}(iy)|\,]$,

(III) $|\Phi_j'(z)|^2 \leqslant \Phi_j(iy) |\Phi_j''(iy)|$,

(IV) $1 \leqslant \Phi_j(iy) \leqslant [\Phi(iy)]^{1/\alpha_0} \leqslant M_0^{1/\alpha_0}$.

Теперь можем употребить (7.3.14) при $n = q = 2$ вместе с (III), (IV) для оценки $\Phi_j'(z)$ и (7.3.14) при $n = 1$ вместе с (I), (II) для оценки производных высшего порядка функций Φ_j; легко выводим, что существует θ зависящее от M_0, m_0 и ρ такое, что $0 < \theta < \rho$ и при $|\xi| < \theta$ выполняется

$$|\Phi_j(z+\xi) - \Phi_j(z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \frac{\Phi_j^{(n)}(z)}{n!} \right| < |\Phi_j(z)|,$$

так что $\Phi_j(z+\xi)$ не исчезает при $|\xi| < \theta$. Отсюда следует, что каждая функция $\Phi_j(t)$ является аналитической и не исчезает в круге $|t| < r + \theta$.

Далее, из (7.3.13), беря $z = 0$, $n = 1$, выводим, что при $y \in (0, r)$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} q\beta_j v_j^{(q)}(y) \leqslant q! \left(\frac{M_0}{m_0}\right)^{pq} \rho^{-q}.$$

Далее имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln v_j(y+\xi) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [v_j(y+\xi)-1] =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left[\sum_{q=1}^{\infty} v_j^{(q)}(y) \frac{\xi^q}{q!} \right] \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{M_0}{m_0}\right)^{pq} \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^q < \infty$$

при $0 \leqslant \xi \leqslant \min\left(\theta,\ \rho\left(\frac{m_0}{M_0}\right)^p\right)$. По теореме сходимости Витали равенство (7.3.10) будет иметь место в круге, большем, чем круг $|t| < r$, что противоречит предположению.

Поэтому соотношение $r < R$ невозможно и $r = R$.

Теперь следует перейти от функций Φ_j к прежним функциям φ_j. Это не так просто, как в случае конечного числа сомножителей (см. доказательство теоремы 7.2.1). Так же, как и там, мы доказываем, что функции φ_j — аналитические в $|t| < R$. Существуют $\varphi_j'(0)$, которые мы обозначим $i\mu_j$ ($\mu_j \in R^1$). Обычные рассуждения показывают, что функции $\xi^{-1} \ln \varphi_j(\pm i\xi)$ не убывают при $\xi \in (0,\ R)$ и стремятся к пределам $\pm\mu_j$ при $\xi \downarrow 0$, так что функции $\ln \varphi_j(i\xi) + \mu_j\xi$ и $\ln \varphi_j(-i\xi) - \mu_j\xi$ неотрицательны в $(0,\ R)$. Поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [\ln \varphi_j(i\xi) + \ln \varphi_j(-i\xi)] = \ln \Phi(i\xi)$$

при $\xi \in (0,\ R)$, видим, что ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [\ln \varphi_j(i\xi) + \mu_j\xi] \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [\ln \varphi_j(-i\xi) - \mu_j\xi],$$

мажорируемые указанным выше рядом, сходятся.

Поэтому последовательность функций

$$\prod_{j=1}^{n} [\varphi_j(t) \exp(-i\mu_j t)]^{\alpha_j},$$

аналитических в $|t| < R$, равномерно ограничена в круге $|t| \leqslant r < R$ функцией $\Phi(ir)$ и сходится во всех точках мнимой оси, лежащих в D.

Применим теорему Витали о сходимости последовательностей аналитических функций; мы получим, что наша последовательность сходится к функции g, аналитической в $|t|<R$. Поскольку $g(0)=1$, существует окрестность точки $t=0$, где g не исчезает, так что $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [\ln \varphi_j(t) - i\mu_j t]$ сходится там к аналитической функции. Поскольку $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln \varphi_j(t)$ также сходится в последовательности точек $t_k \downarrow 0$, отсюда следует, что $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j$ также сходится, так что последовательность $\prod_{j=1}^{n} \varphi_j^{\alpha_j}$ сходится к аналитической функции в D. Этой функцией по соображениям теории аналитического продолжения может быть только φ, так как предельная функция совпадает с φ в последовательности точек $t_k \downarrow 0$. Так как φ не исчезает в $|t|<R$, видим, что произведение $\prod_{j=1}^{\infty} \varphi_j^{\alpha_j}$ сходится к φ в круге D, что и доказывает теорему 7.3.1.

Изложенное нами доказательство, заимствованное из книги Б. Рамачандрана [3], может быть применено для получения более общей теоремы (см. Б. Рамачандран, [3], стр. 148—152). Мы приведем ее без доказательства.

Теорема 7.3.2. *Пусть* φ — *аналитическая функция в области* D *вида* $|t|<R$ *или* $-\alpha < \operatorname{Im} t < \beta$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ *и* φ *имеет эрмитово свойство в этой области. Пусть* $\alpha_j > \alpha_0 > 0$ *и* $\{\varphi_j\}$ — *последовательность х. ф., которые не исчезают в заданном интервале* I: $-\delta < t < \delta$. *Пусть* $\varphi(0)=1$ *и соотношение*

$$\prod_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(t))^{\alpha_j} = \varphi(t) \tag{7.3.15}$$

имеет место в последовательности различных точек $t_k \downarrow 0$.

Тогда каждая х. ф. φ_j *является аналитической в* D, *не исчезает в тех точках* D, *где* φ *не исчезает, и соотношение* (7.3.15) *имеет место во всех точках мнимой оси, лежащих в* D. *Если* φ *вообще не исчезает в* D, *то это соотношение имеет место во всей области* D.

Следуя Б. Рамачандрану ([3], стр. 152—153), докажем теперь следующую теорему:

Теорема 7.3.3. *Если в условиях теоремы* 7.3.1 φ — *целая функция, то каждая* φ_j — *также целая функция. При этом порядок* φ_j *не выше порядка* φ.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы 7.3.1. Далее, замечаем, что каждая точка мнимой оси имеет окрестность, в которой имеет место соотношение (7.3.10). В частности, соотношение (7.3.10) верно для $t = iR$, $R > 0$. Поскольку $\Phi_j(iR) \geqslant 1$, имеем для каждого j

$$[\Phi_j(iR)]^{\alpha_j} \leqslant \Phi(iR) \leqslant \max_{|t| \leqslant R} |\Phi(t)|.$$

Так как $\Phi_j(iR) = \max\limits_{|t| \leqslant R} |\Phi_j(t)|$, то порядок Φ_j не больше порядка Φ. Так как $\varphi_j(t)\,\varphi_j(-t) = \Phi_j$, то порядок φ_j не превосходит порядка Φ.

Далее, так как $\Phi(t) = \varphi(t)\,\varphi(-t)$, то порядок Φ не больше порядка φ, чем и доказана наша теорема.

§ 4. Конечные и счетные α-разложения нормального закона. Применения

Теорема 7.3.3 позволяет сразу решить вопрос о счетных (и тем самым конечных) α-разложениях нормального закона. Однако, поскольку она опирается на трудно доказываемую теорему 7.3.1 Б. Рамачандрана, мы разберем сперва случай конечных α-разложений, опираясь на легче доказываемую теорему 7.2.1.

Теорема 7.4.1. *Если в условиях теоремы* 7.2.1 *функция* $\varphi(t)$ *является х. ф. нормального закона, то все* $\varphi_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ *являются х. ф. нормального закона.*

Мы докажем несколько более сильную теорему.

Теорема 7.4.2. *Если в условиях теоремы* 7.4.1 *заменить х. ф.* $\varphi(t)$ *нормального закона на целую функцию вида* $\varphi_0(t) = e^{Q(t)}$, *где* $Q(t)$ — *полином степени* p *под условием* $Q(-t) = \overline{Q(t)}$, *то выводы теоремы* 7.4.1 *останутся в силе, а* $\varphi_0(t)$ *будет характеристической функцией нормального закона* (*так что* $p = 2$).

Эту теорему можно рассматривать как аналитическое обобщение одновременно теоремы Г. Крамера 3.1.4 и следствия из теоремы И. Марцинкевича 2.5.1 (стр. 60).

Прежде всего, согласно теореме 7.2.1 $\varphi_j(t)$ оказываются целыми функциями, не имеющими нулей, и равенство (7.2.1) будет верным для любых комплексных t_k.

Рассмотрим $(\varphi_j(t))^{\alpha_j}$. Это — целая хребтовая функция. Поскольку при всех t

$$(\varphi_1(t))^{\alpha_1} \ldots (\varphi_s(t))^{\alpha_s} = \varphi_0(t), \tag{7.4.1}$$

то функции $(\varphi_j(t))^{\alpha_j}$ являются хребтовыми компонентами функции $\varphi_0(t)$. По теореме 3.1.3 имеем

$$M(r, \varphi_j^{\alpha_j}) \leqslant e^{C_j r} M(r, \varphi_0).$$

Отсюда

$$M(r, \varphi_j^{\alpha_j}) \leqslant e^{C_0 r^p} \qquad (r \geqslant 1,\ C_0 = \mathrm{const}).$$

Так как $(\varphi_j(t))^{\alpha_j}$ — целая функция без нулей, то по следствию теоремы 2.5.1 (стр. 60) $\varphi_j(t)$ — х. ф. нормального закона.

Изложим теперь доказательство аналогичной теоремы для случая счетных α-разложений.

Теорема 7.4.3. *Если в формулировке теоремы* 7.3.1 φ *является х. ф. нормального закона, то такими же являются все х. ф.* φ_j.

Для доказательства заметим, что поскольку φ — неисчезающая целая х. ф., то такой же являются все φ_j согласно теореме 7.3.1. Далее, φ_j не исчезают и их порядок не выше двух. Отсюда по следствию теоремы 2.5.1 φ_j — х. ф. нормального закона.

Аналогично обобщается теорема Д. А. Райкова 5.1.2.

Б. Рамачандраном ([3], стр. 155—157) получена теорема о счетных α-разложениях закона Пуассона, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 7.4.4. *Если в условиях теоремы* 7.3.1 *функция* φ *является х. ф. закона Пуассона, то каждая* φ_j *также является х. ф. закона Пуассона.*

Изложим теперь применение теоремы 7.4.2 о конечных α-разложениях нормального закона к выводу известной теоремы В. П. Скитовича — Г. Дармуа *).

Теорема 7.4.5. *Пусть* $L_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$ *и* $L_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$ — *ли-*

*) В. П. Скитович сообщил формулировку этой теоремы в декабре 1952 г.

нейные формы от независимых случайных величин $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n$. *Если* L_1 *и* L_2 *стохастически независимы, то те случайные величины* X_j, *для которых* $\alpha_j\beta_j \neq 0$, *нормальны.*

Заметим, что обратное утверждение в следующей форме почти тривиально: если $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j = 0$ и те X_j, для которых $\alpha_j\beta_j \neq 0$, нормальны, то L_1 и L_2 независимы. В самом деле, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j = 0$ есть условие некоррелированности наших форм, причем общие переменные X_j (входящие в обе формы) нормальны.

На геометрическом языке, рассматривая случай, когда все $\alpha_j\beta_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, можно сформулировать теорему так.

Пусть дан случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ в евклидовом n-мерном пространстве.

Пусть существует система n ортогональных осей таких, что проекции вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ на эти оси независимы в совокупности, и еще две оси, определяемые векторами $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, не ортогональными ни к одной из n осей указанной системы. Пусть проекции вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ на эти две оси стохастически независимы. Тогда вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ — нормальный.

Эта теорема сравнительно несложно выводится из теоремы 7.4.2.

Так как L_1 и L_2 стохастически независимы, имеем для любых реальных u и v

$$\mathsf{E} \exp (i (uL_1 + vL_2)) = \mathsf{E} \exp (iuL_1)\, \mathsf{E} \exp (ivL_2). \qquad (7.4.2)$$

Для удобства дальнейшего изложения для тех j, где $\alpha_j\beta_j \neq 0$, обозначим $\beta_j X_j = Y_j$, $\frac{\beta_j}{\alpha_j} = b_j$. Для тех j, для которых $\alpha_j\beta_j = 0$, но $\alpha_j \neq 0$, обозначим $\alpha_j X_j = Y_j$; для тех j, для которых $\alpha_j\,\beta_j = 0$, но $\beta_j \neq 0$, обозначим $\beta_j X_j = Y_j$; х. ф. Y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим $\varphi_j(t)$. Имеем

$$uL_1 + vL_2 = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j u + \beta_j v)\, X_j. \qquad (7.4.3)$$

Рассмотрим такую окрестность нуля по u, v, $|u|<\delta_0$, $|v|<\delta_0$, что для всех значений j

$$\mathsf{E}\exp i(\alpha_j u+\beta_j v)X_j\neq 0,\quad \mathsf{E}\exp(i\alpha_j uX_j)\neq 0,$$
$$\mathsf{E}\exp(i\beta_j vX_j)\neq 0.$$

Последние два условия, разумеется, тривиальны при $\alpha_j=0$ или $\beta_j=0$.

Из (7.4.2) и (7.4.3) в указанной окрестности нуля получаем

$$\prod_j{}' \varphi_j(u+b_j v)=\prod_j{}' \varphi_j(u)\varphi_j(b_j v), \tag{7.4.4}$$

где произведение берется только по тем j, для которых $\alpha_j\beta_j\neq 0$. Остальные сомножители, встречаясь в (7.4.2) справа и слева, сокращаются, будучи не равными нулю. Изменяя в случае нужды нумерацию переменных, перепишем (7.4.4) в виде

$$\prod_{j=1}^{m}\varphi_j(u+b_j v)=\prod_{j=1}^{m}\varphi_j(u)\varphi_j(b_j v), \tag{7.4.5}$$

где $1\leqslant m\leqslant n$.

В силу (7.4.4), полагая в указанной ранее окрестности нуля $\ln\varphi_j(t)=\psi_j(t)$ (где $\ln\varphi_j(0)=0$), записываем (7.4.5) в виде

$$\sum_{j=1}^{m}\psi_j(u+b_j v)=A(u)+B(v). \tag{7.4.6}$$

Все функции, участвующие в (7.4.6), непрерывны. Умножим обе части (7.4.6) на $(x-u)$ и проинтегрируем по u от 0 до x, где $|x|<\delta_0$. Получим

$$\sum_{j=1}^{m}\int_0^x (x-u)\psi_j(u+b_j v)\,du=$$
$$=x\int_0^x A(u)\,du-\int_0^x uA(u)\,du+B(v)\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}B(v)+Q(x)$$

в понятных обозначениях. Полагая $u + b_j v = \tau$, $|\tau| < \delta_1 < \delta_0$, найдем отсюда

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{-b_j v}^{x+b_j v} (x + b_j v - \tau)\, \psi_j(\tau)\, d\tau = \frac{x^2}{2} B(v) + Q(x),$$

или

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{x+b_j v} (x + b_j v - \tau)\, \psi_j(\tau)\, d\tau = \frac{x^2}{2} B_0(v) + x B_1(v) + B_2(v) + Q(x), \qquad (7.4.7)$$

где $B_0(v)$ $(\equiv B(v))$, $B_1(v)$, $B_2(v)$ — непрерывные функции v. Равенство (7.4.7) верно при $|x| < \delta_2$, $|v| < \delta_2$, $0 < \delta_2 < \delta_1$.

Левая часть равенства (7.4.7), очевидно, дифференцируема по v при каждом фиксированном значении x, $|x| < \delta_2$. Легко видеть, что отсюда следует дифференцируемость $B_0(v)$, $B_1(v)$ и $B_2(v)$. Дифференцируя (7.4.7) по v при заданном x, имеем

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \int_{0}^{x+b_j v} \psi_j(\tau)\, d\tau = \frac{x^2}{2} B_0'(v) + x B_1'(v) + B_2'(v) \qquad (7.4.8)$$

в той же области значений v и x. Левая часть дифференцируема по v при любых заданных значениях $x \in [-\delta_2, \delta_2]$, откуда следует существование $B_0''(v)$, $B_1''(v)$, $B_2''(v)$. Дифференцируя (7.4.8) по v и полагая $v = 0$, находим

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^2 \psi_j(x) = P(x), \qquad |x| < \delta_2,$$

где $P(x)$ — квадратный полином. Отсюда

$$\prod_{j=1}^{m} (\varphi_j(x))^{b_j^2} = e^{P(x)}, \qquad |x| < \delta_2. \qquad (7.4.9)$$

Так как $b_j^2 > 0$, $P(-x) = \overline{P(x)}$, то по теореме 7.4.2 $\varphi_j(x)$ — х. ф. нормального закона, что и доказывает теорему 7.4.5.

Заметим, что от условия $\alpha_j\beta_j \neq 0$ нельзя отказаться, например, формы $L_1 = X_1$, $L_2 = X_2$ независимы при любых независимых X_1 и X_2. Для тех индексов j, для которых $\alpha_j\beta_j = 0$, переменные могут быть произвольными.

Заметим еще, что частный случай теоремы В. П. Скитовича — Г. Дармуа, именно случай

$$\alpha_j\beta_j \neq 0, \quad |b_j| = \left|\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right| = \sqrt{r_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где r_j — рациональные числа, следует уже из теоремы Г. Крамера. Именно в этом случае легко обнаружить, что $\varphi_j(t) \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ на всей оси и равенство (7.4.9) верно для всех реальных x. Далее, $b_j^2 = r_j = m_j/m_0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, где m_j, m_0 — натуральные числа. Возведя равенство (7.4.9) в степень m_0, найдем

$$\prod_{j=1}^{m} (\varphi_j(x))^{m_j} = \exp(m_0 P(x)).$$

Поскольку $m_j > 0$ — целые числа, то $(\varphi_j(x))^{m_j}$ — х. ф.; справа стоит х. ф. нормального закона (ибо $P(-x) = \overline{P(x)}$), следовательно, по теореме Г. Крамера $\varphi_j(x)$ суть х. ф. нормального закона.

Однако общий случай теоремы 7.4.5 пока не удается вывести таким образом из теоремы 3.1.4 Г. Крамера.

Обратно, теорема Г. Крамера легко выводится из одного частного случая теоремы В. П. Скитовича — Г. Дармуа 7.4.5 (см. Ю. В. Линник [4]), а именно, для такого вывода достаточна теорема 7.4.5 при условии, что $\alpha_j\beta_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и числа α_j/β_j — целые.

В самом деле, пусть $Z = X + Y$ нормально, X, Y независимы. Введем величины X', Y', распределенные соответственно, как X, Y, и такие, что X, Y, X', Y' независимы в совокупности. Положим $Z' = X' + Y'$,

$$L_1 = Z + Z' = X + Y + X' + Y',$$
$$L_2 = Z - Z' = X + Y - X' - Y'.$$

Тогда L_1 и L_2 будут независимы, ибо L_1 и L_2 нормальны, и $\mathsf{E}(L_1L_2) = \mathsf{E}(Z^2 - Z'^2) = 0$. По теореме В. П. Скитовича — Г. Дармуа отсюда следует нормальность X и Y, т. е. теорема Г. Крамера.

Существует и иной вывод теоремы 7.4.5, первоначально данный В. П. Скитовичем. Он основывается на теореме И. Марцинкевича и Г. Крамера.

Перенесение теоремы В. П. Скитовича — Г. Дармуа на случай линейных форм со счетным числом слагаемых может быть основано на теореме 7.2.1 о счетных α-разложениях. Это перенесение осуществлено Б. Рамачандраном (см. [3], стр. 170—180); см. также книгу А. М. Кагана, Ю. В. Линника и С. Р. Рао [1].

§ 5. Безгранично делимые законы, имеющие только безгранично делимые α-компоненты

Будем говорить, что х. ф. $\varphi_1(t)$ является *α-компонентой* х. ф. $\varphi(t)$, если существуют х. ф. $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_s(t)$, положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и последовательность $t_k \downarrow 0$ такие, что имеет место α-разложение

$$(\varphi_1(t_k))^{\alpha_1} \ldots (\varphi_s(t_k))^{\alpha_s} = \varphi(t_k). \tag{7.5.1}$$

По аналогии с классом I_0 б. д. законов, имеющих только б. д. компоненты, введем класс I_0^α б. д. законов, имеющих только б. д. α-компоненты. Очевидно, $I_0^\alpha \subset I_0$. Возникает проблема описания класса I_0^α.

С помощью теоремы 7.2.1 можно вывести из результатов гл. V некоторые достаточные условия принадлежности классу I_0^α.

Теорема 7.5.1. *Пусть $\varphi(t)$ — х. ф. б. д. закона класса $\mathfrak{L}$ и пусть выполнено условие*:

(A) *для некоторого $K > 0$ справедливо*

$$\int\limits_{|x|>y} dG(x) = O(\exp\{-Ky^2\}), \qquad y \to +\infty, \tag{7.5.2}$$

где $G(x)$ — функция, фигурирующая в представлении для $\varphi(t)$ формулой Леви — Хинчина.

Тогда х. ф. $\varphi(t)$ принадлежит классу I_0^α.

Доказательство. Если х. ф. $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.5.1, то она удовлетворяет условиям теоремы 5.3.1. Поэтому, как было установлено в начале § 3 гл. V, функция $\varphi(t)$ является целой функцией без корней. По теореме 7.2.1 из α-разложения (7.5.1) следует, что х. ф. $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_s(t)$ тоже являются целыми функциями без корней и во всей t-плоскости выполняется

$$(\varphi_1(t))^{\alpha_1} \ldots (\varphi_s(t))^{\alpha_s} = \varphi(t). \tag{7.5.3}$$

Так как функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — целые без корней, то функции $\varphi_1^{\alpha_1}, \ldots, \varphi_s^{\alpha_s}$ являются целыми хребтовыми функциями. Соотношение (7.5.3) означает, что они являются хребтовыми компонентами функции $\varphi(t)$. Но множество всех хребтовых компонент функции описано в теореме 5.3.1' (стр. 193). Применяя эту теорему, заключаем, что

$$(\varphi_1(t))^{\alpha_1} = \exp\left\{i\beta_1 t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_1(x)\right\},$$

где $\operatorname{Im}\beta_1 = 0$, $G_1(x)$ — неубывающая функция. Отсюда видно, что $\varphi_1(t)$ является х. ф. б. д. закона (со спектральной функцией $G_1(x)/\alpha_1$). Таким образом, х. ф. $\varphi(t)$ имеет только б. д. α-компоненты. Теорема доказана.

Для решетчатых б. д. законов условие (7.5.2) можно ослабить.

Теорема 7.5.2. *Пусть $\varphi(t)$ — х. ф. решетчатого с шагом $\xi > 0$ б. д. закона класса $\mathfrak{L}$ и пусть выполнено условие*:

(A') *справедливо соотношение*

$$\int_{|x|>y} dG(x) = o\left(\exp\left\{-2\frac{y}{\xi}\ln\frac{y}{\xi}\right\}\right), \qquad y \to +\infty,$$

где $G(x)$ — функция, фигурирующая в представлении для $\varphi(t)$ формулой Леви — Хинчина.

Тогда х. ф. $\varphi(t)$ принадлежит классу I_0^{α}.

Сначала покажем, что теорему 7.2.1 можно дополнить таким утверждением.

Лемма 7.5.1. *Если (в условиях теоремы 7.2.1) функция $\varphi(t)$ является х. ф. закона, решетчатого с шагом $\xi > 0$, и $R > 2\pi/\xi$, то и все х. ф. $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_s(t)$ являются х. ф. законов, решетчатых с шагом ξ.*

Действительно, в круге $|t| < R$ выполняется

$$(\varphi_1(t))^{\alpha_1} \ldots (\varphi_s(t))^{\alpha_s} = \varphi(t). \tag{7.5.4}$$

Так как $|\varphi(2\pi/\xi)| = 1$, то из (7.5.4) вытекает $|\varphi_1(2\pi/\xi)| = \ldots = |\varphi_s(2\pi/\xi)| = 1$. По теореме 1.1.6 х. ф. $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ являются х. ф. законов, решетчатых с шагом ξ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7.5.2 получим, повторяя доказательство теоремы 5.4.1 с заменой ссылки на теорему 1.1.7 ссылкой на лемму 7.5.1.

Относительно класса I_0^α известна еще следующая теорема.

Теорема 7.5.3. *Пусть х. ф.* $\varphi(t)$ *представляется в виде*

$$\varphi(t) = \exp\left\{i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dG(x)\right\},$$

где $\operatorname{Im}\beta = 0$, $G(x)$ — *неубывающая функция ограниченной вариации на прямой. Предположим, что выполнены условия:*

а) $G(x)$ *является функцией скачков, точки разрыва которой образуют множество с независимыми точками* (см. § 4 гл. VI, стр. 258),

б) *для некоторого* $K > 0$ *выполняется*

$$\int_{|x|>y} dG(x) = O(\exp\{-Ky^2\}), \qquad y \to +\infty.$$

Тогда х. ф. $\varphi(t)$ *принадлежит классу* I_0^α.

Доказательство этой теоремы (И. В. Островский [11]) мы не приводим, так как оно громоздко и опирается на некоторые факты теории почти периодических функций. Заметим, что из теоремы 7.5.3 нетрудно вывести такое следствие.

Теорема 7.5.4. *Класс* I_0^α *является плотным в классе всех б. д. х. ф. в топологии равномерной сходимости на любом конечном отрезке реальной* t*-оси.*

Действительно, пусть $\varphi(t)$ — любая б. д. х. ф., $G(x)$ — функция, фигурирующая в представлении для $\varphi(t)$ формулой Леви — Хинчина. Для каждого натурального n построим неубывающую функцию $G_n(x)$ так. На каждом из интервалов

$$\left(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right), \qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n^2,$$

выберем по точке $x_m^{(n)}$ так, чтобы множество

$$A_n = \{x_m^{(n)}\}_{m=-n^2}^{n^2}$$

было множеством с независимыми точками. Обозначим через $G_n(x)$ неубывающую функцию скачков, разрывы которой лежат в A_n, такую, что $G_n(x) = G(x_m^{(n)})$, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n^2$. Положим

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dG_n(x)\right\},$$

где β — то же самое, что и в представлении $\varphi(t)$ формулой Леви — Хинчина. Тогда х. ф. $\varphi_n(t)$ будет удовлетворять условиям теоремы 7.5.3 и при $n \to \infty$ будем иметь $\varphi_n(t) \to \to \varphi(t)$ в топологии равномерной сходимости на любом конечном отрезке реальной t-оси.

Представляется интересным дать толкование теорем 7.5.1, 7.5.2 с точки зрения теории крайних точек (см. Приложение I). Мы видим, что α-разложения для х. ф. $\varphi(t)$ закона класса $\mathfrak{L}$ с ограниченным пуассоновым спектром S можно получать, как грани множества логарифмов х. ф. в некотором выпуклом компакте; характерным свойством таких граней будет возможность α-разложения их точек только на точки той же грани. Проблема описания всех таких граней соответствующе определенного выпуклого компакта множества всех х. ф. $\mathfrak{F}$ представляется интересной; теоремы 7.5.1—7.5.4 представляют собой лишь первый шаг к ее решению.

ГЛАВА VIII

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ *)

Общая схема задач теории разложений, о которых шла речь в предшествующих главах, такова. Рассматривается распределение F, принадлежащее некоторому классу K. Требуется охарактеризовать класс K_F всех компонент закона F, т. е. множество всех таких законов F_1, для которых возможно разложение $F = F_1 * F_2$.

Однако уже в то время, когда была опубликована первая теорема такого рода (теорема Г. Крамера о нормальности компонент нормального закона), П. Леви [2] обратил внимание на то, что верно более общее утверждение. Именно, приближенная нормальность F влечет приближенную нормальность законов из K_F. Ю. В. Линник [8] доказал справедливость подобного утверждения, когда $K = \mathfrak{L}_1$ — подкласс класса $\mathfrak{L}$, состоящий из законов с фиксированным ограниченным спектром. Впрочем, это доказательство с очевидностью распространяется на случай произвольного закона. Таким образом оказывается, что устойчивостью обладают все теоремы о разложениях, и это обстоятельство играет существенную роль в построении общей теории суммирования независимых случайных величин, обсуждаемой в гл. IX.

Основной целью настоящей главы, помимо установления (в § 1) общего факта устойчивости разложений, является получение оценок устойчивости теоремы 3.1.4 Г. Крамера и теоремы 5.1.2 Д. А. Райкова. Первой из этих оценок была принадлежащая Н. А. Сапогову [1, 2] оценка устойчивости теоремы Г. Крамера. Ей посвящен

---

*) Глава написана С. Г. Малошевским.

§ 2 настоящей главы. Основные идеи доказательства Н. А. Сапогова оказались полезными и при получении других приведенных здесь оценок устойчивости разложений.

§ 1. Общая теорема об устойчивости разложений

Обозначим ρ_1 и ρ_2 каким-либо образом определенные расстояния между функциями распределения.

Пусть для некоторого класса распределений K доказана теорема, описывающая множество K_F всех возможных компонент закона $F \in K$. Рассматриваются последовательности композиций

$$F_n = F_{n1} * F_{n2}, \tag{8.1.1}$$

обладающие тем свойством, что при $n \to \infty$

$$\varepsilon_n = \rho_1 (F_n, F) \to 0. \tag{8.1.2}$$

Будем говорить, что последовательность (8.1.1), удовлетворяющая условию (8.1.2), устойчива по отношению к указанной теореме (при выбранных ρ_1 и ρ_2), если при $n \to \infty$

$$\delta_n = \max_{j=1,\,2}\ \inf_{G \in K_F} \rho_2 (F_{nj}, G) \to 0. \tag{8.1.3}$$

Будем говорить, что указанная теорема устойчива (при выбранных ρ_1 и ρ_2), если (8.1.3) выполняется для любых последовательностей разложений (8.1.1), (8.1.2).

Пусть G и H — любые функции распределения. Будем применять обозначения:

$$\rho (G, H) = \sup_x |G(x) - H(x)|$$

для равномерного расстояния и

$$L (G, H) = \inf \{h\colon H(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant \leqslant H(x+h) + h,\ -\infty < x < \infty\}$$

для расстояния по Леви.

Л е м м а 8.1.1. *Для любых функций распределения $\{P_k\}$ и $\{Q_k\}$ верно неравенство*

$$L\Big(\mathop{\Big|\!\!\overline{\,*\,}\!\Big|}_{1}^{n} P_k,\ \mathop{\Big|\!\!\overline{\,*\,}\!\Big|}_{1}^{n} Q_k\Big) \leqslant \sum_1^n L(P_k, Q_k). \tag{8.1.4}$$

Доказательство. Можем считать $n = 2$. Пусть $L(P_k, Q_k) = l_k$ $(k = 1, 2)$. Согласно определению расстояния Леви для любых x и y имеем

$$P_k(x - y - l_k) - l_k \leqslant Q_k(x - y) \qquad (k = 1, 2). \quad (8.1.5)$$

Оба неравенства (8.1.5) проинтегрируем по y, предварительно умножив первое из них ($k = 1$) на $dQ_2(y)$, а второе ($k = 2$) на $dP_1(y - l_1)$. Тогда получим неравенства

$$\int P_1(x-y-l_1)\,dQ_2(y)-l_1 \leqslant \int Q_1(x-y)\,dQ_2(y), \quad (8.1.6)$$

$$\int P_2(x-y-l_2)\,dP_1(y-l_1)-l_2 \leqslant \int Q_2(x-y)\,dP_1(y-l_1). \quad (8.1.7)$$

Последнее неравенство после интегрирования по частям и подходящей замены переменной будет выглядеть так:

$$\int P_1(x-y-l_1-l_2)\,dP_2(y)-l_2 \leqslant \leqslant \int P_1(x-y-l_1)\,dQ_2(y). \quad (8.1.8)$$

Складывая (8.1.8) с (8.1.6), получим

$$(P_1 * P_2)(x - l_1 - l_2) - l_1 - l_2 \leqslant (Q_1 * Q_2)(x).$$

Аналогично получается неравенство

$$(Q_1 * Q_2)(x) \leqslant (P_1 * P_2)(x + l_1 + l_2) + l_1 + l_2.$$

Следовательно,

$$L(P_1 * P_2, Q_1 * Q_2) \leqslant l_1 + l_2,$$

и лемма доказана.

Множество распределений $\{F_\alpha\}$ будем называть сдвиг-компактным, если из любой последовательности $\{F_n\}$ входящих в него распределений можно извлечь такую подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$, что $L(F_{n_k}(x + c_k), F_0) \to 0$ при надлежащем выборе закона F_0 и числовой последовательности $\{c_k\}$.

Сдвиг-компактность множества K_F компонент любого закона F была установлена теоремой 3.5.2. Кроме того, эта теорема утверждает, что предельное распределение обязано принадлежать K_F.

Лемма 8.1.2. *Если для последовательности композиций (8.1.1) и закона F справедливо при $n \to \infty$ соотношение*

$$\varepsilon_n = L(F_n, F) \to 0, \tag{8.1.9}$$

то последовательности $\{F_{n1}\}$ и $\{F_{n2}\}$ сдвиг-компактны, причем если функции распределения одной из последовательностей имеют нулевые медианы, то обе последовательности компактны, а предельные распределения являются компонентами F.

Доказательство. Пусть $\mu_n^{(1)}$ и $\mu_n^{(2)}$ — медианы независимых случайных величин X_n и Y_n, распределенных соответственно по законам F_{n1} и F_{n2}, а $Z_n = X_n + Y_n$. С самого начала можем считать $\mu_n^{(1)} = 0$. Докажем, что при этом условии последовательности $\{F_{n1}\}$ и $\{F_{n2}\}$ компактны. Чтобы доказать компактность $\{F_{n2}\}$, достаточно для любого $\varepsilon > 0$ установить существование такого числа $c = c(\varepsilon)$, что при всех n справедливы неравенства

$$P\{Y_n \geqslant c\} < \varepsilon, \quad P\{Y_n \leqslant -c\} < \varepsilon. \tag{8.1.10}$$

В силу (8.1.9) для данного ε можно указать такое c, что при всех n верны неравенства

$$P\{Z_n \geqslant c\} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad P\{Z_n \leqslant -c\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$P\{Y_n \geqslant c\} \leqslant 2P\{X_n \geqslant 0,\ Y_n \geqslant c\} \leqslant 2P\{Z_n \geqslant c\} < \varepsilon.$$

Аналогично убеждаемся в справедливости и второго из неравенств (8.1.10).

Пусть $z_1^{(n)}$ и $z_2^{(n)}$ обозначают квартили распределения F_n. Как установлено при доказательстве теоремы 3.5.2, $z_1^{(n)} \leqslant \mu_n^{(2)} \leqslant z_2^{(n)}$. Но, как следует из (8.1.9), квартили законов $\{F_n\}$, а значит, и медианы $\mu_n^{(2)}$ законов $\{F_{n2}\}$ равномерно ограничены. Поэтому тем же приемом, который был применен для доказательства компактности $\{F_{n2}\}$, доказывается компактность $\{F_{n1}\}$.

Пусть $F_0^{(1)}$ — предельное распределение для некоторой подпоследовательности $\{F_{n_k 1}\}$. Можем считать, что соответствующая подпоследовательность $\{F_{n_k 2}\}$ также имеет предел, который обозначим $F_0^{(2)}$. Тогда с помощью леммы 8.1.1 получаем

$$L(F_0^{(1)} * F_0^{(2)}, F) \leqslant L(F_0^{(1)} * F_0^{(2)}, F_{n_k}) + L(F_{n_k}, F) \leqslant$$
$$\leqslant L(F_0^{(1)}, F_{n_k 1}) + L(F_0^{(2)}, F_{n_k 2}) + L(F_{n_k}, F).$$

Так как правая часть последнего неравенства бесконечно мала при $k \to \infty$, а левая часть от k не зависит, то $F_0^{(1)} * F_0^{(2)} = F$, и лемма доказана.

Последняя лемма означает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 8.1.1. *Для любой последовательности композиций* (8.1.1) *при условии* (8.1.9) *справедливо при* $n \to \infty$ *соотношение*

$$\delta_n = \max_{j=1,\,2} \inf_{G \in K_F} L(F_{nj}, G) \to 0. \qquad (8.1.11)$$

Тем самым установлено общее свойство устойчивости разложений в метрике Леви. Если назвать устойчивость в метрике Леви *слабой*, то можно сказать, что слабой устойчивостью обладают разложения любого закона.

Более точную информацию о поведении величины δ_n для последовательностей (8.1.1) при определенном выборе расстояний ρ_1 и ρ_2 дают оценки вида

$$\delta_n \leqslant \delta(\varepsilon_n), \qquad (8.1.12)$$

где ε_n определено согласно (8.1.2), а δ_n — согласно (8.1.3). Получение подобных оценок и являлось целью исследований, о результатах которых будет рассказано далее.

§ 2. Теорема Н. А. Сапогова

При доказательстве основного результата потребуются следующие две известные леммы.

Лемма 8.2.1. *Если в круге* $|z| \leqslant R$ *для функции*

$$f(z) = \sum_1^\infty b_k z^k$$

справедливо неравенство $\operatorname{Re} f(z) \leqslant A$, *то*

$$|b_k| \leqslant \frac{2A}{R^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство леммы можно найти, например, в книге Е. Титчмарша [1].

Лемма 8.2.2 (К.—Г. Эссеен [1]). *Пусть G и H — функции распределения, причем H дифференцируема и $H'(x) \leqslant A$. Соответствующие характеристические функции обозначим $g(t)$ и $h(t)$. Тогда для каждого $R > 0$ справедлива оценка*

$$\rho(G, H) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \left| \frac{g(t) - h(t)}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi} \frac{A}{R} .$$

Пусть $X = X_1 + X_2$ — сумма независимых случайных величин, $F = F_1 * F_2$ — композиция их функций распределения.

Будем применять следующие обозначения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt,$$

$$\varepsilon = \rho(F, \Phi),$$

$$M = 1 + \sqrt{-2\ln\varepsilon},$$

$$a_j = \int_{-M}^{M} x\, dF_j(x), \qquad s_j^2 = \int_{-M}^{M} x^2\, dF_j(x) - a_j^2 \qquad (= 1, 2),$$

$$\Phi_j(x) = \Phi\left(\frac{x - a_j}{s_j}\right) .$$

Теорема 8.2.1. *Допустим, что F_1 имеет нулевую медиану. Существует абсолютная постоянная C, для которой справедливы неравенства*

$$\rho(F_j, \Phi_j) \leqslant \frac{C}{s_j^3 \sqrt{-\ln\varepsilon}} \qquad (j = 1, 2). \qquad (8.2.1)$$

Замечание. Понятно, что предположение о равенстве нулю медианы μ_1 закона F_1 не ограничивает общности результата, так как в противном случае можно рассмотреть сумму

$$X = (X_1 - \mu_1) + (X_2 + \mu_1).$$

Доказательство теоремы. Достаточно установить справедливость (8.2.1) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, считая $s_j^2 > 0$, Убедимся сначала, что при $\varepsilon \leqslant 0{,}05$ для медианы μ_2 величины X_2 справедливо неравенство

$$|\mu_2| \leqslant 1. \tag{8.2.2}$$

Действительно,

$$\frac{1}{4} \leqslant P\{X_1 \leqslant 0,\ X_2 \leqslant \mu_2\} \leqslant P\{X \leqslant \mu_2\} \leqslant \Phi(\mu_2) + \varepsilon.$$

Аналогично

$$\frac{1}{4} \leqslant P\{X \geqslant \mu_2\} \leqslant 1 - \Phi(\mu_2) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4} - \varepsilon \leqslant \Phi(\mu_2) \leqslant \frac{3}{4} + \varepsilon,$$

что и означает справедливость (8.2.2).

Введем в рассмотрение ограниченные случайные величины

$$X_j^* = \begin{cases} X_j, & \text{если } |X_j| \leqslant M, \\ 0, & \text{если } |X_j| > M \end{cases} \qquad (j = 1,\ 2). \tag{8.2.3}$$

Положим $X^* = X_1^* + X_2^*$. Пусть F^*, F_1^*, F_2^* — соответствующие функции распределения, а f^*, f_1^*, f_2^* — характеристические функции. Заметим, что a_j и s_j^2 суть математическое ожидание и дисперсия величины X_j^*.

Оценим при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ расстояние $\rho(F^*, \Phi)$. Прежде всего, ясно, что

$$|F^*(x) - F(x)| \leqslant P\{X^* \neq X\} \leqslant$$
$$\leqslant P\{|X_1| > M\} + P\{|X_2| > M\}. \tag{8.2.4}$$

Для оценки правой части (8.2.4) получаем (с учетом (8.2.2)) неравенства

$$\frac{1}{2} P\{X_2 > M\} \leqslant P\{X > M\} \leqslant 1 - \Phi(M) + \varepsilon,$$
$$\frac{1}{2} P\{X_2 < -M\} \leqslant \Phi(-M) + \varepsilon,$$
$$\frac{1}{2} P\{X_1 > M\} \leqslant 1 - \Phi(M-1) + \varepsilon,$$
$$\frac{1}{2} P\{X_1 < -M\} \leqslant \Phi(-M+1) + \varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что для $j = 1,\ 2$

$$P\{|X_j| > M\} \leqslant 4\,[1 - \Phi(M-1)] + 4\varepsilon. \tag{8.2.5}$$

Так как при всех достаточно малых ε

$$1 - \Phi(M - 1) \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon, \tag{8.2.6}$$

то из (8.2.4) — (8.2.6) получаем, что

$$\rho(F^*, \Phi) \leqslant 10\varepsilon. \tag{8.2.7}$$

Поскольку (8.2.5) и (8.2.6) означают, что при всех достаточно малых ε

$$\rho(F_j, F_j^*) \leqslant 5\varepsilon, \tag{8.2.8}$$

то для доказательства теоремы достаточно доказать справедливость (8.2.1) с заменой F_j на F_j^*.

Для дальнейшего требуется оценить медианы m_j^* случайных величин $|X_j^*|$. Покажем, что при всех достаточно малых ε

$$m_j^* \leqslant 3 \qquad (j = 1, 2). \tag{8.2.9}$$

Так как m_j^* не превосходит медианы m_j величины $|X_j|$, то достаточно убедиться в справедливости неравенств

$$m_j \leqslant 3 \qquad (j = 1, 2). \tag{8.2.10}$$

Пусть $j = 2$. Справедливо по крайней мере одно из двух неравенств:

$$P\{X_2 \leqslant -m_2\} \geqslant \frac{1}{4}, \quad P\{X_2 > m_2\} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Пусть, например, верно первое из них. Тогда

$$\frac{1}{8} \leqslant P\{X_1 \leqslant 0,\ X_2 \leqslant -m_2\} \leqslant \Phi(-m_2) + \varepsilon.$$

Следовательно, при $\varepsilon \leqslant 0{,}05$

$$\Phi(-m_2) \geqslant 0{,}075 \quad \text{и} \quad m_2 < 1{,}5 < 3.$$

Аналогично, но с учетом (8.2.2) доказывается (8.2.10) и при $j = 1$.

Займемся теперь исследованием характеристических функций $f^*(z)$, $f_1^*(z)$ и $f_2^*(z)$ в круге

$$|z| \leqslant T = \frac{1}{3}\sqrt{-\ln\varepsilon}, \tag{8.2.11}$$

считая $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Интегрирование по частям дает

$$\left| f^*(z) - \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\right| = \left|\int \exp\{izx\}\, d\,[F^*(x) - \Phi(x)]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\{\exp(izx)\,[F^*(x) - \Phi(x)]\}_{-2M}^{2M}\right| +$$
$$+\left|\int_{-2M}^{2M} [F^*(x) - \Phi(x)]\, iz\exp(izx)\, dx\right| +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{|x|\geqslant 2M} \exp\left(izx - \frac{x^2}{2}\right) dx\right|. \qquad (8.2.12)$$

Оценим слагаемые в правой части (8.2.12). В силу (8.2.7)

$$\left|\{\exp(izx)\,[F^*(x) - \Phi(x)]\}_{-2M}^{2M}\right| \leqslant 20\varepsilon\exp(2MT). \qquad (8.2.13)$$

Заметим, что при малых $\varepsilon > 0$

$$2MT < -\frac{33}{35}\ln\varepsilon. \qquad (8.2.14)$$

Поэтому из (8.2.13) получаем

$$\left|\{\exp(izx)\,[F^*(x) - \Phi(x)]\}_{-2M}^{2M}\right| \leqslant 20\varepsilon^{2/35}. \qquad (8.2.15)$$

Далее с помощью (8.2.14) устанавливаем, что

$$\left|\int_{-2M}^{2M} [F^*(x) - \Phi(x)]\, iz\exp(izx)\, dx\right| \leqslant 40MT\varepsilon^{2/35}. \qquad (8.2.16)$$

Наконец,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{|x|\geqslant 2M} \exp\left(izx - \frac{x^2}{2}\right) dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(\frac{T^2}{2}\right)\int_{2M-T}^{\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2M-T}\exp(-2M^2 + 2MT). \qquad (8.2.17)$$

Если, исходя из определения M и T, оценим правую часть (8.2.17), то получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{|x|\geqslant 2M} \exp\left(izx - \frac{x^2}{2}\right) dx\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2M-T}\,\varepsilon^{\frac{12-2\sqrt{2}}{3}}. \qquad (8.2.18)$$

Положим $d=1/3$ и заметим, что

$$\frac{1}{2}d^2<\frac{2}{35}<\frac{12-2\sqrt{2}}{3}.$$

Поэтому правые части (8.2.15), (8.2.16), (8.2.18), а следовательно, и правая часть (8.2.12) будут иметь порядок $o(\varepsilon^{d^2/2})$ при $\varepsilon\to 0$. Но в круге (8.2.11) выполняется неравенство

$$|\exp(-z^2/2)|\geqslant \varepsilon^{d^2/2}.$$

Поэтому при всех достаточно малых ε

$$|f^*(z)-\exp(-z^2/2)|<\frac{1}{2}|\exp(-z^2/2)|. \qquad (8.2.19)$$

Следовательно, функций f^*, f_1^*, f_2^*, связанные равенством $f^*(z)=f_1^*(z)f_2^*(z)$, в круге (8.2.11) не имеют нулей и функции $\varphi_j(z)=\ln f_j^*(z)$ в этом круге регулярны.

Рассмотрим разложение $\varphi_j(z)$ в степенной ряд

$$\varphi_j(z)=ia_jz-\frac{s_j^2}{2}z^2+\sum_{k=3}^{\infty}c_k^{(j)}z^k. \qquad (8.2.20)$$

Из (8.2.19) следует, что в круге (8.2.11) справедливо неравенство

$$|f^*(z)|<\frac{3}{2}\exp(|z|^2/2). \qquad (8.2.21)$$

Полагая $z=u+iv$, где u и v вещественные, будем иметь

$$f_j^*(iv)=\int\exp(-vx)\,dF_j^*(x)\geqslant\int_{-m_j^*}^{m_j^*}\exp(-vx)\,dF_j^*(x)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\exp(-m_j^*|v|)\qquad (j=1,\ 2). \qquad (8.2.22)$$

Из (8.2.21) и (8.2.22) получаем

$$|f_j^*(z)|\leqslant f_j^*(iv)<3\exp\left(m_k^*|z|+\frac{1}{2}|z|^2\right),\qquad k\neq j.$$

Последнее неравенство вместе с (8.2.9) означает, что в круге (8.2.11) при всех достаточно малых ε верна оценка

$$\operatorname{Re}\varphi_j(z)<\ln 3+3T+\frac{1}{2}T^2. \qquad (8.2.23)$$

Теперь с помощью леммы 8.2.1 можем оценить коэффициенты разложения (8.2.20):

$$|c_k^{(j)}| \leqslant (2\ln 3 + 6T + T^2)\,T^{-k} \qquad (k \geqslant 3). \qquad (8.2.24)$$

Прежде чем применить лемму 8.2.2, заметим, что

$$\sup_x |F_j^*(x) - \Phi_j(x)| = \sup_x |F_j^*(s_j x + a_j) - \Phi(x)|.$$

Обозначим $f_j^{(0)}(z)$ характеристическую функцию, соответствующую функции распределения $F_j^*(s_j x + a_j)$. Тогда

$$f_j^{(0)}(z) = \exp(-i a_j z/s_j)\, f_j^*(z/s_j),$$

причем в круге $|z| \leqslant T s_j$ справедливо представление

$$\ln f_j^{(0)}(z) = -\frac{z^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(j)} \left(\frac{z}{s_j}\right)^k \qquad (j = 1,\ 2). \qquad (8.2.25)$$

Для дисперсий s_j^2 величин X_j^* имеем оценку

$$s_j^2 \leqslant \int x^2\, dF^*(x) = \int x^2 d\,[F^*(x) - \Phi(x)] + 1 \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-2M}^{2M} x\,[\Phi(x) - F^*(x)]\,dx + 1 \leqslant 8M^2\rho(F^*,\ \Phi) + 1.$$

Поэтому при всех достаточно малых ε

$$s_j^2 \leqslant 2. \qquad (8.2.26)$$

Из (8.2.24) и (8.2.26) следует, что при

$$|z| \leqslant T_j = T s_j^3/8 \qquad (8.2.27)$$

и всех достаточно малых ε справедливо равенство

$$\sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(j)} \left(\frac{z}{s_j}\right)^k = \frac{\theta_j |z|^3}{4T_j} \qquad (j = 1,\ 2), \qquad (8.2.28)$$

где $|\theta_j| \leqslant 1$.

Теперь на основании (8.2.25), (8.2.28) и известного неравенства $|\exp(z) - 1| \leqslant |z| \exp(|z|)$ заключаем, что при всех вещественных z, удовлетворяющих (8.2.27), и достаточно малых $\varepsilon > 0$ верна оценка

$$|f_j^{(0)}(z) - \exp(-z^2/2)| \leqslant \frac{|z|^3}{4T_j} \exp(-z^2/4).$$

Остается применить лемму 8.2.2 к функциям распределения $F_j^*(s_jx + a_j)$ и $\Phi(x)$, полагая $R = T_j$.

Замечание. Известна, также принадлежащая Н. А. Сапогову [2], оценка устойчивости k-мерного аналога теоремы Г. Крамера. Однако в правой части соответствующего неравенства появляется дополнительный, по сравнению с (8.2.1), множитель, неограниченно растущий при условии, что $\varepsilon \to 0$ или $k \to \infty$.

§ 3. О точности результата Н. А. Сапогова

Теорема 8.2.1 означает, что если усеченные дисперсии компонент последовательности композиций (8.1.1) ограничены снизу положительной постоянной, то в случае сходимости к нормальному закону, рассматриваемой в равномерной метрике, для величины δ_n, определенной формулой (8.1.3), верна оценка

$$\delta_n = O\left((-\ln \varepsilon_n)^{-1/2}\right). \tag{8.3.1}$$

В то же время последовательность композиций, усеченная дисперсия одной из компонент которых стремится к нулю, не обязана быть устойчивой, если расстояние между функциями распределения измеряется в равномерной метрике (а не в метрике Леви). Существенным при этом является стремление к нулю именно усеченной дисперсии, поскольку сама дисперсия может не быть конечной. Приведем пример. Пусть $r_n \downarrow 0$ и $n \geqslant 4$. Рассмотрим последовательность композиций (8.1.1), в которой $F_{n1}(x) = \Phi(x/\sqrt{1 - r_n^2})$, а $F_{n2}(x)$ — симметричная функция распределения, определенная при $x \leqslant 0$ формулами

$$F_{n2}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{для } x \in (-\infty,\ -n), \\[2mm] \dfrac{1}{n} & \text{для } x \in [-n,\ -r_n], \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{для } x \in (-r_n,\ 0]. \end{cases}$$

Легко убедиться (рассмотрев, например, соответствующие характеристические функции), что при $n \to \infty$

$$\rho(F_n,\ \Phi) \to 0,$$

Тем не менее, как следует из определения F_{n2}, при всех $n \geqslant 4$ и $r_n \in (0,\ 1)$ $\inf\limits_{G \in K_\Phi} \rho(F_{n2},\ G) \geqslant \frac{1}{8}$.

Путем построения соответствующего примера мы решим теперь вопрос о точности оценки (8.3.1) Н. А. Сапогова в случае, когда $\varepsilon \to 0$, а усеченные дисперсии компонент ограничены снизу положительным числом. При этом построении будут применяться многочлены Лагерра. Остановимся на существенных для нас свойствах этих многочленов (см. Г. Сегё [1]).

Многочлены Лагерра $\{L_n^{(\alpha)}\}$ ортогональны (при фиксированном значении параметра α) на положительной полуоси с весом $x^\alpha \exp(-x)$. В нашем рассмотрении будут встречаться только два значения параметра: $\alpha = 1/2$ и $\alpha = -1/2$. Условие нормировки будет заключаться в равенстве старшего коэффициента единице. При этом условии

$$L_n^{(1/2)}(z) = L_n^{(-1/2)}(z) - nL_{n-1}^{(1/2)}(z) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8.3.2}$$

$$L_n^{(1/2)}(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n}. \tag{8.3.3}$$

Все n нулей многочлена $L_n^{(1/2)}(z)$ — различные положительные числа, причем для наибольшего нуля z_n справедлива оценка

$$z_n \leqslant 4n + 3. \tag{8.3.4}$$

Теорема 8.3.1. *Существует последовательность композиций* (8.1.1), *для которой*

$$\varepsilon_n = \rho(F_n,\ \Phi) \to 0, \tag{8.3.5}$$

усеченные дисперсии компонент ограничены снизу положительным числом и в то же время справедлива оценка

$$\delta_n = \inf_{G \in K_\Phi} \rho(F_{n2},\ G) > C(-\ln \varepsilon_n)^{-1/2}, \tag{8.3.6}$$

где $C > 0$ — *некоторая постоянная.*

Доказательство. Последовательность композиций, о которой идет речь в формулировке теоремы, будем строить следующим образом. Сначала положим

$$F_{n1}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right), \tag{8.3.7}$$

где $\sigma^2 \in (0, 1)$ будет точно определена позже. Распределение второй компоненты строится так, чтобы его моменты до некоторого порядка совпадали с моментами нормального закона. Пусть $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ — нули многочлена $Q_n(z) = 2^n L_n^{(1/2)}(z/2)$, где $L_n^{(1/2)}(z)$ — ранее определенный многочлен Лагерра степени n. В качестве второй компоненты возьмем

$$F_{n2}(x) = H_n(x/\sigma), \tag{8.3.8}$$

где $H_n(x)$ — функция распределения симметричной случайной величины, принимающей $2n+1$ значение

$$x_0 = 0, \quad x_{-k} = -\sqrt{y_k}, \quad x_k = \sqrt{y_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

с вероятностями, определяемыми формулами

$$q_0 = Q_n^{-1}(0) \int_0^\infty Q_n(z)\,\omega(z)\,dz,$$

$$q_k = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\omega(z)\,\varphi(z)\,dz}{(z - x_k^2)\,\varphi'(x_k^2)} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n),$$

в которых

$$\omega(z) = (2\pi z)^{-1/2} \exp(-z/2) \qquad (z > 0),$$

$$\varphi(z) = zQ_n(z).$$

Убедимся в том, что

$$q_k > 0 \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n), \tag{8.3.9}$$

$$q_0 + 2\sum_{k=1}^{n} q_k = 1, \tag{8.3.10}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} x_k^{2s} q_k = (2s-1)!! \qquad (s = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{8.3.11}$$

$$q_0 = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}. \tag{8.3.12}$$

Определив $(-1)!! = 1$ и воспользовавшись таблицами определенных интегралов (И. С. Градштейн, И. М. Рыжик [1]), получим

$$\int_0^\infty z^k \omega(z)\,dz = (2k-1)!! \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8.3.13}$$

Для любого многочлена $r_{n-1}(z)$ степени не выше $n-1$ в силу ортогональности многочленов Лагерра верно равенство

$$\int_0^\infty r_{n-1}(z)\,\omega(z)\,\varphi(z)\,dz=0, \tag{8.3.14}$$

а для любого многочлена $R_{2n}(z)$ степени не выше $2n$ справедлива формула

$$\int_0^\infty R_{2n}(z)\,\omega(z)\,dz=\sum_{k=0}^{n}\frac{R_{2n}(x_k^2)}{\varphi'(x_k^2)}\int_0^\infty \frac{\omega(z)\,\varphi(z)}{z-x_k^2}\,dz, \tag{8.3.15}$$

которая получается интегрированием (с учетом (8.3.14)) тождества

$$R_{2n}(z)=\varphi(z)\,p_{n-1}(z)+\sum_{k=0}^{n}\frac{R_{2n}(x_k^2)\,\varphi(z)}{(z-x_k^2)\,\varphi'(x_k^2)},$$

где $p_{n-1}(z)$ — некоторый многочлен степени не выше $n-1$. Теперь, подставляя в (8.3.15) на место R_{2n} последовательно $1, z, z^2, \ldots, z^{2n}$ и учитывая (8.3.13), получим (8.3.10) и (8.3.11).

Желая доказать (8.3.9), напишем тождество

$$\frac{\varphi(z)}{(z-x_k^2)\,\varphi'(x_k^2)}=1+(z-x_k^2)\,\tau_{n-1}(z), \tag{8.3.16}$$

где $\tau_{n-1}(z)$ — многочлен степени не выше $n-1$. (8.3.16) влечет справедливость равенства

$$\left[\frac{\varphi(z)}{(z-x_k^2)\,\varphi'(x_k^2)}\right]^2=\frac{\varphi(z)}{(z-x_k^2)\,\varphi'(x_k^2)}+\frac{\varphi(z)\,\tau_{n-1}(z)}{\varphi'(x_k^2)},$$

интегрируя которое с учетом (8.3.14) получим

$$\int_0^\infty \frac{\omega(z)\,\varphi(z)\,dz}{(z-x_k^2)\,\varphi'(x_k^2)}=\int_0^\infty \omega(z)\left[\frac{\varphi(z)}{(z-x_k^2)\,\varphi'(x_k^2)}\right]^2 dz,$$

откуда и следует (8.3.9).

Для вычисления интеграла, определяющего вероятность q_0, воспользуемся формулами (8.3.2), (8.3.3), учтя, что при $n\geqslant 1$

$$\int_0^\infty \omega(z)\,L_n^{(-1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)dz=0.$$

В результате и получим формулу (8.3.12).

В силу непрерывности всех невырожденных функций распределения из K_Φ

$$\inf_{G\in K_\Phi} \rho(F_{n2}, G) \geqslant \frac{1}{2} q_0 \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{5\sqrt{n}} \qquad (n\geqslant 3). \tag{8.3.17}$$

Покажем теперь, что для функции распределения

$$F_n(x) = \int \Phi\left(\frac{x-y}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) dH_n\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

справедлива оценка

$$\varepsilon_n = \rho(F_n, \Phi) \leqslant \frac{\alpha^{2n}}{2\pi n}, \tag{8.3.18}$$

где $\alpha = \sigma^2/(1-\sigma^2)$.

Заметим, что все моменты нечетного порядка закона F_{n2} равны нулю, а четные моменты в силу (8.3.11) равны

$$\mu_{2s} = (2s-1)!!\,\sigma^{2s} \qquad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n), \tag{8.3.19}$$

т. е. до порядка $4n$ совпадают с моментами нормального закона $\Phi(x/\sigma)$.

Для любых вещественных x и y верно равенство

$$\Phi\left(\frac{x-y}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) = \sum_{k=0}^{4n-1} \frac{\Phi^{(k)}(v)}{k!}\left(-\frac{y}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)^k + \frac{\theta M_{4n}}{(4n)!}\left(\frac{y}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)^{4n},$$

где $v = x/\sqrt{1-\sigma^2}$, $|\theta| \leqslant 1$, $M_{4n} = \max|\Phi^{(4n)}(x)|$. Поэтому для любой симметричной функции распределения $V(y)$, четные моменты которой удовлетворяют (8.3.19), будем иметь

$$\int \Phi\left(\frac{x-y}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) dV(y) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\Phi^{(2k)}(v)}{(2k)!!}\alpha^k + \frac{\theta M_{4n}}{(4n)!!}\alpha^{2n}. \tag{8.3.20}$$

Так как в качестве $V(y)$ можно взять и $H_n(y/\sigma)$ и $\Phi(y/\sigma)$, причем в первом случае левая часть (8.3.20) равна $F_n(x)$, а во втором — $\Phi(x)$, то

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant \frac{2M_{4n}}{(4n)!!}\alpha^{2n}.$$

Для доказательства оценки (8.3.18) остается заметить, что

$$|\Phi^{(4n)}(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^\infty t^{4n-1}\sin tx \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\right| \leqslant \frac{(4n-2)!!}{\pi}.$$

Положим

$$\sigma^2 = (1+e)^{-1}.$$

Тогда на основании (8.3.17), (8.3.18) имеем оценку

$$\delta_n > \frac{\sqrt{2\pi}}{5}(-\ln\varepsilon_n)^{-1/2} \qquad (n \geqslant 3).$$

Чтобы полностью закончить доказательство теоремы, остается заметить, что σ^2 совпадает с усеченной (по Н. А. Сапогову) дисперсией компоненты F_{n2}, как следует из (8.3.18) и оценки (8.3.4) наибольшего нуля многочлена Лагерра.

§ 4. Оценка устойчивости теоремы Крамера в метрике Леви

Как было выяснено, слабая устойчивость присуща всем теоремам о разложениях. Поэтому оценка устойчивости в метрике Леви должна быть рассмотрена отдельно.

Оценки расстояния по Леви между функциями распределения могут быть получены с помощью лемм, связывающих это расстояние с равномерным или расстоянием в метрике L_1.

Непосредственным следствием определения расстояния по Леви является следующая лемма.

Лемма 8.4.1. *Для любых функций распределения F и G*

$$L(F, G) \leqslant \rho(F, G) \leqslant (1+\beta)\, L(F, G),$$

где $\beta = \sup G'(x)$, если G абсолютно непрерывна, и $\beta = \infty$ в противном случае.

Нам понадобится также такой результат.

Лемма 8.4.2. *Для любых функций распределения F и G*

$$L^2(F, G) \leqslant \int |F(x) - G(x)|\, dx.$$

Доказательство. Можно считать $L(F, G) > 0$. Для любого положительного $h < L(F, G)$ существует такое x_h, что верно одно из следующих неравенств:

а) $F(x_h) < G(x_h - h) - h$,

б) $F(x_h) > G(x_h + h) + h$.

Пусть, например, верно а). Тогда

$$\int |F(x) - G(x)|\,dx \geqslant \int_{x_h-h}^{x_h} [G(x) - F(x)]\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_{x_h-h}^{x_h} [G(x) - F(x_h)]\,dx >$$
$$> \int_{x_h-h}^{x_h} [G(x) - G(x_h - h) + h]\,dx \geqslant h^2,$$

и лемма доказана.

Лемма 8.4.3. *Пусть a_1, a_2 — математические ожидания, а σ_1^2, σ_2^2 — дисперсии законов F_1 и F_2. Если $a_1 = a_2$, то*

$$L(F_1, F_2) \leqslant [2\max(\sigma_1, \sigma_2)]^{2/3}. \qquad (8.4.1)$$

Доказательство. В силу инвариантности расстояния Леви по отношению к сдвигу распределений достаточно рассмотреть случай $a_1 = a_2 = 0$. Обозначим число в правой части (8.4.1) через h. Можно считать $h > 0$. Пусть $\delta = h/2$ и $A = \{x\colon |x| \geqslant \delta\}$. Из неравенства Чебышева следует, что при всех x справедливо неравенство

$$|F_1(x) - F_2(x)| \leqslant \frac{\max(\sigma_1^2, \sigma_2^2)}{x^2}.$$

Поэтому

$$\sup_{x\in A} |F_1(x) - F_2(x)| \leqslant h.$$

Следовательно, при всех $x \in A$

$$F_2(x - h) - h \leqslant F_1(x) \leqslant F_2(x + h) + h. \qquad (8.4.2)$$

При $x \notin A$ применение неравенства Чебышева дает

$$1 - F_2(x + h) \leqslant 1 - F_2(\delta) \leqslant h,$$
$$F_2(x - h) \leqslant F_2(-\delta) \leqslant h.$$

Поэтому при $x \in A$

$$F_2(x-h)-h \leqslant 0 \leqslant F_1(x) \leqslant 1 \leqslant F_2(x+h)+h.$$

Следовательно, неравенства (8.4.2) выполняются при всех x, и лемма доказана.

Расстояние по Леви между функциями распределения может быть оценено и через характеристические функции. Приведем без доказательства упрощенный вариант соответствующей леммы В. М. Золотарева [4, 5].

Лемма 8.4.4. *Для любых функций распределения F и G и любого числа $\gamma>0$*

$$L(F, G) \leqslant B\Delta^{1/(1+\gamma)},$$

где

$$\Delta=\sup_{t>0} t^{-\gamma}|f(t)-g(t)|, \quad B<\frac{2}{\gamma}(1+\gamma)^2\pi^{-1/(1+\gamma)},$$

а $f(t)$ и $g(t)$ — характеристические функции законов F и G.

Прежде чем получить общую оценку устойчивости теоремы Крамера в метрике Леви, заметим, что в силу теоремы 8.2.1 и леммы 8.4.1, если усеченные дисперсии компонент композиций (8.1.1), (8.1.2) ограничены снизу положительной постоянной и в качестве ρ_1 и ρ_2 выбрано расстояние по Леви, то для δ_n сохраняется та же оценка (8.3.1), что и в случае равномерного расстояния. Как показывает построенный в § 3 пример, порядок этой оценки улучшить нельзя. Однако распространить ее на общий случай, когда никакие ограничения на усеченные дисперсии компонент не накладываются, пока не удалось. Приведем здесь наилучшую, из до сих пор полученных, оценку.

Теорема 8.4.1. *Пусть $X=X_1+X_2$ — сумма независимых случайных величин, $F=F_1*F_2$ — композиция их функций распределения, причем F_1 имеет нулевую медиану. Пусть $\varepsilon_1=L(F, \Phi)$ и сохранены обозначения, применявшиеся в теореме 8.2.1. Тогда существует абсолютная постоянная C, для которой справедливы неравенства*

$$L(F_j, \Phi_j) \leqslant C(-\ln\varepsilon_1)^{-1/8} \qquad (j=1, 2). \qquad (8.4.3)$$

Замечание. Предположение о нулевой медиане, как и в теореме 8.2.1, не нарушает общности результата.

Доказательство теоремы. Доказательство основано на теореме 8.2.1 и лемме 8.4.4.

Определим X_j^*, F_j^*, f_j^* так же, как в теореме 8.2.1. Все абсолютные положительные постоянные, встречающиеся в рассуждениях, обозначаем одной буквой C. В силу соотношения (8.2.8) из доказательства теоремы 8.2.1 и леммы 8.4.1 справедливо неравенство

$$L(F_j,\ F_j^*) \leqslant C\varepsilon_1. \tag{8.4.4}$$

Поэтому теорема будет доказана, если при достаточно малом $\varepsilon > 0$, имеющем, очевидно, тот же порядок малости, что и ε_1, будет установлена справедливость оценки

$$L(F_j^*,\ \Phi_j) \leqslant C(-\ln\varepsilon)^{-1/8} \qquad (j=1,\ 2). \tag{8.4.5}$$

Как и в доказательстве теоремы 8.2.1, $f_j^{(0)}(t)$ обозначает характеристическую функцию для $F_j(s_jx + a_j)$. Согласно соотношениям (8.2.23) — (8.2.25) для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при

$$\left|\frac{t}{s_j}\right| < T = \frac{1}{3}\sqrt{-\ln\varepsilon} \tag{8.4.6}$$

справедливо представление

$$\ln f_j^{(0)}(t) = -t^2/2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(j)} (t/s_j)^k, \tag{8.4.7}$$

в котором

$$|c_k^{(j)}| \leqslant \frac{3}{2} T^{2-k} \qquad (k \geqslant 3). \tag{8.4.8}$$

Применим теперь лемму 8.4.4 к функциям распределения $F_j^*(x)$ и $\Phi_j(x)$, которым соответствуют характеристические функции $f_j^*(z)$ и $\exp(ia_jz - s_j^2z^2/2)$. Оценим входящую в основную формулу этой леммы величину Δ, полагая $\gamma = 3$. Имеем

$$\Delta = \sup_{z>0} z^{-3}\,|f_j^*(z) - \exp(ia_jz - s_j^2z^2/2)| =$$
$$= s_j^3 \sup_{t>0} t^{-3}\,|f_j^{(0)}(t) - \exp(-t^2/2)| = \max(\Delta_1,\ \Delta_2), \tag{8.4.9}$$

где

$$\Delta_1 = s_j^3 \sup_{t\leqslant T_j} t^{-3}\,|f_j^{(0)}(t) - \exp(-t^2/2)|,$$
$$\Delta_2 = s_j^3 \sup_{t>T_j} t^{-3}\,|f_j^{(0)}(t) - \exp(-t^2/2)|,$$
$$T_j = \frac{s_j}{2} T^{1/3}.$$

Оценим при $t \in [0, \; T_j]$ сумму

$$\left|\sum_{k=3}^{\infty} c_k^{(j)} \left(\frac{t}{s_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{3t^3}{2s_j^3 T\left(1-\frac{t}{s_j T}\right)} \leqslant \frac{3t^3}{s_j^3 T}.$$

Тогда с помощью неравенства $|\exp(z) - 1| \leqslant \leqslant |z| \exp(|z|)$ получим

$$\Delta_1 \leqslant C/T. \tag{8.4.10}$$

Для величины Δ_2 имеем очевидную оценку

$$\Delta_2 \leqslant C/T. \tag{8.4.11}$$

(8.4.9) — (8.4.11) и лемма 8.4.4 означают, что

$$L(F_j^*, \; \Phi_j) \leqslant C T^{-1/4}.$$

Таким образом, (8.4.5), а вместе с тем и теорема доказаны.

§ 5. Оценка устойчивости для теоремы Д. А. Райкова

Обозначим $\Pi(x; \; a, \; b)$ функцию распределения закона Пуассона, имеющую своей характеристической функцией

$$\pi(t; \; a, \; b) = \exp\{iat + b(e^{it} - 1 - it)\}.$$

В частности, $\Pi(x; \; \lambda, \; \lambda) = \Pi_\lambda$ — стандартный закон Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Теорема Д. А. Райкова 5.1.2, речь о которой шла ранее, утверждает, что разложение Π_λ в композицию двух функций распределения обязано иметь вид

$$\Pi_\lambda = \Pi(x - \beta; \; \mu + \beta, \; \mu) * \Pi(x + \beta; \; \nu - \beta, \; \nu),$$

где $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, $\mu + \nu = \lambda$, а β — произвольное вещественное число.

Теорема Д. А. Райкова устойчива как в равномерной метрике, так и в метрике Леви. Первая оценка устойчивости этой теоремы содержится в работе О. В. Шалаевского [1], применившего в качестве расстояния между функциями распределения равномерное. Затем эта оценка была несколько уточнена и перенесена на случай расстояния Леви Ю. Ю. Мачисом [1, 6].

Рассматриваются сумма независимых случайных величин $X = X_1 + X_2$ и композиция их функций распределения $F = F_1 * F_2$. Пусть λ — данное положительное число и $\varepsilon_1 = L(F, \Pi_\lambda)$, $\varepsilon = \rho(F, \Pi_\lambda)$, причем оба расстояния меньше единицы.

Теорема 8.5.1. *Существует постоянная $C(\lambda)$, зависящая лишь от значения λ, для которой справедливы оценки*

$$\rho(F_1, \Pi(x-a;\ \lambda_1+a,\ \lambda_1)) < C(\lambda)\sqrt{\frac{\ln(1-\ln\varepsilon)}{-\ln\varepsilon}}, \qquad (8.5.1)$$

$$\rho(F_2, \Pi(x+a;\ \lambda_2-a,\ \lambda_2)) < C(\lambda)\sqrt{\frac{\ln(1-\ln\varepsilon)}{-\ln\varepsilon}}, \qquad (8.5.2)$$

где

$$a = \sup\{y\colon F_1(y) \leqslant \sqrt{\varepsilon}\},$$

$$\lambda_1 = \int_0^{N+1} x\,dF_1(x+a), \quad \lambda_2 = \int_0^{N+1} x\,dF_2(x-a),$$

а N — целое число, определяемое неравенствами

$$(N-1)\ln(N-1) < -\ln\varepsilon \leqslant N\ln N. \qquad (8.5.3)$$

Теорема 8.5.2. *Существует постоянная $C(\lambda)$, зависящая лишь от значения λ, для которой справедливы оценки*

$$L(F_1, \Pi(x-a;\ \lambda_1+a,\ \lambda_1)) < C(\lambda)\sqrt{\frac{\ln(1-\ln\varepsilon_1)}{-\ln\varepsilon_1}},$$

$$L(F_2, \Pi(x+a;\ \lambda_2-a,\ \lambda_2)) < C(\lambda)\sqrt{\frac{\ln(1-\ln\varepsilon_1)}{-\ln\varepsilon_1}},$$

где

$$a = \sup\{y\colon F_1(y) \leqslant \sqrt{\varepsilon_1}\},$$

$$\lambda_1 = \int_0^{N+1} x\,dF_1(x+a), \quad \lambda_2 = \int_0^{N+1} x\,dF_2(x-a),$$

а N — целое число, определяемое неравенствами

$$(N-1)\ln(N-1) < -\ln\varepsilon_1 \leqslant N\ln N.$$

Доказательство теоремы 8.5.1. Не нарушая общности рассуждений, будем считать $a = 0$. Справедливость оценок (8.5.1) и (8.5.2) достаточно доказать при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

План доказательства следующий. Сначала будут получены некоторые предварительные неравенства. Затем, подобно тому, как это было при доказательстве теоремы 8.2.1, введем в рассмотрение ограниченные случайные величины. Особенностью является целочисленность этих величин. Окончательная оценка получается с помощью соответствующих производящих функций.

На протяжении всего доказательства постоянные, зависящие разве лишь от λ, обозначаются одной буквой C.

Согласно определению равномерного расстояния, при всех x справедливо неравенство

$$|F(x)-\Pi_\lambda(x)|\leqslant\varepsilon. \tag{8.5.4}$$

Так как $a=0$, то

$$F_1(0)\leqslant\sqrt{\varepsilon},\quad F_1(+0)\geqslant\sqrt{\varepsilon}. \tag{8.5.5}$$

Тогда

$$\sqrt{\varepsilon}\,F_2(0)\leqslant F_1(+0)\,F_2(0)\leqslant F(0)\leqslant\varepsilon.$$

Следовательно,

$$F_2(0)\leqslant\sqrt{\varepsilon}. \tag{8.5.6}$$

Имея в виду неравенства (8.5.4) — (8.5.6), получаем

$$e^{-\lambda}-\varepsilon=\Pi_\lambda(+0)-\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant F(+0)\leqslant P\{X_j=0\}+F_1(0)+F_2(0)\leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}+P\{X_j=0\}\qquad (j=1,\ 2).$$

Поэтому при всех достаточно малых ε

$$P\{X_j=0\}\geqslant\frac{1}{2}e^{-\lambda}\qquad (j=1,\ 2). \tag{8.5.7}$$

Считая $k\neq j$, имеем

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda}P\{X_j<0\}\leqslant P\{X_k=0\}\,P\{X_j<0\}\leqslant F(0)\leqslant\varepsilon.$$

Следовательно,

$$P\{X_j<0\}\leqslant 2\varepsilon e^{\lambda}\qquad (j=1,\ 2). \tag{8.5.8}$$

При всех целых $n\geqslant 0$

$$\left|P\{n\leqslant X<n+1\}-e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right|\leqslant|\Pi_\lambda(n)-F(n)|+$$
$$+|\Pi_\lambda(n+1)-F(n+1)|\leqslant 2\varepsilon. \tag{8.5.9}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda}P\{n\leqslant X_j<n+1\}<P\{X_k=0\}\,P\{n\leqslant X_j<n+1\}\leqslant$$
$$\leqslant P\{n\leqslant X<n+1\}\leqslant 2\varepsilon+e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Это означает, что

$$P\{n \leqslant X_j < n+1\} \leqslant 4\varepsilon e^{\lambda} + 2\frac{\lambda^n}{n!} \qquad (j=1,\ 2). \qquad (8.5.10)$$

Подобным образом получаем

$$P\ \{n < X_j < n+1\} \leqslant 4\varepsilon e^{\lambda} \qquad (j=1,\ 2) \qquad (8.5.11)$$

и

$$P\{X_j > N\} \leqslant 2\varepsilon e^{\lambda} + 2\frac{\lambda^N}{N!} \qquad (j=1,\ 2). \qquad (8.5.12)$$

Введем в рассмотрение целочисленные ограниченные случайные величины, связанные равенством $X^* = X_1^* + X_2^*$ и определяемые формулами ($j = 1,\ 2$)

$$X_j^* = \begin{cases} n, \text{ если } & n \leqslant X_j < n+1 \qquad (0 \leqslant n \leqslant N-1), \\ N, \text{ если } & X_j = N, \\ 0, \text{ если } & X_j < 0 \text{ либо } X_j > N. \end{cases}$$

Очевидно, что X_1^* и X_2^* независимы.

Оценим при $0 \leqslant n \leqslant 2N$ величины

$$\Delta_n = |\,P\ \{X^* = n\} - P\ \{n \leqslant X < n+1\}\,|.$$

Будем исходить из неравенства

$$\Delta_n \leqslant \sum_{j=1}^{2} P_{nj}^* + \sum_{j=1}^{2} P_{nj}, \qquad (8.5.13)$$

где

$$P_{nj}^* = P\ \{X^* = n,\ X_j^* \neq X_j\},$$
$$P_{nj} = P\ \{n \leqslant X < n+1,\ X_j^* \neq X_j\}.$$

Обозначим

$$R_j = P\{X_j < 0\} + \sum_{n=0}^{N-1} P\{n < X_j < n+1\}.$$

Эта величина оценивается на основании (8.5.8) и (8.5.11):

$$R_j \leqslant 2\varepsilon e^{\lambda}(1+2N) \qquad (j=1,\ 2). \qquad (8.5.14)$$

При оценке P_{nj}^* рассмотрим два случая.

а) $n = 0$. (8.5.12) и (8.5.14) дают

$$P_{0j}^* \leqslant P\{X_j^* \neq X_j\} = R_j + P\{X_j > N\} \leqslant 4\varepsilon e^{\lambda}(1+N) + 2\frac{\lambda^N}{N!}.$$

б) $0 < n \leqslant 2N$. Привлекая (8.5.10) и (8.5.12), получим

$$P^*_{nj} \leqslant R_j + P\{X^*_k = n;\ X_j > N\} \leqslant R_j + \\ + P\{n \leqslant X_k < n+1\} P\{X_j > N\} \leqslant R_j + \\ + \left(4\varepsilon e^\lambda + 2\frac{\lambda^n}{n!}\right)\left(2\varepsilon e^\lambda + 2\frac{\lambda^N}{N!}\right).$$

Объединяя оба случая, заключаем, что при $0 \leqslant n \leqslant 2N$ и малых ε

$$P^*_{nj} \leqslant C\left(\varepsilon N + \frac{\lambda^n}{n!}\cdot\frac{\lambda^N}{N!}\right) \qquad (j = 1,\ 2). \qquad (8.5.15)$$

Для оценки P_{nj} также рассмотрим два случая.

а) $0 \leqslant n < N$. С помощью (8.5.8) получим

$$P_{nj} \leqslant R_j + P\{n \leqslant X < n+1,\ X_j > N\} \leqslant \\ \leqslant R_j + P\{X_k < 0\} \leqslant C\varepsilon N.$$

б) $N \leqslant n \leqslant 2N$.

$$P_{nj} \leqslant R_j + P\{n \leqslant X < n+1,\ X_j > N,\ X^*_k = X_k\} + \\ + P\{n \leqslant X < n+1,\ X_j > N,\ X^*_k \neq X_k\}.$$

С помощью (8.5.10) получаем

$$P\{n \leqslant X < n+1,\ X_j > N,\ X^*_k = X_k\} \leqslant \\ \leqslant \sum_{r=0}^{n-N} P\{n-r \leqslant X_j < n+1-r\} P\{r \leqslant X_k < r+1\} \leqslant \\ \leqslant C \sum_{r=0}^{n-N} \left(\varepsilon + \frac{\lambda^r}{r!}\right)\left(\varepsilon + \frac{\lambda^{n-r}}{(n-r)!}\right).$$

Кроме того,

$$P\{n \leqslant X < n+1,\ X_j > N,\ X^*_k \neq X_k\} \leqslant \\ \leqslant R_k + P\{N < X_k < N+1\} \leqslant C\varepsilon N.$$

В итоге при $0 \leqslant n \leqslant 2N$

$$P_{nj} \leqslant C\left(\varepsilon N + \frac{(2\lambda)^n}{n!}\right) \qquad (j = 1,\ 2), \qquad (8.5.16)$$

причем второе слагаемое в скобках присутствует лишь при $n \geqslant N$.

Теперь (8.5.13), (8.5.15) и (8.5.16) дают возможность написать

$$\Delta_n \leqslant C\left(\varepsilon N + \frac{\lambda^n}{n!}\cdot\frac{\lambda^N}{N!} + \frac{(2\lambda)^n}{n!}\right), \qquad (8.5.17)$$

причем последнее слагаемое появляется лишь при $n \geqslant N$.

(8.5.9) и (8.5.17) означают, что при $0 \leqslant n \leqslant 2N$ верно неравенство

$$\left| P\{X^* = n\} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right| \leqslant C \left(\varepsilon N + \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{\lambda^N}{N!} + \frac{(2\lambda)^n}{n!} \right), \tag{8.5.18}$$

причем последнее слагаемое в скобках при $n < N$ отсутствует.

Потребуется еще справедливая при всех x оценка

$$|P\{X_j^* < x\} - P\{X_j < x\}| < 6\varepsilon e^{\lambda} + 2\frac{\lambda^N}{N!}. \tag{8.5.19}$$

Эта оценка получается с помощью (8.5.8), (8.5.11), (8.5.12) из следующих двух очевидных неравенств, в которых $n < x \leqslant n + 1$, а n — произвольное целое:

$$P\{X_j < x\} \leqslant P\{X_j^* < x\} + P\{X_j < 0\},$$

$$P\{X_j^* < x\} \leqslant P\{X_j < x\} + P\{n < X_j < n+1\} + P\{X_j > N\}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению соответствующих производящих функций:

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{2N} z^n P\{X^* = n\},$$

$$f_j^*(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n P\{X_j^* = n\} \qquad (j = 1, 2).$$

Покажем, что в круге

$$|z| \leqslant T = \frac{1}{2}\sqrt{N} \tag{8.5.20}$$

произведение

$$|f^*(z) - \exp(\lambda z - \lambda)| \exp(\lambda T + \lambda)$$

бесконечно мало вместе с ε. Применяя (8.5.18), получим

$$f^*(z) - \exp(\lambda z - \lambda) | \leqslant \sum_{n=0}^{2N} |z|^n \left| P\{X^* = n\} - e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \right| +$$

$$+ \sum_{n \geqslant 2N+1} e^{-\lambda} \frac{|z\lambda|^n}{n!} \leqslant C\varepsilon N \sum_{n=0}^{2N} T^n + C\frac{\lambda^N}{N!} \sum_{n=0}^{2N} \frac{(\lambda T)^n}{n!} +$$

$$+ C \sum_{n=N}^{2N} \frac{(2\lambda T)^n}{n!} + \sum_{n \geqslant 2N+1} e^{-\lambda} \frac{(\lambda T)^n}{n!}.$$

Остается, рассмотрев каждое из слагаемых в правой части последнего неравенства, убедиться, что они после умножения на $\exp(\lambda T + \lambda)$ бесконечно малы вместе с ε.

Так как в круге (8.5.20)

$$|\exp(\lambda z - \lambda)| \geqslant \exp(-\lambda T - \lambda), \tag{8.5.21}$$

то при достаточно малых ε

$$|f^*(z) - \exp(\lambda z - \lambda)| \leqslant \frac{1}{2}|\exp(\lambda z - \lambda)|.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}|\exp(\lambda z - \lambda)| < |f^*(z)| < \frac{3}{2}|\exp(\lambda z - \lambda)| \tag{8.5.22}$$

и функции $f_j^*(z)$, связанные с $f^*(z)$ равенством

$$f^*(z) = f_1^*(z) f_2^*(z),$$

не имеют нулей при $|z| \leqslant T$.

Так как $f_j^*(|z|) \geqslant P\{X_j^* = 0\} \geqslant P\{X_j = 0\}$, то, учтя (8.5.7), получим

$$|f_j^*(z)| \leqslant f_j^*(|z|) = \frac{f^*(|z|)}{f_k^*(|z|)} < 3\exp(\lambda|z|). \tag{8.5.23}$$

Но в круге (8.5.20) выполняется (8.5.21). Поэтому из (8.5.22) и (8.5.23) следует

$$|f_j^*(z)| > \frac{1}{6}\exp(-\lambda T - \lambda - \lambda|z|),$$

что вместе с (8.5.23) влечет справедливость в круге (8.5.20) неравенства

$$|\ln|f_j^*(z)|| < CT \qquad (j = 1, 2). \tag{8.5.24}$$

Функция $\varphi_j(z) = \ln f_j^*(z)$ регулярна в круге (8.5.20). С помощью интегральной формулы Шварца, дающей представление регулярной в круге функции через ее вещественную часть, рассматриваемую на границе этого круга, имеем

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f_j^*(t)| \frac{t+z}{t-z}\, d\psi,$$

где $t = T\exp(i\psi)$. Тогда для $\varphi_j''(z)$ получим представление

$$\varphi_j''(z) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f_j^*(t)| \frac{t}{(t-z)^3}\, d\psi.$$

Будем считать $|z| \leqslant 2$. С помощью (8.5.24) получим оценку

$$|\varphi_j''(z)| \leqslant C\frac{1}{T} \qquad (j=1,\ 2).$$

Так как $\varphi_j(1)=0$, а $\varphi_j'(1)=f_j^{*\prime}(1)$, то последнее неравенство означает, что при $|z| \leqslant 2$ верно соотношение

$$|\varphi_j(z)-f_j^{*\prime}(1)(z-1)| \leqslant C\frac{1}{T} \qquad (j=1,\ 2). \quad (8.5.25)$$

Если F_j^* обозначает функцию распределения случайной величины X_j^*, то $f_j^{*\prime}(1)=\int\limits_0^{N+1} x\,dF_j^*$. Желая оценить величину $|f_j^{*\prime}(1)-\lambda_j|$, напишем неравенство

$$\left|\int\limits_0^{N+1} x\,d\,[F_j^*(x)-F_j(x)]\right| \leqslant (N+1)\,[\rho(F_j^*,\ F_j)+P\{X_j>N\}],$$

которое получается после интегрирования по частям. Обратившись теперь к (8.5.12) и (8.5.19) и замечая, что правые части этих неравенств после умножения на NT бесконечно малы вместе с ε, получим

$$|f_j^{*\prime}(1)-\lambda_j| \leqslant C\frac{1}{T} \qquad (j=1,\ 2).$$

Тогда из (8.5.25) следует, что при $|z| \leqslant 2$ и всех достаточно малых ε

$$|\varphi_j(z)-\lambda_j(z-1)| \leqslant C\frac{1}{T} \qquad (j=1,\ 2). \quad (8.5.26)$$

Обозначим

$$H_j(z)=\exp\{\varphi_j(z)-\lambda_j(z-1)\}-1.$$

Известное неравенство

$$|\exp(w)-1| \leqslant |w|\exp(|w|),$$

справедливое для всех комплексных w, и (8.5.26) означают, что при $|z| \leqslant 2$

$$|H_j(z)| \leqslant C\frac{1}{T} \qquad (j=1,\ 2). \quad (8.5.27)$$

Напишем равенство

$$f_j^*(z)-\exp(\lambda_j z-\lambda_j)=H_j(z)\exp(\lambda_j z-\lambda_j). \quad (8.5.28)$$

Обозначим A_n и B_n коэффициенты при z^n разложений в ряд Маклорена функций $\exp(\lambda_j z-\lambda_j)$ и $H_j(z)$, а D_n —

коэффициент в разложении произведения этих функций. Тогда при всех n $B_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=2} \frac{H_j(z)}{z^{n+1}}\, dz$, и с помощью (8.5.27) получаем оценку

$$|B_n| \leqslant \frac{C}{2^n} \frac{1}{T}. \tag{8.5.29}$$

Для коэффициента D_n справедливо равенство

$$D_n = \sum_{p=0}^{n} A_p B_{n-p}.$$

(8.5.29) дает возможность получить равномерную по r оценку

$$\left| \sum_{n=0}^{r} D_n \right| = \left| \sum_{p=0}^{r} A_p \sum_{m=0}^{r-p} B_m \right| \leqslant C \frac{1}{T}. \tag{8.5.30}$$

Теперь мы можем приступить к оценке $\rho(F_j^*, \Pi_{\lambda_j})$. Ясно, что достаточно оценить разность соответствующих функций распределения при $x > 0$. Как следует из (8.5.28),

$$D_n = P\{X_j^* = n\} - e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^n}{n!} \qquad (n \geqslant 0).$$

Поэтому с помощью (8.5.30) получаем

$$\rho(F_j^*, \Pi_{\lambda_j}) \leqslant \sup_r \left| \sum_{n=0}^{r} D_n \right| \leqslant C \frac{1}{T} \qquad (j = 1, 2),$$

что и завершает вместе с (8.5.19) доказательство теоремы.

В заключение следует заметить, что ответа на вопрос, насколько полученные в теоремах 8.5.1 и 8.5.2 оценки далеки от оптимальных, до сих пор нет.

§ 6. Обзор некоторых других результатов

Пусть r — каким-либо образом определенное расстояние между функциями распределения. Фиксируем распределение G и объединяем в класс G_ε все распределения F, для которых $r(F, G) \leqslant \varepsilon$. В. М. Золотарев [2] ввел в рассмотрение величину

$$\beta_r^{(G)}(\varepsilon) = \sup_{G_\varepsilon} \sup_{K_F} \inf_{K_G} r(F', G') \qquad (F' \in K_F,\ G' \in K_G).$$

Теорема 8.1.1 означает, что если в качестве r выбрано расстояние Леви L, то $\beta_L^{(G)}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, каково бы ни было G. Истинный порядок величины $\beta_L^{(G)}(\varepsilon)$ установлен для случая, когда в качестве G взят единичный закон ε_0. Как показал Ю. Ю. Мачис [5], для соответствующей величины $\beta_L^{(0)}(\varepsilon)$ верны оценки

$$\frac{1}{2}\varepsilon \leqslant \beta_L^{(0)}(\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon,$$

причем если рассматривать все ε из $[0, 1]$, то постоянные неулучшаемы. Кроме того, Ю. Ю. Мачис рассмотрел случай равномерного расстояния ρ и получил явное выражение для $\beta_\rho^{(0)}(\varepsilon)$:

$$\beta_\rho^{(0)}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\varepsilon}\right), & \text{если} \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad \frac{1}{4} \leqslant \varepsilon \leqslant 1. \end{cases}$$

Если в качестве G взят стандартный нормальный закон Φ, то, как было установлено ранее, $\beta_\rho^{(\Phi)}(\varepsilon)$ не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для расстояния Леви имеем оценки

$$C_1(-\ln\varepsilon)^{-1/2} \leqslant \beta_L^{(\Phi)}(\varepsilon) \leqslant C_2(-\ln\varepsilon)^{-1/8},$$

где, как и в аналогичных случаях далее, C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные. Левая оценка получается из рассмотрения примера, построенного при доказательстве теоремы 8.3.1, а правая — из теоремы 8.4.1.

Известны (С. Г. Малошевский [3]) также оценки $\beta_r^{(\Phi)}(\varepsilon)$, когда в качестве r выбирается расстояние в метрике L_p, $1 \leqslant p < \infty$. В этом случае $\beta_{L_p}^{(\Phi)}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, причем справедливы оценки

$$C_3(-\ln\varepsilon)^{-1/2} \leqslant \beta_{L_1}^{(\Phi)}(\varepsilon) \leqslant C_4(-\ln\varepsilon)^{-1/6}.$$

В случае закона Пуассона Π_λ, как следует из теорем 8.5.1 и 8.5.2, верна оценка

$$\beta_r^{(\Pi_\lambda)}(\varepsilon) \leqslant C_5\sqrt{\frac{\ln^2(1-\ln\varepsilon)}{-\ln\varepsilon}}$$

как для равномерного расстояния, так и для расстояния Леви.

Имеются также оценки устойчивости теоремы Ю. В. Линника 5.1.1 о композиции законов Гаусса и

Пуассона, принадлежащие Г. П. Чистякову [1, 2]. В частности, когда $G = \Pi_1 * \Phi$, им получена оценка

$$\beta_L^{(G)}(\varepsilon) \leqslant C_6 \left(\ln \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2}.$$

Возможность получения оценок величины $\beta_r^{(G)}(\varepsilon)$ зависит от нашего умения описывать множество K_G компонент закона G. Все рассмотренные оценки относятся к безгранично делимым законам. Однако имеются характеризации множества компонент для законов, не принадлежащих к безгранично делимым. Так, Н. А. Сапогов [1] обратил внимание на то, что все компоненты биномиального закона

$$B(x;\, n,\, p) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

являются законами того же вида. Первая оценка для $\beta_r^{(G)}(\varepsilon)$, когда в качестве G взят биномиальный закон, содержалась в работе Б. Рамачандрана [2]. Недавно Ю. Ю. Мачис опубликовал сообщение [6] о том, что им установлен точный порядок для $\beta_r^{(B)}(\varepsilon)$. А именно, для биномиального закона при $\varepsilon \to 0$ $\beta_r^{(B)}(\varepsilon) = O(\sqrt[n]{\varepsilon})$ независимо от того, подразумевается ли под r равномерное расстояние или расстояние Леви.

ГЛАВА IX

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ УСЛОВИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРЕНЕБРЕГАЕМОСТИ *)

Задачи теории суммирования независимых случайных величин формулировались и решались П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым и А. А. Ляпуновым уже в самом начале становления современной теории вероятностей.

Завершение построения теории суммирования независимых случайных величин, называемой здесь «классической», связано в основном с именами П. Леви, В. Феллера, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова и Б. В. Гнеденко. Существенным в этой теории является условие предельной пренебрегаемости слагаемых, называемое также условием равномерной бесконечной малости. В § 1, посвященном классической теории, будут приведены соображения, которыми руководствовались ее создатели, вводя условие предельной пренебрегаемости. Там же для удобства сравнения с теоремами следующих параграфов приводятся формулировки нескольких классических предельных теорем.

Уже П. Леви в теореме 38 своей монографии [2] пытался сформулировать условия сходимости к нормальному закону без предположения о предельной пренебрегаемости слагаемых. Существенную роль при этом играла принадлежащая Леви идея устойчивости разложения нормального закона на компоненты.

То, что идея устойчивости разложений и теоремы об описании возможных компонент заданного вероятностного закона должны лечь в основу общей теории суммирования независимых случайных величин, впервые было

*) Глава написана С. Г. Малошевским и Я. Ю. Никитиным.

явно сформулировано Ю. В. Линником [8]. Построение этой теории было осуществлено в основном благодаря усилиям В. М. Золотарева и Ю. Ю. Мачиса. Полученные ими результаты и составляют содержание §§ 2—5. § 6 содержит результаты В. М. Круглова, обобщающие результаты §§ 3 и 4 на случай независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве.

§ 1. Классический подход к задачам суммирования независимых случайных величин

Объектом исследования в классической теории суммирования независимых случайных величин, называемой также центральной предельной проблемой, являются последовательности сумм неограниченно возрастающего числа независимых слагаемых

$$\xi_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} \tag{9.1.1}$$

или, иначе говоря, последовательности композиций соответствующих функций распределения

$$F_n = F_{n1} * F_{n2} * \ldots * F_{nk_n}. \tag{9.1.2}$$

Начиная с рассмотрения вопроса о том, какие распределения могут выступать в качестве предельных (в смысле слабой сходимости) для законов F_n, классическая теория приходит к выводу, что, «будучи поставленной в такой степени общности, задача становится банальной и не представляет интереса» (А. Я. Хинчин [5]), поскольку любой закон распределения может служить предельным для F_n в описанной схеме. Возникает вопрос об ограничениях, которые следует наложить на слагаемые, чтобы задача перестала быть тривиальной и в то же время сохранила достаточную степень общности. На этом пути и появляется ограничение, известное под названием условия предельной пренебрегаемости. Оно требует, чтобы при $n \to \infty$ и каждом $\tau > 0$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} P\{|x_{nj}| > \tau\} \to 0. \tag{9.1.3}$$

Необходимость подобного ограничения обосновывалась желанием сделать предельный закон нечувствительным к поведению отдельной компоненты.

Задача об описании семейства всевозможных предельных законов для сумм предельно пренебрегаемых независимых слагаемых была решена А. Я. Хинчиным [5], установившим, что это семейство совпадает с классом I всех безгранично делимых распределений.

Другая задача, которая решалась в рамках классической теории, т. е. при ограничении (9.1.3), заключалась в нахождении условий сходимости композиций (9.1.2) к любому заданному закону класса I.

Для удобства сравнения с последующими результатами здесь уместно привести формулировки некоторых известных теорем классической теории (Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров [1]).

Теорема 9.1.1 (Линдеберг — Феллер). *Пусть слагаемые в* (9.1.1) *предельно пренебрегаемы, имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии, причем*

$$\mathsf{E}\xi_n^2 = 1. \tag{9.1.4}$$

Тогда соотношение

$$L(F_n,\ \Phi) \to 0, \tag{9.1.5}$$

где Φ — *стандартный нормальный закон, эквивалентно условию Линдеберга*:

$$\Lambda_n(\delta) = \sum_j \int\limits_{|x|>\delta} x^2\, dF_{nj}(x) \to 0 \tag{9.1.6}$$

при $n \to \infty$ *и каждом* $\delta > 0$.

Заметим, что условие предельной пренебрегаемости в теореме 9.1.1 равносильно условию

$$\sup_j \mathsf{E}x_{nj}^2 \to 0,$$

причем число слагаемых в (9.1.1) не обязано быть конечным. Аналогичное замечание верно и в отношении следующей теоремы.

Обозначим через П закон Пуассона с х. ф.

$$\pi(t;\ 0;\ \lambda) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1 - it)\}. \tag{9.1.7}$$

Теорема 9.1.2. *Пусть слагаемые в* (9.1.1) *предельно пренебрегаемы, имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии, причем*

$$\mathsf{E}\xi_n^2 = \lambda > 0. \tag{9.1.8}$$

Тогда соотношение

$$L(F_n, \Pi) \to 0 \tag{9.1.9}$$

эквивалентно условию

$$\sum_j \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\, dF_{nj}(x) \to 0 \tag{9.1.10}$$

при $n \to \infty$ *и каждом* $\delta > 0$.

Теорема 9.1.3. *Пусть слагаемые в* (9.1.1) *предельно пренебрегаемы и имеют нулевые математические ожидания, а дисперсии сумм равномерно ограничены. Тогда соотношение*

$$L(F_n, G) \to 0,$$

где G — *безгранично делимый закон, представление логарифма характеристической функции которого по формуле А. Н. Колмогорова определяется неубывающей функцией* $K(x)$, *эквивалентно условию*

$$K_n(x) = \sum_j \int\limits_{-\infty}^{x} y^2\, dF_{nj}(y) \to K(x). \tag{9.1.11}$$

Теорема 9.1.4. *Пусть* G — *произвольный безгранично делимый закон, представление Леви — Хинчина которого определяется постоянной* a *и неубывающей функцией* $\Psi(x)$. *Для того чтобы закон распределения* F_n *суммы* (9.1.1) *предельно пренебрегаемых слагаемых слабо сходился к* G, *необходимо и достаточно выполнение (при* $n \to \infty$*) двух предельных соотношений:*

$$1)\ \Psi_n(x) = \sum_j \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2}\, dF_{nj}(y + a_{nj}) \to \Psi(x), \tag{9.1.12}$$

$$2)\ \sum_j \left[a_{nj} + \int \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nj}(x + a_{nj}) \right] \to a, \tag{9.1.13}$$

где

$$a_{nj} = \int\limits_{|x|<\tau} x\, dF_{nj}(x),$$

а $\tau > 0$ — *любое фиксированное число.*

§ 2. Неклассическая постановка задачи суммирования независимых случайных величин

При знакомстве с классической теорией суммирования нетрудно заметить, что необходимость введения дополнительных ограничений на слагаемые получает оправдание лишь при решении задачи описания множества возможных предельных распределений. При решении же задач, связанных с отысканием условий сходимости последовательностей композиций (9.1.2) к любому заданному закону, введение каких-либо общих предварительных ограничений не представляется обязательным.

Первой попыткой сформулировать условия сходимости последовательности композиций к заданному закону без предположения о предельной пренебрегаемости компонент является, по-видимому, уже упомянутая теорема 38 из монографии П. Леви [2].

В качестве тривиального примера сходимости к данному невырожденному распределению F с нарушением условия (9.1.3) можно указать последовательность (9.1.2), в которой $F_{n1} = F$, а все остальные компоненты совпадают с единичным законом $\varepsilon_0(x)$.

Другой пример дает рассмотрение произвольного безгранично делимого невырожденного закона F с х. ф. f. Если положить

$$f_{nj} = f^{\alpha_{nj}},$$

где $\alpha_{nj} > 0$, $\sum\limits_j \alpha_{nj} = 1$, $\alpha_{n1} = {}^1/_2$, то для последовательности композиций (9.1.2), в которой F_{nj} отвечает х. ф. f_{nj}, будем иметь $F_n \equiv F$, причем для компоненты F_{n1} условие (9.1.3) заведомо не выполнено.

Легко видеть, что последний пример можно обобщить, беря вместо точных компонент закона F достаточно близкие к ним. Это говорит о том, что требование предельной пренебрегаемости (которое, очевидно, равносильно требованию равномерной близости компонент к вырожденной компоненте $\varepsilon_0(x)$) заменяется требованием близости компоненты F_{nj} к какой-либо компоненте закона F. Такое поведение компонент является естественным следствием устойчивости разложений, выражаемой теоремой 8.1.1. Сходимость распределений будет пониматься как слабая сходимость. Поэтому расстояние между функциями распределения будет измеряться главным образом в метрике П. Леви.

Общая постановка такова. Рассматриваются последовательности сумм независимых случайных величин

$$\xi_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nj} + \ldots \tag{9.2.1}$$

и соответствующие последовательности композиций их функций распределения

$$F_n = F_{n1} * F_{n2} * \ldots * F_{nj} * \ldots \tag{9.2.2}$$

Число слагаемых в (9.2.1) не обязательно конечно, и мы предполагаем, что ряд (9.2.1) почти наверное сходится к случайной величине ξ_n. Это предположение эквивалентно слабой сходимости распределений частных сумм ряда к распределению величины ξ_n.

Круг подлежащих решению задач включает в себя отыскание необходимых и достаточных условий сходимости последовательностей (9.2.2) к произвольным вероятностным законам и, в частности, к законам, принадлежащим специальным классам распределений.

Пусть F — произвольная функция распределения. Как и ранее, K_F обозначает множество всех компонент закона F. Теорема 8.1.1, примененная к последовательности (9.2.2), означает, что верна следующая теорема.

Теорема 9.2.1. *Если при* $n \to \infty$

$$L(F_n, F) \to 0, \tag{9.2.3}$$

то

$$\delta_n = \sup_j \inf_{G \in K_F} L(F_{nj}, G) \to 0. \tag{9.2.4}$$

Эта теорема дает необходимое условие, которое в той или иной форме будет присутствовать во всех теоремах описываемой общей теории. Конкретный вид условия (9.2.4) будет определяться структурой множества K_F.

В наш обзор не вошли наиболее общие теоремы, сообщение о которых недавно было опубликовано В. М. Золотаревым [3]. Однако и приведенные теоремы достаточно полно отражают идейную сторону всей теории.

§ 3. Обобщение теоремы Линдеберга — Феллера

При доказательстве основной теоремы этого параграфа нам понадобятся некоторые общие утверждения, относящиеся к слабой сходимости распределений и расстоянию по Леви. Часть из них содержится в предыдущей главе, другие составляют содержание следующих двух лемм.

Лемма 9.3.1. *Пусть последовательность распределений Q_n слабо сходится к распределению Q. Если Q_n имеет дисперсию σ_n^2, а Q — дисперсию σ^2, то*

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma_n^2 \geqslant \sigma^2. \tag{9.3.1}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n

$$\sigma^2 \leqslant \sigma_n^2 + 3\varepsilon. \tag{9.3.2}$$

Можем считать, что математическое ожидание распределения Q равно нулю. Для данного $\varepsilon > 0$ найдем такие $N > 1$ и n_0, что при $k = 0,\ 1,2$

$$\left| \int_{|x|>N} x^k\, dQ \right| < \varepsilon, \tag{9.3.3}$$

$$\left| \int_{|x|\leqslant N} x^k\, dQ_n - \int_{|x|\leqslant N} x^k\, dQ \right| < \varepsilon \qquad (n \geqslant n_0). \tag{9.3.4}$$

Тогда для $n \geqslant n_0$

$$\sigma_n^2 - \sigma^2 = \int_{|x|\leqslant N} x^2\, dQ_n - \int_{|x|\leqslant N} x^2\, dQ + \int_{|x|>N} x^2\, dQ_n - \int_{|x|>N} x^2\, dQ - \left(\int x\, dQ_n\right)^2 \geqslant -2\varepsilon + \int_{|x|>N} x^2\, dQ_n - \left(\int_{|x|\leqslant N} x\, dQ_n\right)^2 - \left(\int_{|x|>N} x\, dQ_n\right)^2 - 2\int_{|x|\leqslant N} x\, dQ_n \int_{|x|>N} x\, dQ_n. \tag{9.3.5}$$

С помощью неравенства Шварца получаем

$$\left(\int_{|x|>N} x\, dQ_n\right)^2 \leqslant \int_{|x|>N} x^2\, dQ_n \int_{|x|>N} dQ_n \leqslant 2\varepsilon \int_{|x|>N} x^2\, dQ_n. \tag{9.3.6}$$

Для последнего интеграла в правой части (9.3.5) можем написать неравенство

$$2\int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ_n \int\limits_{|x|>N} x\,dQ_n \leqslant 2\int\limits_{|x|>N} x^2\,dQ_n \Bigl| \int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ_n - \\ - \int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ - \int\limits_{|x|>N} x\,dQ \Bigr| \leqslant 4\varepsilon \int\limits_{|x|>N} x^2\,dQ_n. \qquad (9.3.7)$$

Кроме того,

$$\Bigl(\int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ_n\Bigr)^2 = \Bigl(\int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ_n - \int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ - \int\limits_{|x|>N} x\,dQ\Bigr)^2 \leqslant 4\varepsilon^2. \qquad (9.3.8)$$

Неравенства (9.3.5) — (9.3.8) означают, что при $\varepsilon < 1/6$

$$\sigma_n^2 - \sigma^2 \geqslant -2\varepsilon - 4\varepsilon^2 + \int\limits_{|x|>N} x^2\,dQ_n\,(1-6\varepsilon) \geqslant -3\varepsilon. \qquad (9.3.9)$$

Таким образом, неравенство (9.3.2), а вместе с тем и лемма доказаны.

Лемма 9.3.2. *Пусть сохранены обозначения предыдущей леммы. Если при $n \to \infty$*

$$L(Q_n, Q) \to 0 \quad и \quad \sigma_n^2 \to \sigma^2,$$

то

$$a_n \to a, \qquad (9.3.10)$$

где a_n и a — математические ожидания распределений Q_n и Q.

Доказательство. Опять можно ограничиться случаем $a = 0$. Пусть дано $\varepsilon \in (0, 1/12)$. Найдем такие $N > 1$ и n_0, что выполнены неравенства (9.3.3) и (9.3.4), а также

$$|\sigma_n^2 - \sigma^2| < \varepsilon. \qquad (9.3.11)$$

Достаточно доказать, что для $n \geqslant n_0$

$$|a_n| < 10\varepsilon. \qquad (9.3.12)$$

При всех $n \geqslant n_0$ имеем

$$|a_n| = \Bigl| \int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ_n - \int\limits_{|x|\leqslant N} x\,dQ + \int\limits_{|x|>N} x\,dQ_n - \int\limits_{|x|>N} x\,dQ \Bigr| \leqslant \\ \leqslant 2\varepsilon + \int\limits_{|x|>N} x^2\,dQ_n. \qquad (9.3.13)$$

Из (9.3.9) следует, что

$$\int\limits_{|x|>N} x^2\,dQ_n \leqslant \frac{\sigma_n^2-\sigma^2+3\varepsilon}{1-6\varepsilon} < 8\varepsilon. \tag{9.3.14}$$

Теперь (9.3.12), а вместе с тем и справедливость леммы доказаны.

Прежде чем формулировать основную теорему, опишем рассматриваемую ситуацию. В соответствии с общей постановкой, изложенной в § 2, рассматривается последовательность сумм независимых случайных величин

$$\xi_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nj} + \ldots \tag{9.3.15}$$

Последовательность композиций их функций распределения имеет вид

$$F_n = F_{n1} * F_{n2} * \ldots * F_{nj} * \ldots \tag{9.3.16}$$

Как и в теореме 9.1.1, предположим, что x_{nj} имеют конечные дисперсии σ_{nj}^2 и $\mathsf{E}x_{nj}=0$, $\sum\limits_j \sigma_{nj}^2 = 1$. Обозначим $\Phi_{nj} = \Phi\,(x/\sigma_{nj})$.

Теорема 9.3.1. *Сходимость*

$$L\,(F_n,\ \Phi) \to 0 \tag{9.3.17}$$

имеет место тогда и только тогда, когда при неограниченном возрастании n оказываются выполненными следующие два условия:

1) $$\alpha_n = \sup_j L\,(F_{nj},\ \Phi_{nj}) \to 0; \tag{9.3.18}$$

2) *при каждом положительном* δ

$$\Delta_n(\delta) = \sum_{j\in A_n}\ \int\limits_{|x|\geqslant\delta} x^2\,dF_{nj}(x) \to 0, \tag{9.3.19}$$

где A_n содержит те значения индекса j, для которых

$$\sigma_{nj}^2 < \sqrt{\alpha_n}. \tag{9.3.20}$$

Доказательство. I. Докажем достаточность условий теоремы. Обозначим

$$F_n^{(1)} = \underset{A_n}{\boxed{*}}\, F_{nj}, \quad \Phi_n^{(1)} = \underset{A_n}{\boxed{*}}\, \Phi_{nj}, \quad d_{n1}^2 = \sum_{A_n} \sigma_{nj}^2.$$

Распределения $F_n^{(2)}$ и $\Phi_n^{(2)}$ образуются аналогично, но вместо множества A_n берется дополнительное к нему множество $\overline{A}_n$. Тогда

$$F_n = F_n^{(1)} * F_n^{(2)}, \quad \Phi = \Phi_n^{(1)} * \Phi_n^{(2)}$$

и согласно лемме 8.1.1

$$L(F_n, \Phi) \leqslant L(F_n^{(1)}, \Phi_n^{(1)}) + L(F_n^{(2)}, \Phi_n^{(2)}). \tag{9.3.21}$$

Следует убедиться, что при $n \to \infty$ оба слагаемых в правой части (9.3.21) стремятся к нулю. Для второго слагаемого имеем

$$L(F_n^{(2)}, \Phi_n^{(2)}) \leqslant \sum_{\overline{A}_n} L(F_{nj}, \Phi_{nj}).$$

Так как для $j \in \overline{A}_n$ $\sigma_{nj}^2 \geqslant \sqrt{\alpha_n}$, то число слагаемых в последней сумме не может превышать $1/\sqrt{\alpha_n}$. Поэтому при $n \to \infty$

$$L(F_n^{(2)}, \Phi_n^{(2)}) \leqslant \sqrt{\alpha_n} \to 0. \tag{9.3.22}$$

Допустим, что $L(F_n^{(1)}, \Phi_n^{(1)})$ не стремится к нулю. Тогда можем считать, что для всех n (иначе рассмотрели бы соответствующую подпоследовательность) справедливо неравенство

$$L(F_n^{(1)}, \Phi_n^{(1)}) \geqslant \tau > 0. \tag{9.3.23}$$

Можем считать также, что $d_{n1}^2 \to d_1^2$, причем в силу леммы 8.4.3 и неравенства (9.3.23) $d_1^2 > 0$. Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{d_{n1}} \sum_{A_n} x_{nj}. \tag{9.3.24}$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{A_n} P\{|x_{nj}| > \varepsilon d_{n1}\} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\varepsilon^2 d_{n1}^2}, \tag{9.3.25}$$

то условия 1) и 2) доказываемой теоремы означают, что (9.3.24) является суммой предельно пренебрегаемых слагаемых, для которой выполнено условие Линдеберга. Тогда из классической теоремы 9.1.1 следует справедливость соотношения

$$L(F_n^{(1)}(d_{n1}x), \Phi) \to 0. \tag{9.3.26}$$

С помощью леммы 8.4.1 получаем

$$L\left(F_n^{(1)},\ \Phi_n^{(1)}\right) \leqslant \rho\left(F_n^{(1)}(d_{n1}x),\ \Phi\right) \leqslant$$ 101

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) L\left(F_n^{(1)}(d_{n1}x),\ \Phi\right). \tag{9.3.27}$$

Но (9.3.26) и (9.3.27) противоречат (9.3.23), что и завершает доказательство достаточности.

II. Пусть выполнено (9.3.17). Сначала докажем (9.3.18) с тем, чтобы иметь право воспользоваться этим условием при доказательстве (9.3.19). В ходе доказательства, чтобы не вводить дополнительные индексы, свойством, присущим подпоследовательности, каждый раз наделяется сама последовательность. Как будет ясно, общность рассуждений при этом не нарушится.

Пусть (9.3.18) не имеет места. В соответствии с нашим соглашением о подпоследовательностях это означает, что для каждого n среди законов F_{nj}, образующих композицию (9.3.16), найдется такой закон U_n, имеющий дисперсию s_{n1}^2, для которого

$$L\left(U_n,\ G_n\right) \geqslant \eta > 0, \tag{9.3.28}$$

где $G_n = \Phi\left(x/s_{n1}\right)$. Композицию всех остальных компонент разложения (9.3.16) обозначим V_n, а соответствующую дисперсию — s_{n2}^2. Тогда

$$F_n = U_n * V_n, \tag{9.3.29}$$

$$s_{n1}^2 + s_{n2}^2 = 1, \tag{9.3.30}$$

$$\Phi = G_n * H_n, \tag{9.3.31}$$

где $H_n = \Phi\left(x/s_{n2}\right)$.

Рассмотрим последовательность композиций

$$F_n = U_n' * V_n', \tag{9.3.32}$$

в которой U_n' означает результат центрирования U_n медианой. Математические ожидания распределений U_n' и V_n' обозначим a_{n1} и a_{n2}. Соответствующие дисперсии совпадают с дисперсиями U_n и V_n. Тогда $G_n' = \Phi\left(\frac{x-a_{n1}}{s_{n1}}\right)$ и $H_n' = \Phi\left(\frac{x-a_{n2}}{s_{n2}}\right)$ образуют разложение

$$\Phi = G_n' * H_n'. \tag{9.3.33}$$

Применяя к (9.3.32) лемму 8.1.2, заключаем, что существуют такие законы $G = \Phi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)$ и $H = \Phi\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)$, для которых

$$\Phi = G * H, \tag{9.3.34}$$

и при $n \to \infty$ (соглашение о подпоследовательностях остается в силе)

$$L(U'_n, G) \to 0, \quad L(V'_n, H) \to 0. \tag{9.3.35}$$

Так как последовательности s^2_{n1} и s^2_{n2} мы можем считать сходящимися, то на основании леммы 9.3.1 и (9.3.30) заключаем, что при $n \to \infty$

$$s^2_{n1} \to \sigma^2_1, \quad s^2_{n2} \to \sigma^2_2. \tag{9.3.36}$$

В свою очередь из (9.3.36) и леммы 9.3.2 следует, что

$$a_{n1} \to a_1, \quad a_{n2} \to a_2. \tag{9.3.37}$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$L(G'_n, G) \to 0. \tag{9.3.38}$$

Заметим, что

$$L(U_n, G_n) = L(U'_n, G'_n) \leqslant L(U'_n, G) + L(G'_n, G). \tag{9.3.39}$$

Теперь на основании (9.3.35), (9.3.38) и (9.3.39) требуемое противоречие с (9.3.28) получено и справедливость (9.3.18) доказана.

Доказательство соотношения (9.3.19) также начнем с предположения о том, что оно не имеет места. Тогда, наделяя последовательность $\Delta_n(\delta)$ свойством некоторой ее подпоследовательности, можем утверждать, что существует такое $\delta > 0$, что при всех n

$$\Delta_n(\delta) \geqslant \nu > 0. \tag{9.3.40}$$

Отсюда следует справедливость неравенства

$$d^2_{n1} = \sum_{A_n} \sigma^2_{nj} \geqslant \nu. \tag{9.3.41}$$

Мы можем считать, что при $n \to \infty$

$$d^2_{n1} \to d^2_1 > 0. \tag{9.3.42}$$

Доказанное нами утверждение о необходимости условия (9.3.18) для (9.3.17) означает также, что при $n \to \infty$

$$L(F^{(1)}_n, \Phi^{(1)}_n) \to 0. \tag{9.3.43}$$

Из (9.3.42), (9.3.43) и леммы 8.4.1 получаем предельное соотношение

$$L\left(F_n^{(1)}(d_{n1}x), \Phi\right) \to 0. \qquad (9.3.44)$$

Как и при доказательстве достаточности, рассмотрим сумму (9.3.24), распределенную по закону $F_n^{(1)}(d_{n1}x)$. Согласно (9.3.25), (9.3.42) и (9.3.18) слагаемые в этой сумме предельно пренебрежимы. Тогда на основании (9.3.44) и теоремы 9.1.1 заключаем, что при $n \to \infty$

$$\Delta_n(\delta) = d_{n1}^2 \Lambda_n(\delta/d_{n1}) \to 0.$$

Тем самым нужное противоречие с (9.3.40) получено, и теорема доказана полностью.

Существует и второй вариант теоремы 9.3.1, не использующий специального множества индексов A_n. Формулируя этот вариант, сохраним прежние обозначения.

Теорема 9.3.2. *Сходимость $L(F_n, \Phi) \to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда при неограниченном возрастании n оказываются выполненными следующие два условия:*

1) $\alpha_n = \sup\limits_j L(F_{nj}, \Phi_{nj}) \to 0$;

2) *при каждом* $\delta > 0$

$$B_n(\delta) = \sum_j \int\limits_{|x| \geqslant \delta} x^2 d(F_{nj} - \Phi_{nj}) \to 0.$$

Доказательство. Убедимся в эквивалентности обеих формулировок. Достаточно показать, что при $\alpha_n \to 0$ последовательности $\Delta_n(\delta)$ и $B_n(\delta)$ могут стремиться к нулю лишь одновременно. Напишем равенство

$$B_n(\delta) = \Delta_n(\delta) + \sum_{\bar{A}_n} \int\limits_{|x| \geqslant \delta} x^2 d(F_{nj} - \Phi_{nj}) - \sum_{A_n} \int\limits_{|x| \geqslant \delta} x^2\, d\Phi_{nj}. \qquad (9.3.45)$$

Оценим суммы, стоящие в правой части (9.3.45). Так как дисперсии F_{nj} и Φ_{nj} совпадают, то

$$\left| \sum_{\bar{A}_n} \int\limits_{|x| \geqslant \delta} x^2 d(F_{nj} - \Phi_{nj}) \right| = \left| \sum_{\bar{A}_n} \int\limits_{|x| < \delta} x^2 d(F_{nj} - \Phi_{nj}) \right|. \qquad (9.3.46)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что число слагаемых в сумме не превосходит $1/\sqrt{\alpha_n}$, получим

$$\left|\sum_{\bar{A}_n}\int\limits_{|x|<\delta} x^2 d\,(F_{nj}-\Phi_{nj})\right| \leqslant \frac{2\delta^2}{\sqrt{\alpha_n}} \sup_j \rho\,(F_{nj},\, \Phi_{nj}).$$

Теперь с помощью леммы 8.4.1 убеждаемся в справедливости оценки

$$\left|\sum_{\bar{A}_n}\int\limits_{|x|<\delta} x^2 d\,(F_{nj}-\Phi_{nj})\right| \leqslant 4\delta^2 \sqrt[4]{\alpha_n}. \qquad (9.3.47)$$

Последняя сумма в (9.3.45) оценивается так:

$$\sum_{A_n}\int\limits_{|x|\geqslant\delta} x^2\, d\Phi_{nj} = \sum_{A_n}\sigma_{nj}^2 \int\limits_{|x|\geqslant\delta/\sigma_{nj}} x^2\, d\Phi \leqslant \int\limits_{|x|\geqslant\delta/\sqrt[4]{\alpha_n}} x^2\, d\Phi. \qquad (9.3.48)$$

Из соотношений (9.3.45) — (9.3.48) и следует то, что нам требовалось доказать.

Замечание. Из доказательства теоремы 9.3.1 видно, что специальный выбор множества A_n в этой теореме не является обязательным. Смысл этого множества в выделении из суммы предельно пренебрегаемых слагаемых. Поэтому выбор множества A_n довольно произволен.

§ 4. О сходимости к закону Пуассона

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, последовательность сумм серий независимых случайных величин

$$\xi_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk} + \ldots \qquad (9.4.1)$$

с нулевыми средними и дисперсиями $\lambda_{nk} = Dx_{nk}$, причем $\sum\limits_k \lambda_{nk} = \lambda$. Последовательность соответствующих функций распределения имеет вид

$$F_n = F_{n1} * F_{n2} * \ldots * F_{nk} * \ldots \qquad (9.4.2)$$

Закон Пуассона со средним a и дисперсией b, т. е. закон с характеристической функцией

$$\pi\,(a,\, b;\, t) = \exp\,[iat + b\,(e^{it} - 1 - it)], \qquad (9.4.3)$$

мы будем обозначать $\Pi\,(a,\, b;\, x)$. Рассмотрим также функции распределения $\Pi_{nk}(x) = \Pi\,(0,\, \lambda_{nk};\, x)$ и $\Pi\,(x) =$

$= \Pi(0, \lambda; x)$. Соответствующие характеристические функции будем обозначать строчными буквами: $f_n(t)$, $f_{nk}(t)$, $\pi_{nk}(t)$, $\pi(t)$. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 9.4.1. *Для сходимости*

$$L(F_n, \Pi) \to 0$$

необходимо и достаточно выполнение при $n \to \infty$ *условий*:

1) $$\alpha_n = \sup_k L(F_{nk}, \Pi_{nk}) \to 0; \tag{9.4.4}$$

2) $$\Delta_n(\delta) = \sum_{\{k:\ \lambda_{nk} < \varepsilon_n\}} \int_{|x-1|>\delta} x^2\, dF_{nk}(x) \to 0 \tag{9.4.5}$$

для любого $\delta > 0$ *и любой последовательности* $\varepsilon_n \to 0$.

В доказательстве теоремы мы будем использовать следующую лемму.

Лемма 9.4.1. *Пусть* $\sup\limits_k L(F_{nk}, \Pi_{nk}) \to 0$. *Тогда для любого* $T > 0$

$$\sup_k \sup_{|t| \leqslant T} |f_{nk}(t) - \pi_{nk}(t)| \to 0. \tag{9.4.6}$$

Доказательство. Здесь и далее остается в силе соглашение о подпоследовательностях, принятое нами в § 3. Пусть (9.4.6) нарушается. Тогда существуют такие $T > 0$, $\varepsilon > 0$ и последовательность точек t_{nk}, что хотя $|t_{nk}| \leqslant T$, тем не менее

$$|f_{nk}(t_{nk}) - \pi_{nk}(t_{nk})| \geqslant 2\varepsilon. \tag{9.4.7}$$

Поскольку мы можем считать сходящейся соответствующую последовательность λ_{nk}, то будем считать, что $\lambda_{nk} \to \lambda_0$. Тогда и $\Pi_{nk} \to \Pi(0, \lambda_0)$, а поэтому для $|t| \leqslant T$ и достаточно больших n

$$|\pi_{nk}(t) - \pi(0, \lambda_0; t)| \leqslant \varepsilon. \tag{9.4.8}$$

Из (9.4.7) и (9.4.8) для достаточно больших n выводим

$$|f_{nk}(t_{nk}) - \pi(0, \lambda_0; t_{nk})| \geqslant \varepsilon. \tag{9.4.9}$$

С другой стороны,

$$L(F_{nk}, \Pi(0, \lambda_0)) \leqslant \leqslant L(F_{nk}, \Pi_{nk}) + L(\Pi_{nk}, \Pi(0, \lambda_0)) \to 0,$$

что противоречит (9.4.9). Поэтому (9.4.6), а вместе с этим лемма доказаны.

Доказательство теоремы. Достаточность. Нам достаточно показать, что для $|t| \leqslant T$ и $\varepsilon > 0$

$$|f_n - \pi| \leqslant \varepsilon. \tag{9.4.10}$$

Обозначим: $K_n = \{k\colon \lambda_{nk} < \varepsilon_n\}$, $\overline{K}_n$ — дополнительное множество индексов. Имеем

$$|f_n - \pi| \leqslant \Big|\prod_{K_n} f_{nk} - \prod_{K_n} \pi_{nk}\Big| + \Big|\prod_{\overline{K}_n} f_{nk} - \prod_{\overline{K}_n} \pi_{nk}\Big|.$$

Поскольку число элементов множества $\overline{K}_n$ не превосходит λ/ε_n, второе слагаемое оценится так:

$$\Big|\prod_{\overline{K}_n} f_{nk} - \prod_{\overline{K}_n} \pi_{nk}\Big| \leqslant \sum_{\overline{K}_n} |f_{nk} - \pi_{nk}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda}{\varepsilon_n} \sup_k \sup_{|t|\leqslant T} |f_{nk}(t) - \pi_{nk}(t)|.$$

В силу условия 1) теоремы мы вправе воспользоваться леммой 9.4.1 и подобрать такую последовательность $\varepsilon_n = \varepsilon_n(T, \varepsilon)$, что $\varepsilon_n \to 0$ и

$$\frac{\lambda}{\varepsilon_n} \sup_k \sup_{|t|\leqslant T} |f_{nk}(t) - \pi_{nk}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \tag{9.4.11}$$

при $n \geqslant n_1(\varepsilon, T)$. Оценим первое слагаемое:

$$\Big|\prod_{K_n} f_{nk} - \prod_{K_n} \pi_{nk}\Big| \leqslant \sum_{K_n} \Big| f_{nk} - \pi_{nk}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{K_n} \{|f_{nk} - 1 - \ln \pi_{nk}| + |1 + \ln \pi_{nk} - \pi_{nk}|\}. \tag{9.4.12}$$

Пользуясь неравенством $|e^z - 1 - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$, получим

$$|1 + \ln \pi_{nk} - \pi_{nk}| =$$
$$= |\exp(\lambda_{nk}(e^{it} - 1 - it)) - \lambda_{nk}(e^{it} - 1 - it) - 1| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_{nk}^2}{2} |e^{it} - 1 - it|^2 \exp(\lambda_{nk} |e^{it} - 1 - it|) \leqslant C_1(T)\lambda_{nk}^2. \tag{9.4.13}$$

Теперь оценим $|f_{nk} - 1 - \ln \pi_{nk}|$. Имеем

$$|f_{nk} - 1 - \ln \pi_{nk}| = \Big|\int (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) - \lambda_{nk}(e^{it} - 1 - it)\Big| =$$
$$= \Big|\int [e^{itx} - 1 - itx - x^2(e^{it} - 1 - it)]\, dF_{nk}^{*}(x)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} |e^{itx}-1-itx-(e^{it}-1-it)|\,dF_{nk}(x)+$$

$$+\int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} |e^{it}-1-it|\,|1-x^2|\,dF_{nk}(x)+$$

$$+\int\limits_{|x-1|>\delta} (|e^{itx}-1-itx|+x^2|e^{it}-1-it|)\,dF_{nk}(x)\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} |e^{itx}-e^{it}|\,dF_{nk}(x)+$$

$$+\int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} (|t|\,|x-1|+|e^{it}-1-it|\,|1-x^2|)\,dF_{nk}(x)+$$

$$+\int\limits_{|x-1|>\delta} t^2x^2\,dF_{nk}(x)\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} \left[2|t|\,|x-1|+\frac{1}{2}(2+\delta)t^2|x-1|\right]dF_{nk}(x)+$$

$$+t^2\int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\,dF_{nk}(x)\leqslant C_2(T)\int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} \delta\,dF_{nk}(x)+$$

$$+T^2\int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\,dF_{nk}(x)\leqslant C_2(T)\frac{\delta}{(1-\delta)^2}\int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} x^2\,dF_{nk}(x)+$$

$$+T^2\int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\,dF_{nk}(x). \qquad (9.4.14)$$

$C_i(T)$, $i=1, 2$, в (9.4.13) и (9.4.14) — константы, зависящие только от T. Из оценок (9.4.13), (9.4.14) получаем

$$\sum_{K_n}|f_{nk}-\pi_{nk}|\leqslant C_1(T)\sum_{K_n}\lambda_{nk}^2+$$

$$+C_2(T)\frac{\delta}{(1-\delta)^2}\sum_{K_n}\int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} x^2\,dF_{nk}(x)+$$

$$+T^2\sum_{K_n}\int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\,dF_{nk}(x)\leqslant C_1(T)\,\varepsilon_n\lambda+C_2(T)\frac{\delta}{(1-\delta)^2}\lambda+$$

$$+T^2\sum_{K_n}\int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\,dF_{nk}(x). \qquad (9.4.15)$$

Выберем теперь δ так, чтобы

$$C_2(T)\frac{\delta}{(1-\delta)^2}\lambda\leqslant\frac{\varepsilon}{4}, \qquad (9.4.16)$$

а $n_2 = n_2(\varepsilon, T)$ так, чтобы при $n \geqslant n_2$

$$C_1(T)\,\varepsilon_n\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad T^2 \sum_{K_n} \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\,dF_{nk}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9.4.17}$$

Тогда соотношения (9.4.11), (9.4.16), (9.4.17) позволяют заключить, что при $n \geqslant n_0(\varepsilon, T) = \max(n_1, n_2)$ для $|t| \leqslant T$ и произвольного $\varepsilon > 0$ имеем $|f_n - \pi| < \varepsilon$, что завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Начнем с доказательства первого условия теоремы. Пусть (9.4.4) не имеет места. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что для каждого n среди законов F_{nk} найдется такой закон H_n с дисперсией σ_{n1}^2, для которого

$$L(H_n, \Pi(0, \sigma_{n1}^2)) \geqslant \tau > 0. \tag{9.4.18}$$

Композицию остальных компонент в (9.4.2) обозначим G_n, а соответствующую дисперсию — σ_{n2}^2. Тогда

$$F_n = H_n * G_n, \tag{9.4.19}$$

$$\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 = \lambda \tag{9.4.20}$$

и

$$\Pi(0, \lambda) = \Pi(0, \sigma_{n1}^2) * \Pi(0, \sigma_{n2}^2). \tag{9.4.21}$$

Перейдем теперь от последовательности композиций (9.4.19) к последовательности

$$F_n = H'_n * G'_n, \tag{9.4.22}$$

где H'_n — результат центрирования H_n медианой, а G'_n подбирается так, чтобы левые части (9.4.22) и (9.4.19) совпадали. Обозначим математические ожидания H'_n и G'_n через a_{n1} и a_{n2} и сопоставим (9.4.21) последовательность композиций

$$\Pi(0, \lambda) = \Pi(a_{n1}, \sigma_{n1}^2) * \Pi(a_{n2}, \sigma_{n2}^2). \tag{9.4.23}$$

Применяя к (9.4.22) лемму 8.1.2, убеждаемся, что найдутся такие законы $\Pi(a_1, \sigma_1^2)$ и $\Pi(a_2, \sigma_2^2)$, что

$$\Pi(0, \lambda) = \Pi(a_1, \sigma_1^2) * \Pi(a_2, \sigma_2^2) \tag{9.4.24}$$

и при $n \to \infty$

$$L(H'_n, \Pi(a_1, \sigma_1^2)) \to 0, \quad L(G'_n, \Pi(a_2, \sigma_2^2)) \to 0. \tag{9.4.25}$$

В силу (9.4.20) и леммы 9.3.1 заключаем, что $\sigma_{n1}^2 \to \sigma_1^2$, $\sigma_{n2}^2 \to \sigma_2^2$, а отсюда по лемме 9.3.2 имеем $a_{n1} \to a_1$, $a_{n2} \to a_2$. Итак, при $n \to \infty$

$$L(\Pi(a_{n1}, \sigma_{n1}^2), \Pi(a_1, \sigma_1^2)) \to 0. \tag{9.4.26}$$

Далее,

$$L(H_n, \Pi(0, \sigma_{n1}^2)) = \\ = L(H_n', \Pi(a_{n1}, \sigma_{n1}^2)) \leqslant L(H_n', \Pi(a_{n1}, \sigma_1^2)) + \\ + L(\Pi(a_{n1}, \sigma_{n1}^2), \Pi(a_{n1}, \sigma_1^2)) \to 0$$

вследствие (9.4.25) и (9.4.26). Полученное противоречие с (9.4.18) доказывает (9.4.4).

Докажем, что выполнено второе условие теоремы. Допустим, что (9.4.5) нарушено, т. е. существует такая последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и такое $\delta > 0$, что для всех n

$$\sum_{K_n} \int_{|x-1|>\delta} x^2\, dF_{nk}(x) \geqslant d > 0. \tag{9.4.27}$$

Ясно, что $\sum\limits_{K_n} \lambda_{nk} \geqslant d$, и можно без потери общности считать, что

$$\sum_{K_n} \lambda_{nk} \to \lambda_0. \tag{9.4.28}$$

Представим F_n в виде $\underset{K_n}{\boxed{*}} F_{nk} * \underset{\overline{K}_n}{\boxed{*}} F_{nk}$, где символ $\underset{K_n}{\boxed{*}}$ означает свертку тех F_{nk}, у которых индекс k входит в K_n. Тогда в силу уже установленного нами (9.4.4)

$$L(\underset{K_n}{\boxed{*}} F_{nk}, \underset{K_n}{\boxed{*}} \Pi_{nk}) \to 0, \tag{9.4.29}$$

а в силу (9.4.28)

$$L(\underset{K_n}{\boxed{*}} F_{nk}, \Pi(0, \lambda_0)) \to 0. \tag{9.4.30}$$

Пользуясь определением K_n и свойством (9.4.4), можно интерпретировать $\underset{K_n}{\boxed{*}} F_{nk}$ как функцию распределения суммы n-й серии предельно пренебрегаемых величин. Соотношение (9.4.30) означает тогда, что мы можем применить классическую теорему 9.1.2, согласно которой

$$\sum_{K_n} \int_{|x-1|>\delta} x^2\, dF_{nk}(x) \to 0. \tag{9.4.31}$$

Поскольку (9.4.31) противоречит (9.4.27), то (9.4.5) установлено, и теорема доказана.

Так же, как и для теоремы 9.3.1, существует вариант теоремы 9.4.1, в котором не участвует множество индексов K_n.

Теорема 9.4.2. *В условиях теоремы* 9.4.1 *д*$L(F_n, \Pi) \to 0$ *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\sup\limits_k L(F_{nk}, \Pi_{nk}) \to 0$;

2) $$\sum_k \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\, d(F_{nk} - \Pi_{nk}) \to 0 \tag{9.4.32}$$

для любого δ, $0 < \delta < 1$.

Убедимся в эквивалентности обеих формулировок. Достаточно показать, что при $\alpha_n \to 0$ последовательности

$$\Delta_n(\delta) = \sum_{K_n} \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\, dF_{nk}(x)$$

и

$$B_n(\delta) = \sum_k \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2 d(F_{nk} - \Pi_{nk})$$

могут стремиться к нулю лишь одновременно.

Напишем равенство

$$B_n(\delta) = \Delta_n(\delta) + \sum_{\overline{K}_n} \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2 d(F_{nk} - \Pi_{nk}) - \\ - \sum_{K_n} \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2\, d\Pi_{nk}(x).$$

Предположение о том, что последняя сумма не стремится к нулю, приводит к противоречию с известной классической предельной теоремой.

Можем считать, что $\varepsilon_n \to 0$ как угодно медленно, например, не быстрее, чем $\sqrt{\alpha_n}$. Нам остается оценить сумму

$$\left| \sum_{\overline{K}_n} \int\limits_{|x-1|>\delta} x^2 d(F_{nk} - \Pi_{nk}) \right| = \left| \sum_{\overline{K}_n} \int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} x^2 d(F_{nk} - \Pi_{nk}) \right|.$$

Так как число слагаемых в этой сумме не превышает $\lambda/\sqrt{\alpha_n}$, то остается убедиться в том, что

$$\sup_{\overline{K}_n}\left|\int\limits_{|x-1|\leqslant\delta} d\,(F_{nk}-\Pi_{nk})\right|\leqslant 2\alpha_n.$$

Это последнее неравенство легко следует для любого $\delta \in (0,\ 1)$ из определения расстояния Леви и постоянства функции Π_{nk} между ее точками роста.

§ 5. Сходимость к законам класса $\mathfrak{L}$

По-прежнему рассматривается сумма независимых случайных величин

$$\xi_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk} + \ldots \tag{9.5.1}$$

и соответствующая последовательность композиций

$$F_n = F_{n1} * F_{n2} * \ldots * F_{nk} * \ldots \tag{9.5.2}$$

При формулировке и доказательстве теорем 9.3.1 и 9.4.1 существенным являлось то, что K_F — класс компонент предельного закона — допускал в силу теорем Крамера и Райкова весьма простое описание. В. М. Золотаревым [1] было высказано предположение, что для законов класса $\mathfrak{L}$ теоремы, аналогичные теоремам 9.3.1 и 9.4.1, будут иметь столь же простой вид. Такие теоремы были доказаны Ю. Ю. Мачисом. Мы приведем здесь результаты его работы [7].

Введем некоторые обозначения. Если G — функция распределения б. д. закона, то мы будем кратко записывать $G = (a,\ \Psi)$, если логарифм ее х. ф. имеет вид

$$\ln g(t) = iat + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,d\Psi(u). \tag{9.5.3}$$

В случае, если Ψ постоянна вне некоторого конечного интервала, будем говорить, что G обладает ограниченным спектром. Как известно, если $G = \{a,\ \Psi\} \in \mathfrak{L}$, то задача разложения G на компоненты $G = G_1 * G_2$ решается формулами $G_1 = (a_1,\ \Psi_1)$, $G_2 = (a_2,\ \Psi_2)$, $a_1 + a_2 = a$, $\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi$.

Особенно простой вид имеют необходимые и достаточные условия сходимости к законам класса $\mathfrak{L}_1$ (класс законов, принадлежащих $\mathfrak{L}$ и обладающих ограниченным спектром). В этом случае логарифм характеристической функции предельного закона G может быть представлен по формуле А. Н. Колмогорова:

$$\ln g(t) = iat + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{dK(u)}{u^2}. \tag{9.5.4}$$

Класс компонент законов, соответствующих спектральным функциям $cK(u)$, $0 < c < \infty$, назовем $\mathfrak{L}_1(G)$. G_{nk} будет означать функцию распределения из $\mathfrak{L}_1(G)$ со средним 0 и дисперсией λ_{nk}, K_{nk} — ее спектральную функцию.

Теорема 9.5.1. *Пусть $G \in \mathfrak{L}_1$ и имеет среднее 0 и дисперсию λ. Для того чтобы $L(F_n, G) \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно существование таких $G_{nk} \in I_1(G)$, что при $n \to \infty$*

1) $$\alpha_n = \sup_k L(F_{nk}, G_{nk}) \to 0, \tag{9.5.5}$$

2) $$\sum_{\{k:\ \lambda_{nk} < \sqrt{\alpha_n}\}} \int_{-\infty}^{u} x^2\, dF_{nk}(x) + \sum_{\{k:\ \lambda_{nk} \geqslant \sqrt{\alpha_n}\}} K_{nk}(u) \to K(u). \tag{9.5.6}$$

Доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы 9.4.1.

Отметим, что, как и в теореме 9.3.1, выбор множества индексов $\{k:\ \lambda_{nk} < \sqrt{\alpha_n}\}$, по которому производится суммирование в (9.5.6), в значительной степени произволен и может быть заменен, например, на $\{k:\ \lambda_{nk} < \varepsilon_n\}$, если потребовать, чтобы (9.5.6) выполнялось для любой последовательности $\varepsilon_n \to 0$.

Поскольку класс $\mathfrak{L}_1$ содержит законы Гаусса и Пуассона, то теорема 9.5.1 обобщает теоремы 9.3.1 и 9.4.1. При этом условие (9.5.6) в силу особенно простого вида спектральных функций предельных законов принимает соответственно форму (9.3.19) и (9.4.5). Например, в случае теоремы 9.3.1

$$G_{nk} = \Phi_{nk}, \quad K_{nk}(u) = \begin{cases} \sigma_{nk}^2, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0, \end{cases}$$

и (9.5.6) дает для любого $\delta > 0$

$$\sum_{A_n} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} x^2\, dF_{nk}(x) \to 0, \tag{9.5.7}$$

$$\sum_{A_n} \int\limits_{-\infty}^{\delta} x^2\, dF_{nk}(x) + \sum_{\bar{A}_n} \sigma_{nk}^2 \to \sigma^2. \tag{9.5.8}$$

Соотношение (9.5.8) перепишем так:

$$\sum_{A_n} \sigma_{nk}^2 - \sum_{A_n} \int\limits_{\delta}^{\infty} x^2\, dF_{nk}(x) + \sum_{\bar{A}_n} \sigma_{nk}^2 \to \sigma^2,$$

откуда

$$\sum_{A_n} \int\limits_{\delta}^{\infty} x^2\, dF_{nk}(x) \to 0. \tag{9.5.9}$$

Формулы (9.5.7) и (9.5.9) дают (9.3.19). Вывод (9.4.5) из (9.5.6) аналогичен.

В случае, если предельным законом является произвольный закон из класса $\mathfrak{L}$, справедлива следующая теорема, обобщающая классическую теорему 9.1.4.

Теорема 9.5.2. *Пусть $G = (a, \Psi)$ — произвольный закон из $\mathfrak{L}$.*

Для того чтобы $L(F_n, G) \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно существование таких $G_{nk} = \{a_{nk}, \Psi_{nk}\}$, $\sum\limits_k a_{nk} = a$, $\sum\limits_k \Psi_{nk} = \Psi$, что

1) $\sup\limits_k L(F_{nk}, G_{nk}) = \alpha_n \to 0$,

2) $\displaystyle\sum_{D_n} \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk} + \mu_{nk}) + \sum_{\bar{D}_n} \Psi_{nk}(u) \to \Psi(u)$,

3) $\displaystyle\sum_{D_n} \left\{\mu_{nk} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x + a_{nk} + \mu_{nk})\right\} + \sum_{\bar{D}_n} a_{nk} \to a$,

где $D_n = \{k\colon \operatorname{Var} \Psi_{nk} < \sqrt{\alpha_n}\}$, $\overline{D}_n$ — *дополнительное множество индексов, а* $\mu_{nk} = \int\limits_{|x| < \tau} x\, dF_{nk}(x + a_{nk})$, *где* τ — *произвольное положительное число.*

Заметим, что если рассматривать последовательность сумм ξ_n, центрированных некоторой последовательностью констант A_n, то за счет подходящего выбора последних условие 3) можно опустить.

§ 6. Обобщение на случай величин со значениями в гильбертовом пространстве

В §§ 3, 4 были изучены необходимые и достаточные условия сходимости сумм серий независимых случайных величин к законам Гаусса и Пуассона. В. М. Круглову удалось обобщить эти теоремы на случай, когда величины принимают значения в гильбертовом пространстве. Для того чтобы привести его результаты, нам понадобятся некоторые сведения о распределениях в гильбертовом пространстве.

Пусть H — сепарабельное действительное гильбертово пространство. Символ (x, y) означает скалярное произведение элементов x, y. Задаваемую скалярным произведением норму элемента x мы обозначим $\|x\|$.

Вероятностное распределение F мы будем называть также функцией распределения.

Свертка двух функций распределения строится так же, как на прямой:

$$F(A) = (F_1 * F_2)(A) = \int\limits_H F_1(A - u)\, dF_2(u).$$

Характеристическая функция, соответствующая F, определяется по формуле

$$f(y) = \int\limits_H \exp(i(x, y))\, dF(x).$$

Последовательность ф. р. F_n называется слабо сходящейся к ф. р. F, если для любой ограниченной непрерывной функции f на H

$$\int\limits_H f\, dF_n \to \int\limits_H f\, dF \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Известно, что слабая сходимость распределений эквивалентна сходимости в метрике Леви — Прохорова, которая строится следующим образом. Для любого замкнутого $E \subset H$ и любого $\varepsilon > 0$ положим $E^{\varepsilon} = \{x\colon \inf \| x - y \| < \varepsilon,\ y \in E\}$.

Определим число

$$L(F, G) = \inf \{\varepsilon\colon F(E) \leqslant G(E^{\varepsilon}) + \varepsilon \text{ для всех замкн. } E \subset H\} = \inf \{\varepsilon\colon G(E) \leqslant F(E^{\varepsilon}) + \varepsilon \text{ для всех замкн. } E \subset H\},$$

которое и принимается за расстояние между F и G. (Равенство нижних граней следует из одной теоремы В. Штрассена [1].)

Если X — случайная величина с ф. р. F, то математическим ожиданием X называется элемент $\mathsf{E} X \in H$, определяемый соотношением: для любого $y \in H$

$$(\mathsf{E}X, y) = \int_H (z, y)\, dF(z).$$

Дисперсией случайной величины X будем называть $\mathsf{E} \| X - EX \|^2$. Важной характеристикой случайной величины является так называемый S-оператор, являющийся бесконечномерным аналогом матрицы вторых моментов конечномерного случайного вектора. S-оператор вполне определяется соотношением:

$$(Sx, y) = \int_H (z, x)(z, y)\, dF(z) \quad \text{для любых} \quad x, y \in H.$$

S-операторы являются линейными симметричными положительными операторами с конечным следом.

Функция распределения F (соответственно случайная величина или х. ф.) называется безгранично делимой (б. д.), если для любого натурального n она может быть представлена в виде композиции n одинаковых ф. р. Б. д. х. ф. имеют каноническое представление:

$$f(y) = \exp\left[i(a, y) - \frac{1}{2}(Sy, y) + \int_H \left(e^{i(x, y)} - 1 - \frac{i(x, y)}{1 + \| x \|^2}\right) dM(x)\right],$$

где a — фиксированный элемент H, S — S-оператор, M — спектральная мера, конечная на дополнении любой окрестности θ (нулевого элемента) и такая, что

$$\int\limits_{\|x\|<1} \|x\|^2 \, dM < \infty.$$

Нормальной мы будем называть случайную величину, соответствующую х. ф. $\exp\left[i(a, y) - \frac{1}{2}(Sy, y)\right]$, где a и S — те же, что в каноническом представлении б. д. ф. р.

Случайные величины, отвечающие х. ф.

$$\exp[i(b, y) + \lambda(\exp i(a, y) - 1)], \quad \lambda > 0, \quad a, b \in H,$$

назовем пуассоновскими. Можно показать, что эти два типа распределения могут иметь только нормальные или, соответственно, пуассоновские компоненты.

Рассмотрим теперь последовательность сумм серий независимых случайных величин

$$\xi_n = x_{n1} + \ldots + x_{nk_n},$$

где x_n, $k = \overline{1, k_n}$, принимают значения из H, и последовательность соответствующих композиций ф. р.

$$F_n = F_{n1} * \ldots * F_{nk_n}.$$

Предположим, что F_{nk} имеет дисперсию σ^2_{nk} и математическое ожидание θ. Обозначим S_{nk} S-операторы F_{nk}. Пусть $N_{nk} = N(\theta, S_{nk})$ и $N = N(\theta, S)$ — нормальные ф. р. со средними θ и S-операторами S_{nk} и S соответственно.

Пусть $\sum\limits_k \sigma^2_{nk} = \sigma^2$ и след оператора S равен σ^2. Тогда обобщение теоремы 9.3.1 выглядит так:

Т е о р е м а 9.6.1. *Для того чтобы* $L(F_n, N) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *необходимо и достаточно выполнение при* $n \to \infty$ *условий*:

1) $\max\limits_k L(F_{nk}, N_{nk}) \to 0$;

2) $\sum\limits_k (S_{nk}y, y) \to (Sy, y)$ *для любого* $y \in H$;

3) $\sum\limits_k \int\limits_{\|y\|>\delta} \|y\|^2 \, d[F_{nk} - N_{nk}] \to 0$ *для любого* $\delta > 0$.

Условия 1) и 3) здесь аналогичны условиям 1) и 2) теоремы 9.3.1, условие же 2) является специфическим, присущим бесконечномерному случаю.

Рассмотрим теперь случай пуассоновской сходимости. Обозначим $\Pi = \Pi(\theta, \sigma^2, a)$ и $\Pi_{nk} = \Pi(\theta, \sigma^2_{nk}, a)$ пуассоновские ф. р. с нулевыми средними и дисперсиями σ^2 и σ^2_{nk} соответственно. Спектральные меры их сосредоточены на элементе a. Пусть выполнено условие $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \sigma^2_{nk} = \sigma^2$.

Нетрудно убедиться, что

$$\mathop{\boxed{*}}_{k=1}^{k_n} \Pi_{nk} = \Pi, \quad \int\limits_H (x, y)^2 \, d\Pi = \lambda (a, y)^2,$$

$$\sigma^2 = \lambda \| a \|^2, \quad \sigma_{nk} = \lambda_{nk} \| a \|^2, \quad \lambda = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_{nk},$$

где все λ_{nk} и $\lambda \geqslant 0$.

Пусть S_{nk} означает снова S-оператор. Тогда справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 9.6.2. *Для того чтобы $L(F_n, \Pi) \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно выполнение условий*:

1) $\max\limits_k L(F_{nk}, \Pi_{nk}) \to 0$;

2) $\sum\limits_k (S_{nk} y, y) \to \lambda (a, y)^2$ *для любого* $y \in H$;

3) $\sum\limits_k \int\limits_{\|y-a\|>\delta} \| y \|^2 \, d[F_{nk} - \Pi_{nk}] \to 0$ *для любого* $\delta > 0$, $\delta \neq m \| a \|$, $m = 1, 2, \ldots$

Эта теорема обобщает на бесконечномерный случай теорему 9.4.1.

ГЛАВА X

НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

К главе II

1. По классической теореме Вейерштрасса любое множество на плоскости, не имеющее конечной предельной точки, является множеством корней некоторой целой функции. Описать класс множеств, являющихся множествами корней целых хребтовых функций. Аналогичная проблема — для множеств корней целых характеристических функций. Заметим, что в силу результатов из § 3 такие множества необходимо должны быть симметричны относительно мнимой оси и не пересекаться с ней. Для одного специального класса целых х. ф. порядка $\leqslant 2$ описание множеств корней дал Э. Лукач [3].

2. В § 4 был выяснен вопрос о том, какой порядок и тип может иметь целая хребтовая функция. В общей теории целых функций, кроме порядка и типа, используется еще следующая характеристика роста, называемая индикатором. Для целых функций $f(z)$ порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, и нормального типа индикатор определяется равенством

$$h_f(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})|, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Условия, которым должна удовлетворять заданная на $[0, 2\pi]$ функция $h(\theta)$ для того, чтобы существовала целая функция $f(z)$ нормального типа порядка ρ такая, что $h_f(\theta) \equiv h(\theta)$, известны (см. Б. Я. Левин [1], гл. II, § 4). Найти условия, которым должна удовлетворять функция $h(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, для того, чтобы существовала целая хребтовая (или даже характеристическая) функция нормального типа порядка ρ такая, что $h_f(\theta) \equiv h(\theta)$. Легко видеть, что, кроме условий, которым должен удовлетворять индикатор любой целой функции нормального типа порядка ρ, индикатор целой хребтовой функции удовлетворяет условиям

$$h_f(\theta) = h_f(\pi - \theta), \quad h_f(\pi + \theta) = h_f(2\pi - \theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi;$$

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} h_f(\theta) = \max\left[h_f\left(\frac{\pi}{2}\right), \ h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

$$h_f(0) = h_f(\pi) \leqslant 0.$$

3. Пусть $\delta(a, \varphi)$ — используемая в теории распределения значений мероморфных функций *) величина, называемая неванлинновским дефектом функции $\varphi(t)$ в точке a. Можно ли условие $\rho_1 < \rho$ в теореме 2.5.1 заменить условием вида $\delta(0, \varphi) > C(\rho)$, где $0 \leqslant C(\rho) < 1$? Найти наилучшее значение для $C(\rho)$, т. е. найти $\sup\limits_{\varphi \in A_\rho} \delta(0, \varphi)$, где A_ρ — множество всех целых хребтовых функций порядка ρ, $\rho > 2$.

К главе III

1. Изучить вопросы, аналогичные вопросам 1 и 2 к гл. II, для х. ф. неразложимых законов. Найти $\sup\limits_{\varphi \in B_\rho} \delta(0, \varphi)$, где B_ρ — подмножество множества A_ρ (см. вопрос 3 к гл. II), состоящее из х. ф. неразложимых законов.

2. Изучить свойства неразложимых хребтовых функций. Нормированная хребтовая в полосе $a < \operatorname{Im} t < b$ $(a \leqslant 0 \leqslant b)$ функция $\varphi(t)$ называется неразложимой, если все ее хребтовые компоненты (определение см. на стр. 79) имеют вид $e^{i\alpha t}\varphi(t)$ или $e^{i\alpha t}$, $\operatorname{Im}\alpha = 0$. Существование неразложимых хребтовых функций доказано в работе В. М. Тупицыной [1].

*) С этой теорией, основоположником которой является Р. Неванлинна, можно ознакомиться, например, по книгам У. К. Хеймана [2], а также А. А. Гольдберга и И. В. Островского [2].

К главе IV

1. Упростить доказательство теоремы 4.1.1, которое в настоящее время очень сложно.

2. Обобщить теоремы 4.1.1 на многомерный случай.

К главе V

1. Отметим в первую очередь фундаментальную проблему:

Найти необходимые и достаточные условия для принадлежности б. д. закона классу I_0.

2. Частью этой проблемы является следующая. Найти необходимые и достаточные условия для принадлежности к I_0 б. д. закона с гауссовой компонентой. В отличие от общей проблемы здесь известно (теорема 4.1.1), каким должен быть пуассонов спектр закона.

3. Представляет интерес следующая еще более узкая проблема. Пусть $\psi(y)$ $(0 < y < \infty)$ — функция, монотонно стремящаяся к $+\infty$ при $y \uparrow +\infty$. Обозначим через $\mathfrak{L}[\psi]$ подкласс класса $\mathfrak{L}$, состоящий из законов F, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{|x|>y} dG(x) < \exp\{-\psi(y)\}, \qquad y \geqslant y_0 > 0,$$

где $G(x)$ — функция, фигурирующая в представлении х. ф. закона F формулой Леви — Хинчина. Найти условия на $\psi(y)$, необходимые и достаточные для того, чтобы имело место включение $\mathfrak{L}[\psi] \subset I_0$. Пусть α — точная нижняя грань чисел m, для которых $\mathfrak{L}[y^m] \subset I_0$. По теореме 5.3.1 имеем $\mathfrak{L}[y^2] \subset I_0$, а пример из § 5 показывает, что $\mathfrak{L}[y] \setminus I_0 \neq \varnothing$. Таким образом, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, но точное значение α неизвестно.

4. Аналогичная проблема для подкласса класса $\mathfrak{L}[\psi]$, состоящего из решетчатых законов. Соображения, относящиеся к теории банаховых алгебр, позволяют предположить, что для решения этой проблемы потребуется меньше усилий.

5. Существует ли закон класса $\mathfrak{L}$, обладающий целой х. ф. и не принадлежащий I_0?

6. Пусть F — б. д. закон без гауссовой компоненты, принадлежащий классу $\mathfrak{L}$. Обозначим через E_F множе-

ство тех чисел $\gamma \geqslant 0$, для которых закон с х. ф.

$$\varphi_\gamma(t) = e^{-\gamma t^2}\varphi(t;\ F)$$

принадлежит I_0. Дать описание возможных множеств E_F. Постановка этого вопроса принадлежит П. Леви. Пример из § 5 показывает, что множество E_F может оказаться пустым; с другой стороны, если F — закон Пуассона, то E_F совпадает с полуосью $[0, \infty)$. Легко видеть, что если $\gamma \in E_F$, то $[0, \gamma] \subset E_F$; поэтому E_F может быть либо сегментом $[0, a]$, либо полусегментом $[0, a)$. Не известен ни один пример, где E_F было бы непустым и не совпадало с $[0, \infty)$.

7. Пусть F — б. д. закон с гауссовой компонентой, принадлежащий классу $\mathfrak{L}$, F^+ и F^- — б. д. законы с х. ф.

$$\varphi(t;\ F^+) = \exp\left\{\int\limits_{-0}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\},$$

$$\varphi(t;\ F^-) = \exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{+0}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\},$$

где $G(x)$ — функция из представления для $\varphi(t;\ F)$ формулой Леви — Хинчина. Может ли случиться, что F^+ и F^- принадлежат I_0, но F не принадлежит I_0? Этот вопрос поставлен Р. Кюппаном [5].

8. Описать множество всех хребтовых компонент для х. ф. закона, удовлетворяющего условиям теоремы 5.4.1. Будут ли все эти компоненты — аналогично тому, как это было в условиях теоремы 5.3.1 (см. теорему 5.3.1′), — являться х. ф.?

К главе VI

1. Дать описание класса областей в C^n, являющихся областями аналитичности х. ф., аналитических в точке $t = 0$. Аналогичный вопрос для класса областей, являющихся областями мероморфности х. ф., аналитических в точке $t = 0$. Заметим, что эти классы не совпадают даже в случае $n = 1$ (ср. теорему 6.1.8 и замечание 2 в Приложении II). Это обстоятельство отличает ситуацию от той, которая имеет место в общей теории аналитических функций многих комплексных переменных.

2. Дать описание классов областей аналитичности и областей мероморфности х. ф. класса D (см. Приложение II). Заметим, что этот вопрос относится к функциям одного комплексного переменного, хотя, конечно, можно его обобщить и на многомерный случай.

3. Функции n комплексных переменных, аналитические в окрестности точки 0 и представимые там степенным рядом с неотрицательными коэффициентами, связаны (экспоненциальной заменой переменных) с х. ф. решетчатых n-мерных законов, сосредоточенных в гипероктанте $\{x\colon x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$. В связи с этим возникает такой вопрос, относящийся к общей теории аналитических функций многих переменных. Дать описание класса областей в C^n, являющихся областями аналитичности функций, аналитических в окрестности точки 0 и представимых там степенным рядом с неотрицательными коэффициентами. Для этих же функций дать описание класса областей, являющихся областями мероморфности. Некоторые результаты об областях аналитичности получены в работе Л. А. Айзенберга и А. С. Губановой [1].

4. Описать возможный рост и распределение нулевых поверхностей целых х. ф. многомерных законов. Изучить связь гиперповерхности порядков и типов целой х. ф. с поведением соответствующего закона. О гиперповерхностях порядков и типов и других характеристиках роста целых функций многих переменных см. в книге Л. И. Ронкина [1].

5. Существуют ли неразложимые n-мерные законы ($n \geqslant 2$), все проекции которых безгранично делимы?

6. Описать множества $n(n+1)/2$-мерного пространства, отвечающие множествам гауссовых компонент n-мерных законов. Подробнее об этом см. в Приложении IV.

7. Фундаментальная проблема:

Найти необходимые и достаточные условия для принадлежности n-мерного б. д. закона классу I_{0n}.

8. Пусть $A_1, \ldots, A_n$, — вообще говоря, различные множества вида (5.0.1). При каких условиях n-мерный б. д. закон, спектральная мера Леви которого сосредоточена на декартовом произведении $A_1 \times \ldots \times A_n$, будет принадлежать классу I_{0n}? Некоторые достаточные условия указаны в работе Л. З. Лившица [1].

9. Если $P \in I_{0n}$, то будет ли $P * P \in I_{0n}$?

10. Описать класс n-мерных ($n \geqslant 2$) законов, все проекции которых принадлежат I_0.

11. Можно ли в теореме 6.4.3 отказаться от требования, что спектральная мера Леви закона P вполне конечна?

К главе VII

1. Верна ли теорема 7.1.1 в многомерном случае?

2. Заменим в теореме 7.2.1 условие, что $\varphi(t)$ аналитична и не имеет корней в круге $|t| < R$, условием, что $\varphi(t)$ аналитична и не имеет корней в полосе $0 < \operatorname{Im} t < R$. Можно ли тогда утверждать, что функции $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, s$, аналитичны в той же полосе? Этот вопрос принадлежит Д. Дюге [4]. Если полоса имеет вид $(-\varepsilon) < \operatorname{Im} t < R$ $(\varepsilon > 0,\ R > 0)$, то утвердительный ответ легко следует из теоремы 7.2.1.

3. Каким условиям должно удовлетворять замкнутое множество $E \subset (0, \infty)$ для того, чтобы существовала х. ф. $\varphi(t) \neq 0$, $-\infty < t < \infty$, такая, что $(\varphi(t))^{\alpha}$ является х. ф. тогда и только тогда, когда $\alpha \in E$? Этот вопрос поставлен Д. Дюге [2].

4. Является ли в теореме 7.3.1 условие $\inf \alpha_j > 0$ необходимым? Если нет, то чем его можно заменить?

5. Развить теорию α-разложений для многомерных законов.

6. Дать описание класса I_0^{α}. Очевидно, $I_0^{\alpha} \subset I_0$, но не верно ли, что $I_0^{\alpha} = I_0$?

К главам VIII, IX *)

Уточнить, насколько это возможно, или получить точный порядок величины $\beta_r^{(G)}(\varepsilon)$, определенной в § 6 гл. VIII, для случаев:

1. G — стандартный нормальный закон, r — расстояние Леви.

2. G — закон Пуассона, r — равномерное расстояние или расстояние Леви.

3. G — композиция стандартного нормального закона и закона Пуассона.

Обзор полученных до сих пор результатов, относящихся к этим проблемам, дан в § 6 гл. VIII.

---

*) Составлено С. Г. Малошевским.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЛЕВИ — ХИНЧИНА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ КРЕЙНА — МИЛЬМАНА

1°. Теорема Крейна — Мильмана и ее простейшие применения

В настоящем п. 1° мы излагаем без доказательства известную теорему Крейна — Мильмана и ее простейшие применения (имея в виду изложить в п. 2° более глубокие применения). При этом изложение будет следовать книге Р. Фелпса [1].

Еще Г. Минковский доказал следующий результат. Пусть X — компактное выпуклое подмножество конечномерного векторного пространства. Крайней точкой множества X будем называть такую точку $y \in X$, которая обладает тем свойством, что если $y = \lambda z + (1 - \lambda) t$, где $\lambda \in [0, 1]$ — какое-либо число, $z \in X$, $t \in X$, то $z = t = x$. (Например, для выпуклого многогранника крайними точками будут его вершины, для шара — все точки его поверхности и т. п.) Множество крайних точек данного выпуклого компакта обозначается $\operatorname{ex}(X)$. Тогда для каждого x существует конечное число экстремальных точек $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in \operatorname{ex}(X)$; $i = 1, 2, \ldots, n$) и положительные числа $p_1, \ldots, p_n$, $p_i \in [0, 1]$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ и

$$x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i. \qquad (\text{П}.1.1)$$

Г. Каратеодори указал следующее усиление теоремы Г. Минковского.

Если X — компактное выпуклое подмножество k-мерного пространства R^k, то в представлении (П.1.1) каждой точки $x \in X$ через крайние число n крайних точек x_i может быть взято не превосходящим $k+1$:

$$n \leqslant k+1. \qquad (\text{П}.1.2)$$

Для дальнейшего удобно переформулировать эту теорему в терминах «представления интегралами». Рассмотрим борелеву σ-алгебру $\mathscr{B}$ на R^k и сопоставим каждой точке $y \in X$ вырожденную вероятностную меру ε_y, равную 1 на всяком множестве $A \in \mathscr{B}$ таком, что $y \in A$, и 0, если $y \notin A$. Возвращаясь к представлению (П.1.1), положим $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \varepsilon_{x_i}$; тогда P — вероятностная мера на X с носителем $(x_1, \ldots, x_n)$. Для любого непрерывного линейного функционала f на R^k имеем

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) = \int_X f P(dy). \qquad (\text{П}.1.3)$$

Это равенство, имеющее место для любых непрерывных линейных функционалов, мы будем описывать словами: «мера p представляет x». Такая постановка приводит к естественному обобщению. Пусть X — непустое компактное подмножество локально-выпуклого линейного топологического пространства E, а P — вероятностная мера на X (т. е. P — регулярная борелева мера с $P(X) = 1$). Будем говорить, что точка $x \in E$ представлена посредстгом P, если

$$f(x) = \int_X f P(dy)$$

для любого непрерывного функционала на E. Можно говорить также: «x есть центр тяжести P».

В частности, любая точка $x \in X$ тривиально представляется мерой ε_x. Далее, указанная выше теорема Г. Каратеодори показывает нам, что всякая точка x компактного выпуклого подмножества X конечномерного пространства R^k имеет представляющую вероятностную меру с носителем, состоящим из $k+1$ крайней точки X.

Сформулируем во введенной выше терминологии теорему Крейна — Мильмана.

Теорема Крейна — Мильмана. *Пусть в локально выпуклом линейном топологическом пространстве дано компактное выпуклое подмножество X. Тогда каждая точка $x \in X$ есть центр тяжести вероятностной меры, сосредоточенной на замыкании крайних точек X.*

По поводу доказательства этой теоремы в данной форме отсылаем читателя к книге Р. Фелпса [1]. При применении теоремы Крейна — Мильмана к различным частным случаям основную трудность представляет разыскание крайних точек и сосредоточенной на них вероятностной меры.

В виде примера изложим ниже, следуя Р. Фелпсу [1], одно из простейших аналитических приложений теоремы Крейна — Мильмана — применение ее к вполне монотонным функциям, а в дальнейшем выведем из нее важную формулу Леви — Хинчина из теории б. д. законов.

Вещественная функция $f(x)$, заданная на $(0, \infty)$, называется вполне монотонной, если она бесконечно дифференцируема и для ее производных $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ имеют место соотношения

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{П.1.4}$$

Таким образом, $f(x)$ и вообще $(-1)^n f^{(n)}(x)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ — неотрицательные и невозрастающие функции. Примерами таких функций могут служить $x^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ и $e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$.

Пусть μ — борелевская мера на $[0, \infty]$, $\alpha > 0$ — какое-либо число и $f(x)$ определяется формулой

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \mu(d\alpha). \tag{П.1.5}$$

Легко заметить, что $f(x)$ вполне монотонна, для чего надо применить дифференцирование под знаком интеграла. В 1914 г. С. Н. Бернштейн доказал обратное к указанному очевидному утверждению.

Теорема (С. Н. Бернштейн). *Если функция $f(x)$ вполне монотонна на $(0, \infty)$, то существует единственная борелевская мера μ на $[0, \infty)$ такая, что для любого $x > 0$ имеет место представление* (П.1.5).

Изложим вывод этой теоремы на основе теорем Крейна — Мильмана.

Функции $f(x)$ могут не быть ограниченными в окрестности 0 (например, функция $x^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$)); для сокращения изложения вывод будет сделан лишь для ограниченных функций ($f(+0) < \infty$). Пусть $\mathscr{K}$ — выпуклый конус всех ограниченных вполне монотонных функций $f(x)$. Пусть $K \subset \mathscr{K}$ — множество таких функций $f \in \mathscr{K}$, что $f(+0) \leqslant 1$; если $f \in \mathscr{K}$ и $f \neq 0$, то $\frac{f}{f(+0)} \in K$, так что достаточно доказать теорему для $f \in K$; очевидно, K — выпуклое множество. K содержится в пространстве E всех вещественных бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(0, \infty)$. Топология в этом пространстве может быть задана счетным множеством полунорм:

$$\rho_{m,n}(f) = \sup\left\{ |f^{(h)}(x)| : \frac{1}{m} \leqslant x \leqslant m;\ 0 \leqslant h \leqslant n \right\}$$

$$(m, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Такое пространство метризуемо, и каждое замкнутое и ограниченное подмножество E компактно. Множество K, как легко видеть, замкнуто в указанной выше топологии. Надо доказать, что оно ограничено в указанном выше смысле. Для этого достаточно доказать, что при любых m, n конечен $\sup\limits_{f \in K} \{\rho_{mn}(f)\}$, для чего в свою очередь достаточно показать, что

$$\sup_{f \in K}\left\{ |f^{(n)}(x)| : \frac{1}{m} \leqslant x \leqslant m \right\}$$

конечен при любых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 1$.

Пусть K_n — множество функций вида $(-1)^n f^{(n)}(x)$, где $f \in K$. Очевидно, $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0$. Мы покажем, что для любого $a > 0$

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \leqslant a^{-n} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{при} \quad x \in [a, \infty), \quad (\text{П.1.6})$$

что докажет наше утверждение. Мы будем действовать по индукции по индексу n множеств K_n. Функции из K_0 ограничены сверху единицей. Пусть соотношение (П.1.6) верно для чисел $\leqslant n$; перейдем к функциям из K_{n+1}. Применим теорему Лагранжа о среднем значении к функции $f^{(n)}(x)$ на сегменте $[a/2, a]$. Согласно этой теореме существует точка $c \in [a/2, a]$ такая, что $(a/2) f^{(n+1)}(c) =$

$= f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a/2)$. Далее, применим предположение индукции к точке $a/2$ и получим

$$(a/2)^{-n}\cdot 2^{n(n+1)/2} \geqslant (-1)^n f^{(n)}\left(\frac{a}{2}\right) =$$
$$= (-1)^n f^{(n)}(a) + (-1)^{n+1}\frac{a}{2} f^{(n+1)}(c) \geqslant$$
$$\geqslant (-1)^{n+1}\frac{a}{2} f^{(n+1)}(c) > \frac{a}{2}(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(a),$$

поскольку $(-1)^n f^{(n)}(a) \geqslant 0$. Отсюда

$$(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(a) \leqslant a^{-(n+1)}\cdot 2^{(n+1)(n+2)/2},$$

что и доказывает справедливость (П.1.6).

Итак, K замкнуто и ограничено и, согласно сказанному выше, является компактом в E. Теперь нужно описать $\operatorname{ex} K$ — множество крайних точек K.

Мы покажем, что крайними точками K являются все экспонентные функции

$$f(x) = e^{-\alpha x}; \qquad x > 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \infty, \qquad \text{(П.1.7)}$$

где полагаем $e^{-\infty x} = 0$.

Пусть $f \in \operatorname{ex} K$ и $x_0 > 0$; положим

$$u(x) = f(x + x_0) - f(x) f(x_0).$$

Докажем, что $f \pm u \in K$. Пусть $b = f(x_0)$ (так что $0 \leqslant b \leqslant 1$). Имеем, далее,

$$(f + u)(+0) = (1 - b) f(+0) + b \leqslant 1,$$
$$(f - u)(+0) = f(+0) - b(1 - f(+0)) \leqslant f(+0) \leqslant 1.$$

Далее,

$$(-1)^n (f + u)^{(n)}(x) = (1 - b)(-1)^n f^{(n)}(x) +$$
$$+ (-1)^n f^{(n)}(x + x_0) \geqslant 0,$$
$$(-1)^n (f - u)^{(n)}(x) = [(-1)^n f^{(n)}(x) -$$
$$- (-1)^n f^{(n)}(x + x_0) + b(-1)^n f^{(n)}(x)] \geqslant 0,$$

ибо $(-1)^n f^{(n)}(x)$ невозрастающая ограниченная функция. Итак, $f \pm u \in K$. Но, поскольку $f \in \operatorname{ex} K$, мы должны иметь $u \equiv 0$, т. е.

$$f(x + x_0) = f(x) f(x_0)$$

для любых положительных x и x_0.

Так как $f(x)$ непрерывна и неотрицательна, то из этого хорошо известного функционального уравнения следует, что $f \equiv 0$ либо $f(x) = e^{-\alpha x}$ для некоторого α. Так как $f'(x) < 0$, то $\alpha > 0$. Итак, все крайние точки K суть функции вида (П.1.7). Докажем и обратное включение.

По заданному положительному числу $r > 0$ рассмотрим преобразование T_r: $f(x) \to f(rx)$ компакта K в себя. Заметим, что T_r — взаимно однозначное преобразование (так что оно преобразует K на себя), и оно сохраняет соотношения, определяющие выпуклость, так что оно переводит ex K в себя.

Поскольку K есть выпуклый компакт, то он совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой ex K. Ввиду этого в ex K есть хотя бы одна функция, не являющаяся константой. Такая функция $f \in$ ex K, по доказанному, должна иметь вид $e^{-\alpha x}$ для некоторого $\alpha > 0$. Образ этой функции $T_r f = e^{-\alpha r x}$ — тоже крайняя точка. Так как это верно для любого $r > 0$ и так как $0 \in$ ex K и $1 \in$ ex K, то наше утверждение доказано.

Отсюда нетрудно перейти к доказательству теоремы С. Н. Бернштейна для ограниченных функций. Рассмотрим взаимно однозначное отображение T: $\alpha \to e^{-\alpha x}$ компактифицированной полупрямой $[0, \infty]$ в K. Это отображение непрерывно (полный прообраз открытого множества открыт). Поскольку $[0, \infty]$ есть компакт, то и его образ ex K есть компакт.

По теореме Крейна — Мильмана каждой точке $f \in K$ отвечает борелева мера m на ex K такая, что для любого непрерывного линейного функционала $L(f)$ имеем представление $L(f) = \int\limits_{\mathrm{ex}\,K} L(g)\, m(dg)$. При $x > 0$ функционал $L_x(f) = f(x)$ непрерывен на E. Поэтому

$$f(x) = \int\limits_{\mathrm{ex}\,K} L_x(g)\, m(dg).$$

Введем борелеву меру μ на $[0, \infty]$, полагая $\mu(A) = (mT)(A) = m(TA)$, $A \subset [0, \infty]$. Тогда имеем

$$f(x) = \int\limits_{\mathrm{ex}\,K} L_x(g) m(dg) = \int\limits_{T^{-1}\mathrm{ex}\,K} L_x(T\alpha)(mT)(d\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \mu(d\alpha)$$

для любого $x > 0$. Это и требовалось вывести.

Теперь докажем единственность меры μ. Пусть существует еще одна мера ν на $[0, \infty]$ такая, что

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\nu(d\alpha) \qquad (x>0).$$

Тогда имеем представление нуля:

$$0=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,(\nu-\mu)(d\alpha), \qquad x\in[0,\ \infty]. \qquad (\text{П}.1.8)$$

Рассмотрим кольцо с операцией умножения на константы, порождаемое всеми функциями вида $\alpha\to e^{-\alpha x}$, $\alpha\geqslant 0$, при $x\in[0,\ \infty]$ (мы полагаем $e^{-\infty\alpha}=0$ при $\alpha>0$). В этом кольце есть разделяющие элементы для любых двух различных точек. В силу теоремы Стоуна — Вейерштрасса любую непрерывную на $[0,\ \infty)$ функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to\infty$, можно равномерно приблизить на $[0,\ \infty]$ линейными комбинациями из функций нашего кольца. В результате из (П.1.8) мы выведем, что $\int_0^\infty f(\alpha)\,(\nu-\mu)\,(d\alpha)=0$ для всякой функции $f(\alpha)$ указанного типа, так что меры μ и ν совпадают.

2°. Доказательство формулы Леви — Хинчина

Дадим сводку свойств б. д. х. ф. Если $\Phi(u)$ — б. д. х. ф., $u\in R^1$, то

1) $\Phi(u)\neq 0$;

2) произведение конечного числа б. д. х. ф. есть б. д. х. ф.;

3) при любом $\tau\geqslant 0$ $(\Phi(u))^\tau$ есть б. д. х. ф.;

4) если $X(u)$ — произвольная х. ф., то $\tilde\Phi=\exp(X(u)-1)$ есть б. д. х. ф.;

5) если Φ_n $(n=1,2,\ldots)$ — б. д. х. ф. и $\Phi_n\to\Phi$ равномерно на компактах R^1, то Φ есть б. д. х. ф.;

6) полагая $\Phi_n=\Phi^{1/n}$, имеем $\Phi=\lim\limits_{n\to\infty}\exp n(\Phi_n-1)$ в смысле равномерной сходимости на компактах R^1.

Из свойства 1) следует, что $\varphi=\ln\Phi$ — непрерывная функция.

Основной теоремой теории б. д. законов является теорема Леви — Хинчина о представлении логарифма $\varphi(t)$ б. д. х. ф.

Теорема Леви — Хинчина. *Для того чтобы функция $\varphi(u)$ была б. д. х. ф., необходимо и достаточно, чтобы*

$$\ln\varphi(u) = i\gamma u + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{e^{iu\beta} - 1 - \frac{iu\beta}{1+\beta^2}\right\} \frac{1+\beta^2}{\beta^2} G(d\beta), \qquad (\text{П.1.9})$$

где γ — реальная постоянная, $G(\beta)$ — неубывающая функция ограниченной вариации; при $\beta = 0$ в подынтегральной функции следует брать предел при $\beta \to 0$.

Доказательство этой теоремы обычными аналитическими средствами можно найти в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1] (стр. 83—86). Для того чтобы понять эту теорему как следствие теоремы Крейна — Мильмана о крайних точках, приведем соответствующий вывод ее, следуя работе С. Иогансена [1]. Помимо выяснения связи теорем Крейна — Мильмана и Леви — Хинчина, эта работа содержит еще некоторые теоремы, интересные сами по себе.

Мы видим, что если предположить доказанной формулу Леви — Хинчина (П.1.9), то $\ln\varphi$ будет иметь представление, сходное с представлением положительно определенных функций согласно теореме Бохнера — Хинчина, и эта последняя теорема может быть выведена из теоремы Крейна — Мильмана (Кендалл [1]). Поэтому можно ожидать, что $\ln\varphi(u)$ обладает свойствами, сходными со свойствами положительно определенных функций. Это подтверждается следующей теоремой *) М. Г. Крейна [3].

Теорема П.1.1. *Непрерывная комплекснозначная функция $\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)}$, где $u \in R^1$, есть логарифм б. д. х. ф. тогда и только тогда, когда имеют место неравенства*

$$\sum_{u\in S}\sum_{v\in S} \varphi(u-v)\, h(u)\, \overline{h(v)} \geqslant 0 \qquad (\text{П.1.10})$$

---

*) Об этой теореме и ее обобщениях см. в книгах Н. И. Ахиезера [1], стр. 264—269, и И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [1], стр. 218—245.

для всех конечных подмножеств $S \subset R^1$ *и всех комплекснозначных функций* h *таких, что*

$$\sum_{u \in S} h(u) = 0. \tag{П.1.11}$$

Доказательство теоремы непосредственно выводится из следующей леммы.

Лемма П.1.1. *Пусть* φ — *любая комплекснозначная функция на* R^1 *такая, что* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)}$ *при* $u \in R^1$. *Пусть* h — *комплекснозначная функция на* R^1, S — *любое конечное множество из* R^1. *Тогда следующие три условия эквивалентны*:

1) $\sum\limits_{u \in S} \sum\limits_{v \in S} \exp(\lambda\varphi(u-v))\, h(u)\overline{h(v)} \geqslant 0$, $\forall (S, h)$ *и* $\forall \lambda \geqslant 0$;

2) $\sum\limits_{u \in S} \sum\limits_{v \in S} \varphi(u-v)\, h(u)\overline{h(v)} \geqslant 0$, $\forall (S, h)$ *под условием* $\sum\limits_{u \in S} h(u) = 0$;

3) $\sum\limits_{u \in S} \sum\limits_{v \in S} \{\varphi(u-v) - \varphi(u) - \varphi(-v)\}\, h(u)\overline{h(v)} \geqslant 0$, $\forall (S, h)$.

Для доказательства обозначим через A_i ($i = 1, 2, 3$) множества функций, удовлетворяющих соответственно условию i). Пусть $\varphi \in A_1$; покажем, что $\varphi \in A_2$, т. е. $A_1 \subset A_2$. В самом деле, если $\varphi \in A_1$, то $\lambda\varphi \in A_1$ ($\lambda \geqslant 0$); отсюда, если $\sum\limits_{u \in S} h(u) = 0$, имеем при $\lambda > 0$

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in S} \frac{\exp(\lambda\varphi(u-v)) - 1}{\lambda} h(u)\overline{h(v)} =$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} \frac{\exp \lambda\varphi(u-v)}{\lambda} h(u)\overline{h(v)} - \frac{1}{\lambda}\left|\sum_{u \in S} h(u)\right|^2 \geqslant 0,$$

так как двойная сумма неотрицательна в силу условия 1), а второй член равен 0.

Пусть теперь $\lambda \downarrow 0$. Из доказанного соотношения получим, что $\varphi \in A_2$.

Докажем, что $A_2 \subset A_3$. Рассмотрим условие 3) и такие конечные множества S, что $0 \notin S$. Положим $K = S \cup \{0\}$ и определим $k(u) = h(u)$, $u \in S$, $k(0) = -\sum\limits_{u \in S} h(u)$.

Пусть $\varphi \in A_2$ и (S, h) заменено на (K, k). Имеем

$$\sum_{u\in K}\sum_{v\in K}\varphi(u-v)\,k(u)\,\overline{k(v)}=$$

$$=\sum_{u\in S}\sum_{v\in S}\varphi(u-v)\,h(u)\,\overline{h(v)}-\sum_{u\in S}\varphi(u)\,h(u)\sum_{v\in S}\overline{h(v)}-$$

$$-\sum_{v\in S}\varphi(-v)\sum_{u\in S}h(u)\,\overline{h(v)}+\varphi(0)\Big|\sum_{u\in S}h(u)\Big|^2\geqslant 0.$$

Ввиду того, что $\varphi(0)=0$, получаем соотношение условия 3). Таким образом, $A_2\subset A_3$.

Пусть теперь $\varphi\in A_3$; будем доказывать, что $\varphi\in A_1$. Возьмем конечное множество $S=\{u_1, \ldots, u_n\}$ и определим матрицу $A=\|A_{ij}\|$, где

$$A_{ij}=\varphi(u_i-u_j)-\varphi(u_i)-\varphi(-u_j),\quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Свойство 3) показывает, что эта матрица эрмитова неотрицательно определенная. Ввиду этого, как известно из высшей алгебры, существует матрица $C=\|C_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, такая, что $C\overline{C}^T=I$ (где I — единичная матрица и T — знак транспонирования матриц), которая переводит A в диагональную матрицу с собственными значениями $\lambda_v\geqslant 0$ $(v=1, \ldots, n)$. Таким образом,

$$A_{ij}=\sum_{v=1}^{n}\lambda_v C_{iv}\overline{C_{jv}}\qquad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

По определению A_{ij} и в силу свойств φ имеем

$$\varphi(u_i-u_j)=\varphi(u_i)+\overline{\varphi(u_j)}+\sum\lambda_v C_{iv}\overline{C_{jv}}\quad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Для доказательства того, что $\varphi\in A_1$, составим сумму

$$\sum_{u\in S}\sum_{v\in S}\exp[\lambda\varphi(u-v)]\,h(u)\,\overline{h(v)}.$$

Полагая $c_i=h(u_i)\exp\lambda\varphi(u_i)$, $i=1, \ldots, n$, найдем, что написанная здесь двойная сумма равна

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\Big(\sum_{v=1}^{n}\lambda\lambda_v C_{iv}\overline{C_{jv}}\Big)\,c_i\overline{c_j}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\lambda_1)^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{(\lambda\lambda_n)^{k_n}}{k_n!}\times$$

$$\times \sum_{i,\, j=1}^{n} C_{i1}^{k_1} C_{i2}^{k_2} \ldots C_{in}^{k_n} \overline{C}_{j1}^{k_1} \ldots \overline{C}_{jn}^{k_n} c_i \overline{c}_j =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i C_{i_1}^{k_1} \ldots C_{in}^{k_n} \right|^2 \cdot \frac{(\lambda\lambda_1)^{k_1}}{k_1!} \ldots \frac{(\lambda\lambda_n)^{k_n}}{k_n!} \geqslant 0.$$

Итак, $A_3 \subset A_1$.

Далее, легко замечаем, что $A_3 \subset A_2$. Ибо при условии $\sum\limits_{u \in S} h(u) = 0$ члены, содержащие $\varphi(u)$ и $\varphi(-v)$, исчезают, и из условия 3) следует 2).

Итак, имеем включения $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_2$, $A_3 \subset \subset A_1$, откуда следует, что $A_1 = A_2 = A_3$.

Заметим, что в доказательстве соотношения $A_2 \subset A_3$ мы не использовали свойства $\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)}$. Кроме того, легко видеть, что при $\sum\limits_{u \in S} h(u) = 0$ 3) сводится к 2), так что $A_3 \subset A_2$. Таким образом, $A_2 = A_3$, даже если условие $\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)}$ не выполнено.

Для дальнейшего нам нужно будет доказать несколько простых лемм, относящихся к функциям непрерывным, удовлетворяющим условию $\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)}$ и условию (П.1.10). Множество этих функций обозначим через Q.

Лемма П.1.2. *Если $\varphi \in Q$, то функция ψ, определенная равенством*

$$(u) = a\varphi(bu) + icu + d,\ a \geqslant 0,\ b \in R^1,\ c \in R^1,\ d \in R^1,$$

также принадлежит Q.

Доказательство непосредственно следует из определения Q.

Пусть теперь $Q_0 = \{\varphi\colon \varphi \in Q,\ \varphi(0) = 0\}$. Для любой $\varphi \in Q$ получим функцию из Q_0, вычитая $\varphi(0)$. Пусть теперь f и g — реальные непрерывные функции такие, что $\varphi(u) = f(u) + ig(u)$.

Лемма П.1.3. *Если φ непрерывна и удовлетворяет* (П.1.10), *то существуют реальные числа a и b такие, что*

$$\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)} + au + ib.$$

Доказательство. Из замечания в конце доказательства леммы П.1.1 следует, что условия 2) и 3) эквивалентны для $\varphi(u)$. Ввиду этого для любого конечного множества $S \in R^1$ квадратная матрица с элементами

$$\{\varphi(u-v)-\varphi(u)-\varphi(-v)+\varphi(0);\ u \in S,\ v \in S\}$$

положительно определенная и потому эрмитова. Отсюда имеем

$$\varphi(u-v)-\varphi(u)-\varphi(-v)+\varphi(0)=$$
$$=\overline{\varphi(v-u)}-\overline{\varphi(-u)}-\overline{\varphi(v)}+\overline{\varphi(0)}.$$

Пусть ψ определяется как $\psi(u)=\varphi(u)-\overline{\varphi(-u)}$; тогда $\psi(u)=-\overline{\psi(-u)}$ и $\psi(u-v)-\psi(u)-\psi(-v)+\psi(0)=0$, т. е. для непрерывной функции ψ имеем известное функциональное уравнение, из которого легко следует наш результат.

Лемма П.1.4. *Если $\varphi \in Q$ и $\psi(u)$ определяются равенством*

$$\psi(u)=\sum_{s\in T}\sum_{t\in T}\varphi(u-s+t)\,k(s)\,\overline{k(t)},$$

где $T \subset R^1$ — конечное множество, k — комплекснозначная функция, то $\psi(u)$ также принадлежит Q.

Доказательство. Пусть S — конечное подмножество R^1 и h — комплекснозначная функция такая, что $\sum\limits_{u\in S} h(u)=0$. Определим $h(u)$ как 0, если $u \bar{\in} S$. Тогда имеем

$$\sum_{u\in S}\sum_{v\in S}\psi(u-v)\,h(u)\,\overline{h(v)}=$$
$$=\sum_{s\in T}\sum_{t\in T}\Bigl(\sum_{u'\in S-s}\ \sum_{v'\in S-t}\varphi(u'-v')\,h(u'+s)\,\overline{h(v'+t)}\Bigr)\,k(s)\,\overline{k(t)},$$

где $S-s$ — конечное множество, полученное из S арифметическим вычитанием элемента $s \in T$; аналогично определяется $S-t$.

Если при фиксированных элементах u', v' будем суммировать по s, t, то получим выражение

$$\varphi(u'-v')\,c(u')\,\overline{c(v')},\quad \text{где}\quad c(u')=\sum_{s\in T}k(s)\,h(u'+s).$$

Далее,

$$\sum_{(u')}c(u')=\sum_{s\in T}k(s)\sum_{u\in S}h(u)=0,$$

Ввиду этого

$$\sum_{(u',\, v')} \varphi(u'-v')\, c(u')\, \overline{c(v')} \geqslant 0,$$

что и доказывает требуемое.

Следствие. *Если* $\varphi \in Q$, *то функции, определяемые соотношениями*

$$\psi_{\theta,\,\varepsilon,\,\alpha}(u) = \varphi(u) + \varepsilon\,(e^{-i\theta}\varphi(u+\alpha) + e^{i\theta}\varphi(u-\alpha)),$$

где $-{}^1/_2 \leqslant \varepsilon \leqslant {}^1/_2$, $\theta \in R^1$, $\alpha \in R^1$, *также принадлежат* Q.

Для доказательства выберем в лемме П.1.4 $T = \{0, \alpha\}$, $k(0) = 1$, $k(\alpha) = \lambda e^{i\theta}$; тогда будем иметь:

$$\psi(u) = \varphi(u) + \lambda e^{i\theta}\varphi(u-\alpha) + \lambda e^{-i\theta}\,\varphi(u+\alpha) + \lambda^2\varphi(u)$$

есть элемент Q. Разделим $\psi(u)$ на $1+\lambda^2$ и используем соотношение $\frac{|\lambda|}{1+\lambda^2} \leqslant {}^1/_2$. Тогда получим требуемое выражение $\psi_{\theta,\varepsilon,\alpha}(u)$.

Лемма П.1.5. *Если* $\varphi \in Q_0$, *то*

$$|\varphi(u-v) - \varphi(u) - \varphi(-v)|^2 \leqslant 4f(u)\, f(v),$$

где, как и ранее, положено $f(u) = \operatorname{Re}\varphi(u)$.

Для доказательства возьмем в свойстве 3) леммы П.1.1

$$S = \{u,\ \ v\},\quad h(u) = x_1,\quad h(v) = x_2 e^{i\theta},\quad x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi;$$

получим

$$2\operatorname{Re}\{(\varphi(u-v) - \varphi(u) - \varphi(-v))\, x_1 x_2\, e^{-i\theta}\} - \\ - 2f(u)\, x_1^2 - 2f(v)\, x_2^2 \geqslant 0,$$

откуда, выбирая надлежащим образом θ, имеем

$$-f(u)\, x_1^2 - f(v)\, x_1^2 - |\varphi(u-v) - \varphi(u) - \varphi(-v)|\, x_1 x_2 \geqslant 0.$$

Отсюда выводим:

$$f(u) \leqslant 0, \quad u \in R^1, \tag{П.1.12}$$

и

$$4f(u)\, f(v) \geqslant |\varphi(u-v) - \varphi(u) - \varphi(-v))|^2. \tag{П.1.13}$$

Следствие леммы П.1.5. *Если* $\varphi \in Q_0$ *и* $f(u_n) = 0$ *для какой-либо последовательности* $\{u_n;\ n \geqslant 1\}$ *такой, что* $u_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $\varphi(u) = iau$ *для некоторого* $a \in R^1$.

Из леммы П.1.5 следует соотношение

$$\varphi(u_n+v)=\varphi(u_n)+\varphi(v),\quad \forall\, v\in R^1. \tag{П.1.14}$$

В частности, при целом k имеем $\varphi(ku_n)=k\varphi(u_n)$. Для любого $u\in R^1$ найдется последовательность целых чисел k_n такая, что $k_nu_n\to u$ $(n\to\infty)$. В силу (П.1.14) имеем

$$\varphi(u+v)=\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\varphi(k_nu_n+v)=\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}k_n\varphi(u_n)+\varphi(v)=$$
$$=\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\varphi(k_nu_n)+\varphi(v)=\varphi(u)+\varphi(v).$$

Решая функциональное уравнение $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$, получаем наше утверждение.

Лемма П.1.6. *Если* $\varphi\in Q_0$, *то*

1°. $n^2f(u)\leqslant f(nu)\leqslant 0,\quad n\geqslant 1,\ u\in R^1$;

2°. $|g(nu)-ng(u)|\leqslant -n(n-1)f(u),\quad n\geqslant 1,\ u\in R^1$.

Доказательство. 1°. Правое неравенство следует из (П.1.12). Из следствия леммы П.1.4, полагая $\theta=0$, $\varepsilon=-{}^1/_2$, находим, что функция

$$\varphi_1(u)=\varphi(u)-\frac{1}{2}(\varphi(u+\alpha)+\varphi(u-\alpha)-\varphi(\alpha)-\varphi(-\alpha))$$

принадлежит Q_0. Отсюда $2\operatorname{Re}\varphi_1(u)=\varphi_1(u)+\varphi_1(-u)\leqslant\leqslant 0$, т. е.

$$f(u+\alpha)-f(u)\geqslant f(u)-f(u-\alpha)+2f(\alpha).$$

Положим здесь $u=n\alpha$, тогда

$$f[(n+1)\alpha]-f(n\alpha)\geqslant f(n\alpha)-f[(n-1)\alpha]+2f(\alpha).$$

Дважды суммируя по n, получаем нужный результат.

2°. Из упомянутого выше следствия леммы П.1.4 выводим, полагая $\theta=\pi/2$, что функция φ_2, определенная равенством

$$\varphi_2(u)=\varphi(u)-\frac{i}{2}(\varphi(u+\alpha)-\varphi(u-\alpha)-\varphi(\alpha)+\varphi(-\alpha)),$$

принадлежит Q_0, так что $2\operatorname{Re}\varphi_2(u)=\varphi_2(u)+\varphi_2(-u)\leqslant\leqslant 0$. Отсюда, вспоминая, что $\varphi(u)=f(u)+ig(u)$, где $f(u)$ и $g(u)$ реальны, находим

$$g(\alpha+u)-g(\alpha)\leqslant g(\alpha)-g(\alpha-u)-2f(u).$$

Далее полагаем $\alpha=nu$ и дважды суммируем по n.

Введем теперь два определения. Будем говорить, что $\varphi\in Q$ вырождена, если $f(u)\equiv f(0)$, т. е. если у нее постоянная реальная часть. Далее, будем говорить, что $\varphi_1 \in Q$ и $\varphi_2 \in Q$ принадлежат к одному типу, если существуют $a > 0$, $b \in R^1$, $c \in R^1$ такие, что $\varphi_2(u) = a\varphi_1(u) + ibu + c$. Теперь определим K следующим образом:

$$K = \left\{\varphi \in Q:\ \varphi(0) \leqslant 0,\quad \int_0^1 \varphi(u)\,du = -1\right\}.$$

Лемма П.1.7. *Для любой невырожденной $\varphi \in Q$ найдется $\varphi_1 \in Q_0 \cap K$ того же типа, что и φ.*

Доказательство. В силу леммы П.1.2 всегда можно найти функцию φ_0 того же типа, что и φ, такую, что $\varphi_0(0) = 0$. Пусть $\int_0^1 \varphi_0(u)\,du = A + iB$. Поскольку φ_0 невырождена, неравенство (П.1.12) дает $A < 0$. Положим

$$\varphi_1(u) = -\frac{1}{A}(\varphi_0(u) - 2iuB).$$

Легко проверить, что $\int_0^1 \varphi_1(u)\,du = -1$; мы видим, что $\varphi_1(u) \in K$. Заметим, что K — выпуклое множество. Перейдем к нахождению крайних точек K.

Теорема П.1.2. *Крайние точки K содержатся среди следующих функций:*

1) $\tilde{\varphi}(u) \equiv -1$;

2) $\varphi_0(u) = -3u^2$;

3) $$\varphi_\beta(u) = \left(e^{iu\beta} - 1 - iu\beta\,\frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right)^{-1}.$$
$$\beta \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in K$. Из (П.1.12) следует, что $f(u) - f(0) \leqslant 0$. Интегрируя это неравенство от 0 до 1 и учитывая, что $\int_0^1 \varphi(u)\,du = -1$, находим $-1 - f(0) \leqslant 0$, $f(0) \geqslant -1$.

Пусть теперь $\lambda = -\varphi(0)$. Если $\lambda \in (0, 1)$, то

$$\varphi(u) = (1-\lambda)\frac{\varphi(u) - \varphi(0)}{1-\lambda} + \lambda\cdot(-1).$$

Имеем $-1 \in K$, $(\varphi(u) - \varphi(0))/(1-\lambda) \in K$. Если φ — крайний элемент, то из предыдущего равенства выводим, что $\lambda = 1$ или $\lambda = 0$. В первом случае находим $\varphi(0) = -1$, $\int\limits_0^1 (\varphi(u) - \varphi(0))\,du = -1 + 1 = 0$; но в силу (П.1.12) имеем $f(u) - f(0) \leqslant 0$, так что $f(u) \equiv f(0) = -1$. Тогда по следствию леммы П.1.5 $\varphi(u) - \varphi(0) = iau$ для некоторого $a \in R^1$, и так как $\varphi \in K$, то $\varphi \equiv -1$. Во втором случае будем рассуждать следующим образом. Для каждого $\alpha \in R^1$ и $\varepsilon \in [0, 1/2]$ определим $\psi^{\pm}_{\alpha,\varepsilon}$ посредством равенства

$$\psi^{\pm}_{\alpha,\varepsilon}(u) = \varphi(u) \pm \\ \pm \varepsilon(\varphi(u+\alpha) + \varphi(u-\alpha) - \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)).$$

Эти функции принадлежат Q_0; далее, очевидно, $\operatorname{Re}\int\limits_0^1 \psi^{\pm}_{\alpha,0}(u)\,du = -1$. Ввиду этого при достаточно малых значениях ε функция $\psi_{\alpha,\varepsilon}$ должна быть невырожденной.

Пусть $\varphi^{\pm}_{\alpha,\varepsilon}$ — элемент $Q_0 \cap K$ того же типа, что и $\psi^{\pm}_{\alpha,\varepsilon}$. Поскольку $\varphi = 1/2\,(\psi^{+}_{\alpha,\varepsilon} + \psi^{-}_{\alpha,\varepsilon})$, то мы должны иметь $\varphi = \lambda\varphi^{+}_{\alpha,\varepsilon} + (1-\lambda)\,\varphi^{-}_{\alpha,\varepsilon}$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$. Но φ — крайняя точка, так что должно быть $\varphi = \varphi^{+}_{\alpha,\varepsilon} = \varphi^{-}_{\alpha,\varepsilon}$. Из этих равенств, приведя подобные члены, получим

$$A(\alpha)\,\varphi(u) = \varphi(u+\alpha) + \varphi(u-\alpha) - \\ - \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha) - 2iuB(\alpha), \qquad (\text{П}.1.15)$$

где $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ зависят только от α и реальны. Беря реальную часть (П.1.15), получим

$$A(\alpha)\,f(u) = f(u+\alpha) + f(u-\alpha) - 2f(\alpha). \qquad (\text{П}.1.16)$$

Переставляя α и u и вычитая полученные уравнения, найдем соотношение

$$(A(\alpha) - 2)\,f(u) = (A(u) - 2)\,f(\alpha). \qquad (\text{П}.1.17)$$

Будем различать два случая.

1°. $A(\alpha) \equiv 2$. Уравнение (П.1.16) переходит в уравнение

$$f(u+\alpha)+f(u-\alpha)-2f(\alpha)-2f(u)=0.$$

В силу изложенного в книге Я. Ацеля [1] любое четное и непрерывное его решение при условии $f(0)=0$ есть $f(u)=Bu^2$, где B — константа. Условие $\int_0^1 f(u)\,du = -1$ дает $B=-3$, $f(u)=-3u^2$.

2°. Существует α_0 такое, что $A(\alpha_0) \neq 2$. Тогда имеем из (П.1.17)

$$f(u)=\frac{f(\alpha_0)}{A(\alpha_0)-2}(A(u)-2)=c(A(u)-2). \qquad (\text{П.1.18})$$

При этом $c \neq 0$, ибо иначе имели бы $\int_0^1 f(u)\,du = 0$. Подставляя (П.1.17) в (П.1.16), найдем

$$A(\alpha)A(u)=A(u+\alpha)+A(u-\alpha). \qquad (\text{П.1.19})$$

Это функциональное уравнение лишь несущественно отличается от уравнения Даламбера (см. Я. Ацель [1]). Именно, полагая $\varphi(u)=A(u)/2$, придем к уравнению Даламбера

$$2\varphi(\alpha)\varphi(u)=\varphi(u+\alpha)+\varphi(u-\alpha).$$

Непрерывные решения $A(u)$ уравнения (П.1.19) под условием $A(u) \not\equiv 2$ будут иметь вид

$$A(u)=0, \quad A(u)=2\cos\beta u,$$
$$A(u)=2\,\mathrm{ch}\,\beta u, \qquad \beta \neq 0,\ \beta \in R^1.$$

Подставляя в (П.1.18), получим

$$f(u)=-2c, \quad f(u)=2c(\cos\beta u-1),$$
$$f(u)=2c(\mathrm{ch}\,\beta u-1),$$

где $\beta \neq 0$. Решение $f(u)=-2c$ не годится, поскольку $f(0)=0$ и $c \neq 0$. Рассмотрим решение $f(u)=2c(\mathrm{ch}\,\beta u-1)$. Здесь $c<0$. Согласно лемме П.1.6 должно выполняться неравенство $0 \geqslant f(nu) \geqslant n^2 f(u)$. Полагая $n=2$ и выбирая u достаточно большим, видим, что оно нарушается для $f(u)=2c(\mathrm{ch}\,\beta u-1)$ при $\beta \neq 0$ и $c<0$; стало быть, такое решение отпадает.

Остается решение $f(u) = 2c(\cos\beta u - 1)$, $\beta \neq 0$. Условие $\int\limits_0^1 f(u)\,du = -1$ дает нам

$$f(u) = (\cos\beta u - 1)\left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right)^{-1}, \qquad \beta \neq 0,\ \beta \in R^1,\ u \in R^1$$

Теперь нам надо найти $g(u)$. Беря мнимые части в (П.1.15). находим

$$A(\alpha)\,g(u) = g(u+\alpha) + g(u-\alpha) - 2uB(\alpha). \qquad (\text{П.1.20})$$

1°. Пусть $A(\alpha) = 2$. Тогда из (П.1.20) получаем

$$2g(u) = g(u+\alpha) + g(u-\alpha) - 2uB(\alpha). \qquad (\text{П.1.21})$$

Ввиду непрерывности $g(u)$ функция $B(\alpha)$ является также непрерывной. Непрерывные решения $g(u)$ уравнения (П.1.21) являются полиномами. По лемме П.1.6 (неравенство 2°) они являются полиномами степени не выше 2; следовательно, $B(\alpha)$ — линейная функция. Из (П.1.21) видим, что $B(0) = 0$, так что $B = B_0\alpha$. Поскольку $g(0) = 0$, можем положить $g(u) = au^2 + bu$, $a \in R^1$, $b \in R^1$. Подставляя это выражение в (П.1.21) и сравнивая коэффициенты при α^2, находим, что $a = 0$ и, таким образом, $g(u) = bu$.

Поскольку $\int\limits_0^1 g(u)\,du = 0$, имеем $b = 0$. Итак, возможной крайней точкой K является $\varphi(u) = -3u^2$.

2°. Пусть $A(\alpha_0) \neq 2$. Тогда $A(\alpha) = 2\cos\beta\alpha$ для некоторого $\beta \neq 0$. Положим в (П.1.20) $\alpha = \pi/(2\beta)$ и $u = \pm\alpha + \pi/(2\beta)$, тогда

$$g(\pm\alpha + \pi/\beta) \pm g(\alpha) = 2(\pm\alpha + \pi/(2\beta))\,B(\pi/(2\beta)). \qquad (\text{П.1.22})$$

Положим $u = \pi/\beta$ в (П.1.20) и используем (П.1.22); получим $B(\alpha) = c_0(1 - \cos\beta\alpha)$ для $c_0 = \beta/\pi$, $\alpha \in R^1$.

Полагая $\alpha = t + \pi/(2\beta)$ и $u = \pi/(2\beta)$ в (П.1.20) и используя соотношение (П.1.22), найдем $g(u) = a\sin\beta u + bu$ для некоторых $a \in R^1$, $b \in R^1$. Поскольку $\int\limits_0^1 g(u)\,du = 0$, должны иметь

$$g(u) = c_1\left(\sin\beta u - \beta u\,\frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right)^{-1}.$$

Далее, применим неравенство 2° леммы П.1.6 при $n=2$; учитывая найденное ранее значение $f(u)$, найдем

$$|g(2u)-2g(u)|\leqslant -2f(u)=2(1-\cos\beta u)\left(1-\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^{-1},$$

откуда

$$|c_1|\,|\sin 2\beta u-2\sin\beta u|\leqslant 2(1-\cos\beta u),$$

или

$$|c_1|\,|2\sin\beta u|\,(1-\cos\beta u)\leqslant 2(1-\cos\beta u),$$

откуда $|c_1|\leqslant 1$.

Если φ — крайняя точка, должны иметь $c_1=1$ или $c_1=-1$. Но $\varphi(u)$, отвечающая значению $c_1=-1$ и заданному β, та же, что и при $c_1=1$ и значении $(-\beta)$. Поэтому в случае 2° получаем возможные крайние точки K в виде

$$\varphi_\beta(u)=\left(e^{i\beta u}-1-i\beta u\,\frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^{-1},\qquad \beta\neq 0.$$

Это и доказывает теорему П.1.2.

Т е о р е м а П.1.3. *Все точки, перечисленные в теореме* П.1.2, *являются крайними точками* K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $\tilde\varphi=\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2$, $\varphi_1\in K$, $\varphi_2\in K$, $\lambda\in(0,1)$, $\tilde\varphi\equiv -1$. Отсюда $0=\lambda[\operatorname{Re}\varphi_1(u)-\operatorname{Re}\varphi_1(0)]+(1-\lambda)[\operatorname{Re}\varphi_2(u)-\operatorname{Re}\varphi_2(0)]$. Из (П.1.12), заключаем, что $\operatorname{Re}\varphi_j(u)\equiv\operatorname{Re}\varphi_j(0)$, откуда в силу условия $\int_0^1\varphi_j(u)\,du=-1$ получим $\operatorname{Re}\varphi_j(u)\equiv -1$ $(j=1,2)$. По следствию из леммы П.1.5 $\varphi_j(u)-\varphi_j(0)=iau$; так как $\varphi_j(u)\in K$, то $\varphi_j(0)=\operatorname{Re}\varphi_j(0)=-1$, $\int_0^1\varphi_j(u)\,du=-1$, откуда $a=0$, $\varphi_j(u)\equiv -1$. Поэтому $\tilde\varphi$ — крайняя точка K.

2. Рассмотрим $\varphi_0(u)=-3u^2$. То, что это — крайняя точка K, можно вывести из изложенной выше теоремы Г. Крамера о разложении нормального закона (теорема 3.1.4). Однако это можно сделать и непосредственно следующим образом.

Пусть $\varphi_0=\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2$, $\lambda\in(0,1)$, $\varphi_1\in K$, $\varphi_2\in K$. Полагая $u=0$, видим, что $\lambda\varphi_1(0)+(1-\lambda)\varphi_2(0)=0$; так как $\operatorname{Re}\varphi_j(0)\leqslant 0$ $(j=1,2)$, то $\operatorname{Re}\varphi_j(0)=0$, $\varphi_j(0)=0$ $(j=1,2)$. Таким образом, $\varphi_1\in Q_0$, $\varphi_2\in Q_0$.

Из неравенства 1° леммы П.1.6 имеем

$$-3n^2u^2 = f_0(nu) = \lambda f_1(nu) + (1-\lambda) f_2(nu) \geqslant$$
$$\geqslant n^2(\lambda f_1(u) + (1-\lambda) f_2(u)) =$$
$$= n^2 f_0(u) = -3n^2u^2.$$

Далее, $f_j(u) \leqslant 0$, $f_j(nu) \geqslant n^2 f_j(u)$. Отсюда следует, что $f_j(nu) = n^2 f_j(u)$ и $f_j(u) = Au^2$, $A \in R^1$. Так как $\int\limits_0^1 f_1(u)\,du = -1$, то $A = -3$ и $f_1(u) = -3u^2 = f_0(u)$. Далее, мы видели, что если $f_1(u) = -3u^2$, то $g_1(u) = 0$. Отсюда $\varphi_1 = \varphi_0 = \varphi_2$, и φ_0 — крайняя точка.

3. Перейдем к функциям $\varphi_\beta(u)$, $\beta \neq 0$, и докажем, что это — крайние точки. Это можно вывести из теоремы Д. А. Райкова о разложениях закона Пуассона (теорема 5.1.2), но мы проведем здесь непосредственное доказательство.

Для каждого $\alpha \in R^1$, $\beta \in R^1$ пусть L — линейное отображение, определенное на K формулой

$$(L\varphi)(u) = 2\varphi(u) - [e^{-i\alpha\beta}(\varphi(u+\alpha) - \varphi(\alpha)) +$$
$$+ e^{i\alpha\beta}(\varphi(u-\alpha) - \varphi(-\alpha))] - 2\varphi(0).$$

Из следствия леммы П.1.4 выводим, что $L\varphi \in Q_0$; из леммы П.1.6 видим, что $\operatorname{Re}(L\varphi)(u) \leqslant 0$. Далее, замечаем, что $\operatorname{Re}(L\varphi_\beta) \equiv 0$.

Пусть $\varphi_\beta = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$, $\lambda \in (0, 1)$, $\varphi_1 \in K$, $\varphi_2 \in K$. При $u = 0$ получаем тем же способом, как и ранее, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Замечаем, что

$$(\cos\beta u - 1)(1-\beta^{-1}\sin\beta)^{-1} = (\operatorname{Re}\varphi_\beta)(u) =$$
$$= \lambda(\operatorname{Re}\varphi_1)(u) + (1-\lambda)(\operatorname{Re}\varphi_2)(u) \leqslant 0.$$

Возьмем $u = \frac{2\pi}{\beta}$; тогда имеем

$$\operatorname{Re}\varphi_1\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = \operatorname{Re}\varphi_2\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = 0.$$

Отсюда по лемме П.1.5 при $v = -\frac{2\pi}{\beta}$, учитывая, что $\varphi_j(-v) = \overline{\varphi_j(v)}$, находим

$$\varphi_j\left(u + \frac{2\pi}{\beta}\right) = \varphi_j(u) + \varphi_j\left(\frac{2\pi}{\beta}\right). \tag{П.1.23}$$

Далее, имеем

$$0 \equiv \operatorname{Re} L\varphi_\beta = \lambda_1 \operatorname{Re} L\varphi_1 + (1-\lambda) \operatorname{Re} L\varphi_2 \leqslant 0.$$

Отсюда $\operatorname{Re} L\varphi_j \equiv 0$. Далее, $L\varphi_j \in Q_0$ и по следствию из леммы П.1.5 существуют $a_j = a_j(\alpha) \in R^1$, такие, что

$$L\varphi_j(u) = 2ia_j(\alpha)\, u. \qquad \text{(П.1.24)}$$

Далее, $\varphi_j \in K$, так что $\varphi_j(0) \leqslant 0$, $\operatorname{Im} \varphi_j(0) = 0$ и $\varphi_j(0) = 0$. Из (П.1.24) и определения $L\varphi$ выводим уравнение

$$\varphi_j(u) - {}^1/_2 [e^{-i\alpha\beta}(\varphi_j(u+\alpha) - \varphi_j(\alpha)) + \\ + e^{i\alpha\beta}(\varphi_j(u-\alpha) - \varphi_j(-\alpha))] = ia_j(\alpha)\, u \qquad \text{(П.1.25)}$$

при всех $\alpha \in R^1$, $u \in R^1$. Сначала найдем $a_j(\alpha)$. Положив в (П.1.25) $u = \pi/\beta$, получим

$$\varphi_j(\pi/\beta) - {}^1/_2 [e^{-i\beta\alpha}\varphi_j(\pi/\beta+\alpha) + e^{i\beta\alpha}\varphi_j(\pi/\beta-\alpha) - \\ - e^{-i\beta\alpha}\varphi_j(\alpha) - e^{i\beta\alpha}\varphi_j(-\alpha)] = ia_j(\alpha)\, \pi/\beta.$$

Положим далее $\varphi_j = f_j + ig_j$.

Возьмем мнимые части обеих сторон; используя (П.1.23), получим

$$g_j(\pi/\beta) - {}^1/_2 \cos(\beta\alpha)\, g_j(2\pi/\beta) = a_j(\alpha)\, \pi/\beta.$$

Наконец, из (П.1.23) находим, что $g_j\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = \frac{1}{2} g_j\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)$, откуда

$$a_j(\alpha) = \frac{\beta}{2\pi} g_j\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)(1-\cos\beta\alpha) = c_j(1-\cos\beta\alpha).$$

Пусть теперь ψ_j определено так:

$$\psi_j(u) = e^{-iu\beta}(\varphi_j(u) - ic_j u).$$

Тогда $\psi_j(0) = \psi_j\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = 0$ и $\psi_j(u) = \overline{\psi_j(-u)}$. Функции ψ_j удовлетворяют уравнению

$$\psi_j(u) - \frac{1}{2}(\psi_j(u+\alpha) + \psi_j(u-\alpha) - \\ - (\psi_j(\alpha) + \psi_j(-\alpha))\, e^{-i\beta u}) = 0. \qquad \text{(П.1.26)}$$

Положим $\psi_j = p_j + iq_j$; имеем

$$p_j(u) - \frac{1}{2}(p_j(u+\alpha) + p_j(u-\alpha) - 2p_j(\alpha)\cos\beta u) = 0. \quad (\text{П}.1.27)$$

Переставим α и u и вычтем полученное уравнение из (П.1.27); получим

$$p_j(u)(1 - \cos\beta\alpha) = p_j(\alpha)(1 - \cos\beta u).$$

Отсюда $p_j(u) = c_j'(1 - \cos\beta u)$ для некоторого $c_j' \in R^1$. Из (П.1.26) выводим, что

$$q_j(u) - \frac{1}{2}(q_j(u+\alpha) + q_j(u-\alpha)) = c_j'(1 - \cos\beta\alpha)\sin\beta u.$$

Частным решением здесь будет $q_j(u) = c_j' \sin\beta u$; отсюда полным решением будет $q_j(u) = c_j' \sin\beta u + a_j u$ для некоторого $a_j \in R^1$. Далее, $q_j(2\pi/\beta) = 0$, так что $a_j = 0$, и решением (П.1.26) будет $\psi_j(u) = c_j'(1 - e^{-i\beta u})$. Отсюда имеем

$$\varphi_j(u) = c_j'(e^{i\beta u} - 1) + ic_j u.$$

Но $\varphi_j \in K$, так что получится $\varphi_1 = \varphi_\beta$, $\varphi_2 \equiv 0$ или наоборот (см. доказательство теоремы П.1.2).

Мы нашли крайние точки K и теперь можем приступить к выводу теоремы Леви — Хинчина на основе теоремы Крейна — Мильмана.

Мы покажем сперва, что множество K компактно в подходящей топологии. Но для этого нам будут нужны несколько лемм, показывающих, что функции из K равномерно мажорируются функцией $c(1 + t^2)$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Лемма П.1.8. *Если $\varphi \in K$ и $\varphi(0) = 0$, то $|f(t)| \leqslant c(1 + t^2)$ для некоторой абсолютной постоянной $c > 0$.*

Доказательство. Из неравенства

$$f(u) + \frac{1}{2}(f(u+\alpha) + f(u-\alpha) - 2f(\alpha)) \leqslant 0$$

(см. доказательство теоремы П.1.2) выводим:

$$f(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}(f(u+\alpha) + f(u-\alpha)) + f(u).$$

Проинтегрируем это неравенство от $u = -1$ до $u = 1$

учитывая, что $f(u)\leqslant 0$, $\int\limits_{-1}^{1} f(u)\,du=-2$:

$$f(\alpha)\geqslant -1+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-1}^{\alpha+1} f(u)\,du=$$

$$=-1+\int\limits_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\frac{\alpha+1}{2}} f(2u)\,du\geqslant -1+4\int\limits_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\frac{\alpha+1}{2}} f(u)\,du$$

в силу неравенства 1° леммы П.1.6.

Если $|\alpha|\leqslant 1$, то $-1\leqslant\frac{\alpha-1}{2}\leqslant\frac{\alpha+1}{2}\leqslant 1$ и получаем

$$f(\alpha)\geqslant -1+4\int\limits_{-1}^{1} f(u)\,du=-1-4\cdot 2=-9.$$

Для любого $t>0$ находим теперь

$$0\geqslant f(t)=f\left(\frac{[t+1]\,t}{[t+1]}\right)\geqslant [t+1]^2 f\left(\frac{t}{[t+1]}\right)\geqslant$$

$$\geqslant -9\,[1+t]^2\geqslant -c\,(1+t^2)$$

для некоторого $c>0$. При $t\leqslant 0$ используем четность $f(t)$. Лемма доказана.

Лемма П.1.9. *Если* $\varphi\in K$ *и* $\varphi(0)=0$, *то* $\int\limits_0^1 |\,g(t)\,|\,dt\leqslant c$ *для абсолютной постоянной* $c>0$.

Доказательство. Будем использовать неравенство

$$2f(u)-(g(u+\alpha)-g(u-\alpha)-2g(\alpha))\leqslant 0.$$

Пусть α_0, β_0 — какие-либо точки интервала $[0,1]$ такие, что $g(\alpha_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t)$, $g(\beta_0)=\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t)$. Допустим, что $\alpha_0<\beta_0$; тогда при $\alpha=\alpha_0$, $u=\beta_0-\alpha_0$ получаем

$$-2f(\beta_0-\alpha_0)\geqslant 2g(\alpha_0)-g(\beta_0)+g(\beta_0-2\alpha_0). \qquad (П.1.28)$$

Далее, $\beta_0>\alpha_0$, так что $|\,\beta_0-2\alpha_0\,|\leqslant 1$. Далее, по выбору точек α_0, β_0 имеем

$$|\,g(\beta_0-2\alpha_0)\,|\leqslant \max\,[g(\alpha_0);\ -g(\beta_0)]\leqslant g(\alpha_0)-g(\beta_0).$$

(Мы должны иметь $\int\limits_0^1 g(t)\,dt = 0$, так что $g(\alpha_0) \geqslant 0$, $g(\beta_0) \leqslant 0$.) Подставляя это неравенство в (П.1.28), получим $-2f(\beta_0 - \alpha_0) \geqslant g(\alpha_0)$.

Теперь пусть $\alpha_0 > \beta_0$. Рассмотрим функцию $\psi(t) = g(-t)$. Она будет достигать максимума раньше, чем минимума, и к ней можно применить предыдущие рассуждения и получить предыдущий результат. Получим

$$-2f(\alpha_0 - \beta_0) \geqslant \psi(\beta_0) = g(-\beta_0) = -g(\beta_0).$$

Далее, поскольку $\int\limits_0^1 g(t)\,dt = 0$, имеем $\int\limits_0^1 |g(t)|\,dt = 2\int\limits_0^1 g^+(t)\,dt = 2\int\limits_0^1 g^-(t)\,dt$, где $g^+ = \max(g, 0)$, $g^- = -\min(g, 0)$. Если $\alpha_0 < \beta_0$, получим

$$\int\limits_0^1 |g(t)|\,dt = 2\int\limits_0^1 g^+(t)\,dt \leqslant 2g(\alpha_0) \leqslant -4f(\beta_0 - \alpha_0) \leqslant c$$

для некоторого $c > 0$. Если же $\alpha_0 > \beta_0$, имеем

$$\int\limits_0^1 |g(t)|\,dt = 2\int\limits_0^1 g^-(t)\,dt \leqslant -2g(\beta_0) \leqslant -4f(\alpha_0 - \beta_0) \leqslant c.$$

Наконец, если $\alpha_0 = \beta_0$, то $g(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это заканчивает доказательство.

Лемма П.1.10. *Если* $\varphi \in K$ *и* $\varphi(0) = 0$, *то* $|g(t)| \leqslant c(1 + t^2)$ *для абсолютной постоянной* $c > 0$.

Доказательство. Из неравенства

$$f(u) \pm \frac{1}{2}(g(u+\alpha) - g(u-\alpha) - 2g(\alpha)) \leqslant 0$$

имеем при $|\alpha| \leqslant 1$

$$|g(\alpha)| \leqslant \int\limits_0^1 |f(u)|\,du + \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-1}^{\alpha+1} |g(u)|\,du.$$

Далее, так как $f(u) \leqslant 0$ и $\int\limits_0^1 f(u)\,du = -1$, то $\int\limits_0^1 |f(u)|\,du = 1$. Поэтому правая часть неравенства совпадает с выражением $1 + \int\limits_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\frac{\alpha+1}{2}} |g(2u)|\,du$. По лемме П.1.6 (неравенство 2°), имеем $|g(2u)| \leqslant |g(u)| + 2|f(u)|$, так что наше выражение не превосходит

$$1 + 2\int\limits_{-1}^{1} (|g(u)| + |f(u)|)\,du \leqslant c_0.$$

Отсюда для любого $t > 0$ имеем, применяя ту же лемму,

$$|g(-t)| = |g(t)| = \left| g\left(\frac{[1+t]\,t}{[1+t]}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant [1+t]\left| g\left(\frac{t}{[1+t]}\right)\right| + [t]\,[1+t]\left| f\left(\frac{t}{[1+t]}\right)\right| \leqslant c\,(1+t^2)$$

для некоторого $c > 0$.

Объединим леммы П.1.8 и П.1.10 и учтем, что при $\varphi \in K$ имеют место соотношения $0 \geqslant f(0) \geqslant -1$, $\varphi(0) \leqslant \leqslant 0$ (так что $|\varphi(0)| \leqslant 1$). Придем к следующей теореме.

Теорема П.1.4. *Существует абсолютная константа $c > 0$ такая, что для всех $\varphi \in K$ имеем $|\varphi(t)| \leqslant c\,(1+t^2)$.*

Теперь переформулируем определение Q следующим образом: легко заметить, что для каждой непрерывной функции $\varphi(t)$ условие (П.1.10) эквивалентно следующему:

$$\iint \varphi(u-v)\,h(u)\,\overline{h(v)}\,du\,dv \geqslant 0 \qquad \text{(П.1.29)}$$

для всех непрерывных функций h с конечным носителем, для которых $\int h(u)\,du = 0$.

Определим $\hat{Q}$ как множество всех измеримых функций φ, в существенном ограниченных в любой окрестности нуля и удовлетворяющих (П.1.29), а также условию $\varphi(u) = \overline{\varphi(-u)}$ почти везде.

Очевидно, $Q \subset \hat{Q}$. Мы покажем, что в известном смысле верно и обратное включение: каждый класс эквивалентных функций из $\hat{Q}$ содержит одну и только одну функцию из Q. Мы устанавливаем таким образом одно-однозначное отображение Q на множество классов эквивалентности $\hat{Q}$.

Т е о р е м а П.1.5. *Для каждой* $\varphi \in \hat{Q}$ *существует* $\varphi_1 \in Q$ *такое, что* $\varphi(u) = \varphi_1(u)$ *почти везде (по лебеговой мере).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k(u)$ — любая непрерывная функция с конечным носителем. Положим $h(u) = k(u) - k(u+\alpha)$, $\alpha \in R^1$. Тогда $\int h(u)\,du = 0$, и для любого $\varphi \in \hat{Q}$ получим после небольших вычислений

$$0 \leqslant \int\int \varphi(u-v)\,h(u)\,\overline{h(v)}\,du\,dv =$$

$$= \int\int (2\varphi(u-v) - \varphi(u-v+\alpha) - \varphi(u-v-\alpha))\,k(u)\,\overline{k(v)}\,du\,dv.$$

Поэтому функция $\psi_\alpha(u)$, определенная равенством

$$\psi_\alpha(u) = \varphi(u) - \frac{1}{2}(\varphi(u+\alpha) + \varphi(u-\alpha)),$$

положительно определенная, измеримая и в существенном ограниченная в любой ограниченной окрестности нуля. Также и функция

$$\eta(u) = \int_0^1 \psi_\alpha(u)\,d\alpha = \varphi(u) - \frac{1}{2}\int_{u-1}^{u+1} \varphi(t)\,dt$$

имеет это свойство.

Как известно, существует непрерывная положительно определенная функция η_1 такая, что $\eta = \eta_1$ почти всюду. Имеем $\varphi(u) = \eta_1(u) + \frac{1}{2}\int_{u-1}^{u+1} \varphi(t)\,dt = \varphi_1(u)$ почти всюду; при этом $\int_{u-1}^{u+1} \varphi(t)\,dt$ — непрерывная функция, $\varphi_1(u) \in Q$. Это и доказывает теорему.

Определим теперь множество $\hat{K}$ следующим образом:

$$\hat{K} = \left\{ \varphi \in \hat{Q}: \int_0^1 \varphi(u)\, du = -1, \ \operatorname{ess\,sup} \operatorname{Re} \varphi(u) \leqslant 0 \right\}.$$

Сравним $\hat{K}$ с $K = \{\varphi \in Q: \varphi(0) \leqslant 0, \int_0^1 \varphi(u)\, du = -1\}$. Заметим, что для функций $\varphi \in K$ $\operatorname{Re} \varphi(u) - \varphi(0) \leqslant 0$, $\operatorname{Re} \varphi(u) \leqslant \varphi(0) \leqslant 0$ (см. лемму П.1.6).

Рассматривая определение $\hat{K}$, видим, что можно отождествить K с множеством классов эквивалентности $\hat{K}$.

По теореме П.1.4 все функции из K мажорируются функцией $g_0(t) = c(1 + t^2)$. Рассмотрим отображение T, определенное на K соотношением $T\varphi = \frac{\varphi}{g_0}$. Мы получим одно-однозначное отображение K в замкнутый единичный шар B банахова пространства L_∞ измеримых ограниченных функций. Так как это пространство является сопряженным к пространству L_1, то B оказывается компактным множеством в L_1-топологии. В этой топологии последовательность $g_n(t) \in L_\infty$ называется сходящейся к $g(t) \in L_\infty$, если $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\, h(t)\, dt \to \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, h(t)\, dt$ для всех $h(t) \in L_1$. Если доказать, что $T(K)$ замкнуто, то $T(K)$ будет компактным и K будет компактным в топологии, индуцированной T.

Замкнутость $T(K)$ следует из того, что функционал

$p_1(\varphi) = \int_0^t \varphi(t)\, dt$ непрерывен, а

$$p_2(\varphi) = \operatorname*{ess\,sup}_t \operatorname{Re} \varphi(t) =$$

$$= \sup_h \left\{ \int_{-1}^{1} (\operatorname{Re} \varphi(u))\, h(u)\, du: h(u) \geqslant 0, \int_{-1}^{1} h(u)\, du = 1 \right\}$$

полунепрерывен снизу в L_1-топологии: для сходящейся последовательности функций $|g_n(t)|$ из $L_1(-1, 1)$ имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|t| \leqslant 1} (\lim g_n(t)) \leqslant \varliminf \left(\operatorname*{ess\,sup}_{|t| \leqslant 1} g_n(t) \right).$$

Заметим, далее, что не только K, но и множество его крайних точек E компактно. В самом деле, пусть прямая R^1 компактифицитирована одной точкой ∞ (как в проективной геометрии) и R^* — получившаяся компактификация R^1. Пусть отображение H: $R^* \to E$ задано в виде $H(\beta) = \varphi_\beta$, $H(\infty) = \tilde{\varphi}$ (см. формулировку теоремы П.1.2). Тогда H, очевидно, непрерывно на R^*, если $\beta \neq \infty$. Исследуем поведение H в окрестности точки ∞. По теореме Римана — Лебега, имеем при $\beta \to \infty$

$$\int \varphi_\beta(u) \frac{h(u)}{g_0(u)}\, du \to \int \tilde{\varphi}(u) \frac{h(u)}{g_0(u)}\, du$$

при любой $h \in L_1$, так что $H(\beta) \to H(\infty)$ при $\beta \to \infty$. Таким образом, H непрерывно и является гомеоморфизмом, а E — компакт.

Теперь можно приложить теорему Крейна — Мильмана. По этой теореме для любого $\psi \in K$ существует вероятностная мера P на R^* такая, что для всех $h \in L_1$ имеем

$$\int \psi(u) \frac{h(u)}{g_0(u)}\, du = \int_{R^*} P(d\beta) \int \varphi_\beta(u) \frac{h(u)}{g_0(u)}\, du.$$

Если придадим элементу $\beta = \infty$, отвечающему крайнему элементу (-1), меру P_∞, то из этого равенства получим

$$\psi(u) = \int_{R^1} \left(e^{iu\beta} - 1 - iu\beta\, \frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right) \times \\ \times \left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right)^{-1} P(d\beta) + (-1) P_\infty.$$

Применяя лемму П.1.7, найдем, что при $\varphi \in Q$

$$\varphi(u) = a + 2bu + \\ + c \int_{R^1} \left(e^{iu\beta} - 1 - iu\beta\, \frac{2(1-\cos\beta)}{\beta^2}\right) \left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right)^{-1} P(d\beta), \tag{П.1.30}$$

где a, b — комплексные числа и $c \geqslant 0$.

Пусть теперь φ — логарифм б. д. х. ф. Тогда $\varphi(0) = 0$; из (П.1.30) находим $\varphi(0) = a = 0$. Далее, интегрируя под знаком интеграла (П.1.30), находим

$$\int_0^1 \varphi(u)\, du = b - c, \qquad \int_{-1}^0 \varphi(u)\, du = -b - c. \tag{П.1.31}$$

Таким образом, b и c определяются через φ, и представление (П.1.30) единственно.

Для получения из формулы (П.1.30) теоремы Леви — Хинчина (формулы (П.1.9)) учитываем, что $\overline{\varphi(u)} = \varphi(-u)$, что дает, по подстановке в (П.1.31),

$$\overline{b-c} = -\overline{b}-c, \quad b = -\overline{b}, \quad b = i\gamma_1, \quad \gamma_1 \in R^1.$$

Выбирая далее константу γ_1 надлежащим образом и вводя вместо функции $(\sin\beta)/\beta$ функцию $1/(1+\beta^2)$, а вместо меры P неубывающую функцию $G(\beta)$, придем к формуле Леви — Хинчина в форме (П.1.9).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через D класс, состоящий из х. ф. $\varphi(t)$, $t \in R^1$, аналитических в окрестности точки $t = 0$ и таких, что функция $1/\varphi(it)$ может быть продолжена на всю ось R^1 как х. ф. Этот класс введен Д. ван Данцигом, который поставил вопрос о его описании и указал некоторых представителей:

$$e^{-\gamma t^2}\ (\gamma \geqslant 0),\ \cos t,\ \sin t/t,\ 1/\mathrm{ch}\, t,\ t/\mathrm{sh}\, t. \qquad (\text{П.2.1})$$

Теорема П.2.1. *Всякая х. ф. $\varphi(t) \in D$ является действительной при $t \in R^1$ и четной и допускает мероморфное продолжение в некоторый крест*

$$K(a, b) = \{|\operatorname{Re} t| < a\} \cup \{|\operatorname{Im} t| < b\}, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Доказательство. По определению класса D функция $\varphi(t)$ аналитична в некотором круге $|t| < b$. По теореме 2.2.3 функция $\varphi(t)$ допускает аналитическое продолжение в полосу $|\operatorname{Im} t| < b$. Так как $\varphi(0) \neq 0$, то $\varphi(t) \neq 0$ в некотором круге $|t| < a \leqslant b$; поэтому функция $\varphi_1(t) = 1/\varphi(it)$ аналитична в круге $|t| < a$. Применяя к $\varphi_1(t)$ теорему 2.2.3, заключаем, что $\varphi_1(t)$ допускает аналитическое продолжение в полосу $|\operatorname{Im} t| < a$. Следовательно, функция $\varphi(t) = 1/\varphi_1(-it)$ допускает мероморфное продолжение в полосу $|\operatorname{Re} t| < a$. Тем самым доказана возможность мероморфного продолжения функции $\varphi(t)$ в крест $K(a, b)$.

Далее, по теореме 2.3.1 функция $\varphi_1(t)$ принимает на интервале $(-ia, ia)$ мнимой t-оси положительные значения. Поэтому функция $\varphi(t) = 1/\varphi_1(-it)$ принимает положительные значения на интервале $(-a, a)$. С помощью принципа симметрии отсюда заключаем, что функция $\varphi(t)$ принимает действительные значения на всей действительной t-оси. Поскольку для всякой х. ф. $\varphi(t)$ при $t \in R^1$ выполняется $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, то функция $\varphi(t)$ является четной. Теорема доказана.

Э. Лукачу [4] принадлежит следующий результат.

Теорема П.2.2. *Пусть х. ф.* $\varphi(t)$ — *четная и удовлетворяет условиям*:

(i) $\varphi(t)$ *является целой функцией порядка* $\leqslant 2$;

(ii) *все корни функции* $\varphi(t)$ *действительны*;

(iii) *показатель сходимости последовательности корней* <2.

Тогда $\varphi(t) \in D$.

Доказательство. Сначала предположим, что порядок в точности равен 2. Тогда мы находимся в условиях теоремы 2.5.1, и поэтому для $\varphi(t)$ имеет место представление, указанное в замечании к теореме 2.5.1 (стр. 60). Учитывая четность функции $\varphi(t)$ и действительность ее корней, можем это представление записать в виде

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t^2} \prod_k (1 - t^2/a_k^2),$$

где $\gamma > 0$, $a_k > 0$, $\sum\limits_k a_k^{-2} < \infty$. Отсюда следует, что

$$1/\varphi(it) = e^{-\gamma t^2} \prod_k (1 + t^2/a_k^2)^{-1}.$$

Как известно, функция $(1 + t^2/a_k^2)^{-1}$ является х. ф. Поэтому из теорем 1.1.2 и 1.1.4 следует, что $1/\varphi(it)$ является х. ф. Таким образом, $\varphi(t) \in D$.

Если функция $\varphi(t)$ имеет порядок <2, рассмотрим х. ф. $e^{-\varepsilon t^2}\varphi(t)$, $\varepsilon > 0$. По доказанному функция $e^{-\varepsilon t^2}/\varphi(it)$ является х. ф. Устремляя $\varepsilon \to 0$, по теореме 1.1.4 получим, что и $1/\varphi(it)$ — х. ф.

С помощью теоремы П.2.2 можно строить примеры функций класса D. Ограничимся двумя из ряда примеров, указанных Э. Лукачем [4].

Пример 1. Х. ф. $\varphi(t) = (1 - t^2)\, e^{-t^2/2}$ (см. пример 8 из § 3 гл. III) принадлежит классу D.

Пример 2. Функция $\varphi(t) = J_0(t)$, где

$$J_0(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r\, t^{2r}/(r!)^2$$

— функция Бесселя, является х. ф. класса D.

В самом деле, функция $J_0(t)$ допускает представление (Уиттекер и Ватсон [1], п. 17.3)

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{itx}\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда видно, что она является х. ф. закона, сосредоточенного на отрезке $[-1, 1]$. По теореме 2.4.2 функция $J_0(t)$ является целой функцией порядка 1. Как известно, все корни функции $J_0(t)$ действительны. Показатель сходимости последовательности корней в силу теоремы 1.2.6 не может превосходить 1. По теореме П.2.2 имеем $J_0(t) \in D$.

Очевидно, если $\varphi(t) \in D$, то и $1/\varphi(it) \in D$, т. е. класс D замкнут относительно операции перехода от $\varphi(t)$ к $1/\varphi(it)$. Из теоремы 1.1.2 следует, что класс D замкнут относительно операции умножения. С помощью этих двух операций можно, отправляясь от приведенных выше (включая (П.2.1)) примеров х. ф. класса D, построить много других. Во всех этих примерах х. ф. будут либо целыми, либо мероморфными во всей t-плоскости. Однако среди функций класса D есть такие, которые не являются мероморфными во всей t-плоскости.

Теорема П.2.3. *Существуют х. ф.* $\varphi(t) \in D$, *мероморфные в кресте* $K(\pi, \pi)$, *для которых каждая точка границы* $K(\pi, \pi)$ *является особой.*

Из этой теоремы видно, что последнее утверждение в теореме П.2.1 является в известной мере неулучшаемым.

В связи с теоремами П.2.1 и П.2.3 возникает вопрос об описании класса $\mathfrak{D}$ областей в C^1, являющихся областями мероморфности *) х. ф. класса D. Из теоремы П.2.1

*) Область $G \subset C^1$ называется областью мероморфности функции $\varphi(t)$, если $\varphi(t)$ мероморфна в G и не может быть продолжена как мероморфная ни в какую область $G_1 \supset G$, $G_1 \setminus G \neq \varnothing$.

следует, что всякая область класса $\mathfrak{D}$ должна быть симметричной относительно обеих координатных осей и должна содержать некоторый крест $K(a, b)$. В силу теоремы П.2.3 крест $K(\pi, \pi)$ принадлежит классу $\mathfrak{D}$. Некоторые другие примеры областей класса $\mathfrak{D}$ будут указаны ниже (см. теорему П.2.4 и замечание 1 к ней), однако полное описание класса $\mathfrak{D}$ неизвестно.

Теорему П.2.3 мы получим как следствие такого результата.

Теорема П.2.4. *Пусть E — непустое замкнутое множество, расположенное на интервале* $(\pi/2, \infty)$. *Существует х. ф.* $\varphi(t) \in D$, *область мероморфности которой совпадает с дополнением ко множеству*

$$E_1 = \{t\colon\ t \in C^1,\ -\operatorname{ch} t \in E\}.$$

Заметим, что множество E_1 обязательно неограничено и расположено на системе лучей

$$\{\alpha \leqslant \pm\operatorname{Re} t < \infty,\ \operatorname{Im} t = (2k+1)\pi\},\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\quad \alpha > 0.$$

Чтобы получить теорему П.2.3, положим $E = [\operatorname{ch}\pi, \infty)$. Пусть $\varphi(t)$ — х. ф., существование которой обеспечено теоремой П.2.4. Дополнение к ее области мероморфности состоит из системы лучей $\{\pi \leqslant \pm\operatorname{Re} t < \infty$, $\operatorname{Im} t = (2k+1)\pi\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Очевидно, х. ф. $\varphi(t)/\varphi(it)$ принадлежит D и ее областью мероморфности является крест $K(\pi, \pi)$.

Перейдем к доказательству теоремы П.2.4.

Пусть $B = \inf\limits_{x \in E} x$; $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетное множество, расположенное на $[B, \infty)$, производное которого совпадает с E; $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$. Положим

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z + h_k}, \tag{П.2.2}$$

$$f_\delta(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{Cz} + \delta g(z), \qquad \frac{\pi}{2} < C < B, \quad \delta > 0. \tag{П.2.3}$$

Покажем, что при достаточно малом δ функция

$$\varphi_\delta(t) = f_\delta(\operatorname{ch} t)/f_\delta(1) \tag{П.2.4}$$

является х. ф. класса D.

Так как функция $\varphi_\delta(t)$ действительна и суммируема на оси $-\infty < t < \infty$, то, чтобы убедиться, что $\varphi_\delta(t)$ является х. ф., достаточно доказать, что функция

$$p_\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_\delta(t)\,dt \tag{П.2.5}$$

суммируема и неотрицательна на полуоси $0 \leqslant x < \infty$.

Нам понадобятся следующие формулы ($-\infty < x < \infty$):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}\,dt}{\operatorname{ch} t + b} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}(\pi-\alpha)x}{\operatorname{sh}\pi x}, \\ \qquad -1 < b < 1, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad \cos\alpha = -b, \\ \dfrac{2\pi}{\operatorname{sh}\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{sh}\pi x}, \qquad b > 1, \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{ch}\alpha = b, \end{cases} \tag{П.2.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}\,dt}{\operatorname{ch}^2 t} = 2\pi\,\frac{x\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x}{\operatorname{sh}\pi x}. \tag{П.2.7}$$

Доказательство этих формул проводится стандартными методами теории вычетов, поэтому мы его опускаем.

Используя формулы (П.2.6), (П.2.7), получаем

$$f_\delta(1)\,p_\delta(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}\pi x}\left\{x\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{C}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x + \delta\sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\frac{\sin\alpha_k x}{\operatorname{sh}\alpha_k}\right\},$$

где $\alpha_k > 0$, $\operatorname{ch}\alpha_k = h_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Отсюда видно, что функция $p_\delta(x)$ суммируема. Так как $\alpha_k \geqslant \beta > 0$, где $\operatorname{ch}\beta = B$, и $|\sin\alpha_k x|/\operatorname{sh}\alpha_k \leqslant \alpha_k x/\operatorname{sh}\alpha_k \leqslant \beta x/\operatorname{sh}\beta$ $(x \geqslant 0)$, то имеем

$$f_\delta(1)\,p_\delta(x) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\operatorname{sh}\pi x}\left\{x\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{C}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x - x\frac{\delta\beta}{\operatorname{sh}\beta}\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right\}, \qquad x \geqslant 0.$$

Поскольку $C > \pi/2$, то при достаточно малом δ выражение справа будет неотрицательным при всех $x \geqslant 0$. Учитывая, что $f_\delta(1) > 0$, при достаточно малых δ видим, что $p_\delta(x) \geqslant 0$ $(x \geqslant 0)$, и, следовательно, $\varphi_\delta(t)$ является х. ф.

Теперь докажем, что и функция

$$1/\varphi_\delta(it) = f_\delta(1)/f_\delta(\cos t)$$

при достаточно малом $\delta > 0$ является х. ф. Так как функция $\cos t$ является х. ф., то в силу теоремы 1.1.5 достаточно убедиться в том, что функция $1/f_\delta(z)$ аналитична в круге $|z| \leqslant 1$ и все ее коэффициенты Тейлора неотрицательны.

Очевидно,

$$\frac{1}{f_\delta(z)} = \frac{Cz^2}{C - z + C\delta z^2 g(z)}. \tag{П.2.8}$$

Так как все особенности функции $g(z)$ лежат на $(-\infty, -B]$, то знаменатель в правой части (П.2.8) является функцией, аналитической при $|z| < B$. При $\delta = 0$ он имеет один простой корень в точке $z = C > \pi/2$, следовательно, по классической теореме Гурвица при достаточно малом $\delta > 0$ он будет иметь только один простой корень z_δ в круге $|z| \leqslant C_1 = (B + C)/2$. Так как при действительных z функция $g(z)$ действительна, то корень z_δ должен быть действительным, и, поскольку $\lim\limits_{\delta\to 0} z_\delta = C > \pi/2$, при достаточно малом $\delta > 0$ будет выполняться $z_\delta > 1$.

Имеем

$$\frac{1}{C - z + C\delta z^2 g(z)} = \frac{a(\delta)}{z_\delta - z} + \psi_\delta(z),$$

где $\psi_\delta(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| \leqslant C_1$, а

$$a(\delta) = [1 - 2C\delta z_\delta g(z_\delta) - C\delta z_\delta^2 g'(z_\delta)]^{-1}.$$

Так как $\lim\limits_{\delta\to 0} a(\delta) = 1$, $\lim\limits_{\delta\to 0} z_\delta = C$, то функция $\psi_\delta(z)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно на окружности $|z| = C_1$, а следовательно, и в круге $|z| \leqslant C_1$. При $|z| < z_\delta$ имеем

$$\frac{1}{f_\delta(z)} = Cz^2\left\{\frac{a(\delta)}{z_\delta - z} + \psi_\delta(z)\right\} = Cz^2 \sum_{k=0}^{\infty} \{a(\delta) z_\delta^{-k-1} + q_k(\delta)\} z^k,$$

где $q_k(\delta)$ — коэффициенты Тейлора функции $\psi_\delta(z)$. В силу неравенств Коши

$$|q_k(\delta)| \leqslant C_1^{-k} \max_{|z|=C_1} |\psi_\delta(z)|.$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось

$$\max_{|z|=C_1} |\psi_\delta(z)| \leqslant a(\delta) z_\delta^{-1};$$

тогда коэффициенты функции $1/f_\delta(z)$, очевидно, будут неотрицательны.

Итак, при достаточно малом $\delta > 0$ функция $\varphi_\delta(t)$ является х. ф. класса D. Чтобы определить ее область мероморфности, заметим, что функция $f_\delta(z)$ мероморфна во всей z-плоскости, за исключением множества $\widetilde{E} = \{z\colon -z \in E\}$ (это следует хотя бы из того, что при $y \to +0$ имеем $\operatorname{Im} f_\delta(-h_k + y) \to -\infty$). Так как функция $\varphi_\delta(t)$ периодична с периодом $2\pi i$, четна и действительна при действительных t, то нам достаточно изучить ее поведение в полуполосе $S = \{0 \leqslant \operatorname{Re} t < \infty;\ 0 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant \pi\}$. Функция $z = \operatorname{ch} t$ отображает полуполосу S взаимно однозначно на полуплоскость $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, и отображение конформно во всех точках, кроме $t = 0$ и $t = i\pi$. Часть множества E_1, попавшая в S, при этом отображается во множество $\widetilde{E}$. Отсюда, очевидно, следует, что в полуполосе S точки множества E_1 и только они являются существенно особыми для $\varphi_\delta(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Построенная при доказательстве теоремы П.2.4 х. ф. $\varphi_\delta(t)$ не имеет ни одной изолированной (т. е. не являющейся точкой сгущения для полюсов или других существенных особенностей) существенно особой точки. Однако, несколько изменив рассуждения, можно построить примеры х. ф. класса D с изолированными существенными особенностями.

Построим, например, х. ф. класса D, у которой все существенные особенности изолированы и имеют вид $\pm\alpha + (2k+1)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\alpha > \pi/2$. Нам понадобится неравенство ($k = 1, 2, \ldots;\ b > 1,\ x \geqslant 0$)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}\,dt}{(\operatorname{ch} t + b)^k} \right| \leqslant Q(k, b) \frac{x^k + x}{\operatorname{sh} \pi x}, \tag{П.2.9}$$

где $1 \leqslant Q(k, b) < \infty$ не зависит от x. Это неравенство получается при помощи дифференцирования по параметру b второй из формул (П.2.6).

Определим функции $f_\delta(z)$ и $\varphi_\delta(t)$ соответственно равенствами (П.2.3) и (П.2.4), но в качестве $g(z)$ вместо (П.2.2) возьмем функцию

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(z+b)^k},$$

где

$$b = \operatorname{ch} \alpha; \quad A_k = \frac{q^{k-1}}{(k-1)!} \{Q(k, b)\}^{-1},$$

$$k = 1, 2, \ldots; \; 0 < q < \frac{\pi}{2}.$$

Используя формулы (П.2.6), (П.2.7) и оценку (П.2.9), легко убеждаемся в том, что функция $p_\delta(x)$, определяемая равенством (П.2.5), будет суммируемой, и так как

$$f_\delta(1)\, p_\delta(x) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\operatorname{sh} \pi x} \left\{ x \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x - \frac{\delta}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k-1}}{(k-1)!} (x^k + x) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\operatorname{sh} \pi x} \left\{ x \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{C} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x - \delta x (e^{qx} + e) \right\},$$

то при достаточно малом $\delta > 0$ выполняется $p_\delta(x) \geqslant 0$ $(x \geqslant 0)$. Поэтому при достаточно малых $\delta > 0$ функция $\varphi_\delta(t)$ является х. ф. Далее, повторяя рассуждения из доказательства теоремы П.2.4, убеждаемся, что и $1/\varphi_\delta(it)$ является х. ф. при достаточно малом $\delta > 0$. Легко видеть, что $\varphi_\delta(t)$ обладает изолированными существенными особенностями в нужных точках.

З а м е ч а н и е 2. Покажем, что класс областей мероморфности всех (не обязательно принадлежащих классу D) х. ф., аналитических в точке $t = 0$, состоит из областей, симметричных относительно оси $\operatorname{Re} t = 0$ и содержащих некоторую полосу вида $|\operatorname{Im} t| < \mathrm{const}$.

Пусть G — область, являющаяся областью мероморфности х. ф. $\varphi(t)$, аналитической в точке $t = 0$. Так как $\varphi(t)$ принимает в окрестности $t = 0$ на оси $\operatorname{Re} t = 0$ положительные значения, то в силу принципа симметрии рассматриваемая область G симметрична относительно оси $\operatorname{Re} t = 0$. То, что G содержит некоторую полосу вида $|\operatorname{Im} t| < \text{const}$, следует из теоремы 2.2.3.

Пусть G — область, симметричная относительно оси $\operatorname{Re} t = 0$ и содержащая полосу $|\operatorname{Im} t| < 2a$. Построим х. ф. $\varphi(t)$, для которой G является областью мероморфности. Во множестве $G \cap \{|\operatorname{Im} t| > a\}$ выберем счетное подмножество E, не пересекающееся с прямой $\operatorname{Re} t = 0$ и симметричное относительно нее, производное которого совпадает с границей области G. Запишем множество E в виде $E = \{h_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{-\overline{h}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $h_k = \alpha_k - i\beta_k$, $\alpha_k > 0$. Выберем последовательность чисел $A_k > 0$ такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k < 1/2$, и положим

$$p(x) = \begin{cases} e^{-ax} + 2 \sum\limits_{\beta_k > a} A_k e^{-\beta_k x} \cos \alpha_k x, & x \geqslant 0, \\ e^{ax} - 2 \sum\limits_{\beta_k < -a} A_k e^{-\beta_k x} \cos \alpha_k x, & x < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $p(x) > 0$, $-\infty < x < \infty$, поэтому функция

$$\varphi(t) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\, dx \qquad \left(\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx\right)$$

является х. ф. Вычисляя интеграл, получим равенство

$$\varphi(t) = C \left\{ \frac{1}{a - it} + \frac{1}{a + it} + \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\frac{1}{h_k - t} - \frac{1}{\overline{h}_k + t} \right] \right\},$$

поэтому область мероморфности функции $\varphi(t)$ совпадает с G.

Заметим, что по теореме 6.1.8 класс областей аналитичности для х. ф., аналитических в точке $t = 0$, состоит из областей, симметричных относительно оси $\operatorname{Re} t = 0$ и таких, что, вместе с интервалом $\{\operatorname{Re} t = 0,\ -a < \operatorname{Im} t < b\}$, $a > 0$, $b > 0$, им принадлежит полоса $(-a) < \operatorname{Im} t < b$. Таким образом, класс областей аналитичности оказывается более узким, чем класс областей мероморфности.

Рассмотрим теперь вопрос о возможном росте целых х. ф. класса D. В известной мере полный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема П.2.5. *Для всякой целой х. ф.* $\varphi(t) \in D$ *выполняется*

$$\ln \ln M(r, \varphi) = O(r), \qquad r \to \infty.$$

Существуют целые х. ф. $\varphi(t) \in D$, *для которых*

$$\ln \ln M(r, \varphi) \geqslant cr, \qquad r \geqslant 1, \tag{П.2.10}$$

при некотором $c > 0$.

Для любого ρ, $1 \leqslant \rho < \infty$, *существуют целые х. ф.* $\varphi(t) \in D$ *порядка* ρ.

Таким образом, целые х. ф. класса D не могут расти слишком быстро. Напомним, что в классе всех целых х. ф. рост не ограничен сверху: в самом деле, в конце § 4 гл. II было установлено, что для любой неубывающей функции $V(r)$, $r > 0$, существует целая х. ф. $\varphi(t)$ такая, что при достаточно больших r выполняется $M(r, \varphi) > V(r)$.

Для доказательства теоремы П.2.5 понадобится следующая лемма.

Лемма П.2.1. *Если функция* $g(t)$ *аналитична и не обращается в нуль в полосе* $|\operatorname{Im} t| < R/2$ *и в этой полосе выполняется* $|g(t)| \leqslant H < \infty$, *то в полосе* $|\operatorname{Im} t| < (R/2) - \varepsilon$ *справедлива оценка*

$$|g(t)| \geqslant \exp\left\{-C \exp\left(\frac{\pi}{R}|t|\right)\right\}, \tag{П.2.11}$$

где $0 < C < \infty$ *не зависит от* t.

Лемма является простым следствием известной теоремы К. Каратеодори (Б. Я. Левин [1], стр. 29). Если функция $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и имеет там положительную мнимую часть, то

$$|f(re^{i\theta})| < 5\,|f(i)|\, r \operatorname{cosec} \theta \quad (r \geqslant 1,\ 0 < \theta < \pi).$$

Действительно, главная ветвь функции $t = \frac{R}{\pi} \ln z - i\frac{R}{2}$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на полосу $|\operatorname{Im} t| < R/2$, при этом области $\{|z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ отвечает полуполоса $\{\operatorname{Re} t > 0, |\operatorname{Im} t| < R/2\}$, а углу $\left\{\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon\pi}{R}\right\}$ — полоса $\left\{\left|\operatorname{Im} t\right| < \frac{R}{2} - \varepsilon.\right\}$ Применяя теорему Каратеодори к $f(z) = -i \ln g\left(\frac{R}{\pi} \ln z - i\frac{R}{2}\right) + i \ln H$, получаем оценку $\left(\operatorname{Re} t>0,\ |\operatorname{Im} t|<\frac{R}{2}-\varepsilon\right)$

$$|\ln g(t)|\leqslant 5|\ln g(0)-\ln H|\, e^{\frac{\pi}{R}|\operatorname{Re} t|}\operatorname{cosec}\frac{\varepsilon\pi}{R}+|\ln H|.$$

Рассматривая, вместо $g(t)$, функцию $g(-t)$, убеждаемся, что эта оценка справедлива и при $\operatorname{Re} t<0$, $|\operatorname{Im} t|<\frac{R}{2}-\varepsilon$. Так как $|g(t)|\geqslant\exp(-|\ln g(t)|)$, то мы получаем оценку (П.2.11).

Докажем теперь теорему, несколько более сильную, чем первое утверждение теоремы П.2.5.

Т е о р е м а П.2.6. *Пусть* $\varphi(t)$ — *целая х. ф. класса* D, R — *любое число, удовлетворяющее условию* $0<R<2\min\limits_k|a_k|$, *где* $\{a_k\}$ — *множество всех корней функции* $\varphi(t)$ (*в случае, если функция* $\varphi(t)$ *не имеет корней, число* R *будем считать произвольным положительным*). *Справедлива оценка*

$$M(r,\varphi)\leqslant\exp\left\{C\exp\left(\frac{\pi}{R}r\right)\right\},\qquad r\geqslant 1,$$

где $0<C<\infty$ *не зависит от* r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2.2.3 следует, что х. ф. $\varphi_1(t)=1/\varphi(it)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} t|<\min\limits_k|a_k|$. Очевидно, $\varphi_1(t)$ не обращается в этой полосе в нуль, и величина $H=\sup\limits_{-R/2<\tau<R/2}|\varphi_1(i\tau)|$ конечна. В силу теоремы 2.3.1 в полосе $|\operatorname{Im} t|<R/2$ имеет место неравенство $|\varphi_1(t)|\leqslant H$. Применяя лемму П.2.1, получим оценку

$$|\varphi_1(t)|\geqslant\exp\left\{-C\exp\left(\frac{\pi}{R}|t|\right)\right\},\qquad \operatorname{Im} t=0.$$

В силу леммы 2.3.1 (стр. 46) имеем

$$M(r,\varphi)=\max[\varphi(ir),\ \varphi(-ir)]=$$
$$=\max\left[\frac{1}{\varphi_1(r)},\ \frac{1}{\varphi_1(-r)}\right]\leqslant\exp\left\{C\exp\left(\frac{\pi}{R}r\right)\right\},$$

что и требовалось доказать.

Остальные утверждения теоремы П.2.5 получим в качестве следствий такой теоремы.

Теорема П.2.7. *Пусть $f(z)$ — целая функция вида*

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a_k}\right), \tag{П.2.12}$$

где $0<a_1<a_2<\ldots,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{-1}<\infty$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

а) $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}|f(-x)|>0,$ б) $\inf\limits_{1\leqslant k<\infty}|f'(-a_k)|>0.$

Тогда при достаточно малом $\delta>0$ *функция*

$$\widetilde{\varphi}_\delta(t)=(\cos t)\,f(\delta\cos t)/f(\delta)$$

является х. ф. класса D.

Существование целой х. ф. класса D, допускающей оценку (П.2.10), получается из теоремы П.2.7 так. Положим $f(z)=(z+1)\operatorname{ch}\sqrt{z}$. Для этой функции имеет место представление (П.2.12) с $a_1=1$, $a_k=\left(\frac{\pi}{2}+(k-2)\pi\right)^2$, $k\geqslant 2$, и легко видеть, что она удовлетворяет условиям а) и б). Очевидно, для функции

$$\widetilde{\varphi}_\delta(t)=\frac{(\cos t)(1+\delta\cos t)\operatorname{ch}\sqrt{\delta\cos t}}{(1+\delta)\operatorname{ch}\sqrt{\delta}}$$

справедлива оценка (П.2.10).

Существование целой х. ф. класса D, имеющей наперед заданный порядок $1\leqslant\rho<\infty$, получается из теоремы П.2.7 сложнее. Заметим, что можно ограничиться случаем $1<\rho<\infty$, так как в случае $\rho=1$ искомый пример дает $\varphi(t)=\cos t$.

Пусть $\alpha=1/(\rho-1)$, положим

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+ze^{-k^\alpha}\right). \tag{П.2.13}$$

Показатель сходимости последовательности корней этой функции равен нулю, поэтому в силу теоремы 1.2.8 и ее порядок равен нулю. Если бы выполнялось $\sup\limits_{x>0}|f(-x)|<\infty$, то, применяя к углу $|\arg z|<\pi$ теорему 1.2.1, мы заключили бы, что $\sup\limits_{z\in C^1}|f(z)|<\infty$, а это абсурдно.

Поэтому функция $f(z)$ удовлетворяет условию а) теоремы П.2.7.

В том, что функция $f(z)$ удовлетворяет и условию б) теоремы П.2.7, можно убедиться, произведя следующий несколько громоздкий подсчет.

Так как ($p = 1, 2, \ldots$)

$$f'(-e^{p^\alpha}) = e^{-p^\alpha} \prod_{k=1}^{p-1} (1 - e^{p^\alpha - k^\alpha}) \prod_{k=p+1}^{\infty} (1 - e^{p^\alpha - k^\alpha}),$$

то

$$\ln |f'(-e^{p^\alpha})| = -p^\alpha + \sum_{k=1}^{p-1} (p^\alpha - k^\alpha) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \ln (1 - e^{k^\alpha - p^\alpha}) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \ln (1 - e^{p^\alpha - k^\alpha}) =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+1} p^{\alpha+1} (1 + o(1)) + \sum_{k=1}^{p-1} \ln (1 - e^{k^\alpha - p^\alpha}) +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{\infty} \ln (1 - e^{p^\alpha - k^\alpha}) = \frac{\alpha}{\alpha+1} p^{\alpha+1} (1 + o(1)) + S_1 + S_2.$$

Очевидно,

$$|S_1| = \sum_{k=1}^{p-1} |\ln (1 - e^{k^\alpha - p^\alpha})| \leqslant$$

$$\leqslant |\ln (1 - e^{(p-1)^\alpha - p^\alpha})| + \int_1^{p-1} |\ln (1 - e^{x^\alpha - p^\alpha})| \, dx =$$

$$= |\ln (1 - e^{(p-1)^\alpha - p^\alpha})| + I_1.$$

Используя неравенство $|\ln (1 - x)| \leqslant x/(1 - x)$, $0 \leqslant x < 1$, получаем

$$I_1 \leqslant \int_1^{p-1} [e^{x^\alpha - p^\alpha} / (1 - e^{x^\alpha - p^\alpha})] \, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_1^{p-1} x^{1-\alpha} d |\ln (1 - e^{x^\alpha - p^\alpha})| =$$

$$= \frac{1}{\alpha} [(p-1)^{1-\alpha} |\ln (1 - e^{(p-1)^\alpha - p^\alpha})| -$$

$$-|\ln(1-e^{1-p^\alpha})|-(1-\alpha)\int\limits_1^{p-1} x^{-\alpha}|\ln(1-e^{x^\alpha-p^\alpha})|\,dx]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}[(p-1)^{1-\alpha}|\ln(1-e^{(p-1)^\alpha-p^\alpha})|+\max(\alpha-1,\ 0)\,I_1].$$

Таким образом,

$$I_1=O\{p^{1-\alpha}|\ln(1-e^{(p-1)^\alpha-p^\alpha})|\},\qquad p\to\infty.$$

Поскольку при $\alpha\geqslant1$ выполняется $(p-1)^\alpha-p^\alpha\leqslant\leqslant-1$ $(p\geqslant1)$, а при $\alpha<1$ выполняется $(p-1)^\alpha-p^\alpha==O(p^{\alpha-1})\to0$ $(p\to\infty)$, то всегда выполняется

$$|\ln(1-e^{(p-1)^\alpha-p^\alpha})|=O(\ln p),\qquad p\to\infty.$$

Приходим к выводу, что

$$S_1=O(p^{1-\alpha}\ln p),\qquad p\to\infty.$$

Далее,

$$|S_2|=\sum_{k=p+1}^{\infty}|\ln(1-e^{p^\alpha-k^\alpha})|\leqslant|\ln(1-e^{p^\alpha-(p+1)^\alpha})|+$$

$$+\int\limits_{p+1}^{\infty}|\ln(1-e^{p^\alpha-x^\alpha})|\,dx=|\ln(1-e^{p^\alpha-(p+1)^\alpha})|+I_2,$$

$$I_2\leqslant\int\limits_{p+1}^{\infty}[e^{p^\alpha-x^\alpha}/(1-e^{p^\alpha-x^\alpha})]\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{p+1}^{\infty}x^{1-\alpha}d|\ln(1-e^{p^\alpha-x^\alpha})|=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\Big[(p+1)^{1-\alpha}|\ln(1-e^{p^\alpha-(p+1)^\alpha})|+$$

$$+(1-\alpha)\int\limits_{p+1}^{\infty}x^{-\alpha}|\ln(1-e^{p^\alpha-x^\alpha})|\,dx\Big]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}[(p+1)^{1-\alpha}|\ln(1-e^{p^\alpha-(p+1)^\alpha})|+$$

$$+\max(1-\alpha,\ 0)(p+1)^{-\alpha}I_2],$$

откуда

$$I_2=O(p^{1-\alpha}|\ln(1-e^{p^\alpha-(p+1)^\alpha})|),\qquad p\to\infty.$$

Учитывая, что

$$|\ln(1-e^{p^\alpha-(p+1)^\alpha})|=O(\ln p), \qquad p\to\infty,$$

имеем

$$S_2=O(p^{1-\alpha}\ln p), \qquad p\to\infty.$$

В итоге получаем, что

$$\ln|f'(-e^{p^\alpha})| = \frac{\alpha}{\alpha+1}p^{\alpha+1}(1+o(1))\to\infty \qquad (p\to\infty),$$

и, следовательно, функция (П.2.13) удовлетворяет условию б) теоремы П.2.7.

Итак, функция $f(z)$, определенная соотношением (П.2.13), удовлетворяет условиям теоремы П.2.7 и, в силу этой теоремы, функция $\widetilde{\varphi}_\delta(t)=(\cos t)f(\delta\cos t)/f(\delta)$ при достаточно малом $\delta>0$ является х. ф. Чтобы определить ее порядок, заметим, что функция $\widetilde{\varphi}_\delta(t)$ четная и поэтому в силу леммы 2.3.1 выполняется

$$M(r,\widetilde{\varphi}_\delta)=\widetilde{\varphi}_\delta(ir)=(\operatorname{ch} r)f(\delta\operatorname{ch} r)/f(\delta).$$

Далее, при $0\leqslant s\to\infty$, $y=y(s)=(\ln s)^{1/\alpha}$ имеем

$$\ln f(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+se^{-k^\alpha})=$$

$$=\int_1^\infty \ln(1+se^{-x^\alpha})\,dx+O(\ln(1+se^{-1}))=$$

$$=\int_1^y \ln(1+se^{-x^\alpha})\,dx+\int_y^\infty \ln(1+se^{-x^\alpha})\,dx+O(\ln s)=$$

$$=y\ln s-\int_1^y x^\alpha\,dx+\int_1^y \ln(s^{-1}e^{x^\alpha}+1)\,dx+\int_y^\infty \ln(1+se^{-x^\alpha})dx+$$

$$+O(\ln s)=y\ln s-\frac{1}{\alpha+1}(y^{\alpha+1}-1)+J_1+J_2+O(\ln s),$$

$$J_1\leqslant\int_1^y \ln 2\,dx\leqslant y\ln 2,$$

$$J_2\leqslant\int_y^\infty se^{-x^\alpha}\,dx=\frac{s}{\alpha}y^{1-\alpha}e^{-y^\alpha}(1+o(1)).$$

Поэтому

$$\ln f(s) = \frac{\alpha}{\alpha+1}(\ln s)^{\frac{1}{\alpha}+1}(1+o(1)) = \frac{1}{\rho}(\ln s)^{\rho}(1+o(1)),$$

и, следовательно,

$$\ln M(r, \tilde{\varphi}_\delta) = \ln f(\delta \operatorname{ch} r) + O(r) =$$
$$= \frac{1}{\rho}(\ln \operatorname{ch} r + \ln \delta)^{\rho}(1+o(1)) + O(r) =$$
$$= \frac{r^{\rho}}{\rho}(1+o(1)), \qquad r \to \infty,$$

что и требовалось.

Теперь докажем теорему П.2.7. Так как все коэффициенты Тейлора функции $f(z)$, очевидно, положительны, то в силу теоремы 1.1.5 функция $\tilde{\varphi}_\delta(t)$ является х. ф. при любом $\delta > 0$. Покажем, что при достаточно малом $\delta > 0$ функция

$$\varphi_\delta(t) = \frac{1}{\tilde{\varphi}_\delta(it)} = \frac{f(\delta)}{(\operatorname{ch} t) f(\delta \operatorname{ch} t)}$$

тоже является х. ф.

Мы будем пользоваться формулой

$$\frac{1}{zf(z)} = \frac{1}{zf(0)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k f'(-a_k)(z+a_k)}, \tag{П.2.14}$$

в справедливости которой можно убедиться так. Из условия б) теоремы П.2.7 и сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{-1}$ следует, что ряд в правой части (П.2.14) сходится абсолютно. Пользуясь теорией вычетов, находим, что при $r \neq a_k$, $|z| < r$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} \frac{d\zeta}{\zeta f(\zeta)(\zeta - z)} =$$
$$= \frac{1}{zf(z)} - \frac{1}{zf(0)} + \sum_{a_k<r} \frac{1}{a_k f'(-a_k)(z+a_k)}. \tag{П.2.15}$$

В силу условия а) теоремы П.2.7 существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность $0 < r_n \to \infty$ такие, что $|f(-r_n)| \geqslant \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Устремим в (П.2.15) r к ∞ по последовательности r_n. Учитывая очевидное соотношение $\min\limits_{|z|=r} |f(z)| = |f(-r)|$, видим, что интеграл в левой части (П.2.15) стремится к нулю, и тем самым фврмула (П.2.14) доказана.

Из формулы (П.2.14) вытекает равенство

$$\frac{1}{zf(\delta z)} = \frac{1}{zf(0)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k f'(-a_k)(z+a_k\delta^{-1})}.$$

Пусть $\delta > 0$ настолько мало, что $a_1\delta^{-1} > 1$. Определяя для рассматриваемой функции $\varphi_\delta(t)$ функцию $p_\delta(x)$ соотношением (П.2.5) и пользуясь формулой (П.2.6), получим

$$\frac{p_\delta(x)}{f(\delta)} = \frac{1}{\operatorname{sh}\pi x}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}{f(0)} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k f'(-a_k)}\cdot\frac{\sin\alpha_k x}{\operatorname{sh}\alpha_k}\right\},$$

где $\alpha_k = \alpha_k(\delta) > 0$ определены равенством $\operatorname{ch}\alpha_k = a_k\delta^{-1}$. Отсюда видно, что функция $p_\delta(x)$ суммируема на $(-\infty, \infty)$ и

$$\frac{p_\delta(x)}{f(\delta)} \geqslant \frac{1}{\operatorname{sh}\pi x}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}{f(0)} - x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k|f'(-a_k)|}\cdot\frac{\alpha_k}{\operatorname{sh}\alpha_k}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\operatorname{sh}\pi x}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}{f(0)} - \frac{x\alpha_1}{\varepsilon_1\operatorname{sh}\alpha_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}\right\}, \qquad x \geqslant 0,$$

где $\varepsilon_1 = \inf\limits_{1\leqslant k<\infty} |f'(-a_k)|$. Так как $\operatorname{ch}\alpha_1 = a_1\delta^{-1}$, то при $\delta \to 0$ имеем $\alpha_1(\delta) \to \infty$, и, следовательно, $\alpha_1/\operatorname{sh}\alpha_1 \to 0$. Поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ выполняется $p_\delta(x) \geqslant 0$ $(x \geqslant 0)$, и, следовательно, функция $1/\widetilde{\varphi}_\delta(it)$ является х. ф. Теорема доказана.

Т е о р е м а П.2.8. *Если целая х. ф. $\varphi(t) \in D$ не имеет корней, то $\varphi(t) = e^{-\gamma t^2}$, $\gamma \geqslant 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $\varphi(t)$ не имеет корней, то ее можно представить в виде

$$\varphi(t) = \exp\{Q(t)\}, \qquad \text{(П.2.16)}$$

где $Q(t)$ — целая функция. По теореме П.2.6 для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\ln M(r, \varphi) = O(e^{\varepsilon r})$. Применяя теорему 1.2.12, получим

$$M(r, Q) \leqslant 4 \ln M\left(\frac{3}{2} r, \varphi\right) + O(1) = O(e^{2\varepsilon r}), \qquad r \to \infty.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то отсюда следует, что

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r, Q) = 0.$$

Применяя теорему 2.5.3 с $P(w) = e^w$, заключаем, что функция $Q(t)$ является полиномом степени не выше 2. Так как всякая х. ф. $\varphi(t)$ класса D при действительных t действительна и $|\varphi(t)| \leqslant 1$, то $Q(t)$ обязательно имеет вид $Q(t) = -\gamma t^2$, $\gamma \geqslant 0$.

Так как х. ф. б. д. закона не имеет корней (см. следствие 1 из теоремы 2.6.1, стр. 67), то из теоремы П.2.8 вытекает следующее утверждение, доказанное Э. Лукачем [4] при некоторых дополнительных предположениях.

С л е д с т в и е. *Если целая х. ф.* $\varphi(t) \in D$ *является х. ф. б. д. закона, то* $\varphi(t) = e^{-\gamma t^2}$, $\gamma \geqslant 0$.

Теоремы П.2.3—П.2.8 взяты из работы И. В. Островского [10].

П Р И Л О Ж Е Н И Е III

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ЗАКОНОВ В КОМПОЗИЦИЮ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Обозначим через B класс функций $V(x)$ ограниченной вариации на оси $(-\infty, \infty)$, нормированных условиями

$$\lim_{x\to-\infty} V(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} V(x) = 1, \quad V(x-0) = V(x).$$

Очевидно, класс всех одномерных вероятностных законов содержится в классе B. Для функций класса B можно ввести так же, как для законов, понятия х. ф., композиции и компоненты. Однако построить теорию, аналогичную теории разложений законов, здесь невозможно. В самом деле, для произвольной функции $U(x) \in B$ при достаточно малом $\delta > 0$ ряд

$$U_\delta(x) = (1-\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k U^{k*}(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на прямой и его сумма принадлежит B. Легко видеть, что

$$U_\delta(x) * \left(\frac{\varepsilon_0(x)-\delta U(x)}{1-\delta}\right) = \varepsilon_0(x).$$

Поэтому в классе B не существует неразложимых функций: всякую функцию $V(x) \in B$ можно разложить в нетривиальную композицию

$$V(x) = V_1(x) * V_2(x),$$

где

$$V_1(x) = V(x) * U_\delta(x), \quad V_2(x) = \frac{\varepsilon_0(x)-\delta U(x)}{1-\delta}.$$

Отсюда следует, что теоремы 3.4.1 и 3.5.1 в классе B теряют смысл. Так как функцию $U(x) \in B$ можно выбирать совершенно произвольно, например, можно взять с неаналитической х. ф., то в классе B теряют силу такие важные теоремы, как теорема 3.1.1 и теорема 3.1.4 Крамера.

Обозначим через B_1 подкласс класса B, состоящий из функций $V(x)$, удовлетворяющих условию $(y \to +\infty)$

$$\mathrm{Var}_{-\infty}^{-y} V + \mathrm{Var}_{y}^{\infty} V = O(\exp[-\theta(y)\, y \ln y]), \qquad (\text{П.3.1})$$

где функция $\theta(y) > 0$ монотонно стремится к $+\infty$ при $y \uparrow +\infty$. Оказывается, в классе B_1 теорема Крамера остается в силе.

Теорема П.3.1. *Пусть F — закон Гаусса, V_1 и V_2 — функции класса B_1 и пусть*

$$V_1 * V_2 = F.$$

Тогда V_1 и V_2 являются законами Гаусса.

Доказательство. Сначала заметим, что всякую функцию $V(x) \in B_1$ можно записать в виде

$$V(x) = V^+(x) - V^-(x),$$

где $V^+(x)$ и $V^-(x)$ — неубывающие функции, удовлетворяющие условию

$$\int\limits_{|x|>y} dV^+(x) + \int\limits_{|x|>y} dV^-(x) = O(\exp[-\theta(y)\, y \ln y]). \qquad (\text{П.3.2})$$

Функции V^+ и V^- являются с точностью до постоянного множителя законами. Поэтому из (П.3.2) в силу теоремы 2.2.2 ($R = \infty$) следует, что х. ф. $\varphi(t;\ V^+)$ и $\varphi(t;\ V^-)$ являются целыми функциями. Отсюда заключаем, что и х. ф. $\varphi(t;\ V) = \varphi(t;\ V^+) - \varphi(t;\ V^-)$ является целой функцией и представима во всей t-плоскости абсолютно сходящимся интегралом

$$\varphi(t;\ V) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dV(x). \qquad (\text{П.3:3})$$

Применяя для оценки роста х. ф. $\varphi(t;\ V)$ выкладки, близкие к проведенным при доказательстве теоремы 2.4.4, получаем $(t \in C^1)$

$$|\varphi(t;\ V)| \leqslant \exp\exp\{o(|t|)\}, \qquad t \to \infty. \qquad (\text{П.3.4})$$

Заметим, что из справедливости (П.3.3) во всей t-плоскости вытекает, что функция $\varphi(t;\ V)$ принимает на мнимой t-оси действительные значения и, кроме того, что

$$C(\eta,\ V) = \sup_{-\infty<\xi<\infty} |\varphi(\xi + i\eta;\ V)| < \infty. \qquad (\text{П.3.5})$$

Пусть теперь функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы П.3.1. Тогда при $t \in R^1$ имеем

$$\varphi(t;\ V_1)\,\varphi(t;\ V_2) = e^{-\gamma t^2 + i\beta t}, \qquad (\text{П.3.6})$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\beta \in R^1$. Так как функции $\varphi(t;\ V_1)$ и $\varphi(t;\ V_2)$ являются целыми, то соотношение (П.3.6) выполняется при всех $t \in C^1$. Отсюда следует, что $\varphi(t;\ V_1)$ и $\varphi(t;\ V_2)$ не имеют корней и их можно представить в виде

$$\varphi(t;\ V_j) = \exp\{\psi_j(t)\},$$

где $\psi_j(t)$ — целые функции. Поскольку $\varphi(0;\ V_j) = 1$, $j = 1, 2$, то можно считать, что $\psi_j(0) = 0$, $j = 1, 2$. Так как $\operatorname{Im}\varphi(t;\ V_j) = 0$ при $\operatorname{Re} t = 0$ и $\varphi(0;\ V_j) = 1$, $\varphi(t;\ V_j) \neq 0$, то $\varphi(t;\ V_j) > 0$ при $\operatorname{Re} t = 0$. Поэтому функции $\psi_j(t)$ действительны на мнимой t-оси.

Так как для каждой из х. ф. $\varphi(t;\ V_j)$ справедлива оценка (П.3.4), то, пользуясь теоремой 1.2.12, получаем

$$M(r,\ \psi_j) \leqslant 4\ln M\left(\frac{3}{2}r,\ \varphi(t;\ V_j)\right) + O(1) \leqslant \exp\{o(r)\}.$$

Таким образом, функции $\psi_j(t)$, $j = 1, 2$, имеют рост не выше минимального типа порядка 1.

При действительных ξ и η положим

$$u_j(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \psi_j(\xi + i\eta), \qquad j = 1, 2.$$

Учитывая (П.3.5), имеем

$$u_j(\xi, \eta) \leqslant \ln C(\eta; V_j) < \infty. \tag{П.3.7}$$

В силу (П.3.6) справедливо равенство

$$u_1(\xi, \eta) + u_2(\xi, \eta) = -\gamma(\xi^2 - \eta^2) - \beta\eta,$$

поэтому

$$u_1(\xi, \eta) \geqslant -\ln C(\eta; V_2) - \gamma(\xi^2 - \eta^2) - \beta\eta,$$

$$u_2(\xi, \eta) \geqslant -\ln C(\eta; V_1) - \gamma(\xi^2 - \eta^2) - \beta\eta.$$

Таким образом, при любом фиксированном $\eta \in R^1$ выполняется

$$u_j(\xi, \eta) = O(\xi^2), \qquad \xi \to \infty, \quad \xi \in R^1.$$

Так как функция $\psi_j(t)$ на мнимой t-оси действительна, то при всех $\xi, \eta \in R^1$ выполняется

$$u_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[\psi_j(\xi + i\eta) + \psi_j(-\xi + i\eta)]. \tag{П.3.8}$$

Отсюда видно, что при любом фиксированном $\eta \in R^1$ функция $u_j(\xi, \eta)$ аналитически продолжается на всю комплексную ξ-плоскость и допускает там оценку

$$|u_j(\xi, \eta)| \leqslant \exp\{o(|\xi|)\}.$$

Применяя теоремы 1.2.2 и 1.2.3, легко заключаем, что функция $u_j(\xi, \eta)$ является полиномом относительно ξ степени не выше 2. Таким образом, имеем

$$u_j(\xi, \eta) = A_j(\eta)\xi^2 + B_j(\eta)\xi + C_j(\eta).$$

Далее снова будем считать ξ и η действительными. Из (П.3.8) видно, что функция $u_j(\xi, \eta)$ — четная относительно ξ, поэтому $B_j(\eta) = 0$. Функция $u_j(\xi, \eta)$, будучи действительной частью целой функции, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) u_j(\xi, \eta) = 0.$$

Поэтому выполняется равенство

$$2A_j(\eta) + A_j''(\eta)\xi^2 + C_j''(\eta) = 0, \quad -\infty < \xi, \eta < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$A_j''(\eta)=0,\quad A_j(\eta)=a_j\eta+b_j,$$

$$C_j(\eta)=-\frac{1}{3}a_j\eta^3-b_j\eta^2+c_j\eta+d_j,$$

где a_j, b_j, c_j, d_j — постоянные, и мы получаем равенство

$$u_j(\xi,\ \eta)=(a_j\eta+b_j)\,\xi^2+\left(-\frac{1}{3}a_j\eta^3-b_j\eta^2+c_j\eta+d_j\right).$$

Если $a_j\neq 0$, то, полагая $\eta=(1-b_j)/a_j$, получаем противоречие с (П.3.7). Поэтому $a_j=0$,

$$u_j(\xi,\ \eta)=b_j(\xi^2-\eta^2)+c_j\eta+d_j.$$

Заметим еще, что $b_j\leqslant 0$ (иначе снова получаем противоречие с (П.3.7)) и так как $u_j(0,\ 0)=\operatorname{Re}\psi_j(0)=0$, то $d_j=0$. Итак, полагая $\gamma_j=-b_j$, $\beta_j=-c_j$, получаем

$$u_j(\xi,\ \eta)=-\gamma_j(\xi^2-\eta^2)-\beta_j\eta,$$

откуда

$$\psi_j(t)=-\gamma_j t^2+i\beta_j t.$$

Теорема доказана.

Покажем, что если в определении класса B_1 условие (П.3.1) заменить немного более слабым:

$$\operatorname{Var}_{-\infty}^{-y}V+\operatorname{Var}_y^{\infty}V=O(\exp\{-y\ln y\}),\qquad y\to+\infty,\quad(\text{П.3.9})$$

то теорема П.3.1 перестанет быть верной.

Пример 1. Положим ($\lambda>0$)

$$\varphi_1(t)=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+2\lambda\left(\cos\frac{t}{2}-1\right)\right\},$$

$$\varphi_2(t)=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}-2\lambda\left(\cos\frac{t}{2}-1\right)\right\}.$$

Рассмотрим функцию ($j=1,\ 2$)

$$p_j(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j(t)\,e^{-itx}\,dt,\qquad -\infty<x<\infty.\quad(\text{П.3.10})$$

Легко видеть, что функция $p_j(x)$ действительна. Заменяя в интеграле (П.3.10) интегрирование по действительной

t-оси интегрированием по прямой $\operatorname{Im} t = \eta$, получаем

$$|p_j(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) + 2\lambda e^{|\eta|/2} + 2\lambda + \right.$$

$$\left. + \eta x\right\} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{1}{2}\eta^2 + 2\lambda e^{|\eta|/2} + 2\lambda + \eta x\right\}.$$

Беря $\eta = -2(\operatorname{sign} x)\ln|x|$, приходим к оценке

$$p_j(x) = O\left(\exp\left\{-\frac{3}{2}|x|\ln|x|\right\}\right), \qquad x \to \infty. \qquad (\text{П.3.11})$$

Положим

$$V_j(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_j(u)\,du, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Тогда $\varphi(t; V_j) = \varphi_j(t)$, $\varphi(t; V_1)\,\varphi(t; V_2) = e^{-t^2}$, и, следовательно, композиция $V_1 * V_2$ является законом Гаусса. Из оценки (П.3.11) легко следует, что V_1 и V_2 удовлетворяют условию (П.3.9).

Теорема П.3.1 не содержит теоремы Крамера, так как класс B_1 содержит не все законы. Г. П. Чистяков [3] указал класс, содержащий все законы, удовлетворяющие условию симметрии $F(x) = 1 - F(-x+0)$, в котором сохраняет силу теорема Крамера. Этот класс — будем обозначать его через B_2 — состоит из функций $V(x) \in B$, удовлетворяющих следующим трем условиям.

I. Выполняется условие симметрии

$$V(x) = 1 - V(-x+0), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Это условие равносильно условию

$$\operatorname{Im} \varphi(t; V) = 0, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Чтобы сформулировать второе условие, обозначим через $V_+(x)$ положительную, через $V_-(x)$ отрицательную вариации функции $V(x)$, т. е.

$$V_+(x) = \frac{1}{2}\{(\operatorname{Var}_{-\infty}^{x} V) + V(x)\},$$

$$V_-(x) = \frac{1}{2}\{(\operatorname{Var}_{-\infty}^{x} V) - V(x)\}.$$

Функции $V_+(x)$ и $V_-(x)$ — неубывающие, и

$$V(x) = V_+(x) - V_-(x).$$

Если $V(x)$ — закон, то $V_-(x) \equiv 0$. Наше второе условие будет означать в некотором смысле «малость» $V_-(x)$.

II. Справедлива оценка

$$\int\limits_{|x|>y} dV_-(x) = O(\exp\{-\theta(y)\, y \ln y\}), \qquad y \to +\infty,$$

где $\theta(y) \uparrow \infty$ при $y \uparrow \infty$.

Перейдем к формулировке третьего условия. В силу условия II при всех η, $-\infty < \eta < \infty$, конечен интеграл

$$I(\eta;\ V_-) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta x}\, dV_-(x)$$

(он совпадает с $\varphi(i\eta;\ V_-)$; $\varphi(t;\ V_-)$ является целой функцией). Так как функция $V_+(x)$ неубывающая, то интеграл

$$I(\eta;\ V_+) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta x}\, dV_+(x)$$

во всяком случае имеет смысл, хотя при $\eta \neq 0$ он может, вообще говоря, равняться $+\infty$. Поэтому для функций $V(x) \in B$, удовлетворяющих условию II, имеет смысл интеграл

$$I(\eta;\ V) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta x}\, dV(x) = I(\eta;\ V_+) - I(\eta;\ V_-).$$

III. При всех η, $-\infty < \eta < \infty$, выполняется

$$I(\eta;\ V) \neq 0.$$

Очевидно, классу B_2 принадлежат все законы, удовлетворяющие условию I. Но этот класс содержит не только законы, например, ему принадлежит любая функция вида $V(x) = 2F(x) - \varepsilon_0(x)$, где $F(x)$ — закон, удовлетворяющий условию I.

Теорема П.3.2. *Пусть F — закон Гаусса, V_1 и V_2 — функции класса B_2 и пусть*

$$V_1 * V_2 = F.$$

Тогда V_1 и V_2 являются законами Гаусса.

Доказательство теоремы П.3.2 мы приводить не будем, покажем только, что она перестает быть верной, если в определении класса B_2 опустить условие III.

Пример 2. Положим

$$V_1(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-|u|}\,du,\quad V_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}(2-u^2)\,du.$$

Тогда имеем

$$\varphi(t;\ V_1)=\frac{1}{1+t^2},\quad \varphi(t;\ V_2)=e^{-t^2/2}(1+t^2),$$

откуда

$$\varphi(t;\ V_1)\,\varphi(t;\ V_2)=e^{-t^2/2};$$

поэтому $V_1 * V_2$ является законом Гаусса. Функция $V_1(x)$ удовлетворяет условиям I—III. Функция $V_2(x)$ удовлетворяет условиям I и II, но условию III она не удовлетворяет, поскольку $I(1;\ V_2)=\varphi(i;\ V_2)=0$.

Теоремы П.3.1, П.3.2 и пример 2 принадлежат Г. П. Чистякову. Теорема П.3.1 является обобщением результата работы Ю. В. Линника и В. П. Скитовича [1], откуда заимствован пример 1. В этой работе, вместо условия (П.3.1), подкласс в B выделялся условиями:

$$V(x)=1-V(-x+0);$$
$$\mathrm{Var}_{-\infty}^{-y}V+\mathrm{Var}_{y}^{\infty}V=O(\exp\{-y^{1+\varepsilon}\}),\qquad \varepsilon>0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

О ГАУССОВЫХ КОМПОНЕНТАХ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Обозначим через N_n класс всех n-мерных законов Гаусса. Мы не исключаем законы с различными степенями вырождения, так что в N_n, в частности, входят и законы вида $\varepsilon_\beta(E)$, $\beta\in R^n$. Класс N_n можно определять как класс законов вида $P_{\beta,Q}$, где через $P_{\beta,Q}$ обозначен n-мерный закон с х. ф.

$$\varphi(t;\ P_{\beta,Q})=\exp\{i\langle\beta,\ t\rangle-Q(t)\},$$

где $\beta\in R^n$, $Q(t)$ — неотрицательная квадратичная форма (возможно, что $Q(t)\equiv 0$).

Пусть P — произвольный n-мерный закон. Компоненту закона P, принадлежащую классу N_n, будем называть гауссовой компонентой закона P; обозначим через

$G(P)$ множество всех гауссовых компонент закона P. Так как мы условились включать в N_n и законы вида ε_β, то множество $G(P)$ всегда непусто. Заметим, что принадлежность или непринадлежность закона $P_{\beta, Q}$ множеству $G(P)$ определяется квадратичной формой Q, а вектор $\beta \in R^n$ не играет роли.

Во множестве квадратичных форм имеется естественное отношение частичного порядка: считаем, что $Q_1(t) \prec Q_2(t)$, если форма $Q_2(t) - Q_1(t)$ неотрицательна. Заметим, что если $Q_1 \prec Q_2$, $\beta_1, \beta_2 \in R^n$, то $P_{\beta_2, Q_2} = P_{\beta_1, Q_1} * P_{\beta_2-\beta_1, Q_2-Q_1}$; поэтому из $P_{\beta_2, Q_2} \in G(P)$ следует, что $P_{\beta_1, Q_1} \in G(P)$.

С. Р. Рао поставил следующий вопрос: всегда ли существует во множестве $G(P)$ закон $P_{\beta, Q}$, максимальный в том смысле, что для любого закона $P_{\beta_1, Q_1} \in G(P)$ выполняется $Q_1 \prec Q$?

В одномерном случае ответ на этот вопрос утвердителен. В самом деле, в этом случае любая неотрицательная квадратичная форма имеет вид $Q(t) = \gamma t^2$, где $\gamma \geqslant 0$. Положим $\delta = \sup\limits_{P_{\beta, Q} \in G(P)} \gamma$. По теореме 3.5.2 (о компактности множества компонент) получаем, что $\delta < \infty$ и что закон P_{0, Q_1}, где $Q_1(t) = \delta t^2$, принадлежит $G(P)$. Очевидно, закон P_{0, Q_1} является максимальным в указанном выше смысле.

Уже в двумерном случае ответ оказывается отрицательным. Это обстоятельство установлено Б. Рамачандраном и одновременно независимо И. В. Островским, из работы которого [9] взят приводимый ниже пример.

Рассмотрим двумерные законы P, P_1 и P_2, определяемые х. ф.

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(t_1, t_2; P) &= \frac{1}{2}\{\exp[-(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)] + \\
&\quad + \exp[-(t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2)]\}, \\
\varphi(t_1, t_2; P_1) &= \frac{1}{2}\left\{\exp\left[-\left(\frac{1}{2}t_1 + t_2\right)^2\right] + \right. \\
&\quad \left. + \exp\left[-\left(\frac{1}{2}t_1 - t_2\right)^2\right]\right\}, \\
\varphi(t_1, t_2; P_2) &= \frac{1}{2}\left\{\exp\left[-\left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2\right] + \right. \\
&\quad \left. + \exp\left[-\left(t_1 - \frac{1}{2}t_2\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П}.4.1)$$

Написанные функции действительно являются х. ф. некоторых двумерных законов потому, что каждая из них представляет собой выпуклую линейную комбинацию (см. гл. I, стр. 14) двух х. ф. законов из N_2. Нетрудно убедиться в справедливости тождеств

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2; P) &= \varphi(t_1, t_2; P_1)\exp\left(-\frac{3}{4}t_1^2\right),\\ \varphi(t_1, t_2; P) &= \varphi(t_1, t_2; P_2)\exp\left(-\frac{3}{4}t_2^2\right).\end{aligned}\right\} \tag{П.4.2}$$

Поэтому законы P_{0,Q_1} и P_{0,Q_2}, где

$$Q_1(t) = \frac{3}{4}t_1^2, \qquad Q_2(t) = \frac{3}{4}t_2^2,$$

входят во множество $G(P)$.

Предположим, что существует закон $P_{\beta,Q} \in G(P)$ такой, что

$$Q_1 \prec Q, \quad Q_2 \prec Q. \tag{П.4.3}$$

Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Так как $P_{0,Q} \in G(P)$, то имеем

$$\varphi(t_1, t_2; P) = \varphi(t_1, t_2; P_3)\exp[-Q(t)],$$

где P_3 — некоторый двумерный закон. Сравнивая это соотношение с (П.4.2), получим

$$\varphi(t_1, t_2; P_1) = \\ = \varphi(t_1, t_2; P_3)\exp[-(Q(t) - Q_1(t))]. \tag{П.4.4}$$

Полагая

$$Q(t) = \gamma_{11}t_1^2 + 2\gamma_{12}t_1t_2 + \gamma_{22}t_2^2,$$

можем переписать равенство (П.4.4) в виде

$$\frac{1}{2}\left\{\exp\left[-\left(\frac{1}{2}t_1 + t_2\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{1}{2}t_1 - t_2\right)^2\right]\right\} = \\ = \varphi(t_1, t_2; P_3)\exp\left[-\left(\left(\gamma_{11} - \frac{3}{4}\right)t_1^2 + 2\gamma_{12}t_1t_2 + \gamma_{22}t_2^2\right)\right]. \tag{П.4.5}$$

В силу первого из условий (П.4.3) квадратичная форма

$$Q(t) - Q_1(t) = \left(\gamma_{11} - \frac{3}{4}\right)t_1^2 + 2\gamma_{12}t_1t_2 + \gamma_{22}t_2^2$$

неотрицательна. Второе из условий (П.4.3) показывает, что эта квадратичная форма не может тождественно равняться нулю. Отсюда следует, что она принимает положительные значения по меньшей мере для одного из следующих значений $t = (t_1, t_2)$:

$$t=\left(1, \frac{1}{2}\right), \quad t=\left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

Поэтому справедливо хотя бы одно из неравенств

$$\left(\gamma_{11}-\frac{3}{4}\right)+\gamma_{12}+\frac{1}{4}\gamma_{22}>0, \quad \left(\gamma_{11}-\frac{3}{4}\right)-\gamma_{12}+\frac{1}{4}\gamma_{22}>0. \tag{П.4.6}$$

Пусть выполнено первое. Положив в (П.4.5) $t_2=t_1/2$, получим равенство

$$\frac{1}{2}\{\exp(-t_1^2)+1\}=$$
$$=\varphi(t_1, t_1/2;\ P_3)\exp\left[-\left(\gamma_{11}-\frac{3}{4}+\gamma_{12}+\frac{1}{4}\gamma_{22}\right)t_1^2\right].$$

Устремим в этом равенстве t_1 к ∞. Предел левой части равен $1/2$, в то время как предел правой части равен нулю ($|\varphi(t_1, t_2;\ P_3)| \leqslant 1$ при всех $t=(t_1, t_2) \in R^2$). Таким образом, получаем противоречие. Если выполнено второе из неравенств (П.4.6), то для получения противоречия полагаем в (П.4.5) $t_2=-t_1/2$ и устремляем t_1 к ∞.

Естественно возникает следующий вопрос. Обозначим через $H(P)$ множество точек (a, b, c) пространства R^3 таких, что принадлежит $G(P)$ закон $P_{0,Q}$ с

$$Q(t)=at_1^2+2bt_1t_2+ct_2^2. \tag{П.4.7}$$

Каким условиям должно удовлетворять множество $E \subset R^3$ для того, чтобы существовал двумерный закон P такой, что $H(P)=E$?

Нетрудно указать некоторые необходимые условия. Из теоремы 6.2.8 (о компактности множества компонент) следует, что для любого закона P множество $H(P)$ является ограниченным и замкнутым. Так как условие неотрицательности квадратичной формы (П.4.7) записывается в виде системы неравенств $b^2 \leqslant ac$, $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то множество $H(P)$ должно лежать в конусе $K_0 = \{(a, b, c)\colon b^2 \leqslant ac,\ a \geqslant 0,\ c \geqslant 0\}$. Кроме того, можно утверждать, что множество $H(P)$ вместе со всякой точкой (α, β, γ) содержит множество $K_0 \cap K(\alpha, \beta, \gamma)$, где

$K(\alpha, \beta, \gamma)$ — конус

$$\{(a, b, c)\colon (b-\beta)^2 \leqslant (a-\alpha)(c-\gamma),\ a \leqslant \alpha,\ c \leqslant \gamma\}.$$

Последнее вытекает из того, что если $Q_1(t) = \alpha t_1^2 + 2\beta t_1 t_2 + \gamma t_2^2$, $Q_2(t) = a t_1^2 + 2b t_1 t_2 + c t_2^2$, то соотношение $Q_2 \prec Q_1$ записывается в виде неравенств $(b-\beta)^2 \leqslant (a-\alpha)(c-\gamma)$, $a \leqslant \alpha$, $c \leqslant \gamma$.

Заметим, что для закона P с х. ф. (П.4.1) имеем

$$H(P) = K_0 \cap K\left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \cap K\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Закон P, для которого

$$H(P) = K_0 \cap \{\bigcap_{(\alpha,\beta,\gamma)\in A} K(\alpha, \beta, \gamma)\},$$

где A — любое наперед заданное множество в K_0, можно задать с помощью х. ф.

$$\varphi(t_1, t_2; P) = \sum_{(a,\, b,\, c)\in M} \lambda(a, b, c) \exp\left[-(a t_1^2 + 2b t_1 t_2 + c t_2^2)\right],$$

где M — не более чем счетное множество, плотное в A, а $\lambda(a, b, c)$ — положительные числа такие, что

$$\sum_{(a,\, b,\, c)\in M} \lambda(a, b, c) = 1.$$

Вопрос, аналогичный поставленному выше, можно сформулировать и в n-мерном случае; множество $H(P)$ тогда лежит в пространстве $n(n+1)/2$ измерений.

КОММЕНТАРИИ

К главе I

В связи с теоремой 1.1.3 отметим, что М. Г. Крейн [1] рассматривал функции, эрмитово-положительные на конечном отрезке $[-a, a]$, т. е. непрерывные функции

$$\varphi(t), \quad -a \leqslant t \leqslant a,$$

для которых квадратичная форма

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k \tag{К.1}$$

неотрицательна при любом выборе

$$t_1, \ldots, t_n \in [-a, a], \quad n = 1, 2, \ldots$$

М. Г. Крейн доказал, что такая функция подолжается, вообще говоря, не единственным образом, до эрмитово-положительной на всей оси $(-\infty, \infty)$ и дал описание возможных продолжений. Эти результаты М. Г. Крейна в подробном изложении можно найти в монографии Ю. М. Березанского [1] (гл. VIII, § 3, пп. 8, 9).

С. Бохнер [1] нашел необходимые и достаточные условия представимости функции

$$\varphi(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

в виде

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dV(x), \tag{К.2}$$

где $V(x)$ — функция ограниченной вариации на оси $(-\infty, \infty)$. М. Г. Крейн [2] дал условия представимости в виде (К.2) функции $\varphi(t)$, заданной на конечном отрезке $[-a, a]$, и получил описание возможных представлений.

Приведем некоторые теоремы о х. ф., не вошедшие в основной текст монографии.

Теорема К.1 (М. Матиас [1], А. Я. Хинчин [3]). *Для того, чтобы функция* $\varphi(t)$ *была х. ф., необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность функций* $\{\psi_n(x)\}$ *такая, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2\,dx = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x+t)\,\overline{\psi_n(x)}\,dx \to \varphi(t) \qquad (n \to \infty)$$

равномерно на каждом конечном интервале.

Доказательство можно найти также в книге Ю. В. Линника [10], стр. 50—52.

Теорема К.2 (Полиа [1]). *Пусть* $\varphi(t)$ — *действительная непрерывная четная функция,*

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0.$$

Если функция $\varphi(t)$ *вогнута на* $(0, \infty)$, *то* $\varphi(t)$ *является х. ф.*

Доказательство можно найти в книгах В. Феллера [1], стр. 581, Ю. В. Линника [10], стр. 44—45.

В связи с теоремой 1.1.5 отметим следующие результаты.

Теорема К.3. *Для того чтобы функция* $g(\zeta)$, *определенная в круге*

$$|\zeta| \leqslant 1,$$

обладала свойством: какова бы ни была х. ф. $\varphi(t)$, *функция* $g(\varphi(t))$ *тоже является х. ф.,— необходимо и достаточно, чтобы функция* $g(\zeta)$ *допускала представление*

$$g(\zeta) = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn}\zeta^m\bar{\zeta}^n, \qquad |\zeta| \leqslant 1, \tag{K.3}$$

где $a_{mn} \geqslant 0$,

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn} = 1.$$

Этот результат получен Герцем [1], более простое доказательство дали Конхейм и Вейс [1].

Теорема К.4 (Конхейм и Вейс [2]). *Для того чтобы функция* $h(\zeta)$, *определенная в круге*

$$|\zeta| \leqslant 1,$$

обладала свойством: какова бы ни была х. ф. $\varphi(t)$, *функция* $h(\varphi(t))$ *является х. ф. б. д. закона,— необходимо и достаточно, чтобы функция* $h(\zeta)$ *допускала представление*

$$h(\zeta) = \exp\{c(g(\zeta) - 1)\}, \qquad |\zeta| \leqslant 1,$$

где $c \geqslant 0$, *а* $g(\zeta)$ *имеет вид* (К.3).

К главе II

Первое утверждение теоремы 2.1.1 хорошо известно, второе принадлежит П. Леви [1], стр. 174. Пример 1 взят из работы А. Зигмунда [1]. Э. Питман [1] доказал, что для существования $\varphi'(0; F)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty} x\,W_F(x) = 0$ и существовал конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{-t}^{t} x\,dF(x)$. Доказательство теоремы Питмана можно найти в книге В. Феллера [1], стр. 635. Результат Питмана обобщен в работе Б. Моруччи [1]. Р. Боас [1] доказал, что х. ф. $\varphi(t; F)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha < 1$, в том и только том случае, когда $W_F(x) = O(x^{-\alpha})$, $x \to +\infty$.

Теорема 2.2.1 принадлежит П. Леви [2], стр. 41; несколько позднее она независимо передоказана Д. А. Райковым [3]. Теорема 2.2.3 является объединением результатов П. Леви [2] (случай $a < 0 < b$) и И. Марцинкевича [2] (случай $a = 0$, $b > 0$).

Хребтовые функции впервые рассматривал Д. Дюге [1], которому принадлежит теорема 2.3.2 и ее следствия. Термин «хребтовая функция» введен Ю. В. Линником [10]. Пример 1 взят из работы Д. Дюге [1], пример 2 — из работы Д. Дюге [2]. Пример 3, по-видимому является новым; то, что функция $(1 - t^2)\,e^{-\alpha t^2}$ является х. ф. лишь при $\alpha \geqslant 1/2$, отмечено Д. Дюге [2].

Теоремы 2.4.1—2.4.3 установлены Г. Полиа [1], теорема 2.4.4 — Б. Рамачандраном [1]. Более тонкие характеристики роста целой х. ф. и их связь с поведением закона изучались в работах Г. Россберга [1, 2]. Результат Б. Рамачандрана, о котором шла речь в замечании на стр. 57, обобщен Н. И. Яковлевой [1]. Пример, приведенный в конце § 4, является незначительной модификацией примера из книги Г. Полиа и Г. Сеге [1] (отд. IV, задача № 180).

В формулировке теоремы 2.5.1, приведенной в работе И. Марцинкевича [1], функция $\varphi(t)$ предполагается характеристической. Однако при доказательстве (которое мы воспроизводим без существенных изменений) используется лишь то, что эта функция является хребтовой. Замечание на стр. 60 близко к одной теореме Э. Лукача [3]. Теорема 2.5.2 является обобщением результата Э. Лукача [2]. Этот результат получается при

$$P(w) = \exp\exp\ldots\exp w.$$

Ю. В. Линник [10, стр. 255] поставил вопрос, может ли функция вида

$$\varphi(t) = \exp\{Q(t)\}$$

быть х. ф., если $Q(t)$ — целая трансцендентная функция такая, что $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1}\ln M(r, Q) = 0$. Теорема 2.5.3 (И. В. Островский [1]) дает отрицательный ответ на этот вопрос. В. В. Зимогляд [1] доказал, что в (2.5.11) можно заменить $\overline{\lim}$ на $\underline{\lim}$. Отметим такую теорему В. В. Зимогляда [2], Теорема К.5. *Пусть* $P(w) \not\equiv \mathrm{const}$ *и* $Q(t)$ — *целые функции и* $M(r, P) = |P(r)|$, $0 < r < \infty$. *Если функция* $\varphi(t) = P(\lambda_1 e^{it} + \lambda_2 e^{-it} + Q(t))$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, *является хребтовой, то* $Q(t)$ — *либо полином степени не больше* 2, *либо целая функция порядка* $\geqslant 1$.

Этот результат является усилением одной теоремы Э. Лукача [2], обобщенной И. В. Островским [1]. В связи с теоремой Марцинкевича см. также работы: Христенсен [1], Кэроли [1], Миллер [1].

Теорема 2.6.1 для случая $b = -a > 0$ доказана Д. А. Райковым [4]; позднее К. Эссеен [2] рассмотрел случай $a = 0$, $b > 0$. Пример 1 взят из работы Э. Лукача [1]. Теорема 2.6.4 (теорема 2.6.3 ей равносильна) и пример 2 принадлежат К. Эссеену [2]. Законы, рассмотренные в примере 3, введены в работе А. М. Кагана, Ю. В. Линника, А. Л. Рухина и И. В. Романовского [1]. Безграничную делимость этих законов доказал С. Г. Малошевский, наше изложение следует его работе [4].

К главе III

Теорема 3.1.1 для случая $a = -\infty$, $b = +\infty$ доказана П. Леви [4], в случае $a = -b$ — Д. А. Райковым [3]. Пример 1 взят из работы И. В. Островского [7]. Теорема 3.1.3 принадлежит Д. А. Райкову [3]. Теорема 3.1.5 систематически использовалась в работах Ю. В. Линника [5, 7, 8, 11], хотя не была там сформулирована в качестве самостоятельного результата.

Понятия спектра и дискретного спектра закона впервые введены, по-видимому, А. Винтнером [1], которому принадлежит и теорема 3.2.1. Заметим, что вместо термина «дискретный спектр» А. Винтнер употребляет «точечный спектр» (the point spectrum).

Существование неразложимых законов впервые отмечается в книге П. Леви [2]. Теорема 3.3.1 высказана П. Леви и доказана одновременно М. Краснером и Б. Ранулак [1], Д. А. Райковым [2] и (это отмечает Ж. Адамар в примечании к работе Краснера и Ранулак) Л. Льенаром. Наше изложение следует работе Краснера и Ранулак. Понятие неразложимого множества введено в работе Партасаратхи, Рао и Варадгена [1], в которой изучаются неразложимые законы на группах. В частности, в этой работе установлено, что n-мерные неразложимые законы образуют в топологии слабой сходимости плотное множество класса G_δ во множестве всех n-мерных законов. Теорема 3.3.3 содержится в этом результате. Примеры 2—5, возможно, в явном виде не публиковались ранее, но лежащие в их основе идеи использовались в работах П. Леви [4], Партасаратхи, Рао и Варадгена [1]. Пример 5 показывает, что для любого ограниченного замкнутого множества E существует неразложимый закон F, для которого $S(F) = E$. Возникает вопрос, можно ли освободиться от требования ограниченности множества E. Ответ оказывается утвердительным (Л. С. Кудина [1]), более того, для любого неограниченного замкнутого множества E и чисел $\rho > 1$ и $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ можно построить неразложимый закон F такой, что $S(F) = E$, х. ф. которого имеет порядок ρ и величину типа σ. Лемма 3.3.4 и пример 6 взяты из заметки Л. С. Кудиной [2]. Вопрос о существовании абсолютно непрерывного неразложимого закона с ограниченным спектром $S(F)$ был поставлен Г. Крамером [2] и решен П. Леви [7]. Пример 9 является некоторым видоизменением примера П. Леви [7]. Заметим, что утвердительный ответ на вопрос Г. Крамера следует также из примера 6. Пример 8 взят из работы Д. Дюге [2], но наши рассуждения отличаются от рассуждений Дюге. Примеры более общего вида указаны в работе Э. Лукача [3], где подробно исследованы целые х. ф. порядка 2 с конечным числом корней и найдены необходимые и достаточные условия их неразложимости. П. Леви [3] указал примеры неразложимых законов, х. ф. которых являются целыми функциями без корней.

Теорема 3.4.1 доказана А. Я. Хинчиным в [2]. В этой работе свойство (vi) функционала $N_a[\varphi]$ доказывается иначе. Лемма 3.4.1, на которую опирается наше доказательство этого свойства, близка к одному утверждению из книги Дж. Дуба [1] (стр. 43), там же см. неравенство (3.4.4). Неравенство (3.4.3), как указывает А. Я. Хинчин [2], принадлежит Д. А. Райкову. Возможность неоднозначного разложения закона на неразложимые компоненты была отмечена А. Я. Хинчиным [2] и П. Леви [4]. Примеры 1 и 2 взяты из статьи П. Леви [4]. П. Леви [8] поставил вопрос об описании множества всех неразложимых компонент закона F равномерного распределения на отрезке $[-1, 1]$. Как показал А. Тортра [1], из результатов работы Т. Льюиса [1] вытекает, что все неразложимые компоненты этого закона F имеют вид (3.4.18). Т. Льюис [1] доказал также, что если F_1 и F_2 — компоненты этого закона F такие, что $F = F_1 * F_2$, то либо F_1 и F_2 сингулярны, либо один из законов F_1 и F_2 абсолютно непрерывный, а другой дискретный. Пример 3 Б. Рамачандран [3] (стр. 71—72) приписывает Р. Лага. То обстоятельство, что композиция двух неразложимых законов может иметь гауссову компоненту, впервые отмечено Р. Фишером и Д. Дюге [1].

Теоремы 3.5.1 и 3.5.2 доказаны А. Я. Хинчиным в [2]. Пример 1 заимствован из работы Д. А. Райкова [3], пример 2 — из работы А. Я. Хинчина [2]. В. М. Тупицына [1] доказала для хребтовых функций теоремы, аналогичные теоремам 3.4.1 и 3.5.1.

К главе IV

Результаты этой главы принадлежат Ю. В. Linнику [6].

К главе V

Теорема 5.1.1 принадлежит Ю. В. Линнику [5]; ему же принадлежат леммы 5.1.1—5.1.3. Дальнейший ход приводимого нами доказательства теоремы 5.1.1 существенно отличается от первоначального доказательства Ю. В. Линника и следует работе И. В. Островского [4]. Теорема 5.1.2 доказана Д. А. Райковым [1] еще в 1937 г.

Результаты из § 2 содержатся в работе И. В. Островского [5], некоторые сформулированы там в ослабленном виде.

Первоначально теорема 5.3.1 была доказана Ю. В. Линником [8] при условии

$$\int\limits_{|x|\geqslant y} dG(x) = O(\exp[-\exp(y^{1+\alpha})]), \qquad \alpha > 0,\ y \to +\infty.$$

Ю. В. Линник [10, стр. 257], высказал предположение, что это условие можно заменить условием: для любого $K > 0$ выполняется

$$\int\limits_{|x|\geqslant y} dG(x) = O(\exp[-Ky^2]), \qquad y \to +\infty.$$

В приводимой нами формулировке теорема 5.3.1 доказана И. В. Островским [5]; из нее следует справедливость высказанного Ю. В. Линником предположения. Метод, примененный для доказательства теоремы 5.3.1, является развитием метода Ю. В. Линника и позволяет получить (И. В. Островский [5]) ряд представляющих самостоятельный интерес теорем о виде компонент б. д. законов с х. ф., целыми или аналитическими в полуплоскости.

Теорема 5.4.1 доказана И. В. Островским [2].

Пример закона из $\mathfrak{L}\setminus I_0$ построен А. А. Гольдбергом и И. В. Островским [1]. Асимптотические свойства коэффициентов ряда

$$\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

подробно изучены У. К. Хейманом [3]. Используемое нами неравенство $a_{n+1}/a_n > 2/3$ является одним из его результатов.

К главе VI

Теорема 6.1.1 принадлежит Крамеру и Уолду [1]. При некоторых дополнительных предположениях относительно закона его можно однозначно определить, зная меньшее количество проекций. Результаты такого типа получены в работе Келлерера [1].

Теорема 6.1.2 является простым следствием неравенства (6.1.8), содержащегося в работе Крамера и Уолда, и теоремы 2.1.1. Трубчатые области в ряде руководств по теории функций многих комплексных переменных называются цилиндрическими областями. Теоремы 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7 и 6.1.8 доказаны И. В. Островским [7]; теорему 6.1.4 независимо другим методом получил Р. Кюппан [2], которому принадлежит теорема 6.1.9.

Теорема 6.2.1 доказана независимо Р. Кюппаном [2] и И. В. Островским [7]. Теорема 6.2.3, в существенной части, содержится в работе Б. Иессена и А. Винтнера [1]. То обстоятельство, что проекции закона равномерного распределения на трехмерной сфере являются законами равномерного распределения на отрезке, отмечено у Феллера [1, гл. I, § 10, стр. 47]. Заметим, что проекции закона равномерного распределения на двумерной сфере (окружности) являются неразложимыми (Л. С. Кудина [2]). Изучению неразложимости законов, спектры которых лежат на выпуклой поверхности, посвящена работа А. Д. Милки [1]. В этой работе, в частности, установлено, что если $S(P)$ является замкнутой выпуклой поверхностью в R^n, то закон P — неразложимый. Пример 2 и теорема 6.2.5 публикуются впервые. Пример неразложимого закона с б. д. проекциями впервые указал П. Леви [6]. Этот пример — более сложный, чем наш пример 2, однако имеет ряд преимуществ; в частности, фигурирующий в нем закон (закон Уишарта) играет важную роль в статистике. Теоремы 6.2.6 и 6.2.7 в более общей ситуации (для законов на локально компактных абелевых группах) содержатся в работе Партасаратхи, Рао и Варадгена [2].

Понятие многомерного закона Пуассона встречается в ряде работ, относящихся к 30-м годам. Ссылки на эти работы можно найти в статье Г. Тейчера [1]. П. Леви [9] считает более целесообразным определять многомерный закон Пуассона как закон с х. ф. вида

$$\varphi(t;\ P)=\exp\{i\langle\beta,\ t\rangle+\lambda(e^{i\langle t,\ r\rangle}-1)\},$$

где $\beta\in R^n$, $\lambda>0$, $r\in R^n$.

Теорема 6.3.2 принадлежит Г. Крамеру [1], теорема 6.3.3 — Г. Тейчеру [1]; обобщающая эти результаты теорема 6.3.1 доказана независимо Р. Кюппаном [1] и И. В. Островским [6], которому принадлежит излагаемое нами доказательство. Дальнейшими обобщениями теоремы 6.3.1 занимались Р. Кюппан [3, 6] и позднее Л. З. Лившиц [1], который получил более сильные результаты.

Результаты, излагаемые в § 4, ведут свое начало от работ Д. А. Райкова [3] и П. Леви [5], в которых рассматривались одномерные б. д. законы без гауссовой компоненты с конечным пуассоновым спектром. Теоремы 6.4.1 и 6.4.2 получены И. В. Островским [3], [8] в связи с поставленным Ю. В. Линником [10, стр. 257] вопросом: существуют ли законы класса I_0 с континуальным пуассоновым спектром. Из теоремы 6.4.1 следует (см. пример на стр. 257) утвердительный ответ на этот вопрос. Теорема 6.4.3 доказана Р. Кюппаном [11]. При различных дополнительных предположениях относительно спектральной меры Леви закона P ее получали ранее И. В. Островский [3, 8, 11], Р. Кюппан [9, 10], Г. П. Чистяков [4]. Отметим, что лемма 6.6.1, необходимая для строгого обоснования рассуждений Р. Кюппана [11], любезно сообщена авторам М. И. Гординым. Результат, несколько более сильный, чем отмеченный нами в виде следствия из теоремы 6.4.3, впервые был получен Г. П. Чистяковым [4], который не опирался на эту теорему. Г. П. Чистяковым было установлено существование законов класса I_{0n}, х. ф. которых не допускают аналитического продолжения с R^n ни в какую область C^n. Этот результат дает утвердительный ответ на вопрос, поставленный еще в 1938 году Д. А. Райковым [3]. Теорема 6.4.4 о плотности класса I_{0n} в классе всех б. д. законов была получена в одномерном случае И. В. Островским [11] и перенесена на многомерный Л. З. Лившицем и И. В. Островским [1]. В этих работах она выводилась из теорем менее сильных, чем теорема 6.4.3.

Отметим следующий результат, дополняющий теорему 6.4.3 в одномерном случае.

Теорема К.6. *Пусть P — одномерный б. д. закон без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви которого вполне* *конечна и сосредоточена на не более чем счетном множестве* $A = \{\lambda_{ks}\}_{k,s=1}^{\infty}$, *где числа* $\lambda_{k+1,s}/\lambda_{k,s}$ $(k, s = 1, 2, \ldots)$ — *натуральные, отличные от единицы, а числа* $\lambda_{k1} > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *образуют множество с независимыми точками. Предположим, что для некоторого* $K > 0$ *выполнено условие*

$$\int\limits_{x \geqslant y} \nu_P(dx) = O\{\exp(-Ky^2)\}, \qquad y \to +\infty.$$

Тогда закон P *принадлежит классу* I_0.

В приведенной формулировке теорема получена И. В. Островским [11]; при дополнительном предположении конечности множества A ее ранее доказал Р. Кюппан [3, 8].

В связи с результатами, излагаемыми в § 4, отметим, что еще в конце 30-х годов П. Леви [3, 5] подробно исследовал условия принадлежности I_0 одномерных б. д. законов без гауссовой компоненты с конечным пуассоновым спектром. В частности, им найдены необходимые и достаточные условия принадлежности I_0 б. д. законов с х. ф. вида

$$\varphi(t; F) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e^{in_k t} - 1)\right\},$$

где $\lambda_k > 0$, а n_k — натуральные числа. Мы лишены возможности изложить эти весьма глубокие результаты. Отметим, что некоторые из результатов П. Леви в последнее время были обобщены и перенесены на многомерный случай Р. Кюппаном [4, 8, 9].

Результаты § 5 взяты из работы И. В. Островского [8]; теорема 6.5.1 в этой работе не была явно сформулирована. Теорема 6.6.1 публикуется впервые.

Результаты из § 7 ведут свое начало от работы Г. Крамера [4], в которой была получена теорема 6.7.2 при $a = 0$. Методы, которые мы применяем, основаны на идеях, содержащихся в этой работе. Результаты § 7, кроме теоремы 6.7.2 (Р. Симидзу [1]) и примера 1 (Г. Крамер [4]), получены И. В. Островским [12]. В работе Р. Симидзу [1] получен ряд условий иного характера, обеспечивающих непринадлежность I_0 одномерных б. д. законов. Отметим следующую интересную теорему, полученную Р. Кюппаном [5, 7].

Теорема К.7. *Пусть* P — *одномерный б. д. закон без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви которого вполне конечна и имеет непрерывную плотность* $\rho(x)$. *Для того чтобы закон* P *принадлежал классу* I_0, *необходимо и достаточно, чтобы множество* $A = \{x\colon \rho(x) > 0\}$ *содержалось в интервале вида* (a, b) *или* $(-b, -a)$, *где* $0 < a < b \leqslant 2a$.

Достаточность является непосредственным следствием теоремы 6.4.1. Необходимость нетрудно получить из теоремы 6.7.3. Для этого следует заметить, что открытое множество $A \subset R^1$, которое нельзя поместить в интервал вида (a, b) или $(-b, -a)$, где $0 < a < b \leqslant 2a$, обязательно удовлетворяет условию (K) (не уменьшая общности, можно считать A состоящим из конечного числа интервалов). Пример 6 показывает, что теорема К.5 (необходимость) в многомерном случае перестает быть верной, если условие на множество A записывать в виде $A^* \cap (2) A^* = \varnothing$ (A^* — наименьшее открытое выпуклое множество, содержащее A). Теорема К.7 перенесена на многомерный случай Л. З. Лившицем [2]; условие на множество A у него имеет вид $A^* \cap (2)\, M^+(A) = \varnothing$.

Класс I_{0n} можно рассматривать как базис класса n-мерных б. д. законов, поскольку имеет место такое утверждение (И. В. Островский [3, 8]):

Теорема К.8. *Любой n-мерный б. д. закон можно представить в виде композиции конечного или счетного множества законов из I_{0n}.*

К главе VII

α-разложения впервые рассматривались в 1955 г. в работах Ю. В. Линника [3, 4]. Значительный вклад в разработку их теории внесен Б. Рамачандраном [3]. Они получили разнообразные применения в теории регрессии (см. А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао [1]).

Проблема описания класса I_0^α поставлена Ю. В. Линником. В 1955 г. А. А. Зингер и Ю. В. Линник [1] доказали принадлежность I_0^α закона Гаусса. Аналогичный факт для закона Пуассона установил в 1957 г. Д. Дюге [4]. Ю. В. Линник [9] обобщил эти результаты, доказав теорему 7.5.1 в предположении ограниченности пуассонова спектра. И. В. Островский [5] ослабил это предположение, заменив его на (7.5.2), а также доказал теоремы 7.5.2 ([2]), 7.5.3 и 7.5.4 ([11]).

К главе VIII *)

Хотя сама идея устойчивости разложений ведет свое начало от книги П. Леви [2], впервые это понятие появилось в работе Н. А. Сапогова [1], посвященной устойчивости теоремы Г. Крамера о нормальности компонент нормального закона. Приводимое общее определение устойчивости принадлежит Ю. В. Линнику [10].

Рассуждения, доказывающие лемму 8.1.2, непосредственным следствием которой является теорема 8.1.1, повторяют идею доказательства теоремы 11.2.1 монографии Ю. В. Линника [10]. Используемая при этом лемма 8.1.1 принадлежит В. М. Золотареву [1].

Оценка устойчивости теоремы Г. Крамера впервые появилась в работе Н. А. Сапогова [1]. Более сильный результат, составляющий содержание теоремы 8.2.1, был опубликован им в [2].

В монографии [10] Ю. В. Линник среди других проблем поставил вопрос о точности результата, полученного Н. А. Сапоговым. С. Г. Малошевский [1, 2] построил приводимый здесь в доказательстве теоремы 8.3.1 пример, означающий, что порядок оценки, полученной Н. А. Сапоговым, не может быть улучшен. Тот же пример дает оценки снизу для устойчивости теоремы Г. Крамера в метрике Леви и в метриках L_p, $p \geqslant 1$ (С. Г. Малошевский [1, 3]).

Приближенная нормальность компонент приближенно нормального закона в терминах расстояния Леви оценивается здесь

*) Составлено С. Г. Малошевским.

на основании теоремы Сапогова. Для компоненты, усеченная дисперсия которой ограничена снизу положительной постоянной, требуемая оценка получается непосредственно и, как показывает теорема 8.3.1, является неулучшаемой. Для компоненты, усеченная дисперсия которой бесконечно мала вместе с ε, приходится дополнительно привлекать некоторые специальные неравенства. Первые оценки такого рода были получены С. Г. Малошевским [1, 3] и В. М. Золотаревым [2]. Теорема 8.4.1 содержит наилучшую из до сих пор полученных оценку, принадлежащую В. М. Золотареву [4, 5]. Ему же принадлежат все приведенные здесь леммы, исключая 8.4.2, которая принадлежит С. Г. Малошевскому [3].

О. В. Шалаевским был опубликован [1] несколько более слабый вариант теоремы 8.5.1. Справедливость теорем 8.5.1 и 8.5.2 установил Ю. Ю. Мачис [1, 6, 8]. Основу доказательства обеих теорем составляет первоначальное доказательство О. В. Шалаевского.

К главе IX *)

Идейные предпосылки теории суммирования независимых случайных величин без условия предельной пренебрегаемости содержит теорема 38 из известной монографии П. Леви [2], выясняющая необходимые и достаточные условия сходимости сумм независимых величин к нормальному закону. Там же можно усмотреть связь этой теоремы с теоремой 32, в которой Леви обнаруживает устойчивость теоремы Крамера.

Ю. В. Линник [10], по-видимому, первым обратил внимание на то, что упомянутые теоремы П. Леви могут положить начало созданию теории суммирования независимых случайных величин, выходящей за рамки классической теории. Кроме того, им было доказано [10] утверждение, заключавшее в себе необходимое условие сходимости сумм независимых величин к законам класса $\mathfrak{L}_1$, впоследствии распространенное В. М. Золотаревым на общий случай [1, 2]. Один из вариантов этого условия и содержит теорема 9.2.1.

Леммы 9.3.1 и 9.3.2, как и теорема 9.3.1, принадлежат В. М. Золотареву [1]. Приводимые варианты их доказательств несколько отличаются от авторских. В частности, публикуемые доказательства лемм 9.3.1 и 9.3.2 принадлежат Ю. Ю. Мачису.

Теорема 9.4.1 принадлежит Ю. Ю. Мачису [2]. Эквивалентный вариант (теорема 9.4.2) указан В. М. Кругловым.

Результаты, составляющие содержание § 5, были анонсированы Ю. Ю. Мачисом в [3, 4] и доказаны в [7].

Изложение теории вероятностных мер в гильбертовом пространстве содержится, например, в монографии Партасаратхи [1]. Теоремы 9.6.1 и 9.6.2 доказаны В. М. Кругловым [1].

*) Составлено С. Г. Малошевским и Я. Ю. Никитиным.

ЛИТЕРАТУРА

Айзенберг Л. А., Губанова А. С.
1. Об областях голоморфности функций с действительными или неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 15 (1972), 50—55.

Ахиезер Н. И.
1. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.
2. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука», 1970.

Березанский Ю. М.
1. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка», 1965.

Бохнер С., Мартин У. Т.
1. Функции многих комплексных переменных. М., ИЛ, 1951.

Брейн Н. Г. де
1. Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 1961.

Валирон Ж.
1. Аналитические функции. М., ИЛ, 1957.

Валле-Пуссен Ш. Ж. де ла
1. Курс анализа бесконечно малых, т. I. М., ГТТИ, 1933.

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.
1. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961.

Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.
1. Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960.

Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.
1. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., Гостехиздат, 1949.

Гольдберг А. А., Островский И. В.
1. Применение теоремы У. К. Хеймана к одному вопросу теории разложений вероятностных законов. Укр. матем. ж., **19**, 3 (1967), 104—106.
2. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970.

Градштейн И. С., Рыжик И. М.
1. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

Дуб Дж.
1. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.

З и м о г л я д В. В.

1. О росте целых функций, удовлетворяющих специальным неравенствам. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 6 (1968), 30—41.
2. Об одном классе целых функций, обладающих свойством «хребта». Тр. ФТИНТ АН УССР, Матем. физика, функц. анализ, вып. 1 (1969), 172—190.

З и н г е р А. А., Л и н н и к Ю. В.

1. Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера и его применении. Вестник ЛГУ, № 11 (1955), 51—56.

З о л о т а р е в В. М.

1. Обобщение теоремы Линдеберга — Феллера. Теория вероятн. и ее примен., **12**, 4 (1967), 666—677.
2. К вопросу об устойчивости разложения нормального закона на компоненты. Теория вероятн. и ее примен., **13**, 4 (1968), 738—742.
3. Théorèmes limites généraux pour les sommes de variables aléatoires indépendantes. C.R. Acad. Sci., **270** (1970), A899—A902.
4. Несколько новых вероятностных неравенств, связанных с метрикой Леви. ДАН СССР, **190**, 5 (1970), 1019—1021.
5. Оценки различия распределений в метрике Леви. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **112** (1971), 224—231.

К а г а н А. М., Л и н н и к Ю. В., Р а о С. Р.

1. Характеризационные задачи математической статистики. М., «Наука», 1972.

К а г а н А. М., Л и н н и к Ю. В., Р у х и н А. Л., Р о м а н о в с к и й И. В.

1. «Self governing» family of distributions. Sankhyā, Ser. A, **33**, 3 (1971), 255—264.

К р е й н М. Г.

1. О проблеме продолжения эрмитово-положительных функций. ДАН СССР, **26** (1940), 17—21.
2. О представлении функций интегралами Фурье — Стильтьеса. Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та им. Куйбышева, **7** (1943), 123—148.
3. О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции. ДАН СССР, **45** (1944), 99—102.

К р у г л о в В. М.

1. Сходимость распределений сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве к нормальному и пуассоновскому распределениям. Теория вероятн. и ее примен., **16**, 2 (1971), 346—347.

К у д и н а Л. С.

1. Неразложимые законы с наперед заданным спектром. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 16 (1972), 206—212.
2. Неразложимость закона арксинуса. ДАН СССР, **204**, 1 (1972), 25—26.

К у р а т о в с к и й К.

1. Топология, т. I, М., «Мир», 1966.

Л е в и н Б. Я.

1. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.

Лившиц Л. З.

1. Достаточные условия, при которых двумерный безгранично делимый закон имеет только безгранично делимые компоненты. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 12 (1970), 36—59.
2. Про умови належності безмежно подільного закону до класу I_{0n}. ДАН УРСР, № 11 А (1972).

Лившиц Л. З., Островский И. В.

1. О многомерных безгранично делимых законах, имеющих только безгранично делимые компоненты. Тр. ФТИНТ АН УССР, Матем. физика, функц. анализ, вып. 2 (1971), 61—75.

Линник Ю. В.

1. Линейные формы и статистические критерии, I. Укр. матем. ж., 5 (1953), 207—243.
2. Линейные формы и статистические критерии, II. Укр. матем. ж., 5 (1953), 247—290.
3. Одна задача о характеристических функциях вероятностных распределений. Успехи матем. наук, 10, 1 (1955), 137—138.
4. Замечание к теореме Г. Крамера о разложении нормального закона. Теория вероятн. и ее примен., 1, 4 (1956), 466—478.
5. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. Теория вероятн. и ее примен., 2, 1 (1957), 34—59.
6. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов, I. Теория вероятн. и ее примен., 3, 1 (1958), 3—40.
7. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов, II. Теория вероятн. и ее примен., 4, 1 (1959), 55—85.
8. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов, III. Теория вероятн. и ее примен., 4, 2 (1959), 150—171.
9. Об «α-разложениях» безгранично делимых вероятностных законов. Вестник ЛГУ, № 1 (1959), 14—23.
10. Разложения вероятностных законов. Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
11. Некоторые вопросы теории целых функций, возникающие из теории вероятностей. Сб. «Современные проблемы теории функций комплексного переменного», М., Физматгиз, 1961, 49—57.

Линник Ю. В., Скитович В. П.

1. Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера. Вестник ЛГУ, № 1 (1958), 39—44.

Лоэв М.

1. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.

Малошевский С. Г.

1. Оценки, связанные с проблемой устойчивости теоремы Г. Крамера, и некоторые их применения. Диссертация, Л., 1968.
2. Неулучшаемость результата Н. А. Сапогова в проблеме устойчивости теоремы Г. Крамера. Теория вероятн. и ее примен., 13, 3 (1968), 522—525.
3. Оценки, связанные с проблемой устойчивости теоремы Г. Крамера. Матем. заметки, 7, 3 (1970), 281—288.
4. Безграничная делимость одного семейства распределений. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 16 (1972), 212—214.

Мамай Л. В.
1. К теории характеристических функций. Вестник ЛГУ, № 1 (1960), 85—99.
2. Разложения континуального типа для характеристических функций. Вестник ЛГУ, № 1 (1965), 34—46.

Маркушевич А. И.
1. Теория аналитических функций, т. II. М., «Наука», 1968.

Мачис Ю. Ю.
1. Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова. Лит. матем. сб., **7**, 4 (1967), 715.
2. О сходимости к закону Пуассона. Матем. заметки, **2**, 4 (1967), 411—420.
3. Sur la convergence vers les lois de la classe I_1 de Yu. V. Linnik. C.R. Acad. Sci., **265**, 17 (1967), 518—519.
4. Sur la convergence des répartitions des sommes des variables aléatoires independantes vers la lois de la classe I_0 de Linnik. C.R. Acad. Sci., **267**, 8 (1968), A316—A317.
5. К устойчивости разложений единичного закона распределения. Теория вероятн. и ее примен., **14**, 4 (1969), 715—718.
6. К устойчивости разложений некоторых распределений. Лит. матем. сб., **10**, 4 (1970), 845.
7. Предельные теоремы в неклассической постановке. Теория вероятн. и ее примен., **16**, 1 (1971), 172—180.
8. Оценки в теореме об устойчивости разложений распределения Пуассона. Теория вероятн. и ее примен., **16**, 2 (1971), 218—227.

Милка А. Д.
1. Неразложимость выпуклой поверхности. Укр. геом. сб., вып. 13 (1972), 112—128.

Островский И. В.
1. О целых функциях, удовлетворяющих некоторым специальным неравенствам, связанным с теорией характеристических функций вероятностных законов. Записки мех.-мат. факультета ХГУ и ХМО, **29** (1963), 145—168.
2. О разложениях решетчатых безгранично делимых законов. Вестник ЛГУ, **19**, сер. матем., 4 (1964), 51—60.
3. О разложениях безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. ДАН СССР, **161**, 1 (1965), 48—51.
4. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. Успехи матем. наук, **20**, 4 (1965), 166—171.
5. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **79** (1965), 198—235.
6. Многомерный аналог теоремы Ю. В. Линника о разложениях композиции законов Гаусса и Пуассона. Теория вероятн. и ее примен., **10**, 4 (1965), 742—745; **12**, 3 (1967), 586—587.
7. Некоторые свойства голоморфных характеристических функций многомерных вероятностных законов. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 2 (1966), 169—177.
8. О разложениях многомерных безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. Вестник Харьковск. ун-та, **32** (1966), 51—72.
9. Об одном вопросе С. Р. Рао. Теория вероятн. и ее примен., **14**, 2 (1969), 317—318.

10. Об одном классе характеристических функций. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **111** (1970), 195—207.
11. О некоторых классах безгранично делимых законов. ИАН СССР, сер. матем., **34**, 4 (1970), 923—944.
12. До теорії розкладань багатовимірних безмежно подільних законів. ДАН УРСР, № 11 А (1972).

Полиа Г. и Сегё Г.

1. Задачи и теоремы из анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1956.

Райков Д. А.

1. О разложении закона Пуассона. ДАН СССР, **14** (1937), 9—12.
2. Об одном свойстве полиномов деления круга. Матем. сб., **2** (1937), 379—382.
3. О разложении законов Гаусса и Пуассона. ИАН СССР, Отд. матем. и естеств., **2** (1938), 91—124.
4. Одна теорема из теории аналитических характеристических функций. Изв. НИИ матем. и мех. при Томском ун-те, **2**, вып. 2 (1938), 8—11.

Ронкин Л. И.

1. Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1971.

Сапогов Н. А.

1. Проблема устойчивости для теоремы Г. Крамера. ИАН СССР, сер. матем., **15**, 3 (1951), 205—218.
2. О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределенной приближенно нормально. Вестник ЛГУ, № 19 (1959), 78—105.

Сегё Г.

1. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.

Титчмарш Е.

1. Теория функций. М.—Л., Гостехиздат, 1951.

Тупицына В. М.

1. Об арифметике хребтовых функций. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 15 (1972), 142—152.

Уиттекер Е. и Ватсон Г.

1. Курс современного анализа, т. II. М., «Наука», 1963.

Феллер В.

1. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II. М., «Мир», 1967.

Фелпс Р.

1. Лекции о теоремах Шоке. М., «Мир», 1968.

Халмош П.

1. Теория меры. М., ИЛ, 1953.

Хинчин А. Я.

1. Новый вывод одной формулы П. Леви. Бюлл. МГУ, **А1**, 1 (1937), 1—5.
2. Об арифметике законов распределения. Бюлл. МГУ, **А1**, 1 (1937), 6—17.
3. Об одном признаке для характеристических функций. Бюлл. МГУ, **А1**, 5 (1937), 1—3.
4. Инвариантные классы законов распределения. Бюлл. МГУ, **А1**, 5 (1937), 4—5.

5. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.—Л., ГОНТИ, 1938.
6. Цепные дроби. М., Физматгиз, 1961.

Чистяков Г. П.
1. Об устойчивости для теоремы Ю. В. Линника. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 9 (1969), 118—133.
2. Об устойчивости для теоремы Ю. В. Линника в метрике Леви. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 11 (1970), 93—97.
3. Обобщение теоремы Г. Крамера, Ю. В. Линника — В. П. Скитовича. Теория вероятн. и ее примен., 15, 2 (1970), 345—350.
4. О принадлежности классу I_0 законов с неаналитическими характеристическими функциями. ДАН СССР, 201, 2 (1971), 280—283.

Шалаевский О. В.
1. Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова. Вестник ЛГУ, № 7 (1959), 41—49.

Яковлева Н. И.
1. О росте целых характеристических функций. Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 15 (1972), 43—49.

Aczel J.
1. Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel, 1960.

Boas R. P.
1. Lipschitz behaviour and integrability of characteristic functions. Ann. Math. Stat., 38 (1967), 32—36.

Bochner S.
1. A theorem on Fourier-Stieltjes integrals. Bull. Amer. Math. Soc., 40 (1934), 271—276.
2. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз, 1962.

Cairoli R.
1. Sur les fonctions caractéristiques des lois de probabilité. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 13 (1964), 45—53.

Christensen I. F.
1. Some further extensions of a theorem of Marcinkiewicz. Pacif. J. Math., 12 (1962), 59—67.

Cramér H.
1. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Math. Zeitschr., 41 (1936), 405—414.
2. Problems in probability theory. Ann. Math. Stat., 18, 2 (1947), 165—193.
3. Случайные величины и распределения вероятностей. М., ИЛ, 1947.
4. On the factorisation of certain probability distribution. Arkiv för mat., 1, 7 (1949), 61—65.

Cramér H., Wold H.
1. Some theorems on distribution functions. J. London Math. Soc., 11 (1936), 290—294.

Cuppens R.
1. Sur la décomposition de la composition d'une loi normale et d'une loi de Poisson. C.R. Acad. Sci., 262 (1966), 1113—1116.

2. Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aleatoires. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, **16** (1967), 61—153.
3. Sur les produits finis de lois de Poisson. C.R. Acad. Sci., **266** (1968), 726—729.
4. Sur un théorème de Paul Lévy. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, **17**, 3 (1968), 1—6.
5. On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. Proc. Amer. Math. Soc., **21**, 1 (1969), 145—152.
6. On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions of several variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., **12** (1969), 59—72.
7. On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. II. Pacif. J. of Math., **29**, 3 (1969), 521—525.
8. On the decomposition of infinitely divisible probability laws without normal factor. Pacif. J. of Math., **28** (1969), 61—76.
9. Application de la théorie des fonctions caractéristiques de plusieurs variables a l'étude de certains problèmes de la décomposition des fonctions caractéristiques d'une variable. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., **15** (1970), 144—156.
10. Quelques nouveaux résultats en arithmétique des lois de probabilité. C.R. Acad. Sci., **270**, 18 (1970), A1182—A1185.
11. Ensembles indépendants et décomposition des fonctions caractéristiques. C.R. Acad. Sci., **272**, 22 (1971), A1464—A1466.

Dugué D.
1. Analycité et convexité des fonctions caractéristiques. Ann. Inst. H. Poincaré, **12**, 1 (1951), 45—56.
2. Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois de probabilité. Ann. Inst. H.Poincaré, **12**, 3 (1951), 159—169.
3. Arithmétique des lois de probabilit és. Paris, Gauthier-Villars, 1957.
4. Résultats sur les fonctions absolument monotones et applications à l'arithmétique des fonctions de type positif. C.R. Acad. Sci., **244** (1957), 715—717.

Erdös P., Stone A. H.
1. On the sum of two Borel sets. Proc. Amer. Math. Soc., **25**, 2 (1970), 304—306.

Esseen C.-G.
1. Fourier analysis of distribution functions. Acta Math., **77** (1945), 1—125.
2. On infinitely divisible one-sided distributions. Math. Scand., **17** (1965), 65—76.

Fisher R. A., Dugué D.
1. Un resultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité. C.R. Acad. Sci., **227** (1948), 1205—1207.

Hayman W. K.
1. Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle. J. math. pures et appl., **35** (1956), 115—126.
2. Мероморфные функции. М., «Мир», 1966.
3. Об одном степенном ряде. Укр. матем. ж., **19**, 3 (1967), 136—140.

H e r z C. S.
1. Fonctions opérant sur les fonctions définie-positives. Ann. Inst. Fourier, 13 (1963), 161—180.
J e s s e n B., W i n t n e r A.
1. Distribution functions and Riemann Zeta function. Tr. Amer. Math. Soc., 38 (1935), 48—88.
J o h a n s e n S.
1. An application of extreme-point methods to the representation of infinitely divisible distributions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 5 (1966), 304—316.
K e l l e r e r H.
1. Linearkombinationen zufälliger Grossen und ihre gemeinsame Verteilung. Math. Zeitschr., 84 (1964), 403—414.
K e n d a l l D. G.
1. Extreme-point methods in stochastic analysis. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1 (1963), 295—300.
2. Delphic semi-groups, infinitely divisible regenerative phenomena, and the arithmetic of p-functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 9 (1968), 163—195.
K o n h e i m A. G., W e i s s B.
1. Functions which operate on characteristic functions. Pacific J. of Math., 15, 4 (1965), 1279—1293.
2. A note on functions which operate. Pacific J. of Math., 24 (1968), 297—302.
K r a s n e r M., R a n u l a c B.
1. Sur une propriété des polynômes de la division du cercle. C.R. Acad. Sci., 204 (1937), 397—399.
L é v y P.
1. Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, Paris, 1925.
2. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, Paris, 1937 (2 ed., 1954).
3. Sur les exponentielles de polynômes et sur l'arithmétique des produits finis de lois de Poisson. Ann. Ec. Norm. Sup., 54 (1937), 231—292.
4. L'arithmétique des lois de probabilité. J. math. pures et appl., 17 (1938), 17—40.
5. L'arithmétique des lois de probabilité et les produits finis des lois de Poisson. Actualités Sci. et ind., № 736, 3, 1938, 25—59.
6. The arithmetical character of the Wishart distribution. Proc. Cambr. Phil. Soc., 44, 2 (1948), 295—297.
7. Sur une classe des lois de probabilité indécomposables. C.R. Acad. Sci., 235 (1952), 489—491.
8. Remarques sur l'algèbre des produits de composition. C.R. Acad. Sci., 259 (1964), 1923—1927.
9. Observations sur la Note précédente. C.R. Acad. Sci., 266 (1968), 728—729.
L e w i s T.
1. The factorisation of the rectangular distribution. J. Applied Probab., 4 (1967), 529—542.
L u k a c s E.
1. Remarks concerning characteristic functions. Ann. Math. Stat., 28, 3 (1957), 717—723.

2. Some extensions of a theorem of J. Marcinkiewicz. Pacif. J. of Math., **8**, 3 (1958), 487—501.
3. On the arithmetical properties of certain entire characteristic functions. Proc. of 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. **2**, Part 1, 1967, 401—414.
4. Contributions to a problem of D. van Dantzig. Теория вероятн. и ее примен., **13**, 1 (1968), 114—125.
5. Characteristic functions (2 ed.), London, Griffin, 1970.

Marcinkiewicz J.
1. Sur une propriété de la loi de Gauss. Math. Zeitschr., **44** (1938), 612—618.
2. Sur les fonctions indépendantes, III. Fund. Math., **31** (1938), 86—102.

Mathias M.
1. Über positive Fourier'sche Integrale. Math. Zeitschr., **16** (1923), 103—125.

Miller H. D.
1. Generalisation of a theorem of Marcinkiewicz. Pacif. J. of Math., **20** (1967), 261—274.

Morucci B.
1. Existence de la dérivée première d'une fonction caractéristique. Generalisation aux dérivées d'ordre impair. C.R. Acad. Sci. Paris, **263** (1966), 320—323.

Parthasarathy K. R.
1. Probability measures on metric spaces. Academic Press., N.Y.— London, 1967.

Parthasarathy K. R., Rao R. R., Varadhan S. R.
1. On the category of indecomposable distributions on topological groups. Trans. Amer. Math. Soc., **102**, 2 (1962), 200—217.
2. Probability distributions on locally compact abelian groups. Ill. J. Math., **7** (1963), 337—369. (русский перевод: Распределения вероятностей на локально-компактных абелевых группах, Математика, **9**, 2 (1965), 113—146).

Pitman E. J. G.
1. On the derivatives of a characteristic function at the origin. Ann. Math. Stat, **27** (1956), 1156—1160.

Pólya G.
1. Remarks on characteristic functions. Proc. of the Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Berkeley, 1949, 115—123.

Ramachandran B.
1. On the order and type of entire characteristic functions. Ann. Math. Stat, **33** (1962), 1238—1255.
2. A stability theorem for the binomial law. Sankhyā, Series A, **25** (1963).
3. Advanced theory of characteristic functions. Statistic Publ. Soc., Calcutta, 1967.

Rossberg H.-J.
1. Der Zusammenhang zwischen einer ganzer characteristischen Funktion einer verfeinerten Ordnung und ihrer Verteilungsfunktion. Czechoslovak Math. J., **17**, 3 (1967), 317—334.
2. Ganze charakteristische Funktionen mit vollkommen regulärem Wachstum. Czechoslovak Math. J., **17**, 3 (1967), 335—346.

S h i m i z u R.
1. On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with a continuous Poisson spectrum. Ann. Inst. Stat., **16** (1964), 387—407.
S t r a s s e n W.
1. The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Stat., **36** (1965), 423—439.
T e i c h e r H.
1. On the multivariate Poisson distribution. Scand. Aktuarietidskr., **37** (1954), 1—9.
T o r t r a t A.
1. Sur une théorème de Lewis et la décomposition en facteurs premiers de la loi rectangulaire. J. Applied Probab., **6** (1969), 177—185.
U r b a n i k K.
1. Generalized convolutions. Studia Math., **23** (1964), 217—245.
W i n t n e r A.
1. On the addition of independent distributions. Amer. J. of Math., **56** (1934), 8—16.
Z y g m u n d A.
1. A remark on characteristic functions. Ann. Math. Stat., **18** (1947), 272—276.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Юрий Владимирович Линник
Иосиф Владимирович Островский

Разложения случайных величин и векторов

(Серия: «Теория вероятностей
и математическая статистика»

М., 1972 г., 480 стр.

Редактор *В. С. Азарин*
Техн. редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 27/VII 1972 г. Подписано
к печати 17/X 1972 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 15+1 вкл. Условн. печ. л. 25,30.
Уч.-изд. л. 24,62. Тираж 7000 экз. Т-16822.
Цена книги 1 р. 82 к. Заказ № 0623

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7
«Искра революции»
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
г. Москва, Трехпрудный пер., 9