ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ÉTUDES MATHÉMATIQUES

COLLECTION DIRIGÉE PAR P. LELONG
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

◆

Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire

◆

J. L. LIONS
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
Professeur à l'Ecole Polytechnique

DUNOD GAUTHIER-VILLARS
Paris
1969

Ж.-Л. ЛИОНС

Некоторые методы решения нелинейных краевых задач

Перевод с французского
Л. Р. ВОЛЕВИЧА

Под редакцией
О. А. ОЛЕЙНИК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1972

УДК 517.9

Автор книги — известный французский математик, труды которого уже знакомы советскому читателю по их переводам (Латтес Р., Лионс Ж.-Л., «Метод квазиобращения и его приложения», «Мир», 1970; Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., «Неоднородные граничные задачи и их приложения», «Мир», 1971). Его новая монография посвящена некоторым методам решения нелинейных уравнений в частных производных. Эти методы применяются для решения уравнений гидродинамики, теории упругости, квантовой механики, теории оптимального управления и т. д. Ряд уравнений математической физики рассматривается в монографической литературе впервые.

Методичность и ясность изложения делают книгу интересной и доступной для широкого круга читателей — математиков, физиков, специалистов в области механики и теории управления, а также аспирантов и студентов старших курсов этих специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{16\text{-}72}$

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Автор этой книги — выдающийся французский математик Ж. Лионс возглавляет лабораторию численного анализа в Парижском университете и математический отдел научно-исследовательского Института информатики и автоматики. Он внес большой вклад в решение прикладных задач, связанных с уравнениями с частными производными и вопросами оптимального управления.

Книга посвящена двум важным разделам теории уравнений с частными производными — методам решения нелинейных задач и теории вариационных неравенств. Значительная часть изложенных результатов принадлежит автору и его ученикам.

Методы решения нелинейных задач автор демонстрирует на конкретных примерах уравнений, взятых из гидромеханики, теории пластичности и других разделов механики сплошной среды, а также квантовой механики и физики. Общая схема исследования такова: строятся приближенные решения задачи, для этих решений устанавливаются априорные оценки, на основе которых доказывается существование последовательности приближенных решений, сходящейся к точному решению задачи. Для некоторых задач с помощью дополнительных априорных оценок устанавливаются свойства гладкости решения при наличии достаточной гладкости данных. Заметим, что результаты, полученные таким путем для конкретных уравнений математической физики, служат не только для демонстрации того или иного метода, но и представляют интерес для приложений.

Многие важные прикладные задачи приводят к так называемым задачам с односторонними граничными условиями или к вариационным неравенствам. Простейшим примером такого рода является следующая задача: в области Ω с границей Γ найти решение уравнения $\Delta u = f$, такое, что на Γ выполняются условия $u \geqslant 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0$, $u \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0$. Обобщенное решение этой задачи удовлетворяет не интегральному тождеству (как, скажем, в случае задачи Дирихле), а некоторому интегральному неравенству, которое и называют вариациониым неравенством.

Новый раздел теории уравнений с частными производными — теория вариационных неравенств, возник в последние десять лет и еще не освещался в монографической литературе. Источником для создания этой теории послужила задача из теории упругости (задача Синьорини), впервые полностью изученная в работе Г. Фикеры [1], где были заложены основы теории вариационных неравенств. Затем исследование вариационных неравенств продолжалось в работах Ж. Лионса, Г. Стампаккьи и их учеников. В частности, ими рассматривалась абстрактная постановка задач, приводящих к таким неравенствам.

Хотя применение тех или иных методов в книге демонстрируется в большинстве случаев на отдельных примерах, эти методы обладают большой общностью и применимы к широким классам нелинейных задач.

В задачах, исследованных в гл. 1 (уравнения, возникающие в релятивистской квантовой механике, уравнение нелинейных колебаний, уравнения Навье — Стокса, уравнение Шредингера, уравнения нестационарной фильтрации и другие), приближенные решения строятся по методу Галёркина или в нестационарном случае по методу Фаэдо — Галёркина. Затем для них устанавливаются априорные оценки типа энергетических неравенств и с помощью теорем вложения С. Л. Соболева на основе этих оценок доказывается компактность полученного семейства приближенных решений.

Во второй главе сходимость последовательности приближенных решений доказывается на основе свойства монотонности или псевдомонотонности соответствующего оператора. При наличии этого свойства удается доказать сходимость приближенных решений при более слабых априорных оценках, чем это требует применение теорем вложения. В этой главе доказаны также теоремы существования для абстрактных операторных уравнений, обладающих свойством монотонности, и даны приложения этих теорем к конкретным уравнениям математической физики (в частности, к задачам со свободной границей).

Метод регуляризации, многочисленные примеры применения которого даны в главе 3, состоит в том, что в уравнение или в граничные условия дописывают операторы с малым множителем ε, причем так, что при $\varepsilon > 0$ получаем хорошо изученную разрешимую задачу. Далее устанавливаются равномерные по ε оценки решений этих задач, на основе которых совершается предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Метод регуляризации иногда называют методом введения искусственной вязкости. Значительным толчком к использованию этого метода послужила работа Дж. фон Неймана и Рихтмайера [1], где искусственная малая вязкость вводилась в систему газовой динамики для численного решения этой системы. Важное значение метод регуляризации имеет для построения решений вырожденных уравнений (см., например, Олейник О. А. и Радкевич Е. В., «Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой», Итоги Науки, ВИНИТИ, 1971 г.), а также для построения разрывных решений нелинейных гиперболических уравнений (см. Олейник О. А. [1]).

Метод штрафа, введенный Р. Курантом в задачах классического вариационного исчисления, позволяет свести задачи для вариационных неравенств к задачам для дифференциальных уравнений. Он состоит в добавлении к функционалу таких членов с параметром, что задача на минимум функционала, рассматриваемого на замкнутом выпуклом множестве, переходит в задачу на минимум нового функционала, рассматриваемого во всем пространстве.

В гл. 4 метод конечных разностей, метод Роте (полудискретизация) изложены в применении к ряду конкретных задач, а также для некоторых классов операторных уравнений. Метод расщепления, или метод дробных шагов, изложен на примере решения системы уравнений Карлемана. Некоторые задачи, как, например, задачи для уравнений Навье — Стокса, рассматриваются во всех главах.

В конце каждой главы имеются список нерешенных задач, близких к рассмотренным в книге, а также комментарии, где даны библиографические ссылки и указаны использованные в книге источники.

Нужно отметить, что изложение в книге очень четкое: все основные идеи подчеркнуты, принципиальные шаги в доказательствах теорем выделены в отдельные пункты. Язык книги крайне лаконичный, иногда конспективный. Для книги характерны необычайная широта охвата материала и большое разнообразие изложенных в ней идей.

От читателя требуется владение основными понятиями функционального анализа, а также знание теории вложения пространств С. Л. Соболева. С теоремами вложения можно познакомиться по книгам С. Л. Соболева [1] и С. М. Никольского (Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», М., 1969), а также по недавно переведенной на русский язык книге Ж. Лионса и Э. Мадженеса [1].

Настоящая книга окажется очень полезной математикам, работающим в области теории уравнений с частными производными, и математикам, занимающимся прикладными задачами, а также численным решением задач, связанных с уравнениями с частными производными. Несомненный интерес она может представлять также для механиков и физиков.

Выход в свет русского перевода будет способствовать дальнейшему продвижению в изучении трудной и важной для приложений области математики — теории нелинейных краевых задач.

О. А. Олейник

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. В этой работе мы развиваем некоторые методы решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Изучаемые здесь методы (ни в коей мере не являющиеся исчерпывающими) вводятся в связи с конкретными примерами, из которых главными являются:

1° классические нелинейные краевые задачи, возникающие в механике и физике: уравнения Навье — Стокса, нелинейные уравнения колебаний пластин, уравнения, встречающиеся в квантовой механике, и т. д.;

2° нелинейные краевые задачи, соответствующие вариационным задачам с ограничениями; сюда относятся задачи для вариационных неравенств, встречающихся в механике (пластичность, односторонние связи и т. д.), или задачи оптимального управления.

Основными этапами решения этих задач являются:

a) вывод априорных оценок;

b) использование этих оценок.

2. В настоящее время не существует никакого общего метода вывода априорных оценок (в частности, за невозможностью использовать преобразование Фурье в нелинейных задачах).

Наиболее простые априорные оценки проистекают из физических соображений. Как правило, они устанавливаются посредством умножения уравнений, которые мы решаем, на линейные комбинации неизвестных функций и подходящего интегрирования по частям.

При выводе «дополнительных» априорных оценок можно умножать уравнения на *нелинейные* выражения от неизвестных функций; см., например, уравнения Кортвега — де Фриса в § 4 гл. 3.

Можно также получать довольно точные априорные оценки методом расщепления (подсказанным численным анализом); см. уравнение Карлемана в § 2 гл. 4.

Вообще, в вопросе об априорных оценках (или, что в той или иной степени к нему сводится, в вопросе о выборе функциональных пространств, в которых мы пытаемся решать нашу задачу) *линейные* и *нелинейные* краевые задачи существенно различаются. В то время как в первых в подавляющем большинстве известных случаев имеется бесконечное множество априорных оценок[1]), в нелинейных задачах, как правило, удается установить «очень мало» априорных оценок[2]).

Эта трудность в равной мере связана с вопросом о гладкости: если удается доказать, что рассматриваемая (нелинейная) задача является корректной в некотором функциональном классе, то, как правило, *неверно*, что решение будет очень гладким, коль скоро этим свойством обладают данные задачи.

Итак, *выбор функциональных пространств, в которых решается задача, играет абсолютно решающую роль*[3]).

3. Коль скоро функциональные рамки выбраны, для решения задачи необходимо *использовать* оценки.

Мы будем различать следующие методы:

(i) метод *компактности*;
(ii) метод *монотонности*;
(iii) метод *регуляризации*;
(iv) метод *штрафа*;
(v) *итерационные* методы аппроксимации.

Естественно, что в некоторых случаях могут одновременно применяться несколько указанных выше методов.

Метод (i) (глава 1)

Метод, называемый методом компактности, применяется наиболее прямым образом.

1) Мы строим *приближенные решения* (или по крайней мере то, что, как мы надеемся, будет приближенным решением), *редуцируя задачу к конечномерному случаю*, например с помощью метода Галёркина (в стационарном случае) или Фаэдо — Галёркина (в эволюционном случае); существование приближенных решений доказывается с помощью

теоремы о неподвижной точке (в стационарном случае),

теоремы существования решения для системы *обыкновенных дифференциальных уравнений* (в эволюционном случае).

2) Далее мы переходим к пределу, устремляя к бесконечности

---

[1]) Отметим, что теория интерполяции линейных топологических пространств в *линейных* задачах доставляет нам *бесконечную* серию оценок, если в нашем распоряжении уже имеются *две* оценки.

[2]) В настоящее время в нелинейных задачах мы не имеем возможности применять интерполяцию, за исключением лишь достаточно специальных случаев. Быть может, следует развить теорию *нелинейной* интерполяции *нелинейных функциональных классов*.

[3]) Естественно, что нет никаких причин ограничиваться *векторными пространствами*; в § 12 гл. 1, в п. 3.2 гл. 2 и в п. 1.3 гл. 4 нам встретятся примеры, в которых мы фактически работаем в *нелинейных функциональных классах*.

размерность пространства. При этом мы должны преодолеть *основную трудность*, состоящую в том, что мы имеем дело с нелинейными операторами, которые, как правило, не являются слабо непрерывными и, следовательно, нужно доказывать (*вообще говоря*; по этому поводу см. метод (ii)), что семейство приближенных решений компактно (благодаря априорным оценкам) в подходящей сильной топологии (в которой наш оператор непрерывен). Основным используемым здесь средством являются теоремы о компактности вложения пространства Соболева порядка α в пространство Соболева порядка $<\alpha$, а также более специальные результаты подобного типа, приведенные в § 5 и в п. 12.2 гл. 1.

Метод (ii) (глава 2)

Когда оператор обладает свойством монотонности (аналогичным свойству дифференциалов дифференцируемых выпуклых функций в банаховом пространстве), можно переходить к пределу по размерности при наличии априорных оценок «менее сильных», чем те, которые нужны для метода компактности.

Таким образом, работать методом монотонности, коль скоро он применим, проще, чем методом компактности.

С другой стороны, именно в рамках этого метода можно изучать «вариационные неравенства» (см. 1(2°)), на которые удается распространить (быть может, несколько неожиданным образом) большое число свойств, установленных для уравнений.

Метод (iii) (глава 3)

В методах (i) и (ii) приближенные решения находятся одинаковым образом (в основном, с помощью метода Галёркина), а далее мы переходим к пределу, пользуясь либо компактностью, либо монотонностью (либо смесью того и другого методов; см., например, § 5 гл. 2).

В методах (iii), (iv), (v) *меняется способ аппроксимации*, после чего соображения компактности или (и) монотонности опять используются для предельного перехода.

В методе (iii) мы «регуляризуем» уравнения, «приближая» их «лучшими» и уже решенными уравнениями.

Сюда включаются методы *вязкости*, *эллиптической регуляризации* и *параболической регуляризации*.

При этом мы, очевидно, сталкиваемся здесь с другой трудностью, присущей нелинейным задачам: ярко выраженной тенденцией к *неустойчивости*; члены, считающиеся «малыми», могут радикально изменить ситуацию. Таким образом, надо обращать внимание на *правильный выбор регуляризующих членов*; достаточно общие примеры приведены в гл. 3.

Метод (iv) (глава 3)

Метод штрафа (обязанный своим происхождением вариационному исчислению и связанный с методом регуляризации) сводится к тому, что мы приближаем вариационные неравенства уравнениями (нелинейными) более классического характера и уже решенными другими методами. Метод штрафа полезен также при решении эволюционных задач в нецилиндрических областях.

Метод (v) (глава 4)

Итерационные методы аппроксимации происходят главным образом из численного анализа[1]. Отметим следующие из них:

1) метод *последовательных приближений, метод Ньютона*; при этом опять выбор пространства играет решающую роль;

2) методы *дискретизации* (конечных разностей);

3) методы *расщепления.*

Мы приводим примеры, в которых эти методы позволяют решать задачи, не поддающиеся решению (как нам кажется) изложенными выше методами.

4. Следует непременно подчеркнуть, что указанные методы аппроксимации *не эквивалентны* друг другу.

В самом деле, априорные оценки устанавливаются для заданных уравнений, и надо выбрать такой способ аппроксимации, который позволяет для приближенных уравнений получить по крайней мере *столько же*[2] априорных оценок, сколько для исходной задачи[3].

Резюмируя, можно сказать, что для решения исходной задачи мы должны

1) выбрать функциональные пространства,
2) выбрать метод аппроксимации,
3) перейти к пределу.

5. Указанные выше методы приспособлены для доказательства *существования* решений. Доказательство *единственности* решений (если она имеет место) связано с довольно специальной техникой, несколько примеров которой мы приводим.

В хороших случаях, когда мы имеем дело с корректной задачей, возникает еще ряд вопросов, и особенно вопрос о гладкости: увеличивается ли «гладкость» решения при увеличении «гладкости» данных задачи?

---

[1] Мы здесь не делаем попытки систематического изучения этих вопросов.

[2] В некоторых случаях (см. метод расщепления в § 2 гл. 4) с помощью приближенной системы можно получить и больше оценок.

[3] Отметим, что это заставляет применять специальные средства даже внутри заданного метода; см., например, «специальные базисы» в методе Фаэдо — Галёркина (гл. 1).

Как мы уже отмечали, вообще говоря, неверно, что гладкость C^∞ данных задачи ведет к гладкости C^∞ решения (однако в тексте имеется несколько примеров, когда это так). Тем не менее во многих случаях, коль скоро нелинейная задача решена в функциональном классе X для данных из функционального класса Y, существует *семейство* X_s, Y_s «соседних» классов, таких, что наша задача корректна в X_s при данных из Y_s. В этой связи при весьма частных обстоятельствах удается применить теорию ннтерполяции. Вероятно, в этом направлении можно продвннуться гораздо дальше.

Для эволюционных уравнений некоторые свойства гладкости могут быть установлены с помощью теории нелинейных полугрупп.

Средн качественных задач, связанных с эволюционными уравнениями, мы рассматриваем

исследование решений, *периодических по времени* (п. 7.4 гл. 2; § 6 и 7 гл. 4);

исследование решений, ограниченных на всей временно́й оси (§ 8 гл. 4); этот вопрос, впрочем, связан с изучением *почти периодических решений* (по поводу этой теории мы отсылаем к книге Америо — Прузе [1]).

6. Естественно, что многочисленные аспекты этого огромного круга вопросов здесь не изучаются, а лишь упоминаются в комментариях с целью сопоставления их с вопросами, рассматриваемыми в книге.

В частности, отметим

тонкое изучение задач вариационного исчисления и классическую теорию Лере — Шаудера эллиптических уравнений в пространствах Гёльдера (можно обратиться к книгам Ладыженской и Уральцевой [1], К. Миранды [1], Морри [1] и к приведенной там литературе);

нелинейные гиперболические уравнения и теорию ударных волн (см. Рождественский и Яненко [1] и приведенную там литературу);

применение «глобального» анализа, в частности к нелинейным задачам о собственных значениях (см. Браудер [9]);

вопросы устойчивости, относнтельно которых (в ожидании массированной атаки с помощью топологических методов) пока имеются лишь разрозненные результаты.

Мы не рассматриваем (за исключением нескольких очень специальных случаев) приложения к многозначным операторам. В этой связи мы отсылаем к Браудеру [7].

Очень краткие замечания посвящены (§ 9 гл. 4) нелинейным задачам оптимального управления.

7. Приложения (механика жидкости и твердого тела, оптимальное управление и т. д.) являются источником задач, который подчас кажется неистощимым и даже расширяющимся (в частности, благодаря возможности изучать с помощью вычислительных машин все более и более сложные модели); среди этих задач имеется очень большое число нерешенных, некоторые из них приводятся в конце каждой из глав.

Ввиду разнообразия применений и огромного множества различных встречающихся задач, а также ввиду неустойчивости этих задач относительно «малых» изменений, классификация по *типам уравнений* нам представляется иллюзорной; вот почему мы придерживаемся классификации по *методам*.

В конце мы добавили указатель типов уравнений, в котором отмечены те места из книги, где различными методами изучаются соответствующие типы уравнений.

8. Эта книга возникла в связи с курсом лекций 3-го цикла, которые я читал на Парижском факультете естественных наук в течение 1968/69 учебного года. Я горячо благодарю С. Бардоса, Х. Брезиса, П. Равьяра, Л. Тартара и Р. Темама, которые помогли мне улучшить изложение ряда вопросов как по форме, так и по содержанию.

Я благодарен также Ф. Бутану и Ф. Мюра, которые составили записи лекций, и слушателям, которые своим интересом, проявленным во время лекций, побудили меня взяться за подготовку записей к печати.

Я особенно благодарен П. Лелону, который любезно согласился включить эту книгу в серию, издаваемую под его руководством.

Я горячо благодарю секретариат математического отдела Института А. Пуанкаре и издательство Дюно за их замечательную работу.

9. В конце книги мы приводим список основных обозначений, указатель типов уравнений и подробное оглавление.

Каждая глава начинается с нескольких общих указаний для ориентации, которые могут быть опущены при первом чтении.

Литературные указания, как правило, приводятся в комментариях, которыми заканчивается каждая глава.

Глава 1

МЕТОД КОМПАКТНОСТИ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

1) В этой главе (равно как и в последующих) мы постоянно используем пространства Соболева. Наиболее существенное из того, что надо знать об этих пространствах, напоминается по мере надобности.

Важным рабочим инструментом являются пространства Соболева *нецелого порядка* (главным образом в гильбертовом случае). В этой связи используются результаты, приведенные в книге Лионса — Мадженеса [1], гл. 1, и результаты о погружении Петре [1]. Читатель, не знакомый с этой теорией, может пропустить все результаты этой главы, использующие пространства Соболева нецелого порядка.

2) *Основными результатами о компактности* являются:

(i) классический результат о *компактности вложения* пространства Соболева порядка 1 в ограниченной области в пространство L^2; этого результата достаточно в примерах, приведенных в § 1, 2, 3, 4;

(ii) более специальные результаты о компактности, приведенные в § 5; они используются во всех последующих примерах.

3) Вся рассматриваемая нами теория сводится к тому, чтобы вывести некоторое количество *априорных неравенств* и *«ими воспользоваться»*. Не существует сколько-нибудь систематического метода вывода априорных оценок в тех ситуациях, когда нельзя воспользоваться преобразованием Фурье. Поэтому излагаемые нами результаты можно рассматривать как *примеры* априорных неравеиств, получающихся энергетическим методом путем «умножения» на различные функционалы. Что касается *использования* априорных неравенств, то, грубо говоря, имеются два возможных способа:

(i) мы имеем дело непосредственно с заданными уравнениями, т. е. с бесконечной размерностью, и пытаемся применить *теорему о неподвижной точке* (в следующих главах нам встретятся примеры подобной ситуации; мы отсылаем также к Браудеру [7]);

(ii) мы приближаем заданное уравнение «более простыми» уравнениями — в настоящей главе это делается методом Фаэдо — Галёркина; при этом для приближенных уравнений приходится выводить оценки, «аналогичные» тем, которые были получены в бесконечномерном случае[1]; в связи с этим приходится использовать специальные базисы, многочисленные примеры которых имеются в этой главе. Далее мы *переходим к пределу, используя теоремы о компактности*[2].

4) *Теоремы единственности* можно читать независимо от остального, они опираются на несколько иную технику.

5) В п. 6.9 (метод вязкости) также используется несколько отличающаяся техника.

6) Из всей этой главы для чтения гл. 2 необходимо лишь знакомство с § 1 и 3 и с началом § 8 (к которому можио вернуться после чтения гл. 2).

1. ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1.1. Постановка задачи

Следующие ниже обозначения будут использоваться на протяжении всей книги.

Через Ω будем обозначать область в пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $x=\{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть Γ — граница Ω. Мы всегда будем считать, что граница Γ «достаточно регулярна»; по мере надобности предположения будут уточняться.

Будем обозначать через Q *цилиндр* в $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$:

$$Q=\Omega\times]0, T[, \qquad T \text{ конечно},$$

а через Σ — его *боковую границу*

$$\Sigma=\Gamma\times]0, T[.$$

Первым примером нелинейного уравнеиия в частиых производных, который мы рассмотрим, будет уравнение, возникающее в релятивистской квантовой механике (см. Шифф [1], Юргенс [1], Сигал [1], [2]). Ищется вещественная функция $u=u(x, t)$, $x\in\Omega$, $t\in]0, T[$, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u+|u|^\rho u=f, \quad x\in\Omega, \quad t\in]0, T[, \tag{1.1}$$

где

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

При этом нам задано $\rho>0$ (можно предполагать только, что $\rho>-1$), и фуикция f задаиа в $\Omega\times]0, T[$; искомая функция u

---

[1] Эта задача является одной из основных в численном аналнзе.

[2] С другимн методами мы встретнмся в последующих главах.

должна дополнительно удовлетворять *краевым и начальным условиям*:

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x, 0) = u_0(x), && x \in \Omega, \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), && x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

где u_0 и u_1 — заданные функции[1] ●

Рассматриваемая задача является *нелинейной* из-за члена $|u|^\rho u$.

Для того чтобы более точно сформулировать нашу задачу, а также найти средства для ее решения, мы должны ввести несколько функциональных пространств, которые будут использоваться на протяжении всей книги.

1.2. Функциональные пространства

Мы будем постоянно пользоваться обычными простраиствами $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; рассматриваемые функции мы будем считать *вещественными*, если только специально не оговорено противное.

Обозначим через (f, g) скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, т. е.

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx; \tag{1.4}$$

аналогично будем обозначать скалярное произведение элементов $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ (пространство распределений в Ω, см. Л. Шварц [1]) и $g \in \mathscr{D}(\Omega)$ (пространство функций класса C^∞ в Ω, имеющих компактный носитель в Ω). Там, где не может возникнуть недоразумение, мы будем писать

$$|f| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_\Omega f(x)^2 \, dx \right)^{1/2}; \tag{1.5}$$

в противиых случаях мы будем пользоваться обозначением $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ (вообще, через $\|f\|_X$ мы будем обозначать норму f в банаховом пространстве X) ●

Мы будем постоянно пользоваться *пространствами Соболева* (см. Соболев [1]). Обозначим

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n \right\} \tag{1.6}$$

---

[1] Символом ● отмечается конец логнческн завершенного куска текста.

и снабдим это пространство нормой

$$\left(|v|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}=\|v\|_{H^1(\Omega)};$$

$H^1(\Omega)$ является *гильбертовым пространством.*

Мы введем также

$$H_0^1(\Omega)=\text{замыкание } \mathscr{D}(\Omega) \text{ в } H^1(\Omega)=\text{подпространство функций (из } H^1(\Omega)\text{), «равных нулю» на } \Gamma. \quad (1.7)$$

Поскольку (по определению) $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $H_0^1(\Omega)$, мы можем отождествить пространство $H^{-1}(\Omega)$, *сопряженное* к $H_0^1(\Omega)$, с некоторым пространством распределений в Ω:

$$\begin{gathered} H^{-1}(\Omega)=\left(H_0^1(\Omega)\right)'\,{}^{1)}; \\ H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega). \end{gathered} \quad (1.8)$$

Элементами $H^{-1}(\Omega)$ являются суммы производных первого порядка от функций из $L^2(\Omega)$.

По мере надобности мы будем напоминать основные свойства s-пространств Соболева, равно как и других пространств такого же типа, вводимых ниже. Что касается систематического изложения теории пространств $H^s(\Omega)$, то см. Лионс — Мадженес [1], гл. 1 ●

Для изучения задачи (1.1), (1.2), (1.3) необходимо ввести пространство

$$V=H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega), \quad (1.9)$$

где

$$p=\rho+2. \quad (1.10)$$

Пространство V снабжается нормой

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}+\|v\|_{L^p(\Omega)},$$

превращающей его в пространство Банаха.

В силу теорем вложения Соболева (Соболев [1]) имеем

$$\begin{gathered} H_0^1(\Omega)\subset L^q(\Omega), \\ \frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \quad \text{при} \quad n\geqslant 3, \end{gathered} \quad (1.11)$$

так что

$$V=H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad \rho\leqslant\frac{4}{n-2}.$$

Нам понадобится

---

[1] Вообще, через X' будем обозначать пространство, сопряженное к X.

Лемма 1.1. *Пространство V, определенное формулой* (1.9), *сепарабельно* (*т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество*).

Доказательство. В самом деле, с помощью отображения $v \to \{v, \partial v/\partial x_1, \ldots, \partial v/\partial x_n\}$ пространство V можно отождествить с замкнутым подпространством в пространстве $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \ldots \times L^2(\Omega)$, которое сепарабельно и равномерно выпукло, так что счетное всюду плотное множество можно спроектировать на это подпространство ●

Теперь нам надо ввести пространства функций от x и t. Если $x, t \to \varphi(x, t)$ — функция, определенная в Q, то положим

$$\varphi(t) = «x \to \varphi(x, t)»$$

и будем рассматривать φ как *функцию* (или *распределение*) *от t со значениями в пространстве функций* (или *распределений*) *от x*.

В общем случае, если X — банахово пространство, то обозначим через $L^p(0, T; X)$ пространство (классов) функций $t \to f(t)$: $]0, T[\to X$, измеримых, принимающих значения из X и таких, что

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty; \tag{1.12}$$

если $p = \infty$, то норма (1.12) заменяется нормой

$$\sup_{t \in]0, T[} \operatorname{ess} \|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0, T; X)}; \tag{1.13}$$

нормированное пространство $L^p(0, T; X)$ является *полным* (см. Бурбаки [1]).

Очевидно, имеем

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q) \bullet$$

Мы будем искать (и найдем) решение u задачи (1.1), (1.2), (1.3) в пространстве $L^\infty(0, T; V)$. Но тогда нам надо определить производную $\partial u/\partial t$ в этом пространстве. Сейчас мы определим ее в более общем случае для $f \in L^p(0, T; X)$.

Обозначим через $\mathcal{D}'(0, T; X)$ пространство *распределений* на интервале $]0, T[$ со значениями в X, определенное как (см. Л. Шварц [2])

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); X)^{1)}. \tag{1.14}$$

---

[1] В общем случае через $\mathcal{L}(\Phi; \Psi)$ мы будем обозначать пространство линейных непрерывных отображений Φ в Ψ.

Если $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, то производная в смысле распределений определяется из равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi) = -f\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[). \qquad (1.15)$$

Каждому элементу $f \in L^p(0, T; X)$ можно сопоставить распределение (также обозначаемое через f) на $]0, T[$ со значениями в X по формуле

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

где интеграл принимает значение в X; мы, кроме того, можем с помощью (1.15) определить $\partial f/\partial t$ как элемент $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Без труда проверяется

Лемма 1.2. *Если $f \in L^p(0, T; X)$ и $\partial f/\partial t \in L^p(0, T; X)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, то f, после, быть может, изменения на множестве меры нуль (из отрезка $(0, T)$), будет непрерывным отображением $[0, T] \to X$.*

Теперь мы в состоянии точно сформулировать задачу (1.1), (1.2), (1.3).

1.3. Первая теорема существования

Следующий ниже результат точно указывает, *в каком смысле* может быть решена задача (1.1), (1.2), (1.3); он является первой теоремой существования решения.

Теорема 1.1. *Предположим, что Ω — ограниченная*[1] *область. Пусть заданы функции f, u_0, u_1, причем*

$$f \in L^2(Q), \qquad (1.16)$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \quad p = \rho + 2, \qquad (1.17)$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \qquad (1.18)$$

Тогда существует функция u, удовлетворяющая следующим условиям:

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \qquad (1.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^\rho u = f \text{ в } Q, \qquad (1.21)$$

---

[1] Это обстоятельство, впрочем, не очень существенно.

$$u(0)=u_0, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0)=u_1. \tag{1.23}$$

Замечание 1.1. Из включений (1.19), (1.20) и леммы 1.2, *в частности*, следует, что u: $[0, T]\to L^2(\Omega)$ является непрерывной функцией, так что (1.22) *имеет смысл* (на самом деле u обладает большей гладкостью, см., например, Лионс — Мадженес [1], т. 1, гл. 1).

Для того чтобы проверить, что условие (1.23) *имеет смысл*, надо использовать уравнение (1.21), которое записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f+\Delta u-|u|^\rho u. \tag{1.24}$$

Поскольку

$$\Delta\in\mathscr{L}(H_0^1(\Omega);\ H^{-1}(\Omega)),$$

имеем

$$\Delta u\in L^\infty(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),$$

а так как $f\to|f|^\rho f$ порождает отображение $L^p(\Omega)\to L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, то без труда проверяется, что

$$|u|^\rho u\in L^\infty(0,\ T;\ L^{p'}(\Omega)).$$

Но тогда из (1.24) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))+L^\infty(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega))^{1)} \tag{1.25}$$

и, в частности,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)). \tag{1.26}$$

Это включение вместе с (1.20) показывает, что благодаря лемме 1.2 функция $\partial u/\partial t$: $[0, T]\to H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)$ непрерывна и (1.23) имеет смысл ●

Замечание 1.2. Неизвестно, будет ли решение *единственным* в условиях теоремы 1.1. Ниже, в п. 1.5, мы покажем, что единственность имеет место, коль скоро ρ «не очень велико» ●

Замечание 1.3. В силу (1.7) и (1.9) $u=0$ на Σ, т. е. условие (1.2) включено в (1.19) ●

---

1) $H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)$ наделяется сильной топологией пространства, сопряженного к $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$.

1.4. Доказательство теоремы 1.1

План доказательства (с этим планом или его вариантами, отличающимися лишь техническими деталями, мы будем часто встречаться на протяжении всей главы) будет следующим:

(i) методом Фаэдо — Галёркина строим «приближенные» решения;

(ii) для приближенного решения выводим априорные оценки;

(iii) переходим к пределу, опираясь на свойства компактности (они нужны для перехода к пределу в нелинейных членах).

Этап (i): *«приближенные» решения.*

Чтобы упростить запись, положим

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим последовательность $w_1, \ldots, w_m, \ldots$, обладающую следующими свойствами:

$$\begin{aligned} & w_i \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad \forall i; \\ & \forall m \quad w_1, \ldots, w_m \text{ линейно независимы}; \\ & \text{линейные комбинации } w_i \text{ плотны в } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Такая последовательность *существует* в силу леммы 1.1.

Мы будем искать «приближенное» решение $u_m = u_m(t)$ нашей задачи в виде

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i, \tag{1.28}$$

где g_{im} определяются из условий

$$(u''_m(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + \left(|u_m(t)|^p u_m(t), w_j\right) = (f(t), w_j), \tag{1.29}$$
$$1 \leqslant j \leqslant m,$$

где

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx. \tag{1.30}$$

Система (1.29) нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений пополняется начальными условиями

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \to u_0 \text{ в } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \text{ при } m \to \infty, \tag{1.31}$$

$$u'_m(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \to u_1 \text{ в } L^2(\Omega) \text{ при } m \to \infty. \tag{1.32}$$

Общие результаты о нелинейных системах гарантируют существование решения задачи (1.29), (1.31), (1.32) на интервале $[0, t_m]$; априорные оценки показывают, что $t_m = T$ (заметим, что $\det(w_i, w_j) \neq 0$ в силу линейной независимости $w_1, \ldots, w_m$) ●

Этап (ii): *априорные оценки.*

Умножим уравнение (1.29), отвечающее индексу j, на $g'_{jm}(t)$ и просуммируем по j. Тогда получим

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) + \left(|u_m(t)|^p u_m(t), u'_m(t)\right) = \\ = (f(t), u'_m(t)), \quad (1.33)$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u'_m(t)|^2 + a(u_m(t), u_m(t))\right] + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_\Omega |u_m(x, t)|^p dx\right) = \\ = (f(t), u'_m(t)). \quad (1.34)$$

Положим

$$\|v\| = \sqrt{a(v, v)} \ \left(= \text{норма в } H_0^1(\Omega), \text{ эквивалентная } \|v\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

В силу (1.34)

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}(|u_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2) + \frac{1}{p}\|u_m(0)\|^p_{L^p(\Omega)} + \int\limits_0^t |f(\sigma)|\,|u'_m(\sigma)|\,d\sigma. \quad (1.34')$$

В силу (1.31), (1.32) правая часть последнего неравенства не превосходит $C + \int\limits_0^t |f(\sigma)|\,|u'_m(\sigma)|\,d\sigma$ (буквой C обозначаются различные константы, *не зависящие от* m), откуда

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C + \frac{1}{2}\int\limits_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma. \quad (1.35)$$

В силу (1.16)

$$\int\limits_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant \text{const}.$$

Из (1.35), в частности, следует, что

$$|u'_m(t)|^2 \leqslant C + \int\limits_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma, \quad (1.36)$$

откуда вытекает, что

$$|u'_m(t)| \leqslant \text{константа (не зависящая от } m\text{)}. \tag{1.37}$$

Возвращаясь снова к (1.35), получим

$$\| u_m(t) \| + \| u_m(t) \|_{L^p(\Omega)} \leqslant \text{константа (не зависящая от } m\text{)}. \tag{1.38}$$

Отсюда следует, что $t_m = T$ (см. конец этапа (i); неравенства (1.38), (1.37) означают, что при $m \to \infty$

u_m ограничены (т. е. принадлежат ограниченному множеству) в $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$, (1.39)

а u'_m ограничены в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ●

Этап (iii): *предельный переход.*

Согласно теореме Данфорда — Петтиса (см., например, Иосида [1]), пространство

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \text{ (соответственно } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\text{)}$$

является сопряженным к

$$L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)) \text{ (соответственно к } L^1(0, T; L^2(\Omega))\text{)},$$

и поэтому из последовательности u_m можно выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ *-слабо}^{1)} \text{ в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \tag{1.40}$$

$$u'_\mu \to u' \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^{2)}. \tag{1.41}$$

---

[1] Т. е. $\int_0^T (u_\mu(t), g(t))\,dt \to \int_0^T (u(t), g(t))\,dt \quad \forall g \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$.

[Здесь идет речь о слабой сходимости в пространстве $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$, которое рассматривается как сопряженное пространство к $L^1(0, H, H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$. Эта сходимость, вообще говоря, слабее обычной слабой сходимости, при которой можно брать *любые* $g \in (L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)))'$.

Такую сходимость автор называет weak star или faible etoile. В русском переводе книг Н. Бурбаки принят термин ослабленная сходимость. По поводу *-слабой сходимости см. Иосида [1] и А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, «Элементы теории функций и функционального анализа», издание второе, М., «Наука», 1968. — *Прим. перев.*]

[2] В силу (1.40) $u'_\mu \to u'$ в $\mathcal{D}'(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ и, следовательно, *-слабый предел последовательности u'_μ обязательно совпадает с u'.

Кроме того, из (1.39), в частности, следует, что u_m ограничены в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, а u'_m — в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, откуда, в частности, вытекает, что *u_m принадлежат ограниченному множеству* в $H^1(Q)$.

Однако, как известно (теорема Реллиха — Кондрашова, см., например, Лионс — Мадженес [1], теорема 16.1, гл. 1),

$$\text{вложение } H^1(Q) \text{ в } L^2(Q) \text{ компактно.} \tag{1.42}$$

Итак, мы можем считать, что подпоследовательность u_μ, выбранная из последовательности u_m, удовлетворяет, кроме (1.40), (1.41), условию

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду (п. в.)} \tag{1.43}$$

и, наконец, поскольку $|u_m|^\rho u_m$ ограничены в $L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega))$, то можно еще предположить, что

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to w \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega)). \tag{1.44}$$

Существенно важный момент — здесь мы сталкиваемся с одной из наиболее типичных трудностей нелинейных задач[1]) — доказательство того, что

$$w = |u|^\rho u. \tag{1.45}$$

Равенство (1.45) вытекает из (1.43), (1.44) и из следующей леммы.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ и g — такие функции из $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, что*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leqslant C, \qquad g_\mu \to g \text{ п. в. в } \mathcal{O}.$$

Тогда $g_\mu \to g$ слабо в L^q.

(Мы применим эту лемму в случае, когда

$$\mathcal{O} = Q, \qquad g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu, \qquad q = \frac{\rho+2}{\rho+1} = p';$$

в силу (1.43) $g_\mu \to |u|^\rho u = g$ п. в., а в силу (1.44) $g_\mu \to w$ слабо в $L^q(\mathcal{O})$. Но тогда, согласно лемме, $w = g = |u|^\rho u$.)

Доказательство леммы 1.3. Пусть N — возрастающая последовательность чисел, стремящихся к $+\infty$; положим[2])

$$E_N = \{x \mid x \in \mathcal{O}, \ |g_\mu(x) - g(x)| \leqslant 1 \text{ для } \mu \geqslant N\}.$$

---

[1]) Ср. с методами, предлагаемыми в работе Да Прато [2].

[2]) Точки $\mathcal{O}$ мы обозначаем через x (вместо $\{x, t\}$).

Множества (измеримые) E_N растут с ростом N и $\operatorname{mes}(E_N)\to$ $\to\operatorname{mes}\mathcal{O}$ при $N\to\infty$.

Пусть Φ_N — множество функций φ из $L^{q'}(\mathcal{O})\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$ с носителем в E_N, и пусть $\Phi=\bigcup\limits_{N\to\infty}\Phi_N$; Φ плотно в $L^{q'}(\mathcal{O})$. Если мы возьмем $\varphi\in\Phi$, то в силу теоремы Лебега

$$\int_{\mathcal{O}}\varphi(g_\mu-g)\,dx\to 0 \quad \text{при} \quad \mu\to\infty \tag{1.46}$$

(действительно, $\varphi\in\Phi_{N_0}$ и если взять $\mu\geqslant N_0$, то $|\varphi(g_\mu-g)|\leqslant$ $\leqslant|\varphi|$ и левая часть этого неравенства $\to 0$ почти всюду). Так как Φ плотно в $L^{q'}(\mathcal{O})$, то (1.46) доказывает лемму ●

Таким образом, равенство (1.45) доказано, и можно перейти к пределу в (1.29), полагая $m=\mu$.

Пусть j фиксировано и $\mu>j$; тогда в силу (1.29)

$$(u''_\mu, w_j)+a(u_\mu, w_j)+\left(|u_\mu|^\rho u_\mu, w_j\right)=(f, w_j). \tag{1.47}$$

Но в силу (1.40)

$$a(u_\mu, w_j)\to a(u, w_j) \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T),$$
$$(u'_\mu, w_j)\to(u', w_j) \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T),$$

и, следовательно,

$$(u''_\mu, w_j)=\frac{d}{dt}(u'_\mu, w_j)\to(u'', w_j) \text{ в } \mathcal{D}'(0, T);$$

кроме того, в силу (1.44), (1.45)

$$\left(|u_\mu|^\rho u_\mu, w_j\right)\to\left(|u|^\rho u, w_j\right) \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T).$$

Из (1.47) мы выводим, что

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_j)+a(u, w_j)+\left(|u|^\rho u, w_j\right)=(f, w_j),$$

причем последнее равенство выполнено для любого фиксированного j. Отсюда, ввиду плотности «базиса» $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ (см. (1.27)), следует, что

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v)+a(u, v)+\left(|u|^\rho u, v\right)=(f, v) \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega), \tag{1.48}$$

а отсюда уже вытекает, что u удовлетворяет (1.21), а также (1.19), (1.20).

Нам остается показать, что имеют место (1.22), (1.23). Согласно (1.40), (1.41) и лемме 1.2, мы, в частности, имеем: $u_\mu(0)\to u(0)$ *слабо* в $L^2(\Omega)$; но (см. (1.31)) $u_\mu(0)=u_{0\mu}\to u_0$ в $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$, откуда следует (1.22).

Далее, в силу (1.40)

$$(u''_\mu, w_j) \to (u'', w_j) \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T)$$

и, следовательно (например, в силу леммы 1.2 с $X = \mathbb{R}$),

$$(u'_\mu(0), w_j) \to (u', w_j)\big|_{t=0} = (u'(0), w_j),$$

а поскольку (см. (1.32)) $(u'_\mu(0), w_j) \to (u_1, w_j)$, то имеем

$$(u'(0), w_j) = (u_1, w_j) \quad \forall j,$$

откуда вытекает (1.23) ●

1.5. Теорема единственности

Как мы уже отмечали, неизвестно, гарантируют ли условия теоремы 1.1 единственность решения. Сейчас мы приведем один частный результат в этом направлении.

Теорема 1.2. *Пусть в условиях теоремы* 1.1

$$\rho \leqslant \frac{2}{n-2} \quad (\rho \text{ произвольно и конечно при } n = 2)^{1)}. \tag{1.49}$$

Тогда решение u, полученное в теореме 1.1, *единственно.*

Доказательство. Мы проведем доказательство для случая $n \geqslant 3$ (в более простом случае $n = 2$ доказательство получается тем же путем).

Пусть u и v — два решения в смысле теоремы 1.1; тогда для разности $w = u - v$ имеем:

$$w'' - \Delta w = |v|^\rho v - |u|^\rho u, \tag{1.50}$$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \tag{1.51}$$

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \tag{1.52}$$

$$w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{1.53}$$

Прежде всего *формально* умножим обе части равенства (1.50) на w'; тогда найдем (все написанное ниже корректно, коль скоро интегралы имеют смысл)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2\right) = \int_\Omega \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u\right) w' \, dx. \tag{1.54}$$

---

[1] Отметим, что при $n = 3$ можно взять $\rho = 2$, что соответствует результатам Шиффа [1].

Правая часть (1.54) по абсолютной величине не превосходит

$$(\rho+1)\int\limits_\Omega \sup(|u|^\rho, |v|^\rho)|w||w'|dx;$$

последнее выражение с помощью неравенства Гёльдера можно оценить через

$$c\left(\||u|^\rho\|_{L^n(\Omega)} + \||v|^\rho\|_{L^n(\Omega)}\right)\|w(t)\|_{L^q(\Omega)}\|w'(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

где

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}=1.$$

Однако, согласно (1.49), $\rho n \leqslant q$, а тогда, ввиду (1.11),

$$\left|\int\limits_\Omega (|v|^\rho v - |u|^\rho u)w'\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\|u(t)\|^\rho + \|v(t)\|^\rho\right)\|w(t)\|\,|w'(t)|, \qquad (1.55)$$

и, поскольку $u,\ v \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$, окончательно имеем

$$\left|\int\limits_\Omega (|v|^\rho v - |u|^\rho u)w'\,dx\right| \leqslant c\|w(t)\|\,|w'(t)|. \qquad (1.56)$$

Тогда (1.54) приводит к неравенству

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leqslant 2c\int\limits_0^t (\|w(\sigma)\|^2 + |w'(\sigma)|^2)\,d\sigma, \qquad (1.57)$$

откуда $w=0$.

Чтобы обосновать сделанное выше заключение, мы используем классическую процедуру, применяемую в теории линейных гиперболических уравнений. Пусть $s \in]0,\ T[$. Положим

$$\psi(t) = \left\{-\int\limits_t^s w(\sigma)\,d\sigma,\ t \leqslant s;\quad 0 \text{ при } t > s\right\},$$

$$w_1(t) = \int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma, \text{ так что } \psi(t) = w_1(t) - w_1(s), \text{ если } t \leqslant s.$$

Возьмем скалярное произведение обеих частей равенства (1.50) с $\psi(t)$; тогда все интегрирования законны, и мы получим

$$-\int\limits_0^s (w', \psi')\,dt + \int\limits_0^s a(w, \psi)\,dt = \int\limits_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u,\ \psi\right)dt,$$

а поскольку $\psi' = w$, $\psi(0) = -w_1(s)$, имеем

$$-\frac{1}{2}|w(s)|^2-\frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2=\int\limits_0^s\big((|v|^\rho v-|u|^\rho u),\ \psi\big)\,dt;$$

отсюда (ср. с (1.55), (1.56))

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2+\frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2\leqslant\int\limits_0^s\Big(\big\||u|^\rho\big\|_{L^n(\Omega)}+$$

$$+\big\||v|^\rho\big\|_{L^n(\Omega)}\Big)\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}\Big(\|w_1(t)\|_{L^q(\Omega)}+\|w_1(s)\|_{L^q(\Omega)}\Big)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c_1\int\limits_0^s|w(t)|\,(\|w_1(t)\|+\|w_1(s)\|)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|w_1(s)\|^2+c^2\int\limits_0^s(|w(t)|^2+\|w_1(t)\|^2)\,dt,$$

и, следовательно,

$$|w(s)|^2+\|w_1(s)\|^2\leqslant c_3\int\limits_0^s(|w(t)|^2+\|w_1(t)\|^2)\,dt,$$

что и приводит к нужному нам результату ●

Замечание 1.4. В случае теоремы 1.2 последовательность приближенных решений u_m (а не только некоторая ее подпоследовательность) сходится (в смысле п. 1.4) к u.

Возникает естественный вопрос о *гладкости* решения в том случае, когда на данные задачи налагаются дополнительные условия гладкости; этому вопросу посвящены п. 1.6, 1.7.

1.6. Один результат о гладкости

Мы уже ввели и использовали пространство Соболева (порядка 1) $H^1(\Omega)$; теперь нам понадобится *пространство Соболева* $H^m(\Omega)$ *порядка* m:

$$H^m(\Omega)=\{v\mid D^\alpha v\in L^2(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m\}\,^{1)},\qquad(1.58)$$

снабженное нормой

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha v|^2\Big)^{1/2}.$$

---

[1] $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $\alpha=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $D_i=\partial/\partial x_i$.

Это пространство является гильбертовым.

Нами будет доказана

Теорема 1.3. *Пусть в условиях теоремы* 1.1

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \tag{1.59}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{1.60}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega), \tag{1.61}$$

$\rho \leqslant \frac{2}{n-2}$ (ρ произвольно и конечно при $n=2$) (условие (1.49)).
(1.62)

Тогда существует решение, и притом единственное, задачи (1.21), (1.22), (1.23), *удовлетворяющее условиям*

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{1.63}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{1.64}$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{1.65}$$

Замечание 1.5. Согласно теореме вложения Соболева, имеем $|v|^\rho v \in L^2(\Omega)$, если $v \in H_0^1(\Omega)$ и выполнено условие (1.62) (см. (1.11); если $n=2$, то $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, где q произвольно и конечно). Легко видеть также, что если $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, то

$$u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \quad (p = \rho + 2),$$

т. е. в утверждении теоремы 1.3 в качестве частного случая содержится утверждение теоремы 1.1 ●

Доказательство теоремы 1.3. *Существование.* Предлагаемый ниже метод доказательства очень прост. Мы отправляемся от приближенных решений u_m, доставляемых соотношениями (1.29), (1.31), (1.32). В этом случае w_j образуют «базис» (в смысле, аналогичном (1.27)) в пространстве $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Предполагается, что (в усиление (1.31) и (1.32))

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{1.66}$$

$$u_{1m} \to u_1 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega). \tag{1.67}$$

Мы установим (этап (i)) дополнительную априорную оценку, которая обеспечит существование решения, удовлетворяющего (1.64), (1.65); далее, на этапе (ii) мы установим (1.63), используя уравнение (1.21).

Этап (i). Из (1.29) следует, что

$$(u''_m(0), w_j) = (f(0) + \Delta u_{0m} - |u_{0m}|^\rho u_{0m}, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.68}$$

Отметим, что в силу (1.59) и леммы 1.2 $f(0) \in L^2(\Omega)$, в силу (1.66) $|\Delta u_{0m}| \leqslant \text{const}$, а в силу (1.62) функции $|u_{0m}|^\rho u_{0m}$ принадлежат ограниченному множеству в $L^2(\Omega)$. Отсюда мы установим, умножая (1.68) на $g''_{jm}(0)$ и суммируя по j, что

$$|u''_m(0)|^2 \leqslant \left(|f(0)| + |\Delta u_{0m}| + \left||u_{0m}|^\rho\, u_{0m}\right|\right)|u''_m(0)|,$$

откуда

$$|u''_m(0)| \leqslant C. \tag{1.69}$$

Дифференцируя (1.29) по t (что законно), получим

$$\begin{aligned}(u'''_m(t), w_j) + a(u'_m(t), w_j) + (\rho + 1)\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), w_j\right) &= \\ = (f'(t), w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m;\end{aligned} \tag{1.70}$$

умножая (1.70) на $g''_{jm}(t)$ и суммируя по j, получим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2\right) = \\ &= (f'(t), u'_m(t)) - (\rho + 1)\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)\right).\end{aligned} \tag{1.71}$$

В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\left|\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)\right)\right| \leqslant \left\||u_m(t)|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} \|u'_m(t)\|_{L^q(\Omega)} \|u''_m(t)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.72}$$

где q (как и в теореме вложения Соболева) определяется из равенства

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$$

(более простой случай $n = 2$ изучается аналогичными методами). Поскольку, согласно (1.62), $\rho n \leqslant q$, имеем

$$\left\||u_m(t)|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} \leqslant \|u_m(t)\|^\rho \leqslant \text{const} \quad \text{(в силу (1.38))},$$

так что ввиду (1.72)

$$\left|(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t))\right| \leqslant c\, \|u'_m(t)\|\, |u''_m(t)|, \tag{1.73}$$

а тогда из (1.71) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2\right) \leqslant |f'(t)|\, |u'_m(t)| + c\, \|u'_m(t)\|\, |u''_m(t)|, \tag{1.74}$$

откуда мы можем заключить, используя (1.67), (1.69), что

$$|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \leqslant c\left(1 + \int_0^t \left(|u''_m(\sigma)|^2 + \|u'_m(\sigma)\|^2\right) d\sigma\right). \tag{1.75}$$

Следовательно,

$$u'_m \text{ принадлежат ограниченному множеству в } L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \tag{1.76}$$

$$u''_m \text{ принадлежат ограниченному множеству в } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)).$$

Более того, можно, как и при доказательстве теоремы 1.1, выделить такую подпоследовательность u_μ, что u, *кроме того*, будет удовлетворять еще и условию (1.64), (1.65).

Итак, мы уже доказали теорему, за исключением утверждения (1.63). Для доказательства (1.63) нам осталось установить, что

$$u \in L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega)). \tag{1.77}$$

Этап (ii). Доказательство (1.77). Из (1.21) следует, что

$$\Delta u = u'' + |u|^\rho u - f. \tag{1.78}$$

Однако (см. замечание 1.5) $|u|^\rho u \in L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))$; в силу (1.16) и (1.59) $f \in L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))$, и, таким образом, используя (1.65), мы выводим из (1.78), что

$$\Delta u \in L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)). \tag{1.79}$$

Положим

$$\Delta u = h; \tag{1.80}$$

Λ является изоморфизмом $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$; пусть G — обратный оператор. Тогда (поскольку $u \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$ имеем

$$u(t) = Gh(t) \text{ почти всюду.} \tag{1.81}$$

В силу теорем о гладкости решений линейных эллиптических уравнений[1] (см. Ниренберг [1] или, например, Лионс — Мадженес [1], т. 1, гл. 2) мы имеем

$$G \in \mathscr{L}(L^2(\Omega);\ H^2(\Omega)), \tag{1.82}$$

и (1.77) следует из (1.81), (1.82)●

Доказательство теоремы 1.3. *Единственность.* Мы будем поступать таким же образом, как и в формальной части (теперь уже обоснованной) доказательства теоремы 1.2. Мы получим (в обозначениях указанного выше доказательства)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\||u(t)|^\rho\|_{L^n(\Omega)} + \||v(t)|^\rho\|_{L^n(\Omega)}\right)\|w(t)\|_{L^q(\Omega)}\|w'(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

---

[1] Здесь мы учнтываем то, что граница Ω достаточно гладкая, — до сих пор предположенне о гладкостн границы не использовалось.

а поскольку

$$\| |u(t)|^\rho \|_{L^n(\Omega)} + \| |v(t)|^\rho \|_{L^n(\Omega)} \leqslant c \quad \text{(так как } \rho n \leqslant q\text{)},$$

то имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) \leqslant c \|w(t)\| |w'(t)|,$$

откуда и следует единственность ●

Замечание 1.6. Мы можем продолжить дифференцирование по t (налагая дополнительные условия на f, u_0, u_1). В случае $n=3$, $\rho=2$ мы отсылаем к работе Сазера [2] ●

1.7. Другой результат о гладкости. Специальные базисы

В этом пункте мы собираемся доказать результат такого же типа, как в п. 1.6, но *при других предположениях* на f и методом, в котором используется «специальный базис» из функций w_j.

Теорема 1.4. *Пусть* $n=3$ *и* $\rho=2$. *Пусть*

$$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{1.83}$$

а функции u_0 *и* u_1 *удовлетворяют условиям теоремы* 1.3 (*т. е.* (1.60), (1.61)). *Тогда существует единственная функция* u, *являющаяся решением задачи* (1.21), (1.22), (1.23) *и удовлетворяющая условиям* (1.63), (1.64) *и* (*вместо* (1.65)) *условию*

$$u'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q). \tag{1.84}$$

Замечание 1.7. Мы получаем (1.65), если

$$f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) ●$$

Доказательство теоремы 1.4. Ввиду теоремы 1.2 мы будем заниматься только существованием. Более того, как и всегда, речь будет идти только о выводе априорных оценок.

Мы будем действовать в два этапа: (i) сначала будет показано, каким образом можно получить априорное неравенство, предполагая, что u — гладкое решение задачи; (ii) затем мы увидим, как при помощи подходящего выбора «базиса» $\{w_j\}$ методом Фаэдо — Галёркина можно фактически построить решение с нужными априорными оценками.

Этап (i). Предположим, что функция u достаточно гладкая, удовлетворяет (1.21), (1.22), (1.23) и $u=0$ на Σ. Умножим (1.21) на $-\Delta u'$. Найдем (напомним, что $\rho=2$)

$$a(u'', u')+(\Delta u, \Delta u')+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(u^3)\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx=a(f, u'), \tag{1.85}$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u'(t)\|^2+|\Delta u(t)|^2)\leqslant\|f(t)\|\|u'(t)\|+\left|\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega}\frac{\partial(u^3)}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx\right|. \tag{1.86}$$

Но

$$\left|\int_{\Omega}\frac{\partial(u^3)}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx\right|\leqslant 3\left|\frac{\partial u'}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^q(\Omega)}\|u^2\|_{L^n(\Omega)},$$

а так как $n=3$, то $q=6$ и, следовательно,

$$\left|\int_{\Omega}\frac{\partial(u^3)}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx\right|\leqslant c\|u'(t)\|\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}\|u(t)\|^2. \tag{1.87}$$

Однако в силу (1.82)

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}\leqslant|\Delta u(t)|,$$

а так как мы уже знаем, что $\|u(t)\|\leqslant\text{const}$, то, подставляя (1.87) в (1.86), находим, что

$$\frac{d}{dt}(\|u'(t)\|^2+|\Delta u(t)|^2)\leqslant\|f(t)\|\|u'(t)\|+c\|u'(t)\||\Delta u(t)|,$$

откуда

$$\|u'(t)\|^2+|\Delta u(t)|^2\leqslant\|u_1\|^2+|\Delta u_0|^2+c\int_0^t\|f(\sigma)\|^2d\sigma+$$
$$+c\int_0^t(\|u'(\sigma)\|^2+|\Delta u(\sigma)|^2)d\sigma$$

и, наконец,

$$\|u'(t)\|^2+|\Delta u(t)|^2\leqslant c\left(\|u_1\|^2+|\Delta u_0|^2+\int_0^t\|f(\sigma)\|^2d\sigma\right). \tag{1.88}$$

Этап (ii). Теперь наша задача состоит в том, чтобы правильно использовать (1.88) (в дальнейшем мы будем часто сталкиваться с подобными вопросами). Операцию умножения на $-\Delta u$ (основную на этапе (i)) удается «воспроизвести» в (1.29) только в том случае, когда

$$-\Delta w_j=\lambda_j w_j \quad (j=1, \ldots), \quad w_j=0 \text{ на } \Gamma. \tag{1.89}$$

Итак, в качестве w_j выберем *собственные функции*, определенные в (1.89), которые, в частности, принадлежат $H^2(\Omega)$. Мы можем применить результаты п. 1.4. Покажем, что если функции w_j удовлетворяют (1.89), то

$$\| u'_m(t) \|^2 + | \Delta u_m(t) |^2 \leqslant \text{const}. \tag{1.90}$$

В самом деле, заменяя в (1.29) w_j на $-1/\lambda_j \Delta w_j$, получим

$$(u''_m(t),\ -\Delta w_j) + (\Delta u_m(t),\ \Delta w_j) + (u_m(t)^3,\ -\Delta w_j) = (f(t),\ -\Delta w_j),$$
$$1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.91}$$

Умножив j-е уравнение (1.91) на $g'_{jm}(t)$ и просуммировав по j, найдем

$$a(u''_m(t),\ u'_m(t)) + (\Delta u_m(t),\ \Delta u'_m(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial (u_m^3)}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\, dx =$$
$$= a(f(t),\ u'_m(t)). \tag{1.92}$$

Уравнение (1.92) есть не что иное, как частный случай уравнения (1.85) применительно к функции u_m, принадлежащей пространству, порожденному функциями $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Тогда выкладки, проведенные на этапе (i), оказываются законными и приводят к аналогу неравенства (1.88) — оценке (1.90) (если мы позаботимся о том, чтобы u_{0m} и u_{1m} удовлетворяли (1.66) и (1.67)).

Используя (1.90) таким же образом, как (1.76), мы докажем существование функции u, удовлетворяющей (1.63) и (1.64).

В силу (1.21) имеем

$$u'' = \Delta u - | u |^\rho u + f,$$

откуда следует (1.84).

1.8. Энергетическое неравенство и равенство

В этом пункте мы установим следующие результаты:

Теорема 1.5. *В условиях теоремы* 1.1 *выполнено энергетическое неравенство*

$$J(u(t),\ u'(t)) \leqslant J(u_0,\ u_1) + \int_0^t (f(\sigma),\ u'(\sigma))\, d\sigma \ \text{ п. в. по } t, \tag{1.93}$$

где

$$J(\varphi,\ \psi) = \frac{1}{2} a(\varphi,\ \varphi) + \frac{1}{p} \int_\Omega | \varphi(x) |^p dx + \frac{1}{2} | \psi |^2. \tag{1.94}$$

Теорема 1.6. *В условиях теоремы* 1.2 *имеет место энергетическое равенство*

$$J(u(t),\ u'(t)) = J(u_0,\ u_1) + \int_0^t (f(\sigma),\ u'(\sigma))\,d\sigma \text{ п. в. по } t. \tag{1.95}$$

Доказательство теоремы 1.5. Из (1.34) следует, что

$$J(u_m(t),\ u'_m(t)) = J(u_{0m},\ u_{1m}) + \int_0^t (f(\sigma),\ u'_m(\sigma))\,d\sigma. \tag{1.96}$$

Мы рассматриваем (1.96) для $m = \mu$, где последовательность u_μ выбрана таким образом, что имеют место (1.40), (1.41), (1.43), (1.44).

Пусть θ — функция из $C^0([0, T])$, $\theta \geqslant 0$. Из (1.96) следует, что

$$\int_0^T J(u_\mu(t),\ u'_\mu(t))\,\theta(t)\,dt = \int_0^T J(u_{0\mu},\ u_{1\mu})\,\theta(t)\,dt + \\ + \int_0^T \theta(t)\,dt \int_0^t (f(\sigma),\ u'_\mu(\sigma))\,d\sigma. \tag{1.97}$$

Правая часть последнего равенства стремится к

$$\int_0^T J(u_0,\ u_1)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T \theta(t)\,dt \int_0^t (f(\sigma),\ u'(\sigma))\,d\sigma.$$

Перепишем еще раз левую часть:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \| u_\mu(t) \|^2 \theta(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T | u'_\mu(t) |^2 \theta(t)\,dt + \\ + \frac{1}{p}\int_0^T \| u_\mu(t) \|^p_{L^p(\Omega)}\,\theta(t)\,dt = X^\theta_\mu. \tag{1.98}$$

Каждое выражение в (1.98) полунепрерывно снизу в слабой топологии относительно u_μ в $L^2(0, T;\ H^1_0(\Omega))$, u'_μ в $L^2(0, T;\ L^2(\Omega))$ и u_μ в $L^p(0, T;\ L^p(\Omega))$, следовательно,

$$\liminf_{\mu\to\infty} X^\theta_\mu \geqslant \frac{1}{2}\int_0^T \| u(t) \|^2 \theta(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T | u'(t) |^2 \theta(t)\,dt + \\ + \frac{1}{p}\int_0^T \| u(t) \|^p_{L^p(\Omega)}\,\theta(t)\,dt = \int_0^T J(u(t),\ u'(t))\,\theta(t)\,dt.$$

Из (1.97) вытекает, что

$$\int_0^T J(u(t),\ u'(t))\,\theta(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T J(u_0,\ u_1)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T \theta(t)\,dt \int_0^t (f(\sigma),\ u'(\sigma))\,d\sigma.$$

Так как это неравенство справедливо для любого $\theta \geqslant 0$, то мы приходим к (1.93) ●

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1.6, отметим следующий вспомогательный результат:

В условиях теоремы 1.1 *можно найти такое решение* $t \to u(t)$ (*соответственно* $t \to u'(t)$), *что отвечающее ему отображение* $[0,\ T] \to H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ (1.99) *слабо непрерывно* (*соответственно отображение* $[0,\ T] \to L^2(\Omega)$ *слабо непрерывно*).

Действительно, в силу (1.19), (1.20) u есть непрерывное отображение $[0,\ T] \to L^2(\Omega)$ и принадлежит $L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$, следовательно, u является слабо непрерывным отображением $[0,\ T] \to H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ согласно лемме 8.1 гл. 3 книги Лионса — Мадженеса ([1], т. 1). Доказательство для u' аналогично ●

Доказательство теоремы 1.6. Пусть $0 < s < t < T$, пусть θ_n — непрерывная кусочно линейная функция, равная 1 на отрезке $[s,\ t]$ и 0 при $\sigma < s - 1/n$ или $\sigma > t + 1/n$, пусть η_k — регуляризующая последовательность четных функций из C^∞, носители которых принадлежат $[-1/k,\ 1/k]$.

Умножим обе части (1.21) на

$$\theta_n((\theta_n u') * \eta_k * \eta_k) = \varphi_{kn}, \tag{1.100}$$

где символом * обозначена свертка по t.

Отметим, что

$$\varphi_{kn} = \theta_n((\theta_n u)' * \eta_k * \eta_k) - \theta_n((\theta_n' u) * \eta_k * \eta_k), \tag{1.101}$$

чем оправдано проведенное ниже интегрирование по частям. Имеем

$$\int_0^T (\theta_n u'', (\theta_n u') * \eta_k * \eta_k)\,dt + \int_0^T a(\theta_n u, (\theta_n u') * \eta_k * \eta_k)\,dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega |u|^\rho u\theta_n ((\theta_n u') * \eta_k * \eta_k)\,dx\,dt = \\ = \int_0^T \theta_n (f, (\theta_n u') * \eta_k * \eta_k)\,dt. \quad (1.102)$$

Первый интеграл в (1.102) равен

$$\int_0^T ((\theta_n u')' * \eta_k, (\theta_n u') * \eta_k)\,dt - \int_0^T ((\theta_n' u') * \eta_k, (\theta_n u') * \eta_k)\,dt = \\ = -\int_0^T ((\theta_n' u') * \eta_k, (\theta_n u') * \eta_k)\,dt$$

и при $k \to \infty$ стремится к

$$-\int_0^T \theta_n \theta_n' |u'(t)|^2\,dt.$$

Аналогично, второй интеграл в (1.102) равен

$$\int_0^T a((\theta_n u) * \eta_k, (\theta_n u)' * \eta_k)\,dt - \int_0^T a(\theta_n u) * \eta_k, (\theta_n' u) * \eta_k)\,dt = \\ = -\int_0^T a((\theta_n u) * \eta_k, (\theta_n' u) * \eta_k)\,dt$$

и при $k \to \infty$ стремится к

$$-\int_0^T \theta_n \theta_n' a(u, u)\,dt.$$

Таким образом, из (1.102) мы выводим, что

$$-\int_0^T \theta_n \theta_n' \left(a(u, u) + |u'(t)|^2\right) dt + \int_0^T \int_\Omega |u|^\rho u u' \theta_n^2\,dx\,dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega \theta_n^2 f u'\,dx\,dt; \quad (1.103)$$

последнее имеет место потому, что $|u|^\rho u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ в силу (1.62).

Однако, если $h \in L^1(0, T)$, то

$$-\int_0^T \theta_n\theta_n' h\, d\sigma = n\int_t^{t+1/n} (1 - n(\sigma - t))\, h(\sigma)\, d\sigma -$$
$$- n\int_{s-1/n}^{s} (1 + n(\sigma - s))\, h(\sigma)\, d\sigma,$$

и, следовательно, в силу теоремы Лебега при $n \to \infty$

$$-\int_0^T \theta_n\theta_n' h\, d\sigma \to \frac{1}{2} h(t) - \frac{1}{2} h(s)$$

для почти всех s и t.

Тогда из (1.103) следует, что

$$\frac{1}{2}(a(u(t), u(t)) + |u'(t)|^2) + \int_s^t \int_\Omega |u|^\rho u u'\, dx\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}(a(u(s), u(s)) + |u'(s)|^2) + \int_s^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma \qquad (1.104)$$

для почти всех s и t. Однако мы можем проинтегрировать по частям в интеграле

$$\int_s^t \int_\Omega |u|^\rho u u'\, dx\, d\sigma$$

и вывести из (1.104) равенство

$$J(u(t), u'(t)) = J(u(s), u'(s)) + \int_s^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma$$
$$\text{для почти всех } s \text{ и } t. \qquad (1.105)$$

Теперь в равенстве (1.105) устремим s к 0. В силу (1.99)

$$\liminf_{s\to\infty} J(u(s), u'(s)) \geqslant J(u_0, u_1),$$

и поэтому из (1.105) следует неравенство

$$J(u(t), u'(t)) \geqslant J(u_0, u_1) + \int_0^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma \text{ п. в. по } t;$$

отсюда, учитывая (1.93), получим (1.95)●

В условиях теоремы 1.2 мы можем рассмотреть отображение (нелинейное)

$$\{f, u_0, u_1\} \xrightarrow{\pi} u \ (= \text{решение}). \tag{1.106}$$

Положим

$$W(Q) = \{\varphi \mid \varphi \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \varphi' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\}. \tag{1.107}$$

Это пространство можно сделать банаховым, введя норму

$$\|\varphi\|_{W(Q)} = \|\varphi\|_{L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)} + \|\varphi'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Имеет место

Теорема 1.7. *В условиях теоремы* 1.2 *отображение* π, *определенное в* (1.106), *непрерывно как отображение*

$$L^2(Q) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to W(Q).$$

Доказательство. Пусть $v = \pi(\{g, v_0, v_1\})$, и предположим, что

$$\{g, v_0, v_1\} \to \{f, u_0, u_1\} \quad \text{в} \quad L^2(Q) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Тогда v принадлежат ограниченному множеству в $W(Q)$ (это верно даже в условиях теоремы 1.1; в этом случае мы *можем выбирать v таким образом*, чтобы они принадлежали ограниченному множеству в $W(Q)$).

Пусть $w = u - v$. Тогда w удовлетворяет уравнению

$$w'' - \Delta w = f - g - \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v\right),$$

откуда

$$\frac{1}{2}(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) = \frac{1}{2}(|u_1 - v_1|^2 + \|u_0 - v_0\|^2) + \\ + \int_0^t (f - g, w')\, d\sigma - \int_0^t \int_\Omega \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v\right) w'\, dx\, d\sigma.$$

Отсюда мы выводим, используя оценки, аналогичные (1.55), (1.56), и принадлежность v ограниченному множеству в $W(Q)$, что

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leqslant |u_1 - v_1|^2 + \|u_0 - v_0\|^2 + \\ + 2\int_0^t |f - g|^2\, d\sigma + c\int_0^t (|w'(\sigma)|^2 + \|w(\sigma)\|^2)\, d\sigma,$$

и, следовательно,

$$|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant c(u,v)\left[|u_1-v_1|^2+\|u_0-v_0\|^2+\int_0^t|f-g|^2\,d\sigma\right], \qquad (1.108)$$

где $c(u,v)$ — функция от u и v, ограниченная на ограниченных множествах в $W(Q)$. Теорема доказана ●

1.9. Различные замечания

Во всех приведенных выше рассмотрениях мы можем заменить (не меняя существенно доказательств) оператор $-\Delta$ оператором A:

$$A\varphi=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right),\quad a_{ij}\in C^1(\bar{\Omega}),\quad a_{ij}=a_{ji},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2),\quad \alpha>0,\quad \xi_i\in\mathbb{R}, \qquad (1.109)$$

поставив на Σ краевые условия Дирихле или Неймана[1]).

Аналогично, можно взять в качестве A эллиптический оператор порядка $2m$ (причем такой, что $A^*=A$). Тогда мы найдем (например, для задачи Дирихле), что

$$u\in L^\infty(0,T;H_0^m(\Omega))^{2)}. \qquad (1.110)$$

Можно доказать (таким же образом, как в теореме 1.2) *единственность* решения, доставляемого аналогом теоремы 1.1, если

$$\rho\leqslant\frac{2m}{n-2m}, \qquad (1.111)$$

$$\rho \text{ произвольно и конечно при } n<2m$$

(отметим, что при $m=1$, $n=3$ мы возвращаемся к (1.49)).

Аналогичным образом можно рассмотреть *гиперболические системы* или *системы*, корректные в смысле Петровского, с нелинейностями типа тех, которые были здесь рассмотрены ●

---

[1]) Следует отметить, что в случае смешанных задач (т. е. когда на одном куске границы заданы условия Дирихле, а на остальной части — Неймана) включение, аналогичное (1.82), неверно. Если функции a_{ij} зависят от t, то возникает трудность при выборе специального базиса, поскольку собственные функции зависят от t.

[2]) $H_0^m(\Omega)$ = замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^m(\Omega)$.

Замечание 1.9. Мы можем также немного обобщить характер нелинейности, заменив $|u|^\rho u$ членом $F(u)$, где функция $\lambda \to F(\lambda)$ обладает подходящими свойствами (см. работу Юргенса [1], который рассматривал F вида $F(\lambda) = \lambda G'(\lambda^2)$). При этом методы не меняются ●

Замечание 1.10. Мы предполагали, что Ω — *ограниченная область*. В случае *неограниченной области* Ω можно получить те же самые результаты со следующими модификациями:

(i) норма $\sqrt{a(v, v)}$ в случае неограниченной области Ω не эквивалентна норме $\| v \|_{H^1(\Omega)}$ на $H_0^1(\Omega)$, и тогда надо использовать следующее неравенство:

$$a(u(t), u(t)) = \| u(t) \|^2_{H^1(\Omega)} - | u(t) |^2 \geqslant$$

$$\geqslant \| u(t) \|^2_{H^1(\Omega)} - 2t \int_0^t | u'(\sigma) |^2 d\sigma - 2 | u_0 |^2.$$

(ii) В случае неограниченной области Ω нельзя непосредственно применить метод теоремы 1.4 (так как в общем случае спектр Δ будет непрерывным[1])). Тем не менее пусть

$$\Omega_R = \Omega \cap \{x \mid \ | x | < R\};$$

применяя метод теоремы 1.4 в Ω_R, мы получим оценки, *не зависящие от* R; далее можно R устремить к бесконечности (мы при этом покажем также, что решение «непрерывно зависит от Ω») ●

Замечание 1.11. Задачи, аналогичные рассмотренным в этом параграфе, в случае нецилиндрических областей будут изучены (частично) в § 8 гл. 3 ●

2. ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ В ТОМ СЛУЧАЕ, КОГДА НЕТ ГЛОБАЛЬНЫХ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК

2.1. Гиперболическое уравнение без глобальных априорных оценок

В обозначениях § 1 будем искать функцию u, являющуюся решением уравнения

$$u'' - \Delta u + u^2 = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in]0, T[\qquad (2.1)$$

---

[1]) См. Лионс — Штраусс [1], стр. 62.

при условиях

$$u=0 \text{ на } \Sigma, \tag{2.2}$$

$$u(x,\,0)=u_0(x), \quad u'(x,\,0)\left(=\frac{\partial u}{\partial t}(x,\,0)\right)=u_1(x), \quad x\in\Omega. \tag{2.3}$$

Если мы умножим (2.1) на u' и проинтегрируем по частям по x, то, считая все возникающие интегралы сходящимися, найдем

$$\frac{1}{2}|u'(t)|^2+J(u(t))=\frac{1}{2}|u_1|^2+J(u_0), \tag{2.4}$$

где мы положили

$$J(\varphi)=\frac{1}{2}a(\varphi)+\frac{1}{3}b(\varphi), \tag{2.5}$$

$$a(\varphi)=a(\varphi,\,\varphi), \quad a(\varphi,\,\psi)=\int_\Omega \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi\,dx, \tag{2.6}$$

$$b(\varphi)=\int_\Omega \varphi^3\,dx. \tag{2.7}$$

Однако в этом случае функционал $b(\varphi)$ *не обязательно положительный, и из равенства* (2.4) *не следует априорная оценка.*

В двух последующих пунктах мы покажем, как тем не менее можно получить глобальное решение (по t) для *частных значений* u_0, u_1.

В этой связи мы введем специальное подмножество $\mathscr{W}$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

2.2. Множество $\mathscr{W}$

Предположим, что

$$n\leqslant 6. \tag{2.8}$$

Тогда $H_0^1(\Omega)\subset L^3(\Omega)$ и, следовательно, $v\to J(v)$ является непрерывным функционалом на $H_0^1(\Omega)$. Отметим, что если выполнено (2.8), то

$$|b(u)|^{1/3}\leqslant ca(u)^{1/2} \quad \forall u\in H_0^1(\Omega), \tag{2.9}$$

где c — константа, зависящая от Ω.

Положим

$$\begin{gathered} d=\inf_u\,(\sup_{\lambda\geqslant 0} J(\lambda u)), \\ u\in H_0^1(\Omega),\ \lambda\geqslant 0, \\ u\neq 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Лемма 2.1. *Если выполнено условие* (2.8), *то* $d > 0$.

Доказательство. Очевидно,

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2} a(u) + \frac{\lambda^3}{3} b(u). \tag{2.11}$$

Если $b(u) \geqslant 0$, то $\sup\limits_{\lambda \geqslant 0} J(\lambda u) = +\infty$. Если $b(u) < 0$, то

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} J(\lambda u) = J\left(-\frac{a(u)}{b(u)} u\right) = \frac{1}{6} \frac{a(u)^3}{b(u)^2},$$

и, следовательно, в силу (2.9)

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} J(\lambda u) \geqslant \frac{1}{6c^6},$$

откуда

$$d \geqslant \frac{1}{6c^6} \bullet$$

Теперь мы определим *множество устойчивости* $\mathscr{W}$:

$$\mathscr{W} = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ 0 \leqslant J(\lambda v) < d \quad \forall \lambda \in [0, 1]\}. \tag{2.12}$$

Проверим прежде всего, что множество $\mathscr{W}$ не пусто.

Лемма 2.2. *Множество* $\mathscr{W}$ *содержит шар* $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{B} = \Big\{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ a(v) < \rho, \text{ где } \rho > 0 \text{ — любое число, удовлетворяющее неравенствам } \rho \leqslant \frac{9}{4c^6},\ \frac{\rho}{2} + \frac{c^3}{3}\rho^{3/2} < d\Big\}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Согласно (2.9), имеем

$$\frac{\lambda^2}{2} a(v) - \frac{\lambda^3 c^3}{3} a(v)^{3/2} \leqslant J(\lambda v) \leqslant \frac{\lambda^2}{2} a(v) + \frac{\lambda^3 c^3}{3} a(v)^{3/2}$$

и, следовательно,

$$J(\lambda v) \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1], \text{ если } \frac{1}{2} - \frac{\lambda c^3}{3} a(v)^{1/2} \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

т. е. если

$$a(v) \leqslant \frac{9}{4c^6};$$

в силу второго условия на ρ в (2.13) имеем

$$J(\lambda v) \leqslant \frac{1}{2} a(v) + \frac{c^3}{3} a(v)^{3/2} < d \bullet$$

Далее (в п. 2.3) мы покажем, что существует глобальное решение задачи (2.1), (2.2), (2.3), если $n \leqslant 6$, $u_0 \in \mathscr{W}$ и, кроме того,

$$\frac{1}{2} |u_1|^2 + J(u_0) < d.$$

Сначала мы выясним некоторые простые свойства множества $\mathscr{W}$.

Лемма 2.3. *Множество* $\mathscr{W}$ *(определенное в* (2.12)) *является звездным относительно начала* (*т. е.* $v \in \mathscr{W} \Rightarrow \theta v \in \mathscr{W} \quad \forall \theta \in [0, 1]$).

Лемма непосредственно следует из определения (2.12).

Лемма 2.4. *Имеет место равенство*

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}_* \cup \mathscr{B}, \tag{2.14}$$

где $\mathscr{B}$ — *шар* (2.13) *и*

$$\mathscr{W}_* = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v) + b(v) > 0, \quad J(v) < d\}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Мы покажем, что в действительности

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}_* \cup \{0\}; \tag{2.16}$$

последнее эквивалентно (2.14) в силу леммы 2.2.

1) Предположим сначала, что $v \in \mathscr{W}$, $v \neq 0$.

Если $b(v) \geqslant 0$, то $a(v) + b(v) > 0$ и $J(v) < d$.

Если $b(v) < 0$, то $\sup J(\lambda v) = J\left(-\frac{a(v)}{b(v)} v\right) \geqslant d$, но тогда с необходимостью $-a(v)/b(v) > 1$ (так что $a(v) + b(v) > 0$) и $J(v) < d$.

2) Наоборот, пусть $v \in \mathscr{W}_*$.

Если $b(v) \geqslant 0$, то $\sup\limits_{\lambda \in [0, 1]} J(\lambda v) = J(v) < d$ и $v \in \mathscr{W}$.

Если $b(v) < 0$, то из $-\frac{a(v)}{b(v)} > 1$ следует, что

$$\sup_{\lambda \in [0, 1]} J(\lambda v) = J(v),$$

откуда и получается требуемый результат.

Следствие 2.1. *Множество* $\mathscr{W}$, *определенное в* (2.12), *открыто.*

Следствие 2.2. *Множество* $\mathscr{W}$ *ограничено в* $H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. В самом деле, если $b(v) \geqslant 0$, то $J(v) \geqslant \frac{1}{2} a(v)$, и, следовательно, $a(v) < 2d$. Если $b(v) < 0$, то $b(v) > -a(v)$, следовательно, $J(v) > \frac{1}{6} a(v)$ и $a(v) < 6d$. Таким образом, $\mathscr{W}$ содержится в шаре $\{v \mid v \in H_0^1(\Omega), a(v) < 6d\}$ ●

2.3. Теорема устойчивости

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему об устойчивости:

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (2.8). *Пусть* $\mathscr{W}$ — *множество* (2.12). *Пусть заданы функции* u_0, u_1, *удовлетворяющие условиям*

$$u_0 \in \mathscr{W}; \quad u_1 \in L^2(\Omega), \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{2}|u_1|^2 + J(u_0) = d \quad (d \text{ определено с помощью } (2.10)). \tag{2.18}$$

Тогда существует функция u, *такая, что*

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.19}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$u'' - \Delta u + u^2 = 0, \tag{2.21}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{2.22}$$

Более того,

$$u(t) \in \overline{\mathscr{W}} \text{ (замыкание } \mathscr{W} \text{ в } H_0^1(\Omega)). \tag{2.23}$$

Замечание 2.1. Условия (2.22) интерпретируются таким же образом, как в замечании 1.1 ●

Замечание 2.2. Для доказательства *единственности* можно получить оценки, аналогичные тем, которые были получены для уравнения $u'' - \Delta u + |u|u = 0$, т. е. в случае § 1 с $\rho = 1$; тогда теорема 1.2 показывает, что *решение из теоремы* 2.1 *единственно, если* $n \leqslant 4$ ●

Доказательство теоремы 2.1. 1) Как и в § 1, мы построим приближенное решение $u_m(t)$; при этом надо проявить некоторую осторожность при выборе u_{0m} и u_{1m}.

Для заданных функций u_0, u_1, удовлетворяющих (2.17), (2.18), можно найти такие последовательности u_{0m}, u_{1m} («базис» $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ еще не выбран), что

$$\begin{gathered} u_{0m} \in \mathscr{W}, \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega), \\ u_{1m} \in H_0^1(\Omega), \quad u_{1m} \to u_1 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega), \\ \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + J(u_{0m}) < d \quad \forall m. \end{gathered} \tag{2.24}$$

(Например, можно взять $u_{0m} = u_0$ и $u_{1m} \in H_0^1(\Omega)$, где $u_{1m} \to u_1$ в $L^2(\Omega)$; тогда $\frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + J(u_0) < d$, если m достаточно велико.)

Затем выбираем последовательность функций $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ из $H_0^1(\Omega)$ так, чтобы они образовывали «базис» в смысле (1.27) (в $H_0^1(\Omega)$) и чтобы

$$u_{0m}, u_{1m} \in [w_1, \ldots, w_m] = (\text{пространство, порожденное } w_1, \ldots, w_m, \text{ при } m \geqslant 2). \tag{2.25}$$

(Например, если $u_{0m} = u_0$, то возьмем $w_1 = u_0$ и выберем w_m таким образом, чтобы $u_{1m} \in [w_1, \ldots, w_m]$.)

Теперь мы определим «приближенное» решение $u_m(t)$ методом Фаэдо — Галёркина:

$$u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m],$$

$$(u_m''(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + \int_\Omega u_m(t)^2 w_j\, dx = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{2.26}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_m'(0) = u_{1m}.$$

Решение $u_m(t)$ существует *локально* на интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$, и на этом интервале (см. 2,4))

$$\frac{1}{2} | u_m'(t) |^2 + J(u_m(t)) = \frac{1}{2} | u_{1m} |^2 + J(u_{0m}). \tag{2,27}$$

2) Теперь мы проверим, что

$$u_m(t) \in \mathscr{W} \quad \forall t \tag{2.28}$$

(тем самым будет показано, что $t_m = T$).

Предположим, что включение (2.28) не выполнено, и пусть t_1 — наименьшее t, для которого $u_m(t_1) \notin \mathscr{W}$. Тогда $u_m(t_1) \in \partial\mathscr{W}$ — границе $\mathscr{W}$, а поскольку множество $\mathscr{W}$ звездное (лемма 2.3), имеем

$$\theta u_m(t_1) \in \mathscr{W} \quad \forall \theta \in [0, 1[.$$

Следовательно,

$$J(\theta u_m(t_1)) < d \quad \forall \theta \in [0, 1[, \tag{2.29}$$

и, устремляя $\theta \to 1$, найдем

$$J(u_m(t_1)) \leqslant d. \tag{2.30}$$

Если $J(u_m(t_1)) < d$, то в силу (2.29) и определения $\mathscr{W}$ мы получаем, что $u_m(t_1) \in \mathscr{W}$, а это противоречит сделанному предположению. Таким образом, из (2.30) следует, что

$$J(u_m(t_1)) = d. \tag{2.31}$$

Однако (2.27) показывает, что

$$J(u_m(t_1)) \leqslant \frac{1}{2} | u_{1m} |^2 + J(u_{0m}) < d \quad (\text{в силу } (2.24)),$$

что противоречит (2.31). Таким образом, включение (2.28) доказано.

3) Из условия (2.28) и следствия 2.2 вытекает, что

$$u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T;\ H_0^1(\Omega)). \qquad (2.32)$$

Более того, поскольку в силу (2.32) функционал $J(u_m(t))$ ограничен (по абсолютной величине), из (2.27) следует, что

$$u'_m \text{ принадлежат ограниченному множеству в } L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega)). \qquad (2.33)$$

Доказательство заканчивается таким же образом, как в теореме 1.1 ●

Замечание 2.3. Если мы предположим, что $n \leqslant 4$, $u_0 \in \mathscr{W} \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ и выполнено равенство (2.18), то тогда, как и в теореме 2.1, существует решение, дополнительно удовлетворяющее включениям

$$u \in L^\infty(0, T;\ H^2(\Omega)),$$

$$u' \in L^\infty(0, T;\ H_0^1(\Omega)),$$

$$u'' \in L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega)).$$

Для доказательства надо дифференцировать (2.26) по t и рассуждать таким же образом, как в теореме 1.3 ●

2.4. Одна теорема о несуществовании

Теперь мы, следуя Фужите [1], [2], рассмотрим нелинейное параболическое уравнение, у которого *не существует глобального решения по* t (т. е. *для всех* t).

Положим

$$\varphi(\lambda) = \{0, \text{ если } \lambda < 0;\ \lambda^{1+\alpha}, \text{ если } \lambda \geqslant 0\}, \qquad (2.34)$$

$\alpha > 0$ — заданное число.

Рассмотрим уравнение

$$u' - \Delta u - \varphi(u) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t > 0, \qquad (2.35)$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad (2.36)$$

(здесь рассматривается *задача Коши*).

Предположим, что

$$u_0 \in L^{1+\alpha}(\mathbb{R}^n), \qquad u_0 \geqslant 0 \text{ почти всюду}, \qquad u_0 \not\equiv 0. \qquad (2.37)$$

Тогда имеет место следующий отрицательный результат:

Теорема 2.2. *Предположим, что*

$$\alpha n < 2 \tag{2.38}$$

и начальная функция u_0 *удовлетворяет* (2.37). *Тогда не существует такого решения* u *задачи* (2.35), (2.36), *что*

$$u \in L^{1+\alpha}(0, T;\ L^{1+\alpha}(\mathbb{R}^n)) \quad \forall T > 0. \tag{2.39}$$

Замечание 2.4. Если

$$u \in L^{1+\alpha}(0,\ T;\ L^{1+\alpha}(\mathbb{R}^n)),$$

то

$$u^{1+\alpha} \in L^1(0, T;\ L^1(\mathbb{R}^n)) \quad \text{и} \quad \Delta u \in L^{1+\alpha}(0, T;\ W^{-2,1+\alpha}(\mathbb{R}^n)),$$

где

$$W^{-2,p}(\mathbb{R}^n) = (W^{2,p'}(\mathbb{R}^n))', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{2.40}$$

$$W^{2,p'}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \,\middle|\, v \in L^{p'}(\mathbb{R}^n),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n),\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) \right\}, \tag{2.41}$$

$W^{2,p'}(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство с нормой

$$\| v \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i,\,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Таким образом, если u удовлетворяет (2.35), то имеем

$$u' \in L^{1+\alpha}(0, T;\ W^{-2,1+\alpha}(\mathbb{R}^n)) + L^1(0, T;\ L^1(\mathbb{R}^n)).$$

Поэтому мы можем определить $u(0)$, т. е. условие (2.36) имеет смысл ●

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\rho \geqslant 0, \ \rho \text{ четно}, \ \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1. \tag{2.42}$$

Рассмотрим $u_0 * \rho$. Поскольку наша задача инвариантна относительно сдвигов по x, можно предполагать, что

$$u_0 * \rho(0) > 0.$$

Так как функция $u_0 * \rho$ непрерывна, то можно найти такие β и $\gamma > 0$, что

$$u_0 * \rho(x) \geqslant \beta > 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \gamma. \tag{2.43}$$

Предположим, что u — решение задачи (2.35), (2.36), (2.39). Отметим, что при этом непременно $u \geqslant 0$ почти всюду.

Рассмотрим v_T — решение задачи

$$-v_T' - \Delta v_T = 0, \quad t < T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v_T(T) = \rho. \tag{2.44}$$

Положим также

$$Y_T(t) = (u(t), v_T(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.45}$$

где скобки означают скалярное произведенне между элементамн $L^{1+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и, например, пространства $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций класса C^∞ (функция $t \to v_T(t)$ является отображением $t \leqslant T \to \mathcal{S}$ класса C^∞).

Мы можем продифференцировать (2.45). Тогда

$$\frac{d}{dt} Y_T(t) = (u'(t), v_T(t)) + (u(t), v_T'(t)), \tag{2.46}$$

где первая (соответственно вторая) скобка обозначает скалярное произведенне между элементами пространств

$$W^{-2,1+\alpha}(\mathbb{R}^n) + L^1(\mathbb{R}^n)$$

и $\mathcal{S}$ (соответственно между элементами $L^{1+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}$). Используя (2.35) и (2.44), мы выведем из (2.46), что

$$\frac{d}{dt} Y_T(t) = (\Delta u(t) + \varphi(u(t)), v_T(t)) + (u(t), -\Delta v_T(t)) = \\ = (\varphi(u(t)), v_T(t)). \tag{2.47}$$

Однако

$$v_T(t) \geqslant 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} v_T(t)\, dx = 1, \tag{2.48}$$

и функция $\lambda \to \varphi(\lambda)$ *выпуклая*. Следовательно, в силу неравенства Иенсена (см., например, Харди — Литлвуд — Полиа [1])

$$(\varphi(u(t)), v_T(t)) \geqslant \varphi((u(t), v_T(t))) = \varphi(Y_T(t)), \tag{2.49}$$

и ввиду (2.47) получаем

$$\frac{d}{dt} Y_T(t) \geqslant \varphi(Y_T(t)), \tag{2.50}$$

а поскольку $Y_T(t) \geqslant 0$, это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} Y_T(t) \geqslant Y_T(t)^{1+\alpha}. \tag{2.50$'$}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\alpha} Y_T(0)^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha} Y_T(t)^{-\alpha} \geqslant t,$$

откуда

$$\frac{1}{\alpha} Y_T(0)^{-\alpha} \geqslant T. \tag{2.51}$$

С другой стороны,

$$Y_T(0) = (u(0), v_T(0)) = (u_0, w_T * \rho),$$

где

$$w_T(x) = \frac{1}{(4\pi T)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4T}\right). \tag{2.52}$$

Следовательно (ввиду четности ρ),

$$Y_T(0) = (u_0 * \rho,\ w_T),$$

и из (2.43), (2.52) мы выводим, что

$$Y_T(0) \geqslant \beta \frac{1}{(4\pi T)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4T}\right) \int\limits_{|x| \leqslant \gamma} dx = \frac{c}{T^{n/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4T}\right). \tag{2.53}$$

Используя (2.53) и (2.51), получим

$$\alpha T \frac{c^\alpha}{T^{\alpha n/2}} \exp\left(-\alpha \frac{\gamma^2}{4T}\right) \leqslant 1,$$

и это неравенство должно выполняться для *любого* T, что невозможно при $1 - \alpha n/2 > 0$, т. е. при условии (2.38). Таким образом, (2.39) не может выполняться ●

2.5. Замечание

В стационарных нелинейных задачах, как правило, не имеет места существование, если нет априорной оценки. Например, так обстоит дело для нелинейной задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u - |u|^m &= f \text{ в } \Omega, \\ u &= g \text{ на } \Gamma, \end{aligned} \tag{2.54}$$

рассмотренной Похожаевым [4] (пример 3, § 3). Последний показал, что задача (2.54) (и другие более общие задачи) является нормальной в следующем общем смысле. Нелинейное дифференцируемое отображение A банахова пространства X в банахово пространство Y называется *нормальным*, если

(i) $\forall y \in Y$ функция $x \to \| Ax - y \|_Y$ достигает точной нижней грани на X;

(ii) если $(y - A(x_0),\ \varphi) = 0$ для всех таких $\varphi \in Y'$, что $A'(x_0)^* \varphi = 0$, то $y = A(x_0)$.

(В случае рефлексивных банаховых пространств мы приходим к обобщению понятия нормальности для линейных операторов — замкнутости области значений.)

3. ДРУГОЙ ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

3.1. Постановка задачи

В этом параграфе мы изучим уравнение

$$u'' - \Delta u + |u'|^\rho u' = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in]0, T[\tag{3.1}$$

($\rho > 0$ — заданное число и, как в предыдущих параграфах, $u' = \partial u/\partial t$, $u'' = \partial^2 u/\partial t^2$) с граничными и начальными условиями

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{3.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \bullet \tag{3.3}$$

Таким образом, речь идет о задаче, в каком-то смысле аналогичной той, которую мы рассмотрели в § 1, причем член $|u'|^\rho u'$ заменяет $|u|^\rho u$.

Здесь нелинейность «более сильная», поскольку нелинейный член является функцией от u', а не от u. Тем не менее настоящая задача решается проще, чем задача из § 1; последнее связано с двумя обстоятельствами:

(i) как и в § 1, можно получить априорную оценку, позволяющую воспользоваться соображениями компактности (этому посвящен п. 3.2);

(ii) можно воспользоваться методами, основанными на монотонности, см. гл. 2, § 6●

3.2. Теорема существования и единственности

Теорема 3.1. *Пусть заданы функции* f, u_0, u_1, *причем*

$$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q), \tag{3.4}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{3.5}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.6}$$

Предположим, что Ω *— ограниченная область с гладкой границей.*

Тогда существует функция u, *являющаяся единственным решением задачи* (3.1), (3.2), (3.3) *и такая, что*

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{3.7}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{3.8}$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.9}$$

$$u' \in L^{\rho+2}(Q). \tag{3.10}$$

Доказательство теоремы 3.1. *Единственность* доказывается непосредственно[1]). Если u и v — два решения, то $w=u-v$ удовлетворяет уравнению

$$w''-\Delta w+|u'|^\rho u'-|v'|^\rho v'=0. \tag{3.11}$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства (3.11) с $w'(t)$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2)+\int_\Omega\left(|u'|^\rho u'-|v'|^\rho v'\right)(u'-v')\,dx=0, \tag{3.12}$$

где

$$\|\varphi\|^2=\int_\Omega(\operatorname{grad}\varphi)^2\,dx. \tag{3.13}$$

Однако (это первый пример монотонности, с которым мы встречаемся)

$$\int_\Omega\left(|u'|^\rho u'-|v'|^\rho v'\right)(u'-v')\,dx\geqslant 0, \tag{3.14}$$

и из (3.12) следует, что $\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2)\leqslant 0$, и, значит, $w=0$ ●

Доказательство теоремы 3.1. *Существование.*

1° *Приближенное решение.* Как и в п. 1.7, мы воспользуемся методом Фаэдо — Галёркина с выбором специального базиса. Пусть w_j — собственные функции задачи Дирихле для оператора $-\Delta$:

$$-\Delta w_j=\lambda_j w_j,\quad j=1,\ldots,\quad w_j=0 \text{ на } \Gamma. \tag{3.15}$$

Мы предполагаем, что граница Γ области Ω достаточно гладкая, так что

$$w_j\in H^2(\Omega)\quad\text{и}\quad w_j\in L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.16}$$

Выберем u_{0m}, $u_{1m}\in[w_1,\ldots,w_m]$ таким образом, чтобы

$$u_{0m}\to u_0\quad\text{в}\quad H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \tag{3.17}$$

$$u_{1m}\to u_1\quad\text{в}\quad H_0^1(\Omega)\cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.18}$$

Такой выбор возможен. Определим далее $u_m(t)$ как решение задачи

$$\begin{gathered}(u_m''(t),\,w_j)+a(u_m(t),\,w_j)+(|u_m'(t)|^\rho u_m'(t),\,w_j)=(f(t),\,w_j),\\ 1\leqslant j\leqslant m,\qquad u_m(t)\in[w_1,\ldots,w_m]\end{gathered} \tag{3.19}$$

---

[1]) И имеет место при более общих условиях, см. гл. 2, § 6.

$$\left(\text{где } a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx\right),$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u'_m(0) = u_{1m}. \tag{3.20}$$

Система (3.19), (3.20) разрешима локально на некотором интервале $[0, t_m]$.

Как и в § 1, мы выведем априорные оценки, из которых будет следовать, что $t_m = T$.

2° *Априорная оценка* (I). Если $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$, то, умножая (3.19) на $g'_{jm}(t)$ и суммируя по j, найдем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u'_m(t)|^2 + \| u_m(t) \|^2) + \int_{\Omega} | u'_m(t) |^{\rho+2} dx = (f(t), u'_m(t)),$$

откуда

$$\frac{1}{2} (| u'_m(t) |^2 + \| u_m(t) \|^2) + \int_0^t \int_{\Omega} | u'_m(x, \sigma) |^{\rho+2} dx\, d\sigma =$$

$$= \int_0^t (f(\sigma), u'_m(\sigma))\, d\sigma + \frac{1}{2} (| u_{1m} |^2 + \| u_{0m} \|^2), \tag{3.21}$$

и, следовательно,

$$| u'_m(t) |^2 + \| u_m(t) \|^2 \leqslant C, \tag{3.22}$$

$$\int_Q | u'_m |^{\rho+2} dx\, dt \leqslant C. \tag{3.23}$$

Из этих оценок уже вытекает, что $t_m = T\ \forall m$.

3° *Априорная оценка* (II). Благодаря (3.15) мы можем заменить в (3.19) w_j на $-\Delta w_j$; опять умножая (3.19) на $g'_{jm}(t)$ и суммируя по j, находим

$$a(u''_m(t), u'_m(t)) + (\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (| u'_m |^{\rho} u'_m) \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} dx = a(f(t), u'_m(t)). \tag{3.24}$$

Член из (3.24), не являющийся билинейным, можно переписать в виде

$$(\rho + 1) \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(| u'_m |^{\rho/2} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right)^2 dx = \frac{(\rho + 1)}{\left(\frac{\rho}{2} + 1\right)^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (| u'_m |^{\rho/2} u'_m) \right)^2 dx,$$

и в силу (3.24) мы получим

$$\frac{1}{2}(\| u'_m(t)\|^2+|\Delta u_m(t)|^2)+\frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\rho/2}u'_m)\right)^2dx\,d\sigma=$$
$$=\frac{1}{2}(\| u_{1m}\|^2+|\Delta u_{0m}|^2)+\int_0^t a(f(\sigma),\ u'_m(\sigma))\,d\sigma. \qquad (3.25)$$

Используя (3.17), (3.18), мы заключаем, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \qquad (3.26)$$
$$u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega))\ ^{1)}, \qquad (3.27)$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\rho/2}u'_m),\ i=1,\ \ldots,\ n, \text{ ограничены в } L^2(Q). \qquad (3.28)$$

4° *Априорная оценка* (III). Из (3.19) следует, что

$$|u''_m(0)|^2=(\Delta u_{0m},\ u''_m(0))+(f(0),\ u''_m(0))-(|u_{1m}|^\rho u_{1m},\ u''_m(0)),$$

откуда вытекает, что

$$|u''_m(0)|\leqslant|\Delta u_{0m}|+|f(0)|+\left(\int_\Omega|u_{1m}|^{2(\rho+1)}dx\right)^{1/2}$$

и, следовательно, ввиду (3.17), (3.18)

$$|u''_m(0)|\leqslant C. \qquad (3.29)$$

Продифференцировав (3.19) по t, найдем

$$(u'''_m(t),\ w_j)+a(u'_m(t),\ w_j)+(\rho+1)(|u'_m(t)|^\rho u''_m(t),\ w_j)=$$
$$=(f'(t),\ w_j). \qquad (3.30)$$

Умножая на $g''_{jm}(t)$ и суммируя по j, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u''_m(t)|^2+\|u'_m(t)\|^2)+(\rho+1)\int_\Omega|u'_m(t)|^\rho u''_m(t)^2dx=$$
$$=(f'(t),\ u''_m(t)). \qquad (3.31)$$

Член в (3.31), не являющийся билинейным, равен

$$\frac{(\rho+1)}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m(t)|^{\rho/2}u'_m(t))\right)^2dx.$$

---

[1] Мы здесь воспользовались неравенством $|\Delta\varphi|\geqslant C\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}$, где $\varphi\in H_0^1(\Omega)$, $\Delta\varphi\in L^2(\Omega)$, которое выполнено в случае достаточно регулярной границы Г.

Следовательно, из (3.31) вытекает, что

$$\frac{1}{2}(|u''_m(t)|^2+\|u'_m(t)\|^2)+\frac{\rho+1}{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m|^{\rho/2}u'_m)\right)^2 dx\,d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2}|u''_m(0)|^2+\frac{1}{2}\|u_{1m}\|^2+\int_0^t(f'(\sigma),\ u''_m(\sigma))\,d\sigma. \qquad (3.32)$$

Отсюда, благодаря (3.29) мы можем еще раз получить (3.26) и, кроме того, получаем, что

$$u''_m \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \qquad (3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u'_m|^{\rho/2}u'_m) \text{ ограничены в } L^2(Q). \qquad (3.34)$$

5° *Предельный переход.* Благодаря (3.22), (3.23), (3.26), (3.27), (3.28), (3.33), (3.34) мы можем из последовательности u_m выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu\to u \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \qquad (3.35)$$

$$u'_\mu\to u' \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \qquad (3.36)$$

$$u''_\mu\to u'' \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \qquad (3.37)$$

$$u'_\mu\to u' \ \textit{сильно} \text{ в } L^2(Q) \text{ и почти всюду на } Q, \qquad (3.38)$$

$$|u'_\mu|^\rho u'_\mu\to\psi \text{ слабо в } L^{(\rho+2)/(\rho+1)}(Q), \qquad (3.39)$$

$$|u'_\mu|^{\rho/2}u'_\mu\to\chi \text{ слабо в } H^1(Q). \qquad (3.40)$$

Согласно лемме 1.3,

$$\psi=|u'|^\rho u', \qquad \chi=|u'|^{\rho/2}u'.$$

Наша теорема теперь доказывается без труда (таким же образом, как теорема 1.1 в § 1, но при этом проще, поскольку мы получаем «более сильное» решение) ●

Замечание 3.1. Мы одновременно получили, что

$$|u'|^{\rho/2}u'\in H^1(Q) \ \bullet \qquad (3.41)$$

Замечание 3.2. Теорема распространяется на случай *неограниченной* области Ω с помощью «аппроксимации» Ω последовательностью ограниченных областей ●

Замечание 3.3. Используя более специальную, чем (1.42), теорему о компактности, можно получить (см. § 5) решение (более слабое) при более общих условиях; дальше в гл. 2 мы покажем, что методы монотонности позволяют получать решения (более слабые) при еще более общих условиях ●

Замечание 3.4. Естественно, что предыдущие результаты распространяются на операторы

$$u'' + \tilde{A}(t)u + |u'|^\rho u' = f, \tag{3.42}$$

где $A(t)$ — эллиптический оператор второго порядка, $A(t)^* = A(t)$. Ср. Лионс — Штраусс [1]●

Замечание 3.5. Мы снова отсылаем к цитированной выше (см. п. 1.9) работе Лионса—Штраусса в связи с уравнением

$$u'' - \Delta u + |u|^\rho u' = f \; ● \tag{3.43}$$

Замечание 3.6. Все сказанное выше распространяется на случай *других краевых условий.*

4. ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

4.1. Эволюционные уравнения

Мы рассматриваем ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^2$ (Ω — колеблющаяся пластина); если u и v — две функции, заданные в Ω, то в этом пункте мы будем полагать

$$[u, v] = D_1^2 u \cdot D_2^2 v + D_2^2 u \cdot D_1^2 v - 2D_1 D_2 u \cdot D_1 D_2 v, \tag{4.1}$$

где $D_i = \partial/\partial x_i$.

Обозначим через $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta$ итерированный лапласиан (по переменной x). Мы ищем пару функций u_1, u_2, определенных в $\Omega \times]0, T[$ и удовлетворяющих уравнениям

$$u_1'' + a_1 \Delta^2 u_1 - [u_1, u_2] = f \text{ в } \Omega \times]0, T[, \tag{4.2}$$

$$a_2 \Delta^2 u_2 + [u_1, u_1] = 0 \text{ в } \Omega \times]0, T[\tag{4.3}$$

(a_i — положительные константы), *краевым условиям*

$$\begin{aligned} &u_1, \ \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma\,^{1)}, \\ &u_2, \ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \end{aligned} \tag{4.4}$$

и *начальным условиям*

$$\begin{aligned} &u_1(x, 0) = u_{01}(x), \\ &u_1'(x, 0) = u_{11}(x), \ x \in \Omega \; ● \end{aligned} \tag{4.5}$$

(По поводу «механического» происхождения задачи см. комментарии и соответствующую литературу.)

---

[1] $\partial/\partial n$ — производная по нормали к Г.

Замечание 4.1. *Начальные условия для u_2 не ставятся*; это связано с тем[1]), что система (4.2), (4.3) *не содержит производных u_2 по t*. Система (4.2), (4.3) не является системой типа Коши — Ковалевской[2]); ее можно превратить в систему такого типа следующим способом, использующим исключеиие u_2. Обозначим через G_2 «оператор Грииа», т. е. оператор, обратный к Δ^2 в Ω при условиях Дирихле; тогда (4.3) эквивалентно

$$u_2 = -\frac{1}{a_2} G_2([u_1, u_1]), \tag{4.6}$$

а (4.2) примет вид

$$u_1'' + a_1 \Delta^2 u_1 + \frac{1}{a_2}[u_1, G_2([u_1, u_1])] = f. \tag{4.7}$$

Для того чтобы сформулировать наш первый результат о задаче (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), необходимо ввести пространство

$$H_0^2(\Omega) = \text{замыкание } \mathscr{D}(\Omega) \text{ в } H^2(\Omega). \tag{4.8}$$

Имеем

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \mid v \in H^2(\Omega),\ v = 0,\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \right\}. \tag{4.9}$$

Имеет место

Теорема 4.1. *Пусть заданы f, u_{01}, u_{11}, причем*

$$f \in L^2(Q), \tag{4.10}$$

$$u_{01} \in H_0^2(\Omega), \qquad u_{11} \in L^2(\Omega). \tag{4.11}$$

Тогда существуют u_1 и u_2, удовлетворяющие (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), *причем*

$$u_1 \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \tag{4.12}$$

$$u_1' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{4.13}$$

$$u_2 \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)). \tag{4.14}$$

Замечание 4.2. Из (4.12), (4.14) и определения (4.1) следует, что

$$[u_1, u_2] \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)),$$

---

[1]) Безусловно, это обстоятельство допускает физическую интерпретацию.

[2]) В дальнейшем мы приведем другие примеры подобных ситуаций, причем в них (в отличие от (4.7)) нельзя перейти к системе Коши — Ковалевской. [Здесь под системами Коши — Ковалевской подразумеваются системы, разрешимые отиосительно старших производных по времеии. Обычио принято требовать также, чтобы порядок этих производных совпадал с порядком системы. — *Прим. ред.*

и уравнение (4.2) приводит к включению

$$u_1'' \in L^\infty(0,\ T;\ H^{-2}(\Omega))\,^{1)}, \tag{4.15}$$

так что условия (4.5) имеют смысл ●

Замечание 4.3.[2]. Для функции u_2 из теоремы 4.1 выполнено включение

$$u_2 \in L^\infty(0,\ T;\ H^{3-\varepsilon}(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{4.16}$$

В самом деле, пусть задано достаточно малое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$L^1(\Omega) \subset H^{-1-\varepsilon}(\Omega), \tag{4.17}$$

так как если $f \in L^1(\Omega)$, то

$$|(f,\ \varphi)| \leqslant \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^{1+\varepsilon}(\Omega)}$$

(поскольку $H_0^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, если $n = 2$ и $\varepsilon > 0$, см. Петре [1][3]).

Так как $[u_1,\ u_1] \in L^\infty(0,\ T;\ H^{-1-\varepsilon}(\Omega))$ и $a_2\Delta^2 u_2 = -[u_1,\ u_1]$, то мы получаем (4.16) (используя решение задачи Дирихле в пространствах $H^s(\Omega)$, s — нецелое; см. Лионс — Мадженес [1], гл. 2[4]).

Замечание 4.4. В теореме 4.1 мы не рассматриваем вопрос о единственности решения ●

Прежде чем переходить собственно к доказательству теоремы 4.1, разберем несколько простых свойств скобки $[u,\ v]$.

Лемма 4.1. *Отображение $u,\ v \to [u,\ v]$ является непрерывным билинейным отображением*

$$H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$$

(см. замечание 4.2).

Следствие 4.1. *Форма $u,\ v,\ w \to ([u,\ v],\ w)$ является непрерывной трилинейной формой на $H_0^2(\Omega)$.*

Лемма 4.2. *Трилинейная форма $u,\ v,\ w \to ([u,\ v],\ w)$ симметрична на $H_0^2(\Omega)$.*

---

[1] Так как $L^1(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega)$; действительно, при $f \in L^1(\Omega)$ имеем

$$|(f,\ v)| \leqslant \|f\|_{L^1(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L^1(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

[2] В этом замечании мы пользуемся пространствами $H^s(\Omega)$ для нецелых s; по поводу этих пространств см. Лионс — Мадженес [1].

[3] Вообще, $H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, если $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{1}{n} > 0$, $H^s(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, если $\frac{1}{s} - \frac{1}{n} < 0$, $H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ для всех конечных q, если $\frac{1}{s} - \frac{1}{n} = 0$.

[4] Оператор $(\Delta^2)^{-1}$ переводит $H^s(\Omega)$ в $H^{s+4}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $s \geqslant 0$.

Доказательство. Поскольку $[u, v] = [v, u]$, достаточно проверить, что

$$([u, v], w) = ([w, u], v), \tag{4.18}$$

и в силу следствия 4.1 достаточно доказать (4.18) для $u, v, w \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Легко проверить, что

$$[u, v] = D_1^2(D_2^2 u \cdot v) - 2D_1D_2(D_1D_2u \cdot v) + D_2^2(D_1^2u \cdot v). \tag{4.19}$$

Интегрируя по частям, получим

$$([u, v], w) = (D_2^2u \cdot v,\ D_1^2w) - 2(D_1D_2u \cdot v,\ D_1D_2w) + (D_1^2u \cdot v,\ D_2^2w) =$$
$$= (D_1^2w \cdot D_2^2u - 2D_1D_2w \cdot D_1D_2u + D_2^2w \cdot D_1^2u,\ v),$$

откуда следует (4.18) ●

Доказательство теоремы 4.1.

1° *Построение приближенного решения.* Пусть $w_1, \ldots$ $\ldots, w_m, \ldots$ — «базис» (в смысле, аналогичном (1.27)) в $H_0^2(\Omega)$, образованный, например, функциями из $\mathscr{D}(\Omega)$.

Пусть $u_{1m}(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u_{1m}(t) \in [w_1, \ldots, w_m], \text{ т. е. } u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i, \tag{4.20}$$

$$(u_{1m}''(t), w_j) + a_1(\Delta u_{1m}(t), \Delta w_j) +$$
$$+ \frac{1}{a_2}([u_{1m}(t), G_2([u_{1m}(t), u_{1m}(t)])], w_j) = (f(t), w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m \tag{4.21}$$

(мы здесь пользуемся обозначениями из (4.6), (4.7)), и

$$u_{1m}(0) = u_{01m} \in [w_1, \ldots, w_m], \quad u_{01m} \to u_{01} \text{ в } H_0^2(\Omega), \tag{4.22}$$

$$u_{1m}'(0) = u_{11m} \in [w_1, \ldots, w_m], \quad u_{11m} \to u_{11} \text{ в } L^2(\Omega). \tag{4.23}$$

Если мы *определим* $u_{2m}(t)$ соотношением

$$u_{2m}(t) = -\frac{1}{a_2} G_2([u_{1m}(t), u_{1m}(t)]), \tag{4.24}$$

т. е. если

$$\left.\begin{aligned} &a_2\Delta^2 u_{2m}(t) + [u_{1m}(t), u_{1m}(t)] = 0, \\ &u_{2m}(t) \in H_0^2(\Omega), \end{aligned}\right\} \tag{4.24'}$$

то (4.21) запишется в виде

$$(u_{1m}''(t), w_j) + a_1(\Delta u_{1m}(t), \Delta w_j) - ([u_{1m}(t), u_{2m}(t)], w_j) =$$
$$= (f(t), w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{4.25}$$

Естественно, что $u_{2m}(t)$ не принадлежит (вообще говоря) $[w_1, \dots, w_m]$.

Итак, мы можем быть уверены в существовании $u_{1m}(t)$, а следовательно, и $u_{2m}(t)$ в некотором интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$.

2° *Априорные оценки.* Умножим (4.25) на $g'_{jm}(t)$ и просуммируем по j. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u'_{1m}(t)|^2 + a_1|\Delta u_{1m}(t)|^2) - ([u_{1m}(t), u_{2m}(t)], u'_{1m}(t)) = \\ = (f(t), u'_{1m}(t)). \quad (4.26)$$

Однако, согласно лемме 4.2,

$$([u_{1m}(t), u_{2m}(t)], u'_{1m}(t)) = -([u_{1m}(t), u'_{1m}(t)], u_{2m}(t)) = \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}[u_{1m}(t), u_{1m}(t)], u_{2m}(t)\right),$$

и в силу (4.24′) это выражение равно

$$+\frac{a_2}{2}(\Delta^2 u'_{2m}(t), u_{2m}(t)) = \frac{a_2}{4}\frac{d}{dt}|\Delta u_{2m}(t)|^2.$$

Тогда, (4.26) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u'_{1m}(t)|^2 + a_1|\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a^2}{2}|\Delta u_{2m}(t)|^2\right) = \\ = (f(t), u'_{1m}(t)), \quad (4.27)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(|u_{1m}(t)|^2 + a_1|\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2}|\Delta u_{2m}(t)|^2\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(|u_{11m}|^2 + a_1|\Delta u_{01m}|^2 + \frac{a_2}{2}|\Delta u_{2m}(0)|^2\right) + \int_0^t (f(\sigma), u'_{1m}(\sigma))\,d\sigma. \quad (4.28)$$

Однако в силу (4.22)

$$|u_{11m}|^2 + a_1|\Delta u_{01m}|^2 \leqslant \text{const},$$

и в силу определения (4.24) имеем

$$u_{2m}(0) = -\frac{1}{a_2}G_2([u_{01m}, u_{01m}]). \quad (4.29)$$

Однако $[u_{01m}, u_{01m}]$ принадлежат ограниченному множеству в $L^1(\Omega)$, а следовательно, и в $H^{-2}(\Omega)$; тогда $u_{2m}(0)$ принадлежат ограниченному множеству в $H_0^2(\Omega)$, и поэтому в (4.28)

$$|\Delta u_{2m}(0)| \leqslant \text{const}.$$

Итак, из (4.28) вытекает, что $t_m = T$ и

$$u_{1m}, u_{2m} \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \quad (4.30)$$

$$u'_{1m} \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.31)$$

3° *Предельный переход.* В силу (4.30), (4.31) мы можем выделить такую последовательность $u_{1\mu}$, $u_{2\mu}$, что

$$\begin{aligned} &u_{i\mu} \to u_i \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \quad i = 1, 2,\\ &u'_{1\mu} \to u'_1 \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ &u_{1\mu} \to u_1 \textit{ сильно } \text{в } L^2(Q). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Пусть функции φ_j, $1 \leqslant j \leqslant j_0$, принадлежат $\mathscr{C}^1([0, T])$, $\varphi_j(T) = 0$ и

$$\psi = \sum_{j=1}^{j_0} \varphi_j \otimes w_j. \tag{4.33}$$

Из (4.25) следует, что при $m = \mu > j_0$

$$-\int_0^T (u'_{1\mu}, \psi')\,dt + a_1 \int_0^T (\Delta u_{1\mu}, \Delta\psi)\,dt - \int_0^T ([u_{1\mu}, u_{2\mu}], \psi)\,dt =$$
$$= \int_0^T (f, \psi)\,dt + (u_{11\mu}(0), \psi(0)). \tag{4.34}$$

Однако в силу леммы 2.2

$$\int_0^T ([u_{1\mu}, u_{2\mu}], \psi)\,dt = \int_0^T ([\psi, u_{2\mu}], u_{1\mu})\,dt;$$

$[\psi, u_{2\mu}] \to [\psi, u_2]$, скажем, слабо в $L^2(Q)$, и так как $u_{1\mu} \to u_1$ сильно в $L^2(Q)$, то мы видим, что

$$\int_0^T ([u_{1\mu}, u_{2\mu}], \psi)\,dt \to \int_0^T ([\psi, u_2], u_1)\,dt = \int_0^T ([u_1, u_2], \psi)\,dt$$

и (4.34) в пределе переходит в соотношение

$$-\int_0^T (u'_1, \psi')\,dt + a_1 \int_0^T (\Delta u_1, \Delta\psi)\,dt - \int_0^T ([u_1, u_2], \psi)\,dt =$$
$$= \int_0^T (f, \psi)\,dt + (u_{11}, \psi(0)), \tag{4.35}$$

которое справедливо для всех ψ вида (4.33).

Предельным переходом мы устанавливаем, что (4.35) выполнено для всех $\psi \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$, таких, что $\psi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ и $\psi(T) = 0$.

Тем самым показано, что u_1 и u_2 удовлетворяют (4.2) и что $u'_1(0) = u_{11}$.

Нам осталось только установить (4.3). Мы можем непосредственно перейти к пределу в (4.24′) (при $m=\mu$), заметив, что $[u_{1\mu}, u_{1\mu}]\to[u_1, u_1]$, например, в $\mathcal{D}'(Q)$; действительно, если $\varphi\in\mathcal{D}(Q)$, то

$$\int_0^T([u_{1\mu}, u_{1\mu}], \varphi)\,dt=\int_0^T([u_{1\mu}, \varphi], u_{1\mu})\,dt$$

и мы можем перейти здесь к пределу так же, как и выше ●

4.2. Модифицированное эволюционное уравнение

Общее указание. Как мы уже отметили, вопрос о единственности в теореме 4.1 остался открытым. Мы ниже увидим, что если модифицировать (4.2), добавив «вязкий член» (см. Морозов [1]), то мы придем к теореме существования и единственности ●

Модифицированные уравнения. Пусть $\alpha>0$. Мы ищем пару функций u_1, u_2, удовлетворяющих уравнениям

$$u_1''-\alpha\,\Delta u_1''+a_1\Delta^2u_1-[u_1, u_2]=f, \tag{4.36}$$

$$a_2\Delta^2u_2+[u_1, u_1]=0 \quad \text{(совпадает с (4.3))} \tag{4.37}$$

и начальным и граничным условиям (4.4), (4.5) ●

Для этих уравнений будет доказана

Теорема 4.2. *Пусть заданы* f, u_{01}, u_{11}, *функции* f *и* u_{01} *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1 *и*

$$u_{11}\in H_0^1(\Omega). \tag{4.38}$$

Тогда существует единственное решение u_1, u_2 *задачи* (4.36), (4.37), (4.4), (4.5), *причем*

$$u_1,\ u_2\in L^\infty(0,\ T;\ H_0^2(\Omega)), \tag{4.39}$$

$$u_1'\in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)). \tag{4.40}$$

Доказательство существования. Схема доказательства такая же, как в теореме 4.1. Вязкий член $-\alpha\Delta u_1''$ приводит к дополнительной априорной оценке, отвечающей (4.40) ●

Следовательно, мы получим решение «более сильное», чем в теореме 4.1: вместо (4.13) выполнено (4.40); благодаря этому обстоятельству можно установить теорему единственности.

Доказательство единственности.

1° *Алгебраические соотношения.* Пусть $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1^*, u_2^*\}$ — два решения. Положим

$$v_1 = u_1 - u_1^*, \quad v_2 = u_2 - u_2^*. \tag{4.41}$$

Тогда

$$v_1'' - \alpha\,\Delta v_1'' + a_1\Delta^2 v_1 = [u_1, v_2] + [v_1, u_2^*], \tag{4.42}$$

$$a_2\Delta^2 v_2 = [v_1, v_1] - 2[u_1, v_1]; \tag{4.43}$$

при этом, очевидно,

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1'(0) = 0. \tag{4.44}$$

2° *Оценки для v_2.* Здесь мы используем замечание 4.3. В силу (4.17) и (4.43) имеем

$$\|v_2\|_{H^{3-\varepsilon}(\Omega)} \leqslant c_1\|[u_1, v_1]\|_{L^1(\Omega)} + c_1\|[v_1, v_1]\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.45}$$

Но

$$\|[u_1, v_1]\|_{L^1(\Omega)} \leqslant c_2\|u_1\|_{H^2(\Omega)}\|v_1\|_{H^2(\Omega)},$$

и так как $u_1, v_1 \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$, то имеем

$$\|v_2\|_{H^{3-\varepsilon}(\Omega)} \leqslant c_3\|v_1\|_{H^2(\Omega)}. \tag{4.46}$$

Заметим, что на $H_0^2(\Omega)$ нормы $|\Delta v_1|$ и $\|v_1\|_{H^2(\Omega)}$ эквивалентны, так что (4.46) эквивалентно оценке

$$\|v_2\|_{H^{3-\varepsilon}(\Omega)} \leqslant c_4|\Delta v_1|. \tag{4.47}$$

Если $D^2 = D_i^2$ или D_iD_j, то имеем

$$D^2 v_2 \in L^\infty(0, T; H^{1-\varepsilon}(\Omega)),$$

а так как (см. Петре [1]) $H^{1-\varepsilon}(\Omega) \subset L^{2/\varepsilon}(\Omega)$, то

$$D^2 v_2,\ D^2 u_2 \in L^\infty(0, T; L^{2/\varepsilon}(\Omega)), \tag{4.48}$$

и в силу (4.47)

$$\|D^2 v_2\|_{L^{2/\varepsilon}(\Omega)} \leqslant c_5|\Delta v_1|. \tag{4.49}$$

В (4.42) положим

$$F = [u_1, v_2] + [v_1, u_2^*]. \tag{4.50}$$

Проверим, что

$$F \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{и} \quad \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant c_6|\Delta v_1|. \tag{4.51}$$

В самом деле, пусть $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Тогда ввиду теоремы вложения Соболева (см. Петре [1]) имеем ($\varepsilon > 0$ и фиксировано)

$$\varphi \in L^{2/(1-\varepsilon)}(\Omega), \quad \|\varphi\|_{L^{2/(1-\varepsilon)}(\Omega)} \leqslant c_7\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.52}$$

Но

$$|([u_1, v_2], \varphi)| \leqslant c_8 \| u_1 \|_{H^2(\Omega)} \left(\sum_{i,\,j=1}^{2} \| D_i D_j v_2 \|_{L^{2/\varepsilon}(\Omega)} \right) \| \varphi \|_{L^{2/(1-\varepsilon)}(\Omega)} \leqslant$$

(в силу (4.49), (4.52) и включения $u_1 \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$)

$$\leqslant c_9 | \Delta v_1 | \| \varphi \|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Далее,

$$|([v_1, u_2^*], \varphi)| \leqslant c_8 \| v_1 \|_{H^2(\Omega)} \left(\sum_{i,\,j=1}^{2} \| D_i D_j u_2^* \|_{L^{2/\varepsilon}(\Omega)} \right) \| \varphi \|_{L^{2/(1-\varepsilon)}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c_{10} | \Delta v_1 | \| \varphi \|_{H_0^1(\Omega)},$$

откуда следует (4.51).

3° *Энергетическое равенство.* Из (4.42), (4.50), (4.51), полагая

$$\| \varphi \|^2 = \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, dx,$$

получим

$$\frac{1}{2} (| v_1'(t) |^2 + \alpha \| v_1'(t) \|^2 + a_1 | \Delta v_1(t) |^2) = \int_0^t (F, v_1') \, d\sigma \quad \text{п. в.} \tag{4.53}$$

Действительно, метод теоремы 1.6 приводит к равенству

$$\frac{1}{2} (| v_1'(t) |^2 + \alpha \| v_1'(t) \|^2 + a_1 | \Delta v_1(t) |^2) =$$
$$= \frac{1}{2} (| v_1'(s) |^2 + \alpha \| v_1'(s) \|^2 + a_1 | \Delta v_1(s) |^2) + \int_s^t (F, v_1') \, d\sigma, \tag{4.54}$$

аналогичному (1.104) и справедливому для почти всех s и t.

Однако в силу (4.44) мы можем продолжить v_1 нулем при $t < 0$; равным образом F продолжается нулем при $t < 0$, так что (4.54) также выполняется при $s < 0$. Но тогда мы получим (4.53).

4° *Единственность.* Доказательство нетрудно провести, исходя из (4.53) и (4.51). В самом деле,

$$\left| \int_0^t (F, v_1') \, d\sigma \right| \leqslant c_6 \int_0^t | \Delta v_1(\sigma) | \| v_1'(\sigma) \|_{H_0^1(\Omega)} \, d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant c_{11} \int_0^t | \Delta v_1(\sigma) | \| v_1'(\sigma) \| \, d\sigma,$$

и из (4.53) следует, что

$$\|v_1'(t)\|^2+|\Delta v_1(t)|^2\leqslant c_{12}\int_0^t(\|v_1'(\sigma)\|^2+|\Delta v_1(\sigma)|^2)\,d\sigma, \tag{4.55}$$

откуда вытекает, что

$$v_1=0,$$

а из уравнения (4.43) получаем, что $v_2=0$ ●

4.3. Стационарный случай

Сейчас мы сделаем несколько указаний, касающихся *стационарной* задачи, соответствующей (4.2), (4.3), — эта задача важна для приложений.

Ищется такая пара функций u_1, u_2, что

$$a_1\Delta^2 u_1-[u_1,\ u_2]=f, \tag{4.56}$$

$$a_2\Delta^2 u_2+[u_1,\ u_1]=0, \tag{4.57}$$

$$u_i\in H_0^2(\Omega),\qquad i=1,\ 2\ ● \tag{4.58}$$

Мы установим теорему существования решения этой задачи с помощью одного варианта теоремы Брауэра о неподвижной точке — последний результат играет в высшей степени важную роль во всем дальнейшем.

Лемма 4.3. *Пусть* $\xi\to P(\xi)$ — *такое непрерывное отображение* $\mathbb{R}^m$ *в себя, что для подходящего* $\rho>0$

$$(P(\xi),\ \xi)\geqslant 0\quad \forall\xi\ \text{ из сферы }\ |\xi|=\rho, \tag{4.59}$$

где для $\xi=\{\xi_i\}$, $\eta=\{\eta_i\}\in\mathbb{R}^m$ *мы полагаем*

$$(\xi,\ \eta)=\sum_{i=1}^m\xi_i\eta_i,\quad |\xi|=(\xi,\ \xi)^{1/2}. \tag{4.60}$$

Тогда найдется такое ξ, $|\xi|\leqslant\rho$, *что* $P(\xi)=0$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Если $P(\xi)\neq 0$ в шаре $K=\{\xi\,|\,|\xi|\leqslant\rho\}$, то мы можем рассмотреть отображение

$$\xi\to -P(\xi)\frac{\rho}{|P(\xi)|}:\ K\to K, \tag{4.61}$$

которое в этом случае будет *непрерывным*. Тогда из теоремы Брауэра о неподвижной точке следует существование такого ξ, что

$$\xi=-P(\xi)\frac{\rho}{|P(\xi)|}. \tag{4.62}$$

Но тогда $|\xi| = \rho$, и, умножая скалярно обе части равенства (4.62) на ξ, получим

$$(P(\xi), \xi) = -\rho |P(\xi)| < 0,$$

что противоречит (4.59) ●

С помощью этой леммы будет доказана

Теорема 4.3. *Для заданной правой части* $f \in H^{-2}(\Omega)$ *задача* (4.56), (4.57), (4.58) *имеет единственное решение.*

Доказательство.

1° *Приближенное решение.* Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — «базис» в $H_0^2(\Omega)$, образованный, например, как и выше, функциями из $\mathscr{D}(\Omega)$.

Мы ищем такую функцию $u_{1m} \in [w_1, \ldots, w_m]$, чтобы

$$\left(a_1\Delta^2 u_{1m} + \frac{1}{a_2}[u_{1m}, G_2([u_{1m}, u_{1m}])], w_i\right) = (f, w_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4.63}$$

Если мы *определим* u_{2m} соотношением

$$u_{2m} = -\frac{1}{a_2} G_2([u_{1m}, u_{1m}]), \tag{4.64}$$

то (4.63) будет эквивалентно

$$(a_1\Delta^2 u_{1m} - [u_{1m}, u_{2m}], w_i) = (f, w_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4.65}$$

$$a_2\Delta^2 u_{2m} + [u_{1m}, u_{1m}] = 0. \tag{4.66}$$

Мы собираемся показать, что (4.63) *имеет хотя бы одно решение.* В этих целях мы следующим образом используем лемму 4.3[1]). Вектору $\xi = \{\xi_i\}$ сопоставим $u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i$ и положим

$$\eta_i = (a_1\Delta^2 u_{1m} - [u_{1m}, u_{2m}], w_i) - (f, w_i), \tag{4.67}$$

$$P(\xi) = \{\eta_i\}. \tag{4.68}$$

Тогда

$$(P(\xi), \xi) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \xi_i = (a_1\Delta^2 u_{1m} - [u_{1m}, u_{2m}], u_{1m}) - (f, u_{1m}) =$$
$$= a_1 |\Delta u_{1m}|^2 - ([u_{1m}, u_{2m}], u_{1m}) - (f, u_{1m}). \tag{4.69}$$

В силу (4.66) и леммы 4.2

$$([u_{1m}, u_{2m}], u_{1m}) = ([u_{1m}, u_{1m}], u_{2m}) = -a_2 |\Delta u_{2m}|^2,$$

---

[1]) Эта лемма в стационарном случае «заменяет» теорему о локальной разрешимости системы нелинейных дифференциальных уравнений, которую мы использовали в нестационарном случае.

и равенство (4.69) принимает вид

$$(P(\xi),\ \xi)=a_1|\Delta u_{1m}|^2+a_2|\Delta u_{2m}|^2-(f,\ u_{1m}). \tag{4.70}$$

Имеем

$$|(f,\ u_{1m})|\leqslant\|f\|_{H^{-2}(\Omega)}\|u_{1m}\|_{H_0^2(\Omega)}\leqslant c_1|\Delta u_{1m}|.$$

Следовательно,

$$(P(\xi),\ \xi)\geqslant a_1|\Delta u_{1m}|^2+a_2|\Delta u_{2m}|^2-c_1|\Delta u_{1m}|, \tag{4.71}$$

и, значит, $(P(\xi),\ \xi)\geqslant 0$, если $|\Delta u_{1m}|\geqslant c_1/a_1$, причем последнее условие выполняется при $|\xi|=\rho$, где ρ достаточно велико.

Итак, мы можем воспользоваться леммой 4.3, и, следовательно, *существует функция* $u_{1m}\in[w_1,\ \ldots,\ w_m]$, *удовлетворяющая* равенствам (4.63), или эквивалентным им равенствам (4.65), (4.66).

Более того, если u_{1m} — решение (4.63), то $P(\xi)=0$, и в силу (4.70), (4.71)

$$a_1|\Delta u_{1m}|^2+a_2|\Delta u_{2m}|^2=(f,\ u_{1m})\leqslant c_1|\Delta u_{1m}|. \tag{4.72}$$

2° *Предельный переход.* Из (4.72) следует, что

$$u_{im} \text{ ограничены в } H_0^2(\Omega),\quad i=1,\ 2. \tag{4.73}$$

Следовательно, мы можем выбрать такую последовательность $u_{i\mu}$, что

$$u_{i\mu}\to u_i \text{ слабо в } H_0^2(\Omega), \tag{4.74}$$

а так как вложение $H_0^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ компактно, то

$$u_{i\mu}\to u_i \textit{ сильно } \text{в } L^2(\Omega)\ ^{1)}. \tag{4.75}$$

Пусть i фиксировано, $\mu>i$. Имеем

$$(a_1\Delta^2 u_{1\mu},\ w_i)-([u_{1\mu},\ u_{2\mu}],\ w_i)=(f,\ w_i);$$

так как

$$([u_{1\mu},\ u_{2\mu}],\ w_i)=([u_{2\mu},\ w_i],\ u_{2\mu})$$

и $[u_{1\mu},\ w_i]\to[u_1,\ w_i]$ слабо в $L^2(\Omega)$, то, учитывая (4.75), получаем, что

$$([u_{1\mu},\ w_i],\ u_{2\mu})\to([u_1,\ w_i],\ u_2)$$

и, следовательно, для всех i

$$(a_1\Delta^2 u_1-[u_1,\ u_2],\ w_i)=(f,\ w_i).$$

Отсюда получаем (4.56). Аналогично можно перейти к пределу в (4.66) ●

---

[1] Кроме того, $u_{i\mu}\to u_i$ сильно в $H_0^1(\Omega)$.

4.4. Стационарный случай; гладкость

Напомним определение пространств Соболева, строящихся над $L^p(\Omega)$:

$$W^{m,p}(\Omega)=\{v \mid v\in L^p(\Omega),\ D^\alpha v\in L^p(\Omega),\quad |\alpha|\leqslant m\}. \tag{4.76}$$

Это пространство является банаховым с нормой

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Нами будет доказана

Теорема 4.4. *При* $f\in L^p(\Omega)$, $p>1$ *существует решение* u_1, u_2 *задачи* (4.56), (4.57), (4.58), *причем*

$$u_1\in W^{4,p}(\Omega), \tag{4.77}$$

$$u_2\in W^{4,q}(\Omega)\ \textit{для любого конечного } q. \tag{4.78}$$

Доказательство. Более точно, мы докажем, что при $f\in L^p(\Omega)$ всякое решение задачи (4.56), (4.57), (4.58) обладает свойствами (4.77), (4.78). (4.79)

В самом деле, поскольку $[u_1, u_1]$ и $[u_1, u_2]$ принадлежат $L^1(\Omega)\subset H^{-1-\varepsilon}(\Omega)$ (см. (4.17)), из уравнений

$$a_1\Delta^2 u_1=[u_1, u_2]+f,\quad u_1\in H_0^2(\Omega), \tag{4.80}$$

$$a_2\Delta^2 u_2=-[u_1, u_1],\quad u_2\in H_0^2(\Omega) \tag{4.81}$$

следует (см. Лионс — Мадженес [1], гл. 2), что

$$u_i\in H^{3-\varepsilon}(\Omega). \tag{4.82}$$

Тогда

$$D^2u_i\in H^{1-\varepsilon}(\Omega)\subset L^{2/\varepsilon}(\Omega)\quad (\text{Петре [1]}) \tag{4.83}$$

и, следовательно, поскольку $\varepsilon>0$ и произвольно,

$$[u_1, u_1],\ [u_1, u_2]\in L^q(\Omega)\ \text{для любого конечного}\ q\geqslant 1.$$

Но тогда правая часть (4.80) (соответственно (4.81)) принадлежит $L^p(\Omega)$ (соответственно $L^q(\Omega)$ для всех конечных q), и с помощью результатов о задаче Дирихле в $L^p(\Omega)$ (см. Агмон [1], Агмон — Дуглис — Ниренберг [1]) мы получаем (4.77), (4.78) ●

Замечание 4.5. В приведенном выше доказательстве предполагается, что граница Г достаточно гладкая ●

Замечание 4.6. Если $f\in L^q(\Omega)$, q произвольно и конечно, то предыдущее доказательство приводит к включению

$$u_1\in W^{4,p}(\Omega),\qquad p\ —\ \text{любое конечное число}\ ●$$

Замечание 4.7. «Итерируя» предыдущее доказательство, мы получим, что если $f \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, то $u_i \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$ ●

5. ЛЕММЫ О КОМПАКТНОСТИ

5.1. Общие указания

Мы уже несколько раз существенно пользовались компактностью вложения $H^1(\theta) \to L^2(\theta)$, где θ — ограниченная область с достаточно гладкой границей.

Этого результата «о компактности вложения» недостаточно для приложений.

Мы приведем (в п. 5.2) две достаточно общие леммы[1]; далее в п. 5.3 мы сначала воспользуемся этими леммами в ситуации, с которой мы уже встречались в § 3; другие приложения, в частности к уравнениям Навье — Стокса, будут даны дальше.

5.2. Леммы о компактности

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: B_0, B, B_1 — три банаховых пространства, причем

$$B_0 \subset B \subset B_1\,^{2)},\quad B_i,\quad i = 0,\ 1,\ \text{рефлексивны}, \tag{5.1}$$

$$\text{вложение } B_0 \to B \text{ компактно}. \tag{5.2}$$

Пусть

$$W = \left\{ v \mid v \in L^{p_0}(0, T;\ B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T;\ B_1) \right\}, \tag{5.3}$$

где T конечно и $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$. Снабдив W нормой

$$\| v \|_{L^{p_0}(0,\, T;\, B_0)} + \| v' \|_{L^{p_1}(0,\, T;\, B_1)},$$

получим пространство Банаха. Очевидно, что $W \subset L^{p_0}(0, T;\ B)$.

Имеет место следующий результат:

Теорема 5.1. *В условиях* (5.1), (5.2) *при* $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, *вложение* W *в* $L^{p_0}(0, T;\ B)$ *компактно.*

Доказательство. Если подпоследовательность v_n ограничена в W, то можно выделить[3]) подпоследовательность v_μ,

---

[1]) «Нелинейный вариант» этих утверждений в одной конкретной ситуации будет приведен в § 12.

[2]) Знаком $\subset$ обозначается алгебраическое и топологическое включение.

[3]) Мы здесь пользуемся тем, что пространство $L^{p_i}(0, T;\ B_i)$ рефлексивно, если $1 < p_i < \infty$ и B_i рефлексивно.

такую, что $v_\mu \to v$ слабо в W. Таким образом, нам надо доказать (изменив обозначения) следующее утверждение: пусть v_n — такая последовательность в W, что

$$v_n \to 0 \text{ слабо в } W.$$

Тогда $v_n \to 0$ сильно в $L^{p_0}(0, T; B)$.

Имеет место следующая хорошо известная лемма (далее для удобства читателя мы напомним ее доказательство):

Лемма 5.1. *В предположении* (5.2) $\forall \eta > 0$ *найдется такая константа* c_η, *что*

$$\| v \|_B \leqslant \eta \| v \|_{B_0} + c_\eta \| v \|_{B_1}. \tag{5.4}$$

Таким образом, $\forall \eta > 0$ существует такое d_η, что

$$\| v_n \|_{L^{p_0}(0, T;\, B)} \leqslant \eta \| v_n \|_{L^{p_0}(0, T;\, B_0)} + d_\eta \| v_n \|_{L^{p_0}(0, T;\, B_1)}. \tag{5.5}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\| v_n \|_{L^{p_0}(0, T;\, B_0)} \leqslant c,$$

имеем

$$\| v_n \|_{L^{p_0}(0, T;\, B)} \leqslant \varepsilon/2 + d_\eta \| v_n \|_{L^{p_0}(0, T;\, B_1)},$$

коль скоро η *выбрано* таким образом, что $\eta c \leqslant \varepsilon/2$.

Теперь остается показать, что

$$v_n \to 0 \text{ сильно в } L^{p_0}(0, T;\, B_1). \tag{5.6}$$

Так как $W \subset C^0([0, T];\, B_1)$, то $\| v_n(t) \|_{B_1} \leqslant \text{const}$, так что, согласно теореме Лебега, (5.6) будет выполнено, если мы покажем, что

$$v_n(s) \to 0 \text{ сильно в } B_1 \ \forall s \in [0, T].$$

Поскольку s не играет никакой специальной роли, нам остается только показать, что

$$v_n(0) \to 0 \quad \text{сильно в} \quad B_1. \tag{5.7}$$

Если мы определим w_n равенством

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \qquad \lambda > 0 \text{ фиксировано}, \tag{5.8}$$

то

$$\begin{gathered} v_n(0) = w_n(0), \\ \| w_n \|_{L^{p_0}(0, T;\, B_0)} \leqslant e_1 \lambda^{-1/p_0}, \qquad \| w_n' \|_{L^{p_1}(0, T;\, B_1)} \leqslant e_2 \lambda^{1-1/p_1}. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Если функция φ принадлежит C^1 на отрезке $[0, T]$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi(T) = 0$, то

$$w_n(0) = \int_0^T (\varphi w_n)' \, dt = \beta_n + \gamma_n,$$

$$\beta_n = \int_0^T \varphi w_n' \, dt, \qquad \gamma_n = \int_0^T \varphi' w_n \, dt.$$

Из (5.9) следует, что

$$\| v_n(0) \|_{B_1} \leqslant \| \beta_n \|_{B_1} + \| \gamma_n \|_{B_1} \leqslant c_3 \lambda^{1-1/p_1} + \| \gamma_n \|_{B_1}. \tag{5.10}$$

Если $\varepsilon > 0$, то *выберем* λ таким образом, чтобы $c_3 \lambda^{1-1/p_1} \leqslant \varepsilon/2$; мы придем к (5.7), если покажем, что

$$\gamma_n \to 0 \text{ сильно в } B_1. \tag{5.11}$$

Но $w_n \to 0$ слабо в $L^{p_0}(0, T; B_0)$ (λ фиксировано, и мы всегда можем считать, что $\lambda \leqslant 1$), и, следовательно, $\gamma_n \to 0$ *слабо* в B_0. Так как вложение $B_0 \to B_1$ компактно, мы получаем (5.11) и утверждение теоремы[1]) ●

Доказательство леммы 5.1. Предположим, что (5.4) не выполнено. Тогда $\forall \eta > 0$ существуют $v_n \in B_0$ и $c_n \to +\infty$, такие, что

$$\| v_n \|_B \geqslant \eta \| v_n \|_{B_0} + c_n \| v_n \|_{B_1}.$$

Полагая $w_n = v_n / \| v_n \|_{B_0}$, мы получим

$$\| w_n \|_B \geqslant \eta + c_n \| w_n \|_{B_1} \tag{5.12}$$

и

$$\| w_n \|_B \leqslant \text{const} \cdot \| w_n \|_{B_0} \leqslant \text{const}.$$

Но тогда из (5.12) следует, что

$$\| w_n \|_{B_1} \to 0. \tag{5.13}$$

---

[1]) Другое доказательство (Р. Темам): имеем $v_n(0) = a_n + b_n$,

$$a_n = \frac{1}{s} \int_0^s v_n(t) \, dt, \qquad b_n = -\frac{1}{s} \int_0^s (s - t) v_n'(t) \, dt.$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то выберем s таким образом, что

$$\| b_n \|_{B_1} \leqslant \int_0^s \| v_n'(t) \|_{B_1} dt \leqslant \varepsilon/2.$$

Далее, если s фиксировано, то $a_n \to 0$ слабо в B_0 и, следовательно, сильно в B_1.

Далее, $\| w_n \|_{B_0} = 1$, а поскольку вложение $B_0 \to B$ компактно, из последовательности w_n можно выделить подпоследовательность w_μ, сильно сходящуюся в B; в силу (5.13) $\| w_\mu \|_B \to 0$, что противоречит (5.12) ●

Замечание 5.1. В приложениях первая априорная оценка получается в пространстве типа $L^{p_0}(0, T; B_0)$, где B_0 — пространство Соболева типа

$$B_0 = W^{m,\,p}(\Omega). \tag{5.14}$$

Чтобы установить *сходимость почти всюду* (см. лемму 1.3), нам нужно утверждение теоремы 5.1, *например*, для случая

$$B = L^p(\Omega). \tag{5.15}$$

Предположение (5.2) *имеет место* в силу теоремы Кондрашова [1], если Ω — *ограниченная* область с достаточно гладкой границей.

«Практический» вывод из теоремы 5.1 состоит в том, что требуемый результат получается из априорной оценки v' в $L^{p_1}(0, T; B_1)$, где B_1 *может быть выбрано «сколь угодно большим»*.

Именно это замечание позволяет (в последующих параграфах) решить вопрос о существовании решения уравнений Навье — Стокса в пространстве произвольной размерности ●

Теперь мы приведем другую лемму о компактности, использующую понятие *дробной производной*.

Мы ограничимся функциями со значениями в *гильбертовом* пространстве[1]).

Мы будем считать, что выполнены предположения (5.1), (5.2) и, кроме того,

$$\text{пространства } B_0,\ B,\ B_1 \text{ гильбертовы.} \tag{5.16}$$

Для заданного $\gamma > 0$ положим

$$\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, B_0,\, B_1) = \{v \mid v \in L^2(\mathbb{R};\, B_0),\ |\tau|^\gamma \hat{v} \in L^2(\mathbb{R};\, B_1)\}, \tag{5.17}$$

где

$\hat{v}(\tau)$ — преобразование Фурье по t функции v,

$$\hat{v}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \tau}\, v(t)\, dt.$$

---

[1]) Если пространство не является гильбертовым то нужно предполагать известной теорию интерполяции. Приведенные ниже результаты достаточны для наших целей.

Определив норму

$$\|v\|_{\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, B_0,\, B_1)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, B_0)} + \||\tau|^\gamma \hat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, B_1)}\right)^{1/2}, \tag{5.18}$$

мы превратим $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, B_0,\, B_1)$ в *пространство Гильберта.*

Введем также

$$\mathscr{H}^\gamma(0,\, T;\, B_0,\, B_1) \text{ — пространство сужений на } (0,\, T) \text{ функций из } \mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, B_0,\, B_1). \tag{5.19}$$

Это пространство будет гильбертовым с «нормой факторпространства»:

$$\|v\|_{\mathscr{H}^\gamma(0,\, T;\, B_0,\, B_1)} = \inf_w \|w\|_{\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, B_0,\, B_1)}, \quad \text{где } w = v \text{ почти всюду в } (0,\, T). \tag{5.20}$$

Пространство $\mathscr{H}^\gamma(0,\, T;\, B_0,\, B_1)$ состоит из таких функций $v \in L^2(0,\, T;\, B_0)$, у которых (по определению) *дробная производная порядка* γ *принадлежит* $L^2(0,\, T;\, B_1)$.

(В приложениях, как правило, $0 < \gamma < 1$.)

Будет доказана

Теорема 5.2. *Предположим, что выполнены условия* (5.1), (5.2), (5.16). *Тогда вложение* $\mathscr{H}^\gamma(0,\, T;\, B_0,\, B_1) \to L^2(0,\, T;\, B)$ *будет компактным.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 5.1, нам достаточно показать, что если $v_n \to 0$ *слабо* в $\mathscr{H}^\gamma(0,\, T;\, B_0,\, B_1)$, то $v_n \to 0$ *сильно* в $L^2(0,\, T;\, B_1)$.

Можно считать, что v_n является сужением на $(0,\, T)$ функции $w_n \in \mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, B_0,\, B_1)$, причем носитель w_n принадлежит $[-1,\, T+1]$, $w_n \to 0$ слабо в $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, B_0,\, B_1)$. Нам надо показать, что $w_n \to 0$ в $L^2(\mathbb{R};\, B_1)$ или что

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{w}_n(\tau)\|^2_{B_1}\, d\tau \to 0. \tag{5.21}$$

Имеем:

$$J_n = \int_{|\tau| \leqslant M} \|\hat{w}_n(\tau)\|^2_{B_1}\, d\tau + \int_{|\tau| \geqslant M} (1 + |\tau|^{2\gamma}) \|\hat{w}_n(\tau)\|^2_{B_1} \times \times \frac{1}{1 + |\tau|^{2\gamma}}\, d\tau \leqslant \int_{|\tau| \leqslant M} \|\hat{w}_n(\tau)\|^2_{B_1}\, d\tau + \frac{C}{1 + M^{2\gamma}}.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать M таким образом, чтобы

$$\frac{C}{1 + M^{2\gamma}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Условие (5.21) будет выполнено, если мы покажем, что

$$\int\limits_{|\tau|\leqslant M} \|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau \to 0, \quad M \text{ фиксировано.} \tag{5.22}$$

Если ψ — непрерывная функция с компактным носителем, равная 1 на $[-1, T+1]$, то $w_n = \psi w_n$ и

$$\hat{w}_n(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_n(t)\,(\bar{e}^{-2\pi i t\tau}\psi(t))\,dt.$$

Следовательно, $\hat{w}_n(\tau) \to 0$ слабо в B_0, а тогда сильно в B и a fortiori сильно в B_1, поскольку

$$\|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1} \leqslant \|w_n\|_{L^2(\mathbb{R};\ B_1)} \|e^{-2\pi i t\tau}\psi\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

и (5.22) следует из теоремы Лебега ●

5.3. Применение теоремы 5.1

Мы вернемся здесь к ситуации § 3, где рассматривается уравнение

$$u'' - \Delta u + |u'|^\rho u' = f \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times]0, T[, \tag{5.23}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{5.24}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{5.25}$$

Будет доказана

Теорема 5.3. *Пусть заданы* f, u_0, u_1, *причем*

$$f \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)), \tag{5.26}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{5.27}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega). \tag{5.28}$$

Предполагается, что Ω — *ограниченная область с гладкой границей.*

Тогда существует одна и только одна[1]) *функция* u, *являющаяся решением задачи* (5.23), (5.24), (5.25), *причем*

$$u \in L^\infty(0, T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{5.29}$$

$$u' \in L^\infty(0, T;\ H_0^1(\Omega)) \cap L^{\rho+2}(Q). \tag{5.30}$$

---

[1]) Мы здесь не доказываем единственность и отсылаем читателя к более общему результату из § 6 гл. 2.

Замечание 5.2. Условия на f, u_0, u_1 менее сильные по сравнению с теоремой 3.1, а полученное решение u (как и следовало ожидать) — более слабое ●

Доказательство теоремы 5.3. 1) Как и в доказательстве теоремы 3.1, строится приближенное решение u_m (см. (3.19)), причем

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{в} \quad H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$u_{1m} \to u_1 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega),$$

и в качестве w_j, как и в (3.15), выбираются собственные функции оператора $-\Delta$.

2) Априорные оценки (I), (II) из доказательства теоремы 3.1 остаются в силе, следовательно,

$$u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{5.31}$$

$$u'_m \text{ ограничены в } L^\infty\ (0,\ T;\ H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q),\quad p = \rho + 2. \tag{5.32}$$

Наоборот, априорные оценки (III) не справедливы (в них предполагается, что $f' \in L^2(Q)$); мы постараемся их заменить оценками «менее сильными», но достаточными для применения теоремы 5.1 и перехода к пределу.

3) Обозначим теперь через A неограниченный оператор в $L^2(\Omega)$, определенный равенством

$$Au = \Delta u, \qquad D(A) =$$
$$= (\text{область определения } A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{5.33}$$

Тогда, если граница Ω достаточно гладкая, то

$$D(A^N) \subset H^{2N}(\Omega),$$

и поскольку $H^{2N}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ при подходящем N, мы видим, что

$$D(A^N) \subset L^p(\Omega), \qquad N \text{ достаточно велико.} \tag{5.34}$$

Оператор P_m проектирования $L^2(\Omega)$ на $[w_1, \ldots, w_m]$:

$$P_m f = \sum_{i=1}^{m} (f,\ w_i)\, w_i \tag{5.35}$$

удовлетворяет условиям

$$P_m \in \mathscr{L}(D(A^N);\ D(A^N)); \qquad \|P_m\|_{\mathscr{L}(D(A^N);\ D(A^N))} \leqslant c,$$

и, следовательно, в силу (5.34)

$$\|P_m\|_{\mathscr{L}(D(A^N);\ L^p(\Omega))} \leqslant c;$$

переходя к сопряженному оператору, ввиду равенства $P_m^* = P_m$ получим

$$\|P_m\|_{\mathscr{L}(L^{p'}(\Omega),\ D(A^N)')} \leqslant c. \tag{5.36}$$

Однако из приближенного уравнения (3.19) следует, что

$$u''_m(t) = \Delta u_m(t) - P_m\left(|u'_m(t)|^\rho u'_m(t)\right) + P_m f, \tag{5.37}$$

и в силу (5.32) функции $t \to |u'_m(t)|^\rho u'_m(t)$ ограничены в $L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega))$ и, следовательно, в силу (5.36)

$$P_m\left(|u'_m|^\rho u'_m\right) \text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; D(A^N)').$$

Таким образом, из (5.37) (вместе с (5.31)) следует, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; D(A^N)'). \tag{5.38}$$

4) Теперь мы применим теорему 5.1 о компактности к последовательности u'_m, где

$$\begin{aligned} B_0 &= H_0^1(\Omega), & p_0 &= 2 \text{ (например)}, \\ B_1 &= D(A^N)', & p_1 &= p', \end{aligned} \tag{5.39}$$

и где

$$B = L^2(\Omega) \quad \text{(что законно ввиду компактности вложения } H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)). \tag{5.40}$$

Из сказанного выше следует, что можно выбрать такую последовательность u'_μ, что

$$u'_\mu \to u' \text{ в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ и почти всюду в } Q. \tag{5.41}$$

Таким образом, мы можем считать, что

$$u_\mu \to u \text{ *-слабо в } L^\infty\left(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right), \tag{5.42}$$

$$u'_\mu \to u' \text{ слабо в } L^p(Q) \text{ и *-слабо в } L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \tag{5.43}$$

$$|u'_\mu|^\rho u'_\mu \to \chi \text{ слабо в } L^{p'}(Q). \tag{5.44}$$

Однако в силу (5.41) и леммы 1.3 $\chi = |u'|^\rho u'$, и мы можем закончить доказательство таким же образом, как в теореме 3.1 ●

6. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА (ЭВОЛЮЦИОННЫЙ СЛУЧАЙ)

6.1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ (гладкость Γ сначала не играет роли).

Обозначим через u вектор (вектор скорости)

$$u = \{u_1, \ldots, u_n\}, \tag{6.1}$$

определенный в $Q = \Omega \times]0, T[$. Положим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' = \{u'_1, \ldots, u'_n\} = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\},$$

$$D_i u = \{D_i u_1, \ldots, D_i u_n\} = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\},$$

$$\Delta u = \{\Delta u_1, \ldots, \Delta u_n\}.$$

Уравнения Навье — Стокса в эволюционном случае имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p \quad (\nu > 0), \tag{6.2}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \left(\text{т. е. } \sum_{i=1}^{n} D_i u_i = 0\right), \tag{6.3}$$

а *начальные и граничные условия* таковы:

$$u = 0 \text{ на } \Sigma \quad (\text{т. е. } u_i = 0 \text{ на } \Sigma, \quad i = 1, \ldots, n), \tag{6.4}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega \ (\text{т. е. } u_i(x, 0) = u_{0i}(x), \quad x \in \Omega). \tag{6.5}$$

Задача состоит в том, чтобы найти u и p (очевидно, p определено с точностью до аддитивной постоянной), удовлетворяющие (6.2) — (6.5).

Замечание 6.1. Уравнения (6.2), (6.3) *не являются уравнениями типа Коши — Ковалевской* (поскольку отсутствует производная $\partial p / \partial t$; в § 4 мы уже встречались с примером подобной ситуации); они становятся уравнениями типа Коши — Ковалевской, если их записать в факторпространстве пространства распределений — в пространстве V', определенном ниже 1).

Мы теперь определим так называемое *слабое решение* или, согласно Лере [1], [2], *турбулентное решение* задачи (6.2) — (6.5). Для этого нам понадобятся следующие обозначения: положим

$$\mathscr{V} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)^n, \ \operatorname{div} \varphi = 0\}, \tag{6.6}$$

$$H = \text{замыкание } \mathscr{V} \text{ в } (L^2(\Omega))^n. \tag{6.7}$$

Для f, g из H положим

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i g_i \, dx, \quad |f| = (f, f)^{1/2}. \tag{6.8}$$

Далее мы рассмотрим пространства $H^s(\Omega)$, $s \geqslant 0$, причем s может быть как целым, так и нецелым (см. Лионс — Мад-

---

1) См. примечание редактора на стр. 58. — *Прим. ред.*

женес [1], гл. 1); пространство $(H^s(\Omega))^n$ мы снабдим гильбертовым скалярным произведением

$$((u, v))_s = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{H^s(\Omega)}{}^{1)}. \tag{6.9}$$

Далее мы определим

$$V_s = \text{замыкание } \mathscr{V} \text{ в } (H^s(\Omega))^n, \quad \|u\|_s = ((u, u))_s^{1/2}. \tag{6.10}$$

В частности, мы положим

$$V_1 = V, \quad \|u\|_1 = \|u\|. \tag{6.11}$$

Тогда

$$V_s \subset V \subset H, \quad \text{если} \quad s > 1, \tag{6.12}$$

причем каждое из этих пространств плотно в последующем.

Мы *отождествляем* H с его сопряженным: $H' = H$. Мы можем также при «том же самом» отождествлении отождествить V', V'_s с надпространствами H и, следовательно, пополнить (6.12) включениями

$$V_s \subset V \subset H \subset V' \subset V'_s \bullet \tag{6.13}$$

Замечание 6.2. Пространство V' (а также V'_s) является факторпространством пространства $\mathscr{D}'(\Omega)^n$ ●

Замечание 6.3. Если $v \in V_s$, то $v_i \in H_0^s(\Omega)$ и, следовательно (при $s > 1/2$), $v_i = 0$ на Γ. Таким образом, мы можем понимать (6.3), (6.4) как условия принадлежности и к V для почти всех t ●

Теперь положим

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad u, v \in V, \tag{6.14}$$

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i \, dx \tag{6.15}$$

для тройки таких векторов u, v, w, для которых сходятся соответствующие интегралы; в этой связи отметим такую лемму:

Лемма 6.1. *Трилинейная форма* u, v, $w \to b(u, v, w)$ *непрерывна на* $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$[2].

---

[1] Читатель, который желает избежать употребления $H^s(\Omega)$ для нецелых s, может при чтении пп. 6.3, 6.4 в качестве s брать наименьшее целое число $\geqslant n/2$.

[2] Заметим, что $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$, если $n \leqslant 4$.

Доказательство. В самом деле, если $u \in V$, то $u_i \in H_0^1(\Omega)$ и, следовательно, в силу теоремы Соболева

$$u_i \in L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \quad (q \text{ конечно и произвольно при } n = 2). \tag{6.16}$$

Заметив, что

$$\left| \int_\Omega u_k (D_k v_i)\, w_i \, dx \right| \leqslant \| u_k \|_{L^q(\Omega)} \| D_k v_i \|_{L^2(\Omega)} \| w_i \|_{L^n(\Omega)},$$

мы получим наш результат[1]. Для $n = 2$ отметим, например, что

$$\left| \int_\Omega u_k (D_k v_i)\, w_i \, dx \right| \leqslant \| u_k \|_{L^4(\Omega)} \| D_k v_i \|_{L^2(\Omega)} \| w_i \|_{L^4(\Omega)} \bullet$$

Теперь может быть сформулирована

Задача 6.1. Пусть заданы

$$f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^n); \tag{6.17}$$

$$u_0 \in H. \tag{6.18}$$

Ищутся такие u и p, $p \in \mathscr{D}'(Q)$, что

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{6.19}$$

$$u' - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p \ (\text{совпадает с } (6.2)), \tag{6.20}$$

$$u(0) = u_0. \tag{6.21}$$

Замечание 6.4. В (6.19) условие принадлежности u к $L^\infty(0, T; H)$ может показаться искусственным, и оно на самом деле не существенно для постановки задачи; однако мы докажем *существование* именно в классе (6.19). Как уже было отмечено (в замечании 6.3), условие $u \in L^2(0, T; V)$ в некотором смысле содержит в себе условия (6.3) и (6.4).

Следует отметить, что можно дать *два* определения пространства V, которые a priori в равной мере естественны:

первое определение: $V =$ замыкание $\mathscr{V}$ в $(H^1(\Omega))^n$;

второе определение: $V = \{ v \mid v \in (H_0^1(\Omega))^n, \ \operatorname{div} v = 0 \}$.

Эти определения эквивалентны. В самом деле, обозначим на минуту пространство из второго определения через $\tilde{V}$. Ясно, что $V \subset \tilde{V}$; установим обратное включение. Пусть L — непре-

---

[1] На самом деле установлена непрерывность на $(L^q(\Omega))^n \times V \times (L^n(\Omega))^n$.

рывная линейная форма на $\tilde{V}$, равная нулю на V; в силу теоремы Хана — Банаха L можно представить (не единственным образом) в виде

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} (L_i, v_i), \quad L_i \in H^{-1}(\Omega).$$

Так как L равна нулю на V, а тем более на $\mathscr{V}$, то по теореме двойственности де Рама (см. де Рам [1])

$$L_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad S \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

Однако можно показать (см. Madженес — Стампаккья [1], примечание (^{27}) на стр. 320), что тогда $S \in L^2(\Omega)$, и в этих условиях

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, v_i \right) = -(S, \operatorname{div} v) = 0 \ \forall v \in \tilde{V},$$

откуда следует наш результат ●

Замечание 6.5. Несмотря на кажущуюся точность, формулировка задачи (6.1) содержит одну *двусмысленность*: у нас нет никаких сведений относительно u' и p, лишь только соотношение

$$u' + \operatorname{grad} p = \nu \Delta u - \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u + f \quad \text{на } Q, \tag{6.22}$$

вследствие чего не очевиден смысл условия (6.21).

Если мы возьмем $\varphi \in \mathscr{V}$, то

$$(\operatorname{grad} p, \varphi) = 0 \quad (\text{в } \mathscr{D}'(0, T)^n),$$

и (6.22) приводит к равенству

$$(u', \varphi) = -\nu a(u, \varphi) - b(u, u, \varphi) + (f, \varphi). \tag{6.23}$$

Без труда можно проверить, что

$$b(u, u, \varphi) = -b(u, \varphi, u), \tag{6.24}$$

так что (6.23) эквивалентно

$$(u', \varphi) = -\nu a(u, \varphi) + b(u, \varphi, u) + (f, \varphi). \tag{6.25}$$

Пусть X — замыкание $\mathscr{V}$ в $(W^{1, n/2}(\Omega))^n$; имеем:

$$|b(u, \varphi, u)| \leqslant c_1 \|u\|^2_{(L^q(\Omega))^n} \sum_{i, j=1}^{n} \|D_i \varphi_j\|_{L^{n/2}(\Omega)} \leqslant c_2 \|u\|^2 \|\varphi\|_X,$$

и, следовательно,

$$b(u, \varphi, u) = (g, \varphi), \quad \| g \|_{X'} \leqslant c \| u \|^2,$$

откуда $g \in L^1(0, T; X')$.

Далее, из (6.25) следует, что

$$u' \in L^2(0, T; V') + L^1(0, T; X'), \tag{6.26}$$

так что (6.21) *имеет смысл* (например, в X').

В дальнейшем мы все это будем уточнять, и, как будет видно, указанная выше интерпретация существенно упрощается при $n = 2$ ●

Замечание 6.5 естественным образом приводит к другой формулировке задачи 6.1.

Задача 6.2. Пусть заданы

$$f \in L^2(0, T; V'), \tag{6.27}$$

$$u_0 \in H \text{ (совпадает с (6.18))}. \tag{6.28}$$

Ищется такое u, что

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \quad \text{(совпадает с (6.19))}, \tag{6.29}$$

$$(u', v) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n, \tag{6.30}$$

$$u(0) = u_0. \tag{6.31}$$

Замечание 6.6. Условие (6.31) интерпретируется таким же образом, как в замечании 6.5; лемма 6.1 используется для того, чтобы придать смысл форме $b(u, u, v)$ ●

Замечание 6.7. Докажем *эквивалентность двух приведенных выше формулировок.*

Если u — решение задачи 6.1, то (6.25) выполнено для всех $\varphi \in \mathscr{V}$, откуда (6.30) следует с помощью предельного перехода в $V \cap (L^n(\Omega))^n$; таким образом, u является решением задачи 6.2.

Обратно, пусть u — решение уравнения (6.30). Тогда, если мы положим

$$u' - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u - f = S, \tag{6.32}$$

то S будет принадлежать $(\mathscr{D}'(Q))^n$ и

$$(S, \varphi) = 0 \quad \text{в} \quad (\mathscr{D}'(0, T))^n \quad \forall \varphi \in \mathscr{V}. \tag{6.33}$$

Отсюда следует, что S имеет вид

$$S = -\operatorname{grad} p, \quad p \in \mathscr{D}'(Q) \, ● \tag{6.34}$$

Будут доказаны следующие результаты:

Теорема 6.1. *Существует решение и задачи 6.2 (при произвольном конечном $T > 0$).*

Вопрос о единственности открыт; в этой связи доказана

Теорема 6.2. *Если размерность n равна 2, то задача 6.2 допускает единственное решение.*

Будет доказана также

Теорема 6.3. *Если размерность $n=2$, то решение задачи 6.2 после, быть может, исправления на множестве меры нуль будет непрерывно как функция $[0, T] \to H$; при этом $u(t) \to u_0$ в H, когда $t \to 0$* ●

Чтобы лучше продемонстрировать важную роль размерности, мы начнем с доказательства теорем 6.2 и 6.3 (п. 6.2); далее мы дадим два доказательства теоремы 6.1, первое (п. 6.4) для любых n, второе (п. 6.5) для $n \leqslant 4$.

6.2. Случай пространства размерности 2. Единственность

Нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 6.2. *Если $n=2$, то существует такая константа $c(\Omega)$, что*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c(\Omega)\|v\|^{1/2}_{H^1_0(\Omega)}\|v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{6.35}$$

Доказательство. Достаточно доказать (6.35) для $v \in \mathscr{D}(\Omega)$; продолжим v нулем вне Ω, и неравенство (6.35) будет следовать из неравенства

$$\|v\|_{L^4(R^2)} \leqslant 2^{1/2}\|v\|^{1/2}_{L^2(R^2)}\left(\sum_{i=1}^{2}\|D_i v\|^2_{L^2(R^2)}\right)^{1/4}. \tag{6.36}$$

Мы будем исходить из равенства

$$v^2(x) = 2\int_{-\infty}^{x_i} v(D_i v)\,dx_i,$$

откуда

$$v^2(x) \leqslant 2v_1(x_2) \quad \text{и} \quad v^2(x) \leqslant 2v_2(x_1),$$

где

$$v_1(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v|\,|D_1 v|\,dx_1 \quad \text{н} \quad v_2(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v|\,|D_2 v|\,dx_2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} v^4(x)\,dx \leqslant 4 \int\limits_{\mathbf{R}} v_1(x_2)\,dx_2 \int\limits_{\mathbf{R}} v_2(x_1)\,dx_1 \leqslant$$
$$\leqslant 4 \| v \|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \| D_1 v \|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \| v \|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \| D_2 v \|_{L^2(\mathbf{R}^2)},$$

откуда, в частности, следует (6.36) ●

Лемма 6.3. *Если* $n = 2$ *и* $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, *то*

$$\sum_{i=1}^{2} u_i D_i u \in L^2(0, T; V'). \tag{6.37}$$

Доказательство. Если $\varphi \in V$ (напомним, что $\|\varphi\|$ — норма в V), то имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i u, \varphi\right) = -\left(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i \varphi, u\right),$$

откуда

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i u, \varphi\right)\right| \leqslant c_1 \| u \|^2_{(L^4(\Omega))^2} \| \varphi \| \leqslant c_2 \| u \| | u | \| \varphi \|$$
$$\text{(в силу (6.35))}$$

и, следовательно,

$$\left\| \sum_{i=1}^{2} u_i(t)\, D_i u(t) \right\|_{V'} \leqslant c_2 \| u(t) \| | u(t) |,$$

откуда вытекает (6.37), поскольку функция $t \to \| u(t) \|$ принадлежит $L^2(0, T)$, а функция $t \to | u(t) |$ принадлежит $L^\infty(0, T)$ ●

Из (6.30) следует, что $u' \in L^2(0, T; V')$ при $n = 2$; таким образом, доказана

Теорема 6.4. *Всякое решение* u *задачи* 6.2 *при* $n = 2$ *удовлетворяет включению*

$$u' \in L^2(0, T; V') \; ● \tag{6.38}$$

Теорема 6.3 следует из включения $u \in L^2(0, T; V)$, (6.38) и теорем о следах; см. Лионс — Мадженес [1], гл. 1 ●

Доказательство теоремы 6.2. Пусть u и u^* — два решения, и пусть $w = u - u^*$. Тогда

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0$$
$$\forall v \in V \text{ (так как } V \subset (L^2(\Omega))^2 \text{!)}. \tag{6.39}$$

Поскольку ввиду (6.38) нам известно, что $w' \in L^2(0, T; V')$, то в (6.39) мы можем положить $v = w(t)$ и проинтегрировать по t; получим [1]:

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \nu \int_0^t a(w, w)\, d\sigma + \\ + \int_0^t [b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w)] = 0. \quad (6.40)$$

Однако $b(u, w, w) = 0$, $b(w, w, w) = 0$ и (6.40) примет вид

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \nu \int_0^t \| w(\sigma)\|^2 d\sigma = - \int_0^t b(w, u, w)\, d\sigma. \quad (6.41)$$

Отсюда

$$\left| \int_0^t b(w, u, w)\, d\sigma \right| \leqslant c_3 \int_0^t \| w(\sigma)\|^2_{(L^4(\Omega))^2} \| u(\sigma)\| d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \int_0^t | w(\sigma)| \| w(\sigma)\| \| u(\sigma)\| d\sigma \leqslant$$

(в силу (6.35))

$$\leqslant \nu \int_0^t \| w(\sigma)\|^2 d\sigma + c_5 \int_0^t | w(\sigma)|^2 \| u(\sigma)\|^2 d\sigma.$$

Из (6.41) следует, что

$$| w(t)|^2 \leqslant 2c_5 \int_0^t \| u(\sigma)\|^2 | w(\sigma)|^2 d\sigma, \quad (6.42)$$

откуда $w = 0$ ●

6.3. Специальный базис

В дальнейшем мы будем иметь дело с пространством V_s, где

$$s = n/2 \, ^{2)}. \quad (6.43)$$

Мы будем пользоваться следующими леммами:

---

[1] Если $w \in L^2(0, T; V)$, $w' \in L^2(0, T; V')$, то почти всюду $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}| w(t)|^2 = (w(t), w'(t))$.

[2] Следовательно, при $n = 2$ существование доказывается с использованием только пространства $V_1 = V$.

Лемма 6.4. *При условии (6.43) если $v \in V_s$, то $D_i v_j \in L^n(\Omega)$.*

Доказательство. В самом деле[1], $D_i v_j \in H^{s-1}(\Omega)$, а $H^{s-1}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, где $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{s-1}{n} = \frac{1}{n}$ (согласно Петре [1]) ●

Лемма 6.5. *При $u \in V$, $v \in V_s$ имеем:*

$$b(u, u, v) = -b(u, v, u). \tag{6.44}$$

Доказательство. Этот результат очевиден для $u, v \in \mathscr{V}$, затем надо перейти к пределу ●

Лемма 6.6. *При $u \in V$ линейная форма $v \to b(u, u, v)$ непрерывна на V_s;*

$$b(u, u, v) = (g(u), v), \quad g(u) \in V_s', \tag{6.45}$$

причем

$$\| g(u) \|_{V_s'} \leqslant c_6 \| u \|^2_{(L^p(\Omega))^n}, \tag{6.46}$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \quad (p < q, \text{ где } q \text{ из } (6.16)). \tag{6.47}$$

Доказательство.

$$| b(u, u, v) | = | -b(u, v, u) | \leqslant c_7 \| u \|^2_{(L^p(\Omega))^n} \sum_{i,\, j=1}^{n} \| D_i v_j \|_{L^n(\Omega)},$$

откуда ввиду леммы 6.4 следует (6.46) ●

Лемма 6.7. *Пусть $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Тогда*

$$u \in L^4(0, T; (L^p(\Omega))^n), \quad p \text{ определено в } (6.47). \tag{6.48}$$

Доказательство. Пусть $u = \{u_i\}$. Имеем

$$u_i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{6.49}$$

Рассмотрим отдельно два случая.

Первый случай: $n = 2$. Согласно лемме 6.2,

$$\| u_i(t) \|_{L^4(\Omega)} \leqslant c(\Omega) \| u_i(t) \|^{1/2}_{H_0^1(\Omega)} \| u_i(t) \|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \leqslant c \| u_i(t) \|^{1/2}_{H_0^1(\Omega)},$$

откуда

$$u_i \in L^4(0, T; L^4(\Omega)),$$

т. е. (6.48) доказано ($p = 4$ при $n = 2$).

Второй случай: $n \geqslant 3$. Согласно теореме Соболева, $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $1/q = 1/2 - 1/n$, и из (6.49) следует, что

$$u_i \in L^2(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{6.50}$$

---

[1] См. Лионс — Мадженес [1], предложение 12.1 гл. 1.

В силу неравенства Гёльдера

$$\|u_i(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u_i(t)\|^{1/2}_{L^q(\Omega)} \|u_i(t)\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \leqslant c\, \|u_i(t)\|^{1/2}_{L^q(\Omega)},$$

откуда $$u_i \in L^4(0,\ T;\ L^p(\Omega)),$$

т. е. приходим к (6.48) ●

Лемма 6.8. *Вложение* $V_s \to H$ *компактно.*

Доказательство очевидно, так как $V_s \subset V_1 = V$ и вложение $V_1 \to H$ компактно ввиду компактности вложения $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ●

Следствие 6.1. *Спектральная задача* (в обозначениях (6.9))

$$((w,\ v))_s = \lambda(w,\ v) \quad \forall v \in V_s \tag{6.51}$$

допускает последовательность ненулевых решений w_j, *отвечающих последовательности собственных значений* λ_j:

$$((w_j,\ v))_s = \lambda_j(w_j,\ v) \quad \forall v \in V_s,\ \lambda_j > 0. \tag{6.52}$$

Мы используем функции w_j в качестве «*специального базиса*» в методе Фаэдо — Галёркина в следующем ниже пункте ●

Можно также использовать пространство V_s для доказательства следующего утверждения:

Теорема 6.5. *Для любого решения задачи* 6.2 *имеет место включение*

$$u' \in L^2(0,\ T;\ V'_s), \qquad s = n/2\,^{[1]}). \tag{6.53}$$

Доказательство. Действительно,

$$a(u,\ v) = (Au,\ v), \qquad A \in \mathscr{L}(V;\ V'), \tag{6.54}$$

и используя (6.45), мы выведем из (6.30), что

$$u' = -\nu Au - g(u) + f. \tag{6.55}$$

Согласно (6.46) и (6.48), $g(u) \in L^2(0,\ T;\ V'_s)$; так как $Au \in L^2(0,\ T;\ V')$, $f \in L^2(0,\ T;\ V')$ и $V' \subset V'_s$, то из (6.55) следует (6.53) ●

Следствие 6.2. *Всякое решение задачи* 6.2 *после, быть может, изменения на множестве меры нуль, будет непрерывно как функция* $[0,\ T] \to V'_{(s-1)/2}$[2]).

---

[1] Если $n = 2$, то мы снова получаем теорему 6.4 (и притом с тем же самым доказательством!).

[2] А также *слабо* непрерывно, как функции $[0,\ T] \to H$ (см., например, Лионс — Мадженес [1], лемма 8.2, гл. 3).

Доказательство[1]. Мы воспользуемся здесь теоремой интерполяции; согласно Лионсу — Мадженесу [1] гл. 1, u непрерывно как функция $[0, T] \to [V, V'_s]_{1/2} = V'_{(s-1)/2}$ ●

6.4. Доказательство теоремы существования 6.1; первый метод

6.4.1. Приближенное решение. Мы воспользуемся «базисом» $w_1, \ldots, w_m, \ldots$, введенным посредством (6.52).

Мы определим «приближенное» решение $u_m(t)$ порядка m следующим образом:

$$u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m], \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j,$$

$$\left(u'_m(t), w_j\right) + \nu a\left(u_m(t), w_j\right) + b\left(u_m(t), u_m(t), w_j\right) = \\ = \left(f(t), w_j\right), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad (6.56)$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} \in [w_1, \ldots, w_m], \quad u_{0m} \to u_0 \text{ в } H. \qquad (6.57)$$

Эта система дифференциальных уравнений (относительно $g_{jm}(t)$) позволяет определить $u_m(t)$ в интервале $[0, t_m]$; мы сейчас увидим, что можно взять $t_m = T$.

6.4.2. Априорная оценка (I). Умножим (6.56) на $g_{jm}(t)$ и просуммируем по j; так как (см. лемму 6.5) $b(u_m, u_m, u_m) = 0$, то получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu a(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)), \qquad (6.58)$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 \leqslant \|f(t)\|\,\|u_m(t)\| \leqslant \frac{\nu}{2}\|u_m(t)\|^2 + c\|f(t)\|^2,$$

откуда

$$|u_m(t)|^2 + \nu\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant |u_{0m}|^2 + 2c\int_0^t \|f(\sigma)\|^2 d\sigma. \qquad (6.59)$$

Используя (6.57), мы получим, что $t_m = T$ и что

$$u_m \text{ ограничены в } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \qquad (6.60)$$

6.4.3. Априорная оценка (II). Мы теперь собираемся показать — и это центральное место доказательства, — что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^2(0, T; V'_s). \qquad (6.61)$$

---

[1] Этот результат не необходим для дальнейшего.

В самом деле, пусть P_m — проектор $H \to [w_1, \ldots, w_m]$, так что

$$P_m h = \sum_{i=1}^{m} (h, w_i) w_i.$$

В обозначениях (6.54) и (6.45) мы выведем из (6.56), что

$$u'_m = - P_m (g(u_m)) - \nu P_m A u_m + P_m f. \qquad (6.62)$$

Однако $\| P_m \|_{\mathscr{L}(V_s;\, V_s)} \leqslant 1$ (благодаря нашему выбору w_j); тогда из соображений двойственности (поскольку $P^*_m = P_m$):

$$\| P_m \|_{\mathscr{L}(V'_s;\, V'_s)} \leqslant 1. \qquad (6.63)$$

Из (6.60), (6.46) и (6.48) следует, что $g(u_m)$ ограничены в $L^2(0, T; V'_s)$, и, следовательно, $P_m(g(u_m))$ ограничены в $L^2(0, T; V'_s)$.

Далее, так как Au_m ограничены в $L^2(0, T; V')$, а тогда и в $L^2(0, T; V'_s)$, то (6.61) следует из (6.62).

6.4.4. Предельный переход. Мы воспользуемся теоремой о компактности 5.1, полагая

$$\begin{aligned} &B_0 = V, && p_0 = 2, \\ &B_1 = V'_s, && p_1 = 2, \\ &B = H. && \end{aligned}$$

Тогда из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V), \qquad (6.64)$$

$$u_\mu \to u \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H), \qquad (6.65)$$

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L^2(0, T; H) \text{ и почти всюду в } Q, \qquad (6.66)$$

$$u'_\mu \to u' \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V'_s). \qquad (6.67)$$

Из (6.64), (6.67) следует, что $u_\mu(0) \to u(0)$ в V'_s слабо (например) и что $u(0) = u_0$.

Согласно лемме 6.7, $u_{\mu i} u_{\mu j}$ ограничены в $L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega))$, и, следовательно, можно считать, что

$$u_{\mu i} u_{\mu j} \to \chi_{ij} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega)). \qquad (6.68)$$

Однако благодаря (6.66) мы имеем:

$$\chi_{ij} = u_i u_j \qquad (6.69)$$

(чтобы это установить, можно использовать лемму 1.3 или заметить, что $u_{\mu i}u_{\mu j} \to u_i u_j$ в $\mathscr{D}'(Q)$; действительно,

$$\int\limits_Q u_{\mu i}u_{\mu j}\varphi\,dx\,dt \to \int\limits_Q u_i u_j \varphi\,dx\,dt \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(Q),$$

поскольку $u_{\mu i} \to u_i$ слабо в $L^2(Q)$, а $u_{\mu j}\varphi \to u_j\varphi$ сильно в $L^2(Q)$).

Из (6.68), (6.69) следует, что

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \to b(u, u, w_j) \quad \text{слабо в } L^2(0, T). \tag{6.70}$$

В самом деле, если $\psi \in L^2(0, T)$, то

$$\int\limits_0^T b(u_\mu, u_\mu, w_j)\,\psi\,dt = -\int\limits_0^T b(u_\mu, w_j, u_\mu)\,\psi\,dt,$$

и можно перейти к пределу, используя (6.68).

Между тем

$$(u'_\mu, w_j) \to (u', w_j), \quad \text{скажем,} \quad \text{в } \mathscr{D}'(0, T),$$

и, таким образом, равенство (6.56) (при $m = \mu$) в пределе дает равенство

$$(u', w_j) + \nu a(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j),$$

выполненное для всех j. Отсюда вытекает справедливость (6.30) $\forall v \in V_s$ и далее $\forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n$ ●

6.5. Доказательство теоремы существования; второй метод

Предлагаемый ниже метод проходит лишь в предположении, что

$$n \leqslant 4. \tag{6.71}$$

С другой стороны, в этом методе *не предполагается, что в качестве* w_j *выбран какой-нибудь специальный базис* ●

Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — *«произвольный» базис* в V_s[1]) и u_m — приближенное решение, определенное с помощью (6.56), (6.57). В этом случае опять выполнена оценка (6.60).

С другой стороны, оценка (6.61) не выполнена, и ее следует заменить оценкой *производной дробного порядка по* t *функции* u_m (ср. с теоремой 5.2): *для любого* $\varepsilon > 0$

$$D_t^{1/4-\varepsilon}u_m \text{ ограничены в } L^2(0, T; H), \tag{6.72}$$

---

[1]) Точнее, в $V \cap (L^n(\Omega))^n$.

где

$D_t^{1/4-\varepsilon}u$ = сужение на (0, T) обратного преобразования Фурье по τ от $|\tau|^{1/4-\varepsilon}\hat{u}$, где $\hat{u}$ — преобразование Фурье по t функции $\tilde{u}$, которая получается при продолжении u нулем вне (0, T). (6.73)

Действительно, пусть $\tilde{u}_m$ получается из u_m путем продолжения нулем вне (0, T); из (6.56) следует, что

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}_m(t), w_j) + \nu a(\tilde{u}_m, w_j) + b(\tilde{u}_m, \tilde{u}_m, w_j) = \\ = (\tilde{f}, w_j) - (u_m(T), w_j)\delta_T + (u_{0m}, w_j)\delta_0, \qquad (6.74)$$

где $\tilde{f}$ — продолжение f нулем вне (0, T) и где δ_0 (соответственно δ_T) — мера Дирака, сосредоточенная в 0 (соответственно в $t = T$).

Теперь мы используем (6.45), но с другой оценкой, *справедливой при* $n \leqslant 4$; имеем:

$$(g(u), v) = -b(u, v, u).$$

Следовательно, $|(g(u), v)| \leqslant C\|u\|^2_{(L^4(\Omega))^n}\|v\|$,

а так как $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ при $n \leqslant 4$, то имеем:

$$\|g(u)\|_{V'} \leqslant c\|u\|^2. \qquad (6.75)$$

Положим $g_m = g(\tilde{u}_m)$, $\hat{g}_m$ — преобразование Фурье g_m, $\hat{f}$ — преобразование Фурье $\tilde{f}$, и т. д.; в силу (6.74) имеем

$$2\pi i\tau(\hat{u}_m(\tau), w_j) + \nu a(\hat{u}_m, w_j) + (\hat{g}_m, w_j) = \\ = (\hat{f}, w_j) - (u_m(T), w_j)e^{-2\pi i\tau T} + (u_{0m}, w_j). \qquad (6.76)$$

Однако $\hat{u}_m(\tau) \in [w_1, \ldots, w_m]$; поэтому из (6.76) следует, что

$$2\pi i\tau|\hat{u}_m(\tau)|^2 + \nu a(\hat{u}_m(\tau), \hat{u}_m(\tau)) + (\hat{g}_m(\tau), \hat{u}_m(\tau)) = \\ = (\hat{f}(\tau), \hat{u}_m(\tau)) - (u_m(T), \hat{u}_m(\tau))e^{-2\pi i\tau T} + (u_{0m}, \hat{u}_m(\tau)). \qquad (6.77)$$

Взяв мнимую часть (6.77) и оценив правую часть сверху, мы получим:

$$|\tau|\,|\hat{u}_m(\tau)|^2 \leqslant (\|\hat{g}_m(\tau)\|_{V'} + \|\hat{f}(\tau)\|_{V'})\|\hat{u}_m(\tau)\| + \\ + |u_m(T)|\,|\hat{u}_m(\tau)| + |u_{0m}|\,|\hat{u}_m(\tau)|. \qquad (6.78)$$

Однако в силу (6.75)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{g}_m\|_{V'}\,dt \leqslant c\int_0^T\|u_m(t)\|^2\,dt \leqslant C_1$$

и, следовательно, $\|\hat{g}_m(\tau)\|_{V'} \leqslant c_1$.

В силу (6.60) $|u_m(T)| \leqslant c_2$, а так как $|u_{0m}| \leqslant c_3$, то из (6.78) следует, что

$$|\tau|\,|\hat u_m(\tau)|^2 \leqslant c_1\|\hat u_m(\tau)\| + \|\hat f(\tau)\|_{V'}\|\hat u_m(\tau)\| + c_4|\hat u_m(\tau)|.$$

Пусть σ произвольно и $2\sigma > 1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau|\,|\hat u_m(\tau)|^2}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau \leqslant X_m + Y_m + Z_m, \tag{6.79}$$

где

$$X_m = c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat u_m(\tau)\|}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau,$$

$$Y_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat f(\tau)\|_{V'}\|\hat u_m(\tau)\| \frac{1}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau,$$

$$Z_m = c_4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat u_m(\tau)|}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau.$$

Отметим, что $\dfrac{1}{1+|\tau|^\sigma} \in L^2(\mathbb{R}_\tau)$ и в силу (6.60) $\hat u_m$ ограничены в $L^2(\mathbb{R}_\tau; V)$; следовательно, $X_m \leqslant c$. Так как $Y_m \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_{V'}\|\hat u_m\|\,d\tau$, то $Y_m \leqslant c$. Наконец, из включения $\dfrac{1}{1+|\tau|^\sigma} \in L^2(\mathbb{R}_\tau)$ и из (6.60) следует, что $Z_m \leqslant c$. Таким образом, из неравенства (6.79) (при $\sigma > 1/2$) следует (6.72) ●

Теперь мы применим теорему о компактности 5.2, полагая

$$B_0 = V, \quad B_1 = H, \quad \gamma = \frac{1}{4} - \varepsilon, \quad B = H.$$

Из этой теоремы мы выведем, что из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H), \tag{6.80}$$

и в силу теоремы 5.2

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L^2(0, T; H) \text{ и почти всюду в } Q. \tag{6.81}$$

Как и в п. 6.4, отсюда выводится, что u — решение задачи 6.2 ●

6.6. Теорема о гладкости

Сейчас мы покажем, что если данные задачи «более гладкие» и если размерность равна 2, то и решение будет более гладким. Точнее, имеет место

Теорема 6.6. *Предположим, что* $n=2$ *и*

$$f,\ f' \in L^2(0, T; V'),\quad f(0) \in H, \tag{6.82}$$

$$\bar{u}_0 = \{u_{0i}\},\quad u_{0i} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\quad u_0 \in V \tag{6.83}$$

(эти условия не являются наилучшими из возможных).

Тогда для решения задачи 6.2, *доставляемого теоремой* 6.1, *выполнено включение*

$$u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{6.84}$$

Доказательство. Мы отправляемся от u_m — решения (6.56), (6.57), где w_j — базис в $V \cap (H^2(\Omega))^n$ и u_{0m} выбрано таким образом, что

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{в} \quad V \cap (H^2(\Omega))^n. \tag{6.85}$$

Из (6.56) мы выведем, что

$$|u'_m(0)|^2 = (f(0), u'_m(0)) - \nu a(u_{0m}, u'_m(0)) - b(u_{0m}, u_{0m}, u'_m(0)),$$

откуда

$$|u'_m(0)|^2 \leqslant |f(0)|\,|u'_m(0)| + c\,|u'_m(0)|,$$

поскольку

$$|b(u_{0m}, u_{0m}, u'_m(0))| \leqslant c\,\|u_{0m}\|_{(L^4(\Omega))^2} \sum_{i,\ j=1}^{2} \|D_i(u_{0m})_j\|_{L^4(\Omega)}\,|u'_m(0)|$$

и последовательность $D_i(u_{0m})_j$ ограничена в $H_0^1(\Omega)$, а следовательно, в $L^4(\Omega)$.

Продифференцируем (6.56) по t:

$$(u''_m(t), w_j) + \nu a(u'_m(t), w_j) + b(u_m(t), u'_m(t), w_j) + \\ + b(u'_m(t), u_m(t), w_j) = (f'(t), w_j). \tag{6.86}$$

Умножим (6.86) на $g'_{jm}(t)$ и просуммируем по j. Заметив, что

$$b(u_m(t), u'_m(t), u'_m(t)) = 0,$$

получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \nu\|u'_m(t)\|^2 = \\ = (f'(t), u'_m(t)) - b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t)). \tag{6.87}$$

Имеем

$$|b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t))| = |-b(u'_m(t), u'_m(t), u_m(t))| \leqslant \\ \leqslant c_1\|u'_m(t)\|_{(L^4(\Omega))^2}\|u'_m(t)\|\,\|u_m(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \| u'_m(t) \|^{3/2} | u'_m(t) |^{1/2} \| u_m(t) \|_{(L^4(\Omega))^2} \leqslant$$

(согласно лемме 6.2)

$$\leqslant \frac{\nu}{2} \| u'_m(t) \|^2 + c_3 | u'_m(t) |^2 \| u_m(t) \|^4_{(L^4(\Omega))^2}.$$

Положим

$$\varphi_m(t) = \| u_m(t) \|^4_{(L^4(\Omega))^2}. \tag{6.88}$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} | u'_m(t) |^2 + \nu \| u'_m(t) \|^2 \leqslant \| f'(t) \|_{V'} \| u'_m(t) \| + c_3 \varphi_m(t) | u'_m(t) |^2. \tag{6.89}$$

Из (6.89), в частности, следует, что

$$| u'_m(t) |^2 \leqslant | u'_m(0) |^2 + c_4 \int_0^t \| f'(\sigma) \|^2_{V'} \, d\sigma + c_3 \int_0^t \varphi_m(\sigma) | u'_m(\sigma) |^2 \, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_5 + c_3 \int_0^t \varphi_m(\sigma) | u'_m(\sigma) |^2 \, d\sigma.$$

Следовательно,

$$| u'_m(t) |^2 \leqslant c_5 \exp \left(c_3 \int_0^t \varphi_m(\sigma) \, d\sigma \right), \tag{6.90}$$

и так как u_m ограничены в $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, то они (лемма 6.2) ограничены и в $L^4(0, T; (L^4(\Omega))^2)$, так что

$$\int_0^t \varphi_m(\sigma) \, d\sigma \leqslant \text{const},$$

и неравенство (6.90) показывает, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; H). \tag{6.91}$$

Тогда из (6.89) следует, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^2(0, T; V). \tag{6.92}$$

Как мы знаем, $u_m \to u$ (например, слабо в $L^2(0, T; V)$), и (6.84) следует из (6.91) и (6.92) ●

Теперь мы приведем один результат, дополняющий теорему 6.6 и дающий добавочную информацию о гладкости по x.

Теорема 6.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.6 *и, кроме того,* $f \in L^2(0, T; H)$. *Тогда* $u \in L^2(0, T; (H^2(\Omega))^2)$.

Если $f \in L^\infty(0, T; H)$, *то* $u \in L^\infty(0, T; (H^2(\Omega))^2)$.

Доказательство. В самом деле,

$$\nu a(u(t), v) = (f(t), v) - (u'(t), v) - b(u(t), u(t), v)$$

и

$$|b(u(t), u(t), v)| \leqslant c\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2}\left(\sum_{i,\, j=1}^{n}\|D_i u_j(t)\|_{L^4(\Omega)}\right)|v|,$$

а поскольку $u \in L^\infty(0, T; V)$, то

$$b(u(t), u(t), v) = (g(t), v), \quad g(t) \in L^\infty(0, T; H).$$

Так как $u' \in L^\infty(0, T; H)$, то имеем:

$a(u(t), v) = (F(t), v)$, $F \in L^2(0, T; H)$ (соответственно $L^\infty(0, T, H)$), коль скоро $f \in L^2(0, T; H)$ (соответственно $f \in L^\infty(0, T; H)$).

Теорема 6.7 получается отсюда применением теоремы Катабриги [1]●

6.7. Теорема о существовании глобального сильного решения

До сих пор, за исключением теоремы о гладкости предыдущего пункта, мы интересовались «слабыми» решениями, отвечающими относительно общим данным f, u_0.

Теперь мы покажем, что если размерность $n \leqslant 4$, то можно получить для *очень специальных данных* теорему существования *глобального* (по t) «*сильного*» решения. Справедлива

Теорема 6.8. *Предположим, что* $n \leqslant 4$, $f = 0$ *и*

$$u_0 \in V \cap (H^2(\Omega))^n = W, \tag{6.93}$$

причем

$$\|u_0\|_W \text{ достаточно мала}^{1)}. \tag{6.94}$$

Тогда существует единственное[2]) *решение и задачи* 6.2, *причем*

$$u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{6.95}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6.6, мы исходим из приближенного решения u_m. Тогда имеем (поскольку $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ при $n \leqslant 4$):

$$|u'_m(0)| \leqslant c_1\|u_0\|_W^2. \tag{6.96}$$

Отметим также, что

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_2\|u\|_{(L^4(\Omega))^n}\|w\|_{(L^4(\Omega))^n}\|v\| \leqslant c_3\|u\|\|w\|\|v\|. \tag{6.97}$$

---

[1]) Это условие будет уточнено в процессе доказательства.

[2]) Единственность следует из более общей теоремы, которая будет доказана в п. 6.8.

Мы докажем наше предложение при условии (уточняющем (6.94))

$$\nu - \sqrt{c_1}\, c_3 \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{|u_0|}\, \|u_0\|_W > 0. \qquad (6.98)$$

Из (6.87) следует (при $f = 0$), что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \nu \|u'_m(t)\|^2 = -b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t)),$$

а так как ввиду (6.97)

$$|b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t))| \leqslant c_3 \|u'_m(t)\|^2 \|u_m(t)\|,$$

то

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + (\nu - c_3 \|u_m(t)\|) \|u'_m(t)\|^2 \leqslant 0. \qquad (6.99)$$

В силу (6.59) $|u_m(t)| \leqslant |u_{0m}| \leqslant |u_0|$ (мы имеем право выбрать u_{0m} так, что $|u_{0m}| \leqslant |u_0|$), и, поскольку

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 = 0,$$

имеем:

$$\nu \|u_m(t)\|^2 \leqslant |u_m(t)|\, |u'_m(t)| \leqslant |u_0|\, |u'_m(t)|. \qquad (6.100)$$

Следовательно,

$$\nu - c_3 \|u_m(t)\| \geqslant \nu - c_3 \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{|u_0|}\, \sqrt{|u'_m(t)|}. \qquad (6.101)$$

Из (6.101) и (6.96) следует, что

$$\nu - c_3 \|u_m(0)\| \geqslant \rho > 0$$

$\left(\text{если } \nu - \sqrt{c_1} c_3 \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{|u_0|}\, \|u_0\|_W = \rho\right).$

Предположим, что существуют такие t, для которых $\nu - c_3 \|u_m(t)\| = 0$, и пусть t_0 — наименьшее из таких t. Тогда

$$\nu - c_3 \|u_m(t)\| > 0 \text{ в интервале } [0, t_0[,$$

и из (6.99) следует, что

$$\frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 \leqslant 0, \text{ откуда } |u'_m(t)| \leqslant |u'_m(0)|,$$

а из (6.101) следует, что

$$\nu - c_3 \|u_m(t)\| \geqslant \nu - c_3 \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{|u_0|}\, \sqrt{|u'_m(0)|} \geqslant \rho, \qquad t \in [0, t_0[.$$

Таким образом, равенство $\nu - c_3 \|u_m(t_0)\| = 0$ невозможно и

$$\nu - c_3 \|u_m(t)\| \geqslant \rho.$$

Тогда из (6.99) вытекает, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \rho \|u'_m(t)\|^2 \leqslant 0, \qquad (6.102)$$

и, таким образом,

$$u'_m \text{ ограничены в } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \qquad (6.103)$$

откуда и следует теорема ●

6.8. Теорема единственности

Общие указания. Как мы уже отметили, вопрос о единственности в теореме 6.1 остается открытым, когда $n \geqslant 3$.

Возникает естественный вопрос: нам известно, что существует решение в $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$; какие *дополнительные* свойства решения гарантируют его единственность?

В этом направлении доказана

Теорема 6.9. *Предположим, что* $n \geqslant 3$. *Пусть* u — *решение задачи* 6.2, *удовлетворяющее, кроме того, условиям*

$$u \in L^s(0, T; (L^r(\Omega))^n), \qquad (6.104)$$

где

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} \leqslant 1, \quad r > n. \qquad (6.105)$$

Тогда это решение, коль скоро оно существует[1], *единственно в классе*

$$L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^s(0, T; (L^r(\Omega))^n).$$

Доказательство. 1) *Предварительные оценки.* Займемся наиболее интересным случаем из (6.105), в котором $\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1$. Имеем

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_1 \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|v\| \|w\|_{(L^\rho(\Omega))^n}, \quad \text{если} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}. \qquad (6.106)$$

Однако для скалярной функции u

$$\|u\|_{L^\rho(\Omega)} \leqslant \|u\|^{2/s}_{L^2(\Omega)} \|u\|^{n/r}_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)},$$

поскольку $\frac{1}{\rho} = \frac{2/s}{2} + \frac{n/r}{2n/(n-2)}$, а так как $H_0^1(0) \subset L^{2n/(n-2)}(\Omega)$, то

$$\|u\|_{L^\rho(\Omega)} \leqslant c^2 \|u\|^{2/s}_{L^2(\Omega)} \|u\|^{n/r}_{H_0^1(\Omega)},$$

а тогда из (6.106) следует, что

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_3 \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|v\| |w|^{2/s} \|w\|^{n/r} \bullet \qquad (6.107)$$

---

[1] Вопрос о существовании на сегодня является открытым.

Применение:

если u — решение задачи 6.2, *удовлетворяющее* (6.104), *то* $u' \in L^2(0, T; V')$[1]. (6.108)

В самом деле, в силу (6.107)

$$|b(u, u, v)| = |-b(u, v, u)| \leqslant c_3 \|v\| \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} |u|^{2/s} \|u\|^{n/r} \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \|v\| \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|u\|^{n/r}.$$

Так как функция $t \to \|u(t)\|_{(L^r(\Omega))^n}$ принадлежит $L^s(0, T)$, а $t \to \|u(t)\|^{n/r}$ принадлежит $L^{2r/n}(0, T)$, то $t \to \|u(t)\|_{(L^r(\Omega))^n} \|u(t)\|^{n/r}$ принадлежит $L^2(0, T)$ и, следовательно,

$$b(u, u, v) = (g, v), \qquad g \in L^2(0, T; V'),$$

откуда следует (6.108)●

2) *Доказательство единственности.* Пусть u и u^* — два решения задачи 6.2, удовлетворяющие (6.104). Пусть $w = u - u^*$. Тогда имеем:

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0;$$

полагая $v = w$ (что законно в силу (6.108)), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu \|w(t)\|^2 = -b(w(t), u(t), w(t)) =$$
$$= b(w(t), w(t), u(t)). \qquad (6.109)$$

Используя один из вариантов неравенства (6.107), найдем:

$$|b(w(t), w(t), u(t))| \leqslant c_3 \|u(t)\|_{(L^r(\Omega))^n} |w(t)|^{2/s} \|w(t)\|^{1+n/r}.$$

Полагая

$$M(t) = \|u(t)\|^s_{(L^r(\Omega))^n}, \qquad (6.110)$$

получим:

$$|b(w(t), w(t), u(t))| \leqslant c_3 M(t)^{1/s} |w(t)|^{2/s} \|w(t)\|^{1+n/r} \leqslant$$
$$\leqslant \nu \|w(t)\|^2 + c_4 M(t) |w(t)|^2$$

(здесь мы воспользовались (6.105)), и из (6.109) (благодаря (6.104)), вытекает, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 \leqslant c_4 M(t) |w(t)|^2, \qquad M \in L^1(0, T) \qquad (6.111)$$

Следовательно, $w = 0$●

---

[1] Следовательно, u: $[0, T] \to H$ непрерывно.

Замечание 6.8. Теорема 6.9 показывает, что решение из теоремы 6.8 единственно при $n \leqslant 4$; в самом деле, если $n < 4$, то имеем $u \in L^\infty(0, T; V)$, следовательно, $u \in L^\infty(0, T; (L^q(\Omega))^n)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, следовательно, $u \in L^s(0, T; (L^q(\Omega))^n)$, $\frac{2}{s} + \frac{n}{q} = 1$, $q > n$, поскольку $n < 4$.

Если $n = 4$, то будем рассуждать следующим образом (Л. Тартар): из (6.109) выведем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu\|w(t)\|^2 \leqslant |b(w(t), w(t), u(t))| \leqslant c_3\|u(t)\|\|w(t)\|^2,$$

(в силу (6.97));

из доказательства теоремы 6.8 следует, что $\nu - c_3\|u(t)\| \geqslant 0$, а тогда неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + (\nu - c_3\|u(t)\|)\|w(t)\|^2 \leqslant 0$$

показывает, что

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leqslant 0, \quad \text{откуда } w = 0 \bullet$$

6.9. Зависимость от вязкости

Обратимся к двумерному случаю. Чтобы несколько упростить запись, будем обозначать переменные через $\{x, y\}$ вместо $\{x_1, x_2\}$.

Считая область Ω односвязной, введем функцию тока, определенную с точностью до аддитивной постоянной уравнениями

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -u_2, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_1. \tag{6.112}$$

Тогда ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi) + \nu\Delta^2\psi + R(\psi) = g, \tag{6.113}$$

где

$$R(\psi) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\Delta\psi\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\Delta\psi\right), \tag{6.114}$$

$$g = \frac{\partial}{\partial x}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1. \tag{6.115}$$

Если $u = 0$ на Γ, то функции $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial y$ обращаются в нуль на Γ, а следовательно, $\partial\psi/\partial n = 0$ и $\psi = \text{const}$; мы фиксируем выбор ψ, полагая

$$\psi = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Тогда граничные условия примут вид:

$$\psi=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \text{ на } \Gamma. \tag{6.116}$$

Из теоремы 6.7 мы можем вывести, что если

$$g\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),\quad g'\in L^2(0,\ T;\ H^{-2}(\Omega)) \text{ и } \psi(0)=\psi_0,$$

где начальная функция ψ_0 соответствует (6.83), то существует, и притом единственное, решение ψ задачи (6.113) — (6.116), удовлетворяющее условиям $\psi(0)=\psi_0$, и

$$\psi\in L^2(0,\ T;\ H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \tag{6.117}$$

$$\psi'\in L^2(0,\ T;\ H^2(\Omega)). \tag{6.118}$$

Замечание 6.9. Естественно, можно так «трансформнровать» теорему 6.2, чтобы получить «слабое» решение ψ ●

Для каждого $\nu>0$ решение задачи 6.2 ($n=2$), очевидно, зависит от ν; запишем

$$u=u^\nu, \qquad \psi=\psi^\nu. \tag{6.119}$$

Проблема поведения ψ^ν *при* $\nu\to 0$ *является абсолютно открытой.*

В этом пункте мы изучим поведение при $\nu\to 0$ решения одной задачи, аналогичной (6.113) — (6.116), но с *другими граничными условиями.* Точнее, нами будет рассмотрена

Задача 6.3. Найти функцию $\psi=\psi^\nu$, являющуюся решением уравнения (6.113) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\psi=0, \quad \Delta\psi=0 \text{ на } \Gamma, \tag{6.120}$$

$$\psi(0)=\psi_0 ● \tag{6.121}$$

Ввиду замены (6.116) на (6.120) задача 6.3 *не эквивалентна* задаче 6.2, так что надо заново доказывать существование и единственность решения ψ задачи 6.3. Мы коротко наметим доказательство, сосредоточив внимание в основном на «дополнительном» (по сравнению с (6.117) и (6.118)) результате, доставляемом включением (6.126) (см. ниже).

Теорема 6.10. *Пусть заданы* g *и* ψ_0, *причем*

$$g\in L^\infty(Q),\quad Q=\Omega\times\,]0,\ T[, \tag{6.122}$$

$$\psi_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \qquad \Delta\psi_0\in L^\infty(\Omega). \tag{6.123}$$

Для любого фиксированного $\nu>0$ *существует, и притом одна, функция* $\psi=\psi^\nu$, *удовлетворяющая условиям*

$$\psi\in L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{6.124}$$

$$\Delta\psi \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \qquad \frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi) \in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)), \tag{6.125}$$

$$\Delta\psi \in L^\infty(Q), \tag{6.126}$$

а также (6.113), (6.120), (6.121).

Более того, при $\nu \to 0$

$$\|\psi^\nu\|_{L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi^\nu\right\|_{L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))} + \\ + \sqrt{\nu}\,\|\Delta\psi^\nu\|_{L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))} + \|\Delta\psi^\nu\|_{L^\infty(Q)} \leqslant c. \tag{6.127}$$

Доказательство. 1) *Существование функции* $\psi = \psi^\nu$, *удовлетворяющей* (6.124), (6.125). Эта часть уже является стандартной; мы отправляемся от «специального базиса» из собственных функций:

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j, \quad w_j \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{следовательно, } \Delta w_j = 0 \text{ на } \Gamma)$$

и определяем «приближенное» решеие ψ_m нашей задачи из уравнений

$$\psi_m(t) \in [w_1,\ \ldots,\ w_m],$$
$$\frac{d}{dt}(-\Delta\psi_m,\ w_j) + \nu(\Delta\psi_m,\ \Delta w_j) + \beta(\psi_m,\ \psi_m,\ w_j) = (g(t),\ w_j),$$
$$1 \leqslant j \leqslant m, \tag{6.128}$$

где

$$\beta(u,\ v,\ w) = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta v)\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta v)\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{6.129}$$

и начальных условий

$$\psi_m(0) = \psi_{0m} \in [w_1,\ \ldots,\ w_m], \quad \psi_{0m} \to \psi_0 \quad \text{в} \quad H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{6.130}$$

(*Мы пока не принимаем во внимание условие* $\Delta\psi_0 \in L^\infty(\Omega)$.)

Замечая, что $\beta(\psi_m,\ \psi_m,\ \psi_m) = 0$, мы выводим из (6.128), что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(\psi_m(t),\ \psi_m(t)) + \nu\|\Delta\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = (f(t),\ \psi_m(t)),$$

откуда следует существование ψ_m на интервале $[0,\ T]$ и оценка

$$\|\psi_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \sqrt{\nu}\left(\int\limits_0^T \|\Delta\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right)^{1/2} \leqslant c. \tag{6.131}$$

Заменяя w_j на $-1/\lambda_j\,\Delta w_j$ в (6.128), мы получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu a(\Delta\psi_m(t),\ \Delta\psi_m(t)) + \\ + \beta(\psi_m(t),\ \psi_m(t),\ -\Delta\psi_m(t)) = (g(t),\ -\Delta\psi_m(t)). \tag{6.132}$$

Однако при $w = w_j$ имеем:

$$\beta(w, w, -\Delta w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)^2 - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)^2\right] dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n, y) - \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n, x)\right](\Delta w)^2\, d\Gamma = 0,$$

поскольку тангенциальная производная w на Γ равна нулю. Поэтому из (6.132) легко следует, что

$$\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\nu}\left(\int\limits_0^T \|\Delta\psi_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt\right)^{1/2} \leqslant c. \qquad (6.133)$$

К оценкам (6.131), (6.133) необходимо добавить оценку производной $\partial/\partial t(-\Delta\psi_m)$. Обозначая через c различные константы, получим

$$|\beta(\psi_m(t), \psi_m(t), v)| \leqslant$$

$$\leqslant c\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^4(\Omega)}\left(\left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x}\right\|_{L^4(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial y}\right\|_{L^4(\Omega)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\left(\left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x}\right\|_{L^4(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial y}\right\|_{L^4(\Omega)}\right) \leqslant$$

(согласно лемме (6.2))

$$\leqslant c\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\, k_m(t)\left(\left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x}\right\|_{L^4(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial y}\right\|_{L^4(\Omega)}\right),$$

(в силу (6.133))

где k_m ограничены в $L^4(0, T)$. Однако

$$\left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x}\right\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c\left\|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\beta(\psi_m(t), \psi_m(t), v) = (h_m(t), v), \quad h_m \text{ ограничены} \\ \text{в } L^4(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ и, значит, в } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).\end{gathered} \qquad (6.134)$$

Обозначим через P_m оператор проектирования $L^2(\Omega)$ на $[w_1, \ldots, w_m]$; тогда из (6.128) следует, что

$$\frac{d}{dt}(-\Delta\psi_m) + \nu\Delta^2\psi_m + P_m h_m = P_m g,$$

и благодаря (6.134) мы, в частности, можем заключить, что

$$\frac{d}{dt}(-\Delta\psi_m) \text{ ограничены в } L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega)). \tag{6.135}$$

Используя теорему 5.1 о компактности, мы получим, что из последовательности ψ_m можно выделить такую подпоследовательность ψ_μ, что

$$\begin{aligned}
&\psi_\mu \to \psi \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\\
&\Delta\psi_\mu \to \Delta\psi\text{-слабо в } L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi_m) \to \frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi) \text{ слабо в } L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega)),\\
&\Delta\psi_\mu \to \Delta\psi \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду.}
\end{aligned}$$

Отсюда мы можем вывести существование функции ψ, удовлетворяющей всем условиям теоремы, за исключением (пока) (6.126).

2) *Доказательство* (6.126). Полагая

$$-\Delta\psi = \omega, \tag{6.136}$$

мы видим, что ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} - \nu\,\Delta\omega + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = g \tag{6.137}$$

и условиям

$$\omega(0) = \omega_0 = (-\Delta\psi_0), \tag{6.138}$$

$$\omega \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} \in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega)). \tag{6.139}$$

Мы рассматриваем (6.137), (6.138), (6.139) как *линейное параболическое уравнение* относительно ω с «коэффициентами» $\partial\psi/\partial y$, $\partial\psi/\partial y$, принадлежащими $L^2(0, T;\ H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T;\ H^1(\Omega))$.

Теперь (6.126), а также (ввиду (6.133)) (6.127) будут следовать из неравенства, которое мы собираемся доказать:

$$\|\omega\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T \|g(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\,dt. \tag{6.140}$$

Доказательство неравенства (6.140) проводится в три этапа:

(i) (6.140) доказывается для «гладких» ψ и g (т. е. в предположении, что ω является гладким решением);

(ii) доказывается *единственность* функции ω, удовлетворяющей (6.137), (6.138), (6.139);

(iii) ω приближается гладкими решеииями.

Этап (i). Пусть k — произвольное положительное целое число. Умножим обе части уравнения (6.137) на ω^{2k-1} и проинтегрируем:

$$\frac{1}{2k}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\omega^{2k}\,dx\,dy+$$
$$+\nu\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\omega^{2k-1})+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(\omega^{2k-1})\right]dx\,dy+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}\omega^{2k-1}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\omega^{2k-1}\right]dx\,dy=\int\limits_{\Omega}g\omega^{2k-1}\,dx\,dy. \quad (6.141)$$

Но третий интеграл в (6.141) равен

$$\frac{1}{2k}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega^{2k}}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega^{2k}}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

и, поскольку второй интеграл $\geqslant 0$, мы заключаем, что

$$\frac{1}{2k}\frac{d}{dt}\left(y_k(t)^{2k}\right)\leqslant\|g(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}y_k(t)^{2k-1},\quad y_k(t)=\|\omega(t)\|_{L^{2k}(\Omega)},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}y_k(t)\leqslant\|g(t)\|_{L^{2k}(\Omega)},$$

и, следовательно,

$$y_k(t)\leqslant\|\omega_0\|_{L^{2k}(\Omega)}+\int\limits_0^t\|g(\sigma)\|_{L^{2k}(\Omega)}\,d\sigma;$$

устремляя k к бесконечности, мы получим (6.140)[1].

Этап (ii). Эта часть является стандартной; достаточно проверить, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$$

и что

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y},\ \omega\right)=0.$$

Последнее имеет место, если, например, $\psi\in L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega))$.

Этап (iii). Приблизим ψ «гладкими» функциями ψ_j; точнее, пусть

$$\psi_j\to\psi \text{ сильно в } L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)),$$
$$\psi_j\to\psi \ *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega)).$$

---

[1] Можно также использовать срезки.

Пусть также g_j — последовательность функций, $g_j \to g$ $*$-слабо в $L^\infty(Q)$,

$$\int_0^T \| g_j(t) \|_{L^\infty(\Omega)} dt \leqslant \int_0^T \| g(t) \|_{L^\infty(\Omega)} dt.$$

Пусть, далее, ω_j — решение задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \omega_j}{\partial t} - \nu \Delta \omega_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} = g_j, \\ &\omega_j(0) = \omega_0, \qquad\qquad (6.142) \\ &\omega_j \in L^2(0, T; H_0^1(\omega)). \end{aligned}$$

Тогда, согласно этапу (i), мы имеем

$$\| \omega_j \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| \omega_0 \|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T \| g_j(t) \|_{L^\infty(\Omega)} dt,$$

откуда будет следовать (6.140), если мы покажем, что $\omega_j \to \omega$ $*$-слабо в $L^\infty(Q)$.

Согласно (6.142), ω_j ограничены в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$[1]. Следовательно, мы можем выделить такую подпоследовательность (будем ее также обозначать через ω_j), что $\omega_j \to \omega^*$ слабо в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, а поскольку $\psi_j \to \psi$ *сильно* в $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, то мы можем заключить, что ω^* является решением (6.137), (6.138), (6.139) и, следовательно, согласно этапу (ii), $\omega = \omega^*$, откуда и следует (6.140) ●

3) *Единственность.* Доказательство единственности вполне аналогично доказательству теоремы 6.2. Пусть ψ_1 и ψ_2 — два решения; тогда, полагая $\theta = \psi_1 - \psi_2$, получим

$$a(\theta', v) + \nu(\Delta\theta, \Delta v) + \beta(\psi_1, \psi_1, v) - \beta(\psi_1 - \theta, \psi_1 - \theta, v) = 0. \qquad (6.143)$$

Подставляя в (6.143) $v = \theta$ (что законно), мы заключим, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \theta(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \nu \| \Delta\theta(t) \|^2_{L^2(\Omega)} = -\beta(\psi_1, \theta, \theta). \qquad (6.144)$$

---

[1] Чтобы это проверить, надо скалярно умножить первое уравнение (6.142) на ω_j.

С другой стороны,

$$|\beta(\psi_1, \theta, \theta)| \leqslant c\,\|\Delta\theta(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\psi_1(t)\|_{H^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{\partial\theta}{\partial x} \right\|_{L^4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial\theta}{\partial y} \right\|_{L^4(\Omega)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\Delta\theta(t)\|^{3/2}_{L^2(\Omega)} \|\theta(t)\|^{1/2}_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$

(согласно лемме (6.2))

$$\leqslant \nu\,\|\Delta\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c\,\|\theta(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

и из (6.144) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\,\|\theta(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Отсюда вытекает нужный нам результат ●

Теперь мы в состоянии изучить поведение ψ^ν при $\nu \to 0$. Чтобы упростить запись, введем пространство[1]

$$\mathcal{Y} = \Big\{ \psi \,|\, \psi \in L^\infty(0, T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ \Delta\psi \in L^\infty(Q),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega)) \Big\}. \qquad (6.145)$$

Теорема 6.11. *Пусть выполнены предположения теоремы* 6.10. *Тогда существует, и притом одна, такая функция* ψ, *что*

$$\psi \in \mathcal{Y}, \qquad (6.146)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi) + R(\psi) = g \ \text{(т. е. (6.113) с } \nu = 0), \qquad (6.147)$$

$$\psi(0) = \psi_0. \qquad (6.148)$$

Если ψ^ν — *решение из теоремы* 6.10, *то при* $\nu \to 0$

$$\psi^\nu \to \psi \ \textit{слабо в}\ \mathcal{Y}. \qquad (6.149)$$

Доказательство существования и условия (6.149). Мы исходим из функции ψ^ν, доставляемой теоремой 6.10; для нее известны оценки (6.127). Используя теорему 5.1 о компактности, мы сможем выделить такую подпоследовательность ψ^μ, что

$$\psi^\mu \to \psi \text{ слабо в } \mathcal{Y},$$

$$D\psi^\mu \to D\psi \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду}, \qquad (6.150)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial}{\partial y}.$$

---

[1] Снабженное банаховой нормой графика.

Теперь мы можем перейти к пределу в уравнении

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi^{\mu})' + \mu\,\Delta^2\psi^{\mu} + R(\psi^{\mu}) = g,$$

откуда будет видно, что ψ удовлетворяет (6.147).

Доказательство единственности. 1) *Предварительные оценки.* Так как

$$\Delta\psi \in L^{\infty}(Q) = L^{\infty}(0,\ T;\ L^{\infty}(\Omega)) \subset L^{\infty}(0,\ T;\ L^{p}(\Omega)),$$

p произвольно и конечно, и (согласно Агмону [1], Агмону — Дуглису — Ниренбергу [1]) Δ является изоморфизмом

$$W^{2,\,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^{p}(\Omega),$$

то мы можем заключить, что любое решение ψ нашей задачи обладает следующим свойством:

$$\psi \in L^{\infty}\big(0,\ T;\ W^{2,\,p}(\Omega)\big) \text{ для всех конечных } p. \tag{6.151}$$

Более того, для почти любого фиксированного t

$$\|\psi\|_{W^{2,\,p}(\Omega)} \leqslant cp\left(\|\Delta\psi\|_{L^{p}(\Omega)} + \|\psi\|_{L^{p}(\Omega)}\right), \quad p \to \infty. \tag{6.152}$$

Это неравенство, принадлежащее Юдовичу [1], получается путем

(i) решения задачи Дирихле с помощью ядра Пуассона (что позволяет использовать сингулярные интегралы);

(ii) оценки норм в интерполяционной теореме Марцинкевича (см. Котлар [1], стр. 289).

2) Пусть ψ_1, ψ_2 — два решения рассматриваемой задачи. Полагая $\theta = \psi_1 - \psi_2$, найдем:

$$a(\theta',\ v) + \beta(\theta,\ \psi_1,\ v) + \beta(\psi_1,\ \theta,\ v) - \beta(\theta,\ \theta,\ v) = 0. \tag{6.153}$$

Беря $v = \theta(t)$ и полагая

$$z(t) = \|\theta(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = a(\theta(t),\ \theta(t)), \tag{6.154}$$

мы получим, что

$$\frac{1}{2}\,\frac{dz(t)}{dt} = -\beta(\psi_1(t),\ \theta(t),\ \theta(t)). \tag{6.155}$$

Обозначая $\theta(t)$ просто через θ и т. д., имеем:

$$\beta(\psi_1,\ \theta,\ \theta) = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy\, -$$

$$-\int\limits_{\Omega} \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy.$$

Интегрируя по частям, мы получим, что

$$\beta(\psi_1,\ \theta,\ \theta) = -\int\limits_\Omega \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \\ + \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dx\,dy + J, \qquad (6.156)$$

где

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos n_x + \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos n_y\right) d\Gamma - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos n_y + \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos n_x\right) d\Gamma.$$

Так как $\operatorname{grad}\psi_1$ и $\operatorname{grad}\theta$ ортогональны к Γ, то

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \text{ на } \Gamma;$$

кроме того, обращается в нуль тангенциальная производная

$$-\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos n_y + \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos n_x = 0 \text{ на } \Gamma,$$

откуда мы заключаем, что $J = 0$.

Следовательно, (6.156) примет вид

$$\beta(\psi_1,\ \theta,\ \theta) = -\int\limits_\Omega \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \\ + \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dx\,dy,$$

откуда, применяя неравенства Гёльдера, получим

$$|\beta(\psi_1,\ \theta,\ \theta)| \leqslant c\|\psi_1\|_{W^{2,\,1/\varepsilon}(\Omega)}\left(\int\limits_\Omega |\operatorname{grad}\theta|^{2/(1-\varepsilon)}\,dx\right)^{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \qquad (6.157)$$

Однако, согласно (6.151),

$$\psi_i \in L^\infty(0,\ T;\ W^{2,\,p}(\Omega)) \text{ для всех конечных } p,\ i = 1,\ 2.$$

Следовательно, $|\operatorname{grad}\theta| \in L^\infty(Q)$ и существует такая константа M, что

$$|\operatorname{grad}\theta(x,\ t)| \leqslant M; \qquad (6.158)$$

из (6.157) мы получим, используя (6.152),

$$|\beta(\psi_1,\ \theta,\ \theta)| \leqslant c\varepsilon^{-1}\left(M^{2\varepsilon/(1-\varepsilon)}\right)^{1-\varepsilon}\left(\int\limits_\Omega |\operatorname{grad}\theta|^2\,dx\right)^{1-\varepsilon}. \qquad (6.159)$$

Подстановка этой оценки в (6.155) приводит к неравенству

$$\frac{dz(t)}{dt} \leqslant c\varepsilon^{-1} M^{2\varepsilon} z(t)^{1-\varepsilon},$$

откуда

$$z(t) \leqslant M^2 (ct)^{1/\varepsilon}. \tag{6.160}$$

Пусть теперь t_0 фиксировано и $ct_0 < 1$. Из (6.160) мы выведем, устремляя $\varepsilon \to 0$, что

$$z(t) = 0 \quad \text{в} \quad [0, t_0];$$

аналогичное утверждение справедливо в интервалах $[t_0, 2t_0]$ и т. д. Отсюда следует наше утверждение ●

Замечание 6.10. Что касается *метода доказательства существования* ψ *в теореме* 6.11, то отметим следующие обстоятельства: (i) уравнение (6.113) с $\nu > 0$ *вводится* при помощи добавления вязкого члена $\nu\Delta^2\psi$; (ii) решается уравнение с вязкостью; (iii) ν устремляется к нулю после того, как получены оценки, *не зависящие от* ν.

Этот метод называется *методом вязкости* (см. библиографические указания в комментариях) ●

Замечание 6.11. Оставаясь в круге идей предыдущего замечания, можно также доказать теорему 6.1; к уравнениям Навье — Стокса дописывается член *искусственной вязкости* $(-1)^m \varepsilon\Delta^m u$, и, следовательно, решается система

$$\begin{gathered} u_\varepsilon' + (-1)^m \varepsilon\Delta^m u_\varepsilon - \nu\,\Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} u_{i\varepsilon} D_i u_\varepsilon = f - \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \end{gathered} \tag{6.161}$$

с граничными условиями

$$u_\varepsilon, \ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, \ \ldots, \ \frac{\partial^{m-1} u_\varepsilon}{\partial n^{m-1}} = 0 \quad \text{на } \Sigma \tag{6.162}$$

и начальным условием $u_\varepsilon(0) = u_0$.

Доказывается *существование* решения u_ε предыдущей задачи:

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; V \cap (H_0^m(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{6.163}$$

а также *единственность, когда*

$$m \geqslant \frac{n+2}{4}\,^{1)}. \tag{6.164}$$

---

[1] Следовательно, когда n растет, «повышая искусственную вязкость», мы получим единственность; если $n = 2$, то ввиду (6.164) $m \geqslant 1$, следовательно, мы можем взять $m = 1$ и вязкость (реальная) — $\nu\,\Delta u$ окажется *достаточной*; в этом и состоит теорема 6.2.

Что касается единственности, то в тех же обозначениях, что и в теореме 6.2, мы получим (ε фиксировано; мы больше не будем указывать зависимость от ε):

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2+\|w(t)\|_m^2\leqslant c\,|b(w,\ u,\ w)|, \qquad (6.165)$$

где

$$\|\varphi\|_m=\text{норма } \varphi \text{ в } \left(H_0^m(\Omega)\right)^n.$$

Далее,

$$|b(w,\ u,\ w)|\leqslant c_*\|w\|^2_{(L^4(\Omega))^n}\|u\|_1. \qquad (6.166)$$

Имеем (мы здесь пользуемся интерполяцией, как в книге Лионса — Мадженеса [1], гл. 1; можно также обратиться к Батцеру — Беренсу [1]):

$$L^2(0,\ T;\ H^m(\Omega))\cap L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))\subset L^{2/(1-\theta_1)}(0,\ T;\ H^{(1-\theta_1)m}(\Omega)) \qquad (6.167)$$

и (Петре [1])

$$H^{(1-\theta)m}(\Omega)\subset L^{q_\theta}(\Omega), \qquad \frac{1}{q_\theta}=\frac{1}{2}-\frac{(1-\theta)\,m}{n}(>0).$$

Если мы выберем θ таким образом, чтобы $(1-\theta)\,m/n\geqslant {}^1/_4$, то $q_\theta\geqslant 4$ и из (6.166) следует, что

$$|b(w,\ u,\ w)|\leqslant c_1\|w\|_m^{2(1-\theta)}|w|^{2\theta}\|u\|_1\leqslant\frac{1}{c}\|w\|_m^2+c_2|w|^2\|u\|_1^{1/\theta}.$$

Следовательно, (6.165) приводит к неравенству

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2\leqslant c_3|w(t)|^2\|u(t)\|_1^{1/\theta}. \qquad (6.168)$$

Взяв в (6.167) такое θ_1, что $(1-\theta_1)\,m=1$, мы получим:

$$u\in L^{2m}(0,\ T;\ H^1(\Omega)). \qquad (6.169)$$

Это включение вместе с (6.168) приводит к требуемому результату, если $1/\theta\leqslant 2m$; последнее согласуется с условием $(1-\theta)\,m/n\geqslant {}^1/_4$, коль скоро выполнено (6.164) ●

Далее доказывается, что

$$u_\varepsilon\to u \text{ слабо в } L^2(0,\ T;\ V) \text{ и } *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H) \text{ при } \varepsilon\to 0. \qquad (6.170)$$

7. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА (СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ)

7.1. Однородная задача

Стационарная задача, отвечающая эволюционной задаче, изученной в предыдущем параграфе, состоит в том, что ищутся $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и p, удовлетворяющие уравнениям

$$-\nu\,\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p \text{ в } \Omega \tag{7.1}$$

и условиям

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{7.2}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{7.3}$$

В обозначениях § 6 можно сформулировать (в «слабой» форме) предыдущую задачу в следующем виде:

Задача 7.1. Для заданного f из V' нужно найти решение $u \in V$ (см. (6.10), (6.11)), такое, что

$$\nu a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n\text{[1]}, \tag{7.4}$$

где обозначения объясняются в (6.14), (6.15); эта задача имеет смысл в силу леммы 6.1 ●

Будет доказана

Теорема 7.1. *Для любого заданного f из V' существует решение u задачи* (7.4), *принадлежащее V.*

Доказательство. 1° Вводится пространство

$$W = \left\{ v \,\middle|\, v \in V, \ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^{n/2}(\Omega) \right\} \tag{7.5}$$

и снабжается нормой

$$\|v\|_V + \sum_{i,\,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^{n/2}(\Omega)}.$$

Заметим, что

(i) $W = V$ при $n \leqslant 4$;

(ii) $v \in W \Rightarrow v \in (L^n(\Omega))^n$ в силу теоремы Соболева.

Наконец, выбирается «базис» $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ в W, и рассматривается следующая *приближенная задача*: ищется $u_m \in [w_1, \ldots, w_m]$, удовлетворяющая уравнениям

$$\nu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{7.6}$$

---

[1] То есть $\forall v \in V$ при $n \leqslant 4$.

Заметим, что

$$\nu a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) = \nu a(u_m, u_m) = \nu \| u_m \|^2, \tag{7.7}$$

так что *можно применить лемму* 4.3, как в доказательстве теоремы 4.3. Тогда существует решение u_m уравнений (7.6), и благодаря (7.7) мы можем заключить, что

$$\nu \| u_m \|^2 \leqslant \| f \|_{V'} \| u_m \|.$$

Следовательно,

$$\| u_m \| \leqslant \frac{1}{\nu} \| f \|_{V'}. \tag{7.8}$$

2° Мы можем теперь выбрать такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } V, \tag{7.9}$$

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } H \text{ и почти всюду.} \tag{7.10}$$

Кроме того, $u_{mi}u_{mj}$ ограничены в $L^{q/2}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$, причем q — произвольное конечное число при $n = 2$ и, следовательно, можно предположить, что

$$u_{\mu i}u_{\mu j} \to \chi_{ij} \text{ слабо в } L^{q/2}(\Omega) \quad \forall i, j. \tag{7.11}$$

Используя лемму 1.3, мы сможем заключить, что

$$\chi_{ij} = u_i u_j. \tag{7.12}$$

Зафиксируем теперь j и покажем, что при $\mu > j$

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \to b(u, u, w_j). \tag{7.13}$$

В самом деле,

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) = -b(u_\mu, w_j, u_\mu) = -\sum_{i, k=1}^{n} \int_\Omega u_{\mu i} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} u_{\mu k}\, dx,$$

$u_{\mu i}u_{\mu k} \to u_i u_j$ слабо в $L^{q/2}(\Omega)$ в силу (7.11), (7.12) и $\frac{\partial w_j}{\partial x_k} \in L^{n/2}(\Omega)$, откуда вытекает наш результат, так как $\frac{1}{(q/2)} + \frac{1}{(n/2)} = 1$.

Следовательно, справедливо (7.13) и, таким образом,

$$\nu a(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j)$$

для всех j; но тогда, переходя к пределу, мы установим (7.4) для всех $v \in W$, а затем для всех $v \in V \cap (L^n(\Omega))$ ●

Замечание 7.1. *Случай «неограниченной области Ω».*

Задача для неограниченной области, аналогичная 7.1, заставляет провести некоторые изменения при выборе пространств[1]. Рассмотрим

$$\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) = \text{пополнение } \mathscr{D}(\Omega) \text{ по норме } \left(\int_\Omega |\operatorname{grad}\varphi|^2\,dx\right)^{1/2}; \tag{7.14}$$

$\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ можно отождествить с подпространством в $\mathscr{D}'(\Omega)$ при $n \geqslant 3$, а при $n = 2$ это можно сделать, когда емкость $\complement\Omega$ строго положительна (см. Дени — Лионс [1]; пространства $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$ изучены в работе Хёрмандера — Лионса [1]).

Пусть для простоты $n \geqslant 3$. Тогда

$$\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) = \left\{ v \,\middle|\, v \in L^q(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right\}. \tag{7.15}$$

Далее, положим

$$\hat{V} = \{v \mid v \in (\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega))^n,\ \operatorname{div} v = 0\}; \tag{7.16}$$

$\hat{V}$ совпадает (см. замечание 6.4, которое нетрудно приспособить к нашему случаю) с замыканием $\mathscr{V}$ в пространстве таких $v \in (L^q(\Omega))^n$, что

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \in (L^2(\Omega))^n.$$

Имеет место

Теорема 7.2. *Для правой части $f \in (\hat{V})'$ существует такое решение $u \in \hat{V}$, что*

$$\nu a(u, v) + b(u, u; v) = (f, v) \quad \forall v \in \hat{V} \cap (L^n(\Omega))^n. \tag{7.4'}$$

Доказательство. Мы будем доказывать теорему «стандартным» методом; рассмотрим

$$\Omega_R = \Omega \cap \{x \mid |x| < R\}.$$

Мы решим (7.4) в Ω_R; таким образом (в очевидных обозначениях), существует такое $u_R \in V(\Omega_R)$, что

$$\nu a_{\Omega_R}(u_R, v) + b_{\Omega_R}(u_R, u_R, v) = (f, v)_{\Omega_R} \quad \forall v \in V(\Omega_R) \cap (L^n(\Omega_R))^n. \tag{7.17}$$

Далее, можно предполагать, что

$$\| u_R \|_{V(\Omega_R)} \leqslant \text{const}. \tag{7.18}$$

---

[1] Эволюционный случай в этом отношении проще, а результаты § 6 на случай «неограниченной области Ω» распространяются без заметных изменений.

Обозначим через $\tilde{u}_R$ вектор-функцию u_R в Ω, продолженную нулем вне Ω_R; в силу (7.18) $\tilde{u}_R$ принадлежит ограниченному множеству в $\hat{V}$.

На этот раз вложение $\hat{V}$ в H не компактно, но мы можем выделить такую подпоследовательность, что

$$(\tilde{u}_R)_l \to u_l \text{ сильно в } L^2_{\text{loc}},$$

т. е. $(\tilde{u}_R)_l \to u_l$ сильно в $L_2(\theta)$ для любой ограниченной подобласти $\theta \subset \Omega$.

Теперь можно перейти к пределу; сначала берется $v \in \mathscr{V}$ и доказывается (7.4′) $\forall v \in \mathscr{V}$, а далее по непрерывности (7.4′) распространяется на все $v \in \hat{V} \cap (L^n(\Omega))^n$ ●

7.2. Неоднородная задача

Возьмем вектор ψ, обладающий следующими свойствами ($\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$):

$$\psi_i \in H^2(\Omega), \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_i \in L^n(\Omega), \qquad \psi_i \in L^\infty(\Omega). \tag{7.19}$$

(Заметим, что при $n \leqslant 3$ из первого условия (7.19) следуют два других.) Далее рассмотрим

$$F = \operatorname{rot}\psi^{1)}. \tag{7.20}$$

Из (7.19) следует, что

$$F \in (L^n(\Omega))^n \cap (H^1(\Omega))^n. \tag{7.21}$$

Ищется такой вектор $U = \{U_1, \ldots, U_n\}$, что

$$-\nu\Delta U + \sum_{i=1}^{n} U_i D_i U = f - \operatorname{grad} p \text{ в } \Omega, \tag{7.22}$$

$$\operatorname{div} U = 0, \tag{7.23}$$

$$U - F \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \text{ ●} \tag{7.24}$$

Замечание 7.2. Условие (7.24) означает, что

$$U_i = F_i \text{ на } \Gamma, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7.24′}$$

Такие граничные условия называются *неоднородными* ●
Будет доказана

Теорема 7.3. *Пусть заданы векторы* $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $f_i \in H^{-1}(\Omega)$ $\forall i$, *и* F *вида* (7.20), *где* ψ *удовлетворяет* (7.19).

---

[1] Здесь rot на самом деле является такой однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что div (rot ψ)=0.

Тогда существуют вектор $U \in (H^1(\Omega))^n$ *и распределение* $p \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *удовлетворяющие* (7.22)—(7.24).

Доказательство. 1° Пусть G — некоторый вектор со следующими свойствами:

$$\begin{gathered} G \in (H^1(\Omega))^n \cap (L^n(\Omega))^n, \quad \operatorname{div} G = 0, \\ G = F \text{ на } \Gamma. \end{gathered} \tag{7.25}$$

Положим

$$u = U - G. \tag{7.26}$$

Замечание 7.3. A priori можно взять $G = F$; далее мы увидим, что на самом деле *самое важное — это не брать* $G = F$ (в отличие от линейного случая); вся трудность задачи как раз и состоит в *выборе* G ●

Итак, $U = u + G$, и, подставляя в (7.22), найдем:

$$-\nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i G + \sum_{i=1}^{n} G_i D_i u = \tilde{f} - \operatorname{grad} p, \tag{7.27}$$

где

$$\tilde{f} = f + \nu \Delta G - \sum_{i=1}^{n} G_i D_i G; \tag{7.28}$$

отметим, что

$$\tilde{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n. \tag{7.29}$$

Кроме того,

$$\operatorname{div} u = 0,$$

и (7.24) эквивалентно включению $u \in V$.

Следовательно, задача свелась к отысканию такого $u \in V$, что

$$\nu a(u, v) + b(u, u, v) + b(u, G, v) + b(G, u, v) = \\ = (\tilde{f}, v) \quad \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n. \tag{7.30}$$

2° Из доказательства теоремы 7.1 видно, что решение u задачи (7.30) будет существовать, если нам удастся выбрать G таким образом, чтобы

$$\nu a(v, v) + b(v, v, v) + b(v, G, v) + b(G, v, v) = X \geqslant \alpha \| v \|^2, \quad \alpha > 0 \\ \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n.$$

Итак,

$$X = \nu a(v, v) + b(v, G, v) = \nu \| v \|^2 + b(v, G, v),$$

и теорема вытекает из следующей леммы:

Лемма 7.1. *Для любого* $\beta > 0$ *можно выбрать вектор* G, *удовлетворяющий* (7.25), *таким образом, чтобы*

$$| b(v, G, v) | \leqslant \beta \| v \|^2. \tag{7.31}$$

3° Прежде чем доказывать лемму 7.1, установим две другие леммы.

Лемма 7.2. *Положим*

$$\rho(x) = \textit{расстояние от } x \textit{ до } \Gamma.$$

Тогда для любого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$ *существует такая функция* $\theta_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$, *что*

$$\theta_\varepsilon = 1 \textit{ в окрестности } \Gamma \textit{ (зависящей от } \varepsilon), \tag{7.32}$$

$$\theta_\varepsilon(x) = 0 \textit{ при } \rho(x) \geqslant \delta(\varepsilon),\ \delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon), \tag{7.33}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\theta_\varepsilon(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\rho(x)} \quad \textit{при} \quad \rho(x) \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \forall k. \tag{7.34}$$

Доказательство (Хопф [2]). Прежде всего мы определим функцию $\lambda \to \xi_\varepsilon(\lambda)$ при $\lambda \geqslant 0$:

$$\xi_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \lambda < \delta(\varepsilon)^2, \\ \varepsilon \log\left(\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\lambda}\right) & \text{при} \quad \delta(\varepsilon)^2 < \lambda < \delta(\varepsilon), \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \delta(\varepsilon), \end{cases} \tag{7.35}$$

а затем определим χ_ε соотношением

$$\chi_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon(\rho(x)). \tag{7.36}$$

Поскольку граница Γ регулярна, функция χ_ε удовлетворяет (7.32), (7.33), (7.34), и θ_ε получается путем сглаживания χ_ε ●

Лемма 7.3. *Существует такая константа* c_1, *что*

$$\left\|\frac{1}{\rho} v\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.37}$$

Доказательство. Переходя с помощью разбиения единицы к локальным картам, мы сведем лемму к доказательству неравенства

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\varphi(x)\right|^2 dx \leqslant 2\int_0^\infty |\varphi'(x)|^2 dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(]0, \infty[), \tag{7.38}$$

которое тривиально следует из неравенства Харди, поскольку

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi'(y)\,dy \bullet$$

4° Доказательство леммы 7.1. Рассмотрим (в обозначениях леммы 7.2)

$$G = \operatorname{rot}(\theta_\varepsilon\psi); \tag{7.39}$$

этот вектор удовлетворяет (7.25), и мы покажем, что ε можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось (7.31).

Из свойств θ_ε следует, что

$$|G_j(x)| \leqslant c_2\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)}|\psi(x)| + |D\psi(x)|\right) \quad \forall j \quad \text{при} \quad \rho(x) \leqslant \delta(\varepsilon), \tag{7.40}$$

где

$$|D\psi(x)| = \left(\sum_{i,\ j=1}^{n} |D_i\psi_j(x)|^2\right)^{1/2},$$

и $G_j = 0$ при $\rho(x) > \delta(\varepsilon)$.

Так как мы предположили, что $\psi_i \in L^\infty(\Omega)$, то из (7.40) следует, что

$$|G_j(x)| \leqslant c_3\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)} + |D\psi(x)|\right) \quad \forall j, \quad \rho(x) \leqslant \delta(\varepsilon), \tag{7.41}$$

а поэтому

$$\|v_i G_j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_3\left(\varepsilon\left\|\frac{v_i}{\rho}\right\|_{L^2(\Omega)}\right) + \left(\int\limits_{\rho \leqslant \delta(\varepsilon)} v_i^2 |D\psi|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{7.42}$$

Положим

$$\varphi(\varepsilon) = \left(\int\limits_{\rho \leqslant \delta(\varepsilon)} |D\psi|^n dx\right)^{1/n} \tag{7.43}$$

($\varphi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ ввиду предположения $\partial\psi_i/\partial x_j \in L^n(\Omega)$). Из (7.42) и леммы 7.3 следует, что

$$\|v_i G_j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_4\varepsilon\|v\| + c_3\|v_i\|_{L^q(\Omega)}\varphi(\varepsilon), \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

и, следовательно,

$$\|v_i G_j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_5(\varepsilon + \varphi(\varepsilon))\|v\|. \tag{7.44}$$

Теперь легко получается (7.31); действительно,

$$|b(v,\ G,\ v)| \leqslant c_7\|v\| \sum_{i,\ j=1}^{n} \|v_i G_j\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_6\|v\|^2(\varepsilon + \varphi(\varepsilon)) \bullet$$

(согласно (7.44))

Замечание 7.4. Аналогичным образом можно решить неоднородную задачу и в случае эволюционных уравнений (§ 6) ●

Замечание 7.5. Если $v \in (H^1(\Omega))^n$ и $\operatorname{div} v = 0$, то $v_j|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ и

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} v\, dx = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \int\limits_\Gamma v_j \cos n_j\, d\Gamma = 0.$$

Наоборот, если $g_1, \ldots, g_n$ суть заданные функции из $H^{1/2}(\Gamma)$ и

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma} g_j \cos n_j \, d\Gamma = 0,$$

то существует такое $v \in (H^1(\Omega))^n$, что $\operatorname{div} v = 0$ и $v_j = g_j$ на Γ, см. Катабрига [1] ●

Замечание 7.6. Если $n \leqslant 3$, то имеет место *единственность* решения, когда величина $\|f\|_{V'}$ «достаточно мала». В самом деле, пусть u и u^* суть два решения; для разности $w = u - u^*$ имеем:

$$\nu a(w, v) + c(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0. \qquad (7.45)$$

При *единственном* предположении $f \in V'$ решения u и u^* принадлежат V, но не обладают дополнительными свойствами гладкости, и то же верно для разности w. Поэтому мы имеем право полагать в (7.45) $v = w$, только если выполнено условие $n \leqslant 3$ (поскольку в этом случае трилинейная форма $u, v, w \to b(u, v, w)$ непрерывна на V). Итак, полагая в (7.45) $v = w$, найдем, что

$$\nu \| w \|^2 = - b(w, u, w).$$

Следовательно,

$$\nu \| w \|^2 \leqslant c \| u \| \| w \|^2,$$

а поскольку

$$\nu \| u \|^2 = (f, u) \leqslant \| f \|_{V'} \| u \|,$$

то окончательно

$$\left(\nu - \frac{c}{\nu} \| f \|_{V'}\right) \| w \|^2 \leqslant 0$$

и, следовательно, $w = 0$, коль скоро

$$\nu^2 > c \| f \|_{V'}; \qquad (7.46)$$

последнее условие означает, что $\| f \|_{V'}$ «достаточно мало» или ν «достаточно велико»! ●

8. ПРИМЕР ОДНОГО СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

8.1. Постановка задачи

В этом пункте мы рассмотрим следующую задачу: ищется функция u, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times]0, T[, \qquad (8.1)$$

где $p > 2$ — заданное число, граничным условиям

$$u = 0 \text{ на } \Sigma \tag{8.2}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \bullet \tag{8.3}$$

Замечание 8.1. В § 1 гл. 2 мы приведем решение этой задачи «методом монотонности» — решение *более простое* по сравнению с предлагаемым ниже. Тем не менее настоящий метод (принадлежащий Вишику [1]) содержит несколько идей, которые, как нам кажется, полезно осветить ●

Замечание 8.2. Уравнение (8.1) выбрано здесь в качестве «модельного уравнения» с целью выявить основное без посторонних технических осложнений. На самом деле предлагаемый метод распространяется на гораздо более общие уравнения (см. цитированную работу Вишика и гл. 2). В частности, то обстоятельство, что рассматривается уравнение *второго порядка*, не играет существенной роли ●

Замечание 8.3. В рассматриваемом нами случае мы имеем дело с нелинейными членами вида

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};$$

для того чтобы перейти к пределу в этих членах в ситуации, *когда используется метод компактности*, необходимо получить «более сильные» априорные оценки по сравнению со случаем уравнений Навье — Стокса (§ 6); после этого еще остается вопрос: *как воспользоваться* этими оценками ●

8.2. Априорные оценки. Общие замечания

8.2.1. Обозначения. Мы будем рассматривать пространства

$$W^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega),\ D_i v \in L^p(\Omega);\ i = 1, \ldots, n\},$$

которые являются банаховыми с нормой

$$\| v \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| v \|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| D_i v \|_{L^p(\Omega)}; \tag{8.4}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{замыкание } \mathcal{D}(\Omega) \text{ в } W^{1,p}(\Omega), \text{ или}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in W^{1,p}(\Omega),\ v = 0 \text{ на } \Gamma\}; \tag{8.5}$$

$$W^{-1,p'}(\Omega) = \text{сопряженное пространство к } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Имеем:

$$f \in W^{-1,p'}(\Omega) \Leftrightarrow f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i f_i,$$
$$f_0, f_1, \ldots, f_n \in L^{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{8.6}$$

Положим

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right). \tag{8.7}$$

Оператор $\varphi \to A(\varphi)$ отображает $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Для $\varphi, \psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ имеем:

$$(A(\varphi), \psi) = a(\varphi, \psi), \tag{8.8}$$

где

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx. \tag{8.9}$$

В этом пункте мы будем писать

$$|g| = \|g\|_{L^2(\Omega)} \bullet \tag{8.10}$$

8.2.2. Оценки (I). Умножив (8.1) на u, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + a(u(t), u(t)) = (f(t), u(t)). \tag{8.11}$$

Таким образом, если предположить, что

$$f \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad u_0 \in L^2(\Omega), \tag{8.12}$$

то, поскольку ввиду неравенства Пуанкаре норма

$$(a(v, v))^{1/p} = \|v\| \tag{8.13}$$

эквивалентна норме $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ на $W_0^{1,p}(\Omega)$, получим:

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \int_0^t \|u(\sigma)\|^p d\sigma \leqslant \frac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^t \|f(\sigma)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \|u(\sigma)\| d\sigma,$$

откуда

$$|u(t)|^2 + \int_0^t \|u(\sigma)\|^p d\sigma \leqslant |u_0|^2 + c\int_0^t \|f(\sigma)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}^{p'} d\sigma. \tag{8.14}$$

8.2.3. Оценки (II). Теперь мы *формально* (точные предположения будут сделаны дальше) продифференцируем (8.1) по t и умножим на u'; тогда получим:

$$(u''(t),\ u'(t)) - (p-1)\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\right)u'\,dx = (f',\ u'). \tag{8.15}$$

«Нелинейный» член в (8.15) запишется в виде

$$(p-1)\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x_i}\right)^2 dx = \\ = \frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)^2 dx,$$

откуда

$$\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\int_0^t\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)^2 dx\,d\sigma = \\ = \frac{1}{2}|u'(0)|^2 + \int_0^t (f',\ u')\,d\sigma. \tag{8.16}$$

Ясно (впрочем, это будет показано), что из равенства (8.16) можно получить (при подходящих условиях на f и u_0) априорные оценки для u' и, что особенно важно, для $\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)$, где

$$\beta(\lambda) = |\lambda|^{(p-2)/2}\lambda. \tag{8.17}$$

Чтобы применять метод компактности, нам еще понадобятся оценки для $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)$.

8.2.4. Оценки (III). Естественная идея состоит в том, чтобы обе части (8.1) умножить на $(-\Delta u)$ (ср. с п. 1.7, где используется аналогичная идея). Однако возникает следующая трудность: интегрирование по частям в интеграле $\int_{\Omega} A(u)(\Delta u)\,dx$ приводит к *ненулевым поверхностным интегралам*.

Нами будут использованы следующие два наблюдения:

(i) в методе компактности необходимо установить сходимость почти всюду (см. лемму 1.3), и в этой связи достаточно иметь оценки внутри Ω;

(ii) можно ликвидировать интегралы по границе, умножив на функцию, равную Δu внутри и вырождающуюся на границе Γ.

Таким образом, мы сталкиваемся с необходимостью ввести функцию ψ со следующими свойствами (предполагается, что

Ω — ограниченная область с границей класса C^∞):

$$\begin{gathered}\psi\in\mathcal{D}(\bar\Omega),\ \psi(x)>0 \text{ при } x\in\Omega,\\ \psi=0 \text{ на } \Gamma \text{ и } \frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \text{ на } \Gamma^{1)}.\end{gathered}\tag{8.18}$$

Если мы теперь умножим обе части (8.1) на $(-\psi\Delta u)$, нелинейный член примет вид

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(u)(-\psi\Delta u)\,dx &=\\ =\frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_\Omega \psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)^2 dx &+\\ +\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}A(u)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx &+\\ +\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,dx.&\end{aligned}\tag{8.19}$$

Два последних члена имеют «более низкий порядок», так что можно также получить оценки для

$$\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right).$$

8.3. Применение оценок

Если функция $w(x, t)$ определена в Q, то положим

$$Bw=-\frac{\partial}{\partial t}\left((T-t)\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\psi\Delta w+\lambda w,\tag{8.20}$$

где $\lambda>0$ будет выбрано ниже (достаточно большим).

Ниже (в п. 8.5) будет установлена

Лемма 8.1. *Существует такой «базис» из функций* $w_1, \ldots, w_m$, *достаточно гладких в* $\bar Q$, *что функции* $\{Bw_j\}$ *образуют «базис» в пространстве* $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Мы используем метод Фаэдо — Галёркина в следующем виде:

$$\begin{gathered}\text{ищутся такие } u_m\in[w_1, \ldots, w_m], \text{ что}\\ \int_0^T (u_m'+A(u_m), Bw_j)\,dt=\int_0^T (f, Bw_j)\,dt,\quad 1\leqslant j\leqslant m.\end{gathered}\tag{8.21}$$

---

[1] Полезность этого условия проявится ниже.

Замечание 8.4. Заметим, что *эволюционную задачу* мы трактуем как *стационарную*. Мы встретимся (в гл. 2 и 3) с другими способами «аппроксимации» эволюционного уравнения стационарными уравнениями (см., в частности, эллиптическую регуляризацию) ●

Замечание 8.5. Так как Bw_j образуют «базис» в $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, то отсюда следует, что если в (8.21) $u_m \to u$, то функция u удовлетворяет предельному уравнению (8.1) ●

Замечание 8.6. Как мы увидим в п. 8.6, «умножение иа Bu» позволит нам по существу снова получить, и притом в один этап, все три типа оценок, полученных в п. 8.2.

Можио предложить другой способ использования оценок (I) и (III); вводится функция $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$, $\rho(x) > 0$ в Ω и $\rho(x)$ равио расстоянию от x до Γ, если точка x достаточно близка к Γ, и затем оператор Δ_ρ, определениый равенством

$$\Delta_\rho v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

Оценки (III) из п. 8.2 получаются еще раз путем умножения на $\Delta_\rho u$.

Как известно (Бауенди — Гулауик [1]), если существует такая последовательность собственных значений и собственных функций оператора Δ_ρ:

$$\Delta_\rho w_j = \lambda_j w_j, \quad \lambda_j > 0, \quad w_j, \sqrt{\rho}\,\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),$$

что w_j *гладкие в* $\overline{\Omega}$, то можно пытаться использовать метод Фаэдо — Галёркииа в обычной форме, выбирая w_j в качестве «специального базиса»; *однако в том случае, когда функции* w_j *не обращаются в нуль на* Γ, *эта процедура приводит к решению задачи* (8.1), (8.2) *с краевыми условиями Неймана*:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = 0 \tag{8.22}$$

(вместо краевых условий Дирихле) ●

8.4. Формулировка теоремы

Теорема 8.1. *Предположим, что*

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial t},\ \sqrt{\psi}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(Q), \qquad Q = \Omega \times]0, T[,$$
$$f(x, 0) = 0, \tag{8.23}$$

где ψ *удовлетворяет условиям* (8.18). *Предположим также, что*[1])

$$u_0 = 0. \tag{8.24}$$

Тогда существует, и притом единственная, функция u, *обладающая следующими свойствами:*

$$u \in L^p(0,\ T;\ W_0^{1,\,p}(\Omega)), \tag{8.25}$$

$$u' \in L^2(Q), \tag{8.26}$$

$$\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(Q) \quad \forall i,\ j, \tag{8.27}$$

$$\sqrt{(T-t)}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(Q) \quad \forall i, \tag{8.28}$$

и удовлетворяющая (8.1), (8.2) *и* (8.3) (*с* $u_0 = 0$)●

План доказательства:

(i) доказательство леммы 8.1 (п. 8.5);

(ii) решение уравнений (8.21), оценки, а затем переход к пределу (п. 8.6);

(iii) доказательство единственности (п. 8.7)●

8.5. Доказательство леммы 8.1

Мы будем исходить из последовательности функций g_k, определенных на отрезке $[0,\ T]$ и таких, что

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dt}\left((T-t)\frac{dg_k}{dt}\right) = \mu_k g_k, \\ g_k(0) = 0,\ \ g_k(t) \text{ ограничено, когда } t \to T; \end{gathered} \tag{8.29}$$

при этом собственные значения $\mu_k > 0$, а собственные функции g_k нормированы условием

$$\int_0^T g_k^2(t)\,dt = 1.$$

Пусть, далее,

$$\begin{gathered} \xi_m,\ m = 1,\ 2,\ \ldots, \text{— некоторый «базис» в } W_0^{1,\,p}(\Omega), \\ \text{причем } \xi_m \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ (для определенности; на самом} \\ \text{деле достаточно, чтобы функции } \xi_m \text{ были доста-} \\ \text{точно гладкими).} \end{gathered} \tag{8.30}$$

---

[1] Это предположение делается для некоторого упрощения, и оно ни в коей мере не существенно. См., кроме того, гл. 2, § 1.

Далее мы определим v_{km} как решение задачи

$$-\psi\Delta v_{km}+(\lambda+\mu_k)v_{km}=\xi_m, \quad v_{km}=0 \text{ на } \Gamma. \tag{8.31}$$

Будет доказана

Лемма 8.2. *Для достаточно большого* $\lambda>0$ *задача* (8.31) *имеет единственное решение, гладкое в* $\overline{\Omega}$.

Временно считая этот результат установленным, заметим, что

$$B(v_{km}\otimes g_k)=B(v_{km}(x)\,g_k(t))=\xi_m\otimes g_k, \tag{8.32}$$

так что функции $B(v_{km}\otimes g_k)$ образуют «базис» в пространстве $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Следовательно, в качестве w_i (при подходящем выборе индексов) мы можем взять

$$w_i=v_{km}\otimes g_k, \tag{8.33}$$

что и доказывает лемму 8.1 в предположении, что лемма 8.2 уже доказана.

Доказательство леммы 8.2. Более точно, мы покажем, что если правая часть f принадлежит $H_0^k(\Omega)$, то при достаточно большом μ существует единственное решение u задачи

$$\begin{gathered} u\in H_0^k(\Omega), \quad \sqrt{\psi}\,D^\alpha u\in L^2(\Omega), \quad |\alpha|=k+1,\\ -\psi\Delta u+\mu u=f. \end{gathered} \tag{8.34}$$

Чтобы доказать (8.34), мы еще раз используем метод Фаэдо — Галёркина и еще раз выберем специальный базис. Определим собственные функции

$$(-1)^k\Delta^k\varphi_i=\lambda_i\varphi_i, \quad \varphi_i\in H_0^k(\Omega). \tag{8.35}$$

Будем нсходить из $u_m\in[\varphi_1, \ldots, \varphi_m]$ — решения уравнений

$$\sum_{i=1}^n\int_\Omega \psi\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\varphi_j\,dx+\mu(u_m, \varphi_j)=$$

$$=(f, \varphi_j), \quad 1\leqslant j\leqslant m; \tag{8.36}$$

такое решение u_m существует. В самом деле, из (8.36) мы выводим, что

$$\sum_{i=1}^n\int_\Omega\psi\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^2dx+\mu|u_m|^2+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}u_m\,dx=(f, u_m). \tag{8.37}$$

Однако

$$\left|\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{\psi}}\sqrt{\psi}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}u_m\,dx\right|\leqslant c_1\left(\sum_{i=1}^n\int\psi\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{1/2}|u_m|;$$

поскольку $\left|\frac{1}{\sqrt{\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right| \leqslant \text{const}$. Тогда левая часть больше или равна

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\psi\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^2 dx + \left(\mu - \frac{c_1^2}{2}\right)|u_m|^2.$$

Отсюда следует существование функции u_m, удовлетворяющей (8.36), если мы возьмем $\mu \geqslant c_1^2/2$. Теперь мы покажем, что, выбрав μ достаточно большим, можно получить дополнительные оценки:

$$\|u_m\|_{H_0^k(\Omega)} \leqslant \text{const}, \qquad (8.38)$$

$$\int_{\Omega}\psi\left(D^{k+1}u_m\right)^2 dx \leqslant \text{const}, \qquad (8.39)$$

где $D^r u$ означает произвольную производную порядка r. Очевидно, что из (8.38) и (8.39) следует нужный нам результат.

Благодаря (8.35) мы можем в (8.36) заменить φ_j на $(-1)^k\Delta^k\varphi_j$ и вывести, что

$$(-\psi\Delta u_m, (-1)^k\Delta^k u_m) + \mu\|u_m\|^2_{H^k(\Omega)} \leqslant \|f\|_{H^k(\Omega)}\|u_m\|_{H^k(\Omega)}. \qquad (8.40)$$

Имеем

$$\begin{aligned} X &= (-\psi\Delta u_m, (-1)^k\Delta^k u_m) = \\ &= -\sum(D^k(\psi\Delta u_m), D^k u_m) = \\ &= -\left(\sum D^k(D(\psi Du_m) - (D\psi)(Du_m)), D^k u_m\right) = \\ &= \sum\left(D^k(\psi Du_m), D^{k+1}u_m\right) + \sum\left(D^k(D\psi\, Du_m), D^k u_m\right)^{1)}. \end{aligned}$$

Положим

$$|||u_m|||^2 = \sum\int_{\Omega}\psi\left(D^{k+1}u_m\right)^2 dx.$$

Тогда

$$X = |||u_m|||^2 + \sum\left(\frac{D\psi}{\sqrt{\psi}}\sqrt{\psi}\,D^{k+1}u_m, D^k u_m\right) + \\ + \sum(D^j\psi D^k u_m, D^k u_m) + Y,$$

$$|Y| \leqslant c\|u_m\|_{H^k(\Omega)}\|u_m\|_{H^{k-1}(\Omega)}.$$

---

1) Отметим, что $-(D^{k+1}(\psi Du_m), D^k u_m) = (D^k(\psi Du_m), D^{k+1}u_m)$, так как $D^k(\psi Du_m) = 0$ на Γ; последнее справедливо в силу того, что $\psi = 0$ на Γ, $\partial\psi/\partial n = 0$ на Γ и $u_m \in H_0^k(\Omega)\cap H^{k+2}(\Omega)$.

Так как $D\psi/\sqrt{\psi} \in L^\infty(\Omega)$, то мы заключаем, что

$$X \geqslant |||u_m|||^2 - c_2 |||u_m||| \, \|u_m\|^2_{H^k(\Omega)} - c_3 \|u_m\|^2_{H^k(\Omega)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} |||u_m|||^2 - \left(\frac{1}{2} c_2^2 + c_3\right) \|u_m\|^2_{H^k(\Omega)}.$$

Тогда из (8.40) следует, что

$$\frac{1}{2} |||u_m|||^2 + \left(\mu - \frac{1}{2} c_2^2 - c_3\right) \|u_m\|^2_{H^k(\Omega)} \leqslant \|f\|_{H^k(\Omega)} \|u_m\|_{H^k(\Omega)},$$

откуда вытекают (8.38) и (8.39).

8.6. Доказательство существования в теореме 8.1

8.6.1. Существование «приближенного решения». Прежде всего мы покажем, что действительно существует функция u_m, удовлетворяющая (8.21).

С помощью леммы 4.3 можно вывести существование u_m из *основного неравенства*:

$$\int_0^T (u_m' + A(u_m),\ Bu_m)\,dt \geqslant c \int_0^T |u_m'|^2\,dt +$$
$$+ c \sum_{i=1}^{n} \int_Q |D_i u_m|^p\,dx\,dt +$$
$$+ c \sum_{i=1}^{n} \int_Q (T - t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)\right)^2 dx\,dt +$$
$$+ c \sum_{i,\, j=1}^{n} \int_Q \psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)\right)^2 dx\,dt, \tag{8.41}$$

где $c > 0$ и $\beta(\lambda)$ определяются с помощью (8.17).

Действительно, как нетрудно проверить, при сделанных предположениях о правой части f

$$\left|\int_0^T (f,\ Bu_m)\,dt\right| \leqslant c_* \left(\int_0^T |u_m'|^2\,dt + \int_Q \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^2\right) dx\,dt\right)^{1/2}, \tag{8.42}$$

так что, в частности,

$$\int_0^T (u_m' + A(u_m) - f,\ Bu_m)\,dt \geqslant 0,$$

когда выражение $\left(\int_0^T |u_m'|^2\,dt + \sum_{i=1}^{n} \int_Q |D_i u_m|^p\,dx\,dt\right)$ достаточно велико.

8.6.2. Доказательство неравенства (8.41). Имеем:

$$\int_0^T (u_m' + A(u_m),\ Bu_m)\,dt = J_1 + \ldots + J_6, \tag{8.43}$$

где

$$J_1 = \int_0^T \left(u_m',\ -\frac{\partial}{\partial t}\left((T-t)\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)\right) dt,$$

$$J_2 = \int_0^T (u_m',\ -\psi\,\Delta u_m)\,dt,$$

$$J_3 = \lambda \int_0^T (u_m',\ u_m)\,dt,$$

$$J_4 = \int_0^T \left(A(u_m),\ -\frac{\partial}{\partial t}\left((T-t)\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)\right) dt,$$

$$J_5 = \int_0^T (A(u_m),\ -\psi\,\Delta u_m)\,dt,$$

$$J_6 = \lambda \int_0^T (A(u_m),\ u_m)\,dt.$$

Имеем:

$$J_1 = \int_0^T |u_m'(t)|^2\,dt - \int_0^T \frac{(T-t)}{2}\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 \geqslant \frac{1}{2}\int_0^T |u_m'(t)|^2\,dt. \tag{8.44}$$

Далее,

$$J_2 = \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega \psi D_i u_m' D_i u_m\,dx\,dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega D_i\psi\,(D_i u_m)\,u_m'\,dx\,dt =$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi \sum_{i=1}^n (D_i u_m)^2\right) dx\,dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega D_i\psi\,(D_i u_m)\,u_m'\,dx\,dt$$

и, следовательно,

$$J_2 \geqslant -c\left(\int_0^T |u_m'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_Q \sum_{i=1}^n (D_i u_m)^2\,dx\,dt\right)^{1/2},$$

так что (буквой c мы обозначаем различные константы)

$$J_2 \geqslant -\frac{1}{4} \int_0^T | u'_m |^2 \, dt - c \int_Q \sum_{i=1}^n (D_i u_m)^2 \, dx \, dt. \tag{8.45}$$

Далее,

$$J_3 \geqslant 0 \tag{8.46}$$

и

$$J_4 = \int_0^T (T-t) \left(\frac{\partial}{\partial t} (A(u_m)), \ u'_m \right) dt = {}^{1)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_Q (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \, \partial t} \, dx \, dt,$$

откуда

$$J_4 = \frac{4(p-1)}{p^2} \sum_{i=1}^n \int_Q (T-t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right)^2 dx \, dt. \tag{8.47}$$

Оценим теперь J_5. Имеем [2]:

$$J_5 = \sum_{j=1}^n \int_0^T (A(u_m), \ -D_j(\psi D_j u_m) + D_j \psi D_j u_m) \, dt =$$

$$= \sum_{i,\,j=1}^n \int_Q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) D_i (\psi D_j u_m) \, dx \, dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_Q A(u_m) (D_j \psi) (D_j u_m) \, dx \, dt,$$

откуда

$$J_5 = \sum_{i,\,j=1}^n (p-1) \int_Q \psi \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \cdot \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \, \partial x_j} \right|^2 dx \, dt +$$

$$+ \sum_{i,\,j=1}^n \int_Q \frac{D_i \psi}{\sqrt{\psi}} \sqrt{\psi} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) D_j u_m \, dx \, dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_Q A(u_m) \sqrt{\psi} \frac{D_j \psi}{\sqrt{\psi}} D_j u_m \, dx \, dt,$$

---

[1] Выкладки аналогичны проведенным в п. 8.1, оценки (II).

[2] Выкладки аналогичны проведенным в п. 8.2, оценки (III).

откуда

$$J_5 \geqslant \frac{4(p-1)}{p^2} \sum_{i,\,j=1}^{n} \int_Q \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \right)^2 dx\,dt -$$

$$- c \sum_{i,\,j=1}^{n} \int_Q \sqrt{\psi} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) D_j u_m \right| dx\,dt,$$

откуда

$$J_5 \geqslant c \sum_{i,\,j=1}^{n} \int_Q \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \right)^2 dx\,dt - c \int_Q \sum_{j=1}^{n} (D_j u_m)^2 \,dx\,dt. \tag{8.48}$$

Наконец,

$$J_6 = \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^p dx\,dt. \tag{8.49}$$

Ввиду (8.44) — (8.49) из (8.43) получим

$$\int_0^T (u'_m + A(u_m),\ Bu_m)\,dt \geqslant \frac{1}{4} \int_0^T |\,u'_m(t)\,|^2\,dt +$$

$$+ \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^p dx\,dt + c \sum_{i=1}^{n} \int_Q (T-t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \right)^2 dx\,dt +$$

$$+ c \sum_{i,\,j=1}^{n} \int_Q \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \right)^2 dx\,dt - c \sum_{i=1}^{n} \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^2 dx\,dt. \tag{8.50}$$

Но

$$\int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^2 dx\,dt \leqslant c_* \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^p dx\,dt,$$

и из (8.50) получается неравенство (8.41), если мы выберем

$$\lambda > cc_*. \bullet$$

8.6.3. Оценки для u_m. Предельный переход. Из (8.41) вытекает, что при $m \to \infty$

$$\begin{gathered} u_m \text{ (соответственно } u'_m\text{) ограничены в} \\ L^p(0,\ T;\ W_0^{1,\,p}(\Omega)) \text{ (соответственно в } L^2(Q)), \end{gathered} \tag{8.51}$$

$$\begin{gathered} \sqrt{(T-t)}\, \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right),\ \sqrt{\psi}\, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \\ \text{ограничены в } L^2(Q) \quad \forall i,\ j. \end{gathered} \tag{8.52}$$

Отсюда следует, что u_m ограничены в $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, так что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ ограничены в } L^{p'}(Q). \tag{8.53}$$

Пусть $\mathcal{O}$ — произвольная область, такая, что $\bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$; из (8.52) следует, что $\forall\varepsilon > 0$

$$\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \text{ ограничены в } H^1(\mathcal{O}\times]0, T-\varepsilon[). \tag{8.54}$$

Поскольку вложение

$$H^1(\mathcal{O}\times]0, T-\varepsilon[) \to L^2(\mathcal{O}\times]0, T-\varepsilon[)$$

компактно, мы можем из последовательности u_m выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$\begin{aligned} &u_\mu \to u \quad \text{слабо в } L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)),\\ &u'_\mu \to u' \quad \text{слабо в } L^2(Q), \end{aligned} \tag{8.55}$$

$$\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \textit{ сходятся почти всюду в } Q\,^{1)}; \tag{8.56}$$

$$\sqrt{(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right) \to \chi_i \quad \text{слабо в } L^2(Q), \tag{8.57}$$

$$\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right) \to o_{ij} \quad \text{слабо в } L^2(Q), \tag{8.58}$$

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \xi_i \quad \text{слабо в } L^{p'}(Q). \tag{8.59}$$

Но, поскольку функция $\lambda \to \beta(\lambda)$ *монотонна*, из (8.56) следует, что последовательность $\partial u_m/\partial x_i$ *сходится почти всюду*. Тогда в силу леммы 1.3 имеем:

$$\chi_i = \sqrt{(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right),$$

$$o_{ij} = \sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right), \qquad \xi_i = \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Тогда $A(u_m) \to A(u)$ в $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ и, следовательно, равенства (8.21) приводят к соотношениям

$$\int_0^T (u' + A(u), Bw_j)\,dt = \int_0^T (f, Bw_j) \quad \forall j. \tag{8.60}$$

---

[1] Поскольку в (8.54) $\mathcal{O}$ и ε произвольны (диагональный процесс).

Поскольку $\{Bw_j\}$ образуют «базис» в $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, то из (8.60) мы можем вывести, что u удовлетворяет (8.1).

Тем самым доказано существование в теореме 8.1.

8.7. Доказательство единственности в теореме 8.1

Что касается единственности, то справедлив более сильный результат по сравнению со сформулированным в теореме 8.1 [1]: уравнение (8.1) имеет не более одного решения, удовлетворяющего лишь условию (8.25).

В самом деле, если u удовлетворяет (8.1) и (8.25), то

$$u' = f - A(u) \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \tag{8.61}$$

откуда следует, что

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

(более того, $t \to u(t)$ является непрерывным отображением $[0, T] \to L^2(\Omega)$).

Пусть, далее, u и u^* — два решения; если $w = u - u^*$, то имеем

$$w' + A(u) - A(u^*) = 0. \tag{8.62}$$

Без труда проверяется, что

$$(A(u) - A(v), u - v) \geqslant 0 \text{ [2]}, \tag{8.63}$$

и из (8.62) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leqslant 0,$$

откуда $w = 0$ ●

Замечание 8.6. Стационарный случай. Методами подобного типа можно изучать стационарные задачи для оператора A (см. Вишик [2]). В гл. 2 мы увидим, каким образом можно использовать монотонность A ●

9. ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕНИИ И ПАРНЫЕ ЗАДАЧИ

9.1. Одна параболико-гиперболическая задача о сопряжении

Задачи, подобные тем, которые здесь рассмотрены, возникают в биологии, см. Коэн и Рубинов [1].

---

[1] В гл. 2 мы встретимся с более систематическим изложением подобных вопросов.

[2] Это свойство оператора называется монотонностью; систематически мы будем использовать это свойство в гл. 2.

Рассматриваются две области Ω_1 и Ω_2 в $\mathbb{R}^n$, ограниченные и расположенные так, как указано на рис. 1.

Нормаль n[1] к Γ_1 ориентирована таким образом, что она направлена вне Ω_1 (следовательно, внутрь Ω_2).

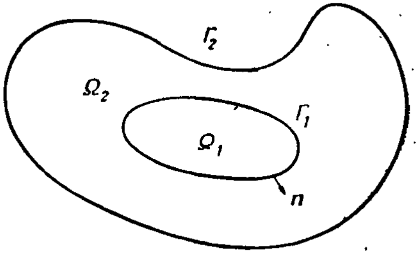

Рис. 1.

Ищутся векторы

$u = \{u_1, \ldots, u_n\}$, определенный в $\Omega_1 \times]0, T[= Q_1$,

$w = \{w_1, \ldots, w_n\}$, определенный в $\Omega_2 \times]0, T[= Q_2$,

и скалярная функция p, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p \quad \text{в} \quad Q_1, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad Q_1, \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = g \quad \text{в} \quad Q_2, \tag{9.3}$$

с *условиями сопряжения на* $\Gamma_1 \times]0, T[= \Sigma_1$:

$$u = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \tag{9.4}$$

$$\nu \frac{\partial u_i}{\partial n} - p \cos n_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \cos n_i\right) \times u_i = \frac{\partial w_i}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Sigma_1,$$
$$i = 1, \ldots, n, \tag{9.5}$$

с условием на $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$:

$$w = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_2, \tag{9.6}$$

---

[1] Не следует это обозначение смешивать с размерностью.

и с начальными условиями:

$$\begin{aligned} &u(0)=u_0 && \text{на} \quad \Omega_1, \\ &w(0)=w_0, \quad w'(0)=w_1 && \text{на} \quad \Omega_2 \bullet \end{aligned} \tag{9.7}$$

Другая формулировка задачи. Положим

$$\Phi = w'. \tag{9.8}$$

Тогда уравнение (9.3) примет вид

$$\Phi' - \Delta\left(\int_0^t \Phi\, d\sigma\right) = g + \Delta w_0. \tag{9.9}$$

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$(f, g)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} fg\, dx, \qquad i=1,\ 2, \tag{9.10}$$

$$a_{\Omega_i}(u, v) = \sum_{j,\ k=1}^{n} \int_{\Omega_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dx, \qquad i=1,\ 2, \tag{9.11}$$

$$b_{\Omega_1}(u, v, w) = \sum_{i,\ j=1}^{n} \int_{\Omega_1} u_i (D_i v_j) w_j\, dx, \tag{9.12}$$

$$V_1 = \{v \mid v \in (H^1(\Omega_1))^n,\ \operatorname{div} v = 0\}, \tag{9.13}$$

$$V_2 = \{v \mid v \in (H^1(\Omega_2))^n,\ v = 0 \text{ на } \Gamma_2\}. \tag{9.14}$$

Теперь мы хотим проверить, что поставлениую выше задачу можно сформулировать в следующем виде:

Задача 9.1. Ищутся такие u, Φ, что

$$u \in L^2(0, T;\ V_1) \cap L^\infty(0, T;\ (L^2(\Omega_1))^n), \tag{9.15}$$

$$\Phi \in L^\infty(0, T;\ (L^2(\Omega_2))^n), \qquad \int_0^t \Phi\, d\sigma \in L^\infty(0, T;\ V_2), \tag{9.16}$$

$$\begin{gathered} (u', v)_{\Omega_1} + (\Phi', \varphi)_{\Omega_2} + \nu a_{\Omega_1}(u, v) + a_{\Omega_2}\left(\int_0^t \Phi\, d\sigma,\ \varphi\right) + b_{\Omega_1}(u, u, v) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} u_i u_j v_j \cos n_i\, d\Gamma_1 = \\ = (f, v)_{\Omega_1} + (g, \varphi)_{\Omega_2} + a_{\Omega_2}(w_0, \varphi) \quad \forall v \in V_1,\ \ \varphi \in V_2; \end{gathered} \tag{9.17}$$

при этом

$$v = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{9.18}$$

$$u(0) = u_0, \tag{9.19}$$

$$\Phi(0) = w_1 \tag{9.20}$$

и

$$u = \Phi \ \text{на} \ \Sigma_1 \bullet \tag{9.21}$$

Проверим, например, что если $\{u, \Phi\}$ является решением задачи 9.1, то функции

$$\{u, w\}, \quad w = \int_0^t \Phi(\sigma)\, d\sigma + w_0$$

удовлетворяют (в слабом смысле) условиям (9.1) — (9.7).

Прежде всего, взяв в (9.17) функцию v с компактным носителем в Ω_1 и $\varphi = 0$ (а затем наоборот $v = 0$ и φ с компактным носителем в Ω_2), мы убедимся, что функции u и Φ удовлетворяют (9.1) и (9.9).

Наиболее существенным моментом является проверка условия (9.5). Если мы умножим (9.1) на v и (9.9) на φ, то получим [1]:

$$(u', v)_{\Omega_1} + \nu a_{\Omega_1}(u, v) + b_{\Omega_1}(u, u, v) + (\Phi', \varphi)_{\Omega_2} + a_{\Omega_2}\left(\int_0^t \Phi\, d\sigma, \varphi\right) +$$
$$+ \int_{\Gamma_1} \left(-\nu \frac{\partial u}{\partial n} + pn + \frac{\partial}{\partial n}\left(\int_0^t \Phi\, d\sigma\right)\right) v\, d\Gamma_1 =$$
$$= (f, v)_{\Omega_1} + (g, \varphi)_{\Omega_2} + a_{\Omega_2}(w_0, \varphi) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w_0}{\partial n} \varphi\, d\Gamma_1,$$

и приинимая во внимание (9.17), найдем:

$$\int_{\Gamma_1} \left[-\nu \frac{\partial u}{\partial n} + pn + \frac{\partial}{\partial n}\left(\int_0^t \Phi\, d\sigma + w_0\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n u_j \cos n_j\right) u\right] v\, d\Gamma_1 = 0. \tag{9.22}$$

Так как $\operatorname{div} v = 0$, то имеем:

$$\int_{\Gamma_1} vn\, d\Gamma_1 = 0 \tag{9.23}$$

---

[1] Учитывая, что $v = \varphi$ на Γ_1.

и наоборот, если $v_* \in (H^{1/2}(\Gamma_1))^n$ и выполнено (9.23), то существует такое $v \in V_1$, что $v = v_*$ на Γ_1 (см. замечание 7.5). Следовательно, равенство (9.22) эквивалентно равенству

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial n}+pn+\frac{\partial}{\partial n}\left(\int_0^t \Phi\,d\sigma+w_0\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n u_j\cos n_j\right)u=\lambda n, \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{9.24}$$

и заменяя p на $p-\lambda$ (что законно), мы установим условие (9.5) $\left(\text{поскольку } \int_0^t \Phi(\sigma)\,d\sigma+w_0=w\right)$ ●

Теперь мы укажем наиболее существенные моменты доказательства следующей теоремы:

Теорема 9.1. *Существует решение* $\{u, \Phi\}$ *задачи* 9.1.

Доказательство. 1) Применяется метод Фаэдо — Галёркина (как в § 6) со «специальным базисом» (как в п. 6.3). Положим

$$W_s=\{w\mid w\in(H_0^s(\Omega))^n,\ \Omega=\bar{\Omega}_1\cup\Omega_2,\ \operatorname{div} w=0 \text{ на } \Omega_1\}; \tag{9.25}$$

через $(u, v)_{W_s}$ обозначим скалярное произведение в W_s; выберем далее (как и в (6.43)) $s=n/2$ и обозначим через w_j собственные функции

$$(w_j, v)_{W_s}=\lambda_j(w_j, v)=\lambda_j\int_\Omega w_j v\,dx \qquad \forall v\in W_s. \tag{9.26}$$

Далее к (9.17) применяется метод Фаэдо — Галёркина с «базисом»

$$\{v_j, \varphi_j\}, \quad v_j=w_j \text{ на } \Omega_1, \quad \varphi_j=w_j \text{ на } \Omega_2. \tag{9.27}$$

Пусть $\{u_m, \Phi_m\}$ — соответствующее «приближенное» решение порядка m.

2) Отметим, что

$$b_{\Omega_1}(u, u, u)-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^n\int u_i u_j u_j\cos n_i\,d\Gamma_1=0,$$

поэтому без труда проверяется, что

$$\begin{aligned}
&u_m \text{ ограничены в } L^2(0, T; V_1)\cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_1))^n),\\
&\Phi_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; (L^2(\Phi_2))^n),\\
&\int_0^t \Phi_m\,d\sigma \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; V_2).
\end{aligned} \tag{9.28}$$

3) Наконец, как и в п. 6.4, проверяется, что

$$\{u'_m, \Phi'_m\} \text{ ограничены в } L^2(0, T;\ W'_s). \tag{9.29}$$

4) Далее применяется теорема 5.1 о компактности в следующей ситуации: рассматривается последовательность $\{u_m, \Phi_m\}$ из пространства

$$L^2(0, T;\ V_1 \times (L^2(\Omega_2))^n), \text{ так что } p_0 = 2,$$

$$B_0 = V_1 \times (L^2(\Omega_2))^n,$$

производную по t оценим с помощью (9.29), следовательно, $p_1 = 2$, $B_1 = W'_s$; наконец, выбираем [1]

$$B = \left(H^{1-\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_1)\right)^n \times \left(H^{-\varepsilon}(\Omega_2)\right)^n, \qquad 0 < \varepsilon < 1/2. \tag{9.30}$$

Как известно (см. Лионс — Мадженес [1], теорема 16.1 гл. 1), вложение $H^1(\Omega_1) \to H^{1-\varepsilon}(\Omega_1)$ компактно, и тем же свойством обладает вложение $L^2(\Omega_2) \to H^{-\varepsilon}(\Omega_2)$.

Следовательно, мы можем выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \textit{ сильно } \text{в } L^2\left(0, T;\ \left(H^{1-\varepsilon}(\Omega_1)\right)^n\right)\,^{2)}. \tag{9.31}$$

Далее, так как $\varepsilon < 1/2$, то отображение

$$v \to v|_{\Gamma_1}$$

является непрерывным отображением $H^{1-\varepsilon}(\Omega_1) \to L^2(\Gamma_1)$ [3] и, следовательно,

$$u_\mu|_{\Gamma_1} \to u|_{\Gamma_1} \textit{ сильно } \text{в } L^2(0, T;\ L^2(\Gamma_1)). \tag{9.32}$$

Благодаря (9.31) (соответственно (9.32)) мы можем перейти к пределу в членах

$$b_{\Omega_2}(u_\mu, u_\mu, v_j)\ \left(\text{соответственио} \sum \int_{\Gamma_1} u_{\mu i} u_{\mu j} v_j \cos n_i \, d\Gamma_1\right)$$

и таким образом получить решение $\{u, \Phi\}$ нашей задачи ●

Вопрос о единственности остается открытым, исключение составляет случай $n = 2$.

---

[1] $\left(H^{1-\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_1)\right)^n = \left\{v \mid v \in \left(H^{1-\varepsilon}(\Omega_1)\right)^n,\ \mathrm{div}\, v = 0\right\}$.

[2] Аналогичные рассуждения, очевидно, применимы и в ситуации § 6, но там они бесполезны.

[3] На самом деле $H^{1-\varepsilon}(\Omega_1) \to H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma_1)$.

Теорема 9.2. *Если $n=2$, то задача 9.1 допускает единственное решение.*

Доказательство. Пусть $\{u, \Phi\}$ и $\{u_*, \Phi_*\}$ — два решения. Положим

$$\chi = u - u_*, \quad \Psi = \Phi - \Phi_*,$$

$$\gamma(u, v, w) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} u_i v_j w_j \cos n_i \, d\Gamma_1. \tag{9.33}$$

Имеем:

$$(\chi', v)_{\Omega_1} + (\Psi', \varphi)_{\Omega_2} + \nu a_{\Omega_1}(\chi, v) + a_{\Omega_2}\left(\int_0^t \Psi \, d\sigma, \varphi\right) +$$
$$+ b_{\Omega_1}(u, \chi, v) + b_{\Omega_1}(\chi, u, v) - b_{\Omega_1}(\chi, \chi, v) -$$
$$- \gamma(u, \chi, v) - \gamma(\chi, u, v) + \gamma(\chi, \chi, v) = 0, \tag{9.34}$$

причем это выполнено для всех $v \in V_1$, $\varphi \in V_2$, $v = \varphi$ иа Γ_1.

Ввиду наличия «гиперболических» членов в (9.34) нельзя взять $\varphi = \Psi(t)$, а так как необходимо, чтобы v равнялось φ на Γ_1, то нам приходится воспользоваться методом, более трудным в техническом отношении.

Пусть $s \in]0, T[$; положим

$$\begin{gathered} \theta_m(t) = \text{непрерывная кусочно линейная функция на } [0, T]; \\ \theta_m(t) = 1 \text{ при } t < s - \frac{2}{m}, \quad \theta_m(t) = 0 \text{ при } t > s - \frac{1}{m}, \end{gathered} \tag{9.35}$$

ρ_n — регуляризующая последовательность функций из $\mathscr{D}(\mathbb{R}_t)$, $\rho_n(t) = \rho_n(-t)$, носитель ρ_n принадлежнт $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t)\, dt = 1$. (9.36)

Положим при $n > 2m$

$$\begin{aligned} v(t) &= ((\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)\theta_m, \\ \varphi(t) &= ((\theta_m \Psi) * \rho_n * \rho_n)\theta_m \end{aligned} \tag{9.37}$$

(где $*$ означает свертку по t, причем χ и Ψ неявно продолжены нулем вне $[0, T]$).

Так как $\chi = \Psi$ на Σ_1, то и $v(t) = \varphi(t)$ на Σ_1, и, таким образом, в (9.34) мы можем положить $v = v(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ и проинтегрировать от 0 до T. Получим:

$$c_{nm} + d_{nm} + e_{nm} + f_{nm} + g^1_{nm} + g^2_{nm} + g^3_{nm} = 0, \tag{9.38}$$

где

$$c_{nm}=\int_0^T (\chi', (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1} \theta_m\, dt,$$

$$d_{nm}=\int_0^T (\Psi', (\theta_m\Psi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_2} \theta_m\, dt,$$

$$e_{nm}=\nu \int_0^T a_{\Omega_1}(\chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m\, dt,$$

$$f_{nm}=\int_0^T a_{\Omega_2}\left(\int_0^T \Psi\, d\sigma, (\theta_m\Psi) * \rho_n * \rho_n\right) \theta_m\, dt,$$

$$g^1_{nm}=\int_0^T b_{\Omega_1}(u, \chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m\, dt - \\ - \int_0^T \gamma(u, \chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m\, dt,$$

$$g^2_{nm}=\int_0^T b_{\Omega_1}(\chi, u, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m\, dt - \\ - \int_0^T \gamma(\chi, u, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m\, dt,$$

$$g^3_{nm}=\int_0^T b_{\Omega_1}(\chi, \chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m\, dt - \int_0^T \gamma(\chi, \chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m\, dt.$$

Мы хотим устремить n к бесконечности. Заметим, что

$$c_{nm}=\int_0^T ((\theta_m\chi)' - \theta'_m\chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1} dt =$$

$$=\int_0^T ((\theta_m\chi)' * \rho_n, (\theta_m\chi) * \rho_n)_{\Omega_1} dt - \int_0^T \theta'_m (\chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1} dt =$$

$$= - \int_0^T \theta'_m (\chi, (\theta_m\chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1} dt,$$

и, следовательно,

$$c_{nm} \to c_m = - \int_0^T \theta_m\theta'_m |\chi|^2_{\Omega_1} dt \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{9.39}$$

Аналогично,

$$d_{nm} \to d_m = -\int_0^T \theta_m \theta_m' \,|\Psi|_{\Omega_2}^2\, dt. \tag{9.40}$$

Очевидно, что

$$e_{nm} \to e_m = \nu \int_0^T \theta_m^2 a_{\Omega_1}(\chi, \chi)\, dt. \tag{9.41}$$

Для того чтобы вычислить f_{nm}, положим

$$\int_0^t \Psi\, d\sigma = F(t);$$

тогда

$$f_{nm} = \int_0^T a_{\Omega_2}(\theta_m F, (\theta_m F') * \rho_n * \rho_n)\, dt =$$

$$= \int_0^T a_{\Omega_2}((\theta_m F) * \rho_n, (\theta_m F)' * \rho_n)\, dt - \int_0^T a_{\Omega_2}(\theta_m F, (\theta_m' F) * \rho_n * \rho_n)\, dt =$$

$$= -\int_0^T a_{\Omega_2}(\theta_m F, (\theta_m' F) * \rho_n * \rho_n)\, dt,$$

откуда

$$f_{nm} \to f_m = -\int_0^T \theta_m \theta_m' a_{\Omega_2}(F, F)\, dt. \tag{9.42}$$

Нам осталось рассмотреть выражения g_{nm}^i. На минуту допустим, что доказана

Лемма 9.1. *Пусть* $v \in H^1(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$, *и пусть* Γ — *граница области* Ω; *тогда*

$$v|_\Gamma \in L^3(\Gamma)$$

и (9.43)

$$\| v|_\Gamma \|_{L^3(\Gamma)} \leqslant C \|v\|_{H^1(\Omega)}^{2/3} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/3}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\text{если } v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),\\ &\text{то } v|_\Gamma \in L^3(0, T; L^3(\Gamma)).\end{aligned} \tag{9.44}$$

Следствие: u, $\chi \in L^3(0, T; L^3(\Gamma_1))$, и потому мы можем устремить n к бесконечности в интегралах g_{nm}^i:

$$g_{nm}^1 \to \int_0^T [b_{\Omega_1}(u, \chi, \chi) - \gamma(u, \chi, \chi)]\, \theta_m^2\, dt = 0,$$

$$g_{nm}^2 \to \int_0^T [b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi) - \gamma(\chi, u, \chi)]\, \theta_m^2\, dt = g_m^2,$$

$$g_{nm}^3 \to \int_0^T [b_{\Omega_1}(\chi, \chi, \chi) - \gamma(\chi, \chi, \chi)]\, \theta_m^2\, dt = 0.$$

Из (9.39) — (9.42) и (9.38) мы выведем, что

$$c_m + d_m + e_m + f_m + g_m^2 = 0. \tag{9.45}$$

Теперь мы можем устремить m к бесконечности. Отметим, что в силу теоремы Лебега

$$-\int_0^T \theta_m \theta_m' |\chi|_{\Omega_1}^2\, dt \to \frac{1}{2} |\chi(s)|_{\Omega_1}^2 \quad \text{для почти всех } s.$$

Следовательно, мы имеем:

$$\frac{1}{2}\left(|\chi(s)|_{\Omega_1}^2 + |\Psi(s)|_{\Omega_2}^2 + a_{\Omega_2}(F(s), F(s))\right) + \nu \int_0^s a_{\Omega_1}(\chi, \chi)\, dt +$$
$$+ \int_0^s [b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi) - \gamma(\chi, u, \chi)]\, dt = 0 \quad \text{для почти всех } s. \tag{9.46}$$

Чтобы упростить запись, обозначим через $|f|$ норму в $(L^2(\Omega_1))^n$, а через $\|f\|$ норму в V_1; отметим, что $a_{\Omega_1}(f, f) = \|f\|^2 - |f|^2$; тогда из (9.46) мы выведем, что

$$|\chi(s)|^2 + 2\nu \int_0^s \|\chi(t)\|^2\, dt \leqslant 2\nu \int_0^s |\chi(t)|^2\, dt +$$
$$+ 2\left|\int_0^s [b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi) - \gamma(\chi, u, \chi)]\, dt\right|. \tag{9.47}$$

Однако (ср. п. 6.2)

$$|b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi)| = |b_{\Omega_1}(\chi, \chi, u)| \leqslant c_1 \|\chi\|^{3/2} |\chi|^2 \|u\|_{(L^4(\Omega_1))^2} \leqslant$$
$$\leqslant \nu \|\chi\|^2 + c_2 |\chi|^2 \|u\|_{(L^4(\Omega_1))^2}^4, \tag{9.48}$$

и по лемме 9.1 имеем:

$$|\gamma(\chi, u, \chi)| \leqslant c_3 \|\chi\|^{4/3} |\chi|^{2/3} \|u\|_{(L^3(\Gamma_1))^2} \leqslant$$
$$\leqslant \nu \|\chi\|^2 + c_4 |\chi|^2 \|u\|_{(L^3(\Gamma_1))^2}^3. \tag{9.49}$$

Подставляя (9.48), (9.49) в (9.47), получим:

$$|\chi(s)|^2 + 2\nu\int_0^s \|\chi(t)\|^2\,dt \leqslant 2\nu\int_0^s \|\chi(t)\|^2\,dt + \int_0^s M(t)\,|\chi(t)|^2\,dt,$$

где

$$M(t) = 2\nu + c_2\|u(t)\|^4_{(L^4(\Omega_1))^2} + c_4\|u(t)\|^3_{(L^3(\Gamma_1))^2}. \tag{9.50}$$

Следовательно, $M(t)\in L^1(0, T)$ и

$$|\chi(s)|^2 \leqslant \int_0^s M(t)|\chi(t)|^2\,dt \quad \text{почти всюду},$$

откуда $\chi = 0$.

Но тогда из равенства (9.46), следует, что $\Psi = 0$.

Итак, чтобы закончить доказательство теоремы, надо доказать лемму.

Доказательство леммы 9.1. Отображение $v\to v|_\Gamma$ переводит $H^{2/3}(\Omega)$ в $H^{2/3-1/2}(\Gamma) = H^{1/6}(\Gamma)$ (см. Лионс — Мадженес [1], гл. 1), а согласно Петре [1], $H^{1/6}(\Gamma)\subset L^3(\Gamma)$ (Γ имеет размерность 1), и, таким образом, мы имеем:

$$\|v|_\Gamma\|_{L^3(\Gamma)} \leqslant c_1\|v\|_{H^{2/3}(\Omega)} \leqslant C_2\|v\|^{2/3}_{H^1(\Omega)}\|v\|^{1/3}_{L^2(\Omega)} \bullet$$

Замечание 9.1. В рассматриваемой нами задаче *нелинейность возникает в граничных условиях* (9.5). При изучении задач такого типа фундаментальную роль играют следующие два замечания:

(i) взятие «следа» $v\to v|_{\Gamma_1}$ является компактным отображением

$$H^\theta(\Omega_1)\to L^2(\Gamma_1) \quad \text{при} \quad \theta > 1/2;$$

(ii) для следа выполнены оценки типа (9.43) ●

9.2. Парные уравнения

Опишем коротко два примера парных уравнений.

Пример 9.1 (см. Черняков [1]). Ищутся вектор u и скалярные функции p и w, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + \xi w = f - \operatorname{grad} p, \tag{9.51}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{9.52}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + u\cdot\operatorname{grad} w = 0, \tag{9.53}$$

граничным условиям

$$u = 0, \qquad w = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \tag{9.54}$$

и начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad (u_0, w_0 - \text{заданные функции}), \tag{9.55}$$

причем в (9.51) ξ — заданный вектор в $\mathbb{R}^n$.

Методы, использованные в § 6 при изучении уравнений Навье — Стокса, нетрудно приспособить к рассматриваемому здесь случаю; в самом деле, заметим, что

$$\int_\Omega (u \operatorname{grad} w) w \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} u) w^2 \, dx = 0.$$

Таким образом, мы установим *существование* решения $\{u, w\}$, $u \in L^2(0, T; V)$ (V определено так же, как в § 6),

$$u \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^n), \qquad w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Можно доказать *единственность* при $n = 2$ ●

Предыдущий пример относился к *«параболико-параболическому* спариванию», и мы имели дело с вариантом уравнений Навье — Стокса. Приведем теперь другой пример, отвечающий *«параболико-гиперболическому* спариванию»[1]).

Пример 9.2. Ищутся вектор u и функции p и w, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + \xi w = f - \operatorname{grad} p, \tag{9.56}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{9.57}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w + |w|^\rho w + u \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial w}{\partial t} = g\,^{2)}, \tag{9.58}$$

краевым условиям (9.54) и начальным условиям

$$u(0) = u_0, \qquad w(0) = w_0, \qquad w'(0) = w_1. \tag{9.59}$$

Заметьте — все, что надо для этого, уже сделано! После умножения (9.58) на w' пропадет член

$$\int_\Omega (u \cdot \operatorname{grad} w') w' \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} u)(w')^2 \, dx = 0.$$

---

[1]) Мы не знаем, имеет ли этот пример физический смысл.

[2]) Мы, естественно, можем увеличить число примеров, «подходящим образом спаривая» задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах.

Комбинируя методы § 1 и 6, можно доказать *существование* решения $\{u, w\}$ (и $p \in \mathcal{D}'(Q)$), удовлетворяющего условиям

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^n), \tag{9.60}$$

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{9.61}$$

$$w \in L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{9.62}$$

Можно также доказать *единственность* при $n=2$ (ρ произвольно) ●

10. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ШРЕДИНГЕРА

10.1. Постановка задачи

В этом параграфе мы будем рассматривать функции, принимающие *комплексные значения*.

Ищется решение u уравнения

$$u' - i\Delta u + |u|^\rho u = f \quad \text{в} \quad Q \tag{10.1}$$

(ρ — заданное положительное число, $i = \sqrt{-1}$, f — функция, определенная в Q), удовлетворяющее краевым и начальным условиям

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{10.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{10.3}$$

Мы коротко наметим, каким образом методы § 1 можно приспособить к рассматриваемой ситуации ●

10.2. Теорема существования и единственности

Будет доказана

Теорема 10.1. *Предположим, что*

$$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(Q), \tag{10.4}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{10.5}$$

Тогда существует единственная функция u, удовлетворяющая (10.1), (10.3), *причем*

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q), \quad p = \rho + 2, \tag{10.6}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{10.7}$$

Доказательство. 1) Выберем *«специальный базис»* в методе Фаэдо — Галёркина, т. е. возьмем собственные функции

$$-\Delta w = \lambda_j w_j, \quad j = 1, \ldots, \quad w_j \in H_0^1(\Omega). \tag{10.8}$$

«Приближенное» решение u_m определим из уравнений

$$\left(u'_m(t),\ w_j\right)+ia\left(u_m(t),\ w_j\right)+\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t),\ w_j\right)= \\ =(f(t),\ w_j),\quad 1\leqslant j\leqslant m, \tag{10.9}$$

где

$$a(\varphi,\ \psi)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_i}\,dx,$$

$$(f,\ g)=\int_{\Omega} f\bar{g}\,dx,$$

причем

$$u_m(0)=u_{0m}\in[w_1,\ \ldots,\ w_m],\quad u_{0m}\to u_0\quad \text{в}\quad H_0^1(\Omega)\cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{10.10}$$

2) Умножая (10.9) на $\overline{g_{jm}(t)}$ $\left(\text{где } u_m(t)=\sum\limits_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\,w_j\right)$ и суммируя по j, найдем:

$$\left(u'_m(t),\ u_m(t)\right)+ia\left(u_m(t),\ u_m(t)\right)+\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t),\ u_m(t)\right)= \\ =(f(t),\ u_m(t)), \tag{10.11}$$

откуда, взяв вещественную часть от обеих частей (10.11), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2+\int_{\Omega}|u_m(t)|^p\,dx=(f(t),\ u_m(t)) \tag{10.12}$$

$\left(\text{где } |f|^2=\int\limits_{\Omega}|f(x)|^2\,dx\right)$.

Отсюда следует, что

$$u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)) \text{ и в } L^p(Q). \tag{10.13}$$

3) Благодаря (10.8) мы можем в соотношениях (10.9) заменить w_j на Δw_j и, следовательно, записать (10.9) в виде

$$a\left(u'_m(t),\ w_j\right)+i\left(\Delta u_m(t),\ \Delta w_j\right)+\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t),\ -\Delta w_j\right)= \\ =a(f(t),\ w_j) \tag{10.14}$$

(поскольку f удовлетворяет (10.4)).

Из (10.14) следует, что

$$a\left(u'_m(t),\ u_m(t)\right)+i\left|\Delta u_m(t)\right|^2+\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t),\ -\Delta u_m(t)\right)= \\ =a(f(t),\ u_m(t)). \tag{10.15}$$

Для того чтобы использовать (10.15), вычислим (Re = вещественная часть):

$$2\operatorname{Re}\left(|v|^{\rho} v,\ -\Delta v\right) = 2\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|v|^{\rho} v\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|v|^{\rho}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx + 2\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\rho}{2}|v|^{\rho-2}\left(v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(v\bar{v})\,dx =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|v|^{\rho}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx + \rho\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|v|^{\rho-2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(v\bar{v})\right)^2 dx.$$

Отсюда, в частности[1], имеем

$$\operatorname{Re}\left(|u_m(t)|^{\rho} u_m(t),\ -\Delta u_m(t)\right) \geqslant 0 \tag{10.16}$$

и, следовательно, взяв вещественную часть (10.15), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a\left(u_m(t),\ u_m(t)\right) \leqslant \operatorname{Re} a\left(f(t),\ u_m(t)\right),$$

откуда мы сможем заключить, что

$$u_m \text{ ограничены в } L^{\infty}\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right). \tag{10.17}$$

4) Нам осталось оценить u'_m.

Прежде всего проверим, что $|u'_m(0)| \leqslant \mathrm{const}$[2].

Далее продифференцируем (10.9) по t. С помощью выкладок того же типа, как те, которые были использованы при выводе (10.16), мы установим, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt}\left(|u_m(t)|^{\rho} u_m(t)\right),\ u'_m(t)\right) \geqslant 0, \tag{10.18}$$

откуда мы сможем заключить, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^{\infty}\left(0,\ T;\ L^2(\Omega)\right). \tag{10.19}$$

5) Далее без труда можно перейти к пределу; законность предельного перехода доказывается методами предыдущих параграфов.

6) Единственность доказывается непосредственно: достаточно заметить, что

$$\operatorname{Re}\left(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v,\ u - v\right) \geqslant 0 \quad \forall u,\ v \in L^{p}(\Omega). \tag{10.20}$$

---

[1] Здесь мы можем получить дополнительные оценки.

[2] Здесь используется предположение $u_0 \in L^{2(\rho+1)}(\Omega)$.

11. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ БЕЗ КРАЯ И С КРАЕМ

11.1. Постановка задачи

Пусть, как всегда, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ и

$$Q = \Omega \times]0, T[, \qquad \Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

Задача 11.1. Ищется функция $w = w(x, t)$, определенная в Q и удовлетворяющая уравнению

$$\Delta w = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^{1)} \text{ в } Q \tag{11.1}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial n} + |w|^\rho w = f \text{ на } \Sigma \tag{11.2}$$

(здесь $\rho > 0$ — заданное число, функция f определена на Σ, $\partial/\partial n$ — нормальная производная, направленная *вне* Ω) и *начальным условием*

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Gamma \bullet \tag{11.3}$$

Замечание 11.1. Производная по t входит только в условие (11.2) $\bullet$

Замечание 11.2. Мы покажем ниже (п.11.2), каким образом задачу 11.1 можно сформулировать в виде нелинейной эволюционной задачи на многообразии Γ $\bullet$

Сформулируем еще две задачи подобного типа, только на этот раз они будут «гиперболическими» (как мы увидим, задача 11.1 — «параболическая»).

Задача 11.2. Ищется функция w, которая опять удовлетворяет уравнению (11.1), но на этот раз с краевым условием

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial n} + |w|^\rho w = f \quad \text{на} \quad \Sigma \tag{11.4}$$

и начальным условием

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w_1(x), \quad x \in \Gamma \bullet \tag{11.5}$$

---

[1] В наш дифференциальный оператор *не входят производные по t.*

Задача 11.3. Ищется функция w, удовлетворяющая (11.1), краевому условию

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial n}+\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^\rho \frac{\partial w}{\partial t}=f \quad \text{на} \quad \Sigma \tag{11.6}$$

и условиям (11.5).

11.2. Задача на многообразни Г

11.2.1. Оператор $\mathscr{A}$. Каждой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ сопоставим решение Φ задачи

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \Phi &= \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{11.7}$$

При этом $\Phi \in H^1(\Omega)$ и (см. Лионс — Мадженес [1]) можно определить $\partial\Phi/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Далее положим

$$\mathscr{A}\varphi=\frac{\partial \Phi}{\partial n}, \qquad \mathscr{A} \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma);\ H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{11.8}$$

Обозначим через $(\varphi, \psi)_\Gamma$ скалярное произведение на Γ. Имеем: для произвольного $\lambda > 0$ существует такое $\alpha > 0$, что

$$(\mathscr{A}\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda \|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \geqslant \alpha \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{11.9}$$

В самом деле,

$$\int_\Omega (-\Delta\Phi)\Phi\, dx = 0 = -(\mathscr{A}\varphi, \varphi)_\Gamma + \int_\Omega |\operatorname{grad}\Phi|^2 dx$$

и, следовательно,

$$(A\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda \|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Omega |\operatorname{grad}\Phi|^2 dx + \lambda \int_\Gamma \Phi^2 d\Gamma \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_1 \|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)} \geqslant \alpha \left\|\Phi|_\Gamma\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \bullet$$

11.2.2. Задача на Г. Если в любой из задач п. 11.1 мы положим

$$w(t)|_\Gamma = u(t), \tag{11.10}$$

то $\dfrac{\partial w}{\partial n}(t) = \mathscr{A}u(t)$ и, следовательно, задача 11.1 переходит в следующую задачу: ищется такая функция $u(t)$, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{A}u + |u|^\rho u = f \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \tag{11.11}$$

$$u(0) = w_0 \ (w_0 - \text{заданная функция на } \Gamma). \tag{11.12}$$

Аналогично, задача 11.2 примет следующий вид: ищется такая функция $u(t)$, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u + |u|^\rho u = f \text{ на } \Sigma, \tag{11.13}$$

$$u(0) = w_0, \; u'(0) = w_1 \text{ на } \Gamma. \tag{11.14}$$

Задача 11.3 переходит в аналогичную задачу, только (11.13) заменяется на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^\rho \frac{\partial u}{\partial t} = f. \tag{11.15}$$

Замечание 11.3. Таким образом, речь идет о задачах на многообразии Γ, причем $\mathcal{A}$ является псевдодифференциальным оператором на Γ ●

11.3. Результаты

Имеют место следующие три результата:

Теорема 11.1. *Пусть заданы f из $L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$ и w_0 из $L^2(\Gamma)$. Тогда существует единственное решение*

$$u \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)) \cap L^{\rho+2}(\Sigma), \tag{11.16}$$

удовлетворяющее (11.11) *и* (11.12).

Теорема 11.2. *Пусть заданы f из $L^2(\Sigma)$, $w_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $w_1 \in L^2(\Gamma)$. Тогда задача* (11.13), (11.14) *имеет решение u, удовлетворяющее включениям*

$$u \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Gamma)), \tag{11.17}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)). \tag{11.18}$$

Теорема 11.3. *Предположим, что*

$$f \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)), \quad f' \in L^2(\Sigma), \tag{11.19}$$

$$w_0 \in H^1(\Gamma), \tag{11.20}$$

$$w_1 \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^{2(\rho+1)}(\Gamma). \tag{11.21}$$

Тогда существует функция u, которая является единственным решением задачи (11.15), (11.14), *причем*

$$u \in L^\infty(0, T; H^1(\Gamma)), \tag{11.22}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)), \tag{11.23}$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)) \; ● \tag{11.24}$$

Мы ограничимся тем, что приведем наиболее важные моменты доказательства теоремы 11.1. Другое доказательство этой теоремы можно получить методом монотонности, который изучается в гл. 2 (более того, в § 4 гл. 2 мы встретимся с более общей ситуацией).

Доказательство теоремы 11.1. 1) Выберем s таким образом, чтобы

$$H^s(\Gamma) \subset L^p(\Gamma), \quad p = \rho + 2, \quad s \geqslant \frac{1}{2} \tag{11.25}$$

$\left(\right.$достаточно выбрать s из условий $\frac{1}{2} - \frac{s}{n-1} \leqslant \frac{1}{p}$ и $s \geqslant 1\left.\right)$. Далее выберем специальный базис w_j с помощью уравнений

$$(w_j, v)_{H^s(\Gamma)} = \lambda_j (w_j, v)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall v \in H^s(\Gamma). \tag{11.26}$$

2) Приближенное решение u_m определим следующим образом:

$$u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m],$$

$$(u'_m(t), w_j)_\Gamma + (\mathcal{A} u_m(t), w_j)_\Gamma + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j)_\Gamma = \\ = (f(t), w_j)_\Gamma, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{11.27}$$

$$u_m(0) = w_{0m} \in [w_1, \ldots, w_m] \to w_0 \text{ в } L^2(\Gamma). \tag{11.28}$$

Доказывается существование u_m в интервале $[0, T]$ с оценками

$$\begin{gathered} u_m \text{ ограничены в } L^p(\Sigma), \\ u_m \text{ ограничены в } L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)). \end{gathered} \tag{11.29}$$

3) Теперь мы получим оценку для u'_m, используя то обстоятельство, что базис $\{w_j\}$ — «специальный». Обозначим через P_m оператор проектирования

$$L^2(\Gamma) \to [w_1, \ldots, w_m];$$

тогда

$$u'_m = -P_m \mathcal{A} u_m - P_m(|u_m|^\rho u_m) + P_m f, \tag{11.30}$$

P_m является ограниченным оператором из $H^{-s}(\Gamma)$ в $H^{-s}(\Gamma)$, а, следовательно, из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{-s}(\Gamma)$ и из $L^{p'}(\Gamma)$ в $H^{-s}(\Gamma)$ (поскольку выполнено условие (11.25)). Так как $\mathcal{A} u_m$ (соответственно $|u_m|^\rho u_m$) ограничены в $L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$ (соответственно в $L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Gamma))$), то из (11.30) следует, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; H^{-s}(\Gamma)). \tag{11.31}$$

Мы применим теорему 5.1 с

$$p_0 = 2, \qquad B_0 = H^{1/2}(\Gamma),$$

$$p_1 = p', \qquad B_1 = H^{-s}(\Gamma), \qquad B = L^2(\Gamma)$$

(вложение $H^{1/2}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ компактно).

Отсюда мы выведем, что можно выбрать такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } L^p(\Sigma) \text{ и в } L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)),$$

а также $*$-слабо в $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma))$, сильно в $L^2(\Sigma)$ и почти всюду.

Обычным образом можно перейти к пределу.

4) Единственность доказывается непосредственно ●

Замечание 11.4. Имеет место один результат о гладкости по «пространственным переменным» на Г.

Если в задаче 11.1 $f \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Omega))$, то для решения u справедливо включение

$$u \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^2(0, T; H^1(\Gamma)). \qquad (11.32)$$

Отметим, что (для достаточно гладких функций)

$$(\mathcal{A}u, |u|^\rho u)_\Gamma \geqslant 0. \qquad (11.33)$$

Действительно, используя определение $\mathcal{A}u$, мы введем Φ как решение задачи

$$-\Delta\Phi = 0, \quad \Phi|_\Gamma = u;$$

тогда

$$(-\Delta\Phi, |\Phi|^\rho \Phi) = 0 = -(\mathcal{A}u, |u|^\rho u)_\Gamma + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\Phi|^\rho \Phi)\, dx.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{A}u, |u|^\rho u)_\Gamma = (\rho + 1) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\Phi|^\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)^2 dx, \qquad (11.34)$$

откуда, в частности, следует (11.33).

Если функции w_j в (11.27) мы выберем таким образом, чтобы

$$\mathcal{A}w_j = \lambda_j w_j \qquad (11.35)$$

(эти функции, вообще говоря, будут отличаться от w_j, определенных с помощью (11.26)), то получим:

$$(u'_m, \mathcal{A}u_m)_\Gamma + \| \mathcal{A}u_m(t) \|^2_{L^2(\Gamma)} + (|u_m|^\rho u_m, \mathcal{A}u_m) = (f, \mathcal{A}u_m),$$

откуда мы можем заключить благодаря (11.33), что

$$u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^2(0, T; H^1(\Gamma)).$$

У нас нет (вообще говоря) оценки для u'_m [1], но мы можем перейти к пределу, используя метод монотонности (гл. 2) ●

Замечание 11.5. С помощью методов того же типа, что и в теореме 1.2, можно показать, что если ρ удовлетворяет условию

$$\rho \leqslant \frac{1}{n-2} \quad (\rho \text{ произвольно при } n=2), \tag{11.36}$$

то решение из теоремы 11.2 единственно [2].

В доказательстве основную роль играет следующее обстоятельство. Если u и v — два решения и $w = u - v$, $\Phi = \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v\right)\frac{1}{u-v}$, то

$$|(\Phi w, w')_\Gamma| \leqslant \|w'(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|w(t)\|_{L^{q_1}(\Gamma)} \|\Phi(t)\|_{L^r(\Gamma)},$$

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n-1)} \quad \left(H^{1/2}(\Gamma) \subset L^{q_1}(\Gamma)\right), \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r} = 1,$$

откуда

$$|(\Phi w, w')_\Gamma| \leqslant c \|w'(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|w(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \times \\ \times \left[\left(\int_\Gamma |u|^{\rho r} d\Gamma\right)^{1/r} + \left(\int_\Gamma |v|^{\rho r} d\Gamma\right)^{1/r}\right],$$

а так как в силу (11.36) $\rho r = 2\rho(n-1) \leqslant q_1$, то

$$|(\Phi w, w')_\Gamma| \leqslant c \|w'(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|w(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \bullet$$

11.4. Случай многообразия с краем

Оператором «той же самой природы», что и (11.8), является оператор

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x_i - \xi} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})\, d\xi$$ [3]

(интегралы понимаются в смысле главных значений), действующий на функции u, определенные в $\Gamma =]-1, 1[^{n-1}$.

---

[1] Можно получить оценку производной дробного порядка по t от u_m (как в п. 6.5), если ρ не «слишком велико».

[2] Если условие (11.36) не выполнено, то вопрос о единственности в теореме 11.2 остается открытым.

[3] Мы берем $n-1$ вместо n и Γ вместо Ω, чтобы сделать более явной аналогию с предыдущими рассуждениями.

Это эллиптический оператор порядка 1. Результаты, аналогичные предыдущим, имеют место для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u + |u|^\rho u = f, \qquad \text{и т. д.,}$$

только надо $H^{1/2}(\Gamma)$ заменить на $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ (см. Лионс — Мадженес [1], теорема 11.7 гл. 1) ●

12. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

12.1. Постановка задачи (см. также гл. 2 § 3)

Ищется такая функция u, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{12.1}$$

(где $p > 2$ задано) и выполнены краевые и начальные условия:

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{12.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{12.3}$$

Замечание 12.1. Задачи указанного выше типа возникают во многих приложениях: теория распространения тепла, диффузия газа, и т. д. Уравнение (12.1) *вырождается* при $u = 0$, откуда и берется терминология, принятая в этом пункте ●

Априорная оценка. Если обе части (12.1) мы умножим на u и проинтегрируем по частям, то получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + M(u(t))^p = (f(t), u(t)), \tag{12.4}$$

где мы положили

$$M(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |v|^{p-2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/p}. \tag{12.5}$$

Функция $v \to M(v)$ *не является* нормой, в связи с чем *использование* априорных оценок типа (12.4) требует дополнительных рассмотрений, главное из которых связано с обобщением теоремы 5.1 о компактности.

Замечание 12.2. Естественно, что уравнение (12.1) выбрано в качестве «модельного». Излагаемый ниже метод работает во многих других ситуациях. По этому поводу мы отсылаем к работам Дубинского [1], [2].

12.2. Один дополнительный результат о компактности

В условия теоремы 5.1 входили следующие пространства:

(i) банаховы пространства $B_0 \subset B \subset B_1$, причем вложение $B_0 \to B$ *компактно*;

(ii) пространство таких $v \in L^{p_0}(0, T; B_0)$, что $dv/dt \in L^{p_1}(0, T; B_1)$.

В рассматриваемой ситуации мы заменяем пространство Банаха B_0 *множеством* S, снабженным функцией $v \to M(v)$: $S \to \mathbb{R}_+$, причем

$$S \subset B \subset B_1, \quad M(v) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad S, \; M(\lambda v) = |\lambda| M(v), \tag{12.6}$$

$$\text{множество } \{v \mid v \in S, M(v) \leqslant 1\} \text{ относительио компактно в } B. \tag{12.7}$$

Далее рассматривается множество $\mathcal{F}$ (которое «заменяет» ограниченные множества в пространстве из (ii)):

$$\mathcal{F} = \Big\{v \mid v \text{ локально суммируемая функция в интер-} \\ \text{вале }]0, T[\text{ со значениями в } B_1, \int_0^T M(v(t))^{p_0} dt \leqslant c_1, \\ v' \text{ принадлежат ограннченному множеству} \\ \text{в } L^{p_1}(0, T; B_1)\Big\}. \tag{12.8}$$

Имеет место следующий результат (Дубинский [2]):

Теорема 12.1. *Предположим, что выполнены условия* (12.6) *и* (12.7) *и* $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, *где* p_i *взяты из определения* (12.8). *Тогда* $\mathcal{F} \subset L^{p_0}(0, T; B)$ *и* $\mathcal{F}$ *относительно компактно в* $L^{p_0}(0, T; B)$.

Замечание 12.3. Если положить $S = B_1$ и $M(v) = \|v\|_{B_1}$, то теорема 12.1 перейдет в теорему 5.1. Нам кажется полезным разделить эти два результата; отметим также, что излагаемый ниже метод в одном пункте отличается от метода § 5.

Доказательство теоремы 12.1. Предположим на минуту, что уже доказана следующая ниже лемма (вариант леммы 5.1).

Лемма 12.1. *Пусть выполнено предположение* (12.7) *и* $\forall \eta > 0$. *Тогда существует такая константа* c_η, *что*

$$\|u - v\|_B \leqslant \eta [M(u) + M(v)] + c_\eta \|u - v\|_{B_1} \quad \forall u, v \in S. \tag{12.9}$$

Пусть u_n — последовательность из $\mathcal{F}$. Мы хотим показать, что из этой последовательности можно выделить подпоследовательность Коши в $L^{p_0}(0, T; B)$. В силу (12.9) для этого достаточно показать, что можно выделить подпоследовательность

Коши в $L^{p_0}(0, T; B_1)$. В самом деле, благодаря (12.9) $\forall\eta$ существует такое c_η, что

$$\int_0^T \| u_{n+m}(t) - u_n(t) \|_B^{p_0} dt \leqslant \eta \int_0^T [M(u_{n+m}(t))^{p_0} + M(u_n(t))^{p_0}] dt + \\ + c_\eta \int_0^T \| u_{n+m}(t) - u_n(t) \|_{B_1}^{p_0} dt,$$

откуда и следует наш результат.

Мы докажем несколько больше, а именно:

можно выбрать такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \quad \text{в} \quad C^0([0, T]; B_1). \tag{12.10}$$

Действительно:

1) для почти всех t (другими словами, для $t \notin Z$, где $\operatorname{mes}(Z) = 0$) можно выделить такую подпоследовательность (*зависящую от* t), что

$$M(u_k(t)) \leqslant K_t < \infty \tag{12.11}$$

(это доказывается от противного: если существует такое множество E положительной меры, что

$$M(u_n(t))^{p_0} \to \infty \quad \forall t \in E,$$

то

$$\int_0^T M(u_n(t))^{p_0} dt \geqslant \int_E M(u_n(t))^{p_0} dt \to \infty,$$

что противоречит (12.8));

2) в силу (12.7), (12.11) (и однородности $M(v)$) можно для любого $t \notin Z$ выделить такую (зависящую от t) подпоследовательность, что

$$u_k(t) \to u(t) \quad \text{сильно в} \quad B_1; \tag{12.12}$$

3) пусть последовательность $\{t_1, t_2, \ldots\}$ плотиа на отрезке $[0, T]$ и $t_i \notin Z$; ввиду (12.12) с помощью диагонального процесса можно выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu(t_i) \to u(t_i) \quad \text{сильио в} \quad B_1 \ \forall i; \tag{12.13}$$

4) однако $\forall t \in [0, T]$:

$$\| u_\mu(t_i) - u_\mu(t) \|_{B_1} = \left\| \int_t^{t_i} u'_\mu(\sigma)\, d\sigma \right\|_{B_1} \leqslant \\ \leqslant |t_i - t|^{1/p'_1} \left(\int_t^{t_i} \| u'_\mu(\sigma) \|_{B_1}^{p_1} d\sigma \right)^{1/p_1} \leqslant c\, |t_i - t|^{1/p'_1}.$$

а так как последовательность t_l плотна и выполнено (12.13), то u_μ сходятся в B_1 равномерно на всем отрезке $[0, T]$, откуда и следует утверждение (12.10).

Итак, чтобы закончить доказательство теоремы, мы должны доказать лемму.

Доказательство леммы 12.1. Мы будем рассуждать таким же образом, как в лемме 5.1. Если неравенство (12.9) не справедливо, то существует η_0 и две такие последовательности $u_n, v_n \in S$, что

$$\| u_n - v_n \|_B \geqslant \eta_0 [M(u_n) + M(v_n)] + n \| u_n - v_n \|_{B_1}.$$

Положим

$$\tilde{u}_n = \frac{u_n}{M(u_n) + M(v_n)}, \qquad \tilde{v}_n = \frac{v_n}{M(u_n) + M(v_n)}.$$

Тогда

$$\| \tilde{u}_n - \tilde{v}_n \|_B \geqslant \eta_0 + n \| \tilde{u}_n - \tilde{v}_n \|_{B_1}, \tag{12.14}$$

$$M(\tilde{u}_n) \leqslant 1, \qquad M(\tilde{v}_n) \leqslant 1. \tag{12.15}$$

В силу (12.15) и предположения (12.7) можно выделить две такие последовательности $\tilde{u}_\mu$, $\tilde{v}_\mu$, что

$$\tilde{u}_\mu \to u, \quad \tilde{v}_\mu \to v \text{ сильно в } B. \tag{12.16}$$

Но из (12.14) следует, что

$$\| \tilde{u}_\mu - \tilde{v}_\mu \|_{B_1} \leqslant \frac{c}{\mu},$$

и, следовательно, $u = v$. Поэтому $\tilde{u}_\mu - \tilde{v}_\mu \to 0$ сильно в B, что противоречит (12.14)●

Пример применения теоремы 12.1. При использовании теоремы 12.1 нам понадобится

Предложение 12.1. *Пусть*

$$S = \{ v \,|\, |v|^{(p-2)/2} v \in H_0^1(\Omega) \}, \tag{12.17}$$

и пусть функция $M(v)$ *определена в* (12.5). *Тогда выполнено условие* (12.7), *если в качестве* B *взято*

$$B = L^p(\Omega)\,^{1)}. \tag{12.18}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что

$$M(v) = \left(\frac{4}{p^2}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (|v|^{(p-2)/2} v) \right)^2 dx \right)^{1/p}. \tag{12.19}$$

---

¹) Это условие можно улучшить, см. следующее ниже доказательство.

Положим $\beta(v) = |v|^{(p-2)/2} v$. Если v_n — последовательность из S, то $\beta(v_n)$ ограничены в $H_0^1(\Omega)$, а, следовательно, и в $L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ (где q произвольно и конечно при $n = 2$). Но тогда v_n ограничены в $L^{pq/2}(\Omega)$, а так как вложение $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ компактно, можно выделить такую подпоследовательность v_μ, что

$$v_\mu \to v \quad \text{слабо в} \quad L^{pq/2}(\Omega), \tag{12.20}$$

$$\beta(v_\mu) \to \chi \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \text{ и почти всюду.} \tag{12.21}$$

Из монотонности $\lambda \to \beta(\lambda)$ и (12.21) вытекает, что

$$v_\mu \to \beta^{-1}(\chi) \text{ почти всюду,}$$

следовательно (лемма 1.3), $v_\mu \to \beta^{-1}(\chi)$ слабо в $L^{pq/2}(\Omega)$ и $\beta^{-1}(\chi) = v$. Поэтому $v_\mu \to v$ слабо в $L^{pq/2}(\Omega)$ и почти всюду. Отсюда вытекает, что $v_\mu \to v$ *сильно* в $L^s(\Omega)$ $\forall s < pq/2$ (и, в частности, для $s = p$); действительно, согласно теореме Егорова, $\forall \varepsilon > 0$ существует такое множество $E \subset \Omega$, что $\operatorname{mes}(E) \leqslant \varepsilon$ и сходимость $v_\mu \to v$ равномерна в $\complement E$; тогда

$$\int_\Omega |v_\mu - v|^s\, dx = \int_{\complement E} |v_\mu - v|^s\, dx + \int_E |v_\mu - v|^s\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\complement E} |v_\mu - v|^s\, dx + \left(\int_E |v_\mu - v|^{pq/2}\, dx\right)^\theta \varepsilon^{1-\theta}, \quad \theta = \frac{2s}{pq},$$

откуда и следует наше утверждение ●

12.3. Решение задачи

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение:

Теорема 12.2. *Пусть f принадлежит $L^{p'}(Q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а u_0 принадлежит $L^2(\Omega)$. Тогда существует, и притом одна, функция u, удовлетворяющая* (12.1), (12.3) *и включениям*

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{12.22}$$

$$|u|^{(p-2)/2} u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{12.23}$$

$$u' \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)). \tag{12.24}$$

Доказательство существования. 1) Мы хотим использовать метод Фаэдо — Галёркина с выбором *специального базиса*. Выберем r таким образом, чтобы

$$\varphi \in H_0^r(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_j} \in L^p(\Omega). \tag{12.25}$$

Возьмем

$$r=\left(\frac{p-2}{2}\right)\frac{n}{p}+2; \tag{12.26}$$

тогда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}\in H_0^{\left(\frac{p-2}{2}\right)\frac{n}{p}}(\Omega)$$

и включения (12.25) будут выполнены, см. Петре [1]. Возьмем в качестве w_j собственные функции

$$(w_j,\ v)_{H_0^r(\Omega)}=\lambda_j(w_j,\ v)\qquad \forall v\in H_0^r(\Omega) \tag{12.27}$$

и определим $u_m(t)$ условиями

$$\begin{gathered}u_m(t)\in[w_1,\ \ldots,\ w_m],\\ (u_m'(t),\ w_j)+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|u_m|^{p-2}D_iu_mD_iw_j\,dx=(f(t),\ w_j),\\ 1\leqslant j\leqslant m,\\ u_m(0)=u_{0m}\to u_0\ \text{в}\ L^2(\Omega).\end{gathered} \tag{12.28}$$

2) Из (12.28) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2+\frac{4}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(D_i\left(|u_m|^{(p-2)/2}u_m\right)\right)^2dx=(f(t),\ u_m(t)), \tag{12.29}$$

откуда

$$u_m\ \text{ограничены в}\ L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \tag{12.30}$$

$$|u_m|^{(p-2)/2}u_m\ \text{ограничены в}\ L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)). \tag{12.31}$$

3) Оценка для u_m'. Форма

$$v\to\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|u|^{p-2}D_iuD_iv\,dx=a(u,\ v)$$

записывается в виде

$$a(u,\ v)=(g(u),\ v),\qquad \|g(u)\|_{H^{-r}(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}. \tag{12.32}$$

Действительно,

$$a(u,\ v)=-\frac{1}{(p-1)}\int_\Omega|u|^{p-2}u\,\Delta v\,dx,$$

и, следовательно,

$$|a(u, v)| \leqslant \frac{1}{(p-1)} \| |u|^{p-2} u \|_{L^{p'}(\Omega)} \| \Delta v \|_{L^p(\Omega)} \leqslant c \| u \|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \| v \|_{H_0^r(\Omega)},$$

(в силу (12.25))

откуда следует (12.32).

Далее, соотношения (12.28) можно записать в виде

$$(u'_m(t) - g(u_m(t)) - f(t), w_j) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{12.33}$$

где

$$\| g(u_m(t)) \|_{H^{-r}(\Omega)} \leqslant c \| u_m(t) \|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.$$

Из этой оценки в силу (12.31) следует, что

$$g(u_m(t)) \text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega)) \tag{12.34}$$

(это утверждение не оптимально, но его хватает для наших дальнейших целей).

Пусть P_m—ортогональный проектор (в $L^2(\Omega)$) на $[w_1, \ldots, w_m]$; P_m является ограниченным оператором из $\mathscr{L}(H_0^r(\Omega); H_0^r(\Omega))$ и $\mathscr{L}(H^{-r}(\Omega); H^{-r}(\Omega))$, и поэтому из соотношений (12.33), записанных в виде $u_m = P_m(g(u'_m) + f)$, и из (12.34) следует, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega)). \tag{12.35}$$

4) Теперь мы можем применить теорему 12.1, где S определено с помощью (12.17), $M(v)$ с помощью (12.5) (так что (12.31) эквивалентно тому, что $\int\limits_0^T M(u_m(t))^p \, dt \leqslant c$), $B_1 = H^{-r}(\Omega)$, $p_1 = p'$ и, наконец, $B = L^p(\Omega)$ (последнее законно в силу предложения 12.1). Следовательно, мы можем выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{12.36}$$

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L^p(0, T; L^p(\Omega)) \text{ и почти всюду}, \tag{12.37}$$

$$\beta(u_\mu) = |u_\mu|^{(p-2)/2} u_\mu \to \chi \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{12.38}$$

Благодаря (12.34) имеем: $\chi = |u|^{(p-2)/2} u$, и с помощью обычных рассуждений можно показать, что u является решением рассматриваемой задачи.

Далее, из (12.23) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^{p-2} u) = (p-1)\left(|u|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)|u|^{(p-2)/2} \in L^{p'}(Q),$$

и поэтому

$$u' = f - \frac{1}{(p-1)} \Delta\left(|u|^{p-2} u\right) \in L^{p'}\left(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)\right) \bullet$$

Доказательство единственности (Равьяр [2]). Пусть u_1 и u_2 суть два решения и $w = u_1 - u_2$. Имеем:

$$w' - \frac{1}{(p-1)} \Delta\left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right) = 0.$$

Умножив скалярно на $(-\Delta)^{-1} w$ и проверив, что это скалярное произведение имеет смысл, найдем:

$$(w', w)_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{(p-1)}\left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2, u_1 - u_2\right) = 0$$

(где $(f, g)_{H^{-1}(\Omega)} = \left(f, (-\Delta)^{-1} g\right)$).

Так как (ввиду *монотонности* $\lambda \to |\lambda|^{p-2} \lambda$)

$$\left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2, u_1 - u_2\right) \geqslant 0,$$

то из (12.39) следует, что

$$\frac{d}{dt} \| w(t) \|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant 0,$$

откуда $w = 0 \bullet$

Замечание 12.4. Мы встретимся с другим доказательством этой теоремы (в немного более общей ситуации) в п. 3.2 гл. 2 $\bullet$

13. ПРОБЛЕМЫ

13.1. Можно ли освободиться от условия (1.49) в теореме 1.2?

13.2. Справедлив ли результат, аналогичный теореме 2.2, для уравнений типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - u^{1+\alpha} = 0?$$

(Без члена $-u^{1+\alpha}$ эти уравнения изучены в § 8 гл. 2.)

13.3. Справедливы ли для уравнения (например)

$$u'' - \Delta u + (u')^3 = f$$

результаты, аналогичные тем, которые коротко указаны для уравнения $u'' - \Delta u + u^3 = f$ в замечании 1.6?

13.4. Имеет ли место единственность в теореме 4.1?

13.5. Рассмотрим систему типа Коши — Ковалевской [1]), «привязанную» к системе (4.2), (4.3):

$$u_1'' + a_1\Delta^2 u_1 - [u_1, u_2] = f,$$
$$\varepsilon_1 u_2'' + \varepsilon_2 u_2' + a_2\Delta^2 u_2 + [u_1, u_1] = 0, \quad \varepsilon_i \geqslant 0, \ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0,$$

и дополним эту систему начальными данными для u_2. Будет ли полученная задача корректной, а ее решение (если оно существует) будет ли аппроксимацией для системы (4.2), (4.3)? Что касается положительных результатов этого типа, то см. гл. 4, § 4.

13.6. Имеет ли место единственность в теореме 6.1?

13.7. Если в методе п. 6.4 взять в качестве w_j произвольный базис (а не специально выбранный), то будет ли процесс Фаэдо — Галёркина тем не менее сходящимся? (Аналогичный вопрос возникает каждый раз, когда используется «специальный базис».)

13.8. Что происходит в ситуации п. 6.9 при $\nu \to 0$, если не менять граничные условия?

13.9. «Задачи назад» (получающиеся при изменении направления времени), как правило, «некорректны» (или по меньшей мере считается, что они «некорректны».) Можно ли

(i) показать, что они некорректны;

(ii) получить свойство, заменяющее *единственность назад* для линейных параболических уравнений?

13.10. (Как и предыдущая проблема, эта проблема касается всех примеров, рассмотренных как в этой главе, так и во всех последующих.) Рассматривается нелинейная задача, которую символически можно записать в виде

$$u' + \mathscr{A}(u) = 0,$$

где $u(0) = u_0$. Когда u_0 пробегает пространство начальных данных, что можно сказать о *множестве*, которое пробегает $u(T)$?

13.11. Можно ли изучить природу (например, метрическую энтропию) множества начальных условий, для которых рассматриваемая задача «корректна»?

14. КОММЕНТАРИИ

Как отмечено в тексте, уравнение (1.1) возникает в релятивистской квантовой механике. Сверх библиографических указаний, сделанных в тексте, отметим работу Юргенса [1], который для задачи Коши установил теорему

---

[1]) По поводу такой терминологии см. примечание редактора на стр. 58. — *Прим. ред.*

существования и единственности более сильную, чем теорема 1.2; этот результат получен путем сведения (с использованием элементарного решения волнового оператора) исходной задачи к эквивалентному интегральному уравнению. Отметим работы Сигала [1], [2], [3], Бродского [1] и Штрауса [2], [4].

Отметим также работу Браудера [2]. Теорема 1.3 принадлежит Сазеру [1], [2]; к этим работам мы отсылаем по поводу дополнительных свойств гладкости.

Метод аппроксимации с помощью дифференциальных уравнений, используемый на протяжении всей главы, для линейных эволюционных гиперболических задач был введен Фаэдо [1], для линейных эволюционных параболических задач — Грином [1], а для *нелинейных задач* (где этот метод играет фундаментальную роль) Хопфом [1] в связи с уравнениями Навье — Стокса (см. § 6). Этот метод (в соединении с дискретизацией по временно́му переменному) используется в численных приложениях (см. Дуглас — Дюпон [1]).

Результаты п. 1.8, по-видимому, новые. Один результат, аналогичный теореме 1.6, но с более сильными предположениями о гладкости f, u_0, u_1 имеется в работе Сазера [1] (теорема 5.1). В доказательстве теоремы 1.6 используется тот же метод, что в работе Лионса — Штраусса [1] для доказательства леммы 2.1; он является адаптацией метода Лионса — Проди [1] для уравнений Навье — Стокса.

Теорема 2.1 принадлежит Саттингеру [2] (см. также его работу [1] и работу Келлера [1] в связи с результатом о несуществовании). При изложении теоремы 2.1 мы использовали одно замечание Фужиты (личное сообщение).

Теорема 2.2 принадлежит Фужите (см. [1], [2], где можно найти дополнительные результаты); им доказано несуществование обычных решений; мы слегка обобщили этот результат на случай слабых решений.

Другой результат о несуществовании для нелинейных параболических уравнений (использующий, кроме того, выпуклость) имеется в работе Каплана [1], § 6.

По поводу результатов о несуществовании для нелинейных гиперболических уравнений см. работы Забуского [2], Лакса [2], Мак-Ками—Мизела [1].

Результаты § 3 принадлежат Лионсу — Штрауссу [1], там же можно найти дополнительные результаты (в этом направлении см. также работы Мидзохаты — Ямагути [1], [2], Аримы — Хасегавы [1]).

С точностью до технических деталей результаты п. 4.1 принадлежат Морозову [1] и Воровичу [1]. Стационарному случаю (пп. 4.3, 4.4) посвящены многочисленные работы; в тексте изложены лишь самые элементарные сведения по этому поводу. Рассматриваемые уравнения (уравнения Кармана), изученные, в частности, в работах Бергера [3], [4], [5], Бергера — Файфа [1], Файфа [1], приводят к *задаче на собственные значения для нелинейных операторов* (см. Бергер [1], [2]; общее изложение имеется у Браудера [1], [7]); в этой связи применяется техника бесконечномерных многообразий (мы отсылаем к Пале [1]) и теория Люстерника — Шнирельмана (см. Браудер [1], Пале [1], Дж. Шварц [1]), см. также Базли — Цвален [1]. Другие результаты о гладкости (по сравнению с теоремой 4.4) имеются у Найтли [2]. Отметим также, что уравнения параболического типа

$$u_1' + a_1 \Delta^2 u_1 - [u_1, u_2] = f_1,$$

$$u_2' + a_2 \Delta^2 u_2 + [u_1, u_1] = f_2$$

изучаются проще, чем системы в тексте; в этой связи мы отсылаем к работе Дубинского [4].

Нелинейные краевые задачи *зависят от области*, и их изучение связано с теорией собственных значений нелинейных задач и теорией устойчивости. См. Гельфанд [1], Фужита [3]; по поводу обыкновенных (нелинейных) уравнений см. Бейли и Уолтмен [1], Бейли, Шампин и Уолтмен [1], Келлер [1], Лясота — Опиль [1], Шампин [1].

Результаты § 5 далеки от оптимальных, но достаточны для наших целей. Более полные теоремы, принадлежащие Обэну [1], используют результаты о компактности Лионса — Петре [1]. Теорема 5.2 приведена у Лионса [14] (1-е издание, гл. 4). Метод оценок п. 5.3 был предложен Лионсом [3] в связи с уравнениями Навье—Стокса и использован в работе Лионса—Штраусса [1] (где содержится также случай неограниченной области Ω). Здесь следует отметить результаты де Джорджи [3] и Флеминга [6] о компактности в L^1, использующие работу Чезари [3]. Эти результаты играют важную роль в теории гиперболических систем законов сохранения.

В § 6, 7 рассматриваются уравнения Навье — Стокса. В этих параграфах мы *ни в коей мере* не ставили своей задачей дать *полное* изложение вопроса, мы только старались выделить некоторые важные результаты; другие результаты для различных «моделей» будут даны в гл. 2, и еще другие результаты, связанные с другими методами, будут даны в гл. 3, 4. Основополагающие результаты этой теории содержатся в классических работах Лере [1], [2], [3]. Общее изложение этих вопросов можно найти в книге Ладыженской [1]; мы пошли по несколько другому пути и получили в некоторых случаях лучшие результаты. Теорема 6.1 по существу принадлежит Хопфу [1]; приведенное здесь доказательство, как нам кажется, проще и является более общим; в этом доказательстве мы используем метод, предложенный Лионсом [3] (метод п. 6.4); метод п. 6.4, использующий дробные производные, принадлежит автору, см. Лионс [1], [2]. Теорема 6.2 принадлежит Проди и автору, см. Лионс — Проди [1]; см. также Ладыженская [4], где рассмотрена иная ситуация (двумерный случай с особенностью). Теорема 6.7 принадлежит Ладыженской [1]. Теорема 6.8 принадлежит Проди [1] и Серрину [1], где можно найти другие результаты. Имеется множество результатов о существовании локальных по t сильных решений; см. Фужита—Като [1], Фужита — Масуда [1], Ито [1], Шинброт—Каниель [1], Каниель—Шинброт [1], Соболевский [1]. Свойства гладкости установлены Фойяшем и Проди [1], Масудой [1], Кахан [1], Серрином [2]. См. также обзор Сибагаки — Рикимару [1].

Доказательство единственности в теореме 6.11 принадлежит Юдовичу [2]. Существование «классических» решений уравнения Эйлера (случай $\nu=0$) доказано Като [1].

Доказательство (6.140) приведено для удобства читателя. Имеется и другой подход, использующий операцию срезки (см. теорему 7.1 § 7 гл. 3 книги Ладыженской, Уральцевой, Солонникова [1]; при этом существенно используется теорема 6.1 § 6 гл. 2 этой книги).

По поводу задачи Коши и обобщения на уравнения Навье — Стокса теоремы Тихонова для уравнения теплопроводности (поведение на бесконечности по x) см. Мустата [1].

По поводу изучения уравнений Навье — Стокса (в эволюционном случае) с помощью *нелинейных полугрупп* (которые могут быть и многозначными при $n\geqslant 3$): $u_0\to$ решение в момент t (при $f=0$) см. Фойяш — Проди [2] (эта работа связана с турбулентностью).

Проблема предельного перехода при $\nu\to 0$ (в п. 6.9) часто встречается в различных ситуациях; см., например, Олейник [1] — [4]; в указанных работах [1], [2], [3] использован «*метод вязкости*» (см. замечание 6.10 в п. 6.9) для доказательства существования решений специального типа для нелинейных гиперболических уравнений первого порядка. По поводу дополнительных результатов в этом направлении можно обратиться к работам Глимма [1], Глимма — Лакса [1], Конвея и Хопфа [1], Конвея и Смита [1], Коивея и Смоллера [1], [2], Джонсона [1], Джонсона и Смоллера [1], [2]. По поводу локальных результатов для общих гиперболических систем см. Лере [7], Гординг [1]. Можно также использовать методы вариационного исчисления. Приложения к теории стохастического управлении см. Флеминг [1], [5], к теории игр — Кружков [1].

Естественно, что многие уравнения гидродинамики изучаются при помощи аналогичных методов. Отметим, в частности, уравиения магнитной гидродинамики, по поводу которых мы отсылаем к работам Дайера и Эдмундса [1], Ладыженской и Солонникова [1], Солонникова [1], Санчес-Паленсиа [1], [2] (см. также литературу в этих работах; мы здесь имеем в виду как эволюционный, так и стационарный случай).

Уравнения Навье — Стокса в стационарном случае изучаются довольно бегло в § 7. По поводу изучения «сильных» решений (т. е. решений из более узких пространств, чем V) мы отсылаем, например, к работам Финна [1]—[5], Финна — Смита [1], Фужиты [4], Каниеля [1].

Что касается единственности, то гораздо более полные результаты (по сравнению с замечанием 7.6) можно найти у Пейна [1].

По поводу различных вопросов устойчивости следует обратиться к работам Брембла и Пейна [1], Пейна [3], Серрина [6], Рабиновича [2], Вельте [1], [2] и к обзору Темама [5].

Как указано в тексте, результаты § 8 принадлежат Вишику [1], [2]. Мы снова получим эти результаты в гл. 2 более простыми методами. Однако метод Вишика содержит несколько идей, которые, как нам кажется, полезно осветить; эти идеи могут быть использованы в других задачах.

Уравнения, рассмотренные в п. 9.1, встречаются в биологии (Коэн и Рубинов [1]); на самом деле в этой работе вместо уравнения (9.3) фигурирует общее уравнение упругости, но оно не приводит ни к каким дополнительным трудностям, кроме технических. При доказательстве единственности используется одна идея Лионса — Проди [1].

В п. 9.2 мы приводим два примера парных задач (второй пример, по-видимому, искусственный). Множество более трудных парных задач встречается в приложениях; отметим парные уравнения Максвелла — Дирака (Гросс [1]) и многочисленные задачи метеорологии (см., например, Марчук [1]). Изучение *стационарного* случая, отвечающего примеру 9.1 из п. 9.2, можно найти у Зарубина [1].

Другой метод решения нелинейных уравнений Шредингера (изученных в § 10) мы дадим в п. 2.5 гл. 3. Множество других результатов, касающихся уравнений Шредингера, имеется у Поцци [1].

Линейные задачи типа тех, которые рассмотрены в § 11, возникают в гидродинамике и изучались Фридманом — Шинбротом [1], Гариповым [1], Лионсом — Мадженесом [1], т. 2. (В связи с нелинейными уравнениями на многообразии отметим работу Дурича [1], посвященную уравнениям Навье—Стокса на римановой поверхности.)

Теоремы 12.1 и 12.2 принадлежат Дубинскому [2]; у Дубинского [1] можно найти соответствующий стационарный случай; см. также результаты о гладкости (для второго порядка) у Уральцевой [1]. Единственность в теореме 12.2 доказана Равьяром [2]. Другой метод решения будет дан в п. 3.2 гл. 2. Вырождающиеся задачи такого типа изучались Олейник, Калашниковым и Чжоу Юй-линем [1] и Аронсоном [1]. Задача

$$\begin{aligned} &u' - \frac{1}{2}\Delta(u^2) = 0, \\ &u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ &u(0) = u_0, \qquad u_0 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{14.1}$$

также может быть рассмотрена; сначала решается задача

$$\tilde{u}' - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\tilde{u}| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right) = 0, \quad \tilde{u} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad u(0) = u_0; \tag{14.2}$$

далее путем применения *«слабого» принципа максимума* доказывается, что $\tilde{u} \geqslant 0$, следовательно, $u = \tilde{u}$ удовлетворяет (14.1). (Задача (14.1) также возникает в приложениях, см. Баклановская и Хаипова [1].)

Приведем еще один пример задачи, которая может быть решена методами этой главы (Гринберг [1], Гринберг, Мак-Ками и Мизел [1]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\lambda > 0),$$

$$u(0, T) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x),$$

$E > 0$ — непрерывная функция.

(Для получения интегралов энергии следует умножить на $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial t^2$; после умножении на $\partial u/\partial t$ получим, что

$$-\int_\Omega E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \int_\Omega \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\,dx,$$

где $\sigma(\mu) = \int_1^\mu E(\xi)\,d(\xi)$; можно использовать базис из собственых функций оператора $-d^2/dx^2$ с данными Дирихле в 0 и 1 [1]). См. также Дафермос [1].

Все результаты этой главы получены в пространствах Соболева, построенных над $L^p(\Omega)$. Можно также использовать пространства Соболева, построенные над пространствами Орлича. Мы отсылаем к работам Вяшика [3], Бергера [6], Браудера [8], Дубинского [6]; см. также исследование О'Нейла [1] о пространствах Орлича.

В приложениях встречаются также уравнения с «запаздывающими коэффициентами» (явление гистерезиса); мы отсылаем к работе Артола [1], где, в частности, исследованы варианты уравнений, рассмотренных Левиным и Ноэлом [1]; см., в частности, оценки, использующие функции Ляпунова (в этой связи укажем на работы Сеге, см. литературу, по «численному построению» функций Ляпунова).

Мы не развили теорию Лере и Шаудера, несмотря на то, что она связана с компактностью: ср. Лере и Шаудер [1], Браудер [7], Браудер и Петришин [1], [2], [3], Кронин [1], [2], Дж. Шварц [2]; см. также приложения в работах Лере [6], [8], Г. Миранда [1], Ниренберг [3], Роте [1]. Можно также обратиться к работе: Бергер и Бергер [1].

---

[1] Гринберг [1] применяет метод конечных разностей.

Глава 2

МЕТОД МОНОТОННОСТИ И МЕТОД МОНОТОННОСТИ И КОМПАКТНОСТИ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

1) Для чтения этой главы (кроме § 5) от читателя предполагается знакомство как минимум с § 1 и 3 и началом § 8 гл. 1.

2) *Самые существенные черты* метода монотонности [1]) показаны в § 1 и в начале § 2. Теория псевдомонотонных операторов (п. 2.4) необходима для чтения вариационных неравенств (§ 8 и 9).

3) Независимо от всей остальной главы можно читать § 2 (опуская в случае необходимости п.п. 2.5 и 2.6) и § 8.

4) Примеры § 3 и 4 важны для понимания возможностей метода монотонности.

5) § 5 при желании можно опустить; в нем мы предполагаем известным § 6 гл. 1; в этом параграфе показано на примерах (варианты уравнений Навье — Стокса), как можно *одновременно* применять методы монотонности и компактности.

1. МОНОТОННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Примеры. Случай $p > 2$

Здесь снова берется пример, разобранный в § 8 гл. 1. Ищется функция

$u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $t \in]0, T[$,

являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \tag{1.1}$$

где $p > 2$ [2]), удовлетворяющим условиям

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \text{ — заданная функция.} \tag{1.3}$$

---

[1]) Не смешивать с методами, в которых используется то обстоятельство, что некоторые операторы сохраняют отношение порядка.

[2]) Случай $p = 2$ отвечает классическому линейному уравнению теплопроводности. Случай $1 < p < 2$ связан с небольшими техническими осложнениями; он изучается ниже в п. 1.5.2.

В обозначениях, введенных в (8.5), (8.6) гл. 1, мы собираемся доказать следующий результат, *делая ударение на методе* (*монотонности*), который мы используем (и затем обобщаем).

Теорема 1.1. *Пусть заданы функции* f *и* u_0, *удовлетворяющие условиям*

$$f \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{1.4}$$

$$u_0 \in L^2(\Omega). \tag{1.5}$$

Тогда существует, и притом только одна, функция u,

$$u \in L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)), \tag{1.6}$$

удовлетворяющая (1.1) *и* (1.3).

Замечание 1.1. Положим

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right). \tag{1.7}$$

Без труда проверяется, что A отображает $W^{1, p}(\Omega)$ в $W^{-1, p'}(\Omega)$, и если u удовлетворяет (1.6), то

$$A(u) \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)).$$

Тогда из (1.4) и уравнения (1.1) следует, что

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)). \tag{1.8}$$

Из (1.8), *в частности*, следует, что функция u (после, быть может, изменения на множестве меры нуль) является *непрерывным* отображением $[0, T] \to W^{-1, p'}(\Omega)$, так что условие (1.3) *имеет смысл* ●

Замечание 1.2. Можно уточнить предыдущее замечание. Пусть V — рефлексивное пространство Банаха, содержащееся в пространстве Гильберта H, $V \subset H$, причем соответствующее вложение непрерывно и V плотно в H. Отождествляя H с его сопряженным и обозначая через V' сопряженное к V, мы, таким образом, можем отождествить H с подпространством в V':

$$V \subset H \subset V'.$$

Если задана такая функция $u \in L^p(0, T; V)$, что $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, то функция u: $[0, T] \to H$ непрерывна (после, быть может, изменения на множестве меры нуль), и отображение $u \to u(0)$ является сюръективным отображением на H ●

Замечание 1.3. Свойство (1.2) «содержится» в свойстве принадлежности (почти всюду) $u(t)$ к $W_0^{1, p}(\Omega)$ ●

1.2. Доказательство существования

1.2.1. Аксиоматические свойства A. Мы собираемся выделить те *основные свойства*[1] оператора A, определенного равенством (1.7), на которых основан метод монотонности.

(i) Положим $V = W_0^{1,p}(\Omega)$; тогда A отображает V в $V' (= W^{-1,p'}(\Omega))$, переводит ограниченные множества из V в ограниченные множества из V'[2] и обладает следующим *свойством непрерывности*:

$$\forall u,\ v,\ w \in V \text{ функция } \lambda \to (A(u+\lambda v),\ w) \text{ непрерывна как функция из } \mathbb{R} \text{ в } \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Свойство (1.9) проверяется непосредственно. Это свойство в дальнейшем будет часто появляться, и мы дадим следующее определение:

Определение 1.1. Всякий оператор $A\colon V \to V'$, обладающий свойством (1.9), называется *семинепрерывным* (hemicontinu).

(ii) Оператор A обладает следующим свойством:

$$\forall u,\ v \in V \quad (A(u) - A(v),\ u - v) \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Дадим

Определение 1.2. Всякий оператор A из V в V', обладающий свойством (1.10), называется *монотонным*.

Свойство (1.10) доказывается исходя непосредственно из определения (1.7) оператора A ●

Можно связать свойства (1.9), (1.10) оператора A с одним более общим свойством.

Определим функционал на V:

$$J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i v|^p \, dx, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.11}$$

Этот функционал *дифференцируем в смысле Гато* при всех $u \in V$, т. е. существует такое непрерывное линейное отображение $v \to J'(u) \cdot v$ пространства V в $\mathbb{R}$, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} (J(u+\lambda v) - J(u)) = J'(u) \cdot v \tag{1.12}$$

---

[1] В дальнейшем они будут обобщены.

[2] В этом случае оператор A называется *ограниченным*. Точнее, $\|A(u)\|_* \leqslant c \|u\|^{p-1}$. (Напомним, что $\|\ \ \|$, $\|\ \ \|_*$ обозначают соответственно нормы в V и V'.)

и, как нетрудно проверить,

$$J'(u) = A(u). \qquad (1.13)$$

Свойство (1.10) теперь вытекает из следующего утверждения[1]:

Предложение 1.1. *Если функционал $v \to J(v)$ дифференцируем по Гато на V и выпуклый, то отображение $u \to J'(u)$ пространства V в V' монотонно и семинепрерывно.*

Доказательство. В силу выпуклости

$$J((1-\theta)u + \theta v) \leqslant (1-\theta)J(u) + \theta J(v) \quad \forall\theta \in]0, 1[.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\theta}(J(u + \theta(v-u)) - J(u)) \leqslant J(v) - J(u),$$

откуда

$$J'(u)\cdot(v-u) \leqslant J(v) - J(u); \qquad (1.14)$$

меняя ролями u и v и складывая, найдем:

$$(J'(u) - J'(v))\cdot(u-v) \geqslant 0 \bullet$$

Замечание 1.4. Справедливо и *обратное утверждение*: если функционал J дифференцируем по Гато и если $u \to J'(u)$ — монотонный семинепрерывный оператор из V в V', то функционал J *выпуклый* ●

1.2.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ. Воспользуемся методом Фаэдо — Галёркина. Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — «базис» в V; определим «приближенное решение» $u_m(t)$ нашей задачи:

$u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m]$ (= пространство, натянутое на $w_1, \ldots, w_m$);

$$\begin{aligned} &(u_m'(t), w_j) + (A(u_m(t)), w_j) = (f(t), w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ &u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \ldots, w_m], \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{в } L^2(\Omega). \end{aligned} \qquad (1.15)$$

Из этих уравнений $u_m(t)$ определяется на интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Однако отметим, что

$$(A(u), u) \geqslant \alpha \| u \|^p, \quad \alpha > 0. \qquad (1.16)$$

Тогда в силу (1.15)[2]:

$$\frac{1}{2}| u_m(t) |^2 + \alpha \int_0^t \| u_m(\sigma) \|^p \, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \| f(\sigma) \|_* \| u_m(\sigma) \| d\sigma + \frac{1}{2} | u_{0m} |^2, \qquad (1.17)$$

---

[1] Очевидно, что функционал $J(v)$, определенный в (1.11), выпуклый.

[2] Здесь $|\ |$ означает норму в $L^2(\Omega)$.

откуда следует, что $t_m = T$ и что

$$u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; V). \qquad (1.18)$$

Следовательно, мы можем выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad *\text{-слабо}, \qquad (1.19)$$

$$u_\mu \to u \text{ в } L^p(0, T; V) \quad \text{слабо}, \qquad (1.20)$$

$$u_\mu(T) \to \xi \text{ в } L^2(\Omega) \quad \text{слабо}, \qquad (1.21)$$

$$A(u_\mu) \to \chi \text{ в } L^{p'}(0, T; V') \quad \text{слабо} \qquad (1.22)$$

(поскольку $\| A(u) \|_* \leqslant c \| u \|^{p-1}$) и, следовательно[1]), $A(u_m)$ ограничены в $L^{p'}(0, T; V')$.

Продолжим $u_m(t)$, $A(u_m(t))$, ... на R нулем вне $[0, T]$; соответствующие продолжения обозначим через $\tilde{u}_m(t)$, $A(u_m(t))^\sim$, ... Из (1.15) следует, что

$$\left(\frac{d}{dt}\tilde{u}_m(t), w_j\right) + (A(u_m(t))^\sim, w_j) =$$
$$= (\tilde{f}(t), w_j) + (u_{0m}, w_j)\,\delta(t-0) - (u_m(T), w_j)\,\delta(t-T). \qquad (1.23)$$

Теперь мы можем перейти к пределу в (1.23) при $m = \mu$ и фиксированном j, откуда мы выведем, что

$$\left(\frac{d}{dt}\tilde{u}, w_j\right) + (\tilde{\chi}, w_j) = (\tilde{f}, w_j) + (u_0, w_j)\,\delta(t-0) - (\xi, w_j)\,\delta(t-T) \;\; \forall j$$

и, следовательно,

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{\chi} = \tilde{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \qquad (1.24)$$

Сужая (1.24) на $]0, T[$, мы получим, что

$$u' + \chi = f, \qquad (1.25)$$

---

[1]) Необходимо также проверить, что оператор A переводит измеримые функции v: $[0, T] \to V$ в измеримые функции $[0, T] \to V'$. Все рассматриваемые пространства предполагаются сепарабельными, и, следовательно, достаточно показать, что $t \to (A(w(t)), w)$ — измеримая функция $\forall w \in V$. Как мы увидим ниже (примечание к определению 2.1 на стр. 190), оператор A (впрочем, при более общих предположениях) непрерывен как оператор из V (в сильной топологии) в V' (в слабой топологии), откуда и следует результат. Более того, X. Брезис показал, что всякий непрерывный оператор из одного *произвольного* банахова пространства F в другое банахово пространство G, снабженное слабой топологией, переводит измеримые функции со значениями в F в измеримые функции со значениями в G,

откуда $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, следовательно, $u(0)$ и $u(T)$ имеют смысл, и, сравнивая с (1.24), мы получим, что $u(0) = u_0$ и $u(T) = \xi$.

Итак, мы докажем существование решения, если покажем (*и это решающее место доказательства*), что

$$\chi = A(u). \tag{1.26}$$

Из свойства (1.10) следует, что

$$X_\mu = \int_0^T (A(u_\mu(t)) - A(v(t)),\ u_\mu(t) - v(t))\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in L^p(0, T; V). \tag{1.27}$$

Согласно (1.15),

$$\int_0^T (A(u_\mu),\ u_\mu)\, dt = \int_0^T (f,\ u_\mu)\, dt + \frac{1}{2} | u_{0\mu} |^2 - \frac{1}{2} | u_\mu(T) |^2$$

и, следовательно,

$$X_\mu = \int_0^T (f,\ u_\mu)\, dt + \frac{1}{2} | u_{0\mu} |^2 - \frac{1}{2} | u_\mu(T) |^2 - \int_0^T (A(u_\mu),\ v)\, dt - \int_0^T (A(v),\ u_\mu - v)\, dt,$$

откуда (поскольку $\liminf | u_\mu(T) |^2 \geqslant | u(T) |^2$):

$$\limsup X_\mu \leqslant \int_0^T (f,\ u)\, dt + \frac{1}{2} | u_0 |^2 - \frac{1}{2} | u(T) |^2 - \int_0^T (\chi,\ v)\, dt - \int_0^T (A(v),\ u - v)\, dt. \tag{1.28}$$

Из (1.25) мы можем заключить, так как интегрирование по частям законно, что

$$\int_0^T (f,\ u)\, dt + \frac{1}{2} | u_0 |^2 - \frac{1}{2} | u(T) |^2 = \int_0^T (\chi,\ u)\, dt.$$

Сопоставляя это равенство с (1.27), (1.28), получим

$$\int_0^T (\chi - A(v),\ u - v)\, dt \geqslant 0. \tag{1.29}$$

Теперь мы используем семинепрерывность для доказательства того, что из (1.29) следует (1.26). Положим $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L^p(0, T; V)$ и произвольно; тогда из (1.29) следует, что

$$\lambda \int_0^T (\chi - A(u - \lambda w),\ w)\, dt \geqslant 0,$$

откуда

$$\int_0^T (\chi - A(u - \lambda w),\ w)\, dt \geqslant 0; \tag{1.30}$$

устремляя $\lambda \to 0$ в (1.30)[1], мы получим, что

$$\int_0^T (\chi - A(u),\ w)\, dt \geqslant 0 \quad \forall w.$$

Следовательно,

$$\chi = A(u) \bullet$$

Замечание 1.5. Необходимо подчеркнуть, что *благодаря монотонности и семинепрерывности* предельный переход удалось осуществить при минимальном количестве априорных оценок (ср. с § 8 гл. 1, где для обоснования предельного перехода с помощью компактности понадобились дополнительные априорные оценки) ●

Замечание 1.6. Довольно легко можно получить априорную оценку для u'_m, беря в качестве w_j специальный базис (см. гл. 1, п. 6.3); сначала s выбирается так, чтобы

$$H_0^s(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \quad \left(\text{т. е. } \frac{s-1}{n} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right). \tag{1.31}$$

Далее проверяется (с помощью той же техники, что и в гл. 1, п. 6.3), что если в качестве базиса $\{w_j\}$ выбрать базис в $H_0^s(\Omega)$, образованный собственными функциями

$$(w_j,\ v)_{H_0^s(\Omega)} = \lambda_j (w_j,\ v) \quad \forall v \in H_0^s(\Omega), \tag{1.32}$$

то

$$u'_m \text{ ограничены в } L^{p'}(0,\ T;\ H^{-s}(\Omega)). \tag{1.33}$$

Однако, как мы уже видели в § 8 гл. 1, эта дополнительная оценка *недостаточна* для применения метода компактности.

Следует отметить, что если выбирать указанный специальный базис, то нет необходимости переходить к (1.23), (1.24); мы непосредственно имеем: $u(0) = u_0$ и $u(T) = \xi$.

---

[1] Это законно в силу теоремы Лебега.

Замечание 1.7. То обстоятельство, что метод Фаэдо — Галёркина *сходится* при любом базисе, важно для приложений, поскольку «специальные базисы» на практике, как правило, не достижимы.

1.3. Доказательство единственности

Пусть u_1 и u_2 суть два решения задачи. Тогда разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению

$$w' + A(u_1) - A(u_2) = 0, \quad w(0) = 0,$$

откуда

$$(w', w) + (A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) = 0$$

и благодаря монотонности $(w', w) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)^2| \leqslant 0$, откуда $w = 0$ ●

1.4. Один общий результат

В предыдущих доказательствах мы выделили использованные в них предположения. Неявно мы доказали следующий результат:

Теорема 1.2. *Пусть пространства V и H такие же, как в замечании* 1.2, *причем V сепарабельно*[1]. *Пусть оператор (нелинейный) A: $V \to V'$ обладает следующими свойствами:*

A: $V \to V'$ — семинепрерывный оператор

$$\text{и } \|A(v)\|_* \leqslant c\|v\|^{p-1}\text{[2]}, \tag{1.34}$$

$$A\colon V \to V' \text{ — монотонный оператор}, \tag{1.35}$$

$$(A(v), v) \geqslant \alpha\|v\|^p, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V \quad (1 < p < \infty). \tag{1.36}$$

Пусть f и u_0 — заданные функции, причем

$$f \in L^{p'}(0, T; V'), \quad u_0 \in H. \tag{1.37}$$

Тогда существует единственная функция u, такая, что

$$u \in L^p(0, T; V), \tag{1.38}$$

$$u' + A(u) = f, \tag{1.39}$$

$$u(0) = u_0\text{[3]} \; ● \tag{1.40}$$

---

[1] Это предположение не является необходимым. В несепарабельном случае в рассуждениях будет участвовать упорядоченный возрастающий фильтр конечномерных подпространств в V.

[2] См. примечание на стр. 170.

[3] Следует отметить, что из (1.38) и (1.39) вытекает включение $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, и потому условие (1.40) имеет смысл (см. замечание 1.2).

В приложениях (как мы увидим ниже в примерах 1.5.1 и 1.5.2) условие (1.36) может оказаться слишком сильным. В этой связи полезно ввести следующий *вариант* этого условия: на V задана такая полунорма $[v]$, что

существуют такие $\lambda > 0$ и $\beta > 0$, что

$$[v] + \lambda |v| \geqslant \beta \|v\| \quad \forall v \in V\,^{1)}, \qquad (1.41)$$

и предполагается, что

$$(A(v),\ v) \geqslant \alpha [v]^p, \quad 1 < p < \infty. \qquad (1.42)$$

Тогда имеет место

Теорема 1.2′. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.2, *причем* (1.36) *заменено на* (1.42), (1.41). *Тогда справедливы утверждения теоремы* 1.2.

Для доказательства достаточно несколько модифицировать (1.17) и (1.18). Мы придем к неравенству

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t [u_m(\sigma)]^p\, d\sigma \leqslant \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 + \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\|\, d\sigma. \qquad (1.43)$$

Согласно (1.41), правая часть (1.43) мажорируется выражением

$$\frac{1}{2}|u_{0m}|^2 + c_1 \left(\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\, d\sigma \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left[\left(\int_0^t [u_m(\sigma)]^p\, d\sigma \right)^{1/p} + \left(\int_0^t |u_m(\sigma)|^p\, d\sigma \right)^{1/p} \right] \leqslant c_2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p\, d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2} c_1 \left(\int_0^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\, d\sigma \right)^{1/p'} \left[\left(\int_0^t |u_m(\sigma)|^p\, d\sigma \right)^{2/p} + 1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant c_3 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p\, d\sigma + c_4 \left[\left(\int_0^t |u_m(\sigma)|^p\, d\sigma \right)^{2/p} + 1 \right],$$

и из (1.43) вытекает, что

$$|u_m(t)|^2 + \int_0^t [u_m(\sigma)]^p\, d\sigma \leqslant c_5 + c_5 \left(\int_0^t |u_m(\sigma)|^p\, d\sigma \right)^{2/p}. \qquad (1.44)$$

---

[1] $|\ |$ означает норму в H, $\|\ \|$ — норму в V.

Из (1.44) видно, что

$$|u_m(t)|^2 \leqslant c_5 + c_5 \left(\int_0^t |u_m(\sigma)|^p \, d\sigma \right)^{2/p},$$

и, следовательно,

$$|u_m(t)|^p \leqslant c_6 + c_6 \int_0^t |u_m(\sigma)|^p \, d\sigma,$$

откуда

$$|u_m(t)| \leqslant c_7. \tag{1.45}$$

Учитывая эту оценку, из (1.44) получим:

$$\int_0^t [u_m(\sigma)]^p \, d\sigma \leqslant c_8,$$

и в силу (1.41) мы, следовательно, будем иметь:

$$\int_0^t \| u_m(\sigma) \|^p \, d\sigma \leqslant \text{const}.$$

Доказательство завершается таким же образом, как в теореме 1.1 ●

Замечание 1.8. Дальше мы встретимся с обобщениями теорем 1.2 и 1.2′, которые, в частности, покрывают случай оператора A, *зависящего* от t[1]) ●

1.5. Приложения общих результатов

1.5.1. ОПЕРАТОР (1.1) С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА НЕЙМАНА. Рассмотрим оператор A, заданный с помощью равенства

$$(A(u), v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v \, dx = a(u, v), \quad p > 2\,^{2)}, \tag{1.46}$$

для $u, v \in V = W^{1,p}(\Omega)$. Взяв $H = L^2(\Omega)$, можно проверить, что выполнены условия (1.41), (1.42), где

$$[v] = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i v|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Следовательно, можно применить теорему 1.2′.

---

[1]) Нетрудно проверить, что теоремы 1.2 и 1.2′ распространяются с теми же самыми доказательствами на случай операторов A, измеримых по t и удовлетворяющих предположениям, аналогичным (1.36), (1.42), «равномерно по t».

[2]) Условие $1 < p < 2$ связано с тем случаем, когда не обязательно $W^{1,p}(\Omega) \subset H = L^2(\Omega)$; см. следующий п. 1.5.2 и § 1 гл. 3.

Выберем $f \in L^{p'}(0, T; V')$ следующим образом:

$$(f(t), v) = \int_{\Omega} f_0(x, t)\, v(x)\, dx + \int_{\Gamma} g(x, t)\, v(x)\, d\Gamma, \tag{1.47}$$

где

$$f_0 \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega)) = L^{p'}(Q) \tag{1.48}$$

и

$$g \in L^{p'}(0, T; W^{-1/p', p'}(\Gamma)). \tag{1.49}$$

В (1.49) фигурирует пространство (по поводу этих пространств см. Лионс — Мадженес [3])

$$W^{-1/p', p'}(\Gamma) \text{ — сопряженное к } W^{1/p', p}(\Gamma), \tag{1.50}$$

где

$$W^{1/p', p}(\Gamma) \text{ — пространство, пробегаемое следами } v|_{\Gamma}, \text{ когда } v \text{ пробегает } W^{1, p}(\Omega). \tag{1.51}$$

Уравнение (1.39) эквивалентно уравнению

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V, \tag{1.52}$$

и, следовательно, *существует единственная функция* $u \in L^p(0, T; W^{1, p}(\Omega))$, *удовлетворяющая* (1.1) (с заменой f на f_0), (1.3) *и условию*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = g \quad \text{на} \quad \Sigma; \tag{1.53}$$

(1.53) является условием *типа Неймана* ●

Замечание 1.9. На самом деле надо придать смысл условию (1.53). Это можно сделать методами, аналогичными тем, которые использованы Лионсом — Мадженесом [1][1] ●

Замечание 1.10. В задаче, рассмотренной в п. 1.1, можно заменить «однородное» условие (1.2) условием

$$u = g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.54}$$

где функция g, определенная на Σ, такова, что найдется функция w, удовлетворяющая условиям[2]:

$$w \in L^p(0, T; W^{1, p}(\Omega)), \quad w' \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), \quad w|_{\Gamma} = g. \tag{1.55}$$

---

[1] См. также § 4 этой главы.

[2] По поводу явных условий на g, при которых это возможно, см. Гривар [1], [2].

Если мы положим $\psi = u - w$, то задача сведется к разысканию функции ψ, являющейся решением задачи

$$\begin{aligned} &\psi' + A(\psi + w) = f - w' = f_1 (\in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega))), \\ &\psi \in L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)), \qquad (1.56) \\ &\psi(0) = u_0 - w(0) \in L^2(\Omega)\,^{1)}. \end{aligned}$$

Соображения, использованные при доказательстве теоремы 1.1, приспосабливаются к этой ситуации $^{2)}$ ●

Замечание 1.11. Аналогичным образом решается задача в том случае, когда задано условие Дирихле на $\Gamma_1 \times]0, T[$ и условие типа Неймана (т. е. типа (1.53)) на $\Gamma_2 \times]0, T[$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ●

1.5.2. Случай примера 1.1 при $1 < p < 2$. Тогда не обязательно $W_0^{1, p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (вложение может быть только при $1/p - 1/n \leqslant 1/2$), и в этой связи приходится ввести пространство

$$V = W_0^{1, p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad H = L^2(\Omega) \qquad (1.57)$$

(и тогда $V' = W^{-1, p'}(\Omega) + L^2(\Omega)$).

Если ввести полунорму на V:

$$[v] = \| v \|_{W_0^{1, p}(\Omega)},$$

то оператор A, определенный с помощью (1.7), удовлетворяет (1.41), (1.42). Следовательно, применима теорема 1.2′, *и, таким образом, утверждения теоремы* 1.1 *сохраняют силу при* $1 < p < 2$ ●

1.5.3. Операторы порядка > 2. Рассмотрим простой пример нелинейного оператора *порядка* 4. Вообще, положим

$$W^{m, p}(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), \mid \alpha \mid \leqslant m\}. \qquad (1.58)$$

Это пространство будет банаховым с нормой

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha v \|_{L^p(\Omega)}$$

и

$$W_0^{m, p}(\Omega) = \text{замыкание } \mathscr{D}(\Omega) \text{ в } W^{m, p}(\Omega). \qquad (1.59)$$

Для $u, v \in W_0^{2, p}(\Omega)$ положим

$$a(u, v) = \int_\Omega |\Delta u|^{p-2} \Delta u \, \Delta v \, dx. \qquad (1.60)$$

---

¹) Можно показать, что $w(0) \in L^2(\Omega)$.

²) Отметим, что «новый оператор» A в (1.56) *зависит от* t (из-за ψ).

Тем самым определяется оператор A: $V = W_0^{2,p}(\Omega) \to V'$, где

$$A(u) = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u). \tag{1.61}$$

Этот оператор равен $J'(u)$, если

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p\,dx,$$

и, следовательно, можно применить теорему 1.2. Тем самым мы получим *существование и единственность* функции $u \in L^p(0, T; W_0^{2,p}(\Omega))$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = f \tag{1.62}$$

и условиям (1.3)●

Замечание 1.12. Можно также рассматривать системы монотонных операторов●

1.6. Результаты о гладкости

Естественно, что в тех случаях, когда применим метод монотонности, *всякая дополнительная априорная оценка приводит к некоторому результату о гладкости*. Вот пример такого результата (ср. с § 8 гл. 1).

Теорема 1.3. *Пусть в условиях теоремы* 1.1

$$f,\ f' \in L^{p'}(Q),\quad f(0) \in L^2(\Omega),\quad u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega),\quad A(u_0) \in L^2(\Omega). \tag{1.63}$$

Тогда решение u из теоремы 1.1 *дополнительно удовлетворяет условиям*

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{1.64}$$

$$|D_i u|^{(p-2)/2} D_i u' \in L^2(Q) \quad \forall i. \tag{1.65}$$

Доказательство. Мы будем исходить из уравнений (1.15)[1], которые мы продифференцируем по t. Предполагая, что $A(u_{0m})$ ограничены в $L^2(\Omega)$, применим к u_m оценки, аналогичные оценкам п. 8.2.3 гл. 1. Отсюда мы выведем, что u_m' (соответственно $|D_i u_m|^{(p-2)/2} D_i u_m'$) ограничены в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ (соответственно $L^2(Q)$), а поскольку нам *известно* (из доказательства теоремы 1.1), что $u_m \to u$ слабо в $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$, то мы приходим к (1.64), (1.65)[2]●

---

[1] При подходящем выборе «базиса» w_j.

[2] Используя теорию нелинейных полугрупп, можно получить более точные результаты (Х. Брезис).

1.7. Сумма монотонных операторов

Пусть H — гильбертово пространство над $\mathbb{R}$ (для простоты[1]), V_i ($i=1, \ldots, q$) — рефлексивные пространства Банаха, причем $V_i \subset H$, V_i плотно в H.

Пусть $\| \quad \|_i$ — норма в V_i. Положим

$$V=\bigcap_{i=1}^{q} V_i, \quad \|v\|=\sum_{i=1}^{q}\|v\|_i. \tag{1.66}$$

Предположим, что V плотно в H и сепарабельно. Имеем

$$V \subset H \subset V', \quad V_i \subset H \subset V_i'.$$

Пусть A_i: $V_i \to V_i'$ — такие нелинейные операторы, что

$$A_i\colon V_i \to V_i' \text{ — семинепрерывный ограниченный}$$
$$\text{оператор и } \|A_i(v)\|_{*,i} \leqslant c\|v\|_i^{p_i-1}, \tag{1.67}$$

$$A_i\colon V_i \to V_i' \text{ — монотонный оператор,} \tag{1.68}$$

$$(A_i(v), v) \geqslant \alpha_i\|v\|_i^{p_i}, \ \alpha_i>0, \ \forall v \in V \text{ (или } V_i), \ 1<p_i<\infty. \tag{1.69}$$

Положим

$$A(v)=\sum_{i=1}^{q} A_i(v). \tag{1.70}$$

Можно доказать, как в теореме 1.2 (т. е. как в теореме 1.1), следующий результат:

Теорема 1.4. *Предположим, что выполнены условия* (1.67), (1.68) *и* (1.69). *Пусть заданы f и u_0, причем $u_0 \in H$ и*

$$f \in \sum_{i=1}^{q} L^{p_i'}(0, T; V_i'), \quad \frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i'}=1. \tag{1.71}$$

Тогда существует единственная функция u, такая, что

$$u \in \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(0, T; V_i), \quad u \in L^{\infty}(0, T; H), \tag{1.72}$$

$$u'+Au=f, \tag{1.73}$$

$$u(0)=u_0 \bullet \tag{1.74}$$

---

[1] В комплексном случае (1.10) следует заменить условием

$$\operatorname{Re}(A(u)-A(v), u-v) \geqslant 0.$$

Замечание 1.13. Можно указать вариант теоремы 1.4, подобный теореме 1.2′. Если $[\ ]_i$ — такая полунорма на V_i, что при подходящем λ_i

$$[v_i]+\lambda_i|v| \text{ эквивалентно } \|\ \|_i \tag{1.75}$$

и вместо (1.69) выполнено неравенство

$$(A_i(v),\ v)\geqslant\alpha_i[v]_i^{p_i}, \tag{1.76}$$

то справедливо утверждение теоремы 1.4●

Пример 1.7.1. Рассмотрим оператор A вида

$$A(\psi)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right),\quad 1<p_i<\infty. \tag{1.77}$$

Введем пространства

$$W_{x_i}^{1,p_i}(\Omega)=\left\{v\,\middle|\,v\in L^{p_i}(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^{p_i}(\Omega)\right\}, \tag{1.78}$$

которые являются пространствами Банаха с нормой

$$\|v\|_{L^{p_i}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Определим также

$$V_i=\text{замыкание } \mathscr{D}(\Omega) \text{ в } W_{x_i}^{1,p_i}(\Omega), \tag{1.79}$$

$$[v]_i=\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \tag{1.80}$$

$$A_i(v)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \tag{1.81}$$

$$V=\bigcap_{i=1}^{n}V_i \quad (\text{следовательно, } q=n). \tag{1.82}$$

Тогда $A(v)=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i(v)$, и мы сможем применить теорему 1.4 (в действительности мы сможем применить замечание 1.13).

Следовательно, мы установили *существование и единственность u, удовлетворяющего уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f \tag{1.83}$$

и условиям

$$
\begin{gathered}
u \in L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p_i}(Q), \\
u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\
u(x,\ 0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega \bullet
\end{gathered}
\tag{1.84}
$$

Пример 1.7.2. Возьмем[1])

$$
V = \{v \mid v \in W^{1,p}(\Omega),\ v|_\Gamma \in L^q(\Gamma)\};
\tag{1.85}
$$

для $u,\ v \in V$ положим

$$
a(u,\ v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v\, dx + \beta \int_\Gamma |u|^{q-2} uv\, d\Gamma, \ \beta > 0.
\tag{1.86}
$$

Применим теорему 1.4 и замечание 1.13 в следующей ситуации:

$$
\begin{gathered}
q = 2, \quad V_1 = V_2 = V, \\
(A_1(u),\ v) = a_1(u,\ v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v\, dx, \\
(A_2(u),\ v) = a_2(u,\ v) = \beta \int_\Gamma |u|^{q-2} uv\, d\Gamma, \\
[v]_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i v|^p\, dx \right)^{1/p}, \\
[v]_2 = \left(\int_\Gamma |v|^q\, d\Gamma \right)^{1/q}.
\end{gathered}
$$

Можно определить f (удовлетворяющее (1.71)) с помощью равенства

$$
\begin{gathered}
(f,\ v) = \int_\Omega f_0 v\, dx + \int_\Gamma g v\, d\Gamma, \\
f_0 \in L^{p'}(Q), \quad g \in L^{q'}(\Sigma)\ ^{2)}.
\end{gathered}
\tag{1.87}
$$

---

[1]) Условие $v|_\Gamma \in L^q(\Gamma)$ вытекает из условия $v \in W^{1,p}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$
\frac{1}{p} - \frac{1 - 1/p}{n - 1} \leqslant \frac{1}{q}.
$$

[2]) Вообще, можно брать $g \in L^{p'}(0,\ T;\ W^{-1/p'}(\Gamma)) + L^{q'}(\Sigma)$.

Тогда мы докажем *существование единственной функции u, являющейся решением задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f_0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1.88}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,\ x_i)+c\,|u|^{q-2}u=g \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.89}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x),\quad x\in\Omega\,\bullet \tag{1.90}$$

Замечание 1.14. Все определенные выше пространства на Ω и Γ *сепарабельны* ●

§ 2. СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Первый общий результат

Теорема 2.1. *Пусть V — рефлексивное сепарабельное*[1]) *банахово пространство. Пусть оператор A: $V\to V'$ обладает следующими свойствами*:

оператор A ограничен и семинепрерывен (ср. с п. 1.2.1); (2.1)

$$\text{оператор } A \text{ монотонный}; \tag{2.2}$$

$$\frac{(A(v),\ v)}{\|v\|}\to+\infty \quad \text{при} \quad \|v\|\to\infty. \tag{2.3}$$

Тогда отображение A: $V\to V'$ сюръективно, т. е. для всякого $f\in V'$ существует такое $u\in V$, что

$$A(u)=f. \tag{2.4}$$

Доказательство. 1) Пусть $w_1,\ \ldots,\ w_m,\ \ldots$ — «базис» в V; ищется функция $u_m\in[w_1,\ \ldots,\ w_m]$, удовлетворяющая равенствам

$$(A(u_m),\ w_j)=(f,\ w_j),\quad 1\leqslant j\leqslant m. \tag{2.5}$$

Существование u_m следует из леммы 4.3 гл. 1, если заметить, что

(i) $(A(u_m),\ u_m)-(f,\ u_m)\geqslant(A(u_m),\ u_m)-c\|u_m\|$

и, следовательно, в силу (2.3) $(A(u_m),\ u_m)-c\|u_m\|\geqslant 0$, когда $|u_m|=\rho$ и ρ достаточно велико;

(ii) функция $v\to(A(v),\ v)$ непрерывна на $[w_1,\ \ldots,\ w_m]$[2]).

---

[1]) В несепарабельном случае вместо пространств $[w_1,\ \ldots,\ w_m]$ следует рассмотреть упорядоченный возрастающий фильтр подпространств конечной размерности.

[2]) Из предположений (2.1), (2.2) следует, что оператор A непрерывен как оператор из V (в сильной топологии) в V' (в слабой топологии). См. более общее свойство в примечанин 1 к определению 2.1 из п. 2.4.

Согласно (2.5), получим

$$(A(u_m),\ u_m) = (f,\ u_m) \leqslant \|f\|_{V'} \|u_m\|,$$

откуда в силу (2.3) имеем

$$\|u_m\| \leqslant C.$$

Так как оператор A ограничен, то отсюда следует, что $\|A(u_m)\|_{V'} \leqslant C$.

2) Итак, мы можем выделить такую последовательность u_μ, что

$$\begin{aligned} \mu_\mu &\to u \quad \text{слабо в} \quad V, \\ A(u_\mu) &\to \chi \quad \text{слабо в} \quad V'. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Переходя к пределу в (2.5) (при $m = \mu$, j фиксировано), мы увидим, что

$$(\chi,\ w_j) = (f,\ w_j) \quad \forall j,$$

и, следовательно,

$$\chi = f. \tag{2.7}$$

С другой стороны, в силу (2.5) $(A(u_\mu),\ u_\mu) = (f,\ u_\mu) \to (f,\ u)$ и, следовательно, в силу (2.7)

$$(A(u_\mu),\ u_\mu) \to (\chi,\ u). \tag{2.8}$$

Мы увидим, что из (2.6), (2.8) *и предположений* (2.1), (2.2) *следует, что*

$$\chi = A(u). \tag{2.9}$$

Это равенство вместе с (2.7) доказывает теорему.

3) Имеем

$$(A(u_\mu) - A(v),\ u_\mu - v) \geqslant 0 \quad \forall v \in V. \tag{2.10}$$

Воспользовавшись (2.6), (2.8), мы сможем перейти к пределу в (2.10) и получить

$$(\chi - A(v),\ u - v) \geqslant 0 \quad \forall v \in V. \tag{2.11}$$

Будем рассуждать, как в конце доказательства существования в теореме 1.1.

Взяв $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, мы из (2.11) получим

$$\lambda(\chi - A(u - \lambda w),\ w) \geqslant 0.$$

Следовательио,

$$(\chi - A(u - \lambda w),\ w) \geqslant 0,$$

и, устремляя λ к 0, найдем $(\chi - A(u),\ w) \geqslant 0$ $\forall w \in V$, откуда следует (2.9) ●

Замечание 2.1. Можно «аксиоматизировать» предыдущее доказательство (это будет полезным для дальнейшего). Мы скажем, что оператор A *обладает свойством* (M), если

$$\text{«}u_\mu \to u \text{ слабо в } V,\ A(u_\mu) \to \chi \text{ слабо в } V' \text{ и}$$
$$\limsup (A(u_\mu),\ u_\mu) \leqslant (\chi,\ u)\text{»} \Rightarrow \chi = A(u). \qquad (2.12)$$

Теорема 2.1 *будет справедлива, если мы заменим условие* (2.2) *условием* (2.12) (действительно, тогда (2.9) будет следовать из (2.8) *по определению*) ●

2.2. Теорема единственности. Отображения двойственности

Очевидно, что уравнение (2.5) допускает единственное решение, если

$$(A(u) - A(v),\ u - v) > 0 \quad \forall u,\ v \in V,\ u \neq v. \qquad (2.13)$$

Приведем более тонкий результат в этом направлении.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.1 *и, кроме того, предположим, что*

норма $\|v\|$ *строго выпукла на единичной сфере в* V, (2.14)

$$A(u) = A(v) \Rightarrow \|u\| = \|v\|. \qquad (2.15)$$

Тогда уравнение (2.4) *допускает единственное решение.*

Доказательство. 1) Сначала проверим[1], что u удовлетворяет (2.4) тогда и только тогда, когда

$$(A(v) - f,\ v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in V. \qquad (2.16)$$

Действительно, если выполнено уравнение (2.4), то

$$(A(v) - f,\ v - u) = (A(u) - f,\ v - u) + (A(v) - A(u),\ v - u) =$$
$$= (A(v) - A(u),\ v - u) \geqslant 0.$$

Наоборот, если в (2.16) мы возьмем $v = u + \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, то (после деления на λ) получим:

$$(A(u + \lambda w) - f;\ w) \geqslant 0,$$

и, устремляя λ к 0, мы заключим, что $(A(u) - f,\ w) \geqslant 0$ $\forall w \in V$, откуда следует (2.4).

2) *Множество решений уравнения* $A(u) = f$ *замкнуто и выпукло.* Пусть E — множество решений указанного уравнения.

---

[1] Это замечание играет основополагающую роль при изучении неравенств, см. п. 8.9.

Для каждого $v \in V$ обозначим через S_v множество таких $u \in V$, что $(A(v) - f,\ v - u) \geqslant 0$; в силу (2.16)

$$E = \bigcap_{v \in V} S_v,$$

а так как S_v — замкнутое полупространство в V, то мы получаем наше утверждение.

3) Если выполнено условие (2.15), то множество E решений уравнения (2.4) принадлежит *сфере* $\|u\| = \rho$ с подходящим ρ, а так как E, согласно 2), замкнуто, выпукло и так как по предположению норма $v \to \|v\|$ строго выпукла, то мы получаем, что E состоит из одной точки ●

Указанные выше методы очень близки к методам, использованным при изучении *отображений двойственности*; в этой связи мы кратко изучим отображения двойственности[1]).

Пусть F — пространство Банаха над $\mathbb{R}$ с нормой $\|\ \|$, пусть $\|\ \|_*$ — дуальная норма в банаховом (сопряженном) пространстве F', и пусть $(\ ,\ )$ — скалярное произведение между F и F'.

Пусть $r \to \Phi(r)$ — непрерывная строго монотонно возрастающая функция, Φ: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Отображение J: $F \to F'$ называется *отображением двойственности относительно* Φ, если выполнены следующие условия:

$$(J(u),\ u) = \|J(u)\|_* \|u\| \qquad \forall u \in F, \tag{2.17}$$

$$\|J(u)\|_* = \Phi(\|u\|) \qquad \forall u \in F. \tag{2.18}$$

Естественно, что это определение зависит от выбранной нормы на F ●

Примеры. 1) Если $F = L^p(\Omega)$, $\|u\| = \left(\int\limits_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$, то $J(u) = |u|^{p-2} u$.

2) Если $F = W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\| = \left(\sum\limits_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$, то $J(u) = -\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ ●

Прежде чем доказывать, что оператор двойственности *всегда существует*, проверим простые свойства J, вытекающие из (2.17), (2.18).

---

[1]) Которые будут очень полезны в дальнейшем.

Предложение 2.1. *Всякое отображение двойственности монотонно.*

Доказательство. В силу (2.17) имеем:

$$(J(u)-J(v),\ u-v)=$$
$$=\|J(u)\|_*\|u\|+\|J(v)\|_*\|v\|-(J(u),\ v)-(J(v),\ u). \qquad (2.19)$$

Далее воспользуемся (2.18); полагая $\|u\|=a$, $\|v\|=b$, из (2.19) получаем

$$(J(u)-J(v),\ u-v)\geqslant(\Phi(a)-\Phi(b))(a-b), \qquad (2.20)$$

откуда и следует иаше утверждение ●

Предложение 2.2. *Если пространство F строго выпукло, то оператор J строго монотонный.*

Доказательство. Нам надо показать, что если $(J(u)-J(v),\ u-v)=0$, то $u=v$. Из (2.20) следует, что $\|u\|=\|v\|$. Заметим, что если $g\in F'$, $g\neq 0$, то $\|g\|_*=\sup\limits_{\|v\|=1}(g,\ v)$, и поскольку пространство F строго выпукло, supremum достигается в *единственной* точке единичной сферы; действительно, supremum достигается на *выпуклом* множестве единичной сферы.

Выведем отсюда, что $u=v$. Действительно, если $u\neq v$[1]), то $\dfrac{u}{\|u\|}\neq\dfrac{v}{\|v\|}$ (поскольку $\|u\|=\|v\|$) и, следовательно,

$$\|J(u)\|_*=\left(J(u),\ \frac{u}{\|u\|}\right)>\left(J(u),\ \frac{v}{\|v\|}\right),$$

откуда

$$(J(u),\ v)<(J(u),\ u),$$

а также

$$(J(v),\ u)<(J(v),\ v).$$

Но тогда

$$0=(J(u)-J(v),\ u-v)>$$
$$>(J(u),\ u)+(J(v),\ v)-(J(u),\ u)-(J(v),\ v)=0,$$

что абсурдно ●

Докажем теперь существование.

Предложение 2.3. *Всегда существует отображение двойственности относительно Φ. Это отображение однозначно определено, если пространство F' строго выпукло.*

---

[1]) Мы можем считать, что u и v отличны от иули. Если, например, $v=0$, то тогда и $u=0$.

Доказательство. 1) Пусть S — единичная сфера в F. Для каждого $u \in S$, согласно теореме Хана — Банаха, существует единственный элемент $u^* \in F'$, такой, что

$$\|u^*\|_* = 1, \qquad (u^*, u) = 1.$$

2) Определим теперь J на F равенством

$$J(\lambda u) = \Phi(\lambda) u^*, \quad \lambda \geqslant 0, \quad u \in S, \quad u^* \text{ выбрано, как в 1).} \qquad (2.21)$$

Оператор, определенный в (2.21), отвечает на наш вопрос. Единственность следует из строгой выпуклости F' (от противного) ●

Предложение 2.4. *Пусть F — рефлексивное банахово пространство со строго выпуклым сопряженным. Тогда отображение двойственности J относительно Φ семинепрерывно.*

Доказательство. На самом деле имеет место более сильное утверждение: J: $F \to F'$ — слабо непрерывное отображение.

Ввиду конструкции (2.21) достаточно проверить, что если $u_m \in S$, $u_m \to u_0$ $(u_0 \in S)$, то $J(u_m) \to J(u_0)$ слабо в F'.

Однако $\|J(u_m)\|_* = \Phi(1)$; можно выделить такую последовательность u_μ, что $J(u_\mu) \to \chi$ слабо в F'. Тогда $(J(u_\mu), u_\mu) \to (\chi, u_0)$ и, следовательно,

$$\|\chi\|_* \geqslant (\chi, u_0) = \lim (J(u_\mu), u_\mu) = \lim \|J(u_\mu)\|_* \geqslant \|\chi\|_*,$$

откуда

$$(\chi, u_0) = \|\chi\|_* \|u_0\|,$$

$$\|\chi\|_* = \Phi(\|u_0\|);$$

таким образом, $\chi = J(u_0)$, откуда и следует наше утверждение ●

Так как оператор J ограничен (в силу (2.18)) и коэрцитивен (условие (2.3) выполнено, поскольку $\Phi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$), то используя теорему 2.1 (и предложение 2.3 о существовании), мы получим следующее утверждение:

Теорема 2.3. *Пусть F — рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным. Пусть J: $F \to F'$ — отображение двойственности относительно Φ. Тогда для заданного $f \in F'$ существует единственное $u \in F$, такое, что*

$$J(u) = f \; ● \qquad (2.22)$$

Теорему 2.3 можно дополнить следующим утверждеиием:

Теорема 2.4. *Пусть F — рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным. Тогда отображение $f \in F' \to u = J^{-1}(f)$ (где u — решение (2.22)) определяет отображение двойственности $F' \to F$ относительно Φ^{-1}.*

Доказательство. Достаточно заменить u на $J^{-1}(f)$ в равенствах (2.17), (2.18) ●

Теорема 2.4 естественным образом приводит к пространствам, которые «рефлексивны» и «строго выпуклы вместе с сопряженным». В действительности второе предположение не является существенным ограничением, как это видно из следующего ниже результата Асплунда [1] (по поводу доказательства мы отсылаем читателя к указанной работе; см. также Линденштраусс [1]).

Теорема 2.5. *Пусть F — рефлексивное банахово пространство с нормой $\| \ \|$. Тогда существует такая эквивалентная норма $||| \ |||$, в которой пространство F и сопряженное к нему строго выпуклы* (в сопряженном вводится норма, двойственная к $||| \ |||$).

Этот результат можно несколько пополнить.

Теорема 2.6 (см. Брезис—Кранделл—Пази [1]). *Пусть F—рефлексивное банахово пространство с нормой $\| \ \|$. Для любого $a > 1$ существует такая норма $\| \ \|_a$ на F, что*

(i) *F и сопряженное пространство (снабженное нормой $\| \ \|_{a,*}$, двойственной к $\| \ \|_a$) строго выпуклы;*

(ii) $\frac{1}{a}\| \ \|_a \leqslant \| \ \| \leqslant a\| \ \|_a$, $\frac{1}{a}\| \ \|_{a,*} \leqslant \| \ \|_* \leqslant a\| \ \|_{a,*}$ ●

2.3. Примеры

2.3.1. Задача Дирихле для оператора A, определенного в (1.7), $1 < p < \infty$. Ввиду результатов предыдущего параграфа (и только что установленных результатов для отображений двойственности) теорема 2.1 показывает: *для заданного f из $W^{-1,p'}(\Omega)$ существует такое $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, что*

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f,$$

и имеет место единственность (в силу теоремы 2.2 или 2.3) ●

2.3.2. Неоднородная задача Дирихле. Пусть A — оператор, определенный в п. 2.3.1. *Существует единственная функция*

$u \in W^{1,p}(\Omega)$, *такая, что*

$$A(u) = f, \quad f \in W^{-1,p'}(\Omega),$$

$$u|_\Gamma = g, \quad g \in W^{1/p',p}(\Gamma) \quad (\text{см. } (1.51)).$$

Действительно, рассмотрим такую функцию $w \in W^{1,p}(\Omega)$, что $w|_\Gamma = g$ (функция w существует в силу наших предположений относительно g). Полагая $\psi = u - w$, мы придем к уравнению

$$A(\psi + w) = f, \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

т. е. мы получили задачу, аналогичную 2.3.1, в которой оператор A заменен оператором A_1:

$$A_1(\psi) = A(\psi + w), \ w \text{ — фиксированная функция из } W^{1,p}(\Omega).$$

Без труда проверяется, что оператор A_1: $W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, откуда следует *существование* решения.

Пусть u_1 и u_2 — два возможных решения. Тогда

$$u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

и, следовательно,

$$(A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) = 0 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx,$$

откуда вытекает, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \qquad \forall i,$$

а так как $u_1 - u_2 = 0$ на Γ, то $u_1 = u_2$ ●

2.3.3. Задача Неймана. Возьмем теперь

$$V = W^{1,p}(\Omega),$$

и для $u, v \in V$ положим

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v \, dx + \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx. \tag{2.23}$$

Определим $f \in V'$ с помощью равенства

$$(f, v) = \int_\Omega f_0 v \, dx + \int_\Gamma gv \, d\Gamma, \qquad f_0 \in L^{p'}(\Omega), \quad g \in W^{-1/p',p'}(\Gamma). \tag{2.24}$$

Теперь можем применить теорему 2.1; из этой теоремы вытекает *существование функции u из* $W^{1,p}(\Omega)$, такой, что

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+|u|^{p-2}u=f_0, \tag{2.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n, x_i)=g \quad \text{на} \quad \Gamma\,^{1)}. \tag{2.26}$$

Более того, это решение *единственно* (ввиду теоремы 2.3) ●

Замечание 2.3. Остальные примеры § 1 также можно адаптировать к стационарному случаю ●

Общее указание. Как мы увидим в п. 2.5, условия теоремы 2.1 недостаточны для «операторов вариационного исчисления»; с другой стороны, предположение (2.12) достаточно для этих операторов, но для фактической *проверки* этого предположения целесообразно ввести «промежуточный класс» между классами операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, и операторов, удовлетворяющих условию (2.12); это и будут *псевдомонотонные* операторы ●

2.4. Псевдомонотоиные операторы

Определение 2.1. Оператор $A: V \to V'$ называется *псевдомонотонным*, если

(i) A — ограниченный оператор;

(ii) из условия $u_j \to u$ слабо в V и $\limsup (A(u_j), u_j - u) \leqslant 0$,

вытекает, что

$$\liminf (A(u_j), u_j - v) \geqslant (A(u), u - v) \quad \forall v \in V\,^{2)} ● \tag{2.27}$$

---

[1] Условию (2.26) можно придать смысл с помощью методов Лионса — Madженеса [1], гл. 2; см. также § 4 этой главы.

[2] На самом деле из предположений (i) (без семинепрерывиости) и (ii) *следует, что A является непрерывным оператором из V (с сильной топологией) в V' (со слабой топологией)*. Действительно, предположим, что существует такая последовательность u_n, что $u_n \to u$ сильно в V, а $A(u_n)$ не стремятся к $A(u)$ слабо в V'. Так как $A(u_n)$ ограничены в V', то можно выделить такую подпоследовательность u_μ, что $A(u_\mu) \to f$ слабо в V' и $f \neq A(u)$. Тогда

$$\limsup (A(u_\mu), u_\mu - u) = 0.$$

Следовательно,

$$\liminf (A(u_\mu), u_\mu - v) = (f, u - v) \geqslant (A(u), u - v) \quad \forall v \in V,$$

и потому $f = A(u)$, что противоречит нашему предположению.

Прежде всего проверим, что введенный нами класс является «промежуточным».

Предложение 2.5. *Имеют место следующие импликации: «A — ограниченный семинепрерывный монотонный оператор» $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ «A — псевдомонотонный оператор» $\Rightarrow$ «оператор A удовлетворяет условию* (2.12)» *(т. е. «A — оператор типа* (M)»).

Доказательство первой импликации. 1) Если последовательность u_j удовлетворяет условию (ii) определения 2.1 и A — монотонный оператор, то

$$(A(u_j),\ u_j-u)\to 0. \tag{2.28}$$

В самом деле, из монотонности вытекает, что

$$(A(u_j),\ u_j-u)\geqslant(A(u),\ u_j-u)\to 0.$$

2) Пусть $w=(1-\theta)u+\theta v$, $\theta\in]0,\ 1[$; имеем:

$$(A(u_j)-A(w),\ u_j-w)\geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\theta(A(u_j),\ u-v)\geqslant-(A(u_j),\ u_j-u)+$$
$$+(A(w),\ u_j-u)-\theta(A(w),\ v-u),$$

откуда благодаря (2.28)

$$\theta\liminf(A(u_j),\ u-v)\geqslant-\theta(A(w),\ v-u).$$

Разделим обе части на θ; принимая во внимание (2.28), получим

$$\begin{gathered}\liminf(A(u_j),\ u_j-v)\geqslant(A(w),\ u-v),\\ w=(1-\theta)u+\theta v,\qquad \forall\theta\in]0,\ 1[.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Устремляя $\theta\to 0$ в (2.29), получим (2.27) ●

Доказательство второй импликации. Пусть $u_j\to u$ слабо в V, $A(u_j)\to\chi$ слабо в V' и $\limsup(A(u_j),\ u_j)\leqslant(\chi,\ u)$. Тогда $\limsup(A(u_j),\ u_j-u)\leqslant 0$, и, следовательно (в силу (2.27)),

$$(A(u),\ u-v)\leqslant\limsup(A(u_j),\ u_j-v)\leqslant(\chi,\ u-v)\qquad\forall v\in V;$$

таким образом,

$$\chi=A(u)\ ●$$

Из замечания 2.1 и предложения 2.5 вытекает

Теорема 2.7. *Пусть A — псевдомонотонный оператор, удовлетворяющий* (2.3). *Тогда $\forall f\in V'$ уравнение* (2.4) *имеет по крайней мере одно решение* ●

Все, что мы до сих пор делали, пока было лишь «игрой в абстракции», целесообразность которой проявится в пп. 2.5, 2.6 и дальше при изучении иеравенств ●

2.5. Операторы вариационного исчисления. Аксиоматическое изучение

Определение 2.2. Пусть (всюду) V — сепарабельиое рефлективное банахово простраиство. Оператор A: $V \to V'$ называется *оператором «вариационного исчисления»*, если он ограничен и может быть представлен в виде

$$A(v) = A(v, v), \tag{2.30}$$

где оператор $u, v \to A(u, v)$, рассматриваемый как оператор из $V \times V$ в V', обладает следующими свойствами:

$$\forall u \in V \quad v \to A(u, v) \text{ — семинепрерывный ограниченый оператор из } V \text{ в } V' \text{ и } (A(u, u) - A(u, v), u - v) \geqslant 0; \tag{2.31}$$

$$\forall v \in V \ u \to A(u, v) \text{ — семинепрерывный ограниченный оператор из } V \text{ в } V'; \tag{2.32}$$

$$\text{если } u_\mu \to u \text{ слабо в } V \text{ и } (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \to 0, \text{ то } \forall v \in V \ A(u_\mu, v) \to A(u, v) \text{ слабо в } V'; \tag{2.33}$$

$$\text{если } u_\mu \to u \text{ слабо в } V \text{ и } A(u_\mu, v) \to \psi \text{ слабо в } V', \text{ то } (A(u_\mu, v), u_\mu) \to (\psi, u)\text{1)} \tag{2.34}$$ ●

Пример подобной ситуации приведен в п. 2.6.

Предложение 2.6. *Имеет место импликация «A — оператор вариационного исчисления» ⇒ «A — псевдомонотонный оператор».*

Доказательство. Пусть $u_j \to u$ слабо в V, причем

$$\limsup (A(u_j), u_j' - u) \leqslant 0. \tag{2.35}$$

1) Прежде всего мы покажем, что можно выделить такую последовательность u_k, что

$$X_k = (A(u_k, u_k) - A(u_k, u), u_k - u) \to 0. \tag{2.36}$$

Действительно, можно выделить такую последовательность u_k, что $A(u_k, u) \to \chi$ в V' слабо (поскольку последовательность $A(u_j, u)$ ограничена в V'), а тогда в силу (2.34) $(A(u_k, u), u_k) \to (\chi, u)$ и, следовательно, $(A(u_k, u), u_k - u) \to 0$.

---

1) Из предположений (2.30) — (2.34) следует семинепрерывность A.

Сопоставляя последнее утверждение с (2.35), мы получим, что $\limsup X_k \leqslant 0$, а поскольку $X_k \geqslant 0$ в силу (2.31), то мы получим (2.36).

2) Теперь мы можем воспользоваться (2.33); получим:

$$A(u_k, v) \to A(u, v) \text{ слабо в } V' \quad \forall v \in V \tag{2.37}$$

и, используя (2.34), найдем:

$$(A(u_k, v), u_k - u) \to 0 \quad \forall v \in V. \tag{2.38}$$

Так как $X_k \geqslant 0$, то имеем

$$(A(u_k), u_k - u) \geqslant (A(u_k, u), u_k - u) \to 0 \text{ (согласно (2.38))},$$

и принимая во внимание (2.35), получим

$$(A(u_k), u_k - u) \to 0. \tag{2.39}$$

3) Воспользуемся теперь тем, что

$$(A(u_k) - A(u_k, w), u_k - w) \geqslant 0 \quad \forall w,$$

где $w = (1-\theta)u + \theta v$, $\theta \in]0, 1[$; отсюда

$$\theta(A(u_k), u - v) \geqslant -(A(u_k), u_k - u) + (A(u_k, w), u_k - u) + \\ + \theta(A(u_k, w), u - v),$$

и, используя (2.39), (2.38), (2.37), получим

$$\theta \liminf (A(u_k), u - v) \geqslant \theta \liminf (A(u_k, w), u - v) = \\ = \theta(A(u, w), u - v).$$

Разделив обе части на θ и воспользовавшись (2.39), найдем

$$\liminf (A(u_k), u_k - v) \geqslant (A(u, (1-\theta)u + \theta v), u - v).$$

Устремляя $\theta \to 0$, получим (2.27)●

Из предложения 2.6 и теоремы 2.7 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть A — оператор вариационного исчисления (в смысле определения 2.2). Тогда уравнение (2.4) имеет (по крайней мере одно) решение*●

2.6. Операторы вариационного исчисления. Примеры

2.6.1. ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА A.

Обозначения. Рассматривается ограниченная область Ω в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей. Через N_1 (соответственно N_2) обозначается число дифференцирований по x порядка $\leqslant m-1$ (соответственно порядка $=m$). Пусть $A_\alpha(x, \eta; \xi)$ —

семейство вещественных функций ($|\alpha| \leqslant m$), определенных в $\Omega \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ и удовлетворяющих условию:

$$\begin{gathered}\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ функция } \eta, \xi \to A_\alpha(x, \eta, \xi) \\ \text{непрерывна в } \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}, \text{ и } \forall \eta, \xi \text{ функция} \\ x \to A_\alpha(x, \eta, \xi) \text{ измерима.}\end{gathered} \tag{2.40}$$

Положим

$$\begin{gathered}D^k u = \{D^\beta u, |\beta| = k\}, \\ \delta u = \{u, Du, \ldots, D^{m-1} u\}, \\ A_\alpha(x, \delta u, D^m v)\colon x \to A_\alpha(x, \delta u(x), D_m v(x)).\end{gathered}$$

Предполагается, что

$$\begin{gathered}\text{существует такая функция } k \in L^{p'}(\Omega), \text{ что} \\ |A_\alpha(x, \eta, \xi)| \leqslant c\left[|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k(x)\right], \\ 1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.\end{gathered} \tag{2.41}$$

Можно проверить, что

$$\begin{gathered}\text{если выполнено (2.41), то } \forall u, \ v \in W^{m, p}(\Omega) \\ \text{функция } A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \text{ принадлежит } L^{p'}(\Omega)\bullet\end{gathered} \tag{2.42}$$

Замечание 2.4. Используя теорему Соболева, можно, сохранив (2.42), улучшить (т. е. увеличить) показатель степени $|\eta|$ (при этом производным разных порядков могут отвечать разные степени) ●

В предположении (2.41) благодаря (2.42) мы можем сопоставить $\forall u, \ w \in W^{m, p}(\Omega)$

$$a(u, w) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx. \tag{2.43}$$

Теперь введем

$$\begin{gathered}V \text{ — замкнутое векторное подпространство} \\ \text{в } W^{m, p}(\Omega), \text{ содержащее } W_0^{m, p}(\Omega).\end{gathered} \tag{2.44}$$

Форма $w \to a(u, w)$ линейна и непрерывна на V, следовательно, она записывается в виде

$$a(u, w) = (A(u), w), \quad A(u) \in V'\,^{1)}. \tag{2.45}$$

Для $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ оператор $A(u)$ нмеет вид

$$A(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, \delta u, D^m u)). \tag{2.46}$$

---

¹) Где (χ, v) обозначает скалярное произведение между $\chi \in V'$ и $v \in V$.

Замечание 2.5. Возникшая ситуация аналогична, с точки зрения краевых условий, линейным вариационным задачам: «основные» краевые условия состоят в принадлежности к подпространству V, дополнительные краевые условия возникают при (формальном) применении формулы Грина в (2.45).

Случай $V = W_0^{m,p}(\Omega)$ отвечает задаче Дирихле, а случай $V = W^{m,p}(\Omega)$ — задаче Неймана ●

2.6.2. ПРИМЕРЫ, В КОТОРЫХ ВЫПОЛНЕНЫ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ 2.2. Сейчас будет доказана

Теорема 2.8. *Пусть выполнены* (2.40), (2.41) *и следующие предположения:*

$$\frac{a(v, v)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty; \tag{2.47}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi)\xi_\alpha \frac{1}{|\xi| + |\xi|^{p-1}} \to \infty \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty \tag{2.48}$$

для почти всех $x \in \Omega$ *и ограниченных* $|\eta|$;

$$\sum_{|\alpha|=m} \left(A_\alpha(x, \eta, \xi) - A_\alpha(x, \eta, \xi^*)\right)\left(\xi_\alpha - \xi_\alpha^*\right) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq \xi^* \tag{2.49}$$

почти всюду в Ω *и для всех* η.

Пусть V *определено в* (2.44), *а оператор* $V \to V'$ *определен в* (2.45).

Тогда $\forall f \in V'$ *существует такое* u *из* V, *что*

$$A(u) = f. \tag{2.50}$$

При доказательстве нам понадобятся две следующие ниже леммы.

Лемма 2.1. *Если* $u_\mu \to u$ *сильно в* $W^{m-1,p}(\Omega)$ *и* $v \in W^{m,p}(\Omega)$, *то*

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \quad \text{сильно в} \quad L^{p'}(\Omega). \tag{2.51}$$

Доказательство. Эта лемма является частным случаем более общего результата: рассмотрим функцию $x, \lambda \to f(x, \lambda)$: $\Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ типа Каратеодори, т. е.

функция $\lambda \to f(x, \lambda)$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывна для почти всех $x \in \Omega$, а функция $x \to f(x, \lambda)$ измерима для всех $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Если $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\}$ — набор функций φ_i: $\Omega \to \mathbb{R}$, то положим

$$F(x, \varphi): x \to f(x, \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x)\}).$$

Мы будем говорить, что f *преобразует*

$$\prod_{i=1}^{q} L^{p_i}(\Omega) \text{ в } L^q(\Omega) \quad (1 \leqslant p_i,\ q < \infty),$$

если функция $F(x, \varphi)$ принадлежит $L^q(\Omega)$ для всех $\varphi \in \prod_{i=1}^{d} L^{p_i}(\Omega)$.

Известно (см. Красносельский [1], теорема 2.1, стр. 35), что оператор $\varphi \to F(x, \varphi)$: $\prod_{i=1}^{d} L^{p_i}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *непрерывен.*

Отсюда вытекает наша лемма, если положить

$$d = N_1 \text{ и } f(x, \lambda) = A_\alpha(x, \lambda, D^m v(x)) \bullet$$

Лемма 2.2. *Предположим, что выполнены условия* (2.41), (2.48), (2.49). *Пусть*

$$u_\mu,\ u \in W^{m,p}(\Omega), \text{ причем } u_\mu \to u \text{ слабо в } W^{m,p}(\Omega).$$

Полагая

$$F_\mu = \sum_{|\alpha|=m} \left(A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) - A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u)\right)(D^\alpha u_\mu - D^\alpha u) \quad (2.52)$$

(*заметим, что* $F_\mu \in L^1(\Omega)$), *предположим, что*

$$\int_\Omega F_\mu(x)\,dx \to 0. \quad (2.53)$$

Тогда

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \text{ слабо в } L^{p'}(\Omega). \quad (2.54)$$

Доказательство. В силу (2.49) $F_\mu \geqslant 0$; тогда, поскольку $u_\mu \to u$ *сильно* в $W^{m-1,p}(\Omega)$ (вложение $W^{m,p}(\Omega) \to W^{m-1,p}(\Omega)$ компактно [1])), из любой последовательности $\{u_\mu\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_\nu\}$, что

$$\delta u_\nu(x) \to \delta u(x),\ F_\nu(x) \to 0 \text{ почти всюду в } \Omega,$$
$$\text{скажем для } x \notin Z,\ \operatorname{mes}(Z) = 0. \quad (2.55)$$

Зафиксируем $x \notin Z$, причем так, чтобы $k(x) < \infty$ $\forall \alpha$ (где k — функция, фигурирующая в (2.41)). Положим $\eta_\nu = \delta u_\nu(x)$, $\eta = \delta u(x)$, $\xi = D^m u(x)$, и пусть ξ^* — один из пределов $D^m u_\nu(x) = \xi_\nu$.

---

[1]) Как всегда, предполагается, что граница Ω достаточно регулярна; это предположение излишне, если $V = W_0^{m,p}(\Omega)$. Следует отметить, что наш результат распространяется на случай «неограниченной области Ω», так как мы хотим иметь дело со сходимостью почти всюду и поэтому достаточно проверить рассуждения «для любого компакта».

Имеем

$$|\xi^*| < \infty. \tag{2.56}$$

В самом деле, если $\xi_\nu = \{\xi_{\nu\alpha}\}$, то

$$F_\nu(x) \geqslant \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta_\nu, \xi_\nu)\xi_{\nu\alpha} - c\left(|\xi_\nu|^{p-1} + |\xi_\nu| + 1\right), \tag{2.57}$$

и, следовательно, ввиду (2.48) $F_\nu(x) \to \infty$, коль скоро $|\xi^*| = \infty$, а так как, согласно (2.55), $F_\nu(x) \to 0$, то имеет место (2.56).

Но тогда из (2.55), (2.56) и непрерывности A_α по η, ξ вытекает, что

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(x, \eta, \xi^*) - A_\alpha(x, \eta, \xi))(\xi^*_\alpha - \xi_\alpha) = 0$$

и, следовательно, в силу (2.49)

$$\xi^* = \xi.$$

Таким образом,

$A_\alpha(x, \delta u_\nu(x), D^m u_\nu(x)) \to A_\alpha(x, \delta u(x), D^m u(x))$ почти всюду в Ω,

а так как $A_\alpha(x, \delta u_\nu, D^m u_\nu)$ ограничены в $L^{p'}(\Omega)$, то из леммы 3.1 гл. 1 следует, что

$$A_\alpha(x, \delta u_\nu, D^m u_\nu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \text{ слабо в } L^{p'}(\Omega),$$

и поскольку предел не зависит от выбора подпоследовательности, мы приходим к (2.54)●

Доказательство теоремы 2.8. 1) Нам надо показать, что A — оператор вариационного исчисления в смысле определения 2.2; тогда теорема будет вытекать из следствия 2.1.

Построение оператора $A(u, v)$. Положим

$$a_1(u, v, w) = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m v)\cdot D^\alpha w\, dx,$$

$$a_2(u, w) = \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m u)\, D^\alpha w\, dx.$$

Форма $w \to a_1(u, v, w) + a_2(u, w)$ непрерывна на V, следовательно,

$$a_1(u, v, w) + a_2(u, w) = a(u, v, w) = (A(u, v), w), \quad A(u, v) \in V', \tag{2.58}$$

и, очевидно, имеем: $A(u, u) = A(u)$.

Без труда проверяется, что A — ограниченный семинепрерывный оператор; чтобы придти к требуемому результату, нам иадо проверить, что выполнены условия (2.31)—(2.34).

2) *Проверка* (2.31) *и* (2.32). Имеем:

$$(A(u, u) - A(u, v),\ u - v) = a_1(u, u, u - v) - a_1(u, v, u - v),$$

и правая часть $\geqslant 0$ в силу (2.49).

Отображение $v \to A(u, v)$: $V \to V'$ ограничено и семинепрерывно; например, для проверки семинепрерывности надо установить, что

$$a(u, v_1 + \lambda v_2, w) \to a(u, v_1, w) \text{ при } \lambda \to 0, \quad u, v_i, w \in V.$$

Это в свою очередь следует из того, что

$$A_\alpha(x, \delta u, D^m(v_1 + \lambda v_2)) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v_1)$$

слабо в $L^{p'}(\Omega)$ (и даже *сильно* в $L^{p'}(\Omega)$).

С помощью аналогичных замечаний проверяется (2.32).

3) *Проверка* (2.33). В обозначениях леммы 2.2 имеем:

$$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) = \int_\Omega F_\mu(x)\, dx$$

и, следовательно, в предположении (2.33) имеет место (2.54). С другой стороны, так как

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \text{ в } L^{p'}(\Omega)$$

слабо (и даже сильно), то имеем

$$a(u_\mu, v, w) \to a(u, v, w) \quad \forall w \in V,$$

и, следовательно, $A(u_\mu, v) \to A(u, v)$ слабо в V'.

4) *Проверка* (2.34). Пусть $u_\mu \to u$ слабо в V и $A(u_\mu, v) \to \psi$ слабо в V'. Тогда (лемма 2.1)

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \text{ *сильно* в } L^{p'}(\Omega),$$

следовательно,

$$a_1(u_\mu, v, u_\mu) \to a_1(u, v, u).$$

С другой стороны,

$$|a_2(u_\mu, u_\mu - u)| \leqslant c \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \|D^\alpha(u_\mu - u)\|_{L^p(\Omega)};$$

так как вложение $W^{m,p}(\Omega) \to W^{m-1,p}(\Omega)$ компактно, то

$$a_2(u_\mu, u_\mu - u) \to 0. \tag{2.59}$$

Однако

$$a_2(u_\mu, u) = (A(u_\mu, v), u) - a_1(u_\mu, v, u) \to (\psi, u) - a_1(u, v, u).$$

Поэтому в силу (2.59) $a_2(u_\mu, u_\mu) \to (\psi, u) - a_1(u, v, u)$ и, следовательно,

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) = a_1(u_\mu, v, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu) \to (\psi, u) \bullet$$

Замечание 2.6. Если элемент $u \in V$ минимизирует на V функциоиал вида

$$J(v) = \int_{\Omega} F(x, \delta v, D^m v)\,dx, \tag{2.60}$$

то u (при подходящих предположениях на F) удовлетворяет уравнению

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial (D^\alpha u)}(x, \delta u, D^m u)\, D^\alpha w\,dx = 0, \tag{2.61}$$

чем и оправдывается термин «оператор вариационного исчисления» для оператора A, введенного в этом пункте. По поводу систематического изучения этих вопросов мы отсылаем к книге Морри [1]. Здесь нам хочется подчеркнуть, что в *частном случае* $m=1$ в вопросе о «порядке нелинейностей» можно пойти дальше по сравнению с теоремой 2.8 (см. (1.10. 8″) на стр. 33 и комментарии на стр. 207, 208 цитированной выше книги Морри) ●

Замечание 2.7. В доказательстве теоремы 2.7 *одновременно* используется метод *монотонности* и метод *компактности*.

На эвристическом уровне мы можем сказать, что когда в нашем распоряжении имеются минимальные априорные оценки энергии, можно установить существование, используя:

(i) *монотонность* (если она имеет место!) в терминах старших производных (в вариационной формулировке),

(ii) компактность в других терминах (не обязательно связанных с монотонностью).

В тех ситуациях, когда *«отсутствует свойство монотонности», нужны* дополнительные априорные оценки ●

Замечание 2.8. Приведем условия, *достаточные* для справедливости (2.47). Предположим, что

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi)\,\xi_\alpha \geqslant c\,|\xi|^p \text{ для достаточно больших } |\xi|; \tag{2.62}$$

Для подобласти $\sigma \subset \Omega$ положим

$$a_\sigma(u, w) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\sigma} A_\alpha(x, \delta u, D^m u)\, D^\alpha w\,dx, \quad u, w \in W^{m,p}(\sigma). \tag{2.63}$$

При этих условиях (2.47) выполняется для форм $a_\sigma(v, v)$ и $V = W_0^{m,p}(\sigma)$, если область σ «достаточно мала». Действительно, положим

$$[u]_{k,\sigma} = \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u \|_{L^p(\sigma)}.$$

Можно взять $[u]_{m.\sigma}$ в качестве нормы на V; отметим, что

$$[u]_{m,\,\theta\Omega} \leqslant c\theta\,[u]_{m-1,\,\theta\Omega} \leqslant c\theta^2\,[u]_{m-2,\,\theta\Omega} \leqslant \ldots,$$

так что в случае достаточно малой области σ член $[u]_{m,\,\sigma}$ существенно больше членов

$$[u]_{k,\,\sigma}, \quad k \leqslant m-1 \bullet$$

Замечание 2.9. При условиях теоремы 2.4, единственность, *как правило*, не имеет места. Приведем контрпример, принцип построения которого принадлежит Дубинскому [5].

Пусть Ω — ограниченная область, $\Phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\Phi \neq 0$, $\Phi = 0$ на Γ, $b \geqslant 1$ — целое число. Рассмотрим оператор A:

$$A(v) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{2b} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + (2b+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{2b}. \tag{2.64}$$

Можно проверить, что оператор A, определенный в (2.64), удовлетворяет условиям теоремы при $V = W_0^{1,\,p}(\Omega)$ и $p = 2(b+1)$. Имеем $A(\Phi) = 0$, так что задача

$$A(u) = 0, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{2.65}$$

допускает по крайней мере два решения: $u = 0$ и $u = \Phi$[1]●

Замечание 2.10. В § 3 гл. 4 имеются примеры, в которых A не является коэрцитивным отображением V в V', но, тем не менее, удается установить сюръективность этого отображения ●

Замечание 2.11. Приведенные результаты относятся только к тому случаю, когда коэффициенты уравнения являются функциями *степенного роста от производных*. Тем самым они *не применимы* к задаче о нахождении функции u, являющейся решением задачи

$$-\Delta u + u \exp(u) = f, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.66}$$

В этой задаче надо использовать пространства типа соболевских, в которых $L^p(\Omega)$ заменяется пространствами Орлича. В этой связи мы отсылаем к работам Вишика [3], Дубинского [6], Бергера [6] и Браудера [8]●

---

[1] Контрпримеры другого рода см. у Мейерса [1], а результаты о единственности, использующие принцип максимума, — у Дугласа, Дюпона и Серрина [1].

Замечание 2.12. Имеем:

$$\text{сумма псевдомонотонного оператора } A \text{ и ограниченного семинепрерывного монотонного оператора } M \text{ есть псевдомонотонный оператор}^{1)}. \tag{2.67}$$

Положим $B = A + M$; пусть $u_j \to u$ слабо в V, причем

$$\limsup\,(B(u_j),\ u_j - u) \leqslant 0.$$

Тогда имеем:

$$(A(u_j),\ u_j - u) = (B(u_j),\ u_j - u) - (M(u_j),\ u_j - u) =$$
$$= (B(u_j),\ u_j - u) - (M(u_j) - M(u),\ u_j - u) - (M(u),\ u_j - u) \leqslant$$
$$\leqslant (B(u_j),\ u_j - u) - (M(u),\ u_j - u).$$

Следовательно,

$$\limsup\,(A(u_j),\ u_j - u) \leqslant 0.$$

Тогда

$$\liminf\,(A(u_j),\ u_j - v) \geqslant (A(u),\ u - v) \quad \text{и} \quad \lim\,(A(u_j),\ u_j - u) = 0.$$

Следовательно,

$$\limsup(M(u_j),\ u_j - u) \leqslant 0,$$

а поскольку M — псевдомонотонный оператор (в силу предложения 2.5), отсюда вытекает, что

$$\text{lin inf}\,(M(u_j),\ u_j - v) \geqslant (M(u),\ u - v),$$

и, таким образом,

$$\liminf\,(B(u_j),\ u_j - v) \geqslant (B(u),\ u - v) \bullet$$

Замечание 2.13. Мы всюду предполагали, что выполнено условие (2.3). В действительности все утверждение сохраняется в предположении: существует такое $v_0 \in V$, что

$$\frac{(A(v),\ v - v_0)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty. \tag{2.68}$$

В самом деле, достаточно ввести $A_1(v) = A(v + v_0) \bullet$

Замечание 2.14. Можно построить монотонные коэрцитивные операторы (в действительности, операторы двойственности), которые будут *дифференциальными операторами бесконечного порядка*. Для этого достаточно рассмотреть пространство V типа Жеврея (см. также п. 5.3 гл. 4), состоящее из функций v, определенных в Ω, таких, что $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ $\forall m$ и

$$\sum_k \left\| \frac{1}{(k_1! \ldots k_n!)^s} D^k v \right\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{1}{L^{|k|p}} < \infty$$

---

[1] Гораздо более общие результаты (и, в частности, для многозначных операторов) имеются в работе Брезиса — Крайделла — Пази [1].

(L — заданная константа, $s > 1$ фиксировано). В качестве A берется оператор

$$A(v) = \sum_k (-1)^k \frac{1}{L^{|k|p}(k_1| \ldots k_n|)^{sp}} D^k\left(|D^k v|^{p-2} D^k v\right) \bullet$$

3. ЗАМЕНА ОСНОВНОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1. Общие замечания

Рассматривается (см. замечание 1.2) банахово пространство V, содержащееся в гильбертовом пространстве H, которое *отождествляется со своим сопряженным*, так что

$$V \subset H \subset V'; \tag{3.1}$$

H является *основным пространством*.

Во *всех* до сих пор рассмотренных примерах

$$H = L^2(\Omega) \text{ (или произведение } (L^2(\Omega))^N). \tag{3.2}$$

Мы увидим, что полезно в качестве H брать *различные* пространства; это позволяет «тривиализовать» некоторые случаи, которые оказываются нетривиальными при другом выборе функциональных пространств[1] ●

Замечание 3.1. В связи с предшествующими рассмотрениями стоит отметить, что свойство монотонности (в ряде случаев) *зависит от выбора скалярного произведения*: если мы рассмотрим в области $\Omega =]0, 1[$ оператор

$$A(\varphi) = -\frac{d}{dx}\left(|\varphi| \frac{d\varphi}{dx}\right), \tag{3.3}$$

то нетрудно проверить, что не выполнено неравенство

$$\int_\Omega (A(\varphi) - A(\psi))(\varphi - \psi)\, dx \geqslant 0 \quad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

С другой стороны, если в качестве скалярного произведения мы возьмем

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi \left(\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \psi\right) dx\ ^{2)}$$

---

[1] Мы непрестанно будем подчеркивать исключительиую роль выбора функциональных пространств в нелннейных задачах.

[2] То есть скалярное произведение (гильбертово) в $H^{-1}(\Omega)$,

(где $\tilde{\psi}=\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\psi$ является решением краевой задачи $-\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2}=\psi$, $\tilde{\psi}(0)=\tilde{\psi}(1)=0$), то $\forall\varphi$, $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$:

$$\langle A(\varphi)-A(\psi),\ \varphi-\psi\rangle=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)(|\varphi|\varphi-|\psi|\psi)\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}(\varphi-\psi)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(|\varphi|\varphi-|\psi|\psi)(\varphi-\psi)\,dx\geqslant 0\,\bullet$$

3.2. Пример. Нелинейная задача о диффузии

Рассмотрим задачу, уже изученную в § 12 гл. 1: ищется такая функция u, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f,\quad x\in\Omega,\quad t\in\,]0,\,T[,\tag{3.4}$$

где $p>1$[1]), причем

$$u=g\quad\text{на}\quad\Sigma,\tag{3.5}$$
$$u(x,\,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega\,\bullet\tag{3.6}$$

Замечание 3.2. Возьмем $p=3$, $\Omega=\,]0,\,\infty[$, $f=0$, т. е. уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(|u|\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0\tag{3.7}$$

с условиями

$$u(0,\,t)=g(t)=x_0+t,\qquad x_0>0\ \text{фиксировано},$$
$$u(x,\,0)=u_0(x)=\begin{cases}x_0-x & \text{при}\quad 0<x<x_0,\\ 0 & \text{при}\quad x>x_0.\end{cases}$$

Тогда решением будет

$$u(x,\,t)=\begin{cases}t+x_0-x & \text{при}\quad 0<x<x_0+t,\\ 0 & \text{при}\quad x<x_0+t.\end{cases}$$

Таким образом, мы здесь сталкиваемся с «распространением возмущений», характерным для гиперболических уравнений. Последнее связано с множителем $|u|$. Говорят, что (3.4) — *вырождающееся параболическое* уравнение$\bullet$

---

[1]) Эта задача более общая, чем в § 12 гл. 1, где мы ограничились случаем $p>2$.

Теперь мы установим теорему существования и единственности *«очень слабого»* решения.

Теорема 3.1. *Пусть заданы f, g, u_0, причем*

$$f\in L^{p'}\left(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)+H^{-1}(\Omega)\right)^{1)}, \tag{3.8}$$

$$g\in L^p(0, T; L^q(\Gamma)), \quad q=\max\left(1, p-1, \frac{p(n-1)}{n}\right), \tag{3.9}$$

$$u_0\in H^{-1}(\Omega). \tag{3.10}$$

Существует единственная функция $u\in L^p(Q)\cap L^p\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$[2], *удовлетворяющая* (3.4), (3.5), (3.6)[3] ●

Доказательство. 1) Мы увидим, что нужный нам результат следует из теоремы 1.2 или теоремы 1.2′, если только мы подходящим образом подберем данные в этих теоремах. Возьмем

$$H=H^{-1}(\Omega), \quad (u, v)_H=\left(u, (-\Delta)^{-1}v\right), \tag{3.11}$$

где $(-\Delta)^{-1}v=\tilde{v}$ — решение задачи

$$-\Delta\tilde{v}=v, \quad \tilde{v}=0 \text{ на } \Gamma \ \left(\text{следовательно, } \tilde{v}\in H_0^1(\Omega)\right) \tag{3.12}$$

и где $\left(u, (-\Delta)^{-1}v\right)$ обозначает скалярное произведение между элементами $H^{-1}(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$.

Возьмем далее

$$V=L^p(\Omega)\cap H^{-1}(\Omega). \tag{3.13}$$

Заметим, что $L^p(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ при $p\geqslant 2n/(n+2)$, поскольку в этом случае в силу теоремы Соболева $H_0^1(\Omega)\subset L^{p'}(\Omega)$; таким образом,

$$V=L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad p\geqslant\frac{2n}{n+2}. \tag{3.13′}$$

Отождествим H с его сопряженным. Поскольку V плотно в H, то

$$V\subset H\subset V'.$$

Необходимо обратить внимание на то, что теперь равенство $V'=L^{p'}(\Omega)+H_0^1(\Omega)$ *не имеет места.* Вот пример формы $L\in V'$: пусть заданы f, h, причем

$$f\in W^{-1,p'}(\Omega)+H^{-1}(\Omega) \quad \text{и} \quad h\in W^{-1/p',p'}(\Gamma).$$

---

[1] $W^{-1,p'}(\Omega)+H^{-1}(\Omega)=W^{-1,p'}(\Omega)$, если $p\geqslant 2$.

[2] Это пространство переходит в $L^p(Q)$ при $p\geqslant 2n/(n+2)$.

[3] Ниже мы будем уточнять, в каком смысле удовлетворяются эти условия.

Тогда в обозначениях (3.12) возьмем

$$L(v)=(f,\,\tilde v)-\int_\Gamma h\,\frac{\partial\tilde v}{\partial n}\,d\Gamma; \qquad (3.14)$$

(3.14) определяет $L\in V'$. В самом деле, если $v\in L^p(\Omega)$, то $\tilde v\in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, а так как $v\in H^{-1}(\Omega)$, то также $\tilde v\in H_0^1(\Omega)$; следовательно, форма $v\to(f,\,\tilde v)$ непрерывна на V; далее,

$$\frac{\partial\tilde v}{\partial n}\in W^{1/p',\,p}(\Gamma),$$

и поскольку $h\in\left(W^{1/p',\,p}(\Gamma)\right)'$, то форма

$$v\to\int_\Gamma h\,\frac{\partial v}{\partial n}\,d\Gamma$$

непрерывна на V, а следовательно, $L\in V'$.

Введем, наконец,

$$a(u,\,v)=\frac{1}{(p-1)}\int_\Omega |u|^{p-2}uv\,dx \quad \forall u,v\in V. \qquad (3.15)$$

Имеем:

$$a(u,\,u)=\frac{1}{(p-1)}\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \qquad (3.16)$$

и

$$a(u,\,u-v)-a(v,\,u-v)\geqslant 0. \qquad (3.17)$$

Теперь мы можем применить теорему 1.2 при $p\geqslant 2n/(n+2)$ $(V=L^p(\Omega))$ и теорему 1.2′ при $1<p<2n/(n+2)$ $\left(\text{взяв } [v]=\|v\|_{L^p(\Omega)}\right)$.

Следовательно, если задано $L(t)\in L^{p'}(0,\,T;\,V')$, то существует единственная функция u из $L^p(0,\,T;\,V)$, такая, что

$$(u'(t),\,v)_H+a(u(t),\,v)=L(t)(v) \quad \forall v\in V, \qquad (3.18)$$

$$u(0)=u_0. \qquad (3.19)$$

2) Теперь мы покажем, что в слабом смысле решение задачи (3.18), (3.19) будет решением исходной задачи, коль скоро $L(t)$ выбрано подходящим образом. Определим

$$h(t)=\frac{1}{(p-1)}\,|g(t)|^{p-2}g(t); \qquad (3.20)$$

имеем:

$$h\in L^{p/(p-1)}\left(0,\,T;\,L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)}(\Gamma)\right)=L^{p'}\left(0,\,T;\,L^{p'\left(\frac{n-1}{n}\right)}(\Gamma)\right)$$

в силу теоремы Соболева для дробных показателей (см. Петре [1])

$$L^{p'\left(\frac{n-1}{n}\right)}(\Gamma)\subset W^{-1/p',\,p'}(\Gamma).$$

Таким образом, мы имеем право взять $L(t)$ в виде

$$L(t)v=\int\limits_{\Omega} f(t)\tilde{v}\,dx-\int\limits_{\Gamma} h(t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}\,d\Gamma. \tag{3.21}$$

Вводя $\tilde{v}$ в (3.18), получим:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u(t)}{\partial t}\tilde{v}\,dx+\frac{1}{(p-1)}\int\limits_{\Omega}|u|^{p-2}u(-\Delta\tilde{v})\,dx=$$
$$=\int\limits_{\Omega} f(t)\tilde{v}\,dx-\int\limits_{\Gamma} h(t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}\,d\Gamma,$$

причем $\tilde{v}=0$ на Γ[1]. Следовательно, *формально*

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta\left(\frac{1}{(p-1)}|u|^{p-2}u\right)\right)\tilde{v}\,dx-\frac{1}{(p-1)}\int\limits_{\Gamma}|u|^{p-2}u\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}\,d\Gamma=$$
$$=\int\limits_{\Omega} f(t)\tilde{v}\,dx-\int\limits_{\Gamma} h(t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}\,d\Gamma,$$

откуда вытекает, что u является «решением» уравнения (3.4)[2] и

$$\frac{1}{(p-1)}|u|^{p-2}u=h;$$

отсюда получается условие (3.5), если h определить с помощью (3.20). Наконец, функция u: $[0, T]\to H$ *непрерывна*, так что (3.6) имеет смысл ●

Замечание 3.3. Теорему 12.3 гл. 1 мы можем рассматривать как теорему о гладкости. Теперь мы можем снова установить этот результат ●

Теорема 3.2. *Предположим, что в обозначениях теоремы* 3.1

$$f\in L^{p'}(Q), \tag{3.22}$$

$$g=0, \tag{3.23}$$

$$u_0\in L^2(\Omega). \tag{3.24}$$

---

[1] Это можно обосновать с помощью методов, аналогичных методам Лионса — Мадженеса [1].

[2] Это можно обосновать с помощью методов, аналогичных методам Лионса — Мадженеса [1].

Тогда, если u — решение задачи (3.4), (3.5), (3.6), *то*

$$u \in L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \tag{3.25}$$

$$|u|^{(p-2)/2}\, u \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)). \tag{3.26}$$

Доказательство. Используются пространства V, H, V' и форма $a(u, v)$, как и при доказательстве теоремы 3.1; $L(t)$ определяется с помощью (3.21), причем $h=0$.

Далее нужно повторить доказательство теоремы 1.2 (или 1.2′), выбрав специальный базис из собственных функций:

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j, \quad w_j \in H_0^1(\Omega). \tag{3.27}$$

Тогда

$$\left(u_m',\ (-\Delta)^{-1} w_j\right) + \frac{1}{(p-1)}\left(|u_m|^{p-2} u_m,\ w_j\right) = \left(f(t),\ (-\Delta)^{-1} w_j\right),$$
$$1 \leqslant j \leqslant m, \tag{3.28}$$

причем

$$u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \ \ldots,\ w_m], \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega). \tag{3.29}$$

Но $(-\Delta)^{-1} w_j = w_j/\lambda_j$, и из (3.28) мы можем вывести, что

$$(u_m',\ u_m) + \left(|u_m|^{p-2} u_m,\ -\Delta u_m\right) = (f,\ u_m)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \frac{4}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_m|^{(p-2)/2}\, u_m\right)\right)^2 dx = (f(t),\ u_m(t)).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \frac{4}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\ \int\limits_{\Omega\times]0,\,t[} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_m|^{(p-2)/2}\, u_m\right)\right)^2 dx\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 + \int_0^t (f(\sigma),\ u_m(\sigma))\, d\sigma. \tag{3.30}$$

Нам уже известно, что u_m ограничены в $L^p(Q)$, следовательно, правая часть (3.30) ограничена, когда выполнено включение (3.22). Отсюда выводим, что u_m ограничены в $L^\infty(Q)$ и что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_m|^{(p-2)/2}\, u_m\right)$$

ограничены в $L^2(Q)$. Но нам *заранее известно*, что $u_m \to u$ слабо в $L^2(Q)$; отсюда мы выводим (3.25), (3.26) ●

3.3. Задача со свободной границей

3.3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть задана функция $\lambda \to k(\lambda)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

$k(\lambda) \in [k_1, k_2]$, $0 < k_1 < k_2 < \infty$, функция k непрерывна при $\lambda \neq \lambda_0$, а в точке λ_0 имеет скачок, причем $k(\lambda_0 + 0) - k(\lambda_0 - 0) > 0$. (3.31)

Рассматривается процесс с *двумя* фазами[1]), состояние i-й фазы ($i = 1, 2$) характеризуется функцией $u_i(x, t)$, где

$$u_1(x, t) < \lambda_0, \quad u_2(x, t) > \lambda_0; \tag{3.32}$$

предполагается, что x принадлежит области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $t \in]0, T[$. Для определенности будем предполагать, что граница Ω состоит из частей Γ_1, Γ_2 (см. рис. 2), причем фазе u_i отвечает окрестность Γ_i.

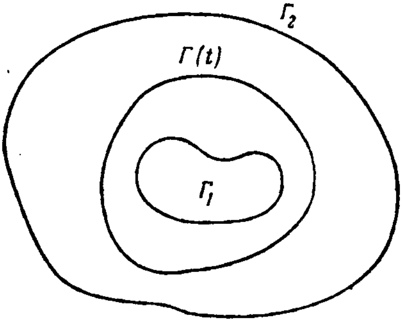

Рис. 2.

Через $\Gamma(t)$ обозначается *поверхность, разделяющая фазы в момент* t.

Уравнения, описывающие эволюцию, имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) = f, \quad u_1 < \lambda_0, \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right) = f, \quad u_2 > \lambda_0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

где функция f определена в $Q = \Omega \times]0, T[$.

---

[1]) Изложенные ниже методы можно без труда адаптировать применительно к случаю нескольких фаз.

Имеются *граничные условия* двух типов:

(i) *условия на неподвижной границе*:

$$u_i = g_i \text{ на } \Sigma_i = \Gamma_i \times]0, T[,$$
$$g_1(x, t) < \lambda_0, \quad g_2(x, t) > \lambda_0; \tag{3.34}$$

(ii) *условия на «свободной границе»*:

Обозначим через S *«свободную границу»*:

$$S = \bigcup_{\sigma \in [0, T]} \Gamma(\sigma) \text{ (рассматривается в плоскости } t = \sigma) \tag{3.35}$$

(которая a priori не задана и является однем из неизвестных задачи!); предполагается, что на S выполнены следующие условия:

$$u_1 = u_2 (= \lambda_0), \tag{3.36}$$

$$b \cos(n, t) - \sum_{i=1}^{n} k(\lambda_0 + 0) \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cos(n, x_i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} k(\lambda_0 - 0) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = 0, \tag{3.37}$$

где b — *заданная положительная константа*, а через n обозначена нормаль к $\Gamma(t)$, направленная, для определенности, «внутрь второй фазы».

Начальные условия таковы:

$$u_1(x, 0) = u_{01}(x), \quad u_{01}(x) < \lambda_0,$$
$$u_2(x, 0) = u_{02}(x), \quad u_{02}(x) > \lambda_0 \tag{3.38}$$

(поверхность $\Gamma(0)$ предполагается заданной) ●

3.3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ. Рассмотрим функцию K:

$$K(\mu) = \int_0^{\mu} k(\lambda)\, d\lambda \tag{3.39}$$

и введем новые неизвестные функции

$$v_i = K(u_i), \quad i = 1, 2. \tag{3.40}$$

Тогда уравнения (3.33) примут вид

$$\frac{1}{k(K^{-1}(v_i))} \frac{\partial v_i}{\partial t} - \Delta v_i = f, \quad i = 1, 2, \text{ в } Q, \tag{3.41}$$

причем

$$v_1 < \mu_0 = K(\lambda_0), \quad v_2 > \mu_0. \tag{3.42}$$

Условия (3.34) примут вид

$$v_i = K(g_i) \quad \text{на} \quad \Sigma_i, \ i = 1, 2, \tag{3.43}$$

а условия (3.36), (3.37) примут вид

$$v_1 = v_2 (= \mu_0) \text{ на } S, \tag{3.44}$$

$$b \cos(n, t) + \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0 \text{ на } S \tag{3.45}$$

(где $\partial/\partial n$ — нормальная производная к S, направленная «внутрь второй фазы»)●

Эти уравнения можно записать в гораздо более сжатой форме. Для этого вводится функция $\beta(\lambda)$, которая определяется с точностью до аддитивной постоянной из соотношений

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda} \beta(\lambda) = \frac{1}{k(K^{-1}(\lambda))}, \qquad \lambda \neq \mu_0, \\ &\beta(\mu_0 + 0) - \beta(\mu_0 - 0) = b. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Функцию β (впрочем, как и функцию k) можно рассматривать как многозначную, если

$$\beta(\mu_0) \in [\beta(\mu_0 - 0), \ \beta(\mu_0 - 0) + b].$$

Введем функцию v, определенную в Q (если задача допускает решение!) равенством

$$v(x, t) = \begin{cases} v_1(x, t) \text{ в фазе } 1, \\ v_2(x, t) \text{ в фазе } 2, \end{cases} \tag{3.47}$$

и $v(x, t) = \mu_0$ на S.

Теперь мы можем определить $\beta(v)$ почти всюду в Q, если мы предположим, что S имеет меру нуль в Q.

Будет доказана

Лемма 3.1. *Пусть v — функция, определенная в* (3.47). *Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta(v) - \Delta v = f \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(Q); \tag{3.48}$$

$v = K(g)$ *задана на* $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (причем $K(g) = K_i(g_i)$ на Σ_i), (3.49)

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{где} \quad v_0(x) = K(u_0(x)) \tag{3.50}$$

и где $u_0(x) = \begin{cases} u_{01}(x) \text{ в первой фазе при } t = 0, \\ u_{02}(x) \text{ во второй фазе при } t = 0. \end{cases}$

Доказательство. Условия (3.49), (3.50) очевидны. Чтобы проверить (3.48), возьмем $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ и вычислим

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\beta(v) - \Delta v, \varphi \right\rangle = -\left\langle \beta(v), \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle - \langle v, \Delta\varphi \rangle, \tag{3.51}$$

где скобками обозначается двойственность между $\mathcal{D}'(Q)$ и $\mathcal{D}(Q)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
-\left\langle \beta(v), \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle &= -\int\limits_{v_1<\mu_0} \beta(v_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt - \int\limits_{v_2>\mu_0} \beta(v_2)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt = \\
&= \int\limits_S (\beta(\mu_0+0) - \beta(\mu_0-0))\,\varphi\cos(n, t)\,dS + \\
&+ \int\limits_{v_1<\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial t}\beta(v_1)\right)\varphi\,dx\,dt + \int\limits_{v_2>\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial t}\beta(v_2)\right)\varphi\,dx\,dt = \\
&= b\int\limits_S \varphi\cos(n, t)\,dS + \int\limits_{v_1<\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial t}\beta(v_1)\right)\varphi\,dx\,dt + \\
&\qquad + \int\limits_{v_2>\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial t}\beta(v_2)\right)\varphi\,dx\,dt;
\end{aligned}$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned}
-\langle v, \Delta\varphi \rangle = -\int\limits_S (v_1 - v_2)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \int\limits_S \left(\frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n}\right)\varphi\,dS - \\
- \int\limits_{v_1<\mu_0} (\Delta v_1)\varphi\,dx\,dt - \int\limits_{v_2>\mu_0} (\Delta v_2)\varphi\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

так что в силу (3.44), (3.45)

$$\begin{aligned}
-\left\langle \beta(v), \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle - \langle v, \Delta\varphi \rangle = \int\limits_{v_1<\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial t}\beta(v_1) - \Delta v_1\right)\varphi\,dx\,dt + \\
+ \int\limits_{v_2>\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial t}\beta(v_2) - \Delta v_2\right)\varphi\,dx\,dt = \langle f, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

(в последний момент мы использовали (3.41)) ●

Теперь мы можем изучить задачу (3.48), (3.49), (3.50), предварительно немного обобщив ее. Мы a priori не исключаем, что v принимает значение μ_0 на множестве положительной меры. Теперь $\beta(v)$ является многозначной функцией, и мы можем говорить о функции w

$$w \in \beta(v) \tag{3.52}$$

(т. е. $w(x, t) \in \beta(v(x, t))$; последнее эквивалентно тому, что $w(x, t) = \beta(v(x, t))$, если $v(x, t) \neq \mu_0$, и $w(x, t) \in [\beta(\mu_0 - 0), (\beta(\mu_0 - 0) + b]$, если $v(x, t) = \mu_0$).

Мы будем искать такую функцию v, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta v = f, \quad w \text{ удовлетворяет (3.52);} \tag{3.53}$$

условия (3.49), (3.50) остаются без изменений ●

Теперь естественно ввести обратную функцию

$$B = \beta^{-1}, \tag{3.54}$$

которая будет однозначной. Тогда задача сведется к отысканию такой функции w, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta B(w) = f \text{ в } Q, \\ &w = \beta(K(g))\ ^{1)} \quad \text{на } \Sigma, \\ &w(x, 0) = \beta(K(u_0(x)))\ ^{2)} \text{ на } \Omega \ ● \end{aligned} \tag{3.55}$$

До сих пор мы занимались «формальными преобразованиями», нигде не уточняя, каким функциональным пространствам должны принадлежать неизвестные функции. Теперь мы изучим этот вопрос.

3.3.3. Определение решений. Теорема существования и единственности. «Решением» рассматриваемой задачи мы будем называть любую функцию v, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} &v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ &v = K(g) \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ &\text{существует такая функция } w \in \beta(v), \text{ что } w \in L^2(Q), \\ &\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta B(w) = f \text{ в } Q, \\ &w(x, 0) = \beta(K(u_0))\ ^{3)}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

(Решение исходной задачи определяется с помощью (3.40).)

Теперь будет доказана

Теорема 3.3. *Пусть задано* $f \in L^2(Q)$. *Пусть заданы*

$g_1 < \lambda_0$ *на* Σ_1, $g_2 > \lambda_0$ *на* Σ_2, u_0 *на* Ω, $u_0 \neq \lambda_0$ *почти всюду;*

---

¹) Функция $\beta(K(g))$ определена однозначно, поскольку $K(g_t(x, t)) = \mu_0$.

²) Функция $\beta(K(u_0(x)))$ определена однозначно, поскольку $u_0(x) \neq \lambda_0$ почти всюду.

³) Как будет следовать из приведенного ниже доказательства, это условие имеет смысл.

предположим, что

$$\begin{gathered}\text{существует такая функция } w_1 \in H^1(Q)\,^{1)}, \text{ что} \\ w_1 = \beta(K(g)) \text{ на } \Sigma, \ w_1(x, 0) = \beta(K(u_0(x))) \text{ на } \Omega\,^{2)}.\end{gathered} \tag{3.57}$$

Тогда задача (3.56) *имеет и притом единственное решение.*

Доказательство. 1) Воспользовавшись функцией w_1, удовлетворяющей условиям (3.57), введем новую неизвестную функцию

$$\Phi = w - w_1. \tag{3.58}$$

Тогда мы получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Delta B(\Phi + w_1) = f_1, \quad f_1 = f - \frac{\partial w_1}{\partial t} \in L^2(Q). \tag{3.59}$$

2) Мы применим теорему 1.2 в следующей ситуации. Возьмем $H = H^{-1}(\Omega)$, $V = L^2(\Omega)$; для $\varphi, \psi \in L^2(\Omega)$ мы положим [3]

$$a(\varphi, \psi) = \int_\Omega B(\varphi + w_1)\psi\, dx\,^{4)}. \tag{3.60}$$

Прежде всего отметим, что, поскольку $k(\lambda) \in [k_1, k_2]$,

$$\frac{1}{k_2} \leqslant \beta'(\lambda),$$

откуда следует, что

$$B'(\lambda)^2 \leqslant k_2 B'(\lambda). \tag{3.61}$$

Форма $\psi \to a(\varphi, \psi)$ определяет функционал $A(\varphi) \in V'$ (поскольку H *отождествлено со своим сопряженным*) с помощью равенства

$$a(\varphi, \psi) = (A(\varphi), \psi) = (A(t; \varphi), \psi). \tag{3.62}$$

---

[1] Это условие может быть ослаблено.

[2] Этому предположению можно придать более явный вид с помощью условий на u_0 и g, а именно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\beta(K(u_0)) \in H^{1/2}(\Omega), \quad \beta(K(g)) \in H^{1/2}(\Sigma),$$

причем в угловых точках должны выполняться интегральные условия согласования, по поводу которых мы отсылаем к работе Гривара [2].

[3] Отметим, что рассматриваемая намя нелинейная задача целиком укладывается в рамки гильбертовых пространств.

[4] На самом деле a зависит от t:

$$\int_\Omega B(\varphi + w_1)\psi\, dx = a(t; \varphi, \psi)$$

и надо воспользоваться примечанием 1 к замечанию 1.8, п. 1.4.

Оператор A коэрцитивен. Имеем:

$$(A(\varphi_1)-A(\varphi_2),\ \varphi_1-\varphi_2)=\int_\Omega (B(\varphi_1+w_1)-B(\varphi_2+w_1))(\varphi_1-\varphi_2)\,dx=$$

$$=\int_\Omega (B(\psi_1)-B(\psi_2))(\psi_1-\psi_2)\,dx,\qquad \psi_i=\varphi_i+w_1;$$

следовательно,

$$(A(\varphi_1)-A(\varphi_2),\ \varphi_1-\varphi_2)\geqslant\frac{1}{k_2}\int_\Omega |B(\psi_1)-B(\psi_2)|^2\,dx\geqslant 0. \tag{3.63}$$

Таким образом, с помощью теоремы 1.2 и замечания 1.8 мы можем установить существование и единственность функции Φ, такой, что

$$\begin{gathered}\Phi\in L^2(0,T;V)=L^2(Q),\qquad \Phi\in L^\infty(0,T;H),\\ (\Phi',v)+(A(\Phi),v)=(f_1,v)\quad \forall v\in V,\\ \Phi(0)=0.\end{gathered} \tag{3.64}$$

3) Теперь остается показать, что Φ — «более сильное»[1]) решение задачи. В этой связи поступим таким же образом, как в предыдущем п. 3.2. Заменим в (3.64) v на $-\Delta v$; эта замена законна в методе Фаэдо — Галёркина, когда мы имеем дело с *конечной размерностью*; в качестве w_j берется «специальный базис» из собственных функций оператора $-\Delta$ при граничных условиях Дирихле. Мы получим[2]):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \Phi^2\,dx\right)+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(B(\Phi+w_1))\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,dx=\int_\Omega f_1\Phi\,dx,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}\int_Q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}B(\Phi+w_1)\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,dx\,dt\leqslant C,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\int_Q B'(\Phi+w_1)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)^2 dx\,dt\leqslant C;$$

---

[1]) Отметим, что здесь мы неявно получаем единственность решений «более слабых», чем те, которые фигурируют в формулировке теоремы.

[2]) Мы пишем оценки в общем случае; для их обоснования надо написать соответствующие оценки для галеркинских приближений, а затем перейти к пределу.

ввиду (3.61) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{Q}(B'(\Phi+w_1))^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)^2 dx\,dt \leqslant k_2C$$

и, следовательно,

$$B'(\Phi+w_1)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\in L^2(Q)\quad\forall i.$$

Однако, поскольку B' ограничено,

$$B'(\Phi+w)\frac{\partial w_1}{\partial x_i}\in L^2(Q)\quad\forall i$$

и, следовательно,

$$B'(\Phi+w_1)\frac{\partial(\Phi+w_1)}{\partial x_i}\in L^2(Q)\quad\forall i,$$

а тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}B(\Phi+w_1)\in L^2(Q)\quad\forall i,$$

т. е.

$$v=B(w)\in L^2(0,\,T;\,H^1(\Omega)),$$

что и доказывает теорему●

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА МНОГООБРАЗИИ

4.1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ, являющейся многообразием класса C^2; мы предполагаем, что локально Ω лежит по одну сторону от Γ.

Положим

$$A(\varphi)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right),\quad 1<p<\infty. \tag{4.1}$$

Рассматривается *следующая задача*: ищется такая функция $w(x,t)$, что

$$A(w)=0 \quad \text{в} \quad \Omega\times]0,\,T[=Q, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\cos(n,\,x_i)+\frac{\partial w}{\partial t}=f \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{4.3}$$

$$w(x,0)=w_0(x),\qquad x\in\Gamma, \tag{4.4}$$

В (4.3) n обозначает нормаль к Γ, которая (для определенности) направлена вне Ω ●

Замечание 4.1. Уравнение (4.2) не содержит производной по t.

Здесь мы имеем дело с задачей «такого же типа», как в § 11 гл. 1; очевидно, можно построить пример, который будет подходить к обеим ситуациям, но более целесообразно разделить эти два случая, чтобы лучше разграничить использование метода компактности (в § 11 гл. 1) и метода монотонности, который сейчас будет применен ●

Мы преобразуем задачу (4.2), (4.3), (4.4) в эквивалентную задачу на многообразии Γ.

4.2. Оператор $\mathscr{A}$

Сейчас мы распространим на нелинейный случай построения п. 11.2 гл. 1.

Пусть $g \in W^{1/p', p}(\Gamma)$, и пусть w — единственная функция из $W^{1, p}(\Omega)$ (см. п. 2.3.2), такая, что

$$A(w) = 0, \quad w|_\Gamma = g. \tag{4.5}$$

Будет доказано

Предложение 4.1. *Для функции* $w \in W^{1, p}(\Omega)$, *удовлетворяющей уравнению* $A(w) = 0$, *можно так определить* $\mathscr{T}(w) \in W^{-1/p', p'}(\Gamma)$, *что*

$$\mathscr{T}(w) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cos(n, x_i) \quad \text{при} \quad w \in C^2(\bar{\Omega}). \tag{4.6}$$

Доказательство. Для заданной функции $\varphi \in W^{1/p', p}(\Gamma)$ существует такая функция $\Phi \in W^{1, p}(\Omega)$, что

$$\Phi|_\Gamma = \varphi$$

и, более того, это «продолжение» Φ можно выбрать таким образом, что отображение $\varphi \to \Phi$ будет линейным непрерывным отображением $W^{1/p', p}(\Gamma) \to W^{1, p}(\Omega)$ (см. Гальярдо [1]).

Положим, вообще,

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \qquad u, v \in W^{1, p}(\Omega). \tag{4.7}$$

Можно проверить, что $a(w, \Phi)$ *не зависит от выбора* продолжения; действительно, если $\Phi_1 \in W^{1, p}(\Omega)$ и $\Phi_1|_\Gamma = \varphi$, то $\Phi - \Phi_1 \in$

$\in W_0^{1,p}(\Omega)$ и поэтому существует такая последовательность $\Psi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$, что $\Psi_j \to \Phi - \Phi_1$ в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда

$$a(w, \Phi) - a(w, \Phi_1) = \lim_j a(w, \Psi_j) = \lim_j (A(w), \Psi_j) = 0.$$

Итак, форма $\varphi \to a(w, \Phi)$ является непрерывной линейной формой на $W^{1/p', p}(\Gamma)$ и, следовательно,

$$a(w, \varphi) = (\mathscr{T}(w), \varphi)_\Gamma, \qquad \mathscr{T}(w) \in W^{-1/p', p'}(\Gamma), \tag{4.8}$$

где $(\psi, \varphi)_\Gamma$ обозначает скалярное произведение между элементами $W^{-1/p', p'}(\Gamma)$ и $W^{1/p', p}(\Gamma)$.

Если $w \subset C^2(\bar{\Omega})$, то равенство (4.5) следует из (4.8) и формулы Грина ●

Замечание 4.2. Проведенные выше рассуждения вполне аналогичны рассуждениям из главы 2 книги Лионса — Мадженеса [1], касающимся линейных операторов. Единственное различие связано с *плотностью*. В настоящем случае можно показать, что функции из $C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющие уравнению $A(w) = 0$, плотны в множестве решений этого уравнения из $W^{1,p}(\Omega)$, так что оператор $\mathscr{T}(w)$ определен *однозначно*. Однако мы не знаем, как все это распространяется на более общие операторы вариационного исчисления, изученные в п. 2.6 ●

Оператор $\mathscr{A}$. Для $g \in W^{1/p', p}(\Gamma)$ положим

$$\mathscr{A}(g) = \mathscr{T}(w), \tag{4.9}$$

где w определяется из задачи (4.5), а $\mathscr{T}(w)$ — с помощью предложения 4.1.

Имеет место

Предложение 4.2. *Оператор* $\mathscr{A}$, *определенный в* (4.9), *является ограниченным семинепрерывным монотонным оператором*

$$\mathscr{A}: W^{1/p', p}(\Gamma) \to W^{-1/p', p'}(\Gamma) (= W^{1/p', p}(\Gamma))'),$$

и имеет место оценка

$$\| \mathscr{A}(g) \|_{W^{-1/p', p'}(\Gamma)} \leqslant c \| g \|^{p-1}_{W^{1/p', p}(\Gamma)}.$$

Доказательство. Если $g_1, g_2 \in W^{1/p', p}(\Gamma)$ и w_i связаны с g_i соотношениями (4.5), то имеем

$$(\mathscr{A}(g_1) - \mathscr{A}(g_2), g_1 - g_2)_\Gamma = (\mathscr{T}(w_1) - \mathscr{T}(w_2), g_1 - g_2)_\Gamma =$$
$$= a(w_1, w_1 - w_2) - a(w_2, w_1 - w_2) \geqslant 0.$$

(в силу (4.8))

Для доказательства семинепрерывности заметим, что

$$(\mathscr{A}(g_1+g_2),\ g_3)_\Gamma = a(w_1+w_2,\ w_3) \bullet$$

Предложение 4.3. *Для любого* $\lambda>0$ *существует такое* $\alpha>0$, *что*

$$(\mathscr{A}(g),\ g)_\Gamma + \lambda\|g\|^p_{L^2(\Gamma)} \geqslant \alpha\|g\|^p_{W^{1/p',\,p}(\Gamma)} \quad \forall g, \tag{4.10}$$

$$g\in W^{1/p',\,p}(\Gamma) \quad \text{\textit{при}} \quad p\geqslant\frac{2n}{n+1}, \tag{4.11}$$

$$g\in W^{1/p',\,p}(\Gamma)\cap L^2(\Gamma) \quad \text{\textit{при}} \quad 1<p<\frac{2n}{n+1}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Заметим, что $W^{1/p',\,p}(\Gamma)\subset L^2(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $p\geqslant 2n/(2n+1)$ (в силу теоремы Соболева для дробных показателей). Имеем:

$$(\mathscr{A}(g),\ g)_\Gamma+\lambda\|g\|^p_{L^2(\Gamma)}=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |D_i w|^p\,dx+\lambda\left(\int_\Gamma |w|^2\,d\Gamma\right)^{p/2}. \tag{4.13}$$

Можно проверить, что правая часть (4.13) (возведенная в степень $1/p$) является нормой на $W^{1,\,p}(\Omega)$ (или на пространстве $\{v\mid v\in W^{1,\,p}(\Omega),\ v|_\Gamma\in L^2(\Gamma)\}$), которое является полным пространством, так что во всех случаях

$$(\mathscr{A}(g),\ g)_\Gamma+\lambda\|g\|^p_{L^2(\Gamma)}\geqslant\alpha_1\|w\|^p_{W^{1,\,p}(\Omega)},$$

откуда следует (4.10) ●

4.3. Эквивалентная задача на Г

Если мы положим

$$w|_\Gamma = u, \tag{4.14}$$

то задача (4.2), (4.3), (4.4) будет эквивалентна задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}(u)=f, \tag{4.15}$$

$$u(0)=w_0. \tag{4.16}$$

В силу предложений 4.2 и 4.3 в ситуации (4.15), (4.16) можно применить теоремы 1.2 и 1.2′. Из них выводится

Теорема 4.1. *Пусть заданы* f *и* w_0, *причем*

$$f\in L^{p'}(0,\ T;\ W^{-1/p',\,p'}(\Gamma)), \tag{4.17}$$

$$w_0\in L^2(\Gamma). \tag{4.18}$$

Тогда существует и притом единственная функция w *из* $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$, *удовлетворяющая* (4.2), (4.3), (4.4).

Доказательство. В самом деле, из теорем 1.2 и 1.2′ вытекает существование и единственность решения $u \in L^p(0, T; W^{1/p', p}(\Gamma))$ задачи (4.15), (4.16). *Построим* теперь w как решение задачи

$$\begin{aligned} &A(w(t)) = 0, \qquad w(t)|_\Gamma = u(t), \\ &w(t) \in W^{1,p}(\Omega), \end{aligned} \tag{4.19}$$

t играет роль *параметра.* Далее можно проверить, что

$$w \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)),$$

откуда и следует теорема ●

5. ОДИН КЛАСС МОДИФИКАЦИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА. МЕТОД КОМПАКТНОСТИ И МОНОТОННОСТИ

5.1. Общие соображения. Постановки задач

Как мы уже подчеркивали в § 2 (замечание 2.7), в случае стационарных уравнений нами *одновременно* были использованы метод компактности и метод монотоиности.

Сейчас мы увидим, что такое одновременное использование этих методов существенно для случая *эволюционных параболических* уравнений.

Мы продемонстрируем метод на одном классе примеров, интересных самих по себе: речь идет о модификациях уравнений Навье—Стокса, изученных в § 6 гл. 1.

Обозначения и формулировки задач. Для вектора $u = \{u_1, \ldots \ldots, u_n\}$, где u_i — вещественная функция, определениая в Ω, положим

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |D_i u_j|^2; \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \tag{5.1}$$

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{5.2}$$

Нами будет рассмотрена

Задача 5.1. Ищутся $u = u(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)\}$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$, и $p_* = p_*(x, t)$, являющиеся решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu A(u) + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p_* \quad (\nu > 0), \tag{5.3}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{5.4}$$

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{5.5}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{5.6}$$

Замечание 5.1. В случае $p = 2$ мы снова приходим к задаче Навье — Стокса, изученной в § 6 гл. 1 ●

Вариантом задачи 5.1 является

Задача 5.2. Ищутся u и p_*, являющиеся решением системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu A(u) - \nu_0 \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p_* \quad (\nu, \nu_0 > 0); \tag{5.7}$$

условия (5.4), (5.5), (5.6) остаются без изменения ●

Вот еще один вариант, который будет нами изучен:

Задача 5.3. Ищутся u и p_*, являющиеся решением системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 \| u(t) \|^2) \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p_* \quad (\nu_0, \nu_1 > 0), \tag{5.8}$$

где

$$\| \varphi \|^2 = \sum_{i, j=1}^{n} \int_\Omega (D_i \varphi_j)^2 \, dx = \int_\Omega | \nabla \varphi |^2 \, dx, \tag{5.9}$$

условия (5.4), (5.5), (5.6) остаются без изменения ●

Функциональные пространства. Как и в § 6 гл. 1, введем

$$\mathscr{V} = \{\varphi \mid \varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \quad \varphi_i \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \operatorname{div} \varphi = 0\}. \tag{5.10}$$

Пусть

$$V = \text{замыкание } \mathscr{V} \text{ в } \left(W^{1, p}(\Omega)\right)^n. \tag{5.11}$$

Можно проверить, что

$$V = \left\{ v \mid v \in \left(W_0^{1, p}(\Omega)\right)^n, \quad \operatorname{div} v = 0 \right\}. \tag{5.12}$$

Как и в § 6 гл. 1, введем

$$V_s = \text{замыкание } \mathscr{V} \text{ в } (H^s(\Omega))^n, \tag{5.13}$$

и

$$H = \text{замыкание } \mathscr{V} \text{ в } (L^2(\Omega))^n (= V_0) \bullet \tag{5.14}$$

5.2. Теорема существования для задачи 5.1

Теорема 5.1. *Предположим, что* $f \in L^{p'}(0, T; V')$, $u_0 \in H$ *и что*

$$p \geqslant 1 + \frac{2n}{n+2}. \tag{5.15}$$

Тогда задача 5.1 *имеет такое решение* u, p_*, *что*

$$u \in L^p(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{5.16}$$

Замечание 5.2. Из приведенного ниже доказательства будет следовать, что $u(0)$ имеет смысл, а тем самым имеет смысл условие (5.6) $\bullet$

Доказательство. 1) *Выбор специального базиса.* Выберем s таким образом, чтобы

$$s > 1 + \frac{n}{2}. \tag{5.17}$$

Тогда если $v \in H^s(\Omega)$, то

$$D_i v \in H^{s-1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \quad \text{поскольку} \quad \frac{1}{2} - \frac{s-1}{n} < 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что $D_i v \in L^p(\Omega)$ и, следовательно,

$$V_s \subset V \subset H \subset V' \subset V'_s \tag{5.18}$$

(H отождествляется со своим сопряженным).

Рассмотрим теперь *собственные функции* w_j:

$$(w_j, v)_{V_s} = \lambda_j (w_j, v) \qquad \forall v \in V_s \tag{5.19}$$

(где (,) — скалярное произведение в H)[1].

Теперь мы применим метод Фаэдо — Галёркина с базисом $\{w_j\}$. Этот метод аналогичен уже использованному в § 6 гл. 1, но предельный переход здесь будет более деликатным.

---

[1] Предполагается, что Ω — ограниченная область. Можно получить результат для неограниченной области Ω, «аппроксимируя» ее ограниченными областями.

2) *Метод Фаэдо — Галёркина.* Определим $u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m]$ как решение уравнений

$$(u'_m(t), w_j) + \nu(A(u_m(t)), w_j) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = \\ = (f(t), w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{5.20}$$

где

$$b(u, v, w) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j \, dx, \tag{5.21}$$

удовлетворяющее условиям

$$u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \ldots, w_m], \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{в} \quad H. \tag{5.22}$$

Тем самым $u_m(t)$ определяется на отрезке $[0, t_m]$, $t_m > 0$.

3) *Априорные оценки* (I). Заметим, что

$$(A(u), v) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} D_i u_j D_i v_j \, dx; \tag{5.23}$$

следовательно,

$$(A(v), v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx. \tag{5.24}$$

В качестве нормы на V можно взять

$$\| v \| = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{5.25}$$

С другой стороны, $b(u, v, v) = 0$ на V_s (в частности) и из (5.20) следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} | u_m(t) |^2 + \nu \| u_m(t) \|^p = (f(t), u_m(t)) \leqslant \| f(t) \|_{V'} \| u_m(t) \|, \tag{5.26}$$

а поскольку $f \in L^{p'}(0, T; V')$, из (5.26) следует, что $t_m = T$ и что

$$u_m \text{ ограничены в } L^p(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{5.27}$$

4) *Априорные оценки* (II). Заметим, что для $w \in V_s$

$$| b(u_m(t), u_m(t), w) | = | - b(u_m(t), w, u_m(t)) | \leqslant c | u_m(t) |^2 \| w \|_{V_s}$$

(так как если $w \in V_s$, то $D_i w_j \in L^\infty(\Omega)$), и, следовательно,

$$\begin{gathered} b(u_m(t), u_m(t), w) = (g_m(t), w), \quad \text{где} \\ g_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; V'_s). \end{gathered} \tag{5.28}$$

Пусть P_m — оператор ортогонального проектирования H на $[w_1, \ldots, w_m]$. Операторы P_m равномерно ограничены (единицей) в $\mathscr{L}(H; H)$, $\mathscr{L}(V_s; V_s)$ и $\mathscr{L}(V'_s; V'_s)$.

Из (5.20) вытекает, что

$$u'_m + \nu P_m A(u_m) + P_m g_m = P_m f. \tag{5.29}$$

В силу (5.27) $A(u_m)$ ограничены в $L^{p'}(0, T; V')$, а потому в $L^{p'}(0, T; V'_s)$, и, следовательно, $P_m A(u_m)$ ограничены в $L^{p'}(0, T; V'_s)$.

Аналогично в силу (5.28) $P_m g_m$ ограничены в $L^\infty(0, T; V'_s)$ и, наконец, $P_m f$ ограничены в $L^{p'}(0, T; V'_s)$. Таким образом, из (5.29) следует, что

$$u'_m \text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; V'_s). \tag{5.30}$$

5) *Предельный переход* (I). *Использование компактности.* Мы применим теорему 5.1 с $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V'_s$, $p_0 = p$, $p_1 = p'$; вложение $V \to H$ компактно. Следовательно, мы можем выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } L^p(0, T; V), \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H), \tag{5.31}$$

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L^p(0, T; H) \text{ и почти всюду в } Q, \tag{5.32}$$

$$u'_\mu \to u' \text{ слабо в } L^p(0, T; V'_s), \tag{5.33}$$

$$A(u_\mu) \to \chi \text{ слабо в } L^{p'}(0, T; V'). \tag{5.34}$$

Зафиксируем j; заметим, что

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \to b(u, u, w_j) \text{ в } \mathcal{D}'(]0, T[) \text{ (например!)}. \tag{5.35}$$

Действительно, если $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, то имеем:

$$\int_0^T b(u_\mu, u_\mu, w_j)\varphi\, dt = -\int_0^T b(u_\mu, w_j, u_\mu)\varphi\, dt =$$

$$= -\sum_{i, k=1}^{n} \int_Q u_{\mu i} u_{\mu k} (D_k w_{ji}) \varphi\, dx\, dt \to$$

$$\to -\sum_{i, k=1} \int_Q u_i u_k (D_k w_{ji}) \varphi\, dx\, dt = \int_0^T b(u, u, w_j)\varphi\, dt,$$

так как $u_{\mu i} u_{\mu k} \to u_i u_k$ в $L^1(Q)$ (заметим, что $p > 2$). Таким образом, из (5.20) следует, что для всех j

$$(u', w_j) + \nu(\chi, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j). \tag{5.36}$$

Отсюда мы выводим, что

$$(u', v) + \nu(\chi, v) + b(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_s. \tag{5.37}$$

Однако в силу теоремы Соболева

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \tag{5.38}$$

$\left(\right.$где q конечно и произвольно при $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leqslant 0\left.\right)$ и форма $b(u, v, w)$ непрерывна на V при $\frac{2}{q} + \frac{1}{p} \leqslant 1$, т. е. $p \geqslant \frac{3n}{n+2}$, что выполняется при условии (5.15). Следовательно, по непрерывности равенство (5.37) *справедливо* $\forall v \in V$.

6) *Предельный переход* (II). *Использование монотонности.* В силу (5.31), (5.33) $u_\mu(0) \to u(0)$ в V_s' (в частности), поэтому

$$u(0) = u_0;$$

мы докажем теорему, если проверим, что

$$\chi = A(u). \tag{5.39}$$

Прежде всего мы проверим следующее:

если $u, v \in L^p(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, и если имеет место (5.15)[1]), то функция $t \to b(u(t), u(t), v(t))$ (5.40) принадлежит $L^1(0, T)$.

Действительно, если перейти к слагаемым суммы (5.21), то нам надо показать, что когда

$$u, v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

функция

$$t \to \int_\Omega u v D_i u \, dx \quad \text{принадлежит} \quad L^1(0, T).$$

В силу (5.38) (мы можем ограничиться случаем $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0$; другие случаи проще):

$$L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset$$
$$\subset L^p(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^\rho(0, T; L^\sigma(\Omega)),$$

где

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty} = \frac{1-\theta}{p}, \qquad \frac{1}{\sigma} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2}.$$

---

[1]) Именно в этом месте существенно, по-видимому, используется предположение (5.15).

Мы выберем θ таким образом, чтобы $\rho = \sigma$, т. е. пусть $\theta = 2/(n+2)$; тогда

$$L^p(0,\ T;\ W_0^{1,\,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)) \subset L^\rho(Q), \tag{5.41}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{n}{(n+2)\,p}. \tag{5.42}$$

Мы получим требуемый результат, если $\frac{2}{\rho} + \frac{1}{p} \leqslant 1$, т. е. если (5.15) имеет место.

Теперь мы собираемся вывести неравенство

$$\frac{1}{2}\,|\,u(s)\,|^2 + \nu \int\limits_0^s (\chi,\ u)\,dt \geqslant \int\limits_0^s (f,\ u)\,dt + \frac{1}{2}\,|\,u_0\,|^2 \text{ почти всюду}^{1)}. \tag{5.43}$$

Зафиксируем s_0, $s \in\,]0,\ T[$, $s_0 < s$; пусть θ_m — непрерывиая кусочио линейная функция на $[0,\ T]$, $\theta_m(t) = 1$, если $s_0 + \frac{2}{m} < t < s - \frac{2}{m}$, $\theta_m(t) = 0$ при $t > s - \frac{1}{m}$ или при $t < s_0 + \frac{1}{m}$. Пусть ρ_m — регуляризующая последовательность в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\rho_n(t) = \rho_n(-t)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\,dt = 1, \text{ иоситель } \rho_n \text{ принадлежит } \left[-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right].$$

При $n > 2m$ (ср. с доказательством теоремы 9.2, § 9 гл. 1) положим

$$v = ((\theta_m u) * \rho_n * \rho_n)\,\theta_m \tag{5.44}$$

и подставим функцию $v = v(t)$, определенную с помощью (5.44), в (5.37) (что законно).

Заметим, что

$$\int\limits_0^T (u',\ v)\,dt = \int\limits_0^T (\theta_m u',\ (\theta_m u) * \rho_n * \rho_n)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T ((\theta_m u)' * \rho_n,\ (\theta_m u) * \rho_n)\,dt - \int\limits_0^T (\theta'_m u,\ (\theta_m u) * \rho_n * \rho_n)\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^T (\theta'_m u,\ (\theta_m u) * \rho_n * \rho_n)\,dt \xrightarrow[(n \to \infty)]{} -\int\limits_0^T \theta_m \theta'_m\,|\,u\,|^2\,dt.$$

---

[1] Мы не знаем, нмеет ли место равенство в (5.43).

В силу (5.40)

$$\int_0^T b(u, u, v)\,dt \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_0^T \theta_m^2 b(u, u, u)\,dt = 0$$

$$\text{(поскольку } b(u, u, u) = 0 \ \ \forall u \in V\text{)},$$

и мы, следовательно, получим:

$$\int_0^T (-\theta_m\theta_m')\,|u|^2\,dt + \nu\int_0^T \theta_m^2(\chi, u)\,dt = \int_0^T \theta_m^2(f, u)\,dt. \tag{5.45}$$

Теперь мы можем устремить m к бесконечности; заметим, что

$$\int_0^T (-\theta_m\theta_m')\,|u|^2\,dt \to \frac{1}{2}|u(s)|^2 - \frac{1}{2}|u(s_0)|^2$$

$$\text{для почти всех } s\text{[1]) и } s_0,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}|u(s)|^2 + \nu\int_{s_0}^{s}(\chi, u)\,dt = \frac{1}{2}|u(s_0)|^2 + \int_{s_0}^{s}(f, u)\,dt \tag{5.46}$$

$$\text{для почти всех } s \text{ и } s_0.$$

Однако, поскольку $u \in L^\infty(0, T; H)$, можно найти последовательность $s_{0n} \to 0$, не исключительную для (5.46) и такую, что $u(s_{0n})$ слабо сходятся в H; так как $u(s) \to u(0) = u_0$ в V_1', то

$$u(s_{0n}) \to u_0 \quad \text{слабо в } H. \tag{5.47}$$

Зафиксируем теперь значение s, не исключительное для (5.46), и возьмем $s_0 = s_{0n}$. В силу (5.47) мы получим (5.43).

Теперь мы можем доказать (5.39), используя *монотонность* A[2]). Положим для $\varphi \in L^p(0, T; V)$

$$X_\mu^s = \nu\int_0^s (A(u_\mu) - A(\varphi), u_\mu - \varphi)\,dt + \frac{1}{2}|u_\mu(s)|^2, \tag{5.48}$$

где s не принадлежит исключительному множеству для (5.43).

---

[1]) Не путать с s, введенным в (5.17)!

[2]) Нетрудно проверить монотонность оператора A: он является градиентом функционала

$$v \to \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx.$$

Выбирая подпоследовательность (если это необходимо), мы можем считать, что

$$u_\mu(s) \to u(s) \quad \text{слабо в} \quad H,$$

и, следовательно, используя, кроме того, монотонность A, мы из (5.48) выведем, что

$$\liminf_{\mu\to\infty} X^s_\mu \geqslant \frac{1}{2} | u(s) |^2. \tag{5.49}$$

Однако в силу (5.20)

$$X^s_\mu = \int_0^s (f, u_\mu)\, dt + \frac{1}{2} |u_{0\mu}|^2 - \nu \int_0^s (A(u_\mu), \varphi)\, dt - \\ - \nu \int_0^s (A(\varphi), u_\mu - \varphi)\, dt \to X^s,$$

где

$$X^s = \int_0^s (f, u)\, dt + \frac{1}{2} | u_0 |^2 - \nu \int_0^s (\chi, \varphi)\, dt - \nu \int_0^s (A(\varphi), u - \varphi)\, dt.$$

Таким образом, учитывая (5.49), найдем:

$$\int_0^s (f, u)\, dt + \frac{1}{2} | u_0 |^2 - \nu \int_0^s (\chi, \varphi)\, dt - \nu \int_0^s (A(\varphi), u - \varphi)\, dt \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2} | u(s) |^2.$$

Из этого неравенства с учетом (5.43) получим, что

$$\nu \int_0^s (\chi - A(\varphi), u - \varphi)\, dt \geqslant 0 \quad \text{для почти всех } s. \tag{5.50}$$

Отсюда выводится (5.39) с помощью стандартной процедуры ●

Замечание 5.3. Вопрос о *единственности* решения из теоремы 5.1 является открытым. В этой связи см. частичный результат о единственности в следующем ниже п. 5.3 ●

Замечание 5.4. Утверждение теоремы 5.1 справедливо и в случае задачи 5.2.

Более того, можно показать, что *при фиксированном* $\nu > 0$ *можно найти последовательность чисел* $\nu_0 \to 0$ *и решений* $\{u^{\nu_0}, p^{\nu_0}_*\}$ *задачи* 5.2, *таких, что* $u^{\nu_0} \to u$ *слабо в* $L^p(0, T; V)$ *и при этом* u *является решением задачи* 5.1 ●

Замечание 5.5. *Стационарный случай.* Стационарная задача, соответствующая задаче 5.1, сводится к нахождению u и p_*, таких, что

$$\nu A(u) + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p_*, \qquad \operatorname{div} u = 0, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{5.51}$$

Можно применить теорему 2.4, из которой следует *существование решения из* $W^{1,p}(\Omega)$ при

$$p \geqslant \frac{3n}{n+2}. \tag{5.52}$$

В самом деле, поскольку оператор A: $V \to V'$ монотонный, семинепрерывный и коэрцитивный, то единственное, что надо выяснить: в каком случае оператор

$$u \to \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u$$

отображает V в V' $\left(\text{поскольку тогда } \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i u_j) u_j \, dx = 0\right)$.

Последнее имеет место при условии (5.52); все сводится к изучению интеграла

$$\int_{\Omega} uv (D_i u) \, dx, \qquad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

который сходится при $2/q + 1/p \leqslant 1$, где $1/q = 1/p - 1/n$, что приводит к (5.52) ●

5.3. Одна теорема единственности

Имеет место следующий частичный результат о единственности решения задачи 5.2:

Теорема 5.2. *Предположим, что*[1])

$$p \geqslant \frac{n+2}{2}. \tag{5.53}$$

Тогда задача 5.2 *имеет и притом единственное решение*

$$u \in L^p(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Доказательство. Мы можем остановиться на случае $n > 2$. Случай $n = 2$ более простой. Покажем, что наша теорема

---

[1]) Это предположение более ограничительное, чем (5.15).

следует из теоремы 6.8 гл. 1. В самом деле, если u и u^* суть два решения, то

$$\nu \int_0^T (A(u) - A(u^*), u - u^*)\, dt \geqslant 0, \tag{5.54}$$

и мы можем рассуждать таким же образом, как в теореме 6.8 гл. 1, не учитывая член (5.54) 1)).

Из доказательства теоремы 5.1 (см. п. 6)) мы знаем, что

$$u_t \in L^\rho(0, T; L^\sigma(\Omega)), \ \frac{1}{\rho} = \frac{1-\theta}{p}, \ \frac{1}{\sigma} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2}, \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}{}^{2)}. \tag{5.55}$$

Мы выведем наш результат из теоремы 6.9 гл. 1, если нам удастся так подобрать θ, чтобы

$$\frac{2}{\rho} + \frac{n}{\sigma} \leqslant 1, \quad \sigma > n,$$

т. е.

$$(1-\theta)\left(\frac{n+2}{p} - 1 - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} \leqslant 1$$

и

$$(1-\theta)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2},$$

т. е.

$$(1-\theta)(n+2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \geqslant \frac{n-2}{2}, \quad (1-\theta)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}. \tag{5.56}$$

Итак, должно выполняться неравенство $1 - \theta \leqslant 1$, которое согласуется с (5.56), если выполнено (5.53) ●

5.4. Изучение задачи 5.3

Что касается задачи 5.3, то для нее справедливы следующие результаты. Обозначим:

$$\mathbf{V} = \text{замыкание } \mathscr{V} \text{ в } \left(H_0^1(\Omega)\right)^{n}\,{}^{3)}. \tag{5.57}$$

Тогда имеет место

Теорема 5.3. *Предположим, что*

$$n \leqslant 4. \tag{5.58}$$

Тогда существует функция u, являющаяся решением задачи 5.3 и удовлетворяющая включению

$$u \in L^4(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{5.59}$$

---

1) Вероятно, существуют не использованные нами возможности улучшения результатов.

2) Предполагается, что $p < n$. Случай $p \geqslant n$ более простой.

3) В § 6 гл. 1 это пространство обозначается через V.

Теорема 5.4. *Если предположить, что*

$$n \leqslant 3, \qquad (5.60)$$

то будет существовать единственное решение задачи 5.3, *удовлетворяющее* (5.59).

Замечание 5.6. Проблема *существования и единственности* является открытой для $n > 4$; для $n > 5$ открытым является и вопрос о существовании ●

Доказательство теоремы 5.3. 1) Заметим, что оператор

$$u \to -\|u\|^2 \Delta u$$

является монотонным оператором из $\mathbf{V}$ в $\mathbf{V}'$, поскольку он отвечает градиенту функционала

$$\frac{1}{4}\left(\int_{\Omega} \sum_{i,\ j=1}^{n} (D_i\varphi_j)^2\,dx\right)^2.$$

2) Далее используется тот же самый метод, что и при доказательстве теоремы 5.1. Заметим, что благодаря условию $\nu_1 > 0$ можно получить оценку

$$u_m \text{ ограничены в } L^4(0,\ T;\ \mathbf{V}). \qquad (5.61)$$

Метод доказательства теоремы 5.1 будет применим к нашей ситуации, если мы установим аналог утверждения (5.40), а именно:

если $u,\ v \in L^4(0,\ T;\ V) \cap L^\infty(0,\ T;\ H)$ и если $n \leqslant 4$,
то функция $t \to b(u(t),\ u(t),\ v(t))$ прииадлежит $\qquad$ (5.62)
$L^1(0,\ T)$.

Переходя к слагаемым, мы должны будем проверить, что если

$$u,\ v \in L^4\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,\ T;\ L^2(\Omega)\right),$$

то

$$u(D_i u)\,v \in L^1(Q).$$

Последнее верно при единственном предположении, что $u,\ v \in L^4\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right)$, когда $n \leqslant 4$, поскольку тогда $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ и, следовательно, $u,\ v \in L^4(Q)$ ●

Доказательство теоремы 5.4. Как и при доказательстве теоремы 5.2, применим теорему 6.9 гл. 1. Если u удовлетворяет (5.59), и даже если *только*

$$u \in L^4(0,\ T;\ \mathbf{V}),$$

то

$$u_i \in L^4\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right) \subset L^4\left(0,\ T;\ L^q(\Omega)\right), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

(при $n>2$; случай $n=2$ более легкий) и $\frac{2}{4}+\frac{n}{q}\leqslant 1$, если имеет место (5.60) ●

Замечание 5.7. Мы доказали несколько больше, чем утверждалось: имеет место единственность в классе функций, принадлежащих $L^2(0, T; \mathbf{V})$ ●.

Замечание 5.8. При фиксированном $\nu_0>0$ пусть u^{ν_1} — решение задачи 5.3 (единственное при $n\leqslant 3$). Тогда, если $n\leqslant 4$, то можно найти такую последовательность $\nu_l\to 0$, что

$$u^{\nu_l}\to u \text{ *-слабо в } L^2(0, T; \mathbf{V})\cap L^\infty(0, T; H),$$

где u является одним из решений задачи для уравнений Навье — Стокса, изученной в § 6 гл. 1. В случае $n=2$ сходится вся последовательность u^{ν_l} (в той же самой топологии) к *единственному* решению u задачи для уравнений Навье—Стокса ●

Замечание 5.9. Можно установить одно *свойство гладкости* решений задачи 5.3, используя предположения о гладкости данных:

Теорема 5.5. *Рассмотрим задачу* 5.3 *при* $n\leqslant 3$. *Предположим, что*

$$f,\ f'\in L^2(0, T; \mathbf{V}'),\quad f(0)\in H, \tag{5.63}$$

и что

$$\text{функционал } v\to\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_\Omega D_iu_{0j}\cdot D_iv_j\,dx \text{ непрерывен на } \mathbf{V} \text{ в топологии, индуцированной } H. \tag{5.64}$$

Тогда решение u задачи 5.3 *из класса* (5.59) *удовлетворяет включению*

$$u'\in L^2(0, T; \mathbf{V})\cap L^\infty(0, T; H). \tag{5.65}$$

Доказательство. Предположим, что $n=3$ (случай $n=2$ более легкий). Чтобы упростить запись, для $u, v\in\mathbf{V}$ положим

$$a(u, v)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx. \tag{5.66}$$

Тогда

$$a(v, v)=\|v\|^2, \tag{5.67}$$

и мы имеем:

$$(u'(t),\ v)+\nu_0 a(u(t),\ v)+\nu_1\|u(t)\|^2 a(u(t),\ v)+b(u(t),\ u(t),\ v)= \\ =(f(t),\ v)\quad \forall v\in \mathrm{V}. \tag{5.68}$$

Дифференцируя по t (формально; все это можно обосновать, применяя, например, метод Фаэдо—Галёркина), получаем:

$$(u''(t),\ v)+(\nu_0+\nu_1\|u(t)\|^2)\,a(u'(t),v)+2\nu_1 a(u'(t),u(t))\,a(u(t),v)+ \\ +b(u'(t),\ u(t),\ v)+b(u(t),\ u'(t),\ v)=(f'(t),\ v)\quad \forall v\in \mathrm{V}. \tag{5.69}$$

Полагая $v=u'(t)$ в (5.69), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2+(\nu_0+\nu_1\|u(t)\|^2)\,a(u'(t),\ u'(t))+ \\ +2\nu_1 a(u'(t),\ u(t))^2+b(u'(t),\ u(t),\ u'(t))=(f'(t),\ u'(t)). \tag{5.70}$$

Имеем:

$$|b(u,\ v,\ u)|\leqslant c_1\|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|v\|. \tag{5.71}$$

Нам понадобится

Лемма 5.1. *Если $n=3$, то справедливо неравенство*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)}\leqslant c_2\|v\|^{3/4}_{H^1(\Omega)}\|v\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{5.72}$$

Тогда из (5.71) следует, что

$$|b(u'(t),\ u(t),\ u'(t))|\leqslant c_3\|u'(t)\|^{3/2}\|u(t)\|\,|u'(t)|^{1/2}\leqslant \\ \leqslant\frac{\nu_0}{2}\|u'(t)\|^2+c_4\|u(t)\|^4|u'(t)|^2,$$

и подставляя в (5.70), получим:

$$\frac{d}{dt}|u'(t)|^2+\nu_0\|u'(t)\|^2\leqslant 2c_4\|u(t)\|^4|u'(t)|^2+ \\ +2\|f'(t)\|_*\|u'(t)\| \tag{5.73}$$

(где $\|\ \|_*$ обозначает норму, дуальную норме $\|\ \|$).

Ввиду предположений (5.63), (5.64) $u'(0)\in H$, и (5.73) приводит к оценке

$$|u'(t)|^2+\nu_0\int_0^t\|u'(\sigma)\|^2 d\sigma\leqslant 2c_4\int_0^t\|u(\sigma)\|^4|u'(\sigma)|^2 d\sigma+ \\ +2\int_0^t\|f'(\sigma)\|_*\|u'(\sigma)\|d\sigma+|u'(0)|^2,$$

а поскольку

$$2\int_0^t\|f'(\sigma)\|_*\|u'(\sigma)\|d\sigma\leqslant\frac{\nu_0}{2}\int_0^t\|u'(\sigma)\|^2 d\sigma+c_5,$$

то окончательно получим:

$$|u'(t)|^2 + \nu_0 \int_0^t \|u'(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant c_6 \int_0^t \|u(\sigma)\|^4 |u'(\sigma)|^2 d\sigma + c_7. \qquad (5.74)$$

Мы можем применить лемму Гронуола, поскольку мы уже знаем, что $u \in L^4(0, T; V)$. Тогда мы получим требуемые априорные оценки

$$|u'(t)|^2 \leqslant c_7 \exp\left(c_6 \int_0^t \|u(\sigma)\|^4 d\sigma\right) \leqslant c_8,$$

$$\int_0^t \|u'(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant c_9 \bullet$$

Доказательство леммы 5.1. Имеем: $H^{1-\theta}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, если $\frac{1}{2} - \frac{1-\theta}{3} \leqslant \frac{1}{4}$; случай $\theta = 1/4$ является предельным. Следовательно, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c_1 \|v\|_{H^{3/4}(\Omega)} \leqslant c_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^{3/4} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/4},$$

откуда и следует (5.72) ●

6. МЕТОД МОНОТОННОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Постановка задачи. Теорема существования и единственности

До сих пор мы применяли метод монотонности к *эллиптическим* и *параболическим* задачам. Естественно спросить, применим ли этот метод к *монотонным нелинейным гиперболическим задачам.*

Этот вопрос еще далек от решения, в полной мере удовлетворительного; см., например, проблему 11.9. В этом пункте мы приведем простой пример, где этот метод применим; мы обратимся вновь к ситуации, уже рассмотренной **в § 3 гл.** 1, на этот раз принимая во внимание монотонность. Более общие ситуации изучены на основе тех же самых принципов в работе Лионса — Штраусса [1] гл. 2.

Замечание 6.1. Другие нелинейные гиперболические задачи изучены в п. 2.3, 2.4 гл. 3 ●

Мы вновь обращаемся к задаче, поставленной в п. 3.1 гл. 1. Речь пойдет о нахождении функции u, являющейся решением задачи

$$u'' - \Delta u + |u'|^{p-2} u' = f \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times]0, T[\quad (1 < p < \infty), \tag{6.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{6.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega; \tag{6.3}$$

здесь ρ заменено на $p - 2$. Будет доказана

Теорема 6.1. *Предположим, что заданы такие* f, u_0, u_1, *что*

$$f \in L^2(Q) + L^{p'}(Q)^{1)}, \tag{6.4}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega). \tag{6.5}$$

Тогда существует, и притом одна, функция u, удовлетворяющая включениям

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{6.6}$$

$$u' \in L^p(Q) \tag{6.7}$$

и условиям (6.1), (6.2), (6.3).

Замечание 6.2. 1) Условие (6.2) в действительности следует из принадлежности u к $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

2) Условие (6.7), очевидно, бесполезно при $p < 2$.

3) Как следует из (6.1) и (6.6), (6.7),

$$u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^{p'}(Q), \tag{6.8}$$

так что определено $u'(0)$ и второе условие (6.3) имеет смысл ●

Замечание 6.3. Предположения о данных задачи здесь *менее сильные*, чем в теореме 3.1 гл. 1, и (естественно) полученное решение *более слабое*. Здесь мы встречаемся еще раз с общим явлением: метод монотонности (если он вообще применим!) позволяет переходить к пределу при *меньшем* числе априорных оценок по сравнению с методом компактности и получать более слабое решение при меньших ограничениях на данные ●

Теорема 6.1 будет доказана в двух последующих пунктах.

---

[1] Как обычно, $1/p + 1/p' = 1$. Очевидно, что в случае ограниченной области Ω включение (6.4) эквивалентно включению $f \in L^{\min(2, p')}(Q)$.

6.2. Доказательство существования

Обозначения:

$$V = H_0^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

$$\beta(v) = |v|^{p-2} v, \quad (f, g) = \int_\Omega fg\, dx, \quad |f| = (f, f)^{1/2}, \quad \|v\| = a(v, v)^{1/2}.$$

1) Применим метод Фаэдо — Галёркина с «базисом» $w_1, \ldots$ $\ldots, w_m, \ldots$ в пространстве $V \cap L^p(\Omega)$.

Тогда $u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m]$ определяется (локально по t) из задачи

$$(u_m'', w_j) + a(u_m, w_j) + (\beta(u_m'(t)), w_j) = (f(t), w_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{6.9}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \ldots, w_m], \qquad u_{0m} \to u_0 \text{ в } V, \tag{6.10}$$

$$u_m'(0) = u_{1m} \in [w_1, \ldots, w_m], \qquad u_{1m} \to u_1 \text{ в } H. \tag{6.11}$$

Из *тех же самых* априорных оценок, что и в п. 3.2 гл. 1, следует, что

$$\begin{aligned} &u_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; V), \\ &u_m' \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; H) \cap L^p(Q). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Мы сейчас покажем, что этих оценок и монотонности *достаточно* для перехода к пределу.

2) В силу (6.12) можно выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; V), \tag{6.13}$$

$$\begin{gathered} u_\mu' \to u' \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H) \text{ и слабо в } L^p(Q), \\ \beta(u_\mu') \to \chi \text{ слабо в } L^{p'}(Q). \end{gathered} \tag{6.14}$$

В силу (6.13) $u_\mu(0) \to u(0)$ слабо в H (например) и, следовательно, $u(0) = u_0$. Применяя (6.9) для $m = \mu$ при фиксированном j, мы получим, что

$$(u'', w_j) + a(u, w_j) + (\chi, w_j) = (f, w_j) \quad \forall w_j.$$

Тогда

$$(u'', v) + a(u, v) + (\chi, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \cap L^p(\Omega)$$

и, следовательно,

$$u'' + Au + \chi = f \qquad (A = -\Delta). \tag{6.15}$$

Таким образом, мы установили (6.8). Кроме того, мы получили, что

$$\frac{d}{dt}(u'_\mu, w_j) \to (f, w_j) - a(u, w_j) - (\chi, w_j) = \frac{d}{dt}(u', w_j)$$

слабо в $L^2(0, T) + L^{p'}(0, T)$, следовательно,

$$(u'_\mu, w_j)|_{t=0} = (u_{1\mu}, w_j) \to (u'(0), w_j)$$

и, таким образом,

$$(u_1, w_j) = (u'(0), w_j) \quad \forall j, \text{ следовательно, } u'(0) = u_1.$$

Итак, для доказательства существования нам остается проверить, что

$$\chi = \beta(u'). \tag{6.16}$$

3) Ниже будет доказана

Лемма 6.1. *Пусть функция w такова, что*

$$w \in L^\infty(0, T; V), \quad w' \in L^\infty(0, T; H) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega)), \tag{6.17}$$

$$\left.\begin{aligned} &w'' + Aw = g, \quad g \in L^2(0, T; H) + L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega)), \\ &w(0) = u_0, \quad w'(0) = u_1. \end{aligned}\right. \tag{6.18}$$

Тогда для почти всех $t \in [0, T]$ имеем[1]:

$$a(w(t), w(t)) + |w'(t)|^2 \geqslant a(u_0, u_0) + |u_1|^2 + 2\int_0^t (g, w')\,d\sigma. \tag{6.19}$$

Теперь мы хотим вывести, что

$$\liminf \int_0^t (\beta(u'_\mu) - \beta(\varphi),\ u'_\mu - \varphi)\,d\sigma \leqslant \int_0^t (\chi - \beta(\varphi), u' - \varphi)\,d\sigma \tag{6.20}$$

для всех t, не исключительных для (6.19), и $\forall \varphi \in L^p(Q)$.

На самом деле для доказательства (6.20) достаточно проверить, что

$$\liminf \int_0^t (\beta(u'_\mu), u'_\mu)\,d\sigma \leqslant \int_0^t (\chi, u')\,d\sigma. \tag{6.21}$$

С другой стороны, из (6.9) следует, что

$$\frac{1}{2}a(u_\mu(t), u_\mu(t)) + \frac{1}{2}|u'_\mu(t)|^2 + \int_0^t (\beta(u'_\mu), u'_\mu)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}a(u_{0\mu}, u_{0\mu}) + \frac{1}{2}|u_{1\mu}|^2 + \int_0^t (f, u'_\mu)\,d\sigma. \tag{6.22}$$

---

[1] В (6.19) имеет место равенство, если $u_0 = 0$, $u_1 = 0$; ср. с п. 6.3.

Однако при фиксированном t можно считать (в противном случае ввиду (6.12) мы из u_μ выделим новую подпоследовательность), что

$$u_\mu(t) \to \psi_0 \text{ слабо в } V, \quad u'_\mu(t) \to \psi_1 \text{ слабо в } H.$$

Рассуждая таким же образом, как в конце п. 2), мы проверим, что

$$\psi_0 = u(t), \qquad \psi_1 = u'(t).$$

Далее из (6.22) мы заключаем, что

$$\frac{1}{2} a(u(t), u(t)) + \frac{1}{2} |u'(t)|^2 + \liminf \int_0^t (\beta(u'_\mu), u'_\mu)\, d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} a(u_0, u_0) + \frac{1}{2} |u_1|^2 + \int_0^t (f, u')\, d\sigma. \qquad (6.23)$$

Однако благодаря (6.15) мы можем к функции u применить лемму 6.1, полагая $g = f - \chi$. Тогда из (6.23) мы выведем, что

$$\liminf \int_0^t (\beta(u'_\mu), u'_\mu)\, d\sigma \leqslant \int_0^t (f, u')\, d\sigma + \int_0^t (\chi - f, u')\, d\sigma,$$

откуда следуют (6.21) и (6.20).

Из *монотонности* β вытекает, что

$$\int_0^t (\beta(u'_\mu) - \beta(\varphi), u'_\mu - \varphi)\, d\sigma \geqslant 0,$$

и, таким образом, (6.20) приводит к неравенству

$$\int_0^t (\chi - \beta(\varphi), u' - \varphi)\, d\sigma \geqslant 0$$

для всех t, не исключительных для (6.19); беря $t = t_k \to T$, где t_k пробегает не исключительные значения, мы сможем заключить, что

$$\int_0^T (\chi - \beta(\varphi), u' - \varphi)\, dt \geqslant 0 \qquad \forall \varphi \in L^p(Q), \qquad (6.24)$$

откуда (6.16) выводится с помощью обычной процедуры.

Таким образом, для доказательства существования нам осталось установить лемму 6.1.

Доказательство леммы 6.1. Мы воспользуемся приемом, который уже применялся в п. 6) доказательства теоремы 5.1. В обозначениях § 5 положим

$$v = ((\theta_m w') * \rho_n * \rho_n)\,\theta_m. \tag{6.25}$$

Это выражение можно переписать в виде

$$((\theta_m w)' * \rho_n * \rho_n)\,\theta_m - ((\theta'_m w) * \rho_n * \rho_n)\,\theta_m,$$

что позволяет скалярно умножить обе части (6.18) на $v(t)$ и проинтегрировать. Получим:

$$X_{nm} + Y_{nm} = \int_0^T (g, v)\,dt, \tag{6.26}$$

где

$$X_{nm} = \int_0^T \theta_m (w'', (\theta_m w') * \rho_n * \rho_n)\,dt,$$

$$Y_{nm} = \int_0^T \theta_m a (w, (\theta_m w') * \rho_n * \rho_n)\,dt.$$

Но

$$X_{nm} = \int_0^T ((\theta_m w')' * \rho_n, (\theta_m w') * \rho_n)\,dt - \int_0^T ((\theta'_m w') * \rho_n, (\theta_m w') * \rho_n)\,dt = \\ = -\int_0^T ((\theta'_m w') * \rho_n, (\theta_m w') * \rho_n)\,dt \to \\ \to -\int_0^T \theta_m \theta'_m |w'|^2\,dt \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее,

$$Y_{nm} = \int_0^T a((\theta_m w) * \rho_n, (\theta_m w)' * \rho_n)\,dt - \int_0^T a((\theta_m w) * \rho_n, (\theta'_m w) * \rho_n)\,dt = \\ = -\int_0^T a((\theta_m w) * \rho_n, (\theta'_m w) * \rho_n)\,dt \to \\ \to -\int_0^T \theta_m \theta'_m a(w, w)\,dt \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда из (6.26) следует, что

$$-\int_0^T \theta_m\theta_m' \,|w'|^2\,dt - \int_0^T \theta_m\theta_m' a(w, w)\,dt = \int_0^T (g, (\theta_m^2 w'))\,dt,$$

и, устремляя m к бесконечности, получим:

$$\frac{1}{2}|w'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(w(t), w(t)) = \frac{1}{2}|w'(s)|^2 + \frac{1}{2}a(w(s), w(s)) + \\ + \int_s^t (g, w')\,d\sigma \quad \text{для почти всех } s \text{ и } t. \tag{6.27}$$

Однако ввиду (6.17) мы можем считать, что $w(s) \to \theta_0$ слабо в V, когда $s \to 0$ и $w'(s) \to \theta_1$ слабо в H, а поскольку $w(s) \to \to w(0) = u_0$ в H и $w'(s) \to w'(0) = u_1$ слабо в $V' + L^{p'}(\Omega)$, то мы видим, что $\theta_0 = u_0$, $\theta_1 = u_1$. Следовательно, при $s \to 0$ имеем: $w(s) \to u_0$ слабо в V, $w'(s) \to u_1$ слабо в H; с помощью (6.27) получаем (6.19)●

6.3. Доказательство единственности

Прежде всего покажем, что в (6.19) при $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ имеет место *равенство*, т. е.

$$a(w(t), w(t)) + |w'(t)|^2 = 2\int_0^t (g, w')\,d\sigma. \tag{6.28}$$

Действительно, продолжив w и g нулем при $t < 0$, мы придем к (6.27) для почти всех $s, t \in]-\infty, T[$. Выбирая не исключительное $s < 0$, мы получим (6.28).

Пусть, далее, u_1 и u_2 суть два решения рассматриваемой задачи. Полагая $u_1 - u_2 = w$, получим:

$$w'' + Aw = -(\beta(u_1') - \beta(u_2')), \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0;$$

ввиду равенства (6.28)

$$a(w(t), w(t)) + |w'(t)|^2 = -2\int_0^t (\beta(u_1') - \beta(u_2'), u_1' - u_2')\,d\sigma \leqslant 0$$

(здесь использована монотонность β), откуда $w = 0$●

7. МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ СТАЦИОНАРНЫМИ

7.1. Общие соображения

До сих пор мы изучали эволюционные уравнения, используя метод Фаэдо — Галёркина (иногда со «специальными базисами») и переходя к пределу по «компактности» или по «монотонности».

Возможны и другие «отправные точки», об одной из которых мы собираемся здесь говорить, другие методы указаны в последующих главах ●

Основная идея приведенного здесь метода состоит в том, чтобы просто «заменить» оператор d/dt *разностным отношением* $(I-\tau_h)/h$, где τ_h — сдвиг вправо по t на h, т. е. «приблизить» уравнение

$$\frac{du}{dt}+A(u)=f \tag{7.1}$$

уравнениями вида

$$\frac{I-\tau_h}{h}u_h+A(u_h)=f. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) по своему характеру эллиптическое (очевидно, что мы все это будем дальше уточнять). Таким образом, «достаточно» решить (7.2), а затем устремить $h\to 0$.

Заметим, что в этом контексте естественно ввести полугруппу $s\to\tau_s$; ее инфинитезимальным производящим оператором является оператор $-d/dt$, определенный на функциях, равных 0 при $t=0$. Мы заменим τ_s «общей» полугруппой $G(s)$, что приведет к новым приложениям ●

7.2. Теорема существования для абстрактных эволюционных уравнений

7.2.1. Данные. Пусть задано линейное топологическое локально выпуклое сепарабельное пространство Φ, пусть Φ' — сопряженное пространство и (φ, f) — скалярное произведение $\varphi\in\Phi$ и $f\in\Phi'$.

Пусть заданы три пространства $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{V}'$, причем

$$\Phi\subset\mathscr{V}\subset\Phi',\quad \Phi\subset\mathscr{H}\subset\Phi',\quad \Phi\subset\mathscr{V}'\subset\Phi';$$

все вложения непрерывны, и каждое пространство плотно в объемлющем; (7.3)

$\mathscr{H}$ — гильбертово пространство (со скалярным произведением $(h_1, h_2)_{\mathscr{H}}$ и соответствующей нормой $\|h\|_{\mathscr{H}}$); (7.4)

$\mathscr{V}$ — сепарабельное рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\ \|_{\mathscr{V}}$, (7.5)

$\mathscr{V}'$ — сопряженное пространство к $\mathscr{V}$ с дуальной нормой $\|\ \|_{\mathscr{V}'}$. (7.6)

Если $\varphi, \psi \in \Phi$, то имеем:

$(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{\mathscr{H}} =$ скалярное произведение φ (рассматриваемого как элемент $\mathscr{V}$) и ψ (рассматриваемого как элемент $\mathscr{V}'$). (7.7)

Предположим еще, что

$$\Phi \text{ плотно в } \mathscr{V} \cap \mathscr{V}'\,^{1)}. \tag{7.8}$$

Далее мы сделаем более детальное предположение ●

Замечание 7.1. Из (7.8) следует, что

$$\mathscr{V} \cap \mathscr{V}' \subset \mathscr{H}. \tag{7.9}$$

В самом деле, если $\varphi \in \Phi$, то имеем:

$$\|\varphi\|^2_{\mathscr{H}} = (\varphi, \varphi) \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{V}} \|\varphi\|_{\mathscr{V}'},$$

откуда ввиду (7.8) следует (7.9) ●

Замечание 7.2. Если $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$, то можно не вводить Φ; отождествляя $\mathscr{H}$ с его сопряженным, будем иметь:

$$\mathscr{V} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{V}' \; ● \tag{7.10}$$

Пример 7.1. Пусть V, H, V' — такие же, как в п. 1.4 и замечании 1.2; тогда

$$V \subset H \subset V'. \tag{7.11}$$

Вводя

$$\mathscr{V} = L^p(0, T; V), \quad \mathscr{H} = L^2(0, T; H), \quad \mathscr{V}' = L^{p'}(0, T; V'), \tag{7.12}$$

мы придем к ситуации (7.10), если $p \geqslant 2$. При $1 < p < 2$ будет иметь место «общая» ситуация, если мы возьмем

$$\Phi = \mathscr{D}([0, T]; V) \; ●$$

Пример 7.2. Возьмем теперь

$$V = W_0^{1,\,p}(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad V' = W^{-1,\,p'}(\Omega) \tag{7.13}$$

и предположим, что

$$p < \frac{2n}{n+2}. \tag{7.14}$$

Тогда V не содержится в H. Если мы определим $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$ таким же образом, как в (7.12), то мы придем к «общей» ситуации, выбирая

$$\Phi = \mathscr{D}([0, T]; \mathscr{D}(\Omega)). \tag{7.15}$$

---

[1] Снабженном нормой $\|v\|_{\mathscr{V}} + \|v\|_{\mathscr{V}'}$.

Мы должны проверить (7.8). Для этой цели введем последовательность функций $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$, где $\varphi_n = 1$ при $d(x, \Gamma) > 2/n$[1], $\varphi_n = 0$ при $d(x, \Gamma) \leqslant 1/n$ и функция φ_n гладко подходит к нулю при $1/n < d(x, \Gamma) < 2/n$.

Тогда $\varphi_n v \to v$ в $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ для всех v из этого пространства, $1 \leqslant q < \infty$. Из соображений двойственности $\varphi_n v \to v$ в $L^{q'}(0, T; W^{-1,q'}(\Omega))$ для всех v из этого пространства. Таким образом, установлено, что

$$\forall v \in \mathscr{V} \cap \mathscr{V}' \quad \varphi_n v \to v \quad \text{в} \quad \mathscr{V} \cap \mathscr{V}' \tag{7.16}$$

и, кроме того, при каждом n носитель $\varphi_n v$ принадлежит $K \times [0, T]$, где K — компакт в Ω. Следовательно, мы можем рассматривать $\varphi_n v = w$ как элемент пространства

$$L^p(0, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n)) \cap L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)). \tag{7.17}$$

Пусть ρ_m — регуляризующая последовательность и ρ_m, скажем, четные функции из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; если $*$ означает свертку по x, то будем иметь

$$\rho_m * w \to w \quad \text{в} \quad L^q(0, T; W^{1,q}(\mathbb{R}^n))$$

для всех w из этого пространства; из соображений двойственности мы также получим, что

$$\rho_m * w \to w \quad \text{в} \quad L^{q'}(0, T; W^{-1,q'}(\mathbb{R}^n))$$

для всех w из этого пространства и, следовательно,

$$\begin{gathered}\rho_m * w \to w \text{ в пространстве, определенном в (7.17),}\\ \text{для всех } w \text{ из этого пространства.}\end{gathered} \tag{7.18}$$

Более того, используя продолжение нулем на все $\mathbb{R}_t$ и регуляризацию по t, мы увидим, что $\mathscr{D}([0, T]; W^{1,p}(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega))$ плотно в $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}'$, и, комбинируя эти замечания, мы придем к (7.8). Более точно:

$$\begin{gathered}\text{можно найти последовательность таких операторов}\\ p_m \in \mathscr{L}(\mathscr{V}; \Phi), \quad p_m \in \mathscr{L}(\mathscr{V}'; \Phi), \quad \text{что } p_m v \to v \text{ в } \mathscr{V}\\ (\text{соответственно в } \mathscr{V}') \quad \forall v \in \mathscr{V} \quad (\text{соответственно}\\ v \in \mathscr{V}') \blacksquare\end{gathered} \tag{7.19}$$

Замечание 7.3. Из предыдущего примера и (7.9) следует, что

$$W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \tag{7.20}$$

---

[1] $d(x, \Gamma)$ — расстояние от x до Γ.

Это вложение не вытекает из теоремы Соболева при условии (7.14)●

Теперь мы определим операторы Λ и $\mathscr{A}$, которые являются соответственными обобщениями d/dt и «$u \to A(u(.))$»●

Оператор Λ. Пусть задано семейство операторов $G(s)$, таких, что

$$G(s) \text{ — непрерывная полугруппа в } \mathscr{V},\ \mathscr{H},\ \mathscr{V}'\,^{1)}, \tag{7.21}$$

$G(s)$ — *сжимающая полугруппа* в $\mathscr{H}$, т. е.

$$\| G(s) \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H};\, \mathscr{H})} \leqslant 1 \quad \forall s \geqslant 0. \tag{7.22}$$

Пусть, далее,

— Λ есть инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $G(s)$ с областью определения $D(\Lambda; \mathscr{V})$ (соответственно $D(\Lambda; \mathscr{H})$ или $D(\Lambda; \mathscr{V}')$) в $\mathscr{V}$ (соответственно в $\mathscr{H}$ или $\mathscr{V}'$). (7.23)

Пусть $G^*(s)$ — полугруппа, сопряженная к $G(s)$, также действующая (соответственно) в $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{V}'$. Пусть — Λ^* есть инфинитезимальный производящий оператор $G^*(s)$ с областью определения $D(\Lambda^*; \mathscr{V})$ в $\mathscr{V}$, $D(\Lambda^*; \mathscr{H})$ в $\mathscr{H}$, и т. д. Оператор Λ^* в $\mathscr{H}$ (соответственно в $\mathscr{V}$ или $\mathscr{V}'$) является сопряженным (в смысле теории неограниченных операторов) к оператору Λ в $\mathscr{H}$ (соответственно в $\mathscr{V}'$ или в $\mathscr{V}$).

Имеем:

$D(\Lambda; \mathscr{V}') \cap \mathscr{V}$ (соответственно $D(\Lambda^*; \mathscr{V}') \cap \mathscr{V}$) плотно в $\mathscr{V}$[2]. (7.23′)

Теперь мы хотим определить Λ как неограниченный оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{V}'$ с областью определения $D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')$.

Положим

$D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}') = \{v \mid v \in \mathscr{V}$ и v таково, что линейная форма $w \to (v, \Lambda^* w)$ непрерывна на $D(\Lambda^*; \mathscr{V}') \cap \mathscr{V}$ в топологии, индуцированной топологией в $\mathscr{V}\}$. (7.24)

Тогда существует единственный такой элемент $\xi_v \in \mathscr{V}'$, что

$$(v, \Lambda^* w) = (\xi_v, w). \tag{7.25}$$

---

[1] То есть имеются три непрерывные полугруппы, совпадающие на Φ.

[2] Для $u \in \mathscr{V}$ и заданного ε выберем $\varphi \in \Phi$ так, чтобы $\| u - \varphi \|_{\mathscr{V}} \leqslant \varepsilon$, и заметим, что

$$\varphi_n = \left(I + \frac{1}{n} \Lambda \right)^{-1} \varphi \in \mathscr{V} \cup D(\Lambda; \mathscr{V}') \quad \text{и} \quad \varphi_n \to \varphi \text{ в } \mathscr{V}$$

при $n \to \infty$.

Если $v \in D(\Lambda; \mathcal{V}') \cap \mathcal{V}$, то $\xi_v = \Lambda v$, и тем самым в общем случае мы имеем право положить $\xi_v = \Lambda v$, откуда

$$(v, \Lambda^* w) = (\Lambda v, w) \qquad \forall w \in D(\Lambda^*; \mathcal{V}') \cap \mathcal{V}. \tag{7.26}$$

Снабдив $D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ нормой $\|v\|_{\mathcal{V}} + \|\Lambda v\|_{\mathcal{V}'}$, мы получим пространство Банаха (проверка очевидна). Аналогично определим пространство $D(\Lambda^*; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ ●

Замечание 7.4. Имеем:

$$\begin{aligned} &\text{если } \mathcal{V} \subset \mathcal{H}, \text{ то } D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}') = \mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}') \\ &\text{и } D(\Lambda^*; \mathcal{V}, \mathcal{V}') = \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}') \bullet \end{aligned} \tag{7.27}$$

В том случае, когда $\mathcal{V}$ не содержится в $\mathcal{H}$, мы предположим, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}') \text{ (соответственно } \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}')) \text{ плотно} \\ &\text{в } D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}') \text{ (соответственно в } D(\Lambda^*; \mathcal{V}, \mathcal{V}')). \end{aligned} \tag{7.28}$$

Замечание 7.5. Имеем:

$$(\Lambda v, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}'). \tag{7.29}$$

Действительно, в силу (7.28) достаточно доказать (7.29) для всех v из $\mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}')$. Рассмотрим

$$G(\rho_n) = \int_0^\infty G(s) \rho_n(s)\, ds,$$

где ρ_n — регуляризующая последовательность из $\mathcal{D}(]0, \infty[)$. Пусть $v \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}')$. Тогда $G(\rho_n) v \to v$ в $\mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}')$, когда ρ_n стремится к мере Дирака, сосредоточенной в начале, и

$$G(\rho_n) v \in D(\Lambda; \mathcal{V}) \cap D(\Lambda; \mathcal{V}'),$$

а, следовательно, в силу (7.2) $w = G(\rho_n) v \in D(\Lambda; \mathcal{H})$. Однако $(\Lambda w, w) \geqslant 0$ в силу (7.22), откуда и следует наш результат ●

Замечание 7.6. Аналогично,

$$(\Lambda^* v, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(\Lambda^*; \mathcal{V}, \mathcal{V}') \bullet \tag{7.30}$$

Оператор $\mathcal{A}$. Рассмотрим нелинейный оператор $\mathcal{A}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\mathcal{A}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}' \text{ — ограниченный семинепрерывный оператор,} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \text{ — оператор типа (M) (см. замечание 2.1), т. е.} \\ &\text{если } u_\mu \to u \text{ слабо в } \mathcal{V} \text{ и } \mathcal{A}(u_\mu) \to \chi \text{ слабо в } \mathcal{V}' \text{ и} \\ &\text{если } \limsup (\mathcal{A}(u_\mu), u_\mu) \leqslant (\chi, u), \text{ то } \chi = \mathcal{A}(u), \end{aligned} \tag{7.32}$$

$$\frac{(\mathcal{A}(v), v)}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \to +\infty \quad \text{при } \|v\|_{\mathcal{V}} \to \infty \bullet \tag{7.33}$$

7.2.2. Теорема

Теорема 7.1. *Пусть заданы операторы* Λ *и* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющие* (7.21), (7.22), (7.23), (7.28) *и* (7.31), (7.32), (7.33). *Тогда для заданного* f *из* $\mathcal{V}'$ *существует такое* u, *что*

$$u \in D(\Lambda;\ \mathcal{V}, \mathcal{V}'), \tag{7.34}$$

$$\Lambda u + \mathcal{A}(u) = f. \tag{7.35}$$

Замечание 7.7. Если $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$, то включение (7.34) означает (см. (7.27)), что

$$u \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}') \bullet \tag{7.34'}$$

Доказательство теоремы мы разобьем на два этапа.

7.2.3. Приближенное решение. В свете того, что было сказано по поводу (7.1), (7.2), «естественной» аппроксимацией уравнения (7.35) служит уравнение

$$\frac{I - G(h)}{h} u_h + \mathcal{A}(u_h) = f \quad (h > 0). \tag{7.36}$$

Однако если $\mathcal{V}$ не содержится в $\mathcal{H}$, то (7.36), вообще говоря, не имеет решения, и необходимо подходящим образом модифицировать это уравнение. Выберем такую последовательность $\theta_h \in]0,\ 1[$, что

$$\frac{1 - \theta_h}{h} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{7.37}$$

(Полагаем $\theta_h = 1$ при $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$.) Положим далее

$$\Lambda_h = \frac{I - \theta_h G(h)}{h} \tag{7.38}$$

и заменим (7.36) уравнением

$$\Lambda_h u_h + \mathcal{A}(u_h) = f. \tag{7.39}$$

Сейчас будет доказана

Лемма 7.1. *Уравнение* (7.39) *имеет решение* $u_h \in \mathcal{V} \cap \mathcal{H}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{B}(\varphi) = \Lambda_h \varphi + A(\varphi):\ \mathcal{V} \cap \mathcal{H} \to \mathcal{V}' + \mathcal{H}.$$

Оператор $\mathcal{B}$ ограниченный и семинепрерывный, а поскольку

$$(\Lambda_h v,\ v) \geqslant \frac{1 - \theta_h}{h} \| v \|_{\mathcal{H}}^2, \tag{7.40}$$

имеем:

$$\frac{(\mathcal{B}(\varphi),\ \varphi)}{\| \varphi \|_{\mathcal{V} \cap \mathcal{H}}} \to +\infty \quad \text{при} \quad \| \varphi \|_{\mathcal{V} \cap \mathcal{H}} \to \infty.$$

Следовательно, в силу замечания 2.1 лемма будет доказана, если мы проверим, что $\mathscr{B}$ — оператор типа (M).

Итак, пусть $u_\mu \to u$ слабо в $\mathscr{V} \cap \mathscr{H}$, при этом

$$\mathscr{B}(u_\mu) \to g \text{ слабо в } \mathscr{V}' + \mathscr{H}$$

и

$$\limsup\,(\mathscr{B}(u_\mu),\ u_\mu) \leqslant (g,\ u). \tag{7.41}$$

Так как $\Lambda_h u_\mu \to \Lambda_h u$ слабо в $\mathscr{H}$, то имеем:

$$\mathscr{A}(u_\mu) = \mathscr{B}(u_\mu) - \Lambda_h u_\mu \to \chi = g - \Lambda_h u \text{ слабо в } \mathscr{V}' + \mathscr{H}. \tag{7.42}$$

Поскольку оператор $\mathscr{A}$ ограниченный, мы можем считать, что $\mathscr{A}(u_\mu)$ слабо сходится в $\mathscr{V}'$, и в силу (7.42)

$$\mathscr{A}(u_\mu) \to \chi = g - \Lambda_h u \text{ слабо в } \mathscr{V}'. \tag{7.43}$$

Но

$$(\mathscr{A}(u_\mu),\ u_\mu) = (\mathscr{A}(u_\mu),\ u) + (\mathscr{B}(u_\mu) - \Lambda_h u,\ u_\mu - u) -$$
$$- (\Lambda_h(u - u_\mu),\ u - u_\mu) \leqslant (\mathscr{A}(u_\mu),\ u) + (\mathscr{B}(u_\mu) - \Lambda_h u,\ u_\mu - u).$$

(так как $\Lambda_h \geqslant 0$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H};\ \mathscr{H})$)

Поэтому

$$\limsup\,(\mathscr{A}(u_\mu),\ u_\mu) \leqslant (\chi,\ u),$$

а поскольку $\mathscr{A}$ — оператор типа (M), $\chi = \mathscr{A}(u)$ и, следовательно,

$$g = \Lambda_h u + \mathscr{A}(u) = \mathscr{B}(u) \bullet$$

7.2.4. Предельный переход по h. Из (7.39) и (7.40) следует, что

$$(\mathscr{A}(u_h),\ u_h) \leqslant (f,\ u_h),$$

откуда вытекает, что

$$u_h \text{ ограничены в } \mathscr{V} \text{ при } h \to 0. \tag{7.44}$$

Следствие: ввиду ограниченности $\mathscr{A}$ можно выделить такую подпоследовательность (мы ее опять будем обозначать u_h), что

$$u_h \to u \text{ слабо в } \mathscr{V},\quad \mathscr{A}(u_h) \to \chi \text{ слабо в } \mathscr{V}'. \tag{7.45}$$

Возьмем теперь v из $\mathscr{V} \cap D(\Lambda^*;\ \mathscr{V}')$. Из (7.39) следует, что

$$(u_h,\ \Lambda_h^* v) + (\mathscr{A}(u_h),\ v) = (f,\ v). \tag{7.46}$$

Однако

$$\Lambda_h^* v = \frac{I - G(h)^*}{h} v + \frac{1 - \theta_h}{h} G(h)^* v, \tag{7.47}$$

и в силу (7.37) $\Lambda_h^* v \to \Lambda^* v$ в $\mathscr{V}'$; следовательно, из (7.46) в пределе получим:

$$(u,\ \Lambda^* v) + (\chi,\ v) = (f,\ v)\quad \forall v \in \mathscr{V} \cap D(\Lambda^*;\ \mathscr{V}'), \tag{7.48}$$

а тогда (в силу (7.25), (7.26)) $u \in D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')$ и

$$\Lambda u + \chi \doteq f, \tag{7.49}$$

и теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\chi = \mathscr{A}(u). \tag{7.50}$$

С другой стороны, в силу (7.39) для $v \in \mathscr{V} \cap D(\Lambda; \mathscr{V}')$ (тем самым для $v \in \mathscr{H}$) имеем:

$$\mathscr{A}(u_h), u_h - v) = (f, u_h - v) - (\Lambda_h v, u_h - v) - (\Lambda_h(u_h - v), u_h - v) \leqslant \\ \leqslant (f, u_h - v) - (\Lambda_h v, u_h - v), \tag{7.51}$$

(так как $\Lambda_h \geqslant 0$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H})$)

откуда

$$\limsup(\mathscr{A}(u_h), u_h) \leqslant (\chi, v) + (f, u - v) - (\Lambda v, u - v) \\ \forall v \in \mathscr{V} \cap D(\Lambda; \mathscr{V}'). \tag{7.52}$$

Однако ввиду (7.28) то же самое неравенство выполнено $\forall v \in D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')$, и *можно взять* $v = u$; тогда

$$\limsup(\mathscr{A}(u_h), u_h) \leqslant (\chi, u),$$

откуда следует (7.50), поскольку $\mathscr{A}$ является оператором типа (M) ●

Замечание 7.8. В теореме 7.1 имеет место единственность, если, например,

$$(\mathscr{A}(u) - \mathscr{A}(v), u - v) \leqslant 0 \Rightarrow u = v \; \bullet \tag{7.53}$$

7.3. Приложения (I). Параболические уравнения

Обратимся к ситуации примера 7.1. Пусть задан оператор $\mathscr{A}: V \to V'$, удовлетворяющий (1.34), (1.35), (1.36). Тогда, если оператор $\mathscr{A}$ определен равенством

$$(\mathscr{A}v)(t) = A(v(t)) \text{ почти всюду, } v \in \mathscr{V}, \tag{7.54}$$

то будут выполнены предположения (7.31), (7.32), (7.33).

Определим полугруппу $G(s)$, полагая

$$G(s)\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < s, \\ \varphi(t - s) & \text{при } s < t < T. \end{cases} \tag{7.55}$$

Тогда $\Lambda = d/dt$ и, например,

$$D(\Lambda; \mathscr{V}) = \left\{ v \mid v \in \mathscr{V}, \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathscr{V}, v(0) = 0 \right\}. \tag{7.56}$$

Тогда

$$D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}') = \{v \mid v \in \mathscr{V}, v' \in \mathscr{V}', v(0) = 0\},$$

и без труда проверяется, что функции $\varphi \in C^\infty([0, T]; V)$, $\varphi(0)=0$, плотны в $D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$, откуда, в частности, следует (7.28).

Таким образом, мы находимся в условиях применимости теоремы 7.1, в силу которой существует решение $u = u(t)$ задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u(t)) = f, \qquad u(0) = 0 \bullet$$

Обратимся теперь к ситуации примера 7.2 при условии (7.14), и пусть Λ — тот же самый оператор, что и выше. Тогда

$$D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}') = \Big\{ v \,\Big|\, v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)),\ v(0) = 0 \Big\}. \tag{7.57}$$

Проверим, что имеет место (7.28). Пусть $v \in D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$. Используя операторы умножения на φ_n и свертки с ρ_n (все это операторы только по переменной x), введенные в примере 7.2, мы увидим, что v в $D(\Lambda; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ можно приблизить функциями w, удовлетворяющими, в частности, включениям

$$\begin{gathered} w \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega)), \\ \frac{\partial w}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega)), \\ w(0) = 0. \end{gathered} \tag{7.58}$$

Однако w можно приблизить функциями $\varphi \in C^\infty([0, T]; W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega))$, $\varphi(0) = 0$, откуда следует (7.28). Поэтому мы можем опять применить теорему 7.1 ●

Замечание 7.9. Если $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ и одновременно $v' \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$, то, как и в случае (7.14), функция v: $[0, T] \to L^2(\Omega)$ непрерывна (после, быть может, исправления на множестве меры нуль из $[0, T]$) и

$$\int_0^T (v, v')\,dt = \frac{1}{2}\| v(T) \|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\| v(0) \|^2_{L^2(\Omega)} \bullet$$

Приведем теперь приложения теоремы 7.1 к задачам, которые не включаются в рассмотренные нами раньше.

7.4. Приложения (II). Периодические задачи

Пространства $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$ определяются таким же образом, как в п. 7.3.

Рассматривается полугруппа[1]) $G(s)$ «поворотов окружности»:

$$G(s)\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t-s+T) & \text{при } 0<t<s,\\ \varphi(t-s) & \text{при } s<t<T.\end{cases} \tag{7.59}$$

Тогда $\Lambda=d/dt$,

$$D(\Lambda;\ \mathcal{V})=\{v \mid v\in\mathcal{V},\ v'\in\mathcal{V},\ v(0)=v(T)\}. \tag{7.60}$$

Таким же образом, как в п. 7.3, проверяется, что выполнено предположение (7.28). Следовательно, в силу теоремы 7.1 существует функция u, такая, что

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt}+A(u(t))=f,\\ u\in L^p(0,\ T;\ V),\quad u'\in L^{p'}(0,\ T;\ V'),\\ u(0)=u(T).\end{gathered} \tag{7.61}$$

Здесь речь идет о *решении, периодическом по* t.

Таким образом, мы устанавливаем существование (а также, в силу замечания 7.8, и *единственность*) *решения* $u=u(x,\ t)$ *задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f,\quad f\in L^{p'}\left(0,\ T;\ W^{-1,\,p'}(\Omega)\right),\\ u\in L^p\left(0,\ T;\ W_0^{1,\,p}(\Omega)\right),\quad u'\in L^{p'}\left(0,\ T;\ W^{-1,\,p'}(\Omega)\right),\\ u(0)=u(T),\end{gathered} \tag{7.62}$$

где p — заданное число, $1<p<\infty$.

Если мы применим п. 3.1, взяв

$$V=L^p(\Omega)\cap H^{-1}(\Omega),\qquad H=H^{-1}(\Omega),$$

те же $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$, что и выше, и оператор A, определенный в (3.15), то получим «*периодический аналог*» теоремы 3.1: *существует единственная функция* $u=u(x,\ t)$, *являющаяся решением задачи*

$$\begin{gathered}u\in L^p(Q)\cap L^p\left(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)\right),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\in L^{p'}(0,\ T;\ V'),\\ \frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f,\quad u=g \quad \text{на} \quad \Sigma^{2)},\\ u(x,\ 0)=u(x,\ T).\end{gathered} \tag{7.63}$$

---

[1]) В действительности группа.

[2]) f и g удовлетворяют тем же условиям, что в теореме 3.1.

7.5. Приложения (III)

Рассмотрим два рефлексивных банаховых пространства V_1, V_2, где

$V_i \subset H \subset V_i'$, H — заданное гильбертово пространство, $i=1, 2$, V_i плотно в H и вложение непрерывно; (7.64)

и пусть заданы такие операторы A_i, что

A_i: $V_i \to V_i'$, $i=1, 2$, — монотонные ограниченные семинепрерывные операторы,

$$\| A_i(v) \|_{V_i'} \leqslant c \| v \|_{V_i}^{p_i - 1}, \quad 2 < p_i < \infty, \tag{7.65}$$

$$(A_i(v), v) \geqslant \alpha \| v \|_{V_i}^{p_i}, \quad \alpha > 0\text{[1]}.$$

Определим далее

$$\mathscr{V} = L^{p_1}(0, T; V_1) \times L^{p_2}(0, T; V_2),$$

$$\mathscr{H} = L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H)$$

и для $u = \{u_1, u_2\} \in \mathscr{V}$ положим

$$(\mathscr{A}u)(t) = \{A_1(u_1(t)) - u_2(t),\ A_2(u_2(t)) + u_1(t)\}. \tag{7.66}$$

Далее определим оператор $\mathscr{A}$: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$, который будет ограниченным, семинепрерывным и монотонным:

$$(\mathscr{A}(u), u) = \int_0^T [(A_1(u_1(t)), u_1(t)) + (A_2(u_2(t)), u_2(t))]\, dt; \tag{7.67}$$

следовательно, $\mathscr{A}$ — коэрцитивный оператор.

Определим, наконец, полугруппу $G(s)$ для $f = \{f_1, f_2\}$, полагая

$$G(s) f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < t < s, & f_1(t-s) \text{ при } s < t < T, \\ f_2(t+s) \text{ при } 0 < t < T - s, & 0 \text{ при } T - s < t < T. \end{cases} \tag{7.68}$$

---

[1] (φ, ψ) — скалярное произведение $\varphi \in V_i'$, $\psi \in V_i$, $i = 1, 2$.

Можно применить теорему 7.1 (мы имеем дело с «простым» случаем, когда $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$) и *доказать существование*[1]) пары функций $\{u_1, u_2\}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}
&u_1' + A_1(u_1) - u_2 = f_1, \quad f_1 \in L^{p_1'}(0, T; V_1'),\\
&-u_2' + A_2(u_2) + u_1 = f_2, \quad f_2 \in L^{p_2'}(0, T; V_2'),\\
&u_i \in L^{p_i}(0, T; V_i), \quad i = 1, 2, \qquad (7.69)\\
&u_i' \in L^{p_i'}(0, T; V_i'), \quad i = 1, 2,\\
&u_1(0) = 0, \quad u_2(T) = 0.
\end{aligned}$$

7.6. Приложения (IV)

Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, причем граница $\partial\mathcal{O}$ является $(m-1)$-мерным один раз непрерывно дифференцируемым многообразием, и локально область $\mathcal{O}$ расположена по одну сторону от $\partial\mathcal{O}$.

Пусть a_i, $i = 1, \ldots, m$, суть m вещественных функций в $C^1(\overline{\mathcal{O}})$.

Рассмотрим оператор $\sum_{i=1}^{m} a_i(y)\,\partial/\partial y_i$ при следующих граничных условиях. Определим

$$\partial\mathcal{O}_- = \left\{ y \,\middle|\, y \in \partial\mathcal{O}, \ \sum_{i=1}^{m} a_i(y)\cos(n, y_i) < 0, \right.$$
$$\left. n \text{ — нормаль к } \partial\mathcal{O}, \text{ направленная вне } \mathcal{O} \right\}. \qquad (7.70)$$

Определим далее

$$\begin{aligned}
&D(\mathring{\Lambda}) = \{v \mid v \in H^1(\mathcal{O}), \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\mathcal{O}_-\},\\
&\mathring{\Lambda} v = \sum_{i=1}^{m} a_i(y)\frac{\partial v}{\partial y_i},
\end{aligned} \qquad (7.71)$$

Λ — замыкание $\mathring{\Lambda}$ (как неограниченного оператора в $L^2(\mathcal{O})$). (7.72)

Можно показать (см. Бардос [1]), что $-\Lambda$ есть инфинитезимальный производящий оператор полугруппы в $L^p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p < \infty$, которая является сжимающей в $L^2(\mathcal{O})$.

Рассмотрим далее

$$\mathscr{V} = L^p(\mathcal{O}; W_0^{1,p}(\Omega)), \qquad \mathscr{H} = L^2(\mathcal{O}; L^2(\Omega)),$$

---

[1]) И единственность в том случае, когда, например, A_i строго монотонны.

и тогда

$$\mathcal{V}' = L^{p'}(\mathcal{O};\ W^{-1,\,p'}(\Omega)).$$

Оператор Λ на векторных функциях определяется таким же образом, как на скалярных.

Пусть далее $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A}(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{7.73}$$

(y играет роль параметра, если $u = u(x, y)$).

Если предположить, что $p > 2$[1], то мы окажемся в ситуации «$\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$», и будет применима теорема 7.1. Тогда мы получим *существование и единственность функции* $u = u(x, y)$, *такой, что*

$$u \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}'), \tag{7.74}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_i(y)\frac{\partial u}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \text{ в } \Omega \times \mathcal{O},\\ &f \text{ — заданный элемент } \mathcal{V}',\end{aligned}\right. \tag{7.75}$$

причем граничные условия «содержатся» в (7.74); принадлежность u к $\mathcal{V}$ означает, что

$$u = 0, \quad \text{если} \quad x \in \Gamma,\ y \in \mathcal{O}, \tag{7.76}$$

а принадлежность u к $D(\Lambda;\ \mathcal{V}')$ означает, что (в «слабом смысле», см. Бардос [1])

$$u = 0, \quad \text{если} \quad x \in \Omega,\ y \in \partial\mathcal{O}_- \,\bullet \tag{7.77}$$

Замечание 7.10. Аналогично можно решить такую задачу:

$$(-1)^m D_t^{2m+1} u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \tag{7.78}$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,\ t \in \,]0, T[, \tag{7.79}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x, 0) = D_t u(x, 0) = \ldots = D_t^m u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,\\ &D_t^{m+1} u(x, T) = \ldots = D_t^{2m} u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega\,^{2)} \bullet\end{aligned}\right. \tag{7.80}$$

---

[1] В противном случае надо доказывать аналог (7.28), который нам представляется верным, но который мы не доказали.

[2] Можно взять любой набор условий, который гарантирует, что $-\Lambda$ есть инфинитезимальный производящий оператор некоторой полугруппы в $L^p(0, T)$.

7.7. Различные замечания

Замечание 7.11. В теореме 7.1 мы предполагали, что семейство $G(s)$ является полугруппой в $\mathscr{H}$, $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$. Встречаются примеры, в которых $G(s)$ является полугруппой в $\mathscr{H}$ и *не является* полугруппой в $\mathscr{V}$.

Пример 7.3. Рассмотрим $\Omega =]-1, +1[$, $\mathscr{V} = L^p(0, T; W_0^{-1,p}(\Omega))$, $\mathscr{H} = L^2(0, T; L^2(\Omega))$ и оператор Λ,

$$\Lambda v = x\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{7.81}$$

с областью определения

$$D(\Lambda; \mathscr{H}) = \Big\{ v \mid v,\ x\frac{\partial v}{\partial t} \in \mathscr{H},\quad v(x, 0) = 0, \quad \text{если} \quad x > 0,$$
$$v(x, T) = 0, \quad \text{если} \quad x < 0 \Big\}. \tag{7.82}$$

Тогда — Λ есть инфинитезимальный производящий оператор сжимающей полугруппы $G(s)$ в $\mathscr{H}$, причем $G(s)$ не является полугруппой в $\mathscr{V}$; мы детально разберем этот пример в п. 2.6 гл. 3●

Замечание 7.12. *Задача с ненулевыми начальными данными.* Рассмотрим задачу

$$u' + A(u) = f, \quad u(0) = u_0, \quad u_0 \in H, \quad u_0 \neq 0, \tag{7.83}$$

$f \in L^{p'}(0, T; V')$, оператор A определяется, как в п. 7.3.

Если предположить, что $\forall v_0 \in \mathscr{V}$:

$$\frac{(\mathscr{A}(v + v_0), v)}{\|v\|_{\mathscr{V}}} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{\mathscr{V}} \to \infty, \tag{7.84}$$

то случай (7.83) моментально сводится к (уже рассмотренному) случаю $u_0 = 0$.

Действительно, введем такую функцию $w_0 \in \mathscr{V}$, что $w_0' \in \mathscr{V}'$ и $w_0(0) = u_0$ (такая функция w_0 существует), и далее положим $u - w_0 = w$. Тогда (7.83) будет эквивалентно задаче

$$w' + \mathscr{A}(w + w_0) = f - w_0', \quad w(0) = 0,$$

откуда и следует наше утверждение●

Замечание 7.13. *Гладкость.* В ситуации теоремы 7.1 можно получить результаты о гладкости типа «$u \in D(\Lambda; \mathscr{V})$» (используя дополнительные предположения). В этой связи см. результаты п. 9.6 (касающиеся вариационных неравенств)●

8. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

8.1. Примеры и общие указания

Эллиптические краевые задачи, например те, которые изучены в § 2, отвечают (когда речь идет о задачах вариационного исчисления) экстремальным задачам *без ограничений*. Экстремальные задачи *с ограничениями* приводят к *вариационным неравенствам*, которые мы собираемся изучать ●

Начнем с самого простого примера. Пусть V — *гильбертово пространство* над $\mathbb{R}$, и пусть задана *квадратичная форма* $J(v)$:

$$J(v)=a(v,\ v)-2L(v), \tag{8.1}$$

где $a(u,\ v)$ — непрерывная билинейная форма на V, удовлетворяющая условиям

$$a(u,\ v)=a(v,\ u) \quad \forall u, v\in V, \tag{8.2}$$

$$a(v,\ v)\geqslant\alpha\|v\|_V^2, \quad \alpha>0, \quad \forall v\in V, \tag{8.3}$$

и где $L(v)$ — непрерывная линейная форма на V.

Далее рассматривается *замкнутое выпуклое множество* K *в* V (K — выпуклое множество ограничений) и ищется

$$\inf_{v\in K} J(v). \tag{8.4}$$

Тогда, как хорошо известно, *при условиях* (8.2), (8.3) *существует единственный элемент* $u\in K$, *такой, что*

$$J(u)\leqslant J(v) \quad \forall v\in K. \tag{8.5}$$

Этот элемент и характеризуется вариационным неравенством

$$a(u,\ v-u)\geqslant L(v-u) \quad \forall v\in K \text{ ●} \tag{8.6}$$

Замечание 8.1. Пусть V' — сопряженное к V пространство, и пусть $A\in\mathcal{L}(V;\ V')$ — оператор, отвечающий форме $a(u,\ v)$, т. е.

$$a(u,\ v)=(Au,\ v), \quad Au\in V', \quad v\in V. \tag{8.7}$$

Тогда неравенство (8.6), очевидно, эквивалентно неравенству

$$(Au,\ v-u)\geqslant L(v-u) \quad \forall v\in K \text{ ●} \tag{8.8}$$

Замечание 8.2. Если $K=V$, то неравенство (8.8) переходит в *уравнение*

$$Au=\tilde{L}$$

(если $L(v)=(\tilde{L},\ v)$, $\tilde{L}\in V'$) ●

Замечание 8.3. Если K — *замкнутый выпуклый конус с вершиной* $\{0\}$, то неравенство (8.6) эквивалентно условиям

$$\begin{aligned} &a(u, v) \geqslant L(v) \quad \forall v \in K, \\ &a(u, u) = L(u) \bullet \end{aligned} \tag{8.9}$$

Замечание 8.4. Задача (8.6) будет *нелинейной* (если K не является линейным подпространством в V) даже в случае *линейного оператора* A ●

Общее указание. Задача (8.4), сформулированная в форме (8.8), допускает многочисленные обобщения (*вообще говоря, не отвечающие задачам вариационного исчисления*). Например, можно задаться *банаховым пространством* V, сопряженным пространством V', *нелинейным* оператором A: $V \to V'$, замкнутым выпуклым множеством K в V и искать такое $u \in K$, что

$$(A(u),\ v-u) \geqslant (f,\ v-u) \quad \forall v \in K, \tag{8.10}$$

для заданного f в V'. Это является абстрактной формулировкой задач об эллиптических вариационных неравенствах.

В п. 8.2 мы приведем довольно общее достаточное условие *существования* решения неравенства (8.10).

Предварительно мы приведем *примеры* применения неравенства (8.6) ●

Пример 8.1. Возьмем $V = H^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\Omega} a_0 uv\, dx, \tag{8.11}$$

где

$$\begin{aligned} &a_0,\ a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty}(\Omega), \quad a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega, \\ &\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha\, |\xi|^2, \quad \alpha > 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{8.12}$$

и пусть

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \quad \text{почти всюду на } \Gamma\}. \tag{8.13}$$

Множество K является замкнутым выпуклым конусом в $H^1(\Omega)$ с вершиной в начале. Если мы возьмем

$$L(v) = \int_{\Omega} fv\, dx, \quad f \in L^2(\Omega),$$

то сможем воспользоваться условиями (8.9). Мы теперь хотим проверить, что соответствующий единственный элемент u из K

характеризуется[1]) следующими условиями:

$$
\begin{aligned}
& Au=f \quad \text{в } \Omega \quad \left(\text{где} \quad Au=-\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_0u\right),\\
& u\geqslant 0 \quad \text{на } \Gamma,\\
& \frac{\partial u}{\partial \nu_A}=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,\ x_i)\geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,\\
& u\frac{\partial u}{\partial \nu_A}=0 \quad \text{на} \quad \Gamma;
\end{aligned}
\qquad (8.14)
$$

точнее, когда $u\in H^1(\Omega)$ и выполнено включение «$Au\in L^2(\Omega)$», можно определить (см. Лионс — Мадженес [1], гл. 2)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\in H^{-1/2}(\Gamma) \qquad (8.15)$$

и произведение $u\,\partial u/\partial \nu_A$ имеет смысл.

Докажем (8.14). Полагая в первом неравенстве (8.9) $v=\pm\varphi$, $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, мы получим, что

$$a(u,\ \varphi)=\int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),$$

откуда $Au=f$. Тогда имеет место (8.15) (если коэффициенты a_{ij} являются достаточно гладкими в $\bar{\Omega}$) и можно применить *формулу Грина*

$$\int_\Omega (Au)\,v\,dx=\int_\Omega fv\,dx=-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_A}v\,d\Gamma+a(u,\ v),$$

а поскольку $\int_\Omega fv\,dx\leqslant a(u,\ v)$ (и равенство имеет место при $v=u$), то мы видим, что для u выполнено неравенство

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right)v\,d\Gamma\geqslant 0 \quad \forall v\in K \quad \text{и равенство при} \quad v=u. \qquad (8.16)$$

Однако из (8.16) прежде всего следует, что $\partial u/\partial \nu_A\geqslant 0$, $\int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right)u\,d\Gamma=0$. А так как $u\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\geqslant 0$, то мы получаем, что $u\frac{\partial u}{\partial \nu_A}=0$ ●

---

[1]) По крайней мере в том случае, когда коэффициенты a_{ij} суть достаточно гладкие функции в $\bar{\Omega}$.

Замечание 8.5. Из последнего условия (8.14) тривиально следует, что либо u, либо $\partial u/\partial\nu_A$ равняется нулю на Γ; *однако та часть* Γ, *где обращается в нуль функция* u, *является одним из неизвестных задачи!*

Задача (8.14) (и другие задачи такого типа) называется *«односторонней задачей»* ●

Пример 8.2. Возьмем $V = H_0^1(\Omega)$ и такую же форму $a(u, v)$, как в примере 8.1, только теперь $\alpha_0 \geqslant 0$ (что, впрочем, можно еще ослабить) и

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{8.17}$$

Множество K опять будет замкнутым выпуклым конусом с вершиной в начале.

Форму $L(v)$ выберем таким же образом, как в примере 8.1.

Мы можем опять применить (8.9), но интерпретация таким образом решенной задачи оказывается куда более трудной. Формально можно разбить Ω на две части Ω_+, Ω_0, определенные условиями

$$u > 0 \text{ на } \Omega_+, \quad u = 0 \text{ на } \Omega_0.$$

В Ω_+, полагая $v = \varepsilon\varphi$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_+)$, $|\varepsilon|$ достаточно мал, мы получим $Au = f$. Ниже мы увидим (п. 8.5), что $Au \in L^2(\Omega)$, так что (формально) u характеризуется условиями:

$$\begin{aligned} &u > 0 \text{ в } \Omega_+, \quad u = 0 \text{ в } \Omega_0, \\ &Au = f \text{ в } \Omega_+, \\ &u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\nu_A} = 0 \text{ на } \partial\Omega_+ \quad (\partial\Omega_+ - \text{граница } \Omega_+). \end{aligned} \tag{8.18}$$

Таким образом, речь идет о задаче со свободной границей: граница $\partial\Omega_+$ не задана a priori, и на ней заданы данные Коши (ср. с эволюционным случаем, изученным в п. 3.3) ●

Замечание 8.6. Соображения, изложенные выше, можно развить применительно к случаю

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad \psi_1 \leqslant v \leqslant \psi_2 \text{ почти всюду в } \Omega, \quad \psi_i - \text{заданные функции}\} \bullet \tag{8.19}$$

Пример 8.3. Возьмем опять $V = H_0^1(\Omega)$, форму $a(u, v)$, как в примере 8.2, и

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant 1 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{8.20}$$

Тогда K будет замкнутым выпуклым множеством в $H_0^1(\Omega)$, и если мы возьмем

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx, \quad f \in L^2(\Omega),$$

то сможем применить (8.6).

Интерпретация неравенства (8.6) является весьма деликатным вопросом. *Формально* можно разбить Ω на две части Ω_- и Ω_1, «определяемые» условиями

$$\Omega_- = \{x \mid |\operatorname{grad} u(x)| < 1\},$$
$$\Omega_1 = \{x \mid |\operatorname{grad} u(x)| = 1\}.$$

Тогда решение u «характеризуется» условиями

$$\begin{aligned} &Au = f \text{ в } \Omega_-,\\ &|\operatorname{grad} u| = 1 \text{ в } \Omega_1, \\ &u \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 1, \dots, n, \text{ «непрерывны» на поверхности,}\\ &\qquad \text{разделяющей } \Omega_- \text{ и } \Omega_1. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Здесь мы имеем дело с задачей *упруго-пластичности*; Ω_- (соответственно Ω_1) является областью упругости (соответственно пластичности).

Отметим, что в Ω_- и Ω_1 выполняются *два разных по своему характеру уравнения* ●

8.2. Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств

Пусть V — сепарабельное[1] рефлексивное банахово пространство, и пусть K — замкнутое выпуклое множество в V.

Задан оператор A, *определенный только на* K:

$$A: K \to V'. \tag{8.22}$$

Мы будем различать два случая, отвечающне ограниченным и неограниченным множествам K. Начнем с ограниченного случая.

Теорема 8.1. *Предположим, что K — выпуклое замкнутое ограниченное непустое множество. Пусть A: $K \to V'$ — псевдо-*

---

[1] Это предположенне, впрочем, не нужно.

монотонный оператор[1]. *Тогда для заданного f из V' существует такое и из K, что выполнено* (8.10).

(Заметим, что мы не требуем коэрцитивности A, поскольку K ограничено.)

Доказательство. 1) Рассмотрим возрастающую последовательность множеств K_m, таких, что

$$\begin{aligned} &\ldots \subset K_m \subset K_{m+1} \subset \ldots \subset K; \\ &K_m \text{ — замкнутое выпуклое множество, содержащееся} \\ &\quad \text{в подпространстве конечной размерности} \leqslant m; \\ &\bigcup_m K_m \text{ плотно в } K. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Мы начнем с решения *«приближенного неравенства»*[2] и покажем, что *существует* такой элемент $u_m \in K_m$, что

$$(A(u_m),\ v - u_m) \geqslant (f,\ v - u_m) \quad \forall v \in K_m. \tag{8.24}$$

В связи с этим рассмотрим пространство V_m размерности $\leqslant m$, содержащее K_m. Это пространство мы наделим структурой гильбертова пространства, определив скалярное произведение $[\ ,\ ]$ (*зависящее* от m). Если $g \in V'$, то форма $w \rightarrow (g, w)$ непрерывна на V_m и, следовательно,

$$(g, w) = [\pi g, w], \qquad \pi g \in V_m, \qquad \pi \in \mathscr{L}(V'; V_m).$$

В этих обозначениях (8.24) эквивалентно неравенству

$$[\pi A(u_m),\ v - u_m] \geqslant [\pi f,\ v - u_m] \quad \forall v \in K_m, \tag{8.25}$$

или

$$[u_m,\ v - u_m] \geqslant [u_m + \pi f - \pi A(u_m),\ v - u_m] \quad \forall v \in K_m. \tag{8.26}$$

Однако если P_m — оператор проектирования V_m на выпуклое множество K_m относительно скалярного произведения $[\ ,\ ]$, то (8.26) эквивалентно равенству

$$u_m = P_m(u_m + \pi f - \pi A(u_m)), \tag{8.27}$$

и существование u_m, удовлетворяющего (8.27), следует из теоремы Брауэра о неподвижной точке, примененной к оператору $v \rightarrow P_m(v + \pi f - \pi A(v))$: $K_m \rightarrow K_m$, при условии, что мы докажем *непрерывность* этого оператора.

---

[1] Пункт (ii) определения 2.1 из п. 2.4 примет следующий вид: если $u_j \rightarrow u$ в V слабо, $u_j, u \in K$ и $\limsup (A(u_j), u_j - u) \leqslant 0$, то

$$\liminf (A(u_j), u_j - v) \geqslant (A(u), u - v) \quad \forall v \in V. \tag{*}$$

Впрочем, можно предполагать, что неравенство (*) имеет место только для всех $v \in K$ (Брезис).

[2] Излагаемый ниже подход является аналогом метода Галёркина для *неравенств*.

Для этого достаточно установить слабую непрерывность этого отображения, рассматриваемого как отображение из K_m в V'. Пусть $u_n \to u$ в K_m; тогда $A(u_n)$ ограничены в V', и, следовательно, можно допустить, что $A(u_n) \to \chi$ в V' слабо (в противном случае выбирается подпоследовательность). Тогда

$$\limsup (A(u_n), u_n - u) \leqslant 0,$$

и, следовательно (в силу псевдомонотонности),

$$(A(u), u - v) \leqslant \liminf (A(u_n), u_n - v) = (\chi, u - v).$$

Поэтому $(\chi - A(u), u - v) \geqslant 0 \quad \forall v \in V$, откуда $\chi = A(u)$, и тем самым непрерывность доказана.

2) Поскольку K ограничено и $K_m \subset K$, все u_m ограничены в K. Далее, $A(u_m)$ ограничены в V'. Следовательно, можно выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ в } V \text{ слабо и } u \in K \text{ (поскольку } K \text{ слабо замкнуто).} \tag{8.28}$$

Мы покажем, что

$$\limsup (A(u_\mu), u_\mu - u) \leqslant 0. \tag{8.29}$$

В самом деле, так как $\bigcup_m K_m$ плотно в K, можно найти в $\bigcup_m K_m$ такой элемент u_0, что

$$\| u - u_0 \|_V \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ — произвольное заданное число.} \tag{8.30}$$

Тогда $(A(u_\mu), u_\mu - u_0) \leqslant (f, u_\mu - u_0)$ для достаточно больших μ (в силу (8.24)) и, поскольку $(A(u_\mu), u_0 - u) \leqslant c\varepsilon$ (в силу (8.30)), мы получим, что

$$\limsup (A(u_\mu), u_\mu - u) = \limsup [(A(u_\mu), u_\mu - u_0) + (A(u_\mu), u_0 - u)] \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon + (f, u - u_0) \leqslant c_1 \varepsilon,$$

откуда следует (8.29).

Далее, в силу псевдомонотонности

$$\liminf (A(u_\mu), u_\mu - v) \geqslant (A(u), u - v) \quad \forall v \in V. \tag{8.31}$$

Однако если $v \in \bigcup_m K_m$, то для достаточно большого μ (в силу (8.24))

$$(A(u_\mu), u_\mu - v) \leqslant (f, u_\mu - v),$$

откуда

$$\liminf (A(u_\mu), u_\mu - v) \leqslant (f, u - v)$$

и, следовательно,

$$(A(u),\ u-v)\leqslant(f,\ u-v)\quad \forall v\in\bigcup_m K_m,$$

а поскольку $\bigcup_m K_m$ плотно в K, мы получаем (8.10)●

Замечание 8.7. Как мы уже отмечали в § 2, понятие псевдомонотонного оператора не является необходимым при решении уравнений; с другой стороны, это понятие очень хорошо приспособлено к решению неравенств●

Теперь мы переходим к случаю неограниченного множества K.

Теорема 8.2. *Пусть K — выпуклое замкнутое неограниченное множество в V. Пусть A: $K\to V'$ — псевдомонотонный оператор, коэрцитивный в следующем смысле:*

существует такое $v_0\in K$, что

$$\frac{(A(v),\ v-v_0)}{\|v\|}\to+\infty,\quad \text{если}\quad \|v\|\to\infty,\quad v\in K. \tag{8.32}$$

Тогда для заданного f из V' существует $u\in K$, для которого справедливо (8.10).

Первое доказательство. Пусть $B_R=\{v\,|\,v\in V,\ \|v\|\leqslant R\}$, $K_R=K\cap B_R$. Поскольку множество K_R выпукло, замкнуто и *ограничено*, по теореме 8.1 существует такое $u_R\in K_R$, что

$$(A(u_R),\ v-u_R)\geqslant(f,\ v-u_R)\quad \forall v\in K_R. \tag{8.33}$$

Выберем $R\geqslant R_0$, где R_0 таково, что $\|v_0\|\leqslant R_0$. Тогда в (8.33) можно взять $v=v_0$, откуда в силу (8.32) следует, что

$$\|u_R\|\leqslant C.$$

Тогда $A(u_R)$ ограничены в V', и можно указать такую последовательность $R\to\infty$, что

$$u_R\to u \text{ в } V \text{ слабо},\quad A(u_R)\to\chi \text{ в } V' \text{ слабо}.$$

Так как K слабо замкнуто, то $u\in K$.

С другой стороны, $(A(u_R),\ u_R-u)\leqslant(f,\ u_R-u)$, когда $R\geqslant\|u\|$, так что $\limsup(A(u_R),\ u_R-u)\leqslant 0$ и, следовательно, в силу псевдомонотонности

$$\liminf(A(u_R),\ u_R-v)\geqslant(A(u),\ u-v), \tag{8.34}$$

а так как

$$(A(u_R),\ u_R-v)\leqslant(f,\ u_R-v)\to(f,\ u-v)\quad \forall v\in K,$$

то из (8.34) мы выводим, что

$$(A(u),\ u-v)\leqslant(f,\ u-v)\quad \forall v\in K,$$

т. е. (8.10)●

Второе доказательство. На самом деле имеет место более точный результат, чем в только что приведенном первом доказательстве. Действительно, если u_R — решение неравенства (8.33), то $\|u_R\|\leqslant c$, и если мы выберем $R>c$, то u_R будет решением неравенства (8.10). В самом деле, если k — произвольная точка K, то имеем (благодаря тому, что $\|u_R\|<R$) $v=(1-\theta)u_R+\theta k\in K_R$ при достаточно малом $\theta>0$; при таком выборе v в (8.33) получим

$$\theta(A(u_R),\ k-u_R)\geqslant\theta(f,\ k-u_R),$$

и, следовательно,

$$(A(u_R),\ k-u_R)\geqslant(f,\ k-u_R)\quad \forall k\in K\ \bullet$$

8.3. Совокупность решений

Что касается возможной *единственности* решения (8.10), то легко доказывается следующий результат:

Теорема 8.3. *Если предположить, что*

$$(A(u_1)-A(u_2),\ u_1-u_2)>0\quad \textit{при}\quad u_1\neq u_2,\quad u_1,\ u_2\in K, \tag{8.35}$$

то (8.10) *будет допускать не более одного решения.*

Доказательство. Мы фактически предположили то, что нужно: если u и u^* суть два решения, то

$$(A(u),\ v-u)\geqslant(f,\ v-u)\quad \forall v\in K,$$

$$(A(u^*),\ v-u^*)\geqslant(f,\ v-u^*)\quad \forall v\in K;$$

полагая $v=u^*$ (соответственно $v=u$) в первом (соответственно во втором) неравенстве и складывая, получим

$$(A(u)-A(u^*),\ u-u^*)\leqslant 0,$$

откуда $u=u^*$ в силу (8.35)●

Когда оператор A является *монотонным*, одно интересное свойство совокупности решений вытекает из следующей теоремы:

Теорема 8.4. *Если A: $K\to V'$ — монотонный семинепрерывный оператор, то неравенство* (8.10) *эквивалентно неравенству*

$$(A(v),\ v-u)\geqslant(f,\ v-u)\quad \forall v\in K. \tag{8,36}$$

Доказательство[1]. 1) Предположим, что u удовлетворяет (8.10). Тогда имеет место (8.36). В самом деле,

$$(A(v),\ v-u)=(A(u),\ v-u)+(A(v)-A(u),\ v-u)\geqslant$$
$$\geqslant(A(u),\ v-u)\geqslant$$
(в силу монотонности)
$$\geqslant(f,\ v-u).$$
(в силу (8.10))

2) Наоборот, предположим, что u удовлетворяет (8.36). Возьмем произвольное $w\in K$, и пусть

$$v=(1-\theta)u+\theta w\in K \qquad \forall\theta\in]0,\ 1];$$

подставляя это v в (8.36), мы после деления на θ найдем

$$(A(u+\theta(w-u)),\ w-u)\geqslant(f,\ w-u);$$

устремляя θ к нулю и пользуясь семинепрерывностью, получим:

$$(A(u),\ w-u)\geqslant(f,\ w-u) \quad \forall w\in K,\ \text{т. е. } (8.10)\bullet$$

Следствие 8.1. *В условиях теоремы* 8.4 *совокупность решений* (8.10) *является замкнутым выпуклым множеством.*

8.4. Приложения

Теперь мы в состоянии привести новые примеры, не укладывающиеся в элементарные рамки неравенства (8.6).

Пример 8.4. Пусть сначала V — гильбертово пространство, а оператору $A\in\mathscr{L}(V;\ V')$ отвечает *несимметрическая* форма: $(Au,\ v)\neq(u,\ Av)$ (вообще говоря). Тогда если

$$(Av,\ v)\geqslant\alpha\|v\|^2,\quad \alpha>0,\quad \forall v\in V, \tag{8.37}$$

то в силу теорем 8.2 и 8.3 *существует единственный элемент u из K, такой, что*

$$(Au,\ v-u)\geqslant(f,\ v-u) \quad \forall v\in K\bullet$$

Пример 8.5. Пусть A: $W^{m,p}(\Omega)\to W^{-m,p'}(\Omega)$ — оператор из теоремы 2.8. Мы видели, что этот оператор псевдомонотонный. Следовательно, к нему применима теорема 8.2●

Пример 8.6. Конкретизируем пример 8.5, взяв оператор A вида

$$A(\varphi)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+a_0|\varphi|^{p-2}\varphi, \tag{8.38}$$

---

[1] Ср. с доказательством (2.16).

где $1 < p < \infty$. Возьмем $V = W^{1,p}(\Omega)$ и положим

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 | u |^{p-2} uv \, dx. \tag{8.39}$$

Предположим, что

$$a_0 \in L^{\infty}(\Omega), \quad a_0(x) \geqslant \alpha_0 \geqslant 0. \tag{8.40}$$

Если K — выпуклое замкнутое множество в $W^{1,p}(\Omega)$ и $\alpha_0 > 0$, то существует и притом один такой элемент $u \in K$, что

$$a(u, v-u) \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in K. \tag{8.41}$$

Если K — выпуклое замкнутое множество в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то можно взять $\alpha_0 = 0$. Выберем, например,

$$K = \{v \mid v \in W^{1,p}(\Omega), \ v \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}. \tag{8.42}$$

Тогда можно проверить (с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в примере 8.1), что решение u неравенства (8.41) характеризуется условиями

$$\begin{gathered} A(u) = f \ \text{ на } \ \Omega, \\ u \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \\ u \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) \right) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma. \end{gathered} \tag{8.43}$$

В (8.43) $u \in W^{1-1/p, p}(\Gamma)$ и (ср. § 5)

$$\mathscr{F}(u) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) \in W^{-1/p', p'}(\Gamma),$$

так что произведение $u \cdot \mathscr{F}(u)$ имеет смысл ●

8.5. Варианты

ДРУГАЯ ЗАПИСЬ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Мы сформулируем немного в другой форме неравенства (8.10), используя *индикаторную функцию* ψ_K *выпуклого множества* K, определяемую следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_K(v) &= +\infty \quad \text{при} \quad v \in K, \\ \psi_K(v) &= 0 \quad \text{при} \quad v \notin K. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Далее, считая, что оператор A определен на всем пространстве V, *причем обладает на V теми же свойствами, что и на K*[1]), мы получим, что решение неравенства (8.10) *эквивалентно разысканию такого $u \in V$, что*

$$(A(u)-f,\ v-u)+\psi_K(v)-\psi_K(u) \geqslant 0 \quad \forall v \in V. \tag{8.45}$$

Действительно, если u является решением (8.45), то непременно $u \in K$ и (8.45) сводится к (8.10); наоборот, если u удовлетворяет (8.10), то имеет место (8.45) ●

Вообще, *собственно выпуклой функцией на V* будем называть любую функцию, обладающую следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\varphi \text{ определена на } V \text{ и прииимает значения из }]-\infty,+\infty],\\ \varphi \text{ выпукла,}\\ \varphi \text{ не равна тождественно } +\infty.\end{gathered} \tag{8.46}$$

Свойство выпуклости φ эквивалентно следующему условию:

$$\text{надграфик } \varphi \text{ в } V \times \mathbb{R} \text{ — выпуклое множество} \tag{8.47}$$

(надграфик $\varphi = \{v,\ a \mid v \in V,\ a \in \mathbb{R},\ a \geqslant \varphi(v)\}$).

Функция φ *полунепрерывна снизу* тогда и только тогда, когда ее *надграфик замкнут*, так что понятие выпуклости функции φ не зависит от того, в какой топологии рассматривается V — сильной или слабой.

Отметим, что ψ_K является собственно выпуклой полунепрерывной снизу функцией (п. н. с.).

Тогда задача (8.45) (идентичная (8.10)), очевидно, является частным случаем следующей задачи:

для заданного нелинейного оператора A: $V \to V'$ и собственно выпуклой функции φ найти такой элемент $u \in V$, что

$$(A(u)-f,\ v-u)+\varphi(v)-\varphi(u) \geqslant 0 \quad \forall v \in V \ ● \tag{8.48}$$

Имеет место

Теорема 8.5. *Пусть A: $V \to V'$ — псевдомонотонный оператор, а φ — собственно выпуклая п. н. с. функция. Предположим, что*

$$\begin{gathered}\textit{существует такой элемент } v_0, \textit{ что } \varphi(v_0)<\infty \textit{ и}\\ \frac{(A(u),\ u-v_0)+\varphi(u)}{\|u\|} \to \infty \quad \textit{при} \quad \|u\| \to \infty.\end{gathered} \tag{8.49}$$

Тогда для заданного f из V' существует решение $u \in V$ неравенства (8.48).

---

[1]) Это связано с задачей (нетривиальной) о *продолжении* операторов; здесь мы ее не будем касаться, поскольку, как нам кажется, эти вопросы не возникают в связи с операторами, рассматриваемыми в этой книге.

Замечание 8.8. Очевидно, что всегда можно полагать $f=0$: для этого достаточно заменить $\varphi(v)$ на $\varphi(v)-(f, v)$. Однако задача «естественно» возникает в форме (8.48) с $f \neq 0$ ●

Доказательство. Мы увидим (следуя Моско [1]), что теорему 8.5 можно свести к теореме 8.1, используя *надграфик в качестве основного выпуклого множества.*

Итак, определим

$$\tilde{V}=V \times \mathbb{R}, \quad \tilde{K} \text{ — надграфик } \varphi,$$
$$\tilde{A}(\tilde{v})=\{A(v), 0\} \quad \text{для} \quad \tilde{v}=\{v, \xi\} \in \tilde{V}.$$

Оператор $\tilde{A}$ является псевдомонотонным. Проверим, что (8.48) эквивалентно разысканию такого $\tilde{u} \in \tilde{K}$, что

$$(\tilde{A}(\tilde{u})-\tilde{f}, \tilde{v}-\tilde{u}) \geqslant 0 \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{K}, \tag{8.50}$$

где $\tilde{f}=\{f, -1\} \in \tilde{V}'$.

Действительно, подробно расписывая неравенство (8.50), мы увидим, что оно сводится к нахождению такого $\tilde{u}=\{u, \alpha\}$, что

$$\begin{aligned} &(A(u)-f, v-u)+\xi-\alpha \geqslant 0 \quad \forall \xi \geqslant \varphi(v), \\ &\tilde{u} \in \tilde{K}, \text{ следовательно, } \alpha \geqslant \varphi(u). \end{aligned} \tag{8.51}$$

Однако (8.51) эквивалентно неравенству

$$(A(u)-f, v-u)+\varphi(v)-\alpha \geqslant 0,$$

и полагая $v=u$, мы найдем, что $\alpha \leqslant \varphi(u)$, следовательно, $\alpha=\varphi(u)$, откуда вытекает (8.48).

Таким образом, нам остается решить (8.50). Определим

$$\tilde{K}_R=\{\tilde{v} \mid \tilde{v}=\{v, \xi\} \in \tilde{K}, \|v-v_0\|+|\xi-\varphi(v_0)| \leqslant R\};$$

тогда $\tilde{K}_R$ ограничено в $\tilde{V}$, и в силу теоремы 8.1 существует такой элемент $\tilde{u}_R \in \tilde{K}_R$, что

$$(\tilde{A}(\tilde{u}_R)-\tilde{f}, \tilde{v}-\tilde{u}_R) \geqslant 0 \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{K}_R. \tag{8.52}$$

Согласно определению $\tilde{K}_R$, мы можем взять в (8.52)

$$\tilde{v}=\tilde{v}_0=\{v_0, \varphi(v_0)\}.$$

Тогда (8.52) при $\tilde{u}_R=\{u_R, \alpha_R\}$ примет вид

$$(A(u_R), u_R-v_0)+\alpha_R \leqslant (f, u_R-v_0)+\varphi(v_0), \tag{8.53}$$

и поскольку $\alpha_R \geqslant \varphi(u_R)$, мы заключаем, что

$$(A(u_R), u_R-v_0)+\varphi(u_R) \leqslant (f, u_R-v_0)+\varphi(v_0) \leqslant c(1+\|u_R\|); \tag{8.54}$$

отсюда ввиду (8.49) следует, что $\|u_R\| \leqslant \text{const}$. Но тогда из (8.53) вытекает, что $\alpha_R \leqslant \text{const}$. Так как, с другой стороны,

$$\alpha_R \geqslant \varphi(u_R) \geqslant -c\|u_R\| \quad \text{(в силу (8.49))},$$

то мы видим, что $\|u_R\| + |\alpha_R\| \leqslant c_1 = \text{const}$, где постоянная не зависит от R.

Теперь мы получаем

$$\|u_R - v_0\| + |\alpha_R - \varphi(v_0)| \leqslant c_2,$$

и отсюда выводится (как во втором доказательстве теоремы 8.2), что $\tilde{u}_R$ при $R > c_2$ является решением нашей задачи ●

Замечание 8.9. Пример, который мы только что разобрали, не включается непосредственно ни в теорему 8.1 (поскольку множество $\tilde{K}$ неограничено), ни в теорему 8.2 (не выполнено условие коэрцитивности); *решить эту задачу было бы невозможно, если бы не специальный вид вектора* $\tilde{f}$, *второй составляющей которого является* -1.

Другие примеры этой ситуации (полезные для приложений) можно найти в работе Лионс — Стампаккья [1] ●

Замечание 8.10. Можно также дать «прямое» доказательство теоремы 8.5, основанное на тех же принципах, что и доказательства теорем 8.1, 8.2; см. Брезис [1] ●

8.6. Интерпретация вариационных неравенств с помощью субдифференциалов

Пусть $v \to \varphi(v)$ — собственно выпуклая функция на V; элемент χ из V' называется *субградиентом* φ *в точке* u, если

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant (\chi, v - u) \quad \forall v \in V. \tag{8.55}$$

Обозначим через $\partial\varphi(u)$ *множество* субградиентов φ в точке u; отображение $u \to \partial\varphi(u)$ называется *субдифференциалом* φ; таким образом, $\partial\varphi$, *как правило, является многозначным отображением* V в $2^{V'}$.

Мы будем писать

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant (\partial\varphi(u), v - u) \quad \forall v \in V \tag{8.56}$$

(это означает, что $\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant (\chi, v - u)$ $\forall v \in V$, каково бы ни было $\chi \in \partial\varphi(u)$).

Сравнивая (8.48) и (8.56), мы увидим, что решение вариационного неравенства (8.48) эквивалентно разысканию такого u из V, что

$$-(A(u) - f) \in \partial\varphi(u), \tag{8.57}$$

или

$$0 \in A(u) - f + \partial\varphi(u), \tag{8.57'}$$

т. е. u удовлетворяет уравнению с *многозначными операторами* ●

Отметим следующее

Предложение 8.1. *Пусть V — банахово пространство со строго выпуклой нормой, и пусть сопряженное пространство также обладает этим свойством. Пусть J — отображение двойственности относительно* Φ (см. (2.17), (2.18)), *и пусть* $\Psi(r) = \int\limits_0^r \Phi(\sigma)\,d\sigma$. *Тогда*

$$\Psi(\|v\|) - \Psi(\|u\|) \geqslant (J(u), v - u) \quad \forall v \in V,$$

и наоборот, если $\xi \in V'$ *удовлетворяет неравенству*

$$\Psi(\|v\|) - \Psi(\|u\|) \geqslant (\xi, v - u) \quad \forall v \in V,$$

то $\xi = J(u)$[1].

Доказательство. Имеем

$$\Psi(\|v\|) - \Psi(\|u\|) = \int\limits_{\|u\|}^{\|v\|} \Phi(t)\,dt \geqslant \Phi(\|u\|)(\|v\| - \|u\|) =$$
$$= \Phi(\|u\|)\|v\| - (J(u), u) \geqslant (J(u), v - u).$$

Наоборот, пусть ξ принадлежит субдифференциалу функции $\Psi(\|u\|)$, т. е.

$$\Psi(\|v\|) - \Psi(\|u\|) \geqslant (\xi, v - u) \quad \forall v \in V.$$

Возьмем такое v, что $\|v\| = \|u\|$; тогда $(\xi, v - u) \leqslant 0$, следовательно, $(\xi, u) = \|\xi\|_* \|u\|$. Положим теперь $u = sw$, $\|w\| = 1$, $s \geqslant 0$ и возьмем $v = tw$, $t \in \mathbb{R}_+$ и произвольно. Тогда

$$\Psi(t) - \Psi(s) \geqslant (t - s)(\xi, w) = \frac{t - s}{s}(\xi, u) =$$
$$= \left(\frac{t - s}{s}\right)\|\xi\|_* \|u\| = (t - s)\|\xi\|_*,$$

откуда нетрудно вывести, что

$$\|\xi\|_* = \Phi(s) = \Phi(\|u\|) \bullet$$

---

[1] В том случае, когда отображение J *многозначное*, этот результат обобщается следующим образом: *субдифференциал функции* $v \to \Psi(\|v\|)$ *в точке u равен* $J(u)$; см. Асплунд [2].

8.7. Гладкость

8.7.1. Задача. Контрпримеры. Вернемся к примеру 8.1, рассматривая его в качестве «модельной задачи». Предположим, что Γ является многообразием класса C^∞, а коэффициенты a_{ij} принадлежат $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Для случая уравнений и обычных краевых задач известно, что если $f \in H^k(\Omega)$, то $u \in H^{k+2}(\Omega)$, и это имеет место *для любого* k $(\geqslant 0)$[1]. Но в случае вариационных неравенств подобные результаты справедливы только для «достаточно малых» k. Вот контрпример:

Контрпример 8.1. Пусть в ситуации примера 8.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^2,\ x_2 > 0\}$$

и $A = -\Delta + I$. Пусть функция $\lambda \to \theta(\lambda)$ принадлежит C^∞ при $\lambda \geqslant 0$, причем $\theta(\lambda) = 1$ при $\lambda \in [0, 1]$; $\theta(\lambda) = 0$ при $\lambda \geqslant 2$ и $\theta(\lambda) \geqslant 0$ $\forall \lambda$.

Следуя Шамиру [1], [2], положим

$$u(x) = \theta(r^2)\operatorname{Re}(z^{3/2}), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad z = x_1 + ix_2. \tag{8.58}$$

Легко проверить, что

$$-\Delta u + u = f, \quad f \in C^1(\overline{\Omega}),\ f \text{ имеет компактный носитель,}$$

откуда, в частности,

$$f \in H^1(\Omega). \tag{8.59}$$

Далее,

$$u \geqslant 0 \text{ на } \Gamma \ (u = 0 \text{ при } x_1 < 0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{3}{2}\theta(r^2)\operatorname{Im}\left(z^{1/2}\right) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 > 0\right),$$

и, следовательно, $u\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на Γ.

Таким образом, функция u из (8.58) является *решением задачи* из примера 8.1.

Если речь идет об «обычной» краевой задаче, то из (8.59) следует, что $u \in H^3(\Omega)$, но в нашей ситуации это не так ●

Вот контрпример к ситуации примера 8.3:

Контрпример 8.2. Пусть в ситуации примера 8.3 $\Omega =]0, 1[$, $A = -d^2/dx^2$, $f = 4$.

---

[1] Результаты такого типа называются «теоремами о гладкости».

Таким образом, $f \in H^k(\Omega)$ $\forall k$. Сейчас мы увидим, что соответствующее решение $u(x)$ *не принадлежит* $H^3(\Omega)$. В самом деле,

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad 0 < x < {}^1/_4, \\ -2x^2 + 2x - {}^1/_8 & \text{при} \quad {}^1/_4 \leq x < {}^3/_4, \\ 1 - x & \text{при} \quad {}^3/_4 < x < 1. \end{cases} \tag{8.60}$$

[При выводе формулы (8.60) можно рассуждать следующим образом. В неизвестной нам a priori части Ω выполнено уравнение $-u'' = f = 4$, так что

$$u(x) = -2x^2 + ax + b,$$

а поскольку рассматриваемое решение симметрично относительно ${}^1/_2$, то

$$u(x) = -2x^2 + 2x + b.$$

Функция u «должна» как можно лучше «сопрягаться» с кривыми $u(x) =$ расстояние от x до Γ, т. е. $u(x) = x$ и $u(x) = 1 - x$. Следовательно, должно выполняться равенство $u'(x) = 1$ при $u(x) = x$, откуда следует (8.60). Теперь остается *проверить*, что функция u из (8.60) является решением задачи.] ●

Общее указание. Теперь мы приведем положительные результаты о гладкости; используемые методы зависят не только от оператора, но также и от рассматриваемой *выпуклой области*[1].

Мы изложим два метода[2]:

(i) *метод сдвигов*, являющийся простым вариантом обычных методов в теории *эллиптических* уравнений (п. 8.7.2);

(ii) метод аппроксимации, приспособленный к неравенствам (пп. 8.7.3 и 8.7.4). ●

8.7.2. ОДИН РЕЗУЛЬТАТ О ГЛАДКОСТИ, УСТАНАВЛИВАЕМЫЙ МЕТОДОМ СДВИГОВ

Теорема 8.6. *Предположим, что* $\Omega = \{x \mid x_n > 0\}$. *Пусть* $\in L^2(\Omega)$, *и пусть* u *является решением в* $K = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v \geqslant 0$ *на* $\Gamma\}$ *неравенства*

$$a(u, v-u) \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in K \tag{8.61}$$

$\left(\text{где} \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv\, dx\right)$. *Тогда* $u \in H^2(\Omega)$.

---

[1] С другой стороны, легко показать, что если в качестве K взять *шар* в $H_0^1(\Omega)$, то будут справедливы *«естественные»* теоремы о гладкости.

[2] С другим методом мы встретимся в п. 5.5 гл. 3.

Доказательство. 1) Воспользуемся методом сдвигов *параллельно границе*. Этим методом мы установим, что если u — решение (8.61), то

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega), \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{8.62}$$

Достаточно ограничиться случаем $i = 1$. Вообще, положим

$$g_h(x) = g(x_1 - h, x_2, \ldots, x_n).$$

Так как K *инвариантно* относительно операции $v \to v_h \quad \forall h$, то из (8.61) следует, что

$$a(u, v_h - u) \geqslant (f, v_h - u),$$

откуда

$$a(u_{-h}, v) - a(u, u) \geqslant (f_{-h}, v) - (f, u) \quad \forall h. \tag{8.63}$$

Но

$$a(u, u) = a(u_h, u_h) \quad \forall h,$$
$$(f, u) = (f_h, u_h) \quad \forall h,$$

и, таким образом, из (8.63) мы выводим (заменяя h на $-h$), что

$$a(u_h, v - u_h) \geqslant (f_h, v - u_h). \tag{8.64}$$

Подставляя $v = u_h$ в (8.61) (соответственно $v = u$ в (8.64)) и складывая, мы получим, что

$$a(u_h - u, u_h - u) \geqslant (f_h - f, u_h - u). \tag{8.65}$$

Заметим теперь, что вообще

$$|(\varphi, \psi)| \leqslant \|\varphi\|_{L^2(0, \infty; H^{-1}(\mathrm{R}^{n-1}))} \|\psi\|_{L^2(0, \infty; H^1(\mathrm{R}^{n-1}))} \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{L^2(0, \infty; H^1(\mathrm{R}^{n-1}))} \|\psi\| \quad (\text{где } \|\psi\| = \|\psi\|_{H^1(\Omega)}),$$

а тогда из (8.65) следует, что

$$\|u_h - u\|^2 \leqslant \|f_h - f\|_{L^2(0, \infty; H^{-1}(\mathrm{R}^{n-1}))} \|u_h - u\|,$$

и, таким образом,

$$\left\|\frac{1}{h}(u_h - u)\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{h}(f_h - f)\right\|_{L^2(0, \infty; H^{-1}(\mathrm{R}^{n-1}))}. \tag{8.66}$$

Однако если $f \in L^2(\Omega)$, то

$$\frac{1}{h}(f_h - f) \to -\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{в} \quad L^2(0, \infty; H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

при $h \to 0$, и, таким образом, из (8.66) следует, что

$$\frac{1}{h}(u_h - u) \text{ ограничены в } H^1(\Omega).$$

Следовательно, мы можем считать, что $\frac{1}{h}(u_h - u) \to \chi$ в $H^1(\Omega)$ слабо, а поскольку

$$\frac{1}{h}(u_h - u) \to -\frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \text{в} \quad L^2(\Omega),$$

то мы видим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\chi \in L^2(\Omega), \text{ откуда следует (8.62).}$$

2) Для доказательства теоремы нам остается показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \in L^2(\Omega).$$

С этой целью мы используем уравнение (вытекающее из (8.61) при нашем выборе K)

$$-\Delta u + u = f,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u - f \in L^2(\Omega) \text{ в силу (8.62)} \bullet$$

Замечание 8.11. Первая часть приведенного выше доказательства существенно связана с тем, что выпуклая область K устойчива относительно операции $v \to v_h$ (по крайней мере для достаточно малых h); во второй части доказательства, наоборот, используется только то, что $K \supset \mathscr{D}(\Omega)$ ●

8.7.3. ОДИН «АБСТРАКТНЫЙ» РЕЗУЛЬТАТ О ГЛАДКОСТИ. Теперь поставим следующую общую задачу: пусть u является решением общего неравенства (8.10); *предположим, что f принадлежит подпространству X пространства V'; будет ли при этом выполняться включение*

$$A(u) \in X?$$

Мы приведем достаточное условие, при котором оно выполняется.

Предположим, что X — рефлексивное банахово пространство, причем

$$\begin{aligned} &X \subset V', \text{ вложение } X \to V' \text{ непрерывно,} \\ &X \text{ плотно в } V'. \end{aligned} \tag{8.67}$$

Пусть J — *некоторое* отображение двойственности $X \to X'$, где X' — сопряженное пространство к X (если это необходимо, мы перенормируем X и X' таким образом, чтобы они стали строго выпуклыми; см. теорему 2.5), и J удовлетворяет условиям, аналогичным (2.17) и (2.18).

Далее сделаем *следующее предположение*:

можно найти такое отображение двойственности $J: X \to X'$, что $\forall u \in K$, $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $u_\varepsilon \in K$, что $A(u_\varepsilon) \in X$ и при этом (8.68)

$$u_\varepsilon + \varepsilon J(A(u_\varepsilon)) = u.$$

Имеет место

Теорема 8.7. *Допустим, что выполнены предположения* (8.67) *и* (8.68). *Предположим, что* $A: V \to V'$ — *монотонный семинепрерывный ограниченный оператор, такой, что для подходящего* $v_0 \in K$ *имеем*[1])

$$\frac{(A(u),\ u - v_0)}{\|u\|} \to +\infty \quad при \quad \|u\| \to \infty, \quad u \in K. \tag{8.69}$$

Тогда если f *принадлежит* X, *то для любого решения* u *неравенства* (8.10) *выполнено включение*

$$A(u) \in X. \tag{8.70}$$

Доказательство. 1) Так как A — монотонный оператор, то в силу теоремы 8.4 можно заменить (8.10) на (8.36).

2) Подставим в (8.36) $v = u_\varepsilon$, где u_ε определено в (8.68). Тогда получим

$$-\varepsilon(A(u_\varepsilon),\ J(A(u_\varepsilon))) \geqslant -\varepsilon(f,\ J(A(u_\varepsilon))),$$

откуда

$$(A(u_\varepsilon),\ J(A(u_\varepsilon))) \leqslant (f,\ J(A(u_\varepsilon)));$$

используя аналоги (2.17), (2.18), найдем, что

$$\Phi(\|A(u_\varepsilon)\|_X)\|A(u_\varepsilon)\|_X \leqslant \|f\|_X\|J(A(u_\varepsilon))\|_{X'} = \|f\|_X\Phi(\|A(u_\varepsilon)\|_X).$$

Следовательно,

$$\|A(u_\varepsilon)\|_X \leqslant \|f\|_X. \tag{8.71}$$

Далее, из (8.68) выводим, что

$$\|u_\varepsilon - u\|_{X'} = \varepsilon\Phi(\|A(u_\varepsilon)\|_X) \leqslant \varepsilon\Phi(\|f\|_X),$$

откуда

$$u_\varepsilon \to u \quad в \quad X'. \tag{8.72}$$

В силу (8.71) и (8.72) имеем

$$(A(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) = c(\varepsilon) \to 0 \quad при \quad \varepsilon \to 0. \tag{8.73}$$

Но

$$(A(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v_0) = c(\varepsilon) + (A(u_\varepsilon),\ u - v_0), \tag{8.74}$$

---

[1]) Это предположение не имеет смысла в случае ограниченного K.

и поскольку $A(u_\varepsilon)$ ограничены в X, а следовательно, в V', из (8.74) вытекает, что

$$(A(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v_0) \leqslant \mathrm{const},$$

что вместе с (8.69) доказывает, что

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } V. \tag{8.75}$$

Теперь можно предположить (выделяя подпоследовательность, если нужно), что

$$u_\varepsilon \to u \text{ слабо в } V, \tag{8.76}$$

$$A(u_\varepsilon) \to \chi \text{ слабо в } X \text{ (следовательно, слабо в } V'). \tag{8.77}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что $\chi = A(u)$. Ввиду монотонности A

$$(A(u_\varepsilon) - A(w),\ u_\varepsilon - w) \geqslant 0 \quad \forall w \in V.$$

Полагая $w = (1-\theta)u + \theta v$, где v — произвольный фиксированный элемент V, получим

$$-(A(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) + (A((1-\theta)u + \theta v),\ u_\varepsilon - u - \theta(v-u)) \leqslant$$
$$\leqslant \theta(A(u_\varepsilon),\ u - v).$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, с помощью (8.73), (8.76), (8.77) получим

$$\theta(A((1-\theta)u + \theta v),\ u - v) \leqslant \theta(\chi,\ u - v).$$

Деля на θ и устремляя $\theta \to 0$, мы получим, что

$$(A(u) - \chi,\ u - v) \leqslant 0 \quad \forall v \in V,$$

откуда $\chi = A(u)$ ●

8.7.4. Приложения

Приложение 8.1. Рассмотрим оператор A:

$$\begin{gathered} A\varphi = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right), \quad a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \\ \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{8.78}$$

Пусть задана функция ψ, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} \psi \in H^1(\Omega), \quad \psi \leqslant 0 \text{ на } \Gamma, \quad A\psi \leqslant 0 \text{ (как элемент} \\ \mathscr{D}'(\Omega)\text{, а следовательно, как мера в } \Omega). \end{gathered} \tag{8.79}$$

Выпуклое множество K определяется условием

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ v \geqslant \psi \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{8.80}$$

Тогда имеет место существование и единственность такого $u \in K$, что

$$(Au, v-u) \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in K, \tag{8.81}$$

когда f принадлежит $H^{-1}(\Omega)$.

Сейчас из теоремы 8.7 будет выведена

Теорема 8.8. *Пусть A и K определяются с помощью* (8.78), (8.80), *где ψ — заданная функция, удовлетворяющая* (8.79). *Если f из* (8.81) *принадлежит*

$$H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad (1 < p < \infty),$$

то

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega). \tag{8.82}$$

Доказательство. 1) Достаточно показать, что $Au \in L^p(\Omega)$; тогда из теории краевых задач в $L^p(\Omega)$ следует (см. Агмон [1], Агмон — Дуглис — Ниренберг [1]), что если $u \in H_0^1(\Omega)$ и $Au \in L^p(\Omega)$, то $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

2) Теперь мы применим теорему 8.7 с $X = L^p(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$[1]. В качестве отображения двойственности возьмем

$$J(v) = |v|^{p-2} v.$$

Все сводится к проверке (8.68). Таким образом, нам задано u из K, и мы ищем элемент u_ε, являющийся решением уравнения

$$u_\varepsilon + \varepsilon J(A(u_\varepsilon)) = u, \tag{8.83}$$

откуда

$$Au_\varepsilon + J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right) = 0. \tag{8.84}$$

Полагая $u_\varepsilon - u = w_\varepsilon$, найдем, что

$$Aw_\varepsilon + J^{-1}\left(\frac{w_\varepsilon}{\varepsilon}\right) = -Au.$$

Отображение $v \to Av + J^{-1}(v/\varepsilon)$ является монотонным семинепрерывным ограниченным и коэрцитивным отображением

$$H_0^1(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) + L^p(\Omega),$$

и, следовательно, существует w_ε (а тогда и u_ε), являющееся единственным решением (8.84); при этом

$$Au_\varepsilon = -J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right) \in L^p(\Omega).$$

---

[1] Вложение $X \subset V'$ имеет место только при «достаточно больших» p ($p \geqslant 2n/(n+2)$), что мы и должны предполагать в общем случае, см. Брезис — Стампаккья [1], замечание 1.6.

Итак, мы придем к (8.68), если покажем (*и это является наиболее существенным моментом*), что

$$u_\varepsilon \in K, \quad \text{т. е.} \quad u_\varepsilon \geqslant \psi \text{ почти всюду.}$$

С этой целью введем

$$z_\varepsilon = \sup\{\psi - u_\varepsilon, 0\}, \tag{8.85}$$

и нам остается показать, что $z_\varepsilon = 0$.

Из (8.84) следует, что

$$A(\psi - u_\varepsilon) - A\psi = J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right). \tag{8.86}$$

Замечая, что

$$(A(\psi - u_\varepsilon), z_\varepsilon) = (Az_\varepsilon, z_\varepsilon) \geqslant 0,$$

мы выводим из (8.86), что

$$(-A\psi, z_\varepsilon) \leqslant \left(J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right), z_\varepsilon\right),$$

а так как по предположению $-A\psi \geqslant 0$, а по построению $z_\varepsilon \geqslant 0$, то отсюда вытекает, что

$$\left(J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right), z_\varepsilon\right) \geqslant 0,$$

т. е. что

$$\int_E J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right) z_\varepsilon \, dx \geqslant 0, \qquad E = \{x \mid x \in \Omega, \ \psi(x) \geqslant u_\varepsilon(x)\}.$$

Но, так как $u \in K$, то $u \geqslant \psi$ и, следовательно, $u \geqslant u_\varepsilon$ на E, откуда

$$J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad E.$$

Тогда

$$\int_E J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right) z_\varepsilon \, dx \leqslant 0,$$

и, следовательно,

$$\int_E J^{-1}\left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon}\right) z_\varepsilon \, dx = 0 \text{ почти всюду,}$$

а потому $u_\varepsilon = u$, или $z_\varepsilon = 0$ почти всюду на E, и, следовательно, во всех случаях $z_\varepsilon = 0$ ●

Замечание 8.12. Предположение «$A\psi \leqslant 0$» можно заменить предположением «$A\psi$ является мерой на Ω и $\sup\{A\psi, 0\} \in L^p(\Omega)$», введя аппроксимацию несколько более общего типа, чем в (8.68). В этой связи мы отсылаем к работе Брезиса и Стампаккьи [1]●

Приложение 8.2. Что касается теорем о гладкости в примере 8.3, то мы отсылаем к работе Брезиса и Стампаккьи [1], в которой эти теоремы доказаны с помощью методов, аналогичных изложенным выше. Можно также показать, что если $f \in L^p(\Omega)$, то решение u принадлежит $W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ ●

8.8. Теоремы о сравиеиии

Мы приведем пример (теорема 8.10), в котором решением вариационного неравенства будет верхняя огибающая семейства решений обычных краевых задач. Этот результат (принадлежащий Огазо [1], [2]) является простым следствием такого «абстрактного» результата:

Теорема 8.9. *Пусть V — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(V; V')$ — коэрцитивный оператор, и пусть K и K^* суть два замкнутых выпуклых множества в V. Пусть u (соответственно u^*) является решением из K (соответственно из K^*) неравенства*

$$(Au, v-u) \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in K \quad (f \text{ принадлежит } V') \tag{8.87}$$

$$(\text{соответственно } (Au^*, v^*-u^*) \geqslant (f, v^*-u^*) \quad \forall v^* \in K^*). \tag{8.88}$$

Предположим, что можно подобрать такую пару $\{w, w^*\} \in K^* \times K^*$, что

$$w + w^* = u + u^*, \tag{8.89}$$

$$(A(w-u^*), w-u) = 0. \tag{8.90}$$

Тогда имеем

$$w = u \quad (w^* = u^*). \tag{8.91}$$

Доказательство. Возьмем $v = w$ (соответствеиио $v^* = w^*$) в (8.87) (соответственно в (8.88)) и сложим полученные иеравенства; учитывая (8.89), найдем, что

$$(Au, w-u) + (Au^*, w^*-u^*) \geqslant 0;$$

кроме того (опять в силу (8.89)),

$$(Au - Au^*, w-u) \geqslant 0;$$

следовательно,

$$(A(u-w), w-u) + (A(w-u^*), w-u) \geqslant 0.$$

В силу этого иеравенства и (8.90) $-(A(w-u), w-u) \geqslant 0$, а поскольку оператор A коэрцитивиый, мы приходим к (8.91) ●

Приложеиие. Рассмотрим ситуацию примера 8.1.

Пусть Γ_1 — множество (емкости $\geqslant 0$) на Γ, и пусть u_{Γ_1} является решением задачи

$$\begin{gathered} Au_{\Gamma_1} = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \quad \frac{\partial u_{\Gamma_1}}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma - \Gamma_1. \end{gathered} \tag{8.92}$$

Говоря точнее, положим

$$K^* = \{ v \mid v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_1} = 0 \}; \tag{8.93}$$

тогда $u_{\Gamma_1} \in K^*$ и

$$(Au_{\Gamma_1}, v^*) = (f, v^*) \quad \forall v^* \in K^*$$

или (поскольку здесь K^* является векторным пространством)

$$(Au_{\Gamma_1}, v^* - u_{\Gamma_1}) \geqslant (f, v^* - u_{\Gamma_1}) \quad \forall v^* \in K^*. \tag{8.94}$$

Теперь может быть установлена

Теорема 8.10. *Пусть u — решение задачи* (8.14). *Имеем*

$$u = \sup_{\Gamma_1} u_{\Gamma_1}. \tag{8.95}$$

Доказательство. Поскольку $u = u_{\Gamma_1}$ *при подходящем выборе* Γ_1, то мы получим наш результат, если покажем, что, каково бы ни было миожество Γ_1,

$$u_{\Gamma_1} \leqslant u \text{ почти всюду в } \Omega. \tag{8.96}$$

В этой связи применим теорему 8.9; положим $u_{\Gamma_1} = u^*$ и определим

$$w = \sup(u, u^*), \quad w^* = \inf(u, u^*). \tag{8.97}$$

Можно проверить, что $w \in K$, $w^* \in K^*$; очевидно, что имеет место (8.89). Проверим теперь (8.90). Если $\psi = u - u^*$, то

$$w - u^* = \psi^+, \quad w - u = \psi^-$$

и, следовательно,

$$(A(w - u^*), w - u) = (A\psi^+, \psi^-) = 0,$$

откуда вытекает (8.91), и тем самым (8.96)[1] ●

---

[1] Брезис показал, что отображение $f \to u$ является «возрастающим»: если $f_1, f_2 \in L^\infty(\Omega)$, $f_1 \geqslant f_2$ почти всюду, то $u_1 \geqslant u_2$ (u_i — решение, отвечающее f_i).

8.9. Другой тип примеров

Как мы уже отметили в конце примера 8.3, решение «эллиптического» вариационного неравенства может привести к «многофазовой» задаче с двумя уравнениями *разной природы* в двух частях области Ω. Вот другая серия примеров подобного типа.

Пусть $V = H^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 uv\, dx, \quad a_{ij} \text{ и } a_0 \in L^\infty(\Omega),$$

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0, \quad a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0 \text{ почти всюду в } \Omega.$$

Пусть P — *произвольный дифференциальный оператор,*

$$P \in \mathscr{L}(H^1(\Omega); \mathscr{D}'(\Omega)). \tag{8.98}$$

Определим

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ Pv \geqslant 0 \text{ в } \Omega\}^{1)}. \tag{8.99}$$

Тогда существует единственное $u \in K$, такое, что $a(u, v - u) \geqslant \geqslant (f, v - u)$ $\forall v \in K$ (f — заданная функция из $L^2(\Omega)$). «Разобьем» *формально* Ω на

$$\Omega_+ = \{x \mid Pu(x) > 0\} \quad \text{и} \quad \Omega_0 = \{x \mid Pu(x) = 0\}.$$

Тогда получим

$$Au = f \text{ на } \Omega_+, \tag{8.100}$$

$$\left.\begin{aligned} Pu &= 0 \text{ на } \Omega_0, \\ \partial u/\partial \nu_A &= 0 \text{ на } \Gamma, \end{aligned}\right. \tag{8.101}$$

и *на границе раздела* Ω_+ *и* Ω_0 выполнены *условия сопряжения.*

Поскольку P — оператор *произвольного* типа, то мы получаем два уравнения (8.100) и (8.101), которые могут иметь различную природу ●

Замечание 8.13. Можно изучать *односторонние* задачи (или *вариационные неравенства*) для псевдодифференциальных операторов. Например, возьмем (см. п. 1.1.4 гл. 1)

$$V = H_{00}^{1/2}(\Omega), \quad \Omega =]-1, 1[,$$

$$Au = \text{v. p.} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(y)}{x - y} dy,$$

$$K = \{v \mid v \in V,\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}.$$

---

[1] $Pv \geqslant 0$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$, следовательно, Pv является положительной мерой.

Существует единственное u из K, удовлетворяющее неравенству

$$(Au,\ v-u)\geqslant(f,\ v-u)\quad \forall v\in K$$

для заданного f из V' ●

9. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

9.1. Постановки задач

Пример 9.1. Рассмотрим одну из простейших задач, изученных в § 8: в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ищется функция u — решение задачи

$$\begin{aligned}&Au=f \text{ в } \Omega,\\ &u\geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu_A}\geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\quad u\frac{\partial u}{\partial\nu_A}=0 \text{ на } \Gamma,\end{aligned}\tag{9.1}$$

где A — эллиптический оператор второго порядка.

По аналогии с *уравнениями*, естественно связать с задачей (9.1) *нестационарную задачу*, «параболическую» по своей природе:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+Au=f \text{ в } \Omega\times]0,\ T[=Q,\\ &u\geqslant 0 \text{ на } \Sigma=\Gamma\times]0,\ T[,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu_A}\geqslant 0 \text{ на } \Sigma,\quad u\frac{\partial u}{\partial\nu_A}=0 \text{ на } \Sigma,\\ &u(x,\ 0)=u_0(x) \text{ задано в } \Omega\end{aligned}\tag{9.2}$$
●

Попытаемся сформулировать (9.2) в более точной форме. Введем выпуклое множество

$$K=\{v\mid v\in H^1(\Omega),\ v\geqslant 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

В привычных обозначениях (9.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&(u'(t),\ v-u(t))+(Au(t),\ v-u(t))\geqslant(f,\ v-u(t))\quad \forall v\in K,\\ &u(t)\in K,\\ &u(0)=u_0,\ u_0 \text{ задано в } L^2(\Omega).\end{aligned}\tag{9.3}$$

Здесь возникает одна трудность: формулировка (9.3) имеет смысл только тогда, когда $u'(t)\in V'$ почти всюду (чтобы выражение $(u'(t),\ v-u(t))$ имело смысл). Как нам кажется, это условие не всегда можно реализовать, и поэтому нужно еще *ослабить* формулировку (9.3).

Для этой цели рассмотрим такое *семейство элементов* $v(t)\in K$, что

$$v'=\frac{dv}{dt}\in L^2(0,\ T;\ V'),$$

и пусть

$$X = \int_0^T [(v', v-u) + (Au, v-u) - (f, v-u)]\,dt.$$

Тогда имеем

$$X = \int_0^T [(u', v-u) + (Au, v-u) - (f, v-u)]\,dt + \\ + \int_0^T (v'-u', v-u)\,dt \geqslant \int_0^T (v'-u', v-u)\,dt$$

(в силу (9.3))

и, следовательно,

$$X \geqslant \frac{1}{2}|v(T)-u(T)|^2 - \frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2.$$

Если мы предположим, что $v(0)=u_0$, то получим

$$\int_0^T [(v', v-u) + (Au, v-u)]\,dt \geqslant \int_0^T (f, v-u)\,dt; \tag{9.4}$$

это неравенство имеет смысл при *единственном условии на* u:

$$u \in L^2(0, T; V) \tag{9.5}$$

(и предполагается, что $u(t) \in K$ почти всюду).

Мы дальше будем *изучать задачи в форме* (9.4) (в более общей ситуации, которую мы опишем). Несмотря на «очень слабый» характер разыскиваемого решения, *как мы дальше увидим, при разумных предположениях имеет место единственность.* Дальнейшая проблема — это вопрос о гладкости: когда «слабые» решения (9.4) являются сильными решениями в смысле (9.3) [1])? ●

---

[1]) Если мы *уравнение* $u'+Au=f$, $u(0)=u_0$ проинтегрируем по t, то получим *эквивалентное* уравнение:

$$u(t) + \int_0^t Au(\sigma)\,d\sigma = \int_0^t f(\sigma)\,d\sigma + u_0,$$

с которым можно связать неравенство, *не эквивалентное* (9.4):

$$(u(t), v-u(t)) + \left(\int_0^t Au(\sigma)\,d\sigma - \int_0^t f(\sigma)\,d\sigma, v-u(t)\right) \geqslant (u_0, v-u(t)) \\ \forall v \in K.$$

Это неравенство можно изучать отдельно, но это здесь не делается, см. Дюво — Лионс [1] и Брезис [5].

Замечание 9.1. В отличие от уравнений, для неравенств случай $u_0 \neq 0$ приводит к дополнительным серьезным техническим трудностям по сравнению со случаем $u_0 = 0$; мы сделаем только несколько простых замечаний (в частности, в гл. 3) для случая $u_0 \neq 0$, отсылая читателя к работе Брезиса [5] ●

ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ О «ПАРАБОЛИЧЕСКИХ» НЕРАВЕНСТВАХ[1])

Пусть имеет место ситуация § 7; чтобы немного упростить изложение, мы начнем со случая, когда $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$. Итак, нам задано рефлексивное банахово пространство $\mathscr{V}$ и гильбертово пространство $\mathscr{H}$, причем

$$\mathscr{V} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{V}'. \tag{9.6}$$

В случае примера 9.1 мы возьмем $\mathscr{V} = L^2(0,\ T;\ V)$, $V = H^1(\Omega)$ и $\mathscr{H} = L^2(0,\ T;\ H)$, $H = L^2(\Omega)$.

Рассмотрим далее, как и в § 7, такой оператор Λ, что

— Λ есть инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $s \to G(s)$ в $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{V}'$, являющейся сжимающей полугруппой в $\mathscr{H}$. (9.7)

Кроме того, рассмотрим нелинейный оператор $\mathscr{A}$, такой, что

$$\mathscr{A}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}' \text{ — псевдомонотонный оператор}^{2)}, \tag{9.8}$$

и (как в (7.15)) предположим, что $\mathscr{A}$ — *коэрцитивный* оператор:

$$\text{существует такой элемент } v_0 \in \mathscr{K}, \text{ что} \quad \frac{(\mathscr{A}(v),\ v - v_0)}{\|v\|_{\mathscr{V}}} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{\mathscr{V}} \to \infty. \tag{9.9}$$

Наконец, пусть задано множество $\mathscr{K}$:

$$\mathscr{K} \text{ — выпуклое замкнутое множество в } \mathscr{V}. \tag{9.10}$$

В случае примера 9.1 мы возьмем

$$\mathscr{K} = \{v \mid v \in L^2(0,\ T;\ V),\ v(t) \in K \text{ почти всюду}\}, \tag{9.11}$$

где $K = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\}$; нетрудно проверить, что $\mathscr{K}$ удовлетворяет (9.10) ●

Используя введенные выше операторы, выпуклые множества, пространства и т. д., можно поставить задачи для вариацион-

---

[1]) «Гиперболический» случай будет изучен в § 7 гл. 3. Термины «параболический» или «гиперболический» используются только для общих указаний на характер задач.

[2]) См. определение 2.1. Это предположение более сильное по сравнению с (7.31), (7.32): как мы уже указывали, псевдомонотонность является «хорошим» понятием при решении вариационных неравенств. Можно также предполагать, что оператор определен только на $\mathscr{K}$.

ных неравенств, содержащие в качестве весьма частных случаев «сильную» постановку (9.3) и «слабую» постановку (9.4) (берется $\Lambda = d/dt$, а оператор $\mathcal{A}$ определяется формулой $(\mathcal{A}v)(t) = A(v(t))$ почти всюду)●

«Сильная» постановка (обобщение (9.3)). Ищется функция u, такая, что

$$u \in \mathcal{K}, \tag{9.12}$$

$$u \in D(\Lambda;\ \mathcal{V}')^{1}, \tag{9.13}$$

$$(\Lambda u,\ v - u) + (\mathcal{A}(u),\ v - u) \geqslant (f,\ v - u) \quad \forall v \in \mathcal{K} \tag{9.14}$$

(где f задано в $\mathcal{V}'$)●

«Слабая» постановка (обобщение (9.4)). Предположим, что u удовлетворяет (9.12), (9.13), (9.14); тогда если $v \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V})$, то

$$\begin{aligned}(\Lambda v,\ v - u) &+ (\mathcal{A}(u),\ v - u) - (f,\ v - u) = \\ &= (\Lambda u,\ v - u) + (\mathcal{A}(u),\ v - u) - (f,\ v - u) + \\ &+ (\Lambda(v - u),\ v - u) \geqslant (\Lambda(v - u),\ v - u).\end{aligned} \tag{9.15}$$

(в силу (9.14))

С помощью предположений (9.7) (см. § 7) без труда проверяется, что

$$(\Lambda\varphi,\ \varphi) \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}'). \tag{9.16}$$

Тогда из (9.15) следует, что

$$(\Lambda v, v - u) + (\mathcal{A}(u), v - u) \geqslant (f, v - u) \quad \forall v \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}'). \tag{9.17}$$

«Слабая» формулировка такова: найти $u \in \mathcal{K}$, удовлетворяющее (9.17)●

9.2. Условия согласования. Примеры

Теперь мы введем «условие согласования»[2] для Λ и $\mathcal{K}$:

$\forall v \in \mathcal{K}$ существует некоторая «регуляризующая» последовательность v_j, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad v_j \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}'),\\ &\text{(ii)}\quad v_j \to v \text{ в } \mathcal{V},\ j \to \infty,\\ &\text{(iii)}\quad \limsup_{j\to\infty}(\Lambda v_j,\ v_j - v) \leqslant 0\ \bullet\end{aligned} \tag{9.18}$$

Приведем примеры.

Пример 9.2. Пусть V — рефлексивное банахово пространство, H — гильбертово пространство, V плотно в H, $V \subset H \subset V'$,

---

[1] В примере 9.1 это соответствует условию $u(0) = 0$.

[2] Условие не необходимое, но достаточное для наших целей.

и K является выпуклым замкнутым подмножеством в V. Возьмем

$$\mathscr{V} = L^p(0, T; V), \quad 2 \leqslant p \leqslant \infty\,^{1)},$$
$$\mathscr{H} = L^2(0, T; H),$$
$$\mathscr{K} = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v(t) \in K \text{ почти всюду}\},$$
$$\Lambda = d/dt, \ D(\Lambda; \mathscr{V}) = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v' \in \mathscr{V},\ v(0) = 0\}\,^{2)}.$$

Следовательно, $-\Lambda$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы $G(s)$ из (7.36). Заметим также, что

$$\text{если } 0 \in K, \text{ то } G(s)\mathscr{K} \subset \mathscr{K} \quad \forall s \geqslant 0. \tag{9.19}$$

В этой ситуации выполняется условие (9.18), как будет видно из следующей теоремы:

Теорема 9.1. *Если выпуклое множество* $\mathscr{K}$ *и полугруппа* $G(s)$ *связаны условием*

$$G(s)\mathscr{K} \subset \mathscr{K} \quad \forall s \geqslant 0, \tag{9.20}$$

то выполнено условие (9.18).

Доказательство. 1) Прежде всего заметим, что $\forall \varepsilon > 0$:

$$(I + \varepsilon\Lambda)^{-1} = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{s}{\varepsilon}\right) G(s)\, ds, \tag{9.21}$$

так что $\left(\text{поскольку } \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = 1\right)$ в силу (9.20):

$$(I + \varepsilon\Lambda)^{-1}\mathscr{K} \subset \mathscr{K}. \tag{9.22}$$

2) Для заданного v из $\mathscr{K}$ определим v_ε из уравнения

$$v_\varepsilon + \varepsilon\Lambda v_\varepsilon = v\,^{3)}. \tag{9.23}$$

Имеем: $v_\varepsilon \in \mathscr{K} \cap D(\Lambda; \mathscr{V})$ и $v_\varepsilon \to v$ в $\mathscr{V}$ при $\varepsilon \to 0$, так что нам остается только проверить (iii) в (9.18); в силу (9.23)

$$(\Lambda v_\varepsilon, v_\varepsilon - v) = -\varepsilon\,|\Lambda v_\varepsilon|^2_{\mathscr{H}} \leqslant 0 \ \bullet$$

Замечание 9.2. При доказательстве мы использовали (9.22); заметим, что поскольку $G(t)\varphi = \lim_m \left(I + \frac{t}{m}\Lambda\right)^{-m}\varphi$, из (9.22) вытекает (9.20) (и, следовательно, эти условия эквивалентны) ●

---

1) Далее мы будем рассматривать случай $1 < p < \infty$.

2) И аналогичным образом определим $D(\Lambda; \mathscr{H})$, $D(\Lambda; \mathscr{V}')$.

3) Отметим аналогию с уравнением, введенным в (8.68).

Замечание 9.3. Можно получить тот же результат, если заменить (9.20) условием:

$$\text{существует такое } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ что } \exp(-\alpha s)\, G(s)\, \mathcal{K} \subset \mathcal{K} \quad \forall s \geqslant 0. \tag{9.24}$$

Действительно, имеем

$$(1-\alpha\varepsilon)(I+\varepsilon\Lambda)^{-1} = \int_0^\infty \varphi_\varepsilon(s)\, e^{-\alpha s} G(s)\, ds,$$

$$\varphi_\varepsilon(s) = \frac{(1-\alpha\varepsilon)}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}+\alpha\right) s,$$

так что

$$(1-\alpha\varepsilon)(I+\varepsilon\Lambda)^{-1}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \tag{9.25}$$

и тогда положим $v_\varepsilon = (1-\alpha\varepsilon)(I+\varepsilon\Lambda)^{-1} v$ ●

Пример 9.3. Пусть $K(t)$ — семейство выпуклых замкнутых подмножеств V, удовлетворяющих условиям

$$K(t) \subset K(t') \quad \text{при} \quad t \leqslant t', \tag{9.26}$$

и

$$0 \in K(0). \tag{9.27}$$

Пусть, далее,

$$\mathcal{K} = \{v \mid v \in L^p(0, T; V),\ v(t) \in K(t) \text{ почти всюду}\}. \tag{9.28}$$

Множество $\mathcal{K}$ (не пустое, поскольку $0 \in \mathcal{K}$) замкнуто и выпукло в $\mathcal{V}$. Без труда проверяется, что благодаря (9.26), (9.27) мы опять получим (9.20), если оператор Λ взять таким же, как в примере 9.2 ●

9.3. Теорема существования «слабого» решения

Теорема 9.2. *Предположим, что выполнены условия* (9.6), (9.7), (9.8), *а также условие коэрцитивности* (9.9) *с* $v_0 \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}')$ *и условие согласования* (9.18). *Тогда* $\forall f \in \mathcal{V}'$ *существует решение* $u \in \mathcal{K}$ *вариационного эволюционного неравенства* (9.17).

Доказательство. Мы используем тот же принцип, что и в теореме 7.1, сводя нашу задачу к эллиптическим неравенствам (вместо эллиптических уравнений в теореме 7.1).

1) Прежде всего нам надо найти такую функцию $u_h \in \mathcal{K}$, что

$$\left(\frac{I-G(h)}{h} u_h,\ v-u_h\right) + (\mathcal{A}(u_h),\ v-u_h) \geqslant (f,\ v-u_h) \quad \forall v \in \mathcal{K}. \tag{9.29}$$

Покажем, что существует $u_h \in \mathcal{K}$, удовлетворяющая (9.29).

Для этой цели применим теорему 8.2, взяв $\mathscr{V}$ и $\mathscr{K}$ вместо V и K, и заменим оператор A оператором

$$v \to \frac{I-G(h)}{h} v + \mathscr{A}(v) = \mathscr{B}(v) \colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}'.$$

Без труда проверяется, что $\mathscr{B}$ — псевдомонотонный оператор, а поскольку

$$\left(\frac{I-G(h)}{h} \cdot \varphi, \varphi\right) \geqslant 0,$$

имеем

$$\begin{aligned}(\mathscr{B}(v), v-v_0) = (\mathscr{A}(v), v-v_0) + \left(\frac{I-G(h)}{h}(v-v_0), v-v_0\right) + \\ + \left(\frac{I-G(h)}{h} v_0, v-v_0\right) \geqslant \\ \geqslant (\mathscr{A}(v), v-v_0) + \left(\frac{I-G(h)}{h} v_0, v-v_0\right) \geqslant \\ \geqslant (\mathscr{A}(v), v-v_0) - c\|v\| \text{ (так как } v_0 \in D(\Lambda; \mathscr{V}'))\end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (9.9)

$$\frac{(\mathscr{B}(v), v-v_0)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty. \tag{9.30}$$

2) Из (9.30) следует, что

$$u_h \text{ ограничены в } \mathscr{V}. \tag{9.31}$$

Итак, поскольку $\mathscr{A}$ — ограниченный оператор, можно предположить, выделяя подпоследовательность, которую опять будем обозначать через u_h, что при $h \to 0$

$$\begin{aligned} u_h \to u \text{ в } \mathscr{V} \text{ слабо}, \\ A(u_h) \to \chi \text{ в } \mathscr{V}' \text{ слабо}. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Из (9.29) выводим, что

$$\left(\frac{I-G(h)}{h} v, v-u_h\right) + (\mathscr{A}(u_h), v-u_h) \geqslant (f, v-u_h) \quad \forall v \in \mathscr{K}. \tag{9.33}$$

Действнтельно, левая часть (9.33) равна

$$\left(\frac{I-G(h)}{h}(v-u_h), v-u_h\right) + \left(\frac{I-G(h)}{h} u_h, v-u_h\right) + (\mathscr{A}(u_h), v-u_h),$$

и нужное нам равенство следует из (9.29) и неравенства

$$\left(\frac{I-G(h)}{h} \varphi, \varphi\right) \geqslant 0.$$

Из (9.33) выводим, беря $v \in \mathscr{K} \cap D(\Lambda; \mathscr{V}')$, что

$$\limsup (\mathscr{A}(u_h), u_h) \leqslant (\Lambda v, v-u) + (\chi, v) - (f, v-u),$$

откуда

$$\limsup_{h\to 0}(\mathcal{A}(u_h),\ u_h-u)\leqslant(\chi-f,\ v-u)+(\Lambda,\ v-u)$$
$$\forall v\in\mathscr{K}\cap D(\Lambda;\ \mathscr{V}'). \qquad (9.34)$$

С другой стороны,

$$\inf_{v\in\mathscr{K}\cap D(\Lambda;\ \mathscr{V}')}[(\chi-f,\ v-u)+(\Lambda v,\ v-u)]\leqslant$$
$$\leqslant\liminf[(\chi-f,\ u_j-u)+(\Lambda u_j,\ u_j-u)]\leqslant 0 \quad (\text{в силу } (9.18))$$

(здесь u_j — регуляризующая последовательность, как в (9.18)).

Далее из (9.34) следует, что

$$\limsup_{h\to 0}(\mathcal{A}(u_h),\ u_h-u)\leqslant 0. \qquad (9.35)$$

Так как оператор $\mathcal{A}$ псевдомонотонный, то получим

$$\liminf_{h\to 0}(\mathcal{A}(u_h),\ u_h-v)\geqslant(\mathcal{A}(u),\ u-v) \quad \forall v\in\mathscr{K}. \qquad (9.36)$$

Однако в силу (9.33) имеем

$$\limsup_{h\to 0}(\mathcal{A}(u_h),\ u_h-v)\leqslant$$
$$\leqslant(\Lambda v,\ v-u)-(f,\ v-u) \quad \forall v\in\mathscr{K}\cap D(\Lambda;\ \mathscr{V}'). \qquad (9.37)$$

Сравнивая (9.36) и (9.37), мы получим, что u удовлетворяет 9.17)●

Случай, когда $\mathscr{V}$ не содержится в $\mathscr{H}$

Рассмотрим теперь ситуацию § 7, когда пространства $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{V}'$ «заключены» между Ф и Ф′, и не предполагается, что $\mathscr{V}$ содержится в $\mathscr{H}$.

Выпуклое множество $\mathscr{K}$ рассматривается такое же, как и выше (замкнутое в $\mathscr{V}$); «условие согласования» (9.18) должно быть модифицировано следующим образом:

$\forall v\in\mathscr{K}$ существует «регуляризующая» последовательность v_j, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\ v_j\in\mathscr{K}\cap D(\Lambda;\ \mathscr{V},\ \mathscr{V}')\cap\mathscr{H},\\ &\text{(ii)}\ v_j\to v \ \text{ в } \mathscr{V} \ \text{ при } j\to\infty,\\ &\text{(iii)}\ \limsup(\Lambda v_j,\ v_j-v)\leqslant 0;\end{aligned} \qquad (9.18')$$

условия (ii), (iii), таким образом, в (9.18) и (9.18′) совпадают.

Имеет место

Теорема 9.3. *Пусть для пространств* $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{V}'$ *выполнены предположения* § 7, *и пусть выполнены условия* (7.23) *и* (7.28). *Предположим, что выполнено также условие* (9.18′), *а остальные* *условия теоремы 9.2 оставлены без изменения. Тогда для заданного f из $\mathscr{V}'$ существует решение $u \in \mathscr{K}$ неравенства*

$$(\Lambda v, v-u)+(\mathscr{A}(u), v-u) \geqslant$$
$$\geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in \mathscr{K} \cap D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}') \cap \mathscr{H}. \qquad (9.17')$$

Доказательство. Нам понадобится следующее утверждение:

$$\text{если } v \in D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}'), \quad \text{то} \quad v - G(h) v \in \mathscr{V}' \quad \forall h \geqslant 0$$
$$\text{и } \frac{1}{h}(v - G(h) v) \to \Lambda v \quad \text{в} \quad \mathscr{V}' \quad \text{при} \quad h \to 0^{1)}. \qquad (9.38)$$

Докажем (9.38). Имеем:

$$\frac{d}{ds} G(s) \varphi + G(s) \Lambda \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Lambda; \mathscr{V}');$$

в частности, это равенство выполняется $\forall \varphi \in D(\Lambda; \mathscr{V}') \cap \mathscr{V}$. Однако в силу (7.28) для заданного v из $D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')$ можно подобрать такую последовательность $\varphi_n \in D(\Lambda; \mathscr{V}') \cap \mathscr{V}$, что $\varphi_n \to v$ в $D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')$. Тогда $G(s) \varphi_n \to G(s) v$ в $C^0(s \geqslant 0; \mathscr{V})$ и, в частности, $\frac{d}{ds} G(s) \varphi_n \to \frac{d}{ds} G(s) v$ в $\mathscr{D}'(]0, \infty[; \mathscr{V})$, а следовательно, и в $\mathscr{D}'(]0, \infty[; \Phi')$.

С другой стороны, $G(s) \Lambda \varphi_n \to G(s) \Lambda v$ в $C^0(s \geqslant 0; \mathscr{V}') \subset C^0(s \geqslant 0; \Phi')$ и, следовательно,

$$\frac{d}{ds} G(s) v + G(s) \Lambda v = 0. \qquad (9.39)$$

Отсюда вытекает, что «$s \to G(s) v$» $\in C^1(s \geqslant 0; \mathscr{V} + \mathscr{V}')$, и из (9.39) мы выводим

$$\frac{1}{h}(v - G(h) v) = \frac{1}{h} \int_0^h G(s) \Lambda v \, ds,$$

откуда следует (9.38).

Теперь мы докажем теорему с помощью двойного предельного перехода. Введем $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$.

Отметим, что в силу (9.18′) множество $\mathscr{K} \cap \mathscr{H}$ (являющееся выпуклым замкнутым подмножеством в $\mathscr{V} \cap \mathscr{H}$) не пусто (и даже плотно в $\mathscr{K}$).

Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\forall h > 0$ существует такая последовательность $u_{h\varepsilon} \in \mathscr{K} \cap \mathscr{H}$, что

$$(\Lambda_{h\varepsilon} u_{h\varepsilon}, v - u_{h\varepsilon}) + (\mathscr{A}(u_{h\varepsilon}), v - u_{h\varepsilon}) \geqslant (f, v - u_{h\varepsilon})$$
$$\forall v \in \mathscr{K} \cap \mathscr{H}, \quad \text{где} \quad \Lambda_{h\varepsilon} = \frac{I - (1-\varepsilon) G(h)}{h}. \qquad (9.40)$$

---

[1] Верно и обратное.

Положим в (9.40) $v=v_0$; тогда

$$(\mathscr{A}(u_{h\varepsilon}), u_{h\varepsilon}-v_0)+(\Lambda_{h\varepsilon}(u_{h\varepsilon}-v_0), u_{h\varepsilon}-v_0)\leqslant$$
$$\leqslant (f, u_{h\varepsilon}-v_0)-(\Lambda_{h\varepsilon}v_0, u_{h\varepsilon}-v_0).$$

Однако $\Lambda_{h\varepsilon}\geqslant 0$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H})$ и

$$\Lambda_{h\varepsilon}v_0=\frac{v_0-G(h)v_0}{h}+\frac{\varepsilon}{h}G(h)v_0,$$

откуда

$$\|\Lambda_{h\varepsilon}v_0\|_{\mathscr{V}'}\leqslant\left\|\frac{v_0-G(h)v_0}{h}\right\|_{\mathscr{V}'}+\frac{\varepsilon}{h}\|G(h)v_0\|_{\mathscr{V}'};$$

отсюда (используя (9.38)) получаем, что $\|\Lambda_{h\varepsilon}v_0\|\leqslant c$ при $\varepsilon\leqslant h$. Следовательно,

$$(\mathscr{A}(u_{h\varepsilon}), u_{h\varepsilon}-v_0)\leqslant c(\|u_{h\varepsilon}\|_{\mathscr{V}}+1),$$

и, таким образом, $u_{h\varepsilon}$ *ограничены в* $\mathscr{V}$, *когда* ε, $h\to 0$, $\varepsilon\leqslant h$.

Теперь устремим ε к 0, оставив h фиксированным. Мы можем считать, выделяя подпоследовательность, что $u_{h\varepsilon}\to u_h$ в $\mathscr{V}$ слабо, $\mathscr{A}(u_{h\varepsilon})\to\chi_h$ в $\mathscr{V}'$ слабо. Из (9.40) следует, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}(\mathscr{A}(u_{h\varepsilon}), u_{h\varepsilon})\leqslant(\chi_h, v)-(f, v-u_h)-(\Lambda_h v, v-u_h),$$
$$\Lambda_h=\frac{I-G(h)}{h},\quad \forall v\in\mathscr{K}\cap D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')\cap\mathscr{H}$$

(поскольку $\Lambda_{h\varepsilon}v\to\Lambda_h v$ в $\mathscr{V}'+\mathscr{H}$). Итак,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}(\mathscr{A}(u_{h\varepsilon}), u_{h\varepsilon}-u_h)\leqslant(\chi_h-f-\Lambda_h v, v-u_h)$$
$$\forall v\in\mathscr{K}\cap D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')\cap\mathscr{H}.$$

Однако, взяв в качестве v регуляризующую последовательность, связанную с u_h (ввиду (9.18′)), мы сможем заключить, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}(\mathscr{A}(u_{h\varepsilon}), u_{h\varepsilon}-u_h)\leqslant 0$$

и, следовательно,

$$\liminf(\mathscr{A}(u_{h\varepsilon}), u_{h\varepsilon}-v)\geqslant(\mathscr{A}(u), u-v),$$

откуда выводится (как в теореме 9.2), что

$$\begin{gathered}(\Lambda_h v, v-u_h)+(\mathscr{A}(u_h), v-u_h)\geqslant(f, v-u_h)\\ \forall v\in\mathscr{K}\cap D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}')\cap\mathscr{H},\quad u_h\in\mathscr{K}.\end{gathered}\tag{9.41}$$

С другой стороны, нам известно, что u_h ограничены в $\mathscr{V}$ при $h\to 0$. Следовательно, мы можем предположить (выделяя подпоследовательность), что

$$u_h\to u \text{ в } \mathscr{V} \text{ слабо}, u\in\mathscr{K},$$
$$\mathscr{A}(u_h)\to\chi \text{ в } \mathscr{V}' \text{ слабо}.$$

Из (9.41) выводим (используя (9.38)), что

$$\limsup_{h\to 0} (\mathcal{A}(u_h), u_h) \leqslant (\chi, v) + (\Lambda v, \mathscr{V} - u) - (f, v - u)$$

$$\forall v \in \mathscr{K} \cap D(\Lambda; \mathscr{V}, \mathscr{V}') \cap \mathscr{H}.$$

Следовательно,

$$\limsup (\mathcal{A}(u_h), u_h - u) \leqslant (\chi - f + \Lambda v, v - u),$$

и взяв в качестве v регуляризующую последовательность, связанную с u (ввиду (9.38′)), мы выведем, что

$$\limsup (\mathcal{A}(u_h), u_h - u) \leqslant 0.$$

Доказательство заканчивается таким же образом, как в теореме 9.2 ●

9.4. Теорема единственности «слабого» решения

Теорема 9.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.2 *или* 9.3. *Предположим, что, кроме того,* $\forall u, v \in \mathscr{K}$:

$$(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v) \leqslant 0 \Rightarrow u = v. \tag{9.42}$$

Тогда неравенство (9.17) *допускает единственное решение.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 суть два решения; тогда для всех $v \in \mathscr{K} \cap D(\Lambda; \mathscr{V}')$[1]

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}(u_1), v - u_1) + (\Lambda v, v - u_1) \geqslant (f, v - u_1), \\ &(\mathcal{A}(u_2), v - u_2) + (\Lambda v, v - u_2) \geqslant (f, v - u_2). \end{aligned} \tag{9.43}$$

Положим

$$w = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad w \in \mathscr{K},$$

и рассмотрим «регуляризующую» последовательность w_j, связанную с w ввиду (9.18)[2]. Возьмем $v = w_j$ в (9.43) и сложим:

$$(\mathcal{A}(u_1), w_j - u_1) + (\mathcal{A}(u_2), w_j - u_2) + 2(\Lambda w_j, w_j - w) \geqslant 2(f, w_j - w),$$

откуда

$$\limsup_{j\to\infty} [(\mathcal{A}(u_1), u_1 - w_j) + (\mathcal{A}(u_2), u_2 - w_j)] \leqslant$$
$$\leqslant 2 \limsup [(\Lambda w_j, w_j - w) - (f, w_j - w)] \leqslant 0$$

и, следовательно,

$$(\mathcal{A}(u_1), u_1 - w) + (\mathcal{A}(u_2), u_2 - w) \leqslant 0,$$

---

[1] Кроме того, $v \in \mathscr{H}$ в условиях теоремы 9.3.

[2] Или ввиду (9.18′).

т. е. $(\mathcal{A}(u_1)-\mathcal{A}(u_2), u_1-u_2)\leqslant 0$, откуда в силу (9.42) следует наше утверждение ●

9.5. Приложения

9.5.1. СЛУЧАЙ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА. Предположим, что в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ задано семейство операторов $A(t)$:

$$A(t)\varphi=-\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)+a_0(x,t)\varphi,\ t\in\,]0,T[,\qquad(9.44)$$

где

$$\begin{gathered}a_0,\ a_{ij}\in L^\infty(Q),\quad Q=\Omega\times]0,T[,\\ \sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2\ \text{почти всюду},\quad\alpha>0,\\ a_0(x,t)\geqslant\alpha_0>0\ \text{(или}\geqslant 0\ \text{в соответствующих}\\ \text{случаях) почти всюду в } Q.\end{gathered}\qquad(9.45)$$

Рассмотрим подпространство V, замкнутое в $H^1(\Omega)$ и такое, что

$$H_0^1(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega).\qquad(9.46)$$

Далее, пусть

$$\mathcal{V}=L^2(0,T;V),\qquad\mathcal{H}=L^2(0,T;H),\qquad H=L^2(\Omega).$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством

$$(\mathcal{A}u)(t)=A(t)u(t)\quad\text{почти всюду},\qquad(9.47)$$

или, более аккуратно,

$$(\mathcal{A}u,v)=\int_0^T a(t;u(t),v(t))\,dt\qquad\forall u,\ v\in\mathcal{V},\qquad(9.47')$$

где

$$a(t;\varphi,\psi)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx+\int_\Omega a_0(x,t)\varphi\psi\,dx.$$

Возьмем $\Lambda=d/dt$, $G(s)\varphi(t)=\{\varphi(t-s)$ при $t\geqslant s$; 0 при $t\leqslant s\}$. Если $\mathcal{K}$ — *замкнутое выпуклое подмножество* $\mathcal{V}$, *т. е.* $\mathcal{K}$ *удовлетворяет* (9.10), то из теорем 9.2 и 9.4 следует *существование и единственность такого* $u\in\mathcal{K}$, *что*

$$(\mathcal{A}u,v-u)+(v',v-u)\geqslant(f,v-u)\quad(f\ \text{задано в}\ \mathcal{V}')\qquad(9.48)$$

для любого v, удовлетворяющего условиям

$$v\in\mathcal{K},\ v'\in L^2(0,T;V')=\mathcal{V}',\quad v(0)=0\ ●\qquad(9.49)$$

Пример 9.4. Возьмем

$$\begin{gathered} V = H^1(\Omega), \quad \mathscr{K} = \{v \mid v \in \mathscr{V}',\ v(t) \in K \text{ почти всюду}\}, \\ K = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\}\text{[1]}, \end{gathered} \tag{9.50}$$

$$(f, v) = \int_Q f_0 v\,dx\,dt + \int_\Sigma g v\,d\Sigma, \tag{9.51}$$

где $f_0 \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$[2].

Решение неравенства (9.48) будет «слабым» решением задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f_0 \quad \text{в} \quad Q, \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} \geqslant g \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} - g \right) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \end{gathered} \tag{9.52}$$

●

Пример 9.5. Возьмем

$$\begin{gathered} V = H_0^1(\Omega), \quad \mathscr{K} = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v(t) \in K \text{ почти всюду}\}, \\ K = \{v \mid v \in V,\ |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant 1 \text{ почти всюду в } \Omega\}, \end{gathered} \tag{9.53}$$

$$(f, v) = \int_Q f v\,dx\,dt, \quad f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \tag{9.54}$$

Решение неравенства (9.48) будет «слабым» решением задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \quad \text{в области, где} \quad |\operatorname{grad}_x u(x, t)| < 1, \\ |\operatorname{grad}_x u(x, t)| = 1 \quad \text{в оставшейся части} \quad Q, \\ u(x, 0) = 0, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ u \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 1, \ldots, n, \text{ «непрерывны»} \\ \text{на границе раздела двух областей} \end{gathered} \tag{9.55}$$

●

Пример 9.6. Возьмем

$$\begin{gathered} V = H_0^1(\Omega), \quad \mathscr{K} = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v(t) \in K \text{ почти всюду}\}, \\ K = \{v \mid v \in V,\ v(x) \geqslant \psi(x) \text{ почти всюду в } \Omega\}, \\ \psi \text{ задано в } H^1(\Omega), \quad \psi \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \end{gathered} \tag{9.56}$$

и функция f такая же, как в (9.54).

---

[1] Следовательно, $\mathscr{K} = \{v \mid v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),\ v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$.

[2] Можно ослабить это условие, потребовав, например, чтобы $g \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$.

Решение неравенства (9.48) будет «слабым» решением задачи[1])

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+Au=f \text{ в той области, где } u(x,t)>\psi(x),\\ u=\psi \text{ в оставшейся части } Q,\\ u(x,0)=0, \quad u=0 \text{ на } \Sigma,\\ u \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n, \text{ «непрерывны»}\\ \text{на границе раздела двух областей} \bullet\end{gathered} \tag{9.57}$$

Пример 9.7 (ср. п. 8.9).

$$\begin{gathered}V=H^1(\Omega), \quad \mathscr{K}=\{v \mid v\in\mathscr{V},\ v(t)\in K \text{ почти всюду}\},\\ K=\left\{v \mid v\in H^1(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_n}-\Delta_{x'}v\geqslant 0,\quad x'=\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\right\},\end{gathered} \tag{9.58}$$

$$(f,v)=\int_Q fv\,dx\,dt, \quad f\in L^2(Q). \tag{9.59}$$

Решение неравенства (9.48) будет «слабым» решением задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+Au=f \text{ в той области, где } \frac{\partial u}{\partial x_n}-\Delta_{x'}u>0,\\ \frac{\partial u}{\partial x_n}-\Delta_{x'}u=0 \text{ в оставшейся части},\\ u(x,0)=0,\\ \text{«условия сопряжения» на границе раздела}^{2)} \bullet\end{gathered} \tag{9.60}$$

Пример 9.8. Пусть $\Gamma_1(t)$ — семейство подмножеств Γ (обладающих емкостью), причем

$$\Gamma_1(t)\supset\Gamma_1(t'), \quad \text{если} \quad t\leqslant t'. \tag{9.61}$$

Возьмем

$$\begin{gathered}\mathscr{V}=L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\ \mathscr{K}=\{v \mid v\in\mathscr{V},\ v(t)\geqslant 0 \text{ на } \Gamma_1(t)\}.\end{gathered} \tag{9.62}$$

Благодаря (9.61) выполнено условие (9.20) и, следовательно, мы имеем неравенство (9.48); соответствующее решение u

---

[1]) Приведенная ниже интерпретация носит совершенно *формальный* характер.

[2]) Ср. с проблемой 11.19.

является «слабым» решением задачи (f берется, как в (9.59))

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \quad \text{в} \quad Q, \\
u \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_1 = \{x, t \mid x \in \Gamma_1(t)\}, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \\
u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1, \\
u(x, 0) = 0 \bullet
\end{gathered} \tag{9.63}$$

9.5.2. Аналогичные задачи в L^p, $2 < p < \infty$ 1). Имеется целая серия приложений, аналогичных приведенным выше, когда в качестве $\mathscr{A}$ берется, например, оператор 2), определенный равенством $(\mathscr{A}u)(t) = A(u(t))$, где

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + |\varphi|^{p-2}\varphi. \tag{9.64}$$

На этот раз в качестве V выбирается замкнутое подпространство в $W^{1,p}(\Omega)$, такое, что

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset V \subseteq W^{1,p}(\Omega), \tag{9.65}$$

и

$$\mathscr{V} = L^p(0, T; V), \quad \mathscr{H} = L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q).$$

Говоря более точно, оператор $\mathscr{A}$ определяется равенствами

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}u, v) &= \int_0^T a(u(t), v(t))\, dt, \\
a(\varphi, \psi) &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx + \int |\varphi|^{p-2} \varphi\psi\, dx.
\end{aligned} \tag{9.66}$$

Как и в п. 9.5.1, возьмем $\Lambda = d/dt$ с областью определения, состоящей из функций, равных 0 при $t = 0$. Как и выше, из теорем 9.2, 9.4 будет следовать *существование и единственность*

---

1) В случае $1 < p < 2$ можно пытаться использовать теорему 9.2, однако при этом возникают дополнительные трудности, которые преодолены в работе Брезиса [5].

2) Используя примеры псевдомонотонных операторов, введенных в § 2, мы очевидным образом получим массу возможных обобщений.

функции $u \in \mathscr{K}$, *удовлетворяющей* (9.48), *если* $\mathscr{K}$ *удовлетворяет* (9.20) ●

Ограничимся примером, аналогичным примеру 9.4. Подобным образом можно рассматривать ситуации, соответствующие примерам 9.5—9.8.

Пример 9.9.

$$V = W^{1, p}(\Omega), \quad \mathscr{K} = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v(t) \in K \text{ почти всюду}\},$$
$$K = \{v \mid v \in W^{1, p}(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Решается (в «слабом» смысле) следующая задача:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2} u = f \quad \text{в} \quad Q, \\ &u \geqslant 0 \text{ на } \Sigma, \\ &\mathscr{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ &u \cdot \mathscr{T}(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ &u(x, 0) = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \bullet \end{aligned} \tag{9.67}$$

9.5.3. Периодические решения. Пространство $\mathscr{V}$, оператор $\mathscr{A}$ и выпуклое множество $\mathscr{K}$ мы возьмем такими же, как в предыдущих примерах.

Мы опять возьмем $\Lambda = d/dt$, но с другой областью определения, отвечающей *периодическим решениям*; таким образом, полугруппа $G(s)$ определяется с помощью (7.55), причем

$$D(\Lambda; \mathscr{V}') = \left\{ v \mid v \in \mathscr{V}',\ \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathscr{V}',\ v(0) = v(T) \right\}. \tag{9.68}$$

Предыдущие примеры применимы, если $G(s)\mathscr{K} \subset \mathscr{K}$, что выполняется во всех предшествующих случаях, *за исключением примера* 9.8.

Общая теория применительно к примеру, аналогичному 9.9, дает следующее:

Пример 9.10. Существует единственное «слабое» решение задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2} u = f, \\ &u \geqslant 0 \text{ на } \Sigma, \quad \mathscr{T}(u) \geqslant 0 \text{ на } \Sigma, \quad u \cdot \mathscr{T}(u) = 0 \text{ на } \Sigma, \\ &u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{9.69}$$

9.5.4. ПАРНЫЕ ЗАДАЧИ. Рассмотрим ситуацию п. 7.5 с

$$V_i = W^{1,\,p}(\Omega) = V, \quad 2 < p < \infty, \quad H = L^2(\Omega),$$

$$A_i(\varphi) = A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + |\varphi|^{p-2}\varphi, \ i = 1, 2. \tag{9.70}$$

Возьмем

$$\begin{gathered} \mathscr{V} = L^p(0, T; V) \times L^p(0, T; V), \\ \mathscr{A}u = \{A(u_1) - u_2, \ A(u_2) + u_1\} \end{gathered} \tag{9.71}$$

и полугруппу $G(s)$, определенную с помощью (7.59).

Возьмем далее выпуклое множество $\mathscr{K}$, определяемое условиями

$$\mathscr{K} = \{v \mid v_1, \ v_2 \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Sigma\}. \tag{9.72}$$

Тогда выполнено условие (9.20), а следовательно, к (9.48) применимы теоремы 9.2 и 9.4. Из них следует *существование единственного «слабого» решения следующих неравенств*:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial t} + A(u_1) - u_2 = f_1, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial t} + A(u_2) + u_1 = f_2, \\ u_1 \geqslant 0, \quad u_2 \geqslant 0, \quad \mathscr{T}(u_1) \geqslant 0, \quad \mathscr{T}(u_2) \geqslant 0\,^{1)}, \\ u_1 \cdot \mathscr{T}(u_1) = 0, \quad u_2 \cdot \mathscr{T}(u_2) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, T) = 0, \quad x \in \Omega \bullet \end{gathered} \tag{9.73}$$

Замечание 9.4. Естественно, что для той же самой системы операторов можно, наряду с (9.72), рассматривать и другие системы выпуклых множеств ! ●

Замечание 9.5. Теми же методами можно конструировать задачи для неравенств, связанных с операторами, введенными в п. 7.6 ●

9.5.5. ОДНОСТОРОННИЕ ЗАДАЧИ НА МНОГООБРАЗИИ. Пусть теперь мы находимся в условиях § 4. Возьмем

$$V = W^{1/p',\,p}(\Gamma), \quad H = L^2(\Gamma), \quad V' = W^{-1/p',\,p'}(\Gamma),$$

$$\mathscr{V} = L^p(0, T; V), \quad \mathscr{H} = L^2(0, T; H) = L^2(\Sigma)\,^{2)}, \quad 2 < p < \infty,$$

и определим $\mathscr{A}$ следующим ниже способом.

---

[1] $\mathscr{T}$ определяется так же, как в (9.67).

[2] Не обязательно $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$.

Положим, чтобы избежать недоразумений в обозначениях,

$$B(\varphi)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+|\varphi|^{p-2}\varphi. \tag{9.74}$$

Для $g\in W^{1/p',\,p}(\Gamma)=V$ решим задачу

$$B(w)=0,\quad w|_\Gamma=g,\quad w\in W^{1,\,p}(\Omega), \tag{9.75}$$

и далее положим

$$A(g)=\mathscr{T}(w)=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\cos(n,\ x_i). \tag{9.76}$$

Как и в § 4, можно проверить, что A: $V\to V'$ является семинепрерывным монотонным оператором и, кроме того,

$$(A(g),\ g)_\Gamma=(\mathscr{T}(w),\ w)_\Gamma=\|w\|^p_{W^{1,\,p}(\Omega)}\geqslant\alpha\|g\|^p_V,\quad \alpha>0. \tag{9.77}$$

Теперь в качестве $\mathscr{A}$ возьмем оператор, определяемый равенством

$$(\mathscr{A}u)(t)=A(u(t)),\quad u\in\mathscr{V},$$

и возьмем $\Lambda=d/dt$ с областью определения, состоящей из функций, равных 0 при $t=0$.

Пусть далее

$$\mathscr{K}=\{v\mid v\in\mathscr{V},\ v\geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Sigma\}. \tag{9.78}$$

Можно применить теоремы 9.2, 9.4. *Мы получим существование и единственность «слабого» решения задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}(u)-f\geqslant 0,\quad u\geqslant 0,\\ u\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}(u)-f\right)=0\quad\text{на}\quad\Sigma,\\ u(x,\ 0)=0,\quad x\in\Gamma.\end{gathered} \tag{9.79}$$

Заменив $\mathscr{A}$ его выражением с помощью $\mathscr{T}$, мы увидим, что получили существование и единственность «слабого» решения задачи

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)+|w|^{p-2}w=0 \quad \text{в} \quad Q,\\
&w\geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma,\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+\mathcal{T}(w)\geqslant f \quad \text{на} \quad \Sigma^{1)},\\
&w\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\mathcal{T}(w)-f\right)=0 \quad \text{на} \quad \Sigma,\\
&w(x,\ 0)=0, \quad x\in\Gamma \text{●}
\end{aligned} \tag{9.80}$$

Замечание 9.6. Таким же образом решается «периодический» случай, в котором последнее из условий (9.80) заменяется условием $w(x,\ 0)=w(x,\ T),\ x\in\Gamma$ ●

9.5.6. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА. После всех приведенных выше примеров естественно поставить вопрос о том, какие имеются *задачи для неравенств, связанных с нелинейными операторами, изученными в предыдущих параграфах* (см. проблемы 11.17, 11.20, 11.21, 11.22). Здесь мы приведем примеры[2] задач для неравенств, связанных с оператором (см. п. 3.2)

$$\varphi\to\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right), \qquad 2<p<\infty.$$

Мы используем методы п. 3.2 (замена основного пространства). Возьмем

$$\begin{aligned}
&H=H^{-1}(\Omega), \qquad V=L^p(\Omega),\\
&a(u,\ v)=\frac{1}{(p-1)}\int_{\Omega}|u|^{p-2}uv\,dx,\\
&\mathcal{V}=L^p(0,\ T;\ V), \qquad \mathcal{H}=L^2(0,\ T;\ H),\\
&\int_0^T a(u(t),\ v(t))\,dt=(\mathcal{A}(u),\ v) \quad \forall u,\ v\in\mathcal{V}^{3)}.
\end{aligned}$$

---

[1] $\mathcal{T}(w)=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\cos(n,\ x_i).$

[2] Мы не касаемся вопроса о том, возникают ли эти примеры в приложениях.

[3] Где через $(\mathcal{A}(u),\ v)$ обозначено скалярное произведение между $\mathcal{A}(u)\in\mathcal{V}'$ и $v\in\mathcal{V}$, причем *пространство $\mathcal{H}$ отождествляется со своим сопряженным*.

Чтобы упростить запись, положим

$$G\varphi = (-\Delta)^{-1}\varphi, \quad -\Delta\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \text{ является изоморфизмом.} \tag{9.81}$$

Теперь мы введем следующие выпуклые множества:

$$\mathscr{K}_1 = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ G(v(t)) \geqslant 0 \text{ почти всюду}\}, \tag{9.82}$$

$$\mathscr{K}_2 = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v(t) \geqslant 0 \text{ почти всюду}\}^{1)}, \tag{9.83}$$

которые являются *выпуклыми замкнутыми конусами в* $\mathscr{V}$.

Взяв Λ, как в п. 9.5.5, мы, следовательно, установим существование и единственность таких $u_i \in \mathscr{K}_i$, что

$$(v', v - u_i) + (\mathscr{A}(u_i), v - u_i) \geqslant (f, v - v_i) \quad \forall v \in \mathscr{K}_i \cap D(\Lambda; \mathscr{V}'), \tag{9.84}$$

где f принадлежит $\mathscr{V}'$ и определяется равенством

$$(f, v) = \int_Q f(Gv)\,dx\,dt, \quad f \in L^{p'}(Q). \tag{9.85}$$

Неравенство (9.84) можно записать в более явном виде:

$$\int_Q \frac{\partial v}{\partial t} G(v - u_i)\,dx\,dt + \frac{1}{(p-1)} \int_Q |u_i|^{p-2} u_i (v - u_i)\,dx\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_Q fG(v - u_i)\,dx\,dt. \tag{9.84'}$$

Формально[2] эти неравенства можно трактовать как

$$\int_Q \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} Gv + \frac{1}{(p-1)} |u_i|^{p-2} u_i v - fGv\right) dx\,dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathscr{K}_i, \tag{9.86}$$

причем равенство достигается при $v = u_i$●

Случай выпуклого множества $\mathscr{K}_1$. Перепишем (9.86) в виде

$$\int_Q \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta\left(\frac{1}{(p-1)} |u_1|^{p-2} u_1\right) - f\right) Gv\,dx\,dt \geqslant 0,$$

---

[1] Очевидно, что, исходя из этих двух примеров, можно сконструировать бесконечное множество вариантов.

[2] Все это можно обосновать при более сильных условиях на f, используя результаты следующего п. 9.6.

откуда следует *существование и единственность «слабого» решения задачи*

$$
\begin{aligned}
& G(u_1(t)) \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q, \\
& \frac{\partial u_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_1|^{p-2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) - f \geqslant 0 \text{ в } Q, \\
& G(u_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_1|^{p-2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) - f\right) = 0, \\
& u_1 = 0 \text{ на } \Sigma \text{ и при } t = 0.
\end{aligned}
\tag{9.87}
$$

Случай выпуклого множества $\mathcal{K}_2$. Перепишем (9.86) в виде

$$
\int_Q \left(G\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - f\right) + \frac{1}{(p-1)}|u_2|^{p-2}u_2\right) v\,dx\,dt \geqslant 0,
$$

откуда следует *существование и единственность «слабого» решения задачи*

$$
\begin{aligned}
& u_2 \geqslant 0 \text{ в } Q, \\
& G\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - f\right) + \frac{1}{(p-1)}|u_2|^{p-2}u_2 \geqslant 0, \\
& u_2\left(G\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - f\right) + \frac{1}{(p-1)}|u_2|^{p-2}u_2\right) = 0, \\
& u_2 = 0 \text{ на } \Sigma \text{ и при } t = 0.
\end{aligned}
\tag{9.88}
$$

9.6. Теоремы о гладкости

Результаты п. 9.3 доставляют нам условия существования «слабого» решения неравенства (9.17).

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях можно *с помощью теорем о гладкости* перейти к «сильным» решениям в смысле (9.12), (9.13), (9.14).

9.6.1. Теорема о гладкости; первый метод. Сначала мы рассмотрим *гильбертов* случай: $\mathcal{V}$ является гильбертовым пространством, а оператор $\mathcal{A}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ линейным и коэрцитивным. Сделаем *следующее предположение* (ср. с (8.68))[1]:

для заданного u из $\mathcal{K}$ можно выбрать такое $g \in \mathcal{H}$, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}')$, удовлетворяющее уравнению $\varepsilon(\Lambda u_\varepsilon + \mathcal{A}u_\varepsilon) + u_\varepsilon = u + \varepsilon g$. (9.89)

---

[1] Член g, который мы здесь «вставляем» (по сравнению с (8.68)), можно ввести также в условие (8.68); см. более общий случай у Брезиса — Стампаккьи [1].

Будет доказана

Теорема 9.5. *Предположим, что* $\mathscr{V}$ — *гильбертово пространство,* $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$, *а* $\mathscr{A}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ — *линейный коэрцитивный оператор. Предположим, что выполнено условие* (9.89). *Тогда решение и неравенства* (9.17) *удовлетворяет включению*

$$\Lambda u + \mathscr{A} u \in \mathscr{H}\text{[1]}, \tag{9.90}$$

если f *принадлежит* $\mathscr{H}$.

Доказательство. Из (9.17) следует, что

$$(\Lambda v + \mathscr{A} v - f, v - u) = \underbrace{(\Lambda v + \mathscr{A} u - f, v - u)}_{(\geqslant 0 \text{ в силу } (9.17))} + \underbrace{(\mathscr{A}(v-u), v-u)}_{(\geqslant 0)} \geqslant 0. \tag{9.91}$$

Подставляя в (9.91) функцию $v = u_\varepsilon$ из (9.89), получим

$$\varepsilon(\Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon - f,\ g - (\Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon)) \geqslant 0,$$

откуда (обозначая через $|\ \ |$ норму в $\mathscr{H}$) имеем

$$|\Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon|^2 \leqslant (f + g,\ \Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon) - (f, g),$$

и, следовательно,

$$\Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon \text{ ограничены в } \mathscr{H}. \tag{9.92}$$

Далее, из (9.89) вытекает, что

$$|u_\varepsilon - u| \leqslant \varepsilon(|\Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon| + |g|) \leqslant c\varepsilon, \tag{9.93}$$

и, следовательно,

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{в} \quad \mathscr{H}. \tag{9.94}$$

Однако, так как $\Lambda^* \in \mathscr{L}(D(\Lambda^*; \mathscr{H}); \mathscr{H})$, то $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathscr{H}; D(\Lambda^*; \mathscr{H})')$ и из (9.94) вытекает, что

$$\Lambda u_\varepsilon \to \Lambda u \quad \text{в} \quad D(\Lambda^*; \mathscr{H})'. \tag{9.95}$$

С другой стороны, если $D(\mathscr{A}^*; \mathscr{H})$ — область определения оператора $\mathscr{A}^*$ (сопряженного к $\mathscr{A}$) в $\mathscr{H}$, то имеем: $\mathscr{A}^* \in \mathscr{L}(D(\mathscr{A}^*; \mathscr{H}); \mathscr{H})$, следовательно, $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}; D(\mathscr{A}^*; \mathscr{H})')$, и из (9.94) вытекает, что

$$\mathscr{A} u_\varepsilon \to \mathscr{A} u \quad \text{в} \quad D(A^*; \mathscr{H})'. \tag{9.96}$$

Итак, $\Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon \to \Lambda u + \mathscr{A} u$ в $D(\Lambda^*; \mathscr{H})' + D(\mathscr{A}^*; \mathscr{H})'$, и в силу (9.92) можно выделить такую подпоследовательность (мы сохраним для нее обозначение u_ε), что

$$\Lambda u_\varepsilon + \mathscr{A} u_\varepsilon \to \chi \text{ в } \mathscr{H} \text{ слабо}$$

---

[1] Поскольку $\Lambda^* \in \mathscr{L}(D(\Lambda^*; \mathscr{V}'); \mathscr{V}')$, то $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathscr{V}; D(\Lambda^*; \mathscr{V}')')$, так что включение (9.90) имеет смысл.

и, следовательно,

$$\Lambda u + \mathcal{A} u = \chi \in \mathcal{H}_\bullet$$

Следствие 9.1. *В условиях теоремы* 9.5 *«слабое» решение неравенства* (9.17) *является «сильным» решением в смысле* (9.12), (9.13), (9.14).

Доказательство. 1) Из (9.90) следует, что Λu принадлежит $\mathcal{V}'$ (при этом Λ понимается как элемент $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ D(\Lambda^*;\ \mathcal{V}')')$; тогда $u \in D(\Lambda;\ \mathcal{V}')$. Действительно, если $\rho_n(s)$ — регуляризующая последовательность функций с компактными носителями в $]0, \infty[$ и если

$$G(\rho_n) = \int\limits_0^\infty G(s)\rho_n(s)\,ds,$$

то

$$G(\rho_n) u \to u \text{ в } \mathcal{V}, \quad G(\rho_n) u \in D(\Lambda;\ \mathcal{V}') \quad (\text{и даже } D(\Lambda^\infty;\ \mathcal{V}))$$

и

$$\Lambda G(\rho_n) u = G(\rho_n) \Lambda u \to \Lambda u \text{ в } \mathcal{V}',$$

откуда следует наше утверждение.

2) Для произвольного w из $\mathcal{K} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}')$ можно в (9.17) взять

$$v = (1-\theta) u + \theta w, \quad \theta \in]0, 1[$$

(поскольку $u \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}')$), и из (9.17) после деления на θ следует, что

$$(\Lambda((1-\theta)u + \theta w),\ w-u) + (\mathcal{A} u,\ w-u) \geqslant (f,\ w-u).$$

Устремляя θ к нулю, получим

$$(\Lambda u + Au - f,\ w-u) \geqslant 0 \quad \forall w \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}'). \tag{9.97}$$

Однако, в силу предположения о согласовании (9.18), пересечение $\mathcal{K} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}')$ плотно в $\mathcal{K}$, следовательно, из неравенства (9.97) вытекает (9.14)$_\bullet$

Приложение. Приведем пример, в котором выполняется предположение (9.89). Рассмотрим ситуацию п. 9.5.1; пусть заданы

$$\begin{aligned} &\psi \in H^2(\Omega), \quad \psi \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \\ &K = \{v \mid v \geqslant \psi \text{ почти всюду в } \Omega,\ v \in H_0^1(\Omega)\}, \end{aligned} \tag{9.98}$$

и пусть

$$V = H_0^1(\Omega),\ \mathcal{V} = L^2(0, T;\ V),$$
$$\mathcal{K} = \{v \mid v \in \mathcal{V},\ v(t) \in K \text{ почти всюду}\}.$$

Далее предположим, что

$$A(t) = -\Delta \tag{9.99}$$

(это предположение не существенно и сделано только для упрощения).

Тогда имеет место условие (9.89)[1].

Действительно, возьмем

$$g = -\Delta\psi. \tag{9.100}$$

Нам нужно решить *параболическое уравнение*

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon\right) + u_\varepsilon = u - \varepsilon\Delta\psi \quad (\varepsilon > 0),\ u \in \mathscr{K}, \\ u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Sigma, \\ u_\varepsilon(x, 0) = 0,\end{gathered} \tag{9.101}$$

и показать, что $u_\varepsilon \in \mathscr{K}$, т. е. $u_\varepsilon \geqslant \psi$ почти всюду. С этой целью рассмотрим[2])

$$z_\varepsilon = \sup(\psi - u_\varepsilon, 0). \tag{9.102}$$

Мы можем записать (9.101) в виде (поскольку $\partial\psi/\partial t = 0$)

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}(\psi - u_\varepsilon) - \Delta(\psi - u_\varepsilon)\right] = u_\varepsilon - u. \tag{9.103}$$

Умножив обе части (9.103) скалярно на z_ε, найдем (возможность интегрирования по частям будет обоснована ниже):

$$\varepsilon\int_Q\left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi - u_\varepsilon)\cdot z_\varepsilon + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi - u_\varepsilon)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_i}\right)dx\,dt = (u_\varepsilon - u, z_\varepsilon). \tag{9.104}$$

Однако можно проверить, что

$$\begin{gathered}\int_Q \frac{\partial}{\partial t}(\psi - u_\varepsilon)\cdot z_\varepsilon\,dx\,dt \geqslant 0, \\ \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi - u_\varepsilon)\cdot\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx\,dt = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\psi \geqslant u_\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi - u_\varepsilon)\right)^2 dx\,dt \geqslant 0,\end{gathered} \tag{9.105}$$

---

[1]) Что касается более систематического изучения ситуаций, в которых выполнены условия такого рода, см. Брезис — Пази [1].

[2]) Приводимое доказательство аналогично доказательству принципа максимума для слабых решений параболических уравнений.

и из (9.104) следует, что

$$(u_\varepsilon - u,\ z_\varepsilon) = \int\limits_{\psi \geqslant u_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) z_\varepsilon \, dx \, dt \geqslant 0.$$

Но если $\psi \geqslant u_\varepsilon$, то $u_\varepsilon \leqslant \psi \leqslant u$, так что $u_\varepsilon - u \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\psi \geqslant u_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) z_\varepsilon \, dx \, dt \leqslant 0, \quad \text{откуда} \quad \int\limits_{\psi \geqslant u_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) z_\varepsilon \, dx \, dt = 0,$$

и потому

$$(u_\varepsilon - u)(\psi - u_\varepsilon) = 0 \quad \text{почти всюду, если } \psi \geqslant u_\varepsilon.$$

Таким образом, либо $\psi = u_\varepsilon$, либо $u_\varepsilon = u \geqslant \psi$, так что $u_\varepsilon = \psi$ во всех случаях, и тем самым доказан требуемый результат (в предположении, что обоснованы равенства (9.104) и (9.105)).

Положим $\psi - u_\varepsilon = g$; тогда

$$\begin{gathered} g \in W, \\ W \text{ состоит из таких } g \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \\ \text{что } g' \in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),\ g(0) = 0; \end{gathered} \tag{9.106}$$

и

$$z_\varepsilon = g^+, \text{ так что } g^+ \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)).$$

Интеграл в левой части (9.104) можно записать в виде $\langle g',\ g^+ \rangle$ — скалярного произведения между $L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$ и $L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$.

Тогда неравенства (9.105) будут следствиями неравенства

$$\langle g',\ g^+ \rangle \geqslant 0 \quad \forall g \in W. \tag{9.107}$$

Предположим на минуту, что

$$\begin{gathered} g \to g^+ \text{ порождает (нелинейное) непрерывное} \\ \text{отображение } W \to L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,\ T];\ L^2(\Omega)). \end{gathered} \tag{9.108}$$

Возьмем далее $g_j \in C^1(\bar{Q})$, $g_j = 0$ на Σ и при $t = 0$, $g_j \to g$ в W. Тогда имеем:

$$\langle g_j',\ g_j^+ \rangle = \int\limits_{\substack{Q \\ g_j \geqslant 0}} \frac{\partial g_j}{\partial t} \cdot g_j \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{\Omega \\ g_j(x,\,T) \geqslant 0}} g_j(x,\ T)^2 \, dx \geqslant 0,$$

а поскольку $\langle g_j',\ g_j^+ \rangle \to \langle g',\ g^+ \rangle$ (в силу (9.108)), то приходим к (9.107).

Итак, нам осталось доказать (9.108) или эквивалентное утверждение

$g \to |g|$ (здесь $|g|$ — абсолютное значение g)

является непрерывным отображением

$$W \to L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,\ T];\ L^2(\Omega)). \qquad (9.109)$$

Как хорошо известно, $g \to |g|$ является непрерывным отображением $L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$ в себя, и нам достаточно проверить, что

a) $|g|$ принадлежит $C^0([0,\ T];\ L^2(\Omega))$;

b) $g \to |g|$ является непрерывным отображением $W \to C^0(0,\ T;\ L^2(\Omega))$.

Ввиду неравенства

$$||g(x,\ t)|-|g(x,\ t_0)|| \leqslant |g(x,\ t)-g(x,\ t_0)|,$$

имеем $\| |g(t)| - |g(t_0)| \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| g(t) - g(t_0) \|_{L^2(\Omega)}$, откуда вытекает a) (поскольку $W \subset C^0([0,\ T];\ L^2(\Omega))$); далее, для $g,\ h \in W$

$$\| |g(t)| - |h(t)| \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| g(t) - h(t) \|_{L^2(\Omega)},$$

откуда

$$\| |g| - |h| \|_{C^0([0,\ T];\ L^2(\Omega))} \leqslant \| g - h \|_{C^0([0,\ T];\ L^2(\Omega))} \leqslant c \| g - h \|_W,$$

т. е. приходим к b) ●

Теперь нами будет доказана

Теорема 9.6. *Предположим, что имеют место* (9.98) *и* (9.99), *где* Ω — *открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей. Для заданного* f *из* $L^2(Q)$ *существует, и притом единственная, функция* u, *удовлетворяющая следующим условиям:*

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q) \quad (\forall i,\ j), \qquad (9.110)$$

$$\begin{aligned} & u \geqslant \psi, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \geqslant 0, \\ & (u-\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f\right) = 0 \text{ в } Q, \end{aligned} \qquad (9.111)$$

$$u = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma \quad \textit{и при} \quad t = 0. \qquad (9.112)$$

Доказательство. Мы используем теорему 9.5; возможность ее применения будет следовать из приведенных ниже рассуждений. Полагая

$$a(u,\ v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

мы получим существование и единственность функции $u \in \mathscr{K} \cap D(\Lambda; \mathscr{V}')$, удовлетворяющей неравенству

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right)+\int_0^T a(u, v-u)\,dt \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in \mathscr{K}. \tag{9.113}$$

В силу (9.90) мы получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \in L^2(Q);$$

это включение вместе с условиями $u|_\Sigma = 0$ и $u(x, 0) = 0$ приводит к (9.110).

Далее перепишем (9.13) в виде

$$\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f\right)(v-u)\,dx\,dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathscr{K}, \quad \text{т. е.} \quad v \geqslant \psi,$$

откуда легко следует (9.111)●

9.6.2. Теорема о гладкости; второй метод. Мы рассмотрим ситуацию теоремы 9.2 и сделаем следующие предположения (соответствующие примеры будут приведены ниже):

$$(\mathscr{A}(u) - \mathscr{A}(v), u-v) \geqslant c\|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathscr{V}, \tag{9.114}$$

$$G(s)\mathscr{A}(v) = \mathscr{A}(G(s)v) \quad \forall v \in \mathscr{V}, \quad \forall s \geqslant 0, \tag{9.115}$$

существует такое $\rho > 0$, что

$$G(s)v + G^*(s)v - G^*(s)G(s)v + \\ + (\rho - 1)v \in \rho\mathscr{K} \quad \forall v \in \mathscr{K}, \quad \forall s \geqslant 0. \tag{9.116}$$

Очевидно, что из (9.114) вытекает (9.42) и, следовательно, неравенство (9.17) допускает *единственное* решение. Имеет место

Теорема 9.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.2 *и, кроме того, условия* (9.114), (9.115), (9.116). *При этих условиях для* $f \in D(\Lambda; \mathscr{V}')$ *существует единственное решение неравенства* (9.17), *сильное в смысле* (9.12), (9.13), (9.14). *Более того,*

$$u \in D(\Lambda; \mathscr{V}). \tag{9.117}$$

Доказательство. Вернемся к доказательству теоремы 9.2. Мы будем исходить из функции u_h — решения (9.29) (единственного в рассматриваемом нами случае) и попытаемся для u_h установить более сильные оценки, чем при доказательстве теоремы 9.2, Из (9.29) мы выведем после умножения на ρ (это ρ берется из условия (9.116)), что

$$\left(\frac{I-G(h)}{h}u_h+\mathcal{A}(u_h)-f,\ \rho v-\rho u_h\right)\geqslant 0. \tag{9.118}$$

Выберем v из равенства

$$\begin{aligned}\rho v&=G(s)u_h+G^*(s)u_h-G^*(s)G(s)u_h+(\rho-1)u_h=\\&=\rho u_h-(G^*(s)-I)(G(s)-I)u_h,\end{aligned}$$

что законно ввиду (9.116). Из (9.118) следует, что

$$\left((G(s)-I)\left(\frac{I-G(h)}{h}u_h+\mathcal{A}(u_h)-f\right),\ (G(s)-I)u_h\right)\leqslant 0. \tag{9.119}$$

Используя (9.115), мы из (9.119) выведем, что

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}(G(s)u_h)-\mathcal{A}(u_h),\ G(s)u_h-u_h)+\\&\qquad+\left(\frac{I-G(h)}{h}(G(s)u_h-u_h),\ G(s)u_h-u_h\right)\leqslant\\&\qquad\qquad\leqslant(G(s)f-f,\ G(s)u_h-u_h).\end{aligned} \tag{9.120}$$

Второй член в левой части (9.120) $\geqslant 0$, поскольку $G(h)$ является сжимающей полугруппой в $\mathcal{H}$, так что с помощью (9.114) мы выведем из (9.120) неравенство

$$c\,\|G(s)u_h-u_h\|^2_{\mathcal{V}}\leqslant(G(s)f-f,\ G(s)u_h-u_h),$$

откуда

$$\|G(s)u_h-u_h\|_{\mathcal{V}}\leqslant\frac{1}{c}\|G(s)f-f\|_{\mathcal{V}'}. \tag{9.121}$$

Но так как $f\in D(\Lambda;\ \mathcal{V}')$, то в силу (9.121)

$$\left\|\frac{G(s)u_h-u_h}{s}\right\|_{\mathcal{V}}\leqslant\text{const}\quad\forall h,\ s\geqslant 0, \tag{9.122}$$

откуда следует включение $u\in D(\Lambda;\ \mathcal{V})$; доказательство заканчивается таким же образом, как в теореме 9.5●

Замечание 9.7. Можно ослабить (довольно просто) предположения (9.115), (9.116), не меняя утверждение теоремы. Можно заменить (9.115) условием

$$\begin{aligned}&\forall v\in\mathcal{K}\ \text{существует такое}\ \tau\geqslant 0,\ \text{что}\\&|(\mathcal{A}(G(s)v)-G(s)(\mathcal{A}(v)),\ G(s)v-v)|\leqslant\\&\qquad\leqslant\tau s\|G(s)v-v\|_{\mathcal{V}}\quad\forall s\geqslant 0,\end{aligned} \tag{9.123}$$

а (9.116) условием

$$\begin{aligned}&\text{существует такое } \rho > 0, \text{ что}\\ &G(s)v + G^*(s)v - G^*(s)G(s)v +\\ &+(\rho-1)v \in (\rho+\theta(s))\mathcal{K} \quad \forall v \in \mathcal{K},\\ &\forall s \geqslant 0, \quad \text{где} \quad |\theta(s)| \leqslant Cs^2.\end{aligned} \tag{9.124}$$

См. Брезис [1]●

Приложение. Рассмотрим ситуацию п. 9.5.1, причем пусть

$$A(t) = A \text{ не зависит от } t\,^{1)},$$

а полугруппа $G(s)$ определяется из равенства

$$G(s)\varphi(t) = \{\varphi(t-s) \text{ при } t \geqslant s;\ 0 \text{ при } t < s\}.$$

Тогда имеют место (9.114) и (9.115).

Рассмотрим случай примера 9.4 (п. 9.5.1). Проверим далее, что условие (9.116) выполняется при $\rho = 2$, т. е. что

$$G(s)v + G^*(s)v - G^*(s)G(s)v + v \in 2\mathcal{K} = \mathcal{K}\,^{2)}. \tag{9.125}$$

Но $G(s)v \in \mathcal{K}$; $G^*(s)$ определяется равенством

$$G^*(s)\varphi(t) = \{\varphi(t+s) \text{ при } t \leqslant T-s,\ 0 \text{ при } t \geqslant T-s\},$$

следовательно, $G^*(s)v \in \mathcal{K}$ и

$$G^*(s)G(s)v(t) = \{v(t), \text{ если } t \in [s, T-s],\ 0 \text{ для остальных } t\},$$

так что $v - G^*(s)G(s)v \in \mathcal{K}$, откуда следует (9.125).

Таким образом, мы можем применить теорему 9.7 и вывести следующее утверждение:

Теорема 9.8. *Пусть функция f принадлежит $L^2(Q)$, причем $\partial f/\partial t \in L^2(Q)$ и $f(x, 0) = 0$. Тогда существует, и притом только одна, функция u, удовлетворяющая условиям*

$$u, \ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ \frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \in L^2(Q) \quad \forall i, \tag{9.126}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f, \tag{9.127}$$

$$u \geqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \geqslant 0, \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{9.128}$$

$$u(x, 0) = 0 \,● \tag{9.129}$$

---

[1] Предположение (9.123) «сделано» ради тех случаев, в которых $A(t)$ зависит от t регулярно.

[2] Здесь $\mathcal{K}$ — конус с вершиной в начале координат; впрочем, это свойство не существенно для применения теоремы 9.7.

Замечание 9.8. Применяя метод п. 8.7.2, можно вывести (по крайней мере в том случае, когда Ω — полупространство), что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \in L^2(Q) \quad \forall i, j. \tag{9.130}$$

В самом деле, в силу (9.127): $Au = f - \partial u/\partial t = g$, и надо рассуждать таким же образом, как в п. 8.7.2, считая t фиксированным ●

9.7. Различные замечания

Замечание 9.9. *Ненулевые начальные данные.*

Рассмотрим задачу (9.3) при $u_0 \neq 0$.

Если u_0 *задается из* K, то наша задача моментально сводится к случаю «$u_0 = 0$»; действительно, полагая $u^* = u - u_0$ и $K^* = K - u_0$, мы тотчас получаем аналогичную задачу для u^*, причем $u^*(0) = 0$.

Это замечание является общим для задач для неравенств, связанных с оператором $\varphi \to \partial\varphi/\partial t + \mathscr{A}(\varphi)$, если $\mathscr{V} = L^p(0, T; V)$,

$$\mathscr{K} = \{v \mid v \in \mathscr{V}, \ v(t) \in K \text{ почти всюду}\},$$

$$K \text{ — выпуклое замкнутое множество в } V.$$

Однако предположение «$u_0 \in K$», как легко видеть, слишком ограничительно: в самом деле, в случае уравнений это соответствует тому, что $u_0 \in V$, в то время как «естественно» брать начальные данные $u_0 \in H$. По аналогии со случаем уравнений следует брать

$$u_0 \in \bar{K}^H = \text{замыкание } K \text{ в } H. \tag{9.131}$$

На этом пути возникают очень серьезные технические трудности, по поводу которых мы отсылаем к работе Брезиса [5] ●

Замечание 9.10. Другие свойства гладкости (и без дополнительных предположений) установлены другими методами в п. 6.2 гл. 3. См. также цитированную выше работу Брезиса ●

Замечание 9.11. Предположение о том, что $-\Lambda$ является инфинитезимальным производящим оператором некоторой полугруппы в $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{V}'$, не является необходимым. Более общие примеры можно найти ниже в § 10 ●

Замечание 9.12. Задачи для неравенств, связанных с *гиперболическими* или *корректными по Петровскому* операторами, будут изучены в § 3 и 7 гл. 3 ●

Замечание 9.13. Мы все время рассматривали пространства над $\mathbb{R}$. В случае векторных пространств над $\mathbb{C}$ следует заменить неравенство

$$(\mathscr{A}(u)-f,\ v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K$$

неравенством

$$\operatorname{Re}(\mathscr{A}(u)-f,\ v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K.$$

Можно также изучать, например, неравенства, связанные с уравнением Шредингера ●

Замечание 9.14. Приведем частичное обобщение на случай эволюционных неравенств результатов п. 8.8. Мы ограничимся одним *примером.*

Рассмотрим ситуацию примера 9.6 из п. 9.5.1, причем пусть $\psi=0$, так что

$$K=\{v\,|\,v\in H_0^1(\Omega),\ v\geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}, \tag{9.132}$$

и предположим, что коэффициенты оператора $A(t)=A$ не зависят от t[1]; следовательно,

$$a(u,\ v)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=(Au,\ v), \quad u,\ v\in H_0^1(\Omega). \tag{9.133}$$

Пусть f принадлежит $L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$, а $\mathscr{K}$ определяется условиями

$$\mathscr{K}=\{v\,|\,v\in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)),\ v(t)\in K \text{ почти всюду}\}.$$

Согласно теоремам 9.2 и 9.4, существует единственное $u\in\mathscr{K}$, такое, что

$$\begin{gathered}\int_0^T[(v',\ v-u)+a(u,\ v-u)-(f,\ v-u)]\,dt\geqslant 0\\ \forall v\in\mathscr{K},\quad v'\in L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)),\ v(0)=0.\end{gathered} \tag{9.134}$$

Мы собираемся *сравнивать* u с решением соответствующего *уравнения.* В этой связи пусть Ω_1 — произвольная подобласть Ω, пусть u_{Ω_1} — решение задачи

---

[1] Это предположение не существенно и сделано исключительно для простоты изложения.

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial t}+Au_{\Omega_1}=f_{\Omega_1}\,^{1)},\quad x\in\Omega_1,\quad t\in\,]0,\,T[,\\ u_{\Omega_1}\in L^2(0,\,T;\;H_0^1(\Omega_1)),\quad u_{\Omega_1}(x,\,0)=0, x\in\Omega_1,\end{gathered}\tag{9.135}$$

и пусть

$$\tilde{u}_{\Omega_1}=\begin{cases}u_{\Omega_1} & \text{при}\quad x\in\Omega_1,\\ 0 & \text{при}\quad x\in\Omega,\quad x\notin\Omega_1.\end{cases}\tag{9.136}$$

Имеет место

Теорема 9.9. *Если u (соответственно $\tilde{u}_{\Omega_1}$), удовлетворяет (9.134) (соответственно (9.135) и (9.136)), то*

$$u\geqslant\tilde{u}_{\Omega_1}\ \text{почти всюду в}\ Q=\Omega\times\,]0,\,T[.\tag{9.137}$$

Доказательство. 1) Пусть f_n — последовательность функций, таких, что

$$\begin{gathered}f_n,\,f_n'\in L^2(0,\,T;\;H^{-1}(\Omega)),\quad f_n(x,\,0)=0,\\ f_n\to f\quad\text{в}\quad L^2(0,\,T;\,H^{-1}(\Omega)),\quad n\to\infty;\end{gathered}$$

такая последовательность существует.

Пусть u_n и $\tilde{u}_{n,\,\Omega_1}$ — соответствующие решения.

Поскольку $u_n\to u$ (соответственно $\tilde{u}_{n,\,\Omega_1}\to\tilde{u}_{\Omega_1}$) в $L^2(0,\,T;\;H_0^1(\Omega))$ при $n\to\infty$, мы придем к (9.137), если покажем, что $u_n\geqslant\tilde{u}_{n,\,\Omega_1}$.

Таким образом, достаточно доказать (9.137) для f, удовлетворяющих условиям

$$f,\,f'\in L^2(0,\,T;\;H^{-1}(\Omega)),\quad f(x,\,0)=0.\tag{9.138}$$

2) Однако если выполнено (9.138), то в этой ситуации применима теорема 9.7, и решение u неравенства (9.134) удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}u\in L^2(0,\,T;\,V),\quad u'\in L^2(0,\,T;\,V),\quad V=H_0^1(\Omega),\\ u(0)=0,\\ \int_0^T[(u',\,v-u)+a(u,\,v-u)-(f,\,v-u)]\,dt\geqslant0\quad\forall v\in\mathscr{K}.\end{gathered}\tag{9.139}$$

Чтобы упростить запись, положим

$$\tilde{u}_{\Omega_1}=u_*;$$

---

[1] Через f_{Ω_1} обозначено сужение f на $\Omega_1\times\,]0,\,T[$.

имеем:

$$\begin{gathered}\int_0^T [(u'_*,\ v_*) + a(u_*,\ v_*) - (f,\ v_*)]\,dt = 0 \quad \forall v_* \in \mathcal{K}_*, \\ \mathcal{K}_* = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \\ \varphi = 0 \text{ почти всюду вне } \Omega_1 \times]0,\ T[\}.\end{gathered} \tag{9.140}$$

3) Поступим таким же образом, как в п. 8.8. Положим

$$w = \sup(u,\ u_*), \qquad w_* = \inf(u,\ u_*)$$

и заметим, что

$$w \in \mathcal{K}, \quad w_* \in \mathcal{K}_*, \quad w + w_* = u + u_*. \tag{9.141}$$

Полагая $v = w$ (соответственно $v_* = w_* - u_*$) в (9.139) (соответственно в (9.140)) и складывая, мы ввиду (9.141) получим

$$\int_0^T [(u' - u'_*,\ w - u) + a(u - u_*,\ w - u)]\,dt \geqslant 0,$$

откуда

$$\begin{gathered}\int_0^T [(w' - u',\ w - u) + a(w - u,\ w - u)]\,dt \leqslant \\ \leqslant \int_0^T [(w' - u'_*,\ w - u) + a(w - u_*,\ w - u)]\,dt.\end{gathered} \tag{9.142}$$

Если положить $u - u_* = \psi$, то правая часть (9.142) будет не чем иным, как

$$\int_0^T [((\psi^+)',\ \psi^-) + a(\psi^+,\ \psi^-)]\,dt = 0,$$

а поскольку

$$\int_0^T (w' - u',\ w - u)\,dt \geqslant 0,$$

(9.142) приводит к неравенству

$$\int_0^T a(w - u,\ w - u)\,dt \leqslant 0;$$

поэтому

$$w = u, \text{ т. е. } u_* \leqslant u, \text{ откуда следует (9.137)} \blacksquare$$

Можно дальше *распространить* предыдущие результаты: пусть Q_1 — подобласть в Q, *не обязательно цилиндрическая*, и пусть u_{Q_1} — решение (которое существует и единственно, если область Q_1 «достаточно регулярна») задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_{Q_1}}{\partial t}+Au_{Q_1}=f \text{ в } Q_1,\\ u_{Q_1}=0 \text{ при } t=0 \text{ и на боковой границе } Q_1,\end{gathered} \tag{9.143}$$

и пусть $\tilde{u}_{Q_1}$ — продолжение u_{Q_1} нулём вне Q_1.

Далее, имеет место неравенство (это доказывается подобным же образом)

$$u \geqslant \tilde{u}_{Q_1}. \tag{9.144}$$

Весьма вероятно, что

$$u = \sup_{Q_1} \tilde{u}_{Q_1}, \tag{9.145}$$

и трудность состоит в том, чтобы показать, что u является функцией типа $u=\tilde{u}_{Q_1}$, где Q_1 — «достаточно регулярная» область, в которой можно решить задачу (9.143) ●

10. РАЗЛИЧНЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ

В этом параграфе мы приведем некоторые дополнения к предыдущим результатам, отсылая за доказательствами к оригинальным статьям.

10.1. Эволюционные уравнения

Во всем предшествующем изложении мы старались связать с заданным нелинейным эллиптическим оператором A такое банахово пространство V, чтобы A отображал V в *сопряженное* пространство V' (в § 3 гл. 4 мы встретимся с вариантом этой ситуации, в котором «главная часть» A будет отображать V в V'). Однако существует и другая точка зрения (подчас неизбежная, см. § 1 гл. 3), принятая при изучении неограниченных линейных операторов: для заданного оператора A и *выбранного* пространства X (мы уже много раз подчеркивали, как важен этот выбор) рассматривается область определения $D(A)$ (в действительности, одна из возможных областей определения) оператора A в X; $D(A)$ является таким *подмножеством* в X (подпространством — в линейном случае), что A *отображает* $D(A)$ в X ●

Эта точка зрения, естественная для «неограниченных операторов», возникает и в случае *нелинейных полугрупп* в X. Говоря несколько точнее, если задано подмножество K в X, то нелинейной полугруппой в K называется семейство таких операторов (нелинейных) $G(t)$: $K \to K$ $(t \geqslant 0)$, что

$$\forall k \in K \quad t \to G(t)(k) \text{ является непрерывным отображением } t \geqslant 0 \to X, \tag{10.1}$$

$$G(s)(G(t)(k)) = G(s+t)(k) \quad \forall s,\ t \geqslant 0, \quad \forall k \in K, \tag{10.2}$$

$$G(0)(k) = k \quad \forall k \in K. \tag{10.3}$$

Мы назовем *областью определения инфинитезимального производящего оператора полугруппы* $G(t)$ множество D таких элементов $k \in K$, что

$$h^{-1}(G(h)(k) - k) \text{ сходятся в } X \text{ при } h \to 0, \tag{10.4}$$

а *инфинитезимальным производящим оператором* полугруппы будем называть оператор B, определенный *на* D формулой

$$B(k) = \lim_{h \to 0} h^{-1}(G(h)(k) - k). \tag{10.5}$$

Мы будем также рассматривать оператор B: $D(B) = D \to X$ ●

Пример 10.1. Применим теорему 1.2 при $f = 0$. Для заданного u_0 из H определим $u(t) = G(t)(u_0) =$ значение в момент t решения задачи (1.38), (1.39), (1.40).

Можно также рассмотреть нелинейную полугруппу в гильбертовом пространстве H. Ее инфинитезимальным производящим оператором будет оператор $B = -A$, рассматриваемый на $D \subset V$ ●

Пример 10.2. Можно использовать результаты § 9 о вариационных неравенствах с нулевой правой частью и ненулевыми начальными данными. Таким образом мы введем в рассмотрение нелинейную полугруппу, определенную на *выпуклом подмножестве* гильбертова пространства ●

Замечание 10.1. В действительности (см., например, Кранделл и Пази [1]) можно определить инфинитезимальный производящий оператор как *многозначный оператор* ●

Основной проблемой в этом направлении является обобщение теоремы Хилле — Иосиды (см. Хилле — Филлипс [1], Иосида [1]) для линейных полугрупп на нелинейный случай. Приведем один частный результат, касающийся сжимающих полугрупп. Полугруппа $G(t)$ в банаховом пространстве X (с нормой $\| \ \|$) называется сжимающей, если

$$\|G(t)(u) - G(t)(v)\| \leqslant \|u - v\| \quad \forall u, v \in K, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{10.6}$$

Тогда оператор $-B$ (инфинитезимальный производящий оператор $G(t)$) будет *аккретивным* оператором, т. е. если J —

оператор двойственности относительно функции Φ (см. § 2), то для $A = -B$ выполнено неравенство

$$(A(u) - A(v),\ J(u-v)) \geqslant 0 \quad \forall u, v \in D = D(A). \qquad (10.7)$$

В самом деле, как следует из (10.6), если $\Psi(r) = \int\limits_0^r \Phi(\sigma)\, d\sigma$ (ср. с предложением 8.1), то

$$\Psi(\|\varphi(t)\|) \leqslant \Psi(\|u - v\|), \text{ если } \varphi(t) = G(t)(u) - G(t)(v), \qquad (10.8)$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\Psi(\|\varphi(t)\|)\Big|_{t=0} \leqslant 0. \qquad (10.9)$$

Однако в силу предложения 8.1 и равенства

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = B(u) - B(v),$$

получим

$$\frac{d}{dt}\Psi(\|\varphi(t)\|)\Big|_{t=0} = (J(\varphi(0)),\ B(u) - B(v)),$$

и наше утверждение будет следовать из (10.9).

Что касается «обратного» утверждения, важного для приложений, то имеет место

Теорема 10.1. *Пусть X — банахово пространство, причем сопряженное пространство X' равномерно выпукло. Пусть A: $D(A) \to X$ — аккретивный оператор (т. е. удовлетворяющий (10.7)) и*

$$\textit{оператор } A + I\colon D(A) \to X \textit{ сюръективный.} \qquad (10.10)$$

Тогда для заданного u_0 из $D(A)$ существует, и притом только одна, непрерывная функция u: $t \geqslant 0 \to X$, которая слабо непрерывно дифференцируема по t и является решением задачи

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0. \qquad (10.11)$$

(Оператор $-A$ является тогда инфинитезимальным производящим оператором полугруппы $u_0 \to u(t)$.)

Доказательство см. у Браудера [7].

Что касается всей теории нелинейных полугрупп и ее приложений, см. Брезис и Пази [1], Брезис, Кранделл и Пази [1], Браудер [7], [9], Кранделл и Пази [1], Като [2], [3], [4], Комура [1], [2], [3].

10.2. Эволюционные неравенства

В теоремах 9.2 и 9.3 можно обойтись без *предположения о согласовании*; имеет место следующая теорема существования (весьма вероятно, без единственности, как в теореме 9.3):

Теорема 10.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — рефлексивное банахово пространство, а $\mathcal{K}$ — замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{V}$. Пусть L: $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ — монотонный оператор (не обязательно линейный). Пусть $\mathcal{A}$: $\mathcal{K} \to \mathcal{V}'$ — ограниченный и коэрцитивный псевдомонотонный оператор. Тогда существует такое $u \in \mathcal{K}$, что для заданного f из $\mathcal{V}'$:*

$$(\mathcal{A}(u) + Lv - f, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K} \cap D(L). \tag{10.12}$$

Этот результат принадлежит Брезису [3]; в указанной работе можно найти доказательство (в котором используется лемма Дебруннера и Флора [1] и в котором вводится максимальное монотонное продолжение сужения L на $\mathcal{K}$ по отношению к $\mathcal{K} \times \mathcal{V}'$ — это продолжение существует согласно лемме Цорна). Обобщение этого результата на *многозначные* операторы имеется у Браудера [7].

11. ПРОБЛЕМЫ

11.1. Решение вопросов, поставленных в замечании 4.2. Систематическое изучение *неоднородных* задач (т. е. задач с «ненулевыми» начальными и граничными условиями) остается несделанным. Одним из наиболее тонких моментов является вопрос о *плотности*, встретившийся в замечании 4.2.

11.2. Аналогичные задачи можно поставить для нелинейных эволюционных уравнений.

11.3. Возможно, будет интересным более тщательно изучить *структуру* оператора (нелинейного) A, введенного в (4.9). Оператор A отображает $W^{1/p', p}(\Gamma)$ в $W^{-1/p', p'}(\Gamma)$, т. е. речь идет об *«эллиптическом»* операторе порядка $2/p'$. Можно ли все это более точно определить применительно к некоторому классу *нелинейных псевдодифференциальных* операторов?

11.4. *В линейном* случае многочисленные работы посвящены изучению «всех» расширений, скажем, оператора $-\Delta$, определенного на $\mathcal{D}(\Omega)$, обладающих теми или иными свойствами, как, например:

(i) соответствующая краевая задача корректна;

(ii) $-\Delta$ является инфинитезимальным производящим оператором некоторой полугруппы, Благодаря теории нелинейных полугрупп можно ставить аналогичные вопросы для оператора

$$\varphi \to -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right), \qquad p \neq 2$$

(«заменяющего» — Δ). Что касается *линейного* случая, то мы отсылаем читателя к работе Лионса — Мадженеса [1], приложение к тому 1, и к соответствующей библиографии, в частности, к работе Грубба [1]. Нелинейный случай остается открытым [1]).

11.5. Есть основания предполагать, что теорема 5.1 остается справедливой без условия (5.15), но это не доказано.

11.6. Более полное изучение вопроса о *единственности* во *всех* примерах § 5.

11.7. Решение стационарной задачи, отвечающей задаче 5.1, без предположения (5.52).

11.8. Аналогичные вопросы в связи с задачей 5.3.

11.9. Можно ли решить глобально по t в подходящем слабом смысле уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \qquad p \neq 2,$$

с «естественными» краевыми и начальными условиями?

11.10. Аналогичный вопрос для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx\right) \Delta u = f\ ^{2)}.$$

---

[1]) Как нам кажется, было бы интересным рассмотреть с точки зрения теории нелинейных полугрупп обобщении работы Бони, Курежа и Приуре [1].

[2]) В этой связи следует указать на работу С. Н. Бернштейна «Об одном классе функциональных уравнений» (С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. III стр. 323—331), в которой рассмотрена смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varphi\left(\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \varphi(u) \geqslant \alpha > 0,$$

$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0,$$

$$u(x,\ 0) = F(x), \qquad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = F_1(x)$$

и доказано существование глобального решения в предположении об аналитичности $F(x)$ и $F_1(x)$. — *Прим. перев.*

11.11. Мы не пробовали в ситуации § 9 гл. 1 заменять $-\nu\Delta u$ монотонным оператором, как это сделано в § 5 настоящей главы. (Эта задача, безусловно, более доступная, чем другие.)

11.12. Как известно, для решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f, \quad u|_{\Sigma}=0, \quad u(0)=u_0,$$

при $f\in L^{\rho}(0, T; L^{\sigma}(\Omega))$, $\rho\neq\sigma$, можно указать «оптимальный» класс $(u\in L^{\rho}(0, T; W^{2,\sigma}(\Omega)))$. Можно ли получить аналогичные результаты для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f, \quad u|_{\Sigma}=0, \quad u(0)=u_0?$$

11.13. Для нелинейных уравнений пока не удалось выйти за пределы производных второго порядка по t. С другой стороны, известно (см. Агранович — Вишик [1], Гривар [3]), что можно решать краевые задачи (скажем, с начальными данными и данными Дирихле) для оператора

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^{m}=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{\partial^{j}}{\partial t^{j}}(-1)^{m-j}\Delta^{m-j}, \quad m>2.$$

Можно ли заменить $(-\Delta)^{m-j}$ нелинейными операторами (и какими? [1])), так чтобы задача оставалась корректной?

11.14. В случае примера 8.1 (аналогичная проблема возникает в связи со всеми одиосторонними задачами) можно ли указать такой класс для f, чтобы соответствующие решения u принадлежали $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$?

11.15. Изучить гладкость решений в примерах, рассмотренных в п. 8.9. Например, если

$$P=\frac{\partial}{\partial x_n}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

то имеют ли место результаты о гладкости, аналогичные результатам п. 8.7 [2])?

---

[1]) Не ограничиваясь при этом «достаточно малыми» нелинейными возмущениями оператора Δ.

[2]) В этом направлении имеются результаты Брезиса, полученные с использованием двойственности.

11.16. Систематическое изучение односторонних задач (или вариационных неравенств) для псевдодифференциальных операторов.

11.17. Пусть заданы эллиптический оператор A порядка $2m$ и система $\{B_j\}$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, граничных операторов, «накрывающая A»; пусть $\{S_j\}$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, — «дополнительная» система граничных операторов (в том смысле, что $\{B_j, S_j\}$ является системой Дирихле (см., например, Лионс — Мадженес [1], гл. 2)). Какие существуют соответствующие корректные односторонние *задачи* (т. е. $Au=f$ в Ω, а на границе Γ выполняются $2m$ неравенств и m нелинейных равенств, неравенства и равенства конструируются посредством $B_j u$ и $S_j u$)? См. также Лионс [25].

11.18. Изучение задач, связанных с неравенствами для операторов, эллиптико-параболических в некоторой области (что касается таких уравнений, то см. Фикера [2], Олейник [7], Кон — Ниренберг [1]).

11.19. Уточнить условия сопряжения в примерах 9.7, 9.5.

11.20. Перечислить «все» задачи для неравенств, связанных с оператором $\partial/\partial t - \Delta$.

11.21. Обобщение на эволюционный случай задачи 11.17.

11.22. Можно ли указать другие «корректные» задачи для неравенств типа задач из п. 9.5.6 для вырождающихся параболических операторов?

11.23. Мы привели достаточно большое количество примеров, в которых при двух различных типах условий на данные задачи удается получить информацию двух типов о гладкости решения (см., например, теоремы 3.1 и 3.2).

Было бы интересно изучить возможности получения «промежуточных результатов о гладкости» посредством *нелинейной интерполяции*. Приведем один результат о нелинейной интерполяции, который может оказаться полезным для этих целей. Пусть $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$ — две пары банаховых пространств с непрерывными вложениями, причем B_1 предполагается рефлексивным [1]. Пусть G — нелинейный оператор, действующий из A_i в B_i, $i=0, 1$, и обладающий следующими свойствами: оператор G непрерывен и

---

[1] Впрочем, как отметили Кальдерон и Фойш, от этого предположения можно освободиться ценой нескольких технических осложнений.

$$\| G(a) \|_{B_0} \leqslant c \| a \|_{A_0} \quad \forall a \in A_0, \tag{11.1}$$

$$\| G(a) - G(a') \|_{B_1} \leqslant c \| a - a' \|_{A_1} \quad \forall a, \ a' \in A_1 \tag{11.2}$$

Если $X_0 \subset X_1$ — пара банаховых пространств, то обозначим $T(X_0, X_1)$ = (пространство следов) пространство, порождаемое значениями $u(0)$ функций u, удовлетворяющих условию

$$||| u ||| = \| t^{\alpha_0} u \|_{L^{p_0}(0, \infty; A_0)} + \left\| t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0, \infty; A_1)} < \infty,$$

где $1/p_i + \alpha_i \in [0, 1]$. Пространство $T(X_0, X_1)$ снабжается нормой

$$\| \varphi \|_{T(X_0, X_1)} = \inf_{u(0)=\varphi} ||| u |||.$$

Тогда если выполнены условия (11.1) *и* (11.2), *то G отображает $T(A_0, A_1)$ в $T(B_0, B_1)$* (доказательство и приложения см. у Лионса [18]).

Укажем другой результат о нелинейной интерполяции (см. Браудер [11]): если заменить (11.1) предположением, аналогичным (11.2), только для A_0, B_0, то G будет отображать $\Phi(A_0, A_1)$ в $\Phi(B_0, B_1)$ для любого функтора линейной интерполяции Φ.

Более ранние результаты о нелинейной интерполяции (установленные в совершенно ином контексте) принадлежат Кальдерону — Зигмунду [1] и Гальярдо [4].

11.24. Изучение задач типа рассмотренных в § 5, но *с вырождениями*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(| u |^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f + \operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div} u = 0.$$

12. КОММЕНТАРИИ

Результаты § 1 о параболических монотонных операторах в разных направлениях обобщаются в этой и последующих главах. Они включены главным образом ради того, чтобы доставить несколько *примеров*.

Монотонность была введена в вариационное исчисление и смежные вопросы Вайнбергом и Качуровским [1], Качуровским [1], [2], Минти [1], Царантонелло [1], [2] и другими авторами (см. обзоры Качуровского [3] и Минти [6]). Первые приложения монотонности к некоторым нелинейным эллиптическим задачам имеются у Браудера (см. работы этого автора, приведенные в списке литературы, в частности общий обзор Браудер [7]). Если иметь в виду «конкретные» эллиптические операторы вариационного исчисления порядка > 2, то общие результаты ранее были получены Вишиком [2] (который использовал методы компактности типа тех, которые изложены в § 8 гл. 1 в случае эволюционных уравнений; эти результаты были получены без явного использования монотонности). По-видимому, наиболее общие результаты в этом направлении для операторов порядка > 2 были получены Лере и автором (см. работу Лере — Лионса [1]); эти результаты сформулированы в теореме 2.8. Прежде чем пытаться выявить самое существенное, мы начинаем с простого «чисто монотонного» случая (теорема 2.1), который затем «аксиоматизируется», и мы приходим, следуя Брезису [1], к понятию *псевдомонотонного* оператора. Тогда все трудности сводятся к проверке того, что операторы, введенные Лере и автором, являются псевдомонотонными. Псевдомонотонные операторы *не являются необходимыми* в § 2, но они становятся *в высшей степени необходимыми* для цельного изложения теории *эллиптических вариационных неравенств* (§ 8).

Теорема 2.2 принадлежит Брезису и Сибони [1]; в ней используются рассуждения, очень близкие тем, которые были использованы в связи с *операторами двойственности*, введенными в п. 2.2. Операторы двойственности были введены Бёрлингом и Ливингстоном [1] при изучении рядов Фурье в L^p; далее они были вновь применены Браудером [10], и теперь превратились в часть стандартной техники; операторы двойственности будут широко использованы в гл. 3.

В § 2 всюду можно без труда освободиться от сделанных нами предположений о сепарабельности. Мы не стремились к минимальному числу условий на рассматриваемые операторы; в частности, это касается свойства быть «ограниченными», т. е. переводить ограниченные множества в ограниченные. Следует отметить, что монотонные семинепрерывные коэрцитивные операторы, действующие из рефлексивного банахова пространства в его сопряженное, сюръективны *без* предположения об «ограниченности»[1].

С другой стороны, *существуют* монотонные семинепрерывные коэрцитивные и *неограниченные операторы*. Пример такого оператора[2] имеется у Рокафеллара [4], где встречается свойство *локальной* ограниченности.

Теория монотонных операторов в равной мере полезна при решении *интегральных уравнений* (именно к ним она впервые была применена); мы отсылаем к работам Вайнберга [1], Дольфа и Минти [1] (и к работам, указанным в этой статье), Фигерейдо и Гупты [1], Гловинского [1]; см. также Кэррол [1].

Результаты де Джорджи [1] о *гладкости* решений эллиптических уравнений второго порядка *не распространяются* на уравнения вариационного исчисления порядка больше 2; см. де Джорджи [2], Джусти и М. Миранда [1], Мазья [1], Морри [1], [2]. См. также Гилбарг [1], Джусти [1], Ладыженская и Уральцева [1], Мозер [2], Нэш [1], Серрин [4], Стампаккья [4].

По поводу монотонных задач «с весом» см. Диас [1], монотонных «на границе» см. Клингельхофер [1], [2], да Коста-Кабрал [1]; некоторые вырождающиеся задачи см. у Дерриджа [1].

По поводу аппроксимации решений монотонных задач решениями аналогичных задач в конечномерном случае см. Обэн [3], Брезис и Сибони [1], Сиарле, Шульц и Варга [1].

Монотонные операторы возникают также в теории игр; см., например, Рокафеллар [2], Бенсусан [8], Лемэр [1].

«Замена основного пространства» применялась Лионсом [12] (это замечание в равной мере полезно в *линейных* задачах; см. Лионс — Мадженес [1]).

---

[1] При доказательстве, как и в сепарабельном случае, надо использовать направленное по возрастанию множество подпространств конечной размерности.

[2] В пространстве l^2 интегрируемых с квадратом последовательностей $\{u_m \mid m = 1, 2, \ldots\}$ рассматривается оператор, являющийся градиентом функционала $\Psi(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m+1} | u_m |^{m+1}$; этот оператор не является ограниченным на ограниченном множестве последовательностей $f_i = \{0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots\}$, где 2 стоит на j-м месте.

Теорема 3.1 содержится в цитированной выше работе Лионса для $p \geqslant 2n/(n+2)$ и у Брезиса [2] для $p \geqslant 2$. Другое доказательство теоремы 3.2 приведено в цитированной работе Брезиса. При изложении преобразований, проведенных в п. 3.3, мы следуем работе Олейник [8][1]; см. также работу Каменомостской [1] (где используется метод конечных разностей) и книгу Ладыженской — Солонникова — Уральцевой [1] (в которой функция k «сглаживается», а далее переходят к пределу, используя специальные оценки для параболических операторов второго порядка; аналогичному методу следует Фридман [4]). Доказательство теоремы 3.3 и идея использовать β^{-1} принадлежит Брезису [2]. Дополнения для случая одномерного пространства см. у Дугласа — Кеинона — Хилла [1], Фридмана [5], Нгуена [1].

(В § 8, 9 можно найти другие примеры задач со свободной границей, рассмотренные другими методами.) См. другие задачи у Лере [8], Гарабедяна и Спеисера [1], Гилбарга [2].

Задача 5.1 была введена Лионсом [9], а задачи 5.2, 5.3 — Ладыженской [2]. Результаты о существовании были получены в цитированих работах Лионса и Ладыженской при *более сильных* предположениях на p. Приведенные здесь результаты получены Брезисом и автором. Результаты о единственности являются простыми вариантами результатов, установленных в главе 1 для уравнений Навье — Стокса. Теорема 5.5 принадлежит Ладыженской [2]. Близкие модели независимо изучались Канием [2]. См. также работу Головкина [1]. Результаты § 6 являются частными случаями результатов Лионса — Штраусса [1]. Решение аналогичной задачи с «многозначными разрывами» имеется у Америо [1].

Теорема 7.2 принадлежит Бардосу — Брезису [1]. Введение множителя θ_h в (7.2), по-видимому, является новым моментом.

Идея, близкая к использованным в § 7, состоит в том, чтобы приближать уравнение (7.1) уравнением с *запаздыванием*

$$\frac{du_\varepsilon(t)}{dt} + A(u_\varepsilon(t-\varepsilon)) = f(t),$$

где u_ε определено на отрезке $[0, \varepsilon]$. Отсюда можно шаг за шагом определять u_ε на отрезках $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, $[2\varepsilon, 3\varepsilon]$, и т. д., а далее устремить $\varepsilon \to 0$; см. Браудер [7]. См. еще другой метод в § 1 гл. 3.

Вариационные неравенства, изученные в § 8, в «абстрактной» форме возникают всякий раз, когда «хорошая» выпуклая функция минимизируется по выпуклому множеству.

Аналогичные конкретные ситуации, связанные с дифференциальными операторами, встречаются в механике: задачи теории упругости с односторонними связями (Синьорини [1], Дюво [1]), задачи теории пластичности (см. принцип минимума Прагера — Ходжа [1]; см. сочинения Прагера [1], Гудьер и Ходж [1], Мандел [1] и Handbuch der Physik, B. VI, 1958). Полное математическое исследование задачи Синьорини было проведено Фикерой [1]; далее началось систематическое изучение задач для неравенств (односторонних задач), связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных: после работы Стампаккьи [1] в работе Лионса и Стампаккьи [1] были изучены некоэрцитивные задачи и были поставлены (впервые) задачи для *эволюционных вариационных* неравенств (§ 9 и § 3, 5, 6, 7 главы 3). В этой работе основной оператор был линейным. Далее перешли (Хартман — Стампаккья [1]) к тому случаю, когда основной оператор *более не является* линейным; весьма общее изложение этих вопросов (которому мы здесь следуем) принадлежит Брезису [1]. Другие примеры были изучены Моро [3],

---

[1] См. работу О. А. Олейник «Об одном методе решения общей задачи Стефана», *ДАН СССР*, 135 : 5 (1960), 1054—1057, где задача решена путем «сглаживания» коэффициентов. — *Прим. ред.*

Лекарре [1]. Другие общие результаты были получены (в частности, для многозначных операторов) Браудером [7], Рокафелларом [5]. Доказательство теоремы 8.6 принадлежит автору (см. также Лионс [10]). Результаты п. 8.7.3 и 8.7.4 принадлежат Брезису — Стампаккье [1] (где можно найти дополнительные результаты о гладкости). Что касается других результатов о гладкости, то см. Леви [1], Леви — Стампаккья [1], а также п. 5.5 гл. 3 и работы де Вейги [1], Шиаффино [1]. По поводу задачи об упруго-пластичном кручении стержня можно обратиться к работам Аннина [1], Ходжа — Хераковича — Staута [1], Ланшона — Дюво [1], Тинга [1].

Задачи такого же типа возникают в механике для операторов четвертого порядка (Зарка [1]). По поводу устойчивости решения вариационного неравенства относительно изменения выпуклого множества K см. работы Моско [4] и Жоли [1]. По поводу сингулярных возмущений в вариационных неравенствах см. Юэ [1]. По поводу задач с трением см. Дюво — Лионс [2].

Результаты п. 8.8 принадлежат Огазо [1], [2].

Может случиться, что при *некоторых правых частях* f решения двух вариационных неравенств, связанных с *одним и тем же* дифференциальным оператором, но с *двумя различными выпуклыми множествами, совпадают*; подобный пример (в связи с задачей об упруго-пластичном кручении) имеется у Брезиса [4].

Указания на характер тех частей Г, где $u = 0$ (в случае примера 8.1), имеются у Фридмана [6].

Как мы уже говорили, вариационные неравенства соответствуют задаче о минимизации выпуклой функции J на выпуклом множестве (и обобщают ее). Если в качестве J взять *площадь поверхности*, то мы придем к задачам для «минимальных поверхностей со связями»; см. М. Миранда [1] и Нитше [1].

Изучение вариационных эволюционных неравенств[1]) началось в цитированной выше работе Стампаккьи и автора; более простое и более общее изложение, которому мы здесь следуем, принадлежит Брезису [1]; ему принадлежат теоремы 9.1—9.4.

Теорема 9.5 является вариантом результатов о гладкости § 8; другие варианты можно найти у Брезиса [3], которому мы обязаны теоремой 9.6 (метод доказательства этой теоремы является адаптацией *метода сдвигов* применительно к эволюционным неравенствам). Изложенный нами метод обоснования (9.104), (9.105) был нам указан Темамом. Используемые здесь рассуждения очень похожи на те, с помощью которых устанавливается слабый принцип максимума (что касается принципа максимума для нелинейных уравнений, то здесь имеются и другие методы; см. Аронсон и Серрин [1], [2]).

Можно решать задачи для вариационных неравенств, связанных с операторами других типов (по сравнению с § 8, 9), например для операторов Навье — Стокса; см. Лионс [16], Брезис — Кранделл — Пази [1] и результаты § 6 гл. 3.

Другие семейства задач для неравенств можно найти в теории оптимального управления систем, описываемых уравнениями в частных производных; см. Лионс [15].

Вариационные неравенства типа рассмотренных в § 9 возникают в вопросах стохастического управления; см. Стратонович [17] (дополнение, стр. 318—341).

В § 10 имеется несколько общих указаний относительно нелинейных полугрупп, углубленное изучение которых было начато Комурой (см. литературу в тексте). Здесь речь идет о вопросах, которые сейчас находятся в становлении и которые должны иметь многочисленные приложения: гладкость решений нелинейных эволюционных уравнений, нелинейная интерполяция, нелинейная теория потенциала, и т. д.

---

[1]) Не путать с эволюционными неравенствами вида
$\|du/dt + A(t)\,u(t)\| \leqslant \Phi(t, \|u(t)\|)$; см. Агмон — Ниренберг [2].

Глава 3

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И МЕТОД ШТРАФА

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Как мы уже говорили во введении, метод *компактности* и метод *монотонности* (или тот и другой одновременно) позволяют переходить к пределу, исходя из априорных оценок (более или менее «сильных»), устанавливаемых (как правило) для *«приближенных уравнений»*.

До сих пор приближенные уравнения конструировались с помощью *метода Галёркина* (или вариантов этого метода) и в некоторых случаях (§ 7 гл. 2) с помощью *«конечных разностей»*[1]). *Однако существуют и другие методы*, которые будут изучаться в этой главе:

1) Можно приближать параболические эволюционные уравнения (неравенства) эллиптическими уравнениями (неравенствами); это называется *эллиптической регуляризацией.*

2) Можно приближать гиперболические эволюционные уравнения (неравенства) параболическими уравнениями (неравенствами); это называется *параболической регуляризацией.*

3) Можно приближать *неравенства уравнениями с помощью метода штрафов*[2]).

1. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Общие указания

Мы опять займемся изучением уравнения $\Lambda u + \mathscr{A}(u) = f$, с которым мы встречались несколько раз, в частности в § 7 гл. 2.

Начнем с нескольких замечаний, касающихся (a) методов и (b) предположений.

(a) Методы. В использованных нами методах (метод Фаэдо—Галёркина или метод аппроксимации Λ оператором $(I-\theta_h G(h))/h$; см. § 7 гл. 2) роли операторов Λ и $\mathscr{A}$ весьма различались.

Метод *эллиптической регуляризации*, который мы сейчас собираемся изложить, позволяет воспользоваться предположе-

---

[1]) К этому методу мы вернемся в § 1 гл. 4.

[2]) Другие методы будут, кроме того, приведены в § 1 гл. 4.

ниями, в которых *одновременно* принимают участие как Λ, так и $\mathcal{A}$ (один результат в этом направлении см. ниже в п. 1.4).

Общая идея эллиптической регуляризации такова: пусть нам надо решить классическое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{в} \quad Q \tag{1.1}$$

с условиями $u(x, 0) = 0$, $u = 0$ на Σ.

Мы *приближаем* уравнение (1.1) *эллиптическим* уравнением

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon = f \text{ в } Q, \qquad \varepsilon > 0, \tag{1.2}$$

при этом сохраняем старые краевые условия и добавляем краевое условие при $t = T$.

Сначала решается задача (1.2) («эллиптическими методами»), а затем делается предельный переход ($\varepsilon \to 0$).

Формально в уравнении (1.2) все переменные равноправны, откуда (все это, безусловно, надо еще точно сформулировать!) возникает возможность использовать предположения, в которых, вообще говоря, одновременно участвуют Λ и $\mathcal{A}$. Аналогом (пока еще формальным) уравнения (1.2) для уравнения

$$\Lambda u + \mathcal{A}(u) = f$$

будет уравнение

$$\varepsilon\Lambda^*\Lambda u_\varepsilon + \Lambda u_\varepsilon + \mathcal{A}(u_\varepsilon) = f.$$

Естественно, что *возможны многочисленные варианты.*

Например, вместо (1.2) можно рассмотреть уравнение

$$-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{B}(u_\varepsilon) + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon = f, \tag{1.3}$$

где оператор $\mathcal{B} > 0$ *в нашем распоряжении.*

В (1.3) можно, например, брать $\mathcal{B} = (-\Delta)^{-1}$; в дальнейшем мы существенно воспользуемся возможностью подобного выбора ●

(b) Предположения. За исключением § 10 гл. 2, мы, как правило, предполагаем, что $-\Lambda$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы, действующей в $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}'$ и являющейся сжимающей в $\mathcal{H}$.

Если мы положим

$$D(\Lambda) = \mathcal{V} \cap D(\Lambda;\ \mathcal{V}'), \qquad D(\Lambda^*) = \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*;\ \mathcal{V}'),$$

то Λ будет неограниченным оператором с областью определения $D(\Lambda) \subset \mathcal{V}$ и областью значений в $\mathcal{V}'$; далее, Λ будет замкнутым оператором с плотной областью определения, причем $\Lambda \geqslant 0$, $\Lambda^* \geqslant 0$ в $D(\Lambda)$ и $D(\Lambda^*)$ соответственно, Мы увидим, что на самом деле лишь эти последние условия играют роль в теоремах существования[1]).

Теперь мы сделаем следующее предположение, заменяя Λ на L во избежание недоразумений:

L — неограниченный линейный оператор с областью определения $D(L)\subset\mathscr{V}$ и областью значений в $\mathscr{V}'$, на области определения в $\mathscr{V}$ оператор L замкнут и

$$(Lv,\ v)\geqslant 0\quad \forall v\in D(L),\quad (L^*v,\ v)\geqslant 0\quad \forall v\in D(L^*)^{2)}. \tag{1.4}$$

Мы собираемся изучать нелинейные уравнения вида

$$Lu+\mathscr{A}(u)=f,\quad u\in D(L). \tag{1.5}$$

Наш *план* будет таким: в п. 1.2 прежде всего будет доказана

Лемма 1.1. *Предположим, что пространство $\mathscr{V}$ рефлексивно и строго выпукло вместе со своим сопряженным. Тогда предположение* (1.4) *для оператора L эквивалентно предположению*

L: $D(L)\to\mathscr{V}'$ — максимальный монотонный линейный оператор с плотной областью определения. (1.6)

Далее мы решим (п. 1.3) уравнение (1.5) в предположениях, в которые отдельно входят L и $\mathscr{A}$, и, наконец, в п. 1.4 мы рассмотрим случай таких предположений, в которых *одновременно* принимают участие L и $\mathscr{A}$.

Новые приложения приведены в § 2.

1.2. Леммы о максимальности

Прежде чем доказывать лемму 1.1, мы приведем одну очень полезную техническую лемму.

Лемма 1.2. *Пусть L — линейный оператор, действующий из $D(L)$ (подпространства $\mathscr{V}$) в $\mathscr{V}'$ и монотонный. Тогда следующие условия эквивалентны:*

L — максимальный монотонный[3]) оператор с плотной областью определения; (1.7)

---

[1]) Это не лишает интереса методы, использующие полугруппу $G(s)$.

[2]) L^* является сопряженным к оператору L, рассматриваемому как неограниченный оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{V}'$.

[3]) В следующем смысле: не существует линейного монотонного оператора, который являлся бы строгим продолжением L.

для любой пары $\{u, f\} \in \mathscr{V} \times \mathscr{V}'$, *такой, что*

$$(Lv - f,\ v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(L), \text{ имеем} \tag{1.8}$$

$$u \in D(L) \quad \text{и} \quad f = Lu$$[1]).

Доказательство. 1) *Из* (1.7) *следует* (1.8).

Предположим, что (1.8) не выполнено; тогда $u \notin D(L)$, и мы построим строгое продолжение $\tilde{L}$ оператора L, которое также будет монотонным; тогда мы придем к противоречию (поскольку оператор L является максимальным). С этой целью сначала определим

$D(\tilde{L}) = D(L) \dotplus \{u\}$ (пространство, натянутое на $D(L)$ и u),

и на $D(\tilde{L})$ определим $\tilde{L}$ следующим образом:

$$\tilde{L}(v + \lambda u) = Lv + \lambda f, \quad v \in D(L), \quad \lambda \in \mathrm{R}. \tag{1.9}$$

Нетрудно проверить, что оператор $\tilde{L}$ монотонный (т. е. $\tilde{L} \geqslant 0$); действительно, если положить $-\frac{1}{\lambda} v = w$ (случай $\lambda = 0$ очевиден), то имеем

$$(\tilde{L}(v + \lambda u),\ v + \lambda u) = \lambda^2 (Lw - f,\ w - u) \geqslant 0.$$

Таким образом, мы доказали, что $u \in D(L)$, и остается показать, что $f = Lu$. Для этого подставим в (1.8) $v = u + \theta w$, $\theta > 0$, $w \in D(L)$ (что законно); после деления на θ получим:

$$(Lu + \theta Lw - f,\ w) \geqslant 0;$$

устремляя $\theta \to 0$, найдем

$$(Lu - f,\ w) \geqslant 0 \quad \forall w \in D(L)$$

и, следовательно, $Lu = f$, поскольку $D(L)$ плотно в $\mathscr{V}$ ●

2) *Из* (1.8) *следует* (1.7). Опять будем рассуждать от противного. Если L не является максимальным монотонным оператором, то существует строгое продолжение $\tilde{L}$ оператора L, являющееся монотонным. Пусть $u \in D(\tilde{L})$, и $u \notin D(L)$ и $\tilde{L}u = f$. Так как $(\tilde{L}(v - u),\ v - u) \geqslant 0\ \forall v \in D(\tilde{L})$, то для всех $v \in D(L)$ имеем

$$(Lv - f,\ u - v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(L),$$

---

[1]) Иногда (следуя Минти и Браудеру) L называют максимальным монотонным оператором, если не существует никакого графика (линейного или нелинейного), являющегося строгим продолжением L. Лемма 1.2 показывает, что это определение эквивалентно первому и плотности области определения.

и в силу нашего предположения

$$u \in D(L) \quad \text{и} \quad Lu = f,$$

т. е. мы пришли к противоречию. Нам осталось убедиться в том, что $D(L)$ плотно в $\mathscr{V}$; действительно, пусть $g \in \mathscr{V}'$, причем

$$(g, v) = 0 \quad \forall v \in D(L).$$

Тогда

$$(Lv - g, u - 0) = (Lv, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(L)$$

и, следовательно, в силу нашего предположения $g = L0 = 0$ ●

Теперь можно перейти к доказательству леммы 1.1.

Доказательство леммы 1.1. 1) *Из* (1.6) *следует* (1.4). Прежде всего покажем, что оператор L *замкнут*. Пусть $u_n \in D(L)$, $u_n \to u$ в $\mathscr{V}$, $Lu_n \to f$ в $\mathscr{V}'$. Так как $(Lv - Lu_n, v - u_n) \geqslant 0$, то в пределе получим

$$(Lv - f, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(L)$$

и, следовательно, в силу (1.8) $u \in D(L)$ и $Lu = f$.

Нам осталось показать, что $L^* \geqslant 0$.

Если $u \in D(L^*) \cap D(L)$, то $(L^*u, u) = (u, Lu) \geqslant 0$. Следовательно, достаточно рассмотреть такие u, что

$$u \in D(L^*), \quad u \notin D(L). \tag{1.10}$$

Мы покажем, что тогда

$$(L^*u, u) > 0. \tag{1.11}$$

Применим предположение (1.8) к паре $\{u, -L^*u\}$. Поскольку $u \notin D(L)$, существует такой элемент $v_0 \in D(L)$, что

$$(Lv_0 + L^*u, v_0 - u) < 0,$$

т. е.

$$(Lv_0, v_0) < (Lv_0, u) - (L^*u, v_0) + (L^*u, u) = (L^*u, u),$$

откуда следует (1.11), поскольку $(Lv_0, v_0) \geqslant 0$.

2) *Из* (1.4) *следует* (1.6). В силу леммы 1.2 достаточно установить (1.8). Мы будем исходить из такой пары $\{u, f\} \in \mathscr{V} \times \mathscr{V}'$, что

$$(Lv - f, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(L). \tag{1.12}$$

Мы покажем, что $u \in D(L)$ и $Lu = f$. Идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть функционал $v \to \varphi(v)$, определенный на $D(L)$ и достигающий минимума на элементе u

(следовательно, на $D(L)$). Обозначая через $\| \quad \|$, $\| \quad \|_*$ нормы в $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ соответственно[1], положим

$$\varphi(v) = (Lv - f, v - u) + \frac{1}{2}\|v - u\|^2 + \frac{1}{2}\|Lv - f\|_*^2. \qquad (1.13)$$

Функция $v \to \varphi(v)$ является непрерывной выпуклой функцией на $D(L)$ и $\varphi(v) \to +\infty$, когда $\|v\|_{D(L)} \to +\infty$. Следовательно, φ достигает своего минимума в точке $v_0 \in D(L)$, характеризуемой условием

$$\varphi'(v_0) = 0,$$

т. е. (J обозначает отображение двойственности $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ относительно $\Phi(r) = r$; см. § 2 и 10 гл. 2)

$$(Lv, v_0 - u) + (Lv_0 - f, v) + (J(v_0 - u), v) + \\ + (Lv, J^{-1}(Lv_0 - f)) = 0 \quad \forall v \in D(L).$$

Полагая $v_0 - u = w$, $Lv_0 - f = g$, получим

$$(Lv, w + J^{-1}g) + (Jw + g, v) = 0 \quad \forall v \in D(L). \qquad (1.14)$$

Следовательно, функция $v \to (Lv, w + J^{-1}g)$ непрерывна в $D(L)$ в топологии, индуцированной топологией в $\mathscr{V}$, следовательно,

$$w + J^{-1}g \in D(L^*) \quad \text{и} \quad L^*(w + J^{-1}g) + Jw + g = 0. \qquad (1.15)$$

Так как $L^* \geqslant 0$, то из (1.15) выводим, что

$$(Jw + g, w + J^{-1}g) \leqslant 0. \qquad (1.16)$$

С другой стороны, применяя неравенство (1.12) к v_0, мы получим, что $(g, w) \geqslant 0$, и из (1.16) следует, что

$$(Jw, w) + (g, J^{-1}g) + (Jw, J^{-1}g) \leqslant 0. \qquad (1.17)$$

Однако

$$(Jw, J^{-1}g) \leqslant \|Jw\|_* \|J^{-1}g\|_* \leqslant \|w\| \|g\|_*,$$

и из (1.17) вытекает, что

$$\|w\|^2 + \|g\|_*^2 - \|w\| \|g\|_* \leqslant 0,$$

следовательно, $w = 0$, $g = 0$, т. е. $u = v_0 \in D(L)$ и $Lv_0 = Lu = f$ ●

1.3. Первая теорема существования, доказываемая с помощью эллиптической регуляризации

Теорема 1.1. *Пусть $\mathscr{V}$ — рефлексивное банахово пространство, причем нормы в $\mathscr{V}$ и в сопряженном пространстве $\mathscr{V}'$ строго выпуклы. Пусть L — линейный оператор, определенный*

---

[1] Эти нормы предполагаются строго выпуклыми; в этой связи см. теорему 2.5 гл. 2.

на $D(L)$ (*подпространстве, плотным в* $\mathcal{V}$) *и принимающий значения в* $\mathcal{V}'$; *пусть, далее,* L *является максимальным монотонным оператором*[1]). *Пусть* $\mathcal{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ — *псевдомонотонный*[2]) *коэрцитивный оператор, так что*

$$\frac{(\mathcal{A}(v), v)}{\|v\|} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty. \tag{1.18}$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}'$ *существует решение* $u \in D(L)$ *уравнения*

$$Lu + \mathcal{A}(u) = f. \tag{1.19}$$

Доказательство. 1) *Эллиптическая регуляризация.* Рассмотрим оператор двойственности $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ относительно $\Phi(r) = r$ (следовательно, $\|J(v)\|_* = \|v\|$). Мы «приблизим» уравнение (1.19) уравнением

$$\varepsilon L^* J^{-1} L u_\varepsilon + L u_\varepsilon + \mathcal{A}(u_\varepsilon) = f, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.20}$$

Разрешимость уравнения (1.20). Снабдив $D(L)$ нормой графика: $\|v\| + \|Lv\|_*$, мы превратим его в рефлексивное банахово пространство. Для $u, v \in D(L)$ положим

$$\pi_\varepsilon(u, v) = \varepsilon\left(J^{-1}(Lu), Lv\right) + (Lu, v) + (\mathcal{A}(u), v). \tag{1.21}$$

Форма $v \to \pi_\varepsilon(u, v)$ непрерывна на $D(L)$, следовательно,

$$\pi_\varepsilon(u, v) = (\mathcal{B}_\varepsilon(u), v), \quad \mathcal{B}_\varepsilon(u) \in D(L)'\,^{3)}. \tag{1.22}$$

Проверим, что оператор $\mathcal{B}_\varepsilon\colon D(L) \to D(L)'$ является *псевдомонотонным.* Ограниченность $\mathcal{B}_\varepsilon$ очевидна. Если мы определим оператор M_ε с помощью равенства

$$\varepsilon\left(J^{-1}(Lu), Lv\right) + (Lu, v) = (M_\varepsilon(u), v), \quad M_\varepsilon(u) \in D(L)', \tag{1.23}$$

то $M_\varepsilon\colon D(L) \to D(L)'$ будет ограниченным семинепрерывным и *монотонным* оператором. Далее, $\mathcal{B}_\varepsilon(u) = \mathcal{A}(u) + M_\varepsilon(u)$, так что $\mathcal{B}_\varepsilon$ является суммой оператора $\mathcal{A}$, являющегося псевдомонотонным оператором из $D(L)$ в $D(L)'$ (поскольку $\mathcal{A}$ — псевдомонотонный оператор из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{V}'$) и монотонного ограниченного семинепрерывного оператора M_ε. Следовательно (замечание 2.12 гл. 2), $\mathcal{B}_\varepsilon$ является псевдомонотонным оператором.

---

[1]) Можно считать, не обращаясь к лемме 1.1, что $L \geqslant 0$, $L^* \geqslant 0$.

[2]) Напомним еще раз определение (см. § 2 гл. 2): (i) $\mathcal{A}$ — ограииченный оператор, (ii) если $u_j \to u$ в $\mathcal{V}$ слабо и $\limsup(\mathcal{A}(u_j), u_j - u) \leqslant 0$, то

$$\liminf(\mathcal{A}(u_j), u_j - v) \geqslant (\mathcal{A}(u), u - v) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

[3]) Следует заметить, что, поскольку $D(L)$ плотно в $\mathcal{V}$, пространство $D(L)'$ можно отождествить с надпространством пространства $\mathcal{V}'$,

С другой стороны, так как $L \geqslant 0$, то

$$(\mathscr{B}_\varepsilon(v),\ v) \geqslant (\mathscr{A}(v),\ v) + \varepsilon \| Lv \|_*^2 \tag{1.24}$$

и, следовательно,

$$\frac{(\mathscr{B}_\varepsilon(v),\ v)}{\| v \|_{D(L)}} \to \infty \quad \text{при} \quad \| v \|_{D(L)} \to \infty .$$

Таким образом, в силу теоремы 2.7 гл. 2 существует такая функция $u_\varepsilon \in D(L)$, что

$$\mathscr{B}_\varepsilon(u_\varepsilon) = f. \tag{1.25}$$

Но (1.25) эквивалентно тому, что

$$\pi_\varepsilon(u_\varepsilon,\ v) = (f,\ v) \quad \forall v \in D(L),$$

и, следовательно, отображение

$$v \to \varepsilon\left(J^{-1}(Lu_\varepsilon),\ Lv\right) = (f - \mathscr{A}(u_\varepsilon) - Lu_\varepsilon,\ v)$$

непрерывно на $D(L)$, снабженном топологией, индуцированной топологией $\mathscr{V}$. Таким образом,

$$J^{-1}(Lu_\varepsilon) \in D(L^*) \tag{1.26}$$

и уравнение (1.25) эквивалентно уравнению (1.20).

Таким образом, мы доказали при всех $\varepsilon > 0$ *существование элемента* $u_\varepsilon \in D(L)$, *удовлетворяющего* (1.26) *и* (1.20).

2) *Оценки для* u_ε. Прежде всего заметим, что в силу (1.24) можно выбрать u_ε таким образом, что

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } \mathscr{V} \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{1.27}$$

Мы собираемся показать, что

$$Lu_\varepsilon \textit{ ограничены в } \mathscr{V}' \textit{ при } \varepsilon \to 0\,^{1)}. \tag{1.28}$$

Действительно, умножим скалярно обе части (1.20) на элемент $J^{-1}(Lu_\varepsilon)$ (принадлежащий $D(L^*)$ в силу (1.26)). Тогда

$$\varepsilon\left(L^* J^{-1}(Lu_\varepsilon),\ J^{-1}(Lu_\varepsilon)\right) + \left(Lu_\varepsilon,\ J^{-1}(Lu_\varepsilon)\right) + \\ + \left(\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ J^{-1}(Lu_\varepsilon)\right) = \left(f,\ J^{-1}(Lu_\varepsilon)\right), \tag{1.29}$$

---

[1] Обратим внимание на это свойство; аналогичный результат *не имеет места*, когда применяется аппроксимация Фаэдо — Галёркина (и мы вынуждены пользоваться «специальными базисами», чтобы получать менее точные свойства, «заменяющие» (1.28)); аналогичный результат *не имеет места* для аппроксимации, используемой в § 7 гл. 2. Следовательно, *с этой точки зрения* аппроксимация с помощью эллиптической регуляризации обладает бесспорным преимуществом. И именно это свойство позволяет использовать предположения, в которых одновременно участвуют Λ и $\mathscr{A}$.

а поскольку (в силу леммы 1.1) оператор L удовлетворяет (1.4), то $L^* \geqslant 0$, и из (1.29) следует неравенство

$$\|Lu_\varepsilon\|_*^2 + \left(\mathcal{A}(u_\varepsilon),\ J^{-1}(Lu_\varepsilon)\right) \leqslant \left(f,\ J^{-1}(Lu_\varepsilon)\right). \tag{1.30}$$

В силу (1.27) и ограниченности $\mathcal{A}$ получим, что $\|\mathcal{A}(u_\varepsilon)\|_* \leqslant \mathrm{const}$, и ввиду (1.30) $\|Lu_\varepsilon\|_*^2 \leqslant C\|Lu_\varepsilon\|_*$, откуда следует (1.28).

3) *Предельный переход по* ε. Поскольку в силу (1.27) последовательность $\mathcal{A}(u_\varepsilon)$ ограничена, а оператор L замкнут, мы можем так выделить подпоследовательность, обозначаемую также через u_ε, чтобы

$$\begin{array}{lll} u_\varepsilon \to u & \text{в } \mathscr{V} \text{ слабо}, & u \in D(L), \\ Lu_\varepsilon \to Lu & \text{в } \mathscr{V}' \text{ слабо}, & \\ \mathcal{A}(u_\varepsilon) \to \chi & \text{в } \mathscr{V}' \text{ слабо}. & \end{array} \tag{1.31}$$

Покажем, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0}\, (\mathcal{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) \leqslant 0. \tag{1.32}$$

Действительно, согласно (1.20),

$$(\mathcal{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) = (f - Lu_\varepsilon,\ u_\varepsilon - u) - \varepsilon\left(J^{-1}(Lu_\varepsilon),\ Lu_\varepsilon - Lu\right); \tag{1.33}$$

в силу (1.28) $\left|\left(J^{-1}(Lu_\varepsilon),\ Lu_\varepsilon - Lu\right)\right| \leqslant C$, и из (1.33) вытекает оценка

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) &\leqslant (f - Lu,\ u_\varepsilon - u) - (L(u_\varepsilon - u),\ u_\varepsilon - u) + C\varepsilon \leqslant \\ &\leqslant (f - Lu,\ u_\varepsilon - u) + C\varepsilon. \end{aligned}$$

С ее помощью мы приходим к (1.32).

Далее, поскольку оператор $\mathcal{A}$ псевдомонотонный, то

$$\liminf\, (\mathcal{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v) \geqslant (\mathcal{A}(u),\ u - v). \tag{1.34}$$

Однако в силу (1.20) $\forall v \in D(L)$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v) = (f - Lv,\ u_\varepsilon - v) - (Lu_\varepsilon - Lv,\ u_\varepsilon - v) - \\ - \varepsilon\left(J^{-1}(Lu_\varepsilon),\ Lu_\varepsilon - Lv\right) \leqslant (f - Lv,\ u_\varepsilon - v) + C_1\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, сравнивая с (1.34), получим

$$(f - Lv,\ u - v) \geqslant (\mathcal{A}(u),\ u - v) \quad \forall v \in D(L). \tag{1.35}$$

Полагая в (1.35) $v = u - \theta w$, $\theta > 0$, $w \in D(L)$, найдем, после деления на θ:

$$(f - L(u - \theta w),\ w) \geqslant (\mathcal{A}(u),\ w),$$

откуда, устремляя θ к нулю, получим

$$(f - Lu - \mathcal{A}(u),\ w) \geqslant 0 \quad \forall w \in D(L)$$

и, следовательно, $Lu + \mathcal{A}(u) = f$ ●

1.4. Вторая теорема существования, доказываемая с помощью эллиптической регуляризации

Если мы проанализируем предыдущее доказательство, то увидим, что в двух узловых пунктах (i), (ii) мы не пользовались оптимальными предположениями:

Пункт (i): *доказательство разрешимости уравнения* (1.20).

Мы пользовались тем, что оператор $\mathcal{A}$ является псевдомонотонным на $\mathcal{V}$; на самом деле *достаточно псевдомонотонности на* $D(L)$, что приводит к следующему ниже предположению (1.36).

Пункт (ii): *оценка* (1.28).

Мы использовали неравенство (1.30) в очень грубой форме; небольшое усовершенствование приводит к следующему ниже предположению (1.37) ●

Теперь мы установим такое утверждение [1]):

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathcal{V}$ — *рефлексивное банахово пространство, причем норма как в нем, так и в сопряженном пространстве строго выпукла. Пусть линейный оператор* L, *действующий из* $D(L)$ *в* $\mathcal{V}'$ (*где* $D(L)$ — *плотное линейное подпространство в* $\mathcal{V}$), *является максимальным монотонным. Пусть для оператора* $\mathcal{A}$: $D(L)\to\mathcal{V}'$ ($\mathcal{A}$ *не определен на всем* $\mathcal{V}$) *выполнены следующие предположения:*

$$\begin{aligned}
&\textit{если } u_j\to u \textit{ в } \mathcal{V} \textit{ слабо}, \ u_j\in D(L),\\
&u\in D(L),\ Lu_j\to Lu \textit{ в } \mathcal{V}' \textit{ слабо}\\
&\textit{и если } \limsup(\mathcal{A}(u_j),\ u_j-u)\leqslant 0, \textit{ то}\\
&\liminf(\mathcal{A}(u_j),\ u_j-v)\geqslant(\mathcal{A}(u),\ u-v);
\end{aligned}\tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
&\textit{существует функция } \lambda\to\psi(\lambda):\ \lambda\geqslant 0\to\mathbb{R}_+,\\
&\textit{ограниченная на любом компакте, и}\\
&\textit{такое число } \theta,\ 0\leqslant\theta<1, \textit{ что}\\
&\|\mathcal{A}(u)\|_*\leqslant\psi(\|u\|)+\theta\|Lu\|_*\quad\forall u\in D(L).
\end{aligned}\tag{1.37}$$

Предположим, что выполнено условие (1.18). *Тогда для любого* $f\in\mathcal{V}'$ *существует решение* $u\in D(L)$ *уравнения* (1.19).

Доказательство. 1) Прежде всего, как и в части 1) доказательства теоремы 1.1, мы решаем уравнение (1.20). Это можно сделать, поскольку в (1.36) предполагается именно то, что фактически используется в теореме 1.1. Опять имеет место включение (1.26).

---

[1] Являющееся «нелинейным» обобщением теоремы о возмущении в гильбертовом пространстве (см. Като [6], гл. IX, § 3).

2) *Оценки для* u_ε. Как и выше, имеет место (1.27), и надо показать, что опять выполняется (1.28). Для этого устанавливается неравенство (1.30), откуда, используя (1.37), получаем, что

$$\|Lu_\varepsilon\|_*^2 \leqslant \|Lu_\varepsilon\|_* [\psi(\|u_\varepsilon\|) + \theta\|Lu_\varepsilon\|_* + \|f\|_*];$$

поэтому благодаря предположениям на ψ и θ, сделанным в (1.37),

$$(1-\theta)\|Lu_\varepsilon\|_* \leqslant C + \|f\|_*,$$

что приводит к (1.28).

3) *Предельный переход при* $\varepsilon \to 0$. Часть 3) доказательства теоремы 1.1 проходит без изменения●

Замечание 1.1. Теорема 1.2 *содержит* теорему 1.1, однако мы разделили эти два результата, чтобы лучше проанализировать доказательство●

Замечание 1.2. Пусть M — монотонный линейный оператор, действующий из $D(M)$ (плотного подпространства в $\mathscr{V}$) в $\mathscr{V}'$ и *не обязательно максимальный.*

Тогда *для оператора* $\mathscr{A}$, *удовлетворяющего предположениям теоремы* 1.1[1]), *существует такое* $u \in \mathscr{V}$, *что*

$$(u, Mv) + (\mathscr{A}(u), v) = (f, v) \quad \forall v \in D(M). \tag{1.38}$$

В самом деле, пусть $\bar{M}$ — максимальное монотонное линейное расширение M (оно существует в силу леммы Цорна); согласно лемме 1.1, оператор $L = (\bar{M})^*$ является максимальным монотонным и, следовательно, в силу теоремы 1.1 существует решение $u \in D(L)$ уравнения $Lu + \mathscr{A}(u) = f$, откуда следует (1.38)●

Замечание 1.3. Следующий этап — к этому сводятся многие еще не решенные задачи — научиться решать при подходящих предположениях уравнение

$$L(u) + \mathscr{A}(u) = f, \tag{1.39}$$

где L и $\mathscr{A}$ являются нелинейными операторами. При этом должен покрываться случай (1.38), который по существу и возникает в приложениях.

---

[1]) Сходное замечание имеет место в том случае, когда оператор $\mathscr{A}$ определен только на $D(M^*)$, псевдомонотонен и коэрцитивен.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Общие параболические задачи

Мы собираемся применить теорему 1.2 к тому случаю, когда

$$\mathscr{V} = L^p(0, T; V), \tag{2.1}$$

где $1 < p < \infty$, V — замкнутое векторное подпространство в $W^{m,p}(\Omega)$, причем

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset V \subset W^{m,p}(\Omega). \tag{2.2}$$

Возьмем

$$\begin{gathered} L = \frac{d}{dt}, \\ D(L) = \left\{ v \mid v \in \mathscr{V},\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; V'),\ v(0) = 0 \right\} \end{gathered} \tag{2.3}$$

(заметим, что если $v \in \mathscr{V}$ и при этом $dv/dt \in L^{p'}(0, T; V')$, то функция $t \to v(t)$: $[0, T] \to L^2(\Omega)$ является *непрерывной*, после, быть может, исправления на множестве меры нуль). Используя равенство

$$\left(\frac{du}{dt}, v\right) + \left(u, \frac{dv}{dt}\right) = (u(T), v(T))_{L^2(\Omega)} - (u(0), v(0))_{L^2(\Omega)},$$

справедливое для всех таких $u, v \in \mathscr{V}$, что $du/dt \in \mathscr{V}'$, $dv/dt \in \mathscr{V}'$, можно проверить, что

$$\begin{gathered} L^* = -\frac{d}{dt}, \\ D(L^*) = \left\{ v \mid v \in \mathscr{V},\ \frac{dv}{dt} \in \mathscr{V}',\ v(T) = 0 \right\}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Таким образом, $L \geqslant 0$, $L^* \geqslant 0$, и мы находимся в условиях теоремы 1.2 ●

Определение оператора $\mathscr{A}$.

Будем пользоваться теми же обозначениями, как в п. 2.6.1 гл. 2; пусть N_1 (соответственно N_2) — число дифференцирований по x порядка $\leqslant m - 1$ (соответственно m), и пусть $A_\alpha(x, t, \eta, \xi)$ — семейство вещественных функций ($|\alpha| \leqslant m$), определенных в $Q \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ и удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} \text{для почти всех } x, t \in Q \text{ функция } \eta, \xi \to A_\alpha(x, t, \eta, \xi) \\ \text{непрерывна на } \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \text{ и } \forall \eta, \xi \text{ функция} \\ x, t \to A_\alpha(x, t, \eta, \xi) \text{ измерима на } Q. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Положим

$$D^k u = \{D^\beta u,\ |\beta| = k\} \quad (\textit{дифференцирования по } x),$$
$$\delta u = \{u,\ Du,\ \ldots,\ D^{m-1}u\},$$
$$A_\alpha(x, t, \delta u, D^m v)\colon\ x, t \to A_\alpha(x, t, \delta u(x, t), D^m v(x, t)).$$

Предполагается, что

$$\forall u, v \in L^p(0, T; W^{m, p}(\Omega)) \ (\text{или } \forall u, v \in \mathscr{V}) \text{ справедливы включения } A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) \in L^{p'}(Q) \tag{2.6}$$

1)

Тогда форма $w \to a(u, w)$, где

$$a(u, w) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx \, dt, \tag{2.7}$$

непрерывна на $\mathscr{V}$ и, следовательно,

$$a(u, w) = (\mathscr{A}(u), w), \quad \mathscr{A}(u) \in \mathscr{V}' \bullet \tag{2.8}$$

Условия на $\mathscr{A}$. Запишем (ср. п.п. 2.5 и 2.6 гл. 2)

$$\mathscr{A}(u) = \mathscr{A}(u, u),$$
$$\mathscr{A}(u, v) = \mathscr{A}_1(u, v) + \mathscr{A}_2(u),$$

где

$$(\mathscr{A}_1(u, v), w) = \sum_{|\alpha| = m} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u, D^m v) D^\alpha w \, dx \, dt, \tag{2.9}$$

$$(\mathscr{A}_2(u), w) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx \, dt. \tag{2.10}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

$$(\mathscr{A}_1(u, u), u - v) - (\mathscr{A}_1(u, v), u - v) \geqslant 0 \quad \forall u, v \in \mathscr{V}; \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} \text{если } u_j \to u \text{ в } \mathscr{V} \text{ слабо, } \frac{du_j}{dt} \to \frac{du}{dt} \text{ в } \mathscr{V}' \text{ слабо} \\ \text{и если } (\mathscr{A}_1(u_j, u_j) - \mathscr{A}_1(u_j, u),\ u_j - u) \to 0, \text{ то} \\ A_\alpha(x, t, \delta u_j, D^m u_j) \to A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) \text{ в } L^p(Q) \text{ слабо;} \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$(\text{коэрцитивность}) \quad \frac{(\mathscr{A}(v), v)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty. \tag{2.13}$$

---

1) Мы можем, как в (2.41) (гл. 2), указать достаточное алгебраическое условие справедливости (2.6), например:

$$|A_\alpha(x, t, \eta, \xi)| \leqslant c\,[\,|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k(x, t)], \qquad k \in L^{p'}(Q).$$

Замечание 2.1. Можно указать, как и в теореме 2.8 гл. 2, достаточные условия справедливости (2.11), (2.12):

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, t, \eta, \xi)\,\xi_\alpha \frac{1}{|\xi|+|\xi|^{p-1}} \to \infty \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty \tag{2.14}$$

для почти всех фиксированных x, t из Q и ограниченных η,

$$\sum_{|\alpha|=m} \left(A_\alpha(x, t, \eta, \xi) - A_\alpha(x, t, \eta, \xi^*)\right)(\xi_\alpha - \xi_\alpha^*) > 0$$

$$\text{если } \xi \neq \xi^*, \text{ для почти всех } x, t \in Q \text{ и } \forall\eta. \tag{2.15}$$

Доказательства будут такими же, как в п. 2.6.2 гл 2, причем при доказательстве аналога леммы 2.2 надо воспользоваться следующим результатом:

$$\text{если } u_j \to u \text{ в } \mathscr{V} \text{ слабо и если } u_j' = \frac{du_j}{dt} \to u' \text{ в } \mathscr{V}'$$

$$\text{слабо, то } u_j \to u \text{ в } L^p(0, T;\ W^{m-1, p}(\Omega)) \textit{ сильно.} \tag{2.16}$$

Это утверждение вытекает из теоремы 5.1 гл. 1, если положить

$B_0 = W^{m, p}(\Omega)$, $B_1 = W^{-m, p'}(\Omega)$ и $B = W^{m-1, p}(\Omega)$, $p_0 = p$, $p_1 = p'$ ●

Мы собираемся показать, что в предположениях (2.11), (2.12), (2.13)

оператор $\mathscr{A}$ является псевдомонотонным на $D(L)$, т. е. удовлетворяет (1.36). (2.17)

Как нетрудно видеть, условие (1.37) выполнено с $\theta = 0$, откуда выводится

Теорема 2.1. *Пусть оператор $\mathscr{A}(u)$ задается с помощью* (2.8), *и выполнены предположения* (2.5), (2.6), (2.11), (2.12), (2.13). *Пусть $\mathscr{V}$ определяется из* (2.1), *причем выполнены включения* (2.2). *Тогда для заданного f из $\mathscr{V}'$ существует такое $u \in \mathscr{V}$, что $\partial u/\partial t \in \mathscr{V}'$ и*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{A}(u) = f, \tag{2.18}$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ ●} \tag{2.19}$$

Если мы возьмем $V = W_0^{m, p}(\Omega)$, то установим разрешимость следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u)\right) = f,$$

$$f \in L^{p'}(0, T;\ W^{-m, p'}(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$D^\alpha u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad |\alpha| \leqslant m - 1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \text{ ●}$$

Доказательство условия (2.17). Поскольку $\mathcal{A}$ представляется в виде суммы операторов (2.9), (2.10), то можно показать, как в п. 2.6 гл. 2, что (2.17) вытекает из следующих двух условий (коль скоро мы уже проверили, что наш оператор семинепрерывен и отображает ограниченные множества в ограниченные):

$$\begin{gathered}\text{если } u_j \to u \text{ в } \mathcal{V} \text{ слабо, } u'_j \to u' \text{ в } \mathcal{V}' \text{ слабо и если} \\ (\mathcal{A}(u_j, u_j) - \mathcal{A}(u_j, u), u_j - u) \to 0, \text{ то } \mathcal{A}(u_j\ v) \to \mathcal{A}(u, v) \\ \text{в } \mathcal{V}' \text{ слабо } \forall v \in \mathcal{V};\end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered}\text{если } u_j \to u \text{ в } \mathcal{V} \text{ слабо, } u'_j \to u' \text{ в } \mathcal{V}' \text{ слабо и если} \\ \mathcal{A}(u_j, v) \to \psi \text{ в } \mathcal{V}', \text{ то } (\mathcal{A}(u_j, v), u_j) \to (\psi, u) \bullet\end{gathered} \tag{2.22}$$

Проверка условия (2.21). Согласно определению операторов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, из (2.21) вытекает, что

$$(\mathcal{A}_1(u_j, u_j) - \mathcal{A}_1(u_j, u), u_j - u) \to 0,$$

и, следовательно, можно применить (2.12). Тогда

$$A_\alpha(x, t, \delta u_j, D^m u_j) \to A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) \text{ в } L^{p'}(Q) \text{ слабо,}$$

и, таким образом,

$$(\mathcal{A}_2(u_j), w) \to (\mathcal{A}_2(u), w) \quad \forall w \in \mathcal{V}.$$

С другой стороны, согласно (2.16),

$$A_\alpha(x, t, \delta u_j, D^m v) \to A_\alpha(x, t, \delta u, D^m v) \text{ в } L^{p'}(Q) \textit{ сильно,}$$

откуда, в частности,

$$(\mathcal{A}_1(u_j, v), w) \to (\mathcal{A}_1(u, v), w) \quad \forall w \in \mathcal{V}.$$

Проверка условия (2.22). Благодаря (2.16) $\mathcal{A}_1(u_j, v) \to \mathcal{A}_1(u, v)$ в $\mathcal{V}'$ *сильно* и, следовательно,

$$(\mathcal{A}_1(u_j, v), u_j) \to (\mathcal{A}_1(u, v), u), \tag{2.23}$$

$$\mathcal{A}_2(u_j) = \mathcal{A}(u_j, v) - \mathcal{A}_1(u_j, v) \to \psi - \mathcal{A}_1(u, v) \text{ в } \mathcal{V}' \text{ слабо.} \tag{2.24}$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}_2(u_j), u_j - u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u_j, D^m u_j) D^\alpha(u_j - u)\, dx\, dt,$$

и ввиду (2.16)

$$|(\mathcal{A}_2(u_j), u_j - u)| \leqslant c \| u_j - u \|_{L^p(0, T;\, W^{m-1, p}(\Omega))} \to 0. \tag{2.25}$$

Далее, из равенства

$$(\mathcal{A}(u_j, v), u_j) = (\mathcal{A}_1(u_j, v), u_j) + (\mathcal{A}_2(u_j), u) + (\mathcal{A}_2(u_j), u_j - u),$$

используя (2.23), (2.24), (2.25), получим

$$(\mathcal{A}(u_j, v), u_j) \to (\mathcal{A}_1(u, v) + \psi - \mathcal{A}_1(u, v), u) = (\psi, u) \bullet$$

Замечание 2.2. Метод доказательства теоремы 1.2 применительно к рассматриваемой нами ситуации состоит в том, что уравнение (2.18) приближается уравнением

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} J^{-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A}(u_\varepsilon) = f, \tag{2.26}$$

где J: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ — отображение двойственности относительно $\psi(r) = r$. Если взять пространство $V = W_0^{m, p}(\Omega)$, снабженное нормой

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha v \|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

то оператор J^{-1} будет обратным к оператору

$$\varphi \to (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (|D^\alpha \varphi|^{p-2} D^\alpha \varphi).$$

Таким образом, (2.26) является *интегродифференциальным* уравнением, и можно поставить вопрос о том, в каком смысле оно эллиптическое! Однако (2.18) можно также приблизить уравнением

$$(-1)^m \varepsilon \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} u_\varepsilon + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A}(u_\varepsilon) = f, \tag{2.27}$$

с m краевыми условиями при $t = T$, — и на этот раз (2.27) будет действительно *эллиптическим уравнением*.

Более того, можно приближать (2.18) уравнением

$$(-1)^q \varepsilon \frac{\partial^{2q}}{\partial t^{2q}} u_\varepsilon + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A}(u_\varepsilon) = f, \tag{2.28}$$

где $q \geqslant 1$ — произвольное фиксированное число. Доказательство сходимости этой процедуры при $q = 1$ можно найти в работе Лионса [9] $\bullet$

Замечание 2.3. Выше мы всегда использовали теорему 1.2 для случая $\theta = 0$. Теперь мы приведем пример, в котором можно получить больше, беря $0 < \theta < 1$. Рассмотрим ситуацию из п. 5.2 гл. 2. Другими словами, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p, \tag{2.29}$$
$$\operatorname{div} u = 0, \quad u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad u(x, 0) = 0.$$

Возьмем

$$\mathcal{V} = L^p(0, T; V),$$

где V определено в (5.12) (см. гл. 2), и возьмем оператор $\mathscr{A}$, определенный с помощью равенства

$$(\mathscr{A}(u), v) = \nu \sum_{i=1,\ j=1}^{n} \int_Q |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx\, dt + \int_0^T b(u, u, v)\, dt,$$

где

$$b(u, v, w) = \sum_{i,\ j=1}^{n} \int_\Omega u_i (D_i v_j) w_j\, dx.$$

В качестве области определения $D(L)$ возьмем

$$D(L) = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v' \in \mathscr{V}',\ v(0) = 0\},$$

так что

$$D(L) \subset L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^n). \tag{2.30}$$

Посмотрим теперь, при каких условиях можно применить теорему 1.2 [1]; главное состоит в том, чтобы выяснить, когда оператор $\mathscr{A}$ отображает $D(L)$ в $\mathscr{V}'$ и при этом выполнено условие (1.37).

Мы покажем, что это произойдет в случае

$$p \geqslant 1 + \frac{2n}{n+2}, \tag{2.31}$$

и тем самым мы получим новое доказательство теоремы 5.1 гл. 2 (основанное на другом методе).

Ограничимся случаем (наиболее важным)

$$n > 2, \quad 1 + \frac{2n}{n+2} \leqslant p < n. \tag{2.32}$$

Имеем

$$\mathscr{A}(u) = \mathscr{A}_1(u) + \mathscr{A}_2(u),$$

$$(\mathscr{A}_1(u), v) = \nu \sum_{i,\ j=1}^{n} \int_Q |\nabla u|^{p-2} D_i u_j D_i v_j\, dx,$$

$$(\mathscr{A}_2(u), v) = \int_0^T b(u, u, v)\, dt.$$

Так как оператор $\mathscr{A}_1$ отображает $\mathscr{V}$ в $\mathscr{V}'$, то все сводится к проверке нужного нам свойства для оператора $\mathscr{A}_2$ (в дейст-

---

[1] Попутно мы увидим, что, вообще говоря, мы не всегда будем находиться в условиях применимости теоремы 1.1.

вительности для $\mathcal{A}_2$ имеет место некоторое условие монотонности). Имеем (обозначая через $\|v\|$ норму в $\mathcal{V}$)

$$|(\mathcal{A}_2(u),\ v)| \leqslant \int_0^T |b(u,\ v,\ u)|\,dt \leqslant c_1 \|v\|\ \|u\|^2_{L^\rho(Q)}, \quad \text{если } \frac{2}{\rho}+\frac{1}{p}=1. \tag{2.33}$$

Однако, согласно теореме Соболева,

$$W^{1,\,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n},$$

и в силу (2.30)

$$D(L) \subset L^p(0,\ T;\ L^q(\Omega)^n) \cap L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)^n), \tag{2.34}$$

а тогда посредством интерполяции получим

$$D(L) \subset L^r(0,\ T;\ L^s(\Omega)^n), \tag{2.35}$$

где

$$\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{p}, \qquad \frac{1}{s}=\frac{\alpha}{q}+\frac{1-\alpha}{2}, \qquad 0<\alpha<1.$$

Мы подберем α таким образом, чтобы $r=s$. Пусть

$$\alpha=\frac{n}{n+2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r}=\frac{n}{(n+2)\,p} \text{ и } r \geqslant \rho, \text{ если } \frac{n}{(n+2)\,p} \leqslant \frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},$$

т. е. если выполнено неравенство (2.31). С другой стороны, в силу неравенств выпуклости

$$\|u\|_{L^r(Q)} \leqslant c_2 \|u\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}_{D(L)}. \tag{2.36}$$

Тогда из (2.33) следует, что $\mathcal{A}_2(u) \in \mathcal{V}'$ и

$$\|\mathcal{A}_2(u)\|_* \leqslant c_3 \|u\|^{2\alpha} \|u\|^{2(1-\alpha)}_{D(L)} \leqslant c_4 \|u\|^2 + c_4 \|u\|^{2\alpha} \|Lu\|_*^{2(1-\alpha)}.$$

Но $2(1-\alpha)<1$ (поскольку $n>2$) и, следовательно, $\forall \varepsilon>0$ существует такое c_ε, что

$$\|u\|^{2\alpha} \|Lu\|_*^{2(1-\alpha)} \leqslant \varepsilon \|Lu\|_* + c_\varepsilon \|u\|^{2\alpha/(2\alpha-1)},$$

и тогда $\forall \varepsilon>0$ существует такая ограниченная на любом компакте функция ψ_ε, что

$$\|\mathcal{A}_2(u)\|_* \leqslant \varepsilon \|Lu\|_* + \psi_\varepsilon(\|u\|).$$

Итак, мы можем применить теорему 1.2 ●

Замечание 2.4. Мы решили задачу для $u_0=0$. Метод Фаэдо — Галёркина более легко (в принципе) приспосабливается к случаю $u_0 \neq 0$; однако случай $u_0 \neq 0$ можно разобрать с помощью вариантов методов § 1; мы отсылаем к работе Бреэиса [6]●

2.2 Общие параболические задачи. Периодические решения

Мы рассматриваем тот же самый оператор $\mathcal{A}$, что и в п. 2.1, но на этот раз возьмем

$$L = \frac{d}{dt},$$
$$D(L) = \left\{ v \mid v \in \mathscr{V}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; V') = \mathscr{V}', \quad v(0) = v(T) \right\}. \tag{2.37}$$

Имеем

$$L^* = -L, \tag{2.38}$$

$$(Lv, v) = 0 \quad \forall v \in D(L). \tag{2.39}$$

Таким образом, можно применить теоремы 1.1 и 1.2. Если все это применить к ситуации замечания 2.3, то мы получим *существование решения* $\{u, p\}$ *задачи*

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{2.40}$$

коль скоро выполнено неравенство (2.31).

Таким образом, доказано существование *периодического решения*●

Замечание 2.5. Имеет место существование (и, кроме того, единственность) решения задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \\ f \text{ принадлежит } L^{p'}(0; T; W^{-1,p'}(\Omega)), \\ u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \\ u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \\ u(0) = u(T). \end{gathered} \tag{2.41}$$

В том случае, *когда* $p \geqslant 2$, мы можем приблизить задачу (2.41) задачей:

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = f, \qquad (2.42)$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T), \quad u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(T).$$

В том случае, когда $1 < p < 2$, мы приближаем (2.41) задачей

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^{p'-2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = f, \qquad (2.43)$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T), \quad u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(T).$$

Таким образом, мы уже второй раз видим, что в приложениях *«эллиптическую регуляризацию» можно проводить многими различными способами* ●

2.3. Нелинейные гиперболические системы первого порядка

В цилиндре $Q = \Omega \times]0, T[$ рассмотрим $n+1$ матриц

$$B_0(x, t),\ B_1(x, t),\ \ldots,\ B_n(x, t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^n), \qquad (2.44)$$

обладающих такими свойствами:

элементы матрицы B_i и все их первые производные по x принадлежат $L^\infty(Q)$; (2.45)

$$B_i^* = B_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (2.46)$$

Для вектора $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$, где функции φ_i определены в Q, положим

$$B\varphi = \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + B_0 \varphi. \qquad (2.47)$$

Предположим, что

$$B_0(x, t) + B_0^*(x, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(x, t) \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q. \qquad (2.48)$$

Тогда

$$(B\varphi, \varphi) \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(Q).$$

Теперь мы хотим определить *максимальное монотонное расширение* оператора B, определенного на $\mathscr{D}(Q)$ и рассматриваемого как неограниченный оператор в $L^2(Q)$ (см. Агранович

[1], Фридрихс [1], Фридрихс и Лакс [1], Лакс и Филлипс [1]). Положим

$$B_\nu(x, t) = \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \cos(n, x_i) \text{ на } \Sigma, \tag{2.49}$$

$$n \text{ — нормаль к } \Gamma,$$

и будем считать, что

$$\text{матрица } B_\nu(x, t) \text{ обратима } \forall x, t \in \Sigma. \tag{2.50}$$

Зададим далее на Σ

$$\beta(x, t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^q), \quad q \leqslant N, \tag{2.51}$$

$$\operatorname{rang} \beta(x, t) = q, \text{ элементы } \beta \text{ принадлежат } \mathscr{C}^1(\bar{\Sigma}).$$

Далее, определим (см. цитированные выше работы)

$$D(B; L^2(Q)) = \{v \mid v \in (L^2(Q))^N, \ Bv \in (L^2(Q))^N,$$

$$\beta(x, t) v(x, t) = 0 \text{ почти всюду на } \Sigma\}^{1)}. \tag{2.52}$$

Можно показать, что если выполнены следующие предположения:

(i) $(B_\nu(x, t)\xi, \xi) \geqslant 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N$, когда $\beta(x, t)\xi = 0$;

(ii) в любом подпространстве $\mathbb{R}^N$, строго содержащем подпространство таких ξ, что $\beta(x, t)\xi = 0$, найдется такое η, что $(B_\nu(x, t)\eta, \eta) < 0$, (2.53)

то оператор B будет *максимальным* ●

Определим теперь пространство

$$\mathscr{V} = (L^p(Q))^N \tag{2.54}$$

и оператор

$$L\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + B_0(x, t) \varphi \tag{2.55}$$

с областью определения

$$D(L) = \{v \mid v \in \mathscr{V}, \ Lv \in \mathscr{V}' = (L^{p'}(Q))^N,$$

$$\beta(x, t) v = 0 \text{ почти всюду на } \Sigma,$$

$$v(x, 0) = 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}^{2)}. \tag{2.56}$$

Далее можио показать (см. Бардос — Брезис [1]), что таким образом определенный оператор L *максимален* и $\geqslant 0$.

Если далее мы возьмем (например!) в качестве $\mathscr{A}$ оператор

$$\mathscr{A}(v) = |v|^{p-2} v, \tag{2.57}$$

---

[1] Это определенне имеет смысл.

[2] Эти условия нмеют смысл.

то из теоремы 1.1 будет следовать *существование* (а поскольку $\mathscr{A}$ — строго монотонный оператор, то одновременно и *единственность*) решения $u \in D(L)$ системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0(x, t) u + |u|^{p-2} u = f, \qquad (2.58)$$

где f принадлежит $(L^{p'}(Q))^N$ ●

Замечание 2.6. Можно получить другое максимальное расширение оператора L, определенного на $\mathscr{D}(Q)$ с помощью (2.55), рассмотрев

$$D(L) = \{v \mid v \in \mathscr{V}, \ Lv \in \mathscr{V}', \ \beta(x, t) v = 0$$
$$\text{почти всюду на } \Sigma, \ v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in \Omega\}. \qquad (2.59)$$

Применяя опять теорему 1.1, мы получим существование (и единственность) *периодического* (*по* t) *решения* системы (2.58)[1]●

2.4. Нелинейные гиперболические уравнения первого порядка и нелинейные уравнения переноса

Сейчас мы рассмотрим случай, аналогичный рассмотренному в предыдущем пункте, только теперь $N = 1$. На этот раз B_i будут *скалярными вещественными функциями*, и мы предположим, что (подобно (2.48))

$$2B_0(x, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(x, t) \geqslant 0 \quad \text{почти всюду в } Q. \qquad (2.60)$$

В отличие от предыдущего *мы не налагаем условие, аналогичное* (2.50). Определив опять функцию $B_\nu(x, t)$ с помощью (2.49), мы будем допускать, что она может *обращаться в нуль* на Σ. Определим далее

$$\Sigma_- = \{x, t \mid x, t \in \Sigma, \ B_\nu(x, t) < 0\}. \qquad (2.61)$$

Полагая

$$L\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + B_0(x, t) \varphi, \qquad (2.62)$$

сначала определим

$$D(L_0) = \{v \mid v \in L^p(Q) = \mathscr{V}, \quad Lv \in L^{p'}(Q) = \mathscr{V}',$$
$$v = 0 \text{ на } \Sigma_-, \ v(x, 0) = 0\}, \qquad (2.63)$$

---

[1] Краевые условия по x остаются без изменения.

а затем положим $Lv = L_0 v$, если $v \in D(L_0)$, и

$$L = \textit{замыкание } L_0. \tag{2.64}$$

Можно доказать (см. Бардос [1]), что $L \geqslant 0$ и L является максимальным оператором.

Если $\mathcal{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ — псевдомонотонный коэрцитивный оператор, то мы докажем существование функции $u \in D(L)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0(x, t)\,u + \mathcal{A}(u) = f. \tag{2.65}$$

Методами такого типа можно решать *нелинейные задачи для уравнения переноса.*

Пусть ω — локально компактное пространство в $\mathbb{R}^n$, снабженное мерой Радона $\partial\mu(\omega)$, $\omega \in \boldsymbol{\omega}$.

Мы сейчас покажем, как можно решать следующую задачу: требуется найти функцию $u = u(x, \omega, t)$, определенную в $Q \times \boldsymbol{\omega}$ и удовлетворяющую уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_{\boldsymbol{\omega}} K(x, t, \omega, \omega')\,u(x, \omega', t)\,d\mu(\omega') + \\ + |u|^{p-2}u = f,\ f \text{ принадлежит } L^{p'}(Q \times \omega)\text{[1]},\end{gathered} \tag{2.66}$$

и условиям

$$u \in L^p(Q \times \boldsymbol{\omega}), \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned} u(x, \omega, t) = 0, \text{ если } \{x, t\} \in \Sigma' \times \boldsymbol{\omega} \\ \text{и если } \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cos(n, x_i) < 0, \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$u(x, \omega, 0) = 0. \tag{2.69}$$

Ядро $K(x, t, \omega, \omega')$ в (2.66) таково, что

$$u \to \int_{\boldsymbol{\omega}} K(x, t, \omega, \omega')\,u(x, \omega', t)\,d\mu(\omega') = Ku$$

есть линейный непрерывный оператор, переводящий $L^p(Q \times \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{V}$ в себя.

Линейная часть оператора (2.66) является *оператором переноса* (который, кроме всего прочего, описывает распределение нейтронов; при этом $\boldsymbol{\omega}$ обозначает пространство скоростей).

---

[1] $Q \times \boldsymbol{\omega}$ снабжается мерой $dx\,dt\,d\mu(\boldsymbol{\omega})$.

Мы применим теорему 1.1 к $\mathscr{V} = L^p(Q \times \omega)$, $\mathscr{A}(u) = |u|^{p-2}u$ и оператору L, задаваемому выражением

$$L\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + K\varphi.$$

Область определения $D(L)$ определяется следующим образом: сначала вводится

$$D(L_0) = \Big\{ v \mid v \in \mathscr{V}, \quad Lv \in \mathscr{V}', \quad v = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cos(n, x_i) < 0, \quad x, t \in \Sigma, \quad v(x, 0) = 0 \Big\},$$

и далее L определяется как замыкание L_0.

Тогда оператор $L \geqslant 0$ и *максимальный*[1] (см. Бардос [1]), так что можно, применив теорему 1.1, решить поставленную задачу (условия (2.68) принимаются в подходящем смысле) ●

Замечание 2.7. Можно также решать аналогичную задачу в пространстве

$$\mathscr{V} = L^r(\omega;\ L^p(Q)), \quad 1 < r \leqslant \infty \ ●$$

2.5. Нелинейные уравнения Шредингера

Чтобы лучше выявить идеи, мы ограничимся довольно простым случаем, отсылая по поводу более общей ситуации к работе Бардоса — Брезиса [1].

Ищется *комплекснозначная* функция u, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\,\Delta u + |u|^{p-2}u = f \tag{2.70}$$

(где f принадлежит $L^{p'}(Q)$) и условиям

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad u(x, 0) = 0 \text{ в } \Omega. \tag{2.71}$$

Чтобы перейти к вещественному случаю, положим

$$u = u_1 + iu_2 \quad (u_1,\ u_2 \text{ — вещественные функции});$$

тогда получится система:

$$\begin{aligned} u_1' + \Delta u_2 + |u|^{p-2} u_1 &= f_1, \\ u_2' - \Delta u_1 + |u|^{p-2} u_2 &= f_2. \end{aligned} \tag{2.72}$$

---

[1] Если $K \geqslant 0$. Мы можем также «включить K в $\mathscr{A}$», т. е. положить

$$\mathscr{A}(u) = |u|^{p-2}u + Ku.$$

Мы собираемся применить теорему 1.1, считая

$$\begin{gathered}\mathscr{V}=(L^p(Q))^2,\\ \mathscr{A}(v)=\{|v|^{p-2}v_1,\ |v|^{p-2}v_2\},\\ Lv=\{v_1'+\Delta v_2,\ v_2'-\Delta v_1\},\end{gathered}$$

$$D(L)=\{v\mid v\in\mathscr{V},\ Lv\in\mathscr{V}',\ v_1(0)=v_2(0)=0,\ v_1=v_2=0 \text{ на } \Sigma\ ^{1)}\}. \tag{2.73}$$

Применение теоремы 1.1 будет законным, если мы покажем, что *оператор L максимален и* $L\geqslant 0$●

Положим

$$D_0(L)=\{v\mid v_j\in C^\infty([0,T];\ W^{2,p'}(\Omega)\cap L^p(\Omega)),\ v_j=0 \text{ на } \Sigma,\ v_j(0)=0\} \tag{2.74}$$

и снабдим $D(L)$ нормой графика. Имеет место

Лемма 2.1. *Пространство $D_0(L)$ плотно в $D(L)$.*

Доказательство. Полагая $v=v_1+iv_2$, мы должны показать, что если v удовлетворяет условиям

$$v\in L^p(Q),\ v'-i\Delta v\in L^{p'}(Q),\ v=0 \text{ на } \Sigma,\ v(x,0)=0, \tag{2.75}$$

то по норме

$$\|v\|_{L^p(Q)}+\|v'-i\Delta v\|_{L^{p'}(Q)}$$

v можно приблизить последовательностью функций из

$$C^\infty([0,T];\ W^{2,p'}(\Omega)\cap L^p(\Omega)),$$

равных нулю на Σ и при $t=0$.

Положим при $h>0$

$$v_h(x,t)=\begin{cases} v(x,t-h), & \text{если } t\geqslant h,\\ 0, & \text{если } t\leqslant h;\end{cases}$$

функции v_h опять будут удовлетворять (2.75) и $v_h\to v$ при $h\to 0$ в нужной нам норме.

Следовательно, мы можем считать, что в (2.75) $v\equiv 0$ в окрестности плоскости $t=0$. Далее мы можем сгладить v по t и, таким образом, считать, что

$$v\in C_r^\infty([0,T];\ L^p(\Omega)),\ v'-i\Delta v\in C^\infty([0,T];\ L^{p'}(\Omega)),\ v=0 \text{ на } \Sigma \text{ и при } t=0. \tag{2.76}$$

---

[1] Эти условия имеют смысл.

Таким образом, нам осталось показать, что из (2.76) *вытекает* включение

$$v \in C^\infty([0, T]; W^{2, p'}(\Omega)). \tag{2.77}$$

Если $p \geqslant p'$ (т. е. $p \geqslant 2$), то v' принадлежит

$$C^\infty([0, T]; L^p(\Omega)) \subset C^\infty([0, T]; L^{p'}(\Omega))$$

и, следовательно, $\Delta v \in C^\infty([0, T]; L^{p'}(\Omega))$, а поскольку $v = 0$ на Σ, то (согласно Агмону [1]) мы получим (2.77).

Если $p < p'$, то $\Delta v \in C^\infty([0, T]; L^p(\Omega))$ (поскольку $v' \in C^\infty([0, T]; L^p(\Omega))$ и $L^{p'}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$); поэтому, согласно Агмону [1], $v \in C^\infty([0, T]; W^{2,p}(\Omega))$, так что $v \in C^\infty([0, T]; L^{q_1}(\Omega))$, где $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ (и где q_1 — произвольное конечное число, если $\frac{1}{p} - \frac{2}{n} \leqslant 0$).

Следовательно, $v' \in C^\infty([0, T]; L^{q_1}(\Omega))$. Если $q_1 \geqslant p'$, то $v' \in C^\infty([0, T]; L^{p'}(\Omega))$, и мы получим включение (2.77) таким же образом, как и выше. Если $q_1 < p'$, то $\Delta v \in C^\infty([0, T]; L^{q_1}(\Omega))$, и, следовательно,

$$v \in C^\infty([0, T]; W^{2, q_1}(\Omega)) \subset C^\infty([0, T]; L^{q_2}(\Omega)),$$

где $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{2}{n} = \frac{1}{p} - \frac{4}{n}$ и где q_2 — произвольное конечное число, если $\frac{1}{p} - \frac{4}{n} \leqslant 0$, и т. д. ●

Теперь положим

$$\begin{gathered} D(M) = \{v \mid v \in \mathscr{V}, \ Lv \in \mathscr{V}', \ v_1(T) = v_2(T) = 0, \\ v_1 = v_2 = 0 \text{ на } \Sigma\}, \\ Mv = -Lv \quad \text{для} \quad v \in D(M). \end{gathered} \tag{2.78}$$

Мы определим $D_0(M)$ таким же образом, как выше определяли $D_0(L)$, и опять $D_0(M)$ будет плотно в $D(M)$ (по норме графика). Тогда

$$(Lv, w) = (v, Mw) \quad \forall v \in D(L), \quad w \in D(M). \tag{2.79}$$

Действительно, как нетрудно проверить, равенство (2.79) выполняется для $v \in D_0(L)$ и $w \in D_0(M)$, а далее надо воспользоваться плотностью ●

Требуемый результат теперь получится с помощью следующих замечаний:

$$L \text{ — замкнутый оператор с плотной областью определения в } \mathscr{V}, \tag{2.80}$$

$$L \geqslant 0, \quad M \geqslant 0, \tag{2.81}$$

$$L^* = M. \tag{2.82}$$

Итак, нам осталось проверить эти свойства.

Проверка (2.80). Если $v = v_1 + iv_2$, то все сводится к доказательству следующего утверждения: пусть $v_n \in L^p(Q)$, $v_n \to v$ в $L^p(Q)$,

$$v_n' - i\Delta v_n \to v' - i\Delta v \quad \text{в} \quad L^{p'}(Q),$$

$v_n = 0$ на Σ и при $t = 0$; тогда $v = 0$ на Σ и при $t = 0$.

Но $v_n' \to v'$ в $L^p(0, T; W^{-2, p}(\Omega)) + L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega))$, так что (в частности!) $v_n(0) \to v(0)$ в $W^{-2, p}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ и, следовательно, $v(0) = 0$.

Аналогично $\Delta v_n \to \Delta v$ в $L^{p'}(Q) + W^{-1, p}(0, T; L^p(\Omega))$, так что, в частности, $v_n \to v$ в смысле распределений на Σ (см. Лионс — Мадженес [1]). Следовательно, $v = 0$ на Σ ●

Проверка (2.81). На $D_0(L)$ и $D_0(M)$ эти условия очевидны, далее надо перейти к пределу ●

Проверка (2.82). Пусть $w \in D(L^*)$; тогда форма $v \to (Lv, w)$ непрерывна на $D(L)$ в топологии, индуцированной топологией $\mathscr{V}$, и $(Lv, w) = (v, L^*w)$, $L^*w \in \mathscr{V}'$. Беря $v \in \mathscr{D}(Q)$, получим

$$(Lv, w) = (v, Mw),$$

следовательно,

$$Mw = L^*w \in \mathscr{V}'. \tag{2.83}$$

Итак,

$$(Lv, w) = (v, Mw), \quad v \in D(L), \quad w \in D(L^*). \tag{2.84}$$

Подставим в (2.84) функцию $v \in \mathscr{D}(\overline{Q})$, равную нулю в окрестности Σ и $t = 0$. Тогда

$$(Lv, w) = \int_\Omega v_1(x, T)\, w_1(x, T)\, dx + \int_\Omega v_2(x, T)\, w_2(x, T)\, dx + (v, Mw)$$

(где интегралами обозначена двойственность, скажем, между $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$), откуда следует, что

$$w_1(x, T) = w_2(x, T) = 0. \tag{2.85}$$

Подставляя далее в (2.84) функцию $v \in \mathscr{D}(\overline{Q})$, равную нулю в окрестности $t = 0$ и $t = T$ и равную нулю на Σ, получим

$$(Lv, w) = \int_\Sigma \left(\frac{\partial v_2}{\partial n} w_1 - \frac{\partial v_1}{\partial n} w_2 \right) d\Sigma + (v, Mw),$$

откуда следует, что

$$w_1 = w_2 = 0 \text{ на } \Sigma. \tag{2.86}$$

Таким образом, ввиду (2.85), (2.86), $w \in D(M)$ и, следовательно, $D(L^*) \subset D(M)$. Но из (2.79) следует обратное включение и, таким образом, $D(L^*) = D(M)$, откуда следует наш результат ●

Окончательный результат получается путем применения теоремы 1.1: *существует и притом только одна*[1] *функция* u, *удовлетворяющая* (2.70), (2.71).

Замечание 2.8. Методы подобного типа применимы к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-2}u = f \tag{2.87}$$

с условиями

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.88}$$

если взять

$$\begin{gathered} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u, \\ D(L) = \left\{ v \middle| \; v \in L^p(Q), \; \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \in L^{p'}(Q), \; v = 0 \text{ на } \Sigma, \right. \\ \left. v(x, 0) = 0, \;\; x \in \Omega \right\}. \end{gathered} \tag{2.89}$$

В самом деле, оператор L, определенный с помощью (2.89), *максимален* и $L \geqslant 0$. Результат, получаемый путем применения теоремы 1.1, гораздо проще в этом случае получить методом компактности или монотонности; для этого надо взять

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$D(L) = \left\{ v \,|\, v \in L^p(Q), \; \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p'}(Q), \; v = 0 \text{ при } t = 0 \right\}$$

и

$$\mathcal{A}u = -\Delta u + |u|^{p-2}u.$$

Это замечание показывает, что могут существовать несколько возможных способов представления оператора в виде $L + \mathcal{A}$ ●

2.6. Одно нелинейное уравнение, меняющее тип

В этом пункте мы рассмотрим следующую задачу:

$$x\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\left|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|^{p-2}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right) = f, \quad -1 < x < 1, \;\; 0 < t < T \tag{2.90}$$

(где p — заданное число и $1 < p < \infty$),

$$D_x^j u(\pm 1, t) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant m - 1, \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \quad \text{при } x > 0, \\ u(x, T) &= 0 \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \tag{2.92}$$

---

[1] В силу строгой монотонности $\mathcal{A}$.

Мы покажем, применяя теорему 1.1, что *сформулированная выше задача имеет и притом только одно решение* (в пространстве, которое будет введено ниже).

Замечание 2.10. Отметим, что ось $x=0$ является *особой* для уравнения (2.90); фигурирующий в (2.90) оператор является «параболическим в направлении роста t» (соответственно убывания t) при $x>0$ (соответственно при $x<0$); это изменение типа приводит к условиям (2.92): при $x>0$ «начальное» условие задается при $t=0$, тогда как при $x<0$ оно задается при $t=T$ ●

Обозначения. Положим

$$\Omega =]-1, 1[, \quad \mathcal{V} = L^p\left(0, T; W_0^{m,p}(\Omega)\right), \\ \mathcal{A}(u) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\left|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|^{p-2} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right), \tag{2.93}$$

соответствующее отображение $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ будет монотонным (и даже строго монотонным, что приводит к единственности), а также ограниченным и семинепрерывным, так что оно, кроме того, будет отображением двойственности.

Далее, определим

$$D(L) = \left\{ v \mid v \in \mathcal{V},\ x\frac{\partial v}{\partial t} \in \mathcal{V}',\ v(x, 0) = 0 \text{ при } x > 0, \right. \\ \left. v(x, T) = 0 \text{ при } x < 0\text{ [1]} \right\}, \tag{2.94}$$

где

$$\mathcal{V}' = L^{p'}(0, T; W^{-m, p'}(\Omega))$$

и

$$Lv = x\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.95}$$

Мы покажем, что

оператор L, *определенный с помощью* (2.94), (2.95), *замкнут, имеет плотную область определения,* $\geqslant 0$ *и максимален.* (2.96)

Тогда мы сможем применить теорему 1.1 и получить наше утверждение, *при этом решение* $u(x, t)$ *задачи* (2.90), (2.91), (2.92) *будет принадлежать* $D(L)$ ●

Доказательство (2.96) основано на следующем ниже результате, который представляет и некоторый самостоятельный интерес. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{W} = \left\{ v \mid v \in \mathcal{V},\ x\frac{\partial v}{\partial t} \in \mathcal{V}' \right\}, \tag{2.97}$$

---

[1] Как мы покажем, эти условия имеют смысл.

которое будет банаховым с нормой графика

$$\|v\|_{\mathcal{W}} = \|v\|_{\mathcal{V}} + \left\| x\frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathcal{V}'}.$$

Тогда имеет место

Предложение 2.1. 1) *Для любой функции* $v \in \mathcal{W}$ *можно единственным образом* 1) *определить следы* $v(x, 0)$ *и* $v(x, T)$, *так что*

$$|x|^{1/2} v(x, 0), \qquad |x|^{1/2} v(x, T) \in L^2(\Omega), \tag{2.98}$$

и указанные выражения непрерывно зависят от $v \in \mathcal{W}$ *в* $L^2(\Omega)$.

2) *Для всех* $u, v \in \mathcal{W}$ *имеет место формула Грина*

$$\left(x\frac{\partial v}{\partial t},\ w\right) + \left(v,\ x\frac{\partial w}{\partial t}\right) =$$

$$= \int_\Omega xv(x, T)\, w(x, T)\, dx - \int_\Omega xv(x, 0)\, w(x, 0)\, dx \, \bullet \tag{2.99}$$

Проверим сначала, что из этого предложения следует (2.96). Замкнутость L вытекает из 1). Далее, если $v \in D(L)$, то, подставляя в (2.99) $w = v$, получим

$$2(Lv, v) = \int_{x>0} xv(x, T)^2\, dx - \int_{x<0} xv(x, 0)^2\, dx \geqslant 0.$$

Пусть, далее, $w \in D(L^*)$; тогда форма $v \to (Lv, w)$ непрерывна в области определения $D(L)$, снабженной топологией, индуцированной топологией $\mathcal{V}$, и $(Lv, w) = (v, L^*w)$.

Беря $v \in \mathcal{D}(Q)$, мы выведем, что

$$L^*w = -x\frac{\partial w}{\partial t} \in \mathcal{V}' \tag{2.100}$$

и, следовательно, $w \in \mathcal{W}$. Далее мы можем применить (2.99) так что включение $w \in D(L^*)$ *эквивалентно* тому, что $w \in \mathcal{W}$ и

$$\int_\Omega xv(x, T)\, w(x, T)\, dx - \int_\Omega xv(x, 0)\, w(x, 0)\, dx = 0 \qquad \forall v \in D(L).$$

Отсюда выводится, что

$$D(L^*) = \Big\{ w \mid w \in \mathcal{W},\ x\frac{\partial w}{\partial t} \in \mathcal{V}', \quad w(x, 0) = 0 \ \text{ при } \ x < 0,$$

$$w(x, T) = 0 \ \text{ при } \ x > 0 \Big\}, \tag{2.101}$$

$$L^*w = -x\frac{\partial w}{\partial t}.$$

---

1) С помощью продолжения по непрерывности.

Нам остается только проверить (согласно лемме 1.1 о «максимальности»), что $L^* \geqslant 0$. Но из (2.99) следует, что

$$2(L^*w, w) = -\left[\int\limits_{x<0} xw(x, T)^2\,dx - \int\limits_{x>0} xw(x, 0)^2\,dx\right] \geqslant 0 \bullet$$

Доказательство предложения 2.1. Нам надо установить

(1) плотность «гладких» функций в $\mathscr{W}$;

(2) свойство (2.98).

Тогда мы получим равенство (2.99), которое для «гладких» v, w очевидно и которое можно продолжить по непрерывиости, используя (2.98).

Что касается вопроса о плотности, то мы сейчас проверим, что

$$\text{функции из } C^\infty\big([0, T];\ W_0^{m,p}(\Omega)\big) \text{ плотны в } \mathscr{W}. \tag{2.102}$$

(Заметим, что $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{-m,p'}(\Omega)$, поскольку область Ω одномерна.) Для доказательства (2.102) продолжим функции из $\mathscr{W}$ на все $t \in \mathbb{R}_t$ (с помощью отражения), а далее регуляризируем их по t.

Итак, все свелось к доказательству (2.98).

Нашу задачу мы редуцируем к аналогичному утверждению на всей прямой. Если $\theta \in \mathscr{D}(\bar\Omega)$, $\theta = 0$ в окрестности $x = 0$ и $\theta = 1$ в окрестности $x = \pm 1$, то $v \to \theta v$ является непрерывным отображением $\mathscr{W} \to \mathscr{W}$. Однако если $\theta = 0$, скажем, в интервале $]-x_0, x_0[$ $(x_0 < 1)$, то имеем

$$\begin{aligned}\theta v &\in L^p\big(0, T;\ W_0^{m,p}(]x_0, 1[)\big),\\ (\theta v)' &\in L^{p'}\big(0, T;\ W^{-m,p'}(]x_0, 1[)\big)\end{aligned} \tag{2.103}$$

$\Big($поскольку $(\theta v)' = \frac{1}{x}(\theta \times xv') + \theta' v$, а $\frac{1}{x}$ является мультипликатором в $W_0^{m,p}(]x_0, 1[)\Big)$. Согласно обычным теоремам о следах (см. Лионс — Петре [1]),

$$(\theta v)(x, 0) \in L^2(x_0, 1);$$

аналогичный результат, очевидно, имеет место и в интервале $]-1, -x_0[$.

Таким образом, все свелось к доказательству (2.98) для функций ψv, где $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\psi = 1$ в окрестиости $x = 0$. Но тогда мы можем работать в $\mathbb{R}$ вместо Ω. В этой связи положим

$$\mathscr{W}(\mathbb{R}) = \{v \mid v \in L^p\big(0, T;\ W^{m,p}(\mathbb{R})\big),\ xv' \in L^{p'}\big(0, T;\ W^{-m,p'}(\mathbb{R})\big)\}, \tag{2.104}$$

и наша задача сводится к доказательству того, что[1])

«гладкие» функции плотны в $\mathscr{W}(\mathbb{R})$, и $\forall v \in \mathscr{W}(\mathbb{R})$

$$|x|^{1/2} v(x, 0) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \left\| |x|^{1/2} v(x, 0) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant c \, \| v \|_{\mathscr{W}(\mathbb{R})}. \tag{2.105}$$

Плотность доказывается таким же образом, как в случае (2.102).

Доказательство остальных утверждений (2.105) основано на двух следующих замечаниях:

(i) результат, аналогичный (2.105), легко доказывается, если мы в определении $\mathscr{W}(\mathbb{R})$ заменим xv' на $|x| v'$;

(ii) наш случай сводится к случаю (i)●

Замечание (i). Положим

$$\mathscr{H} = \left\{ v \mid v \in L^p\left(0, T; W^{m, p}(\mathbb{R})\right), \ |x| v' \in L^{p'}\left(0, T; W^{-m, p'}(\mathbb{R})\right) \right\}. \tag{2.106}$$

С помощью умножения на срезающую функцию и регуляризации по t проверяется, что функции v из $\mathscr{H}$, принадлежащие $C^\infty\left([0, T]; W^{m, p}(\mathbb{R})\right)$ и имеющие компактный носитель в $\mathbb{R} \times [0, T]$, плотны в $\mathscr{H}$. При доказательстве неравенства из (2.105) можно (после умножения на срезающую функцию) считать, что функция v равна нулю в окрестности $t = T$; тогда имеем

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, |v(x, 0)|^2 \, dx &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, |v(x, t)|^2 \, dx \right) dt = \\
&= -2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{\partial v}{\partial t} v \, dx \, dt \leqslant \\
&\leqslant 2 \| v \|_{L^p(0, T; W^{m, p}(\mathbb{R}))} \left\| |x| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^{p'}(0, T; W^{-m, p'}(\mathbb{R}))},
\end{aligned}$$

откуда следует нужный нам результат.

Замечание (ii). Здесь мы сталкиваемся с основным техническим моментом доказательства. Мы будем пользоваться следующей леммой о продолжении (Бауенди — Гривар [1]):

Лемма 2.2. *Пусть m — целое число и $m \geqslant 1$. Тогда существуют такие операторы P_1, P_2, что*

$$P_1 \in \mathscr{L}\left(W^{m, q}(0, \infty); W^{m, q}(\mathbb{R})\right) \quad \forall q, \tag{2.107}$$

$$P_2 \in \mathscr{L}\left(W^{-m, q}(0, \infty); W^{-m, q}(\mathbb{R})\right) \quad \forall q, \tag{2.108}$$

---

[1] Очевидно, что аналогичным образом тот же самый результат можно доказать для следов при $t = T$.

$$P_i\varphi = \varphi \quad \text{на} \quad]0,\ \infty[\quad \forall\varphi, \quad i = 1,\ 2, \tag{2.109}$$

$$|x|\,P_1 u = P_2(xu) \quad \forall u \in W^{m,\,q}(0,\ \infty). \tag{2.110}$$

Доказательство. Положим

$$P_1 u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при} \quad x > 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{2m} \alpha_k u(-kx) & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

где α_k — вещественные числа, подлежащие определению. Условие (2.107) будет выполняться ($\forall q$), если

$$\sum_{k=1}^{2m} (-k)^j \alpha_k = 1, \quad 0 \leqslant j \leqslant m - 1. \tag{2.111}$$

Далее заметим, что

$$|x|\,P_1 u(x) = \begin{cases} xu(x) & \text{при} \quad x > 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{2m} \dfrac{\alpha_k}{k}(-kx)\,u(-kx) & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

откуда следует (2.110), если

$$P_2 v(x) = \begin{cases} v(x) & \text{при} \quad x > 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{2m} \dfrac{\alpha_k}{k}\,v(-kx) & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы придем к нужному нам результату, если сумеем подобрать α_k таким образом, чтобы выполнялось условие (2.108) или, после транспонирования [1]),

$$P_2^* \in \mathscr{L}\left(W^{m,\,q'}(\mathbb{R});\ W_0^{m,\,q'}(0,\ \infty)\right) \quad (\forall q'). \tag{2.112}$$

Так как P_2^* задается равенством

$$P_2^*\varphi(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{2m} \frac{\alpha_k}{k^2}\,\varphi\left(-\frac{x}{k}\right), \quad \varphi \in W^{m,\,q'}(\mathbb{R}), \quad x > 0,$$

то включение (2.112) эквивалентно равенствам

$$\sum_{k=1}^{2m} \frac{\alpha_k}{k^2}\,\frac{(-1)^j}{k^j} = -1, \quad 0 \leqslant j \leqslant m - 1. \tag{2.113}$$

---

[1]) См. примечание переводчика на стр. 191 книги Лионса — Мадженеса [1]. — *Прим. перев.*

Выбирая α_k таким образом, чтобы удовлетворить равенствам (2.111), (2.113) (что возможно), мы придем к требуемому результату ●

Окончание доказательства (2.105). Пусть $v \in \mathscr{W}(\mathbb{R})$ и v_+ — сужение v на полупрямую $x > 0$. Положим

$$w = Pv = P_1(v_+) \quad (\text{т. е. } Pv(t) = P_1(v_+(t)) \text{ для почти всех } t);$$

P_1 (и P_2) определяются таким же образом, как в лемме 2.2. Имеем

$$w \in L^p(0, T; W^{m,p}(\mathbb{R})),$$

$$|x| \frac{\partial w}{\partial t} = |x| P_1\left(\frac{\partial v_+}{\partial t}\right) = P_2\left(x \frac{\partial v_+}{\partial t}\right) \quad (\text{в силу } (2.110)),$$

и, таким образом, согласно (2.108),

$$|x| \frac{\partial w}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-m,p'}(\mathbb{R})),$$

и, следовательно, $w \in \mathscr{H}$. Далее, согласно (i),

$$\left\| |x|^{1/2} w(x, 0) \right\|_{L^2(0,\infty)} \leqslant c_1 \| w \|_{\mathscr{X}} \leqslant c_2 \| v \|_{\mathscr{W}(\mathbb{R})},$$

а поскольку $w = v$ при $x > 0$, имеем

$$\left\| |x|^{1/2} v(x, 0) \right\|_{L^2(0,\infty)} \leqslant c_2 \| v \|_{\mathscr{W}(\mathbb{R})}.$$

Аналогичный результат получается после замены x на $-x$, откуда следует (2.105) ●

2.7. Нелинейные параболические задачи в нецилиндрических областях

Пусть Q — *нецилиндрическая* область в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$; предположим, что Q ограничена, содержится в полосе $0 < t < T$, ее боковая граница Σ регулярна, сечение $\Omega_s = Q \cap \{t = s\}$ «непрерывно зависит» от s и не пусто (более точно используемые предположения сформулированы у Лионса [20]).

Ищется функция $u = u(x, t)$, определенная в Q и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{|\alpha| = m} D^\alpha \left(|D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u \right) = f\,^{1)}, \tag{2.114}$$

---

[1] Через D^α обозначаются дифференцирования по x.

где f задано в Q, и условиям

$$D_x^\beta u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \qquad |\beta| \leqslant m - 1, \tag{2.115}$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega_0 \bullet \tag{2.116}$$

Мы собираемся опять применить теорему 1.1 при следующих ниже условиях. Сначала определим

$$\mathscr{V} = \{v \mid D_x^\beta v \in L^p(Q),\ |\beta| \leqslant m,\ D_x^\beta v = 0 \text{ на } \Sigma \text{ при } |\beta| \leqslant m - 1\text{[1]}\}. \tag{2.117}$$

Далее мы определим $\mathscr{A}$:

$$\begin{gathered}(\mathscr{A}(u), v) = \sum_{|\alpha|=m} \int_Q |D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u D^\alpha v\, dx\, dt, \qquad u,\ v \in \mathscr{V}, \\ \mathscr{A}(u) \in \mathscr{V}', \qquad \mathscr{A}(u) = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha\left(|D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u\right).\end{gathered} \tag{2.118}$$

Теперь положим

$$\begin{gathered}D(L) = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v' \in \mathscr{V}',\ v(x, 0) = 0\text{[2]}\}, \\ Lv = \frac{\partial v}{\partial t} \ (= v').\end{gathered} \tag{2.119}$$

Оператор L замкнут, имеет плотную область определения, и мы покажем, *что он* $\geqslant 0$ *и максимален.* Тогда из теоремы 1.1 следует, что

задача (2.114), (2.115), (2.116) *имеет единственное решение из области* $D(L)$, *определенной посредством* (2.119) (2.120)

(единственность является следствием *строгой* монотонности $\mathscr{A}$) ●

Замечание 2.11. Естественно, что в приведенном результате содержится случай цилиндрической области Q ●

Замечание 2.12. Можно изучать такими же методами, как в п. 2.6, аналогичные краевые задачи для уравнения (2.90) в нецилиндрической области в Q, когда Σ состоит из двух гладких кривых, расположенных соответственно в областях $x > 0$ и $x < 0$ ●

Положительность и максимальность L.

Вводится (исходя из тех же самых соображений, что и в п. 2.6) пространство

$$\mathscr{W} = \left\{ v \,\middle|\, v \in \mathscr{V},\ \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathscr{V}' \right\} \tag{2.121}$$

---

[1] Эти условия имеют смысл.

[2] Это условие имеет смысл.

и показывается (см. Лионс [20]; там доказательство проведено для случая $p=2$, но оно *без изменения* проходит в случае $1<p<\infty$), что $\forall u,\ v\in\mathscr{W}$ справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},\ v\right)+\left(u,\ \frac{\partial v}{\partial t}\right)=\int\limits_{\Omega_T} u(x,\ T)\,v(x,\ T)\,dx-\int\limits_{\Omega_0} u(x,\ 0)\,v(x,\ 0)\,dx. \tag{2.122}$$

Подставляя $u=v\in D(L)$ в (2.122), найдем, что

$$2(Lu,\ u)=\int\limits_{\Omega_T} u(x,\ T)^2\,dx\geqslant 0.$$

Используя (2.122), мы далее проверим, что

$$\begin{gathered} D(L^*)=\{v\mid v\in\mathscr{V},\ \ v'\in\mathscr{V}',\ \ v(x,\ T)=0,\ \ x\in\Omega_T\},\\ L^*v=-\frac{\partial v}{\partial t}; \end{gathered} \tag{2.123}$$

тогда (2.122) приводит к неравенству

$$2(L^*v,\ v)=\int\limits_{\Omega_0} v(x,\ 0)^2\,dx\geqslant 0,$$

и наш результат следует из леммы 1.1 ●

2.8. Нелинейные задачи смешанного типа

Рассмотрим цилиндрическую область $Q=\Omega\times]0,\ T[$, и пусть

$$\Sigma_0 — \text{множество положительной меры},\ \Sigma_0\subset\Sigma. \tag{2.124}$$

Ищется функция $u=u(x,\ t)$, $x,\ t\in Q$, удовлетворяющая[1] уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f\ ^{2)} \tag{2.125}$$

и условиям

$$u=0 \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \tag{2.126}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu,\ x_i)=0 \quad \text{на} \quad \Sigma-\Sigma_0, \tag{2.127}$$

$$\begin{gathered} \nu — \text{нормаль к}\ \Gamma,\\ u(x,\ 0)=0, \qquad x\in\Omega. \end{gathered} \tag{2.128}$$

---

[1] В подходящем смысле, который ниже будет уточнен.

[2] Можно таким же образом рассматривать оператор типа (2.114) и даже более общие операторы типа рассмотренных в п. 2.1.

Мы собираемся доказать *существование* решения u, используя замечание 1.2. Рассмотрим пространство

$$\mathscr{V}=\left\{v \,\middle|\, v,\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^p(Q),\ i=1,\ \ldots,\ n,\ v=0 \text{ почти всюду на } \Sigma_0\right\} \tag{2.129}$$

и определим $\mathscr{A}$ равенством

$$(\mathscr{A}(u),\ v)=\sum_{i=1}^{n}\int_Q\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,dt\quad \forall u,\ v\in\mathscr{V}. \tag{2.130}$$

Определенный таким образом оператор $\mathscr{A}: \mathscr{V}\to\mathscr{V}'$ будет монотонным, а благодаря тому, что функции $v\in\mathscr{V}$ *обращаются в нуль на* Σ_0,

$$(\mathscr{A}(v),\ v)\geqslant\alpha\|v\|^p_{\mathscr{V}},\quad \alpha>0.$$

Далее мы рассмотрим

$$D(M)=\left\{v \,\middle|\, v\in\mathscr{V},\ \frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(Q)\,^{1)};\ \ v(x,\ T)=0,\ x\in\Omega\,^{2)}\right\} \tag{2.131}$$

и

$$Mv=-\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.132}$$

Тогда $M\geqslant 0$, поскольку для $v\in D(M)$ справедливо равенство

$$2(Mv,\ v)=\int_\Omega v(x,\ 0)^2\,dx.$$

Пользуясь равенством (1.28), из замечания 1.2 мы выведем, что *существует такое* u *из* $\mathscr{V}$, *что*

$$(u,\ Mv)+(\mathscr{A}(u),\ v)=(f,\ v)\quad \forall v\in D(M). \tag{2.133}$$

Эта функция u *является* (*слабым*) *решением задачи* (2.125)—(2.128), *что можно проверить формальной выкладкой* ●

3. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. Постановка задач

В § 1 мы «приближали» *параболические* уравнения *эллиптическими*; следующий «естественный» шаг состоит в том, чтобы попытаться приближать *гиперболические* уравнения

---

1) И *не* принадлежит $\mathscr{V}'$, так что оператор M безусловно не максимальный.

2) Это условие имеет смысл.

параболическими. В этом и состоит *параболическая регуляризация*, *полезность* которой мы собираемся продемонстрировать.

Мы будем применять этот метод к *эволюционным неравенствам гиперболического типа*[1]) (до сих пор, в § 8 и 9 гл. 2, мы рассматривали только *эллиптические* и *параболические* неравенства).

Другие приложения параболической регуляризации будут даны в § 4.

3.2. Один общий результат

Обозначения и предположения. Рассмотрим пару гильбертовых пространств V и H, таких, что

$$V\subset H,\ V \text{ плотно в } H, \text{ вложение } V\to H \text{ непрерывно.} \tag{3.1}$$

Мы отождествим H с его сопряженным; тогда

$$V\subset H\subset V'.$$

Чтобы упростить запись, положим

$$L^2(0,\ T;\ V)=L^2(V),\qquad L^2(0,\ T;\ H)=L^2(H)\quad \text{и т. д.} \tag{3.2}$$

Положим, кроме того,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}&=L^2(0,\ T;\ V\times V)=L^2(V)\times L^2(V),\\ \mathcal{H}&=L^2(0,\ T;\ V\times H)=L^2(V)\times L^2(H).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Отождествляя $\mathcal{H}$ с его сопряженным, получим

$$\mathcal{V}\subset\mathcal{H}\subset\mathcal{V}',\qquad \mathcal{V}'=L^2(V)\times L^2(V'). \tag{3.4}$$

Оператор A. Пусть задан оператор A:

$$A\in\mathcal{L}(V;\ V'),\qquad A^*=A, \tag{3.5}$$

причем существуют такие c и α, что

$$(Av,\ v)+c\,\|v\|_H^2\geqslant\alpha\|v\|_V^2,\qquad \alpha>0,\qquad \forall v\in V \tag{3.6}$$

(где $(Av,\ v)$ обозначает скалярное произведение между V' и V).

Скалярное произведение на V. Мы снабдим V скалярным произведением (что возможно ввиду (3.5), (3.6))

$$((u,\ v))=((A+c)\,u,\ v),\qquad u,\ v\in V. \tag{3.7}$$

Оператор A *на* $L^2(V)$. Чтобы не увеличивать число обозначений, мы опять обозначим через A оператор, действующий

---

[1]) Или к неравенствам, связанным с корректными по Петровскому операторами.

из $L^2(V)$ в $L^2(V')$ и определенный равенством

$$(Av)(t) = A(v(t)) \text{ почти всюду.}$$

Оператор $\mathcal{A}$. Пусть $k > 0$. Положим

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} kI & -I \\ A & kI \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{V}'). \tag{3.8}$$

Если $v = \{v_1, v_2\} \in \mathcal{V}$, то

$$\mathcal{A}v = \{kv_1 - v_2, Av_1 + kv_2\} \in \mathcal{V}'.$$

Если в V выбрано скалярное произведение (3.7), *то в качестве скалярного произведения в* $\mathcal{H}$ *возьмем*

$$(u, v) = \int_0^T [((u_1, v_1)) + (u_2, v_2)]\, dt.$$

Далее,

$$(\mathcal{A}v, v) = \int_0^T [((kv_1 - v_2, v_1)) + (Av_1 + kv_2, v_2)]\, dt =$$

$$= \int_0^T [k((A + c)v_1, v_1) - ((A + c)v_2, v_1) + (Av_1, v_2) + k(v_2, v_2)]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T \left[k\alpha \| v_1 \|_V^2 + k \| v_2 \|_H^2 - c \| v_1 \|_H \| v_2 \|_H\right] dt.$$

Однако

$$\| v \|_H \leqslant d \| v \|_V \quad \forall v \in V, \quad d > 0, \tag{3.9}$$

и коль скоро

$$k > \frac{cd}{2\sqrt{\alpha}}, \tag{3.10}$$

мы можем заключить, что

$$\text{существует такое } \alpha_0 > 0, \text{ что} \\ (\mathcal{A}v, v) \geqslant \alpha_0 \| v \|^2 \quad \forall v \in \mathcal{V} \tag{3.11}$$ ●

Полугруппы $G(s)$ *и* $g(s)$. Рассмотрим теперь полугруппу $G(s)$, непрерывную в $L^2(V)$, $L^2(H)$ и $L^2(V')$ и являющуюся сжимающей в $L^2(H)$. Мы обозначим через $-\Lambda$ инфинитезимальный производящий оператор $G(s)$, а через $D(\Lambda; L^2(H))$ — область определения Λ в $L^2(H)$ и т. д.

С $G(s)$ мы свяжем полугруппу, действующую в $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$:

$$g(s) = \begin{pmatrix} G(s) & 0 \\ 0 & G(s) \end{pmatrix},$$

и обозначим через $-L$ инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $g(s)$; тогда

$$L=\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$D(L;\ \mathscr{H})=D(\Lambda;\ L^2(V))\times D(\Lambda;\ L^2(H))\bullet \tag{3.13}$$

Выпуклые множества $\mathscr{K}_i$. Рассмотрим два выпуклых множества $\mathscr{K}_i$, $i=1,\ 2$, таких, что

$$\begin{gathered}\mathscr{K}_i \text{ — выпуклое замкнутое подмножество } L^2(V),\\ 0\in\mathscr{K}_i,\quad i=1,\ 2,\end{gathered} \tag{3.14}$$

и предположим, что

$$\begin{gathered}\text{существуют такие } \sigma>0 \text{ и } w_0\in L^2(V), \text{ что}\\ \sigma\mathscr{K}_2+w_0\subset\mathscr{K}_1.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Замечание 3.1. Для приложений, *по-видимому*, интерес представляет только случай

$$\mathscr{K}_1=L^2(V),$$

в котором условие (3.15) выполняется при любом $\mathscr{K}_2\bullet$

Согласование (ср. с § 9 гл. 2, в частности, с п.п. 9.2 и 9.6.2). Сделаем следующие предположения:

$$G(s)Av=AG(s)v\quad \forall s\geqslant 0,\quad \forall v\in L^2(V), \tag{3.16}$$

$$G(s)\mathscr{K}_i\subset\mathscr{K}_i\quad \forall s\geqslant 0,\quad i=1,\ 2, \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered}\text{существует такое } \rho>0, \text{ что } \forall s\geqslant 0,\quad \forall v\in\mathscr{K}_i,\quad i=1,\ 2,\\ G(s)v+G^*(s)v-G^*(s)G(s)v+(\rho-1)v\in\rho\mathscr{K}_i\bullet\end{gathered} \tag{3.18}$$

Будет доказана

Теорема 3.1. *Пусть задан оператор A, удовлетворяющий* (3.5), (3.6), *и пусть оператор $\mathscr{A}$ определен с помощью* (3.8), *причем выполнено условие* (3.10). *Предположим, что выполнены условия* (3.14)—(3.18) *и, кроме того,*

$$\int_0^T((A+c)\Lambda v_1,\ v_1)\,dt\geqslant 0\quad \forall v_1\in D(\Lambda;\ L^2(V)). \tag{3.19}$$

Зададим $f\in D(\Lambda;\ L^2(H))$ и положим $F=\{0,\ f\}$ $(\in\mathscr{H})$.

Тогда существует и притом единственный элемент u, удовлетворяющий включениям

$$u\in\mathscr{K}_1\times\mathscr{K}_2=\mathscr{K},\qquad u\in D(L;\ \mathscr{H}) \tag{3.20}$$

и неравенству

$$(Lu,\ v-u)+(\mathscr{A}u,\ v-u)\geqslant(F,\ v-u)\quad \forall v\in\mathscr{K}. \tag{3.21}$$

Замечание 3.2. Вариационное неравенство (3.21) не является неравенством типа тех, с которыми мы встречались в § 9 гл. 2, поскольку *$\mathcal{A}$ не является коэрцитивным оператором на $\mathcal{V}$, а только на $\mathcal{H}$* (эта ситуация типична для гиперболических или корректных по Петровскому операторов) ●

Замечание 3.3. Прежде чем приводить *примеры* (см. п. 3.3), расшифруем неравенство (3.21). Так как

$$\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2\text{[1]},$$

то (3.21) распадается на два неравенства

$$u_1\in D(\Lambda;\ L^2(V)),\qquad u_1\in\mathcal{K}_1,$$

$$\int^T[((\Lambda u_1,\ v_1-u_1))+((ku_1-u_2,\ v_1-u_1))]\,dt\geqslant 0\qquad\forall v_1\in\mathcal{K}_1, \tag{3.22}$$

$$u_2\in D(\Lambda;\ L^2(H))\cap L^2(V),\qquad u_2\in\mathcal{K}_2,$$

$$\int_0^T[(\Lambda u_2,\ v_2-u_2)+(Au_1+ku_2,\ v_2-u_2)]\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^T(f,\ v_2-u_2)\,dt\qquad\forall v_2\in\mathcal{K}_2. \tag{3.23}$$

Частный случай: $\mathcal{K}_1=L^2(V)$. Тогда (3.22) сводится к *уравнению*

$$\Lambda u_1+ku_1-u_2=0\ \bullet \tag{3.24}$$

Доказательство теоремы 3.1. *Единственность.* Пусть u и u^* суть два решения; подставляя $v=u^*$ (соответственно $v=u$) в неравенство для u (соответственно для u^*) и складывая, мы получим

$$(L(u-u^*),\ u-u^*)+(\mathcal{A}(u-u^*),\ u-u^*)\leqslant 0. \tag{3.25}$$

Однако, поскольку полугруппа $G(s)$ является сжимающей в $L^2(H)$, то $\Lambda\geqslant 0$ на $D(\Lambda;\ L^2(H))$, а в силу (3.19) $\Lambda\geqslant 0$ на $D(\Lambda;\ L^2(V))$; мы получаем

$$(L(u-u^*),\ u-u^*)\geqslant 0;$$

благодаря (3.11) из (3.25) следует неравенство

$$\alpha_0|u-u^*|^2\leqslant 0,$$

откуда $u=u^*$ ●

---

[1] Впрочем, таким же методом, как следующий ниже, можно рассмотреть несколько более общий случай.

Доказательство теоремы 3.1. *Существование.*

1) *Параболическая регуляризация.* Рассмотрим оператор

$$\mathscr{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A+c\end{pmatrix} \tag{3.26}$$

и «заменим» $\mathscr{A}$ на $\mathscr{A}+\varepsilon\mathscr{B}$, $\varepsilon>0$. Отметим, что

$$((\mathscr{A}+\varepsilon\mathscr{B})v,\ v)\geqslant\alpha_0\|v\|^2_{\mathscr{H}}+\varepsilon\int_0^T((A+c)v_2,\ v_2)\,dt, \tag{3.27}$$

и, *в частности, оператор $\mathscr{A}+\varepsilon\mathscr{B}$ коэрцитивен на $\mathscr{V}$*[1]).

Теперь мы сможем применить результаты § 9 гл. 2. Мы находимся в условиях применимости теоремы 9.7 гл. 2. Согласно этой теореме, существует единственный элемент u_ε, удовлетворяющий включению

$$u_\varepsilon\in\mathscr{K}_1\times\mathscr{K}_2,\qquad u_\varepsilon\in D(L;\ \mathscr{V}), \tag{3.28}$$

и неравенству

$$(Lu_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)+((\mathscr{A}+\varepsilon\mathscr{B})u_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)\geqslant(F,\ v-u_\varepsilon)\quad\forall v\in\mathscr{K}. \tag{3.29}$$

Задача (3.28), (3.29) называется *параболической регуляризацией* исходной задачи.

2) *Оценки для u_ε.*

Первая оценка. Подставим $v=0$ в (3.29) (поскольку $0\in\mathscr{K}_i$). Тогда

$$(Lu_\varepsilon,\ u_\varepsilon)+((\mathscr{A}+\varepsilon\mathscr{B})u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\leqslant(F,\ u_\varepsilon)=\int_0^T(f,\ u_{\varepsilon2})\,dt\leqslant c\|u_{\varepsilon2}\|_{L^2(H)},$$

а так как $(Lu_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\geqslant0$, то в силу (3.27)

$$u_\varepsilon\ \text{ограничены в}\ \mathscr{H}\ \text{при}\ \varepsilon\to0. \tag{3.30}$$

Вторая оценка. Теперь мы воспользуемся методом доказательства теоремы 9.7. Умножим обе части (3.29) на $\rho>0$ (фигурирующее в (3.18)) и определим v из равенства (что возможно ввиду (3.18))

$$\rho v=[g(s)+g^*(s)-g^*(s)\,g(s)+(\rho-1)]\,u_\varepsilon.$$

Получим

$$\begin{gathered}(Lu_\varepsilon,\ -(g^*(s)-I)(g(s)-I)\,u_\varepsilon)+\\ +((\mathscr{A}+\varepsilon\mathscr{B})u_\varepsilon,\ -(g^*(s)-I)(g(s)-I)\,u_\varepsilon)\geqslant\\ \geqslant(F,\ -(g^*(s)-I)(g(s)-I)\,u_\varepsilon).\end{gathered}$$

---

[1]) Мы добавили к $\mathscr{A}$ именно то, чего не хватало для коэрцитивности на $\mathscr{V}$.

Однако, благодаря (3.16) имеем

$$(L(g(s)-I)u_\varepsilon,\ (g(s)-I)u_\varepsilon)+\\ +((\mathcal{A}+\varepsilon\mathcal{B})(g(s)-I)u_\varepsilon,\ (g(s)-I)u_\varepsilon)\leqslant\\ \leqslant((g(s)-I)F,\ (g(s)-I)u_\varepsilon), \qquad (3.31)$$

и поскольку $L\geqslant 0$, мы выведем отсюда, используя (3.27), что

$$\|g(s)-I)u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}}\leqslant c_1\|(G(s)-I)f\|_{L^2(H)}\|(g(s)-I)u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}},$$

откуда

$$\left\|\frac{g(s)-I}{s}\cdot u_\varepsilon\right\|_{\mathcal{H}}\leqslant c_1\left\|\frac{G(s)-I}{s}\cdot f\right\|_{L^2(H)}. \qquad (3.32)$$

Поскольку по предположению $f\in D(\Lambda;\ L^2(H))$, то из (3.32) мы выведем, устремляя $s\to 0$, что

$$\|Lu_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}\leqslant \mathrm{const}.$$

Эта оценка вместе с (3.30) показывает, что

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } D(L;\ \mathcal{H}) \text{ при } \varepsilon\to 0. \qquad (3.33)$$

Третья оценка. Теперь в (3.29) подставим

$$v=\{\sigma u_{\varepsilon 2}+w_0,\ u_{\varepsilon 2}\},$$

что законно ввиду (3.15). Тогда (3.29) перейдет в неравенство

$$\int_0^T((A+c)(\Lambda u_{\varepsilon 1}+ku_{\varepsilon 1}-u_{\varepsilon 2}),\ \sigma u_{\varepsilon 2}+w_0-u_{\varepsilon 1})\,dt\geqslant 0,$$

откуда

$$\sigma\int_0^T((A+c)u_{\varepsilon 2},\ u_{\varepsilon 2})\,dt\leqslant\\ \leqslant\int_0^T((A+c)(\Lambda u_{\varepsilon 1}+ku_{\varepsilon 1}),\ \sigma u_{\varepsilon 2}+w_0-u_{\varepsilon 1})\,dt-\\ -\int_0^T((A+c)u_{\varepsilon 2},\ w_0-u_{\varepsilon 1})\,dt,$$

и потому

$$\alpha\sigma\|u_{\varepsilon 2}\|^2_{L^2(V)}\leqslant c_2\|\Lambda u_{\varepsilon 1}+ku_{\varepsilon 1}\|_{L^2(V)}(\|u_{\varepsilon 2}\|_{L^2(V)}+\|w_0-u_{\varepsilon 1}\|_{L^2(V)})+\\ +(c_2\|u_{\varepsilon 2}\|_{L^2(V)}\|w_0-u_{\varepsilon 1}\|_{L^2(V)}). \qquad (3.34)$$

Однако благодаря (3.33)

$$\|u_{\varepsilon 1}\|_{L^2(V)}+\|\Lambda u_{\varepsilon 1}\|_{L^2(V)}\leqslant c_3,$$

и из (3.34) следует неравенство

$$\| u_{\varepsilon 2} \|^2_{L^2(V)} \leqslant c_4 (1 + \| u_{\varepsilon 2} \|_{L^2(V)}),$$

откуда

$$u_{\varepsilon 2} \text{ ограничены в } L^2(V), \tag{3.35}$$

а потому (благодаря (3.33))

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } \mathscr{V}. \tag{3.36}$$

3) *Предельный переход.*

Мы можем выделить такую подпоследовательность (для которой мы сохраним обозначение u_ε), что

$$u_\varepsilon \to u \text{ в } D(L;\ \mathscr{H}) \cap \mathscr{V} \text{ слабо, } u \in \mathscr{K}.$$

Тогда $\varepsilon(\mathscr{B}u_\varepsilon,\ v - u_\varepsilon) \to 0$, и из (3.29) следует (3.21) ●

Замечание 3.4. Можно рассмотреть случай оператора A, *зависящего от* t. См. Брезис — Лионс [1], замечание 2° ●

Замечание 3.5. Третья оценка в доказательстве, очевидно, теряет смысл, когда

$$\mathscr{K}_2 \text{ является ограниченной областью в } L^2(V). \tag{3.37}$$

В этом случае условие (3.15) *является излишним* ●

Замечание 3.6. Предположим, что оператор $\mathscr{A}$ задается с помощью (3.8), где $k=0$, т. е.

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

и пусть выполнено следующее предположение: $\mathscr{K}_1 = L^2(V)$, $\mathscr{K}_2$ — *ограниченная область в* $L^2(V)$, *и если* $u_j \in D(\Lambda;\ L^2(V))$, *а* $(\Lambda + \varepsilon) v_j$ *ограничены в* $L^2(V)$ $(\forall j;\ \varepsilon \to 0)$, *то* v_j *ограничены в* $L^2(V)$.

При этих условиях теорема 3.1 *остается в силе*[1]. Действительно, в этом случае возьмем

$$\mathscr{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A + c \end{pmatrix},$$

так чтобы

$$((\mathscr{A} + \varepsilon\mathscr{B}) v,\ v) = \varepsilon(\mathscr{B}v,\ v) \geqslant \varepsilon \| v \|^2_{\mathscr{V}}.$$

Тогда существует такой элемент u_ε из $\mathscr{K}_1 \times \mathscr{K}_2$ и из $D(L;\ \mathscr{V})$, что выполнено неравенство (3.29), откуда

$$((A + c)(\Lambda u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2} + \varepsilon u_{\varepsilon 1}),\ v_1 - u_{\varepsilon 1}) \geqslant 0 \quad \forall v_1 \in L^2(V)$$

---

[1] В той части, которая касается *существования*. Единственность надо доказывать в каждом случае непосредственно, см. следующий ниже пример 3.4.

и, следовательно,

$$(\Lambda + \varepsilon) u_{\varepsilon 1} = u_{\varepsilon 2}.$$

Однако $u_{\varepsilon 2}$ принадлежат $\mathscr{K}_2$ — *ограниченной области в* $L^2(V)$, и, следовательно, $u_{\varepsilon 1}$ ограничены в $L^2(V)$ (а также в $D(\Lambda; L^2(V))$). Таким образом, мы уже получили те результаты, которые вытекают из первой и третьей оценок (в доказательстве теоремы 3.1). Вторая оценка проходит без изменения, откуда следует наша теорема ●

Замечание 3.7. Мы можем заменить (3.17), (3.18) следующими предположениями:

существует такое $\beta \in \mathbb{R}$, что $\forall s \geqslant 0$: $\exp(\beta s) G(s) \mathscr{K}_i \subset$

$$\subset \mathscr{K}_i, \quad i = 1, 2, \tag{3.17'}$$

существует такое $\rho > 0$, что $\forall s \geqslant 0$, $\forall v \in \mathscr{K}_i$, $i = 1, 2$,

$$\exp(\beta s) G(s) v + \exp(-\beta s) G^*(s) v = \tag{3.18'}$$
$$= G^*(s) G(s) v + (\rho - 1) v \in \rho \mathscr{K}_i.$$

3.3. Приложения

Пример 3.1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с регулярной границей Γ. В качестве нриложения общей теоремы 3.1 нами будет доказана

Теорема 3.2. *Пусть задана функция* $f = f(x, t)$, *причем*

$$f, \ \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \quad f(x, 0) = 0. \tag{3.38}$$

Тогда существует и притом только одна такая функция u, *что*

$$u, \ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ \frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(Q), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{3.40}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{3.41}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{1)}, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

---

[1] $\partial/\partial n$ — производная по нормали к Γ, направленная вне Ω. В силу (3.39)

$$\Delta u = \partial^2 u/\partial t^2 - f \in L^2(Q),$$

так что $\partial u/\partial n$ имеет смысл, согласно Лионсу — Мадженесу [1].

Доказательство. Мы применим теорему 3.1, считая, что

$$V = H^1(\Omega),$$

$$(Au, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx,$$

$$\mathcal{K}_1 = L^2(V) = L^2(0, T; V),$$

$$\mathcal{K}_2 = \{v \mid v \in L^2(V),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Sigma\},$$

$$G(s)\varphi(t) = \{\varphi(t-s) \text{ при } t \geqslant s,\ 0 \text{ при } t < s\}.$$

Можно проверить, что выполнены все условия теоремы 3.1[1].

Оператором Λ здесь будет оператор $\Lambda = d/dt$, определенный на функциях, равных нулю при $t=0$. Можно использовать уравнение (3.24). Таким образом, мы получаем существование и единственность пары функций u_1, u_2, удовлетворяющих условиям

$$u_1 \in D(\Lambda;\ L^2(V)),\ \text{т. е. } u_1 \in L^2(V),\ u_1' \in L^2(V),\ u_1(0) = 0, \tag{3.43}$$

$$u_2 \in D(\Lambda;\ L^2(H)), \quad u_2 \in \mathcal{K}_2, \tag{3.44}$$

$$u_1' + ku_1 - u_2 = 0, \tag{3.45}$$

$$\int_0^T (u_2' + Au_1 + ku_2 - f,\ v_2 - u_2)\, dt \geqslant 0 \quad \forall v_2 \in \mathcal{K}_2. \tag{3.46}$$

Поскольку $\mathcal{K}_2$ является конусом с вершиной в начале, неравенство (3.46) эквивалентно неравенству

$$\int_0^T (u_2' + Au_1 + ku_2 - f,\ v_2)\, dt \geqslant 0 \quad \forall v_2 \in \mathcal{K}_2, \tag{3.47}$$

причем $\geqslant 0$ заменяется на $=0$, если $v_2 = u_2$.

Используя определение $\mathcal{K}_2$, мы выведем, что

$$u_2' - \Delta u_1 + ku_2 = f \quad \text{в} \quad Q. \tag{3.48}$$

Если мы умножим (3.48) на v_2 и проинтегрируем по частям, то получим[2]

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u_1}{\partial n} v_2\, d\Sigma = \int_0^T (u_2' + Au_1 + ku_2 - f,\ v_2)\, dt \tag{3.49}$$

---

[1] *Выбирается* $k > 0$.

[2] Напомним, что

$$(Au, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx.$$

и, следовательно,

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u_1}{\partial n} v_2 \, d\Sigma \geqslant 0 \quad \forall v_2 \in \mathscr{K}_2, \tag{3.50}$$

причем $\geqslant 0$ заменяется на $=0$, если $v_2 = u_2$. Таким образом,

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} \geqslant 0, \quad u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0. \tag{3.51}$$

Теперь положим

$$w_i = e^{kt} u_i, \quad i = 1, 2.$$

Из (3.45) и (3.50) мы выведем, что

$$\begin{gathered} w_1' - w_2 = 0, \\ w_2' - \Delta w_1 = e^{kt} f = f^*, \\ w_2 \geqslant 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma. \end{gathered} \tag{3.52}$$

Тогда $u = w_1$ удовлетворяет различным условиям теоремы, в которых f следует заменить на f^*.

Поскольку задачи о нахождении u, $\{w_1, w_2\}$ и $\{u_1, u_2\}$ *эквивалентны*, то имеет место также и единственность ●

Пример 3.2. Теперь мы рассмотрим задачу о *периодических* по t решениях неравенств типа (3.40), (3.42). Необходимо обратить внимание на то, что замена $w_i = e^{kt} u_i$ нарушает периодичность по t. Мы проверим следующее утверждение. Пусть задана функция f, такая, что

$$f, \ \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \quad f(x, 0) = f(x, T), \quad x \in \Omega, \tag{3.53}$$

и пусть $k > 0$.

Тогда существует и притом только одна функция u, удовлетворяющая (3.39), *уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial u}{\partial t} + k^2 u - \Delta u = f \quad \text{в } Q, \tag{3.54}$$

условиям

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, T), \quad x \in \Omega, \tag{3.55}$$

и условиям (3.42).

Мы применим теорему 3.1 при тех же условиях, что в предыдущем примере, только на этот раз полугруппа $G(s)$ пусть задается следующим образом:

$$G(s)\varphi(t) = \{\varphi(t - s + T) \ \text{ при } \ t \leqslant s, \ \varphi(t - s) \ \text{ при } \ t \geqslant s\}.$$

Мы найдем такие $\{u_1, u_2\}$, что

$$
\begin{aligned}
&u_1 \in D(\Lambda;\ L^2(V)),\ \text{т. е.}\ u_1 \in L^2(V),\ u_1' \in L^2(V),\ u_1(x,\ 0)=u_1(x,\ T),\\
&u_2 \in D(\Lambda;\ L^2(H)),
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

и выполняются (3.45), (3.46). Мы можем интерпретировать неравенство (3.46) таким же образом, как в примере 3.1, и мы увидим, что функция $u=u_1$ отвечает поставленной задаче ●

Пример 3.3. *Если f — заданная функция, удовлетворяющая* (3.38), *то существует единственная функция u, удовлетворяющая включениям* (3.39) *и условиям*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0 \ \text{в}\ Q, \quad u=0 \ \text{на}\ \Sigma, \tag{3.57}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - f\right) \geqslant 0 \ \text{в}\ Q, \tag{3.58}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - f\right) = 0 \ \text{в}\ Q, \tag{3.59}$$

$$u(x,\ 0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0, \quad x \in \Omega\,[1]. \tag{3.60}$$

Применим теорему 3.1 с $V = H_0^1(\Omega)$,

$$A = -\Delta, \quad \mathscr{K}_1 = L^2(0,\ T;\ V),$$

$$\mathscr{K}_2 = \{v \mid v \geqslant 0 \ \text{почти всюду в}\ Q,\ v \in L^2(V)\},$$

и в качестве полугруппы возьмем полугруппу сдвигов. Можно далее взять (как в примере 3.1) $u=\exp(kt)\,u_1$ ●

Пример 3.4. Пусть опять задана функция f, удовлетворяющая (3.38). Существует и притом только одна функция u, удовлетворяющая (3.39), условиям

$$u=0 \ \text{на}\ \Sigma, \quad \left|\operatorname{grad}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\right| \leqslant 1 \ \text{почти всюду в}\ Q, \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \ \text{если}\ \left|\operatorname{grad}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\right| < 1 \tag{3.62}$$

(этой *формальной* интерпретации[2]) ниже, в (3.66), будет придан точный смысл) и начальному условию (3.60).

---

[1] Аналогичный результат для *периодических решений* (как в примере 3.2) получается при замене $\partial^2/\partial t^2 - \Delta$ на $\partial^2/\partial t^2 + 2k\partial/\partial t + k^2 - \Delta$.

[2] В действительности надо добавить условия сопряжения на границе раздела «области пластичности», где $|\operatorname{grad}_x \partial u/\partial t| = 1$, и «области упругости», где $|\operatorname{grad}_x \partial u/\partial t| < 1$.

Воспользуемся замечанием 3.6, считая, что $V = H_0^1(\Omega)$, $A = -\Delta$, $G(s)$ — полугруппа правых сдвигов; тогда $\Lambda = d/dt$, а область определения состоит из функций, равных нулю при $t = 0$, и пусть

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}_1 = L^2(V),$$

$$\mathscr{K}_2 = \{v \mid v \in L^2(V), \mid \operatorname{grad}_x v(x, t) \mid \leqslant 1 \text{ почти всюду}\}. \tag{3.63}$$

Таким образом, мы находимся в условиях применимости замечания 3.6. Следовательно, *существует* такая пара функций $\{u_1, u_2\} \in \mathscr{K}_1 \times \mathscr{K}_2$, что

$$u_1 \in D(\Lambda;\ L^2(V)), \quad u_2 \in D(\Lambda;\ L^2(H)),$$

$$u_1' - u_2 = 0 \quad \text{(ср. (3.24) при } k = 0) \tag{3.64}$$

и

$$\int_0^T (u_2' + Au_1,\ v_2 - u_2)\,dt \geqslant \int_0^T (f,\ v_2 - u_2)\,dt \quad \forall v_2 \in \mathscr{K}_2. \tag{3.65}$$

Полагая

$$u = u_1,$$

мы увидим, что u удовлетворяет (3.39), (3.60), (3.61) и неравенству

$$\int_0^T (u'' - \Delta u,\ v_2 - u')\,dt \geqslant \int_0^T (f,\ v_2 - u')\,dt \quad \forall v_2 \in \mathscr{K}_2. \tag{3.66}$$

Нам осталось установить *единственность.*

Пусть $t_0 > 0$ — произвольное фиксированное число. Подставим в (3.65) функцию

$$v_2 = u_2 \quad \text{при} \quad t > t_0.$$

Тогда (3.65) примет вид

$$\int_0^{t_0} (u_2' + Au_1,\ v_2 - u_2)\,dt \geqslant \int_0^{t_0} (f,\ v_2 - u_2)\,dt \tag{3.67}$$

$$\forall v_2 \text{ таких, что } \mid \operatorname{grad}_x v_2(x, t) \mid \leqslant 1 \quad \text{при} \quad t < t_0.$$

Поскольку t_0 *произвольно*, можно рассмотреть *эквивалентное* неравенство

$$\int_0^t (u' + \mathcal{A}u,\ v - u)\,dt \geqslant \int_0^t (f,\ v - u)\,dt \ \text{ для почти всех } t,$$
$$\forall v_1 \in L^2(0,\ t;\ V),\ \ v_2 \in L^2(0,\ t;\ V),\ \ |\operatorname{grad}_x v_2(x,\ t)| \leqslant 1 \ \text{ п. в.} \tag{3.68}$$

Пусть u^* — второе возможное решение. Полагая в (3.68) $v = u^*$ (что законно) и $v = u$ в аналогичном уравнении для u^*, мы получим (поскольку в этом случае $(\mathcal{A}v,\ v) = 0$)

$$\int_0^t \left(\frac{d}{dt}(u - u^*),\ \ u - u^*\right) dt \leqslant 0,$$

т. е.

$$|u(t) - u^*(t)|^2 \leqslant 0 \ \text{ почти всюду, откуда } u^* = u \ \bullet$$

Пример 3.5. Теперь мы собираемся решить *на многообразии вариационное неравенство со вторыми производными по* t, аналогичное уже рассмотренному в п. 9.5.5 гл. 2 (для случая первых производных по t).

(В этом пункте мы рассмотрим случай $p = 2$; случай $p \neq 2$ не изучен.) Что касается *уравнений*, то см. § 11 гл. 1 и § 4 гл. 2.

Мы хотим установить *существование и единственность* функции $\Phi(x,\ t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta_x \Phi = 0 \ \text{ в } Q \tag{3.69}$$

и условиям

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Phi}{\partial t} \geqslant 0 \ \text{ на } \Sigma, \quad \Sigma = \Gamma \times \,]0,\ T[, \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} - f \geqslant 0 \ \text{ на } \Sigma^{1)}, \\
\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} - f\right) = 0 \ \text{ на } \Sigma,
\end{gathered} \tag{3.70}$$

$$\Phi(x,\ 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,\ 0) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3.71}$$

$$\begin{gathered}
\Phi \in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)), \\
\Phi' \in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)), \\
\Phi'' \in L^2\left(0,\ T;\ H^{1/2}(\Omega)\right)
\end{gathered} \tag{3.72}$$

(эта задача не является гиперболической).

---

[1] $\partial/\partial n$ является производной по внешней нормали к Γ; f принадлежит $L^2(\Sigma)$, причем $\partial f/\partial t \in L^2(\Sigma)$ и $f(x,\ 0) = 0$.

Для того чтобы решить эту задачу, сначала введем оператор A. Для $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ решим задачу

$$-\Delta\psi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \psi = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad \psi \in H^1(\Omega), \tag{3.73}$$

и положим

$$A\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial n}. \tag{3.74}$$

Тогда имеем (см. (11.9), гл. 1)

$$\begin{gathered} A \in \mathscr{L}\left(H^{1/2}(\Gamma);\ H^{-1/2}(\Gamma)\right), \quad A^* = A; \\ \forall c > 0 \text{ существует такое } \alpha > 0, \text{ что} \\ (A\varphi, \varphi) + c\,\|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \geqslant \alpha\,\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{gathered} \tag{3.75}$$

Мы применим теорему 3.1 в следующей ситуации:

$$\begin{gathered} V = H^{1/2}(\Gamma), \quad H = L^2(\Gamma), \quad A \text{ из } (3.74), \\ \mathscr{K}_1 = L^2(0, T; V), \\ \mathscr{K}_2 = \{v \mid v \in L^2(0, T; V),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Sigma\}, \\ \mathscr{A} = \begin{pmatrix} kI & -I \\ A & kI \end{pmatrix}, \quad k > 0, \end{gathered}$$

и в качестве $G(s)$ берется полугруппа правых сдвигов.

Мы получим существование и единственность пары функций $\{u_1, u_2\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{gathered} u_1 \in L^2(V), \quad u_1' \in L^2(V), \quad u_2 \in L^2(V), \quad u_2' \in L^2(H), \\ u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, 0) = 0, \\ u_1' + ku_1 - u_2 = 0, \\ \int_0^T \left(u_2' + Au_1 + ku_2,\ v_2 - u_2\right) dt \geqslant \int_0^T \left(e^{-kt}f,\ v_2 - u_2\right) dt \quad \forall v_2 \in \mathscr{K}_2. \end{gathered} \tag{3.76}$$

Из (3.76) следует, что

$$\begin{gathered} u_2' + Au_1 + ku_2 - e^{-kt}f \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ u_2 \geqslant 0, \quad u_2\left(u_2' + Au_1 + ku_2 - e^{-kt}f\right) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{gathered}$$

Если положить $w_i = e^{kt}u_i$, $i = 1, 2$, то последнее эквивалентно соотношениям

$$\begin{gathered} w_1' - w_2 = 0, \\ w_2' + Aw_1 - f \geqslant 0, \quad w_2\left(w_2' + Aw_1 - f\right) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{gathered} \tag{3.77}$$

Пусть, далее, функция Φ для почти всех t определяется как решение задачи

$$\Delta_x\Phi = 0, \qquad \Phi|_\Gamma = w_1. \tag{3.78}$$

Можно проверить, что

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_\Gamma = w_1' \, (= w_2),$$

так что условия (3.70) вытекают из условий (3.77) (а следовательно, и эквивалентны им).

Наконец, включения (3.72) вытекают из свойств решений задачи Дирихле (3.78) и того обстоятельства, что $w_1, w_1' \in L^2(V)$, $w_1'' \in L^2(H) = L^2(\Sigma)$ ●

Замечание 3.8. Основываясь на тех же самых соображениях, можно указать множество других примеров; в частности, отметим следующие случаи:

A является *эллиптической* системой (например, система уравнений упругости);

порядок оператора A выше 2; тогда оператор $\partial^2/\partial t^2 + A$ уже не будет гиперболическим[1] ●

4. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И УРАВНЕНИЕ КОРТВЕГА—ДЕ ФРИСА

4.1. Постановка задачи. Интегралы энергии

Ищется функция $u = u(x, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4.2}$$

и с условиями *периодичности по* x в качестве краевых условий, т. е.

$$u(0, t) = u(1, t), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \ \ldots; \tag{4.3$'$}$$

число условий в (4.3′) зависит от гладкости того решения, которое мы строим ●

---

[1] Приведенный выше пример 3.5 отвечает тому случаю, когда A—*псевдодифференциальный эллиптический оператор порядка* 1.

Уравнение (4.1) было введено Кортвегом и де Фрисом; см. литературу, приведенную в комментариях ●

Одним из наиболее замечательных фактов, связанных с уравнением (4.1), является существование *бесконечного множества интегралов энергии*. Мы приведем наиболее простые из них. (Как всегда, задача будет состоять в том, чтобы суметь ими *воспользоваться*.) ●

Первый интеграл энергии. Этот интеграл моментально получается путем умножения на u. При условиях периодичности (4.3) и (4.3′) имеем

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) u\,dx = 0, \quad \Omega =]0, 1[, \quad \forall t, \tag{4.4}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^3}\cdot u\,dx = 0, \tag{4.5}$$

откуда

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 0\,\text{1)} \bullet \tag{4.6}$$

Второй интеграл энергии. Умножим (4.1) на нелинейное выражение, содержащее u:

$$\psi_1(u) = u^2 + 2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.7}$$

Благодаря условиям периодичности мы получим

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\left(u^2 + 2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx = 0; \tag{4.8}$$

действительно,

$$2\alpha\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx + \alpha\int_\Omega u^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,dx = 0,$$

а каждый из оставшихся интегралов, получающихся при раскрытии скобок в (4.8), равен нулю. Следовательно,

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi_1(u)\,dx = 0, \tag{4.9}$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left[\frac{u^3}{3} - \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx\right) = 0 \bullet \tag{4.10}$$

---

1) $|\ |$ обозначает норму $\left(\int_\Omega f^2\,dx\right)^{1/2}$ в $L^2(\Omega)$, а $(\ ,\ )$ — связанное с этой нормой скалярное произведение.

Замечание 4.1. Можно получить другой интеграл энергии, умножив (4.1) на

$$\psi_2(u) = u^3 + 3\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 6\alpha u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{18}{5}\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}; \tag{4.11}$$

см. Лакс [3], Миура [1], Миура, Гарднер и Крускал [1]●

Теперь мы покажем, следуя Темаму [7], как с помощью первых двух интегралов энергии можно получить *теорему существования.*

4.2. Теорема существования. Параболическая регуляризация

Теорема 4.1. *Предположим, что* $\alpha \in \mathrm{R}$ *и* $\alpha \neq 0$. *Пусть задана функция* u_0, *причем*

$$u_0 \in H^1(\Omega), \quad u_0(0) = u_0(1). \tag{4.12}$$

Тогда существует функция u,

$$u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \tag{4.13}$$

удовлетворяющая (4.1), (4.2), (4.3).

Замечание 4.1. Из (4.13) и (4.1) следует, что (отметим, что $H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, когда $\Omega =]0, 1[$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty\left(0, T; H^{-2}(\Omega)\right), \tag{4.14}$$

так что условие (4.2) имеет смысл●

Замечание 4.2. Мы не знаем, единственно или нет решение u, удовлетворяющее (4.13). В п. 4.3 мы приведем результаты о существовании и единственности при более сильных предположениях относительно u_0●

Доказательство теоремы 4.1. 1) *Параболическая регуляризация.*

Зададим $\varepsilon > 0$ и «приблизим» уравнение (4.1) *параболическим уравнением*

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3} + \varepsilon\frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4} = 0. \tag{4.15}$$

Условия (4.2), (4.3), (4.3′) остаются «без изменения»:

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial^j u_\varepsilon}{\partial x^j}(0, t) = \frac{\partial^j u_\varepsilon}{\partial x^j}(1, t), \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{4.17}$$

Легко получить с помощью методов компактности (гл. 1) существование функции u_ε, удовлетворяющей включению

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)). \tag{4.18}$$

Тогда

$$u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

и из уравнения (4.15) следует, что

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3} = -\left(u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L^2(Q);$$

отсюда и из граничных условий следует (ввиду теорем о гладкости для решений линейных параболических задач), что

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^4(\Omega)), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(Q). \tag{4.19}$$

(Повторяя эти рассуждения, можно показать, что u_ε — бесконечно дифференцируемая функция в $\overline{Q}$, но этот факт нам в дальнейшем не понадобится.)

Задача (4.15), (4.16), (4.17) называется *«параболической регуляризацией»* исходной задачи ●

2) *Априорные оценки* (I). Будем поступать таким же образом, как в п. 4.1 при выводе первого интеграла энергии; получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} | u_\varepsilon(t) |^2 + \varepsilon \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\right)^2 dx = 0,$$

откуда (поскольку, в частности, $u_0 \in L^2(\Omega)$)

$$\| u_\varepsilon \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant c, \tag{4.20}$$

$$\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \right\|_{L^2(Q)} \leqslant c, \tag{4.21}$$

где через c обозначаются различные константы, *не зависящие от* ε ●

3) *Априорные оценки* (II). Будем поступать таким же образом, как при выводе второго интеграла в п. 4.1. Итак, умножим (4.15) на $\psi_1(u_\varepsilon)$. При этом член

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4}\right) \psi_1(u_\varepsilon)\, dx$$

приводит к выражениям, которые необходимо «компенсировать» аналогичными выражениями, отвечающими второму интегралу энергии в случае $\varepsilon = 0$. Для этого мы используем следующие ниже интерполяционные неравенства.

Лемма 4.1. *Для любой функции* $v \in H^3(\Omega)$ *имеем*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c\,|v|^{11/12}\left(|v| + \left|\frac{d^3v}{dx^3}\right|\right)^{1/12} \tag{4.22}$$

и

$$\left\|\frac{dv}{dx}\right\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c\,|v|^{7/12}\left(|v| + \left|\frac{d^3v}{dx^3}\right|\right)^{5/12}. \tag{4.23}$$

Доказательство. В обозначениях Лионса — Мадженеса [1], гл. 1, имеем

$$[H^3(\Omega),\ H^0(\Omega)]_{11/12} = H^{1/4}(\Omega) \quad (H^0(\Omega) = L^2(\Omega)),$$

и, согласно Петре [1], $H^{1/4}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, следовательно,

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c\,\|v\|_{H^{1/4}(\Omega)} \leqslant c\,\|v\|^{1/12}_{H^3(\Omega)}\,\|v\|^{11/12}_{H^0(\Omega)},$$

откуда вытекает (4.22).

Аналогично,

$$[H^3(\Omega),\ H^0(\Omega)]_{7/12} = H^{5/4}(\Omega)$$

и

$$\left\|\frac{dv}{dx}\right\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c\,\|v\|_{H^{5/4}(\Omega)},$$ откуда следует (4.23) ●

Вернемся теперь к уравнению (4.15), умноженному на $\psi_1(u_\varepsilon)$; учитывая выкладки, проведенные в п. 4.1, получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[\frac{1}{3}u_\varepsilon^3 - \alpha\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2\right]dx + \varepsilon\int_\Omega \frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4}\left(u_\varepsilon^2 + 2\alpha\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\right)dx = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[\frac{1}{3}u_\varepsilon^3 - \alpha\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2\right]dx - 2\varepsilon\int_\Omega \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\,u_\varepsilon\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\,dx - 2\alpha\varepsilon\int_\Omega \left(\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right)^2 dx = 0. \tag{4.24}$$

Отсюда выводится, что

$$\alpha\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2 + 2\alpha\varepsilon\left|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right|^2 = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_\varepsilon^3\,dx - 2\varepsilon\int_\Omega u_\varepsilon\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\,\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\,dx. \tag{4.25}$$

Интегрируя (4.25) по t, получим после деления на α

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right|^2 + 2\varepsilon\int_0^t \left|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(\sigma)\right|^2 d\sigma = \left|\frac{du_0}{dx}\right|^2 + \frac{1}{3\alpha}\int_\Omega u_\varepsilon(x,\,t)^3\,dx - \frac{1}{3\alpha}\int_\Omega u_0(x)^3\,dx - {} - \frac{2\varepsilon}{\alpha}\int_0^t\int_\Omega u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\,dx\,d\sigma. \qquad (4.26)$$

Однако

$$\left|\int_\Omega u_\varepsilon^3(t)\,dx\right| \leqslant \|u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \leqslant c_1\|u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant$$

(в силу (4.20))

$$\leqslant c_2|u_\varepsilon(t)|^{1/2}\left(|u_\varepsilon(t)| + \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right|\right)^{1/2} \leqslant^{1)} \leqslant c_3\left(1 + \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right|\right)^{1/2} \leqslant$$

(в силу (4.20))

$$\leqslant c_4 + \frac{3|\alpha|}{2}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right|^2.$$

Далее (мы временно опускаем индекс ε),

$$\left|\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,dx\right| \leqslant \|u(t)\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\| \leqslant \leqslant c_5|u(t)|^{3/2}\left(|u(t)| + \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t)\right|\right)^{1/2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t)\right| \leqslant$$

(согласно (4.22) и (4.23))

$$\leqslant c_6\left(1 + \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t)\right|\right)^{1/2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t)\right| \leqslant$$

(согласно (4.20))

$$\leqslant c_7 + \frac{|\alpha|}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t)\right|^2.$$

---

[1] $\forall v \in H^1(\Omega)$ имеем

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c|v|^{1/2}\left(|v| + \left|\frac{dv}{dx}\right|\right)^{1/2}$$

(надо воспользоваться тем обстоятельством, что $\forall y \in \Omega$

$$|v^2(y)| \leqslant |v|^2 + 2|v|\,|dv/dx|).$$

Учитывая эти последние иеравенства, мы выведем из (4.26), что

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right|^2+2\varepsilon\int_0^t\left|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^3}(\sigma)\right|^2 d\sigma\leqslant\left|\frac{du_0}{dx}\right|^2+\frac{1}{3|\alpha|}\int_\Omega|u_0|^3\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right|^2+\varepsilon\int_0^t\left|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(\sigma)\right|^2 d\sigma+c,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right|^2+\varepsilon\int_0^t\left|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(\sigma)\right|^2 d\sigma\leqslant c. \tag{4.27}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))}\leqslant c, \tag{4.28}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right|_{L^2(Q)}\leqslant c. \tag{4.29}$$

Используя теперь *уравнение* (4.15), мы выведем

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}=-u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}-\varepsilon\frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4},$$

откуда следует, ввиду (4.28), (4.29), что

$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ ограничены в $L^2(0,\ T;\ H^{-2}(\Omega))$ при $\varepsilon\to 0$● (4.30)

4) *Предельный переход.* В силу (4.20), (4.21), (4.28), (4.29), (4.30) можно выделить такую последовательность u_ε, что

$$u_\varepsilon\to u,\quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x}\ \text{в}\ L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))\ \text{*-слабо},$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t}\ \text{в}\ L^2(0,\ T;\ H^{-2}(\Omega))\ \text{(гл. 1)},$$

$$u_\varepsilon\to u\ \text{в}\ L^2(Q)\ \text{сильно и почти всюду.}$$

Тогда $u_\varepsilon\,\partial u_\varepsilon/\partial x\to u\,\partial u/\partial x$, например, в $\mathscr{D}'(Q)$, и, следовательно, можно перейти к пределу в уравнении (4.15); мы видим, что u является решением (4.1). Условия (4.2), (4.3) выполиены, откуда и следует теорема●

4.3. Различные замечания

На осиове той же техники (но с помощью более сложиых оценок и «интерполяционных неравенств») доказывается (см. Темам [7])

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, *и пусть функция* u_0 *удовлетворяет условиям*

$$u_0 \in H^2(\Omega), \quad \frac{d^j u_0}{dx^j}(0) = \frac{d^j u_0}{dx^j}(1), \quad j = 0, 1. \tag{4.31}$$

Тогда существует и притом единственная функция u, *удовлетворяющая* (4.1), (4.2) *и такая, что*

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(0, t) = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(1, t), \quad j = 0, 1 \bullet \tag{4.33}$$

Замечание 4.3. Если, кроме того,

$$u_0 \in H^3(\Omega) \quad \text{и} \quad \frac{d^j u_0}{dx^j}(0) = \frac{d^j u_0}{dx^j}(1), \quad j = 0, 1, 2, \tag{4.34}$$

то, дифференцируя по t регуляризирующее параболическое уравнение, мы покажем, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.35}$$

Представляется вероятным, что если u_0 принадлежит $C^\infty(\bar{\Omega})$, причем

$$\frac{d^j u_0}{dx^j}(0) = \frac{d^j u_0}{dx^j}(1) \quad \forall j,$$

то и u принадлежит $C^\infty(\bar{Q}) \bullet$

5. МЕТОД ШТРАФА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Общие указания

Пусть V — рефлексивное банахово пространство. Мы всегда будем предполагать, что

нормы в V и в сопряженном пространстве V' строго выпуклы. (5.1)

Пусть $v \to j(v)$ — выпуклая функция на V, и пусть K — выпуклое замкнутое подмножество V. Предположим, что существует такое u, что

$$j(u) = \inf_{v \in K} j(v). \tag{5.2}$$

Если мы введем функцию

$$\varphi(v)=\begin{cases} j(v), & \text{когда } v\in K, \\ +\infty, & \text{когда } v\notin K, \end{cases} \tag{5.3}$$

то (5.2) будет эквивалентно неравенству

$$\varphi(u)\leqslant\varphi(v) \quad \forall v\in V, \tag{5.4}$$

т. е., согласно определению субдифференциала (см. гл. 2, п. 8.6), получим:

$$0\in\partial\varphi(u), \tag{5.5}$$

что можно рассматривать как вариационное неравенство.

Наоборот, если элемент u удовлетворяет неравенству (5.5), то он удовлетворяет (5.4) и, следовательно, (5.2).

Таким образом, мы видим, что *некоторые* эллиптические вариационные неравенства эквивалентны задаче о минимизации типа (5.2).

Один из классических методов, применяемый в приложениях, состоит в том, что задача (5.2) «приближается» задачей *со штрафом без ограничений*: вводится некоторая выпуклая функция $v\to g(v)$, такая, что

$$g(v)=0 \text{ на } K, \quad g(v)>0, \text{ если } v\notin K, \tag{5.6}$$

и для «малых» $\varepsilon>0$ рассматривается задача о разыскании

$$\inf_{v\in K}\left[j(v)+\frac{1}{\varepsilon}g(v)\right]. \tag{5.7}$$

Член $\frac{1}{\varepsilon}g(v)$ называется *штрафом*: если $v\notin K$, а $\frac{1}{\varepsilon}g(v)$ ограничено, то $g(v)$ «мало»; таким образом, мы *избавимся от ограничения*, т. е. заменим задачу минимизации *на* K[1]) *некоторой задачей минимизации во всем пространстве* V[2]) ●

Отметим, что введению φ по формуле (5.3) отвечает «бесконечный штраф» ●

Теперь мы собираемся показать, что указанный подход можно применить ко всем вариационным неравенствам (см. п. 5.3); для этого мы используем аппарат операторов штрафа (см. 5.2) и затем приведем примеры и приложения ●

---

[1]) Принадлежность к K трактуется как «ограничение».

[2]) То есть задачей *«без ограничений»*.

5.2. Операторы штрафа

Пусть пространство V удовлетворяет условию (5.1), и пусть K — замкнутое выпуклое подмножество в V. *Оператором штрафа* (*связанным с* K) называется любой оператор β: $V \to V'$, обладающий следующими свойствами:

$$\beta\colon V \to V' \text{ является монотонным ограниченным семинепрерывным оператором;} \tag{5.8}$$

$$\{v \mid v \in V,\ \beta(v) = 0\} = K. \tag{5.9}$$

Следующая ниже теорема показывает, что *всегда существуют* такие операторы.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнено условие* (5.1), *и пусть* J — *оператор двойственности* $V \to V'$ *относительно* Φ[1]). *Тогда если через* P_K *обозначить оператор проектирования* $V \to K$[2]), *то оператор* β, *определенный равенством*

$$\beta(u) = J(u - P_K u), \tag{5.10}$$

будет оператором штрафа ●

В доказательстве используется один простой результат, позволяющий охарактеризовать проекцию $P_K u$ с помощью J:

если $P_K u = w$, *то* w *характеризуется следующими условиями*: $w \in K$, $(J(u-w),\ k-w) \leqslant 0\ \ \forall k \in K$. (5.11)

Действительно, по определению

$$\|u - w\| \leqslant \|u - (1-\theta)w - \theta k\| \quad \forall k \in K,\ \theta \in [0,\ 1]. \tag{5.12}$$

Если мы, как в п. 8.6 гл. 2, введем Ψ:

$$\Psi(r) = \int_0^r \Phi(\sigma)\,d\sigma,$$

то неравенство (5.12) будет эквивалентно неравенству

$$\Psi(\|u - w\|) \leqslant \Psi(\|u - w - \theta(k-w)\|). \tag{5.13}$$

Однако (предложение 8.1 гл. 2)

$$\Psi(\|u - w\|) - \Psi(\|u - w - \theta(k - w)\|) \geqslant$$
$$\geqslant (J(u - w - \theta(k-w)),\ \theta(k - w)),$$

---

[1]) Двойственность понимается в смысле п. 2.2 гл. 2: выполнены равенства

$$(J(u), u) = \|J(u)\|_* \|u\|, \quad \|J(u)\|_* = \Phi(\|u\|),$$

где $\|\ \|_*$ — норма в V', дуальная к норме $\|\ \|$.

[2]) То есть $P_K u$ для $u \in V$ есть единственный элемент из K, для которого

$$\|u - P_K u\| \leqslant \|u - k\| \quad \forall k \in K.$$

откуда, учитывая (5.13), после деления на $\theta > 0$ получаем

$$(J(u - w - \theta(k - w)), k - w) \leqslant 0;$$

устремляя θ к 0, мы получаем (5.11).

Обратно, если w удовлетворяет (5.11), то $\forall v \in K$

$$\Psi(\| u - k \|) - \Psi(\| u - w \|) \geqslant$$

(согласно п. 8.6 гл. 2)

$$\geqslant (J(u - w), w - k) \geqslant 0,$$

(согласно (5.11))

откуда $\| u - w \| \leqslant \| u - k \|$, что и требовалось доказать ●

Доказательство теоремы 5.1. *Монотонность* β. Сначала мы проверим, что $\forall u, v \in V$

$$(J(u - P_K u) - J(v - P_K v), P_K u - P_K v) \geqslant 0. \qquad (5.14)$$

В самом деле, в силу (5.11)

$$(J(u - P_K u), k - P_K u) \leqslant 0,$$

и аналогичное неравенство можно написать для $P_K v$; полагая соответственно $k = P_K v$ и $k = P_K u$ и складывая, мы получим (5.14).

Теперь, полагая $\hat{u} = u - P_K u$ и $\hat{v} = v - P_K v$, получим

$$\begin{aligned}(\beta(u) - \beta(v), u - v) = (\beta(u) - \beta(v), \hat{u} - \hat{v} + P_K u - P_K v) =\\ = (J(\hat{u}) - J(\hat{v}), \hat{u} - \hat{v}) +\\ + (J(u - P_K u) - J(v - P_K v), P_K u - P_K v). \qquad (5.15)\end{aligned}$$

Первый член в правой части (5.15) $\geqslant 0$ в силу монотонности J, а второй $\geqslant 0$ в силу (5.14).

Таким образом, β — монотонный оператор. Можно проверить, что оператор β ограниченный и семинепрерывный.

Наконец, равенство $J(u - P_K u) = 0$ эквивалентно тому, что $u - P_K u = 0$, а следовательно,

$$u = P_K u \in K \; ●$$

5.3. Применение метода штрафа

Теперь мы собираемся доказать с помощью операторов штрафа следующий результат, уже доказанный (другими методами и при чуть более общих предположениях) в теореме 8.2 § 8 гл. 2.

Теорема 5.2. *Предположим, что пространство V удовлетворяет условию* (5.1). *Пусть оператор A: $V \to V'$ псевдомоно-*

тонный и коэрцитивный в том смысле, что

$$\text{существует такой элемент } v_0 \in K, \text{ что} \quad \frac{(A(v), v - v_0)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty. \tag{5.16}$$

Тогда для всех $f \in V'$ *существует такое* $u \in K$, *что*

$$(A(u), v - u) \geqslant (f, v - u) \quad \forall v \in K. \tag{5.17}$$

Доказательство. 1) *Ассоциированная задача со штрафом.* Пусть β — оператор штрафа, связанный с K, т. е. удовлетворяющий условиям (5.8), (5.9). Мы собираемся показать, что $\forall \varepsilon > 0$ *существует такое* $u_\varepsilon \in V$, *что*

$$A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f. \tag{5.18}$$

В этой связи мы воспользуемся следующими замечаниями:

(i) оператор $v \to A(v) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(v)$ будет псевдомонотонным в силу замечания 2.12 гл. 2;

(ii) $$(A(v), v - v_0) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(v), v - v_0) =$$
$$= (A(v), v - v_0) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(v) - \beta(v_0), v - v_0) \geqslant$$

(так как $v_0 \in K$)

$$\geqslant (Av, v - v_0)$$

(в силу монотонности β),

и, следовательно,

$$\frac{1}{\|v\|}\left[(A(v), v - v_0) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(v), v - v_0)\right] \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty.$$

Таким образом, в силу замечания 2.13 гл. 2 и теоремы 2.7 гл. 2 существует решение u_ε задачи (5.18) (которая называется «*задачей со штрафом, ассоциированной с задачей* (5.17)»).

2) Согласно приведенному выше замечанию (ii), можно так выбрать решения u_ε уравнения (5.18), чтобы

$$u_\varepsilon \text{ были ограничены в } V \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{5.19}$$

Так как оператор A ограничен, то $A(u_\varepsilon)$ ограничены в V' и

$$\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon(f - A(u_\varepsilon)) \to 0 \text{ в } V';$$

более того, мы имеем

$$\|\beta(u_\varepsilon)\|_* \leqslant c_1\varepsilon. \tag{5.20}$$

Далее мы можем так выделить подпоследовательность (будем опять обозначать ее через u_ε), что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\to u \text{ в } V \text{ слабо,} \\ A(u_\varepsilon) &\to \chi \text{ в } V' \text{ слабо.} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Проверим, что

$$\beta(u) = 0. \tag{5.22}$$

Действительно, оператор β обладает свойством (M) (см. предложение 2.1 и замечание 2.1 гл. 2), откуда и следует нужный нам результат[1]).

Далее в силу (5.9) мы получим, что $u \in K$.

Взяв $v \in K$, мы из уравнения (5.18) выведем (поскольку $\beta(v) = 0$), что

$$(A(u_\varepsilon) - f,\ v - u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(\beta(v) - \beta(u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon) \geqslant 0. \tag{5.23}$$

Далее мы сможем заключить, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (A(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} (f,\ u_\varepsilon - u) = 0,$$

а поскольку оператор A псевдомонотонный, то отсюда следует, что

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} (A(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v) \geqslant (A(u),\ u - v),$$

откуда в силу (5.23)

$$(f,\ u - v) \geqslant (A(u),\ u - v) \quad \forall v \in K,$$

т. е. выполнено неравенство (5.17) ●

Замечание 5.1. Проведенное выше доказательство доставляет нам *метод аппроксимации* u посредством u_ε. По правде говоря, этот метод не будет конструктивным, если u и u_ε не будут определяться единственным образом; последнее имеет место, например, когда оператор A является *строго* монотонным ●

Замечание 5.2. Пусть W — банахово пространство, причем норма в нем, равно как и в сопряженном, строго выпукла. Пусть

$$\text{вложение } V \subset W \text{ непрерывно, } V \text{ плотно в } W \text{ (следовательно, } W' \subset V'\text{);} \tag{5.24}$$

---

[1]) Из неравенства $(\beta(u_\varepsilon) - \beta(\varphi),\ u_\varepsilon - \varphi) \geqslant 0$ $\forall \varphi$ мы выводим, что $-(\beta(\varphi),\ u - \varphi) \geqslant 0$ $\forall \varphi$; полагая $\varphi = u - \lambda\Psi$, $\lambda > 0$, $\Psi \in V$, мы найдем, что $(\beta(u - \lambda\Psi),\ \Psi) \leqslant 0$; устремляя $\lambda \to 0$, мы, таким образом, получим, что $(\beta(u),\ \Psi) \leqslant 0$ $\forall \Psi$, откуда следует (5.22).

K является замкнутым выпуклым подмножеством в V и в W. (5.25)

Тогда можно рассмотреть оператор штрафа, связанный с K и *действующий в пространстве* W, т. е.

β: $W \to W'$ — монотонный ограниченный и семинепрерывный оператор; (5.26)

$$\{w \mid w \in W,\ \beta(w) = 0\} = K. \tag{5.27}$$

(Такой оператор существует согласно теореме 5.1.)

Можно опять рассмотреть уравнение (5.18), а поскольку β, в частности, является оператором штрафа в V, связанным с K, то *у уравнения* (5.18) *существует решение* u_ε, *и можно найти такую последовательность* u_ε, *что* $u_\varepsilon \to u$ *в* V *слабо, и функция* u *является решением* (5.17)[1]●

Замечание 5.3. Пусть W — рефлексивное банахово пространство, как и в предыдущем замечании, однако имеет место *включение, обратное* (5.24):

$W \subset V$, W плотно в V и вложение непрерывно (следовательно, $V' \subset W'$). (5.28)

Мы предполагаем, что

K является выпуклым замкнутым подмножеством в W и V. (5.29)

Опять возьмем оператор β со свойствами (5.26), (5.27) и рассмотрим уравнение (5.18) в W. Но это уравнение *не обязано* иметь решение в W (поскольку оператор A коэрцитивен на V, а не на W). Добавим *следующее условие*:

Можно найти такой элемент $v_0 \in K$, что

(i) для него выполнено (5.16), (5.30)

(ii) $\dfrac{(\beta(v),\ v - v_0)}{\|v\|_W} \to +\infty$, когда $\|v\|_W \to \infty$.

При этих условиях существует решение u_ε *уравнения* (5.18), *и можно выделить такую подпоследовательность* u_ε, *что*

$u_\varepsilon \to u$ *в* W *слабо, и является решением* (5.17)● (5.31)

Эти два замечания полезны в приложениях, поскольку они позволяют выбирать β «наилучшим образом»●

---

[1] Отметим еще один вариант: пусть K_1 — выпуклое замкнутое подмножество W, причем $K_1 \cap V = K$; если β_1 — оператор штрафа в W, связанный с K_1, то в качестве β можно взять сужение β_1 на V.

Замечание о сходимости. Следует отметить, что доказательство теоремы 5.2 дает нам также *метод аппроксимации u* — решеиия (5.17) посредством u_ε — решений (5.18). Кроме того,

$$(A(u_\varepsilon) - A(u),\ u_\varepsilon - u) \to 0.$$

5.4. Примеры

Пример 5.1. Возьмем $V = H_0^1(\Omega)$ и определим A:

$$A\varphi = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) + a_0\varphi, \qquad a_0,\ a_{ij} \in L^\infty(\Omega),$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \qquad \alpha > 0, \qquad \forall \xi_i \in \mathbb{R}, \tag{5.32}$$

почти всюду в Ω, $a_0(x) \geqslant \alpha_0$ почти всюду в Ω.

Пусть

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}\cdot \tag{5.33}$$

Следовательно, мы можем воспользоваться замечанием 5.2 (примечание 1), взяв $W = L^2(\Omega)$ и $K_1 = \{v \mid v \in L^2(\Omega),\ v \geqslant 0$ почти всюду в $\Omega\}$; выберем $\beta(v) = J(v - P_K v)$, где

J — единичный оператор,

$P_K v = v^+$ (т. е. $P_K v = v(x)$, если $v(x) \geqslant 0$, и $P_K v = 0$, если $v(x) < 0$)[1].

Соответствующее уравнение, следовательно, имеет вид[2]

$$\begin{aligned} &Au_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^- = f,\\ &u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \bullet \end{aligned} \tag{5.34}$$

Замечание 5.4. Естественно, что можно *также* использовать оператор штрафа со значениями в $H_0^1(\Omega)$, но это слишком сложно ●

Пример 5.2. Возьмем $V = W_0^{1,\,p}(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ и оператор

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right), \tag{5.35}$$

$$K = \{v \mid v \in W_0^{1,\,p}(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{5.36}$$

---

[1] Этот оператор проектирует в $L^2(\Omega)$.

[2] Отметим, что $v - v^+ = -v^-$, где $v^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } v(x) \geqslant 0,\\ -v(x), & \text{если } v(x) < 0. \end{cases}$

Тогда мы опять можем воспользоваться замечанием 5.2 (примечание 1), считая, что $W = L^p(\Omega)$. Далее выберем J, полагая $J(v) = |v|^{p-2} v$; получим

$$\beta(v) = J(v - P_K v) = -|v^-|^{p-2} v^-.$$

Соответствующее уравнение со штрафом примет вид

$$\begin{aligned} & A(u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon^-|^{p-2} u_\varepsilon^- = f, \\ & u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \bullet \end{aligned} \tag{5.37}$$

Пример 5.3. Возьмем оператор A таким же, как в примере 5.1, но на этот раз

$$V = H^1(\Omega), \quad \alpha_0 > 0,$$

и

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Gamma\}. \tag{5.38}$$

Далее *определим* оператор β: $V \to V'$, полагая

$$(\beta(u), v) = -\int_\Gamma u^- v \, d\Gamma, \quad u, v \in V; \tag{5.39}$$

линейная форма $v \to \int_\Gamma u^- v \, d\Gamma$ непрерывна на V и, следовательно, определяет функционал $\beta(u) \in V'$. Определенный таким образом оператор β является *монотонным*, *ограниченным*, *семинепрерывным*, и

$$\beta(u) = 0 \Leftrightarrow u^- = 0 \Leftrightarrow u \in K.$$

Ассоциированное уравнение со штрафом примет вид[1]

$$a(u_\varepsilon, v) - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma u_\varepsilon^- v \, d\Gamma = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5.40}$$

Задача (5.40) допускает следующую *интерпретацию*:

$$\begin{aligned} & Au_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ & \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_A} - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \bullet \end{aligned} \tag{5.41}$$

---

[1] Предполагается, что f принадлежит $L^2(\Omega)$, и, как обычно, мы полагаем

$$a(u, v) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0 u v \, dx.$$

Пример 5.4. Пусть Ω — ограниченная область. Возьмем A и V, как в примере 5.1, и пусть K задается условием

$$K = \{v \mid v \in V, \ |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant 1 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \qquad (5.42)$$

Как нам кажется, проще всего β можно выбрать следующим образом. Возьмем

$$W = W_0^{1,4}(\Omega) \qquad (5.43)$$

и выпуклое замкнутое множество $K \subset W$; для $u \in W$ форма

$$v \to \int_\Omega (1 - |\operatorname{grad} u|^2)^- \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx$$

непрерывна на W; следовательно, существует такой функционал $\beta(u) \in W'$, что

$$\int_\Omega (1 - |\operatorname{grad} u|^2)^- \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = (\beta(u), v). \qquad (5.44)$$

Можно проверить, что $u \to \beta(u)$ будет монотонным, ограниченным и семинепрерывным отображением $W \to W'$. Кроме того,

$$(\beta(v), v) = \int_{|\operatorname{grad} v| \geqslant 1} [|\operatorname{grad} v|^4 - |\operatorname{grad} v|^2] \, dx =$$

$$= \int_\Omega |\operatorname{grad} v|^4 dx - \int_{|\operatorname{grad} v| \leqslant 1} |\operatorname{grad} v|^4 dx - \int_{|\operatorname{grad} v| \geqslant 1} |\operatorname{grad} v|^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant |v|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)} - \operatorname{mes}(\Omega) - \|v\|^2$$

и, следовательно,

$$(\beta(v), v) \geqslant \|v\|_W^4 - (c_1 + c_2 \|v\|^2), \qquad (5.45)$$

так что условие (5.30) выполняется для $v_0 = 0$.

Наконец, если $u \in K$, то $\beta(u) = 0$, и наоборот, если $\beta(u) = 0$, то $(\beta(u), u) = 0$; следовательно,

$$(1 - |\operatorname{grad} u|^2)^- |\operatorname{grad} u|^2 = 0 \quad \text{почти всюду,}$$

так что $u \in K$.

Мы можем применить замечание 5.3. Соответствующее уравнение со штрафом имеет вид

$$Au_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2)^- \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right) = f, \qquad (5.46)$$

$$u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Пример 5.5. Пусть V — гильбертово пространство, и пусть K определяется условиями

$$K = \{v \mid (l_i, v) \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, q, \ \ l_i \in V'\}^{[1]}. \qquad (5.47)$$

Далее *определим* β, полагая

$$\beta(v) = -\sum_{j=1}^{q} (l_j, v)^- l_j. \qquad (5.48)$$

Тогда имеем

$$(\beta(u) - \beta(v), u - v) = -\sum_{j=1}^{q} ((l_j, u)^- - (l_j, v)^-)((l_j, u) - (l_j, v)) \geqslant 0,$$

отображение β ограничено, семинепрерывно, и имеет место условие (5.9).

Если $A \in \mathscr{L}(V; V')$, причем $(Av, v) \geqslant \alpha \|v\|^2$, $\alpha > 0$, то решение $u \in K$ неравенства

$$(Au, v - u) \geqslant (f, v - u) \quad \forall v \in K \quad (f \text{ задано в } V')$$

будет пределом при $\varepsilon \to 0$ решений $u_\varepsilon \in V$ уравнений

$$Au_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{q} (l_j, u)^- l_j = f \bullet \qquad (5.49)$$

5.5. Результаты о гладкости

Теперь мы покажем на двух примерах, каким образом *уравнения со штрафом* приводят к результатам о гладкости (решения u вариационного неравенства) типа тех, которые были приведены в п. 8.7 гл. 2 $\bullet$

Мы будем считать, что коэффициенты рассматриваемых операторов принадлежат $C^1(\overline{\Omega})$.

Пример 5.6. Пусть выполнены условия примера 5.3. Тогда

если $f \in L^2(\Omega)$, то решение $u \in K$ неравенства $a(u, v - u) \geqslant (f, v - u)$ $\forall v \in K$ (K определяется посредством (5.38)) принадлежит $H^2(\Omega)$. (5.50)

Для этого достаточно установить, что u_ε, будучи решением (5.41), принадлежит $H^2(\Omega)$ и *остается в ограниченной области этого пространства при* $\varepsilon \to 0$.

В этой связи прежде всего заметим, что $u_\varepsilon^- \in H^1(\Omega)$; тогда $u_\varepsilon^-|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ и, следовательно, функция u_ε, рассматриваемая

---

[1] Функционалы l_i могут и *не быть* линейно независимыми в V'.

как решение задачи Неймана

$$Au_\varepsilon = f, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_A} = \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^-,$$

принадлежит $H^2(\Omega)$. Далее, *повторяя* доказательство гладкости решений *методом сдвигов*, мы установим, что если u_ε является решением (5.41), то *тангенциальные производные*[1] u_ε принадлежат *ограниченному множеству* в $H^1(\Omega)$ (при $\varepsilon \to 0$); далее, используя *уравнение* $Au_\varepsilon = f$, мы выведем (как в случае обычных краевых задач), что u_ε принадлежат ограниченному множеству в $H^2(\Omega)$ ●

Замечание 5.4. (Вариант примера 5.6.) Пусть задана функция g из $L^2(\Gamma)$, и пусть функция u является решением из K (последнее всегда определяется с помощью (5.38)) неравенства

$$a(u, v-u) \geqslant \int_\Gamma g(v-u)\, d\Gamma \quad \forall v \in K. \tag{5.51}$$

Без труда проверяется, что

$$\begin{gathered} Au = 0, \\ u \geqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} - g \geqslant 0, \quad u\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A} - g\right) = 0 \text{ на } \Gamma. \end{gathered} \tag{5.52}$$

Мы собираемся показать, что

$$u \in H^{3/2}(\Omega). \tag{5.53}$$

Рассмотрим уравнение со штрафом:

$$a(u_\varepsilon, v) - \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma u_\varepsilon^- v\, d\Gamma = \int_\Gamma gv\, d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5.54}$$

Подставим в (5.54) $v = -u_\varepsilon^-$; поскольку

$$a(u_\varepsilon, -u_\varepsilon^-) = a(u_\varepsilon^-, u_\varepsilon^-) \geqslant 0,$$

из (5.54) *после деления на* ε найдем

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- \right\|^2_{L^2(\Gamma)} \leqslant \int_\Gamma g \left(\frac{-u_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) d\Gamma \leqslant \| g \|_{L^2(\Gamma)} \left\| \frac{u_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Gamma)}$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- \text{ ограничены в } L^2(\Gamma). \tag{5.55}$$

---

[1] В локальных координатах.

Однако функция u_ε является решением задачи

$$Au_\varepsilon = 0, \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_A} = \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- + g,$$

откуда, учитывая (5.55), мы из результатов Лионса — Мадженеса [1], гл. 2 выведем, что

$$u_\varepsilon \text{ принадлежат ограниченному множеству в } H^{3/2}(\Omega), \tag{5.56}$$

т. е. имеет место (5.53) ●

Пример 5.7 (Х. Брезис). Пусть выполнены условия примера 5.1. Тогда

$$\text{если } f \in L^2(\Omega), \text{ то решение } u \text{ принадлежит } H^2(\Omega). \tag{5.57}$$

Рассмотрим уравнение со штрафом (5.34); тогда

$$a(u_\varepsilon, v) - \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega u_\varepsilon^- v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Полагая $v = u_\varepsilon^-$ и рассуждая таким же образом, как в замечании 5.4 (при этом вместо Γ будет фигурировать Ω), мы увидим, что

$$\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- \text{ ограничены в } L^2(\Omega).$$

Далее, из (5.34) следует, что

$$Au_\varepsilon \text{ ограничены в } L^2(\Omega),$$

откуда, учитывая включение $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, мы получим, что u_ε ограничены в $H^2(\Omega)$, т. е. имеет место (5.57) ●

Замечание 5.5. Аналогично можно показать, что если $f \in L^p(\Omega)$, то решение u принадлежит $W^{2,p}(\Omega)$ (для доказательства надо умножить на $-|u_\varepsilon^-|^{p-2} u_\varepsilon^-$). (См. Брезис [5].) ●

5.6. Различные замечания

Замечание 5.6. Вернемся к общей ситуации п. 5.3 и предположим, что

$$K = \bigcap_{i=1}^{q} K_i, \tag{5.58}$$

$$K_i \text{ — выпуклое замкнутое подмножество } V_i,$$

$V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i$, где V_i — банахово пространство, причем норма в нем, равно как и в сопряженном, строго выпукла, Пусть β_i — оператор штрафа, связанный с K_i.

В качестве *задачи со штрафом, связанной с вариационным неравенством* (5.17), мы можем взять следующую задачу:

$$A(u_\varepsilon)+\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\varepsilon_i}\beta_i(u_\varepsilon)=f,\quad \varepsilon_i>0\quad(\varepsilon=\{\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_q\}).\tag{5.59}$$

Можно найти последовательность $u_\varepsilon\to u$ в V слабо при $\varepsilon\to 0$ ●

Замечание 5.7. Можно, кроме того, для решения задачи (5.59) искать приближения (в случае единственности) методами разложения (или *дробных шагов*).

(Здесь речь идет о распространении на неравенства методов, очень полезных при численной аппроксимации уравнений в частных производных; мы отсылаем к Яненко [1], Темаму [1] и к приведенной в этих работах литературе; по поводу неравенств см. Лионс — Темам [1].) ●

Замечание 5.8. Рассмотрим снова задачу, изученную в примере 5.6 и в замечании 5.4. Тогда

$$\text{если } g\in H^{-1/2}(\Gamma),\ \text{ то }\ u\in H^1(\Omega);\ \text{ если }\ g\in H^{1/2}(\Gamma),$$
$$\text{то }\ u\in H^2(\Omega),\ \text{ и если }\ g\in L^2(\Gamma),\ \text{ то }\ u\in H^{3/2}(\Omega).$$

Последний результат можно получить с помощью *нелинейной интерполяции* (см. проблему 11.23 гл. 2 и работу Лионса [18]); нелинейная интерполяция позволяет доказать и более общий результат:

$$\text{если } g\in H^s(\Gamma),\ \text{ то }\ u\in H^{s+3/2}(\Omega),\qquad -1/2<s<1/2 \bullet$$

6. МЕТОД ШТРАФА И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

6.1. Общий метод

Теперь мы постараемся к «абстрактному» эволюционному уравнению приспособить метод штрафа, введенный в предыдущем параграфе для эллиптического случая ●

Пусть $\mathscr{V}$ — банахово пространство, а $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство (как в § 9 гл. 2):

$$\mathscr{V}\subset\mathscr{H}\subset\mathscr{V}',\tag{6.1}$$

и предположим, что

норма в $\mathscr{V}$ и дуальная норма в $\mathscr{V}'$ *строго выпуклы*. (6.2)

Рассмотрим операторы L, $\mathscr{A}$ и выпуклое множество $\mathscr{K}$, такие, что

$$\text{оператор } L \text{ удовлетворяет условиям (1.4) и, в частности } L \geqslant 0, \quad L^* \geqslant 0; \tag{6.3}$$

$\mathscr{K}$ является замкнутым выпуклым подмножеством в $\mathscr{V}$ и $\forall v \in \mathscr{K}$ существует такая последовательность $v_j \in \mathscr{K} \cap D(L)$, что (см. условие согласования (9.18) гл. 2)

$$\begin{gathered} v_j \to v \text{ в } \mathscr{V}, \\ \limsup_{j\to\infty} (Lv_j,\ v_j - v) \leqslant 0; \end{gathered} \tag{6.4}$$

оператор $\mathscr{A}$: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ является псевдомонотонным, и существует такой элемент $v_0 \in \mathscr{K} \cap D(L)$, что

$$\frac{(\mathscr{A}(v),\ v - v_0)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty. \tag{6.5}$$

Будет доказана следующая теорема:

Теорема 6.1 [1]. *Предположим, что выполнены условия* (6.1) — (6.5). *Тогда для всякого f из $\mathscr{V}'$ существует такое $u \in \mathscr{K}$, что*

$$(Lv,\ v - u) + (\mathscr{A}(u),\ v - u) \geqslant (f,\ v - u) \qquad \forall v \in \mathscr{K} \cap D(L). \tag{6.6}$$

Доказательство. 1) С помощью сдвига $v \to v - v_0$ мы сведем нашу задачу к аналогичной, но при этом

$$v_0 = 0 \in \mathscr{K}. \tag{6.7}$$

2) Эволюционное *уравнение со штрафом*. Рассмотрим *оператор штрафа* β, связанный с $\mathscr{K}$, иными словами, удовлетворяющий (5.8) (где K, V, V' заменены на $\mathscr{K}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}'$); такой оператор существует согласно условию (6.2) и теореме 5.1. Рассмотрим далее *уравнение со штрафом*:

$$\begin{gathered} Lu_\varepsilon + \mathscr{A}(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f, \quad \varepsilon > 0, \\ u_\varepsilon \in D(L). \end{gathered} \tag{6.8}$$

Оператор

$$v \to \mathscr{A}(v) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(v) = \mathscr{B}(v)$$

будет псевдомонотонным и

$$\frac{(\mathscr{B}(v),\ v)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \to \infty; \tag{6.9}$$

---

[1] Эта теорема содержится в § 9 гл. 2, но здесь она доказывается совершенно иным (конструктивным) методом.

действительно,

$$(\beta(v),\ v) = (\beta(v) - \beta(0),\ v - 0) \geqslant 0.$$

Тогда, согласно теореме 1.1, *существует решение* u_ε *задачи* (6.8) и, более того, u_ε можно выбрать таким образом, чтобы

$$u_\varepsilon \text{ были ограничены в } \mathscr{V} \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{6.10}$$

Тогда $\mathscr{A}(u_\varepsilon)$ ограничены в $\mathscr{V}'$, а поскольку

$$L \in \mathscr{L}(\mathscr{V};\ D(L^*)'),$$

то мы выводим из (6.8), что

$$\beta(u_\varepsilon) \to 0 \quad \text{в} \quad D(L^*)', \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.11}$$

3) *Предельный переход.* В силу (6.10) можно выделить такую последовательность, обозначаемую опять через u_ε, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\to u \quad \text{в } \mathscr{V} \text{ слабо},\\ \beta(u_\varepsilon) &\to 0 \quad \text{в } \mathscr{V}' \text{ слабо}^{1)},\\ \mathscr{A}(u_\varepsilon) &\to \chi \quad \text{в } \mathscr{V}' \text{ слабо}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Из (6.8) следует, что

$$0 \leqslant (\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) = \varepsilon(f - \mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) - \varepsilon(Lu_\varepsilon,\ u_\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(f - \mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon.$$

Следовательно,

$$(\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \to 0,$$

откуда

$$\beta(u) = 0, \text{ так что } u \in \mathscr{K}. \tag{6.13}$$

Взяв теперь $v \in \mathscr{K} \cap D(L)$, получим

$$(Lv + \mathscr{A}(u_\varepsilon) - f,\ v - u_\varepsilon) = \\ = (Lu_\varepsilon + \mathscr{A}(u_\varepsilon) - f,\ v - u_\varepsilon) + (L(v - u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon) =$$

(поскольку $\beta(v) = 0$)

$$= \frac{1}{\varepsilon}(\beta(v) - \beta(u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon) + (L(v - u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon) \geqslant 0, \tag{6.14}$$

и, следовательно,

$$(\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \leqslant (\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ v) + (Lv - f,\ v - u_\varepsilon), \tag{6.15}$$

откуда в силу (6.12)

$$\limsup\,(\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \leqslant (\chi,\ v) + (Lv - f,\ v - u). \tag{6.16}$$

---

1) $\beta(u_\varepsilon)$ сходятся в $\mathscr{V}'$ слабо и, согласно (6.11), предел равен 0.

Однако в силу (6.4) можно выбрать $u_j \in D(L) \cap \mathscr{K}$ так, что $u_j \to u$ в $\mathscr{V}$ и $\limsup (Lu_j, u_j - u) \leqslant 0$; полагая в (6.16) $v = u_j$, получим

$$\limsup (\mathscr{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \leqslant (\chi, u) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathscr{A}(u_\varepsilon), u).$$

Следовательно,

$$\limsup (\mathscr{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \leqslant 0. \tag{6.17}$$

Тогда ввиду псевдомонотонности

$$\liminf (\mathscr{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v) \geqslant (\mathscr{A}(u), u - v) \quad \forall v \in \mathscr{V}. \tag{6.18}$$

С другой стороны, в силу (6.14)

$$(\mathscr{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v) \leqslant (Lv - f, v - u_\varepsilon) \to (Lv - f, v - u), \; v \in \mathscr{K} \cap D(L),$$

откуда, учитывая (6.18), мы получим, что u удовлетворяет (6.6) ●

Замечание 6.1 (ср. с замечанием 5.2). Предположим, что $\mathscr{K}$ является *выпуклым замкнутым подмножеством* $\mathscr{W}$, причем

$\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$, $\mathscr{W}$ — банахово пространство, и норма в нем, равно как и в сопряженном $\mathscr{W}'$, строго выпукла. (6.19)

Тогда можно рассмотреть отвечающий $\mathscr{K}$ оператор штрафа в пространстве $\mathscr{W}$, и для уравнения (6.8) мы получим такой же, как и выше, результат: $u_\varepsilon \to u$ в $\mathscr{V}$ слабо. Можно также получить вариант, отмеченный в примечании 1 к замечанию 5.2 ●

Замечание 6.2 (ср. с замечанием 5.3). Предположим, что $\mathscr{K}$ является выпуклым замкнутым подмножеством $\mathscr{W}$, причем

$\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ — рефлексивное банахово пространство, и норма в нем, равно как и в сопряженном, строго выпукла, $\mathscr{W}$ плотно в $\mathscr{V}$, и вложение непрерывно. (6.20)

Далее, добавим *следующее условие*:

Можно указать элемент $v_0 \in \mathscr{K} \cap D(L)$, для которого выполнено (6.5) и

$$\frac{(\beta(v), v - v_0)}{\|v\|_{\mathscr{W}}} \to +\infty \quad \text{при } \|v\|_{\mathscr{W}} \to \infty. \tag{6.21}$$

Нам еще понадобится дополнительное предположение:

$D(L) \cap \mathscr{W}$ и $D(L^*) \cap \mathscr{W}$ плотны в $\mathscr{W}$, так что сужение оператора L на $D(L) \cap \mathscr{W}$ имеет замыкание $(\overline{L})$ в $\mathscr{W} \times \mathscr{W}'$; если L_0 — сужение $\overline{L}$ на $D(L) \cap \mathscr{W}$, то предполагается, что $L_0^* \geqslant 0$. (6.22)

В предположениях (6.21), (6.22) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой элемент* u_ε *из* $D(L_0)$, *что*

$$L_0 u_\varepsilon + \mathcal{A}(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f. \tag{6.23}$$

Чтобы перейти к пределу, мы усилим предположение (6.4):

$$\begin{gathered} \forall v \in \mathcal{K} \text{ существует такая последовательность} \\ v_j \in \mathcal{K} \cap D(L_0), \text{ что } v_j \to v \text{ в } \mathcal{K}, \\ \limsup_{j \to \infty} (L_0 v_j,\ v_j - v) \leqslant 0. \end{gathered} \tag{6.24}$$

Далее можно выделить подпоследовательность (опять обозначаемую через u_ε) таким образом, чтобы

$$u_\varepsilon \to u \text{ в } \mathcal{V} \text{ слабо.}$$

Можно проверить, как при доказательстве теоремы 6.1, что

$$(L_0 v + \mathcal{A}(u) - f,\ v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(L_0) \cap \mathcal{K}.$$

Однако $D(L_0) \cap \mathcal{K} \supset D(L) \cap \mathcal{K}$ и $L_0 = L$ на $D(L) \cap \mathcal{K}$, откуда выводится, что u является решением (6.6). Следовательно,

если выполнены предположения (6.21), (6.22), (6.24) и если u_ε (соответственно u) является решением (6.23) (соответственно (6.6)), то можно так выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_ε, чтобы $u_\varepsilon \to u$ в $\mathcal{V}$ слабо ● (6.25)

Замечание 6.3. Из (6.17) следует, что

$$\limsup (\mathcal{A}(u_\varepsilon) - \mathcal{A}(u),\ u_\varepsilon - u) \leqslant 0.$$

Следовательно,

если существует такая строго монотонная функция $\lambda \to \psi(\lambda) > 0$, что $(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v) \geqslant \psi(\|u - v\|)$ $\forall u,\ v \in \mathcal{V}$, то $u_\varepsilon \to u$ в $\mathcal{V}$ (сильно) ● (6.26)

6.2. Примеры и приложения к вопросам гладкости

Пример 6.1. (Аналог примера 5.1.) Возьмем

$$\mathcal{V} = L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$$

и оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством

$$\mathcal{A}\varphi = -\sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + a_0(x, t)\varphi,\ a_0,\ a_{ij} \in L^\infty(Q),$$

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x,\ t)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) \text{ почти всюду в } Q, \tag{6.27}$$

$\alpha > 0$, $\forall \xi_j \in \mathbb{R}$; $a_0(x,\ t)$ имеет произвольный знак.

Пусть $\mathscr{K}$ определяется условием

$$\mathscr{K}=\{v\mid v\in\mathscr{V},\ v\geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q\}. \tag{6.28}$$

Далее возьмем

$$L=\partial/\partial t,$$
$$D(L)=\left\{v\mid v\in\mathscr{V},\ \frac{dv}{dt}\in\mathscr{V}'=L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),\ v(0)=0\right\}. \tag{6.29}$$

Мы можем применить замечание 6.1 (ср. с примером 5.1) с $\mathscr{W}=L^2(Q)$; тогда задачей со штрафом будет

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-\mathscr{A}u_\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^-=f \text{ в } Q,\\ u_\varepsilon(x,0)=0,\\ u_\varepsilon=0 \text{ на } \Sigma.\end{gathered} \tag{6.30}$$

Далее мы получим, применяя теорему 6.1 и замечание 6.3, что $u_\varepsilon\to u$ в $\mathscr{V}$ при $\varepsilon\to 0$, u является «слабым» решением вариационного неравенства, отвечающего $\mathscr{A}$, $\mathscr{K}$ и L●

Можно получить один результат, касающийся гладкости u. Сначала мы покажем, что

$$\frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^- \text{ ограничены в } L^2(Q). \tag{6.31}$$

Действительно, задача (6.30) записывается в виде

$$\left(u_\varepsilon'(t),\ v\right)+a\left(t;\ u_\varepsilon(t),\ v\right)-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_\varepsilon^- v\,dx=\\ =(f(t),\ v)\quad \forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{6.32}$$

где

$$a(t;\ u,\ v)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx. \tag{6.33}$$

Подставляя $v=v(t)\in L^2\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right)$, получим

$$\int_0^T(u_\varepsilon',\ v)\,dt+\int_0^T a(t;\ u_\varepsilon(t),\ v(t))\,dt-\frac{1}{\varepsilon}\int_Q u_\varepsilon^- v\,dx\,dt=\int_Q fv\,dx\,dt. \tag{6.34}$$

Теперь, подставив в (6.34) $v=-u_\varepsilon^-$, найдем (см. (9.107), гл. 2)

$$\int_0^T\left(u_\varepsilon',\ -u_\varepsilon^-\right)dt\geqslant 0,$$

С другой стороны,

$$\int_0^T a\left(t;\, u_\varepsilon,\, -u_\varepsilon^-\right) dt = \int_0^T a\left(t;\, u_\varepsilon^-,\, u_\varepsilon^-\right) dt \geqslant 0;$$

тогда после деления на ε получим из (6.34)

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}\, u_\varepsilon^- \right\|_{L^2(Q)}^2 \leqslant \| f \|_{L^2(Q)} \left\| \frac{1}{\varepsilon}\, u_\varepsilon^- \right\|_{L^2(Q)},$$

откуда следует (6.31).

В качестве следствия мы получим, что решение соответствующего вариационного неравенства удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u \in L^2(Q), \\ u(x,\, 0) = 0, \quad u = 0 \text{ на } \Sigma. \end{gathered} \tag{6.35}$$

Следствие. *Если дополнительно предположить, что коэффициенты* a_{ij} *достаточно гладкие, то можно вывести* (следуя Аграновичу — Вишику [1]; см. также Лионс — Мадженес [1], гл. 4), *что*

$$\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \in L^2(Q). \tag{6.36}$$

Таким образом, мы другим методом получаем результат теоремы 9.6 гл. 2 ●

Пример 6.2. Рассмотрим ситуацию, аналогичную той, которая имела место в примере 6.1, причем пусть

$$a_0(x,\, t) \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q. \tag{6.37}$$

Рассматривается *периодическая* задача:

$$\begin{gathered} L = \partial/\partial t, \\ D(L) = \left\{ v \,\middle|\, v \in \mathcal{V},\ \frac{dv}{dt} \in \mathcal{V}',\ v(0) = v(T) \right\}. \end{gathered} \tag{6.38}$$

Тогда (6.30) заменяется задачей

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A}u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\, u_\varepsilon^- = f \quad \text{в} \quad Q, \\ u_\varepsilon(x,\, 0) = u_\varepsilon(x,\, T),\ x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Sigma. \end{gathered} \tag{6.39}$$

Краевые условия здесь такие же, как в примере 6.1 ●

Пример 6.3. Рассмотрим такие же $\mathscr{A}$ и L, как в примере 6.1, но на этот раз

$$\begin{aligned}&\mathscr{V}=L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)),\\&\mathscr{K}=\{v\,|\,v\in\mathscr{V},\ v\geqslant 0\ \text{почти всюду на}\ \Sigma\}.\end{aligned}\tag{6.40}$$

Ассоциированной задачей со штрафом будет следующая задача (см. пример 5.3):

$$\begin{aligned}(u_\varepsilon',\ v)+a\big(t;\ u_\varepsilon(t),\ v\big)-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Gamma u_\varepsilon(t)^-\,v\,d\Gamma=\\=\int\limits_\Omega f(t)\,v\,dx+\int\limits_\Gamma g(t)\,v\,d\Gamma,\end{aligned}\tag{6.41}$$

где $a(t;\ u,\ v)$ определяется посредством (6.33) и где

$$f\in L^2(Q),\qquad g\in L^2(\Sigma).\tag{6.42}$$

Согласно теореме 6.1 и замечанию 6.3, если u является решением соответствующего вариационного неравенства, то

$$u_\varepsilon\to u\ \text{в}\ \mathscr{V}\ \bullet\tag{6.43}$$

Предположим теперь, что $f=0$. Подставляя в (6.41) $v=-u_\varepsilon^-$ и рассуждая таким же образом, как в примере 6.1, мы получим, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Sigma (u_\varepsilon^-)^2\,d\Sigma\leqslant-\int\limits_\Sigma g u_\varepsilon^-\,d\Sigma\,^{1)},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon}\,u_\varepsilon^-\ \text{ограничены в}\ L^2(\Sigma).\tag{6.44}$$

В качестве следствия мы получим, что решение соответствующего вариационного неравенства является решением задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}u=0\ \text{в}\ Q,\\&\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathscr{A}}}\in L^2(\Sigma),\\&u(x,\ 0)=0.\end{aligned}\tag{6.45}$$

Отсюда выводится, *если коэффициенты оператора $\mathscr{A}$ достаточно гладкие*, что (согласно Лионсу — Мадженесу [1], гл. 4)

$$u\in L^2\big(0,\ T;\ H^{3/2}(\Omega)\big)\tag{6.46}$$

---

[1] К тому же самому утверждению можно прийти, если $f\leqslant 0$ почти всюду в Q.

и[1]

$$D_t^{3/4}u \in L^2(Q) \,\bullet \tag{6.47}$$

Пример 6.4. Пусть в условиях примера 6.1

$$\mathscr{K} = \{v \mid |\operatorname{grad}_x v(x, t)| \leqslant 1 \text{ почти всюду в } Q\}. \tag{6.48}$$

Ассоциированной задачей со штрафом будет (ср. пример 5.4)

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathscr{A}u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2)^- \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = f, \\ u_\varepsilon(x, 0) = 0, \\ u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Sigma. \end{gathered} \tag{6.49}$$

Действительно, можно применить замечание 6.2, взяв

$$\begin{aligned} &\mathscr{W} = L^4(0, T;\ W_0^{1,4}(\Omega)), \\ &L_0 = \partial/\partial t, \\ &D(L_0) = \{v \mid v \in \mathscr{W},\ v' \in \mathscr{W}',\quad v(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Согласно замечаниям 6.2, 6.3 в том случае, когда дополнительно имеет место единственность,

$$u_\varepsilon \to u \text{ в } \mathscr{V} \text{ при } \varepsilon \to 0 \,\bullet$$

Пример 6.5. Пусть w является решением «односторонней» задачи (см. п. 9.5.5 гл. 2)

$$\begin{aligned} &-\Delta w + w = 0 \text{ в } Q \ (\Delta = \Delta_x), \\ &w \geqslant 0 \text{ на } \Sigma,\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial n} \geqslant f \text{ на } \Sigma,\ f \in L^2(\Sigma)^{2)}, \\ &w\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial n} - f\right) = 0 \text{ на } \Sigma, \\ &w(x, 0) = 0,\ x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Ассоциированной задачей со штрафом будет

$$\begin{aligned} &-\Delta w_\varepsilon + w_\varepsilon = 0 \text{ в } Q, \\ &\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} - \frac{1}{\varepsilon}w_\varepsilon^- = f \text{ на } \Sigma, \\ &w_\varepsilon(x, 0) = 0,\ x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Имеем: $w_\varepsilon \to w$ в $L^2(0, T;\ H^{1/2}(\Gamma))$ (на Σ) при $\varepsilon \to 0$, откуда вытекает, что $w_\varepsilon \to w$ в $L^2(0, T;\ H^1(\Omega))\,\bullet$

---

[1] Производная по t порядка 3/4 определяется с помощью преобразования Фурье по t после продолжении функции на $\mathbb{R}_t$.

[2] Можно брать f из $L^2(0, T;\ H^{-1/2}(\Gamma))$.

Здесь также можно получить один результат о гладкости. Заметим, что задача (6.51) эквивалентна задаче

$$\int_\Gamma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} v\,d\Gamma + a(w_\varepsilon, v) - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma w_\varepsilon^- \cdot v\,d\Gamma = \int_\Gamma fv\,d\Gamma \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{6.52}$$

где

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega uv\,dx;$$

следовательно,

$$\int_\Sigma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} v\,d\Sigma + \int_0^T a(w_\varepsilon, v)\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Sigma w_\varepsilon^- v\,d\Sigma = \int_\Sigma fv\,d\Sigma. \tag{6.53}$$

Подставляя в (6.53) $v = -w_\varepsilon^-$, мы получим, как и в предыдущих примерах, что *если* $f \in L^2(\Sigma)$, *то*

$$\frac{1}{\varepsilon} w_\varepsilon^- \text{ ограничены в } L^2(\Sigma).$$

Таким образом, решение w задачи (6.50) является решением задачи

$$\begin{gathered} -\Delta w + w = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial n} \in L^2(\Sigma), \\ w(x, 0) = 0, \; x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{6.54}$$

Отсюда выведем (используя методы Лионса — Мадженеса [1], гл. 4), что

$$w \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega)) \bullet \tag{6.55}$$

6.3. Ненулевые начальные данные

Общие указания. До сих пор мы всегда рассматривали эволюционные вариационные неравенства *в том случае, когда* $L = \partial/\partial t$, а начальные данные были *нулевыми* ($u_0 = 0$) (см. замечание 9.1 гл. 2). Теперь мы собираемся коротко изучить некоторые случаи, в которых начальные данные *не являются нулевыми*. Для этого мы используем *метод штрафа*. При изучении этой задачи возможны и другие методы:

(i) методы, «аналогичные» использованным в § 9, 10 гл. 2 [1];

(ii) методы аппроксимации, основанные на частичной дискретизации; несколько указаний на эти методы имеется в п. 1.2 гл. 4●

---

[1] Полное изучение этой задачи читатель найдет в работе Брезиса [5], результаты которой гораздо полнее тех, которые приведены ниже.

Пусть V — гильбертово [1] пространство, содержащееся в гильбертовом пространстве H, причем $V \subset H \subset V'$, V плотно в H и H отождествляется со своим сопряженным.

Рассмотрим семейство операторов $A(t)$, $t \in [0, T]$, таких, что

$$\begin{gathered} A(t) \in \mathscr{L}(V; V'), \text{ функция } t \to (A(t)u, v) \text{ измерима} \\ \text{и ограничена } \forall u, v \in V, \\ (A(t)v, v) \geqslant \alpha \| v \|_V^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T]; \end{gathered} \tag{6.56}$$

что касается множества K, то

$$K \text{ — выпуклое замкнутое множество в } V. \tag{6.57}$$

Будет доказана

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия* (6.56), (6.57). *Пусть заданы* f *и* u_0, *причем*

$$f \in L^2(0, T; V'), \tag{6.58}$$

$$u_0 \in K. \tag{6.59}$$

Тогда существует и притом только одна функция u, *обладающая следующими свойствами*:

$$u \in L^2(0, T; V), \tag{6.60}$$

$$u \in C^0([0, T]; H), \tag{6.61}$$

$$u(t) \in K \quad \text{почти всюду}, \tag{6.62}$$

$$u(t) \to u_0 \text{ в } H \text{ при } t \to 0, \tag{6.63}$$

$$\begin{gathered} \int_0^s (v' + A(t)u - f, v - u)\,dt \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}|v(s) - u(s)|^2 - \frac{1}{2}|v(0) - u_0|^2 \\ \forall v \in L^2(0, T; V), \quad v' \in L^2(0, T; V'), \\ v(t) \in K \text{ почти всюду}; \quad \forall s \in [0, T]. \end{gathered} \tag{6.64}$$

Замечание 6.4. Поскольку u является непрерывным отображением $[0, T]$ в H (а не в V), то было бы естественным брать u_0 из H, а не из V. Поскольку, с другой стороны, имеется условие (6.62), «естественным» предположением является то, что

$$u_0 \text{ принадлежит замыканию } K \text{ в } H.$$

По поводу обсуждения этого случая мы отсылаем к Брезису [5]●

---

[1] Изложенный ниже метод распространяется на тот случай, когда V — рефлексивное банахово пространство, снабженное вместе со своим сопряженным строго выпуклой нормой.

Замечание 6.5. Вернемся к (9.3) (см. гл. 2). Тогда мы найдем, что

$$(v'(t),\ v(t)-u(t))+(A(t)u(t),\ v(t)-u(t))-(f(t),\ v(t)-u(t))\geqslant$$
$$\geqslant(v'(t)-u'(t),\ v(t)-u(t)),$$

и интегрируя от 0 до s, мы получим (6.64)●

Замечание 6.6. Даже применительно к случаю $u_0=0$ в теореме 6.2 содержится дополнительное уточнение (6.61) (по сравнению с уже известными нам результатами)●

Доказательство. 1) Пусть β: $V\to V'$ — оператор штрафа (в смысле § 5), связанный с K. Рассмотрим *уравнение со штрафом*:

$$\begin{aligned}&u_\varepsilon'+A(t)u_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon(t))=f,\\&u_\varepsilon(0)=u_0.\end{aligned}\tag{6.65}$$

Задача имеет единственное решение из $L^2(0,\ T;\ V)$, причем $u_\varepsilon'\in L^2(0,\ T;\ V')$, согласно (например) § 1 гл. 2.

Из (6.65) следует, что [1]

$$\frac{1}{2}|u_\varepsilon(t)|^2+\int_0^t(A(\sigma)u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\,d\sigma+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(\beta(u_\varepsilon(\sigma)),\ u_\varepsilon(\sigma))\,d\sigma=$$
$$=\int_0^t(f(\sigma),\ u_\varepsilon(\sigma))\,d\sigma+\frac{1}{2}|u_0|^2.\tag{6.66}$$

Можно всегда считать, сдвигая соответствующее множество, что $0\in K$ и при этом $\beta(0)=0$. Тогда $(\beta(v),\ v)\geqslant0$, и равенство (6.66) вместе с (6.56) показывает, что

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } L^2(0,\ T;\ V)\cap L^\infty(0,\ T;\ H),\tag{6.67}$$

$$\int_0^t(\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon)\,d\sigma\leqslant c\varepsilon.\tag{6.68}$$

Следовательно, можно выделить такую подпоследовательность, опять обозначаемую через u_ε, что

$$u_\varepsilon\to u \text{ в } L^2(0,\ T;\ V) \text{ слабо,}$$
$$u_\varepsilon\to u \text{ в } L^\infty(0,\ T;\ H) \text{ *-слабо,}$$

$\beta(u(t))=0$ почти всюду, следовательно, $u(t)\in K$ почти всюду.

2) Теперь мы можем показать, что для почти всех s выполняется неравенство (6.64). Возьмем v таким же, как в (6.64).

---

[1] Через $|\ |$ обозначается норма в H.

Тогда $\beta(v(t))=0$, и из (6.65) следует, что

$$\int_0^s (v'+A(t)u_\varepsilon-f,\ v-u_\varepsilon)\,dt \geqslant \frac{1}{2}|v(s)-u_\varepsilon(s)|^2-\frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2. \tag{6.69}$$

Пусть Ψ — множество функций $\psi\in C^0([0,\ T])$, $\psi(t)\geqslant 0$ $\forall t\in[0,\ T]$. Из (6.69) выводится, что $\forall\psi\in\Psi$

$$\int_0^T \psi(s)\,ds\int_0^s [(v'+A(t)u_\varepsilon-f,\ v)-(v'-f,\ u_\varepsilon)]\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T \psi(s)\,ds\left[\int_0^s (A(t)u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\,dt+\frac{1}{2}|v(s)-u_\varepsilon(s)|^2\right]-$$
$$-\frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2\int_0^T \psi\,ds. \tag{6.70}$$

Однако

$$\liminf \int_0^T \psi(s)\,ds\left[\int_0^s (A(t)u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\,dt+\frac{1}{2}|v(s)-u_\varepsilon(s)|^2\right]\geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T \psi(s)\,ds\left[\int_0^s (A(t)u,\ u)\,dt+\frac{1}{2}|v(s)-u(s)|^2\right],$$

и, таким образом, из (6.70) вытекает неравенство

$$\int_0^T \psi(s)\,ds\int_0^s (v'+A(t)u-f,\ v-u)\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^T \psi(s)\left[\frac{1}{2}|v(s)-u(s)|^2-\frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2\right]ds,$$

которое, будучи справедливым $\forall\psi\in\Psi$, показывает, что функция *u удовлетворяет неравенству* (6.64) *для почти всех* $s\in[0,\ T]$.

3) Теперь мы покажем, что включение (6.61) вытекает из остальных свойств. Действительно, пусть u_η является решением задачи

$$\eta u_\eta'+u_\eta=u,\quad u_\eta(0)=u_0,\quad \eta>0. \tag{6.71}$$

Тогда $u_\eta(t)\in K$, и в (6.64) можио подставить $v=u_\eta$. Имеем

$$-\eta\int_0^s |u_\eta'|^2\,dt+\int_0^s (Au-f,\ u_\eta-u)\,dt\geqslant\frac{1}{2}|u_\eta(s)-u(s)|^2,$$

откуда

$$|u_\eta(s) - u(s)|^2 \leqslant 2 \int_0^s (Au - f, u_\eta - u)\,dt, \tag{6.72}$$

а поскольку правая часть (6.72) стремится к нулю равномерно по s при $\eta \to 0$, отсюда вытекает, что $u_\eta \to u$ в H равномерно по $s \in [0, T]$; таким образом мы приходим к (6.61).

4) Если мы подставим в (6.64) v, удовлетворяющее условию $v(0) = u_0$, то

$$|v(s) - u(s)|^2 \leqslant 2 \int_0^s (v' + A(t)u - f, v - u)\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad s \to 0,$$

откуда следует (6.63).

5) *Единственность.* Доказательство единственности является простым вариантом доказательства теоремы 9.4 гл. 2. Если u_1 и u_2 суть два решения, то рассмотрим $w = (u_1 + u_2)/2$, далее определим w_η как решение задачи

$$\eta w'_\eta + w_\eta = w, \qquad w_\eta(0) = u_0$$

и в каждое из уравнений подставим $v = w_\eta$. После сложения получим

$$2\int_0^s (w'_\eta, w_\eta - w)\,dt + \int_0^s [(Au_1, w_\eta - u_1) + (Au_2, w_\eta - u_2)]\,dt -$$

$$- 2\int_0^s (f, w_\eta - w)\,dt \geqslant \frac{1}{2}|w_\eta(s) - u_1(s)|^2 + \frac{1}{2}|w_\eta(s) - u_2(s)|^2 \geqslant 0,$$

откуда

$$\int_0^s [(Au_1, w_\eta - u_1) + (Au_2, w_\eta - u_2)]\,dt \geqslant 2\int_0^s (f, w_\eta - w)\,dt;$$

при $\eta \to 0$ получим

$$\int_0^s (A(t)(u_1 - u_2), u_1 - u_2)\,dt \leqslant 0,$$

откуда $u_1 = u_2$ ●

6.4. Односторонние задачи (или неравенства) для операторов Навье — Стокса (I)

Мы будем пользоваться обозначениями § 6 гл. 1.

Предположим, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ [1]).

Пространства V и H определяются посредством (6.11), (6.7), гл. 1, а формы $a(u, v)$ и $b(u, v, w)$ посредством (6.14), (6.15), гл. 1:

Далее мы рассмотрим множество K, удовлетворяющее следующему (довольно ограничительному) условию:

K — замкнутое выпуклое подмножество в V, содержащее начало и такое, что $a(v, v)+b(v, \varphi, v) \geqslant 0$ $\forall \varphi \in K, \quad \forall v \in V.$ (6.73)

Пример множества K, удовлетворяющего условию (6.73). Имеем

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} w|^2 dx \geqslant c \int_\Omega |w|^2 dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{6.74}$$

Пусть заданы числа a и b, причем

$$0 < b \leqslant c - a, \tag{6.75}$$

и пусть K — выпуклое замкнутое множество в V, содержащееся в множестве $\hat{K}$ (которое само является замкнутым выпуклым подмножеством V), определяемом условиями

$$\hat{K} = \left\{ \varphi \,\middle|\, \varphi \in V,\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega),\ \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left(= \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \leqslant a, \right.$$
$$\left. \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 2b \right\}. \tag{6.76}$$

Тогда выполняется условие (6.73), поскольку ввиду (6.74) [2])

$$a(v, v) + b(v, \varphi, v) \geqslant (c-a)(|v_1|^2 + |v_2|^2) - 2b|v_1||v_2|,$$

откуда в силу (6.75) следует наш результат ●

Замечание 6.7. Из предположения (6.73) вытекает, что K *ограничено* в V. Действительно, если бы последнее не имело места, то нашлись бы такие φ, $\psi \in K$, что $\varphi + \lambda\psi \in K$ $\forall \lambda \geqslant 0$ и при этом

$$a(v, v) + b(v, \varphi, v) + \lambda b(v, \psi, v) \geqslant 0 \quad \forall \lambda \geqslant 0,$$

---

[1]) По поводу произвольного n см. следующее ниже замечание 6.8.

[2]) $|v_i|$ — норма v_i в $L^2(\Omega)$.

откуда $b(v, \psi, v) \geqslant 0$ $\forall v$; но последнее невозможно (ввиду условия $\operatorname{div}\psi = 0$) ●

Теперь будет доказана

Теорема 6.3. *Предположим, что выполнено условие* (6.73). *Пусть f принадлежит $L^2(0, T; V')$. Тогда существует такая функция u, что*

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{6.77}$$

$$u(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{6.78}$$

$$\int_0^T [(\varphi', \varphi - u) + a(u, \varphi - u) + b(u, u, \varphi - u)]\,dt \geqslant \int_0^T (f, \varphi - u)\,dt\,^{1)} \tag{6.79}$$

$$\forall \varphi \in L^2(0, T; V), \ \varphi' \in L^2(0, T; V'),$$
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) \in K \text{ почти всюду.}$$

Доказательство. 1) Возьмем такой оператор штрафа β: $V \to V'$, связанный с K, чтобы β $L^2(0, T; V) \to L^2(0, T; V')$ было монотонным и семинепрерывным отображением. Согласно замечанию 2.3 (надо в формуле (2.31) положить $n = 2$; тогда мы увидим, что случай $p = 2$, отвечающий рассматриваемой нами ситуации, является допустимым), существует такая функция u_ε [2], что

$$(u'_\varepsilon, v) + a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v) = (f, v) \quad \forall v \in V,$$
$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; V), \quad u'_\varepsilon \in L^2(0, T; V'), \tag{6.80}$$
$$u_\varepsilon(0) = 0.$$

Подставляя $v = u_\varepsilon$ в (6.80) (что законно), мы получим:

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{6.81}$$

Более того, из (6.80) следует, что

$$\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon[f - u'_\varepsilon - Au_\varepsilon - B(u_\varepsilon)], \tag{6.82}$$

---

[1] Из соображений симметрии мы добавляем в левую часть равный нулю член $-\int_0^T b(u, u, u)\,dt$.

[2] Более того, эта функция *единственна*; для доказательства единственности можно приспособить п. 6.2 гл. 1.

где A и B определяются равенствами

$$(Au,\ v) = a(u,\ v),$$
$$(B(u),\ v) = b(u,\ u,\ v) \quad \forall u,\ v \in V.$$

Из (6.81) и (6.82) следует, что, например,

$$\beta(u_\varepsilon) \to 0 \text{ в } \mathscr{D}'(]0,\ T[;\ V'). \tag{6.83}$$

2) *Предельный переход при* $\varepsilon \to 0$. Согласно (6.81), $\beta(u_\varepsilon)$ ограничены в $L^2(0,\ T;\ V')$ и, следовательно, можно выделить такую последовательность (обозначаемую опять через u_ε), что

$$u_\varepsilon \to u \text{ в } L^2(0,\ T;\ V) \text{ слабо и в } L^\infty(0,\ T;\ H) \ *\text{-слабо}, \tag{6.84}$$

$\beta(u_\varepsilon) \to 0$ в $L^2(0,\ T;\ V')$ слабо (надо воспользоваться (6.83), чтобы показать, что слабый предел равен 0). (6.85)

С другой стороны, из (6.80) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon)\,dt + \int_0^T a(u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\,dt + \frac{1}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 = \int_0^T (f,\ u_\varepsilon)\,dt,$$

откуда

$$\int_0^T (\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon)\,dt \to 0.$$

Благодаря монотонности β, мы получим, что $\beta(u) = 0$, и, следовательно, u удовлетворяет включениям (6.77), (6.78).

Возьмем функцию φ, удовлетворяющую (6.79), и рассмотрим интеграл

$$X_\varepsilon = \int_0^T [(\varphi',\ \varphi - u_\varepsilon) + a(u_\varepsilon,\ \varphi - u_\varepsilon) + {} + b(u_\varepsilon,\ u_\varepsilon,\ \varphi - u_\varepsilon) - (f,\ \varphi - u_\varepsilon)]\,dt.$$

В силу (6.80) имеем (поскольку $\beta(\varphi) = 0$)

$$X_\varepsilon = \int_0^T (\varphi' - u_\varepsilon',\ \varphi - u_\varepsilon)\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\beta(\varphi) - \beta(u_\varepsilon),\ \varphi - u_\varepsilon)\,dt \geqslant 0 \ \bullet \tag{6.86}$$

Однако

$$b(u_\varepsilon,\ u_\varepsilon,\ u_\varepsilon) = 0,$$

следовательно,

$$X_\varepsilon = \int_0^T [(\varphi',\ \varphi - u_\varepsilon) + a(u_\varepsilon,\ \varphi - u_\varepsilon) - b(u_\varepsilon,\ \varphi,\ u_\varepsilon) - (f,\ \varphi - u_\varepsilon)]\,dt,$$

и из (6.86) вытекает, что

$$\int_0^T [(\varphi', \varphi - u_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, \varphi) - (f, \varphi - u_\varepsilon)]\, dt \geqslant Y_\varepsilon, \tag{6.87}$$

где

$$Y_\varepsilon = \int_0^T [a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon, \varphi, u_\varepsilon)]\, dt.$$

Теперь мы используем условие (6.73) для $v = u - u_\varepsilon$. Тогда получим

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon = &\int_0^T [a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) + b(u_\varepsilon - u, \varphi, u_\varepsilon - u)]\, dt + \\ &+ \int_0^T [a(u, u_\varepsilon - u) + a(u_\varepsilon, u) + b(u, \varphi, u_\varepsilon - u) + b(u_\varepsilon, \varphi, u)]\, dt \geqslant \\ &\geqslant \int_0^T [a(u, u_\varepsilon - u) + a(u_\varepsilon, u) + b(u, \varphi, u_\varepsilon - u) + b(u_\varepsilon, \varphi, u)]\, dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\liminf Y_\varepsilon \geqslant \int_0^T [a(u, u) + b(u, \varphi, u)]\, dt.$$

Это неравенство вместе с (6.87) показывает, что u удовлетворяет (6.79)[1] ●

Замечание 6.8. Можно решить задачу (6.80) в пространстве произвольной размерности. Далее можно перейти к пределу для таких φ, которые, например, удовлетворяют включениям

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \in L^{(n+2)/n}(Q) \bullet$$

6.5. Односторонние задачи (или неравенства) для операторов Навье — Стокса (II)

Обычно при условии (6.73) можно легко получить теорему существования и *единственности* для *произвольного* выпуклого K, но при дополнительных предположениях на правую часть f; с другой стороны, при этом можно брать ненулевые начальные данные.

---

[1] Из приведенного выше доказательства можно вывести (Х. Брезис), что $u \in C^0([0, T]; H)$ и $u(0) = 0$.

Теорема 6.4. *Предположим, что размерность пространства равна 2. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в V, содержащее начало. Пусть f, u_0 удовлетворяют следующим условиям:*

$$f, \quad f' \in L^2(0, T; H), \tag{6.88}$$

$$u_0 \in K, \tag{6.89}$$

существует такая функция $u_1 \in H$, что

$$(f(0), v) - a(u_0, v) - b(u_0, u_0, v) = (u_1, v) \quad \forall v \in V. \tag{6.90}$$

В этих условиях существует и притом только одна такая функция u, что

$$u \in L^2(0, T; V), \quad u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{6.91}$$

$$u(t) \in K \quad \forall t \in [0, T], \tag{6.92}$$

$$(u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + b(u(t), u(t), v - u(t)) \geqslant$$
$$\geqslant (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in K \text{ и для почти всех } t, \tag{6.93}$$

$$u(0) = u_0. \tag{6.94}$$

Доказательство существования. 1) Мы будем исходить из u_ε — решения задачи (6.80) с начальным условием

$$u_\varepsilon(0) = u_0.$$

Продифференцируем *формально* (6.80) по t; получим

$$(u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon', v) + b(u_\varepsilon', u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon', v) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon)', v) = (f', v), \tag{6.95}$$

причем

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1 \text{ [1]}. \tag{6.96}$$

С другой стороны, можно непосредственно решить задачу (6.95), (6.96). В этой связи отметим, что

$$\text{если } \varphi \in L^2(0, T; V), \quad \varphi' \in L^2(0, T; V), \text{ то}$$
$$\int_0^T (\beta(\varphi)', \varphi')\, dt \geqslant 0. \tag{6.97}$$

Действительно,

$$(\beta(\varphi(t+h)) - \beta(\varphi(t)), \varphi(t+h) - \varphi(t)) \geqslant 0;$$

тогда $(\beta(\varphi(t))', \varphi'(t)) \geqslant 0$ почти всюду, откуда следует (6.97)[2].

---

[1] Надо положить $t = 0$ в (6.80) и, заметив, что $\beta(u_0) = 0$, воспользоваться (6.90).

[2] Мы считаем, что оператор β определяется равенством $\beta v = J(v - P_K v)$; этот оператор удовлетворяет условию Липшица, когда V — гильбертово пространство.

Теперь мы получим существование u_ε — решения задачи (6.95), удовлетворяющего условиям[1]

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; V), \quad u'_\varepsilon \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Наконец, интегрируя (6.95) от 0 до t, мы получим, что u_ε удовлетворяет (6.80); тем самым дифференцирование по t оправдано.

2) *Априорные оценки.* Прежде всего заметим, что опять имеет место (6.81). Далее, полагая $v = u'_\varepsilon$ в (6.95) (что законио), мы выведем ($|\ \ |$ — норма в H), что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_\varepsilon(t)|^2 + a(u'_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) + b(u'_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}((\beta(u_\varepsilon(t))', u'_\varepsilon(t)) = (f'(t), u'_\varepsilon(t)),$$

откуда, учитывая (6.97), найдем

$$\frac{1}{2}|u'_\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t a(u'_\varepsilon(\sigma), u'_\varepsilon(\sigma))\,d\sigma \leqslant \frac{1}{2}|u_1|^2 + \\ + \int_0^t |b(u'_\varepsilon, u_\varepsilon, u'_\varepsilon)|\,d\sigma + \int_0^t |(f'(\sigma), u'_\varepsilon(\sigma))|\,d\sigma. \qquad (6.98)$$

Однако, обозначая через $\|\ \ \|_{L^4}$ (соответственно $\|\ \ \|$) норму в $(L^4(\Omega))^2$ (соответственно в V), найдем

$$|b(u'_\varepsilon; u_\varepsilon, u'_\varepsilon)| = |b(u'_\varepsilon, u'_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leqslant c_1\|u_\varepsilon\|_{L^4}\|u'_\varepsilon\|_{L^4}\|u'_\varepsilon\| \leqslant \\ \leqslant c_2\|u_\varepsilon\|_{L^4}|u'_\varepsilon|^{1/2}\|u'_\varepsilon\|^{3/2} \leqslant$$

(в силу неравенства (6.35) гл. 1)

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u'_\varepsilon\|^2 + c_3\|u_\varepsilon\|^4_{L^4}|u'_\varepsilon|^2,$$

и из (6.98) следует, что

$$|u'_\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t \|u'_\varepsilon(\sigma)\|^2\,d\sigma \leqslant |u_1|^2 + 2c_3\int_0^t \|u_\varepsilon\|^4_{L^4}|u'_\varepsilon|^2\,d\sigma + \\ + \int_0^t |f'(\sigma)|^2\,d\sigma + \int_0^t |u'_\varepsilon(\sigma)|^2\,d\sigma. \qquad (6.99)$$

---

[1] Надо воспользоваться методамв компактности, изученными в гл. 1.

Отсюда, в частности, выводим, что

$$|u_\varepsilon'(t)|^2 \leqslant \left(|u_1|^2 + \int_0^T |f'(\sigma)|^2 d\sigma\right) \exp\left(t + 2c_3 \int_0^t \|u_\varepsilon\|_{L^4}^4 d\sigma\right). \quad (6.100)$$

Однако, согласно неравенству (6.35) гл. 1 и (6.81), u_ε ограничены в $L^4(0, T; (L^4(\Omega))^2)$, и нз оценки (6.100) следует, что

$$u_\varepsilon' \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; H). \quad (6.101)$$

Возвращаясь опять к (6.99), мы получим, что

$$u_\varepsilon' \text{ ограничены в } L^2(0, T; V). \quad (6.102)$$

3) Мы можем считать, выделяя подпоследовательность, обозначаемую опять через u_ε, что

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{в } L^2(0, T; V) \text{ слабо,}$$

$$u_\varepsilon' \to u' \text{ в } L^2(0, T; V) \text{ слабо и в } L^\infty(0, T; H) \text{ *-слабо.}$$

Как и при доказательстве теоремы 6.3, получим $\beta(u) = 0$, следовательно, u удовлетворяет (6.91), (6.92), (6.94).

Покажем, что имеет место (6.93). Из (6.80) следует, что $\forall v \in K$

$$X_\varepsilon^v \geqslant a(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)),$$

где

$$X_\varepsilon^v = (u_\varepsilon'(t), v - u_\varepsilon(t)) + a(u_\varepsilon(t), v) + \\ + b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v) - (f, v - u_\varepsilon(t)).$$

Если через $\mathscr{V}$ обозначено множество функций $\psi \in C^0([0, T])$, $\psi \geqslant 0$, то имеем

$$\int_0^T X_\varepsilon^v \psi\, dt \geqslant \int_0^T \psi a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)\, dt. \quad (6.103)$$

Однако $u_\varepsilon \to u$ в $L^2(0, T; H)$ *сильно* (в силу теоремы 5.1 гл. 1), так что

$$\int_0^T (u_\varepsilon', u_\varepsilon) \psi\, dt \to \int_0^T (u', u) \psi\, dt.$$

Отсюда также следует, что

$$\int_0^T b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) \psi\, dt \to \int_0^T b(u, u, v) \psi\, dt,$$

и из (6.103) вытекает $\left(\text{поскольку } \liminf \int_0^T \psi a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)\,dt \geqslant \geqslant \int_0^T \psi a(u, u)\,dt\right)$, что

$$\int_0^T [(u', v-u) + a(u, v) + b(u, u, v) - (f, v-u)]\,\psi\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T \psi a(u, u)\,dt \qquad \forall \psi \in \Psi,$$

откуда следует (6.93) ●

Доказательство единственности. Пусть u и u_* суть два решения нашей задачи. Подставляя $v = u_*$ (соответственно $v = u$) в уравнение для u (соответственно для u_*), складывая эти уравнения и полагая $w = u - u_*$, получим

$$-(w', w) - a(w, w) - b(u, u, w) + b(u_*, u_*, w) \geqslant 0,$$

откуда

$$(w', w) + a(w, w) \leqslant -b(w, u_*, w).$$

Из этого неравенства выводится, как при доказательстве теоремы 6.2 п. 6.2 гл. 1, что $w = 0$ ●

Пример 6.6. Рассмотрим функцию тока ψ, отвечающую u (как в п. 6.9 гл. 1), и возьмем

$$K = \left\{ v \mid v_1 = \frac{\partial\theta}{\partial y},\ v_2 = -\frac{\partial\theta}{\partial x},\ \theta \in H_0^2(\Omega),\ \theta \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega \right\}. \tag{6.104}$$

Далее, в обозначениях п. 6.9 гл. 1 получим [1])

$$(-\Delta\psi' + \nu\Delta^2\psi + R(\psi) + g, \theta) \geqslant 0 \qquad \forall \theta \geqslant 0 \tag{6.105}$$

почти всюду в Ω, причем имеет место «=0», если $\theta = \psi$,

$$\psi \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega)), \quad \psi' \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{6.106}$$

---

[1]) Здесь используется тот факт, что K является выпуклым конусом с вершиной в 0. Кроме того, теорема 6.4, очевидно, остается справедливой, когда a заменяется на νa, где $\nu > 0$.

Таким образом, существует и притом только одна функция ψ, *удовлетворяющая* (6.106) *и такая, что*

$$\begin{aligned} &\psi \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q, \\ &-\Delta\psi' + \nu\Delta^2\psi + R(\psi) - g \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q, \qquad (6.107) \\ &\psi(-\Delta\psi' + \nu\Delta^2\psi + R(\psi) - g) = 0 \text{ почти всюду в } Q, \end{aligned}$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega \bullet \qquad (6.108)$$

Замечание 6.9. Вот еще один вариант рассмотренных выше примеров.

Рассмотрим опять ограниченную открытую область Ω в $\mathbb{R}^2$ и возьмем

$$V = (H_0^1(\Omega))^2, \quad H = (L^2(\Omega))^2, \qquad (6.109)$$

$$K = \{v \mid v \in V, \operatorname{div} v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \qquad (6.110)$$

Опять положим

$$a(u, v) = \sum_{i, j=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_1\, dx_2$$

и рассмотрим формы

$$\begin{aligned} &\hat{b}(u, v, w) = b(u, v, w) + c(u, v, w), \\ &c(u, v, w) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) v_j w_j\, dx. \end{aligned} \qquad (6.111)$$

Заметим, что $\hat{b}(u, v, v) = 0 \quad \forall v \in V$ (и что $\hat{b}(u, v, w) = b(u, v, w)$, если $\operatorname{div} u = 0$).

Методом, сходным с использованным при доказательстве теоремы 6.4, можно далее показать, что *если* $f \in L^2(0, T; H)$, $f' \in L^2(0, T; H)$, $u_0 \in K$ *и если выполнено условие типа* (6.90) *с заменой* b *на* $\hat{b}$, *то существует и притом только одна функция* u, *удовлетворяющая* (6.91), (6.92), (6.93) (*с* $\hat{b}$ *вместо* b) *и* (6.94) $\bullet$

7. МЕТОД ШТРАФА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

7.1. Линейные операторы

Сейчас мы собираемся рассмотреть задачу, аналогичную изученной в п. 3.3 (но несколько более общую).

Пусть заданы пространства V, H, удовлетворяющие (3.1), и семейство операторов $A(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющих условиям

$$A^*(t) = A(t) \quad \forall t, \quad A(t) \in \mathscr{L}(V; V'), \tag{7.1}$$

$$t \to (A(t)u, v) \text{ принадлежит } C^2([0, T]) \ \forall u, v \in V \text{ и}$$
$$(A'(t)v, v) \leqslant 0 \quad \forall v \in V\,^{1)}, \tag{7.2}$$
$$(A(t)v, v) \geqslant \alpha \| v \|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T].$$

Пусть, далее, задано множество K, причем

K является выпуклым замкнутым подмножеством V, содержащим начало. (7.3)

Имеет место

Теорема 7.1. *Предположим, что выполнены условия* (7.1), (7.2), (7.3). *Пусть заданы функции* f, u_0, u_1, *причем*

$$f \in L^2(0, T; H), \quad f' \in L^2(0, T; H), \tag{7.4}$$

$$u_0 \in V, \quad A(0)u_0 \in H\,^{2)}, \tag{7.5}$$

$$u_1 \in K. \tag{7.6}$$

Тогда существует и притом только одна такая функция u, *что*

$$u \in L^\infty(0, T; V), \quad u' \in L^\infty(0, T; V), \quad u'' \in L^\infty(0, T; H), \tag{7.7}$$

$$u'(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{7.8}$$

$$\int_0^T (u''(t) + A(t)u(t) - f(t), \quad v(t) - u'(t))\,dt \geqslant 0$$
$$\forall v \in L^2(0, T; V), \quad v(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{7.9}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{7.10}$$

Замечание 7.1. Если пользоваться обозначениями § 3, то $\Lambda = d/dt$; мы здесь рассматриваем случай, когда A зависит от t, а начальные условия u_0, u_1 не обязательно являются нулевыми; условия на f аналогичны соответствующим условиям в теореме 3.1 ● .

Доказательство существования. 1) *Уравнение со штрафом.*

Мы вводим оператор штрафа β, связанный с K и действующий в V, и рассматриваем уравнение со штрафом

$$u_\varepsilon''(t) + A(t)u_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon'(t)) = f(t),$$
$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1. \tag{7.11}$$

---

[1] От этого предположения можно избавиться с помощью замены переменных, как в случае *уравнений* (Байокки [2], Льёто (не опубликовано)); см. Лионс — Мадженес [2], гл. 9, п. 2.3.1.

[2] На самом деле достаточно предположить (Брезис [5]), что существует такое $\varphi \in H$, что $(\varphi - A(0)u_0, v - u_1) \leqslant 0 \ \forall v \in K$.

Формально из (7.11) следует, что

$$u_\varepsilon''(0) = f(0) - A(0)u_0 = u_2 \in H \tag{7.12}$$

(поскольку $\beta(u_1) = 0$ при $u_1 \in K$). Далее, рассмотрим уравнение, получающееся из (7.11) после формального дифференцирования по t:

$$\begin{gathered} u_\varepsilon''' + A(t)u_\varepsilon' + A'(t)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon'))' = f', \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1, \quad u_\varepsilon''(0) = u_2. \end{gathered} \tag{7.13}$$

Замечая, что (ср. 6.97))

$$\int_0^T ((\beta(u_\varepsilon'))', u_\varepsilon'')\,dt \geqslant 0,$$

мы видим, что задача (7.13) имеет такое решение (единственное), что

$$u_\varepsilon,\ u_\varepsilon' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_\varepsilon'' \in L^\infty(0, T; H).$$

2) *Априорные оценки.* Умножив (7.11) на u_ε', получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|u_\varepsilon'(t)|^2 + (A(t)u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))] - \frac{1}{2}(A'(t)u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon'(t)), u_\varepsilon'(t)) = (f(t), u_\varepsilon'(t)),$$

откуда (поскольку $(A'(t)v, v) \leqslant 0$)

$$\frac{1}{2}[|u_\varepsilon'(t)|^2 + (A(t)u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))] + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (\beta(u_\varepsilon'(\sigma)), u_\varepsilon'(\sigma))\,d\sigma \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}[|u_1|^2 + (A(0)u_0, u_0)] + \int_0^t (f(\sigma), u_\varepsilon'(\sigma))\,d\sigma. \tag{7.14}$$

Отсюда, устремляя $\varepsilon \to 0$, мы выведем, что

$$u_\varepsilon \text{ (соответственно } u_\varepsilon'\text{) ограничены} \\ \text{в } L^\infty(0, T; V) \text{ (соответственно в } L^\infty(0, T; H)), \tag{7.15}$$

$$\int_0^T (\beta(u_\varepsilon'), u_\varepsilon')\,d\sigma \leqslant C\varepsilon. \tag{7.16}$$

Умножим теперь скалярно обе части уравнения (7.13) на $u_\varepsilon''(t)$. Тогда получим

$$\frac{1}{2}[|u_\varepsilon''(t)|^2+(A(t)u_\varepsilon'(t),\ u_\varepsilon'(t))]-\frac{1}{2}\int_0^t(A'(\sigma)u_\varepsilon',\ u_\varepsilon')\,d\sigma+$$
$$+\int_0^t(A'(\sigma)u_\varepsilon,\ u_\varepsilon''(\sigma))\,d\sigma+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(\beta(u_\varepsilon')',\ u_\varepsilon'')\,d\sigma=$$
$$=\frac{1}{2}[|u_2|^2+(A(0)u_1,\ u_1)]+\int_0^t(f,\ u_\varepsilon'')\,d\sigma.$$

Учитывая, что $(A'(t)v,\ v)\leqslant 0$ и выполнено неравенство (6.97), мы получим

$$\frac{1}{2}[|u_\varepsilon''(t)|^2+(A(t)u_\varepsilon'(t),\ u_\varepsilon'(t))]+(A'(t)u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon'(t))-$$
$$-\int_0^t(A'(\sigma)u_\varepsilon',\ u_\varepsilon')\,d\sigma-\int_0^t(A''(\sigma)u_\varepsilon,\ u_\varepsilon')\,d\sigma\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}[|u_2|^2+(A(0)u_1,\ u_1)]+(A'(0)u_0,\ u_1)+\int_0^t(f,\ u_\varepsilon'')\,d\sigma,$$

откуда

$$\frac{1}{2}[|u_\varepsilon''(t)|^2+\alpha\|u_\varepsilon'(t)\|^2]\leqslant c_1+c_2\|u_\varepsilon(t)\|\|u_\varepsilon'(t)\|+$$
$$+c_3\int_0^t\|u_\varepsilon(\sigma)\|\|u_\varepsilon'(\sigma)\|\,d\sigma+\int_0^t|f(\sigma)||u_\varepsilon''(\sigma)|\,d\sigma,$$

а так как уже установлено (7.15), то мы получим, что при $\varepsilon\to 0$

$$u_\varepsilon' \text{ (соответственно } u_\varepsilon''\text{) ограничены}$$
$$\text{в } L^\infty(0,,T;\ V) \text{ (соответственно в } L^\infty(0,\ T;\ H)). \tag{7.17}$$

3) *Предельный переход.* В силу (7.15), (7.17) можно выделить такую подпоследовательность, обозначаемую опять через u_ε, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon\to u,\ \ u_\varepsilon'\to u' &\ \text{ в } L^\infty(0,\ T;\ V)\ \ *\text{-слабо},\\ u_\varepsilon''\to u'' &\ \text{ в } L^\infty(0,\ T;\ H)\ \ *\text{-слабо},\end{aligned} \tag{7.18}$$

так что функция u удовлетворяет (7.7), (7.10).

Согласно (7.11),

$$\beta(u_\varepsilon')=\varepsilon[f-u_\varepsilon''-A(t)u_\varepsilon]\to 0 \text{ в } L^2(0,\ T;\ V'), \tag{7.19}$$

и ввиду (7.16) и монотонности β

$$\beta(u')=0,$$

откуда следует (7.8).

Пусть теперь v удовлетворяет условиям (7.9); следовательно, $\beta(v(t))=0$ почти всюду, и из (7.11) вытекает, что

$$(u''_\varepsilon(t)+A(t)u_\varepsilon(t)-f(t),\ v(t)-u'_\varepsilon(t))=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}(\beta(v(t))-\beta(u'_\varepsilon(t)),\ v(t)-u'_\varepsilon(t))\geqslant 0 \text{ почти всюду,}$$

и потому

$$\int_0^T (u''_\varepsilon+A(t)u_\varepsilon-f,\ v-u'_\varepsilon)\,dt\geqslant 0.$$

Далее,

$$\int_0^T (u''_\varepsilon+A(t)u_\varepsilon,\ v)\,dt-\int_0^T (f,\ v-u'_\varepsilon)\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}[|u'_\varepsilon(T)|^2+(A(T)u_\varepsilon(T),\ u_\varepsilon(T))]-\frac{1}{2}[|u_1|^2+(A(0)u_0,\ u_0)]-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T (A'(t)u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\,dt. \qquad (7.20)$$

Однако нижний предел правой части

$$\geqslant\frac{1}{2}[|u'(T)|^2+(A(T)u(T),\ u(T))]-\frac{1}{2}[|u_1|^2+(A(0)u_0,\ u_0)]-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T (A'(t)u,\ u)\,dt,$$

и неравенство (7.20) в пределе приводит к неравенству

$$\int_0^T (u''+A(t)u,\ v)\,dt-\int_0^T (f,\ v-u')\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}[|u'(T)|^2+(A(T)u(T),\ u(T))]-\frac{1}{2}[|u_1|^2+(A(0)u_0,\ u_0)]-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T (A'(t)u,\ u)\,dt=\int_0^T (u''+A(t)u,\ u')\,dt,$$

так что u удовлетворяет (7.9)●

Доказательство единственности. Пусть u_1 и u_2 суть два возможных решения; возьмем

$$v=u'_2 \quad\text{при}\quad t\in[0,s],\qquad v=0\quad\text{при}\quad t\in\,]s,T],$$
$$v=u'_1 \quad\text{при}\quad t\in[0,s],\qquad v=0\quad\text{при}\quad t\in\,]s,T]$$

и подставим (что законно) в неравенство для u_1 (соответственно для u_2); тогда, полагая $w = u_1 - u_2$, получим

$$-\int_0^s [(w''(t), w'(t)) + (A(t)\,w(t), w'(t))]\,dt \geqslant 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}[|w'(s)|^2 + (A(s)\,w(s), w(s))] - \frac{1}{2}\int_0^s (A'(t)\,w, w)\,dt \leqslant 0.$$

Так как это неравенство выполнено $\forall s \in [0, T]$, то $w = 0$ ●

Замечание 7.2. Доказательство существования с помощью (7.11) разъясняет (в некоторой мере) предположения, сделанные в § 3; на u мы налагаем *два типа ограничений*:

$$\begin{aligned}&u(t) \in K_0 \ (K_0 \text{ выпукло и замкнуто в } V)\\ &\text{и } u \in K \ (\text{т. е. } (7.8)).\end{aligned} \tag{7.21}$$

В этом случае, если β_0 — оператор штрафа, связанный с K_0, то (7.11) следовало бы заменить уравнением

$$u_\varepsilon'' + A(t)\,u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon_0}\beta_0(u_\varepsilon(t)) + \frac{1}{\varepsilon_1}\beta(u_\varepsilon'(t)) = f(t), \quad \varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}, \quad \varepsilon_i > 0. \tag{7.22}$$

Однако получить априорные оценки для задачи (7.22) гораздо труднее, чем для (7.11) (и, вообще говоря, этих оценок нет). Этим «объясняются» условия § 3, которые сводятся к предположению, что K_0 «велико», т. е. β_0 «мало» (в частности, $K_0 = V$ отвечает случаю $\beta_0 = 0$) ●

Замечание 7.3. Можно сделать два замечания, аналогичные замечаниям 6.1 и 6.2.

1) Если K является выпуклым замкнутым подмножеством рефлексивного банахова пространства W[1]), причем $V \subset W \subset H$ (допускается, что $W = H$), то в (7.11) можно ввести связанный с K оператор штрафа β, являющийся оператором из W в W'.

2) Если K является выпуклым замкнутым подмножеством рефлексивного банахова пространства W, причем $W \subset V$, то в (7.11) можно ввести связанный с K оператор штрафа β, который действует в W и который предполагается коэрцитивным в W ●

---

[1]) Норма в котором, равно как и в сопряженном, строго выпукла.

7.2. Примеры

Пример 7.1 (ср. с примером 3.3). Рассмотрим оператор $A(t)$:

$$A(t)\varphi = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) + a_0(x,\,t)\varphi,$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,\,j, \qquad a_{ij},\; a_0 \in C^2(\bar{Q}),$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2),\ \alpha > 0, \qquad (7.23)$$

$$\forall\{x,\,t\} \in Q,\ \forall\xi_i \in \mathbb{R};$$

$$a_0(x,\,t) \geqslant \alpha_0 > 0 \text{ в } Q.$$

Возьмем

$$V = H_0^1(\Omega),$$

$$K = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}.$$

Теорема 7.1 дает нам существование и единственность такой функции u, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad Q,\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(t)u - f \geqslant 0 \quad \text{в} \quad Q,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(t)u - f\right) = 0 \quad \text{в} \quad Q,\\
&u(x,\,0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\,0) = u_1, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma;
\end{aligned} \qquad (7.24)$$

при этом предполагается, что

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega.$$

Уравнение со штрафом, из которого определяется приближение для u, имеет вид[1]

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + A(t)u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)^- = f \;\bullet \qquad (7.25)$$

Замечание 7.4. Аналогичные примеры можно построить, беря в качестве $A(t)$ эллиптический оператор (по x) произвольного порядка; другими словами, гиперболичность здесь не играет решающей роли ●

---

[1] Здесь мы пользуемся замечанием 7.3, 1).

Пример 7.2. Оператор $A(t)$ определяется посредством (7.23), и мы берем $V = H^1(\Omega)$,

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Gamma\}.$$

Тогда теорема 7.1 позволяет установить существование и единственность решения u, как в теореме 3.1, только $-\Delta$ надо заменить на $A(t)$ и $u(x, 0) = u_0(x)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega.$$

Задача со штрафом, из которой определяется приближение для u, имеет вид

$$(u_\varepsilon'', v) + a(t; u_\varepsilon(t), v) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)^- v\, d\Gamma = (f(t), v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{7.26}$$

где

$$a(t; u, v) = \sum_{i,\, j=1}^{n} \int\limits_\Omega a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_\Omega a_0(x, t)\, uv\, dx$$

и

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \text{ ●}$$

Пример 7.3. Оператор $A(t)$ берется из (7.23), $V = H_0^1(\Omega)$ и

$$K = \left\{v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant 1 \text{ почти всюду в } \Omega\right\}.$$

Соответствующая задача со штрафом имеет вид[1]

$$\begin{gathered} u_\varepsilon'' + A(t)\, u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon'|^2)^- \frac{\partial u_\varepsilon'}{\partial x_i}\right) = f, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad u_\varepsilon'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \text{ ●} \end{gathered} \tag{7.27}$$

Пример 7.4. Задачей со штрафом, отвечающей примеру 3.5, будет задача

$$\begin{gathered} \Delta_x \Phi_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad Q, \\ \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial n} - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t}\right)^- = f \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ \Phi_\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad \Phi_\varepsilon'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Gamma \text{ ●} \end{gathered} \tag{7.28}$$

Замечание 7.5. С помощью штрафов можно также приближать *периодические* задачи для неравенств типа рассмотренных в примере 3.2 ●

---

[1] Мы здесь пользуемся замечанием 7.3, 2).

7.3. Примеры неравенств для нелинейных гиперболических операторов

Мы рассмотрим одностороннюю задачу, связанную с оператором, изученным в § 1 гл. 1:

$$u \to u'' - \Delta u + |u|^\rho u.$$

Будет доказана

Теорема 7.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, и пусть задано число $\rho > 0$, такое, что*

$$\rho \leqslant \frac{2}{n-2} \text{ (}\rho\text{ конечно и произвольно при } n=2). \tag{7.29}$$

Пусть

$$K \text{ — выпуклое замкнутое подмножество в } H_0^1(\Omega), \quad 0 \in K. \tag{7.30}$$

Пусть заданы функции f, u_0, u_1, причем

$$f,\ f' \in L^2(Q), \tag{7.31}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{7.32}$$

$$u_1 \in K. \tag{7.33}$$

Тогда существует и притом только одна такая функция u, что

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{7.34}$$

$$\int_0^T \left(u'' - \Delta u + |u|^\rho u - f, v - u'\right) dt \geqslant 0 \tag{7.35}$$

$$\forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad v(t) \in K \text{ почти всюду,}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{7.36}$$

Доказательство существования. 1) Пусть β — оператор штрафа, связанный с K и действующий из $V = H_0^1(\Omega)$ в $V'\left(= H^{-1}(\Omega)\right)$. Рассмотрим *задачу со штрафом*

$$\begin{gathered} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\rho u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon') = f, \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1. \end{gathered} \tag{7.37}$$

Точно так же, как в теореме 1.3 § 1 гл. 1, можно доказать существование функции u_ε, $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V)$, $u_\varepsilon' \in L^\infty(0, T; V)$, $u_\varepsilon'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, являющейся решением задачи (7.37); можно продифференцировать (7.37) по t:

$$\left.\begin{aligned} &u_\varepsilon''' - \Delta u_\varepsilon' + (\rho+1)\,|u_\varepsilon|^\rho\, u_\varepsilon' + \frac{1}{\varepsilon}\left(\beta(u_\varepsilon')\right)' = f',\\ &u_\varepsilon''(0) = f(0) + \Delta u_0 - |u_0|^\rho\, u_0 = u_2 \in L^2(\Omega) \ (\text{так как } \beta(u_1) = 0). \end{aligned}\right. \tag{7.38}$$

Умножив (7.37) на u_ε', получим

$$\begin{gathered} u_\varepsilon \ (\text{соответственно } u_\varepsilon') \ \text{при} \ \varepsilon \to 0 \ \text{ограничены} \\ \text{в } L^\infty(0, T; V) \ (\text{соответственно в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))), \end{gathered} \tag{7.39}$$

$$\int_0^T \left(\beta(u_\varepsilon'),\, u_\varepsilon'\right) dt \leqslant C\varepsilon. \tag{7.40}$$

Умножив (7.38) на u_ε'', получим (пользуясь (6.97))[1]

$$\frac{1}{2}\left(|u_\varepsilon''(t)|^2 + \|u_\varepsilon'(t)\|^2\right) + (\rho+1)\int_0^t \int_\Omega |u_\varepsilon|^\rho\, u_\varepsilon' u_\varepsilon''\, dx\, d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(|u_2|^2 + \|u_1\|^2\right) + \int_0^t \int_\Omega f' u_\varepsilon''\, dx\, d\sigma,$$

откуда с помощью таких же оценок, как в § 1 гл. 1 (см. (1.71), (1.72)), можно вывести, что

$$\begin{gathered} u_\varepsilon' \ (\text{соответственно } u_\varepsilon'') \ \text{ограничены в } L^\infty(0, T; V) \\ (\text{соответственно в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))) \ \text{при} \ \varepsilon \to 0. \end{gathered} \tag{7.41}$$

2) Мы можем считать, выделяя (в случае необходимости) подпоследовательность, которая опять обозначается через u_ε, что

$$\begin{gathered} u_\varepsilon \to u, \quad u_\varepsilon' \to u' \quad \text{в} \quad L^\infty(0, T; V) \quad *\text{-слабо}, \\ u_\varepsilon'' \to u'' \quad \text{в} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad *\text{-слабо}; \end{gathered} \tag{7.42}$$

так как $\beta(u_\varepsilon') \to 0$, скажем, в $\mathscr{D}'(Q)$ (в силу (7.37)), то $\beta(u_\varepsilon') \to 0$ в $L^\infty(0, T; V')$ слабо, и в силу (7.40), как и в п. 7.1, получаем $\beta(u'(t)) = 0$ почти всюду, следовательно, $u'(t) \in K$ почти всюду.

Таким образом, функция u удовлетворяет (7.34), (7.36). Пусть далее v такое же, как в (7.35); поскольку $\beta(v(t)) = 0$ почти всюду, из (7.37) следует, что

$$\left(u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\rho\, u_\varepsilon - f,\, v(t) - u_\varepsilon'(t)\right) \geqslant 0 \ \text{почти всюду},$$

---

[1] $|\ |$ — норма в $L^2(\Omega)$, $\|\varphi\|^2 = \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi)^2\, dx$.

откуда

$$\int_0^T \left(u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\rho u_\varepsilon, v\right) dt - \int_0^T (f_1 v - u_\varepsilon')\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T \left(u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\rho u_\varepsilon, u_\varepsilon'\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}|u_\varepsilon'(T)|^2 + \frac{1}{2}\|u_\varepsilon(T)\|^2 + \frac{1}{p}\int_\Omega |u_\varepsilon(x, T)|^p\, dx - \frac{1}{2}|u_1|^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_0(x)|^p\, dx, \quad p = \rho + 2. \quad (7.43)$$

Но $u_\varepsilon(T) \to u(T)$ в $H_0^1(\Omega)$ и в $L^p(\Omega)$ слабо, $u_\varepsilon'(T) \to u'(T)$ в $L^2(\Omega)$ слабо (в частности) и, таким образом, нижний предел правой части (7.43)

$$\geqslant \frac{1}{2}|u'(T)|^2 + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x, T)|^p\, dx - \frac{1}{2}|u_1|^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p\, dx = \int_0^T \left(u'' - \Delta u + |u|^\rho u, u'\right) dt.$$

Отсюда следует (7.35), если в правой части (7.43) перейти к пределу «по компактности», *как в случае уравнений* (гл. 1, § 1) ●

Доказательство единственности. Пусть u_1 и u_2 суть два возможных решения. Соответственно подставляя в уравнение для $u_1\,(u_2)$

$$v = u_2' \quad \text{при} \quad t \in [0, s], \qquad v = 0 \quad \text{при} \quad t \in]s, T],$$

$$v = u_1' \quad \text{при} \quad t \in [0, s], \qquad v = 0 \quad \text{при} \quad t \in]s, T]$$

и полагая $w = u_1 - u_2$, получим

$$-\int_0^s (w'', w')\, dt - \int_0^s a(w, w')\, dt - \int_0^s \left(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w'\right) dt \geqslant 0$$

$\left(\text{где } a(\varphi, \psi) = \int_\Omega \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi\, dx\right)$, откуда

$$\frac{1}{2}\left(|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2\right) \leqslant -\int_0^s \left(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w'\right) dt,$$

т. е. мы пришли к *той же самой* оценке, что и в случае *уравнений*, а тогда наш результат получается таким же образом, как в теореме 1.3 (единственность) гл. 1 ●

Замечание 7.6. С помощью методов того же типа можно решать неравенства, связанные с операторами (см. гл. 1, § 3, гл. 2, § 6)

$$u \to u'' - \Delta u + |u'|^\rho u' \; \bullet$$

Замечание 7.7. Можно теми же методами рассматривать неравенства, связанные с оператором

$$u \to A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1 u,$$

где A_0 и A_1 — два линейных коэрцитивных оператора ●

Замечание 7.8. Случай *периодических* по t решений гиперболических неравенств будет изучен в гл. 4 ●

Замечание 7.9. Можно заменить (7.9) неравенством

$$(u''(t) + A(t) u(t) - f(t), v - u'(t)) \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \text{ для почти всех } t. \tag{7.44}$$

Действительно, пусть s является точкой Лебега функций

$$t \to u''(t) + A(t) u(t) - f(t) \quad \text{и} \quad t \to (u''(t) + A(t) u(t) - f(t), u'(t)).$$

Пусть $\mathcal{O}_j$ — последовательность окрестностей точки s (на отрезке $[0, T]$), стремящихся к s, и пусть v — произвольный элемент K. Определим

$$v_j(t) = \begin{cases} v & \text{в} \quad \mathcal{O}_j, \\ u'(t) & \text{в} \quad [0, T] - \mathcal{O}_j. \end{cases}$$

Подставляя $v = v_j$ в (7.9) (что законно), получим

$$\int_{\mathcal{O}_j} (u''(t) + A(t) u(t), v - u'(t))\, dt \geqslant 0.$$

Деля на $\operatorname{mes} \mathcal{O}_j$ и пользуясь тем, что s является точкой Лебега, мы получим, что неравенство (7.44) выполняется для $t = s$, откуда и следует наш результат.

Обратное утверждение о том, что из (7.44) следует (7.9), очевидно ●

8. МЕТОД ШТРАФА И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

8.1. Один гиперболический пример

Во всех рассмотренных выше примерах мы для *эволюционных* операторов всегда решали задачи в цилиндрических областях: $Q = \Omega \times]0, T[$. Теперь мы собираемся рассмотреть случай нецилиндрической области Q●

Обозначения:

$$Q \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t, \quad \text{точнее } Q \subset \mathbb{R}_x^n \times]0, T[,$$

$$Q \cap \{t = s\} = \Omega_s,$$

$$\Gamma_s = \partial Q \cap \{t = s\}, \quad 0 < s < T \quad (\partial Q - \text{граница } Q),$$

$$\Sigma = \bigcup_{s \in [0, T]} \Gamma_s, \quad \text{так что} \quad \partial Q = \Omega_0 \cup \Sigma \cup \Omega_T.$$

Задача. В области Q ищется функция u, являющаяся решением (ниже будет уточнено, в каком смысле понимается решение) задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^\rho u = f, \tag{8.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{8.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega_0 \bullet \tag{8.3}$$

Замечание 8.1. Здесь речь идет о задаче, аналогичной уже рассмотренной в § 1 гл. 1, но в *нецилиндрической* области. Последнее обстоятельство полностью не исключает возможность применения метода Фаэдо — Галёркина, но в этом случае следует выбирать *зависящие от* t «базисы», и делать это надо весьма осторожно (пример применения таких базисов для уравнения Навье — Стокса в нецилиндрической области имеется у Сазера [3]). Сейчас мы увидим, как идея штрафа приводит к достаточно простому методу решения указанных выше задач●

Функциональные пространства и предположения.

Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}_x^n$, причем

$$Q \subset \mathcal{O} \times]0, T[. \tag{8.4}$$

Чтобы несколько упростить изложение (хотя это и не играет существенной роли), мы предположим, что

$$\text{область } Q \text{ ограничена, и область } \mathcal{O} \text{ в } \mathbb{R}_x^n \text{ выбирается ограниченной.} \tag{8.5}$$

Пространства $L^2(\Omega_t)$ (соответственно $H_0^1(\Omega_t)$) $\forall t \in [0, T]$ отождествляются с замкнутыми подпространствами в $L^2(\mathcal{O})$ (соответственно в $H_0^1(\mathcal{O})$); далее определяется

$L^p(0, T; L^2(\Omega_t))$ — пространство таких функций $f \in L^p(0, T; L^2(\mathcal{O}))$, что $f(t) \in L^2(\Omega_t)$ почти всюду $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$; аналогично определяется $L^p(0, T; H_0^1(\Omega_t))$.

Мы сделаем следующие предположения:

Ω_t «растет» с ростом t, т. е. если Ω_t^* — проекция Ω_t на гиперплоскость $t=0$, то $\Omega_t^* \subset \Omega_{t'}^*$ при $t \leqslant t'$; (8.6)

$\forall t \in]0, T[$ если $v \in H_0^1(\mathcal{O})$, $v=0$ почти всюду в $\mathcal{O} - \Omega_t$, то $v \in H_0^1(\Omega_t)$[1]. (8.7)

Теперь будет доказана

Теорема 8.1. *Предположим, что выполнены условия* (8.6), (8.7). *Пусть заданы такие* f, u_0, u_1, *что*

$$f \in L^2(Q), \tag{8.8}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap L^p(\Omega_0), \quad p=\rho+2, \tag{8.9}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega_0). \tag{8.10}$$

Тогда существует[2] *функция* u, *удовлетворяющая включениям*

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)), \quad u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega_t)), \tag{8.11}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)), \tag{8.12}$$

уравнению (8.1) *и условиям* (8.3).

Замечание 8.2. Условие (8.2) содержится в условии принадлежности u к $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t))$. Второе условие (8.3) имеет смысл, поскольку (ср. с замечанием 1.1 гл. 1) из (8.11), (8.12) и (8.1) следует (когда Ω_t «растет» с ростом t), что

$$u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_0) + L^{p'}(\Omega_0))\,^{3)}, \tag{8.13}$$

а из этого включения и (8.12) следует, в частности, что u' является непрерывным отображением

$$[0, T] \to H^{-1}(\Omega_0) + L^{p'}(\Omega_0) \bullet$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем мы отождествляем функцию v и ее сужение на Ω_t.

[2] Проблема единственности не решена, см. проблему 11.9.

[3] Здесь речь идет о сужении u'' на $\Omega_0 \times]0, T[$.

Доказательство теоремы 8.1. 1) Выберем произвольную область $\mathcal{O}$, удовлетворяющую условиям (8.4), (8.5). Пусть $M \in L^\infty(\mathcal{O} \times]0, T[)$, причем

$$M = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad Q, \\ 1 & \text{в} \quad \mathcal{O} \times]0, T[- Q. \end{cases}$$

В цилиндре $\mathcal{O} \times]0, T[$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\rho u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} M u_\varepsilon' = \tilde{f}\,^{1)} \quad (\varepsilon > 0), \\ & u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\mathcal{O} \times]0, T[, \\ & u_\varepsilon(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x \in \mathcal{O}\,^{2)}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Эта задача имеет решение ($\forall \varepsilon > 0$); как видно из доказательства теоремы 1.1 гл. 1, умножив (8.14) на u_ε', можно получить оценку, ввиду которой можно выбрать u_ε таким образом, чтобы при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon \text{ были ограничены в } L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^\infty(0, T; L^p(\mathcal{O})), \\ & u_\varepsilon' \text{ были ограничены в } L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O})) \end{aligned} \tag{8.15}$$

и

$$\int_{\mathcal{O} \times]0, T[} M (u_\varepsilon')^2 \, dx \, dt \leqslant C\varepsilon. \tag{8.16}$$

Замечание 8.3. Член $\frac{1}{\varepsilon} M u_\varepsilon'$ играет роль, аналогичную роли члена $\frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon')$, введенного в § 7 ●

2) Можно считать, выделяя подпоследовательность, что

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon \to w \quad \text{в} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O})) \ *\text{-слабо}, \\ & u_\varepsilon' \to w' \quad \text{в} \quad L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O})) \ *\text{-слабо}, \\ & u_\varepsilon \to w \quad \text{в} \quad L^2(\mathcal{O} \times]0, T[) \text{ сильно и почти всюду}, \end{aligned} \tag{8.17}$$

а тогда в силу (8.16) мы получим

$$M w' = 0, \tag{8.18}$$

откуда $w' = 0$ почти всюду в $\mathcal{O} \times]0, T[- Q$. Так как $w(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$, то $w(x, 0) = 0$ в $\mathcal{O} - \Omega_0$; следовательно, благодаря (8.6)

$$w = 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \mathcal{O} \times]0, T[- Q. \tag{8.19}$$

---

[1] $\tilde{f}$ — продолжение f на $\mathcal{O} \times]0, T[$ нулем вне Q.

[2] $\tilde{u}_i$ — продолжение u_i на $\mathcal{O}$ нулем вне Ω_0.

Последнее условие вместе с (8.7) показывает, что

$$\text{если через } u \text{ обозначено сужение } w \text{ на } Q, \text{ то} \quad u \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega_t)). \tag{8.20}$$

Итак, функция u удовлетворяет включениям (8.11), (8.12). Однако, *переходя к сужениям на Q*, мы получим из (8.14) (через $\hat{u}_\varepsilon$ обозначается сужение u_ε на Q)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}_\varepsilon - \Delta\hat{u}_\varepsilon + |\hat{u}_\varepsilon|^\rho \hat{u}_\varepsilon = f \quad \text{на} \quad Q, \tag{8.21}$$

и благодаря (8.17) (как в теореме 1.1 гл. 1) можно перейти к пределу в уравнении (8.21) и показать, что u удовлетворяет уравнению (8.1).

Тогда u будет решением поставленной задачи, поскольку в силу (8.17) $u_\varepsilon(0) \to w(0)$ в $L^2(\mathcal{O})$ слабо, следовательно, $\hat{u}_\varepsilon(0) = u_0 \to u(0)$, поэтому $u(0) = u_0$, и в силу (8.17) и (8.21)

$$\frac{\partial\hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1 \to u'(0) \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega_0) + L^{p'}(\Omega_0) \quad \text{слабо},$$

откуда $u'(0) = u_1$ ●

8.2. Различные замечания

Замечание 8.4. Изложенный выше метод пригоден и для других примеров. С его помощью можно рассмотреть уравнение Навье — Стокса в нецилиндрической области Q; для этого в $\mathcal{O}$ рассматривается приближенная задача (обозначения те же, что в п. 8.1)

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu\Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} u_{\varepsilon i}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}Mu_\varepsilon = \tilde{f} \quad \text{в} \quad \mathcal{O}\times]0,\ T[,\\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{O}\times]0,\ T[,\end{gathered} \tag{8.22}$$

которая позволяет доказать *существование* решения (слабого или турбулентного) в пространстве произвольной размерности (как в § 6 гл. 1) ●

Замечание 8.5. Другой возможный подход к эволюционным задачам в нецилиндрических областях — прямое применение *эллиптической регуляризации* (§ 1) в Q. Для уравнения Навье — Стокса это сделано в работе Лионса [6] ●

9. ДРУГИЕ ТИПЫ ПРИБЛИЖЕНИЙ

9.1. Приближение эллиптических неравенств параболическими

Рассмотрим ситуацию § 5 и предположим, что

$$\text{оператор } A \text{ удовлетворяет (5.16) и, кроме того, является } \textit{строго монотонным}. \tag{9.1}$$

Тогда для заданного f из V' существует *единственный* элемент $u_0 \in K$, такой, что

$$(A(u_0), v - u_0) \geqslant (f, v - u_0) \quad \forall v \in K. \tag{9.2}$$

Наша цель состоит в том, чтобы выяснить, можно ли искать u_0 как предел решений *эволюционных неравенств параболического типа*.

Сделаем следующее предположение[1]):

$$\text{существует такое } \rho > 0, \text{ что } \|A(v)\|_{V'} \leqslant c_1 \|v\|_V^\rho \quad \forall v \in V. \tag{9.3}$$

Положим далее $p = \rho + 1$, так что (9.3) будет эквивалентно неравенству

$$\|A(v)\|_{V'}^{p'} \leqslant c_2 \|v\|_V^p \quad \forall v \in V \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right). \tag{9.4}$$

Определим

$$\begin{aligned} &\mathscr{V} = L^p(0, T; V), \\ &(\mathscr{A}(v))(t) = A(v(t)) \quad \text{почти всюду}, \; v \in \mathscr{V}, \end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\mathscr{K} = \{v \mid v \in \mathscr{V}, \; v(t) \in K \quad \text{почти всюду}\}, \tag{9.6}$$

$$L = \partial/\partial t, \quad D(L) = \{v \mid v \in \mathscr{V}, \quad Lv = v' \in \mathscr{V}', \quad v(0) = 0\}. \tag{9.7}$$

Тогда, согласно теореме 6.1, $\forall \varepsilon > 0$ *существует такой элемент* $u_\varepsilon \in \mathscr{K}$, *что*

$$\varepsilon(Lv, v - u_\varepsilon) + (\mathscr{A}(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) \geqslant (F, v - u_\varepsilon) \quad \forall v \in \mathscr{K} \cap D(L), \tag{9.8}$$

где

$$F(t) = f \quad \text{почти всюду}^{2)}. \tag{9.9}$$

Более того, согласно (9.1), оператор $\mathscr{A}$ строго монотонный и, следовательно, решение u_ε *единственно*.

---

[1]) Эта гипотеза, по-видимому, не нужна, если в том, что следует ниже, заменить пространства L^p пространствами Орлича.

[2]) В (9.8) (F, v) обозначает скалярное произведение между $\mathscr{V}'$ и $\mathscr{V}$, а в (9.2) (f, v) обозначает скалярное произведение между V' и V.

Теперь будет доказана

Теорема 9.1. *Предположим, что выполнены условия* (9.1), (9.3). *Пусть* u_ε — *решение* (9.8). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\tilde{u}_\varepsilon = \frac{1}{T} \int_0^T u_\varepsilon(t)\, dt \to u_0 \text{ в } V \text{ слабо.} \tag{9.10}$$

Доказательство. 1) Определим $U_0 \in \mathscr{V}$, полагая $U_0 = u_0$ на отрезке $[0, T]$. Поскольку $\mathscr{A}(u_0) = A(u_0)\ \forall t$, из (9.2) вытекает, что

$$(\mathscr{A}(U_0),\ v - U_0) \geqslant (F,\ v - U_0) \quad \forall v \in \mathscr{K}. \tag{9.11}$$

Мы покажем, что

$$u_\varepsilon \to U_0 \text{ в } \mathscr{V} \text{ слабо,} \tag{9.12}$$

откуда будет следовать (9.10).

2) Из (9.8) выводится, что u_ε ограничены в $\mathscr{V}$, следовательно, $\mathscr{A}(u_\varepsilon)$ ограничены $\mathscr{V}'$, и поэтому можно выделить такую подпоследовательность, опять обозначаемую через u_ε, что

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \to u && \text{в } \mathscr{V} \text{ слабо,} \\ &\mathscr{A}(u_\varepsilon) \to \chi && \text{в } \mathscr{V}' \text{ слабо.} \end{aligned} \tag{9.13}$$

Из (9.8) вытекает, что

$$(\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \leqslant \varepsilon(Lv,\ v - u_\varepsilon) + (\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ v) - (F,\ v - u_\varepsilon),$$

откуда

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \leqslant (\chi,\ v) - (F,\ v - u),$$

так что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) \leqslant (\chi - F,\ v - u) \quad \forall v \in \mathscr{K} \cap D(L). \tag{9.14}$$

Однако по определениям (9.6), (9.7) пересечение $\mathscr{K} \cap D(L)$ плотно в $\mathscr{K}$, откуда $\inf\limits_{v \in \mathscr{K} \cap D(L)} (\chi - F,\ v - u) = 0$ и, следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) \leqslant 0. \tag{9.15}$$

Отсюда вытекает, что

$$\liminf\, (\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v) \geqslant (\mathscr{A}(u),\ u - v),$$

а поскольку в силу (9.8)

$$\liminf\, (\mathscr{A}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v) \leqslant (F,\ u - v),$$

мы получаем, что u удовлетворяет неравенству

$$(\mathscr{A}(u),\ v - u) \geqslant (F,\ v - u) \quad \forall v \in \mathscr{K} \cap D(L),\ u \in \mathscr{K}. \tag{9.16}$$

Так как неравенство (9.16) выполнено $\forall v \in \mathscr{K}$, то, следовательно, $u = U_0$, поскольку U_0 является единственной функцией, удовлетворяющей (9.11). Отсюда следует (9.12)[1] ●

Замечание 9.1. Из (9.15) и монотонности $\mathscr{A}$ следует, что

$$(\mathscr{A}(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(u),\ u_\varepsilon - u) \to 0. \tag{9.17}$$

Таким образом, если норма $(A(v), v)^{1/q}$ равномерно выпукла на V, то из сходимости $(\mathscr{A}(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \to (\mathscr{A}(u), u)$ вытекает, что $u_\varepsilon \to u$ в $L^q(0, T; V)$ сильно и, следовательно, имеет место (9.10), причем сходимость в V будет *сильной* ●

9.2. Новые односторонние задачи

Обратимся теперь к ситуации п. 7.1. Пусть выполнены те же самые предположения, что и в теореме 7.1, и, кроме того,

$$A(0)\,u_0 = f(0). \tag{9.18}$$

Согласно теореме 7.1, $\forall \varepsilon > 0$ *существует единственная функция* u_ε, *такая, что*

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V), \quad u_\varepsilon' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_\varepsilon'' \in L^\infty(0, T; H), \tag{9.19}$$

$$u_\varepsilon'(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{9.20}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\varepsilon u_\varepsilon'' + A(t)\,u_\varepsilon - f(t),\ v(t) - u_\varepsilon'(t))\,dt \geqslant 0 \\ &\forall v \in L^2(0, t; V), \quad v(t) \in K \text{ почти всюду}, \end{aligned} \tag{9.21}$$

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1. \tag{9.22}$$

Более того, вернувшись к доказательству теоремы 7.1, мы увидим, что

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon,\ u_\varepsilon' \text{ ограничены в } L^\infty(0, T, V)\,^{2)}, \\ &\sqrt{\varepsilon}\,u_\varepsilon'' \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; H). \end{aligned} \tag{9.23}$$

Отсюда видно, что можно так выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_ε, что

$$u_\varepsilon \to u \text{ (соответственно } u_\varepsilon' \to u') \text{ в } L^\infty(0, T; V) \text{ *-слабо} \tag{9.24}$$

---

[1] Другое доказательство (Р. Темам): из (9.8) выводим, что

$$\varepsilon(Lv, v - u_\varepsilon) + (\mathscr{A}(v), v - u_\varepsilon) \geqslant (F, v - u_\varepsilon).$$

Выберем v, не зависищее от t; беря среднее, получим

$$\varepsilon(Lv, v - \tilde{u}_\varepsilon) + (A(v), v - \tilde{u}_\varepsilon) \geqslant (f, v \dot{-} \tilde{u}_\varepsilon),$$

и переходя к пределу, мы найдем, что $(A(v), v - u) \geqslant (f, v - u)$ $\forall v \in K$, следовательно, $u = u_0$.

[2] Мы здесь воспользовались тем, что выполнено равенство (9.18).

и функция u удовлетворяет условиям

$$\int_0^T (A(t)u(t)-f(t),\ v(t)-u'(t))\,dt \geqslant 0 \quad \forall v \in L^2(0,\ T;\ V),$$
$$v(t) \in K \text{ почти всюду}, \quad u'(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{9.25}$$

$$u(0)=u_0. \tag{9.26}$$

Однако (9.25) эквивалентно неравенству

$$(A(t)u(t)-f(t),\ k-u'(t)) \geqslant 0 \quad \forall k \in K \text{ почти всюду иа } [0,\ T]. \tag{9.27}$$

Отсюда выводится, что задача (9.25), (9.26) имеет *единственное* решение.

Таким образом, мы установили следующий результат[1]:

Теорема 9.2. *Допустим, что выполнены предположения* (7.1), (7.2), (7.3), *и пусть заданы* f *и* u_0, *удовлетворяющие* (7.4), (7.5) *и* (9.18). *Тогда существует и притом только одна функция* u,

$$u \in L^\infty(0,\ T;\ V), \quad u' \in L^\infty(0,\ T;\ V), \tag{9.28}$$

$$u'(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{9.29}$$

удовлетворяющая (9.26), (9.27).

Теорема 9.3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 9.2. *Произвольно выберем* u_1 *из* K. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0$ *существует единственная функция* u_ε, *удовлетворяющая* (9.19), (9.20), (9.21), (9.22). *При* $\varepsilon \to 0$ *имеет место* (9.24), *где* u — *решение, полученное в теореме* 9.2 ●

Пример 9.1. В условиях примера 7.1 для решения u мы получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0 && \text{почти всюду в } Q,\\
&A(t)u-f \geqslant 0 && \text{почти всюду в } Q,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(A(t)u-f)=0 && \text{почти всюду в } Q,\\
&u(x,\ 0)=u_0(x), \quad x \in \Omega && (A(0)u_0=f(0))\ \bullet
\end{aligned} \tag{9.30}$$

---

[1] Дополнительные результаты о гладкости были получены Х. Брезисом.

Пример 9.2. В условиях примера 7.2 для решения u мы получаем

$$\begin{aligned} &A(t)u=f && \text{в } Q,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}\geqslant 0 && \text{на } \Sigma,\\ &\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}}\geqslant 0 && \text{на } \Sigma,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}}=0 && \text{на } \Sigma,\\ &u(x,0)=u_0(x), && x\in\Omega \bullet \end{aligned} \tag{9.31}$$

Замечание 9.2. Когда оператор $A(t)=A$ и функция $f(t)=f$ не зависят от t, для решения задачи (9.26) — (9.29) мы сразу получаем, что

$$u(t)=u_0 \bullet$$

10. ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

10.1. Многозначные гиперболические уравнения

Пусть $M\colon \mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}$ — многозначная функция, обладающая следующими свойствами[1]):

M — монотонная функция (т. е. если $\lambda\in M(s)$, $\mu\in M(t)$, то $(\lambda-\mu)(s-t)\geqslant 0$) и $0\in M(0)$, (10.1)

существует такая последовательность функций $M_k\in C^1(\mathbb{R})$, что $M_k(0)=0$, $M_k'(t)>0$, $M_k(\pm\infty)=\pm\infty$, (10.2)

$M_k^{-1}=\mathcal{M}_k\to M^{-1}=\mathcal{M}$ равномерно на любом компакте[2]). (10.3)

Сейчас будет доказана

Теорема 10.1. *Пусть* Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$ *с гладкой границей. Пусть* M — *заданная многозначная функция, удовлетворяющая* (10.1), (10.2), (10.3). *Пусть заданы* f, u_0, u_1, *причем*

$$f\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\quad \frac{\partial f}{\partial t}\in L^2(Q), \tag{10.4}$$

$$u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \tag{10.5}$$

$$u_1\in H_0^1(\Omega),\ M_k(u_1)\ \text{ограничены в}\ L^2(\Omega)\ \text{при}\ k\to\infty. \tag{10.6}$$

---

[1]) Пример общего вида, в котором выполнены все эти условия, см. у Амерно — Прузе [1].

[2]) Следовательно, M — *максимальная* монотонная функция; на самом деле этого предположения достаточно (Х. Брезис).

Тогда существует и притом только одна такая функция u, что

$$u \in L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{10.7}$$

$$u' \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \tag{10.8}$$

$$u'' \in L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \tag{10.9}$$

$$-(u''(x,\ t) - \Delta u(x,\ t) - f(x,\ t)) \in M(u'(x,\ t)) \text{ почти всюду в } Q, \tag{10.10}$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega\text{ [1])}. \tag{10.11}$$

Замечание 10.1. Включение (10.10) переходит в обычное *уравнение*, когда функция *M однозначна.*

Более того, в том случае, когда функция M однозначна, причем $M(\pm\infty) = \pm\infty$ и выполнено условие (10.1), теорема существования и единственности является простым вариантом теоремы 3.1 гл. 1 (в которой рассматривается случай

$$M(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda) \bullet$$

Замечание 10.2. Предлагаемый ниже метод состоит в том, что мы *«приближаем»* (в смысле (10.2), (10.3)) многозначное отображение M регулярными функциями M_k — *это еще один способ регуляризации уравнений* ●

Доказательство существования. 1) Как было отмечено в приведенном выше замечании 10.1, $\forall k$ существует единственная функция u_k, обладающая следующими свойствами:

$$u_k'' - \Delta u_k + M_k(u_k') = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{10.12}$$

$$u_k(0) = u_0, \quad u_k'(0) = u_1, \tag{10.13}$$

и, более того, при $k \to \infty$

u_k (соответственно u_k' или u_k'') ограничены в $L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ (соответственно в $L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))$ или в $L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))$). (10.14)

2) Теперь можно так выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_k, что

$u_k \to u$ (соответственно $u_k' \to u'$, $u_k'' \to u''$) в $L^\infty(0,\ T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ (соответственно в $L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)$ или в $L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega))$) $*$-слабо. (10.15)

---

[1] Можно показать, используя нелинейные полугруппы (Х. Брезис), что $u(x,\ t) \in H^2(\Omega)\ \forall t$.

Согласно уравнению (10.12), мы также имеем

$$M_k(u'_k) = v_k \to v = f - u'' + \Delta u \text{ в } L^2(Q) \text{ слабо (например).} \tag{10.16}$$

Итак, $u'_k = \mathscr{M}_k(v_k)$, *и если мы покажем, что*

$$u' = \mathscr{M}(v), \tag{10.17}$$

то $v \in M(u')$ и, следовательно,

$$f - u'' + \Delta u \in M(u'),$$

т. е. выполнено (10.10). Поскольку функция u очевидным образом удовлетворяет остальным условиям теоремы, нам остается только доказать равенство (10.17).

3) Теперь мы используем монотонность; при этом возникает одно техническое осложнение, связанное с тем, что a priori неизвестно, имеет ли место включение $\mathscr{M}(v) \in L^2(Q)$. С этой целью мы используем срезки[1]). Для любого $R > 0$ положим

$$\mathscr{M}^R(\lambda) = \begin{cases} \mathscr{M}(\lambda), & \text{если } |\mathscr{M}(\lambda)| \leqslant R, \\ R, & \text{если } \mathscr{M}(\lambda) > R, \\ -R, & \text{если } \mathscr{M}(\lambda) < -R. \end{cases} \tag{10.18}$$

Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$; тогда, обозначая через (,) скалярное произведение в $L^2(Q)$, получим

$$(\mathscr{M}_k^R(v_k) - \mathscr{M}_k^R(\varphi),\ v_k - \varphi) \geqslant 0. \tag{10.19}$$

Однако в силу (10.15)

$$\mathscr{M}_k(v_k) = u'_k \to u' \text{ в } L^2(Q) \text{ сильно (и почти всюду) при } k \to \infty, \tag{10.20}$$

так что

$$M_k^R(v_k) \to (u')^R \text{ в } L^2(Q) \text{ сильно, } k \to \infty, \tag{10.21}$$

а так как $M_k^R(\varphi) \to M^R(\varphi)$ в $L^2(Q)$ сильно, то из (10.19) мы выводим, что

$$((u')^R - \mathscr{M}^R(\varphi),\ v - \varphi) \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(Q). \tag{10.22}$$

Но неравенство (10.22) одновременно выполняется $\forall \varphi \in L^2(Q)$; подставляя

$$\varphi = v - \lambda\psi, \quad \lambda > 0, \quad \psi \in L^2(Q),$$

мы получим после деления на λ

$$((u')^R - \mathscr{M}^R(v - \lambda\psi),\ \psi) \geqslant 0 \quad \forall \psi \in L^2(Q).$$

---

[1]) С этим методом мы встретимся в § 3 гл. 4 (впрочем, и там он возникает в связи с причинами того же порядка).

Устремляя $\lambda \to 0$, найдем, что

$$((u')^R - \mathscr{M}^R(v),\ \psi) \geqslant 0 \quad \forall \psi \in L^2(Q),$$

откуда $(u')^R = \mathscr{M}^R(v)$. Поскольку это равенство выполняется для *произвольного* R, мы приходим к (10.17)●

Доказательство единственности проводится таким же методом, как в случае «однозначных уравнений» (ср. § 6 гл. 2). Пусть u_1, u_2 суть два решения; тогда

$$u_1'' - \Delta u_1 + \sigma_1 = f, \quad \sigma_1 \in M(u_1'), \tag{10.23}$$

$$u_2'' - \Delta u_2 + \sigma_2 = f, \quad \sigma_2 \in M(u_2'). \tag{10.24}$$

Таким образом, если $w = u_1 - u_2$, то

$$w'' - \Delta w + \sigma_1 - \sigma_2 = 0, \tag{10.25}$$

и умножая (10.25) на w', мы установим единственность, замечая, что

$$(\sigma_1 - \sigma_2,\ u_1' - u_2') \geqslant 0 \bullet$$

10.2. Многозначные гиперболические неравенства

Методами такого же типа можно изучить случай многозначных монотонных неравенств.

Рассмотрим ситуацию п. 10.1, и пусть K — *замкнутое выпуклое подмножество в* $H^1(\Omega)$, $0 \in K$. Рассмотрим f, u_0, u_1, удовлетворяющие таким же условиям, как в теореме 10.1; пусть, кроме того,

$$u_1 \in K. \tag{10.26}$$

Тогда существует и притом только одна функция u, *удовлетворяющая* (10.7), (10.8), (10.9), (10.11), *и такая, что для почти всех* $t \in [0, T]$

$$\begin{gathered}(u''(t) - \Delta u(t) + \sigma(t) - f(t),\ v - u'(t)) \geqslant 0 \quad \forall v \in K,\\ u'(t) \in K,\\ \sigma(t) \in M(u'(t)).\end{gathered} \tag{10.27}$$

11. ПРОБЛЕМЫ

11.1. Для задачи, решенной в п. 2.6, изучить (возможную) гладкость решения в окрестности особой лииии $x = 0$.

11.2. Когда *единственно* решение задачи, изученной в п. 2.8 (эта задача не тривиальна даже в случае *линейных* операторов и решена Байокки [1])?

11.3. Задача об «искусственной вязкости». Можно лн в области $\Omega \times]0, T[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, при $\varepsilon > 0$ решить задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(| u_1 | \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(| u_2 | \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] + \sum_{i=1}^{2} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f - \operatorname{grad} p,$$

$$\operatorname{div} u = 0, \ u = 0 \text{ на } \Sigma, \ u(x, 0) \text{ задано},$$

и можно ли устремить $\varepsilon \to 0$?

(Вопросы такого рода возникают в связи с введением искусственной вязкости (по фон Нейману — Рихтмайеру [1]) для численного интегрирования задач гидродинамики; по поводу предыдущего примера см. Харлоу [1].)

11.4. Имеются ли теоремы о гладкости, аналогичные (6.35), для того случая, когда $\mathscr{A}$—эллиптический оператор порядка > 2? (Использованные методы не распространяются на этот случай.)

11.5. Можно ли на тот случай, когда K является произвольным выпуклым замкнутым подмножеством V, распространить результаты п. 6.4 о неравенствах, связанных с операторами Навье — Стокса (и без предположений о гладкости данных задачи, сделанных в п. 6.5)?

11.6. Имеет ли место единственность в теореме 6.3?

11.7. *Гиперболические вариационные неравенства с особенностью.* Можно ли решить неравенство

$$\int_0^T \left[(u'', v-u') + (Au(t), v-u') + \frac{\lambda}{t} (u', v-u') \right] dt \geqslant \int_0^T (f, v-u') \, dt,$$

где $\lambda < 0$, $\lambda \neq -2n-1$, $n = 0, 1, \ldots$?

11.8. Имеет ли место единственность в теореме 8.1?

11.9. Условие «Ω_t растет» в теореме 8.1 представляется слишком ограничительным. Сохраняется ли справедливым результат, когда Σ локально содержится в конусе распространения волн, исходящем из любой точки Σ?

11.10. Можно ли решать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + | u' |^\rho u' = f$$

в *нецилиндрической* области (при подходящих начальных и краевых условиях)?

11.11. Можно ли решать эволюционные неравенства параболического и гиперболического типов в нецилиндрических областях?

12. КОММЕНТАРИИ

Эллиптическая регуляризация для линейных параболических задач была предложена автором в [19] и применена к нелинейным задачам в [6], [8], [9]. Аналогичная идея независимо была предложена и применена О. А. Олейник, например, в работе Олейник [7].

В § 1 этот метод излагается в общем виде[1]. Лемма 1.1 о максимальности принадлежит Брезису [2], [6], приведенное в тексте доказательство этой леммы принадлежит Л. Ниренбергу. Теоремы 1.1 и 1.2 принадлежат Брезису [6].

Теорема 2.1 имеется в работе автора [9], где эллиптическая регуляризация использовалась непосредственно; результаты п. п. 2.3 и 2.5[2] принадлежат Бардосу—Брезису [1], а результаты п. 2.4—Бардосу [1].

Доказательство максимальности L, приведенное в п. 2.6, принадлежит Бауенди—Гривару [1] и повторено Бардосом—Брезисом.

Задачи для «гиперболических вариационных неравенств» были введены автором в [21] в связи с примером 3.1. Результат п. 3.1 принадлежит Брезису и автору [1]; дополнительные результаты можно найти у Брезиса [5]. Метод параболической регуляризации был использован в многочисленных работах и (часто) назывался методом вязкости.

Результаты § 4 об уравнении Кортвега—де Фриса [1] принадлежат Темаму [7]. Функциональные инварианты для этого уравнения были получены несколькими авторами; Миура, Гарднер и Крускал [1] построили бесконечную серию таких инвариантов; общий метод отыскания таких инвариантов принадлежит Лаксу [3]. Все перечисленые выше авторы изучали распространение волн для уравнений этого типа. Задача о существовании (и единственности) решения (с условиями периодичности в качестве краевых условий) была решена Шёбергом [1] (при более сильных предположениях, чем у Темама) с помощью метода конечных разностей. Случай $\alpha = 0$ отвечает уравнению Бюргерса [1], для которого метод параболической регуляризации (или вязкости) является классическим (см. Хопф [3], Олейник [1], [2]; можно также обратиться к книге Рождественского и Яненко [1]). Общие результаты о методе вязкости приведены у Бахвалова [1].

Метод штрафа в вариационное исчисление был введен Курантом [1] и породил бесчисленное множество работ; по поводу приложений, в частности, численных, см. Балакришнан [1], Бельтрами [1], Сеа [1], Ивон [1]. Имеет место «двойственность» между методами штрафа и регуляризации; в этой связи мы отсылаем к работам Бенсусана—Кеннета [1] и Боссавита [1]. Систематическое применение штрафов к неравенствам нам представляется удобным. Пример 5.5 возникает в задачах о распознавании образов, а в методе, связанном с уравнением (5.49), имеется несколько аналогий с работой Барбозы—Вонга [1]; последняя имеет аналогии с Брауном—фон Нейманом [1] (интересно *расщепить* (5.49) с помощью метода дробных шагов из численного анализа).

Что касается результатов о гладкости, отличных от результатов такого типа из п. 5.5 и устанавливаемых методом штрафа, то см. Лионс [18] (там, в частности, можно найти результаты о гладкости для некоторых задач порядка > 2).

Метод штрафа начал систематически использоваться в эволюционых неравенствах Лионсом [16], [17]. Условие непрерывности (6.61) было установлено Брезисом [5], Темамом и автором. Неравенства, связанные с операторами

---

[1] Так что его можно распространить на *многозначные операторы*.

[2] Случай, рассмотренный в п. 2.5, может быть также изучен методом компактности, см. § 10 гл. 1.

Навье—Стокса, были введены Лионсом [16]; другие результаты в этом круге вопросов (с помощью многозначных операторов) были получены Брезисом и Пази [1]. Другие (по отношению к § 6, 7) результаты имеются у Брезиса [5].

Метод штрафа для нелинейных эволюционных задач в нецилиндрических областях был предложен автором в [6], [7], а затем независимо Фужитой и Зауером [1]; численные применения методов такого типа к линейным операторам имеются у Миньо [1].

В § 9 показано, каким образом можно приближать (при определенных условиях) решения эллиптических неравенств посредством решений эволюционных неравенств [1].

Возможны и другие аппроксимации:

1) например, Штраусс [5], лекция 3.10, приближает уравнение

$$|u'|^{p-2}u' - \Delta u = f$$

(«параболическое» по своей природе) гиперболическим уравнением

$$\varepsilon u_\varepsilon'' + |u_\varepsilon'|^{p-2}u_\varepsilon' - \Delta u_\varepsilon = f;$$

2) можно приближать эллиптические уравнения «еще более эллиптическими» уравнениями (например, уравнениями более высокого порядка); этот метод используется для получения оценок погрешности в численных аппроксимациях линейных эллиптических задач в работах Обэна [2], Обэна—Лионса [2]; указанному подходу посвящена работа Браудера — Ан Тона [1].

Результаты § 10 принадлежат Америо и Прузе [2], где, впрочем, изучена более общая ситуация.

В приложениях к механике встречаются задачи типа (ср. (7.44)): $(u''(t) + Au(t) - f(t), v - u'(t)) \geqslant 0 \quad \forall v \in V$, где f—выпуклый недифференцируемый функционал, $f \geqslant 0$; см. Дюво—Лионс [3].

---

[1] Это может представлять интерес для численных приложений.

Глава 4

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

До сих пор при построении приближенного решения использовались следующие методы:

1) метод Фаэдо — Галёркина (гл. 1 и 2),

2) эллиптическая или параболическая регуляризация (гл. 3),

3) метод штрафа (для неравенств) (гл. 3).

В этой главе мы изучим другие методы:

1° *метод конечных разностей* (§ 1)[1];

2° *метод расщепления* (splitting up), применяемый в численном анализе и приводящий здесь к *новым* априорным оценкам (см. § 2);

3° метод аппроксимации с помощью *срезок* (§ 3);

4° классический метод *последовательных приближений*; *при условии хорошего выбора функционального пространства, в котором проводятся итерации*, он дает интересные результаты (см. § 5).

Далее изучаются (§ 6, 7, 8) решения *периодические* и *ограниченные по* t.

§ 9 носит особый характер: большинство выкладок в нем проводится *формально*. В этих направлениях еще предстоит проделать огромную работу.

1. АППРОКСИМАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1.1. Общие указания

В вопросе (основном) о *применении* априорных оценок (а подчас и при *выводе* априорных оценок) метод конечных разностей является весьма важным. Главное значение этого метода состоит в том, что структура приближенных уравнений, получающихся после *дискретизации* (перехода к конечным разностям), «очень близка»[2] к структуре уравнений, которые мы хотим решать, и, следовательно, не «теряются» априорные оценки. Главное неудобство метода конечных разностей (как

---

[1] Нашей задачей не является систематическое изучение этой огромной области.

[2] При разумном выборе дискретизации.

мы дальше увидим) связано с технически тяжелыми выкладками, которые неизбежны при работе с ним.

Вообще говоря, имеются *три возможных способа* дискретизации в эволюционных задачах:

(i) *полная дискретизация*, т. е. дискретизация как по пространственным переменным, так и по времени; этот метод главным образом используется в численном анализе; мы не будем им здесь пользоваться, чтобы сверх меры не усложнять изложение;

(ii) *дискретизация только по временно́й переменной* (мы будем называть ее *семидискретизацией*); близкая идея уже была использована в § 7 и 9 гл. 2, где оператор Λ приближался оператором $\frac{I-G(h)}{h}$; в п. 1.2 мы применим этот метод к параболическим неравенствам с ненулевыми начальными данными;

(iii) *дискретизация только по пространственным переменным* (будем называть ее *семидискретизацией по пространственным переменным*); в п. 1.3 мы применим этот метод к одному примеру (принадлежащему Равьяру [3]) вырождающегося нелинейного параболического уравнения.

1.2. Семидискретизация и вариационные неравенства

Рассмотрим ситуацию п. 6.3 гл. 3 (теорема 6.2). Таким образом, нам заданы гильбертовы [1]) пространства

$$V \subset H \subset V' \tag{1.1}$$

и оператор A [2]):

$$\begin{gathered} A \in \mathscr{L}(V;\ V'), \\ (Av,\ v) \geqslant \alpha \|v\|_V^2,\quad \alpha > 0,\quad v \in V. \end{gathered} \tag{1.2}$$

«Конструктивным» методом семидискретизации мы сейчас докажем следующую теорему:

Теорема 1.1. *Пусть имеют место* (1.1), (1.2). *Пусть K — выпуклое замкнутое множество в V. Пусть заданы*

$$f \in L^2(0,\ T;\ V'), \tag{1.3}$$

$$u_0 \in K. \tag{1.4}$$

---

[1]) Это предположение делается исключительно ради простоты изложения.

[2]) Методы подобного типа позволяют рассматривать тот случай, когда оператор *A зависит от t*; мы ограничились случаем, когда A не зависит от t, ради простоты изложения.

Тогда существует и притом только одна такая функция u, *что*

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{1.5}$$

$$u(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{1.6}$$

$$\int_0^T (u'(t) + Au(t) - f(t),\ v(t) - u(t))\, dt + \frac{1}{2} | v(0) - u_0 |^2 \geqslant 0 \tag{1.7}$$

$\forall v \in L^2(0, T; V)$, $v' \in L^2(0, T; V')$, $v(t) \in K$ *почти всюду* ●

Замечание 1.1. Сформулированная выше теорема несколько менее точна по сравнению с теоремой 6.2 гл. 3; впрочем, всю информацию, содержащуюся в теореме 6.2, можно получить и при помощи теоремы 1.1. Однако для нас наиболее существен сам *метод* доказательства ●

Семидискретизация. Положим

$$k = \Delta t = T/N \tag{1.8}$$

и обозначим через u^n «приближенное значение» ¹) u в момент nk. Рассмотрим:

$$f^n = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} f(\sigma)\, d\sigma, \quad n \geqslant 1. \tag{1.9}$$

Полагая

$$u^0 = u_0, \tag{1.10}$$

мы шаг за шагом определим u^n, решая задачи

$$\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k},\ v - u^n\right) + (Au^n - f^n,\ v - u^n) \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \qquad u^n \in K \quad (1 \leqslant n \leqslant N - 1). \tag{1.11}$$

В (1.11) мы имеем дело с задачей для *эллиптического вариационного неравенства*, которое имеет единственное решение; в самом деле, задача (1.11) эквивалентна неравенству

$$\left(Au^n + \frac{1}{k} u^n,\ v - u^n\right) \geqslant \left(f^n + \frac{1}{k} u^{n-1},\ v - u^n\right) \quad \forall v \in K,$$

к которому применима теорема 8.2 гл. 2, поскольку оператор $A + \frac{1}{k} I$ является коэрцитивным.

Мы будем говорить, что неравенства (1.11) образуют *семидискретную аппроксимацию неравенства* (1.7) ●

---

¹) В действительности нужно еще *доказать*, что u^n на самом деле является приближенным значением!

Доказательство существования в теореме 1.1. Естественно, что все сводится к априорной оценке последовательности $\{u^n\}$. Положим

$$u_k(t) = u^n, \quad t \in [nk, (n+1)k[, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1. \tag{1.12}$$

Сейчас будет доказана

Лемма 1.1. *При* $k \to 0$

$$u_k \text{ *ограничены в* } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{1.13}$$

Доказательство. Возьмем (произвольно) v_0 из K. Подставим в (1.11) $v = v_0$ и положим

$$w^n = u^n - v_0.$$

Отсюда выведем, что

$$\frac{1}{k}(w^n - w^{n-1}, w^n) + (Aw^n, w^n) \leqslant (f^n - Av_0, w^n),$$

откуда после умножения на k получим (через $\| \ \|$, $| \ |$, $\| \ \|_*$ обозначаются, соответственно, нормы в V, H и V' (дуальная норма))

$$\frac{1}{2}[|w^n|^2 - |w^{n-1}|^2 + |w^n - w^{n-1}|^2] +$$
$$+ k\alpha\|w^n\|^2 \leqslant k\|f^n - Av_0\|_* \|w^n\|, \tag{1.14}$$

поэтому, *в частности*,

$$\frac{1}{2}(|w^n|^2 - |w^{n-1}|^2) + k\alpha\|w^n\|^2 \leqslant k\frac{\alpha}{2}\|w^n\|^2 + \frac{k}{2\alpha}\|f^n - Av_0\|_*^2$$

и, следовательно,

$$|w^n|^2 - |w^{n-1}|^2 + k\alpha\|w^n\|^2 \leqslant \frac{k}{\alpha}\|f^n - Av_0\|_*^2, \quad 1 \leqslant n \leqslant N-1. \tag{1.15}$$

Суммируя по n, получим

$$|w^n|^2 + \alpha k \sum_{q=1}^{n} \|w^q\|^2 \leqslant |w^0|^2 + \frac{k}{\alpha}\sum_{q=1}^{n} \|f^q - Av_0\|_*^2. \tag{1.16}$$

Однако, так как $f \in L^2(0, T; V')$, то, согласно определению (1.9), имеем

$$k\sum_{q=1}^{N} \|f^q - Av_0\|_*^2 \leqslant C \text{ (константа } C \text{ не зависит от } k\text{)},$$

и, таким образом, неравенство (1.16) приводит к оценкам

$$\begin{gathered} |w^n| \leqslant C, \\ k\sum_{q=1}^{N-1} \|w^q\|^2 \leqslant C. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Отсюда также следует (поскольку $kN = T$), что

$$|u^n| \leqslant C, \qquad k\sum_{q=1}^{N-1} \|u^q\|^2 \leqslant C. \tag{1.18}$$

Согласно определению (см. (1.12)), эти оценки эквивалентны условию (1.13) ●

Предельный переход по k. Теперь мы собираемся устремить k к нулю; из (1.13) следует, что можно выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_k, такую, что

$$u_k \to u \text{ в } L^2(0,\ T;\ V) \text{ слабо, в } L^\infty(0,\ T;\ H) \text{ *-слабо.} \tag{1.19}$$

Если через $\mathscr{K}$ обозначено выпуклое замкнутое множество таких функций $v \in L^2(0, T;\ V)$, что $v(t) \in K$ почти всюду, то имеем: $u_k \in \mathscr{K}$ $\forall k$; поскольку $\mathscr{K}$ слабо замкнуто в $L^2(0,\ T;\ V)$, то

$$u \in \mathscr{K}. \tag{1.20}$$

Следовательно, функция u удовлетворяет (1.5), (1.6), и остается установить (1.7).

Рассмотрим функцию v, удовлетворяющую включениям

$$v \in C^1([0,\ T];\ V), \quad v(t) \in K \quad \forall t. \tag{1.21}$$

Положим,

$v^n = v(nk)$, $n = 0, \ldots, N-1$,

v_k — ступенчатая функция, определенная равенствами

$$v_k(t) = v^n \text{ в интервале }]nk,\ (n+1)k[, \tag{1.22}$$

$\tilde{v}_k$ — кусочно линейная функция, непрерывная на отрезке $[0,\ T]$, причем $\tilde{v}_k(nk) = v^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots,$ и $\tilde{v}_k(0) = v^0$.

Заметим, что

$$\int_0^T \left(\frac{d\tilde{v}_k}{dt},\ v_k - u_k\right) dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nk}^{(n+1)k} \left(\frac{d\tilde{v}_k}{dt},\ v_k - u_k\right) dt = \sum_{n=1}^{N-1} (v^n - v^{n-1},\ v^n - u^n), \tag{1.23}$$

а также

$$\int_0^T (Au_k,\ v_k - u_k)\, dt = k \sum_{n=0}^{N-1} (Au^n,\ v^n - u^n). \tag{1.24}$$

Аналогично, если мы определим

$$f_k = f^n \text{ при } t \in [nk,\ (n+1)k[,\ n = 0, \ldots, N-1, \tag{1.25}$$

то получим

$$\int_0^T (f_k, v_k - u_k)\,dt = k\sum_{n=0}^{N-1} (f^n, v^n - u^n). \tag{1.26}$$

Подставим теперь $v = v^n$ в (1.11); тогда, умножая на k, получим

$$(u^n - u^{n-1}, v^n - u^n) + k(Au^n - f^n, v^n - u^n) \geqslant 0, \tag{1.27}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&(v^n - v^{n-1}, v^n - u^n) + k(Au^n - f^n, v^n - u^n) = \\
&\quad = (u^n - u^{n-1}, v^n - u^n) + k(Au^n - f^n, v^n - u^n) + \\
&\quad + \frac{1}{2}(|v^n - u^n|^2 - |v^{n-1} - u^{n-1}| + |v^n - u^n - (v^{n-1} - u^{n-1})|^2) \geqslant \\
&\quad \geqslant \frac{1}{2}(|v^n - u^n|^2 - |v^{n-1} - u^{n-1}|^2),
\end{aligned}$$

и, суммируя по n, найдем, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N-1} [(v^n - v^{n-1}, v^n - u^n) + k(Au^n - f^n, v^n - u^n)] \geqslant \\
&\qquad \geqslant \frac{1}{2}|v^{N-1} - u^{N-1}|^2 - \frac{1}{2}|v^0 - u^0|^2 \geqslant -\frac{1}{2}|v(0) - u_0|^2.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Однако, пользуясь (1.23), (1.24), (1.26), мы выведем из (1.28), что

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k\right) dt + \int_0^T (Au_k - f_k, v_k - u_k)\,dt - k(Au^0, v^0 - u^0) + \\
&\qquad + k(f^0, v^0 - u^0) + \frac{1}{2}|v(0) - u_0|^2 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Но при $k \to 0$ имеем: $d\tilde{v}_k/dt \to v'$ в $L^2(0, T; V')$ сильно, $v_k \to v$ в $L^2(0, T; V)$ сильно, $f_k \to f$ в $L^2(0, T; V')$, а поскольку

$$\liminf \int_0^T (Au_k, u_k)\,dt \geqslant \int_0^T (Au, u)\,dt$$

и, наконец, $kf^0 \to 0$ в V' при $k \to 0$, то из (1.29) мы выведем неравенство

$$\int_0^T [(v', v - u) + (Au - f, v - u)]\,dt + \frac{1}{2}|v(0) - u_0|^2 \geqslant 0, \tag{1.30}$$

справедливое для всех v, удовлетворяющих (1.21).

Однако, если функция v удовлетворяет условиям из (1.7), то существует последовательность функций v_j, удовлетворяющих условиям типа (1.21), причем $v_j \to v$ в $L^2(0, T; V)$ слабо, $v'_j \to v'$ в $L^2(0, T; V')$.

Подставляя $v = v_j$ в (1.30) и переходя к пределу, мы получим (1.7).

Доказательство единственности в теореме 1.1 аналогично доказательству единственности в теореме 6.2 гл. 3. Пусть u_1 и u_2 суть два возможных решения; определим $w = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, а затем w_η $(\eta > 0)$, решая задачу

$$\eta w'_\eta + w_\eta = w, \qquad w_\eta(0) = u_0.$$

Подставим в каждое из неравенств $v = w_\eta$; складывая, мы получим

$$2\int_0^T (w'_\eta, w_\eta - w)\,dt + \int_0^T [(Au_1, w_\eta - u_1) + (Au_2, w_\eta - u_2)]\,dt - \\ - 2\int_0^T (f, w_\eta - w)\,dt \geqslant 0.$$

Однако

$$\int_0^T (w'_\eta, w_\eta - w)\,dt = -\eta \int_0^T |w'_\eta|^2\,dt \leqslant 0$$

и, следовательно,

$$\int_0^T [(Au_1, w_\eta - u_1) + (Au_2, w_\eta - u_2)]\,dt - 2\int_0^T (f, w_\eta - w)\,dt \geqslant 0.$$

Устремляя η к 0, мы получим, что

$$-\int_0^T (A(u_1 - u_2), u_1 - u_2)\,dt \geqslant 0,$$

откуда $u_1 = u_2$ ●

Замечание 1.2. Ввиду единственности не нужно выделять подпоследовательность; таким образом, мы показали, что если $k \to 0$, то

$$u_k \to u \text{ в } L^2(0, T; V) \text{ слабо и в } L^\infty(0, T; H) \text{ *-слабо.}$$

1.3. Пространственная семидискретизация; применение к одному параболическому уравнению

1.3.1. Постановка задачи. Пусть Ω — интервал $]0, 1[\subset \mathbb{R}$; ищется функция $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right) = f \qquad (1.31)$$

и условиям

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \qquad (1.32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ x \in \Omega. \qquad (1.33)$$

Предполагается, что в (1.31)

$$\alpha \geqslant 2, \qquad p \geqslant 2. \qquad (1.34)$$

Уравнение (1.31) можно еще переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\alpha - 1)^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(|u|^{(p-1)(\alpha-2)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f, \qquad (1.31')$$

т. е. мы имеем дело с оператором, «эллиптическая часть» которого *монотонна* $\left(\right.$относительно скалярного произведения $\left.\int\limits_\Omega \varphi\psi\, dx\right)$ и *вырождается.*

Сейчас мы увидим, как пространственная семидискретизация позволяет установить следующую теорему существования:

Теорема 1.2. *Пусть заданы* f, u_0, *причем*

$$f, \frac{df}{dt} \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), \qquad (1.35)$$

$$u_0 \in L^\alpha(\Omega), \quad |u_0|^{\alpha-2}u_0 \in W_0^{1, p}(\Omega). \qquad (1.36)$$

Тогда существует функция u, *удовлетворяющая условиям*

$$u \in L^\infty(0, T; L^\alpha(\Omega)), \quad |u|^{\alpha-2}u \in L^\infty(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)), \qquad (1.37)$$

$$\left.\begin{aligned} &u' = \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)),\\ &\frac{d}{dt}(|u|^{(\alpha-2)/2}u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}\right. \qquad (1.38)$$

и являющаяся решением задачи (1.31) — (1.33)[1] ●

Вопрос о единственности является открытым.

---

[1] Условия (1.32) неявно содержатся в (1.37).

Замечание 1.3. Умножим (формально) (1.31) на $|u|^{\alpha-2}u$; тогда получим равенство

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u(x,t)|^{\alpha}dx+\int_{\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p}dx=\int_{\Omega}f|u|^{\alpha-2}u\,dx, \quad (1.39)$$

из которого «выводятся» оценки типа (1.37).

Теперь встает основной вопрос: как же воспользоваться оценкой (1.39)? (Мы уже часто встречались с вопросами такого типа; см., например, § 4 гл. 3.) Используемые до сих пор методы сводились к следующим:

галёркинская аппроксимация с выбором специального базиса;

аппроксимация посредством регуляризации.

Теперь мы изложим другой метод; его осуществление приводит к серьезным техническим трудностям, которые искупаются большой общностью этого метода ●

Замечание 1.4. Предыдущее замечание 1.3 делает естественной подстановку $v=|u|^{\alpha-2}u$, однако тогда для v получится *«дважды нелинейное»* уравнение типа

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(v)+\mathcal{A}(v)=g,$$

где β и $\mathcal{A}$ нелинейны; для уравнений такого типа в настоящее время не имеется никаких достаточно общих результатов (см. также замечание 1.5) ●

1.3.2. Пространственная дискретизация.

Обозначения. Положим

$$\varphi(v)=|v|^{\alpha-2}v, \quad \psi(v)=|v|^{(\alpha-2)/2}v,$$
$$A(v)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad (1.40)$$

тогда уравнение (1.31) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(\varphi(u))=f. \quad (1.41)$$

Дискретизация по x. Положим $h=\frac{1}{M+1}$, M — целое число (которое будет стремиться к $+\infty$),

$$V_h \text{ — пространство последовательностей}$$
$$v_h=\{v_i\,|\,i=0,\ \ldots,\ M+1\},\quad v_0=v_{M+1}=0. \quad (1.42)$$

Пространство V_h очевидно изоморфно $\mathbb{R}^M$, однако мы будем снабжать его различными нормами, *зависящими от h* и являющимися *аппроксимациями* норм в $L^2(\Omega)$, $L^\alpha(\Omega)$, ... Точнее, для u_h, $v_h \in V_h$ положим

$$(u_h, v_h)_h = h\sum_{i=1}^{M} u_i v_i, \quad |\ |_h \text{ — соответствующая норма,} \tag{1.43}$$

$$\| v_h \|_h = \left(h \sum_{i=0}^{M} \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right|^p \right)^{1/p}, \tag{1.44}$$

$\| v_h \|_{*,h}$ — норма, дуальная $\|\ \|_h$ относительно скалярного произведения (1.43), (1.45)

т. е. $\| v_h \|_{*,h} = \sup\limits_{w_h \in V_h} \dfrac{|(v_h, w_h)_h|}{\| w_h \|_h}$,

и, наконец,

$$[v_h]_h = \left(h \sum_{i=1}^{M} | v_i |^\alpha \right)^{1/\alpha}. \tag{1.46}$$

Мы встретимся с аппроксимациями норм в

$L^2(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ и $L^\alpha(\Omega)$●

Дискретные нелинейные операторы. Для $v_h \in V_h$ определим:

$$\begin{aligned} &\varphi(v_h) \in V_h, \quad \varphi(v_h)_i = |v_i|^{\alpha-2} v_i = \varphi(v_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant M+1, \\ &\psi(v_h) \in V_h, \quad \psi(v_h)_i = |v_i|^{(\alpha-2)/2} v_i = \psi(v_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant M+1, \end{aligned} \tag{1.47}$$

и

$$\begin{aligned} A_h(v_h)_i = -\frac{1}{h^p} \big[| v_{i+1} - v_i |^{p-2} (v_{i+1} - v_i) - \\ - | v_i - v_{i-1} |^{p-2} (v_i - v_{i-1}) \big], \quad 1 \leqslant i \leqslant M. \end{aligned} \tag{1.48}$$

1.3.3. Семидискретизированная задача. Ищется такая функция $u_h \in C^1([0, T]; V_h)$, что

$$u'_h(t) + A_h(\varphi(u_h(t))) = f_h(t), \quad t > 0, \tag{1.49}$$

$$u_h(0) = u_{0h}, \tag{1.50}$$

где f_h и u_{0h} суть «*аппроксимации*» функций f и u_0. Говоря точнее, введем *операторы продолжения* p_h и q_h, полагая

$$p_h v_h = \begin{cases} \text{непрерывная функция, линейная на каждом интервале} \\ [ih, (i+1)h], \text{ такая, что } p_h v_h(ih) = v_i,\ i = 0, \ldots, M+1, \end{cases} \tag{1.51}$$

$$q_h v_h = \begin{cases} \text{ступенчатая функция, такая, что } q_h v_h(x) = v_i \text{ в} \\ \left] \left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(i + \frac{1}{2}\right)h \right[\cap \Omega,\ i = 0, \ldots, M+1. \end{cases} \tag{1.52}$$

Далее f_h и u_{0h} строятся таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int_0^T \left[\|f_h(t)\|_{*,h}^{p'} + \|f_h'(t)\|_{*,h}^{p'}\right] dt \leqslant C^{1)}, \tag{1.53}$$

$$\int_0^T (f_h, v_h)_h \, dt \to \int_0^T (f, v)\, dt \quad \forall v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{1.54}$$

где $v_h(\cdot)$ — произвольная последовательность таких функций из $C^0([0, T]; V_h)$, что $p_h v_h(\cdot) \to v$ в $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Что касается u_{0h}, то будем предполагать выполненными следующие условия:

$$\|\varphi(u_{0h})\|_h \leqslant C, \quad [u_{0h}]_h \leqslant C, \tag{1.55}$$

$$q_h u_{0h} \to u_0 \quad \text{в} \quad L^\alpha(\Omega). \tag{1.56}$$

Такой выбор возможен.

Система нелинейных уравнений (1.49), (1.50) имеет единственное решение в интервале $[0, T_h]$; приведенные ниже априорые оценки показывают, что $T_h = T$ ●

1.3.4. Априорные оценки (I). Мы можем в пространстве V_h (снабженном скалярным произведением (1.43)) скалярно умножить обе части уравнения (1.49) на $\varphi(u_h(t))$ — *это является первым существенным моментом нашего доказательства.* Интегрируя по t, получим (ср. (1.39))

$$\frac{1}{\alpha}[u_h(t)]_h^\alpha + \int_0^t (A_h(\varphi(u_h(\sigma))), \varphi(u_h(\sigma)))_h \, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{\alpha}[u_{0h}]_h^\alpha + \int_0^t (f_h(\sigma), \varphi(u_h(\sigma)))_h \, d\sigma. \tag{1.57}$$

Но

$$(A_h(v_h), w_h) = a_h(v_h, w_h),$$

$$a_h(v_h, w_h) = \frac{1}{h^p} \sum_{i=0}^{M} |v_{i+1} - v_i|^{p-2}(v_{i+1} - v_i)(w_{i+1} - w_i),$$

так что

$$(A_h(\varphi(u_h)), \varphi(u_h)) = a_h(\varphi(u_h), \varphi(u_h)) = \|\varphi(u_h)\|_h^p. \tag{1.58}$$

---

[1] Через C обозначаются константы, *не зависящие от* h.

Второй член в правой части (1.57) оценивается следующим образом:

$$\int_0^t (f_h(\sigma), \varphi(u_h(\sigma)))_h \, d\sigma \leqslant \int_0^t \| f_h(\sigma) \|_{*,h} \| \varphi(u_h(\sigma)) \|_h \, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \eta \int_0^t \| \varphi(u_h(\sigma)) \|_h^p \, d\sigma + c(\eta) \int_0^t \| f_h(\sigma) \|_{*,h}^{p'} \, d\sigma. \qquad (1.59)$$

Выбирая в (1.59) $\eta < 1$ и подставляя в (1.57), мы получим:

$$[u_h(t)]_h^\alpha + \int_0^t \| \varphi(u_h(\sigma)) \|_h^p \, d\sigma \leqslant C. \qquad (1.60)$$

Отсюда следует, что $T_h = T$.

Теперь из (1.49) мы можем вывести, что

$$\| u_h'(t) \|_{*,h} \leqslant \| A_h(\varphi(v_h(t))) \|_{*,h} + \| f_h(t) \|_{*,h} \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi(u_h(t))^p \|_h^{p/p'} + \| f_h(t) \|_{*,h},$$

откуда

$$\int_0^T \| u_h'(t) \|_{*,h}^{p'} \, dt \leqslant C \; \bullet \qquad (1.61)$$

1.3.5. Априорные оценки (II). Априорных оценок п. 1.3.4 не достаточно для предельного перехода. Однако — *и это является вторым существенным моментом* — можно скалярно умножить в V_h обе части (1.49) на $\frac{d}{dt} \varphi(u_h(t))$:

$$\left(\frac{d}{dt} u_h, \frac{d}{dt} \varphi(u_h) \right)_h + a_h \left(\varphi(u_h), \frac{d}{dt} \varphi(u_h) \right) = \left(f_h, \frac{d}{dt} \varphi(u_h) \right)_h. \qquad (1.62)$$

Но

$$\left(\frac{d}{dt} u_h(t), \frac{d}{dt} \varphi(u_h(t)) \right)_h = h \sum_{i=1}^{M} \frac{d}{dt} u_i(t) \frac{d}{dt} \left(| u_i(t) |^{\alpha-2} u_i(t) \right) =$$

$$= \frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2} h \sum_{i=1}^{M} \left| \frac{d}{dt} \left(| u_i(t) |^{(\alpha-2)/2} u_i(t) \right) \right|^2,$$

откуда

$$\left(\frac{d}{dt} u_h(t), \frac{d}{dt} \varphi(u_h(t)) \right)_h = \frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2} \left| \frac{d}{dt} \psi(u_h(t)) \right|_h^2. \qquad (1.63)$$

С другой стороны,

$$a_h\left(v_h(t), \frac{d}{dt}v_h(t)\right)=$$

$$=\frac{1}{h^p}\sum_{i=0}^{M}|v_{i+1}(t)-v_i(t)|^{p-2}(v_{i+1}(t)-v_i(t))\frac{d}{dt}(v_{i+1}(t)-v_i(t))=$$

$$=\frac{1}{ph^p}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{M}|v_{i+1}(t)-v_i(t)|^p\right)=$$

$$=\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|v_h(t)\|_h^p,$$

откуда

$$a_h\left(\varphi(u_h(t)), \frac{d}{dt}\varphi(u_h(t))\right)=\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\varphi(u_h(t))\|_h^p. \tag{1.64}$$

Наконец,

$$\left|\int_0^t\left(f_h, \frac{d}{d\sigma}v_h\right)_h d\sigma\right|=$$

$$=\left|-\int_0^t\left(\frac{d}{d\sigma}f_h, v_h\right)_h d\sigma+(f_h(t), v_h(t))_h-(f_h(0), v_h(0))_h\right|\leqslant$$

$$\leqslant\eta\int_0^t\|v_h\|_h^p d\sigma+\eta\|v_h(t)\|_h^p+\eta\|v_h(0)\|_h^p+$$

$$+c(\eta)\left[\int_0^t\|f'_h(\sigma)\|_{*,h}^{p'}d\sigma+\|f_h(t)\|_{*,h}^{p'}+\|f_h(0)\|_{*,h}^{p'}\right],$$

откуда следует, что

$$\left|\int_0^t\left(f_h, \frac{d}{dt}\varphi(u_h)\right)_h d\sigma\right|\leqslant\eta\int_0^t\|\varphi(u_h)\|_h^p d\sigma+\eta\|\varphi(u_h(t))\|_h^p+$$

$$+\eta\|\varphi(u_h(0))\|_h^p+C_1(\eta), \tag{1.65}$$

а поскольку

$$\|\varphi(u_h(0))\|_h=\|\varphi(u_{0h})\|_h\leqslant C,$$

то из (1.62), (1.63), (1.64), (1.65) мы выведем (выбирая в (1.65) подходящее η), что

$$\int_0^t\left|\frac{d}{dt}\psi(u_h(\sigma))\right|_h^2 d\sigma+\|\varphi(u_h(t))\|_h^p\leqslant C+C\int_0^t\|\varphi(u_h(\sigma))\|_h^p d\sigma. \tag{1.66}$$

Отсюда выводится *вторая группа априорных оценок*:

$$\| \varphi(u_h(t)) \|_h \leqslant C, \tag{1.67}$$

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} \psi(u_h(\sigma)) \right|_h^2 d\sigma \leqslant C. \tag{1.68}$$

1.3.6. Оценки для $p_h u_h$, $q_h u_h$. Теперь мы используем операторы p_h и q_h, введенные в (1.51), (1.52). Из оценок (1.60), (1.61), (1.67), (1.68) без труда заключаем, что

$$\begin{array}{lll}
p_h u_h \text{ и } q_h u_h & \text{ограничены в } L^\infty(0, T; L^\alpha(\Omega)), & (1.69)\\
\dfrac{d}{dt} p_h u_h & \text{ограничены в } L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), & (1.70)\\
p_h(u_h),\ \varphi(p_h u_h) & \text{ограничены в } L^\infty(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)), & (1.71)\\
q_h \varphi(u_h) = \varphi(q_h u_h) & \text{ограничены в } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), & (1.72)\\
A(p_h \varphi(u_h)) & \text{ограничены в } L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), & (1.73)\\
\psi(p_h u_h) & \text{ограничены в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), & (1.74)\\
\dfrac{d}{dt} \psi(p_h u_h) & \text{ограничены в } L^2(0, T; L^2(\Omega)), & (1.75)\\
q_h u_h(T) & \text{ограничены в } L^\alpha(\Omega). & (1.76)
\end{array}$$

Отсюда следует, что можно так выбрать подпоследовательность, опять обозначаемую через u_h, что

$$\begin{array}{llr}
p_h u_h \to u & \text{в } L^\infty(0, T; L^\alpha(\Omega)) & *\text{-слабо},\\
q_h u_h \to u_1 & \text{в } L^\infty(0, T; L^\alpha(\Omega)) & *\text{-слабо},\\
\dfrac{d}{dt} p_h u_h \to \dfrac{du}{dt} & \text{в } L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)) & \text{слабо},\\
p_h \varphi(u_h) \to v_1 & \text{в } L^\infty(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)) & *\text{-слабо},\\
\varphi(p_h u_h) \to v_2 & \text{в } L^\infty(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)) & *\text{-слабо},\\
\varphi(q_h u_h) \to v_3 & \text{в } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) & *\text{-слабо},\\
A(p_h \varphi(u_h)) \to g & \text{в } L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)) & \text{слабо},\\
\psi(p_h u_h) \to w & \text{в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) & *\text{-слабо},\\
\dfrac{d}{dt} \psi(p_h u_h) \to \dfrac{dw}{dt} & \text{в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) & \text{слабо},\\
q_h u_h(T) \to \xi & \text{в } L^\alpha(\Omega) & \text{слабо}.
\end{array}$$

Отметим, наконец, что обязательно

$$u_1 = u, \qquad v_3 = v_1.$$

Мы покажем, что

$$v_1 = v_2 = v_3 = \varphi(u), \qquad w = \psi(u). \tag{1.77}$$

Применим теорему о компактности 12.1 гл. 1, выбирая

$$\begin{aligned} &S = \{v \mid \varphi(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)\},\\ &B = L^{(\alpha-1)p}(\Omega), \quad B_1 = W^{-1,p'}(\Omega),\\ &p_0 = p, \quad p_1 = p',\\ &M(v) = \|\varphi(v)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{(1/\alpha)-1}. \end{aligned}$$

Мы находимся в условиях теоремы 12.1 гл. 1, поскольку (ввиду варианта предложения 12.1 гл. 1) множество таких v, для которых $M(v) \leqslant 1$, является относительно компактным в B. Мы применим этот результат к последовательности $p_h u_h$ (это возможно ввиду (1.70) и (1.71)); следовательно, можно считать, что

$$p_h u_h \to u \quad \textit{сильно в} \quad L^{(\alpha-1)p}(Q) \ \textit{и почти всюду}. \tag{1.78}$$

Мы уже показали, что $w = \psi(u)$ и что $v_2 = \varphi(u)$.

Таким образом, равенства (1.77) будут доказаны, если мы покажем, что

$$v_3 = \varphi(u). \tag{1.79}$$

Нельзя непосредственно применить результат о компактности к последовательности $q_h u_h$, однако мы проверим, что $q_h u_h$ «достаточно близки» к $p_h u_h$. Говоря более аккуратно, мы проверим следующее утверждение (см. Равьяр [6]): существует такая константа C, что $\forall v_h \in V_h$ справедлива оценка

$$\|p_h v_h - q_h v_h\| L^{(\alpha-1)p}(\Omega) \leqslant C h^{1/(\alpha-1)} \|\varphi(v_h)\|_h^{1/(\alpha-1)}. \tag{1.80}$$

Из (1.80) и (1.78) следует, что

$$p_h u_h - q_h u_h \to 0 \quad \text{в} \ L^{(\alpha-1)p}(Q) \ \textit{сильно},$$

поэтому мы можем считать, что

$$q_h u_h \to u \quad \textit{сильно в} \ L^{(\alpha-1)p}(Q) \ \textit{и почти всюду}, \tag{1.81}$$

откуда следует (1.79).

1.3.7. Предельный переход. 1) Из (1.49) и предыдущих результатов моментально следует, что

$$\begin{aligned} &u' + g = f,\\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = \xi(x), \end{aligned} \tag{1.82}$$

Поскольку u, кроме того, удовлетворяет включениям (1.37), (1.38), нам остается только показать, что

$$g = A(\varphi(u)). \qquad (1.83)$$

2) *Для доказательства* (1.83) *мы воспользуемся методом монотонности.* Можно умножить обе части (1.82) на $|u|^{\alpha-2}u$; тогда получим [1]

$$\int_0^T (u', |u|^{\alpha-2}u)\,d\sigma = \frac{2}{\alpha}\int_0^T \left(\frac{d}{dt}(|u|^{(\alpha-2)/2}u), |u|^{(\alpha-2)/2}u\right)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\|u(T)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|u(0)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)},$$

откуда

$$\frac{1}{\alpha}\|u(T)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} + \int_0^T (g, \varphi(u))\,dt = \frac{1}{\alpha}\|u_0\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} + \int_0^T (f, \varphi(u))\,dt. \qquad (1.84)$$

Для произвольного θ из $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ рассмотрим

$$X_h = \int_0^T (A(p_h\varphi(u_h)) - A(\theta), p_h\varphi(u_h) - \theta)\,dt \geqslant 0.$$

Из (1.57) следует, что

$$\frac{1}{\alpha}\|q_h u_h(T)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} + \int_0^T (A(p_h\varphi(u_h)), p_h\varphi(u_h))\,dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\|q_h u_{0h}\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} + \int_0^T (f_h, \varphi(u_h))_h\,dt,$$

и благодаря (1.54) мы получим, переходя к нижним пределам, что

$$\frac{1}{\alpha}\|u(T)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} + \liminf \int_0^T (A(p_h\varphi(u_h)), p_h\varphi(u_h))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\|u_0\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} + \int_0^T (f, \varphi(u))\,dt,$$

откуда

$$0 \leqslant \liminf X_h \leqslant \int_0^T (f, \varphi(u))\,dt + \frac{1}{\alpha}\|u_0\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|u(T)\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} -$$

$$- \int_0^T (g, \theta)\,dt - \int_0^T (A(\theta), \varphi(u) - \theta)\,dt = \int_0^T (g - A(\theta), \varphi(u) - \theta)\,dt$$

---

[1] См. работу Равьяра [6], где все это детально обосновано.

(в силу (1.84)), поэтому

$$\int_0^T (g - A(\theta),\ \varphi(u) - \theta)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\theta \in L^p(0,\ T;\ W_0^{1,\,p}(\Omega)).$$

Отсюда обычным методом (см. § 1 гл. 2) выводится равенство (1.83)●

Замечание 1.5 (Равьяр [6]). Можно решить задачу (1.31), (1.32), (1.33) другим способом, сводя ее к *дважды нелинейному уравнению* (см. замечание 1.4 и проблему 10.2).

После замены неизвестной функции $u \to |u|^{\alpha-2}u$ уравнение (1.31) примет вид[1])

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\gamma-2}u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad (\gamma > 1), \qquad (1.85)$$

а условия (1.32), (1.33) останутся без изменения (только u_0 станет другим). Эта задача решена Равьяром в цитированной выше работе посредством полной дискретизации по *неявной схеме*; если через A_h обозначена (подходящая) конечно-разностная аппроксимация оператора

$$\varphi \to -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$$

с краевыми условиями Дирихле, то указанная схема имеет вид

$$\frac{1}{k}\left(|u_h^{n+1}|^{\gamma-2}u_h^{n+1} - |u_h^n|^{\gamma-2}u_h^n\right) + A_h(u_h^{n+1}) = f_h^n \qquad (1.86)$$

(где u_h^n — приближенное значение u на дискретной сетке с шагом h (по пространству) в момент nk).

Показана (см. Равьяр [6]) *сходимость этой схемы в подходящей топологии к функции u, являющейся решением задачи*, так что существование доказывается заново.

Этот метод дискретизации интересен тем, что (как мы уже видели в случае метода семидискретизации) можно *умножать* (1.86) на *нелинейные* выражения от u_h^n (см. также [§ 4 гл. 3)●

---

[1]) Через n мы обозначаем число пространственных переменных. Все, что мы до сих пор делали (для $n = 1$), распространяется на случай $n > 1$.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПОСРЕДСТВОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

2.1. Одна задача Т. Карлемана. Формулировка теоремы

В связи со своими исследованиями по кинетической теории газа Карлеман [1] поставил следующую задачу: в области $Q = \Omega \times]0, T[$, где

$$\Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[,$$

ищутся функции $u(x, t)$; $v(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

краевым условиям

$$u(a_1, x_2, t) = 0, \qquad v(x_1, a_2, t) = 0 \tag{2.2}$$

и начальным условиям

$u(x, 0)$, $v(x, 0)$ равны заданным функциям $u_0(x)$ и $v_0(x)$. (2.3)

Для этой системы мы докажем следующий результат, принадлежащий Темаму [4]:

Теорема 2.1. *Пусть u_0 и v_0 — заданные функции, причем*

$$\begin{aligned} &u_0, v_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ &u_0(a_1, x_2) = 0, \quad v_0(x_1, a_2) = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$u_0, v_0 \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega. \tag{2.5}$$

Тогда существует и притом только одна пара функций u, v,

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)), \\ &v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$u \geqslant 0, v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q, \tag{2.7}$$

удовлетворяющих (2.1), (2.2), (2.3) ●

Замечание 2.1. Из (2.6) и (2.1) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

так что $u(0)$, $v(0)$ имеют смысл (в частности, в $L^2(\Omega)$) ●

Сначала мы докажем *единственность* (для этого нам не понадобятся никакие новые идеи по сравнению с уже имеющимися в предыдущих главах), далее для доказательства существования мы введем *метод расщепления*.

2.2. Доказательство единствеииости

Пусть $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$ суть два решения задачи. Полагая

$$u = u_1 - u_2, \qquad v = v_1 - v_2,$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_1^2 - u_2^2 = v_1^2 - v_2^2, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v_1^2 - v_2^2 = u_1^2 - u_2^2. \tag{2.9}$$

Умножим (2.8) на u и проинтегрируем по Ω; положим

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi\, dx, \qquad |\varphi| = (\varphi, \varphi)^{1/2}.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, u\right) \geqslant 0 \tag{2.10}$$

и

$$(u_1^2 - u_2^2)(u_1 - u_2) = (u_1 + u_2)(u_1 - u_2)^2 \geqslant 0 \text{ благодаря (2.7)},$$

так что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) \leqslant \int_\Omega (v_1^2 - v_2^2)(u_1 - u_2)\, dx. \tag{2.11}$$

Однако

$$u_i, v_i \in L^\infty(Q),$$

и, следовательно, если

$$\max(\| u_i \|_{L^\infty(Q)}, \| v_i \|_{L^\infty(\Omega)}) = \mu,$$

то

$$\left|\int_\Omega (v_1^2 - v_2^2)(u_1 - u_2)\, dx\right| \leqslant 2\mu \int_\Omega |u(x, t)|\,|v(x, t)|\, dx \leqslant 2\mu |u|\,|v|,$$

и (2.11) приводит к неравенству

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 \leqslant 4\mu |u(t)|\,|v(t)|. \tag{2.12}$$

Аналогично, исходя из (2.9), получим

$$\frac{d}{dt} |v(t)|^2 \leqslant 4\mu |u(t)|\,|v(t)|. \tag{2.13}$$

Складывая (2.12) и (2.13), получим

$$\frac{d}{dt} (|u(t)|^2 + |v(t)|^2) \leqslant 4\mu (|u(t)|^2 + |v(t)|^2)$$

и, следовательно, в силу леммы Гронуолла $|u(t)|^2 + |v(t)|^2 = 0$ ●

2.3. Метод расщепления

2.3.1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ. Начнем с общей *формальной* схемы. Рассмотрим систему (u может быть вектором)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_1(u)+A_2(u)=f, \tag{2.14}$$

где A_1 и A_2 суть *два*[1]) *линейных или нелинейных оператора.*

Пусть

$$k=\Delta t$$

— шаг по времени, и предположим, что нам известно

u^n — «приближенное значение» u в момент nk.

Теперь мы определим u^{n+1} («приближенное значение» u в момент $(n+1)k$) в два этапа.

Первый этап: рассматривается уравнение

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w_1}{\partial t}+A_1(w_1)=f_1,\\&w_1 \text{ удовлетворяет } \textit{краевым условиям}, \text{ «отвечающим } A_1\text{»},\\&w_1(nk)=u^n;\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

с его помощью «вычисляем»[2])

$$w_1((n+1)k)=u^{n+1/2}. \tag{2.16}$$

Второй этап: рассматривается «вторая часть» уравнения (2.14):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w_2}{\partial t}+A_2(w_2)=f_2,\\&w_2 \text{ удовлетворяет краевым условиям, «отвечающим } A_2\text{»},\\&w_2(nk)=u^{n+1/2};\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

здесь

$$f_1+f_2=f.$$

Далее берем

$$u^{n+1}=w_2((n+1)k). \tag{2.18}$$

При «интегрировании» (2.15), (2.17) естественно ограничиться какой-нибудь аппроксимацией уравнения (2.15) (или (2.17)) (поскольку даже после точного интегрирования мы получим лишь приближенное значение). Таким образом, мы

---

[1]) Излагаемый нами метод распространяется на случай любого конечного расщепления.

[2]) Здесь мы рассуждаем формально. На самом деле необходимо, чтобы задача (2.15) имела решение на интервале $[nk, (n+1)k]$.

приходим, *например, к схеме с расщеплением* (*или с дробными шагами*[1])).

$$\begin{aligned} &\frac{u^{n+1/2}-u^n}{k}+A_1\left(u^{n+1/2}\right)=f_1^n, \\ &\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{k}+A_2\left(u^{n+1}\right)=f_2^n. \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3.2. Приложение к задаче Карлемана. Мы отсылаем читателя к литературе в Комментариях по поводу полезности метода, который мы сейчас вкратце изложим, для численных расчетов. Мы же сейчас продемонстрируем *полезность этого метода для получения новых априорных оценок*[2]).

Вернемся к системе (2.1). Ввиду замечаний п. 2.3.1 попытаемся «расщепить» ее на две системы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u^2-v^2=0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t}+v^2-u^2=0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1}=0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x_2}=0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Это расщепление интересно тем, что каждую из систем (2.20), (2.21) можно явно проинтегрировать; последнее дает надежду на получение «более точных» априорных оценок по сравнению с теми, которые можно получить непосредственно (без расщепления).

Семидискретизация типа (2.19) в конце концов приводит к следующей аппроксимации задачи: пусть известна пара функций $\{u^n, v^n\}$ — аппроксимация в момент nk; мы определим $\{u^{n+1/2}, v^{n+1/2}\}$ и $\{u^{n+1}, v^{n+1}\}$ из уравнений

$$\begin{aligned} &u^{n+1/2}-u^n+k\left[(u^{n+1/2})^2-(v^{n+1/2})^2\right]=0, \\ &v^{n+1/2}-v^n+k\left[(v^{n+1/2})^2-(u^{n+1/2})^2\right]=0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} &u^{n+1}-u^{n+1/2}+k\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}=0, \quad u^{n+1}(a_1, x_2)=0, \\ &v^{n+1}-v^{n+1/2}+k\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2}=0, \quad v^{n+1}(x_1, a_2)=0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

---

[1] Здесь речь идет только о *семидискретизированной* схеме, поскольку «пространственные» операторы A_1 и A_2 мы не аппроксимируем конечными разностями.

[2] Отметим, что мы находим аппроксимацию для решения, удовлетворяющего «ограничениям» (2.7). С аналогичным свойством (существенным) мы встречаемся в работах Темама [8], [9], где метод подобного типа применяется к уравнениям Риккати (см. также § 9).

Эту систему можно решить; в самом деле, система (2.22) имеет единственное решение, которое задается явными формулами:

$$u^{n+1/2}=\frac{u^n+k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n},\qquad v^{n+1/2}=\frac{v^n+k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n},\tag{2.24}$$

где

$$\sigma^n=u^n+v^n.\tag{2.25}$$

Аналогично система (2.23) имеет единственное решение, которое задается явиыми формулами:

$$u^{n+1}(x)=\frac{1}{k}\int_{a_1}^{x_1}u^{n+1/2}(\xi,\ x_2)\exp\left(\frac{\xi-x_1}{k}\right)d\xi,\qquad v^{n+1}(x)=\frac{1}{k}\int_{a_2}^{x_2}v^{n+1/2}(x_1,\ \xi)\exp\left(\frac{\xi-x_2}{k}\right)d\xi.\tag{2.26}$$

Эти формулы полностью определяют последовательность $\{u^n,\ v^n\}$, коль скоро выбраны $\{u^0,\ v^0\}$; естественно, что мы полагаем

$$u^0=u_0,\qquad v^0=v_0\ \bullet\tag{2.27}$$

2.4. Априорные оценки

Возьмем k внда

$$k=T/N,\quad N\text{ — целое},\tag{2.28}$$

рассмотрим функции

$$u_{ik}(t)=u^{n+i/2},\quad v_{ik}(t)=v^{n+i/2},\quad i=1,\ 2,\qquad \text{при}\quad t\in[nk,\ (n+1)k[,\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,\tag{2.29}$$

и фуикции

$$\tilde u_k(t),\ \tilde v_k(t),\ \text{линейные на отрезке}\ [nk,\ (n+1)k],\quad 0\leqslant n\leqslant N-1,\qquad \tilde u_k(nk)=u^n,\quad \tilde v_k(nk)=v^n.\tag{2.30}$$

Сейчас будет доказана

Лемма 2.1. *Функции u_{ik}, v_{ik} $(i=1,\ 2)$, $\tilde u_k$, $\tilde v_k$ при $k\to 0$ ограничены в $L^\infty(0,\ T;\ H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega))$ и принимают положительные значения (почти всюду)* $\bullet$

Мы разобьем доказательство леммы на несколько этапов; сначала мы покажем, что $u_{ik}, \ldots$ являются функциями от t со значениями в $L^\infty(\Omega)$●.

Лемма 2.2. *Положим*

$$c_0 = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}; \tag{2.31}$$

тогда

$$\|u^{n+i/2}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v^{n+i/2}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c_0 \quad \forall n = 0, \ldots, N-1, \quad i = 1, 2, \tag{2.32}$$

и

$$u^{n+i/2},\ v^{n+i/2} \geqslant 0 \ \textit{почти всюду} \ \forall n \quad \textit{и} \quad i = 1, 2. \tag{2.33}$$

Доказательство. Свойство (2.33) следует из формул (2.24), (2.26). Чтобы упростить запись, положим

$$\lambda^{n+i/2} = \left\|u^{n+i/2}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \mu^{n+i/2} = \left\|v^{n+i/2}\right\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.34}$$

В силу формул (2.26)

$$\lambda^{n+1} \leqslant \lambda^{n+1/2}, \qquad \mu^{n+1} \leqslant \mu^{n+1/2}, \tag{2.35}$$

и, таким образом, оценка (2.32) будет установлена, если мы покажем, что

$$\lambda^{n+1/2} + \mu^{n+1/2} \leqslant \lambda^n + \mu^n. \tag{2.36}$$

Для этого заметим, что поскольку $\lambda^n + \mu^n \geqslant \sigma^n$, а функция

$$\sigma \to \frac{a + k\sigma^2}{1 + 2k\sigma}$$

возрастает, по крайней мере при $\sigma \leqslant a$, то (в силу (2.24))

$$\begin{aligned} u^{n+1/2}(x) &\leqslant \frac{u^n(x) + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)} \quad \text{почти всюду,} \\ v^{n+1/2}(x) &\leqslant \frac{v^n(x) + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)} \quad \text{почти всюду,} \end{aligned} \tag{2.37}$$

откуда следуют неравенства

$$\lambda^{n+1/2} \leqslant \frac{\lambda^n + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)},$$

$$\mu^{n+1/2} \leqslant \frac{\mu^n + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)}.$$

Складывая эти неравенства, мы получим (2.36)●

Из леммы 2.2 также следует, что u_{ik}, v_{ik} $(i = 1, 2)$, $\tilde{u}_k$ и $\tilde{v}_k$ ограничены в $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Итак, нам остается показать, что совокупность этих функций ограничена в $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$●

Будет доказана

Лемма 2.3. *Если $k < 4c_0$, то существует такая константа c_1, что*[1])

$$\left|\frac{\partial u^{n+i/2}}{\partial x_j}\right|, \quad \left|\frac{\partial v^{n+i/2}}{\partial x_j}\right| \leqslant c_1, \quad i, j = 1, 2, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1. \qquad (2.38)$$

Замечание 2.2. Ясно, что неравенства (2.38) приводят нас к требуемому результату, и их доказательством заканчивается доказательство леммы 2.1 ●

Доказательство леммы 2.3. 1) Покажем сначала, что

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right| \leqslant \left|\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_2}\right|, \qquad (2.39)$$

$$\left|\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_1}\right| \leqslant \left|\frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x_1}\right|. \qquad (2.40)$$

Из первого уравнения (2.23) после дифференцирования по x_2[2]) получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} - \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right) = 0, \\ &\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}(a_1, x_2) = 0. \end{aligned} \qquad (2.41)$$

Это дифференцирование будет оправдано, если, скажем, $\frac{\partial}{\partial x_2} u^{n+1/2} \in L^2(\Omega)$. Тогда, умножая скалярно это уравнение в $L^2(\Omega)$ на $\partial u^{n+1}/\partial x_2$ и пользуясь тем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right), \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right) \geqslant 0,$$

$$\left|\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_2}\,\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right| \leqslant \left|\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_2}\right| \left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right|,$$

мы получим (2.39). Аналогичным образом мы установим (2.40), дифференцируя по x_1 второе уравнение (2.23).

2) Временно предположим, что уже доказаны неравенства

$$\begin{aligned} &|D_i u^{n+1/2}|^2 + |D_i v^{n+1/2}|^2 \leqslant \xi\,(|D_i u^n|^2 + |D_i v^n|^2), \\ &\xi = \frac{1}{(1-4kc_0)^2}, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \qquad (2.42)$$

и

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2}\right|^2 \leqslant kc_2 + \left(\left|\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x_2}\right|^2\right). \qquad (2.43)$$

---

[1]) Через | | обозначается норма в $L^2(\Omega)$.

[2]) Сначала формального.

Покажем, что из них следует лемма. Положим

$$\beta_{n+i/2} = |D_1u^{n+i/2}|^2 + |D_2u^{n+i/2}| + |D_1v^{n+i/2}|^2 + |D_2v^{n+i/2}|^2, \quad i = 1,\ 2. \tag{2.44}$$

Из неравенств (2.39), (2.40), (2.43) следует, что

$$\beta_{n+1} \leqslant kc_2 + \beta_{n+1/2}, \tag{2.45}$$

а из (2.42) получим (складывая неравенства для $i = 1,\ 2$)

$$\beta_{n+1/2} \leqslant \xi\beta_n. \tag{2.46}$$

Следовательно,

$$\beta_{n+1} \leqslant kc_2 + \xi\beta_n,$$

откуда

$$\beta_{n+1} \leqslant \frac{c_2(1-4kc_0)^2}{8c_0(1-2kc_0)}(\xi^{n+1} - 1) + \xi^{n+1}\beta_0 \leqslant \mathrm{const}.$$

Далее, воспользовавшись (2.46), мы окончательно получим, что β_n, $\beta_{n+1/2} \leqslant \mathrm{const}$, так что для доказательства леммы осталось установить неравенства (2.42) и (2.43).

3) *Проверка* (2.42). Из (2.22) следует, что

$$D_iu^{n+1/2} = D_iu^n - 2ku^{n+1/2}D_iu^{n+1/2} + 2kv^{n+1/2}D_iv^{n+1/2},$$

откуда

$$|D_iu^{n+1/2}| \leqslant |D_iu^n| + 2kc_0(|D_iu^{n+1/2}| + |D_iv^{n+1/2}|) \tag{2.47}$$

и аналогично

$$|D_iv^{n+1/2}| \leqslant |D_iv^n| + 2kc_0(|D_iu^{n+1/2}| + |D_iv^{n+1/2}|). \tag{2.48}$$

Для упрощения записи временно положим

$$|D_iu^{n+1/2}| = x, \quad |D_iv^{n+1/2}| = y, \quad |D_iu^n| = a, \quad |D_iv^n| = b, \quad 2kc_0 = \gamma.$$

Тогда неравенства (2.47), (2.48) примут вид

$$x \leqslant a + \gamma(x + y), \quad y \leqslant b + \gamma(x + y),$$

а после сложения

$$(1 - 2\gamma)(x + y) \leqslant a + b,$$

откуда

$$x \leqslant a + \gamma\frac{a+b}{1-2\gamma}, \quad y \leqslant b + \gamma\frac{a+b}{1-2\gamma}$$

и, следовательно,

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2 + \frac{2\gamma}{1-2\gamma}(a+b)^2 + \frac{2\gamma^2}{(1-2\gamma)^2}(a+b)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + \frac{2\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma)^2}(a+b)^2 \leqslant a^2 + b^2 + \frac{4\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma)^2}(a^2 + b^2) =$$

$$= \frac{1}{(1-2\gamma)^2}(a^2 + b^2),$$

откуда вытекает (2.42).

4) *Проверка* (2.43). Продифференцируем (сначала формально) первое уравнение (2.23) по x_1; получим

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}-\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_1}+k\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right)=0, \tag{2.49}$$

и из уравнения (2.23) следует, что

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}(a_1, x_2)=\frac{1}{k}u^{n+1/2}(a_1, x_2). \tag{2.50}$$

Взяв скалярное произведение (2.49) и $\partial u^{n+1}/\partial x_1$; получим

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2-\left(\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right)\leqslant\frac{k}{2}\int_{a_2}^{b_2}\left[\frac{\partial u^n}{\partial x_1}(a_1, x_2)\right]^2 dx_2,$$

откуда в силу (2.50)

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2\leqslant\left|\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|+\frac{1}{2k}\int_{a_2}^{b_2}|u^{n+1/2}(a_1, x_2)|^2 dx_2,$$

и потому

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2\leqslant\left|\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_1}\right|+\frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2}|u^{n+1/2}(a_1, x_2)|^2 dx_2. \tag{2.51}$$

Однако в силу (2.24)

$$u^{n+1/2}(a_1, x_2)=\frac{k(v^n(a_1, x_2))^2}{1+2kv^n(a_1, x_2)}\leqslant kc_0^2$$

(в силу леммы 2.2)

и, следовательно,

$$\frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2}|u^{n+1/2}(a_1, x_2)|^2 dx_2\leqslant k(b_2-a_2)c_0^4,$$

так что (2.51) приводит к неравенству

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2\leqslant\left|\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x_1}\right|^2+k(b_2-a_2)c_0^4. \tag{2.52}$$

Исходя из второго уравнения (2.23) (которое следует дифференцировать по x_2) мы выведем неравенство, аналогичное (2.52), в котором вместо u и x_1 фигурируют v и x_2; отсюда будет следовать (2.43) ●

2.5. Предельный переход. Доказательство теоремы существования

Согласно лемме 2.1, можно выделить подпоследовательности, опять обозначаемые через u_{lk}, v_{lk}, $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$, таким образом, чтобы

$$\begin{gathered}u_{lk}\to u_l, \quad v_{lk}\to v_l, \quad \tilde{u}_k\to\tilde{u}, \quad \tilde{v}_k\to\tilde{v}\\ \text{в } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)) \quad *\text{-слабо}.\end{gathered} \tag{2.53}$$

Сходимости такого типа *недостаточно* для перехода к пределу в нелинейных членах, однако *для* $\tilde{u}_k$ *и* $\tilde{v}_k$ *имеет место дополнительная оценка.*

Лемма 2.4. *При* $k \to 0$

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t}, \ \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} \ \textit{ограничены в } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)). \qquad (2.54)$$

Доказательство. Складывая соответствующие равенства из (2.22), (2.23), получим

$$u^{n+1} - u^n + k\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + k\left[(u^{n+1/2})^2 - (v^{n+1/2})^2\right] = 0, \qquad (2.55)$$

что эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial u_{2k}}{\partial x_2} + (u_{1k})^2 - (v_{1k})^2 = 0. \qquad (2.56)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \frac{\partial v_{2k}}{\partial t} + (v_{1k})^2 - (u_{1k})^2 = 0. \qquad (2.57)$$

Отсюда в силу леммы 2.1 следует (2.54)●

Теперь, благодаря оценкам для $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$ и компактности вложения $H^1(Q) \to L^2(Q)$, мы можем считать, что

$$\tilde{u}_k \to \tilde{u}, \quad \tilde{v}_k \to \tilde{v} \ \text{сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду}. \qquad (2.58)$$

Однако, согласно определению функций $\tilde{u}_k$ и u_{2k}, имеем

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant \sup_{0 \leqslant n \leqslant N-1} |u^{n+1} - u^n|,$$

и, учитывая (2.55) и лемму 2.1, мы получаем

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant kc_3. \qquad (2.59)$$

Таким же образом

$$\|\tilde{v}_k - v_{2k}\|_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant kc_3. \qquad (2.60)$$

Следовательно, ввиду этих оценок и (2.58) мы можем заключить, что

$$u_{2k} \to \tilde{u}, \quad v_{2k} \to \tilde{v} \ \text{сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду}. \qquad (2.61)$$

Однако первое равенство (2.23) записывается в виде

$$u_{2k} - u_{1k} + k\frac{\partial u_{2k}}{\partial x_1} = 0,$$

откуда, ввиду леммы 2.1,

$$\|u_{2k} - u_{1k}\|_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant kc_4, \qquad (2.62)$$

и аналогично

$$\| v_{2k} - v_{1k} \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant kc_4. \qquad (2.63)$$

Следовательно, ввиду (2.61) мы можем считать, что

$$u_{1k} \to \tilde{u}, \quad v_{1k} \to \tilde{v} \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду.} \qquad (2.64)$$

Тогда (в обозначениях (2.53))

$$u_i = \tilde{u} \ (= u), \quad v_i = \tilde{v} \ (= v),$$

и мы получаем, что

$$(u_{1k})^2 \to u^2 \text{ в } L^2(Q) \text{ слабо,}$$

и аналогично $(v_{1k})^2 \to v^2$. Таким образом, можно перейти к пределу в уравнениях (2.56), (2.57); мы увидим, что u и v удовлетворяют системе (2.1).

Поскольку ввиду леммы 2.4 мы можем также считать, что

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} \to \frac{\partial v}{\partial t} \text{ в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \ *\text{-слабо,}$$

то имеем

$$\tilde{u}_k(0) \to u(0), \quad \tilde{v}_k(0) \to v(0) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ слабо,}$$

и, следовательно,

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 \bullet$$

Замечание 2.3. Аналогичные задачи можно решать в пространстве произвольной размерности, см. Темам [4] ●

Замечание 2.4. Изложенный метод является конструктивным (поскольку в силу единственности на самом деле имеет место сходимость, и нет нужды выбирать подпоследовательность) ●

Замечание 2.5. Используя один метод расщепления, подобный изложенному выше, и гильбертовы пространства операторов, Темам [8] решил уравнения в частных производных, возникающие в теории оптимального управления (см. § 9) ●

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПОСРЕДСТВОМ СРЕЗКИ

3.1. Постановка задачи. Формулировка результата

До сих пор в стационарном случае мы изучали (в частности, см. § 2 гл. 2) нелинейные *коэрцитивные* операторы, отображающие V в V', Теперь на простом примере[1] мы рассмотрим случай нелинейного оператора, который не отображает коэрцитивио $V \to V'$ ●

Замечание 3.1. В случае эволюционных уравнений

$$\Lambda u + \mathcal{A}(u) = f$$

нам удалось рассмотреть ситуации, когда $\mathcal{A}$ не отображает коэрцитивно $\mathcal{V}$ в $\mathcal{V}'$, используя одновременно Λ и $\mathcal{A}$ (см. п. 1.4 гл. 3) ●

Пример. Возьмем

$$V = W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 < p < \infty), \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

и оператор A_0, такой, что

A_0: $V \to V'$ — ограниченный семинепрерывный оператор, обладающий свойством (M) (см. замечание 2.1 гл. 2). (3.2)

Далее рассмотрим оператор B, где

$$B(u) = u \frac{\partial u}{\partial x_1}, \tag{3.3}$$

и пусть

$$A(u) = A_0(u) + B(u). \tag{3.4}$$

Предположим, что

$$p < \frac{3n}{n+2}; \tag{3.5}$$

тогда оператор B не отображает V в V'; действительно, если $v \in V$, то $v \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (это *оптимальный* результат) и, следовательно, $u\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) v \in L^1(\Omega)$ $\forall u$, v только тогда, когда $\frac{2}{q} + \frac{1}{p} \leqslant 1$, т. е. $p \geqslant \frac{3n}{n+2}$.

Если мы определим

$$W = V \cap L^s(\Omega), \qquad \frac{1}{s} \leqslant \frac{n+1}{n} - \frac{2}{p}, \tag{3.6}$$

то

$$B(u) \in W' \quad \forall u \in V. \tag{3.7}$$

Действительно, если $\varphi \in L^s(\Omega)$, то $u\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\varphi \in L^1(\Omega)$, когда $\frac{1}{s} \leqslant \frac{n+1}{n} - \frac{2}{p}$, так что

$$B(u) \in (L^s(\Omega))' \subset W'.$$

---

[1] Можно построить, следуя тем же принципам, очень большое число примеров.

Таким образом,

$$A \text{ отображает } V \text{ в } W' (\supset V'). \tag{3.8}$$

Тем не менее будет доказана

Теорема 3.1. *Пусть оператор A имеет вид* (3.4), *причем имеют место* (3.2) *и* (3.3), *и пусть также выполнено условие* (3.5). *Предположим, что A_0 коэрцитивно отображает V в V'. При этих условиях для $f \in V'$ существует такое $u \in V$, что*

$$A(u) = f. \tag{3.9}$$

Замечание 3.2. Из (3.9) *следует*, что

$$B(u) = f - A_0(u) \in V' \bullet \tag{3.10}$$

3.2. Метод срезки

Основным моментом в доказательстве (которое приведено в п. 3.3) является

Лемма 3.1. *Пусть $u \in V$ и при этом $B(u) \in V'$. Тогда*

$$(B(u), u) = 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. 1) Укажем сначала, в чем состоит трудность. Ясно, что если, скажем, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то

$$(B(\varphi), \varphi) = \int_\Omega \varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) \varphi \, dx = 0.$$

Однако если $\varphi \to u$ в V, то нет никаких оснований для того, чтобы

$$(B(\varphi), \varphi) \to (B(u), u),$$

поскольку B не отображает $V \to V'$ и функции $B(\varphi)$ не обязаны стремиться к $B(u)$ в V'.

2) Таким образом, речь идет о том, чтобы найти *специальную аппроксимацию для u*; для этого мы используем *метод срезки*. Для заданного $M > 0$ положим $(\forall v \in V)$

$$v_M = \begin{cases} v(x), & \text{если } |v(x)| \leqslant M, \\ M, & \text{если } v(x) \geqslant M, \\ -M, & \text{если } v(x) \leqslant -M. \end{cases} \tag{3.12}$$

При $M \to \infty$

$$u_M \to u \text{ в } V \tag{3.13}$$

и, следовательно,

$$(B(u), u) = \lim_{M \to \infty} (B(u), u_M). \tag{3.14}$$

Однако аппроксимация посредством u_M является специальной в том смысле, что

$$(B(u),\ u_M)=0 \quad \forall M \tag{3.15}$$

(отсюда и из (3.14) следует нужный нам результат).

3) *Доказательство* (3.15). При *фиксированном* M функционал $u\to(B(u),\ u_M)$ уже будет *непрерывным* на V (так как $u_M\in L^\infty(\Omega)$, то тем более $u_M\in L^s(\Omega)$) и, следовательно, достаточно показать, что

$$(B(\varphi),\ \varphi_M)=0 \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{3.16}$$

Однако

$$(B(\varphi),\ \varphi_M)=\int_\Omega \varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\varphi_M\,dx=-\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2\frac{\partial\varphi_M}{\partial x_1}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi_M^2\frac{\partial\varphi_M}{\partial x_1}\,dx=0.$$

3.3. Доказательство теоремы 3.1

1) Строим «приближенные решения» u_m с помощью метода Галёркина: берем «базис» $w_1,\ \ldots,\ w_m,\ \ldots$ из $V\cap L^s(\Omega)$ и определяем $u_m\in[w_1,\ \ldots,\ w_m]$ посредством равенств

$$(A_0(u_m)+B(u_m)-f,\ w_j)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant m. \tag{3.17}$$

Замечаем, что поскольку $w_j\in V\cap L^s(\Omega)$ $\forall j$, то

$$(B(u_m),\ u_m)=0, \tag{3.18}$$

и существование решения u_m системы (3.17) следует из леммы 4.3 гл. 1.

Из (3.17), (3.18) следует, что

$$(A_0(u_m),\ u_m)=(f,\ u_m), \tag{3.19}$$

поэтому

$$u_m \text{ ограничены в } V. \tag{3.20}$$

2) Таким образом можно выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu\to u \text{ в } V \text{ слабо}, \tag{3.21}$$
$$u_\mu\to u \text{ в } L^p(\Omega) \textit{ сильно}, \tag{3.22}$$
$$A_0(u_\mu)\to\chi \text{ в } V' \text{ слабо}, \tag{3.23}$$
$$B(u_\mu)\to\eta \text{ в } W' \text{ слабо}. \tag{3.24}$$

Однако благодаря (3.22) $\eta=B(u)$, и из (3.17) можно вывести (полагая $m=\mu$), что

$$\chi+B(u)=f, \tag{3.25}$$

откуда следует, что $B(u) \in V'$, и тем самым выполнено (3.11), а тогда $(f, u) = (\chi, u)$. Далее, из (3.19) следует, что

$$\lim (A_0(u_\mu), u_\mu) = (\chi, u),$$

откуда ввиду свойства (M) (см. замечание 2.1 гл. 2) вытекает, что $\chi = A_0(u)$, и, следовательно, ввиду (3.25) u является решением уравнения (3.9) ●

3.4. Пример одного неравенства

Мы рассмотрим ту же ситуацию, что и выше, только пусть

$$A\colon V \to V' \text{ — псевдомонотонный оператор.} \tag{3.26}$$

Далее зададимся таким множеством K, что

$$K \text{ выпукло и замкнуто в } V \text{ и } 0 \in K. \tag{3.27}$$

Будем дополнительно предполагать, что

$$v \to v_M \text{ является отображением } K \text{ в себя } \forall M$$
$$(v_M \text{ определено в (3.12)}). \tag{3.28}$$

Будет доказана

Теорема 3.2. *Допустим, что выполнены предположения теоремы* 3.1 [1]) *и, кроме того, имеет место* (3.26). *Пусть задано множество* K, *удовлетворяющее* (3.27), (3.28). *Пусть задано* f *из* V'. *Тогда существует такое* $u \in K$, *что*

$$(A_0(u), v-u) + (B(u), v) \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in K \cap W. \tag{3.29}$$

Замечание 3.3. Множество $K \cap W$ плотно в K; действительно, если $v \in K$, то $v_M \in K \cap W$ и $v_M \to v$ в V при $M \to \infty$ ●

Замечание 3.4. Нам неизвестно, имеет ли место включение $B(u) \in V'$, так что выражение $(B(u), u)$ a priori не имеет смысла ●

Доказательство. 1) С помощью метода штрафа мы сначала сведем наше утверждение к теореме 3.1: если β — оператор штрафа, связанный с K (см. п. 5.2 гл. 3), то применим теорему 3.1 к оператору $A_0 + \frac{1}{\varepsilon}\beta$ вместо A_0; тогда мы увидим, что существует такое $u_\varepsilon \in V$, что

$$A_0(u_\varepsilon) + B(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f. \tag{3.30}$$

---

[1]) Предположение о коэрцитивности состоит в том, что $\frac{(A(v), v)}{\|v\|} \to +\infty$ при $\|v\| \to \infty$.

Из (3.30) следует, что $B(u_\varepsilon) \in V'$ и, следовательно, в силу леммы 3.1

$$(B(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) = 0, \tag{3.31}$$

что вместе с (3.30) приводит к равенству

$$(A_0(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) = (f,\ u_\varepsilon). \tag{3.32}$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } V, \tag{3.33}$$

$$(\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon. \tag{3.34}$$

Далее можно так выделить подпоследовательность, опять обозначаемую через u_ε, что (как при доказательстве теоремы 3.1)

$$\begin{array}{lll} u_\varepsilon \to u & \text{в } V & \text{слабо,} \\ A_0(u_\varepsilon) \to \chi & \text{в } V' & \text{слабо,} \\ B(u_\varepsilon) \to B(u) & \text{в } W' & \text{слабо,} \\ \beta(u_\varepsilon) \to \chi_1 & \text{в } V' & \text{слабо.} \end{array} \tag{3.35}$$

Однако из (3.30) вытекает, что

$$\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon(f - A_0(u_\varepsilon) - B(u_\varepsilon)),$$

и, следовательно, ввиду (3.35) $\beta(u_\varepsilon) \to 0$ в W' слабо, откуда

$$\chi_1 = 0; \tag{3.36}$$

последнее вместе с (3.34) показывает, что $\beta(u)=0$, поэтому $u \in K$.

2) Из (3.30) выводится (как в п. 5.3 гл. 3), что

$$(A_0(u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon) + (B(u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon) - (f,\ v - u_\varepsilon) \geqslant 0 \quad \forall v \in K,$$

и опять в силу (3.31)

$$(A_0(u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon) + (B(u_\varepsilon),\ v) - (f,\ v - u_\varepsilon) \geqslant 0 \quad \forall v \in K. \tag{3.37}$$

Отсюда получается, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0}(A_0(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon) \leqslant (\chi,\ v) + (B(u),\ v) - (f,\ v - u) \quad \forall v \in K \cap W,$$

поэтому

$$\limsup_{\varepsilon \to 0}(A_0(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) \leqslant (\chi,\ v - u) + (B(u),\ v) - (f,\ v - u) \quad \forall v \in K \cap W. \tag{3.38}$$

Благодаря (3.28) мы можем подставить $v = u_M$ в (3.38); в силу (3.15) мы получим, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0}(A_0(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u) \leqslant (\chi - f,\ u_M - u) \to 0 \quad \text{при} \quad M \to \infty,$$

следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}(A_0(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - u)\leqslant 0. \tag{3.39}$$

Однако ввиду псевдомонотонности из (3.39) вытекает, что

$$\liminf (A_0(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon - v)\geqslant (A_0(u),\ u - v) \quad \forall v\in K$$

и, следовательно, это неравенство выполнено для всех $v\in K\cap W$, откуда благодаря (3.37)

$$(B(u),\ v) - (f,\ v-u)\geqslant (A_0(u),\ u-v) \quad \forall v\in K\cap W;$$

поэтому u удовлетворяет (3.29) ●

Замечание 3.5. Можно при некоторых предположениях доказать, что $B(u)\in V'$, и тогда записать (3.29) в «симметричной» форме

$$(A_0(u)+B(u),\ v-u)\geqslant (f,\ v-u) \quad \forall v\in K. \tag{3.40}$$

Например, если мы предположим, что

$$\begin{aligned} &A_0(u) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\\ &K=\{v\,|v\geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\},\\ &f\in L^{p'}(\Omega), \end{aligned} \tag{3.41}$$

то

$$A_0(u)+B(u)\in L^{p'}(\Omega), \tag{3.42}$$

откуда следует, что $B(u)\in V'$.

Действительно, в качестве уравнения со штрафом возьмем

$$A_0(u_\varepsilon)+B(u_\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon^-|^{p-2}u_\varepsilon = f. \tag{3.43}$$

Умножим это уравнение скалярно на $-u_\varepsilon^-$. Заметим, что

$$(A_0(u_\varepsilon),\ -u_\varepsilon^-)\geqslant 0,$$

$$(B(u_\varepsilon),\ -u_\varepsilon^-) = -\int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}u_\varepsilon u_\varepsilon^-\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon^-}{\partial x_1}(u_\varepsilon^-)^2\,dx = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\varepsilon}\|u_\varepsilon^-\|^p_{L^p(\Omega)}\leqslant \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u_\varepsilon^-\|_{L^p(\Omega)},$$

следовательно,

$$\|u_\varepsilon^-\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\leqslant C\varepsilon$$

и

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\| |u_\varepsilon^-|^{p-2} u_\varepsilon^- \right\|_{L^{p'}(\Omega)} = \frac{1}{\varepsilon}\| u_\varepsilon^- \|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \leqslant C.$$

Тогда (3.42) следует из (3.43)[1] ●

Замечание 3.6. Приведенный выше метод срезки можно приспособить к эволюционным задачам, связанным с рассмотренными здесь стационарными задачами ●

4. АППРОКСИМАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ ТИПА КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ[2]

4.1. Общие указания

Мы уже встречались с несколькими примерами нелинейных систем, которые не являлись системами Коши — Ковалевской; это были, в частности:

уравнения Навье — Стокса (§ 6 гл. 1) и их варианты, изученные в § 4 гл. 2;

уравнения на многообразиях, изученные в § 11 гл. 1 и в § 5 гл. 2.

На этих примерах мы теперь покажем, каким образом соответствующие задачи можно аппроксимировать «близкими», которые уже являются задачами *типа Коши — Ковалевской* ●

Замечание 4.1. Методы подобного типа годятся и для уравнений магнитной гидродинамики ●

Замечание 4.2. Можно применить ту же самую технику к *вариационным неравенствам*, не являющимся «типа Коши — Ковалевской», но мы не будем здесь касаться этих вопросов ●

4.2. Уравнения Навье — Стокса

Будем пользоваться обозначениями § 6 гл. 1.

Ищутся u и p, являющиеся решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\,\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p, \qquad (4.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (4.2)$$

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \qquad (4.3)$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x), \quad u_0 \text{ принадлежит } H. \qquad (4.4)$$

---

[1] Здесь используются методы п. 5.5 гл. 3.

[2] См. примечание редактора на стр. 58. — *Прим. ред.*

Эта система не содержит производную $\partial p/\partial t$, так что она не является системой типа Коши — Ковалевской.

Естественный способ «приближения» написанной выше системы посредством системы Коши — Ковалевской состоит в том, чтобы заменить (4.2) уравнением вида

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} u = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.5}$$

Но нам неизвестно, будет ли задача (4.1), (4.5), (4.3), (4.4) корректной, даже при $n=2$. Таким образом, мы приходим к тому, что (4.1) надо также подправлять, *добавляя члены, которые будут равны нулю, когда* $\operatorname{div} u = 0$.

Итак, мы приходим к следующей задаче[1]:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} u_{\varepsilon i} D_i u_\varepsilon + \frac{1}{2} (\operatorname{div} u_\varepsilon) u_\varepsilon + \operatorname{grad} p_\varepsilon = f, \tag{4.6}$$

$$\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \tag{4.7}$$

$$u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{4.8}$$

$$u_\varepsilon(0) = u_0 \text{ на } \Omega, \tag{4.9}$$

$$p_\varepsilon(0) = p_0, \quad p_0 \text{ произвольно выбирается из } L^2(\Omega). \tag{4.10}$$

Система (4.6) — (4.10) является системой типа Коши — Ковалевской. Мы докажем следующие теоремы:

Теорема 4.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$, *удовлетворяющие включениям*

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^n), \tag{4.11}$$

$$p_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{4.12}$$

и уравнениям (4.6) — (4.10)[2].

В случае $n=2$ *решение* $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ *определяется единственным образом*[3].

Теорема 4.2. *Предположим, что* $n \leqslant 4$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *можно так выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через* $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$, *что*

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \to u \text{ в } L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^n) \text{ слабо, а в} \\ &L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^n) \quad *\text{-слабо,} \end{aligned} \tag{4.13}$$

---

[1] $u_\varepsilon = \{u_{\varepsilon 1}, \ldots, u_{\varepsilon n}\}$.

[2] Из включений (4.11), (4.12) и уравнений (4.6), (4.7) следует, что условия (4.9) и (4.10) имеют смысл.

[3] Вопрос о единственности при $n \geqslant 3$ является открытым.

Здесь u является решением системы Навье—Стокса (4.1)—(4.4), *а* $p_\varepsilon \to p$ *в* $\mathscr{D}'(Q)/\mathbb{R}$ (*факторпространстве* $\mathscr{D}'(Q)$ *по* $\mathbb{R}$).

В случае $n=2$ выделять подпоследовательность не нужно.

Доказательство теоремы 4.1. Техника доказательства такая же, как в § 6 гл. 1. Поэтому мы остановимся только на наиболее существенных моментах.

1) Введем пространство

$$W = \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \times L^2(\Omega), \tag{4.14}$$

«общие точки» которого будем обозначать через $\{u, p\}$, $\{v, q\}$, ... Напомним, что

$$\forall u,\ v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \quad w \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \cap \left(L^n(\Omega)\right)^n$$ [1]

мы полагаем

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i (D_i v_j)\, w_j\, dx. \tag{4.15}$$

Кроме того, рассмотрим

$$b_1(u, v, w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i (\operatorname{div} v)\, w_i\, dx, \tag{4.16}$$

$$\hat{b}(u, v, w) = b(u, v, w) + b_1(u, v, w). \tag{4.17}$$

Задачу (4.6) — (4.10) мы теперь сформулируем следующим образом (ср. с задачей 6.2 гл. 1): ищутся $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$, удовлетворяющие (4.11), (4.12) и такие, что[2]

$$\left.\begin{array}{r} (u_\varepsilon', v) + \nu a(u_\varepsilon, v) + \hat{b}(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) - (p_\varepsilon, \operatorname{div} v) = (f, v) \\ \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \cap \left(L^n(\Omega)\right)^n, \end{array}\right. \tag{4.18}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(p_\varepsilon', q) + (\operatorname{div} u_\varepsilon, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \quad p_\varepsilon(0) = p_0. \end{array}\right. \tag{4.19}$$

2) Далее, таким же образом, как в п. 6.4 гл. 1, доказывается существование $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$, удовлетворяющих написанным выше уравнениям.

Прежде всего заметим, что $\forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \cap \left(L^n(\Omega)\right)^n$ мы имеем

$$\hat{b}(v, v, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(v_j^2)\, dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i^2 (\operatorname{div} v)\, dx = 0,$$

---

[1] См. лемму 6.1 гл. 1.

[2] Через (φ, ψ) мы обозначаем скалярное произведение в $(L^2(\Omega))^n$ и $|\varphi| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$.

поскольку (очевидно!)

$$-(q, \operatorname{div} v)+(\operatorname{div} v, q)=0 \quad \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, \quad q \in L^2(\Omega).$$

Тогда из (4.18), (4.19) *формально* будет следовать, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(|u_\varepsilon(t)|^2+\varepsilon|p_\varepsilon(t)|^2\right)+\nu a\left(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\right)=\left(f(t), u_\varepsilon(t)\right). \tag{4.20}$$

Чтобы воспользоваться этим равенством, мы возьмем «специальный базис», образованный собственными функциями w_j задачи

$$\left(w_j, v\right)_{\left(H_0^s(\Omega)\right)^n}=\lambda_j\left(w_j, v\right) \quad \forall v \in\left(H_0^s(\Omega)\right)^n, \tag{4.21}$$

где s выбирается таким же образом, как в условии (6.43) гл. 1 ($s=n/2$).

Далее будем применять метод Фаэдо — Галёркина; благодаря специальному выбору базиса мы получим оценки, аналогичные (4.20), для приближенных решений $\{u_{\varepsilon m}, p_{\varepsilon m}\}$ и оценку для u_ε'.

Далее перейдем к пределу, используя компактность, как в п. 6.4 гл. 1.

3) *Единственность* (при $n=2$) устанавливается таким же образом, как в п. 6.2 гл. 1 ●

Доказательство теоремы 4.2. 1) Из равенства, аналогичного (4.20), для приближенных решений $\{u_{\varepsilon m}, p_{\varepsilon m}\}$ мы выведем, что при $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } L^2\left(0, T ;\left(H_0^1(\Omega)\right)^n\right) \cap L^\infty\left(0, T ;\left(L^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{4.22}$$

$$\sqrt{\varepsilon} p_\varepsilon \text{ ограничены в } L^\infty\left(0, T ; L^2(\Omega)\right). \tag{4.23}$$

2) Теперь мы собираемся получить оценки для производных дробного порядка по t от u_ε (методом п. 6.5 гл. 1). Положим

$$\nu a\left(u_\varepsilon, v\right)+\hat{b}\left(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v\right)=\left(g_\varepsilon(t), v\right), \tag{4.24}$$

где

$$g_\varepsilon \in\left(\left(H_0^1(\Omega)\right)^n\right)'=\left(H^{-1}(\Omega)\right)^n,$$

причем

$$\left\|g_\varepsilon(t)\right\|_{\left(H^{-1}(\Omega)\right)^n} \leqslant c_1\left(\left\|u_\varepsilon(t)\right\|^2+\left\|u_\varepsilon(t)\right\|\right), \tag{4.25}$$

где $\|\ \|$ — норма в $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$.

В самом деле, последнее следует из того, что при $n \leqslant 4$ форма $u, v, w \to \hat{b}(u, v, w)$ непрерывна на $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$.

Продолжая u_ε, p_ε нулем вне $[0, T]$, а далее применяя преобразование Фурье по t, мы выведем из (4.18), (4.19), (4.24), что

$$\begin{aligned} & i\tau(\hat u_\varepsilon(\tau), v) + i\tau\varepsilon(\hat p_\varepsilon(\tau), q) - (\hat p_\varepsilon(\tau), \operatorname{div} v) + \\ & + (\operatorname{div} \hat u_\varepsilon(\tau), q) = (\hat f, v) - (\hat g_\varepsilon, v) + (u_0, v) - \\ & - (u_\varepsilon(T), v)\, e^{-2\pi i\tau T} + \varepsilon(p_0, q) - \varepsilon(p_\varepsilon(T), q)\, e^{-2\pi i\tau T}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Подставляя в (4.26) $v = \hat u_\varepsilon(\tau)$, $q = \hat p_\varepsilon(T)$ 1), получим

$$\begin{aligned} & i\tau\,|\hat u_\varepsilon(\tau)|^2 + i\tau\varepsilon\,|\hat p_\varepsilon(\tau)|^2 = (\hat f - \hat g_\varepsilon, \hat u_\varepsilon(\tau)) + \\ & + (u_0, \hat u_\varepsilon(\tau)) - (u_\varepsilon(T), \hat u_\varepsilon(\tau))\, e^{-2\pi i\tau T} + \varepsilon(p_0, \hat p_\varepsilon(T)) - \\ & - \varepsilon(p_\varepsilon(T), \hat p_\varepsilon(T))\, e^{-2\pi i\tau T}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & |\tau|\,|\hat u_\varepsilon(\tau)|^2 + |\tau|\,\varepsilon\,|\hat p_\varepsilon(\tau)|^2 \leqslant \\ & \leqslant \left[\|\hat f(\tau)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} + \|\hat g_\varepsilon(\tau)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}\right] \|\hat u_\varepsilon(\tau)\| + \\ & + c_1\,|\hat u_\varepsilon(\tau)| + c_1\varepsilon\,|\hat p_\varepsilon(\tau)|. \end{aligned} \tag{4.27}$$

В силу (4.25) и (4.22)

$$\int_0^T \|g_\varepsilon(t)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}\, dt \leqslant c_2.$$

Следовательно,

$$\|\hat g_\varepsilon(\tau)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leqslant c_2.$$

Выбирая такое σ, что $2\sigma > 1$, мы из (4.27) получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |\tau|^\sigma} \left[|\tau|\,|\hat u_\varepsilon(\tau)|^2 + |\tau|\,|\varepsilon|\,|\hat p_\varepsilon(\tau)|^2\right] d\tau \leqslant \\ & \leqslant c_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat u_\varepsilon(\tau)\|}{1 + |\tau|^\sigma}\, d\tau + c_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat f(\tau)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \|\hat u_\varepsilon(\tau)\|\, d\tau}{1 + |\tau|^\sigma} + \\ & + c_3\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat p_\varepsilon(\tau)|\, \frac{1}{1 + |\tau|^\sigma}\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Так как функция $\tau \to \dfrac{1}{1 + |\tau|^\sigma}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ (поскольку $2\sigma > 1$), то из (4.22), (4.23) следует, что каждый интеграл в пра-

---

1) Все это можно обосновать, производя те же самые операции в конечномерном пространстве для приближений $u_{\varepsilon m}$, $p_{\varepsilon m}$ (как в п. 6.5 гл. 1).

вой части (4.28) $\leqslant c_4$; таким образом, неравенство (4.28) показывает, что (ср. (6.72) гл. 1)

$$\forall \eta > 0:\ D_t^{1/4-\eta} u_\varepsilon \text{ ограничены в } L^2(0,\ T;\ (L^2(\Omega))^n), \quad (4.29)$$

$$\forall \eta > 0:\ D_t^{1/4-\eta} p_\varepsilon \text{ ограничены в } L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega)). \quad (4.30)$$

3) *Предельный переход*. Благодаря (4.22), (4.23) можно так выделить подпоследовательность, опять обозначаемую через u_ε, что

$$\left.\begin{aligned} &u_\varepsilon \to u \text{ в } L^2(0,\ T;\ (H_0^1(\Omega))^n) \quad \text{слабо,} \\ &u_\varepsilon \to u \text{ в } L^\infty(0,\ T;\ (L^2(\Omega))^n) \quad *\text{-слабо,} \end{aligned}\right. \quad (4.31)$$

$$u_\varepsilon \to u \ \textit{сильно} \text{ в } L^2(0,\ T;\ (L^2(\Omega))^n) \text{ и почти всюду} \quad (4.32)$$

(это следует из теоремы 5.2 гл. 1).

В силу (4.23) $\varepsilon p_\varepsilon' \to 0$ в $\mathscr{D}'(Q)$ (в частности), поэтому $\operatorname{div} u_\varepsilon = -\varepsilon p_\varepsilon' \to 0$ в $\mathscr{D}'(Q)$, что вместе с (4.31) приводит к равенству

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (4.33)$$

В силу (4.31), (4.32), взяв в (4.18) такое v, у которого $\operatorname{div} v = 0$, получим

$$(u',\ v) + \nu a(u,\ v) + \hat{b}(u,\ u,\ v) = (f,\ v);$$

ввиду (4.33) $\hat{b}(u,\ u,\ v) = b(u,\ u,\ v)$, и, следовательно, u является решением задачи

$$(u',\ v) + \nu a(u,\ v) + b(u,\ u,\ v) = (f,\ v) \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

и теорема доказана ●

Замечание 4.3. Кроме замены системы (4.1) на (4.6) возможны другие модификации (уравнение (4.5) остается без изменения): вместо $\frac{1}{2}(\operatorname{div} u)\,u$ можно добавлять выражения

$$\frac{\theta}{2}(\operatorname{div} u)\,u - \frac{1-\theta}{2}\operatorname{grad}|u|^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \ ●$$

Замечание 4.4. Исходя из (4.18) можно получить оценку для вектор-функции u_ε', рассматривая последнюю как функцию со значениями в пространстве V_s' (так что надо брать $v \in V_s$, $\operatorname{div} v = 0$); однако надо учитывать, что «естественное» отображение $(H_0^1(\Omega))^n$ в V_s' не является взаимно однозначным. Мы не знаем, верен ли результат, аналогичный теореме 4.2, при $n > 4$ ●

Замечание 4.5. Естественно, что приведенный выше метод позволяет *передоказать* теорему 6.1 гл. 1 при $n \leqslant 4$, т. е. установить *существование* решения задачи Навье — Стокса ●

4.3. Уравнеиия на многообразии

Вернемся к задаче из § 4 гл. 2, сохранив имеющиеся там обозначения. Ищется функция w, являющаяся решением задачи

$$A(w)=0 \quad \text{в } Q=\Omega\times\,]0, T[, \tag{4.34}$$

где

$$A(\varphi)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right), \quad 1<p<\infty,$$

причем

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\cos(n, x_i)=f \text{ на } \Sigma, \tag{4.35}$$

$$w(x, 0)=w_0(x), \quad x\in\Gamma. \tag{4.36}$$

Мы собираемся «приблизить» эту задачу (не являющуюся задачей типа Коши — Ковалевской) следующей: ищется функция $u_\varepsilon(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (при $\varepsilon>0$)

$$\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+A(u_\varepsilon)=0 \tag{4.37}$$

и условиям

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\cos(n, x_i)=f \text{ на } \Sigma, \tag{4.38}$$

$$u_\varepsilon(x, 0)=u_0(x), \quad x\in\Omega \text{ и } x\in\Gamma. \tag{4.39}$$

Эта задача относится к типу задач Коши — Ковалевской ●

Сформулируем теперь задачу (4.37), (4.38), (4.39) более точно. Введем

$$V=W^{1,p}(\Omega),$$

$$a(u, v)=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$$

и напомним, что γ («оператор следа на Г») отображает $W^{1,p}(\Omega)$ в (и даже *на*) $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$.

Чтобы упростить изложение, мы предположим, что $p>2$ (это не играет никакой существенной роли).

Положим

$$(f, g)_\Omega = \int_\Omega f g \, dx, \qquad (\varphi, \psi)_\Gamma = \int_\Gamma \varphi\psi \, d\Gamma.$$

Мы будем искать такую функцию u_ε, что

$$u_\varepsilon \in L^p(0, T; V), \tag{4.40}$$

$$u'_\varepsilon \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), \tag{4.41}$$

$$\gamma u'_\varepsilon \in L^{p'}(0, T; W^{-1/p', p'}(\Gamma)), \tag{4.42}$$

$$\varepsilon(u'_\varepsilon, v)_\Omega + (\gamma u'_\varepsilon, \gamma v)_\Gamma + a(u_\varepsilon, v) = (f, \gamma v)_\Gamma \qquad \forall v \in V, \tag{4.43}$$

где f принадлежит $L^{p'}(0, T; W^{-1/p', p'}(\Gamma))$, и выполнены начальные условия

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_0 \text{ принадлежит } L^2(\Omega), \tag{4.44}$$

$$\gamma u_\varepsilon(0) = w_0, \quad w_0 \text{ принадлежит } L^2(\Gamma), \text{ как в (4.36)} \bullet \tag{4.45}$$

Замечание 4.6. Начальные условия u_0 и w_0 «независимы»; последнее возможно ввиду того, что ищется «слабое» решение u_ε ●

Сейчас мы докажем следующие теоремы:

Теорема 4.3. *Задача* (4.40)—(4.45) *при любом* $\varepsilon > 0$ *имеет единственное решение.*

Теорема 4.4. *При* $\varepsilon \to 0$ *имеем*

$$u_\varepsilon \to w \quad \textit{в} \quad L^p(0, T; V) \quad \textit{слабо}, \tag{4.46}$$

где w *является решением задачи* (4.34), (4.35), (4.36) [1] ●

Доказательство теоремы 4.3 является простым вариантом доказательства теоремы 1.1 или теоремы 1.2 гл. 2 (при условиях $1 < p < 2$ следует применить теорему 1.2′) ●

Доказательство теоремы 4.4. 1) Из (4.43) легко выводится, что при $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } L^p(0, T; V), \tag{4.47}$$

$$\gamma u'_\varepsilon \text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; W^{-1/p', p'}(\Gamma)), \tag{4.48}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon u'_\varepsilon &\text{ ограничены в } L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), \\ \sqrt{\varepsilon}\, u_\varepsilon &\text{ ограничены в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}\right. \tag{4.49}$$

---

[1] Мы получаем также новое доказательство существования решения в теореме 4.1 гл. 2.

2) Положим

$$\mathscr{V} = L^p(0, T; V),$$

$$(\mathscr{A}(u), v) = \int_0^T a(u(t), v(t))\, dt \qquad \forall u, \ v \in \mathscr{V},$$

где (,) обозначает скалярное произведение между $\mathscr{V}'$ и $\mathscr{V}$.

В силу (4.47), (4.48) можно выделить такую последовательность u_ε, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\to u \quad \text{в } \mathscr{V} \text{ слабо}, \\ \gamma u'_\varepsilon &\to \gamma u' \quad \text{в } L^{p'}(0, T; W^{-1/p', p'}(\Gamma)) \text{ слабо}, \\ \mathscr{A}(u_\varepsilon) &\to \chi \quad \text{в } \mathscr{V}' \text{ слабо}; \end{aligned} \tag{4.50}$$

тогда $\gamma u_\varepsilon(0) \to \gamma u(0)$ в $L^2(\Gamma)$ слабо и, следовательно,

$$\gamma u(0) = w_0. \tag{4.51}$$

Благодаря (4.50), (4.49) можно перейти к пределу в (4.43); получим

$$(\gamma u', \gamma v)_\Gamma + (\chi, v)_\Omega = (f, \gamma v)_\Gamma \qquad \forall v \in V, \tag{4.52}$$

и, следовательно, равенство $u = w$ (а с ним и теорема) будет доказано, если мы покажем, что

$$\chi = \mathscr{A}(u). \tag{4.53}$$

3) Для этого мы используем монотонность $\mathscr{A}$. Положим

$$X_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_\Gamma |u_\varepsilon(T)|^2 d\Gamma + (\mathscr{A}(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(v), u_\varepsilon - v), \qquad v \in \mathscr{V}. \tag{4.54}$$

Применяя (4.43) (для $v = u_\varepsilon$), мы увидим, что

$$X_\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |u_\varepsilon(x, T)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \int_0^T (f, \gamma u_\varepsilon)_\Gamma dt + \\ + \frac{1}{2} \int_\Gamma |w_0|^2 d\Gamma - (\mathscr{A}(u_\varepsilon), v) - (\mathscr{A}(v), u_\varepsilon - v).$$

Из (4.49) и (4.50) мы выведем, что

$$X_\varepsilon \to \int_0^T (f, \gamma u)_\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_\Gamma |w_0|^2 d\Gamma - (\chi, v) - (\mathscr{A}(v), u - v).$$

С другой стороны, так как оператор $\mathscr{A}$ монотонный, то

$$X_\varepsilon \geqslant \frac{1}{2} \int_\Gamma |u_\varepsilon(T)|^2 d\Gamma,$$

откуда

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} X_\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}\int_\Gamma |u(T)|^2\, d\Gamma,$$

и потому

$$\int_0^T (f, \gamma u)_\Gamma\, dt + \frac{1}{2}\int_\Gamma |w_0|^2\, d\Gamma - (\chi, v) - (\mathscr{A}(v), u - v) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int_\Gamma |u(T)|^2\, d\Gamma. \qquad (4.55)$$

Однако из (4.52) следует, что

$$\int_0^T (f, \gamma u)_\Gamma\, dt + \frac{1}{2}\int_\Gamma |w_0|^2\, d\Gamma - \frac{1}{2}\int_\Gamma |u(T)|^2\, d\Gamma = (\chi, u),$$

и (4.55) приводит к неравенству

$$(\chi - \mathscr{A}(v), u - v) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathscr{V},$$

из которого (4.53) получается обычным способом.

5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

5.1. Общие замечания

Метод последовательных приближений a priori может быть применен к любой нелинейной задаче. При использовании этого метода наиболее существенным моментом является *выбор нормированного функционального пространства*, в котором проводятся оценки[1]).

Мы собираемся привести два примера.

(i) В п. 5.2 мы изучим задачу Коши для нелинейного параболического уравнения в том случае, когда нет интеграла энергии (см. также § 2 гл. 1).

(ii) В п. 5.3 мы изучим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

5.2. Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - u^{1+\alpha} = 0$

Пусть задано $\alpha > 0$. Ищется функция $u(x, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - u^{1+\alpha} = 0, \qquad x \in R^n, \qquad t > 0, \qquad (5.1)$$

---

[1]) Впрочем, мы уже неоднократно по разным поводам подчеркивали, что в нелинейных задачах выбор «функциональных пространств» играет решающую роль.

и условиям

$$u(x, t) \geqslant 0, \tag{5.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad u_0 \geqslant 0 \text{ — заданная функция}, \tag{5.3}$$

$$\text{функция } u \text{ непрерывна при } x \in \mathrm{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{5.4}$$

Если функция u существует для *всех* $t \geqslant 0$, то она называется *глобальным* решением задачи (5.1)—(5.4).

Теперь будет установлена

Теорема 5.1. *Предположим, что*

$$n\alpha > 2. \tag{5.5}$$

Тогда для любого заданного $\chi > 0$ *существует такое* σ, *что если* u_0 *является непрерывной функцией, удовлетворяющей условию*

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant \sigma \exp\left(-\frac{1}{4\chi}|x|^2\right), \tag{5.6}$$

то существует глобальное решение задачи (5.1)—(5.4), *для которого выполнена оценка*[1])

$$0 \leqslant u(x, t) \leqslant C \frac{1}{(t+\chi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(t+\chi)}|x|^2\right). \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. В случае, «противоположном» к (5.5), т. е. при $n\alpha < 2$, как мы уже видели (в п. 2.4 гл. 1), *не существует* (в некотором смысле) *решения* задачи (5.1)—(5.4).

С другой стороны, если выполнено условие (5.5), то существует «много» допустимых начальных данных u_0, для которых существует глобальное решение ●

Доказательство теоремы 5.1. 1) *Сведение к интегральному уравнению.*

Рассмотрим «элементарное решение» оператора теплопроводности:

$$U(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{4t}|x-y|^2\right). \tag{5.8}$$

Положим

$$Hu_0(x, t) = \int_{\mathrm{R}^n} U(x, y, t)\, u_0(y)\, dy, \tag{5.9}$$

$$K(u)(x, t) = \int_0^t d\sigma \int_{\mathrm{R}^n} U(x, y, t-\sigma)\, u(y, \sigma)^{1+\alpha}\, dy. \tag{5.10}$$

---

[1]) Можно, кроме того, показать, что функция *u* «гладкая», см. Фужита [1].

Тогда рассматриваемая задача *эквивалентна* задаче о разыскании решения *и нелинейного интегрального уравнения*

$$u = Hu_0 + K(u). \tag{5.11}$$

Мы применим метод последовательных приближений, рекуррентно определяя

$$u_1 = Hu_0, \tag{5.12}$$

$$u_{n+1} = Hu_0 + K(u_n). \tag{5.13}$$

Основным моментом является *выбор нормы.*

2) *Выбор нормы.* Рассматриваемые функции естественно «сравнивать» с образом функции $\exp\left(-\frac{1}{4\chi}|x|^2\right)$ (которая возникает в (5.6)) при отображении H. В этой связи положим

$$\rho(x, t) = \rho = H\left(\exp\left(-\frac{1}{4\chi}|x|^2\right)\right) = U(x, 0, t+\chi). \tag{5.14}$$

Эта функция $\geqslant 0$ и непрерывна в $\mathbb{R}^n_x \times [0, +\infty[$. Далее введем норму

$$|||\varphi||| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ t \geqslant 0}} \frac{|\varphi(x, t)|}{\rho(x, t)}. \tag{5.15}$$

3) *Оценка оператора K по норме* $|||\ |||$. Имеем
существует такая константа c_1, что
$|||K(v)||| \leqslant c_1 |||v|||^{1+\alpha}$ для любой непрерывной (5.16)
функции $v \geqslant 0$, $|||v||| < \infty$.

В самом деле, согласно определенню (5.15), имеем

$$v(x, t)^{1+\alpha} \leqslant |||v|||^{1+\alpha} \rho(x, t)^{1+\alpha},$$

откуда по определению K

$$K(v) \leqslant |||v|||^{1+\alpha} K(\rho^{1+\alpha}). \tag{5.17}$$

Однако $\rho(x, s)^{1+\alpha} \leqslant c_2 \frac{1}{(s+\chi)^{n\alpha/2}} \rho(x, s)$, откуда

$$K(\rho^{1+\alpha}) \leqslant c_2 \int_0^t \frac{ds}{(s+\chi)^{n\alpha/2}} \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s)\rho(y, s)\,dy =$$

$$= c_2 \int_0^t \frac{ds}{(s+\chi)^{n\alpha/2}} \cdot \rho(x, t) \leqslant c_2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s+\chi)^{n\alpha/2}} \rho(x, t) =$$

$$= c_3\rho$$

(здесь мы воспользовались условием (5.5)).

Далее из (5.17) следует, что

$$\frac{K(v)(x, t)}{\rho(x, t)} \leqslant c_3 |\!|\!| v |\!|\!|^{1+\alpha},$$

откуда получается (5.16) (причем $c_1 \doteq c_3$).

Так как $|\!|\!| \rho |\!|\!| = 1$, то из (5.16) следует, что

$$|\!|\!| K(\rho) |\!|\!| \leqslant c_1. \tag{5.18}$$

Докажем теперь следующее утверждение:

пусть задано $M > 0$; каковы бы ни были непрерывные функции $u, v \geqslant 0$, такие, что $|\!|\!| u |\!|\!| \leqslant M$, $|\!|\!| v |\!|\!| \leqslant M$, всегда $|\!|\!| K(u) - K(v) |\!|\!| \leqslant$
$\leqslant c_1 (1+\alpha) M^\alpha |\!|\!| u - v |\!|\!|$. (5.19)

Действительно,

$$|u(y, s)^{1+\alpha} - v(y, s)^{1+\alpha}| \leqslant$$
$$\leqslant (1+\alpha) \max\{u(y, s)^\alpha, v(y, s)^\alpha\} |u(y, s) - v(y, s)| \leqslant$$
$$\leqslant (1+\alpha) M^\alpha \rho^\alpha (y, s) |\!|\!| u - v |\!|\!| \rho(y, s),$$

откуда

$$|K(u)(x, t) - K(v)(x, t)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t d\sigma \int_{R^n} U(x, y, t-\sigma) |u(y, \sigma)^{1+\alpha} - v(y, \sigma)^{1+\alpha}| dy \leqslant$$
$$\leqslant (1+\alpha) M^\alpha |\!|\!| u - v |\!|\!| K(\rho);$$

отсюда в силу (5.18) следует (5.19).

4) *Сходимость процесса* (5.13). Очевидно, что (5.6) эквивалентно неравенствам

$$0 \leqslant u_0 \leqslant \delta U(x, 0, \chi) \qquad (\delta = \sigma (4\pi\chi)^{n/2}), \tag{5.20}$$

и речь идет о доказательстве сходимости (5.13) по норме $|\!|\!| \ |\!|\!|$ для «достаточно малых» δ.

Доказательство состоит из двух этапов:

(i) из (5.13) и (5.16) следует, что

$$|\!|\!| u_{n+1} |\!|\!| \leqslant \delta + c_1 |\!|\!| u_n |\!|\!|^{1+\alpha} \tag{5.21}$$

(поскольку (5.20) приводит к неравенству $Hu_0 \leqslant \delta\rho$).

Таким образом, $|\!|\!| u_n |\!|\!| \leqslant \gamma_n$, где $\gamma_1 = |\!|\!| u_1 |\!|\!|$ и $\gamma_{n+1} = \delta + c_1 \gamma_n^{1+\alpha}$.

Отсюда следует, что для достаточно малых δ

$$|\!|\!| u_n |\!|\!| \leqslant M(\delta), \quad \text{где} \quad M(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{5.22}$$

(ii) Из определения (5.13), а также из (5.19) и (5.22) выводим, что

$$|||u_{n+1}-u_n||| = |||K(u_n)-K(u_{n-1})||| \leqslant c_1(1+\alpha)M(\delta)^\alpha |||u_n-u_{n-1}|||,$$

откуда получается наш результат, коль скоро δ выбрано так, что выполняется неравенство

$$c_1(1+\alpha)M(\delta)^\alpha < 1. \qquad (5.23)$$

5.3. Одно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в пространстве типа Жеврея

5.3.1. Одна лемма. Пусть E — пространство Банаха над $\mathbb{R}$ с нормой $\| \; \|$, E' — дуальное пространство с нормой $\| \; \|_*$, а через $(\; , \;)$ обозначается скалярное произведение между E и E'.

Возьмем

$$g \in E, \quad e' \in E', \quad a \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathscr{L}(E; E) \qquad (5.24)$$

и для $u \in E$ положим

$$A(u) = g + [a + (e', u)]Bu. \qquad (5.25)$$

Лемма 5.1. *Пусть* $\beta = \|B\|_{\mathscr{L}(E;\,E)}$. *Предположим, что*

$$\beta|a| < 1, \qquad 4\beta\|g\|\|e'\|_* < (1-\beta|a|)^2. \qquad (5.26)$$

Тогда существует решение $u \in E$ *уравнения*

$$A(u) = u. \qquad (5.27)$$

Доказательство. Мы используем очень простой метод. Проверим, что *найдется* такое ρ, что если

$$B_\rho = \{e \mid e \in E, \|e\| \leqslant \rho\},$$

то

i) A отображает B_ρ в себя,
ii) $\|A(u)-A(v)\| \leqslant c\|u-v\| \quad \forall u, v \in B_\rho, \quad c < 1.$

Для этого заметим, что

$$\|A(u)\| \leqslant \|g\| + (|a| + \|e'\|_*\|u\|)\beta\|u\|,$$

и, следовательно, если $u \in B_\rho$, то

$$\|A(u)\| \leqslant \|g\| + \beta(|a| + \|e'\|_*\rho)\rho \leqslant \rho,$$

коль скоро ρ выбрано таким образом, что

$$\beta\|e'\|_*\rho^2 - (1-|a|\beta)\rho + \|g\| \leqslant 0; \qquad (5.28)$$

выбор такого ρ возможен в силу (5.26).

Далее, для $u, v \in B_\rho$ имеем

$$\|A(u)-A(v)\| \leqslant \beta(|a| + 2\|e'\|_*\rho)\|u-v\|,$$

откуда следует (ii), коль скоро

$$\beta(|a|+2\|e'\|_* \rho)<1. \tag{5.29}$$

Мы получаем нужный нам результат, выбирая ρ таким образом, чтобы оно одновременно удовлетворяло (5.28) и (5.29) (что возможно) ●

5.3.2. Применение. Теперь мы попытаемся решить одно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (введенное Таленти [1] в связи с изучением задачи Коши). Пусть

$$\mathcal{O}=\{x, t \mid x\in]0, 1[, t\in]-1, 1[\},$$

и пусть $s\geqslant 0$ — заданное число, $m>0$ — заданное целое число.

Ищется функция u, которая определена в $\mathcal{O}$ и является решением уравнения

$$u=g+\left[a+b\int_0^1 dx\int_{-1}^1 (1-t^2)u(x, t)\,dt\right]\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{(t-\tau)^s}{\Gamma(s+1)}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(x, \tau)\,d\tau. \tag{5.30}$$

В (5.30) a и b являются заданными числами из $\mathbb{R}$, а g — заданной функцией (немного ниже мы уточним условия на g).

Мы собираемся доказать существование решения (при подходящих предположениях) в банаховом пространстве E типа пространств Жеврея ●

Пространства $G^{p, r}$

Пусть заданы числа $p\geqslant 0$ и $r>0$. Мы определим $G^{p, r}$ как пространство функций u, определенных в $\mathcal{O}$ и таких, что

$$(1-|t|)^{kp+1}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x, t)\in L^\infty(\mathcal{O}) \qquad \forall k\geqslant 0, \tag{5.31}$$

$$\|u\|_{p, r}=\sup_k \frac{1}{r^k\Gamma(pK+1)}\left\|(1-|t|)^{kp+1}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x, t)\right\|_{L^\infty(\mathcal{O})}<\infty. \tag{5.32}$$

Без труда проверяется, что $G^{p, r}$ является *банаховым пространством* (не сводящимся к одной точке $\{0\}$) ¹).

---

¹) $G^{p, r}$ является пространством типа Жеврея по переменным x (говорят, что функция φ над $\mathbb{R}$ имеет жевреевскнй порядок α, если для любого компакта K существуют такне c и L, что

$$|\varphi^{(k)}(x)|\leqslant cL^k\Gamma(k\alpha+1) \qquad \forall k, \ \forall x\in K).$$

Положим в (5.30)

$$Bu = Bu(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{(t-\tau)^s}{\Gamma(s+1)} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial x^m}\, d\tau. \tag{5.33}$$

Наиболее важным моментом является следующая лемма — именно в ней проявляется *выбор пространства* $G^{p, r}$.

Лемма 5.2. *Если B — оператор, определенный в* (5.33), *то*

$$B \in \mathscr{L}\left(G^{s/m, r};\ G^{s/m, r}\right) \tag{5.34}$$

и

$$\| B \| \leqslant r^m. \tag{5.35}$$

Доказательство. 1) В силу свойств интеграла Римана — Лиувилля

$$B = C^m,$$

где C определяется из равенства

$$Cu(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{s/m}}{\Gamma\left(\frac{s}{m}+1\right)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\, d\tau, \tag{5.36}$$

и достаточно показать, что

$$C \in \mathscr{L}\left(G^{s/m, r};\ G^{s/m, r}\right), \qquad \| C \| \leqslant r. \tag{5.37}$$

2) Положим $s/m = p$ и предположим, что $s > 0$ (так что и $p > 0$). Тогда

$$Cu(x, t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{\partial u}{\partial x}(\tau, x)\, d\tau. \tag{5.38}$$

Нам надо оценить

$$(1-|t|)^{kp+1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} Cu(x, t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^t \frac{|t-\tau|^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{(1-|t|)^{kp+1}}{(1-|\tau|)^{(k+1)p+1}} (1-|\tau|)^{(k+1)p+1} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1}}(x, \tau)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \| u \|_{p, r}\, r^{k+1}\Gamma((k+1)p+1)\left|\int_0^t \frac{|t-\tau|^{p-1}(1-|t|)^{kp+1}}{\Gamma(p)(1-|\tau|)^{(k+1)p+1}}\, d\tau\right|.$$

Полагая

$$\tau = \frac{t}{|t|}\frac{|t|-\sigma}{1-\sigma},$$

мы получим, что написанный выше интеграл мажорируется интегралом

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{|t|}\sigma^{p-1}(1-\sigma)^{kp}\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1\sigma^{p-1}(1-\sigma)^{kp}\,d\sigma=\frac{\Gamma(kp+1)}{\Gamma((k+1)p+1)}$$

и, следовательно,

$$(1-|t|)^{kp+1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}Cu(x,t)\right|\leqslant r^k\Gamma(kp+1)\,r\,\|u\|_{p,r},$$

откуда

$$\|Cu\|_{p,r}\leqslant r\|u\|_{p,r}\,\bullet$$

Теперь легко доказывается

Теорема 5.2. *Пусть* $r>0$ *выбрано так, что*

$$|a|r^m<1. \tag{5.39}$$

Предположим, что $g\in G^{s/m,r}$ *и что*

$$16\,|b|\,\|g\|_{s/m,r}\,r^m<(1-|a|r^m)^2. \tag{5.40}$$

Тогда существует функция $u\in G^{s/m,r}$, *удовлетворяющая уравнению* (5.30).

Доказательство. Применим лемму 5.1 для $E=G^{s/m,r}$ и оператора B, определенного с помощью (5.33); так как форма

$$u\to b\int_0^1 dx\int_{-1}^1(1-t^2)\,u(x,t)\,dt$$

непрерывна на E, то

$$b\int_0^1 dx\int_{-1}^1(1-t^2)\,u(x,t)\,dt=(e',u),\qquad e'\in E'. \tag{5.41}$$

В силу леммы 5.2 $\beta\leqslant r^m$, и ввиду (5.39) выполнено первое условие (5.26). Нам осталось оценить $\|e'\|_*$. Имеем

$$\left|\int_0^1 dx\int_{-1}^1(1-t^2)\,u(x,t)\,dt\right|\leqslant 2\sup_{x,t}(1-t^2)|u(x,t)|\leqslant$$

$$\leqslant 4\sup_{x,t}(1-|t|)|u(x,t)|\leqslant 4\|u\|_0$$

откуда

$$\|e'\|_*\leqslant 4|b|.$$

Такнм образом, второе условие (5.26) следует из (5.40)●

6. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

6.1. Общие указания

Рассмотрим нелинейный параболический оператор вида

$$\varphi \to \frac{d\varphi}{dt} + \mathscr{A}(\varphi), \quad t \in [0, T].$$

Ищется функция u, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{du}{dt} + \mathscr{A}(u) = f \tag{6.1}$$

и условию

$$u(0) = u(T). \tag{6.2}$$

Тогда u называется *периодическим решением* [1]).

Схематически можно представить себе два метода изучения периодических решений:

Метод 1. Рассматривается оператор $L = d/dt$, а в качестве области определения L берутся, например, функции v, удовлетворяющие условию $v(0) = v(T)$. Тогда задача (6.1), (6.2) запишется в виде

$$Lu + \mathscr{A}(u) = f, \quad u \text{ принадлежит области определения } L. \tag{6.3}$$

Тогда при подходящих условиях на $\mathscr{A}$ можно применить теорему 1.2 гл. 3.

Мы привели соответствующий пример в п. 2.2 гл. 3 ●

Метод 2. Рассматривается задача Коши

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + \mathscr{A}(u) = f, \\ &u(0) = u_0 \end{aligned}\right. \tag{6.4}$$

и рассматривается отображение

$$u_0 \to u(T) = \mathscr{T}(u_0). \tag{6.5}$$

Теперь «ничего другого не остается» как искать *неподвижные точки* ●

Замечание 6.1. «Глобальный» подход метода 1 не дает оценки $u \in L^\infty(0, T; H)$, с которой мы часто встречались.

(Впрочем, с этой же самой трудностью мы сталкиваемся и в задаче с начальными условиями, что приводит к весьма

---

[1]) Если f задана на $\mathbb{R}_t$ и имеет период T, то u будет сужением на отрезок $[0, T]$ решения с периодом T по t.

сложной формулировке теоремы 1.2 гл. 3.) Метод 2 *иногда* позволяет обойти эту трудность ●

Мы приведем пример применения метода 2 к уравнениям Навье — Стокса.

6.2. Периодические решения уравнений Навье — Стокса

Мы будем пользоваться обозначениями § 6 гл. 1.

Сейчас будет доказана

Теорема 6.1. *Пусть задана функция* $f \in L^2(0, T; V')$. *Тогда существует такая функция* u, *что*

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{6.6}$$

$$(u', v) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n, \tag{6.7}$$

$$u(0) = u(T). \tag{6.8}$$

Замечание 6.2. В точности таким же образом, как в теореме 6.5 гл. 1 (фактически граничные условия *не участвуют* в этом результате), можно показать, что

всякое решение u задачи (6.6), (6.7) *удовлетворяет условию* $u' \in L^2(0, T; V_s')$, $s = n/2$. (6.9)

Тогда условие (6.8) имеет смысл ●

Доказательство. Мы применим метод 2 в *конечномерном случае*, а потом перейдем к пределу.

1) *Приближенное решение.* Как и в § 6 гл. 1, мы воспользуемся «специальным базисом» из функций w_j, которые принадлежат V_s и определяются условиями (6.52) гл. 1, т. е.

$$((w_j, v))_s = \lambda_j (w_j, v) \quad \forall v \in V_s. \tag{6.10}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$(u_m', w_j) + \nu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{6.11}$$

$$u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m], \tag{6.12}$$

$$u_m(0) = u_0, \ u_0 \text{ — произвольный элемент из } [w_1, \ldots, w_m]. \tag{6.13}$$

Как известно (см. п. 6.4 гл. 1), решение $u_m(t)$ существует иа отрезке $[0, T]$. Мы покажем, что

существует такое R, *не зависящее от* m, что
$|u_m(T)| \leqslant R$, коль скоро $|u_0| \leqslant R$ [1]). (6.14)

---

[1]) Через $|\ |$ обозначается норма в $[w_1, \ldots, w_m]$, индуцированная нормой в H.

В самом деле, поскольку $b(u_m, u_m, u_m) = 0$, то из (6.11) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu a(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\nu}{2} a(u_m(t), u_m(t)) + c_1 \| f(t) \|_*^2,$$

а так как, в частности,

$$a(v, v) \geqslant c_2 |v|^2,$$

то получим ($c_3 = \nu c_2$)

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + c_3|u_m(t)|^2 \leqslant 2c_1 \| f(t) \|_*^2. \tag{6.15}$$

Отсюда получим

$$e^{c_3 T}|u_m(T)|^2 \leqslant |u_0|^2 + 2c_1 \int_0^T e^{c_3 t} \| f(t) \|_*^2 \, dt = |u_0|^2 + c_4. \tag{6.16}$$

Из последнего неравенства следует (6.14), если выбрать R таким образом, чтобы

$$R^2 \geqslant \frac{c_4}{1 - \exp(-c_3 T)}. \tag{6.17}$$

Итак, отображение

$$u_0 \to u_m(T) = \mathscr{T}_m(u_0)$$

переводит в себя B_R (шар с центром в начале и радиуса R в пространстве $[w_1, \ldots, w_m]$, снабженном нормой $|\ |$); поскольку это отображение непрерывно,

существует такая точка $u_{0m} \in B_R$, что $\mathscr{T}_m(u_{0m}) = u_{0m}$. (6.18)

Отныне мы будем обозначать через u_m решение задачи (6.11), удовлетворяющее условию

$$u_m(0) = u_{0m}. \tag{6.19}$$

2) *Оценки для* u_m. Далее, поскольку ввиду (6.14) u_{0m} *ограничены* в H, мы получим в точности те же самые оценки, что и в случае *уравнений с начальными условиями*. Следовательно (см. гл. 1, (6.60) и (6.61)),

u_m ограничены в $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, (6.20)

u_m' ограничены в $L^2(0, T; V_s')$. (6.21)

3) *Предельный переход*. Из (6.20), (6.21) следует, что можно выделить такую подпоследовательность u_μ, что

$u_\mu \to u$ в $L^2(0, T; V)$ слабо, а в $L^\infty(0, T; H)$ $*$-слабо,

$u_\mu' \to u'$ в $L^2(0, T; V_s')$ слабо, откуда, *в частности*,

$$u_\mu(0) \to u(0), \quad u_\mu(T) \to u(T) \text{ слабо в } V'_s.$$

Однако, так как $u_\mu(0) = u_\mu(T)$, то отсюда выводим, что $u(0) = u(T)$.

В (6.11) можно перейти к пределу (полагая $m = \mu$) таким же образом, как в случае начальных данных (гл. 1, п. 6.4). Следовательно, u удовлетворяет (6.6), (6.7) и (6.8) ●

Замечание 6.3. Мы применили метод 2 (метод неподвижной точки) в конечномерном пространстве. Что касается непосредственного применения этого метода в бесконечномерном случае, то пусть u — некоторое решение (6.7), удовлетворяющее (6.6), и пусть $u(0) = u_0$.

Тогда $u(T)$ можно определить в H[1]; пусть $u(T) = \mathcal{T}(u_0)$. При $n = 2$ можно непосредственно проверить, что $\mathcal{T}$ — слабо непрерывное отображение $H \to H$, переводящее в себя некоторый шар в H. Тогда существует такое u_0, что $\mathcal{T}(u_0) = u_0$, откуда опять следует теорема 6.1 при $n = 2$ (см. Проди [2]). В случае $n \geqslant 3$ нам пришлось бы иметь дело с теоремой о неподвижной точке для (быть может) многозначных отображеиий, и приведенный выше способ доказательства безусловно является более простым ●

Замечание 6.4. Мы не знаем, имеет ли место единственность периодического решения (даже при $n = 2$) в условиях теоремы 6.1 ●

Замечание 6.5. Можно, следуя Каниелю и Шинброту [2], получить в размерностях 2 или 3 теорему существования и единственности периодического решения *при дополнительном предположении, что* $\|f\|_{L^\infty(0, T; H)}$ *берутся из «достаточно малого» множества* ●

6.3. Замечания об односторонних задачах

В случае односторонних задач (или неравенств), связанных с уравнениями Навье — Стокса, для периодических решений будет доказана

Теорема 6.2. *Пусть размерность* $n = 2$, *и пусть задано выпуклое множество* K, *замкнутое в* V *и удовлетворяющее условию* (6.73) *п.* 6.4 *гл.* 3. *Тогда*[2] *для заданного* f *из*

---

[1] Так как $u \in L^\infty(0, T; H)$ и $u' \in L^2(0, T; V'_s)$, то, следовательно, u является слабо непрерывным отображением $[0, T] \to H$.

[2] Ср. с теоремой 6.3 гл. 3.

$L^2(0, T; V')$ существует u, такое, что

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{6.22}$$

$$u(t) \in K \text{ для почти всех } t \in]0, T[, \tag{6.23}$$

$$\int_0^T [(\varphi', \varphi - u) + a(u, \varphi - u) + b(u, u, \varphi - u)]\,dt \geqslant \int_0^T (f, \varphi - u)\,dt \tag{6.24}$$

для всех $\varphi \in L^2(0, T; V)$, $\varphi' \in L^2(0, T; V')$, $\varphi(t) \in K$, $\varphi(0) = \varphi(T)$.

Доказательство. Мы одновременно используем технику, применявшуюся при доказательстве теоремы 6.1, и метод штрафа из § 6 гл. 3.

1) Итак, пусть β: $V \to V'$ — оператор штрафа, связанный с K (см. § 5 гл. 3). Рассмотрим задачу Коши (ср. (6.11), (6.12), (6.13)) (мы полагаем $\nu = 1$, что, очевидно, не играет никакой роли):

$$(u'_m, w_j) + a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_m), w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{6.25}$$

$$u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m], \tag{6.26}$$

$$u_m(0) = u_0. \tag{6.27}$$

Поскольку $\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_m), u_m) \geqslant 0$, то таким же образом, как при доказательстве утверждения (6.14), получим:

$$\begin{gathered}\text{существует такое } R, \textit{ не зависящее от } m \textit{ и } \varepsilon, \\ \text{что } |u_m(T)| \leqslant R, \text{ коль скоро } |u_0| \leqslant R.\end{gathered} \tag{6.28}$$

Следовательно, существует решение $u_{m\varepsilon}$ задачи

$$(u'_{m\varepsilon}, w_j) + a(u_{m\varepsilon}, w_j) + b(u_{m\varepsilon}, u_{m\varepsilon}, w_j) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_{m\varepsilon}), w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{6.29}$$

$$u_{m\varepsilon}(0) = u_{m\varepsilon}(T), \ |u_{m\varepsilon}(0)| \leqslant R. \tag{6.30}$$

2) Из (6.29), (6.30) мы выведем, используя, по-прежнему, положительность $(\beta(v), v)$, что

$$\begin{gathered}u_{m\varepsilon} \text{ ограничены в } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \\ \text{при } m \to \infty, \ \varepsilon \to 0.\end{gathered} \tag{6.31}$$

В противоположность этому из (6.29) не удается вывести оценки для $u'_{m\varepsilon}$, *которые бы не зависели от* ε (причем последнее не связано с выбором базиса)[1]. Мы перейдем к пределу в членах $b(u_{m\varepsilon}, u_{m\varepsilon}, w_j)$, используя соображения *монотонности*, — это возможно лишь для очень специальных выпуклых множеств K (в этом и состоит условие (6.73) гл. 3).

Итак, мы поступим следующим образом. Перейдем к пределу по m при фиксированном ε; тогда (поскольку $n=2$) $u'_{m\varepsilon}$ принадлежат ограниченному множеству, зависящему от ε, в $L^2(0, T; V')$, и можно выделить такую последовательность $u_{\mu\varepsilon}$, что

$$\begin{aligned} &u_{\mu\varepsilon} \to u_\varepsilon \text{ в } L^2(0, T; V) \text{ слабо} \\ &\text{и в } L^\infty(0, T; H) \ \ast\text{-слабо}, \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$u'_{\mu\varepsilon} \to u'_\varepsilon \text{ в } L^2(0, T; V') \text{ слабо}; \tag{6.33}$$

при этом получим

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T). \tag{6.34}$$

С другой стороны, из (6.29) и (6.30) следует, что

$$\int_0^T (\beta(u_{m\varepsilon}), u_{m\varepsilon})\, dt \leqslant C\varepsilon. \tag{6.35}$$

Можно считать, что

$$\beta(u_{\mu\varepsilon}) \to \chi_\varepsilon \text{ в } L^2(0, T; V') \text{ слабо}, \tag{6.36}$$

и из (6.29) для $m=\mu$ мы выведем (как в теореме 6.1), что

$$(u'_\varepsilon, v) + a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\chi_\varepsilon, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \tag{6.37}$$

Далее получим, заменяя v на u_ε (что законно):

$$\int_0^T \left[a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(\chi_\varepsilon, u_\varepsilon)\right] dt = \int_0^T (f, u_\varepsilon)\, dt. \tag{6.38}$$

Теперь мы покажем, что

$$\chi_\varepsilon = \beta(u_\varepsilon). \tag{6.39}$$

Мы будем исходить из неравенства

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[a(u_{m\varepsilon} - \varphi, u_{m\varepsilon} - \varphi) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_{m\varepsilon}) - \beta(\varphi), u_{m\varepsilon} - \varphi)\right] dt \geqslant 0, \\ &\varphi \in L^2(0, T; V). \end{aligned} \tag{6.40}$$

---

[1] Нам не удалось применительно к «периодическому» случаю адаптировать метод, аспользоаанный в п. 6.5 гл. 3.

Однако ввиду (6.29) левая часть (6.40) равна

$$\int_0^T \Big[(f, u_{m\varepsilon}) - a(\varphi, u_{m\varepsilon} - \varphi) - a(u_{m\varepsilon}, \varphi) - \frac{1}{\varepsilon}(\beta(\varphi), u_{m\varepsilon} - \varphi) - \\ - \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_{m\varepsilon}), \varphi)\Big]\,dt,$$

а при $m = \mu$ она стремится к

$$\int_0^T \Big[(f, u_\varepsilon) - a(\varphi, u_\varepsilon - \varphi) - a(u_\varepsilon, \varphi) - \\ - \frac{1}{\varepsilon}(\beta(\varphi), u_\varepsilon - \varphi) - \frac{1}{\varepsilon}(\chi_\varepsilon, \varphi)\Big]\,dt.$$

Теперь, используя (6.38), мы получим, что (6.40) эквивалентно неравенству

$$\int_0^T \Big[a(u_\varepsilon - \varphi, u_\varepsilon - \varphi) + \frac{1}{\varepsilon}(\chi_\varepsilon - \beta(\varphi), u_\varepsilon - \varphi)\Big]\,dt \geqslant 0 \\ \forall \varphi \in L^2(0, T; V), \tag{6.41}$$

откуда следует (6.39) (надо взять $\varphi = u_\varepsilon - \lambda\psi$, $\lambda > 0$, разделить на λ и устремить $\lambda \to 0$).

Поскольку

$$\int_0^T (\beta(u_{m\varepsilon}), u_{m\varepsilon})\,dt \geqslant \int_0^T (\beta(u_\varepsilon), u_{m\varepsilon} - u_\varepsilon)\,dt + \\ + \int_0^T (\beta(u_{m\varepsilon}), u_\varepsilon)\,dt \to \int_0^T (\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon)\,dt,$$

то из (6.35), следует, что

$$\int_0^T (\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon)\,dt \leqslant C\varepsilon. \tag{6.42}$$

Резюмируя сказанное, мы получаем существование последовательности u_ε, такой, что

$$u_\varepsilon \text{ ограничены в } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{6.43}$$

$$(u'_\varepsilon, v) + a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \tag{6.44}$$

и u_ε удовлетворяют (6.34) и (6.42).

Теперь можно перейти к пределу по ε в точности таким же образом, как в п. 2 теоремы 6.3 гл. 3●

7. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

7.1. Общие указания

В качестве типичного примера рассмотрим задачу о разыскании периодического по t решения уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w + \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial t} = f \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times]0, T[\tag{7.1}$$

при условиях

$$w = 0 \text{ на } \Sigma^{1)} \tag{7.2}$$

и (условие периодичности w по t)

$$w(x, 0) = w(x, T), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, T), \quad x \in \Omega. \tag{7.3}$$

Основная трудность состоит в следующем. Умножим (7.1) на $\partial w/\partial t$ и проинтегрируем по Q; поскольку (в силу (7.3))

$$\int\limits_Q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \, dx \, dt = 0,$$

а в силу (7.2) и (7.3)

$$\int\limits_Q (-\Delta w) \frac{\partial w}{\partial t} \, dx \, dt = 0,$$

то мы получим, что

$$\int\limits_Q \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^p dx \, dt = \int\limits_Q f \frac{\partial w}{\partial t} \, dx \, dt. \tag{7.4}$$

Таким образом, посредством подходящего метода аппроксимации можно получить априорную оценку для $\| \partial w/\partial t \|_{L^p(Q)}$, но этой оценки *недостаточно.*

Ситуация существенно улучшается, *если работать с такими функциями* φ, *у которых* $\int\limits_0^T \varphi \, dt = 0$. По идее Проди [3] будем искать w в виде

$$\begin{gathered} w = u + u_0, \\ u_0 \text{ не зависит от } t, \\ \int\limits_0^T u \, dt = 0. \end{gathered} \tag{7.5}$$

---

[1] Это условие взято для определенности. Предлагаемый ниже метод годится для «всех» граничных условий.

Сначала, исходя из (7.5), проведем формальные преобразования. Подставляя в (7.1), найдем (мы пишем φ', φ'', ... вместо $\partial\varphi/\partial t$, $\partial^2\varphi/\partial t^2$, ...), что

$$u'' - \Delta u + |u'|^{p-2} u' = f + \Delta u_0. \tag{7.6}$$

Чтобы «исключить» u_0, продифференцируем (7.6) по t, откуда получим

$$\frac{d}{dt}\left(u'' - \Delta u + |u'|^{p-2} u'\right) = \frac{df}{dt}, \tag{7.7}$$

$$\int_0^T u\, dt = 0, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \tag{7.8}$$

Затем, если нам удастся найти функцию u, являющуюся решением (в некотором подходящем смысле) задачи (7.7), (7.8), то u_0 мы определим следующим образом. Из (7.7) вытекает, что

$$\begin{gathered} u'' - \Delta u + |u'|^{p-2} u' - f = g_0, \\ g_0 \text{ не зависит от } t, \end{gathered} \tag{7.9}$$

и тогда в качестве u_0 возьмем решение задачи

$$\Delta u_0 = g_0, \qquad u_0|_\Gamma = 0. \tag{7.10}$$

При этом $w = u + u_0$ будет решением исходной задачи ●

Теперь мы придадим точный смысл предшествующим рассуждениям.

7.2. Решение гиперболической задачи (7.7), (7.8) с помощью эллиптической регуляризации

Будет доказана

Теорема 7.1. *Предположим, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и что $p > 2$. Рассмотрим $f \in L^{p'}(Q)$. Тогда существует единственная функция w,*

$$w = u + u_0, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) + W^{2,p'}(\Omega) \cap W_0^{1,p'}(\Omega), \tag{7.11}$$

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{7.12}$$

$$u' \in L^p(Q), \tag{7.13}$$

удовлетворяющая (7.1), (7.3)[1].

---

[1] Условие (7.2) является следствием включения $u_0 \in H_0^1(\Omega) + W^{2,p'}(\Omega) \cap W_0^{1,p'}(\Omega)$ и включения (7.12). Условия (7.3) *имеют смысл* (ср. (7.16)).

Доказательство. 1) *Обозначения.* Чтобы упростить запись, положим

$$V = H_0^1(\Omega), \quad A = -\Delta, \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \tag{7.14}$$

$$\gamma(\varphi) = |\varphi|^{p-2} \varphi. \tag{7.15}$$

Заметим, что если w является решением нашей задачи, то

$$w'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^{p'}(Q). \tag{7.16}$$

2) *Доказательство единственности.* Пусть w_1, w_2 суть два возможных решения, $\psi = w_1 - w_2$; тогда

$$\psi'' + A\psi + \gamma(w_1') - \gamma(w_2') = 0. \tag{7.17}$$

Пусть ρ_n — регуляризующая последовательность периодических четных по t функций с периодом T; обозначим через $*$ свертку по окружности; рассмотрим

$$\psi' * \rho_n * \rho_n = \psi * \rho_n' * \rho_n. \tag{7.18}$$

Так как в силу (7.11), (7.12)

$$\begin{gathered} \psi = \chi + \psi_0, \quad \psi_0 \in H_0^1(\Omega) + W^{2, p'}(\Omega) \cap W_0^{1, p'}(\Omega), \\ \chi \in L^2(0, T; V), \end{gathered} \tag{7.19}$$

то функция

$$\psi' * \rho_n * \rho_n = \chi' * \rho_n * \rho_n \text{ принадлежит } C^\infty([0, T]; V) \text{ и периодична,} \tag{7.20}$$

а поскольку, с другой стороны, $\psi' \in L^p(Q)$ (в силу (7.13)), то функция

$$\psi' * \rho_n * \rho_n \text{ принадлежит } C^\infty([0, T]; L^p(\Omega)) \text{ и периодична.} \tag{7.21}$$

Согласно (7.16),

$$\psi'' \in L^2(0, T; V') + L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega)).$$

Это включение вместе с (7.20), (7.21) показывает, что интеграл

$$\int_0^T (\psi'', \psi' * \rho_n * \rho_n)\, dt \text{ имеет смысл и равен нулю.}$$

С другой стороны,

$$A\psi \in \{L^2(0, T; V') + \text{функция из } L^{p'}(\Omega)\},$$

и, следовательно, интеграл

$$\int_0^T (A\psi, \psi' * \rho_n * \rho_n)\,dt \text{ имеет смысл и равен нулю.}$$

Таким образом, из (7.17) следует, что

$$\int_0^T (\gamma(w_1') - \gamma(w_2'), \psi' * \rho_n * \rho_n)\,dt = 0, \tag{7.22}$$

и можно перейти к пределу в (7.22); тогда получим

$$\int_0^T (\gamma(w_1') - \gamma(w_2'), w_1' - w_2')\,dt = 0, \tag{7.23}$$

откуда

$$w_1' = w_2'. \tag{7.24}$$

Тогда $\psi = w_1 - w_2 = \theta$ и

$$\theta T = \int_0^T (w_1 - w_2)\,dt = T(u_{01} - u_{02}), \text{ если } w_i = u_i + u_{0i};$$

таким образом (ср. (7.11)),

$$\theta \in H_0^1(\Omega) + W^{2, p'}(\Omega) \cap W_0^{1, p'}(\Omega). \tag{7.25}$$

Однако из (7.17) следует, что

$$A\theta = 0. \tag{7.26}$$

Это равенство вместе с (7.25) показывает, что $\theta = 0$, откуда следует единственность.

3) *Эллиптическая регуляризация.* Теперь мы собираемся решить задачу (7.7), (7.8) с помощью эллиптической регуляризации. Рассмотрим пространство

$$W = \Big\{ v \,\big|\, v \in L^2(0, T; V),\ v' \in L^2(0, T; V) \cap L^p(Q);\ v'' \in L^2(0, T; H),$$
$$\int_0^T v(t)\,dt = 0,\ v(0) = v(T),\ v'(0) = v'(T) \Big\}, \tag{7.27}$$

являющееся банаховым пространством с нормой

$$\| v \|_W = \| v \|_{L^2(0, T; V)} + \| v' \|_{L^2(0, T; V)} + \| v' \|_{L^p(Q)} + \| v'' \|_{L^2(0, T; H)}.$$

Пусть $\eta > 0$ (потом мы устремим η к нулю).

Для $u, v \in W$ положим

$$\pi_\eta(u, v) = \eta \int_0^T [(u'', v'') + (Au', v')]\, d\sigma + \\ + \int_0^T (u'' + Au + \gamma(u'), v')\, d\sigma. \qquad (7.28)$$

Форма $v \to \pi_\eta(u, v)$ непрерывна на W, следовательно,

$$\pi_\eta(u, v) = (\mathscr{B}_\eta(u), v), \quad \mathscr{B}_\eta(u) \in W', \qquad (7.29)$$

и, как нетрудно проверить, $u \to \mathscr{B}_\eta(u)$ является семинепрерывным ограниченным отображением $W \to W'$. Проверим, что

оператор $\mathscr{B}_\eta$: $W \to W'$ *коэрцитивный*, (7.30)

оператор $\mathscr{B}_\eta$: $W \to W'$ (строго) *монотонный*. (7.31)

Действительно, имеем[1]

$$(\mathscr{B}_\eta(v), v) = \eta \int_0^T (|v''|^2 + \|v'\|^2)\, dt + \int_0^T (\gamma(v'), v')\, dt; \qquad (7.32)$$

но

$$\int_0^T (\gamma(v'), v')\, dt = \|v'\|^p_{L^p(Q)},$$

и *поскольку* $\int_0^T v\, dt = 0$, то

$$\|v\|_{L^2(0, T;\, V)} \leqslant c\, \|v'\|_{L^2(0, T;\, V)},$$

так что из (7.32) следует (7.30).

Далее,

$$(\mathscr{B}_\eta(u) - \mathscr{B}_\eta(v), u - v) = \eta \int_0^T (|u'' - v''|^2 + \|u' - v'\|^2)\, dt + \\ + \int_0^T (\gamma(u') - \gamma(v'), u' - v')\, dt, \qquad (7.33)$$

откуда приходим к (7.31).

---

[1] Через $|\ |$ (соответственно $\|\ \|$) обозначается норма в $L^2(\Omega)$ (соответственно в $H_0^1(\Omega)$), причем тогда $\|v\| = a(v, v)^{1/2}$).

Таким образом, в силу теоремы 2.1 гл. 2 *существует (единственное)* u_η *из* W, *такое, что*

$$\pi_\eta(u_\eta, v) = \int_0^T (f, v')\,dt \quad \forall v \in W. \tag{7.34}$$

Задача (7.34) называется *«эллиптической регуляризацией»* задачи (7.7), (7.8).

4) *Априорные оценки.* Из (7.32) мы также выведем, что

$$u'_\eta \text{ ограничены в } L^p(Q) \text{ при } \eta \to 0, \tag{7.35}$$

$$\eta \int_0^T (|u''_\eta|^2 + \|u'_\eta\|^p)\,dt \leqslant C_1, \tag{7.36}$$

а поскольку $\int_0^T u_\eta\,dt = 0$, то из (7.35), (7.36) следует, что

$$u_\eta \text{ ограничены в } L^p(Q), \tag{7.37}$$

$$\eta \int_0^T \|u_\eta\|^p\,dt \leqslant C_2. \tag{7.38}$$

Теперь мы собираемся получить другие априорные оценки, беря в качестве v в (7.34) функцию

$$v(t) = \int_0^t u_\eta(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{T}\int_0^T (T - \sigma)\,u_\eta(\sigma)\,d\sigma. \tag{7.39}$$

Можно проверить, что

$$\int_0^T v(t)\,dt = 0, \quad v \in W,$$

и

$$v' = u_\eta.$$

Тогда (7.34) примет вид

$$\eta \int_0^T [(u''_\eta, u'_\eta) + (Au'_\eta, u_\eta)]\,dt +$$
$$+ \int_0^T [(u''_\eta, u_\eta) + \|u_\eta\|^p + (\gamma(u'_\eta), u_\eta)]\,dt = \int_0^T (f, u_\eta)\,dt. \tag{7.40}$$

Однако в силу (7.36), (7.38)

$$\left|\eta\int_0^T [(u''_\eta, u'_\eta)+(Au'_\eta, u_\eta)]\,dt\right| \leqslant \text{const} \quad \text{при} \quad \eta\to 0. \tag{7.41}$$

С другой стороны,

$$\int_0^T (u''_\eta, u_\eta)\,dt = -\int_0^T |u'_\eta|^2\,dt,$$

и *благодаря тому, что* $p>2$, из (7.35) следует, что

$$\left|\int_0^T (u''_\eta, u_\eta)\,dt\right| \leqslant \text{const} \quad \text{при} \quad \eta\to 0. \tag{7.42}$$

Наконец (в силу (7.35) и (7.37)),

$$\left|\int_0^T (\gamma(u'_\eta), u_\eta)\,dt\right| \leqslant \|\gamma(u'_\eta)\|_{L^{p'}(Q)}\|u_\eta\|_{L^p(Q)} \leqslant C_3. \tag{7.43}$$

Используя (7.40), (7.41), (7.42), (7.43), мы получим, что

$$\int_0^T \|u_\eta\|^2\,dt \leqslant C_4. \tag{7.44}$$

5) *Предельный переход.* В силу (7.35), (7.44) можно выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_η, так, чтобы

$$u_\eta \to u \text{ в } L^2(0, T; V) \text{ слабо,}$$

$$u'_\eta \to u' \text{ в } L^p(Q) \text{ слабо,} \tag{7.45}$$

$$\gamma(u'_\eta) \to \chi \text{ в } L^{p'}(Q) \text{ слабо.} \tag{7.46}$$

Поскольку $\int_0^T u_\eta\,dt = 0$ и $u_\eta(0) = u_\eta(T)$, имеем

$$\int_0^T u\,dt = 0, \quad u(0) = u(T). \tag{7.47}$$

Переходя к пределу в (7.34), найдем, что

$$\int_0^T [(-u', v'') + (Au, v') + (\chi, v')]\,dt = \int_0^T (f, v')\,dt \quad \forall v \in W. \tag{7.48}$$

Применяя технику п. 2) (доказательства единственности), подставим в (7.48)

$$v = u * \rho_n * \rho_n, \tag{7.49}$$

что законно, поскольку $v \in C^\infty([0, T]; V)$, $v' \in C^\infty([0, T]; L^p(\Omega))$, v — периодическая функция по t. Поскольку тогда

$$\int_0^T (u', v'')\,dt = 0, \qquad \int_0^T (Au, v')\,dt = 0,$$

то получим

$$\int_0^T (\chi, u' * \rho_n * \rho_n)\,dt = \int_0^T (f, u' * \rho_n * \rho_n)\,dt,$$

откуда

$$\int_0^T (\chi, u')\,dt = \int_0^T (f, u')\,dt. \tag{7.50}$$

Покажем теперь, что

$$\chi = \gamma(u'). \tag{7.51}$$

Для $\varphi \in L^p(Q)$ положим

$$X_\eta = \int_0^T (\gamma(u'_\eta) - \gamma(\varphi), u'_\eta - \varphi)\,dt + \eta \int_0^T (|u''_\eta|^2 + \|u'_\eta\|^p)\,dt. \tag{7.52}$$

Имеем

$$X_\eta = \int_0^T (f, u'_\eta)\,dt - \int_0^T (\gamma(\varphi), u'_\eta - \varphi)\,dt - \int_0^T (\gamma(u'_\eta), \varphi)\,dt,$$

откуда

$$X_\eta \to \int_0^T (f, u')\,dt - \int_0^T (\gamma(\varphi), u' - \varphi)\,dt - \int_0^T (\chi, \varphi)\,dt = X.$$

Пользуясь (7.50), мы увидим, что

$$X = \int_0^T (\chi - \gamma(\varphi), u' - \varphi)\,dt. \tag{7.53}$$

Так как $X_\eta \geqslant 0$, то, следовательно, $X \geqslant 0$ $\forall \varphi \in L^p(Q)$; отсюда выводится (7.51).

Возьмем теперь такую функцию ψ, что

$$\begin{gathered} \psi \in C^\infty([0, T]; V \cap L^p(\Omega)), \quad \int_0^T \psi\,dt = 0, \\ \psi \text{ периодична по } t, \end{gathered} \tag{7.54}$$

и подставим в (7.48) функцию v вида (ср. (7.39))

$$v(t) = \int_0^t \psi \, d\sigma - \frac{1}{T} \int_0^T (T - \sigma) \psi(\sigma) \, d\sigma. \tag{7.55}$$

Тогда, учитывая (7.51), найдем, что

$$\int_0^T [-(u', \psi') + (Au, \psi) + (\gamma(u'), \psi) - (f, \psi)] \, dt = 0, \tag{7.56}$$

откуда

$$u'' + Au + \gamma(u') - f = g_0, \quad g_0 \text{ не зависит от } t. \tag{7.57}$$

Если $\varphi \in \mathscr{D}(]0, T[)$, то имеем

$$u''(\varphi) = -\int_0^T u'\varphi' \, dt \in L^p(\Omega),$$

$$Au(\varphi) = \int_0^T (Au) \varphi \, dt \in V',$$

$$\gamma(u')(\varphi) = \int_0^T \gamma(u') \varphi \, dt \in L^{p'}(\Omega), \quad f(\varphi) = \int_0^T f\varphi \, dt \in L^{p'}(\Omega),$$

откуда

$$g_0 \int_0^T \varphi \, dt \in V' + L^{p'}(\Omega)$$

и, следовательно,

$$g_0 \in V' + L^{p'}(\Omega). \tag{7.58}$$

Тогда из уравнения (7.57) следует, что для $u'' = f + g_0 - Au - \gamma(u')$ выполнено включение

$$u'' \in L^2(0, T; V') + L^{p'}(Q). \tag{7.59}$$

Далее из (7.57) мы выведем (считая, что ψ удовлетворяет (7.54)), что

$$\int_0^T (u'' + Au + \gamma(u') - f - g_0, \psi) \, dt = 0 =$$

$$= (u'(T), \psi(T)) - (u'(0), \psi(0)) +$$

$$+ \int_0^T [-(u', \psi') + (Au, \psi) + (\gamma(u'), \psi) - (f, \psi)] \, dt,$$

откуда, учитывая (7.56),

$$(u'(0), \psi(0)) = (u'(T), \psi(T))$$

и, следовательно,

$$u'(0) = u'(T). \tag{7.60}$$

Определим теперь u_0 как решение задачи

$$\Delta u_0 = g_0, \quad u_0|_\Gamma = 0; \tag{7.61}$$

тогда, согласно (7.58) и Агмону [1],

$$u_0 \in V + W^{2, p'}(\Omega) \cap W_0^{1, p'}(\Omega)$$

и $w = u + u_0$ является решением задачи ●

7.3. Периодические решения гиперболических неравенств

Естественно посмотреть, в какой мере результаты типа изложенных в предыдущем пункте обобщаются на *гиперболические неравенства* (в смысле § 7 гл. 3). На этом пути возникают очень большие технические трудности, и мы приведем один *очень частный* результат ●

Теорема 7.2. *Предположим, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и что $p > 2$. Пусть задана функция*

$$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(Q), \quad f(x, 0) = f(x, T), \tag{7.62}$$

и выпуклое замкнутое множество K в $L^2(\Omega)$; предположим, что существует оператор штрафа[1] *β: $H \to H$, $H = L^2(\Omega)$, связанный с K, причем β отображает $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ и $(\beta(v), -\Delta v) \geqslant 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.* (7.63)

Тогда существует функция u, такая, что

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q), \tag{7.64}$$

$$u'' \in L^2(Q), \tag{7.65}$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad u'(x, 0) = u'(x, T), \quad x \in \Omega, \tag{7.66}$$

$$u'(t) \in K \text{ почти всюду}, \tag{7.67}$$

$$\int_0^T [(u'' - \Delta u, \varphi' - u') + \\ + (|u'|^{p-2}u' + \gamma_0 u', \varphi' - u') - (f, \varphi' - u')]\, dt \geqslant 0 \tag{7.68}$$

---

[1] В смысле п. 5.2 гл. 3.

($\gamma_0 > 0$ — *заданное число*) *для любой такой функции* φ, *что*

$$\begin{aligned}&\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \varphi' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q),\\ &\varphi(x, 0) = \varphi(x, T), \quad \varphi'(t) \in K.\end{aligned} \tag{7.69}$$

Более того, если u *является одним из решений, то все решения имеют вид*

$$u + g, \quad g \in H_0^1(\Omega) \text{ не зависит от } t \bullet \tag{7.70}$$

Приведем примеры, в которых выполнено условие (7.63).

Пример 7.1.

$$K = \{v \mid v \in L^2(\Omega); \ v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{7.71}$$

Здесь можно взять

$$\beta(v) = -v^-,$$

и если $v \in H_0^1(\Omega)$, то

$$\beta(v), \ -\Delta v) = a(-v^-, \Delta v) = a(v^-, v^-) - a(v^-, v^+) = a(v^-, v^-) \geqslant 0 \bullet$$

Пример 7.2.

$$K = \{v \mid v \in L^2(\Omega), \ \lambda_0 \leqslant v(x) \leqslant \lambda_1 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{7.72}$$

Здесь можно взять

$$\beta(v)(x) = \begin{cases} v(x) - \lambda_0, & \text{если} \quad v(x) \leqslant \lambda_0,\\ 0, & \text{если} \quad \lambda_0 \leqslant v(x) \leqslant \lambda_1,\\ v(x) - \lambda_1, & \text{если} \quad v(x) \geqslant \lambda_1,\end{cases}$$

и опять будем иметь

$$(\beta(v), \ -\Delta v) \geqslant 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \bullet$$

Доказательство (7.70). Пусть u_1 и u_2 суть два решения. Пользуясь регуляризацией по окружности (как в (7.18)), мы подставим

$$\varphi' = u_2' * \rho_n * \rho_n \ \ (\text{соответственно } \varphi' = u_1' * \rho_n * \rho_n)$$

в неравенство для u_1 (соответственно для u_2). Замечая, что

$$\int_0^T (u_1'', u_2' * \rho_n * \rho_n)\, dt + \int_0^T (u_2'', u_1' * \rho_n * \rho_n)\, dt = 0,$$

$$\int_0^T (Au_1, u_2' * \rho_n * \rho_n)\, dt + \int_0^T (Au_2, u_1' * \rho_n * \rho_n)\, dt = 0,$$

мы после сложения получим

$$\int_0^T \left(\gamma(u_1'), u_2' * \rho_n * \rho_n - u_1'\right) dt + \int_0^T \left(\gamma(u_2'), u_1' * \rho_n * \rho_n - u_2'\right) dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T \left[\left(f, u_2' * \rho_n * \rho_n - u_1'\right) + \left(f, u_1' * \rho_n * \rho_n - u_2'\right)\right] dt\,^{1)},$$

откуда после перехода к пределу

$$\int_0^T \left(\gamma(u_1') - \gamma(u_2'), u_1' - u_2'\right) dt \leqslant 0$$

и, следовательно,

$$u_1' = u_2'.$$

Таким образом,

$$u_1 - u_2 = g \quad \text{не зависит от} \quad t \quad \text{и} \quad g \in H_0^1(\Omega) \, \bullet$$

Доказательство существования. 1) *Приближенное решение задачи со штрафом.* Мы применим метод штрафа в *конечномерном случае* (как в § 7 гл. 3). Итак, пусть $V = H_0^1(\Omega)$, а

$$w_1, \ldots, w_m, \ldots \text{ — «базис» в } V \cap L^p(\Omega). \tag{7.73}$$

Согласно теореме 7.1 (в которой следует γ заменить на $\gamma + \frac{1}{\varepsilon}\beta$, $\varepsilon > 0$, а V заменить на V_m — пространство $[w_1, \ldots, w_m]$, порожденное $w_1, \ldots, w_m$), существует единственная функция

$$u_m \in L^2(0, T; V_m),$$

такая, что[2]

$$\left(u_m'', w_j\right) + a\left(u_m, w_j\right) + \left(\gamma(u_m') + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_m'), w_j\right) = \left(f, w_j\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{7.74}$$

$$u_m(0) = u_m(T), \qquad u_m'(0) = u_m'(T) \tag{7.75}$$

и

$$\left\| u_m' \right\|_{L^p(Q)} \leqslant c \text{ (константа, не зависящая от } t \text{ и } \varepsilon), \tag{7.76}$$

$$\int_0^T \left(\beta(u_m'), u_m'\right) dt \leqslant c\varepsilon. \tag{7.77}$$

---

[1] Мы положили $\gamma(\varphi) = |\varphi|^{p-2}\varphi + \gamma_0\varphi$, $\gamma_0 > 0$.

[2] Поскольку значения функций принадлежат V_m, в этом случае аналог члена u_0 из (7.11) также принадлежит V_m. На самом деле $u_m = u_{m\varepsilon}$, т. е. этот член зависит также от ε.

2) *Специальный базис и дополнительные априорные оценки.* Выберем специальный базис из собственных функций w_j:

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \qquad w_j \in H_0^1(\Omega). \tag{7.78}$$

Если граница Γ области Ω достаточно регулярна (что неявно предполагается), то

$$w_j \in L^p(\Omega) \qquad \forall j.$$

Благодаря (7.78) мы можем в (7.74) заменить w_j на Aw_j:

$$(u''_m, Aw_j) + (Au_m, Aw_j) + (\gamma(u'_m), Aw_j) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u'_m), Aw_j) = \\ = (f, Aw_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{7.79}$$

Отсюда мы выводим, что

$$(u''_m, Au'_m * \rho_n * \rho_n) + (Au_m, Au'_m * \rho_n * \rho_n) + (\gamma(u'_m), Au'_m * \rho_n * \rho_n) + \\ + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u'_m), Au'_m * \rho_n * \rho_n) = (f, Au'_m * \rho_n * \rho_n),$$

откуда

$$\int_0^T (\gamma(u'_m), Au'_m * \rho_n * \rho_n)\, dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\beta(u'_m), Au'_m * \rho_n * \rho_n)\, dt = \\ = \int_0^T a(f, u'_m * \rho_n * \rho_n)\, dt,$$

и, переходя к пределу по n, получаем

$$\int_0^T (\gamma(u'_m), Au'_m)\, dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\beta(u'_m), Au'_m)\, dt = \int_0^T a(f, u'_m)\, dt. \tag{7.80}$$

Пользуясь теперь условием (7.63), найдем

$$\int_0^T (\gamma(u'_m), Au'_m)\, dt \leqslant \int_0^T a(f, u'_m)\, dt, \tag{7.81}$$

откуда

$$\int_0^T \int_\Omega |u'_m|^{p-2} u'_m(-\Delta u'_m)\, dx\, dt + \gamma_0 \int_0^T \|u'_m\|^2\, dt \leqslant \int_0^T \|f\|\|u'_m\|\, dt. \tag{7.82}$$

Поскольку для любой достаточно гладкой в Ω функции φ, равной нулю на границе,

$$\int_\Omega |\varphi|^{p-2} \varphi(-\Delta\varphi)\, dx \geqslant 0,$$

мы получаем

$$\int_0^T |u_m'|^2\,dt \leqslant (\text{константа, не зависящая от } m \text{ и } \varepsilon). \qquad (7.83)$$

Теперь мы покажем, что

$$\int_0^T |u_m''|^2\,dt \leqslant (\text{константа, не зависящая от } m \text{ и } \varepsilon). \qquad (7.84)$$

В этой связи пусть τ_h — оператор сдвига на окружности; тогда

$$\tau_h f(t) = \begin{cases} f(t-h+T), & \text{если } 0<t<h, \\ f(t-h), & \text{если } h<t<T. \end{cases}$$

Чтобы упростить запись, положим

$$\lambda_\varepsilon = \gamma + \frac{1}{\varepsilon}\beta.$$

Из (7.74) следует, что

$$\begin{gathered}(\tau_h u_m'', w_j) + a(\tau_h u_m, w_j) + (\lambda_\varepsilon(\tau_h u_m'), w_j) = (\tau_h f, w_j), \\ 1 \leqslant j \leqslant m,\end{gathered} \qquad (7.85)$$

откуда, полагая

$$\varphi_{hm} = \tau_h u_m - u_m, \qquad (7.86)$$

найдем

$$\begin{aligned}(\varphi_{hm}'', w_j) + a(\varphi_{hm}, w_j) + (\lambda_\varepsilon(\tau_h u_m') - \lambda_\varepsilon(u_m'), w_j) &= \\ = (\tau_h f - f, w_j). \qquad (7.87)\end{aligned}$$

Теперь мы можем вывести, что

$$\begin{aligned}(\varphi_{hm}'', \varphi_{hm}' * \rho_n * \rho_n) + a(\varphi_{hm}, \varphi_{hm}' * \rho_n * \rho_n) +& \\ + (\lambda_\varepsilon(\tau_h u_m') - \lambda_\varepsilon(u_m'), \varphi_{hm}' * \rho_n * \rho_n) &= (\tau_h f - f, \varphi_{hm}' * \rho_n * \rho_n),\end{aligned}$$

$$\int_0^T (\lambda_\varepsilon(\tau_h u_m') - \lambda_\varepsilon(u_m'), \tau_h u_m' - u_m')\,dt \leqslant \int_0^T (\tau_h f - f, \tau_h u_m' - u_m')\,dt,$$

откуда

$$\begin{aligned}\gamma_0 \int_0^T |\varphi_{hm}'|^2\,dt + \int_0^T (|\tau_h u_m'|^{p-2}\,\tau_h u_m' - |u_m'|^{p-2}\,u_m', \tau_h u_m' - u_m')\,dt +& \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\beta(\tau_h u_m') - \beta(u_m'), \tau_h u_m' - u_m')\,dt \leqslant \int_0^T (\tau_h f - f, \varphi_{hm}')\,dt,&\end{aligned}$$

поэтому

$$\gamma_0 \int_0^T |\varphi'_{hm}|^2\,dt \leqslant \int_0^T (\tau_h f - f,\ \varphi'_{hm})\,dt. \tag{7.88}$$

Отсюда благодаря условию (7.62) мы можем заключить, что

$$\int_0^T \left| \frac{\varphi'_{hm}}{h} \right|^2 dt \leqslant (\text{константа, не зависящая от } m \text{ и } \varepsilon),$$

откуда следует (7.84).

3) *Предельный переход по m* (при фиксированном ε).

Из оценок (7.76), (7.83), (7.84) следует, что можно выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_m, таким образом, что

$$\begin{gathered}\text{существует такая последовательность } \xi_m \in V\\ \text{что } u_m + \xi_m \to u_\varepsilon \text{ в } L^2(0, T; V) \text{ слабо,}\end{gathered} \tag{7.89}$$

$$u'_m \to u'_\varepsilon \quad \text{в} \quad L^2(0, T; V) \quad \text{слабо и в} \quad L^p(Q) \quad \text{слабо,} \tag{7.90}$$

$$u''_m \to u''_\varepsilon \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{слабо,} \tag{7.91}$$

$$\lambda_\varepsilon(u'_m) \to \chi_\varepsilon \quad \text{в} \quad L^{p'}(Q) \quad \text{слабо,} \tag{7.92}$$

и

$$\|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,\, T;\, V)} + \|u'_\varepsilon\|_{L^p(Q)} + \|u''_\varepsilon\|_{L^2(0,\, T;\, H)} \leqslant C, \tag{7.93}$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T), \qquad u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(T), \tag{7.94}$$

$$u''_\varepsilon + Au_\varepsilon + \chi_\varepsilon = f. \tag{7.95}$$

Таким же образом, как (7.51), доказывается равенство

$$\chi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(u'_\varepsilon). \tag{7.96}$$

Кроме того, имеем

$$\int_0^T (\beta(u'_\varepsilon),\ u'_\varepsilon)\,dt \leqslant C\varepsilon. \tag{7.97}$$

(Для доказательства надо умножить (7.95) на $u'_\varepsilon * \rho_n * \rho_n$ и, учитывая (7.96), перейти к пределу по n.)

4) *Предельный переход по* ε. В силу оценки (7.93) мы можем так выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_ε, что

$$\begin{aligned}&\text{существуют такие } \xi_\varepsilon \in V, \text{ что } u_\varepsilon + \xi_\varepsilon \to u\\ &\text{в } L^2(0, T; V) \text{ слабо,}\end{aligned} \tag{7.98}$$

$$\begin{aligned} u'_\varepsilon &\to u' \quad \text{в} \quad L^2(0, T; V) \cap L^p(Q) \quad \text{слабо,}\\ u''_\varepsilon &\to u'' \quad \text{в} \quad L^2(0, T; H) \quad \text{слабо,}\end{aligned} \tag{7.99}$$

$$\gamma(u'_\varepsilon) \to \chi \quad \text{в} \quad L^{p'}(Q) \quad \text{слабо,} \tag{7.100}$$

$$\beta(u'_\varepsilon) \to \chi_1 \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{слабо.} \tag{7.101}$$

Однако из (7.95), (7.96) следует, что

$$\beta(u'_\varepsilon) = \varepsilon\left[f - u''_\varepsilon - Au_\varepsilon - \gamma(u'_\varepsilon)\right] \to 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(Q),$$

откуда $\chi_1 = 0$, и ввиду (7.97) мы получим, используя монотонность β, что

$$\beta(u') = 0. \tag{7.102}$$

Таким образом, $u'(t) \in K$ почти всюду; кроме того, мы уже знаем, что функция u удовлетворяет (7.64), (7.65), (7.66), (7.67). Итак, нам осталось показать, что

$$\chi = \gamma(u') \tag{7.103}$$

и что имеет место (7.68).

Пусть φ удовлетворяет (7.69). Тогда из (7.95), (7.96) мы выведем, что

$$\int_0^T \left(u''_\varepsilon + Au_\varepsilon + \gamma(u'_\varepsilon) - f, \varphi' - u'_\varepsilon * \rho_n * \rho_n\right) dt = \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \left(\beta(u'_\varepsilon), \varphi' - u'_\varepsilon * \rho_n * \rho_n\right) dt,$$

откуда

$$\int_0^T \left[(u''_\varepsilon, \varphi') + (Au_\varepsilon, \varphi') + \left(\gamma(u'_\varepsilon) - f, \varphi' - u'_\varepsilon * \rho_n * \rho_n\right)\right] dt = \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \left(\beta(u'_\varepsilon), \varphi' - u'_\varepsilon \cdot \rho_n * \rho_n\right) dt,$$

и, переходя к пределу по n, получаем

$$\int_0^T [(u_\varepsilon'', \varphi') + (Au_\varepsilon, \varphi') + (\gamma(u_\varepsilon') - f, \varphi' - u_\varepsilon')]\,dt \geqslant 0 \qquad (7.104)$$

$$\left(\text{так как} - \int_0^T (\beta(u_\varepsilon'), \varphi' - u_\varepsilon')\,dt = \int_0^T (\beta(\varphi') - \beta(u_\varepsilon'), \varphi' - u_\varepsilon')\,dt \geqslant 0\right).$$

Однако из (7.104) следует, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T (\gamma(u_\varepsilon'), u_\varepsilon')\,dt \leqslant \int_0^T [(u''+Au+\chi, \varphi') - (f, \varphi'-u')]\,dt. \qquad (7.105)$$

Как мы уже знаем, $u'(t) \in K$, и мы имеем право подставить в (7.105) функцию

$$\varphi' = u' * \rho_n * \rho_n,$$

откуда мы выведем, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T (\gamma(u_\varepsilon'), u_\varepsilon')\,dt \leqslant \int_0^T (\chi, u')\,dt. \qquad (7.106)$$

Однако γ (в частности) является оператором типа (M) (см. замечание 2.1 гл. 2), откуда следует (7.103).

Докажем теперь (7.68). Из (7.104) следует, что

$$\int_0^T [(u_\varepsilon'', \varphi') + (Au_\varepsilon, \varphi') + (\gamma(u_\varepsilon'), \varphi') - (f, \varphi' - u_\varepsilon')]\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T (\gamma(u_\varepsilon'), u_\varepsilon')\,dt = \int_0^T (\gamma(u_\varepsilon') - \gamma(u'), u_\varepsilon' - u')\,dt +$$

$$+ \int_0^T (\gamma(u'), u_\varepsilon' - u')\,dt + \int_0^T (\gamma(u_\varepsilon'), u')\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T (\gamma(u'), u_\varepsilon' - u')\,dt + \int_0^T (\gamma(u_\varepsilon'), u')\,dt,$$

откуда с помощью предельного перехода получается (7.68) ●

Замечание 7.1. Изучение возможных периодических решений уравнения

$$u'' - \Delta u + |u|^{p-2}\,u = f$$

представляется трудной задачей, a fortiori то же самое имеет место для соответствующих неравенств (см. проблему 10.13) ●

В работе Рабиновича [1] изучаются периодические решения (по t) уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon F(x, b, u) = 0 \tag{7.107}$$

и, в частности, доказано *существование* периодического решения для достаточно малых ε (см. также проблему 10.15) ●

8. ПОВЕДЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ t

8.1. Общие указания

В большинстве рассмотренных до сих пор случаев мы изучали эволюционные задачи на интервале $[0, T]$, где T — заданное конечное число.

В многочисленных приложениях, где можно решить задачу для *произвольного* конечного T, важно знать поведение $u(t)$ при $t \to +\infty$.

Другой вопрос — найти решение (если оно существует), имеющее заданное поведение при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$, *например ограниченное по* t (в подходящем пространстве по x).

Как всегда, все сводится к тому, чтобы получить новые априорные оценки. В этом параграфе мы приведем несколько примеров таких оценок ●

8.2. Ограниченные на $\mathbb{R}_t$ решения эволюционных уравнений с монотонными параболическими операторами

Сначала мы установим один результат о поведении решения при $t \to +\infty$.

Пусть V — банахово пространство (с нормой $\| \ \|$), являющееся плотным множеством в гильбертовом пространстве H (со скалярным произведением $(\ , \ )$ и нормой $| \ |$), причем вложение непрерывно, и пусть V' — сопряженное к V пространство (с нормой $\| \ \|_*$):

$$V \subset H \subset V'. \tag{8.1}$$

Рассмотрим оператор $v \to A(v)$: $V \to V'$, такой, что[1]

$$\begin{gathered} A\colon V \to V' \text{ является монотонным семинепрерывным} \\ \text{оператором, } (A(v), v) \geqslant \alpha \|v\|^p, \quad \alpha > 0, \quad 1 < p < \infty, \\ \forall v \in V, \quad \|A(v)\|_* \leqslant c\|v\|^{p-1}. \end{gathered} \tag{8.2}$$

---

[1] Эти предположения можно существенно ослабить.

Возьмем

$$f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(0, \infty; V')\,[1], \tag{8.3}$$

причем пусть

$$\int_t^{t+1} \|f(\sigma)\|_*^{p'}\, d\sigma \leqslant C_1 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{8.4}$$

Тогда для любого конечного $T > 0$, согласно § 1 гл. 2, найдется единственная функция u, являющаяся решением задачи

$$u \in L^p(0, T; V), \tag{8.5}$$

$$u' + A(u) = f \quad \text{в} \quad]0, T[, \tag{8.6}$$

$$u(0) = 0. \tag{8.7}$$

Так как T — произвольное конечное число, то

$$u \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; V). \tag{8.8}$$

Теперь будет доказана

Теорема 8.1. *Предположим, что выполнены условия* (8.1) — (8.4). *Пусть* u — *решение задачи* (8.5) — (8.7). *Тогда существует такая константа* c_2, *что*

$$|u(t)| \leqslant c_2 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{8.9}$$

$$\int_t^{t+1} \|u(\sigma)\|^p\, d\sigma \leqslant c_2 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{8.10}$$

Доказательство. Функция $t \to u(t)$: $\{t \geqslant 0\} \to H$ непрерывна. Разобьем полупрямую $[0, +\infty[$ на интервалы $[j-1, j]$, $j = 1, 2, \ldots$, и пусть

$$t_j \in [j-1, j], \quad |u(t_j)| = \sup_{t \in [j-1,\, j]} |u(t)|, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{8.11}$$

Из (8.6) следует, что для произвольных s и $t > 0$, $s < t$:

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)|^2 + \int_s^t (A(u), u)\, d\sigma = \int_s^t (f, u)\, d\sigma,$$

откуда, учитывая (8.2), получаем

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)|^2 + \alpha \int_s^t \|u(\sigma)\|^p\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_s^t \|f(\sigma)\|_*^{p'}\, d\sigma \right)^{1/p'} \left(\int_s^t \|u(\sigma)\|^p\, d\sigma \right)^{1/p}. \tag{8.12}$$

---

[1] $L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; X)$ — пространство таких функций g, что $g \in L^p(0, T; X)$ при любом конечном T.

Идея доказательства состоит в том, что мы применим неравенства (8.12) к точкам t_j и t_k; поскольку не исключается равенство $t_{j+1}=t_j$, мы будем применять его к t_j и t_{j+2}.

Положим

$$M=\left(\left(\frac{3c_1}{\alpha^{p'}}\right)^{2/p}d^2+\frac{6c_1}{\alpha^{p'/p}}\right)^{1/2}, \tag{8.13}$$

где d является «константой вложения» $V\to H$, $|v|\leqslant d\|v\|$.

Мы покажем, что

$$|u(t_{j+2})|\leqslant\max(|u(t_j)|, M). \tag{8.14}$$

Проведем доказательство для $j=1$; оно годится для любого j. Если

$$|u(t_3)|\leqslant|u(t_1)|,$$

то доказательство закончено! Поэтому предположим, что

$$|u(t_3)|>|u(t_1)|. \tag{8.15}$$

В силу (8.12) для $t=t_3$, $s=t_1$:

$$\frac{1}{2}|u(t_3)|^2+\alpha\int_{t_1}^{t_3}\|u\|^p d\sigma\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}|u(t_1)|^2+\left(\int_{t_1}^{t_3}\|f\|_*^{p'}d\sigma\right)^{1/p'}\left(\int_{t_1}^{t_3}\|u\|^p d\sigma\right)^{1/p}, \tag{8.16}$$

откуда, сравнивая (8.15) и (8.16), получим

$$\alpha\left(\int_{t_1}^{t_3}\|u\|^p d\sigma\right)^{1/p'}<\left(\int_{t_1}^{t_3}\|f\|_*^{p'}d\sigma\right)^{1/p'}. \tag{8.17}$$

Однако $t_3-t_1\leqslant 3$, а тогда в силу (8.4)

$$\int_{t_1}^{t_3}\|f\|_*^{p'}d\sigma\leqslant 3c_1,$$

и (8.17) приводит к оценке

$$\int_{t_1}^{t_3}\|u\|^p d\sigma<\frac{3c_1}{\alpha^{p'}}. \tag{8.18}$$

Так как $t_3 - t_1 \geqslant 1$, то ввиду (8.18) существует такое $\tau \in [t_1, t_3]$, что

$$\|u(\tau)\| \leqslant \left(\frac{3c_1}{\alpha^{p'}}\right)^{1/p} = c_3, \tag{8.19}$$

откуда

$$|u(\tau)| \leqslant c_3 d. \tag{8.20}$$

Применим теперь (8.12) для $t = t_3$ и $s = \tau$; получим (используя (8.18))

$$\frac{1}{2}|u(t_3)|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u(\tau)|^2 + (3c_1)^{1/p'} \frac{(3c_1)^{1/p}}{\alpha^{p'/p}},$$

откуда, учитывая (8.20), найдем

$$|u(t_3)|^2 \leqslant (c_3 d)^2 + \frac{6c_1}{\alpha^{p'/p}} = M^2.$$

Эта оценка доказывает (8.14), откуда

$$|u(t)| \leqslant \max(\max_{t \in [0,2]} |u(t)|, M) = c_2; \tag{8.21}$$

отсюда следует (8.9).

Применяя теперь (8.12) к $\{t+1, t\}$, мы получим, что

$$\alpha \int_t^{t+1} \|u\|^p d\sigma \leqslant \frac{1}{2} c_2^2 + c_1^{1/p'} \left(\int_t^{t+1} \|u\|^p d\sigma\right)^{1/p},$$

откуда следует (8.10)●

Теперь мы установим *существование решений, ограниченных на* $\mathbb{R}_t$:

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1 *и дополнительно*[1] *предположим, что*

$$\textit{вложение } V \to H \textit{ компактно.} \tag{8.22}$$

Рассмотрим функцию f, *определенную на* $\mathbb{R}_t$ *и такую, что*

$$f \in L^{p'}_{\text{loc}}(-\infty, +\infty; V'), \tag{8.23}$$

$$\int_t^{t+1} \|f(\sigma)\|_*^{p'} d\sigma \leqslant c_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{8.24}$$

Тогда существует такая функция u, *что*

$$u' + A(u) = f \quad \textit{при} \quad -\infty < t < \infty, \tag{8.25}$$

$$u \in L^\infty(-\infty, +\infty; H), \tag{8.26}$$

$$\int_t^{t+1} \|u(\sigma)\|^p d\sigma \leqslant \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{8.27}$$

---

[1] См. проблему 10.17.

Доказательство. 1) По теореме 8.1 для любого целого $n > 0$ существует и притом только одна такая функция u_n, что

$$u'_n + A(u_n) = f \quad \text{на} \quad]-n, +\infty[, \tag{8.28}$$

$$u_n(-n) = 0, \tag{8.29}$$

$$|u_n(t)| \leqslant c_2 \quad \forall t \geqslant -n, \tag{8.30}$$

причем константа c_2 *такая же*, как в теореме 8.1, и

$$\int\limits_t^{t+1} \|u_n(\sigma)\|^p \, d\sigma \leqslant c_2 \quad \forall t \geqslant -n. \tag{8.31}$$

2) Теперь мы *переформулируем* (8.31). Для этого продолжим u_n на $\mathbb{R}$ нулем при $t < -n$; теперь u_n всюду будет обозначать продолженную функцию. Далее, если X — банахово пространство и g принадлежит $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t; X)$, то через $\mathscr{T}g$ *обозначим* функцию, определенную равенством

$$\mathscr{T}g(t) = «\sigma \to g(t+\sigma)»: [0, 1] \to X; \tag{8.32}$$

таким образом, $\mathscr{T}g$ является функцией на $\mathbb{R}_t$ *со значениями в* $L^p(0, 1; X)$ и

$$\|\mathscr{T}g(t)\|_{L^p(0, 1; X)} = \left(\int\limits_0^1 \|g(t+\sigma)\|_X^p \, d\sigma\right)^{1/p} = \left(\int\limits_t^{t+1} \|g(\sigma)\|_X^p \, d\sigma\right)^{1/p}. \tag{8.33}$$

Тогда (8.31) эквивалентно тому, что

> функции $\mathscr{T}u_n \in L^\infty(\mathbb{R}_t; L^p(0, 1; V))$ принадлежат ограниченному множеству в этом пространстве при $n \to \infty$. (8.34)

3) Теперь мы можем так выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_n, чтобы

$$u_n \to u \ \text{в} \ L^\infty(\mathbb{R}_t; H) \ *\text{-слабо (в силу (8.30))}, \tag{8.35}$$

$$\mathscr{T}u_n \to \mathscr{T}u \ \text{в} \ L^\infty(\mathbb{R}_t; L^p(0, 1; V)) \ *\text{-слабо (в силу (8.34))}^{1)}, \tag{8.36}$$

$$A(u_n) \to \chi \ \text{в} \ L^{p'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t; V') \ \text{слабо}^{2)}. \tag{8.37}$$

Из (8.28) мы также выводим, что

$$u' + \chi = f \tag{8.38}$$

и, следовательно,

$$u' \in L^{p'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t; V'). \tag{8.39}$$

---

[1] Следует отметить, что если выполнено (8.35), то, например, $\mathscr{T}u_n \to \mathscr{T}u$ в смысле распределений на $\mathbb{R}_t$ со значениями в $L^2(0, 1; H)$.

[2] То есть $A(u_n) \to \chi$ в $L^{p'}(s, t; V')$ слабо для всех конечных s и t.

Итак, теорема будет доказана, коль скоро мы проверим, что

$$\chi = A(u). \tag{8.40}$$

Для этого возьмем $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_t)$, $\theta(t) \geqslant 0$, $\varphi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t; V)$ и положим

$$X_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(A(u_n) - A(\varphi), u_n - \varphi)\,dt \quad (X_n \geqslant 0). \tag{8.41}$$

Продолжая уравнение (8.28) на все $\mathbb{R}$:

$$u'_n + A(u_n) = f_n, \quad f_n = \begin{cases} f & \text{при } t > -n, \\ 0 & \text{при } t < -n, \end{cases} \tag{8.42}$$

мы найдем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(A(u_n), u_n)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n, \theta u_n)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(u'_n, u_n)\,dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n, \theta u_n)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' |u_n|^2\,dt. \tag{8.43}$$

Однако, согласно (8.42) и (8.38),

$$u'_n \to f - \chi = u' \text{ в } L^{p'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}; V'), \tag{8.44}$$

и благодаря предположению (8.22) и теореме о компактности 5.1 гл. 1 получаем

$$u_n \to u \text{ в } L^2(s, t; H) \text{ *сильно для всех конечных* } s, t. \tag{8.45}$$

Теперь мы можем перейти к пределу в (8.43). Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(A(u_n), u_n)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f, \theta u)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' |u|^2\,dt;$$

в силу (8.38) правая часть равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\chi, u)\,dt$$

и, таким образом,

$$X_n \to \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\chi - A(\varphi), u - \varphi)\,dt. \tag{8.46}$$

Поскольку $X_n \geqslant 0$, из (8.46) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\chi - A(\varphi), u - \varphi)\,dt \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}; V). \tag{8.47}$$

Подставляя в (8.47)

$$\varphi = u - \lambda\psi, \quad \psi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t;\ V), \quad \lambda > 0,$$

мы после деления на λ найдем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\chi - A(u - \lambda\psi),\ \psi)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\psi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t;\ V),$$

и устремляя $\lambda \to 0$, выведем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\chi - A(u),\ \psi)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\psi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t;\ V),$$

откуда

$$\theta(\chi - A(u)) = 0,$$

а поскольку последнее имеет место $\forall\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_t)$, $\theta \geqslant 0$, то мы приходим к (8.40) ●

Мы можем дополнить теорему 8.2 одним результатом о единственности.

Теорема 8.3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 8.2. *Допустим, что*

$$(A(u) - A(v),\ u - v) \geqslant \gamma|u - v|^2, \quad \gamma > 0, \quad \forall u,\ v \in V. \qquad (8.48)$$

Тогда задача (8.25), (8.26), (8.27) *допускает не более одного решения.*

Доказательство. Пусть u и v суть два возможных решения и $w(t) = u(t) - v(t)$. Имеем

$$w'(t) + A(u(t)) - A(v(t)) = 0,$$

откуда, учитывая (8.48),

$$(w'(t),\ w(t)) + \gamma|w(t)|^2 \leqslant 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(\exp 2\gamma t\,|w(t)|^2) \leqslant 0;$$

но тогда, например, $\exp 2\gamma t\,|w(t)|^2 \geqslant |w(0)|^2$ при $t < 0$, что возможно только тогда, когда $w = 0$ (в силу (8.26) $w(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_t;\ H)$) ●

8.3. Случай параболических неравенств

Постановка задачи. Пусть теперь дополнительно задано

$$K \text{ — выпуклое замкнутое множество в } V, \quad 0 \in K. \qquad (8.49)$$

Мы желаем узнать, существует ли функция u, обладающая свойствами (8.26), (8.27) и такая, что

$$\begin{gathered} u(t) \in K \quad \text{почти всюду}, \\ (u'(t),\ v-u(t)) + (A(u(t)),\ v-u(t)) \geqslant (f(t),\ v-u(t)) \quad \forall v \in K. \end{gathered} \tag{8.50}$$

A priori можно представить себе два подхода:

(i) решить неравенство (8.50) при $t \geqslant -n$ с начальным условием $u_n(-n)=0$ (как в случае уравнений, ср. (8.28) и (8.29)) и попытаться получить оценки, аналогичные тем, которые были получены для уравнений;

(ii) применить *метод штрафа* (§ 6 гл. 3).

Мы будем следовать методу (ii); на этом пути нам не удалось получить ничего большего, чем одно весьма частное обобщение теоремы 8.2.

Теорема 8.4. *Предположим, что V — гильбертово пространство и*

$$A \in \mathscr{L}(V;\ V'),$$

причем

$$(Av,\ v) \geqslant \alpha \| v \|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V. \tag{8.51}$$

Пусть задано множество K, удовлетворяющее (8.49). *Предположим, что имеет место* (8.22). *Пусть задана функция f, причем*

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_t;\ H), \quad \int\limits_t^{t+1} \| f'(\sigma) \|_*^2\, d\sigma \leqslant c_4 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{8.52}$$

Тогда существует единственная функция u, обладающая следующими свойствами:

$$u,\ u' \in L^\infty(\mathbb{R}_t;\ H), \tag{8.53}$$

$$\int\limits_t^{t+1} (\| u \|^2 + \| u' \|^2)\, d\sigma \leqslant c_5 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{8.54}$$

$$u(t) \in K \quad \forall t, \tag{8.55}$$

$$\begin{gathered} (u'(t),\ v-u(t)) + (Au(t),\ v-u(t)) \geqslant (f(t),\ v-u(t)) \\ \forall v \in K, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{8.56}$$

Доказательство. 1) Пусть β — оператор штрафа (гл. 3, § 5), связанный с K. Из доказательства теоремы 8.2 видно, что $\forall\varepsilon > 0$ существует u_ε, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_t;\ H),\quad u_\varepsilon \text{ ограничены в } L^\infty(\mathbb{R}_t;\ H) \text{ при } \varepsilon\to 0, \tag{8.57}$$

$$\int_t^{t+1} \| u_\varepsilon(\tau)\|^2 \leqslant c_6 \text{ (константа не зависит от } \varepsilon), \tag{8.58}$$

$$u_\varepsilon' + Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f \quad \text{на} \quad \mathbb{R}_t. \tag{8.59}$$

Теперь нам надо устремить ε к 0.

Для того чтобы проходило доказательство типа приведенного в теореме 8.2, нужна *сильная* сходимость последовательности u_ε в $L^2(s, t;\ H)$. Однако из (8.59) *прямо не получается* оценка для u_ε'; мы получим эту оценку, *налагая дополнительное условие* (8.52) *на* f.

2) Мы покажем, что

$$u_\varepsilon' \text{ ограничены в } L^\infty(\mathbb{R}_t;\ H) \text{ при } \varepsilon\to 0, \tag{8.60}$$

$$\int_t^{t+1} \| u_\varepsilon'(\tau)\|^2\, d\tau \leqslant c_7. \tag{8.61}$$

Действительно, вернемся к доказательству теоремы 8.2. Функция u_ε получается как предел при $n\to\infty$ решений $u_{\varepsilon n} = u_n$ (ε — фиксировано) задачи

$$\begin{aligned} &u_n' + Au_n + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_n) = f, \quad t \geqslant -n,\\ &u_n(-n) = 0. \end{aligned} \tag{8.62}$$

Можно продифференцировать (8.62) по t:

$$\begin{aligned} &u_n'' + Au_n' + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_n))' = f',\\ &u_n(-n) = 0,\ u_n'(-n) = f(-n) \quad \text{(так как } \beta(0) = 0). \end{aligned} \tag{8.63}$$

Замечая, что

$$\int_s^t (\beta(u_n)',\ u_n') \geqslant 0 \quad \forall s,\ t\ (\geqslant -n),$$

мы сможем заключить, что

$$\begin{aligned} &|u_n'(t)| \leqslant \text{(константа, не зависящая от } n \text{ и } \varepsilon)\\ &\text{(поскольку, как и выше, } |f(t)| \leqslant \text{const}), \end{aligned} \tag{8.64}$$

$$\int_t^{t+1} \| u_n'(\sigma)\|^2\, d\sigma \leqslant \text{(константа, не зависящая от } n \text{ и } \varepsilon). \tag{8.65}$$

Теперь (8.60) и (8.61) будут следовать из (8.64) и (8.65).

3) В силу (8.57), (8.58), (8.60), (8.61) можно выделить подпоследовательность, обозначаемую опять через u_ε, так, чтобы

$$u_\varepsilon \to u, \quad u'_\varepsilon \to u' \text{ в } L^\infty(\mathbb{R}_t;\ H) \ast\text{-слабо}, \tag{8.66}$$

и в обозначении (8.32)

$$\mathcal{T}u_\varepsilon \to \mathcal{T}u, \quad \mathcal{T}u'_\varepsilon \to \mathcal{T}u' \text{ в } L^\infty(\mathbb{R}_t;\ L^2(0,\ 1;\ V)) \ast\text{-слабо}. \tag{8.67}$$

Мы можем также считать, что $\beta(u_\varepsilon) \to g$ в $L^2(\mathbb{R}_t;\ V')$. Однако в силу (8.59) $\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon(f - u'_\varepsilon - Au_\varepsilon) \to 0$, скажем, в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t;\ V')$ и, следовательно,

$$\beta(u_\varepsilon) \to 0 \text{ в } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t;\ V'), \quad \varepsilon \to 0. \tag{8.68}$$

С другой стороны, если $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t)$, $\dot\theta \geqslant 0$, то из (8.59) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\beta(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon)\,dt \to 0. \tag{8.69}$$

Тогда $\beta(u) = 0$ и, следовательно, функция u удовлетворяет (8.53), (8.54), (8.55). Для $v \in K$ и $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t)$, $\theta \geqslant 0$, мы выведем из (8.59), что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\,[(u'_\varepsilon,\ v - u_\varepsilon) + (Au_\varepsilon - f,\ v - u_\varepsilon)]\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\,\frac{1}{\varepsilon}(\beta(v) - \beta(u_\varepsilon),\ v - u_\varepsilon)\,dt \geqslant 0 \text{ (так как } \beta(v) = 0)$$

и, кроме того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\,[(u'_\varepsilon,\ v) + (Au_\varepsilon,\ v) - (f,\ v - u_\varepsilon)]\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' |u_\varepsilon|^2\,dt \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(Au_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\,dt. \tag{8.70}$$

Однако, поскольку вложение $V \to H$ компактно, то

$$u_\varepsilon \to u \text{ в } L^2(s,\ t;\ H) \textit{ сильно} \text{ для всех конечных } s,\ t, \tag{8.71}$$

и, следовательно, в левой части (8.70)

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' |u_\varepsilon|^2\,dt \to \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' |u|^2\,dt.$$

Поскольку, с другой стороны,

$$\liminf \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(Au_\varepsilon, u_\varepsilon)\,dt \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(Au, u)\,dt,$$

мы получим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta[(u', v) + (Au, v-u) - (f, v-u)]\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' |u|^2\,dt \geqslant 0$$

и, кроме того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta[(u' + Au - f, v-u)]\,dt \geqslant 0,$$

причем последнее имеет место $\forall \theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_t)$, $\theta \geqslant 0$; следовательно,

$$(u' + Au - f, v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

Тем самым *существование* решения доказано.

4) *Единственность.* Пусть u_1 и u_2 суть два возможных решения и $w = u_1 - u_2$. Подставляя $v = u_2$ (соответственно u_1) в соответствующие неравенства (8.56), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \alpha\|w(t)\|^2 \leqslant 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \alpha d|w(t)|^2 \leqslant 0.$$

Доказательство заканчивается таким же образом, как в теореме 8.3●

8.4. Различные замечания

Замечание 8.1. У Прузе [2] можно найти оценки, аналогичные оценкам из п. 8.2, для *гиперболических* уравнений

$$u'' + Au + \gamma(u') = f,$$

где, например,

$$\gamma(u') = |u'|^{p-2}u', \text{ если } n \leqslant 5 \text{ и } 2 \leqslant p \leqslant 2 + \frac{4}{n-1}●$$

Замечание 8.2. Вопрос о поведении на бесконечности решений задачи с начальными условиями очевидным образом связан с вопросом об *устойчивости* решений этой задачи; мы уже отмечали в комментариях к гл. 1, как в этих вопросах можно использовать функцию Ляпунова. В этой связи мы отсылаем к книге Зубова [1] (гл. 5); что касается *приближен-*

ного построения (в конечномерном случае) функций Ляпунова, то см. Бхатия и Сеге [1], Сеге [1], Сеге, Ариенти и Сутти [1].

Невозможно перечислить все практические задачи, связанные с устойчивостью; в этой связи мы отсылаем к Чандрасекару [1] ●

Замечание 8.3. Задача о поведении при $t \to \infty$ решений нелинейных гиперболических задач встречается в теоретической физике: см. Сигал [1], [2], Штраусс [4], [5] и литературу, указанную в этих работах ●

9. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Общие указания

Как мы уже говорили, по своему характеру этот параграф отличается от остальной книги. Несмотря на полные доказательства (по крайней мере мы надеемся, что они таковыми являются!), наше изложение будет в большой степени эвристическим; мы докажем *существование* некоторых операторов (или некоторых функционалов), *«ядра» которых удовлетворяют нелинейным уравнениям в частных производных с некоторыми граничными условиями.* Вопросы единственности здесь не рассматриваются; результаты о единственности известны для некоторых встречающихся здесь уравнений в частных производных, однако в весьма специальных классах (в которых, впрочем, имеется и существование); эти результаты желательно было бы обобщить.

9.2. Задачи об управлении без ограничений

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим в $\mathscr{H}$ неограниченный оператор L с областью определения $D(L)$, плотной в $\mathscr{H}$; предполагается, что L — замкнутый оператор. Снабдив $D(L)$ нормой

$$(|\varphi|^2 + |L\varphi|^2)^{1/2}\,^{1)},$$

мы будем предполагать, что

$$\begin{gathered} L \text{ является изоморфизмом } D(L) \text{ и } \mathscr{H}, \text{ причем} \\ (L\varphi, \varphi) \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in D(L). \end{gathered} \tag{9.1}$$

---

[1] Через | | обозначается норма в $\mathscr{H}$, а через (,) — соответствующее скалярное произведение.

Пусть $\mathcal{U}$ — гильбертово *пространство управлений*. Рассмотрим

$$B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{H}). \tag{9.2}$$

Тогда для заданного *управления* $v \in \mathcal{U}$ *состоянием* $y(v)$ системы будет (по определению) принадлежащее $D(L)$ решение уравнения

$$Ly(v) = f + Bv, \quad f \text{ задано в } \mathcal{H}. \tag{9.3}$$

Для $v \in \mathcal{U}$ соответствующая *стоимость* задается функционалом[2]

$$J(v) = |y(v)|^2 + \|v\|_{\mathcal{U}}^2. \tag{9.4}$$

Очевидно, что существует и притом только один такой элемент $u \in \mathcal{U}$, что

$$J(u) \leqslant J(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{9.5}$$

Мы будем говорить, что u является *оптимальным управлением* задачи; здесь на управление v не налагается никаких ограничений (v пробегает *все* пространство $\mathcal{U}$).

Как легко видеть, *u характеризуется* тем, что

$$(y(u), y(v) - y(0)) + (u, v)_{\mathcal{U}} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{9.6}$$

Если мы введем *сопряженное состояние* $p(v)$:

$$p(v) \in D(L^*), \qquad L^*p(v) = y(v), \tag{9.7}$$

то (9.6) будет эквивалентно уравнению

$$(L^*p(u), y(v) - y(0)) + (u, v)_{\mathcal{U}} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U},$$

откуда

$$(p(u), L(y(v) - y(0))) + (u, v)_{\mathcal{U}} = 0$$

и далее

$$(p(u), Bv) + (u, v)_{\mathcal{U}} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U},$$

так что окончательно

$$B^*p(u) + u = 0. \tag{9.8}$$

Мы можем *исключить* u, и окончательно получить следующее утверждение:

Предложение 9.1. *Оптимальное управление имеет вид*

$$u = -B^*p, \tag{9.9}$$

---

[2] Описанная схема ни в коей мере не покрывает «все» ситуации, которые могут встретиться на практике. Более систематически эти вопросы изучены, например, у Лионса [15].

где p *задается решением* $\{y, p\} \in D(L) \times D(L^*)$ *системы*

$$\begin{aligned} &Ly + BB^*p = f, \\ &L^*p - y = 0 \bullet \end{aligned} \tag{9.10}$$

9.3. Аппроксимация посредством искусственной эволюционной задачи

Введем переменное r, которое будет играть роль *искусственного времени*[1]). Мы будем считать, что

$$0 \leqslant r \leqslant 1; \tag{9.11}$$

введем пространства $L^2(0, 1; \mathscr{H})$, $L^2(0, 1; \mathscr{U})$ и т. д.; для $v \in L^2(0, 1; \mathscr{U})$ мы определим Bv, полагая $Bv(r) = B(v(r))$ почти всюду на интервале $(0, 1)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для $v \in L^2(0, 1; \mathscr{U})$ мы определим состояние (искусственное) $y_\varepsilon(v)$ как решение задачи

$$\varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{dr} + Ly_\varepsilon = f + Bv, \tag{9.12}$$

$$y_\varepsilon(0) = 0, \tag{9.13}$$

где

$$f(r) = f \quad \forall r \in [0, 1]. \tag{9.14}$$

Эта задача безусловно имеет единственное решение, поскольку (согласно (9.1)) — L является инфинитезимальным производящим оператором (сжимающей) полугруппы в $\mathscr{H}$.

Далее мы определим новую функцию стоимости

$$J_\varepsilon(v) = \| y_\varepsilon(v) \|^2_{L^2(0,\, 1;\, \mathscr{H})} + \| v \|^2_{L^2(0,\, 1;\, \mathscr{U})}. \tag{9.15}$$

Опять мы получим существование и единственность оптимального управления u_ε:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(0, 1; \mathscr{U}), \tag{9.16}$$

которое (как и в предложении 9.1) имеет вид

$$u_\varepsilon = -B^*p_\varepsilon \quad (\text{т. е.} \quad u_\varepsilon(r) = -B^*(p_\varepsilon(r))), \tag{9.17}$$

где p_ε определяется из решения $\{y_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ задачи

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{dr} + Ly_\varepsilon + BB^*p_\varepsilon = f, \\ &-\varepsilon \frac{dp_\varepsilon}{dr} + L^*p_\varepsilon - y_\varepsilon = 0, \\ &y_\varepsilon(0) = 0, \quad p_\varepsilon(1) = 0 \bullet \end{aligned} \tag{9.18}$$

---

[1]) Следует отметить, что оператор L уже сам может содержать время.

Более того, при условиях общего вида на L можно проверить, что при $\varepsilon \to 0$

$$y_\varepsilon \to y, \quad p_\varepsilon \to p \quad \text{в} \quad L^2(0, 1; \mathscr{H}), \tag{9.19}$$

где через y (соответственно через p) обозначена функция, равная y (соответственно p) во всех точках отрезка $[0, 1]$ ●

9.4. Расцепление искусственной эволюционной задачи

Теперь мы используем возможность «расцепления» задачи (9.18). Мы наметим здесь только основные линии рассуждений (см. Лионс [15]).

Для $s \in]0, 1[$ рассмотрим задачу (ср. (9.18))

$$\begin{gathered}
\varepsilon \frac{d\varphi}{dr} + L\varphi + BB^*\psi = 0, \quad s < r < 1, \\
-\varepsilon \frac{d\psi}{dr} + L^*\psi - \varphi = 0, \quad s < r < 1, \\
\varphi(s) = h \in \mathscr{H}, \quad \psi(1) = 0.
\end{gathered} \tag{9.20}$$

Эта задача допускает единственное решение, так что $\psi(s)$ однозначно определяет отображение

$$h \to \psi(s),$$

являющееся *непрерывным* отображением $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$. Следовательно, существует такое $Q_\varepsilon(s)$, что

$$Q_\varepsilon(s) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H}), \tag{9.21}$$

$$\psi(s) = Q_\varepsilon(s)\, h. \tag{9.22}$$

Можно проверить (см. Лионс [15], гл. 3 п. 4.2, где проверяются аналогичные свойства), что

$$Q_\varepsilon(s)^* = Q_\varepsilon(s), \tag{9.23}$$

$$(Q_\varepsilon(s)\, h, h) \geqslant 0 \quad \forall h \in \mathscr{H}. \tag{9.24}$$

Пусть, с другой стороны, $\{\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon\}$ является решением задачи

$$\begin{gathered}
\varepsilon \frac{d\alpha_\varepsilon}{dr} + L\alpha_\varepsilon + BB^*\beta_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad]s, 1[, \\
-\varepsilon \frac{d\beta_\varepsilon}{dr} + L^*\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad]s, 1[, \\
\alpha_\varepsilon(s) = 0, \quad \beta_\varepsilon(1) = 0.
\end{gathered} \tag{9.25}$$

Положим далее

$$\beta_\varepsilon(s) = \rho_\varepsilon(s). \tag{9.26}$$

Отсюда выводится *тождество*

$$p_\varepsilon(s) = Q_\varepsilon(s)\, y_\varepsilon(s) + \rho_\varepsilon(s) \quad \forall s \in [0, 1] \bullet \tag{9.27}$$

Теперь проделаем *формальные* вычисления; подставляя тождество (9.27) во второе уравнение (9.18), получим (штрих означает производную по r)

$$-\varepsilon Q'_\varepsilon y_\varepsilon - Q_\varepsilon(\varepsilon y'_\varepsilon) - \varepsilon\rho'_\varepsilon + L^*(Q_\varepsilon y_\varepsilon + \rho_\varepsilon) - y_\varepsilon = 0;$$

заменяя $\varepsilon y'_\varepsilon$ его выражением из первого уравнения (9.18), найдем

$$\begin{aligned}(-\varepsilon Q'_\varepsilon + Q_\varepsilon L + L^* Q_\varepsilon + Q_\varepsilon BB^* Q_\varepsilon - I)\, y_\varepsilon +{} \\ + (-\varepsilon\rho'_\varepsilon + L^*\rho_\varepsilon + Q_\varepsilon BB^*\rho_\varepsilon - Q_\varepsilon f) = 0,\end{aligned}$$

откуда мы можем заключить, что

$$-\varepsilon Q'_\varepsilon + Q_\varepsilon L + L^* Q_\varepsilon + Q_\varepsilon BB^* Q_\varepsilon = I, \tag{9.28}$$

$$-\varepsilon\rho'_\varepsilon + L^*\rho_\varepsilon + Q_\varepsilon BB^*\rho_\varepsilon = Q_\varepsilon f. \tag{9.29}$$

(Что касается интерпретации (9.28), то см. Лионс [15], гл. 3, где встречается аналогичная ситуация.)

Поскольку $\rho_\varepsilon(1) = 0$, уравнения (9.28), (9.29) можно дополнить «начальными» условиями

$$Q_\varepsilon(1) = 0, \tag{9.30}$$

$$\rho_\varepsilon(1) = 0 \bullet \tag{9.31}$$

Таким образом, мы получили следующее «расцепление» задачи (9.18):

(i) мы решаем уравнение (9.28) при условии (9.30), что однозначно определяет $Q_\varepsilon(r)$, $0 \leqslant r \leqslant 1$; далее мы решаем задачу (9.29), (9.31);

(ii) оптимальное управление задается равенствами

$$u_\varepsilon = -B^*(p_\varepsilon) = -B^*(Q_\varepsilon y_\varepsilon + \rho_\varepsilon) \bullet$$

9.5. Расцепление исходной задачи управления

Из (9.19) следует, что при $\varepsilon \to 0$ мы получим

$$p = Qy + \rho, \tag{9.32}$$

где

$$QL + L^*Q + QBB^*Q = I, \tag{9.33}$$

$$L^*\rho + QBB^*\rho = Qf. \tag{9.34}$$

В частности, получается

Предложение 9.2. *Существует такой оператор* $Q \in \mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H})$, *что*

$$Q^* = Q, \tag{9.35}$$

$$(Qh, h) \geqslant 0 \qquad \forall h \in \mathscr{H}, \tag{9.36}$$

и Q *удовлетворяет* (9.33) [1] ●

В приложениях L является уравнением в частных производных, а $\mathscr{H}$ — функциональным пространством. Следовательно (согласно теореме о ядре Л. Шварца [3]), Q выражается обобщенным ядром; в этом случае (9.33) будет нелинейным уравнением в частных производных; примеры таких уравнений мы сейчас приведем.

9.6. Примеры

Пример 9.1. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ. Возьмем

$$L = -\Delta, \quad \mathscr{H} = L^2(\Omega), \quad D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{9.37}$$

Тогда $Q \in \mathscr{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H})$ выражается с помощью ядра $Q(x, \xi)$, являющегося распределением в $\Omega_x \times \Omega_\xi$. Поскольку $\delta(x - \xi)$ является ядром оператора I, то, считая для простоты, что

$$\mathscr{U} = \mathscr{H}, \quad B \text{ — тождественный оператор,}$$

получим

$$-\Delta_x Q - \Delta_\xi Q + \int\limits_\Omega Q(x, \xi_1) Q(\xi_1, \xi)\, d\xi_1 = \delta(x - \xi), \tag{9.38}$$

$$Q(x, \xi) = Q(\xi, x), \tag{9.39}$$

$Q(x, \xi)$ является ядром, отображающим $L^2(\Omega)$ в $D(L)$, и $(Q\varphi, \varphi) \geqslant 0$, (9.40)

$$Q(x, \xi) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in \Omega \; ● \tag{9.41}$$

Замечание 9.1. Отметим, что таким образом мы получили существование решения $Q(x, \xi)$ в очень специальном классе, отвечающем тому обстоятельству, что $Q(x, \xi)$ является ядром отображения $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$ в $D(L)$ ●

Пример 9.2. Возьмем теперь

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \text{ в цилиндре } \Omega \times]0, T[,$$

$$\mathscr{H} = L^2(\Omega \times]0, T[)$$

и $D(L)$ определим из условия $y(0) = 0$.

---

[1] Естественно, что нужно уточнить области определения, поскольку L является неограниченным оператором. При некоторых условиях на L можно показать, что Q отображает $\mathscr{H}$ в $D(L^*)$.

Тогда Q опять выражается посредством ядра $Q(x, \xi, t, \tau)$, так что

$$Q\varphi(x, t) = \int\limits_{\Omega \times [0, T]} Q(x, \xi, t, \tau)\,\varphi(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{9.42}$$

При этом Q должно удовлетворять (мы везде берем $\mathcal{U} = \mathcal{H}$, B — тождественный оператор) уравнению

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial \tau} - \Delta_x Q - \Delta_\xi Q + {} \\ + \int\limits_{\Omega \times [0, T]} Q(x, \xi_1, t, \tau_1)\,Q(\xi_1, \xi, \tau_1, \tau)\,d\xi_1\,d\tau_1 = \\ = \delta(x - \xi)\,\delta(t - \tau), \tag{9.43}$$

$$x \in \Omega, \quad \xi \in \Omega, \quad t, \tau \in]0, T[,$$

причем

$$Q(x, \xi, t, \tau) = Q(\xi, x, \tau, t), \tag{9.44}$$

$$Q \text{ является ядром отображения } \mathcal{H} \text{ в } \mathcal{H}, \quad (Q\varphi, \varphi) \geqslant 0, \tag{9.45}$$

$$Q(x, \xi, T, \tau) = 0, \quad Q(x, \xi, t, T) = 0, \tag{9.46}$$

$$Q(x, \xi, t, \tau) = 0, \text{ если } x \in \Gamma, \quad \xi \in \Omega \\ (\text{и, следовательно, если } x \in \Omega, \ \xi \in \Gamma). \tag{9.47}$$

В этом случае решение имеет очень специальную структуру:

$$Q(x, \xi, t, \tau) = P(x, \xi, t)\,\delta(t - \tau), \tag{9.48}$$

где $P(x, \xi, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$-\frac{\partial P}{\partial t} - \Delta_x P - \Delta_\xi P + \int\limits_{\Omega} P(x, \xi_1, t)\,P(\xi_1, \xi, t)\,d\xi_1 = \delta(x - \xi), \tag{9.49}$$

$$P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \tag{9.50}$$

$$\int\limits_{\Omega \times \Omega}\!\!\int P(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,\varphi(x)\,dx\,d\xi \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega), \tag{9.51}$$

$$P(x, \xi, T) = 0. \tag{9.52}$$

Система (9.49)—(9.52) и системы такого типа очень важны для приложений; $P(x, \xi, t)$ является *ядром некоторого «фильтра»* (см. литературу, приведенную в комментариях) ●

Замечание 9.2. Что касается полного обоснования приведенных выше эвристических замечаний и других примеров такого типа, то см. Бенсусан [1], [2], Лионс [15], гл. 3.

Пример 9.3. Возьмем оператор L таким же, как в примере 9.2, но область определения зададим условиями периодичности по t:

$$y(0)=y(T).$$

Тогда Q будет выражаться через ядро (как в (9.42)), являющееся решением задачи (9.43), (9.44), (9.45), (9.47); граничные условия (9.46) надо заменить условиями

$$\begin{aligned} &Q(x,\ \xi,\ 0,\ \tau)=Q(x,\ \xi,\ T,\ \tau),\\ &Q(x,\ \xi,\ t,\ 0)=Q(x,\ \xi,\ t,\ T). \end{aligned} \tag{9.53}$$

Носитель (по $\{t,\ \tau\}$) решения не сводится к диагонали $t=\tau$ (как в случае примера 9.2), и, следовательно, нет аналога представления (9.48) ●

9.7. Различные замечания

Замечание 9.3. Идея «расцепления» задачи (9.18) путем введения семейства задач (9.20) может быть применена в других ситуациях, не связанных с оптимальным управлением.

Вот один *простой* пример. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad t>0, \qquad 0<x<x_0, \tag{9.54}$$

с начальным условием

$$u(x,\ 0)=0, \qquad 0<x<x_0, \tag{9.55}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(0,\ t)=0, \qquad t>0,\\ &u(x_0,\ t)=g(t) \text{ — заданная функция } (t>0). \end{aligned} \tag{9.56}$$

Не уточняя предположений, налагаемых на различные введенные функции, рассмотрим *семейство* краевых задач (b играет роль *параметра*):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=0, \quad t>0, \quad 0<x<b,\\ &\varphi(x,\ 0)=0, \quad 0<x<b,\\ &\varphi(0,\ t)=0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}(b,\ t)=h(t). \end{aligned} \tag{9.57}$$

Эта задача имеет единственное решение, тем самым однозначно определена функция $\varphi(b,\ t)$ и линейное отображение

$$h\to\varphi(b,\ t). \tag{9.58}$$

Продолжая все известные и неизвестные функции нулем при $t < 0$ и замечая, что прямая $t = 0$ не играет никакой специальной роли, мы проверим, что отображение (9.58) *является непрерывным отображением, переводящим* $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R}_t)$ *в себя*[1]) *и коммутирующим со сдвигами*. Следовательно (Л. Шварц [1]),

$$\begin{gathered}\varphi(b,\ t) = G(b) \underset{(t)}{*} h\,^{2)},\\ G(b) \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R}_t), \quad G(b) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.\end{gathered} \tag{9.59}$$

Подставляя в (9.57) $h(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b,\ t)$, мы найдем, что $\varphi = u$ при $0 < x < b,\ t > 0$, откуда

$$u(b,\ t) = G(b) \underset{(t)}{*} \frac{\partial u}{\partial x}(b,\ t),$$

а так как b произвольно, то тем самым мы доказали существование[3]) семейства таких распределений $G(x) \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R}_t)$, $G(x) = 0$ при $t < 0$, что

$$u(x,\ t) = G(x) * \frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t). \tag{9.60}$$

Покажем, что

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t} \underset{(t)}{*} G = \delta(t), \tag{9.61}$$

$$G(0,\ t) = 0. \tag{9.62}$$

Из (9.60) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} G(x) \underset{(t)}{*} \frac{\partial u}{\partial x} + G(x) * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

и, учитывая (9.54), найдем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial G(x)}{\partial x} \underset{(t)}{*} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G(x)}{\partial t} \underset{(t)}{*} u,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} \underset{(t)}{*} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G(x)}{\partial t} \underset{(t)}{*} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x\, \partial t} \underset{(t)}{*} u. \tag{9.63}$$

---

[1]) $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R}_t)$ — пространство распределений на $\mathbb{R}$ с ограниченным слева носителем.

[2]) Символом $\underset{(t)}{*}$ обозначается свертка по t.

[3]) Ясно, что в этом частном случае мы можем вычислить $G(x)$; однако приведенные здесь рассуждения являются общими.

Теперь заменим в (9.63) функцию u ее выражением (9.60) и подставим в (9.54):

$$\left(\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x\,\partial t} \underset{(t)}{*} G(x)\right) \underset{(t)}{*} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0. \tag{9.64}$$

Мы можем зафиксировать x в (9.64); тогда функция $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ может быть произвольной, следовательно,

$$\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x\,\partial t} \underset{(t)}{*} G(x) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G(x)}{\partial x} + \frac{\partial G(x)}{\partial t} * G(x)\right) = 0. \tag{9.65}$$

Однако из условия $u(0, t) = 0$ следует (9.62) и далее из равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} G(0, t) * \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

следует, что

$$\frac{\partial G}{\partial x}(0, t) = \delta(t);$$

вместе с (9.65) это приводит к (9.61) ●

С помощью преобразования Лапласа по t (которое законно) можно проверить, что если

$$H(x, p) = \int_0^\infty G(x, t)\, e^{-pt}\, dt, \qquad \operatorname{Re} p > 0, \tag{9.66}$$

то из (9.61), (9.62) следует, что

$$\frac{dH}{dx} + pH^2 = 1, \qquad H(0, p) = 0, \tag{9.67}$$

откуда

$$H(x, p) = p^{-1/2}\, \operatorname{th}(xp^{1/2}) \; ● \tag{9.68}$$

Замечание 9.4. Мы изучали задачи *без ограничений*, т. е. управление v могло пробегать все пространство $\mathcal{U}$. Если заранее предписано, чтобы управление v принадлежало некоторому подмножеству $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ в $\mathcal{U}$ (множеству допустимых управлений), то также возможно некоторое разбиение, аналогичное приведенному выше, но с «нелинейным ядром», которое приводит к уравнениям в частных или функциональных производных (см. Лионс [15], гл. 3, § 14).

Другая возможность состоит в использовании динамического программирования, по поводу которого мы отсылаем к работам Беллмана, указанным в литературе (см. также Тартар [1]) ●

10. ПРОБЛЕМЫ

10.1. Можно ли получить какой-нибудь результат о существовании и *единственности* для задачи, изученной в п. 1.3?

10.2. Для многочисленных приложений было бы весьма интересно систематически изучить «дважды» нелинейные эволюционные задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u)+\mathcal{A}(u)=f,$$

где β и $\mathcal{A}$ нелинейны (См. замечания 1.4 и 1.5.)

10.3. Можно ли решить задачи для неравенств, рассмотренных в п. 3.4, в том случае, когда множество K *не переводится* в себя отображением $v\to v_M$?

10.4. Пусть $V=W_0^{2,p}(\Omega)$, а A_0: $V\to V'$ — псевдомонотонный и коэрцитивный оператор. Пусть оператор B имеет вид

$$B(u)=u\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}+2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

Этот оператор *не отображает* V в V', если $p<3n/(n+3)$. Если, например, $u\in\mathcal{D}(\Omega)$, то

$$(B(u),\ u)=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)dx=0.$$

Можно ли для заданного f из $W^{-2,p'}(\Omega)$ решить уравнение

$$A_0(u)+B(u)=f? \qquad (10.1)$$

Аналогичный вопрос можно поставить для неравенств (мы уже не можем пользоваться срезками, поскольку они не переводят V в себя).

Задачи такого типа имеются и для эволюционных уравнений.

10.5. Остается ли в силе теорема 4.2 при $n>4$? (Напомним также задачу 13.5 гл. 1, которая связана с аппроксимацией посредством систем типа Коши — Ковалевской.)

10.6. *Нелинейная задача о следах.* Пусть u пробегает множество таких функций, что

$$|u|^{\alpha-2}u\in L^p(0,T;\ W_0^{1,p}(\Omega)),$$
$$u'\in L^{p'}(0,\ T;\ W^{-1,p'}(\Omega)).$$

Какое множество пробегает $u(0)$?

10.7. Имеет ли место единственность для периодических решений уравнений Навье — Стокса (ср. с теоремой 6.1)?

10.8. Можно ли распространить теорему 6.2 на случай $n > 2$?

10.9. Можно ли распространить теорему 6.2 ($n \geqslant 2$) на *произвольные* выпуклые множества K?

10.10. Имеет ли место существование (и единственность) периодических по t решений системы Карлемана, изученной в § 2?

10.11. Остается ли в силе теорема 7.1 при $1 < p < 2$?

10.12. Можно ли найти *сильные* периодические решения в теореме 7.1 (при дополнительных предположениях на f)? (Один подобный результат получен Прузе [6] для $p \leqslant 2 + \frac{4}{n-1}$, $n \leqslant 5$.)

10.13. Существуют ли периодические решения у уравнения

$$u'' - \Delta u + |u|^{p-2} u = f?$$

10.14. Сохраняется ли в силе теорема 7.2, если 1) $\gamma_0 = 0$, или 2) K — выпуклое замкнутое множество, вообще говоря, не удовлетворяющее (7.63), или 3) $p < 2$?

10.15. Можно ли обобщить результаты Рабиновича [1] на *неравенства*?

10.16. Изучение периодических по t решений парных задач типа тех, которые были рассмотрены в п. 9.1 гл. 1.

10.17. Остается ли в силе теорема 8.2 без предположения (8.22)?

10.18. Имеет ли место существование (слабого) ограниченного решения вариационного неравенства (как в теореме 8.4) без предположения (8.52), а только при условиях (8.3), (8.4)?

10.19. Агмон и Ниренберг [1], [2] установили логарифмическую выпуклость нормы решения уравнения

$$\frac{du}{dt} + Au = 0.$$

Кнопс и Пейи [1] распространили это свойство на уравнения Навье — Стокса, применяя его к вопросу об устойчивости «задачи назад». (Эти свойства выпуклости используются при изучении некорректных задач, см. Дуглас [1], Лаврентьев [1], Пейн [2].) *Обладают ли свойствами такого типа решения параболических вариационных неравенств?*

(В этой связи отметим, что можно распространить на *неравенства* метод квазиобращения (см. Латтес и Лионс [1]), правда с довольно большими техническими трудностями.)

10.20. Можно ли распространить теорему 8.4 на некоторые *нелинейные* операторы A (например, монотонные)?

10.21. Можно ли изучить непосредственно (не обращаясь к управлению) задачу (9.43), (9.44), (9.45), (9.47), (9.53)?

11. КОММЕНТАРИИ

Метод конечных разностей часто используется для доказательства существования решения нелинейной задачи; он играет существенную роль в работе С. Л. Каменомостской [1] и в нескольких работах О. А. Олейник, см., в частности, [1].

Возможность аппроксимации эволюционных параболических неравенств с помощью конечных разностей (дискретизация *по всем* переменным) была установлена автором [22] (в этой работе рассматривались *явные* схемы и изучалась их устойчивость). Р. Темам применил метод семидискретизации к изучению задач для неравенств с ненулевыми начальными данными (устное сообщение).

Результаты п. 1.3, равно как и метод доказательства, принадлежат Равьяру [3], [6].

Задача, рассмотренная в § 2, поставлена Карлеманом в [1]; эта задача уже изучалась Колоднером [2], Овсянниковым [1], а с численной точки зрения — Султангазиным [1]. Приведенные в тексте результаты принадлежат Темаму [4]. Метод расщепления постоянно используется в численном анализе; ограничимся ссылками на Марчука [1], Яненко [1], Темама [1] и литературу, приведенную в этих работах (см. также Троттер [1]). Доказательство теоремы существования (для системы уравненяй, возникающей в метеорологии), использующее метод расщепления, анонсировано Демидовым и Марчуком [1]. Другое применение метода расщепления к прямому изучению уравнений Риккати принадлежит Темаму [8], [9].

Аппроксимация задач типа Навье — Стокса (которые не являются задачами Коши — Ковалевской) с помощью систем типа Коши — Ковалевской была дана автором [23]. Здесь возможны различные варианты. Например, можно трактовать условие $\operatorname{div} u = 0$ *как ограничение*, «оштрафовав» которое, мы придем к системе

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu\Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} u_{\varepsilon i}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u_\varepsilon)u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}(\operatorname{div} u_\varepsilon) = f$$

которая принадлежит к типу систем Коши — Ковалевской и для которой имеются результаты, аналогичные теоремам 4.1 и 4.2. Эти модификации полезны для численных аппроксимаций уравнений Навье — Стокса; см. Темам [2], [3], Шорин [1], [2].

Что касается других методов, то можно обратиться к Жаме, Ласко и Равьяру [1], Гриспану [1]. По поводу других уравненяй, которые можно приближать системами типа Коши — Ковалевской, см. Лионс [11].

Другой метод аппроксимации (мультипликативные интегралы) развит Ароншайном [1].

Результаты п. 5.2 принадлежат Фужите [1] (где можно найти множество дополнительных свойств).

Результаты п. 5.3 принадлежат Таленти [1]. Пространства Жеврея и их варианты играют важную роль в теории уравнений в частных производных (по тем же самым соображениям, что и в п. 5.3; при подходящей «подгонке» параметров, характеризующих эти пространства, можно получать результаты о сходимости в соответствующих топологиях); после работы Жеврея [1] близкие идеи применялись в многочисленных работах; см. Лере — Ойя [1], Фридман [7], Лионс — Мадженес [2], [4], Танабе [1] и т. д.

По поводу другого выбора пространств (но в том же круге идей) см. Трев [1] (особенно гл. 1).

В доказательстве из п. 5.2 неявно используется теория полугрупп. Можно систематически применять теорию полугрупп и, в частности, *«дробные» степени* полугрупп для решения нелинейных эволюционных уравнений. Последнее очевидным образом связано с *теорией интерполяции банаховых пространств*, поскольку и тут и там мы рассматриваем *системы норм* (в одном случае они получаются в результате интерполяции, в другом — при переходе к «дробным» степеням) с тем, чтобы *выбрать «наилучшую» норму*. По поводу применения «интерполяции» к уравнениям Навье — Стокса см. Лионс [3]; другая точка зрения развивалась многочисленными авторами, в частности, отметим работы Фужиты — Като [1], С. Крейна [1], Като — Фужиты [1], Раскина и Соболевского [1], Соболевского [1], [2], [3], Погореленко и Соболевского [1]. Комбинируя этот подход с последовательными приближениями, Фужита и Масуда [1] получили существование и единственность локального по t решения уравнений Навье — Стокса, принадлежащего пространству $V_{5/4}$ (в обозначениях § 6 гл. 1; размерность пространства равна трем).

По поводу применения теории линейных полугрупп к одной нелинейной задаче математической физики см. работу Гросса [1].

Отметим также работы Да Прато [1], касающиеся некоторых нелинейных уравнений в частных производных в алгебрах (обобщение уравнений Риккати, возникающее в теории оптимального управления; см. § 9 этой главы). Естественно, что мы не изучили здесь все итерационные методы! В частности, следует указать на метод Ньютона и его варианты (см. Антосевич [1] и литературу в этой работе); после линеаризации (посредством применения дифференциалов) основная трудность (в который раз) состоит в таком *выборе пространств*, при котором на каждой итерации *не терялась бы гладкость*; см., например, как все это реализовано у Равьяра [5]; в более сложных случаях, когда, по-видимому, невозможно выбрать пространство, «сохраняющее гладкость», следует комбинировать каждую итерацию со *«сглаживанием»* — в этом состоит метод Мозера [1]. Что касается других итеративных методов, то см. работы Кошелева [1], Петришина [1] и Сибони [1] (где можно найти численные применения). По поводу общих результатов, использующих свойства дифференциалов, см., в частности, Похожаев [2], [4] (ср. с замечанием 2.5 гл. 1).

Теорема 6.1 при $n = 2$ принадлежит Проди [2], на общий случай она была распространена (методом, отличным от приведенного в тексте) Прузе [4]. Исследованию периодических решений уравнений Навье — Стокса посвящены многочисленные работы; отметим работы Серрина [3], Юдовича [3], Каниеля и Шинброта [2] и автора [24], [8]. См. также Такешита [1].

По поводу изучения *почти периодических* решений уравнений Навье — Стокса см. Америо [2], Фояш [2] и Прузе [5]. По поводу изучения «квазистационарных» решений в смысле Басса (см. Агостини и Басс [1]) мы отсылаем к работе Во Кхак [1].

Использование теорем о неподвижных точках для разыскания периодических решений является классической идеей Пуанкаре. Применения к другим параболическим уравнениям, отличным от уравнений Навье — Стокса, можно найти у Проди [4], [5], Браудера [12], [13] (см. также литературу в этих работах). Другие применения теоремы о неподвижной точке можно найти у Аттена [1], Вайава [1].

Результат теоремы 7.1 (о периодических решениях гиперболических уравнений) принадлежит Проди [3]. Метод эллиптической регуляризации гиперболических задач принадлежит Штраусу [5]. Проди в цитированной выше работе применяет не эллиптическую регуляризацию, а метод Фаэдо — Галёркина; при этом существование периодического решения у приближенной системы доказывается с помощью теории Лере — Шаудера. Задача о периодических решениях нелинейных гиперболических уравнений явилась предметом многочисленных работ; отметим, в частности, работы Браудера [12], [13], Чезари [1], Флейшмана и Фикева [1], Проди [3], [5], [6], Прузе [6], Рабиновича [1] и приведенную в этих работах литературу.

Что касается периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, то см. Америо [3]; указанный результат в комбинации с методом Фаэдо — Галёркина может быть полезен для уравнений в частных производных.

Оценки, приведенные в п. 8.2, опираются на методы Америо [2], Америо — Прузе [1], Прузе [3] (где можно найти более общие результаты, чем в п. 8.2).

Следуя цитированной выше работе Америо — Прузе, можно, исходя из результатов п. 8.2, изучить *почти периодические решения* рассматриваемых уравнений (аналогично результаты п. 8.3 позволяют изучать *почти периодические решения эволюционных неравенств*).

«Уравнения Риккати», приведенные в примере 9.2, в конечномерном случае (т. е. в том случае, когда $L = d/dt + A$, A — матрица) связаны с теорией *фильтров* Калмана — Бюси [1]; им посвящена обширная литература. По поводу бесконечномерного случая (с *неограниченными операторами*) см. Бевсусан [1], Кушнер [1], Лионс [15]; приведенное здесь изложение, — равно как и пример 9.3, — по-видимому, являются новыми (здесь не приводятся весьма длинные технические подробности). Что касается прямого изучения задач для уравнений в частных производных, возникающих в этой связи, то Да Прато [1] получил общую локальную теорему существования; глобальный результат (см. замечание 2.5) имеется у Темама [8] (по поводу одного частного случая см. работу Кушнера [1]) и Да Прато [3]. По поводу других точек зрения и других примеров см. Флеминг [1], [3], Люкес и Рассел [1], Менри [1], Миттер и Филлипсон [1], Стратонович [1], Уонхем [1], а по поводу аппроксимации решений — Неделич [1].

Замечание 9.3 естественным образом приводит к «инвариантному вложению» (Invariant Imbedding), которое, если смотреть на него с более «физической» точки зрения, *непосредственно* приводит к уравнениям нового типа (и к которым можно опять прийти с помощью процедуры, указанной в замечании 9.3); см., например, Беллман, Калаба и Винг [1].

По поводу нелинейных уравнений в частных производных, встречающихся в динамическом программировании, см. приведенные в литературе работы Беллмана, Беллмана и Калабы, Беллмана и Лемана, Кушнера и Клейнмана.

Естественно, что в (кратком) § 9 приведен только один круг задач для уравнений в частных производных, возникающих в вариационном исчислении. Здесь, в частности, мы не касались вопросов, связанных с *минимальными поверхностями*; ограничимся по этому поводу ссылками на Бомбьери [1], Бомбьери, де Джорджи, Джусти [1], Бомбьери, де Джорджи, Миранду [1], Финна [6], де Джорджи [1], [2], Дженкинса и Серрина [1], Морри [1], Серрина [4], [5] и на литературу, приведенную в этих работах. Вообще, многие задачи дифференциальной геометрии приводят к задачам для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. См., в частности, Ниренберг [4].

Другие задачи для уравнений в частных производных возникают по другим поводам; отметим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана (см. Грэд [1], Гиро [1] и литературу в этих работах) и задачи математической экономики, которые приводят либо к уравнениям в частных производных «нетрадиционных» типов (см. Бергер и Мейерс [1]), либо к нелинейным задачам, уже изученным по другим поводам (см. работу Самуэльсона, Маккина [1], связанную с задачами типа Стефана, которые атакуются *вероятностными* методами; см. также Маккин [1], [2], Григелионис и Ширяев [1]). По поводу других задач со свободной границей см. Чернов [1]. В связи с *вероятностными* методами укажем на работу Донскера [1], в которой *интегралы в функциональных пространствах* применялись к изучению решений уравнения Бюргерса со стремящейся к нулю вязкостью. См. также Флеминг [5].

В связи с задачей *идентификации* систем, описываемых уравнениями в частных производных, мы приходим к задачам, называемым *«обратными»*, в которых неизвестными являются коэффициенты системы уравнений в частных производных, при этом известна структура системы и значения решений (отвечающих подлежащим определению неизвестным коэффициентам); см. Джоис [1], Дуглас и Джонс [1], М. М. Лаврентьев [1]. По поводу одной экстремальной задачи в этом круге вопросов см. Пуччи [1].

БИБЛИОГРАФИЯ

Агаев Г. Н.

[1] О разрешимости нелинейных операторных уравнений в пространствах Банаха, *ДАН СССР*, **174** : 6 (1967), 1239—1242.

Агмон (Agmon S.)

[1] The L_p approach to the Dirichlet problem, I, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **13** : 4 (1959), 405—448.

Агмон, Дуглис, Ниренберг (Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.)

[1] Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959), 623—727; II, id., **17** (1964), 35—92. (Перевод: Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.)

Агмон, Ниренберг (Agmon S., Nirenberg L.)

[1] Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 121—239.

[2] Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 207—229.

Агостини, Басс (Agostini L., Bass J.)

[1] Les théories de la turbulence, *Publ. Sc. et Tech. du Ministère de l'Air*, 2^e édition. Paris, 1960.

Агранович М. С.

[1] К теории граничных задач для симметризуемых систем 1-го порядка, *Матем. сб.*, 73 : 2 (1967), 161—197.

Агранович М. С., Вишик М. И.

[1] Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, *УМН*, **19**, Вып. 3 (1964), 53—161.

Альбертони, Черчиньяни (Albertoni S., Cercignani C.)

[1] Metodi Approssimati per la resoluzione dell'equazione di Boltzmann, Aspette generali e loro applicazioni, Univ. Milano, 1966.

Америо (Amerio L.)

[1] Exposé Rome, mars 1968.

[2] Soluzioni quasi-periodiche di equazioni funzionali lineari e non lineari, Troisième réunion des Math. d'expression latine, Namur, 20—23 septembre 1965, 15—33.

[3] Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenzial non lineari quasiperiodiche, o limitati, *Annali Mat.*, 39 (1955), 97—119.

Америо, Прузе (Amerio L., Prouse G.)

[1] Abstract almost periodic functions and functional equations, Van Nostrand, New York.

[2] On the non-linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, XLIV (1968), note I, fasc. 4, 491—492; note II, fasc. 5, 1—10.

Амес (редактор) (Ames W. F.)

[1] Non linear partial differential equations, Acad. Press, 1967.

Аннин (Annin B. D.)

[1] Existence and uniqueness of the solution of the elastic-plastic torsion problem for a cylindrical bar of oval cross-section, *P. J. Appl. Math. Mech.*, 29 (1965), 1038—1047.

Ан Тон (An Ton B. A.)

[1] Non linear parabolic initial value problems, *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1970), 69—80.

[2] On strongly non linear parabolic equations, *J. Funct. Anal.*, **7**:3 (1971), 147—155.

Антосевич (Antosiewicz H. A.)

[1] Newton's Method and Boundary value problems, *J. Computer and System Sciences*, 2 (1968), 177—202.

[2] Boundary value problems for non linear ordinary differential equations, *Pacific J. Math.*, 17 (1966), 191—197.

Арима, Хасегава (Arima R., Hasegawa Y.)

[1] On global solutions for mixed problem of a semi-linear differential equation, *Proc. Japan Acad. Sc.*, **39** (1963), 721—725.

Аронсон Г. (Aronsson G.)

[1] On the partial differential equation $u_x^2u_{xx} + 2u_xu_yu_{xy} + u_y^2u_{yy} = 0$, *Arkiv Mat.*, 7 (1968), 395—425.

Аронсон Д. (Aronson D. G.)

[1] Regularity properties of flows through porous media, *SIAM J. Appl. Math.*, **17**:2 (1969), 461—467.

Аронсон, Серрин (Aronson D. G., Serrin J.)

[1] A maximum principle for non linear parabolic equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, XXI (1967), 291—305.

[2] Local behavior of solutions of quasi linear parabolic equations, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **25** (1967), 81—122.

Ароншайн (Aronszajn N.)

[1] Notes on evolution equations, Univ. of Kansas (в печати).

Ароншайн, Гальирдо (Aronszajn N., Gagliardo E.)

[1] Interpolation spaces and interpolation methods, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **68** (1965), 51—118.

Артола (Artola M.)

[1] Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à des problèmes de retard, *Ann. E. N. S.*, 2 (1969), 137—253.

Асплунд (Asplund E.)

[1] Averaged norms, *Israel J. Math.*, **5** (1967), 227—233.

[2] Positivity of duality mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 200—203.

Асплунд, Рокафеллар (Asplund E., Rockafellar R. T.)

[1] Gradients of convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 443—467.

Аттен (Atten P.)

[1] Existence, unicité et détermination de la solution de l'équation des champs électriques ionisés, *Sem. Analyse Numérique*, Grenoble, 1968.

Базли, Цвален (Bazley N., Zwahlen B.)

[1] Remarks on the bifurcation of solutions of a non linear eigenvalue Problem. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 28 (1968), 51—58.

Байокки (Baiocchi C.)

[1] Sul problema misto per l'equazione parabolica del tipo del calore, *Rend. Sem. Mat. Padova*, 36 (1966), 80—121.

[2] Teoremi di esistenza e regolarità per certe classi di equazioni differenziali astratte, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4, 72 (1966), 365—418.

Баклановская В. Ф., Хаипова А. Н.

[1] Об одной двумерной задаче нелинейной фильтрации, сб. «Численные методы решения задач математической физики», М., 1966, стр. 237—241.

Балакришнан (Balakrishnan A. V.)

[1] On a new computing technique in optimal control theory and the maximum principle, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 59 : 2 (1968), 373—375.

Барбоза, Вонг (Barbosa L. C., Wong E.)

[1] On a class of interative algorithms for linear inequalities with application to pattern classification, Proc. 1st. Princeton Conf. on Information Sciences and Systems, Princeton Univ., 1967, p. 86—89.

Бардос (Bardos C.)

[1] Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, théorème d'approximation et application àl'équation de transport, *Ann. Sci. E. N. S.*, 3 (1970), 185—233.

Бардос, Брезис (Bardos C., Brézis H.)

[1] Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 266 (1968), 56—59; *J. Diff. Equations*, 6 (1969), 345—394.

Батцер, Беренс (Butzer P. L., Berens H.)

[1] Semi-groups of operators and approximation, Springer Verlag, 1967.

Бауенди, Гривар (Baouendi M. S., Grisvard P.)

[1] Sur une équation d'évolution changeant de type, *J. Funct. Anal. Appl.*, 2 : 3 (1968), 352—367.

Бауенди, Гулауик (Baouendi M. S., Goulaouic P.)

[1] Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 34 : 5 (1969), 361—379.

Бахвалов Н. С.

[1] О параболических системах с малыми параметрами при старших производных, *ДАН СССР*, 142 : 2 (1967), 263—266.

Бейли, Уолтмен (Bailey P., Waltman P.)

[1] On the distance between consecutive zeros for second order differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 14 (1966), 23—30.

Бейли, Шампин, Уолтмен (Bailey P., Shampine L., Waltman P.)

[1] Non linear two point boundary value problems, Acad. Press, 1968.

Беллман (Bellman R.)

[1] Динамическое программирование, М., ИЛ, 1960.

[2] Invariant Imbedding and Multipoint Boundary value Problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 24 (1968), 461—466.

Беллман, Калаба (Bellman R., Kalaba R.)

[1] On a new approach to the numerical solution of a class of partial differential integral equations of transport theory, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **54** (1965), 1293—1296.

[2] Dynamic programming applied to control processes governed by general functional equations, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **48** (1962), 1735—1737.

Беллман, Калаба, Винг (Bellman R., Kalaba R., Wing G. M.)

[1] Invariant Imbedding and Mathematical Physics, I. Particle Processes, *J. Math. Physics*, **1** (1960), 280—308.

Беллман, Леман (Bellman R., Lehman R. S.)

[1] Functional equations in the theory of dynamic programming, XII. Complex operators and min-max operations, *Duke Math. J.*, **28** (1961), 335—343.

Бельтрами (Beltrami E. J.)

[1] Methods of non linear analysis and optimization, Acad. Press, 1969.

Бенсусан (Bensoussan A.)

[1] Sur l'identification et le filtrage de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, *Cahiers IRIA*, **1** (1969), 1—233.

[2] Contrôle optimal stochastique de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles paraboliques, *Rend. Mat. Appl.* Ser. 6, **2** : 1—2 (1969), 137—173.

[3] Filtrage optimal des systèmes linéaires, Paris, Dunod, 1971.

Бенсусан, Кеннет (Bensoussan A., Kenneth P.)

[1] Sur l'analogie entre les méthodes de régularisation et de pénalisation, *Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, n$^{\text{ro}}$ 13 (1969).

Бергер (Berger M. S.)

[1] An eigenvalue problem for non linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120** (1965), 145—184.

[2] A Sturm-Liouville theorem for non linear elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **XX** (1966), 543—582.

[3] An application of the calculus of variations in the large to the equations of non linear elasticity, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 520—525.

[4] On von Karman's Equations and the Buckling of a thin elastic Plate (I), *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 687—719.

[5] Multiple solutions of non-linear operator equations arising from the calculus of variations, Proc. Symp. Pure Maths. XVIII, Part I, A. M. S. Pub. 1970, p. 10—27.

[6] Orlicz spaces and non linear elliptic eigenvalue problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1965), 898—902.

Бергер, Бергер (Berger M. S., Berger M. S.)

[1] Perspectives in non linearity, Benjamin, 1968.

Бергер, Мейерс (Berger M. S., Meyers N. G.)

[1] On a system of non linear partial differential equations arising in Mathematical Economics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 954—958.

Бергер, Файф (Berger M. S., Fife P. C.)

[1] On von Karman's equations and the buckling of a thin elastic plate, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 1006—1011.

Бёрлинг, Ливингстон (Beurling A., Livingston A. E.)

[1] A theorem on duality mappings in Banach spaces, *Ark. Mat.*, **4** (1961), 405—411.

Бомбьери (Bombieri E.)

[1] Régularité des hypersurfaces minimales, *Sém. Bourbaki*, **21** (1968—69), fevrier 1969.

Бомбьери, де Джорджи, Джусти (Bombieri E., de Giorgi E., Giusti E.)

[1] Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent Math.*, 7 (1969), 243—268,

Бомбьери, де Джорджи, Миранда (Bombieri E., de Giorgi E., Miranda M.)

[1] Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **32** (1969), 255—267.

Бони, Курреж, Приуре (Bony J. M., Courrège Ph., Priouret P.)

[1] Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, *Ann. Inst. Fourier*, **18** (1968), 369—521.

Боссавит (Bossavit A.)

[1] Thèse, Paris, 1970.

Браудер (Browder F. E.)

[1] Infinite dimensional manifolds and non linear elliptic eigenvalue problems, *Ann. Math.*, **82** (1965), 459—477.
[2] On non linear wave equations, *Math. Zeitschr.*, **80** (1962), 249—264.
[3] Non linear elliptic boundary value problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 862—874.
[4] Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 780—785.
[5] A new generalization of the Schauder fixed point theorem, *Math. Ann.*, **174** (1967), 285—290.
[6] Non linear maximal monotone operators in Banach space, *Math. Ann.*, **175** (1968), 89—113.
[7] Non linear operators and non linear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Symposium on non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.
[8] Problèmes non linéaires, Presses de l'Univ. de Montréal, 1966.
[9] Existence theorems for non linear partial differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1968; Summer Institute in Global Analysis (в печати).
[10] On a theorem of Beurling and Livingston, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 367—372.
[11] Remarks on non linear interpolation in Banach spaces, *J. Func. Anal.* **4** (1969), 390—403.
[12] Existence of periodic solutions for non linear equations of evolution, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **53** (1965), 1100—1103.
[13] Periodic solutions of non linear equations of evolution in infinite dimensional spaces, Lecture Series in Differential Equations, Univ. of Maryland, March 1966.
[14] The fixed point theory of multivalued Mappings in Topological vector spaces, *Math. Ann.*, **177** (1968), 283—301.

Браудер, Ан Тон (Browder F. E., An Ton B.)

[1] Non linear Functional Equation in Banach Spaces and elliptic super regularization, *Math. Zeitschr.*, **105** (1968), 177—195.

Браудер, Петришин (Browder F., Petryshyn W. V.)

[1] Construction of fixed points of non linear mappings in Hilbert Space, *J. Math. Anal. Appl.*, **20** (1967), 197—228.
[2] The topological degree and Galerkin approximations for non compact operators in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 (1968), 641—646.

[3] Approximation Methods and the generalized topological degree for non linear mappings in Banach spaces, *J. Func. Anal.*, **3** (1969), 217—245.

Браудер, де Фигейредо (Browder F. E., de Figueiredo D. G.)

[1] J-Monotone non linear operators in Banach spaces, *Proc. Needer. Akad. Amsterdam*, **69**, 28 (1966), 412—420.

Браудер, Штраусс (Browder F. E., Strauss W.)

[1] Scattering for non linear wave equations, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 23—43.

Браун, фон Нейман (Brown G. W., von Neuman J.)

[1] Solutions of games by differential equations, in Contributions to the theory of games, I, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956, 73—79.

Брезис (Brézis H.)

[1] Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, **18** (1968), 115—175.

[2] On some degenerate non linear parabolic equations, Proc. Symposium on non linear Functional Analysis, Chicago, avril 1968.

[3] Inéquations variationnelles associées à des opérateurs d'évolution, NATO Summer School, Venise, Juin 1968.

[4] Sur l'équivalence de certaines inéquations variationnellés. (См. Брезис, Сибони [2]).

[5] Inéquations variationnelles, *J. Math. Pures. Appl.*, 1972 (в печати).

[6] Perturbation non linéaire d'opérateurs maximaux monotones, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 566—569.

Брезис, Кранделл, Пази (Brézis H., Crandall M., Pazy A.)

[1] Perturbations of non linear maximal monotone sets in Banach space, *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 : 11 (1970), 123—144.

Брезис, Лионс (Brézis H., Lions J. L.)

[1] Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **264** (1967), 928—931.

Брезис, Пази (Brézis H., Pazy A.)

[1] Semi groups of non linear contractions on convex sets, *J. Funct. Anal.*, **6** : **2** (1970), 237—281.

Брезис, Сибони (Brézis H., Sibony M.)

[1] Méthodes d'Approximation et d'Itération pour les opérateurs monotones, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **28** (1968), 59—82.

[2] Equivalence de deux inéquations variationnelles et applications, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **41** : 4 (1971), 254—165.

Брезис, Стампаккья (Brézis H., Stampacchia G.)

[1] Sur la regularité de la solution d'inéquations elliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 153—180.

Брембл, Пейн (Bramble J. H., Payne L. E.)

[1] On the approximation of steady state solutions of the Navier Stokes equations.

Бродский (Brodsky A. R.)

[1] Weak wave operators for the non linear wave equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **137** (1969), 237—244.

Брюа (Bruhat Y.)

[1] Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Acta Math.*, **88** (1952), 141—225.

[2] Théorèmes d'existence en mécanique des fluides relativistes, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 155—175.

Бурбаки Н.

[1] Интегрирование. (Меры, интегрирование мер), М., Наука, 1967.

Бхатия, Сеге (Bhatia N. P., Szegö G. P.)

[1] Dynamical systems; stability theory and applications, Lecture Notes in Mathematics, n^ro^ 35, Springer, 1967.

Бюргерс (Burgers J. M.)

[1] Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, 43 (1940), 2—12.

Бюси, Джозеф (Bucy R. S., Joseph P. D.)

[1] Filtering for stochastic processes with applications to guidance, Interscience, 1968.

Вайан (Vaillant A.)

[1] Problème des conditions initiales sur une variété complète (cas non statique), *J. Math. Pures Appl.*, 48 : 3 (1969), 173—305.

Вайнберг М. М.

[1] Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., Физматгиз, 1956.

Вайнберг М. М., Качуровский Р. И.

[1] К вариационной теории нелинейных операторов и уравнений, *ДАН СССР*, **129** (1959), 1199—1202.

Вальтер (Walter W.)

[1] Ein Existenzbeweis für nichtlineare parabolische Differentialgleichungen aufgrund der Linienmethode, *Math. Zeitschr.*, **107** (1968), 173—188.

де Вейга (de Veiga)

[1] Sulla hölderianita delle soluzioni di alcune disequationi variazionali con condizieni unilatere al bordo, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **83** (1969), 73—112.

Вельте (Velte W.)

[1] Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **16** (1964), 97—125.

[2] Stabilitats und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylorproblem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 22 (1966), 1—14.

Вентцель Т. Д.

[1] Априорная оценка решений некоторых квазилинейных параболических систем 1, *Вестник МГУ*, сер. матем., **3** (1967), 27—31.

Вишик М. И.

[1] О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков, *Матем. сб.* **59** (доп.) (1962), 289—325.

[2] Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, *Тр. Моск. матем. о-ва*, 12 (1963), 125—184.

[3] О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных уравнений с быстро растущими коэффициентами в классах Орлича, *ДАН СССР*, **151** : 4 (1963), 758—761.

Во Кхак (Vo-Khac K.)

[1] Etude des fonctions quasi stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles, *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire **6** (1965).

Ворович П. И.

[1] О некоторых прямых методах в теории нелинейных колебаний пологих оболочек, *ИАН СССР*, сер. матем., **21** (1957) 747—784.

Гальярдо (Gagliardo E.)

[1] Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in *n* variabili, *Rend. Sem Mat. Padova*, 27 (1957), 284—305.
[2] Interpolazioni di Spazi di Banach e applicazioni, *Ricerche Mat.*, **IX** (1960), 58—81.
[3] Une struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali, *Ricerche Mat.*, **X** (1961), 244—281.
[4] Quasi linear interpolation spaces, Univ. of Kansas. Report, Octobre 1962.

Гарабедян, Спенсер (Garabedian P. R., Spencer D. C.)

[1] Extremal methods in Cavitational flow, *J. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1952), 359—409.

Гарипов (Garipov R. M.)

[1] On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **24** (1967), 352—362.

Гельфанд И. М.

[1] Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений, *УМН*, **XIV**: 2 (1959), 87—158.

Гельфанд И. М., Зуева Н. М., Имшенник В. С., Локуциевский О. В., Рябенький В. С., Хазин Л. Г.

[1] К теории нелинейных колебаний электронной плазмы, *Ж. В. М. и М. Ф.*, 7 (1967), 322—347.

Гилбарг (Gilbarg D.)

[1] Boundary value problems for non linear elliptic equations in *n* variables, Proc. Symp. non linear problems, Madison, Wisc. (1962).
[2] Jets and Cavities, Encyclopedia of Physics, 9, Springer Verlag, 1960.

Гиро (Guiraud J. P.)

[1] Théorie Mathématique de l'équation de Boltzmann, Sixième Symp. Int. Dyn. Gaz Raréfiés, M. I. T. Cambridge (Mass), 1968.

Глимм (Glimm J.)

[1] Solutions in the large for non-linear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 697—715.

Глимм, Лакс (Glimm J., Lax P. D.)

[1] Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 105; AEC Report, 1969.

График Гловински (Glowinski)

[1] Thèse, Paris, 1970.

Годунов С. К., Султангазин У. М.

[1] О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана, *УМН*, **26**: 3 (1971), 3—52.

Головкин К. К.

[1] Новые модельные уравнения движения вязкой жидкости и их однозначная разрешимость, *Труды матем. ин-та Стеклова*, 102 (1967), 29—50.

Гординг (Gårding L.)

[1] Energy inequalities for hyperbolic systems, in Differential Analysis, Bombay Coll., 1964, Oxford Univ. Press, 209—225.

Госсец (Gossez J. P.)

[1] Optimisation pour certains problèmes aux limites non linéaires, *Boll. Unione Mat. Italiana* (1969).

[2] Operateurs monotones non linéaires dans les espases de Banach non réflexifes, *J. Math. Anal. Appl.*, **34** (1971), 371—395.

[3] Ensembles virtuellement convexes et Opérateurs monotones, *Bull. Sci. Math. Paris*, **94** (1970), 73—80.

Гривар (Grisvard P.)

[1] Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, *J. Math.*; **XLV** (1966), 19—290.

[2] Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **25** (1967), 40—63.

[3] Equations différentielles abstraites, *Ann. E. N. S.*, ser. 4, 2 : 3 (1969), 311—395.

Григелионис Б. И., Ширяев А. Н.

[1] О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки для марковских процессов, *Теория вероятн. и применен.*, **11** (4) (1966), 612—631.

Грин (Green J. W.)

[1] An expansion method for parabolic partial differential operators, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **51** (1953), 127—132.

Гринберг (Greenberg J. M.)

[1] On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\rho_0 X_{tt} = E(X_x)X_{xx} + \lambda X_{xxt}$, *J. Math. Anal. Appl.*, **25** (1969), 575—591.

Гринберг, Мак-Ками, Мизел (Greenberg J. M., Mac Camy R. C., Mizel V. J.)

[1] On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$, *J. Math. Mech.*, **17** (1968), 707—728.

Гринспан (Greenspan D.)

[1] Numerical studies of prototype cavity flow problems, M. R. C. Technical Report 751, Univ. of Wisconsin, March 1967.

Гросс (Gross L.)

[1] The Cauchy problem for the coupled Maxwell and Dirac equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **XIX** (1966), 1—15.

Грубб (Grubb G.)

[1] A characterization of the non local boundary value problems associated with an elliptic operator, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **XXII** (1968), 425—513.

Грэд (Grad H.)

[1] Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non linear Boltzmann equations, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **XVII** (1965), 154—183.

Грюнбаум (Grunbaum B.)

[1] A generalization of theorems of Kirszbraun and Minty, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 312—314.

Гудьер, Ходж (Goodier J. N., Hodge P. G., Jr.)

[1] Elasticity and Plasticity, Wiley, 1956. [Перевод: Упругость и пластичность, М., 1960.]

Дайер, Эдмундс (Dyer R. H.; Edmunds D. E.)

[1] On the existence of solutions of the equations of Magnetohydrodynamics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **9** (1962), 403—410.

Да Прато (Da Prato G.)

[1] Equations d'évolution dans des algèbres d'opérateurs et application à des équations quasi linéaires, *J. Math. Pures Appl.*, **48** (1969), 59—107.

[2] Somme d'ápplications non linéaires dans des cones et équations d'évolution dans des espases d'opérateurs, *J. Math. Pure Appl.*, **49** (1970), 289—348.

[3] Somme d'ápplications non linéaires et solutions globales d'équations quasi linéaires dans des espaces de Banach, *Boll. U. M. J.*, 4 (1969), 229—240.

Дафермос (Dafermos C. M.)

[1] The mixed initial-boundary value problem for the equations of non linear one-dimensional viscoelasticity, *J. Funct. Anal.*, **6** (1969), 71—86.

Дебруннер, Флор (Debrunner H., Flor P.)

[1] Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen, *Archiv Math.*, **15** (1964), 445—447.

де Джорджи (de Giorgi E.)

[1] Sulla differenziabilita e l'analiticita della estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Acc. Sci. Torino* (1957), 25—43.

[2] Maggiorazioni a priori relative alle iper superfici minimali, Istituto Naz. di Alta Mat., Symposia Mathematica, vol. II, 1968.

[3] Nuovi teoremi relativi alle misure $(n-1)$ dimensionale in uno spazio ad r dimensioni, *Ricerche Mat.*, **36** (1955), 95—113.

Демидов Г. В., Марчук Г. И.

[1] Теоремы существования решения задачи краткосрочного прогноза погоды, *ДАН СССР*, **170** : 5 (1966), 1006—1008.

Деви, Лионс (Deny J., Lions J. L.)

[1] Les espaces du typed de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, **5** (1953—54), 305—370.

Дерридж (Derridj M.)

[1] Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques, Thèse, Paris, 1970.

Дженкинс, Серрин (Jenkins H., Serrin J.)

[1] The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions, *J. Reine Angew. Math.*, **229** (1968), 170—187.

Джонс (Jones B. F., Jr.)

[1] The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part I, Existence and Uniqueness, *J. Math. Mech.*, **11** (1962), 907—918.

Джонсон (Johnson J. L.)

[1] Global continuous solutions of hyperbolic systems of quasi-linear equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 639—641.

Джонсон, Смоллер (Johnson J. L., Smoller J. A.)

[1] Global solutions of certain hyperbolic systems of quasi linear equations, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), 561—576.

[2] Global solutions of hyperbolic systems of conservation laws in two independent variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 915—918.

Джусти (Giusti E.)

[1] Sulla regolarita parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi-lineari di ordine arbitrario, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Ser. 3, **23** : 1 (1969), 115—141.

Джусти, Миранда (Giusti E., Miranda M.)

[1] Sulla regolarita delle soluzioni deboli di una classe di Sistemi Ellittici Quasi-lineari, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **31** (1968), 173—184.

Диас (Dias J. P.)

[1] La régularité L^∞ pour une classe d'équations et d'inéquations non lineaires du type elliptique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **269** (1969), 14—17.

Диас, Сибони (Dias J. P., Sibony M.)

[1] Méthodes d'approximation pour certains problèmes non linéaires non homogènes, *J. Diff. Equations*, **9** (1971), 182—204.

Дольф, Минти (Dolph C. L., Minty G. J.)

[1] On non linear Integral Equations of the Hammerstein Type. In Non linear Integral Equations, Univ. Wisconsin Press, Madison, 1964, Ed. Anselone; 99—152.

Донскер (Donsker M. D.)

[1] On Function space integrals. In Analysis in Function Space, ed. by Martin and Segal, M. I. T. Press, 1964, 17—30.

Дубинский Ю. А.

[1] Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **64** (106), (1964), 458—480.

[2] Слабая сходимость в нелинейных эллиптнческих и параболических уравиеннях, *Матем. сб.*, **67** (109), (1965), 609—642.

[3] Нелинейные параболические уравнения на плоскости, *Матем. сб.*, **69** (111), (1966), 470—496.

[4] Об одной операторной схеме и разрешимости ряда квазилинейных уравнений механики, *ДАН СССР*, **176** : 3 (1967), 506—508.

[5] Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка, *УМН*, **23** : 1 (1968), 45—90.

[6] Некоторые теоремы вложения в классах Орлича, *ДАН СССР*, **152** (1963), 529—532.

[7] Квазилинейные эллиптнко-параболические уравнения, *Матем. сб.*, **77** : 3 (1968), 354—389.

Дуглас (Douglas J. Jr.)

[1] Approximate continuation of harmonic and parabolic functions, in Numerical Solutions of Partial Differential Equations, Acad. Press, 1966, 353—364.

Дуглас, Джонс (Douglas J., Jr., Jones B. F., Jr.)

[1] The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part II, Numerical Approximation, *J. Math. Mech.*, **11** (1962), 919—926.

Дуглас, Дюпон (Douglas J., Jr., Dupont T.)

[1] The numerical solution of water flooding problems in Petroleum Engineering by variational methods, *Studies in Numerical Analysis*, **2** (1968), 53—63.

Дуглас, Дюпон, Серрин (Douglas J., Jr., Dupont T., Serrin J. B.)

[1] Uniqueness and comparison theorems for non linear elliptic equations in divergence form, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **42** : 3 (1971), 157—168.

Дуглас, Кеннон, Хилл (Douglas J., Jr., Cannon J. R., Hill C. D)

[1] A multi-boundary Stefan problem and the disappearance of phases, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), 21—34.

Дурич (Duric M. D.)

[1] On the interior regularity of weak solutions of non stationary Navier-Stokes equations on a Riemannian Manifold, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **42** (1969), 267—297.

Дюво (Duvaut C.)

[1] Le problème de Signorini en visco-élasticité linéaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **269** (1969), 1044—1046.

Дюво, Лионс (Duvaut C., Lions J. L.)

[1] Sur de nouveaux problèmes d'inéquations posés par la Mécanique I, II, *C. R. Acad. Sc.*, **269** (1969), 510—513, 570—572; Nouvelles inéquations en thermique et thermoelasticité, *C. R. Acad. Sc.*, **269** (1969), 1198—1201; Ecoulement d'un fluide rigide visco plastique incompressible, *C. R. Acad. Sc.*, **270** (1970), 58—61; Sur les équations de Maxwell ..., *C. R. Acad. Sc.*, **270** (1970), 1600—1603.

[2] Les inéquations en Physique et en Mécanique, Paris, Dunod, 1972.

[3] Un problème d'elasticité avec frottement, *J. Mécanique*, **10** (1971), 409—420.

[4] Inéquations en thermoelasticité et magnéto hydrodynamique, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1972 (в печати).

[5] Transfert de chaleur dans un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température, Leray Seminar, december 1971.

Жаме, Ласко, Равьяр (Jamet P., Lascaux P., Raviart P. A.)

[1] Une méthode de résolution numérique des équations de Navier-Stokes, *Numerische Math.*, **16** : 2 (1970), 93—114.

Жеврей (Gevrey M.)

[1] Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, *Ann. E. N. S.*, **35** (1918), 129—190.

Жеймона, Гривар (Geymonat G., Grisvard P.)

[1] Problèmes aux limites elliptiques dans L^p, *Sém. Fac. Sc. Orsay*, janvier-mars 1964.

Жоли (Joly J. L.)

[1] Thesis, Grenoble, 1970 (в печати).

Забуский (Zabusky N. J.)

[1] Exact solution for the Vibrations of a Non Linear continuous Mode String, *Math. Physics*, 3 (1962), 1028—1039.

[2] A Synergetic Approach to Problems of Non linear dispersive Wave Propagation and Interaction, in Ames [1], p. 223—258.

Забуский, Крускал (Zabusky N. J., Kruskal M. D.)

[1] Interaction of solutions in a collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, *Phys. Rev. Letters*, **15** (1965), 240—243.

Зарка (Zarka J.)

[1] Устное сообщение.

Зарубин А. Г.

[1] О задаче стационарной свободной конвекции, *Ж. В. М. и М. Ф.*, **8** (1968), 1378—1383.

Зубов В. И.

[1] Методы А. М. Ляпунова и их применения, Л., 1957.

Ивон (Yvon J. P.)

[1] Application de la pénalisation à la résolution d'un problème de contrôle optimal, *IRIA*, № 2 (1970), 4—45.

Иосида К.
[1] Функциональный анализ, М., Мир, 1967.

Ито (Îto S.)
[1] The existence and the uniqueness of regular solution of non stationnary Navier-Stokes equation, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec.* I, 9 (1961), 103—140.

Калман, Бюси (Kalman R. E., Bucy R. S.)
[1] New results in linear filtering and prediction theory, *J. Basic Eng. ASME*, 83 (1961), 95—107.

Калман, Фалб, Арбиб (Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A.)
[1] Topics in Mathematical system theory, McGraw Hill, 1969. [Перевод: Очерки по математической теории систем, М., 1971.]

Кальдерон, Зигмунд (Calderon A. P., Zygmund A.)
[1] A note on the interpolation of sublinear operators, *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 282—288.

Каменомостская С. Л.
[1] О задачах Стефана, *Матем. сб.*, 53 : 4 (1961), 489—514.

Каниель (Kaniel S.)
[1] Quasi compact non linear Operator in Banach Space and Applications, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 20 (1965), 259—278.
[2] On the motion of a viscous incompressible fluid (в печати).

Каниель, Шинброт (Kaniel S., Shinbrot M.)
[1] Smoothness of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Archive Rat.* Proc. Symp. of non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.
[3] A note on the differentiability of non linear semi-groups, *Proc. Amer. Math. Anal.*, 24 (1967), 363—369.

Каплан (Kaplan S.)
[1] On the growth of solutions of quasi linear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, XVI (1963), 305—330.

Карлеман Т.
[1] Математические задачи кинетической теории газов, М., ИЛ, 1960.

Кастэн, Валадье (Castaing Ch., Valadier M.)
[1] Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 266 (1968), 985—987.

Катабрига (Cattabriga L.)
[1] Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, *Rend. Sem. Mat. Padova*, 31 (1961), 1—33.

Като (Kato T.)
[1] On classical solutions of the two dimensional non stationary Euler Equation, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 25 (1967), 188—200.
[2] Accretive operators and non linear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. of non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.
[3] A note on the differentiability of non linear semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1968, Summer Institute in Global Analysis (в печати).

[4] Non linear semi-groups and evolution equations, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 508—520.
[5] Non linear evolution equations in Banach spaces, *Proc. Symp. Applied Math.*, **XVII** (1965), 50—67.
[6] Perturbation theory for linear operators, Springer, 132, 1966. [Перевод: Теория возмущений линейных операторов, М., 1972.]

Като, Фужита (Kato T., Fujita M.)
[1] On the non stationary Navier-Stokes system, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **32** (1962), 243—260.

Кахан (Kahane C.)
[1] On the Spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **33** (1969), 386—405.

Качуровский Р. И.
[1] О монотонных операторах и выпуклых функционалах, *УМН*, **15**:4 (1960), 213—215.
[2] Нелинейные операторы с ограниченным изменением, монотонные и выпуклые операторы в банаховых пространствах. *УМН*, **21**:5 (1966), 256—257.
[3] Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах, *УМН*, **23**:2 (1968), 121—168.

Каччиополи (Caccioli R.)
[1] Œuvres complètes I, II, Cremonese, 1963.

Келлер Дж. (Keller J. B.)
[1] On solution of non linear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 523—530.

Келлер X. (Keller H. B.)
[1] Numerical methods for two point boundary value problems, Blaisdell, 1968.

Клингельхофер (Klingelhofer K.)
[1] Über nichtlineare Randwertaufgaben der Potential theorie, *Mitt. Math. Sem. Giessen.*, **76** (1967).
[2] Non linear harmonic boundary value problems, I, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **31** (1968), 364—371.

Кнопс, Пейн (Knops R. J., Payne L. E.)
[1] On the stability of solutions of the Navier-Stokes equations backward in time, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **29** (1968), 331—335.

Колоднер (Kolodner I. I.)
[1] Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase, *Comm. Pure Appl. Math.*, **IX** (1956), 1—31.
[2] On Carleman's model for the Boltzman equation, in Non linear problems, Univ. of Wisconsin Press (1963), 285—287.

Комура (Komura Y.)
[1] Non linear semi-groups in Hilbert space, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 493—507.
[2] Differentiability of non linear semi-groups, *J. Math. Soc. Japan*, **21**:3 (1969), 375—402.
[3] Non linear semi-groups in Hilbert spaces, Int. conference on Functional Analysis, Tokyo, April 1969.

Кон, Ниренберг (Kohn J. J., Nirenberg L.)
[1] Degenerate Elliptic-Parabolic equations of second Order, *Comm. Pure Appl. Math.*, **XX** (1967), 797—872.

Конвей, Смит (Conway E. D., Smith D.)

[1] An ordering principle for discontinuous solutions of quasi linear equations, *J. Diff. Equations*, **6** (1969), 110—124.

Конвей, Смоллер (Conway E. D., Smoller J.)

[1] Global solutions of the Cauchy problem for quasi linear first order equations in several space variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, **XIX** (1966), 95—105.

[2] Uniqueness and stability theorem for the generalized solution of the Initial value problem for a class of quasi linear equations in several space variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **23** (1967), 399—408.

Конвей, Хопф (Conway E. D., Hopf E.)

[1] Hamilton's theory and generalized solutions of the Hamilton Jacobi equation, *J. Math. Mech.*, **13** (1964), 939—986.

Кондрашов В. И.

[1] О некоторых свойствах функций из пространства L_p, *ДАН СССР*, **48** (1945), 563—566.

Кортвег, де Фрис (Korteweg D. J., de Vries G.)

[1] On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, *Phil. Mag.*, **39** (1895), 422—443.

да Коста-Кабрал (da Costa-Cabral D.)

[1] Sur les problèmes aux limites non linéaires pour une équation parabolique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **268** (1969), 320—322.

Котлар (Cotlar M.)

[1] Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert, Cürsos y seminarios de matematice, Fasc. 2, Univ. Buenos-Aires, 1959.

Кошелев А. И.

[1] О сходимости одного приближенного метода для вырождающихся эллиптических уравнений, *Известия ВУЗов*, Математика, 3 (1965), 98—104.

Коэн (Cohen D. S.)

[1] Positive solutions of non linear eigen-value problems: applications to non linear reactor dynamics, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **26** (1967), 305—315.

Коэн, Рубинов (Cohen H., Rubinow S. I.)

[1] Some mathematical topics in Biology, Proc. Symp. on System theory, Polytechnic Press, New York (1965), 321—337.

Кранделл, Пази (Crandall M. C., Pazy A.)

[1] Semi-groups of non linear contractions and dissipative sets, *Journal Funct. Anal.*, **3** (1969), 376—418.

Красносельский М. А.

[1] Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Физматгиз, 1956.

Крейн С. Г.

[1] Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., Наука, 1967.

Кронин (Cronin J.)

[1] Fixed points and topological degree in non linear analysis, Amer. Math. Soc. Surveys, 11, Providence, 1964.

[2] Using Leray-Schauder theory, *J. Math. Anal. Appl.*, **25** (1969), 414—424,

Кружков С. Н.

[1] О минимаксном представлении решений нелинейных уравнений первого порядка, *Функц. анализ*, 3 : 2 (1969), 57—66.

Курант (Courant R.)

[1] Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 1—23.

Кушнер (Kushner H. J.)

[1] On the optimal control of a system governed by a linear parabolic equation with «white noise» inputs, *SIAM Journal Control*, 6 : 4 (1968), 596—614.

Кушнер, Клейнман (Kushner H. J., Kleinman A. J.)

[1] Numerical Methods for the solution of the degenerate non linear elliptic equations arising in Optimal Stochastic Control Theory, *IEEE Transactions on Automatic Control*, A. C. B. (1968), 344—353.

Кшижанский, Шаудер (Krzyzanski M., Schauder J.)

[1] Quasi lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus, *Studia Math.*, 6 (1936), 162—189.

Кэррол (Carroll R. W.)

[1] Abstract methods in Partial Differential Equations, Harper and Row, 1969.

Лаврентьев М. М.

[1] О некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962.

Ладыженская О. А.

[1] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., 1961, 2-е издание, М., 1970.

[2] О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач, *Тр. Матем. Ин-та Стеклова*, 102 (1967), 85—104.

[3] О модификациях уравнений Навье-Стокса для больших градиентов скоростей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 7 (1968), 126—154.

[4] Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнения Навье-Стокса при наличии осевой симметрии, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 7 (1968), 155—177.

Ладыженская О. А., Солонников В. А.

[1] Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродина[illegible] для вязкой несжимаемой жидкости, *Тр. Матем. ин-та Стеклова*, [illegible] ([illegible]60), 115—173.

Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.

[1] Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Наука, 1964.

Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А.

[1] Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., Наука, 1967.

Лакс (Lax P. D.)

[1] Hyperbolic systems of conservation laws, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 537—566.

[2] Development of singularities of solutions of non linear hyperbolic partial differential equations, *J. Math. Physics*, 5 (1964), 611—613.

[3] Integrals of non linear equations of Evolution and Solitary waves, A. E. C. Report, N. Y. U., January 1968. [Перевод в сб. *Математика*, 13 : 5 (1969).]

Лакс, Филлипс (Lax P. D., Phillips R. S.)

[1] Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 427—455.

Ланшон, Дюво (Lanchon H., Duvaut C.)

[1] Sur la solution du problème de la torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique de section quelconque, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 264 (1967), 520—523.

Латтес Р., Лионс Ж.-Л.

[1] Метод квазиобращения, М., Мир, 1971.

Леви (Lewy H.)

[1] On a variational problem with inequalities on the boundary, *J. Math. Mech.*, 17 (1968), 861—884.

[2] On a minimum problem for superharmonic functions, Int. Conf. on Functional Analysis, Tokyo, April 1969.

Леви, Стампаккья (Lewy H., Stampacchia G.)

[1] On the regularity of a solution of a variational inequality. *Comm. Pure Appl. Math.*, 22 (1969), 153—188.

[2] On the regularity of certain superharmonic functions, *Journal d'analyse*, 23 (1970), 227—236.

Левин, Ноэл (Levin J. J., Nohel J. A.)

[1] The Integrodifferential Equations of a class of Nuclear Reactors with Delayed Neutrons, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 31, 2 (1968), 151—172.

Лекаре (Lescarret C.)

[1] Cas d'addition des applications monotones maximales dans un espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 261 (1965), 1160—1163.

Лемэр (Lemaire B.)

[1] Sur les jeux aux dérivées partielles, *Ann. Scuola Norm. Supp. Pisa* (1972) (в печати).

Лере (Leray J.)

[1] Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que posent l'hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.*, XII (1933), 1—82.

[2] Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois, *J. Math. Pures Appl.*, XIII (1934), 331—418.

[3] Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, 63 (1934), 193—248.

[4] Les problèmes non linéaires, *Enseignement Math.*, 35 (1936), 139—149.

[5] Discussion d'un problème de Dirichlet, *J. Math. Pures Appl.*, 17 (1938), 89—104.

[6] La théorie des points fixes et ses applications en Analyse, Proc. Int. Congress Math., 1950, vol. 2, 202—208, Amer. Math. Soc., 1952.

[7] Hyperbolic differential equations, Inst. Adv. Study, Princeton, 1952.

[8] Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théorie des sillages et des proues, *Comm. Math. Helv.*, 8 (1935), 149—180; 250—263.

Лере, Лионс (Leray J., Lions J. L.)

[1] Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 97—107.

Лере, Ойя (Leray J., Ohya Y.)

[1] Systèmes linéaires hyperboliques non stricts, *Séminaire Collège de France*, 1964.

Лере, Шаудер (Leray J., Schauder J.)

[1] Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. E. N. S.*, 51 (1934), 45—78. [Перевод: Топология и функциональные уравнения, *УМН*, 3—4 (13—14) (1946).]

Линденштраусс (Lindenstrauss J.)

[1] On non separable reflexive Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 967—970.

Лионс (Lions J. L.)

[1] Sur l'existence des solutions des équations de Navier-Stokes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **248** (1959), 2847—2849.
[2] Quelques résultats d'existence dans les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 245—273.
[3] Sur certains problèmes différentiels non linéaires, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **252** (1961), 657—659.
[4] Espaces intermédiaires entre espaces Hilbertiens et Applications, *Bull. Acad. R. P. R.*, **50** (1958), 419—432.
[5] Sur certains systèmes hyperboliques non linéaires, *C. R. Cad. Sc. Paris*, **257** (1963), 2057—2060.
[6] Singular perturbations and some non linear boundary value problems, M. R. C.-Report 421, October 1963.
[7] Une remarque sur les problèmes d'évolution non linéaires dans des domaines non cylindriques, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, **9** (1964), 11—18.
[8] Quelques remarques sur certains problèmes d'évolution non linéaires, Atti Simp. Int. Appl. Analisi alla Fisica Math. Cremonese, Rome, 107—116.
[9] Sur certaines équations paraboliques non linéaires, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 155—175.
[10] Remarks on evolution inevualities, *J. Math. Soc. Japan*, 18 (1966), 331—342.
[11] On the numerical approximation of some equations arising in Hydrodynamics, Durham A. M. S. Symposium, April 1968.
[12] Sur quelques problèmes de calcul des variations, *Instituto Naz. di Alta Mat. Symposia Mathematica*, 22 (1968), 125—144.
[13] On some non linear partial differential equations related to optimal control theory, Proc. Symp. on non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.
[14] Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer, 111, 1961.
[15] Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1968.
[16] Sur quelques propriétés des solutions d'inéquations variationnelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **267** (1968), 631—633.
[17] Sur quelques propriétés d'inéquations relatives à certains opérateurs hyperboliques non linéaires, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 267 (1968), 684—685.
[18] Some remarks on variational inequalities, Int. Conference on Functional Analysis, Tokyo, April 1969.
[19] Equations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert, C. I. M. E. Varenna, Juillet 1963.
[20] Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques, *Ann. Inst. Fourier*, **VII** (1957), 143—182.
[21] Sur un nouveau type de problème non linéaire pour opérateurs hyperboliques du deuxième ordre, Séminaire J. Leray, Collège de France, 1965—1966, vol. II, 17—33.
[22] Sur l'approximation de la solution d'inéquations d'évolution, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **263** (166), 55—57.
[23] Réduction à des problèmes du type Cauchy-Kowalewska, C. I. M. E., Ispra, juillet 1967.
[24] Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes, *Rend. Sem. Mat. Padova*, **30** (1960), 16—23.
[25] Sur quelques nouveaux exemples de problèmes unilatéraux, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, Sec. 1A, 17 (1970), 1—9.

Лионс, Мадженес (Lions J. L., Magenes E.)

[1] Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1 et 2, Paris, Dunod, 1968. [Перевод тома 1: Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., Мир., 1971.]

[2] Idem, vol. 3, Dunod, 1969.

[3] Problèmes aux limites non homogènes (IV), **15** (1961), 311—326.

[4] Espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques, *Ann. Mat. Pures Appl.*, **LXVIII** (1965), 341—418.

Лионс, Петре (Lions J. L., Peetre J.)

[1] Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes, n^{ro} 19, Paris (1964), 5—68.

Лионс, Проди (Lions J. L., Prodi G.)

[1] Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **248** (1959), 3519—3521.

Лионс, Стампаккья (Lions J. L., Stampacchia G.)

[1] Variational Inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, **XX** (1967), 493—519.

Лионс, Темам (Lions J. L., Temam R.)

[1] Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des Variations, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **263** (1966), 563—565.

Лионс, Штраусс (Lions J. L., Strauss W.)

[1] Some non linear evolution equations, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 43—96.

Лихнерович (Lichnerowicz A.)

[1] Existence and uniqueness theorems in general relativity, Proc. Symp. Applied Math., A. M. S., vol. XVII (1965), 189—198.

Люкес, Рассел (Lukes D. L., Russell D. L.)

[1] The quadratic criterion for distributed systems, M. R. C. Report 860, March 1968.

Лясота, Опяль (Lasota A., Opial Z.)

[1] On the existence and uniqueness of solutions of a boundary value problem for an ordinary second-order differential equation, *Colloq. Math.*, 18 (1967), 7—11.

Мадженес, Стампаккья (Magenes E., Stampacchia G.)

[1] I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **XII** (1958), 247—358.

Мазья В. Г.

[1] Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами, *Функц. анализ*, 2 : 3 (1968), 53—57.

Мак-Ками, Мизел (MacCamy R. C., Mizel V. J.)

[1] Existence and non existence in the Large of Solutions of Quasilinear wave equations, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 25 (4), (1967), 298—320.

Маккин (McKean H. P., Jr.)

[1] A class of Markov processes associated with non linear parabolic equations, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **56** (1966), 1907—1911.

[2] Propagation of chaos for a class of non linear parabolic equations, in Lecture Series in Differential Equations, Session 7 (Stochastic Differential Equations), March 1967.

Маккин, Самуэльсон (McKean H. P., Jr., Samuelson A.)

[1] Rational. Theory of Warrant Pricing, Appendix: A free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics, *Industrial Management Review*, 6 (1965), 13—39.

Мандел (Mandel J.)

[1] Cours de Mécanique des Milieux continus, T. 2: Mécanique des solides, Paris, Gauthier-Villars, 1966.

Марони (Maroni P.)

[1] La résolution d'une équation des ondes avec une condition frontière non linéaire, *Revue Roumaine de Math. pures Appl.*, 16 (1971), 529—550.

Марчук Г. И.

[1] Численные методы в прогнозе погоды, Л., Гидрометиздат, 1967.

Масуда (Masuda K.)

[1] On the Analyticity and the Unique continuation theorem for solutions of the Navier-Stokes equation, *Proc. Japan Acad.*, 43 (1967), 827—832.

Меири (Meiri A. Z.)

[1] A new approach to the general problem of optimal filtering and control of stochastic systems, Ph. D. Thesis, Berkeley, 1967.

Мейерс (Meyers N. G.)

[1] An example of non uniqueness in the theory of quasi linear elliptic equations of second order, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 14 (1963), 177—179.

Мидзохата, Ямагути (Mizohata S., Yama'guti M.)

[1] Mixed problem for some semi-linear wave equation, *J. Math. Kyoto Univ.*, 2 (1) (1962), 61—78.

Минти (Minty G. J.)

[1] Monotone (non linear) operators in Hilbert Space, *Duke Math. J.*, 29 (1962), 341—346.

[2] On a monotonicity method for the solution of non linear equations in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, 50 (1963), 1038—1041.

[3] On the monotonicity of the gradient of a convex function, *Pacific J. Math.*, 14 (1964), 243—247.

[4] A theorem on maximal monotonic sets in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 11 (1965), 434—439.

[5] On the generalization of the direct method of the calculus of variations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 315—321.

[6] Proc. Symp. on non linear Functional Analysis, Chicago, April, 1968.

Миньо (Mignot A. L.)

[1] Méthodes d'approximation des solutions de certains problèmes aux limites linéaires, *Rend. Sem. Mat. Padova*, XL (1968), 1—138.

Миранда К. (Miranda C.)

[1] Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957.

Миранда М. (Miranda M.)

[1] Minimal boundaries with obstacles, *Annali Univ. Ferrara*, 16 (1971), 29—37.

Миттер, Филлипсон (Mitter S. K., Phillipson G. A.)

[1] The state identification of a class of distributed systems; см. книгу Филлипсона [1].

Миура (Miura R. M.)

[1] Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. I. A remarkable explicit non linear transformation, *J. Math. Physics*, 9 (8) (1968), 1202—1209.

Миура, Гарднер, Крускал (Miura R. M., Gardner O. S., Kruskal M. D.)

[1] Existence of Conservation laws and constants of motion, *Physical Rev. Letters* (1968).

Мозер (Moser J.)

[1] A rapidly convergent iteration method and non linear partial differential equations, I, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, XX (1966), 226—315.

[2] A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 457—468.

Моро (Moreau J. J.)

[1] Fonctionnelles sous différentiables, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **257** (1963), 4117—4119.

[2] Proximité et dualité dans un espace hilbertien, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965) 273—299.

[3] Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation, *J. Mécanique*, 5 (1966), 439—470.

[4] La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **267** (1968), 954—957.

Морозов Н. Ф.

[1] О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения, *ДАН СССР*, **176** : 3 (1967), 522—525.

Морри (Morrey C. B., Jr.)

[1] Multiple integrals in the Calculus of Variations, Springer, Grundlehren Math. Wiss., 130, 1966.

[2] The differentiability of weak solutions of elliptic systems, Int. Conf. on Functional Analysis, Tokyo, April 1969.

Моско (Mosco U.)

[1] A remark on a theorem of F. E. Browder, *J. Math. Anal. Appl.*, 20 (1967), 90—93.

[2] Approximation of the solutions of some variational inequalities, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 21 (1967), 373—394.

[3] Perturbation of variational inequalities, Proc. Symp. on non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.

[4] Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Adv. Math.*, 3 (4), (1969), 510—585.

Мураками (Murakami H.)

[1] On non linear ordinary and evolution equation, Univ. of Kansas, Tech. Report, June 1966.

Мустата (Mustata P.)

[1] Rend. Sem. Mat. Padova (в печати).

Найтли (Knightly G. H.)

[1] On a class of Global solutions of the Navier-Stokes equations, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 21 (1966), 211—245.

[2] An existence theorem for the von Karman Equations, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **27** (1967), 233—242.

Нгуен Д. Ч.

[1] Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения, *Вестник МГУ, сер. мат. и мех.*, № 2 (1966), 40—54; № 5 (1966), 51—62.

Неделич (Nédelec)

[1] Thèse, Paris, 1970.

фон Нейман, Рихтмайер (von Neumann J., Richtmyer R. D.)

[1] A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, *J. Appl. Physics*, **21** (1950), 232—237.

Ниренберг (Nirenberg L.)

[1] Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 648—674.
[2] On non linear Elliptic Partial differential equations and Hölder continuity, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 103—156.
[3] Some aspects of linear and non linear partial differential Equations, Proc. Congress. Inter. Math., 1962, 147—162.
[4] Intrinsic norms on complex analytic manifolds, *Ist. Naz. Alta Mat.*, **II** (1968), 227—234.

Нитше (Nitsche J. C.)

[1] Variational problems with inequalities as boundary conditions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 450—452.

Нэш (Nash J.)

[1] Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 931—954. [Перевод в сб. *Математика* **4** : 1 (1960).]

Обэн (Aubin J. P.)

[1] Un théorème de compacité, *C. R. Acad. Sc.*, **256** (1963), 5042—5044.
[2] Approximation of non homogeneous Neumann problems. Regularity of the convergence and estimates of errors in terms of *n*-width, M. R. C. Report, August 1968.
[3] Approximation des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs non linéaires, *J. Math. Anal. and Appl.*, **30** : 3 (1970), 510—521.

Обэн, Лионс (Aubin J. P., Lions J. L.)

[1] Remarques sur l'approximation régularisée des problèmes variationnels, CIME, Ecole d'été, juin 1967.

Овсянников Л. В.

[1] Об одной системе Карлемана, *Механика жидкости и газа*, **6** (1968), 183.

Огазо (Haugazeau Y.)

[1] Sur des inéquations variationnelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **265** (1967), 95—98.
[2] Thèse, Paris, 1968.

Олейник О. А.

[1] Разрывные решения нелинейных уравнений, *УМН*, **12** : 3 (1957), 3—73.
[2] О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения «исчезающей вязкости», *УМН*, **14** : 2 (1959), 159—164.
[3] О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения, *УМН*, **14** : 2 (1959), 165—170.
[4] On the existence, uniqueness, stability and approximation of solutions of Prandtl's system for the nonstationary boundary layer, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, **41** (1966), 32—40.
[5] Математические задачи теории пограничного слоя, *УМН*, **23** : 3 (1968), 3—65.
[6] Об уравнениях типа уравнений нестационарной фильтрации, *ДАН СССР*, **113** (1957), 1210—1213.
[7] О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой, *Матем. сб.*, **69** : 1 (1966), 111—140.

Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь

[1] Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации, *ИАН СССР, сер. матем.*, 22 : 5 (1958), 667—704.

О'Нейл (O'Neil R.)

[1] Integral transforms and tensor products of Orlicz spaces and $L(p, q)$ spaces, *J. d'Analyse Math. Israel*, XXI (1968), 1—276.

Пале (Palais R.)

[1] Foundations of global non linear analysis, Benjamin, 1968.

Пейн (Payne L. E.)

[1] Uniqueness criteria for steady state solutions of the Navier-Stokes equations, Simp. Int. Applicazioni dell'analisi alla Fisica Matematica, Ed. Cremonese, Roma, 1965, 130—153.

[2] On some non well posed problems for partial differential equations, in Numerical Solutions of Non linear differential equations, Wiley, 1964, 239—263.

[3] On the stability of solutions of the Navier-Stokes, equations and convergence to steady state, *SIAM J. Appl. Math.*, **15** (1967), 392—405.

Петре (Peetre J.)

[1] Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev, *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1966), 279—317.

Петришин (Petryshyn W. V.)

[1] On the extension and the solution of non linear operator equations, *Ill. J. Math.*, **10** (1966), 255—274.

[2] Construction of fixed points of demi compact mappings in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, 14 (1966), 276—284.

[3] Non linear equations involving non compact operators, Proc. Symp. Non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.

[4] Invariance of domain theorem for locally A-proper mappings and its implications, *J. Funct. Anal.*, **5** : 1 (1970), 137—159.

Погореленко В. А., Соболевский П. Е.

[1] Гиперболические уравнения в банаховом пространстве, *УМН*, 22 : 1 (1967), 170—172.

Похожаев С. И.

[1] О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами, *Функц. анализ*, 1 : 3 (1967), 66—73.

[2] О нормальной разрешимости нелинейных уравнений, *ДАН СССР*, **184** (1969), 40—43.

[3] О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *ДАН СССР*, **165** : 1 (1965), 36—39.

[4] О нелинейных операторах, имеющих слабо замкнутую область значений и квазилинейных эллиптических уравнениях, *Матем. сб.*, **78** (1969), 237—259.

Поцци (Pozzi G. A.)

[1] Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazione del tipo di Schroedinger lineari, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **78** (1968), 197—258.

Прагер (Prager W.)

[1] Problems in Plasticity Theory, 1954.

[2] Unilateral constraints in Mechanics of continua, Atti del Simp. Lagrangiano Accad. Sc. Torino, 1—11.

Прагер, Ходж (Prager W., Hodge P. G., Jr.)

[1] Theory of Perfectly Plastic Solids, Wiley, New-York, 1951. [Перевод: Теория идеально пластических тел, М., 1965.]

Проди (Prodi G.)

[1] Un teorema di unicita per le equazioni di Navier-Stokes, *Ann. Mat.*, **48** (1959), 173—182.

[2] Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel cato bidimensionale, *Rend. Sem. Mat. Padova*, **30** (1960), 1—15.

[3] Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non lineare, *Rend. Sem. Mat. Padova*, **35** (1965).

[4] Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico e non lineari, *Riv. Mat. Univ. Parma*, **3** (1952), 265—290.

[5] Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili-soluzioni periodiche, *Rend. Sem. Mat. Padova*, **23** (1954), 25—85.

[6] Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari, *Ann. Mat.*, **XLII** (1956), 25—49.

Прузе (Prouse G.)

[1] Problemi di propagazione per equazioni non lineari della fisica matematica, *Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano*, **XXXVI** (1966), 1—19.

[2] Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo non lineare, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, I, **XXXVIII** (1965), 804—807; II, III, IV, **XXXIX** (1965), 11—18, 155—160, 240—244.

[3] Periodic or almost periodic solutions of a non linear functional equation, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, I, II, III, **XLIII** (1967), 161—167, 281—287, 448—452; IV, **XLIV** (1968), 3—10.

[4] Soluzioni periodiche dell'equazione di Navier-Stokes, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, **XXXV** (1963), 443—447.

[5] Soluzioni quazi-periodiche dell'equazione di Navier-Stokes in due dimensioni, *Rend. Sem. Mat. Padova*, **33** (1963), 186—212.

[6] Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde non omogenea con termine dissipativo quadratico, *Ricerche Mat.*, **13** (1964).

Пуччи (Pucci C.)

[1] Un problema variazionale per i coefficienti di equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **XVI** (1962), 159—172.

Рабинович (Rabinowitz P. H.)

[1] Periodic solutions of non-linear hyperbolic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 145—205.

[2] Existence and non uniqueness of rectangular solutions of the Bénard Problem, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **29** (1968), 32—57.

[3] Periodic solutions of non linear hyperbolic partial differential equations, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 25—39.

Равьяр (Raviart P. A.)

[1] Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, *J. Math. Pures Appl.*, **46** (1967), 11—107; 109—183.

[2] Sur la résolution et l'approximation de certaines équations paraboliques non linéaires dégénérées, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **25** (1967), 64—80.

[3] Sur une classe d'équations paraboliques non linéaires dégénérées, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **268** (1969), 21—24.

[4] Sur la résolution numérique de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$, *J. Diff. Equations*, **8** : 1 (1970), 56—94.

[5] Méthode de Newton dans les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Bull. Direction Etudes et Recherches, Electricité de France*, n^{ro} 1 (1968), 31—41.

[6] Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires, *J. Func. Anal.*, 5 : 2 (1970), 299—328.

де Рам Ж.

[1] Дифференцируемые многообразия, М., ИЛ, 1956.

Раскин В. Г., Соболевский П. Е.

[1] Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховых пространствах, *СМЖ*, 8 : 1 (1967), 70—90.

Рождественский Б. Л.

[1] Построение разрывных решений систем квазилинейных уравнений I, II, *ЖВМ и МФ*, 2 : 6 (1962), 1019—1043; 3 : 1 (1963), 79—98.

Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.

[1] Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике, М., Наука, 1968.

Розенблатт (Rosenblatt M.)

[1] Remarks on the Burgers Equation, *J. Math. Physics*, 9 (1968), 1129—1136.

Рокафеллар (Rockafellar R. T.)

[1] Characterization of the subdifferentials of convex functions, *Pacific J. Math.*, 17 (1966), 497—509.
[2] Monotone operators associated with saddle-functions and minimax problems, Proc. Symposium A. M. S. on non linear Functional Analysis, April 1968.
[3] Convex Analysis, Princeton Univ. Press, 1969. [Готовится русский перевод.]
[4] Local boundedness of non linear monotone operators, *Michigan Math. J.*, 16 (1969), 397—407.
[5] Convex functions, monotone operators and variational inequalities, Ecole d'été de l'O. T. A. N., Venise, Juin 1968.
[6] On the maximality of sums of non linear monotone operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149 (1970), 75—88.

Роте (Rothe E.)

[1] Sem. Non linear Problems, Univ. of Wisconsin Press, 1963, 233—256.

Руже (Rougée P.)

[1] Equilibre des coques élastiques minces inhomogènes en théorie non linéaire, Thèse, Paris, 1969.

Сазер (Sather J.)

[1] The Initial Boundary value problem for a non linear hyperbolic equation in relativistic quantum mechanics, *J. Math. Mech.*, 16 (1966), 27—50.
[2] The Existence of a global classical solution of the initial boundary value problem for $\Box u + u^3 = f$, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 22 (1966), 292—307.
[3] The initial boundary value problem for the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries, Univ. of Minnesota, January 1963.

Санчес-Паленсия (Sanchez-Palencia E.)

[1] Existence des solutions de certains problèmes aux limites en magnétohydrodynamique, *J. Méchanique*, 7 (1968), 405—426.
[2] Quelques résultats d'éxistence et d'unicité pour les écoulements magnétohydrodynamiques non stationnaires, *J. Mécanique*, 8 (1969), 509—541.

Саттингер (Sattinger D. H.)

[1] Stability of non linear hyperbolic equations, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 28 (1968), 226—244.
[2] On global solution of non linear hyperbolic equations, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 30 (1968), 148—172.

Сеа (Cea J.)

[1] Cours C. E. A. — E. D. F., juillet 1969.

Сеге (Szegö G. P.)

[1] Sulla construzione numerica delle funzioni di Liapunov, I. Teoria, Univ. di Milano, 1967.

Сеге, Ариенти, Сутти (Szegö G. P., Arienti G., Sutti C.)

[1] Sulla costruzione numerica delle funzioni di Liapunov, II. Calcolo, Univ. di Milano, 1968.

Серрин (Serrin J.)

[1] The initial value problem for the Navier-Stokes Equations, in «Non linear Problems», ed by R. E. Langer, 1963, 69—98.

[2] On the interior regularity of weak solution of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 9 (1962), 187—195.

[3] A note on the existence of Periodic Solutions of the Navier-Stokes Equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1959), 120—122.

[4] The problem of Dirichlet for quasi linear Elliptic Differential Equations with many independent variables, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 264 (1969), 413—496.

[5] A priori estimates for solutions of the minimal surface equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 14 (1963), 376—383.

[6] On the stability of viscous fluid flows, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1959), 1—13.

Сиарле, Шульц, Варга (Ciarlet P. G., Schultz M. H., Varga R. S.)

[1] Numerical methods of high-order accuracy for non linear boundary value problems. V. Monotone operator theory, *Numerische Math.*, 13, 1 (1969), 51—77.

Сибагаки, Рикимару (Sibágaki W., Rikimaru H.)

[1] On the Hopf's weak solution of the Initial Value Problem for the Navier-Stokes equations, *Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ.*, XXI (1967), 194—240.

Сибони (Sibony M.)

[1] Sur l'approximation d'équations et inéquations aux derivées partielles non linéaires du type monotone, *J. Math. Anal. Appl.*, 34 (1971), 502—564.

[2] Minimisation de fonctionnelles non différentialles, *Israel J. Math.*, 8 (1970), 105—126.

Сигал (Segal I. E.)

[1] The global Cauchy Problem for a relativistic scalar field with power interaction, *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 129—135.

[2] Non linear relativistic partial differential equations, Труды Международного конгресса математиков, Москва, 1968, 681—690.

[3] Dispersion for non linear relativistic equations, II, *Ann. E. N. S.*, 1 (1968), 459—497.

Смоллер, Джонсон (Smoller J. A., Johnson J. L.)

[1] Global solutions for an extended class of hyperbolic systems of conservation laws, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 32 (1969), 169—189.

Соболев С. Л.

[1] Применения функционального анализа к математической физике, Л., 1950,

Соболевский П. Б.

[1] О нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости, *ДАН СССР*, **128** (1959), 45—48.

[2] Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, *Труды Моск. матем. о-ва*, **10** (1961), 297—350.

[3] О квазилинейных уравнениях в банаховом пространстве, *ДАН СССР*, **183** (1968), 1020—1023.

Солонников В. А.

[1] О некоторых стационарных краевых задачах для уравнений магнитной гидродинамики, *Труды матем. ин-та Стеклова*, **59** (1960), 174—187.

Стампаккья (Stampacchia G.)

[1] Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **258** (1964), 4413—4416.

[2] Regularity of solutions of some variational inequalities, Proc. Symp. non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.

[3] On the regularity of solutions of variational inequalities, Int. Conf. on Functional Analysis, Tokyo, April 1969.

[4] Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Sèminaire Leray, Collège de France, 1963—64.

Стратонович Р. Л.

[1] Условные марковские процессы и их применения к теории оптимального управления, М., 1966.

Султангазин У. М.

[1] О построении обобщенного решения одной модельной задачи для нелинейного уравнения Больцмана, *Механика жидкости и газа*, № 4 (1969), 192.

Такесита (Takeshita A.)

[1] On the reproductive property of 2-dimensional Navier-Stokes equations (в печати).

Таленти (Talenti G.)

[1] Etude d'une équation intégro-différentielle non linéaire, Publ. dell'Istituto di Mat., n^{ro} 118, Universita di Genova (1963—64), 1—16.

Танабе (Tanabe H.)

[1] On regularity of solutions of abstract differential equations of parabolic type in Banach space, *J. Math. Soc. Japan.*, **19** (1967), 521—542.

Тартар (Tartar L.)

[1] Interpolation non linéaire et régularité, *J. Funct. Anal.* (1972).

[2] Théorèmes de traces non linéaires, *Archive Rat. Mech. Anal.* (1972) (в печати).

Темам (Temam R.)

[1] Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, *Annali Mat. Pura Appl.*, **LXXIX** (1968), 191—380.

[2] Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I) (II), *Archive Rat. Mech. Anal.*, **32** (1969), 135—153; **33** (1969), 377—385.

[3] Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 115—152.

[4] Sur la resolution exacte et approchée d'un problème hyperbolique non linéaire de T. Carleman, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **35** : 5 (1969), 351—362.

[5] Problèmes de stabilité, Séminaire Lions-Schwartz, 1968/69.

[6] Remarks on the Approximation of some non-linear Elliptic Equations, *J. Computers System Sci.*, **4** (1970), 250—259.

[7] Sur un problème non lineaire, *J. Math. Pures Appl.*, **48**:2 (1969), 159—172.
[8] Etude directe de l'équation de Riccati en dimension infinie, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **268** (1969), 1335—1338.
[9] Sur l'équation de Riccati en dimension infinie, *J. Funct. Anal.*, **7** (1971), 85—115.
[10] Solution généralisée des équations du type hypersurfaces minima, *Archive Rat. Mech. Anal.* (1971).

Тинг (Ting T. W.)

[1] Elastic-plastic torsion Problem, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **25** (1967), 342—366.

Трев (Trèves F.)

[1] The Ovciannikov theorem and applications, *Inst. Naz. Alta Mat. Symp. Math.*, II (1968).
[2] Ovcyannikov theorem and hyperdifferential operators, *Notas de Mat.*, **46**, Rio de Janeiro, 1968.

Троттер (Trotter H. F.)

[1] On the product of semi-groups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545—551.

Уонхем (Wonham W. M.)

[1] On a matrix Riccati equation of stochastic control, *SIAM J. on control*, **6** (1968), 681—694.

Уральцева Н. Н.

[1] Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы, *Зам. научн. сем. ЛОМИ*, 7 (1968), 184—222.

Файф (Fife P.)

[1] Non linear deflection of thin elastic plates under tension, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 81—112.

Фаэдо (Faedo S.)

[1] Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* (1949), 1—40.

Фигейредо, Гупта (de Figueiredo D. G., Gupta C. P.)

[1] Solvability of non linear integral equations of Hammerstein type (в печати).

Фикера (Fichera G.)

[1] Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, Ser. 8, 7 (1964), 91—140.
[2] Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine, *Mem. Atti. Accad. Naz. Lincei*, Ser. 8, **5** (1956), 1—30.

Филипсон (Fhillipson G. A.)

[1] Identification of distributed systems, Elsevier, 1971.

Финн (Finn R.)

[1] On the exterior Stationary problem for the Navier-Stokes equations and Associated perturbation problems, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **19** (1965), 363—406.
[2] On the steady state solutions of the Navier-Stokes equations III, *Acta. Math.*, **105** (1961), 197—244.
[3] Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier-Stokes equations, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. phys. R. P. Roumanie*, **3** (51) (1959), 387—418.

[4] On steady state solutions of the Navier-Stokes partial differential equations, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 3 (1959), 381—396.
[5] Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 17 (1965), 121—153.
[6] New estimates for equations of minimal surface type, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 14 (1963), 337—375.

Финн, Смит (Finn R., Smith D. R.)

[1] On the linearized Hydrodynamical Equations in two dimensions, *Archive Rat. Mech. Anal.* 25 (1967), 1—25.
[2] On the stationary solution of the Navier-Stokes Equations in two dimensions, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 25 (1967), 26—39.

Флейшман, Фикен (Fleischman B. A., Ficken F. A.)

[1] Initial value and time periodic solutions for a non linear wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 331—356.

Флеминг (Fleming W.)

[1] Some Markovian Optimization problems, *J. Math. Mech.*, 12 (1963), 131—140.
[2] The Cauchy problem for degenerate parabolic equations, *J. Math. Mech.*, 13 (1964), 987—1008.
[3] Duality and a priori estimates in Markovian Optimization problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 16 (1966), 254—279.
[4] The Cauchy Problem for a non linear first order partial differential equation, *J. Diff. Equations*, 5 (1969), 515—530.
[5] Optimal continuous parameter Stochastic control, *SIAM Review*, 11 (1969), 470—509.
[6] Functions with generalized gradient and generalized surfaces, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 44 (1957), 93—104.

Фояш (Foias C.)

[1] Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes dans l'espace. L'unicité et la presque périodicité des solutions petites, *Rend. Sem. Mat. Padova*, XXXII (1962), 261—294.
[2] Ergodic Problems in Functional spaces related to Navier-Stokes equations, Int. Conference on Functional Analysis, Tokyo, April 1969.

Фояш, Проди (Foias C., Prodi G.)

[1] Sur le comportement global des solutions non stationaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2, *Rend. Sem. Mat. Padova*, XXXIX (1967), 1—34.
[2] CIME Summer School, Varenna, Italy (1970).

Фридман (Friedman A.)

[1] Free boundary problems for parabolic equations. I, Melting of solids, *J. Math. Mech.*, 9 (1959), 499—518.
[2] Free boundary problems for parabolic equations II. Evaporation and condensation of a liquid drop, *J. Math. Mech.*, 9 (1960), 19—66.
[3] Remarks on non linear parabolic equations, *Proc. Symposia in Applied Mathematics* XVII (1965), 3—49.
[4] The Stefan problem in several space variables, *Trans. Amer. Math. Society*, 132 (1968), 51—87.
[5] One dimensional Stefan problems with non monotone free boundary, *Trans. Amer. Math. Society*, 132 (1968) 89—114.
[6] Boundary behavior of solutions of variational inequalities for elliptic operators, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 27 (1967), 95—107.
[7] Classes of solution of linear systems of partial differential equations of parabolic type, *Duke Math., J.*, 24 (1957), 433—442,

Фридман, Шинброт (Friedman A., Shinbrot M.)

[1] The initial value problem for the linearized equations of water-waves, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), 107—180.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

[1] Symmetric hyperbolic linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 345—392.

Фридрихс, Лакс (Friedrichs K. O., Lax P.).

[1] Boundary value problems for first order operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 355—388.

Фужита (Fujita H.)

[1] On the blowing up of solutions of the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, Sect. 1, Part. 2, **13** (1966), 109—124.

[2] On some non existence and non uniqueness theorems for non linear parabolic equations, Proc. Amer. Math. Symposium on Non linear Functional Analysis, Chicago, April 1968.

[3] On non linear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\partial v/\partial t = \Delta v + e^v$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 132—135.

[4] On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Section 1, **9** (1961), 59—102.

Фужита, Ватанабе (Fujita H., Watanabe S.)

[1] On the uniqueness and non uniqueness of solutions of Initial value problems for some quasi linear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21** (1968), 631—652.

Фужита, Зауер (Fujita H., Sauer N.)

[1] Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equation in a non cylindrical domain, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 465—468.

Фужита, Като (Fujita H., Kato T.)

[1] On the Navier-Stokes initial value problem, I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **16** (1964), 269—315.

Фужита, Масуда (Fujita H., Masuda K.)

[1] В печати.

Харди Г., Литлвуд Дж., Полиа Г.

[1] Неравенства, М., ИЛ, 1948.

Харлоу (Harlow F. H.)

[1] The particle in Cell Method for numerical solution of problems in fluid dynamics, *Proc. Symp. in Applied Math. A. M. S.*, **XV** (1963), 269—288.

Хартман, Стампаккья (Hartman Ph., Stampacchia G.)

[1] On some non linear elliptic differential functional equations, *Acta Math.*, **115** (1966), 271—310.

Хёрмандер, Лионс (Hörmander L., Lions J. L.)

[1] Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, *Math. Scand.*, **4** (1956), 259—270.

Хилле Э., Филлипс Р.

[1] Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.

Ходж, Херакович, Стаут (Hodge P. G., Jr., Herakovich C. T., Stout R. B.)

[1] On numerical comparisons in Elastic Plastic torsion, *J. Appl. Mechanics, Trans. ASME*, sept. 1968, 454—459.

Хопф (Hopf E.)

[1] Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 213—231.

[2] On non-linear partial differential equations, Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations, Berkeley, 1955. Ed. The Univ. of Kansas (1957), 1—29.

[3] The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950), 201—230.

Царантонелло (Zarantonello E. H.)

[1] Solving functional equations by contractive averaging, Tech. Report 160, U. S. Army Research Center, Madison, Wisconsin (1960).

[2] The closure of the numerical range contains the spectrum, *Bull. Amer. Math.*, **70** (1964), 781—787.

Чандрасекхар (Chandrasekhar S.)

[1] Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford, Clarendon Press, 1961.

Чезари (Cesari L.)

[1] Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations, Sym. on Non Linear Differential Equations and non linear Mechanics, Acad. Press, 1963, 33—57.

[2] Periodic solutions of non linear differential systems, *Proc. Symp. Polytechn. Inst. Brooklyn*, **10** (1960), 549—560.

[3] Sulle funzioni a varazione limitata, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **5** (1936), 299—313.

Чернов (Chernoff H.)

[1] Optimal Stochastic Control (в печати).

Черняков П. С.

[1] О нестационарной свободной конвекции в ограниченной области, *ЖВМ* и *МФ*, **6** (2), (1966), 283—303.

Шамир (Shamir E.)

[1] Контр-пример, приведенный Брезисом — Стампаккьей [1].

[2] Regularity of mixed second-order elliptic problems, *Israel Math. J.*, **6** (1968), 150—168.

Шампин (Shampine L. F.)

[1] Existence and uniqueness for non linear boundary value problems, *J. Diff. Equations*, **5** (1969), 346—351.

Шварц Дж. (Schwartz J.)

[1] Generalizing the Ljusternik-Schnirelmann theory of critical points, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17** (1964), 807—815.

[2] Lectures on non linear functional analysis, Lecture Notes, New York University, 1964.

Шварц Л. (Schwartz L.)

[1] Théorie des distributions, I, II. Hermann, Paris, 1950—1951 (2^{e} édition 1957).

[2] Distributions à valeurs vectorielles, I, II, *Ann. Inst. Fourier*, 7 (1957), 1—141; **8** (1958), 1—209.

[3] Théorie des noyaux, Proceeding of the Int. Congress of Math., 1950, **1**, 220—230.

Шёберг (Sjöberg A.)

[1] On the Korteweg-de Vries equation, existence and uniqueness, Uppsala University, Department of Computers (1967).

Шиаффино (Schiaffino)

[1] *Boll. U. M. I.* (в печати).

Шинброт, Каниель (Shinbrot M., Kaniel S.)

[1] The initial value problem for Navier-Stokes equations. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 21 (1966), 270—285.

Шифф (Schiff L. I.)

[1] Non linear meson theory of nuclear forces, I, *Physic. Rev.*, 84 (1951), 1—9.

Шорин (Chorin A. J.)

[1] Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Computation*, 22 (1968), 745—762.

[2] On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations, Report NYU, Computing Genter, 1968.

Штраусс (Strauss W.)

[1] Evolution equations non linear in the time derivative, *J. Math. Mech.*, 15 (1966), 49—82.

[2] The initial value problem for certain non linear evolution equations, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 249—259.

[3] Further applications of monotone methods to partial differential equations, Symp. in non linear functional Analysis, Amer. Math. Soc., Chicago, April 1968.

[4] Decay and asymptotics for $\Box u = F(u)$, *J. Funct. Anal.*, 2 (1968), 409—457.

[5] The energy method in non linear partial differential equations, Notas de Matematica.

[6] Local exponential decay of a group of conservative non linear operators, *J. Func. Anal.*, 6 : 1 (1970), 152—156.

Юдович В. И.

[1] Некоторые оценки решений эллиптических уравнений, *Матем. сб.*, 59 (доп.) (1962), 229—244.

[2] Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости, *ЖВМ и МФ* 3 : 6 (1963), 1032—1036.

[3] Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости, *ДАН СССР*, 130 : 6 (1960), 1214—1217.

Юргенс (Jörgens K.)

[1] Das Anfangswertproblem in Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen, *Math. Zeitschr.*, 77 (1961), 295—308.

[2] Über die nichtlinearen Wellengleichungen der Mathematischen Physik, *Math. Annalen*, 138 (1959), 179—202.

Юэ (Huet D.)

[1] Perturbations singulières d'inéquations variationnelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 267 (1968), 932—934.

Ямагути (Yamaguti M.)

[1] On the a priori estimate for solutions of the Cauchy problem for some nonlinear wave equations, *J. Math. Kyoto Univ.*, 2 (1962), 55—60.

[2] The asymptotic Behaviour of the solution of a semi linear Partial Differential Equation related to an active pulse transmission line, *Proc. Japan Acad.*, 39 (10) (1963), 726—730.

Яненко Н. Н.

[1] Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Геометрические объекты

Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$; $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — общая точка; как правило предполагается, что граница Ω «регулярна»

Γ — граница Ω, $d\Gamma$ — мера на поверхности Γ

$Q = \Omega \times]0, T[$, $t \in]0, T[$ (t — время)

$\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $d\Sigma = d\Gamma\, dt$

«Абстрактные» функциональные пространства

Рассматриваемые пространства, как правило, *вещественны*

V (соответственно $\mathscr{V}$) — рефлексивное пространство Банаха

H (соответственно $\mathscr{H}$) — пространство Гильберта

$V \subset H$ (соответственно $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$): V плотно в H, сложение непрерывно

H (соответственно $\mathscr{H}$) отождествляется со своим сопряженным; тогда $V \subset H \subset V'$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{V}'$. Иногда не предполагается, что $V \subset H$ или $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$

Как правило, V, H, V' (соответственно $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{V}'$) суть функциональные пространства над Ω (соответственно над Q)

«Конкретные» функциональные пространства

$\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}(Q)$, … — пространства бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω, Q, …, снабженные топологией индуктивного предела Л. Шварца [1]

$\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{D}'(Q)$ — пространства, сопряженные к $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}'(Q)$ — пространства распределений в Ω, Q, …

$L^p(\Omega)$ — пространства функций, суммируемых с p-й степенью в Ω по мере $dx = dx_1 \ldots dx_n$; $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ [1]

$W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant m\}$

$$D^\alpha = \frac{\partial x^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

---

[1] Обычное соглашение при $p = \infty$: $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |f(x)|$.

Пространство Соболева $W^{m,p}(\Omega)$ будет полным с нормой

$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

$W_0^{m,p}(\Omega)$ — замыкание $\mathscr{D}(\Omega)$ в
$W^{-m,p'}(\Omega)$ — сопряженное к $W_0^{m,p}(\Omega)$
$H_0^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$
$H^{-m}(\Omega) = \left(H_0^m(\Omega)\right)' = W^{-m,2}(\Omega)$
$H^s(\Omega)$ — пространство Соболева нецелого порядка s
$H^s(\Gamma)$ — аналогичное пространство иад Γ
$C^k(\overline{\Omega})$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}$
$\mathscr{D}(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$

Если X — некоторое пространство Банаха, то
$L^p(0, T; X) = \{f \mid f$ — измеримое отображение $[0, T] \to X$,

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\sup_{t \in (0,T)} \operatorname{ess} \|f(t)\|_X < \infty \quad \text{при} \quad p = \infty\}$$

$\mathscr{D}(]0, T[; X)$ — пространство C^∞-отображений $]0, T[\to X$ с компактным носителем в $]0, T[$
$C^k([0, T]; X)$ — k раз непрерывно дифференцируемые отображения $[0, T] \to X$
$\mathscr{L}(X; Y)$ — пространство непрерывных линейных отображений X в Y (X и Y — топологические векторные пространства)
$\mathscr{D}'(]0, T[; X) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(]0, T[); X)$ — пространство распределеиий иа $]0, T[$ со значениями в X.

УКАЗАТЕЛЬ ТИПОВ УРАВНЕНИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 4. Итерационные методы. Частные решения 444

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Ж.-Л. Лионс

Некоторые методы решения
нелинейных краевых задач

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художник *О. С. Прийменко*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *В. П. Сизова*
Корректор *Л. В. Байкова*

Сдано в набор 26/I 1972 г.
Подписано к печати 25/VIII 1972 г.
Бумага тип. № 2 $60\times90^{1}/_{16}=18{,}38$ бум. л. 36,75 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 32,81. Изд. № 1/5770. Цена 2 р. 47 к.
Зак. 46

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного Комитета Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли. Измайловский проспект, 29