Ж.-Л. Лионс

Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными

Études Mathématiques
Collection dirigée par P. Lelong

Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles

J. L. Lions

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
Professeur à l'École Polytechnique

Dunod Gauthier-Villars
Paris 1968

Ж.-Л. ЛИОНС

Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными

Перевод с французского
Н. Х. РОЗОВА

Под редакцией
Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

Издательство
«МИР»
МОСКВА · 1972

УДК 517.54+517.94+519.3

Автор книги — известный французский математик, труды которого уже знакомы советскому читателю (Латтес Р., Лионс Ж.-Л., «Метод квазиобращения и его приложения», «Мир», 1970; Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., «Неоднородные граничные задачи и их приложения», «Мир», 1971). В настоящей монографии теория оптимального управления развивается применительно к управляемым системам с распределенными параметрами. Благодаря подробному изложению и напоминанию всех необходимых фактов книга, написанная современным математическим языком, с использованием функционального анализа и современной теории уравнений с частными производными, доступна не только математикам, но и инженерам.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. $\frac{2-2-3}{17-72}$

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В настоящее время имеется немало книг по математической теории оптимального управления, однако все они излагают теорию лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теория оптимизации для систем с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями с частными производными, стала разрабатываться уже после того, как были получены основные результаты в теории оптимизации для обыкновенных уравнений, и в отличие от этой последней имеет, по вполне понятным причинам, гораздо менее завершенный характер.

Предлагаемая в русском переводе книга профессора Парижского университета Ж.-Л. Лионса является первой математической книгой, в которой систематически изучаются оптимальные задачи для уравнений с частными производными. В ней затронут довольно широкий круг вопросов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Наибольшее внимание уделено линейным эллиптическим задачам с квадратичной минимизируемой функцией, решение которых сводится к так называемым односторонним граничным задачам, и задачам эволюционного типа. Кроме того, рассмотрены вопросы существования и аппроксимации оптимальных решений.

Написанная крупным специалистом в области дифференциальных уравнений, книга несомненно вызовет интерес всех, кто занимается теорией оптимального управления и смежными вопросами.

В процессе подготовки русского издания переводчик книги Н. Х. Розов исправил (по согласованию с автором) имевшиеся во французском оригинале отдельные неточности и учел изменения, внесенные автором в английскую версию книги (Springer-Verlag, 1971).

Проф. Ж.-Л. Лионс специально для русского издания прислал список уточнений и ряд дополнений. Мне хочется выразить ему за это благодарность.

Р. Гамкрелидзе

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Русский перевод книги включает в себя несколько дополнений, отсутствовавших во французском издании. Мы попытались пополнить библиографию свежими работами, особенно содержащими указания на все более и более многочисленные приложения теории. Укажем также статью автора о неравенствах с частными производными и их приложениях, опубликованную в журнале «Успехи математических наук», 1971, т. XXVI, вып. 2 (158) (в номере, посвященном академику И. Г. Петровскому).

Горячо благодарю Н. Х. Розова, который внес весьма многочисленные улучшения в первоначальный текст. Благодарю также проф. Р. В. Гамкрелидзе за внимание к изданию настоящей книги.

Париж, сентябрь 1971

Ж.-Л. Лионс

ВВЕДЕНИЕ

1. Теория оптимального управления детерминированными системами строится на основе следующих исходных данных:

1) *управления* u, выбираемого по нашему усмотрению в некотором множестве $\mathcal{U}_\partial$ (множестве *допустимых управлений*);

2) *состояния* $y(u)$ управляемой системы, определяемого для выбранного управления u как решение уравнения

$$\Lambda y(u) = \text{заданная функция от } u, \tag{*}$$

где Λ — оператор (предполагаемый известным), «представляющий» управляемую систему (Λ называется «моделью» системы);

3) *наблюдения* $z(u)$ как некоторой (известной точно [1])) функции состояния $y(u)$;

4) *функции стоимости* $J(u)$, определенной с помощью некоторой числовой функции $z \to \Phi(z) \geqslant 0$ на «пространстве наблюдений» по закону

$$J(u) = \Phi(z(u)). \tag{**}$$

Требуется найти

$$\inf J(u), \quad u \in \mathcal{U}_\partial$$

(вариационная задача).

Теория оптимального управления ставит своей целью:

(i) получить необходимые (или необходимые и достаточные) условия экстремума;

(ii) изучить структуру и свойства уравнений, выражающих эти условия (в них, естественно, должна участвовать «модель» Λ);

(iii) составить конструктивные алгоритмы, позволяющие численно находить аппроксимацию управления $u \in \mathcal{U}_\partial$, реализующего инфимум (это управление называется *оптимальным*).

2. Естественно, что построение теории существенным образом зависит от модели Λ.

Теория, изложенная в книгах Понтрягина, Болтянского, Гамкрелидзе, Мищенко [1] и Хестенса [1], посвящена изучению сформулированных выше вопросов (i) и (ii) для случая, когда Λ пред-

---

[1]) В этой книге рассматриваются только детерминированные задачи.

ставляет собой обыкновенный дифференциальный (в том числе и с запаздыванием или интегро-дифференциальный) оператор.

В многочисленных приложениях из-за сложности управляемых систем приходится отказаться от только что указанной математической модели и рассматривать в качестве Λ оператор с частными производными (по поводу примеров см. Бутковский [1], Вонг [1] и библиографию в этих работах). Именно этот случай мы и изучаем в настоящей книге [1]).

Иными словами, мы рассматриваем системы, для которых состояние $y(u)$ определяется как решение *уравнения с частными производными* (*); естественно, что к этому уравнению присоединяются *граничные условия* [2]), а в случае эволюционных уравнений — и *начальные условия*.

3. Если мы не хотим ограничиваться чисто формальными результатами, то минимизация функционала (**) должна, очевидно, проводиться в предположении, что граничная задача (*) поставлена и разрешима в точно определенном смысле. Факты, необходимые для этого, доказаны ниже для четырех различных видов оператора Λ: эллиптического, параболического, гиперболического, корректного по Петровскому. Чтобы не утяжелять изложение, мы ограничиваемся лишь достаточно простыми примерами, которые, однако, продемонстрируют пути, позволяющие с помощью тех же технических приемов проводить рассмотрения в более общих случаях; относительно этих общих случаев см. Лионс и Мадженес [1, гл. 6].

Поскольку мы располагаем «хорошей» теорией решения уравнения (*), остается получить и проанализировать необходимые (или, в «благоприятных» случаях, необходимые и достаточные) условия минимума функционала (**). На этом пути получаются многочисленные граничные задачи, новые по своей постановке и имеющие интересные аналогии с «многофазовыми» и «односторонними» задачами механики (в частности, в теории пластичности).

4. Дадим беглый обзор содержания различных глав.

В гл. 1 изучается, помимо других вопросов, минимизация положительно определенных (положительно полуопределенных) квадратичных форм, заданных на замкнутом выпуклом множестве в гильбертовом пространстве. Приводятся приложения к односторонним граничным задачам, являющимся простым прототипом проблем, исследуемых в дальнейшем.

---

[1]) Добавим, что результаты, полученные во многих направлениях, носят пока еще весьма частный характер!

[2]) Управление может входить и в граничные условия, что зачастую происходит в задачах, встречающихся на практике.

Глава 2 содержит теорию оптимального управления системами, описываемыми эллиптическими уравнениями, а гл. 3 и 4 посвящены случаям параболических, гиперболических уравнений и уравнений, корректных по Петровскому. В каждой из этих глав сначала рассматриваются линейные системы с квадратичной функцией стоимости и изучаются соответствующие односторонние граничные задачи. В гл. 3 и 4 подробно исследуются интегро-дифференциальные уравнения типа Риккати, возникающие при рассмотрении «систем с обратной связью». Затем приводятся теоремы существования минимума функционала (**) в случае простых нелинейных систем (полученных до сих пор результатов о нелинейных уравнениях для развития общей теории в этом направлении недостаточно) и необходимые условия первого порядка.

Наконец, в гл. 5 описываются различные приемы регуляризации, аппроксимации и метод штрафов. Все эти методы можно применить для численного решения рассматриваемых нами задач оптимального управления.

Каждая глава заканчивается примечаниями, содержащими библиографические указания и перечисляющими нерешенные проблемы (которых немало) или аспекты, не затронутые в книге, но заслуживающие дальнейшего развития.

Настоящая книга представляет собой изложение курса лекций, прочитанных на факультете естественных наук Парижского университета в 1965/66 учебном году. В сокращенном виде этот же материал составил содержание летнего курса (организованного А. В. Балакришнаном) в Калифорнийском университете Лос-Анджелеса в августе 1967 г.

Я горячо благодарю П. Лелона, любезно остановившего свой выбор на этой работе в качестве первого выпуска выходящей под его руководством новой серии книг по математике [1].

Я также благодарю А. Бенсуссана, замечания которого позволили мне улучшить изложение многих пунктов первоначального текста, и Ж. П. Айро, сделавшего записи первого курса лекций.

Считаю совершенно необходимым поблагодарить издательство Dunod за великолепное полиграфическое оформление книги.

[1]) Речь идет о серии «Études Mathématiques», выпускаемой парижскими издательствами Dunod и Gauthier Villars, которая выходит под руководством профессора Парижского университета П. Лелона.— *Прим. перев.*

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ обозначает *пространственную* переменную; x изменяется в открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей Γ.

t означает *временну́ю* переменную; как правило $t \in (0, T)$, $T < \infty$.

Положим

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad \Sigma = \Gamma \times (0, T).$$

Управления обычно обозначаются через $u, v, w, \ldots$; они выбираются в пространстве $\mathcal{U}$ (в общем случае — в гильбертовом пространстве над $\mathbf{R}$); множество $\mathcal{U}_\partial$ *допустимых управлений* предполагается *выпуклым* и *замкнутым* в $\mathcal{U}$.

Состояние системы обозначается через $y(v)$; в *эллиптическом* случае (гл. 2) $y(v)$ — функция переменной $x \in \Omega$, т. е. $y(x; v)$; в *эволюционном* случае (гл. 3, 4) $y(v)$ — функция переменных $x \in \Omega$ и $t \in (0, T)$, т. е. $y(x, t; v)$.

Наблюдение обозначается через $z(v) = Cy(v)$ (случай наличия шума не рассматривается).

Функция стоимости (или *критерий качества*) обозначается через $J(v)$.

Управление (управления) $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которого (которых)

$$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,$$

будем называть *оптимальным* (*оптимальными*).

$p(v)$ обозначает *сопряженное состояние*.

Основные используемые в дальнейшем функциональные пространства:

$C^k(\overline{\Omega})$ — пространство функций, k раз непрерывно дифференцируемых на замкнутом множестве $\overline{\Omega}$; $k \geqslant 0$ — целое число [1]);

$\mathscr{D}(\Omega)$ — пространство функций, бесконечно дифференцируемых в области Ω и имеющих *компактные* в Ω *носители*, снабженное топологией индуктивного предела (Шварц [1]);

---

[1]) Аналогичное обозначение сохраняется в случае, если вместо Ω выбрано Q, Γ, Σ. Все рассматриваемые функции предполагаются *действительными*.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ — двойственное к $\mathcal{D}(\Omega)$ пространство, т. е. пространство распределений на Ω [1]);

$\mathcal{D}'((0, T); X)$ — пространство распределений на $(0, T)$ со значениями в X, где X — банахово пространство (см. Шварц [2] и краткое описание в разд. 1.1 гл. 3);

$L^2(\Omega)$ — пространство (классов) функций, суммируемых в квадрате на области Ω;

$H^m(\Omega)$ — *пространство Соболева* [1] порядка m ($m \geqslant 1$ — целое число) в области Ω, т. е. пространство таких функций $\varphi(x)$, что $D^\alpha\varphi \in L^2(\Omega)$ $\forall \alpha$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, где

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_i \geqslant 0$ — целые числа;

$H_0^m(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in H^m(\Omega), D^\alpha\varphi = 0$ на Γ для $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m - 1\}$;

$H^s(\Omega)$ — пространство Соболева *дробного порядка* s в области Ω, т. е. пространство сужений на Ω функций из $H^s(\mathbf{R}^n)$, определенных (с помощью преобразования Фурье) в разд. 3.3 гл. 1;

$L^2(S; E)$ — пространство (классов) функций f на S (где S — локально компактное пространство, снабженное мерой $\mu \geqslant 0$), принимающих значения в гильбертовом пространстве E и таких, что

$$\int_S \|f(t)\|_E^2 \, d\mu(t) < \infty;$$

особенно часто будет использоваться пространство $L^2(0, T; E)$ при $d\mu(t) = dt$;

$L^\infty(S; E)$ пространство (классов) функций f на S, принимающих значения в E и почти всюду ограниченных, т. е. таких, что

$$\|f(t)\|_E \leqslant \|f\|_{L^\infty(S; E)} < \infty \quad \text{почти всюду};$$

$C^k(\overline{\Omega}; E)$ — пространство функций, k раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ и принимающих значения в E, $k \geqslant 0$ — целое число;

$H^1(\Omega; E)$ — пространство Соболева порядка 1 функций, определенных на Ω и принимающих значения в E.

---

[1]) Вообще X' обозначает пространство, двойственное (сопряженное) к X.

ГЛАВА 1

Минимизация функционалов и односторонние граничные задачи

§ 1. Минимизация коэрцитивных форм

1.1. Обозначения

Пусть $\mathcal{U}$ — гильбертово пространство над полем действительных чисел $\mathbf{R}$ [1]); элементы этого пространства, как правило, будут обозначаться через u, v, w... . В приложениях, которые мы рассмотрим в следующих главах, $\mathcal{U}$ будет *пространством управлений.*

В настоящей главе символ $\|\cdot\|$ употребляется для обозначения нормы в пространстве $\mathcal{U}$; в случаях, когда могли бы возникнуть недоразумения, норма в пространстве X записывается в виде $\|\cdot\|_X$.

Предположим, что нам известны:

(i) билинейная непрерывная на $\mathcal{U}$ симметричная форма

$$u,\ v \to \pi(u,\ v);\ \pi(u,\ v) = \pi(v,\ u) \quad \forall u,v \in \mathcal{U};$$

(ii) линейная непрерывная на $\mathcal{U}$ форма

$$v \to L(v);$$

(iii) *выпуклое замкнутое* в $\mathcal{U}$ множество $\mathcal{U}_\partial$.

В приложениях $\mathcal{U}_\partial$ будет множеством *допустимых управлений.*

Рассматривается квадратичный функционал

$$J(v) = \pi(v,\ v) - 2L(v), \tag{1.1}$$

который требуется *минимизировать* на множестве $\mathcal{U}_\partial$.

1.2. Случай коэрцитивной формы

Говорят, что форма π *коэрцитивна* на $\mathcal{U}$, если

$$\pi(v,\ v) \geqslant c\,\|v\|^2 \qquad \forall v \in \mathcal{U}, \qquad c = \text{const} > 0. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Если* $\pi(u,v)$ — *билинейная непрерывная на* $\mathcal{U}$ *симметричная форма, удовлетворяющая условию* (1.2), *то существует и притом единственный элемент* $u \in \mathcal{U}_\partial$, *для которого*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v).$$

[1]) Относительно случая гильбертова пространства над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ см. замечание 1.4.

Доказательство существования. Пусть $\{v_n\} \in \mathcal{U}_\partial$ — минимизирующая последовательность, т. е.

$$J(v_n) \to \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{1.3}$$

Согласно (1.2),

$$J(v) \geqslant c \| v \|^2 - c_1 \| v \|, \quad c_1 = \text{const}. \tag{1.4}$$

Тогда из соотношений (1.3) и (1.4) следует, что

$$\| v_n \| \leqslant \text{const}. \tag{1.5}$$

В силу (1.5) из последовательности $\{v_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{v_\mu\}$, что

$$v_\mu \to w \quad \textit{слабо в} \quad \mathcal{U}. \tag{1.6}$$

Так как $\mathcal{U}_\partial$ — замкнутое *выпуклое* множество, то $\mathcal{U}_\partial$ *слабо замкнуто*, а потому (1.6) влечет за собой

$$w \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.7}$$

Но функция $v \to \pi(v, v)$ полунепрерывна снизу в слабой топологии в $\mathcal{U}$, а функция $v \to L(v)$ непрерывна в слабой топологии. Поэтому функция $v \to J(v)$ полунепрерывна снизу в слабой топологии и, следовательно,

$$\underline{\lim}\, J(v_\mu) \geqslant J(w). \tag{1.8}$$

Тогда из (1.3) и (1.7) вытекает

$$w \in \mathcal{U}_\partial, \; J(w) \leqslant \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{1.9}$$

Таким образом, должно выполняться равенство $J(w) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$, так что для завершения доказательства достаточно положить $u = w$.

Доказательство единственности. Так как функция $v \to \pi(v, v)$ *строго выпукла* (т. е. при $v_1 \neq v_2$ выполняется неравенство $\pi((1-\theta) v_1 + \theta v_2, (1-\theta) v_1 + \theta v_2) < (1-\theta) \pi(v_1, v_1) + \theta \pi(v_2, v_2)$, где $\theta \in (0, 1)$), то и функция $v \to J(v)$ строго выпукла.

Предположим, что минимум функционала J достигается на двух элементах u_1 и u_2 из множества $\mathcal{U}_\partial$, т. е.

$$J(u_1) = J(u_2) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v).$$

Поскольку множество $\mathcal{U}_\partial$ выпукло, то $^1/_2(u_1+u_2)\in\mathcal{U}_\partial$, а в силу строгой выпуклости функции $v\to J(v)$ для $u_1\neq u_2$

$$J\left({}^1/_2\,(u_1+u_2)\right)<\inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v),$$

откуда следует, что должно быть $u_1=u_2$. Единственность доказана.

Пример 1.1. Пусть $\pi(u, v)=(u, v)_{\mathcal{U}}$ [1]) и $L(v)=(g, v)_{\mathcal{U}}$, где g — фиксированный элемент пространства $\mathcal{U}$. Тогда

$$J(v)=\|g-v\|^2_{\mathcal{U}}-\|g\|^2_{\mathcal{U}}$$

и, следовательно, единственный элемент $u\in\mathcal{U}_\partial$, реализующий $\inf\limits_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v)$, характеризуется тем, что

$$\|g-u\|_{\mathcal{U}}\leqslant\|g-v\|_{\mathcal{U}}\qquad\forall v\in\mathcal{U}_\partial;$$

таким образом, u — *проекция элемента* g *на* $\mathcal{U}_\partial$.

Анализ условий теоремы 1.1 приводит к следующим замечаниям:

Замечание 1.1. Теорема 1.1 верна и в случае, когда билинейная форма $\pi(u, v)$ определена на множестве $\mathcal{U}_\partial\times\mathcal{U}_\partial$ и удовлетворяет условию (1.2) при любом $v\in\mathcal{U}_\partial$.

Замечание 1.2. В доказательстве теоремы 1.1 тот факт, что $v\to J(v)$ — *квадратичная* форма, нигде существенным образом не используется.

Пусть $v\to J(v)$ — такая функция $\mathcal{U}_\partial\to\mathbf{R}$, что

$$J(v)\to+\infty,\quad \text{если}\quad \|v\|\to+\infty,\ v\in\mathcal{U}_\partial; \tag{1.10}$$

$$v\to J(v)\ \text{сильно полунепрерывна снизу.} \tag{1.11}$$

Тогда *существует* такой элемент $u\in\mathcal{U}_\partial$, что

$$J(u)=\inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{1.12}$$

Это замечание распространяется и на функции $v\to J(v)$, определенные на $\mathcal{U}_\partial\subset\mathcal{U}$, когда в качестве $\mathcal{U}$ рассматривается, например, рефлексивное банахово пространство.

Одних только условий (1.10) и (1.11) для *единственности* u может быть и недостаточно; если же считать функцию $v\to J(v)$ еще и строго выпуклой, то утверждение о единственности u будет, очевидно, справедливо.

[1]) Через $(u, v)_{\mathcal{U}}$ обозначается скалярное произведение в $\mathcal{U}$.

Замечание 1.3. Условие (1.10) используется только при доказательстве того, что всякая минимизирующая последовательность *ограничена* (см. (1.5)). Следовательно, оно становится лишним, если *предположить, что множество* $\mathcal{U}_\partial$ *ограничено*.

1.3. Характеризация минимизирующего элемента. Вариационные неравенства

Теорема 1.2. *Если выполнены условия теоремы* 1.1, *то минимизирующий элемент* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется тем, что*

$$\pi(u, v-u) \geqslant L(v-u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{U}_\partial$ — минимизирующий элемент, т. е. $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$. Тогда для любых $v \in \mathcal{U}_\partial$ и $\theta \in (0, 1)$

$$J(u) \leqslant J((1-\theta)u + \theta v),$$

откуда

$$\frac{J(u+\theta(v-u)) - J(u)}{\theta} \geqslant 0, \tag{1.14}$$

или, если можно перейти к пределу,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{J(u+\theta(v-u)) - J(u)}{\theta} \geqslant 0. \tag{1.15}$$

Если предел (1.15) существует, то

$$J'(u)\cdot(v-u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{1.16}$$

а из определения функционала $J(v)$ равенством (1.1) легко видеть, что

$$J'(u)\cdot(v-u) = 2[\pi(u, v-u) - L(v-u)],$$

откуда и следует (1.13) [1]).

Обратно, пусть выполняется соотношение (1.13) (а значит, и (1.16)). Так как функция $v \to J(v)$ выпукла, то при любом $\theta \in (0, 1)$

$$J(v) - J(w) \geqslant \frac{J((1-\theta)w + \theta v) - J(w)}{\theta} \qquad \forall v, w \in \mathcal{U},$$

и, следовательно, если предел (1.15) существует, то

$$J(v) - J(w) \geqslant J'(w)\cdot(v-w). \tag{1.17}$$

[1]) В этом случае $^1/_2 J'(u)$ представляет собой линейную форму $\varphi \to \pi(u, \varphi) - L(\varphi)$.

Полагая $w = u$ и учитывая (1.16), получаем

$$J(v) - J(u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,$$

и теорема доказана.

Неравенства вида (1.13) называют *вариационными неравенствами.*

Замечание 1.4. Пусть $\mathcal{U}$ — гильбертово пространство над $\mathbf{C}$ (а не над $\mathbf{R}$), а $\pi(u, v)$ — полубилинейная эрмитова форма, т. е.

$$\pi(u, v) = \overline{\pi(v, u)} \qquad \forall u, v \in \mathcal{U}.$$

Если выполнено условие (1.2), то утверждение теоремы 1.1 остается справедливым. Теорема 1.2 также остается верной, но только в ней надо заменить неравенство (1.13) неравенством

$$\operatorname{Re} \pi(u, v-u) \geqslant \operatorname{Re} L(v-u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial \tag{1.18}$$

($\operatorname{Re} \xi$ — действительная часть числа ξ).

Замечание 1.5. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ [1]. Тогда в (1.13) можно положить $v = u \pm \varphi$, где φ — произвольный элемент из $\mathcal{U}$, и условие (1.13) принимает вид

$$\pi(u, \varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{U}. \tag{1.19}$$

Это — *уравнение Эйлера* для рассматриваемой задачи.

Замечание 1.6. Пусть

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}_\partial \text{ — \textit{замкнутый выпуклый конус}} \\ \text{\textit{с вершиной в начале координат.}}\end{array}\right\} \tag{1.20}$$

Тогда (1.13) равносильно соотношениям

$$\pi(u, v) \geqslant L(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial; \quad \pi(u, u) = L(u). \tag{1.21}$$

Действительно, подставляя в (1.13) $v + u$ вместо v, получаем первое неравенство, а если в (1.13) положить $v = 0$, то получим $\pi(u, u) \leqslant L(u)$, откуда $\pi(u, u) = L(u)$. Обратно, из (1.21) сразу следует (1.13).

Замечание 1.7. Пусть функция $v \to J(v)$ не обязательно квадратичная. Тогда если она дифференцируема [2], то с помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 1.2, можно показать, что справедлива

---

[1] Это соответствует случаю управляемой системы без ограничений на управления.

[2] См. Дьедонне [1, гл. 8, пункт 1].

Теорема 1.3. *Пусть функция $v \to J(v)$ строго выпукла, дифференцируема и удовлетворяет условию* (1.10) (*последнее условие можно отбросить, если множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено*). *Тогда единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которого $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$, характеризуется тем, что*

$$J'(u)\cdot(v-u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.22}$$

1.4. Модификация вариационных неравенств

Результаты, приведенные ниже, очень удобны для применения.

Теорема 1.4. *Если выполнены условия теоремы* 1.3, *то неравенство* (1.22), *характеризующее минимизирующий элемент, равносильно неравенству*

$$J'(v)\cdot(v-u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.23}$$

Доказательство. (1.23) $\Rightarrow$ (1.22). Действительно, положим в (1.23) $v = (1-\theta)\,w + \theta u$, где w — произвольный элемент из $\mathcal{U}_\partial$ и $\theta \in (0,\ 1)$. Тогда

$$(1-\theta)\,J'((1-\theta)\,w + \theta u)\cdot(w-u) \geqslant 0,$$

или

$$J'((1-\theta)\,w + \theta u)\cdot(w-u) \geqslant 0,$$

откуда, переходя к пределу при $\theta \to 1$, получаем (1.22).

(1.22) $\Rightarrow$ (1.23). Допустим, что справедливо следующее утверждение, важное и само по себе (его доказательство мы приведем ниже).

Теорема 1.5. *Если $v \to J(v)$ — выпуклая и дифференцируемая функция $\mathcal{U} \to \mathbf{R}$, то ее производная $v \to J'(v)$, отображающая $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}'$, монотонна, т. е.*

$$(J'(v) - J'(w))\cdot(v-w) \geqslant 0 \qquad \forall v,\ w \in \mathcal{U}. \tag{1.24}$$

Так как

$$J'(v)\cdot(v-u) = J'(u)\cdot(v-u) + (J'(v) - J'(u))\cdot(v-u),$$

то из (1.24) следует

$$J'(v)\cdot(v-u) \geqslant J'(u)\cdot(v-u),$$

откуда ясно, что (1.22) влечет за собой (1.23).

Доказательство теоремы 1.5. Мы уже видели, что при выполнении условий теоремы 1.5 справедливо неравенство (1.17). Меняя местами v и w в (1.17), получаем

$$J(w) - J(v) \geqslant J'(v)\cdot(w-v), \tag{1.25}$$

а складывая (1.17) и (1.25) почленно, приходим к (1.24).

Замечание 1.8. Подводя итоги, можно сказать, что при выполнении условий теоремы 1.3 возможны следующие три эквивалентные формулировки задачи:

(i) $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$ $(u \in \mathcal{U}_\partial)$ в случае, если минимум достигается;

(ii) $J'(u) \cdot (v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial \; (u \in \mathcal{U})$;

(iii) $J'(v) \cdot (v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial \; (u \in \mathcal{U})$.

1.5. Случай, когда J — сумма дифференцируемой и недифференцируемой функций

Если предположить, что функция $v \to J(v)$ коэрцитивна, полунепрерывна снизу в слабой топологии и строго выпукла, то существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которого

$$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Очевидно, что в этом случае утверждения (ii) и (iii) замечания 1.8 неприменимы. Однако их можно применять к «дифференцируемой части функции J». Точнее говоря, справедлива

Теорема 1.6. *Пусть*

$$J(v) = J_1(v) + J_2(v), \tag{1.26}$$

где функции $J_1(v)$ и $J_2(v)$ непрерывны, выпуклы и полунепрерывны снизу в слабой топологии. Пусть, далее, функция $J(v)$ строго выпукла и такова, что

$$J(v) \to +\infty \text{ при } \|v\| \to \infty, \; v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Если при этом функция $v \to J_1(v)$ дифференцируема, а функция $v \to J_2(v)$ не обязательно дифференцируема, то единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, удовлетворяющий условию $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$, характеризуется тем, что

$$J_1'(u) \cdot (v - u) + J_2(v) - J_2(u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.27}$$

Доказательство. 1) Пусть u — такой элемент из $\mathcal{U}_\partial$, что

$$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Тогда для любых $v \in \mathcal{U}_\partial$ и $\theta \in (0, 1)$

$$J(u) \leqslant J((1-\theta)u + \theta v) =$$
$$= J_1((1-\theta)u + \theta v) + J_2((1-\theta)u + \theta v),$$

а так как функция J_2 выпукла, то

$$J_1(u)+J_2(u)\leqslant J_1((1-\theta)u+\theta v)+(1-\theta)J_2(u)+\theta J_2(v),$$

или

$$\frac{J_1((1-\theta)u+\theta v))-J_1(u)}{\theta}+J_2(v)-J_2(u)\geqslant 0.$$

Устремляя θ к нулю, получаем (1.27).

2) *Пусть выполняется соотношение* (1.27). Так как справедливо общее представление

$$\begin{aligned}J(v)-J(u)&=J_1(v)-J_1(u)+J_2(v)-J_2(u)=\\&=J_1'(u)\cdot(v-u)+J_2(v)-J_2(u)+\\&+J_1(v)-J_1(u)-J_1'(u)\cdot(v-u),\end{aligned}$$

то в силу (1.17)

$$J(v)-J(u)\geqslant J_1'(u)\cdot(v-u)+J_2(v)-J_2(u)\quad \forall v\in\mathcal{U}_\partial,$$

откуда с учетом (1.27) заключаем, что

$$J(u)=\inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v).$$

З а м е ч а н и е 1.9. Теоремы 1.3 и 1.4, очевидно, можно получить из теоремы 1.6, положив $J_2=0$.

З а м е ч а н и е 1.10. Пусть

$$J(v)=J_0(v)+J_1(v)+J_2(v),\tag{1.28}$$

где J_i $(i=0,1,2)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.6. Пусть функции J_0 и J_1 дифференцируемы. Тогда единственный элемент $u\in\mathcal{U}_\partial$, на котором реализуется равенство $J(u)=\inf\limits_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v)$, характеризуется одним из следующих эквивалентных условий:

$$J_0'(u)\cdot(v-u)+J_1'(u)\cdot(v-u)+J_2(v)-J_2(u)\geqslant 0\quad \forall v\in\mathcal{U}_\partial,\tag{1.29}$$

$$J_0'(u)\cdot(v-u)+J_1'(v)\cdot(v-u)+J_2(v)-J_2(u)\geqslant 0\quad \forall v\in\mathcal{U}_\partial.\tag{1.30}$$

З а м е ч а н и е 1.11. Если существует (не обязательно единственный) элемент u, реализующий минимум функционала на множестве $\mathcal{U}_\partial$, то любое из полученных вариационных неравенств характеризует *подмножество элементов из* $\mathcal{U}_\partial$, *реализующих этот минимум*.

В приложениях к управляемым системам каждый элемент $u\in\mathcal{U}_\partial$, реализующий минимум, называется *оптимальным управлением*.

Замечание 1.12. Все сказанное выше переносится без изменения на случай, когда $\mathcal{U}$ — рефлексивное банахово пространство.

1.6. Случай, когда множество $\mathcal{U}_\partial$ не обязательно выпукло

До сих пор мы считали, что множество $\mathcal{U}_\partial$ замкнуто и выпукло. Однако можно получить простое *необходимое* условие, которому удовлетворяет минимизирующий элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$ в случае, когда множество $\mathcal{U}_\partial$ предполагается только *замкнутым* в $\mathcal{U}$.

Определение 1.1. Пусть множество $\mathcal{U}_\partial$ замкнуто и $u \in \mathcal{U}_\partial$. Зададим множество

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{U}_\partial;\ u) = \{w \mid w \in \mathcal{U};\ \exists \text{ такие элементы } u_n \in \mathcal{U}_\partial \\ \text{и числа } \lambda_n > 0, \text{ что } u_n \to u \text{ и } \lambda_n(u_n - u) \to w \text{ в } \mathcal{U}\}.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Не составляет труда убедиться в том, что

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}_\partial;\ u) \text{ — замкнутый конус с вершиной в начале координат.} \tag{1.32}$$

Теорема 1.7. *Пусть $v \to J(v)$ — дифференцируемая функция, а u — такой элемент (предполагается, что он существует) замкнутого множества $\mathcal{U}_\partial$, что*

$$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Тогда

$$J'(u)\cdot w \geqslant 0 \qquad \forall w \in \mathcal{E}(\mathcal{U}_\partial;\ u). \tag{1.33}$$

Прежде чем переходить к доказательству этого результата, убедимся, что условие (1.33) в случае *выпуклого* множества $\mathcal{U}_\partial$ эквивалентно условию (1.22).

(1.33) $\Rightarrow$ (1.22). Пусть $v \in \mathcal{U}_\partial$. Так как множество $\mathcal{U}_\partial$ выпукло, то

$$u_n = (1-\theta_n)v + \theta_n u \in \mathcal{U}_\partial, \qquad \theta_n \in (0,\ 1),\ \theta_n \to 1.$$

Отсюда

$$\frac{u_n - u}{1-\theta_n} = v - u.$$

Следовательно, $w = v - u \in \mathcal{E}(\mathcal{U}_\partial;\ u)$, а тогда из (1.33) следует (1.22).

(1.22) $\Rightarrow$ (1.33). Если (1.22) выполнено и $w \in \mathcal{E}(\mathcal{U}_\partial;\ u)$, то $J'(u)\cdot(u_n - u) \geqslant 0$, а потому $\lambda_n J'(u)\cdot(u_n - u) \geqslant 0$ при $\lambda_n > 0$. Но это означает, что $J'(u)\cdot\lambda_n(u_n - u) \geqslant 0$, откуда, переходя к пределу, получаем (1.33).

Доказательство теоремы 1.7. Пусть u — минимизирующий элемент из $\mathcal{U}_\partial$ и $w \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_\partial;\ u)$. По определению множества $\mathcal{C}(\mathcal{U}_\partial;\ u)$ (формула (1.31))

$$J(u) \leqslant J(u_n) = J(u + u_n - u) = \\ = J(u) + J'(u)\cdot(u_n - u) + \| u_n - u \|\cdot O(1),$$

т. е.

$$J'(u)\cdot(u_n - u) + \| u_n - u \|\cdot O(1) \geqslant 0.$$

Следовательно, при $\lambda_n > 0$

$$J'(u)\cdot\lambda_n(u_n - u) + \lambda_n \| u_n - u \|\cdot O(1) \geqslant 0,$$

откуда, переходя к пределу, получаем (1.33).

Замечание 1.13. Условия типа (1.33) являются *необходимыми условиями первого порядка* (в терминологии вариационного исчисления).

1.7. План дальнейшего исследования

Отправляясь от задачи минимизации «найти $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$», мы пришли к вариационным неравенствам вида

$$J'(u)\cdot(v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Возникает следующий вопрос: если заменить $J'(u)$ оператором (не обязательно линейным) $A(u)$, то какие свойства этого оператора A обеспечивают существование у вариационного неравенства

$$A(u)\cdot(v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial$$

по крайней мере одного решения в $\mathcal{U}_\partial$?

Этот тип задач открывает возможности для многочисленных исследований; мы приведем (в § 2) лишь один простой пример такого исследования, отсылая за дальнейшими сведениями к библиографическим замечаниям.

Далее мы рассмотрим примеры, а затем изучим важный для теории оптимального управления случай, когда *функция J некоэрцитивна*.

§ 2. Прямое решение некоторых вариационных неравенств

2.1. Постановка задачи

В соответствии с намеченным в разд. 1.7 планом займемся прежде всего решением вариационного неравенства (1.13). Точнее, пусть $\pi(u, v)$ — заданная на $\mathcal{U}$ билинейная форма, *не обяза-*

тельно симметричная; необходимо найти такой элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, что

$$\pi(u, v - u) \geqslant L(v - u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.1}$$

где L — заданная на $\mathcal{U}$ линейная форма.

Подчеркнем, что если форма π не симметрична, то неравенство (2.1) не соответствует вариационной задаче — по крайней мере традиционной задаче отыскания экстремума функционала. Тем не менее неравенства типа (2.1) мы будем называть *вариационными неравенствами*.

2.2. Теорема существования и единственности

Теорема 2.1. *Пусть для билинейной формы $\pi(u, v)$, не обязательно симметричной,*

$$\pi(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \geqslant c \| v_1 - v_2 \|^2 \qquad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.2}$$

где $c = \mathrm{const} > 0$. Тогда в $\mathcal{U}_\partial$ существует единственный элемент u, удовлетворяющий неравенству (2.1).

Доказательство единственности. Допустим, что в $\mathcal{U}_\partial$ существуют два элемента u_1 и u_2, для которых

$$\pi(u_1, v - u_1) \geqslant L(v - u_1) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.3}$$

$$\pi(u_2, v - u_2) \geqslant L(v - u_2) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.4}$$

Положим в (2.3) $v = u_2$, в (2.4) $v = u_1$ и сложим получившиеся неравенства. Тогда

$$-\pi(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geqslant 0,$$

откуда, согласно (2.2), $\pi(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, т. е. $u_1 = u_2$.

Доказательство существования. 1) Применим теорему 1.2 к случаю $\pi(u, v) = (u, v)_{\mathcal{U}}$. Тогда для заданного $g \in \mathcal{U}$ существует такой единственный элемент

$$w = S(g) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.5}$$

что для всех $v \in \mathcal{U}_\partial$

$$(w, v - w)_{\mathcal{U}} \geqslant (g, v - w)_{\mathcal{U}} - \rho\,[\pi(g, v - w) - L(v - w)], \tag{2.6}$$

где ρ — некоторая положительная постоянная.

Если элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$ — *неподвижная точка* отображения $g \to S(g)$, то он удовлетворяет неравенству (2.1).

Следовательно, теорема будет доказана, если мы убедимся, что

$$\left.\begin{array}{l}\text{можно выбрать постоянную } \rho > 0 \text{ так, чтобы}\\ g \to S(g) \text{ было сжимающим отображением на } \mathcal{U}_\partial.\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

2) Так как форма $v \to \pi(g, v)$ линейна и непрерывна на $\mathcal{U}$, то ее можно записать в виде

$$\pi(g, v) = (Bg, v)_{\mathcal{U}}, \quad B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U})\ ^{1)}, \tag{2.8}$$

так что неравенство (2.6) эквивалентно в этом случае неравенству

$$(w, v - w)_{\mathcal{U}} \geqslant (g - \rho Bg, v - w)_{\mathcal{U}} + \rho L(v - w) \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.9}$$

Пусть $w_1 = S(g_1)$; тогда при $w = w_1$ и $g = g_1$ неравенство (2.9) принимает вид

$$(w_1, v - w_1)_{\mathcal{U}} \geqslant (g_1 - \rho Bg_1, v - w_1)_{\mathcal{U}} + \rho L(v - w_1)\ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.10}$$

Положим в (2.9) $v = w_1$, в (2.10) $v = w$ и сложим получившиеся неравенства. Тогда

$$-\| w - w_1 \|^2_{\mathcal{U}} \geqslant -((I - \rho B)(g - g_1), w - w_1)_{\mathcal{U}},$$

откуда

$$\| w - w_1 \|_{\mathcal{U}} \leqslant \| (I - \rho B)(g - g_1) \|_{\mathcal{U}}. \tag{2.11}$$

С другой стороны,

$$\|(I - \rho B) g\|^2_{\mathcal{U}} = \|g\|^2_{\mathcal{U}} + \rho^2 \|Bg\|^2_{\mathcal{U}} - 2\rho (Bg, g)_{\mathcal{U}},$$

а согласно (2.8), $(Bg, g)_{\mathcal{U}} = \pi(g, g)$. Заменяя g на $g - g_1$, приходим к неравенству

$$\|(I - \rho B)(g - g_1)\|^2_{\mathcal{U}} \leqslant (1 + \rho^2 \|B\|^2)\|g - g_1\|^2_{\mathcal{U}} - 2\rho\pi(g - g_1, g - g_1).$$

Отсюда, считая, что $g, g_1 \in \mathcal{U}_\partial$, и используя формулу (2.2), получаем

$$\|(I - \rho B)(g - g_1)\|^2_{\mathcal{U}} \leqslant (1 + \rho^2\|B\|^2 - 2c\rho)\|g - g_1\|^2_{\mathcal{U}},$$

что вместе с (2.11) дает

$$\|S(g) - S(g_1)\|_{\mathcal{U}} \leqslant (1 + \rho^2\|B\|^2 - 2c\rho)^{1/2}\|g - g_1\|_{\mathcal{U}}, \quad g, g_1 \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.12}$$

Выбирая $\rho > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $1 + \rho^2 \| B \|^2 - 2c\rho < 1$, завершаем доказательство.

Замечание 2.1. Пусть $b(u, v)$ — *билинейная симметричная и коэрцитивная* форма, определенная на $\mathcal{U}$.

---

1) Через $\mathcal{L}(X; Y)$ обозначается пространство непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y.— *Прим. перев.*

Допустим, что для заданных $g \in \mathcal{U}$ и $\rho > 0$ элемент $w = S_b(g)$ множества $\mathcal{U}_\partial$ удовлетворяет неравенству

$$b(w, v - w) \geqslant b(g, v - w) - \rho [\pi(g, v - w) - L(v - w)] \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.13}$$

Тогда при подходящем значении ρ отображение $g \to S_b(g)$ будет сжимающим на $\mathcal{U}_\partial$ и его единственная неподвижная точка будет искомым элементом u. (В предыдущем доказательстве было $b(u, v) = (u, v)_{\mathcal{U}}$.)

Можно указать эффективный способ аппроксимации u, например, применяя метод последовательных приближений для решения неравенства (2.13). Для этого достаточно знать *одну* форму $b(u, v)$, для которой известно, как эффективно (хотя бы приближенно) решается следующая задача:

$$b(u, v - u) \geqslant M(v - u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Замечание 2.2. Можно сформулировать аналоги замечаний 1.5 и 1.6.

Если, в частности, $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$, то из теоремы 2.1 вытекает, что

> если $\pi(u, v)$ — билинейная (не обязательно симметричная) непрерывная на $\mathcal{U}$ форма, удовлетворяющая неравенству
>
> $$\pi(v, v) \geqslant c \| v \|^2, \ c > 0, \quad \forall v \in \mathcal{U},$$
>
> то существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}$, для которого
>
> $$\pi(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$
>
> (2.14)

Этот результат хорошо известен под названием «лемма Лакса — Мильграма» (см. Лакс и Мильграм [1], Вишик [1]).

Замечание 2.3. Как и в разд. 1.4, неравенство (2.1) можно заменить эквивалентным неравенством

$$\pi(v, v - u) \geqslant L(v - u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.15}$$

§ 3. Примеры

3.1. Функциональные пространства на Ω

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, а Γ — его граница.

В дальнейшем всегда будем считать, что Ω — ограниченное открытое множество, а его граница Γ — бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n - 1$, причем множество Ω расположено локально по одну сторону от Γ. Эти предположения можно ослабить в каждом из примеров, рассматриваемых в настоящей книге, но мы этого делать не будем.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$\mathscr{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых в области Ω функций φ, принимающих действительные значения и имеющих в Ω компактный носитель (свой для каждой функции φ); это пространство снабжено топологией индуктивного предела (Шварц [1]). «Псевдотопология» в $\mathscr{D}(\Omega)$ определяется так: последовательность $\{\varphi_n\} \in \mathscr{D}(\Omega)$ сходится к нулю, если: (i) все функции φ_n имеют носители в фиксированном компактном подмножестве в Ω; (ii) $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ (в обычном смысле) равномерно на Ω вместе со своими производными любого порядка.

$\mathscr{D}'(\Omega)$ — пространство распределений (обобщенных функций) на Ω, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{D}(\Omega)$; если $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, то производная $\partial f/\partial x_i$ — единственный элемент пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$, определяемый равенством

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение элементов, взятых соответственно из $\mathscr{D}'(\Omega)$ и $\mathscr{D}(\Omega)$. Мы будем обозначать распределения так же, как и функции; если $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, можно записать

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Например, если $a \in \Omega$, то δ-функция Дирака в точке a обозначается через $\delta(x-a)$ и определяется равенством

$$\langle \delta(x-a), \varphi \rangle = \int_\Omega \delta(x-a)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(a).$$

$L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — пространство (классов) функций f, измеримых на Ω и таких, что

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < \infty$$

и

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

В частности, $L^2(\Omega)$ (т. е. $p = 2$) — *гильбертово пространство*, которое мы будем *отождествлять с его двойственным*. (Следует иметь в виду, что все остальные гильбертовы пространства функций на Ω нельзя так отождествлять с их двойственными.)

Сопоставляя с каждой функцией $f \in L^p(\Omega)$ распределение (обобщенную функцию) $\tilde{f}$:

$$\varphi \xrightarrow{\tilde{f}} \langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

получаем линейное непрерывное и *взаимно однозначное* отображение $f \to \tilde{f}$ пространства $L^p(\Omega)$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Можно отождествить $\tilde{f}$ с f, что мы и будем делать. Тогда после естественного отождествления элементов из $\mathscr{D}(\Omega)$ и $L^p(\Omega)$ получим

$$\mathscr{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega). \tag{3.1}$$

Учитывая (3.1), можно определить обобщенные производные $\partial f/\partial x_i$ для каждой функции $f \in L^p(\Omega)$. Вообще, для $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ положим

$$\langle D^q f, \varphi\rangle = (-1)^{|q|}\langle f, D^q\varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{3.2}$$

где $q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, $|q| = q_1 + \ldots + q_n$, $q_i \geqslant 0$ — целые числа, а

$$D^q = D_1^{q_1}\ldots D_n^{q_n}, \quad D_i^{q_i} = \frac{\partial^{q_i}}{\partial x_i^{q_i}}.$$

$H^m(\Omega)$ ($m \geqslant 1$ — целое число) — пространство Соболева порядка m в области Ω:

$$H^m(\Omega) = \{v \mid D^q v \in L^2(\Omega)\ \forall q, 0 \leqslant |q| \leqslant m\}. \tag{3.3}$$

Для функций $u, v \in H^m(\Omega)$ зададим скалярное произведение

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |q| \leqslant m} (D^q u, D^q v)_{L^2(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание, что отображение $f \to \mathscr{D}^q f$ пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$ в себя **-слабо непрерывно* (непрерывно в слабой двойственной топологии; см. Шварц [1], Хорват [1], Иосида [1]), легко убедиться, что справедлива

Теорема 3.1. *Пространство $H^m(\Omega)$, снабженное скалярным произведением (3.4), является гильбертовым пространством.*

3.2. Функциональные пространства на Γ

Аналогичным образом вводятся пространства $\mathscr{D}(\Gamma)$, $L^p(\Gamma)$, $\mathscr{D}'(\Gamma)$, $H^m(\Gamma)$ на многообразии Γ с мерой $d\Gamma$ (индуцированной мерой dx).

Если многообразие Γ компактно, то $\mathscr{D}(\Gamma)$ совпадает с пространством бесконечно дифференцируемых функций на Γ (без условий на носители). В этом случае производные определяются с помощью локальных карт, и так же определяется пространство $H^m(\Gamma)$.

3.3. Подпространства пространства $H^m(\Omega)$

Один из наиболее полезных в приложениях результат — *теорема о следах* для пространств $H^m(\Omega)$. С каждым элементом $u \in H^m(\Omega)$ можно сопоставить следы на Γ элемента u и его нормальных производных $\partial^k u/\partial n^k$ [1]) для $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и таким путем охарактеризовать *образ* пространства $H^m(\Omega)$ при отображении

$$u \to \left\{ u|_\Gamma, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\right|_\Gamma \right\}. \tag{3.5}$$

Для этого нам понадобятся *пространства Соболева дробного порядка*, которые мы сейчас и введем.

Рассмотрим сначала пространство $H^m(\Omega)$ при $\Omega = \mathbf{R}^n$. Мы будем пользоваться *преобразованием Фурье* [2])

$$\mathscr{F}\colon f \to \mathscr{F}f, \quad \mathscr{F}f(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-2\pi i x\xi) f(x)\, dx, \tag{3.6}$$

(где $x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$), устанавливающим изоморфизм пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$ на себя, причем $\|\mathscr{F}f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$. Отображение $\mathscr{F}^{-1}$, обратное к $\mathscr{F}$, определяется равенством

$$\mathscr{F}^{-1}f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(2\pi i x\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{3.7}$$

Отображения $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}^{-1}$ продолжаются по непрерывности на пространство медленно растущих распределений (Шварц [1]). Оказывается, что

$$\mathscr{F}(D^q v) = (2\pi i)^{|q|} \xi_1^{q_1} \ldots \xi_n^{q_n} \mathscr{F}v \qquad \forall v \in L^2(\mathbf{R}^n), \tag{3.8}$$

а отсюда следует, что

$$H^m(\mathbf{R}^n) = \{v \mid \xi^q \mathscr{F}v \in L^2(\mathbf{R}^n)\ \forall q,\ 0 \leqslant |q| \leqslant m\}, \tag{3.9}$$

где $\xi^q = \xi_1^{q_1} \ldots \xi_n^{q_n}$. Нетрудно убедиться, что равенство (3.9) можно заменить эквивалентным ему равенством

$$H^m(\mathbf{R}^n) = \{v \mid (1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathscr{F}v \in L^2(\mathbf{R}^n)\}. \tag{3.10}$$

Если $u, v \in H^m(\mathbf{R}^n)$, то билинейная форма

$$((1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathscr{F}u,\ (1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathscr{F}v)_{L^2(\mathbf{R}^n)} \tag{3.11}$$

---

[1]) $\partial^k/\partial n^k$ — нормальная производная порядка k; для определенности будем считать, что нормаль к границе Γ области Ω направлена *наружу*.

[2]) Если $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, то интегралы в (3.6) и (3.7) являются пределами (в смысле $L^2(\mathbf{R}^n)$) функций $\int_{|\xi| \leqslant M} \exp(\mp 2\pi i x\xi) f(\xi)\, d\xi$ при $M \to \infty$.

определяет скалярное произведение, эквивалентное заданному формулой (3.4).

Тот факт, что в формуле (3.10) m — целое положительное число, не имеет значения. Поэтому *для любого* $s \in \mathbf{R}$ можно *определить* пространство

$$H^s(\mathbf{R}^n) = \{v \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} v \in L^2(\mathbf{R}^n)\}, \tag{3.12}$$

которое становится гильбертовым после введения скалярного произведения

$$(u, v)_{H^s(\mathbf{R}^n)} = ((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} u,\ (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} v)_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \tag{3.13}$$

Это скалярное произведение при $s = m$, т. е. при целом положительном s, эквивалентно (но не тождественно) скалярному произведению (3.4).

Можно показать (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 1]), что если $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, то $u \to \varphi u$ — непрерывное линейное отображение пространства $H^s(\mathbf{R}^n)$ в себя.

Это в свою очередь позволяет определить (с помощью локальных карт) пространства $H^s(\Gamma)$.

Пример 3.1. Пусть Ω — круг $|x| < 1$ в $\mathbf{R}^2$. Тогда Γ — окружность $|x| = 1$, т. е. $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$. В этом случае утверждение $f \in H^s(\Gamma)$ эквивалентно соотношениям

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\theta}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + n^2)^s |f_n|^2 < \infty. \tag{3.14}$$

Отождествляя пространство $L^2(\Omega)$ (соответственно $L^2(\Gamma)$) с его двойственным, можно отождествить двойственное пространство к $H^s(\mathbf{R}^n)$ (соответственно к $H^s(\Gamma)$) с $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ (соответственно с $H^{-s}(\Gamma)$).

Вообще, если обозначить через X' пространство, двойственное к X, то

$$(H^s(\mathbf{R}^n))' = H^{-s}(\mathbf{R}^n) \qquad \forall s \in \mathbf{R} \tag{3.15}$$

и

$$(H^s(\Gamma))' = H^{-s}(\Gamma) \qquad \forall s \in \mathbf{R}. \tag{3.16}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему о следах (ее доказательство см. Лионс и Мадженес [1]):

Теорема 3.2. *Для каждого элемента $u \in H^m(\Omega)$ можно однозначно определить его следы*

$$u|_\Gamma,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma,\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\right|_\Gamma.$$

При этом оказывается, что

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_\Gamma \in H^{m-k-1/2}(\Gamma), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{3.17}$$

а $u \to \{\partial^k u/\partial n^k \mid_\Gamma, 0 \leqslant k \leqslant m-1\}$ *— линейное непрерывное сюръективное отображение из* $H^m(\Omega)$ *на* $\prod_{k=0}^{m-1} H^{m-k-1/2}(\Gamma)$.

Справедлива также

Теорема 3.3. *Ядро отображения* (3.5) [1]) *совпадает с замыканием пространства* $\mathscr{D}(\Omega)$ *в* $H^m(\Omega)$.

Обозначим это ядро (подпространство пространства $H^m(\Omega)$) через $H_0^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \left\{u \mid u \in H^m(\Omega), \left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_\Gamma = 0 \quad \forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1\right\}. \tag{3.18}$$

Так как $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $H_0^m(\Omega)$, то пространство, двойственное к $H_0^m(\Omega)$, можно отождествить с некоторым подпространством пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$. Положим

$$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'; \tag{3.19}$$

тогда

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega). \tag{3.20}$$

3.4. Примеры граничных задач

Пусть a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — заданные на Ω действительные функции, причем

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \tag{3.21}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \\ \text{почти всюду на } \Omega.\end{array}\right\} \tag{3.22}$$

Далее, пусть $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, причем

$$a_0(x) \geqslant \alpha > 0 \text{ почти всюду на } \Omega. \tag{3.23}$$

Для $u, v \in H^1(\Omega)$ положим

$$\pi(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0 uv\, dx. \tag{3.24}$$

---

[1]) То есть совокупность таких элементов $u \in H^m(\Omega)$, что $\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_\Gamma = 0$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$.

Тем самым определена непрерывная билинейная форма на $H^1(\Omega)$. В силу (3.22) и (3.23)

$$\pi(v, v) \geqslant \alpha \| v \|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.25}$$

Выберем в пространстве $H^1(\Omega)$ (в обозначениях изложенной в § 2 общей теории) множество

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U}_\partial = \mathcal{U} \text{ — замкнутое подпространство пространства} \\ \quad H^1(\Omega) \text{ (снабженного введенной нормой), причем} \\ \quad \mathcal{U} \supseteq H^1_0(\Omega), \end{array}\right\} \tag{3.26}$$

и пусть

$$L \text{ — линейная непрерывная на } \mathcal{U} \text{ форма.} \tag{3.27}$$

По теореме 2.1 (см. (2.14)) существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}$, для которого

$$\pi(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{3.28}$$

Пример 3.2. Пусть $L(v) = \int_\Omega fv\,dx$, $f \in L^2(\Omega)$. Тогда уравнение (3.28) эквивалентно уравнению

$$Au = f, \quad u \in H^1_0(\Omega), \tag{3.29}$$

где

$$Av \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + a_0(x)\,v. \tag{3.30}$$

Действительно, если $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$, то (3.28) эквивалентно уравнению

$$\pi(u, \varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

равносильному уравнению (3.29) по самому определению обобщенных производных.

Задача (3.29) является *задачей Дирихле*.

Пример 3.3. Пусть $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$, а коэффициенты a_{ij}, a_0 *регулярны* в Ω (например, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_0 \in C^0(\overline{\Omega})$). Пусть линейная форма $L(v)$ задана в виде

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,d\Gamma, \quad f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{3.31}$$

Заметим, что (3.31) действительно определяет линейную непрерывную форму на $H^1(\Omega) = \mathcal{U}$, так как по теореме 3.2 $v \to v\,|_\Gamma$ есть непрерывное отображение $H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$.

В рассматриваемом случае уравнение (3.28) можно интерпретировать так. Возьмем сначала $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; тогда

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.32}$$

Дальше будем рассуждать *формально* [1]). Умножим обе части равенства (3.32) на v и применим *формулу Грина* [2]):

$$\int_\Omega (Au)\, v\, dx = -\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right) v\, d\Gamma + \pi(u, v) = \int_\Omega fv\, dx;$$

здесь

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3.33}$$

а $\cos(n, x_i)$ — это i-й направляющий косинус внешней нормали n к границе Γ области Ω.

Согласно (3.28),

$$\pi(u, v) = \int_\Omega fv\, dx + \int_\Gamma gv\, d\Gamma,$$

откуда

$$\int_\Gamma \left(-\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + g\right) v\, d\Gamma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma = g.$$

Таким образом, мы доказали (считая, что формула Грина обоснована) существование и единственность функции $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющей соотношениям

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega; \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = g \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.34}$$

Задача (3.34) является *задачей Неймана*.

Замечание 3.1. Для функции $u \in H^1(\Omega)$, для которой $Au \in L^2(\Omega)$, можно единственным образом определить $\partial u/\partial \nu_A$ на Γ, и при этом $\partial u/\partial \nu_A \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2]).

Пример 3.4. Пусть $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$, а коэффициенты a_{ij} разрывны. Точнее, пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$ (рис. 1) и

$$a_{ij} = a_{ij}^k \quad \text{в} \quad \Omega_k, \qquad k = 1, 2,$$

причем функции a_{ij}^1 и a_{ij}^2 регулярны в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ соответственно, но не совпадают на поверхности S. Пусть линейная фор-

[1]) Это рассуждение можно полностью обосновать; см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2].

[2]) Ее-то и нужно было бы обосновать.

ма $L(v)$ задана в виде

$$L(v)=\int\limits_{\Omega_1} f_1 v\,dx+\int\limits_{\Omega_2} f_2 v\,dx,\quad f_k\in L^2(\Omega_k),\quad k=1,\ 2.$$

Мы снова должны интерпретировать уравнение (3.28).

В рассматриваемом случае это можно сделать так. Если взять сначала $v=\varphi\in\mathscr{D}(\Omega_1)$, а потом $v=\varphi\in\mathscr{D}(\Omega_2)$, то можно

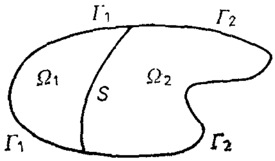

Рис. 1.

доказать, что u удовлетворяет соотношениям

$$A_k u=f_k \text{ в } \Omega_k,\qquad k=1,\ 2,$$

где

$$A_k w\equiv-\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)+a_0^k w,\quad k=1,\ 2. \tag{3.35}$$

Положим

$$u=u_k \quad \text{в} \quad \Omega_k,\qquad k=1,\ 2.$$

Далее, взяв функцию $v\in H^1(\Omega)$ тождественно равной нулю в $\overline{\Omega}_2$ и в точках области Ω_1, лежащих в окрестности поверхности S, можно убедиться, что, как и в примере 3.3,

$$\frac{\partial u_1}{\partial\nu_{A_1}}=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{3.36}$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{\partial u_2}{\partial\nu_{A_2}}=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{3.37}$$

Пусть, наконец, функция $v\in\mathscr{D}(\Omega)$ отлична от нуля на S. Из уравнений $A_k u_k=f_k$ следует, что

$$\int\limits_{\Omega_1}(A_1u_1)\,v\,dx+\int\limits_{\Omega_2}(A_2u_2)\,v\,dx=\int\limits_{\Omega_1} f_1 v\,dx+\int\limits_{\Omega_2} f_2 v\,dx.$$

Применим формулу Грина к левой части этого равенства:

$$-\int\limits_S\frac{\partial u_1}{\partial\nu_{A_1}}v\,dS-\int\limits_S\frac{\partial u_2}{\partial\nu_{A_2}}v\,dS+\pi(u,\ v)=L(v),$$

где $\partial/\partial\nu_{A_k}$ определяется аналогично (3.33), причем на S выбирается нормаль, направленная *наружу* области Ω_k. Следовательно,

$$\int_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu_{A_1}} + \frac{\partial u_2}{\partial\nu_{A_2}}\right) v\, dS = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u_1}{\partial\nu_{A_1}} + \frac{\partial u_2}{\partial\nu_{A_2}} = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{3.38}$$

Таким образом, функции $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ и $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} A_1u_1 &= f_1 \text{ в } \Omega_1,\\ A_2u_2 &= f_2 \text{ в } \Omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

условиям (3.36) и (3.37) на Γ_1 и Γ_2 соответственно, а также *условиям сопряжения*

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = u_2 \quad \text{на} \quad S,\\ &\frac{\partial u_1}{\partial\nu_{A_1}} + \frac{\partial u_2}{\partial\nu_{A_2}} = 0 \quad \text{на} \quad S. \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

Пример 3.5. Пусть Ω — двусвязная область (рис. 2).

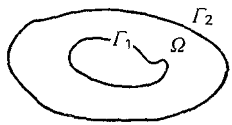

Рис. 2.

Положим

$$\mathcal{U} = \{u \mid u \in H^1(\Omega),\ u|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

Пусть форма $\pi(u, v)$ та же, что и в предыдущих примерах (см. (3.34)), а линейная форма имеет вид

$$L(v) = \int_\Omega fv\, dx + \int_{\Gamma_2} gv\, d\Gamma_2, \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma_2), \quad f \in L^2(\Omega).$$

В этом случае уравнение (3.28) приводит к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} Au &= f \quad \text{в} \quad \Omega,\\ u &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1,\\ \frac{\partial u}{\partial\nu_A} &= g \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Это *смешанная граничная задача*: на одной части границы задано условие Дирихле, а на другой ее части — условие Неймана.

3.5. Односторонние граничные задачи [1] (I)

До сих пор общая теория § 2 применялась к примерам, в которых не было ограничений на управления, т. е. когда было $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (см. (3.26)).

Возьмем теперь ту же, что и в разд. 3.4, форму $\pi(u, v)$ (см. (3.24)), а в качестве $\mathcal{U}_\partial$ выберем *выпуклое замкнутое подмножество* в $\mathcal{U}$.

Пусть сначала $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$ и

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U},\ v|_\Gamma \geqslant 0\}. \tag{3.42}$$

Лемма 3.1. *Множество $\mathcal{U}_\partial$, определенное равенством* (3.42), *является выпуклым замкнутым конусом в пространстве $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$ с вершиной в начале координат.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклый конус с вершиной в начале координат, и нужно лишь доказать, что $\mathcal{U}_\partial$ — *замкнутое* множество. Но это следует из *непрерывности* отображения $v \to v|_\Gamma$ пространства $H^1(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$ (теорема 3.2).

Выберем теперь линейную форму L, как и в примере 3.3, в виде (3.31). Так как в рассматриваемом случае применимо замечание 1.6, то существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которого

$$\pi(u, v) \geqslant L(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{3.43}$$

$$\pi(u, u) = L(u). \tag{3.44}$$

Соотношения (3.43), (3.44) интерпретируются следующим образом. Пусть $v = \pm\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (так что $v \in \mathcal{U}_\partial$); тогда

$$\pi(u, \varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

и, следовательно,

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.45}$$

Умножая равенство (3.45) на $v \in \mathcal{U}_\partial$ и применяя формулу Грина (формально; о возможности ее обоснования мы уже говорили в примере 3.3), получаем

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v \, d\Gamma + \pi(u, v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

---

[1] В оригинале problèmes aux limites unilatéraux.— *Прим. перев.*

Отсюда в силу (3.43) вытекает

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A}-g\right)v\,d\Gamma\geqslant 0. \qquad (3.46)$$

Фигурирующая в соотношении (3.46) функция v принадлежит множеству $\mathcal{U}_\partial$, а значит, $v \geqslant 0$ на Γ; поэтому неравенство (3.46) эквивалентно неравенству [1])

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}-g\geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \qquad (\text{в смысле } H^{-1/2}(\Gamma)). \qquad (3.47)$$

Кроме того, в силу (3.44) из (3.46) вытекает, что

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A}-g\right)u\,d\Gamma=0.$$

Это равенство с учетом (3.47) и того, что $u \geqslant 0$ на Γ, дает

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A}-g\right)=0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \qquad (3.48)$$

Таким образом, *в пространстве* $H^1(\Omega)$ *существует единственная функция* u, *удовлетворяющая уравнению* (3.45) *и граничным условиям*

$$\left.\begin{aligned} &u\geqslant 0 && \text{на} \quad \Gamma,\\ &\frac{\partial u}{\partial \nu_A}-g\geqslant 0 && \text{на} \quad \Gamma,\\ &u\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A}-g\right)=0 && \text{на} \quad \Gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (3.49)$$

Замечание 3.2. Соотношения (3.49) называются *односторонними граничными условиями*.

Согласно последнему из условий (3.49), существует подмножество Γ_0 границы Γ, на котором $u=0$; тогда $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}-g=0$ на $\Gamma-\Gamma_0$. Разумеется, Γ_0 заранее не известно, так что речь идет о задачах, имеющих некоторую аналогию с *задачами со свободной границей* (см. также разд. 3.6).

---

[1]) Согласно Шварцу [1], неотрицательное распределение есть неотрицательная мера. Следовательно, $\partial u/\partial \nu_A - g$ есть *мера* на Γ, неотрицательная и принадлежащая пространству $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Замечание 3.3. Отметим, что задача (3.45), (3.49) — нелинейная, хотя A — линейный оператор. Вообще, если множество допустимых управлений само не является векторным пространством, то соответствующая граничная задача нелинейна.

3.6. Односторонние граничные задачи (II)

Возьмем снова ту же форму $\pi(u, v)$, что и в разд. 3.5. Пусть $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$ и

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U},\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{3.50}$$

Можно непосредственно проверить, что $\mathcal{U}_\partial$ — *выпуклый замкнутый конус в пространстве* $\mathcal{U}$ *с вершиной в начале координат.*

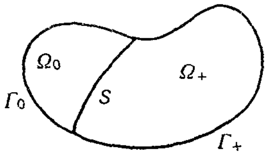

Рис. 3.

Считая, что линейная форма L задана так же, как и в разд. 3.5, мы можем утверждать существование и единственность элемента $u \in \mathcal{U}_\partial$, удовлетворяющего условиям (3.43), (3.44).

Вопрос об интерпретации условий (3.43), (3.44) в рассматриваемом случае более тонкий (подробное исследование этой задачи проводили Брезис и Стампаккья [1]). Разобьем область Ω на два множества:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{x \mid x \in \Omega,\quad u(x) = 0\}, \\ \Omega_+ &= \{x \mid x \in \Omega,\quad u(x) > 0\}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Схематически это разбиение представлено на рис. 3. Подчеркнем, однако, что Ω_0 заранее не известно и, вообще говоря, не известна «степень регулярности» «границы» S, разделяющей множества Ω_0 и Ω_+.

Пусть функция $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеет компактный носитель в Ω_+. Для достаточно малых ε функции $v = u \pm \varepsilon\varphi$ принадлежат множеству $\mathcal{U}_\partial$ (так как $u > 0$ на Ω_+), а тогда из (3.43) вытекает

$$\pi(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0, \\ Au &= f \quad \text{в} \quad \Omega_+,\ u > 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Далее, как и в разд. 3.5,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} - g \geqslant 0, \quad u\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A} - g\right) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_+ \tag{3.53}$$

(смысл обозначения Γ_+ ясен из рис. 3). Так как $u \in H^1(\Omega)$, то

$$u = 0 \quad \text{на} \quad S \tag{3.54}$$

(предел при приближении к S по множеству Ω_+).

Наконец, можно показать (см. Брезис и Стампаккья [1]), что в некотором вполне определенном смысле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_S = 0 \tag{3.55}$$

(предел при приближении к S по множеству Ω_+).

Односторонняя граничная задача (3.52) — (3.55) есть задача *со свободной границей*; поверхность S (входящая в число неизвестных) является свободной поверхностью.

Замечание 3.4. Главная трудность рассмотренной задачи заключается в исследовании *регулярности решения* (см. Брезис и Стампаккья [1]).

Многие задачи такого типа пока остаются нерешенными. Это относится, в частности, и к некоторым задачам, встречающимся в следующих главах.

3.7. Односторонние граничные задачи (III)

Возьмем в качестве $\pi(u, v)$ ту же форму, что и в разд. 3.5 и 3.6. Пусть $\mathcal{U} = H_0^1(\Omega)$ и

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant 1 \ \text{почти всюду в} \ \Omega\}. \tag{3.56}$$

Легко убедиться, что $\mathcal{U}_\partial$ — *выпуклое замкнутое ограниченное подмножество* пространства $H_0^1(\Omega)$. Пусть линейная форма имеет вид

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx, \qquad f \in H^{-1}(\Omega). \tag{3.57}$$

Тогда существует, и притом единственный, элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которого

$$\pi(u, v-u) \geqslant L(v-u) = \int_\Omega f(v-u)\,dx \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.58}$$

Этому соотношению можно дать следующую формальную интерпретацию. Разобьем область Ω на два множества:

$$\Omega_1 = \{x \mid |\operatorname{grad} u(x)| = 1\},$$
$$\Omega_2 = \{x \mid |\operatorname{grad} u(x)| < 1\}.$$

Тогда

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega_2. \tag{3.59}$$

Главная трудность состоит в изучении регулярности решения на границе, разделяющей множества Ω_1 и Ω_2 (см. Брезис и Стампаккья [1]).

3.8. Односторонние граничные задачи для систем уравнений

Все предыдущие рассмотрения можно распространить на *системы*. Ограничимся одним простым примером.

Пусть

$$\mathcal{U} = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega); \tag{3.60}$$

тогда элемент $u \in \mathcal{U}$ имеет вид

$$u = \{u_1, u_2\}, \quad u_i \in H^1(\Omega).$$

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{U}$ множество

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v = \{v_1, v_2\},\ v_1 \geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\ v_2 \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\}. \tag{3.61}$$

Как и в лемме 3.1, $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклый замкнутый конус в пространстве $\mathcal{U}$ с вершиной в начале координат.

Пусть

$$\begin{aligned} \pi(u, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u_1 \operatorname{grad} v_1\, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u_2 \operatorname{grad} v_2\, dx + \\ + \int_\Omega (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_1 v_2 - u_2 v_1)\, dx; \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$L(v) = \int_\Omega f_1 v_1\, dx + \int_\Omega f_2 v_2\, dx + \int_\Gamma g_1 v_1\, d\Gamma + \int_\Gamma g_2 v_2\, d\Gamma, \tag{3.63}$$

где $f_i \in L^2(\Omega)$, $g_i \in H^{1/2}(\Gamma)$, $i = 1, 2$.

Так как $\pi(v, v) = \| v_1 \|^2_{H^1(\Omega)} + \| v_2 \|^2_{H^1(\Omega)}$, то применима общая теория и, следовательно, существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, удовлетворяющий условиям (3.43), (3.44).

Этим соотношениям можно дать такую же интерпретацию, как и в разд. 3.5. Именно получается система [1])

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_1 - u_2 = f_1 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ -\Delta u_2 + u_2 + u_1 = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

[1]) Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$.

с *односторонними граничными условиями*

$$\left.\begin{aligned}&u_i \geqslant 0 \quad \text{на } \Gamma,\\ &\frac{\partial u_i}{\partial n} - g_i \geqslant 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} - g_i\right) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad i = 1,\ 2.\end{aligned}\right\} \tag{3.65}$$

3.9. Эллиптические операторы порядка выше второго

Во всех рассмотренных до сих пор примерах получающиеся дифференциальные операторы были второго порядка. Сейчас мы приведем очень простой пример, в котором будет эллиптический оператор 4-го порядка.

Пусть

$$\mathcal{U} = \{v \mid v \in L^2(\Omega),\ \Delta v \in L^2(\Omega)\} \tag{3.66}$$

(разумеется, Δv понимается *в смысле распределений на* Ω). Для $u, v \in \mathcal{U}$ зададим скалярное произведение формулой

$$(u, v)_{\mathcal{U}} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)};$$

легко видеть, что тогда $\mathcal{U}$ будет гильбертовым пространством. Можно показать (Лионс и Мадженес [1, гл. 2]), что

$$\left.\begin{aligned}&\text{для каждого } v \in \mathcal{U}\\ &\text{однозначно определяются следы } v|_\Gamma, \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma;\\ &v|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma \in H^{-3/2}(\Gamma);\\ &v \to \left\{v|_\Gamma, \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma\right\} \text{ есть непрерывное отображение}\\ &\mathcal{U} \to H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma).\end{aligned}\right\} \tag{3.67}$$

Возьмем множество

$$\mathcal{U}_\partial = \left\{v \mid v|_\Gamma \geqslant 0,\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma \geqslant 0\right\}. \tag{3.68}$$

Замечание 3.5. Условия $v|_\Gamma \geqslant 0$ и $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma \geqslant 0$ понимаются в смысле пространств $H^{-1/2}(\Gamma)$ и $H^{-3/2}(\Gamma)$ соответственно. Следовательно, $v|_\Gamma$ и $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma$ — положительные меры.

Легко проверить, что $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклый замкнутый конус в пространстве $\mathcal{U}$ с вершиной в начале координат.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} &\pi(u, v) = \int_\Omega a_1(x)\,\Delta u\,\Delta v\,dx + \int_\Omega a_0 uv\,dx; \quad a_0, a_1 \in L^\infty(\Omega);\\ &a_0(x) \geqslant \alpha > 0,\ a_1(x) \geqslant \alpha > 0, \text{ почти всюду в } \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

Очевидно, что $\pi(v, v) \geqslant \alpha \| v \|^2_{\mathcal{U}}$. Наконец, положим

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx - \int_\Gamma g_2 v\,d\Gamma + \int_\Gamma g_1 \frac{\partial v}{\partial n}\,d\Gamma, \tag{3.70}$$

где

$$f \in L^2(\Omega),\ g_1 \in H^{3/2}(\Gamma),\ g_2 \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.71}$$

В силу (3.67) *линейная форма* $v \to L(v)$ *непрерывна* на $\mathcal{U}$.

Следовательно, существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, удовлетворяющий условиям (3.43), (3.44).

Осталось интерпретировать условия (3.43), (3.44); мы сделаем это *формально* [1]). Прежде всего, возьмем $v = \pm\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (так что $v \in \mathcal{U}_\partial$). Тогда в силу (3.43)

$$\Delta(a_1 \Delta u) + a_0 u = f \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.72}$$

Если считать функцию a_1 достаточно гладкой в $\overline{\Omega}$, то можно показать (Лионс и Мадженес [1, гл. 2]), что $u \in \mathcal{U}$, а (3.72) дает возможность однозначно определить следы

$$\Delta u|_\Gamma \in H^{-5/2}(\Gamma), \quad \left.\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|_\Gamma \in H^{-7/2}(\Gamma). \tag{3.73}$$

Умножим обе части равенства (3.72) на $v \in \mathcal{U}_\partial$ и применим (формально) формулу Грина; получим

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta u)\,v\,d\Gamma - \int_\Gamma a_1 \Delta u \frac{\partial v}{\partial n}\,d\Gamma + \pi(u, v) = \int_\Omega fv\,dx,$$

что в силу (3.43) и (3.70) эквивалентно неравенству

$$\int_\Gamma (a_1 \Delta u - g_1) \frac{\partial v}{\partial n}\,d\Gamma - \int_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta u) - g_2\right) v\,d\Gamma \geqslant 0. \tag{3.74}$$

Согласно (3.44), левая часть неравенства (3.74) обращается в нуль при $v = u$.

---

[1]) Нам неизвестно, как можно было бы строго обосновать проводимые формальные вычисления.

Итак, найдены *односторонние условия* на границе Г:

$$\left.\begin{aligned} &u \geqslant 0,\ \frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta u) - g_2 \leqslant 0,\ u\left(\frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta u) - g_2\right) = 0,\\ &\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0,\ a_1 \Delta u - g_1 \geqslant 0,\ \frac{\partial u}{\partial n}(a_1 \Delta u - g_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.75}$$

Замечание 3.6. Как мы уже отмечали, предыдущие вычисления формальны. Действительно, например, $u|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и $\left.\frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta u)\right|_\Gamma \in H^{-7/2}(\Gamma)$, а произведение $\left.u\left(\frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta u)\right)\right|_\Gamma$ не определено. Для строгой интерпретации нужно было бы воспользоваться замечанием 3.5.

3.10. Недифференцируемый функционал

Проиллюстрируем на примере применение теоремы 1.6.

Пусть Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ и $\mathcal{U} = H_0^1(\Omega)$. Рассмотрим функционал

$$J(v) = J_1(v) + J_2(v), \tag{3.76}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &J_1(v) = \alpha \int_\Omega |\operatorname{grad} v|^2 dx - 2 \int_\Omega fv\, dx,\\ &f \text{ — заданный элемент из } H^{-1}(\Omega),\\ &\alpha = \text{const} \geqslant 0; \end{aligned}\right\} \tag{3.77}$$

$$J_2(v) = 2\beta \int_\Omega |\operatorname{grad} v|\, dx, \qquad \beta = \text{const} > 0. \tag{3.78}$$

Легко видеть, что в этом случае теорема 1.6 применима[1]. Отметим также, что функция $v \to J_2(v)$ *недифференцируема*.

Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (ограничений на управления нет). Тогда единственный элемент $u \in \mathcal{U}$, для которого $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}} J(v)$, характеризуется неравенством

$$J_1'(u)\cdot(v - u) + J_2(v) - J_2(u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{3.79}$$

Для упрощения записи положим

$$\pi(u, v) = \alpha \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx; \tag{3.80}$$

---

[1]) Так как множество Ω ограничено, то существует такая константа c, что

$$\int_\Omega v^2 dx \leqslant c \int_\Omega |\operatorname{grad} v|^2 dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

тогда (3.79) можно переписать в виде

$$\pi(u, v-u) - \int_\Omega f(v-u)\,dx + \beta \int_\Omega |\operatorname{grad} v|\,dx - \beta \int_\Omega |\operatorname{grad} u|\,dx \geqslant 0.$$

Обозначим

$$X(u, v) = \pi(u, v) - \int_\Omega fv\,dx + \beta \int_\Omega |\operatorname{grad} v|\,dx; \tag{3.81}$$

тогда (3.79) примет вид

$$X(u, v) \geqslant X(u, u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{3.82}$$

Заменяя здесь v на λv при $\lambda \geqslant 0$, получаем

$$\lambda X(u, v) \geqslant X(u, u) \qquad \forall v \in \mathcal{U},\ \forall \lambda \geqslant 0. \tag{3.83}$$

Если $\lambda = 0$, то $X(u, u) \leqslant 0$. Поэтому неравенство (3.83) выполняется лишь в том случае, когда

$$X(u, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U},$$

а отсюда следует, что $X(u, u) \geqslant 0$.

Таким образом, *минимизирующий элемент* $u \in \mathcal{U}$ *для функционала* $J(v)$, *заданного соотношениями* (3.76)—(3.78), *характеризуется тем, что*

$$X(u, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}; \qquad X(u, u) = 0, \tag{3.84}$$

где форма $X(u, v)$ *определена равенствами* (3.81) *и* (3.80).

Убедимся теперь, что справедливо

Предложение 3.1. *Для того чтобы соотношения* (3.84) *удовлетворялись при* $u = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\int_\Omega fv\,dx \leqslant \beta \int_\Omega |\operatorname{grad} v|\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) = \mathcal{U}. \tag{3.85}$$

Доказательство. Соотношения (3.84) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\pi(u, v) - \beta \int_\Omega |\operatorname{grad} v|\,dx \geqslant \int_\Omega fv\,dx \quad \forall v \in \mathcal{U}, \\ &\pi(u, u) + \beta \int_\Omega |\operatorname{grad} u|\,dx = \int_\Omega fu\,dx. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Если $u = 0$, то первое из соотношений (3.86) превращается в (3.85).

Обратно, если выполняется неравенство (3.85), то, применяя его в случае $v = u$, получаем из второго соотношения (3.86), что $\pi(u, u) \leqslant 0$, а, следовательно, $u = 0$.

Если же неравенство (3.85) не выполняется, то $u \neq 0$, $J(u) < 0$ и минимизирующий элемент u характеризуется соотношениями (3.86). См. также § 19 гл. 3.

§ 4. Теорема сравнения

4.1. Общий результат

Рассмотрим билинейную (не обязательно симметричную) форму $\pi(u, v)$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$, удовлетворяющую условию [1])

$$\pi(v, v) \geqslant c \| v \|^2 \qquad \forall v \in \mathcal{U}, \tag{4.1}$$

где $c = \text{const} > 0$. Пусть $\mathcal{U}_\partial$ и $\mathcal{U}_\partial^*$ — два выпуклых замкнутых множества в пространстве $\mathcal{U}$ и L — линейная непрерывная на $\mathcal{U}$ форма.

По теореме 2.1 существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$ (соответственно $u^* \in \mathcal{U}_\partial^*$), для которого

$$\pi(u, v-u) \geqslant L(v-u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial \tag{4.2}$$

(соответственно

$$\pi(u^*, v-u^*) \geqslant L(v-u^*) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial^*). \tag{4.3}$$

Докажем следующую теорему (примеры ее применения приведем в разд. 4.2).

Теорема 4.1. *Если выполняется неравенство* (4.1) *и можно найти такие элементы* $w \in \mathcal{U}_\partial$ *и* $w^* \in \mathcal{U}_\partial^*$, *что*

$$w + w^* = u + u^*, \tag{4.4}$$

$$\pi(w - u^*, w - u) = 0, \tag{4.5}$$

то

$$w = u, \; w^* = u^*. \tag{4.6}$$

Доказательство. Положим $v = w$ в (4.2), $v = w^*$ в (4.3) и сложим почленно получающиеся неравенства; тогда в силу (4.4) $\pi(u, w-u) + \pi(u^*, w^*-u^*) \geqslant 0$. Так как в силу (4.4) $w^* - u^* = -(w-u)$, то

$$\pi(u - w, w - u) + \pi(w, w - u) - \pi(u^*, w - u) \geqslant 0,$$

или

$$-\pi(w - u, w - u) + \pi(w - u^*, w - u) \geqslant 0.$$

Это неравенство в силу (4.5) принимает вид

$$-\pi(w - u, w - u) \geqslant 0,$$

откуда, согласно (4.1), $w = u$, а потому и $w^* = u^*$.

[1]) Мы ограничиваемся этим условием для простоты. Можно было бы рассматривать более общее условие (2.2) и аналогичное неравенство, выполняющееся на $\mathcal{U}_\partial^*$.

4.2. Приложение

Вернемся к задаче, рассмотренной в разд. 3.5; минимизирующая функция $u(x)$ удовлетворяет соотношениям (3.45), (3.49). Пусть Γ_1 — измеримое подмножество границы Γ; положим

$$\mathcal{U}_\partial(\Gamma_1) = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_1\}. \tag{4.7}$$

Это замкнутое векторное подпространство пространства $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$ [1]. Если взять $\mathcal{U}_\partial^* = \mathcal{U}_\partial(\Gamma_1)$, то соответствующая минимизирующая функция u^* равна $u_{\Gamma_1}(x)$, где

$$\left.\begin{array}{lll} Au_{\Gamma_1} = f & \text{в} & \Omega, \\ u_{\Gamma_1} = 0 & \text{на} & \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u_{\Gamma_1}}{\partial \nu_A} - g = 0 & \text{на} & \Gamma - \Gamma_1. \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

С помощью теоремы 4.1 можно доказать, что справедлива

Теорема 4.2. *Если u удовлетворяет соотношениям* (3.45), (3.49), *а u_{Γ_1} — соотношениям* (4.8), *то*

$$u(x) = \sup_{\Gamma_1} u_{\Gamma_1}(x) \quad \text{для почти всех } x \in \Omega, \tag{4.9}$$

где Γ_1 пробегает семейство измеримых подмножеств границы Γ.

Доказательство. 1) Так как, согласно (3.49), $u = u_{\Gamma_1}$ при соответствующем множестве Γ_1, то

$$\sup_{\Gamma_1} u_{\Gamma_1}(x) \geqslant u(x). \tag{4.10}$$

Следовательно, остается доказать, что справедливо неравенство, обратное к (4.10).

2) Пусть множество Γ_1 фиксировано, $\mathcal{U}_\partial^* = \mathcal{U}_\partial(\Gamma_1)$ и $u_{\Gamma_1} = u^*$. Достаточно убедиться, что

$$u^* \leqslant u \text{ почти всюду в } \Omega. \tag{4.11}$$

Определим

$$w = \sup(u, u^*), \quad w^* = \inf(u, u^*)\ ^{2)}. \tag{4.12}$$

Равенство (4.4), очевидно, выполняется. Покажем, что выполняется и равенство (4.5). Полагая $u - u^* = \psi$, получаем

$$\pi(w - u^*, w - u) = \pi(\sup(u - u^*, 0), \sup(0, u^* - u)) =$$
$$= -\pi(\sup(\psi, 0), \inf(\psi, 0)).$$

---

[1] Строгое включение $\mathcal{U}_\partial(\Gamma_1) \subset \mathcal{U}$ имеет место тогда и только тогда, когда мера множества Γ_1 положительна.

[2] Отметим, что если $u, v \in H^1(\Omega)$, то $\sup(u, v) \in H^1(\Omega)$ и $\inf(u, v) \in H^1(\Omega)$ (аналогичное утверждение для пространств $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 2$, неверно).

Если $\{\psi_n\}$ — такая последовательность функций из $C^1(\overline{\Omega})$, что $\psi_n \to \psi$ в смысле пространства $H^1(\Omega)$ [1], то

$$\pi(\sup(\psi, 0), \inf(\psi, 0)) = \lim_{n\to\infty} \pi(\sup(\psi_n, 0), \inf(\psi_n, 0))$$

и $\pi(\sup(\psi_n, 0), \inf(\psi_n, 0)) = 0$; *отсюда и следует равенство* (4.5).

Таким образом, можно применить теорему 4.1 и заключить, что $w = u$, т. е. что выполняется неравенство (4.11).

Замечание 4.1. Доказательство теоремы 4.2 аналогично доказательству принципа максимума для решений эллиптических уравнений. Действительно, пусть f — заданная функция пространства $H^1(\Omega)$, причем

$$f \geqslant 0, \tag{4.13}$$

а $u \in H_0^1(\Omega)$ — решение уравнения

$$\pi(u, v) = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.14}$$

где форма π имеет прежний вид. Тогда

$$u \geqslant 0. \tag{4.15}$$

В самом деле, положим $w = \sup(u, 0)$. Легко видеть, что $w \in H_0^1(\Omega)$ [2] и $\pi(w, w-u) = 0$ (как в предыдущем доказательстве). Тогда из (4.14) с учетом (4.13) получаем

$$\pi(u, w-u) = \int_\Omega f(w-u)\,dx \geqslant 0,$$

откуда

$$\pi(u, w-u) - \pi(w, w-u) \geqslant 0,$$

или $-\pi(w-u, w-u) \geqslant 0$, а значит, $w = u$, и неравенство (4.15) доказано.

По поводу более точных результатов, касающихся вопроса, затронутого в замечании, см. Стампаккья [2].

§ 5. Некоэрцитивные формы

5.1. Выпуклость множества решений

Рассмотрим непрерывный *выпуклый* функционал $v \to J(v)$, полунепрерывный снизу в слабой топологии. Обозначим через X множество таких элементов $u \in \mathcal{U}_\partial$, что

$$J(u) = \inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{5.1}$$

[1] Такая последовательность существует; см., например, Лионс и Мадженес [1, гл. 1].

[2] Это справедливо только в пространствах Соболева первого порядка.

Множество X может быть и *пустым*, но, если, например, множество $\mathcal{U}_\partial$ *ограничено* (а также в коэрцитивном случае; см., например, теорему 1.6), то X не пусто. В любом случае справедлива

Теорема 5.1. *Множество X замкнуто и выпукло в $\mathcal{U}_\partial$.*

Доказательство. Замкнутость множества X очевидна. Для доказательства выпуклости возьмем $u_1, u_2 \in X$; тогда

$$J(u_k) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,\ k = 1, 2.$$

Если $\theta \in (0, 1)$, то

$$J((1-\theta)u_1 + \theta u_2) \leqslant (1-\theta) J(u_1) + \theta J(u_2) \leqslant J(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,$$

а потому

$$(1-\theta) u_1 + \theta u_2 \in X.$$

Это свойство распространяется и на вариационные неравенства, которые не обязательно соответствуют вариационной задаче (см. разд. 2.1). Например, справедлива

Теорема 5.2. *Пусть $\pi(u, v)$ — билинейная непрерывная (не обязательно симметричная) форма на $\mathcal{U}$, удовлетворяющая условию*

$$\pi(v, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{5.2}$$

Тогда множество X таких элементов $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которых

$$\pi(u, v-u) \geqslant L(v-u), \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{5.3}$$

амкнуто и выпукло в $\mathcal{U}$ [1]).

Доказательство. Неравенство (5.3) эквивалентно (см. разд. 1.4 и замечание 2.3) неравенству

$$\pi(v, v-u) \geqslant L(v-u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{5.4}$$

Легко видеть, что если элементы u_1 и u_2 удовлетворяют неравенству (5.4), то и $u = (1-\theta) u_1 + \theta u_2$, где $\theta \in (0,1)$, удовлетворяет этому неравенству.

Замечание 5.1. Дальше мы покажем, что если множество $\mathcal{U}_\partial$ *ограничено*, то множество X, о котором говорится в теореме 5.2, не пусто (это очевидно в случае, когда форма π симметричная).

---

[1]) Это множество может быть и пустым.

5.2. Теорема об аппроксимации

Рассмотрим множество X, о котором шла речь в теореме 5.2, и предположим, что оно *не пусто*. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} b(u, v) \text{ — билинейная непрерывная форма на } \mathcal{U}, \\ \text{не обязательно симметричная, но коэрцитивная,} \\ \text{т. е.} \quad b(v, v) \geqslant \beta \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{U}, \ \beta > 0; \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

$$M \text{ — линейная непрерывная форма на } \mathcal{U}. \tag{5.6}$$

По теореме 2.1 существует, и притом единственный, элемент $u_0 \in X$, для которого

$$b(u_0, v - u_0) \geqslant M(v - u_0) \qquad \forall v \in X. \tag{5.7}$$

Пример 5.1. Пусть $b(u, v) = (u, v)_{\mathcal{U}}$ и $M(v) = (g, v)_{\mathcal{U}}$. Тогда (см. пример 1.1)

$$u_0 \text{ — проекция элемента } g \text{ на } X. \tag{5.8}$$

Теперь наша цель состоит в описании эффективного способа нахождения u_0 (множество X не предполагается известным!).

Основная идея этого способа заключается в замене формы $\pi(u, v)$ «регуляризованной» формой

$$\pi_\varepsilon(u, v) = \pi(u, v) + \varepsilon b(u, v), \ \varepsilon > 0. \tag{5.9}$$

Согласно (5.2) и (5.5),

$$\pi_\varepsilon(v, v) \geqslant \varepsilon\beta \|v\|^2_{\mathcal{U}}. \tag{5.10}$$

Полагая

$$L_\varepsilon = L + \varepsilon M \tag{5.11}$$

и применяя теорему 2.1, устанавливаем существование единственного элемента $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial$, для которого

$$\pi_\varepsilon(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geqslant L_\varepsilon(v - u_\varepsilon) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{5.12}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через u_ε решение неравенства (5.12), а через u_0 — решение неравенства (5.7).

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* (5.2) *и* (5.5). *Если множество X решений неравенства* (5.3) *не пусто, то*

$$u_\varepsilon \to u_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{U} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{5.13}$$

Доказательство. 1) Положим $v = u_0$ в (5.12), $v = u_\varepsilon$ и $u = u_0$ в (5.3) и сложим получившиеся неравенства; тогда

$$-\pi(u - u_0, u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon b(u_\varepsilon, u_0 - u_\varepsilon) \geqslant \varepsilon M(u_0 - u_\varepsilon).$$

В силу (5.2) отсюда следует

$$b(u_\varepsilon, u_0 - u_\varepsilon) \geqslant M(u_0 - u_\varepsilon). \tag{5.14}$$

Пользуясь условием (5.5), находим из (5.14), что

$$\beta \| u_\varepsilon \|_{\mathcal{U}}^2 \leqslant c_1 + c_2 \| u_\varepsilon \|_{\mathcal{U}}, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Таким образом,

$$\| u_\varepsilon \|_{\mathcal{U}} \leqslant c_3, \qquad c_3 = \text{const}. \tag{5.15}$$

2) Итак, из множества $\{u_\varepsilon\}$ можно извлечь такую подпоследовательность (ее мы также обозначим $\{u_\varepsilon\}$), что $u_\varepsilon \to w$ слабо в $\mathcal{U}$. Так как множество $\mathcal{U}_\partial$ слабо замкнуто, то $w \in \mathcal{U}_\partial$. Легко видеть, что функция $v \to \pi(v, v)$ полунепрерывна снизу в слабой топологии пространства $\mathcal{U}$. Следовательно, в (5.12) можно перейти к пределу. В результате имеем

$$\pi(w, v - w) \geqslant L(v - w) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{5.16}$$

а это и значит, что $w \in X$ [1]).

Переходя к пределу в (5.14) (функция $b(v, v)$ полунепрерывна снизу в слабой топологии), получаем

$$b(w, u_0 - w) \geqslant M(u_0 - w). \tag{5.17}$$

Так как $w \in X$, можно положить в (5.7) $v = w$. Складывая получающееся неравенство с (5.17), имеем $-b(w - u_0, w - u_0) \geqslant 0$. Таким образом, $w = u_0$, и потому заключаем, что

$$u_\varepsilon \to u_0 \text{ слабо в } \mathcal{U}.$$

3) Остается показать, что $u_\varepsilon \to u_0$ сильно в $\mathcal{U}$, т. е. что

$$b(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \to 0. \tag{5.18}$$

Согласно (5.14),

$$b(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \leqslant M(u_\varepsilon - u_0) - b(u_0, u_\varepsilon - u_0),$$

откуда и следует (5.18).

Замечание 5.2. *Если множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено, то $X \neq \varnothing$.*

Действительно, пусть последовательность $\{u_\varepsilon\}$ обладает свойством (5.13). Так как $u_\varepsilon \in X$ и X — ограниченное множество, то выполняется неравенство (5.15). А из него в свою очередь следует, что $X \neq \varnothing$.

Замечание 5.3. Множество X может быть непустым и в случае, когда форма π не коэрцитивна, а множество $\mathcal{U}_\partial$ не ограничено, если только L имеет специальный вид (см. Лионс и Стампаккья [1]).

---

[1]) Но отсюда не следует, что $X \neq \varnothing$; мы *использовали* это предположение.

Замечание 5.4. Применяя описанную процедуру (5.12) при b и M тех же, что и в примере 5.1, получаем последовательность $\{u_\varepsilon\}$, аппроксимирующую проекцию элемента g на множество X (причем знание самого этого множества не требуется).

Замечание 5.5. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $\mathscr{C} \in \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{H})$; предположим, что

$$\pi(u, v) = (\mathscr{C}u, \mathscr{C}v)_{\mathscr{H}} \quad \text{и} \quad L(v) = (h, \mathscr{C}v)_{\mathscr{H}}, \; h \in \mathscr{H}.$$

Тогда, если $X \neq \varnothing$, то

$$X = (u + \operatorname{Ker} \mathscr{C}) \cap \mathscr{U}_\partial, \tag{5.19}$$

где u — некоторый элемент множества X, а $\operatorname{Ker} \mathscr{C}$ — ядро отображения $\mathscr{C}$, т. е.

$$\operatorname{Ker} \mathscr{C} = \{v \mid v \in \mathscr{U}, \; \mathscr{C}v = 0\}.$$

Справедливость равенства (5.19) сразу следует из того, что X — это множество, на котором функционал

$$J(v) = \|\mathscr{C}v\|^2_{\mathscr{H}} - 2(h, \mathscr{C}v)$$

достигает своего минимума, и

$$J(v + z) = J(v) \qquad \forall z \in \operatorname{Ker} \mathscr{C}.$$

Примечания

Теорема 2.1 принадлежит Стампаккья [1]; приведенное в тексте доказательство дано Лионсом и Стампаккья [1].

Неравенства типа (2.1) изучались многими авторами:

(i) В *эллиптическом*, или *стационарном*, случае (когда время явно не фигурирует) эти задачи возникают в механике; их рассматривали Прагер и Синьорини, а для уравнений теории упругости изучал Фикера [1]. Некоэрцитивный случай рассматривали Лионс и Стампаккья [1], [2], а случай, когда $\pi(u, v)$ *не является* билинейной формой, исследовали Хартман и Стампаккья [1], Браудер [1], Брезис [1], Минти [1] (см. также библиографию в этих работах).

(ii) *Эволюционные* неравенства (которых мы не касаемся в этой книге) в случае «параболических неравенств» изучали Лионс и Стампаккья [1], Брезис [1], [2], а в случае «гиперболических неравенств» — Брезис и Лионс [1]. Обзор можно найти в работах Браудера [3] и Лионса [13].

В последующих главах мы еще много раз будем встречаться с новыми типами *вариационных неравенств*.

В неравенстве (1.27) член $J_1'(u)\cdot(v - u)$ можно заменить на $\pi(u, v - u)$, где π обладает указанными в теореме 2.1 свойствами (Лионс и Стампаккья [1]) или «монотонностью по u» (Брезис [1]).

Вопросы, связанные с топологией пространств $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$, кроме книги Шварца [1], можно найти у Хорвата [1].

Разделы 3.1—3.3 содержат изложение некоторых основных фактов теории пространств Соболева [1]. Доказательства этих фактов и много дополнительных результатов приведены в книге Лионса и Мадженеса [1]. Другие пространства Соболева и некоторые их свойства мы рассмотрим в следующих главах.

Естественно, в наши цели ни в коей мере не входит изучать здесь многочисленные граничные задачи. Именно поэтому число примеров таких задач сведено к минимуму, необходимому для понимания последующих глав. Теория эллиптических граничных задач изложена, например, в книге Лионса и Мадженеса [1] (см. также библиографию в этой книге).

Односторонние граничные задачи рассмотрены в разд. 3.5 и в следующих разделах. Как мы увидим дальше, изучение оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с частными производными, приводит к многочисленным задачам, подобным односторонним граничным задачам. Изложение в разд. 3.6 и 3.7 носит формальный характер; строго исследовали эти вопросы Брезис и Стампаккья [1]. Задача, поставленная в разд. 3.7, возникает в механике (теория упруго-пластичности); см. Аннин [1], Лаппшон [1], Ланншон и Дюво [1], Тинг [1]. В разд. 3.8 и 3.9 приведены примеры (наиболее простые из возможных) односторонних граничных задач для *систем* уравнений и для операторов порядка *выше второго*. Очевидно, что подобных задач бесчисленное множество: можно рассматривать односторонние граничные задачи для квазиэллиптических операторов и т. п. Все эти вопросы мы здесь не затрагиваем.

Ситуация примера, рассмотренного в разд. 3.10, возникает в теории вязкопластичности; см. Мосолов и Мясников [1], где проведены дальнейшие исследования.

Одна задача из физики (теория фильтров), приводящая к близким вопросам, изучалась Берковицем и Поллардом [1], [2].

Теоремы 4.1 и 4.2 принадлежат Огазо [1], указавшему также и некоторые их приложения.

Теорема 5.3 получена Лионсом и Стампаккья [1]. Описанная процедура аппроксимации применима и в случае, когда $\pi(u, v)$ не обладает свойством линейности по u — см. Брезис и Сибони [1], Браудер [1].

Другие общие результаты (двойственность, множители Лагранжа и т. д.) приведены в гл. 3 (§ 12, 13); по этому поводу см. Моро [1], Рокафеллер [1] — [4]. Задачи аналогичного типа (отличающиеся техническими деталями) возникают в теории выпуклой аппроксимации — см. Лоран [1] и указанную там библиографию.

Относительно необходимых условий экстремальности в гораздо более общих ситуациях см. Дубовицкий и Милютин [1], Гамкрелидзе [1], Халкин [2], Халкин и Нейштадт [1], Нейштадт [1], Пшеничный [3], Варейя [2].

Глава 2

Управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными эллиптического типа

§ 1. Управление в эллиптических вариационных задачах

1.1. Постановка задачи

Пусть V и H — два гильбертовых пространства над $\mathbf{R}$ [1]). Обозначим соответственно через $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ нормы в V и H, а через $((\cdot\,,\,\cdot))$ и $(\cdot\,,\,\cdot)$ — соответствующие скалярные произведения. В случаях, когда возможны недоразумения, будем добавлять индекс V или H (например, $\|\cdot\|_V$). Пусть

$$\left.\begin{array}{l} V\subset H, \text{ вложение } V\to H \text{ непрерывно }^{2)},\\ V \text{ плотно в } H. \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Отождествим пространство H с двойственным к нему пространством. Обозначим через V' пространство, двойственное к V. Тогда H можно отождествить с некоторым подпространством в V':

$$V\subset H\subset V', \tag{1.2}$$

причем каждое пространство плотно в следующем и соответствующие вложения непрерывны.

Пусть, далее,

$$\left.\begin{array}{l} a(u,\ v) \text{ — билинейная форма на } V, \text{ непре-}\\ \qquad\qquad \text{рывная и коэрцитивная, т. е.}\\ a(v,\ v)\geqslant \alpha\,\|v\|^2,\ \alpha>0,\ \forall v\in V. \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Форма $a(u,\ v)$ не обязательно симметричная [3]).

Наконец, пусть L — линейная непрерывная форма на V. В силу (1.2)

$$L(v)=(f,\ v),\qquad f\in V', \tag{1.4}$$

где через $(f,\ v)$ обозначено скалярное произведение элементов $f\in V'$ и $v\in V$ (оно совпадает со скалярным произведением в H, если $f\in H$) [4]).

---

[1]) Все результаты легко перенести на комплексный случай.

[2]) Следовательно, существует такая константа c, что $|v|\leqslant c\|v\|$.

[3]) Если $V=H=V'$ — конечномерное пространство, то $a(u,\ v)=(Au,\ v)$, где A — матрица. Условие коэрцитивности в этом случае эквивалентно неравенству $A+A^*\geqslant 2\alpha I$, где I — единичная матрица.

[4]) Иначе говоря, (f,v)— значение функционала $f\in V'$ на элементе $v\in V$.— *Прим. перев.*

Положим $\mathcal{U} = V$, $\pi(u, v) = a(u, v)$, а в качестве L возьмем линейную форму (1.4). С помощью теоремы 2.1 и замечания 2.2 гл. 1 можно доказать, что справедлива

Теорема 1.1. *Если выполнено условие* (1.3), *то для заданного* $f \in V'$ *существует единственный элемент* $y \in V$, *для которого*

$$a(y, \psi) = (f, \psi) \qquad \forall \psi \in V. \tag{1.5}$$

Ниже мы объясним, почему в (1.5) изменены обозначения.

Уравнение (1.5) допускает следующую интерпретацию: так как форма $v \to a(u, v)$ линейна и непрерывна на V, можно написать

$$a(u, v) = (Au, v), \qquad Au \in V', \tag{1.6}$$

а это определяет оператор

$$A \in \mathcal{L}(V; V'). \tag{1.7}$$

Следовательно, уравнение (1.5) эквивалентно уравнению

$$Ay = f, \qquad y \in V. \tag{1.8}$$

Примеры задач, решаемых с помощью теоремы 1.1, рассматривались уже в § 3, 4 гл. 1; еще ряд таких примеров приводится ниже в § 2.

Теперь мы можем сформулировать первую задачу оптимального управления.

Пусть заданы *пространство управлений* — гильбертово пространство $\mathcal{U}$ (как в гл. 1) и *отображение*

$$B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; V'). \tag{1.9}$$

Пусть некоторая *система* (физическая, механическая и т. д.) описывается известным нам *оператором* A из $\mathcal{L}(V; V')$ (см. (1.7)). Для каждого *управления* $u \in \mathcal{U}$ *состояние* y системы определяется как решение уравнения

$$Ay = f + Bu, \qquad y \in V.$$

Очевидно, y зависит от u; поэтому мы будем писать $y(u)$. Тогда

$$Ay(u) = f + Bu, \qquad y(u) \in V. \tag{1.10}$$

Согласно теореме 1.1, уравнение (1.10) однозначно определяет состояние $y(u)$.

Кроме того, задано *наблюдение*

$$z(u) = Cy(u), \tag{1.11}$$

где $C \in \mathcal{L}(V; \mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ — некоторое гильбертово пространство.

Наконец, имеется положительно определенный эрмитов оператор

$$\left.\begin{array}{l} N \in \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{U}), \\ (Nu, u)_{\mathscr{U}} \geqslant \nu \|u\|^2_{\mathscr{U}}, \quad \nu > 0, \qquad \forall u \in \mathscr{U}. \end{array}\right\} \tag{1.12}$$

Каждому управлению $u \in \mathscr{U}$ соответствует значение *функции стоимости*

$$J(u) = \|Cy(u) - z_д\|^2_{\mathscr{H}} + (Nu, u)_{\mathscr{U}}, \tag{1.13}$$

где $z_д$ — данный элемент пространства $\mathscr{H}$. Пусть

множество $\mathscr{U}_\partial$ *выпукло и замкнуто в* $\mathscr{U}$. (1.14)

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы

$$\text{отыскать } \inf_{v \in \mathscr{U}_\partial} J(v). \tag{1.15}$$

Замечание 1.1. Мы будем также рассматривать случай $N = 0$.

1.2. Предварительные замечания

Согласно (1.10), $u \to y(u)$ есть *аффинное* отображение $\mathscr{U} \to V$. Перепишем $J(u)$ в виде

$$J(u) = \|C(y(u) - y(0)) + Cy(0) - z_д\|^2_{\mathscr{H}} + (Nu, u)_{\mathscr{U}}.$$

Если положить

$$\pi(u, v) = (C(y(u) - y(0)), C(y(v) - y(0)))_{\mathscr{H}} + (Nu, v)_{\mathscr{U}}, \tag{1.16}$$

$$L(v) = (z_д - Cy(0)), C(y(v) - y(0)))_{\mathscr{H}}, \tag{1.17}$$

то

$$J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \|z_д - Cy(0)\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{1.18}$$

Здесь $\pi(u, v)$ — билинейная непрерывная форма на $\mathscr{U}$. Очевидно, что $\|C(y(v) - y(0))\|^2_{\mathscr{H}} \geqslant 0$, и потому в силу (1.12)

$$\pi(v, v) \geqslant \nu \|v\|^2_{\mathscr{U}} \qquad \forall v \in \mathscr{U}. \tag{1.19}$$

Таким образом, условия, позволяющие применить теорему 1.1 гл. 1, выполняются. Следовательно, справедлива

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и* (1.12), *а состояние системы определяется как решение уравнения* (1.10). *Тогда существует единственный элемент* $u \in \mathscr{U}_\partial$, *для которого*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathscr{U}_\partial} J(v). \tag{1.20}$$

Определение 1.1. Элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, удовлетворяющий условию (1.20), называется *оптимальным управлением.*

Случай $N = 0$. Если $N = 0$, то, вообще говоря, из (1.16) вытекает только, что [1])

$$\pi(v, v) \geqslant 0. \tag{1.21}$$

Итак, можно применить теорему 5.2 и замечание 5.2 гл. 1 и доказать, что справедлива

Теорема 1.3. *Пусть выполнено условие* (1.3) *и* $N = 0$. *Если множество* $\mathcal{U}_\partial$ *ограничено, то существует такое непустое подмножество* $X \subset \mathcal{U}_\partial$, *что*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) \qquad \forall u \in X; \tag{1.22}$$

при этом X *замкнуто и выпукло.*

Определение 1.2. Совокупность всех $u \in X$ называется *множеством оптимальных управлений.*

Замечание 1.2. Теорема 5.3 гл. 1 дает способ аппроксимации лишь одного элемента $u_0 \in X$ (например, проекции элемента $g \in \mathcal{U}$ на X).

Замечание 1.3. Все сказанное выше есть всего лишь непосредственное приложение результатов гл. 1. Единственное отличие от гл. 1 состоит только в том, что там $J(v)$ задается непосредственно как функционал от v, а здесь определяется *с помощью двух операторов*:

(i) оператора $u \to y(u)$ перехода от управления к состоянию (этим и объясняется изменение обозначений в (1.5));

(ii) оператора $y(u) \to Cy(u)$ перехода от состояния к наблюдению.

План дальнейшего исследования. Теперь нам предстоит решить следующие задачи:

(i) найти соотношения, определяющие оптимальное управление u (случай теоремы 1.2) или множество оптимальных управлений (случай теоремы 1.3);

(ii) исследовать эти соотношения, получив из них максимум информации об оптимальном управлении (или о множестве X).

Разумеется, более трудную — и интересную — задачу (ii) можно решить лишь в некоторых конкретных случаях.

---

[1]) Может оказаться, что выражение $\| C(y(v) - y(0)) \|^2_{\mathcal{H}}$ коэрцитивно.

1.3. Совокупность соотношений, характеризующих оптимальное управление

Если u — оптимальное управление, то

$$J'(u)\cdot(v-u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial; \tag{1.23}$$

верно и обратное (теорема 1.3 гл. 1).

Так как A — изоморфизм пространства V на V' (см. (1.7) и теорему 1.1), то равенство (1.10) можно записать в виде

$$y(u) = A^{-1}(f+Bu),$$

откуда $y'(u)\cdot\psi = A^{-1}B\psi$, а значит, и

$$y'(u)\cdot(v-u) = A^{-1}B(v-u) = y(v) - y(u).$$

Таким образом, неравенство (1.23) эквивалентно (после сокращения на 2) неравенству

$$(Cy(u) - z_д,\ C(y(v) - y(u)))_{\mathcal{H}} + (Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0\ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.24}$$

Пусть $\mathcal{H}'$ — пространство, двойственное [1]) к $\mathcal{H}$ и

$$\Lambda = \Lambda_{\mathcal{H}} \text{ — канонический изоморфизм из } \mathcal{H} \text{ на } \mathcal{H}'\ ^{2)}. \tag{1.25}$$

Тогда если $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}'; V')$ — оператор, сопряженный к C, то

$$(C^*\Lambda C\psi, \varphi) = (\Lambda C\psi, C\varphi) = (C\psi, C\varphi)_{\mathcal{H}}, \qquad \varphi, \psi \in V,$$

так что неравенство (1.24) можно переписать в виде

$$(C^*\Lambda(Cy(u) - z_д),\ y(v) - y(u)) + (Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0\ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.26}$$

Преобразуем теперь неравенство (1.26) с помощью *сопряженного состояния.*

Пусть $A^* \in \mathcal{L}(V; V')$ — оператор, сопряженный к A; он связан с билинейной формой

$$(A^*\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) = a(\psi, \varphi), \qquad \varphi, \psi \in V,$$

и представляет собой изоморфизм пространства V на V'. Для управления $v \in \mathcal{U}$ *сопряженное состояние* $p(v) \in V$ определяется уравнением

$$A^*p(v) = C^*\Lambda(Cy(v) - z_д). \tag{1.27}$$

---

[1]) Можно, конечно, отождествить пространства $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}$, но в случае, когда $\mathcal{H} \subset V'$, это приводит к дополнительным трудностям, так как мы уже отождествили H с двойственным к нему пространством.

[2]) То есть отображение $\Lambda: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, при котором каждому элементу $h \in \mathcal{H}$ ставится в соответствие элемент $\Lambda h = (h, \cdot)_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}'$. Иначе говоря, $(\Lambda h, g) = (h, g)_{\mathcal{H}}\ \forall h, g \in \mathcal{H}$, где $(\Lambda h, g)$ — значение функционала Λh на элементе g.— *Прим. перев.*

Учитывая равенства (1.27) и (1.10), получаем

$$(A^*p(u),\ y(v)-y(u)) = (C^*\Lambda\,(Cy\,(u)-z_{д}),\ y\,(v)-y\,(u)) = \\ = (p\,(u),\ Ay\,(v)-Ay\,(u)) = (p\,(u),\ B\,(v-u)) = \\ = (B^*p\,(u),\ \ v-u)_{\mathcal{U}},$$

где $B^* \in \mathcal{L}\,(V;\ \mathcal{U}')$ — оператор, сопряженный к B, а $\mathcal{U}'$ — пространство, двойственное к $\mathcal{U}$.

Пусть

$$\Lambda_{\mathcal{U}} \text{ — канонический изоморфизм из } \mathcal{U} \text{ на } \mathcal{U}'. \tag{1.28}$$

Очевидно,

$$(\psi,\ Bv) = (B^*\psi,\ v) = (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*\psi,\ v)_{\mathcal{U}}, \qquad v\in\mathcal{U},\ \ \psi\in V,$$

так что неравенство (1.26) эквивалентно неравенству

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p\,(u)+Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0\ \ \forall v\in\mathcal{U}_{\partial}, \tag{1.29}$$

или

$$(B^*p\,(u)+\Lambda_{\mathcal{U}}Nu,\ v-u)\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_{\partial}\,^{1)} \tag{1.30}$$

(скобки здесь обозначают скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}$).

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1.4. *Пусть выполнено условие* (1.3) *и функция стоимости задана формулой* (1.13). *Для того чтобы элемент* $u\in\mathcal{U}_{\partial}$ *был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:*

$$Ay\,(u) = f + Bu, \tag{1.10}$$

$$A^*p\,(u) = C^*\Lambda\,(Cy\,(u)-z_{д}), \tag{1.27}$$

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p\,(u)+Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_{\partial}. \tag{1.29}$$

Если оператор N удовлетворяет условию (1.12), *то оптимальное управление единственно* (*т. е. соотношениям* (1.10), (1.27), (1.29) *удовлетворяет единственный элемент* $u\in\mathcal{U}_{\partial}$).

Если $N=0$, *а множество* $\mathcal{U}_{\partial}$ *ограничено, то соотношениям* (1.10), (1.27), (1.29) *удовлетворяет по крайней мере один элемент*

---

[1]) Одновременно неявно показано, что $^1/_2J'\,(u) = B^*p\,(u) + \Lambda_{\mathcal{U}}\,Nu$.

$u \in \mathcal{U}_\partial$. Множество этих элементов соответствует совокупности оптимальных управлений, образующих выпуклое замкнутое подмножество $X \subset \mathcal{U}_\partial$.

Замечание 1.4. Неравенство (1.29) эквивалентно утверждению

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\, u)_{\mathcal{U}} = \inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\, v)_{\mathcal{U}}. \tag{1.31}$$

Задача теперь состоит в изучении системы (1.10), (1.27), (1.29). Этим мы и займемся в следующих разделах.

Замечание 1.5. Пусть $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклый замкнутый конус с вершиной в начале координат. Тогда (см. замечание 1.6 гл. 1) неравенство (1.29) эквивалентно соотношениям

$$\left.\begin{aligned}&(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\, v)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial,\\ &(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\, u)_{\mathcal{U}} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

§ 2. Непосредственные приложения

2.1. Система, описываемая задачей Дирихле; распределенное управление[1])

Начнем с наиболее простого (но не тривиального) случая. Пусть (ср. § 3 гл. 1)

$$V = H_0^1(\Omega),\quad H = L^2(\Omega)\ ^{2)}; \tag{2.1}$$

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_0\varphi\psi\,dx, \tag{2.2}$$

где (ср. § 3, 4 гл. 1)

$$\left.\begin{aligned}&a_{ij},\ a_0\in L^\infty(\Omega);\\ &\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2),\\ &\qquad\qquad\alpha>0,\ \forall\xi\in\mathbf{R}^n \text{ почти всюду в } \Omega;\\ &a_0(x)\geqslant\alpha>0 \text{ почти всюду в } \Omega.\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Определим *эллиптический оператор A второго порядка*:

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)+a_0\varphi. \tag{2.4}$$

[1]) В оригинале contrôle distribué.— *Прим. перев.*
[2]) В этом случае $V' = H^{-1}(\Omega)$.

Положим

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{U} = H = L^2(\Omega),\\ \text{тогда } \Lambda_{\mathcal{U}} \text{ — тождественный изоморфизм.}\end{array}\right\} \quad (2.5)$$

В этом случае управление называют *распределенным* (в Ω) [1]. Далее, пусть

$$B \text{ — тождественное отображение;} \quad (2.6)$$

$$\begin{array}{c}C \text{ — вложение пространства } V \text{ в } H \ (\mathcal{H} = H,\\ \text{так что } \Lambda \text{ — тождественный изоморфизм).}\end{array} \quad (2.7)$$

Замечание 2.1. Условие (2.7) означает, что состояние $y(u)$ мы наблюдаем на *всей* области Ω, а это практически нереально. Но дальше мы рассмотрим случай — математически даже более интересный,— когда состояние $y(u)$ наблюдается только на части области Ω или на ее границе Γ.

Итак, состояние $y(u)$ определяется как решение *задачи Дирихле*:

$$\left.\begin{array}{l}Ay(u) = f + u,\\ y(u) \in H_0^1(\Omega) \text{ (следовательно, } y(u) = 0 \text{ на } \Gamma).\end{array}\right\} \quad (2.8)$$

Требуется найти

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} \left\{\int_\Omega [y(v) - z_д]^2\, dx + (Nv, v)\right\}^{2)}, \quad (2.9)$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество в $\mathcal{U}$.

Замечание 2.2. Решение $y(u)$ задачи (2.8) представляет собой функцию, определенную на Ω:

$$x \xrightarrow{y(u)} y(x; u).$$

Следовательно, функционал $J(v)$ в (2.9) можно записать так:

$$J(v) = \int_\Omega [y(x; v) - z_д(x)]^2\, dx + \int_\Omega (Nv(x))\, v(x)\, dx.$$

В силу (2.3) можно применить теорему 1.4, и система (1.10), (1.27), (1.29) примет вид

$$\left.\begin{array}{l}Ay(u) = f + u \quad \text{в } \Omega, \quad y(u) = 0 \quad \text{на } \Gamma;\\ A^*p(u) = y(u) - z_д \quad \text{в } \Omega, \quad p(u) = 0 \quad \text{на } \Gamma;\\ \int_\Omega [p(u) + Nu](v - u)\, dx \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.\end{array}\right\} \quad (2.10)$$

---

[1] В противоположность случаю, когда управление выражается функцией, заданной на границе или на части границы (тогда управление называется *граничным*). Как мы увидим далее, случай граничного управления гораздо интереснее как с практической, так и с теоретической точек зрения.

[2] $(Nv, v) = (Nv, v)_{\mathcal{U}}$, так как $\mathcal{U} = H$.

Пример 2.1. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений на управление). Тогда последнее из соотношений (2.10) примет вид

$$p(u) + Nu = 0.$$

Итак, можно *исключить* u (именно, $u = -N^{-1}p$), так что оптимальное управление находится по следующему правилу:

(i) решить граничную задачу для системы уравнений с частными производными [1])

$$\left.\begin{array}{llll} Ay + N^{-1}p = f & \text{в} \ \Omega, & y = 0 & \text{на} \ \Gamma; \\ A^*p - y = -z_д & \text{в} \ \Omega, & p = 0 & \text{на} \ \Gamma; \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

(ii) найти оптимальное управление

$$u = -N^{-1}p. \tag{2.12}$$

Замечание 2.3. *Регулярность оптимального управления.* Пусть в выражении (2.4) для оператора A коэффициенты регулярны в $\bar{\Omega}$. Тогда решение граничной задачи

$$A^*p = y - z_д, \quad p \mid_\Gamma = 0,$$

как это следует из теорем о регулярности решения эллиптических задач (см., например, Лионс и Мадженес [1, гл. 2]), таково, что

$$p \in H^2(\Omega). \tag{2.13}$$

Легко убедиться, что *если оператор N^{-1} отображает пространство $H^2(\Omega)$ в себя, то оптимальное управление u принадлежит* $H^2(\Omega)$ (тогда как мы его искали в пространстве $L^2(\Omega)$). Этот результат о регулярности оптимального управления, как мы увидим, не является общим.

Пример 2.2. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{2.14}$$

Согласно замечанию 1.5, тогда

$$\left.\begin{array}{rl} u \geqslant 0 & \text{почти всюду в } \Omega, \\ p(u) + Nu \geqslant 0 & \text{почти всюду в } \Omega, \\ u(p(u) + Nu) = 0 & \text{почти всюду в } \Omega. \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

---

[1]) Отметим, что мы употребляем термин «система» в двух разных смыслах: а) *исследуемая физическая система* (состояние $y(u)$ системы) и б) *система уравнений с частными производными.*

Можно исключить u и рассмотреть следующую задачу:

$$\left.\begin{array}{l} Ay - f \geqslant 0, \quad p + N(Ay - f) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ (Ay - f)\,[p + N\,(Ay - f)] = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ A^*p - y = -z_\text{д} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ y|_\Gamma = 0, \ p|_\Gamma = 0. \end{array}\right\} \qquad (2.16)$$

Тогда $u = Ay - f$.

Из (2.15) ясно, что или $u = 0$, или $p + Nu = 0$, или выполняются оба эти равенства одновременно. В последнем случае $Ay = f$ и $y = z_\text{д}$, откуда $Az_\text{д} = f$. Таким образом, если предположить, что

$$Az_\text{д} \neq f \text{ почти всюду в } \Omega$$

(очевидно, это общий случай), то имеются только две возможности:

(i) $u = 0$ и $p > 0$ в Ω_0;

(ii) $u > 0$ и $p + Nu = 0$ в Ω_1

(где Ω_0 и Ω_1 определены с точностью до множества меры нуль).

Для дальнейшего упрощения предположим, что

$$N = \nu I, \ \nu > 0. \qquad (2.17)$$

Тогда из (i) и (ii) следует, что

$$u = -\frac{1}{\nu} \inf(0, p) \quad \text{почти всюду в } \Omega. \qquad (2.18)$$

Отсюда получаем следующий вывод: *оптимальное управление u находится из равенства* (2.18), *где p определяется как решение* (*нелинейной*) *граничной задачи*

$$\left.\begin{array}{ll} Ay + \dfrac{1}{\nu}\inf(0, p) = f, & y|_\Gamma = 0; \\ A^*p - y = -z_\text{д}, & p|_\Gamma = 0, \end{array}\right\} \qquad (2.19)$$

причем

$$u \in H_0^1(\Omega) \ (\textit{регулярность оптимального управления}). \qquad (2.20)$$

Пример 2.3. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \xi_0(x) \leqslant v(x) \leqslant \xi_1(x) \text{ почти всюду в } \Omega; \ \xi_0 \text{ и } \xi_1 \text{ — данные функции из } L^\infty(\Omega)\}. \qquad (2.21)$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{U}_\partial \text{ — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество пространства } \mathcal{U} = L^2(\Omega). \qquad (2.22)$$

Из третьего соотношения в (2.10) (относительно общего случая см. разд. 2.5) легко получить *локальные* условия

$$\left.\begin{array}{l}[p\,(x;\;u) + Nu\,(x)]\,(\xi - u\,(x)) \geqslant 0\\ \forall \xi \in [\xi_0\,(x),\;\xi_1\,(x)]\ \text{почти всюду в}\ \Omega.\end{array}\right\} \qquad (2.23)$$

Для простоты предположим еще, что справедливо равенство (2.17). Тогда из (2.23) находим, что

(i) $p\,(x;\;u) + \nu u\,(x) > 0 \Rightarrow u\,(x) = \xi_0\,(x)$,

(ii) $p\,(x;\;u) + \nu u\,(x) < 0 \Rightarrow u\,(x) = \xi_1\,(x)$,

(iii) $p\,(x;\;u) + \nu u\,(x) = 0 \Rightarrow u\,(x) = -\nu^{-1} p\,(x;\;u)$.

Вывод. Вообще положим для $g \in H_0^1\,(\Omega)$

$$\Phi\,(\xi_0,\,\xi_1,\,\nu)\,g = \begin{cases} -\dfrac{1}{\nu}\,g\,(x), & \text{если}\quad \xi_0\,(x) \leqslant -\dfrac{1}{\nu}\,g\,(x) \leqslant \xi_1\,(x),\\ \xi_0, & \text{если}\quad -\dfrac{1}{\nu}\,g\,(x) < \xi_0\,(x),\\ \xi_1, & \text{если}\quad -\dfrac{1}{\nu}\,g\,(x) > \xi_1\,(x).\end{cases} \qquad (2.24)$$

Тогда оптимальное управление u получается из решения нелинейной задачи

$$\left.\begin{array}{ll} Ay - \Phi\,(\xi_0,\,\xi_1,\,\nu)\,p = f, & y\,|_\Gamma = 0;\\ A^*p - y = -z_д, & p\,|_\Gamma = 0,\end{array}\right\} \qquad (2.25)$$

и равно

$$u = \Phi\,(\xi_0,\;\xi_1,\;\nu)\,p. \qquad (2.26)$$

В этом случае (нелинейный) оператор Φ отображает пространство $H_0^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ и (вообще говоря) невозможно сделать никакого заключения относительно регулярности оптимального управления. Заметим только, что если $\xi_i \in L^\infty\,(\Omega) \cap H^1\,(\Omega)$, $i = 0,\ 1$, то $\Phi\,(\xi_0,\;\xi_1,\;\nu)\,p \in H^1\,(\Omega)$.

2.2. Случай отсутствия ограничений на управление

Ситуация, рассмотренная в примере 2.1, носит общий характер: если $\mathscr{U}_\partial = \mathscr{U}$, то соотношение (1.29) принимает вид

$$\Lambda_{\mathscr{U}}^{-1} B^* p\,(u) + N\,(u) = 0$$

и, выражая отсюда u, получаем следующее правило определения оптимального управления:

(i) решить граничную задачу (для системы операторных уравнений)

$$\left.\begin{aligned} Ay + BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p &= f, \\ A^*p - C^*Cy &= -C^*z_{\text{д}}; \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

(ii) найти оптимальное управление

$$u = -N^{-1}B^*p. \tag{2.28}$$

(Решение вопроса о регулярности u — см. замечание 2.3 — зависит от конкретной ситуации.)

2.3. Система, описываемая задачей Неймана; распределенное управление

Пусть (ср. § 3 гл. 1)

$$V = H^1(\Omega), \ H = L^2(\Omega), \tag{2.29}$$

а форма $a(\varphi, \psi)$ задана соотношениями (2.2), (2.3).

Необходимо иметь в виду следующее: если Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, то пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ *не плотно* в V (замыкание пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$ есть собственное подпространство $H_0^1(\Omega)$, и потому, поскольку пространство $H = L^2(\Omega)$ уже было отождествлено со своим двойственным, пространство V' *нельзя* отождествить ни с каким подпространством в $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Приведем типичные примеры линейных непрерывных форм на V [1]):

$$L_1(\psi) = \int_\Omega h\psi\, dx, \qquad h \in L^2(\Omega), \tag{2.30}$$

$$L_2(\psi) = \int_\Gamma g\psi\, d\Gamma, \qquad g \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{2.31}$$

и, разумеется, их линейные комбинации.

Дадим *вариационную интерпретацию* изоморфизма A пространства V на V': для линейной непрерывной на V формы f существует единственный элемент $y \in V$, для которого [2])

$$a(y, \psi) = f(\psi) \qquad \forall \psi \in V. \tag{2.32}$$

Предположим сначала, что (как и в разд. 2.1) $\mathcal{U} = H = L^2(\Omega)$, B — тождественное отображение; C — вложение пространства V в H (т. е. $\mathcal{H} = H$).

Возьмем в качестве элемента $f \in V'$ в уравнении (1.10) функционал

$$f(\psi) = \int_\Omega f_1\psi\, dx + \int_\Gamma g\psi\, d\Gamma, \qquad f_1 \in L^2(\Omega), \ g \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.33}$$

---

[1]) Более полно этот вопрос изложен в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 1]. Для наших целей вполне достаточно того, что упоминается здесь.

[2]) $f(\psi) = (f, \psi)$ — значение функционала f на элементе ψ.

Тогда состояние $y(u)$ определяется как решение уравнения

$$a(y(u), \psi) = f(\psi) + \int_\Omega u\psi\, dx \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega); \tag{2.34}$$

это уравнение можно интерпретировать (см. § 3 гл. 1) как *задачу Неймана*:

$$\left.\begin{aligned} Ay(u) &= f_1 + u \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} &= g \qquad\quad \text{на} \quad \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

Функция стоимости $J(v)$ задается так же, как и в (2.9).

Сопряженное состояние определяется как решение сопряженной задачи Неймана:

$$\left.\begin{aligned} A^*p(u) &= y(u) - z_д \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} &= 0 \qquad\qquad\quad \text{на} \quad \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями (2.35), (2.36) и

$$\int_\Omega (p(u) + Nu)(v - u)\, dx \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial \tag{2.37}$$

Легко привести примеры, аналогичные рассмотренным в разд. 2.1; для этого достаточно заменить там условие Дирихле условиями Неймана.

2.4. Система, описываемая задачей Неймана; граничное управление [1])

Пусть

$$\mathcal{U} = H^{-1/2}(\Gamma); \tag{2.38}$$

оператор B каждому элементу $u \in \mathcal{U}$ ставит в соответствие элемент $Bu \in V'$, определяемый равенством

$$(Bu, \psi) = \int_\Gamma u\psi\, d\Gamma; \tag{2.39}$$

C — вложение пространства V в H [2]); форма f задана, как в разд. 2.3.

Тогда состояние $y(u)$ определяется как решение уравнения

$$a(y(u), \psi) = f(\psi) + \int_\Gamma u\psi\, d\Gamma \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega); \tag{2.40}$$

[1]) В оригинале contrôle frontière.— *Прим. перев.*

[2]) Иначе говоря, управление граничное, но наблюдение по-прежнему «распределено в Ω». Дальше мы рассмотрим случай, когда наблюдение также граничное.

это уравнение можно интерпретировать как *задачу Неймана*

$$\left.\begin{aligned} Ay(u) &= f_1 \quad &&\text{в} \quad \Omega, \\ \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} &= g + u \quad &&\text{на} \quad \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

Функция стоимости $J(v)$ задается так же, как и в (2.9).

Сопряженное состояние определяется как решение задачи (2.36).

Оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями (2.41), (2.36) и

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.42}$$

Для *интерпретации* неравенства (2.42) [1]) нужно найти явное выражение оператора $\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^*$. Воспользуемся оператором Лапласа — Бельтрами $-\Delta_\Gamma$ на Γ, для которого можно определить степень $(-\Delta_\Gamma)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Зададим в пространстве $\mathcal{U}$ скалярное произведение [2]):

$$(u,\ v)_{\mathcal{U}} = \int_\Gamma (-\Delta_\Gamma)^{-1/4} u \cdot (-\Delta_\Gamma)^{-1/4} v\, dx = \int_\Gamma (-\Delta_\Gamma)^{-1/2} uv dx$$

(можно показать, что такое определение законно, см. Лионс и Мадженес [1, гл. 1 и 2]). В этом случае

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* \psi = (-\Delta_\Gamma)^{1/2} (\psi|_\Gamma), \quad \psi \in H^1(\Omega)\,^{3)}. \tag{2.43}$$

В самом деле,

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* \psi,\ u)_{\mathcal{U}} = (\psi,\ Bu) = \int_\Gamma \psi u\, d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma (-\Delta_\Gamma)^{1/2} (\psi|_\Gamma) (-\Delta_\Gamma)^{-1/2} u d\Gamma = ((-\Delta_\Gamma)^{1/2} (\psi|_\Gamma),\ u)_{\mathcal{U}},$$

откуда и следует (2.43). Тогда неравенство (2.42) принимает вид

$$((-\Delta_\Gamma)^{1/2} (p(u)|_\Gamma) + Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.44}$$

или

$$\int_\Gamma (p(u)|_\Gamma + (-\Delta_\Gamma)^{-1/2} Nu)(v - u)\, d\Gamma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.45}$$

Пример 2.4. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\ v \in H^{-1/2}(\Gamma)\}. \tag{2.46}$$

---

[1]) Чтение этого материала для понимания дальнейшего не обязательно.

[2]) Скалярное произведение надо ввести с самого начала, ибо в выражение для функции стоимости входит $(Nu,\ u)_{\mathcal{U}}$.

[3]) Иначе говоря, $\psi|_\Gamma$ — элемент пространства $H^{1/2}(\Gamma)$, подвергающийся действию оператора $(-\Delta_\Gamma)^{1/2}$.

Тогда оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &Ay(u)=f_1 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}=g+u \text{ на } \Gamma;\\ &A^*p(u)=y(u)-z_д \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}}=0 \text{ на } \Gamma;\\ &u\geqslant 0, \quad p(u)+(-\Delta_\Gamma)^{-1/2}Nu\geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\\ &u[p(u)+(-\Delta_\Gamma)^{-1/2}Nu]=0 \text{ на } \Gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (2.47)$$

Как известно, такая граничная задача (типа односторонней граничной задачи; см. гл. 1) допускает единственное решение.

Замечание 2.4. Некоторая громоздкость примера 2.4 объясняется тем, что мы взяли $\mathcal{U} = H^{-1/2}(\Gamma)$ (это приводит к дробным степеням оператора $-\Delta_\Gamma$).

Задача упрощается в случае (более реальном), когда

$$\mathcal{U} = L^2(\Gamma). \qquad (2.48)$$

Неравенство (2.44) тогда принимает вид

$$\int_\Gamma (p(u)+Nu)(v-u)\,d\Gamma \geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial, \qquad (2.49)$$

а остальные соотношения остаются без изменения.

Пример 2.5. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v\geqslant 0 \text{ на } \Gamma, \quad v\in L^2(\Gamma)\}. \qquad (2.50)$$

Тогда оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &Ay(u)=f_1 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}=g+u \text{ на } \Gamma;\\ &A^*p(u)=y(u)-z_д \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A}=0 \text{ на } \Gamma;\\ &u\geqslant 0, \quad p(u)+Nu\geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\\ &u[p(u)+Nu]=0 \text{ на } \Gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (2.51)$$

Таким образом, в каждой точке границы Γ выполняется одна из следующих трех возможностей: 1) $u=0$, $p=0$; 2) $u>0$, $p+Nu=0$; 3) $u=0$, $p>0$. Было бы интересно изучить свойства трех участков границы, соответствующих каждой из возможностей. Такая задача, насколько нам известно, еще не рассматривалась.

2.5. Локальные и глобальные ограничения на управление

Пусть S — открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^m$ или достаточно гладкое многообразие в пространстве $\mathbf{R}^m$ [1]), снабженное мерой dS; пусть, кроме того, E — гильбертово пространство.

Обозначим через $L^2(S;\ E)$ пространство (классов) функций $s \to f(s)$, отображающих множество S в E, измеримых и таких, что $\int_S \|f(s)\|_E^2\, dS < \infty$. Такое пространство, снабженное скалярным произведением

$$\int_S (f(s),\ g(s))_E\, dS,$$

становится гильбертовым пространством (см. Бурбаки [1]).

Положим

$$\mathcal{U} = L^2(S;\ E). \tag{2.52}$$

Будем говорить, что выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{U}_\partial \subset \mathcal{U}$ задается *локальными ограничениями*, если

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U},\ v(s) \in K \text{ для почти всех } s \in S\}, \tag{2.53}$$

где K — выпуклое замкнутое подмножество в E. Если же подмножество $\mathcal{U}_\partial$ задается как-то иначе, например,

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \Big(\int_S \|v(s)\|_E^2\, dS\Big)^{1/2} \leqslant M\} \tag{2.54}$$

или

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \int_S v(s)\, dS \in K\}, \tag{2.55}$$

где K — выпуклое замкнутое подмножество в E, и т. д., то будем говорить, что оно задается *глобальными ограничениями*.

Докажем, что справедлива

Теорема 2.1. *Пусть множество $\mathcal{U}_\partial$ задано локальными ограничениями* (см. (2.53)). *Если обозначить*

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu = \zeta, \tag{2.56}$$

то неравенство (1.29) *эквивалентно неравенству*

$$(\zeta(s),\ k - u(s))_E \geqslant 0\ \forall k \in K \tag{2.57}$$

всюду на множестве S, кроме, быть может, подмножества меры нуль.

---

[1]) Эти предположения, которые можно и ослабить, вполне достаточны для наших целей.

Замечание 2.5. Соотношение (2.57), разумеется, можно переписать в виде

$$(\zeta(s),\ u(s))_E = \inf_{k \in K} (\zeta(s),\ k)_E. \tag{2.58}$$

Доказательство теоремы 2.1. (2.57) $\Rightarrow$ (1.29). Если $v \in \mathcal{U}_\partial$, то $v(s) \in K$ (почти всюду). Следовательно, согласно (2.57), почти всюду

$$(\zeta(s),\ v(s) - u(s))_E \geqslant 0.$$

Интегрируя по S, получаем неравенство (1.29).

(1.29) $\Rightarrow$ (2.57). Пусть S_0 — совокупность точек множества S, являющихся точками Лебега для двух функций (векторной и скалярной):

$$s \to \zeta(s) \quad \text{и} \quad s \to (\zeta(s),\ u(s))_E.$$

Тогда для фиксированной точки $s_0 \in S_0$ существует такая последовательность окрестностей $\{\mathcal{O}_j\}$ (с диаметрами, стремящимися к нулю), что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{|\mathcal{O}_j|}\int\limits_{\mathcal{O}_j} \zeta(s)\,dS \underset{j\to\infty}{\to} \zeta(s_0) \text{ в } E, \\ &\frac{1}{|\mathcal{O}_j|}\int\limits_{\mathcal{O}_j} (\zeta(s),\ u(s))_E\,dS \underset{j\to\infty}{\to} (\zeta(s_0),\ u(s_0))_E, \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

где через $|\mathcal{O}_j|$ обозначена мера множества $\mathcal{O}_j$.

Известно, что дополнение к S_0 в множестве S имеет меру нуль. Следовательно, для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что неравенство (2.57) выполняется на множестве S_0.

Пусть k — некоторый фиксированный элемент множества K, s_0 — фиксированная точка из S_0, а окрестности $\mathcal{O}_j$ точки s_0 удовлетворяют условиям (2.59). Положим

$$v_j = \chi_j k + (1 - \chi_j)\,u, \tag{2.60}$$

где χ_j — характеристическая функция множества $\mathcal{O}_j$. В силу выпуклости множества $\mathcal{U}_\partial$ (см. (2.53)) функция v_j, определенная равенством (2.60), принадлежит множеству $\mathcal{U}_\partial$, так что можно в (1.29) взять $v = v_j$. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}_j} (\zeta(s),\ k - u(s))_E\,dS \geqslant 0,$$

или, после деления на $|\mathcal{O}_j|$,

$$\frac{1}{|\mathcal{O}_j|}\int\limits_{\mathcal{O}_j} (\zeta(s),\ k - u(s))_E\,dS \geqslant 0. \tag{2.61}$$

Используя (2.59), переходим к пределу в (2.61); в результате получим неравенство

$$(\zeta(s_0),\ k - u(s_0))_E \geqslant 0.$$

Так как оно верно для любого $s_0 \in S_0$, то теорема доказана.

Замечание 2.6. В примере 2.3 мы применили частный случай доказанной только что теоремы.

2.6. Система, описываемая системой дифференциальных уравнений [1])

Рассмотрим один очень простой случай системы дифференциальных уравнений того же вида, что и в разд. 3.8 гл. 1.

Пусть состояние системы $y(u) = \{y_1(u),\ y_2(u)\}$ определяется как решение задачи [2])

$$\left.\begin{aligned} -\Delta y_1(u) + y_1(u) - y_2(u) &= f_1 + u_1, \\ -\Delta y_2(u) + y_2(u) + y_1(u) &= f_2 + u_2, \\ y_1(u) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad y_2(u) &= 0 \text{ на } \Gamma, \end{aligned}\right\} \tag{2.62}$$

где

$$u = \{u_1,\ u_2\} \in \mathcal{U} = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{2.63}$$

Употребляя те же обозначения, что и при изложении общей теории, положим

$$V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),\quad H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),\quad \mathcal{U} = H;$$

$$A\colon\ \varphi = \{\varphi_1,\ \varphi_2\} \to A\varphi = \{-\Delta\varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_2,\ -\Delta\varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_1\};$$

B — тождественное отображение;

C — вложение пространства V в H.

Далее, функция стоимости пусть равна

$$J(v) = \int_\Omega [(y_1(v) - z_{1д})^2 + (y_2(v) - z_{2д})^2]\,dx + (Nv,\ v)_{\mathcal{U}}, \tag{2.64}$$

где $z_д = \{z_{1д},\ z_{2д}\}$ — данный элемент пространства H.

Сопряженное состояние определяется из уравнения $A^*p(u) = y(u) - z_д$, т. е. как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} -\Delta p_1(u) + p_1(u) + p_2(u) &= y_1(u) - z_{1д}, \\ -\Delta p_2(u) + p_2(u) - p_1(u) &= y_2(u) - z_{2д}, \\ p_1(u) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad p_2(u) &= 0 \text{ на } \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

---

[1]) Как уже отмечалось, слово «система» употребляется в двух разных смыслах.

[2]) Мы ограничиваемся здесь случаем распределенного управления.

Тогда оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями (2.62), (2.65) и

$$\int_\Omega [p_1(u)(v_1 - u_1) + p_2(u)(v_2 - u_2)]\,dx + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.66}$$

Пример 2.6. Пусть N — диагональный оператор, т. е. $N\{u_1, u_2\} = \{N_1u_1, N_2u_2\}$, и пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{u \mid u_1 \in L^2(\Omega),\ u_2 \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\} \tag{2.67}$$

(следовательно, нет ограничений на компоненту u_1 управления). Тогда неравенство (2.66) эквивалентно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &p_1(u) + N_1u_1 = 0,\\ &p_2(u) + N_2u_2 \geqslant 0, \qquad u_2 \geqslant 0,\\ &u_2[p_2(u) + N_2u_2] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

Таким образом, если выполнено условие (2.67), то оптимальное управление u получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\Delta y_1 + y_1 - y_2 + N_1^{-1}p_1 = f_1,\\ &-\Delta y_2 + y_2 + y_1 - f_2 \geqslant 0,\\ &-\Delta p_1 + p_1 + p_2 - y_1 = -z_{1д},\\ &-\Delta p_2 + p_2 - p_1 - y_2 = -z_{2д},\\ &p_2 + N_2(-\Delta y_2 + y_2 + y_1 - f_2) \geqslant 0,\\ &(-\Delta y_2 + y_2 + y_1 - f_2)[p_2 + N_2(-\Delta y_2 + y_2 + y_1 - f_2)] = 0,\\ &y_1 = y_2 = p_1 = p_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

а именно

$$u_1 = -N_1^{-1}p_1,\ u_2 = -\Delta y_2 + y_2 + y_1 - f_2. \tag{2.70}$$

Замечание 2.7. Ясно, что возможно бесконечное число вариантов, если изменять:

—граничные условия;
—характер управления (распределенное, граничное);
—характер наблюдения;
—исходную систему дифференциальных уравнений.

2.7. Система, описываемая дифференциальным оператором четвертого порядка[1])

Рассмотрим дифференциальный оператор 4-го порядка $A\varphi = \Delta(a_1\Delta\varphi) + a_0\varphi$, введенный нами в разд. 3.9 гл. 1. Положим

$$V = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(\Omega),\ \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\}; \quad H = L^2(\Omega).$$

[1]) Чтение этого раздела для понимания дальнейшего не обязательно.

Как и в разд. 2.3, пространство V' *нельзя* отождествить ни с каким пространством распределений на Ω. Положим (см. (3.69) гл. 1)

$$a(\varphi, \psi) = \int_\Omega a_1 \Delta\varphi\, \Delta\psi\, dx + \int_\Omega a_0 \varphi\psi\, dx, \tag{2.71}$$

где $a_0, a_1 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geqslant \alpha > 0$, $a_1(x) \geqslant \alpha$ почти всюду на Ω. Возьмем

$$\mathcal{U} = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma), \tag{2.72}$$

и пусть состояние $y(u)$ определяется как решение уравнения

$$a(y(u), \psi) = \int_\Omega f\psi\, dx + \int_\Gamma u_1 \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\Gamma - \int_\Gamma u_2\psi\, d\Gamma \qquad \forall\psi \in V. \tag{2.73}$$

Это уравнение заведомо имеет единственное решение; состояние $y(u)$ удовлетворяет эквивалентной системе

$$\left.\begin{aligned} Ay(u) &= f \text{ в } \Omega,\\ a_1 \Delta y(u) &= u_1 \text{ на } \Gamma,\\ \frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta y(u)) &= u_2 \text{ на } \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.74}$$

Если считать C по-прежнему вложением пространства V в H, то сопряженное состояние $p(u)$ определяется как решение уравнения

$$a(p(u), \psi) = \int_\Omega (y(u) - z_д)\, \psi\, dx \qquad \forall\psi \in V, \tag{2.75}$$

или как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} Ap(u) &= y(u) - z_д \text{ в } \Omega,\\ a_1 \Delta p(u) &= 0 \text{ на } \Gamma,\\ \frac{\partial}{\partial n}(a_1 \Delta p(u)) &= 0 \text{ на } \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

Напомним, что соотношение (1.29) получено эквивалентным преобразованием неравенства (1.23) с использованием сопряженного состояния. Если начальных условий много, то проще непосредственно преобразовывать (1.23) (т. е. вычислить неявно $\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^*$), а не искать $\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^*$ специально.

В рассматриваемом случае неравенство (1.23) имеет вид

$$\int_\Omega [y(u) - z_д](y(v) - y(u))\, dx + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.77}$$

Умножая первое из уравнений (2.76) на $y(v) - y(u)$, применяя формулу Грина и принимая во внимание граничные условия из

(2.74), получаем

$$\int_\Omega [y(u) - z_д][y(v) - y(u)]\,dx =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n}[a_1 \Delta y(v) - a_1 \Delta y(u)]\,d\Gamma -$$

$$- \int_\Gamma p\left(\frac{\partial}{\partial n}[a_1 \Delta y(v)] - \frac{\partial}{\partial n}[a_1 \Delta y(u)]\right) d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n}(v_1 - u_1)\,d\Gamma - \int_\Gamma p(v_2 - u_2)\,d\Gamma.$$

Следовательно, неравенство (2.77) эквивалентно неравенству

$$\int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n}(v_1 - u_1)\,d\Gamma - \int_\Gamma p(v_2 - u_2)\,d\Gamma + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.78}$$

Пусть $N = \{N_1, N_2\}$ — диагональный оператор, и пусть скалярное произведение в $\mathcal{U}$ задано формулой (см. разд. 2.4)

$$(u,\ v)_{\mathcal{U}} = \int_\Gamma (-\Delta_\Gamma)^{3/2} u_1 v_1\,d\Gamma + \int_\Gamma (-\Delta_\Gamma)^{1/2} u_2 v_2\,d\Gamma. \tag{2.79}$$

Тогда неравенство (2.78) можно переписать в виде

$$\int_\Gamma \left[\frac{\partial p}{\partial n} + (-\Delta_\Gamma)^{3/2} u_1\right](v_1 - u_1)\,d\Gamma +$$

$$+ \int_\Gamma [-p + (-\Delta_\Gamma)^{1/2} u_2](v_2 - u_2)\,d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.80}$$

Вывод: *оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *определяется как решение задачи* (2.74), (2.76), *удовлетворяющее условию* (2.80).

2.8. План дальнейшего исследования

Рассмотрим подробнее следующие случаи:

(i) случай (еще не рассматривавшийся), когда *наблюдение граничное*;

(ii) другие случаи, когда *управление граничное* (мы уже разобрали два таких примера (разд. 2.4, 2.8), но они не охватывают задачу

$$Ay(u) = f \text{ в } \Omega, \quad y(u) = u \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

требующую, как мы увидим, дополнительного исследования).

Прежде чем приступить к исследованию этих задач, остановимся на случае, когда $N = 0$, а множество $\mathcal{U}_\partial$ не обязательно ограничено.

§ 3. Примеры для случая $N=0$, множество $\mathcal{U}_\partial$ произвольно

3.1. Общий случай

Рассмотрим сформулированную в § 1 задачу, считая, что

$$\mathcal{U} = V'; \ B \text{ — тождественное отображение;} \tag{3.1}$$

$$C \text{ — вложение пространства } V \text{ в } V \text{ (т. е. } \mathcal{H} = V). \tag{3.2}$$

Тогда

$$\Lambda \text{ — канонический изоморфизм из } V \text{ на } V'. \tag{3.3}$$

Пусть, далее, состояние $y(u)$ системы определяется как решение уравнения

$$Ay(u) = f + u, \qquad y(u) \in V, \tag{3.4}$$

а наблюдение $z(u)$ есть $y(u) \in V$ [1]. Функция стоимости, если считать $N = 0$, имеет вид (см. (1.13))

$$J(v) = \| y(v) - z_д \|_V^2, \tag{3.5}$$

где $z_д$ — данный элемент пространства V.

Теорема 3.1. *Если выполнены условия* (3.1) — (3.5) *и* (1.3), *то существует единственный элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$ (оптимальное управление), для которого*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v).$$

Это оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями (3.4),

$$A^* p(u) = \Lambda (y(u) - z_д), \qquad p(u) \in V, \tag{3.6}$$

$$(p(u), v - u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.7}$$

(Скобки здесь обозначают скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно пространствам V и V'.)

Доказательство. Билинейная форма (1.16) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\pi(u, v) = (y(u) - y(0), \ y(v) - y(0))_V = (A^{-1}u, \ A^{-1}v)_V,$$

откуда

$$\pi(v, v) = \| A^{-1} v \|_V^2 \geqslant c \| v \|_{V'}^2$$

(так как A есть изоморфизм из V на V'). Следовательно, общая теория применима, несмотря на то что $N = 0$.

---

[1]) Так как $V \subset H$, то наблюдение $y(u)$ в пространстве V является частным случаем наблюдения в пространстве H (ситуация примеров § 2).

3.2. Приложение (I)

В условиях разд. 3.1 возьмем $V = H_0^1(\Omega)$ [1]), а в качестве A выберем дифференциальный оператор, определенный в разд. 2.1. Таким образом, состояние $y(u)$ определяется как решение задачи

$$Ay(u) = f + u \text{ в } \Omega, \quad y(u)|_\Gamma = 0, \tag{3.8}$$

и требуется найти оптимальное управление u, минимизирующее функцию стоимости

$$J(v) = \int_\Omega \left[(y(v) - z_д)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (y(v) - z_д) \right)^2 \right] dx. \tag{3.9}$$

Оператор Λ в рассматриваемом случае равен $-\Delta + I$ [2]), и потому сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$A^* p(u) = (-\Delta + I)(y(u) - z_д), \quad p(u)|_\Gamma = 0, \tag{3.10}$$

а неравенство (3.7) принимает вид

$$\int_\Omega p(u)(v - u)\, dx \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.11}$$

Пример 3.1. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений на управление). Тогда из неравенства (3.11) получаем $p(u) = 0$, и потому $y(u) = z_д$. Впрочем, это и так ясно: достаточно взять $u = Az_д - f$.

Пример 3.2. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{ v \mid v \in H^{-1}(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ в } \Omega \text{ [3])} \}.$$

Тогда, как мы уже видели в § 2, неравенство (3.11) эквивалентно соотношениям

$$u \geqslant 0, \ p(u) \geqslant 0, \ up(u) = 0 \ \text{ в } \ \Omega. \tag{3.12}$$

Таким образом, оптимальное управление u получается из решения задачи (типа односторонней граничной задачи)

$$\left. \begin{array}{l} A^* p - (-\Delta + I) y = \Delta z_д - z_д \text{ в } \Omega, \\ Ay - f \geqslant 0, \ p \geqslant 0, \ (Ay - f) p = 0 \text{ в } \Omega, \\ y|_\Gamma = 0, \ p|_\Gamma = 0, \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

а именно $u = Ay - f$.

---

[1]) Норма в пространстве $V = H_0^1$ равна

$$\|\psi\|_{H_0^1} = \left\{ \int_\Omega \left[\psi^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2}.$$

[2]) См. (1.25). Так как по определению $(-\Delta h, g) = (\Delta h, \Delta g)$, то легко убедиться, что $((-\Delta + I) h, g) = (h, g)_{H_0^1}$.— *Прим. перев.*

[3]) Следовательно, v — неотрицательная мера.

Здесь опять интересно было бы получить информацию о свойствах тех частей области Ω, где 1) $u = 0$, $p = 0$; 2) $u > 0$, $p = 0$; 3) $u = 0$, $p > 0$. Эта задача, по-видимому, еще не решена.

3.3. Приложение (II)

Применим теперь результаты разд. 3.1 в случае, когда $V = H^1(\Omega)$, состояние $y(u)$ и сопряженное состояние $p(u)$ определяются как решения соответствующих *вариационных задач*

$$a(y(u), \psi) = (f + u, \psi) \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega) \tag{3.14}$$

и

$$a^*(p(u), \psi) = (y(u) - z_д, \psi)_V \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega) \tag{3.15}$$

(здесь $a^*(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi) \quad \forall \varphi, \psi \in V$), а оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями (3.14), (3.15) и

$$(p(u), v - u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.16}$$

Пример 3.3. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \left\{ v \mid (v, \psi) = \int_\Gamma v_1 \psi \, d\Gamma, \; v_1 \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}. \tag{3.17}$$

Тем самым определено *замкнутое* векторное подпространство пространства $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Действительно, если v_1 — фиксированный элемент пространства $H^{-1/2}(\Gamma)$, то функционал $v \in V'$, определенный соотношением $(v, \psi) = \int_\Gamma v_1 \psi \, d\Gamma$, имеет норму

$$\| v \|_{V'} = \sup_{\psi \in V} \frac{\left| \int_\Gamma v_1 \psi \, d\Gamma \right|}{\| \psi \|_V}.$$

Но

$$V = H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_\Delta(\Omega),$$

где

$$H^1_\Delta(\Omega) = \{ v \mid v \in H^1(\Omega), \; (-\Delta + I) v = 0 \},$$

и

$$\| v \|_{V'} = \sup_{\psi \in H^1_\Delta(\Omega)} \frac{\left| \int_\Gamma v_1 \psi \, d\Gamma \right|}{\| \psi \|_V}. \tag{3.18}$$

Поскольку $\psi \to \psi |_\Gamma$ есть *изоморфизм* пространства $H^1_\Delta(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$, равенство (3.18) определяет норму, эквивалентную $\| v \|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$, откуда и следует наше утверждение.

В силу (3.17) неравенство (3.16) эквивалентно условию

$$p(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Следовательно, оптимальное управление u получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &Ay=f,\\ &a^*(p,\ \psi)=(y-z_{\text{д}},\ \psi)_V \quad \forall\psi\in H^1(\Omega),\\ &p|_\Gamma=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

а именно

$$u=\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\quad \text{на}\quad \Gamma. \tag{3.20}$$

Задаче (3.19) можно дать следующую *формальную* интерпретацию:

$$\left.\begin{aligned} &Ay=f,\\ &A^*p=(-\Delta+I)(y-z_{\text{д}}),\\ &p|_\Gamma=0,\ \left.\frac{\partial p}{\partial\nu_{A^*}}\right|_\Gamma=\frac{\partial}{\partial n}(y-z_{\text{д}}). \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Пример 3.4. Возьмем в качестве $\mathcal{U}_\partial$ подмножество множества (3.17):

$$\mathcal{U}_\partial=\left\{v\,|\,(v,\ \psi)=\int_\Gamma v_1\psi\,d\Gamma,\ v_1\in H^{-1/2}(\Gamma),\ v_1\geqslant 0\ \text{на}\ \Gamma\right\}. \tag{3.22}$$

Тогда неравенство (3.16) примет вид

$$p(u)\geqslant 0\quad \text{на}\quad \Gamma,\qquad up(u)=0\quad \text{на}\quad \Gamma \tag{3.23}$$

(если отождествить u с u_1). Сопряженное состояние определяется так же, как и в (3.19).

§ 4. Граничное наблюдение[1]

4.1. Система, описываемая задачей Дирихле (I)

Снова рассмотрим задачу, сформулированную в разд. 2.1. *Состояние* $y(u)$, таким образом, определяется как решение задачи

$$Ay(u)=f+u\quad \text{в}\quad \Omega,\quad y(u)|_\Gamma=0. \tag{4.1}$$

Допустим, что коэффициенты в формуле (2.4) для оператора A достаточно гладкие, так что (теорема о регулярности)

$$y(u)\in H^2(\Omega). \tag{4.2}$$

Тогда можно определить $\left.\frac{\partial y(u)}{\partial n}\right|_\Gamma$ и, согласно § 3 гл. 1, $\left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_\Gamma\in H^{1/2}(\Gamma)$.

[1] В оригинале observation frontière.— *Прим. перев.*

Чтобы по возможности меньше пользоваться пространствами H^s с нецелым s, можно, в частности, считать, что $\left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$, а *наблюдение* определить равенством

$$z(u) = M \left.\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right|_{\Gamma}, \tag{4.3}$$

где M — данная функция, принадлежащая пространству $L^\infty(\Gamma)$ [1].

Пример. Если $M = 1$ (соответственно, если M — характеристическая функция множества $\Gamma_0 \subset \Gamma$), то равенство (4.3) означает, что мы наблюдаем $\partial y/\partial \nu_A$ на границе Γ (соответственно на части Γ_0 границы).

Функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_{\Gamma} \left(M \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - z_{д} \right)^2 d\Gamma + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{4.4}$$

где $z_{д}$ — данный элемент пространства $L^2(\Gamma)$.

Ясно, что в рассматриваемом случае применима теорема 1.2: существует единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_{\partial}$, характеризующееся тем, что

$$J'(u) \cdot (v - u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{\partial},$$

или, что то же самое,

$$\int_{\Gamma} \left(M \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_{д} \right) \left(M \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - M \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} \right) d\Gamma + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0$$
$$\forall v \in \mathcal{U}_{\partial}. \tag{4.5}$$

Полученное неравенство (4.5) преобразуем сначала формально [2]. Определим *сопряженное состояние* как решение задачи [3]

$$A^* p(u) = 0, \quad p(u)|_{\Gamma} = -M \left(M \left.\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right|_{\Gamma} - z_{д} \right). \tag{4.6}$$

---

[1] Так как след $y(u)|_{\Gamma}$ известен (он равен нулю), то задание $\partial y/\partial \nu_A$ на Γ равносильно заданию $\partial y/\partial n$ на Γ. Если $M \in L^\infty(\Gamma)$, то $M \left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$.

[2] Законность этих преобразований будет обоснована ниже.

[3] Это как раз и нужно обосновать!

Умножая первое из соотношений (4.6) на $y(v) - y(u)$ и применяя формулу Грина, получаем

$$0 = -\int_\Gamma \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A}(y(v) - y(u))\,d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma p(u)\left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)d\Gamma + \int_\Omega p(u)(v-u)\,dx.$$

Так как $y|_\Gamma = 0$, то, учитывая второе из соотношений (4.6), приходим к равенству

$$\int_\Gamma \left(M\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д\right)\left(M\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - M\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)d\Gamma = \int_\Omega p(u)(v-u)\,dx. \quad (4.7)$$

Таким образом, неравенство (4.5) эквивалентно неравенству

$$\int_\Omega [p(u) + Nu](v-u)\,dx \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \quad (4.8)$$

Остается, следовательно, решить задачу (4.6). Отметим, что, вообще говоря, если задача (4.6) имеет решение, то оно не принадлежит пространству $H^1(\Omega)$ (так как иначе след $p(u)|_\Gamma$ принадлежал бы $H^{1/2}(\Gamma)$, что в общем случае неверно).

Решение задачи типа (4.6) [1]) требует некоторых дополнительных исследований, которые мы сейчас и проведем [2]).

4.2. Неоднородная задача Дирихле

Пусть, как и в разд. 4.1, A — эллиптический оператор второго порядка с коэффициентами, достаточно гладкими в области $\overline{\Omega}$.

Пусть f (соответственно g) — функция или распределение (предположения будут уточнены ниже) на Ω (соответственно на Γ). Требуется найти элемент y (из некоторого класса, который еще надо определить), удовлетворяющий условиям

$$Ay = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad y|_\Gamma = g. \quad (4.9)$$

Пусть ψ — некоторая «пробная» функция, определенная на множестве $\overline{\Omega}$ (свойства этой функции предстоит еще описать). Умножая первое из соотношений (4.9) на ψ и применяя формулу

---

[1]) То есть *неоднородной задачи Дирихле* по терминологии Лионса и Мадженеса [1].

[2]) Речь идет о применении к весьма частным случаям методов, развитых в книге Лионса и Мадженеса [1].

Грина, получаем

$$\int_\Omega (Ay)\psi\,dx = \int_\Omega f\psi\,dx =$$

$$= -\int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\psi\,d\Gamma + \int_\Gamma y\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Gamma + \int_\Omega y(A^*\psi)\,dx. \qquad (4.10)$$

Принимая во внимание второе из соотношений (4.9), приходим к равенству

$$\int_\Omega y(A^*\psi)\,dx = \int_\Omega f\psi\,dx - \int_\Gamma g\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial\nu_A}\psi\,d\Gamma. \qquad (4.11)$$

Естественно *подчинить функцию* ψ *условию*

$$\psi|_\Gamma = 0. \qquad (4.12)$$

Тогда равенство (4.11) примет вид

$$\int_\Omega y(A^*\psi)\,dx = \int_\Omega f\psi\,dx - \int_\Gamma g\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Gamma. \qquad (4.13)$$

Обратно, если функция y удовлетворяет соотношению (4.13) для «любой» функции ψ, подчиненной условию (4.12), то выполняются равенства (4.9).

Таким образом, идея состоит в том, чтобы *использовать равенство* (4.13) *для определения функции* y, *которую мы назовем слабым решением задачи* (4.9).

Для реализации этой идеи будем исходить из следующего результата, которым мы уже пользовались: *если* φ — *данная функция пространства* $L^2(\Omega)$, *то решение задачи*

$$A^*\psi = \varphi \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \psi|_\Gamma = 0, \qquad (4.14)$$

принадлежит пространству $H^2(\Omega)$ (см., например, Лионс и Мадженес [1, гл. 2]). Иначе говоря,

$$A^* \text{ — изоморфизм из } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ на } L^2(\Omega). \qquad (4.15)$$

С помощью *транспонирования* заключаем: если $\psi \to L(\psi)$ — непрерывная линейная форма на $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, то существует единственный элемент $y \in L^2(\Omega)$, для которого

$$\int_\Omega y(A^*\psi)\,dx = L(\psi) \qquad \forall\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \qquad (4.16)$$

Пусть теперь

$$f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma). \qquad (4.17)$$

Тогда форма $L(\psi)$, определенная равенством

$$L(\psi)=\int_\Omega f\psi\,dx-\int_\Gamma g\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Gamma, \tag{4.18}$$

непрерывна на $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Для данных элементов f и g, подчиненных условиям* (4.17), *существует единственный элемент $y\in L^2(\Omega)$, удовлетворяющий соотношению* (4.13).

По определению этот элемент y есть слабое решение (в $L^2(\Omega)$) задачи (4.9).

Замечание 4.1. Легко видеть, что $Ay=f$ в смысле пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$. Действительно, достаточно в (4.16) взять $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$; тогда $y\in L^2(\Omega)$ и $Ay=f\in L^2(\Omega)$.

Можно показать (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2], что следы $y|_\Gamma$ и $\left.\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right|_\Gamma$ имеют определенный смысл, причем $y|_\Gamma\in H^{-1/2}(\Gamma)$ и $\left.\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right|_\Gamma\in H^{-3/2}(\Gamma)$.

Замечание 4.2. Предположим, что A — симметрический оператор, т. е. $A^*=A$. Функцию y, удовлетворяющую соотношению (4.13), будем искать в виде разложения по базису, состоящему из собственных функций оператора A:

$$Aw_j=\lambda_jw_j,\qquad \int_\Omega w_j^2\,dx=1,\qquad w_j|_\Gamma=0,\qquad j=1,2,\ldots, \tag{4.19}$$

где λ_j занумерованы в порядке возрастания. Тогда функцию y можно единственным образом представить в виде

$$y=\sum_{j=1}^\infty y_jw_j,\qquad \sum_{j=1}^\infty y_j^2<\infty. \tag{4.20}$$

Полагая в (4.16) $\psi=w_j$ и учитывая, что $A^*=A$, получаем (см. (4.18))

$$\int_\Omega y(\lambda_jw_j)\,dx=L(w_j)=\int_\Omega fw_j\,dx-\int_\Gamma g\frac{\partial w_j}{\partial\nu_A}\,d\Gamma.$$

Так как левая часть этого равенства равна λ_jy_j, то

$$y_j=\frac{1}{\lambda_j}\left\{\int_\Omega fw_j\,dx-\int_\Gamma g\frac{\partial w_j}{\partial\nu_A}\,d\Gamma\right\}.$$

4.3. Система, описываемая задачей Дирихле (II)

Применяя введенные в разд. 4.2 понятия, мы можем теперь обосновать формальные преобразования, проведенные в разд. 4.1.

Заметим прежде всего, что сопряженное состояние, введенное формально как решение задачи (4.6), определяется *строго* как решение в $L^2(\Omega)$ уравнения

$$\int\limits_\Omega p(u)(A\psi)\,dx = \int\limits_\Gamma M\left(M\frac{\partial y(u)}{\partial\nu_A} - z_д\right)\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A}d\Gamma \qquad \forall\psi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega). \tag{4.22}$$

Заменяя здесь функцию ψ на $y(v) - y(u)$, приходим к равенству (4.7). Итак, доказана

Теорема 4.2. *Если состояние системы определяется как решение задачи* (4.1), *а функция стоимости имеет вид* (4.4), *то оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_д$ *определяется как решение задачи* (4.1), (4.6) (*причем задача* (4.6) *эквивалентна уравнению* (4.22)), *удовлетворяющее неравенству* (4.8).

Замечание 4.3. С помощью введенных понятий мы теперь можем исследовать случай, когда система описывается задачей Дирихле с граничным управлением и граничным наблюдением; это составляет содержание § 5.

4.4. Система, описываемая задачей Неймана

Рассмотрим задачу, сформулированную в разд. 2.4, считая, что

$$\mathcal{U} = L^2(\Gamma). \tag{4.23}$$

Состояние $y(u)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &Ay(u) = f \quad \text{в} \quad \Omega,\\ &\frac{\partial y(u)}{\partial\nu_A} = u \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad u\in L^2(\Gamma). \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Так как $y(u) \in H^1(\Omega)$, то $y(u)|_\Gamma$ имеет смысл, и если $M \in L^\infty(\Gamma)$, то наблюдение можно определить формулой $z(u) = My(u)|_\Gamma$. Тогда функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int\limits_\Gamma |My(v) - z_д|^2\,d\Gamma + (Nv, v)_{\mathcal{U}}. \tag{4.25}$$

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &A^*p(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ &\frac{\partial p(u)}{\partial\nu_{A^*}} = M(My(u) - z_д) \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Для единственного оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (4.24), (4.26) и

$$\int_\Gamma (p(u) + Nu)(v - u)\, d\Gamma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{4.27}$$

Пример 4.1. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\partial = \{v \mid v &\text{ с носителем в } \Gamma_0 \subset \Gamma;\ \xi_0(x) \leqslant v(x) \leqslant \xi_1(x) \\ &\text{для почти всех } x \in \Gamma_0 \text{ в смысле меры } d\Gamma; \\ &\xi_0 \text{ и } \xi_1 \text{ — данные функции из } L^\infty(\Gamma)\}; \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\left.\begin{aligned} M &\text{ — характеристическая функция множества } \Gamma_1, \\ &\Gamma_1 \subset \Gamma,\ \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing. \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Условие (4.27) (если $N = \nu I$) принимает вид

$$(p(x;\ u) + \nu u(x))(\xi - u(x)) \geqslant 0 \qquad \forall \xi \in [\xi_0(x),\ \xi_1(x)] \tag{4.30}$$

для почти всех $x \in \Gamma_0$.

Пример 4.2. Пусть выполнены условия примера 4.1 и $N = 0$, т. е. $\nu = 0$. Тогда (4.30) принимает вид

$$p(x;\ u)(\xi - u(x)) \geqslant 0 \qquad \forall \xi \in [\xi_0(x),\ \xi_1(x)] \tag{4.31}$$

для почти всех $x \in \Gamma_0$.

Лемма 4.1. *Пусть граница Γ множества Ω вещественно-аналитична и коэффициенты в выражении для оператора A вещественно-аналитичны в $\bar{\Omega}$. Тогда*

$$\text{либо } p(x;\ u) \neq 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_0, \text{ либо } p(u) \equiv 0. \tag{4.32}$$

Доказательство. Из соотношений (4.26) в силу (4.29) вытекает, что

$$A^* p(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma - \Gamma_1,$$

а значит, $\dfrac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} = 0$ на Γ_0.

Если на некотором множестве $E \subset \Gamma_0$ положительной меры $p(x;\ u) = 0$, то

$$A^* p(u) = 0 \text{ в } \Omega;\quad p(u) = 0 \text{ и } \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \text{ на } E \subset \Gamma,$$

откуда в силу сделанных предположений об аналитичности следует, что $p(u) \equiv 0$.

Если $p(u) \equiv 0$, то можно найти такое управление u, что

$$My(u) - z_д = 0. \tag{4.33}$$

Если же $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) > 0$, то $p(x;\ u) \neq 0$ почти всюду на Γ_0, и из условия (4.31) заключаем:

$$\left.\begin{aligned}&\text{если } p(x;\ u) > 0 \text{ в точке } x \in \Gamma_0, \text{ то } u(x) = \xi_0(x);\\ &\text{если } p(x;\ u) < 0 \text{ в точке } x \in \Gamma_0, \text{ то } u(x) = \xi_1(x).\end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

Замечание 4.4. Условие (4.34) означает, что управление является релейным [1]). Если, например, $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = 1$, то оптимальное управление принимает только значения ± 1.

Замечание 4.5. Было бы интересно исследовать свойства тех областей, на которых управление u принимает значения $\xi_0(x)$ и $\xi_1(x)$ соответственно, и, в частности, получить информацию о свойствах множества, разделяющего эти области.

§ 5. Граничные управление и наблюдение. Случай задачи Дирихле

5.1. План дальнейшего исследования

В разд. 4.4 мы уже изучали системы, описываемые *задачей Неймана*, в случае граничного управления и граничного наблюдения.

Рассмотрим теперь несколько аналогичных примеров для систем, описываемых *задачей Дирихле*. Здесь, как мы увидим, возникают дополнительные трудности.

5.2. Граничное управление из $L^2(\Gamma)$

Пусть

$$\mathcal{U} = L^2(\Gamma). \qquad (5.1)$$

Согласно результатам разд. 4.2 (обозначения сохраняются), существует единственный элемент $y(u) \in L^2(\Omega)$, являющийся решением задачи

$$Ay(u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad y(u) = u \quad \text{на } \Gamma. \qquad (5.2)$$

Именно, решение задачи (5.2) сводится к отысканию функции $y(u) \in L^2(\Omega)$, удовлетворяющей уравнению (см. (4.13))

$$\int\limits_\Omega y(u)(A^*\psi)\,dx = \int\limits_\Omega f\psi\,dx - \int\limits_\Gamma u \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Gamma \qquad \forall\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \qquad (5.3)$$

[1]) В оригинале propriété «bang-bang».— *Прим. перев.*

Наблюдение можно определить как

$$z(u) = \frac{\partial}{\partial \nu_A} y(u)\Big|_\Gamma,$$

если, конечно, мы убедимся, что эта производная имеет смысл. Можно показать (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2]), что *если* $u \in L^2(\Gamma)$, *то* $\frac{\partial}{\partial \nu_A} y(u)\Big|_\Gamma \in H^{-1}(\Gamma)$, а $u \to \frac{\partial}{\partial \nu_A} y(u)\Big|_\Gamma$ — непрерывное аффинное отображение $L^2(\Gamma) \to H^{-1}(\Gamma)$.

Функцию стоимости выберем равной

$$J(v) = \left\| \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д \right\|^2_{H^{-1}(\Gamma)} + (Nv, v)_{\mathcal{U}}{}^{1)}, \tag{5.4}$$

где N — положительно определенный оператор, отображающий пространство $\mathcal{U}$ в себя.

При сделанных предположениях применима общая теория: существует единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, которые характеризуются тем, что

$$\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д, \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} \right)_{H^{-1}(\Gamma)} + (Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{5.5}$$

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left. \begin{aligned} A^* p(u) &= 0 \text{ в } \Omega, \\ p(u) &= (-\Delta_\Gamma)^{-1} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д \right) \text{ на } \Gamma. \end{aligned} \right\} \tag{5.6}$$

Необходимо отметить, что

$$(-\Delta_\Gamma)^{-1} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д \right) \in H^1(\Gamma),$$

и, следовательно, $p(u)$ —«регулярное» решение [2]). В этом проявляется общая закономерность (вполне естественная, поскольку y и p «двойственны» друг к другу): если «регулярность» состояния «уменьшается», то «регулярность» сопряженного состояния «увеличивается».

---

1) Для $\varphi, \psi \in H^{-1}(\Gamma)$ скалярное произведение определяется формулой

$$(\varphi, \psi)_{H^{-1}(\Gamma)} = \int_\Gamma ((-\Delta_\Gamma)^{-1} \varphi)\, \psi \, d\Gamma,$$

где $-\Delta_\Gamma$ — оператор Лапласа — Бельтрами на Γ.

2) Точнее, $p(u) \in H^{3/2}(\Omega)$; см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2].

Используя задачу (5.6), можно привести условие (5.5) к *эквивалентному* виду [1]):

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial p(u)}{\partial\nu_{A^*}}+Nu\right)(v-u)\,d\Gamma\geqslant 0\qquad\forall v\in\mathcal{U}_\partial. \tag{5.7}$$

Пример 5.1. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial=\{v\mid v\geqslant 0 \text{ на } \Gamma,\ v\in L^2(\Gamma)\}. \tag{5.8}$$

Тогда оптимальное управление получается из решения задачи (типа односторонней граничной задачи)

$$\left.\begin{aligned}&Ay=f,\ A^*p=0 \text{ в } \Omega,\\&(-\Delta_\Gamma)p=\frac{\partial y}{\partial\nu_A}-z_{\text{д}} \text{ на } \Gamma,\\&y\geqslant 0,\ \frac{\partial p}{\partial\nu_{A^*}}+Ny\geqslant 0,\ y\left(\frac{\partial p}{\partial\nu_{A^*}}+Ny\right)=0 \text{ на } \Gamma,\end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

а именно

$$u=y|_\Gamma. \tag{5.10}$$

Замечание 5.1. *Если управление принадлежит пространству* $L^2(\Gamma)$, *то наблюдение* $\partial y(u)/\partial\nu_A$ *не принадлежит этому пространству (оно принадлежит пространству* $H^{-1}(\Gamma)$). Этот результат нельзя улучшить, чем и объясняется наличие нормы *в смысле пространства* $H^{-1}(\Gamma)$ в выражении (5.4) для функции стоимости $J(v)$ (а также наличие оператора $-\Delta_\Gamma$ во втором соотношении (5.6)).

5.3. Одна проблема типа управляемости

Пусть Ω — открытое множество с границей $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_i $(i=1,\ 2)$ — достаточно гладкое многообразие размерности $n-1$.

Предположим, что состояние $y(u)$ определяется как решение задачи

$$Ay(u)=0\qquad\text{в } \Omega, \tag{5.11}$$

$$y(u)|_{\Gamma_1}=u,\qquad u\in L^2(\Gamma_1), \tag{5.12}$$

$$y(u)|_{\Gamma_2}=0. \tag{5.13}$$

Тогда можно в качестве наблюдения взять функцию $\left.\dfrac{\partial y(u)}{\partial\nu_A}\right|_{\Gamma_2}$, принадлежащую пространству $H^{-1}(\Gamma_2)$ (разд. 5.2). Она обладает следующим свойством (типа управляемости; см. § 10 гл. 3).

[1]) Это делается уже известным способом: умножением первого из соотношений (5.6) на $y(v)-y(u)$ и последующим применением формулы Грина.

Теорема 5.1. *Если управление u пробегает пространство $L^2(\Gamma_1)$, то $\left.\dfrac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right|_{\Gamma_2}$ пробегает подпространство, плотное в $H^{-1}(\Gamma_2)$ (коэффициенты в выражении для оператора A предполагаются достаточно гладкими).*

Доказательство. Пусть функция $\varphi \in H^1(\Gamma_2)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_2} \varphi \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} d\Gamma_2 = 0 \qquad \forall u \in L^2(\Gamma_1). \tag{5.14}$$

Достаточно доказать, что $\varphi = 0$.

Пусть z — решение задачи

$$A^* z = 0, \quad z|_{\Gamma_1} = 0, \quad z|_{\Gamma_2} = \varphi. \tag{5.15}$$

Тогда $\int_\Omega (A^*z)\, y(u)\, dx = 0$. Применяя формулу Грина, получаем

$$\int_{\Gamma_2} \varphi \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial z}{\partial \nu_{A^*}} y(u)\, d\Gamma_1,$$

откуда в силу (5.14) и (5.12) имеем

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial z}{\partial \nu_{A^*}} u\, d\Gamma_1 = 0 \qquad \forall u \in L^2(\Gamma_1).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{5.16}$$

что вместе с (5.15) дает $z = 0$, а значит, и $\varphi = 0$.

5.4. Точечные управление и наблюдение [1]

Если $b \in \Gamma$, то будем обозначать через $\delta(\gamma - b)$ функцию Дирака в точке b:

$$\int_\Gamma \delta(\gamma - b)\, \varphi(\gamma)\, d\Gamma = \varphi(b) \qquad \forall \varphi \in C^0(\Gamma). \tag{5.17}$$

Пусть

$$\mathcal{U} = \mathbf{R}^M, \tag{5.18}$$

где $\mathbf{R}^M$ — конечномерное пространство (тогда $\mathcal{U}_\partial$ — его замкнутое выпуклое подмножество).

---

[1]) В оригинале contrôle et observation ponctuels.— *Прим. перев.*

Пусть состояние $y(u)$ определяется как решение задачи

$$Ay(u) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{5.19}$$

$$y(u)|_\Gamma = \sum_{i=1}^{M} u_i \delta(\gamma - b_i), \quad u = \{u_i\} \in \mathbf{R}^M, \quad b_i \in \Gamma. \tag{5.20}$$

Задача (5.19), (5.20) допускает единственное решение. Задача

$$A_x P(x, b) = 0, \quad P(x, b)|_\Gamma = \delta(\gamma - b) \tag{5.21}$$

имеет решение $P(x, b)$, называемое *ядром Пуассона* [1]). Тогда решение задачи (5.19), (5.20) можно записать в виде

$$y(u) = \sum_{i=1}^{M} u_i P(x, b_i). \tag{5.22}$$

Если коэффициенты в выражении для оператора A и граница Γ достаточно гладки, то функция $y(u)$ регулярна на множестве $\overline{\Omega}$ всюду, кроме точек b_i. Поэтому можно в качестве *локальных наблюдений* выбрать функции

$$\frac{\partial y(c_i; u)}{\partial \nu_A}, \quad c_i \in \Gamma, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.23}$$

при условии, что $c_i \neq b_j$ для любых i и j.

Введем функцию стоимости:

$$J(v) = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial y(c_i; v)}{\partial \nu_A} - z_{\text{д}i} \right|^2 + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{5.24}$$

где N — положительно определенная матрица преобразования пространства $\mathbf{R}^M$ в себя.

Так как $u \to \dfrac{\partial y(c_i; u)}{\partial \nu_A}$ есть непрерывное отображение $\mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$, то общая теория в рассматриваемом случае применима.

---

1) Решение этой задачи можно найти, например, с помощью соотношения (4.13):

$$\int_\Omega P(x,b)(A^*\psi)\,dx = -\frac{\partial \psi(b)}{\partial \nu_{A^*}}$$

для любой «пробной» функции ψ, для которой

$$\psi|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{A^*}} \in C^0(\Gamma).$$

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &A^* p(u) = 0, \\ &p(u)|_\Gamma = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial y(c_i; u)}{\partial \nu_A} - z_{\text{д}i} \right) \delta(\gamma - c_i). \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Применяя формулу Грина, находим, что для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (5.19), (5.20), (5.25) и

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial p(b_i; u)}{\partial \nu_{A^*}} (v_i - u_i) + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{5.26}$$

§ 6. Ограничения на состояние системы

6.1. План дальнейшего исследования

До сих пор множество допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$, характеризующее ограничения на управления, задавалось *непосредственно*.

Однако встречаются и такие задачи, в которых множество $\mathcal{U}_\partial$ задается опосредованно, *через состояние системы*. Например, можно рассмотреть случай, когда множество $\mathcal{U}_\partial$ определяется как совокупность таких управлений $u \in \mathcal{U}$, при каждом из которых соответствующее наблюдение $Cy(u)$ принадлежит выпуклому замкнутому подмножеству K пространства наблюдений $\mathcal{H}$. Тогда задача состоит в отыскании характеризующих оптимальное управление условий, *непосредственно выраженных в терминах множества K* (а не $\mathcal{U}_\partial$).

Мы приведем один пример задачи такого рода.

6.2. Граничное управление, ограничения на границе

Пусть состояние системы определяется как решение задачи (обозначения те же, что и раньше)

$$Ay(u) = 0, \quad y(u)|_\Gamma = u, \tag{6.1}$$

причем

$$\mathcal{U} = L^2(\Gamma), \qquad u \in \mathcal{U}. \tag{6.2}$$

Мы видели (разд. 5.2), что в этом случае можно определить

$$\left.\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma \in H^{-1}(\Gamma). \tag{6.3}$$

Пусть

$$K \text{ — выпуклое замкнутое множество в пространстве } H^{-1}(\Gamma). \tag{6.4}$$

Зададим множество допустимых управлений

$$\mathcal{U}_\partial = \left\{ v \mid v \in L^2(\Gamma) = \mathcal{U},\ \left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma \in K \right\}. \tag{6.5}$$

Такое определение возможно, так как $v \to \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}$ есть линейное непрерывное отображение $L^2(\Gamma) \to H^{-1}(\Gamma)$, а потому множество $\mathcal{U}_\partial$, заданное с помощью (6.5), замкнуто и выпукло.

Рассмотрим функцию стоимости

$$J(v) = \left\| \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - z_д \right\|^2_{H^{-1}(\Gamma)} + (Nv,\ v)_{\mathcal{U}}, \tag{6.6}$$

где N — положительно определенный оператор, отображающий пространство $\mathcal{U}$ в себя.

Теорема 6.1. *Единственное оптимальное управление u, реализующее минимум функции стоимости $J(v)$ на множестве $\mathcal{U}_\partial$, получается из решения задачи*

$$Ay = 0, \quad A^*q = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \nu_{A^*}} = Ny \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{6.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left((-\Delta_\Gamma)^{-1} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д \right) + q,\ g - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} \right) \geqslant 0^{1)} \qquad \forall g \in K, \\ &\left.\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma \in K, \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

а именно

$$u = y\,|_\Gamma. \tag{6.10}$$

(Следует подчеркнуть, что в соотношениях (6.9), как нам и хотелось, фигурирует непосредственно множество K.)

Доказательство. 1) Единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ определяется условием

$$J'(u) \cdot (v - u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д,\ \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} \right)_{H^{-1}(\Gamma)} + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{6.11}$$

[1]) Скобками обозначено скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно $H^1(\Gamma)$ и $H^{-1}(\Gamma)$.

Для того чтобы привести неравенство (6.11) к виду, позволяющему непосредственно использовать множество K, определим функцию $q(u)$ как решение задачи

$$\Lambda^* q(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.12}$$

$$\left.\frac{\partial q(u)}{\partial \nu_{A^*}}\right|_\Gamma = Nu \in L^2(\Gamma); \tag{6.13}$$

при этом $q(u) \in H^1(\Omega)$ [1]).

Умножая соотношения (6.12) на $y(v) - y(u)$ и применяя формулу Грина, получаем

$$-\int_\Gamma \frac{\partial q(u)}{\partial \nu_{A^*}}(v-u)\,d\Gamma + \int_\Gamma q(u)\left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)d\Gamma = 0.$$

Поэтому неравенство (6.11) эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_\text{д},\ \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)_{H^{-1}(\Gamma)} + \int_\Gamma q(u)\left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)d\Gamma \geqslant 0$$

$$\forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{6.14}$$

Но так как

$$(\varphi, \psi)_{H^{-1}(\Gamma)} = \int_\Gamma (-\Delta_\Gamma)^{-1}\varphi\psi\,d\Gamma,$$

то (6.14) можно переписать в виде

$$\int_\Gamma \left[(-\Delta_\Gamma)^{-1}\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_\text{д}\right) + q(u)\right]\left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{6.15}$$

2) Отображение

$$u \to \left.\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma \tag{6.16}$$

есть *изоморфизм* пространства $L^2(\Gamma)$ на $H^{-1}(\Gamma)$ (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2]) [2]). Поэтому для любого элемента $g \in K$ сущест-

[1]) Более того, можно показать (Лионс и Мадженес [1, гл. 2]), что $q(u) \in H^{3/2}(\Omega)$.

[2]) Отображение, обратное к (6.16), определяется с помощью решения неоднородной задачи Неймана:

$$Az = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \nu_A} = \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

откуда

$$\left.\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma \to z\Big|_\Gamma = u.$$

вует такое управление $v \in \mathcal{U}_\partial$, что $\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma = g$, а следовательно, неравенство (6.15) эквивалентно условию (6.9).

3) Исключая управление u с помощью равенства (6.13), приходим к утверждению теоремы.

Пример 6.1. Пусть

$$K = \{g \mid g \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\} \tag{6.17}$$

(т. е. g — неотрицательная мера на Γ). В этом случае условие (6.9) эквивалентно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0, \ (-\Delta_\Gamma)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - z_\text{д}\right) + q \geqslant 0 \ \text{на} \ \Gamma, \\ &\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\left[(-\Delta_\Gamma)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - z_\text{д}\right) + q\right] = 0 \ \text{на} \ \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Задача (6.7), (6.8), (6.18) — это односторонняя граничная задача.

Замечание 6.1. Можно убедиться в справедливости следующего результата. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \left\{v \mid v \in L^2(\Gamma), \ \lambda v + \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} \in K\right\}, \tag{6.19}$$

где $\lambda > 0$ — данное число, а функция стоимости $J(v)$ задана формулой (6.6). Обозначим через $p(u)$ решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &A^* p(u) = 0 \ \text{в} \ \Omega, \\ &\lambda p(u) + \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} = \lambda(-\Delta_\Gamma)^{-1}\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_\text{д}\right) - Nu \ \text{на} \ \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

Тогда оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяет соотношениям (6.1), (6.20) и

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} + Nu\right)\left[g - \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} + \lambda u\right)\right] d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall g \in K; \tag{6.21}$$

последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\int_\Gamma \left[(-\Delta_\Gamma)^{-1}\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_\text{д}\right) - p(u)\right]\left[g - \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} + \lambda u\right)\right] d\Gamma \geqslant 0 \ \forall g \in K \tag{6.22}$$

(конечно, при этом еще $\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} + \lambda u \in K$).

§ 7. Теоремы существования оптимального управления

7.1. План дальнейшего исследования

Во всех задачах, рассмотренных до сих пор в этой главе, состояние системы было *аффинной функцией управления.*

Мы изучим теперь примеры таких задач, в которых состояние системы является *нелинейной функцией управления.*

Теоремы существования оптимального управления, которые до сих пор были тривиальными, становятся в таких задачах далеко не очевидными: необходимо пользоваться теми же методами, что и при решении *нелинейных граничных задач.* Это и составляет предмет исследований в настоящем параграфе; в следующем параграфе будут получены необходимые условия оптимальности первого порядка.

7.2. Распределенное управление

Пусть Ω — то же множество, что и в предыдущих параграфах, а A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка.

Положим

$$\mathcal{U}_+ = \{v \mid v \in L^\infty(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}, \tag{7.1}$$

$$\mathcal{U}_\partial \subseteq \mathcal{U}_+,\ \mathcal{U}_\partial \text{ — выпуклое подмножество в } L^\infty(\Omega), \text{ замкнутое в *-слабой топологии}^{1)} \tag{7.2}$$

Для каждого элемента $v \in \mathcal{U}_+$ будем обозначать через $y(v)$ решение задачи

$$Ay(v) + vy(v) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7.3}$$

$$y(v)\,|_\Gamma = 0, \tag{7.4}$$

где f — данная функция, например, из пространства $L^2(\Omega)$.

Замечание 7.1. Задача (7.3), (7.4) имеет единственное решение. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить теорему 1.1 в случае, когда $V = H_0^1(\Omega)$ и

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0\varphi\psi\, dx + \int_\Omega v\varphi\psi\, dx; \tag{7.5}$$

тогда (если выполнены предположения (2.3)) в силу того, что $v \in \mathcal{U}_+$

$$a(\psi, \psi) \geqslant \alpha \|\psi\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{7.6}$$

---

[1]) Это означает, что если $\{v_n\} \in \mathcal{U}_\partial$, $\int_\Omega v_n h\, dx \to \int_\Omega vh\, dx$ $\forall h \in L^1(\Omega)$, то $v \in \mathcal{U}_\partial$. Заметим, что множество $\mathcal{U}_+$ обладает этим свойством.

Замечание 7.2. Решение $y(v)$ задачи (7.3), (7.4) принадлежит пространству $H_0^1(\Omega)$, а если коэффициенты в выражении для оператора A и граница Γ достаточно гладки, то справедливо даже более сильное утверждение:

$$y(v) \in H^2(\Omega) \tag{7.7}$$

(так как из (7.3) следует, что $Ay(v) = f - vy(v) \in L^2(\Omega)$). Отображение $v \to y(v)$ является *нелинейным*.

Замечание 7.3. Все, что излагается далее в этом разделе, применимо без существенных изменений:

— в случае граничных условий, отличных от (7.4) и приводящих к корректно поставленной задаче;

— в случае, когда A — эллиптический оператор порядка выше второго.

Выберем в качестве функции стоимости либо

$$J(v) = \int_\Omega |y(v) - z_д|^2 dx + \nu \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \nu > 0, \quad z_д \in L^2(\Omega), \tag{7.8}$$

либо [1])

$$J(v) = \int_\Gamma \left| \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - z_д \right|^2 d\Gamma + \nu \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \nu > 0, \quad z_д \in L^2(\Omega). \tag{7.9}$$

Теорема 7.1. *Если выполнены условия* (2.3) *и* (7.2), *а функция стоимости имеет вид* (7.8) *или* (7.9) [2]), *то существует по крайней мере одно оптимальное управление, т. е. такой элемент* $u \in \mathcal{U}_\partial$, *что*

$$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Доказательство. Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность, т. е. $J(v_n) \to \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$; обозначим $y(v_n) = y_n$.

Из неравенства (7.6) вытекает (поскольку $v_n \in \mathcal{U}_+$), что

$$\|y_n\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{const}, \tag{7.10}$$

а из выражения для функции $J(v)$ следует, что

$$\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{const}. \tag{7.11}$$

Таким образом, можно извлечь такую подпоследовательность — обозначим ее тоже через $\{y_n, v_n\}$,— что

$$y_n \to y \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ (или в } H_0^1(\Omega)), \tag{7.12}$$

$$v_n \to u \text{ *-слабо в } L^\infty(\Omega). \tag{7.13}$$

Тогда в силу (7.2) имеем $u \in \mathcal{U}_\partial$.

---

[1]) Если выполняется соотношение (7.7).

[2]) Разумеется, возможен и иной выбор функции $J(v)$.

Мы покажем, что $y = y(u)$. Но $Ay_n + v_n y_n = f$ и, согласно (7.12), $Ay_n \to Ay$ в пространстве $H^{-1}(\Omega)$. Поэтому если мы убедимся, что

$$v_n y_n \to uy \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(\Omega), \tag{7.14}$$

то будет доказано, что

$$Ay + uy = f, \qquad y \in H_0^1(\Omega),$$

а тогда $y = y(u)$.

Для того чтобы проверить соотношение (7.14), воспользуемся следующими соображениями. Известно (аналог теоремы Асколи, принадлежащий Реллиху; см., например, Лионс и Мадженес [1, гл. 1]), что *вложение* $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *вполне непрерывно, если множество* Ω *ограничено* (а вложение $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ вполне непрерывно, если множество Ω ограничено и имеет достаточно гладкую границу).

Из (7.12) следует, что

$$y_n \to y \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega), \tag{7.15}$$

и поэтому если $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, то

$$\int_\Omega v_n y_n \varphi\, dx = \int_\Omega v_n y \varphi\, dx + \int_\Omega v_n (y_n - y)\varphi\, dx \to \int_\Omega uy\varphi\, dx$$

(отсюда и вытекает (7.14)), так как

$$\left| \int_\Omega v_n (y_n - y)\varphi\, dx \right| \leqslant c \| y_n - y \|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Таким образом, $y = y(u)$, и, следовательно,

$$J(u) \leqslant \underline{\lim}\, J(v_n) = \inf_{v \in \mathscr{U}_\partial} J(v).$$

Это и означает, что u — оптимальное управление.

Замечание 7.4. Слагаемое $\nu \| v \|_{L^\infty(\Omega)}$ в выражении для функции $J(v)$ будет, конечно, лишним, если предположить, что множество $\mathscr{U}_\partial$ ограничено в пространстве $L^\infty(\Omega)$.

Замечание 7.5. Системы, описываемые уравнениями вида (7.3), иногда называют «системами билинейного типа» (так как отображение $(v, y) \to vy$ билинейно).

Можно доказать теоремы существования, аналогичные теореме 7.1, для «небилинейных» систем; мы приведем пример такой теоремы в разд. 7.4.

Замечание 7.6. (Нерешенная задача.) Пусть ξ_0, ξ_1 — данные функции из пространства $L^\infty(\Omega)$, причем

$$0 < \beta \leqslant \xi_0(x) \leqslant \xi_1(x) \quad \text{почти всюду в} \ \Omega, \tag{7.16}$$

и пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \xi_0(x) \leqslant v(x) \leqslant \xi_1(x) \text{ почти всюду в } \Omega\}. \quad (7.17)$$

Для любой функции $v \in \mathcal{U}_\partial$ положим

$$A(v)\psi \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,v(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) + a_0(x)\psi, \quad (7.18)$$

где a_0, a_{ij} удовлетворяют условиям (2.3).

Определим состояние $y(v)$ системы как решение задачи

$$A(v)y(v) = f, \quad y(v)|_\Gamma = 0, \quad (7.19)$$

где f — данная функция из пространства $L^2(\Omega)$. Задача (7.19) имеет единственное решение. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить теорему 1.1 в случае, когда $V = H_0^1(\Omega)$, а форма $a(\varphi, \psi)$ заменена на

$$a_v(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\,v(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_0\varphi\psi\,dx; \quad (7.20)$$

тогда в силу (7.17) и (2.3)

$$a_v(\psi, \psi) \geqslant \alpha\beta \int_\Omega |\operatorname{grad}\psi|^2\,dx + \alpha\int_\Omega \psi^2\,dx. \quad (7.21)$$

Пусть функция стоимости имеет, например, вид

$$J(v) = \int_\Omega [y(v) - z_\text{д}]^2\,dx. \quad (7.22)$$

Нам не известно, существует ли такое управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, что

$$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Трудность решения этого вопроса заключается в следующем. Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность, а $y_n = y(v_n)$. В силу (7.21) $\|y_n\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{const}$, и, следовательно, можно считать (как и при доказательстве теоремы 7.1), что $y_n \to y$ слабо в $H^1(\Omega)$, а $v_n \to u$ $*$-слабо в $L^\infty(\Omega)$.

Но этого *недостаточно* для перехода к пределу в выражениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}v_n\frac{\partial y_n}{\partial x_j}\right).$$

Представляются возможными следующие три подхода к решению сформулированной задачи.

(i) Записать уравнение $A(v)\,y(v) = f$ в виде системы первого порядка и рассматривать затем эту задачу как частный случай некоторой другой, более общей задачи. Такой подход был развит

Чезари [1], продолжившим работы Юнга [1], Мак-Шейна [1], Гамкрелидзе [1], Варги [1] [1]).

(ii) Регуляризировать управление: если, например, предположить, что $\mathcal{U}_\delta$ — выпуклое множество функций, удовлетворяющих условию (7.17), замкнутое и ограниченное в пространстве $H^1(\Omega)$, то нетрудно установить теорему существования оптимального управления, ибо тогда можно считать, что $v_n \to u$ сильно в $L^2(\Omega)$.

(iii) Возмутить оператор $A(v)$; этот подход излагается в разд. 7.3.

7.3. Сингулярное возмущение системы

Пусть [2])

$$\left.\begin{array}{l} b(\varphi, \psi) \text{ — непрерывная билинейная форма на } H_0^2(\Omega); \\ b(\psi, \psi) \geqslant \gamma \|\psi\|^2_{H_0^2(\Omega)}, \quad \gamma > 0, \quad \forall \psi \in H_0^2(\Omega), \end{array}\right\} \tag{7.23}$$

а $B \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega); H^{-2}(\Omega))$ — соответствующий оператор. Если, например,

$$b(\varphi, \psi) = \int_\Omega \Delta\varphi\, \Delta\psi\, dx,$$

то можно показать, что эта форма удовлетворяет условиям (7.23) и $B = \Delta^2$.

Предположим, что состояние системы определяется как решение $y_\varepsilon(v)$ задачи

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon B y_\varepsilon(v) + A(v)\, y_\varepsilon(v) = f, \\ y_\varepsilon(v) \in H_0^2(\Omega) \left(\text{т. е. } y_\varepsilon|_\Gamma = 0, \ \dfrac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0\right), \end{array}\right\} \tag{7.24}$$

где $\varepsilon > 0$ —«малый» параметр.

Говорят, что оператор $\varepsilon B + A(v)$ получен из оператора $A(v)$ *сингулярным возмущением.*

Заметим, что задача (7.24) имеет единственное решение. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить теорему 1.1 в случае, когда $V = H_0^2(\Omega)$, а форма $a(\varphi, \psi)$ заменена на

$$\varepsilon b(\varphi, \psi) + a_v(\varphi, \psi) \equiv a_{\varepsilon, v}(\varphi, \psi); \tag{7.25}$$

тогда

$$a_{\varepsilon,v}(\psi, \psi) \geqslant \varepsilon \|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad c > 0. \tag{7.26}$$

---

[1]) См. также в связи с этим работы Экеланда [1], Иоффе и Тихомирова [1].

[2]) Рассматривается задача, сформулированная в замечании 7.6.— *Прим. перев.*

Изучение задачи (7.24) оправдано (в определенном смысле) тем, что справедливы следующие результаты:

Теорема 7.2. *Для фиксированного* $v \in \mathcal{U}_\partial$

$$y_\varepsilon(v) \to y(v) \text{ в } H_0^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{7.27}$$

Теорема 7.3. *Для фиксированного* $\varepsilon > 0$ *существует оптимальное управление, т. е. такой элемент* $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial$, *что*

$$\int_\Omega [y_\varepsilon(u_\varepsilon) - z_{\text{д}}]^2 dx \leqslant \int_\Omega [y_\varepsilon(v) - z_{\text{д}}]^2 dx \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{7.28}$$

Замечание 7.7. Пусть

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Omega [y_\varepsilon(v) - z_{\text{д}}]^2 dx; \; j_\varepsilon = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J_\varepsilon(v); \; j = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v).$$

Из теоремы 7.2 следует, что $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} \; j_\varepsilon \leqslant j$, однако неизвестно, будет ли $j_\varepsilon \to j$. Рассматривая задачу (7.24) вместо исходной, мы, таким образом, руководствуемся эвристическими соображениями.

Доказательство теоремы 7.2. Утверждение теоремы 7.2 представляет собой частный случай общего результата теории сингулярных возмущений, принадлежащего Юэ [1].

Согласно неравенству (7.26) (будем писать y_ε, y вместо $y_\varepsilon(v)$, $y(v)$),

$$\sqrt{\varepsilon} \, \| y_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)} \leqslant \text{const}, \quad \| y_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \text{const}. \tag{7.29}$$

Таким образом, можно считать, рассматривая соответствующую подпоследовательность, что $y_\varepsilon \to z$ слабо в пространстве $H_0^1(\Omega)$. С учетом оценок (7.29) это достаточно для того, чтобы перейти к пределу в равенстве

$$\varepsilon b(y_\varepsilon, \psi) + a_v(y_\varepsilon, \psi) = (f, \psi).$$

Тогда

$$a_v(z, \psi) = (f, \psi).$$

Следовательно, $z = y$ и $y_\varepsilon \to y$ слабо в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Но тогда

$$\varepsilon b(y_\varepsilon, y_\varepsilon) + a_v(y_\varepsilon - y, y_\varepsilon - y) = -a_v(y_\varepsilon, y) + a_v(y, y) \to 0,$$

откуда и следует утверждение (7.27).

Доказательство теоремы 7.3. Для простоты записи будем опускать индекс ε. Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность и $y_n = y(v_n)$. Так как число ε фиксировано, то из неравенства (7.26) следует, что $\| y_n \|_{H^2(\Omega)} \leqslant \text{const}$.

Таким образом, можно считать, рассматривая соответствующие подпоследовательности, что $v_n \to u$ $*$-слабо в пространстве $L^\infty(\Omega)$ и $y_n \to y$ слабо в пространстве $H^2(\Omega)$. Тогда $\partial y_n/\partial x_i \to \partial y/\partial x_i$ слабо в пространстве $H^1(\Omega)$, а значит, сильно в пространстве $L^2(\Omega)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}v_n\frac{\partial y_n}{\partial x_j}\right) \to \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) \text{ в } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Дальше рассуждаем так же, как и при доказательстве теоремы 7.1.

Замечание 7.8. Предыдущее доказательство применимо и в случае систем, описываемых эллиптическими операторами порядка $2m$, если управление находится под знаком производных порядка не выше $2m-1$.

7.4. Граничное управление

Пусть Ω — ограниченное открытое множество с регулярной границей Γ, и пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in L^\infty(\Gamma);\ 0 < \beta \leqslant \xi_0(x) \leqslant v(x) \leqslant \xi_1(x) \text{ почти всюду на } \Gamma;\ \xi_0, \xi_1 \in L^\infty(\Gamma)\}. \tag{7.30}$$

Предположим, что состояние системы определяется как решение $y(v)$ уравнения [1])

$$Ay(v) = f, \tag{7.31}$$

где f — данная функция пространства $L^2(\Omega)$, с граничным условием

$$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} + v|y(v)|^{\rho-2}y(v) = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{7.32}$$

где $\rho \geqslant 2$ — фиксированное число.

Задачу (7.31), (7.32) нужно, конечно, поставить более точно. Введем пространство

$$V = \{\psi \mid \psi \in H^1(\Omega),\ \psi|_\Gamma \in L^\rho(\Gamma)\}\ ^{2)} \tag{7.33}$$

с нормой

$$\|\psi\|_V = \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + c\|\psi\|_{L^\rho(\Gamma)},\quad c > 0^{3)}. \tag{7.34}$$

Пространство V банахово.

---

[1]) Оператор A задан формулой (2.4) в предположениях (2.3).

[2]) Отметим, что если $n \geqslant 3$, то $\psi|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L^q(\Gamma)$, где q определяется из условия $1/q = 1/2 - 1/2(n-1)$; если же $n < 3$, то $\psi|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L^q(\Gamma)$ при любом конечном q. В случае $n < 3$ или $q \geqslant \rho$ можно выбрать $V = H^1(\Omega)$.

[3]) Если $q \geqslant \rho$, то можно взять $c = 0$.

Для элементов $\varphi,\ \psi \in V$ определим форму

$$a_v(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 \varphi \psi\, dx + \int_{\Gamma} v |\varphi|^{\rho-2} \varphi \psi\, d\Gamma. \tag{7.35}$$

Тогда задачу (7.31), (7.32) можно сформулировать по-другому: найти решение $y(v) \in V$ уравнения

$$a_v(y(v), \psi) = \int_{\Omega} f \psi\, dx \qquad \forall \psi \in V. \tag{7.36}$$

Замечание 7.9. Уравнение (7.36), разумеется, *нелинейно*, так как нелинейно отображение $\varphi \to a_v(\varphi, \psi)$.

Теорема 7.4. *Если выполнены условия* (2.3) *и множество* $\mathcal{U}_\partial$ *задано соотношением* (7.30), *то для любого фиксированного элемента* $v \in \mathcal{U}_\partial$ *уравнение* (7.36) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Фактически это утверждение представляет собой частный случай общих результатов теории монотонных операторов.

Полагая

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 \varphi \psi\, dx,$$

получаем

$$a_v(\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2) - a_v(\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) = a(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) + \\ + \int_{\Gamma} v[\theta(\varphi_1) - \theta(\varphi_2)](\varphi_1 - \varphi_2)\, d\Gamma \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in V, \tag{7.37}$$

где $\theta(\varphi) = |\varphi|^{\rho-2}\varphi$. Так как $[\theta(\varphi_1) - \theta(\varphi_2)](\varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$, то

$$a_v(\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2) - a_v(\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0. \tag{7.38}$$

Последнее неравенство означает *монотонность* оператора $V \to V'$, порождаемого формой $a(\varphi, \psi)$.

На самом деле справедливо даже более сильное утверждение (*строгая монотонность*):

$$a_v(\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2) - a_v(\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant \alpha \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{7.39}$$

Неравенство (7.38) и свойство *коэрцитивности*, означающее, что

$$\frac{a_v(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_V} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|\varphi\|_V \to +\infty\,^{1)}, \tag{7.40}$$

[1]) Если $V = H^1(\Omega)$, то в соотношении (7.30) достаточно считать $\xi_0(x) \geqslant 0$ почти всюду.

влекут за собой *существование* элемента $y(v)$, удовлетворяющего уравнению (7.36). (Относительно более общих результатов см. Минти [2], Браудер [2], Лере и Лионс [1], Брезис [1].)

Наконец, *единственность* такого элемента $y(v)$ непосредственно следует из неравенства (7.39).

Пусть, например,

$$J(v)=\int_{\Omega}[y(v)-z_{\text{д}}]^2\,dx, \tag{7.41}$$

где $z_{\text{д}}$ — данный элемент пространства $L^2(\Omega)$.

Теорема 7.5. *Пусть выполнены условия* (2.3), *множество* $\mathcal{U}_\partial$ *задано соотношением* (7.30), *а* $y(v)$ — *решение уравнения* (7.36). *Если функция стоимости задана формулой* (7.41), *то существует по крайней мере одно оптимальное управление* $u\in\mathcal{U}_\partial$.

Доказательство. Пусть снова $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность, а $y_n=y(v_n)$. Так как

$$a_v(\varphi,\varphi)\geqslant c\,\|\varphi\|_V^2,$$

где $c>0$ — константа, не зависящая от v, то $\|y_n\|_V\leqslant\text{const}$.

Поскольку множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено и замкнуто в смысле $*$-слабой топологии пространства $L^\infty(\Omega)$, можно считать, рассматривая соответствующие подпоследовательности, что $y_n\to y$ слабо в пространстве V, а $v_n\to u$ $*$-слабо в пространстве $L^\infty(\Omega)$ и $u\in\mathcal{U}_\partial$. Таким образом,

$$y_n\to y\quad\text{слабо в}\quad L^1(\Omega); \tag{7.42}$$

$$\left.\begin{aligned} y_n|_\Gamma\to y|_\Gamma &\quad\text{слабо в}\quad L^\rho(\Gamma),\\ \theta(y_n)\to\theta(y) &\quad\text{слабо в}\quad L^{\rho'}(\Gamma),\end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

где $1/\rho+1/\rho'=1$.

Но в силу (7.42) и теоремы о следах (§ 3 гл. 1)

$$y_n|_\Gamma\to y|_\Gamma\quad\text{слабо в}\quad H^{1/2}(\Gamma). \tag{7.44}$$

Кроме того, вложение $H^{1/2}(\Gamma)\to L^2(\Gamma)$ вполне непрерывно (см., например, Лионс и Мадженес [1, гл. 1]). Поэтому из (7.44) следует, что

$$y_n|_\Gamma\to y|_\Gamma\quad\text{сильно в}\quad L^2(\Gamma), \tag{7.45}$$

и можно считать, что

$$y_n|_\Gamma\to y|_\Gamma\quad\text{почти всюду на}\quad\Gamma. \tag{7.46}$$

Из утверждений (7.46) и (7.43) вытекает, что $\theta(y_n) \to \theta(y)$ сильно в $L^{\rho'-\varepsilon}(\Gamma)$ (где $\varepsilon > 0$), а потому

$$\int_\Gamma v_n \theta(y_n) \psi \, d\Gamma \to \int_\Gamma u\theta(y) \psi \, d\Gamma \qquad \forall \psi \in V.$$

Итак,

$$a_v(y, \psi) = \int_\Omega f\psi \, dx \qquad \forall \psi \in V,$$

откуда $y = y(u)$. Тогда

$$J(u) \leqslant \underline{\lim} \, J(v_n) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v),$$

т. е. u — оптимальное управление.

7.5. Управление системами, описываемыми односторонними граничными задачами

Мы видели, что отыскание оптимального управления системами, описываемыми линейными уравнениями с частными производными эллиптического типа, приводит к односторонним граничным задачам. Можно также поставить задачу о нахождении оптимального управления системой, которая сама описывается *односторонней граничной задачей.* Мы приведем в этом направлении (еще мало исследованном) только теорему существования для одного частного случая.

Пусть A — эллиптический оператор второго порядка. Рассмотрим множество

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \ v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Gamma\}, \tag{7.47}$$

и пусть

$$\mathcal{U} = L^2(\Gamma), \quad \mathcal{U}_\partial \subset \mathcal{U}. \tag{7.48}$$

Предположим, что состояние системы определяется как решение $y(v) \in K$ неравенства

$$a(y(v), k - y(v)) \geqslant \int_\Gamma v(k - y(v)) \, d\Gamma \quad \forall k \in K. \tag{7.49}$$

Другими словами,

$$\left.\begin{aligned} &Ay(v) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &y(v) \geqslant 0, \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} \geqslant v \quad \text{почти всюду на } \Gamma, \\ &\left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - v\right) y(v) = 0 \quad \text{почти всюду на } \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{7.50}$$

Функцию стоимости возьмем, например, в виде

$$\left.\begin{aligned} &J(v) = \int_\Omega [y(v) - z_д]^2\, dx + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \\ &N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U}),\ N \geqslant \nu I,\ \nu > 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.51}$$

В рассматриваемом случае справедлива

Теорема 7.6. *Если состояние системы $y(v)$ и функция стоимости $J(v)$ заданы соответственно с помощью соотношений* (7.49) *и* (7.51), *то существует по крайней мере одно оптимальное управление.*

Доказательство. Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность и $y(v_n) = y_n$.

Так как $N \geqslant \nu I$, то последовательность $\{v_n\}$ принадлежит ограниченному подмножеству пространства $L^2(\Gamma)$, а тогда последовательность $\{y_n\}$ принадлежит ограниченному подмножеству пространства $H^1(\Omega)$. Заметим, что отображение $\psi \to \psi|_\Gamma$ пространства $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Gamma)$ *вполне непрерывно.*

Поэтому из последовательности $\{v_n, y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — обозначим ее тоже через $\{v_n, y_n\}$,— что

$$\begin{aligned} &y_n \to y \quad &&\text{слабо в} \quad H^1(\Omega),\ y \in K, \\ &y_n|_\Gamma \to y|_\Gamma \quad &&\text{сильно в} \quad L^2(\Gamma), \\ &v_n \to u \quad &&\text{слабо в} \quad H^1(\Omega), \\ &v_n|_\Gamma \to u|_\Gamma \quad &&\text{сильно в} \quad L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Но тогда

$$\int_\Gamma v_n y(v_n)\, d\Gamma \to \int_\Gamma uy\, d\Gamma,$$

и так как

$$\underline{\lim}\, a(y_n, y_n) \geqslant a(y, y),$$

то из неравенства (7.49), справедливого при каждом $v = v_n$, получаем

$$a(y, k - y) \geqslant \int_\Gamma u(k - y)\, d\Gamma \qquad \forall k \in K,\ y \in K,$$

откуда $y = y(u)$.

Следовательно, $\underline{\lim}\, J(v_n) \geqslant J(u)$, т. е. u — оптимальное управление.

§ 8. Необходимые условия первого порядка

8.1. Формулировка теоремы

Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid x \to v(x) \text{ — такая измеримая функция } \Omega \to \mathbf{R}^m, \text{ что } v(x) \in K \text{ почти всюду, } K \text{ — выпуклое замкнутое множество в пространстве } \mathbf{R}^m\}; \tag{8.1}$$

оператор A задан формулой (2.4) в предположениях (2.3). Пусть

$$\left.\begin{array}{l} x, \lambda \to b(x, \lambda) \text{ — непрерывная ограниченная} \\ \text{функция } \overline{\Omega} \times K \to \mathbf{R}, \end{array}\right\} \tag{8.2}$$

причем $0 < \beta_0 \leqslant b(x, \lambda) \leqslant \beta_1 \ \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall \lambda \in K$.

Для $v \in \mathcal{U}_\partial$ обозначим через $b(x, v)$ функцию $x \to b(x, v(x))$, а через $A(v)$ — оператор, определенный равенством

$$A(v)\psi \equiv A\psi + b(x, v)\psi \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega). \tag{8.3}$$

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} x, \lambda \to f(x, \lambda) \text{ — непрерывная ограниченная} \\ \text{функция } \overline{\Omega} \times K \to \mathbf{R}. \end{array}\right\} \tag{8.4}$$

Предположим, что для данного управления $v \in \mathcal{U}_\partial$ состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$A(v)y(v) = f(x, v) \text{ в } \Omega, \tag{8.5}$$

$$y(v) \in H_0^1(\Omega) \ (\text{т. е. } y(v)|_\Gamma = 0). \tag{8.6}$$

В силу предположения (8.2) задача (8.5), (8.6) имеет единственное решение.

Будем считать, что функция стоимости задана формулой

$$J(v) = \int_\Omega hy(v)\,dx, \tag{8.7}$$

где h — данная функция пространства $L^2(\Omega)$.

Сопряженный оператор $A^*(v)$ вводится равенством

$$A^*(v)\psi \equiv A^*\psi + b(x, v)\psi \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega). \tag{8.8}$$

Тогда сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$A^*(v)p(v) = h, \quad p(v) \in H_0^1(\Omega). \tag{8.9}$$

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия* (8.1), (8.2), (8.4), *оператор* $A(v)$ *задан формулой* (8.3) *в предположениях* (2.3), *а функция стоимости имеет вид* (8.7). *Если существует оптималь-*

ное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, *то почти всюду на* Ω

$$p(x; u(x))\,[f(x, u(x)) - b(x, u(x))\,y(x; u(x))] =$$
$$= \inf_{k \in K} p(x; u(x))\,[f(x, k) - b(x, k)\,y(x; u(x))]. \qquad (8.10)$$

Замечание 8.1. Если $h \geqslant 0$ в Ω (т. е. h — неотрицательная мера на Ω), то, согласно принципу максимума для эллиптических уравнений [1]), $p(x; u(x)) > 0$, а тогда равенство (8.10) принимает вид

$$f(x, u(x)) - b(x, u(x))\,y(x; u(x)) =$$
$$= \inf_{k \in K} [f(x, k) - b(x, k)\,y(x; u(x))]. \qquad (8.11)$$

8.2. Доказательство теоремы

8.2.1. Алгебраическое преобразование. Будем пользоваться обозначением

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx.$$

Пусть $u \in \mathcal{U}_\partial$ — оптимальное управление, так что

$$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Тогда (см. (8.7))

$$(h, y(v) - y(u)) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \qquad (8.12)$$

Согласно (8.9) (где взято $v = u$),

$$\begin{aligned}(h, y(v) - y(u)) &= (p(u), A(u)y(v) - A(u)y(u)) = \\ &= (p(u), A(v)y(v) - A(u)y(u)) + \\ &\quad + (p(u), (A(u) - A(v))y(v)) = \\ &= (p(u), f(v) - f(u)) + (p(u), (A(u) - A(v))\,y(u)) + \\ &\quad + (p(u), (A(u) - A(v))\,(y(v) - y(u))).\end{aligned}$$

Поэтому неравенство (8.12) эквивалентно неравенству

$$(p(u), f(v) - f(u)) - (p(u), (A(v) - A(u))y(u)) -$$
$$- (p(u), (A(v) - A(u))(y(v) - y(u))) \geqslant 0 \ \ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \qquad (8.13)$$

8.2.2. Применение неравенства (8.13). Поскольку не было сделано никаких предположений о дифференцируемости функций $f(x, \lambda)$ и $b(x, \lambda)$, мы не можем заменить в неравенстве (8.13) v

---

[1]) Не смешивать с принципом максимума Понтрягина!

на $u + \theta(v - u)$, $\theta \in (0, 1)$, разделить это неравенство на θ и устремить θ к нулю.

Классическая идея вариационного исчисления (уже применявшаяся в разд. 2.5) заключается в том, чтобы в качестве v брать

$$v_j = (1 - \chi_j) u + \chi_j k, \qquad k \in K, \tag{8.14}$$

где χ_j — характеристическая функция некоторого куба с центром в точке $x_0 \in \Omega$ [1]). Разделив неравенство (8.13) на $\int\limits_\Omega \chi_j\, dx$, запишем его в виде

$$b_j - c_j - d_j \geqslant 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\int\limits_\Omega \chi_j\, dx} (p(u), f(v_j) - f(u)), \\ c_j &= \frac{1}{\int\limits_\Omega \chi_j\, dx} (p(u), (A(v_j) - A(u))\, y(u)), \\ d_j &= \frac{1}{\int\limits_\Omega \chi_j\, dx} (p(u), (A(v_j) - A(u))\, (y(v_j) - y(u))). \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

Пусть E — совокупность точек множества Ω, являющихся точками Лебега для функций $x \to p(x, u(x))$, $x \to f(x, u(x))$, $x \to b(x, u(x))$, $x \to y(x, u(x))$. Тогда если $x_0 \in E$, то при $j \to \infty$

$$b_i \to p(x_0, u(x_0))\, [f(x_0, k) - f(x_0, u(x_0))];$$
$$c_j \to p(x_0, u(x_0))\, [b(x_0, k) - b(x_0, u(x_0))]\, y(x_0, u(x_0)).$$

Следовательно, теорема будет доказана (поскольку дополнение множества E имеет меру нуль), если мы убедимся, что $d_j \to 0$.

8.2.3. Доказательство соотношения $d_j \to 0$. Справедливо неравенство (см. Стампаккья [2, теорема 4.2])

$$\| y(v) \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c, \tag{8.16}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $v \in \mathcal{U}_\partial$; аналогичное неравенство выполняется и для $p(v)$.

Полагая $\mu_j = \int\limits_\Omega \chi_j\, dx$ и обозначая через σ_j носитель функции χ_j, получаем

$$| d_j | \leqslant \frac{c}{\mu_j} \int\limits_{\sigma_j} | b(v_j) - b(u) | \cdot | y(v_j) - y(u) |\, dx$$

---

[1]) При $j \to \infty$ эти кубы стягиваются в точку x_0.— *Прим. перев.*

(различные константы будем обозначать одной и той же буквой c), откуда

$$|d_j| \leqslant \frac{c}{\mu_j^{1/2}} \left(\int_{\sigma_j} |y(v_j) - y(u)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{8.17}$$

Положим

$$\psi_j = y(v_j) - y(u). \tag{8.18}$$

Тогда (см. (8.5))

$$A(u)\psi_j = f(v_j) - f(u) - (b(v_j) - b(u))\, y(v_j) \equiv g_j.$$

Таким образом,

$$a(\psi_j, \psi_j) + \int_\Omega b(x, u)\psi_j^2\, dx = \int_\Omega g_j \psi_j\, dx,$$

откуда

$$\|\psi_j\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\,[\|f(v_j) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|(b(v_j) - b(u))\, y(v_j)\|_{L^2(\Omega)}]. \tag{8.19}$$

В силу (8.16) второе слагаемое правой части неравенства (8.19) не превосходит величины $c\|b(v_j) - b(u)\|_{L^2(\Omega)}$, а потому, согласно (8.2) и (8.4),

$$\|\psi_j\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\mu_j^{1/2}. \tag{8.20}$$

По теореме Соболева [1] в этом случае существует такое число $r > 2$, что

$$\|\psi_j\|_{L^r(\Omega)} \leqslant c\mu_j^{1/2}. \tag{8.21}$$

Применяя неравенство Гёльдера, из соотношения (8.17) можно получить

$$|d_j| \leqslant \frac{c}{\mu_j^{1/2}} \|\psi_j\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{\sigma_j} dx\right)^{s/2}, \quad \frac{1}{s} = 1 - \frac{2}{r},$$

а потому $|d_j| \leqslant c\mu_j^{s/2}$. Отсюда и следует доказываемое утверждение.

Замечание 8.2. При выводе оценки (8.16) существенно, что A — оператор *второго* порядка.

Примечания

Метод доказательства теоремы 2.1 часто используется в вариационном исчислении; см., например, книгу Хестенса [1].

Мы старались на возможно более простых примерах продемонстрировать разнообразные ситуации. По поводу общего случая систем, описываемых дифференциальными операторами эллиптического типа произвольного порядка с общими граничными условиями, см. Лионс [1, статья II].

Равенство (1.31) можно рассматривать как аналог *принципа максимума Понтрягина*, изложенного (для случая систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями) в книге Понтрягина, Болтянского, Гамкрелидзе и Мищенко [1].

Свойство *релейности* оптимального управления послужило исходным пунктом многочисленных исследований систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако «эллиптический» случай, по-видимому, до сих пор не рассматривался. Результат, полученный в тексте, следует из тонкой классической *теоремы единственности для задачи Коши* (см. доказательство леммы 4.1). Аналогичная ситуация встретится нам и при изучении эволюционных уравнений. Относительно проблемы единственности решения задачи Коши для эллиптических уравнений см. Ароншайн [1], Кордес [1], Гейнц [1], Ландис [1], Мюллер [1], Педерсон [1].

Согласно теореме 5.1, для данного элемента $g \in H^{-1}(\Gamma_2)$ существует такое управление u, что элемент $\partial y(u)/\partial \nu_A$ сколь угодно близок (в смысле $H^{-1}(\Gamma_2)$) к элементу g. Численные аппроксимации в такого рода задачах изучаются в книге Латтеса и Лионса [1].

Доказательство того, что $\partial y(u)/\partial \nu_A \in H^{-1}(\Gamma)$, если $u \in L^2(\Gamma)$ (см. разд. 5.2), в тексте не приводится. Более общие результаты такого характера содержатся в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 2]. Другой метод (менее общий, но более элементарный) получения подобных результатов предложил Нечас [1] (применив одно тождество, доказанное Реллихом).

Одна задача типа рассмотренной в замечании 7.6 была изучена (в связи с ее физическими приложениями) Лурье [1]. Он рассматривал систему, описываемую двумя уравнениями второго порядка эллиптического типа, предполагая, что оптимальное управление существует. Полученные им необходимые условия оптимальности аналогичны приведенным в § 8.

Относительно результатов, более общих, чем описанные в разд. 7.4 (для «параболического» случая; однако все рассуждения справедливы и в «эллиптическом» случае), см. Лионс [2].

Теорема 8.1 представляет собой аналог *принципа максимума Понтрягина*. Как отмечено в тексте, результаты такого типа, вероятно, довольно трудно получить в более общих случаях; например, если операторы имеют порядок выше 2 или если рассматривается система уравнений. Предлагаемые для этих случаев доказательства должны восприниматься с осторожностью, поскольку они используют в качестве гипотез некоторые свойства регулярности, а обоснование этих свойств неизвестно. Конечно, подобная «аксиоматизация» доказательства теоремы 8.1 тривиальна.

Задачи вариационного типа с управлением, входящим в коэффициенты, рассматривались Пуччи [1], [2].

ГЛАВА 3

Управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными параболического типа

§ 1. Эволюционные уравнения

1.1. Исходные предположения

Пусть, как и в § 1 гл. 2, V и H — два данных гильбертовых пространства. Обозначим через V' и H' пространства, двойственные соответственно к пространствам V и H, причем H' отождествим с H. Будем считать, что $V \subset H \subset V'$.

Переменная t обозначает *время*. Предполагается, что $t \in (0, T)$, где $T < \infty$; иногда будет рассматриваться и случай $T \to +\infty$.

Пусть дано семейство билинейных форм, непрерывных на пространстве V:

$$\varphi, \psi \to a(t; \varphi, \psi), \qquad t \in (0, T).$$

Относительно этого семейства предполагается, что

$$\left.\begin{array}{c} \forall \varphi, \psi \in V \text{ функция } t \to a(t; \varphi, \psi) \text{ измерима на } (0, T), \\ |a(t; \varphi, \psi)| \leqslant c \|\varphi\| \cdot \|\psi\|; \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{существует такое число } \lambda, \text{ что}^{1)} \\ a(t; \varphi, \psi) + \lambda |\varphi|^2 \geqslant \alpha \|\varphi\|^2, \ \alpha > 0, \\ \forall \varphi \in V, \ \forall t \in (0, T). \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Для каждого t можно записать (ср. с (1.6) гл. 2)

$$a(t; \varphi, \psi) = (A(t)\varphi, \psi), \quad A(t)\varphi \in V', \tag{1.3}$$

где скобки обозначают скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно V' и V.

Введем теперь (как в разд. 2.5 гл. 2, но при $S = (0, T)$ и $E = V$) пространство $L^2(0, T; V)$ функций $t \to f(t)$, отображающих интервал $(0, T)$ в пространство V, измеримых и таких, что

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Аналогично определяется пространство $L^2(0, T; V')$. Заметим, что

$$A(t) \in \mathscr{L}(L^2(0, T; V); L^2(0, T; V')). \tag{1.4}$$

---

[1]) $|\varphi| = \|\varphi\|_H$, $\|\varphi\| = \|\varphi\|_V$.

Действительно, если $f \in L^2(0, T; V)$, то $A(t) f \in V'$. Функция $t \to A(t)f(t)$, как легко проверить, измерима и (в силу (1.1)) удовлетворяет условию

$$\| A(t) f(t) \|_{V'} \leqslant c \| f(t) \|_V,$$

откуда и следует утверждение (1.4).

Для функции $f \in L^2(0, T; V)$ можно определить производную df/dt следующим образом. Введем сначала пространство распределений на интервале $(0, T)$ со значениями в пространстве V (Шварц [2]):

$$\mathscr{D}'((0, T); V) = \mathscr{L}(\mathscr{D}((0, T)); V). \tag{1.5}$$

Тогда, если $f \in \mathscr{D}'((0, T); V)$, то $f(\varphi) \in V$ и $\varphi \to f(\varphi)$ — непрерывное отображение $\mathscr{D}((0, T)) \to V$ для любого элемента $\varphi \in \mathscr{D}((0, T))$. Будем обозначать распределения, как обычные функции, и будем писать

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t) \varphi(t) \, dt. \tag{1.6}$$

Определим производную df/dt элемента $f \in \mathscr{D}'((0, T); V)$ с помощью соотношения

$$\varphi \to \frac{df}{dt}(\varphi) = -f\left(\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Тем самым задано линейное непрерывное отображение $\mathscr{D}((0, T)) \to V$. Таким образом, $df/dt \in \mathscr{D}'((0, T); V)$.

Говорят, что $f_n \to f$ в пространстве $\mathscr{D}'((0, T); V)$, если $f_n(\varphi) \to f(\varphi)$ $\forall \varphi \in \mathscr{D}((0, T))$. В этом случае

$$\frac{df_n}{dt} \to \frac{df}{dt} \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'((0, T); V).$$

Если $f \in L^2(0, T; V)$, то можно определить $f(\varphi)$ с помощью равенства (1.6), т. е. обычным интегралом Лебега со значениями в V. При этом $\varphi \to f(\varphi)$ — непрерывное отображение $\mathscr{D}((0, T)) \to V$. Тем самым мы определяем также элемент $\tilde{f} \in \mathscr{D}'((0, T); V)$ и линейное непрерывное взаимно однозначное отображение (вложение) $f \to \tilde{f}$ пространства $L^2(0, T; V)$ в $\mathscr{D}'((0, T); V)$. Отождествляя элементы $\tilde{f}$ и f, получаем

$$L^2(0, T; V) \subset \mathscr{D}'((0, T); V). \tag{1.7}$$

Следовательно, для функции $f \in L^2(0, T; V)$ можно определить производную $df/dt \in \mathscr{D}'((0, T); V)$.

Введем пространство

$$W(0, T) = \{f \mid f \in L^2(0, T; V),\ df/dt \in L^2(0, T; V')\}. \tag{1.8}$$

Это пространство, снабженное нормой

$$\|f\|_{W(0,\,T)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_V^2\,dt + \int_0^T \left\|\frac{df}{dt}\right\|_{V'}^2 dt\right)^{1/2}, \tag{1.9}$$

становится, как легко видеть, *гильбертовым.*

Справедлива (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 1]

Теорема 1.1. *Всякая функция $f \in W(0, T)$, надлежащим образом измененная (в случае необходимости) на некотором множестве меры нуль, является непрерывной функцией* $[0, T] \to H$.

Короче это утверждение можно записать так:

$$W(0, T) \subset C^0([0, T]; H), \tag{1.10}$$

где $C^0([0, T]; H)$ — пространство непрерывных **отображений** $[0, T] \to H$.

1.2. Эволюционные задачи

Рассмотрим теперь эволюционную задачу: *найти функцию $y \in W(0, T)$, удовлетворяющую уравнению*

$$A(t)\,y + \frac{dy}{dt} = f, \tag{1.11}$$

где f — данная функция пространства $L^2(0, T; V')$, и начальному условию

$$y(0) = y_0, \tag{1.12}$$

где y_0 — данный элемент пространства H [1]).

Примеры таких задач мы приведем в разд. 1.5, а сейчас докажем, что справедлива

Теорема 1.2. *Если выполнены условия* (1.1) *и* (1.2), *то задача* (1.11), (1.12) *в пространстве $W(0, T)$ имеет единственное решение.*

Более того, *это решение непрерывно зависит от исходных данных*: билинейное отображение $f, y_0 \to y$ пространства $L^2(0, T; V') \times H$ в $W(0, T)$ непрерывно.

Отметим сразу же, что

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } T < \infty \text{ можно считать, что неравенство (1.2)}\\ \text{справедливо при } \lambda = 0.\end{array}\right\} \tag{1.13}$$

Действительно, если положить

$$y = z \exp(kt),$$

[1]) По теореме 1.1 равенство (1.12) имеет смысл.

то задача (1.11), (1.12) будет эквивалентна задаче

$$(A(t) + kI)z + \frac{dz}{dt} = f\exp(-kt), \qquad z(0) = y_0,$$

т. е. оператор $A(t)$ заменяется на $A(t)+kI$. Взяв $k = \lambda$, получим утверждение (1.13).

Таким образом, докажем теорему 1.2, считая, что выполнено предположение (1.13).

1.3. Доказательство единственности

Пусть элемент y удовлетворяет условиям (1.11), (1.12) при $f = 0$ и $y_0 = 0$. Умножая равенство (1.11) скалярно на $y(t)$ и учитывая (1.3), получаем

$$a(t;\, y(t), y(t)) + \left(\frac{dy(t)}{dt},\ y(t)\right) = 0.$$

Кроме того, можно показать (это делается в процессе доказательства теоремы 1.1), что

$$\int_0^T \left(\frac{dy(t)}{dt},\ y(t)\right) dt = \frac{1}{2}|y(T)|^2$$

(поскольку $y(0) = 0$). Следовательно,

$$\int_0^T a(t;\, y(t), y(t))\,dt + \frac{1}{2}|y(T)|^2 = 0,$$

откуда в силу (1.13)

$$\alpha\int_0^T \|y(t)\|^2\,dt + \frac{1}{2}|y(T)|^2 \leqslant 0,$$

а значит, $y = 0$.

1.4. Доказательство существования

Для того чтобы несколько упростить изложение, предположим, что пространство V *сепарабельно*, т. е. что существует счетное множество, плотное в пространстве V. Тогда можно найти (бесконечным числом способов) «базис» $w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots$ пространства V в следующем смысле:

$$\left.\begin{array}{l}\forall m \text{ элементы } w_1, \ldots, w_m \text{ линейно независимы;}\\ \text{совокупность конечных линейных комбинаций}\\ \sum \xi_j w_j \ (\xi_j \in \mathbf{R}) \text{ плотна в } V.\end{array}\right\} \quad (1.14)$$

Определим *приближенное решение* $y_m(t)$ задачи (1.11), (1.12):

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i, \tag{1.15}$$

где функции $g_{im}(t)$ выбираются так, чтобы выполнялись соотношения

$$\left(\frac{dy_m(t)}{dt},\ w_j\right) + a(t;\ y_m(t),\ w_j) = (y(t),\ w_j),\quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1.16}$$

$$y_m(0) \equiv y_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} w_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} w_i \to y_0 \text{ в } H \text{ при } m \to \infty. \tag{1.17}$$

Система (1.16), (1.17) представляет собой задачу Коши для системы m линейных дифференциальных уравнений относительно $g_{im}(t)$:

$$\mathscr{W}_m \frac{d\mathbf{g}_m}{dt} + \mathscr{A}_m(t)\, \mathbf{g}_m = \mathbf{f}_m, \quad \mathbf{g}_m(0) = \{\xi_{im}\},$$

где

$$\mathscr{W}_m = \|(w_i,\ w_j)\|,\ \mathscr{A}_m(t) = \|a(t;\ w_i,\ w_j)\|,$$
$$\mathbf{g}_m(t) = \{g_{im}(t)\},\ \mathbf{f}_m(t) = \{(f(t),\ w_j)\}.$$

Так как $\det \mathscr{W}_m \neq 0$, то *задача* (1.16), (1.17) *имеет единственное решение*. Мы докажем, что если $m \to \infty$, то $y_m \to y$, где y — решение задачи (1.11), (1.12) [1]).

Умножим равенство (1.16) на $g_{jm}(t)$ и просуммируем по j. Тогда

$$\left(\frac{dy_m(t)}{dt},\ y_m(t)\right) + a(t;\ y_m(t),\ y_m(t)) = (f(t),\ y_m(t)),$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_m(t)|^2 + a(t;\ y_m(t),\ y_m(t)) = (f(t),\ y_m(t)),$$

откуда в силу (1.13)

$$|y_m(T)|^2 + 2\alpha \int_0^T \|y_m(t)\|^2 dt \leqslant |y_{0m}|^2 + 2\int_0^T |(f(t),\ y_m(t)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant |y_{0m}|^2 + 2\int_0^T \|f(t)\|_{V'} \|y_m(t)\|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant |y_{0m}|^2 + \alpha \int_0^T \|y_m(t)\|^2 dt + \frac{1}{\alpha}\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt\,^{2)}.$$

[1]) Заметим, что если «базис» $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ выбран, то доказательство носит *конструктивный* характер.

[2]) Здесь использовано очевидное неравенство $2\,|ab| = 2\,|\alpha^{1/2}a \cdot \alpha^{-1/2}b| \leqslant \alpha a^2 + \alpha^{-1}b^2$.— *Прим. перев.*

Поскольку (см. (1.17)) $|y_{0m}| \leqslant c\,|y_0|$, окончательно получаем

$$\int_0^T \|y_m(t)\|^2\,dt \leqslant c\left(|y_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt\right). \tag{1.18}$$

Следовательно, элементы y_m остаются в некотором ограниченном подмножестве пространства $L^2(0, T; V)$, и поэтому можно извлечь такую подпоследовательность $\{y_\mu\}$, что

$$y_\mu \to z \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \tag{1.19}$$

Пусть j — произвольное фиксированное число и $\mu > j$. Равенство (1.16) верно при $m = \mu$. Умножим обе его части на функцию

$$\varphi(t) \in (C^1[0, T]), \quad \varphi(T) = 0, \tag{1.20}$$

и проинтегрируем результат от 0 до T:

$$\int_0^T [-(y_\mu(t), \varphi_j'(t)) + a(t; y_\mu(t), \varphi_j(t))]\,dt = \\ = \int_0^T (f(t), \varphi_j(t))\,dt + (y_{0\mu}, \varphi_j(0)), \tag{1.21}$$

где $\varphi_j(t) = \varphi(t)\,w_j$. Переходя в равенстве (1.21) к пределу при $\mu \to \infty$ (что возможно в силу (1.19)), находим

$$\int_0^T [-(z, \varphi_j') + a(t; z, \varphi_j)]\,dt = \int_0^T (f, \varphi_j)\,dt + (y_0, \varphi_j(0)). \tag{1.22}$$

Это равенство верно при *любой* функции φ, удовлетворяющей условиям (1.20). Поэтому можно взять $\varphi \in \mathscr{D}((0, T))$, а тогда соотношение (1.22) дает

$$\frac{d}{dt}(z(t), w_j) + a(t; z(t), w_j) = (f(t), w_j), \tag{1.23}$$

где производная принадлежит пространству $\mathscr{D}'((0, T))$.

Но так как в равенстве (1.23) число j *произвольно*, а множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов w_j *плотно* в пространстве V, то

$$\frac{dz}{dt} + A(t)\,z = f. \tag{1.24}$$

Итак, $dz/dt = f - A(t)\,z \in L^2(0, T; V')$, а значит, $z \in W(0, T)$. Но тогда в равенстве (1.22) можно интегрировать по частям, так что в силу (1.24)

$$(z(0), w_j)\,\varphi(0) = (y_0, w_j)\,\varphi(0) \qquad \forall j, \forall \varphi,$$

или

$$(z(0),\ w_j) = (y_0,\ w_j) \qquad \forall j,$$

откуда

$$z(0) = y_0.$$

Следовательно, z — решение задачи (1.11), (1.12). Так как, согласно разд. 1.3, решение единственно, то $z = y$. Тогда соотношение (1.19) можно переписать в виде [1])

$$y_m \to y \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,\ T;\ V). \tag{1.25}$$

В силу (1.18)

$$\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \leqslant c\left(|y_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\, dt\right), \tag{1.26}$$

а так как $dy/dt = f - A(t)\,y$, то

$$\left\|\frac{dy}{dt}\right\|^2_{L^2(0,T;\,V')} \leqslant c'\left(|y_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\, dt\right).$$

1.5. Примеры

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\left.\begin{array}{l}
\Omega \text{ — открытое множество (область) в } \mathbf{R}^n, \\
\Gamma \text{ — граница области } \Omega; \\
Q = Q_T = \Omega \times (0,\ T) \text{ — (открытый) цилиндр}, \\
\Sigma = \Sigma_T = \Gamma \times (0,\ T) \text{ — боковая поверхность цилиндра } Q.
\end{array}\right\} \tag{1.27}$$

Пример 1.1. Пусть a_{ij} — функции, заданные в цилиндре $Q = \Omega \times (0,\ T)$ и удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{array}{c}
a_{ij} \in L^\infty(Q); \\
\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\ t)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2),\ \alpha > 0,\ \forall\, \xi_i \in \mathbf{R}, \\
\text{почти всюду в } Q.
\end{array}\right\} \tag{1.28}$$

---

[1]) Справедливо даже более сильное утверждение: $y_m \to y$ *сильно* в $L^2(0,\ T;\ V)$. В самом деле,

$$\int_0^T a(t;\ y_m - y,\ y_m - y)\,dt + \frac{1}{2}|y_m(T) - y(T)|^2 =$$

$$= \int_0^T (f,\ y_m)\,dt - \int_0^T a(t;\ y_m,\ y)\,dt - \frac{1}{2}(y_m(T),\ y(T)) -$$

$$- \int_0^T a(t;\ y,\ y_m - y)\,dt - \frac{1}{2}(y(T),\ y_m(T) - y(T)) +$$

$$+ \frac{1}{2}|y_m(0) - y_0|^2 + \frac{1}{2}(y_m(0),\ y_0) + \frac{1}{2}(y_0,\ y_m(0) - y_0) \to 0.$$

Для $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$ положим

$$a(t; \varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \tag{1.29}$$

Возьмем (§ 3 гл. 1) $V = H_0^1(\Omega)$. Тогда выполнены условия теоремы 1.2, из которой следует существование единственной функции $y \in W(0, T)$, для которой

$$A(t) y + \frac{\partial y}{\partial t} = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.30}$$

где

$$A(t) y = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right),$$

и

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{1.31}$$

Соотношение $y \in W(0, T)$ означает, что (см. (1.8))

$$y \in L^2(0, T; V), \quad \frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; V').$$

Но если функция y принадлежит пространству $L^2(0, T; V)$ и удовлетворяет уравнению (1.30), то ее производная dy/dt принадлежит пространству $L^2(0, T; V')$. Следовательно, вместо $y \in W(0,T)$ можно требовать только $y \in L^2(0, T; V)$, или, другими словами,

$$y, \ \frac{\partial y}{\partial x_i} \in L^2(Q); \qquad y = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{1)}. \tag{1.32}$$

Таким образом, *если выполнены условия* (1.28), *то существует единственная функция* y, *удовлетворяющая соотношениям* (1.30)—(1.32), *где* f *и* y_0 — *данные элементы пространств* $L^2(0, T; V')$ *и* $L^2(\Omega)$ *соответственно.*

Пример 1.2. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в предыдущем примере, но теперь пусть $V = H^1(\Omega)$. Во избежание недоразумений при интерпретации пространства V' представим уравнение (1.11) в *эквивалентном* виде:

$$\left(\frac{dy(t)}{dt}, \psi \right) + a(t; y(t), \psi) = (f(t), \psi) \qquad \forall \psi \in V. \tag{1.33}$$

Пусть

$$f = f(x, t) \text{ — данная функция из } L^2(Q); \tag{1.34}$$

[1]) Это условие возникает в силу того, что $V = H_0^1(\Omega)$ (разд. 3.3 гл. 1).

определим

$$(f(t), \psi) = \int_\Omega f(x, t)\psi(x)\,dx, \qquad \psi \in V.$$

В результате получим некоторый элемент пространства $L^2(0, T; V')$. Равенство (1.33) формально интерпретируется следующим образом (как в примере 3.3 гл. 1):

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(t)\,y = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{1.36}$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{1.37}$$

Замечание 1.1. Задачи (1.30) — (1.32) и (1.35) — (1.37) являются *смешанными задачами* (в смысле Адамара). Оператор $\partial/\partial t + A(t)$ — это *параболический оператор второго порядка*. Для корректной постановки граничной задачи необходимо знать

(i) *начальное условие* (1.31) или (1.37);

(ii) *граничное условие на боковой поверхности* Σ; (1.32) — это *условие Дирихле*, а (1.36) — *условие Неймана*; разумеется, возможны и многие другие случаи (соответствующие примеры будут приведены ниже).

Замечание 1.2. Граничные условия были до сих пор *однородными*: $y|_\Sigma = 0$ или $\left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = 0$. В дальнейшем мы рассмотрим также *неоднородные* граничные условия.

Замечание 1.3. Общую теорему 1.2 можно применить и в случае параболических операторов порядка выше второго, в случае систем и т. д.; это будет показано на примерах. Ясно, что все «стационарные» примеры, рассмотренные в гл. 2, имеют аналоги в «эволюционном» случае.

1.6. Полугруппы

Пусть выполнены условия теоремы 1.2, но

$$A(t) = A, \tag{1.38}$$

т. е. оператор $A(t)$ не зависит от t.

В уравнении (1.11) положим $f = 0$. Тогда задача (1.11), (1.12) примет вид

$$\frac{dy}{dt} + Ay = 0, \qquad y(0) = y_0; \tag{1.39}$$

эта задача допускает единственное решение в пространстве $W(0, T)$, где T — *произвольное* конечное число.

Согласно теоремам 1.1 и 1.2, тем самым определено линейное *непрерывное* отображение

$$y_0 \to y(t) \tag{1.40}$$

пространства H в себя. Следовательно,

$$y(t) = G(t)\, y_0, \qquad G(t) \in \mathscr{L}(H; H) \tag{1.41}$$

и оператор $G(t)$ обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } \forall y_0 \in H,\ t \to G(t)\, y_0 \text{ — непрерывное отображение} \\ \quad [0, \infty) \to H; \\ \text{(ii) } G(0) = I; \\ \text{(iii) } G(t)\, G(s) = G(s)\, G(t) = G(t+s) \quad \forall t, s \geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{1.42}$$

Семейство операторов $G(t)$ образует *полугруппу*.

Замечание 1.4. Разумеется, тот факт, что H — *гильбертово* пространство, не играет никакой роли при определении полугруппы. Если, например, H — *банахово* пространство [1]), то *полугруппой* называется всякое семейство операторов $G(t) \in \mathscr{L}(H; H)$, удовлетворяющее условиям (1.42).

Замечание 1.5. Формально

$$A = -\frac{d}{dt} G(t) \Big|_{t=0}. \tag{1.43}$$

Говорят, что $(-A)$ — *инфинитезимальный производящий оператор полугруппы* $G(t)$. Оператор $(-A)$ *неограничен* в пространстве H. Его область определения $D(A)$ составляют все такие элементы $h \in H$, что

$$\frac{1}{\sigma}(G(\sigma)\, h - h) \text{ сходится в } H \text{ при } \sigma \to 0.$$

Легко видеть, что в рассматриваемом нами случае

$$D(A) = \{h \mid h \in V,\ Ah \in H\}$$

(Хилле и Филлипс [1], Като [1], Иосида [1]).

Замечание 1.6. Общее решение задачи (1.11), (1.12) можно представить в виде

$$y(t) = \int_0^t G(t-\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma + G(t)\, y_0. \tag{1.44}$$

---

[1]) Распространение определения полугруппы операторов на еще более общие случаи см. Иосида [1].

Пример 1.3. Предположим, что оператор A симметричен: $a(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi)$. Тогда этот оператор, рассмотренный как неограниченный в пространстве H и имеющий в качестве области определения множество $D(A) = \{h \mid h \in V,\ Ah \in H\}$, является самосопряженным.

Если вложение $V \to H$ вполне непрерывно, то оператор A порождает базис, состоящий из собственных функций:

$$\left.\begin{aligned} &Aw_j = \lambda_j w_j,\ w_j \in V,\ \lambda_j < \lambda_{j+1},\ \lambda_j \to +\infty \text{ при } j \to \infty; \\ &(w_j, w_k) = \delta_j^k, \end{aligned}\right\} \quad (1.45)$$

где элементы w_j образуют полную ортонормальную систему в пространстве H.

Легко видеть, что тогда

$$G(t)\, y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} (y_0, w_j). \quad (1.46)$$

Замечание 1.7. Из теоремы 1.2 следует, что если оператор A определяется с помощью билинейной формы $a(\varphi, \psi)$, удовлетворяющей условию

$$a(\psi, \psi) + \lambda\, |\psi|^2 \geqslant \alpha\, \|\psi\|^2 \qquad \forall \psi \in V, \quad (1.47)$$

то $(-A)$ — инфинитезимальный производящий оператор некоторой полугруппы.

Обратное неверно. Существуют такие операторы A, что $(-A)$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы в гильбертовом пространстве H, но условие (1.47) не выполняется (Като [1]).

Для того чтобы оператор $(-A)$ был инфинитезимальным производящим оператором некоторой полугруппы (теорема Хилле — Иосиды), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что при $\xi > \lambda$

$$\|(A + \xi I)^{-k}\| \leqslant \frac{M}{(\xi - \lambda)^k} \qquad \forall k.$$

Замечание 1.8. Можно распространить формулу (1.44) на случай, когда оператор $A(t)$ зависит от t. Для этого рассмотрим задачу

$$\frac{dz}{dt} + A(t)\, z = 0 \text{ в } (\sigma, t);\ z(\sigma) = \xi,\ \xi \in H, \quad (1.48)$$

допускающую единственное решение $z \in L^2(\sigma, t; V)$ (и, следовательно, $dz/dt \in L^2(\sigma, t; V')$. Тогда

$$z(t) = \Phi(t, \sigma)\, \xi,\quad \Phi(t, \sigma) \in \mathscr{L}(H; H), \quad (1.49)$$

и решение y задачи (1.11), (1.12) можно представить в виде

$$y(t) = \int_0^t \Phi(t, \sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma + \Phi(t, 0)\, y_0. \quad (1.50)$$

§ 2. Задачи управления

2.1. Обозначения. Простейшие свойства

Пусть заданы гильбертово пространство $\mathscr{U}$ управлений (ср. с разд. 1.1 гл. 2) и оператор

$$B \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\ L^2(0,\ T;\ V')). \tag{2.1}$$

Пусть f и y_0 — данные элементы пространств $L^2(0,\ T;\ V')$ и H соответственно. Предположим, что выполняются соотношения (1.1), (1.2), и обозначим через $y(v)$ решение задачи

$$\frac{dy(v)}{dt} + A(t)\,y(v) = f + Bv; \tag{2.2}$$

$$y(v)\,|_{t=0} = y_0; \tag{2.3}$$

$$y(v) \in L^2(0,\ T;\ V). \tag{2.4}$$

Обозначения. Пусть $y(v)$ — функция $t \to y(v)(t)$, которую в дальнейшем будем обозначать через $y(t;\ v)$. Соотношение (2.3) можно записать тогда в виде

$$y(0;\ v) = y_0. \tag{2.3$'$}$$

В приложениях функция $y(v)$ зависит также и от x; поэтому будем обозначать ее через $y(x,\ t;\ v)$. Тогда равенство (2.3′) можно записать еще и так:

$$y(x,\ 0;\ v) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.3$''$}$$

Функция $y(v)$ представляет собой *состояние* системы. *Наблюдение* задается следующим образом (ср. с разд. 1.1 гл. 2):

$$z(v) = Cy(v), \quad C \in \mathscr{L}(W(0;\ T);\ \mathscr{H})\ ^{1)}. \tag{2.5}$$

Определим оператор N (ср. с (1.12) гл. 2):

$$N \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\ \mathscr{U});\quad (Nu,\ u)_{\mathscr{U}} \geqslant \nu\,\|u\|^2_{\mathscr{U}}, \quad \nu > 0. \tag{2.6}$$

Функцию стоимости зададим формулой

$$J(v) = \|Cy(v) - z_{\text{д}}\|^2_{\mathscr{H}} + (Nv,\ v)_{\mathscr{U}}. \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. Отметим, что управление в начальные условия не входит. Случай, когда начальные условия содержат управление, рассматривается в § 11.

Наконец, пусть (как в § 1 гл. 2)

$$\mathscr{U}_\partial \text{ — выпуклое замкнутое подмножество в } \mathscr{U}. \tag{2.8}$$

---

[1] Отметим, что $y(v) \in W(0,\ T)$; пространство $W(0,\ T)$ определено равенством (1.8).

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы отыскать

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{2.9}$$

Естественно, что все результаты разд. 1.2 гл. 2 остаются в силе и для сформулированной сейчас задачи, поскольку для их получения было использовано *единственное свойство — непрерывность* линейного отображения $v \to y(v)$ пространства $\mathcal{U}$ в пространство $W(0, T)$ (заменяющее в рассматриваемом случае пространство V). Следовательно,

$$\left.\begin{array}{l}\textit{если оператор } N \textit{ удовлетворяет условиям (2.6),}\\ \textit{то существует единственное оптимальное управление;}\end{array}\right\} \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{array}{l}\textit{если } N = 0, \textit{ а множество } \mathcal{U}_\partial \textit{ ограничено, то}\\ \textit{существует непустое замкнутое выпуклое мно-}\\ \textit{жество оптимальных управлений [1].}\end{array}\right\} \tag{2.11}$$

Наша цель теперь заключается в более подробном изучении оптимального управления (при этом результаты будут отличаться от уже полученных в гл. 2).

2.2. Совокупность соотношений, характеризующих оптимальное управление

Как и в разд. 1.3 гл. 2, управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ *оптимально* **тогда и только тогда**, когда

$$J'(u)\cdot(v - u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,$$

т. е. когда

$$(Cy(u) - z_д,\ C(y(v) - y(u)))_{\mathcal{H}} + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Введем обозначения (ср. (1.25) и (1.28) гл. 2):

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda \text{ — канонический изоморфизм из } \mathcal{H} \text{ на } \mathcal{H}';\\ \Lambda_{\mathcal{U}} \text{ — канонический изоморфизм из } \mathcal{U} \text{ на } \mathcal{U}'.\end{array}\right\} \tag{2.12}$$

Тогда неравенство, характеризующее оптимальное управление, принимает вид

$$(C^*\Lambda(Cy(u) - z_д),\ y(v) - y(u)) + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.13}$$

[1] Относительно примеров, в которых $N = 0$ и множество $\mathcal{U}_\partial$ не обязательно ограничено, см. § 7.

где первое слагаемое левой части обозначает скалярное произведение элементов, принадлежащих пространствам $W'(0, T)$ и $W(0, T)$ соответственно.

Остается теперь интерпретировать неравенство (2.13), введя *сопряженное состояние*. Мы сделаем это только для двух случаев [1]):

(i) $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V); \mathcal{H})$ [2]);

(ii) $Cy(v) = Dy(T; v)$, $D \in \mathcal{L}(H; H)$ [3]).

2.3. Случай (i)

Здесь $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}'; L^2(0, T; V'))$, и неравенство (2.13) можно переписать в виде

$$\int_0^T (C^*\Lambda(Cy(u) - z_д), y(v) - y(u))\,dt + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.14}$$

Определим *сопряженное состояние* $p(v)$ как решение задачи

$$-\frac{dp(v)}{dt} + A^*(t)p(v) = C^*\Lambda(Cy(v) - z_д) \text{ в } (0, T); \tag{2.15}$$

$$p(T; v) = 0; \tag{2.16}$$

$$p(v) \in L^2(0, T; V). \tag{2.17}$$

Задача (2.15) — (2.17) *имеет единственное решение*. Чтобы в этом убедиться, достаточно применить теорему 1.2, обращая время (т. е. заменяя t на $T - t$).

Умножим равенство (2.15) (при $v = u$) скалярно на $y(v) - y(u)$ и проинтегрируем от 0 до T. Учитывая, что

$$\int_0^T \left(-\frac{dp(u)}{dt}, y(v) - y(u)\right) dt = \int_0^T \left(p(u), \frac{d}{dt}(y(v) - y(u))\right) dt,$$

$$\int_0^T (A^*(t)p(u), y(v) - y(u))\,dt = \int_0^T (p(u), A(t)y(v) - A(t)y(u))\,dt,$$

[1]) В общем случае необходимо использовать пространство $W'(0, T)$ в *сопряженной задаче*. Это можно сделать, но понадобятся сложные рассуждения; поэтому удобнее рассматривать отдельно случаи (i) и (ii). Разумеется, C может быть линейной комбинацией операторов, указанных в (i) и (ii).

[2]) В этом случае соотношения (2.5), очевидно, выполняются.

[3]) В этом случае говорят, что *наблюдается финальное состояние*.

получаем

$$\int_0^T (C^*\Lambda(Cy(u) - z_д),\ y(v) - y(u))\,dt =$$
$$= \int_0^T \left(p(u),\ \left(-\frac{d}{dt} + A(t)\right)(y(v) - y(u))\right)dt =$$
$$= \int_0^T (p(u),\ Bv - Bu)\,dt = (B^*p(u),\ v - u) =$$
$$= (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u),\ v - u)_{\mathcal{U}},$$

где $(B^*p(u),\ v - u)$ — скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}$. Следовательно, неравенство (2.14) можно переписать в виде

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial^1). \tag{2.18}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (1.1), (1.2), (2.6) *и* $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V); \mathcal{H})$, *то оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями*

$$\frac{dy(u)}{dt} + A(t)\,y(u) = f + Bu, \quad y(0; u) = y_0; \tag{2.19}$$

$$-\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)\,p(u) = C^*\Lambda(Cy(u) - z_д), \quad p(T; u) = 0; \tag{2.20}$$

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.21}$$

где

$$y(u) \in L^2(0,\ T;\ V), \qquad p(u) \in L^2(0,\ T;\ V). \tag{2.22}$$

Замечание 2.2. Соотношения $y(0; u) = y_0$ и $p(T; u) = 0$ являются *граничными условиями* для системы дифференциальных уравнений относительно функций y и p; к этим условиям в конкретных примерах (см. § 3) необходимо присоединить еще *граничные условия на боковой поверхности* Σ.

Замечание 2.3. Если $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$, то соотношение (2.21) приводится к виду

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu = 0. \tag{2.23}$$

---

1) Предыдущие выкладки показывают, что $^1/_2 J'(u) = B^*p(u) + \Lambda_{\mathcal{U}} Nu$.

Исключая с его помощью u, приходим к выводу, что оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\,y + BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p = f,\\ &-\frac{dp}{dt} + A^*(t)\,p - C^*\Lambda\, Cy = -C^*\Lambda\, z_{\text{д}}, \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

$$y(0) = y_0, \qquad p(T) = 0\ ^{1)}, \tag{2.25}$$

а именно

$$u = -N^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p. \tag{2.26}$$

Задача (2.24), (2.25) будет подробно изучена в § 4.

2.4. Случай (ii)

Здесь функция стоимости равна

$$J(v) = |Dy(T;\ v) - z_{\text{д}}|^2 + (Nv,\ v)_{\mathcal{U}}, \tag{2.27}$$

а неравенство (2.13) эквивалентно неравенству

$$(Dy(T;\ u) - z_{\text{д}},\ Dy(T;\ v) - Dy(T;\ u)) + (Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{\partial}, \tag{2.28}$$

где первое слагаемое левой части обозначает скалярное произведение в пространстве H.

Определим *сопряженное состояние* $p(v)$ как решение задачи

$$-\frac{dp(v)}{dt} + A^*(t)\,p(v) = 0 \quad \text{в} \quad (0,\ T); \tag{2.29}$$

$$p(T;\ v) = D^*(Dy(T;\ v) - z_{\text{д}}); \tag{2.30}$$

$$p(v) \in L^2(0,\ T;\ V). \tag{2.31}$$

Эта задача, согласно теореме 1.2, имеет единственное решение (в чем легко убедиться, заменяя t на $T-t$).

Умножим равенство (2.29) (при $v = u$) скалярно на $y(v) - y(u)$ и проинтегрируем от 0 до T. Учитывая, что

$$\int_0^T \left(-\frac{dp(u)}{dt},\ y(v) - y(u)\right)dt = \int_0^T \left(p(u),\ \frac{d}{dt}(y(v) - y(u))\right)dt - \\ - (D^*(Dy(T;\ u) - z_{\text{д}}),\ y(T;\ v) - y(T;\ u)),$$

[1]) Здесь $y(0) = y(t)\,|_{t=0}$ и $p(T) = p(t)\,|_{t=T}$.

получаем

$$(Dy(T;u)-z_д,\ Dy(T;v)-Dy(T;u))=\int_0^T(p(u),\ B(v-u))\,dt.$$

Следовательно, неравенство (2.28) можно переписать в виде

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial, \tag{2.32}$$

и тем самым доказана

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), (2.6) *и функция стоимости* $J(v)$ *имеет вид* (2.27), *где* $D\in\mathcal{L}(H;H)$. *Тогда оптимальное управление* $u\in\mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями*

$$\frac{dy(u)}{dt}+A(t)\,y(u)=f+Bu, \quad y(0;u)=y_0; \tag{2.33}$$

$$-\frac{dp(u)}{dt}+A^*(t)\,p(u)=0, \quad p(T;u)=D^*(Dy(T;u)-z_д); \tag{2.34}$$

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial, \tag{2.35}$$

где

$$y(u)\in L^2(0,T;V), \quad p(u)\in L^2(0,T;V). \tag{2.36}$$

Замечание 2.4 (аналогичное замечанию 2.3). Если $\mathcal{U}_\partial=\mathcal{U}$, то соотношение (2.35) приводится к виду (2.23). Исключая с его помощью u, приходим к выводу, что оптимальное управление получается из решения задачи

$$\frac{dy}{dt}+A(t)\,y+BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p=f, \quad -\frac{dp}{dt}+A^*(t)\,p=0, \tag{2.37}$$

$$y(0)=y_0, \quad p(T)=D^*(Dy(T)-z_д), \tag{2.38}$$

а именно

$$u=-N^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p.$$

2.5. План дальнейшего исследования

Примеры применения теорем 2.1 и 2.2 мы дадим в § 3. Затем вернемся к случаю отсутствия ограничений на управление.

Очевидно — и это важно для приложений,— что в рассматриваемых задачах можно использовать теорему 2.1 гл. 2.

Замечание 2.5. В *сингулярном* случае, когда

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu=0, \tag{2.39}$$

неравенства (2.21) и (2.35) выполняются автоматически. Но соотношение (2.39) соответствует *случаю отсутствия ограничений на управление*. Значит, в сингулярном случае ограничения на управление не играют никакой роли: множество $\mathcal{U}_\partial$ содержит элемент u, реализующий минимум функции $J(v)$ во *всем* пространстве $\mathcal{U}$.

Замечание 2.6. Предположим, что

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \| v \|_{\mathcal{U}} \leqslant R\}. \tag{2.40}$$

Тогда если положить

$$\xi = \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu \tag{2.41}$$

и считать $\xi \neq 0$ (см. замечание 2.5), то соотношение (2.21) (или (2.35)) будет эквивалентно равенству

$$u = -R \frac{\xi}{\| \xi \|_{\mathcal{U}}}. \tag{2.42}$$

Замечание 2.7. Пусть

$$\mathcal{U} = L^2(0, T; E), \tag{2.43}$$

где E — гильбертово пространство;

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \| v(t) \|_E \leqslant R \text{ почти всюду}\}. \tag{2.44}$$

Используя обозначение (2.41), соотношение (2.21) (или (2.35)) можно переписать в эквивалентной форме (теорема 2.1 гл. 2):

$$(\xi(t), u(t))_E = \inf_{\| k \|_E \leqslant R} (\xi(t), k).$$

Следовательно,

$$u(t) = -R \frac{\xi(t)}{\| \xi(t) \|_E}, \quad \text{если} \quad \xi \neq 0. \tag{2.45}$$

Замечание 2.8. Теорию, аналогичную изложенной выше, можно развить и в случае, когда функция стоимости задана не формулой (2.7), а в виде

$$J(v) = (C_1 y(v), y(v))_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{2.46}$$

где $C_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ — не обязательно положительно определенный оператор, а оператор N берется «достаточно большим», чтобы определенная формулой (2.46) функция стоимости $J(v)$ обладала свойствами коэрцитивности, т. е.

$$J(v) \to +\infty, \quad \text{если} \quad \| v \|_{\mathcal{U}} \to +\infty.$$

§ 3. Примеры

3.1. Параболическое уравнение второго порядка: смешанная задача Дирихле

Пусть $V = H_0^1(\Omega)$ и оператор $A(t)$ задан, как в примере 1.1 (разд. 1.5). Пусть $\mathcal{U} = L^2(Q)$, где $Q = \Omega \times (0, T)$ (следовательно, $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$), а B — тождественный оператор.

Пусть состояние $y(u)$ системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(u)}{\partial t} + A(t)\,y(u) = f + u \quad \text{в} \quad Q; \\ &y(u)|_\Sigma = 0; \qquad y(x, 0; u) = y_0(x), \qquad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

а управление *распределено* в цилиндре Q. Рассмотрим несколько возможных случаев наблюдения.

3.1.1. C—вложение $L^2(0, T; V) \to L^2(Q)$. В этом случае $\mathcal{H} = L^2(Q) = \mathcal{H}'$; Λ — тождественный оператор. Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + A^*(t)\,p(u) = y(u) - z_д \quad \text{в} \quad Q; \\ &p(u)|_\Sigma = 0; \qquad p(x, T; u) = 0, \qquad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

где $z_д$ — данный элемент пространства $L^2(Q)$.

Для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (3.1), (3.2) и

$$\int_Q [p(u) + Nu](v - u)\,dx\,dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.3}$$

Пример 3.1. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда $u = -N^{-1}p$.

В этом случае можно получить некоторые утверждения о *регулярности* оптимального управления (см. также замечание 2.3 гл. 2). Именно, если граница Γ области Ω и коэффициенты $a_{ij}(x, t)$ в выражении для оператора $A(t)$ достаточно гладки, то решение $p(u)$ задачи (3.2) удовлетворяет условию

$$p(u) \in H^{2,1}(Q), \tag{3.4}$$

где

$$H^{2,1}(Q) = \left\{g \mid g, \ \frac{\partial g}{\partial x_i}, \ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial x_j}, \ \frac{\partial g}{\partial t} \in L^2(Q)\right\}^{1)}. \tag{3.5}$$

---

[1]) $H^{2,1}(Q)$ — гильбертово пространство с нормой

$$\left(\int_Q \left[|g|^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\right] dx\,dt\right)^{1/2}.$$

Если, например, $N = \nu I$, $\nu > 0$, то оптимальное управление удовлетворяет условию

$$u \in H^{2,1}(Q). \tag{3.6}$$

Пример 3.2. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0$ почти всюду в $Q\}$. Тогда неравенство (3.3) эквивалентно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} p(u) + Nu \geqslant 0; \quad u \geqslant 0 \text{ в } Q; \\ [p(u) + Nu]u = 0 \quad \text{в} \quad Q. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Исключая управление u из соотношений (3.1), (3.2), (3.7), приходим к задаче (типа односторонней граничной задачи) [1])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f \geqslant 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = y - z_д \quad \text{в} \quad Q; \\ &p + N\left(\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f\right) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &\left[p + N\left(\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f\right)\right]\left(\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f\right) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &y|_\Sigma = 0, \quad p|_\Sigma = 0; \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0, \; x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Соотношения (3.7) показывают, что в каждой точке цилиндра Q либо $u = 0$ и $p + Nu = p > 0$, либо $p + Nu = 0$ и $u > 0$, либо, наконец, $u = 0$ и $p + Nu = 0$. В последнем случае, очевидно, $y = z_д$ и $\partial y/\partial t + A(t)\,y = f$.

Поэтому, если предположить, что

$$\frac{\partial z_д}{\partial t} + A(t)\,z_д \neq f \quad \text{почти всюду в } Q,$$

то возможны только два первых случая (ср. с примером 2.2 гл. 2).

Если, кроме того, $N = \nu I$, $\nu > 0$, то

$$u = -\frac{1}{\nu}\inf(0, p) \quad \text{почти всюду в } Q. \tag{3.9}$$

---

[1]) Оптимальное управление u получается из решения этой задачи, а именно $u = \partial y/\partial t + A(t)\,y - f$.— *Прим. перев.*

Следовательно, при указанных предположениях оптимальное управление u получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial y}{\partial t}+Ay+\frac{1}{\nu}\inf(0,p)=f,\ -\frac{\partial p}{\partial t}+A^*p=y-z_{\text{д}}\ \text{в}\ Q;\\ &y|_\Sigma=0,\quad p|_\Sigma=0;\quad y(x,\ 0)=y_0(x),\quad p(x,\ T)=0,\ x\in\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

а именно равно (3.9). Заметим, что если при этом коэффициенты a_{ij} и граница Γ области Ω достаточно гладки, то справедливо соотношение (3.4), а тогда из равенства (3.9) следует, что

$$y\in H^1(Q).\tag{3.11}$$

Пример 3.3. Пусть теперь

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\partial=\{v\mid \xi_0(x,\ t)\leqslant v(x,\ t)\leqslant \xi_1(x,\ t)\ \text{почти всюду в}\ Q,\\ \xi_0\ \text{и}\ \xi_1 - \text{данные функции из}\ L^\infty(Q)\}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Тогда, согласно теореме 2.1 гл. 2, неравенство (3.3) эквивалентно неравенству

$$[p(x,\ t;\ u)+Nu(x,\ t)]\,[\xi-u(x,\ t)]\geqslant 0$$
$$\forall\xi\in[\xi_0(x,\ t),\ \xi_1(x,\ t)]\ \text{почти всюду в}\ Q.$$

Последнему неравенству можно дать такую же интерпретацию, как и в примере 2.3 гл. 2.

3.1.2. C — тождественное отображение пространства $L^2(0,\ T;\ V)$ в себя. В этом случае $\mathcal{H}=L^2(0,\ T;\ V)$ и $\mathcal{H}'=L^2(0,\ T;\ V')$. Так как $V=H_0^1(\Omega)$, то $\Lambda=-\Delta+I$, т. е.

$$\Lambda f(x,\ t)=-\Delta_x f(x,\ t)+f(x,\ t)\ ^{1)}.$$

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+A^*(t)\,p(u)=(-\Delta_x+I)\,[y(u)-z_{\text{д}}];\\ &p(u)|_\Sigma=0,\qquad p(x,\ T;\ u)=0,\end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

где $z_{\text{д}}$ — данный элемент пространства $L^2(0,\ T;\ V)$.

Если соответствующим образом выбрать множество $\mathcal{U}_\partial$, можно построить примеры, аналогичные предыдущим.

3.1.3. Финальное наблюдение [2]**.** Пусть в предположениях разд. 2.4 $D\in\mathcal{L}(H;\ H)$, $H=L^2(\Omega)$ и функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\int_\Omega[Dy(x,\ T;\ v)-z_{\text{д}}(x)]^2\,dx+(Nv,\ v)_{\mathcal{U}}.\tag{3.14}$$

[1] См. примечание на стр. 189.— *Прим. перев.*

[2] В оригинале observation finale.— *Прим. перев.*

Тогда сопряженное состояние определяется как решение задачи (ср. с (2.29) — (2.31))

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+A^*(t)\,p(u)=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &p(u)|_\Sigma=0,\ p(x,\ T;\ u)=D^*[Dy(x,\ T;\ u)-z_{\text{д}}(x)] \ \text{в}\ \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

а оптимальное управление $u\in\mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями (3.1), (3.15) и (3.3).

Пример 3.4. Пусть $\mathcal{U}_\partial=\mathcal{U}$. Тогда $u=-N^{-1}p$. Следовательно, мы приходим к задаче (3.1) (где надо заменить u на $-N^{-1}p$), (3.15); оптимальное управление u получается из решения этой задачи, а именно $u=-N^{-1}p$.

В рассматриваемом случае решение задачи (3.15), вообще говоря, не принадлежит пространству $H^{2,1}(Q)$, но $p(u)\in L^2(0,\ T;\ V)$. Если, например, $N=\nu I$, $\nu>0$, то

$$u\in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)).$$

Можно привести также примеры, аналогичные примерам 3.2 и 3.3.

Замечание 3.1. Случай, когда в условиях этого раздела $N=0$ и множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено, мы рассмотрим в § 7.

3.2. Параболическое уравнение второго порядка; смешанная задача Неймана

Пусть $V=H^1(\Omega)$ и $\mathcal{U}=L^2(\Sigma)$, а оператор $A(t)$ задан, как в примере 1.1.

Пусть состояние $y(u)$ системы определяется как решение уравнения

$$\frac{d}{dt}(y(u),\ \psi)+a(t;\ y(u),\ \psi)=(f(t),\ \psi)_{L^2(\Omega)}+(u(t),\ \psi|_\Gamma)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall\psi\in H^1(\Omega) \tag{3.16}$$

с начальным условием

$$y(0;\ u)=y_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.17}$$

где f и y_0 — данные элементы пространств $L^2(Q)$ и $L^2(\Omega)$ соответственно.

Уравнению (3.16) можно дать следующую интерпретацию (ср. с разд. 2.4 гл. 2):

$$\frac{\partial y(u)}{\partial t}+A(t)\,y(u)=f \quad \text{в} \quad Q, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}=u \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{3.19}$$

а начальное условие (3.17) эквивалентно условию

$$y(x,\ 0;\ u) = y_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3.20}$$

Следовательно, состояние системы определяется как решение *смешанной задачи (в смысле Адамара) с граничным условием Неймана*, причем управление является *граничным*. Рассмотрим два возможных случая наблюдения.

3.2.1. C — **вложение** $L^2(0,\ T;\ V) \to L^2(Q)$ [1]. В этом случае функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_Q [y(v) - z_д]^2\,dx\,dt + (Nv,\ v)_{L^2(\Sigma)}, \tag{3.21}$$

где $z_д \in L^2(Q)$. Сопряжённое состояние $p(u)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + A^* p(u) = y(u) - z_д \quad \text{в} \quad Q;\\ &\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma; \quad p(x,\ T;\ u) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (3.18) — (3.20), (3.22) и

$$\int_\Sigma (p + Nu)(v - u)\,d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.23}$$

Пример 3.5. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда соотношение (3.23) принимает вид

$$p + Nu = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{3.24}$$

Следовательно, оптимальное управление u получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = y - z_д \quad \text{в} \quad Q;\\ &\frac{\partial y}{\partial \nu_A} + N^{-1} p = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma;\\ &y(x,\ 0) = y_0(x), \qquad p(x,\ T) = 0, \qquad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

а именно

$$u = -N^{-1} p\,|_\Sigma\,. \tag{3.26}$$

Отметим следующее свойство *регулярности* оптимального управления: если коэффициенты в выражении для оператора A

[1] Ср. со случаем 3.1.1.

и граница Γ области Ω достаточно гладки, то решение $p(u)$ задачи (3.22) принадлежит пространству $H^{2,1}(Q)$ (см. (3.5)), и, следовательно,

$$p\,|_\Sigma \in H^{1/2}(\Sigma)\ ^{1)}. \tag{3.27}$$

Если, например, $N = \nu I$, $\nu > 0$, то оптимальное управление u удовлетворяет условию

$$u \in H^{1/2}(\Sigma). \tag{3.28}$$

Пример 3.6. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in L^2(\Sigma),\ v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$. Тогда оптимальное управление u получается из решения задачи (типа односторонней граничной задачи)

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = f, \quad -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p = y - z_\text{д} \quad \text{в} \quad Q;\\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma;\\[2ex]
p + N\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0, \quad \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}\left(p + N\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma;\\[2ex]
y(x,\ 0) = y_0(x), \quad p(x,\ T) = 0, \qquad x \in \Omega,
\end{array}\right\} \tag{3.29}$$

а именно

$$u = \left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma. \tag{3.30}$$

3.2.2. Финальное наблюдение [2]). В этом случае функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_\Omega [y(x,\ T;\ v) - z_\text{д}]^2\, dx + (Nv,\ v)_{L^2(\Sigma)}, \tag{3.31}$$

где $z_\text{д} \in L^2(\Omega)$. Сопряженное состояние $p(u)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{array}{l}
-\dfrac{\partial p(u)}{\partial t} + A^*(t)\,p(u) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \qquad \dfrac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \ \text{на} \ \Sigma;\\[2ex]
p(x,\ T;\ u) = y(x,\ T;\ u) - z_\text{д}(x), \quad x \in \Omega.
\end{array}\right\} \tag{3.32}$$

---

[1]) Точнее, $p|_\Sigma \in H^{3/2,\ 3/4}(\Sigma)$ (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 4]).

[2]) Ср. со случаем 3.1.3. Возможен также случай, аналогичный 3.1.2, но мы его изучать не будем.

Для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (3.18) — (3.20), (3.32) и

$$\int_\Sigma (p + Nu)(v - u)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.33}$$

Пример 3.7. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда

$$u = -N^{-1}p|_\Sigma. \tag{3.34}$$

Следовательно, оптимальное управление u получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + A(t)\,y = f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*(t)p = 0 \quad \text{в } Q;\\ &\frac{\partial y}{\partial \nu_A} + N^{-1}p|_\Sigma = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на } \Sigma;\\ &y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = y(x, T) - z_д(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

а именно равно (3.34).

Пример 3.8. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in L^2(\Sigma),\ v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$. Тогда неравенство (3.33) эквивалентно соотношениям

$$u \geqslant 0,\ p(u) + Nu \geqslant 0,\ u\,[p(u) + Nu] = 0 \quad \text{на } \Sigma. \tag{3.36}$$

Здесь оказывается полезной

Лемма 3.1. *Пусть коэффициенты в выражении* (1.30) *для оператора $A(t)$ аналитичны в замкнутом цилиндре $\overline{Q}$ и граница Γ (а значит, и боковая поверхность Σ) аналитична. Если решение $p(u)$ задачи* (3.32) *равно нулю на подмножестве $\Sigma_0 \subset \Sigma$ и мера подмножества Σ_0 положительна, то $p(u) \equiv 0$.*

Доказательство. Известно (см., например, Танабе [1]), что при сделанных предположениях решение $p(u)$ аналитично в цилиндре Q и на его боковой поверхности Σ. Но тогда функция $p(u)$ аналитична на множестве Σ и равна нулю на некотором его подмножестве положительной меры; следовательно, $p(u)|_\Sigma = 0$.

Таким образом, данные Коши на поверхности Σ для решения $p(u)$ нулевые, а потому, согласно теореме Коши — Ковалевской (так как $p(u)$ — аналитическая функция), $p(u) \equiv 0$.

Возвращаясь к соотношениям (3.36), предположим, что $u = 0$ и $p(u) + Nu = 0$ на некотором подмножестве $\Sigma_0 \subset \Sigma$ положительной меры. Тогда $u = 0$ и $p(u) = 0$, что, согласно лемме 3.1, возможно лишь в случае, когда $p(u) \equiv 0$.

Положим для простоты

$$N = \nu I, \quad \nu > 0. \tag{3.37}$$

Тогда равенство $p(u) = 0$ влечет за собой равенство $\nu u^2 = 0$ на Σ, а значит, $u = 0$ и $p(x, T; 0) = y(x, T; 0) - z_д(x) = 0$.

Следовательно,

$$\left.\begin{array}{l}\textit{если } y(x, T; 0) = z_д(x), \textit{ то } u = 0 \textit{ — оптимальное}\\ \textit{управление; в противном случае } p(u)|_\Sigma \neq 0 \textit{ почти всюду.}\end{array}\right\} \tag{3.38}$$

Таким образом, если $y(T; 0) \neq z_д$, то возможны только два случая: либо $u > 0$ и $p(u) + Nu = 0$, либо $u = 0$ и $p(u) > 0$. Тогда

$$u = -\frac{1}{\nu}\inf(0, p|_\Sigma), \tag{3.39}$$

и справедлива

Т е о р е м а 3.1. *Пусть коэффициенты в выражении* (1.30) *для оператора A аналитичны в замкнутом цилиндре $\bar{Q}$ и удовлетворяют неравенству* (1.28). *Пусть граница Γ аналитична, состояние системы определяется как решение задачи* (3.18) — (3.20), *функция стоимости имеет вид* (3.31) *и* $y(T; 0) \neq z_д$ [1]. *Если при этом*

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0 \textit{ почти всюду на } \Sigma\} \subset \mathcal{U} = L^2(\Sigma),$$

то оптимальное управление и получается из решения нелинейной задачи

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = f, \quad -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^*p = 0 \quad \text{в} \quad Q;\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} + \dfrac{1}{\nu}\inf(0, p) = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma;\\[2mm] y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = y(x, T) - z_д(x), \quad x \in \Omega,\end{array}\right\} \tag{3.40}$$

а именно равно (3.39).

З а м е ч а н и е 3.2. Нелинейные задачи типа (3.40), по-видимому, непосредственно не изучались. Относительно более общих примеров см. Лионс [5] (см. также разд. 3.4).

З а м е ч а н и е 3.3. Случай, когда в условиях настоящего раздела $N = 0$ и множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено, рассматривается в § 7.

---

[1] Это равносильно условию $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) > 0$.

Замечание 3.4. В соотношении (3.16) предполагалось, что $u \in L^2(\Sigma)$. Тогда отображение $\psi \to (u(t), \psi|_\Gamma)_{L^2(\Gamma)}$ определяет некоторый элемент пространства $L^2(0, T; V')$.

Тот же результат вытекает из более общего предположения: $u \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$ (ср. с разд. 2.4 гл. 2). Можно получить и дальнейшие обобщения; мы приведем далее соответствующие примеры, в которых применяется общая теория неоднородных задач (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 4]).

Замечание 3.5. Тем же методом исследуется случай, когда состояние системы определяется как решение смешанной задачи для оператора с разрывными коэффициентами (относительно стационарного случая см. пример 3.4 гл. 1).

Дадим теперь краткий анализ двух примеров, соответствующих в эволюционном случае примерам, рассмотренным в разд. 2.6 и 2.7 гл. 2.

3.3. Система уравнений и уравнения высшего порядка

3.3.1. Система уравнений. Рассмотрим «эволюционную» задачу, аналогичную той, которая уже изучалась в разд. 2.6 гл. 2, но с граничными условиями Неймана и граничным управлением.

Пусть состояние $y(u) = \{y_1(u), y_2(u)\}$ системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y_1(u)}{\partial t} - \Delta y_1(u) + y_1(u) - y_2(u) = f_1 \text{ в } Q, \quad f_1 \in L^2(Q);\\
&\frac{\partial y_2(u)}{\partial t} - \Delta y_2(u) + y_2(u) + y_1(u) = f_2 \text{ в } Q, \quad f_2 \in L^2(Q);\\
&\left.\frac{\partial y_1}{\partial n}\right|_\Sigma = u_1, \quad \left.\frac{\partial y_2}{\partial n}\right|_\Sigma = u_2;\\
&y_1(x, 0; u) = y_{01}(x) \in L^2(\Omega),\ y_2(x, 0; u) = y_{02}(x) \in L^2(\Omega),\ x \in \Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

где

$$u = \{u_1, u_2\} \in \mathcal{U} = L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma). \tag{3.42}$$

Задача (3.41) имеет единственное решение. Чтобы в этом убедиться, применим теорему 1.2, считая, что $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\} \in V$;

$$a(t; \varphi, \psi) = a(\varphi, \psi) = \int_\Omega (\operatorname{grad}\varphi_1 \operatorname{grad}\psi_1 + \operatorname{grad}\varphi_2 \operatorname{grad}\psi_2)\,dx + \\ + \int_\Omega (\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 - \varphi_2\psi_1 + \varphi_1\psi_2)\,dx;$$

$$(f(t), \psi) = \int\limits_{\Omega} [f_1(x, t)\psi_1(x) + f_2(x, t)\psi_2(x)]\,dx + \\ + \int\limits_{\Gamma} [u_1(t)\psi_1 + u_2(t)\psi_2]\,d\Gamma.$$

Пусть наблюдение является финальным и зависит только от одной компоненты состояния [1]):

$$z(v) = y_1(x, T; v), \tag{3.43}$$

так что функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int\limits_{\Omega} [y_1(x, T; v) - z_{\text{д}}(x)]^2\,dx + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{3.44}$$

где $z_{\text{д}} \in L^2(\Omega)$ — данный элемент.

Сопряженное состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p_1(u)}{\partial t} - \Delta p_1(u) + p_1(u) + p_2(u) = 0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &-\frac{\partial p_2(u)}{\partial t} - \Delta p_2(u) + p_2(u) - p_1(u) = 0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &\frac{\partial p_1(u)}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial p_2(u)}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma;\\ &p_1(x, T; u) = y_1(x, T; u) - z_{\text{д}}(x),\ p_2(x, T; u) = 0,\ x \in \Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

(см. теорему 2.2; оператор D: $H \to H$, где $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, определяется соотношением $D\{h_1, h_2\} = \{h_1, 0\}$).

Для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (3.41), (3.45) и

$$\int\limits_{\Sigma} [p_1(v_1 - u_1) + p_2(v_2 - u_2)]\,d\Sigma + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.46}$$

Пример 3.9. Если в случае отсутствия ограничений на управление ($\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$) оператор $N = \{N_1, N_2\}$ диагонален, то

$$u_1 = -N_1^{-1}p_1(u)|_\Sigma, \quad u_2 = -N_2^{-1}p_2(u)|_\Sigma. \tag{3.47}$$

Тогда оптимальное управление u получается из решения задачи (3.41), (3.45) (в которой компоненты управления u_i, $i = 1, 2$, исключены с помощью соотношений (3.47)) в виде (3.47).

Замечание 3.6. В случае, когда

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \text{ почти всюду на } \Sigma\}$$

[1]) В оригинале observation finale partielle.— *Прим. перев.*

и $N = \nu I$, $\nu > 0$, неравенство (3.46) эквивалентно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} u_1 \geqslant 0,\ p_1(u) + \nu_1 u_1 \geqslant 0,\ u_1[p_1(u) + \nu_1 u_1] = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ u_2 \geqslant 0,\ p_2(u) + \nu_2 u_2 \geqslant 0,\ u_2[p_2(u) + \nu_2 u_2] = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (3.48)$$

Нам не известно, имеет ли место свойство единственности (ср. с леммой 3.1). Легко убедиться (используя рассуждения, как при доказательстве этой леммы), что если функции $p_1(u)$ и $p_2(u)$ равны нулю на двух (различных) подмножествах границы Σ положительной меры, то $p_i(u) = 0$ на Σ, $i = 1, 2$, и $p_i \equiv 0$, $i = 1, 2$. Однако возможен ли случай, когда, например, $p_1(u)|_\Sigma = 0$, но относительно $p_2(u)|_\Sigma$ нет никаких предположений и $p_i \not\equiv 0$, $i = 1, 2$?

3.3.2. Уравнения высшего порядка. Пусть состояние $y(u)$ системы определяется как решение задачи [1])

$$\frac{\partial y(u)}{\partial t} + \Delta(a_1(x, t)\,\Delta y(u)) = f + u \ \text{в}\ Q, \quad u,\ f \in L^2(Q); \qquad (3.49)$$

$$y(u)|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial y(u)}{\partial n}\right|_\Sigma = 0; \qquad (3.50)$$

$$y(x, 0; u) = y_0(x),\ x \in \Omega,\ y_0 \in L^2(\Omega); \qquad (3.51)$$

при этом предполагается, что

$$a_1 \in L^\infty(Q), \quad a_1 \geqslant \alpha > 0 \ \text{почти всюду в}\ Q. \qquad (3.52)$$

Пусть управление распределено в цилиндре Q:

$$\mathcal{U} = L^2(Q), \qquad (3.53)$$

а функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_Q [y(v) - z_д]^2\,dx\,dt + (Nv, v)_{\mathcal{U}}. \qquad (3.54)$$

Тогда сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + \Delta(a_1(x, t)\,\Delta p(u)) = y(u) - z_д \ \text{в}\ Q; \qquad (3.55)$$

$$p(u)|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial p(u)}{\partial n}\right|_\Sigma = 0; \qquad (3.56)$$

$$p(x, T; u) = 0, \quad x \in \Omega. \qquad (3.57)$$

[1]) Задача (3.49) — (3.51) имеет единственное решение; чтобы в этом убедиться, достаточно применить теорему 1.2, считая, что

$$V = H_0^2(\Omega); \qquad a(t; \varphi, \psi) = \int_\Omega a_1(x, t)\,\Delta\varphi\Delta\psi\,dx.$$

Для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (3.49) — (3.51), (3.55) — (3.57) и

$$\int\limits_Q [p(x, t; u) + Nu(x, t)][v(x, t) - u(x, t)]\,dx\,dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \qquad (3.58)$$

Замечание 3.7. В § 9 мы дадим пример системы, описываемой смешанной задачей Дирихле, в случае граничного управления.

3.4. Дополнение[1])

Можно поставить вопрос о *прямом* решении нелинейной системы (3.10) [2]).

Исключим из соотношений (3.10) неизвестную величину y. Для этого применим оператор $\partial/\partial t + A$ ко второму из уравнений (3.10). Учитывая первое из соотношений (3.10), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)\left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^*\right)p + \frac{1}{\nu}\inf(0, p) = f - \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)z_д. \qquad (3.59)$$

Из соотношений (3.10) находим граничные условия для функции p:

$$p|_\Sigma = 0, \qquad \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^*\right)p|_\Sigma = -z_д|_\Sigma. \qquad (3.60)$$

Второе из условий (3.60) имеет смысл, только если элемент $z_д$ принадлежит некоторому пространству, более узкому, чем пространство $L^2(Q)$. Поэтому интересующее нас прямое решение задачи (3.10) требует *дополнительных предположений о регулярности исходных данных.*

Для определенности предположим, что

$$z_д \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)z_д \in L^2(Q). \qquad (3.61)$$

Тогда, в частности, в силу (3.61) $z_д|_\Sigma \in L^2(\Sigma)$, а потому второе из условий (3.60) имеет смысл.

---

[1]) Чтение этого раздела для понимания дальнейшего не обязательно.

[2]) То есть о ее решении безотносительно к задаче управления, которой она эквивалентна.

Наконец, функция p должна также удовлетворять условиям

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}+A^*\right)p(0)=y_0-z_д(0),\quad p(T)=0. \tag{3.62}$$

Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы получить прямое решение нелинейной задачи (3.59), (3.60), (3.62).

Положим

$$\beta(p)=\frac{1}{\nu}\inf(0,p) \tag{3.63}$$

и заметим, что

$$p\beta(p)\geqslant 0. \tag{3.64}$$

Пусть (см. (3.5))

$$\mathscr{V}=\{\psi\mid\psi\in H^{2,1}(Q);\ \psi|_\Sigma=0;\ \psi(x,T)=0,\ x\in\Omega\}; \tag{3.65}$$

$\mathscr{V}$ — гильбертово пространство с нормой, определяемой так же, как и для пространства $H^{2,1}(Q)$.

Для $\varphi,\psi\in\mathscr{V}$ положим

$$\pi(\varphi,\psi)=\int\limits_Q\left(-\frac{\partial}{\partial t}+A^*(t)\right)\varphi\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial t}+A^*(t)\right)\psi\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_Q\beta(\varphi)\psi\,dx\,dt; \tag{3.66}$$

тогда задачу, которую мы решаем, можно заменить эквивалентной:

$$\pi(p,\psi)=\int\limits_Q\left[f-\left(\frac{\partial}{\partial t}+A(t)\right)z_д\right]\psi\,dx\,dt-$$
$$-\int\limits_\Omega[y_0-z_д(x,0)]\psi(x,0)\,dx-\int\limits_\Sigma z_д(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}d\Sigma\qquad\forall\psi\in\mathscr{V}. \tag{3.67}$$

Но задача (3.67) имеет единственное решение. Это вытекает, например, из результатов Лере и Лионса [1] в силу следующих оценок:

(i) $\quad\pi(\psi,\psi)\geqslant\int\limits_Q\left|\left(-\frac{\partial}{\partial t}+A^*\right)\psi\right|^2dx\,dt\geqslant c\|\psi\|^2_{H^{2,1}(Q)}$

(первое неравенство следует из соотношения (3.64), а по поводу второго см., например, Лионс и Мадженес [1, гл. 4]; более общие результаты получены Аграновичем и Вишиком [1]);

(ii) $\quad\pi(\varphi_1,\varphi_1-\varphi_2)-\pi(\varphi_2,\varphi_1-\varphi_2)\geqslant c\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{H^{2,1}(Q)}$

(это неравенство следует из монотонности функции $p\to\beta(p)$ и того факта, что правая часть уравнения (3.67) представляет собой линейную непрерывную форму на пространстве $\mathscr{V}$.

Замечание 3.8. Тот факт, что функция $p \to \beta(p)$ *монотонна*, не является случайным — он связан с условием оптимальности (3.3).

3.5. План дальнейшего исследования

Перейдем теперь к более подробному изучению случая отсутствия ограничений на управление. Мы покажем, как на этот случай распространяются известные результаты, полученные для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Это и составит предмет § 4 и 5.

Потом мы вернемся к случаю наличия ограничений на управление, а затем рассмотрим другие задачи.

§ 4. Расцепление и интегро-дифференциальное уравнение Риккати (I)

4.1. Обозначения и предположения

Пусть выполнены предположения разд. 2.3 и рассматривается случай отсутствия ограничений на управление (замечание 2.3). Изучим более подробно задачу (2.24), (2.25), считая, что

$$\mathcal{U} = L^2(0, T; E), \tag{4.1}$$

$$\mathcal{H} = L^2(0, T; F), \tag{4.2}$$

где E и F — сепарабельные [1]) гильбертовы пространства;

$$\left.\begin{array}{l} B(t) \in \mathcal{L}(E; V'), \quad C(t) \in \mathcal{L}(V; F), \quad t \in (0, T); \\ t \to (B(t)e, \psi) \text{ и } t \to (C(t)\varphi, f') \ \forall e \in E, \psi \in V, \varphi \in V, f' \in F' \\ \quad \text{— измеримые функции;} \\ \|B(t)\|_{\mathcal{L}(E;V')} \leqslant c, \quad \|C(t)\|_{\mathcal{L}(V;F)} \leqslant c. \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

Операторы B и C задаются в виде

$$\left.\begin{array}{ll} Bu = «t \to B(t)u(t)», & u \in \mathcal{U}, \\ Cf = «t \to C(t)f(t)», & f \in L^2(0, T; V). \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

Легко видеть, что $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; L^2(0, T; V'))$, $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V); \mathcal{H})$. Будем писать $B(t)u$ вместо Bu и $C(t)f$ вместо Cf.

Кроме того, предположим, что

$$\left.\begin{array}{l} Nu = N(t)u = «t \to N(t)u(t)», \text{ где } N(t) \in \mathcal{L}(E; E); \\ t \to (N(t)e, e_1) \text{ — измеримая функция;} \\ \|N(t)\|_{\mathcal{L}(E;E)} \leqslant c, \ (N(t)e, e)_E \geqslant \nu\|e\|_E^2, \ \nu > 0, \ \forall e \in E. \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

[1]) Это предположение не существенно и делается только для упрощения изложения некоторых моментов.

Пусть

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda_E \text{ — канонический изоморфизм из } E \text{ на } E';\\ \Lambda_F \text{ — канонический изоморфизм из } F \text{ на } F';\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

тогда $\Lambda_{\mathcal{U}}\, u(t) = \Lambda_E u(t)$ почти всюду и $\Lambda f(t) = \Lambda_F f(t)$ почти всюду.

Для простоты записи положим

$$D_1(t) = B(t) N^{-1}(t) \Lambda_E^{-1} B^*(t), \quad D_2(t) = C^*(t) \Lambda_F C(t). \tag{4.7}$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l} D_1(t) \in \mathcal{L}(V;\ V'), \quad D_2(t) \in \mathcal{L}(V;\ V'), \quad t \in (0,\ T);\\ t \to (D_i(t)\varphi,\ \psi) \ \ \forall \varphi, \psi \in V,\ i = 1,\ 2, \text{ — измеримые функции};\\ \|D_i(t)\|_{\mathcal{L}(V;\,V')} \leqslant c, \quad i = 1,\ 2; \quad D_1^*(t) = D_1(t), \quad D_2^*(t) = D_2(t) \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

(заметим, что $(N^{-1}(t)\,\Lambda_E^{-1})^* = N^{-1}(t)\,\Lambda_E^{-1}$).

При этих обозначениях система (2.24) принимает вид

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dt} + A(t)\,y + D_1(t)\,p = f, & t \in (0,\ T);\\ -\dfrac{dp}{dt} + A^*(t)\,p - D_2(t)\,y = g, & t \in (0,\ T), \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

где

$$g(t) = -C^*(t)\,\Lambda_F\, z_{\text{д}}(t), \tag{4.10}$$

а граничные условия (2.25) таковы:

$$y(0) = y_0, \quad p(T) = 0. \tag{4.11}$$

4.2. Оператор $P(t)$, функция $r(t)$

Для «расщепления» задачи (4.9), (4.11) важна

Л е м м а 4.1. *В предположениях разд. 4.1 задача*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi}{dt} + A(t)\,\varphi + D_1(t)\,\psi = f \ \text{ в } (s,\ T), \ 0 < s < T;\\ -\dfrac{d\psi}{dt} + A^*(t)\,\psi - D_2(t)\,\varphi = g \ \text{ в } (s,\ T); \end{array}\right\} \tag{4.12}$$

$$\varphi(s) = h, \qquad \psi(T) = 0, \tag{4.13}$$

где h — данный элемент пространства H, имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно § 2, соотношения (4.12), (4.13) можно рассматривать как задачу, решение которой позволяет найти оптимальное управление в случае, когда состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi = f + B(t)v \quad \text{в} \quad (s,\ T); \\ &\varphi(s) = h \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

(т. е. $\varphi = \varphi(v)$), функция стоимости имеет вид

$$J_s^h(v) = \int_s^T \|C(t)\varphi(t;\ v) - z_{\text{д}}(t)\|_F^2\, dt + \int_s^T (N(t)v(t),\ v(t))_E\, dt, \tag{4.15}$$

а управление v пробегает пространство $\mathcal{U}(s,\ T) = L^2(s,\ T;\ E)$.

Действительно, сопряженное состояние $\psi(v)$ определяется как решение задачи

$$-\frac{d\psi}{dt} + A^*(t)\psi = C^*(t)\Lambda_F[C(t)\varphi(v) - z_{\text{д}}]; \quad \psi(T) = 0, \tag{4.16}$$

а u является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда

$$\Lambda_E^{-1}B^*(t)\psi + N(t)u = 0. \tag{4.17}$$

Исключая отсюда u, получаем соотношения (4.12) и (4.13).

Лемма 4.2. *Отображение $h \to \{\varphi, \psi\}$, где $\{\varphi, \psi\}$ — решение задачи* (4.12), (4.13), *является непрерывным отображением $H \to$ $\to W(s,\ T) \times W(s,\ T)$, где*

$$W(s,\ T) = \left\{\varphi \mid \varphi \in L^2(s,\ T;\ V),\ \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(s,\ T;\ V')\right\}. \tag{4.18}$$

Это отображение — аффинное.

Доказательство. Линейная часть рассматриваемого отображения соответствует случаю, когда $f = 0$ и $z_{\text{д}} = 0$ (и, следовательно, $g = 0$).

Обозначим через $\varphi_n(v)$ состояние системы, определяемое как решение задачи (4.14) при $\varphi(s) = h_n$. Для фиксированного управления v при $h_n \to h$

$$\varphi_n(v) \to \varphi(v) \quad \text{в} \quad W(s,\ T). \tag{4.19}$$

Пусть u_n (соответственно u) — оптимальное управление, отвечающее функции стоимости $J_s^{h_n}(v)$ (соответственно $J_s^h(v)$). Тогда

$$J_s^{h_n}(u_n) = \inf_{v \in \mathcal{U}(s,\ T)} J_s^{h_n}(v) \leqslant J_s^{h_n}(u)$$

и $J_s^{h_n}(u) \to J_s^h(u)$ в силу соотношения (4.19), записанного при $v = u$. Следовательно,

$$\overline{\lim}\, J_s^{h_n}(u_n) \leqslant J_s^h(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}(s,T)} J_s^h(v). \tag{4.20}$$

Но $J_s^{h_n}(u_n) \geqslant \nu \int\limits_s^T \| u_n \|_E^2\, dt$, а это вместе с соотношением (4.20) означает, что

$$u_n \text{ при } h_n \to h \text{ принадлежат ограниченному подмножеству пространства } \mathcal{U}(s,\ T). \tag{4.21}$$

Таким образом, можно извлечь такую подпоследовательность $\{u_\mu\}$, что

$$u_\mu \to w \quad \text{слабо в} \quad \mathcal{U}(s,\ T). \tag{4.22}$$

Тогда $\varphi_\mu(u_\mu) \to \varphi(w)$ слабо в $W(s,\ T)$, и потому $\underline{\lim}\, J_s^{h_\mu}(u_\mu) \geqslant J_s^h(w)$, что вместе с соотношением (4.20) дает $J_s^h(w) \leqslant J_s^h(u)$. Итак, $w = u$, и мы получаем

$$u_n \to u \quad \text{слабо в} \quad \mathcal{U}(s,\ T);\quad J_s^{h_n}(u_n) \to J_s^h(u); \tag{4.23}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(u_n) \to \varphi(u) \quad &\text{слабо в} \quad W(s,\ T); \\ \psi_n(u_n) \to \psi(u) \quad &\text{слабо в} \quad W(s,\ T). \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Отсюда следует *непрерывность* линейной части отображения $h \to \{\varphi,\ \psi\}$ пространства H с *сильной* топологией в пространство $W(s,\ T) \times W(s,\ T)$ со *слабой* топологией.

Следствие 4.1. *Пусть $h \in H$ — данный элемент, а $\{\varphi,\ \psi\}$ — решение задачи* (4.12), (4.13). *Тогда*

$$h \to \psi(s) \tag{4.25}$$

— аффинное непрерывное отображение $H \to H$.

Доказательство. Отображение (4.25) представляет собой композицию отображений $h \to \{\varphi,\ \psi\}$ и $\{\varphi,\ \psi\} \to \psi(s)$, а по теореме 1.1 $\{\varphi,\ \psi\} \to \psi(s)$ — непрерывное отображение $W(s,\ T) \times W(s,\ T) \to H$.

Следствие 4.2. *Отображение* (4.25) *можно единственным образом представить в виде*

$$\psi(s) = P(s)h + r(s), \tag{4.26}$$

где $P(s) \in \mathcal{L}(H; H)$, $r(s) \in H$.

Теперь мы можем доказать «основное тождество».

Лемма 4.3. *Пусть* $\{y, p\}$ — *решение задачи* (4.9), (4.11). *Тогда*

$$p(t) = P(t)y(t) + r(t) \qquad \forall t \in (0, T), \tag{4.27}$$

где оператор $P(t)$ *получается из решения задачи*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + A(t)\beta + D_1(t)\gamma = 0 \quad \text{в} \quad (s, T);\\ &-\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\gamma - D_2(t)\beta = 0 \quad \text{в} \quad (s, T);\\ &\beta(s) = h, \qquad \gamma(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

а именно

$$P(s)h = \gamma(s), \tag{4.29}$$

а функция $r(t)$ *получается из решения задачи*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dt} + A(t)\eta + D_1(t)\xi = f \quad \text{в} \quad (s, T);\\ &-\frac{d\xi}{dt} + A^*(t)\xi - D_2(t)\eta = g \quad \text{в} \quad (s, T);\\ &\eta(s) = 0, \qquad \xi(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

а именно

$$r(s) = \xi(s). \tag{4.31}$$

Доказательство. Чтобы убедиться, что оператор $P(s)$ и функция $r(s)$, входящие в соотношение (4.26), действительно получаются так, как указано в формулировке леммы, достаточно разложить аффинное отображение $h \to \psi(s)$ на линейную и постоянную части.

Осталось только доказать тождество (4.27). Рассмотрим задачу (4.12), (4.13) при $h = y(s)$. Обозначим через $\tilde{\varphi}$ (соответственно $\tilde{\psi}$) *сужение* функции y (соответственно p) на интервал (s, T). Ясно, что функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ удовлетворяют соотношениям (4.12) и (4.13), а потому $\varphi = \tilde{\varphi}$, $\psi = \tilde{\psi}$. Отсюда, в частности, следует, что $\psi(s) = \tilde{\psi}(s) = p(s)$.

Но тогда в силу (4.26) $p(s) = P(s)\, y(s) + r(s)$, а так как s произвольно, то лемма доказана.

Приведем теперь несколько свойств оператора $P(t)$.

Лемма 4.4. *Справедливо равенство*

$$P^*(t) = P(t); \tag{4.32}$$

отображение

$$t \to (P(t)\, h, \bar{h}) \quad \forall h, \bar{h} \in H \text{ непрерывно на } [0, T]. \tag{4.33}$$

Доказательство. 1) Пусть $\bar{h} \in H$. Обозначим через $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ решение задачи (4.28) при $h = \bar{h}$. В силу (4.28), (4.29) тогда $P(s)\, \bar{h} = \bar{\gamma}(s)$.

Умножая второе из уравнений (4.28) скалярно на $\bar{\beta}$ и интегрируя, получаем

$$0 = \int_s^T \left(-\frac{d\gamma}{dt} + A^*(t)\, \gamma - D_2(t)\, \beta, \bar{\beta} \right) dt =$$

$$= (\gamma(s), \bar{\beta}(s)) - \int_s^T (D_2(t)\, \beta, \bar{\beta})\, dt + \int_s^T \left(\gamma, \frac{d\bar{\beta}}{dt} + A(t)\, \bar{\beta} \right) dt =$$

$$= (\gamma(s), \bar{\beta}(s)) - \int_s^T (D_2(t)\, \beta, \bar{\beta})\, dt - \int_s^T (\gamma, D_1(t)\, \bar{\gamma})\, dt,$$

откуда (в силу (4.8))

$$(P(s)\, h, \bar{h}) = \int_s^T (D_2(t)\, \beta, \bar{\beta})\, dt + \int_s^T (D_1(t)\, \gamma, \bar{\gamma})\, dt. \tag{4.34}$$

С помощью соотношений (4.7) можно показать, что формула (4.34) симметрична, а это и доказывает справедливость равенства (4.32).

2) Для доказательства утверждения (4.33) перейдем сначала к фиксированному промежутку изменения переменной, сделав замену

$$t = s + \tau\,(T - s), \qquad \tau \in [0, 1].$$

Положим

$$\beta\,(s + \tau\,(T - s)) = \beta_s\,(\tau) \tag{4.35}$$

и аналогично определим γ_s, f_s и т. д. Положим

$$A\,(s + \tau\,(T - s)) = A_s\,(\tau)$$

и аналогично определим $D_{1s}\,(\tau)$, $D_{2s}\,(\tau)$.

Задача (4.28) принимает тогда вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta_s}{d\tau}+(T-s)A_s(\tau)\beta_s+(T-s)D_{1s}(\tau)\gamma_s=0;\\ &-\frac{d\gamma_s}{d\tau}+(T-s)A_s^*(\tau)\gamma_s-(T-s)D_{2s}(\tau)\beta_s=0;\\ &\beta_s(0)=h,\quad \gamma_s(1)=0;\quad 0<\tau<1. \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

Соотношения (4.36) можно рассматривать как задачу, решение которой позволяет найти оптимальное управление для системы, *состояние* которой определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda}{d\tau}+(T-s)A_s(\tau)\lambda=(T-s)B_s(\tau)w,\qquad w\in L^2(0,1;E),\\ &\lambda(0)=h; \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

а *функция стоимости* имеет вид

$$J_s(w)=(T-s)\int_0^1\|C_s(\tau)\lambda(\tau)\|_F^2\,d\tau+(T-s)\int_0^1(N_s(\tau)w,w)_E\,d\tau. \tag{4.38}$$

В самом деле, в этом случае сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$-\frac{d\mu}{d\tau}+(T-s)A_s^*(\tau)\mu=C_s^*(\tau)\Lambda_F C_s(\tau)\lambda,\qquad \mu(1)=0, \tag{4.39}$$

и w является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда

$$\Lambda_E^{-1}B_s^*(\tau)\mu+N_s(\tau)w=0. \tag{4.40}$$

Исключая отсюда w, приходим к соотношениям (4.36).

Заметим, что

$$\inf_{w\in L^2(0,1;E)} J_s(w)=\inf_{v\in\mathcal{U}(s,T)} J_s^h(v),\qquad f=0,\quad z_{\text{д}}=0 \tag{4.41}$$

(именно поэтому в формуле (4.38) сохранен множитель $(T-s)$).

Далее,

$$P(s)h=\gamma_s(0). \tag{4.42}$$

Рассмотрим последовательность $\{s_n\}\to s\neq T$ [1]). Обозначим через $\lambda_s(w)$ состояние системы, определяющееся как решение задачи (4.37), и покажем, что

$$\lambda_{s_n}(w)\to\lambda_s(w)\quad\text{слабо в}\quad W(0,1)\ ^{2)}. \tag{4.43}$$

---

[1]) Доказательство в случае $s=T$ будет проведено ниже, после леммы 4.6.— *Прим. перев.*

[2]) Напомним, что $W(0,1)=\{\lambda\mid\lambda\in L^2(0,1;V),\ d\lambda/d\tau\in L^2(0,1;V')\}$ (см.(1.8)).

Легко видеть, что элементы λ_{s_n} остаются в некотором ограниченном подмножестве пространства $L^2(0, 1; V)$. С помощью уравнения (4.37) нетрудно убедиться, что

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_{s_n} \text{ при } s_n \to s \text{ принадлежат ограниченному} \\ \text{подмножеству пространства } W(0, 1).\end{array}\right\} \qquad (4.44)$$

Следовательно, можно извлечь такую подпоследовательность $\{s_\mu\}$, что

$$\lambda_{s_\mu} = \lambda_{s_\mu}(w) \to \tilde{\lambda} \text{ слабо в } W(0, 1). \qquad (4.45)$$

Если ψ — фиксированный элемент пространства V, то

$$((T - s_\mu) A_{s_\mu}(\tau) \lambda_{s_\mu}(\tau), \psi) = (\lambda_{s_\mu}(\tau), (T - s_\mu) A^*_{s_\mu}(\tau) \psi)$$

и

$$(T - s_\mu) A^*_{s_\mu}(\tau) \psi \to (T - s) A^*_s(\tau) \psi \text{ сильно в } L^2(0, 1; V).$$

Таким образом, последовательность отображений

$$\tau \to (\lambda_{s_\mu}(\tau), \ (T - s_\mu) A^*_{s_\mu}(\tau) \psi)$$

сходится (например, в пространстве $\mathscr{D}'(0, 1)$) к отображению

$$\tau \to (\tilde{\lambda}(\tau), (T - s) A^*_s(\tau) \psi),$$

и тогда из уравнения (4.37) (при $s = s_\mu$) следует, что

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau} + (T - s) A_s(\tau) \tilde{\lambda} = (T - s) B_s(\tau) w.$$

Так как $\tilde{\lambda}(0) = h$, то $\tilde{\lambda} = \lambda_s(w)$, откуда и вытекает (4.43).

Покажем теперь, что

$$\lambda_{s_n}(w) = \lambda_{s_n} \to \lambda_s(w) = \lambda_s \text{ сильно в } W(0, 1). \qquad (4.46)$$

Для этого рассмотрим последовательность

$$X_n = \int_0^1 (T - s_n)(A_{s_n}(\lambda_{s_n} - \lambda_s), \lambda_{s_n} - \lambda_s)\, d\tau + \frac{1}{2} |\lambda_{s_n}(1) - \lambda_s(1)|^2.$$

Учитывая (4.37) (при фиксированном w и $s = s_n$), находим

$$X_n = \int_0^1 (T - s_n)(B_{s_n} w, \lambda_{s_n})\, d\tau - \left[\int_0^1 (T - s_n)(A_{s_n}\lambda_{s_n}, \lambda_s)\, d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\lambda_{s_n}(1), \lambda_s(1))\right] + \frac{1}{2}|h|^2 - \int_0^1 (T - s_n)(A_{s_n}\lambda_s, \lambda_{s_n} - \lambda_s)\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{2}(\lambda_s(1), \lambda_{s_n}(1) - \lambda_s(1)),$$

откуда, согласно (4.43) и (4.37) следует, что

$$X_n \to \int_0^1 (T-s)(B_s w, \lambda_s)\,d\tau - \int_0^1 (T-s)(A_s\lambda_s, \lambda_s)\,d\tau + \\ + \frac{1}{2}|h|^2 - \frac{1}{2}|\lambda_s(1)|^2 = 0.$$

Так как $X_n \geqslant \alpha \inf (T-s_n) \|\lambda_{s_n} - \lambda_s\|^2_{L^2(0,\ 1;\ V)}$, то $\lambda_{s_n} \to \lambda_s$ сильно в $L^2(0,\ 1;\ V)$. Используя затем тот факт, что

$$\frac{d\lambda_{s_n}}{d\tau} = -(T-s_n) A_{s_n}(\tau)\lambda_{s_n} + (T-s_n) B_{s_n}(\tau)\, w,$$

получаем соотношение (4.46).

Пусть теперь w_s — оптимальное управление для системы, описываемой соотношениями (4.37), (4.38). В силу (4.46)

$$J_{s_n}(w_{s_n}) \leqslant J_{s_n}(w_s) \to J_s(w_s),$$

а потому

$$\overline{\lim}\, J_{s_n}(w_{s_n}) \leqslant J_s(w_s). \tag{4.47}$$

Далее, как и при доказательстве леммы 4.2, убеждаемся, что элементы w_{s_n} принадлежат некоторому ограниченному подмножеству пространства L^2 $(0,\ 1;\ E)$. Извлечем такую подпоследовательность $\{w_{s_\mu}\}$, что $w_{s_\mu} \to \tilde{w}$ слабо в L^2 $(0,\ 1;\ E)$; заметим, что $\lambda_{s_\mu}(w_{s_\mu}) \to \lambda_s(\tilde{w})$ слабо в $W(0,\ 1)$. Как и при доказательстве леммы 4.2, заключаем отсюда, что $\tilde{w} = w_s$, $\lambda_{s_n} \to \lambda_s$ слабо в $W(0,\ 1)$ и

$$\mu_{s_n} \to \mu_s \quad \text{слабо в} \quad W(0,\ 1). \tag{4.48}$$

Так как $\lambda_{s_n} = \beta_{s_n}$, $\mu_{s_n} = \gamma_{s_n}$, то в силу (4.48)

$$\mu_{s_n}(0) = \gamma_{s_n}(0) = P(s_n)\,h \to \mu_s(0) = \gamma_s(0) = P(s)\,h \text{ слабо в } H.$$

Лемма 4.5. *Существует такая константа C_1, что*

$$|P(s)\,h| \leqslant C_1 |h| \qquad \forall h \in H, \qquad \forall s \in [0,\ T]. \tag{4.49}$$

Доказательство. Решение $\{\beta,\ \gamma\}$ задачи (4.28) позволяет найти оптимальное управление для системы, состояние которой описывается соотношениями (4.14), а функция стоимости — равенством (4.15), причем $f = 0$ и $z_д = 0$. Эту функцию стоимости обозначим через $\overset{\circ}{J}{}^h_s(v)$.

Если u — оптимальное управление, то

$$\overset{\circ}{J}{}^h_s(u) \leqslant \overset{\circ}{J}{}^h_s(0) \leqslant C_2 |h|^2, \quad C_2 = \text{const}. \tag{4.50}$$

Кроме того, для оптимального управления u

$$B^*\gamma + \Lambda_E N u = 0 \quad \text{в} \quad (s,\ T). \tag{4.51}$$

Из соотношений (4.28) вытекает, что

$$\int_s^T (C\beta,\ C\beta)\,dt = \int_s^T (D_2\beta,\ \beta)\,dt = \int_s^T \left(-\frac{d\gamma}{dt} + A^*\gamma,\ \beta\right) dt =$$

$$= (\gamma(s),\ \beta(s)) + \int_s^T \left(\gamma,\ \frac{d\beta}{dt} + A\beta\right) dt = (P(s)h,\ h) + \int_s^T (\gamma,\ -D_1\gamma)\,dt,$$

а в силу (4.51)

$$\int_s^T (Nu,\ u)_E\,dt = \int_s^T (B^*\gamma,\ N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*\gamma)\,dt = \int_s^T (\gamma,\ D_1\gamma)\,dt.$$

Таким образом,

$$\overset{\circ}{J}{}_s^h(u) = (P(s)h,\ h), \tag{4.52}$$

откуда с учетом оценки (4.50) получаем неравенство (4.49).

Попутно доказана

Лемма 4.6. *Справедлива формула* (4.52), *так что*

$$(P(s)h,\ h) \geqslant 0 \qquad \forall h \in H. \tag{4.53}$$

Продолжение доказательства леммы 4.4 [1]). Пусть теперь $s = T$; рассмотрим последовательность $\{s_n\} \to T$. Тогда в силу равенства (4.38)

множество функций $\sqrt{T - s_n}\, w_{s_n}$ ограничено в $L^2(0,\ 1;\ E)$.

Если обозначить через β_{s_n} и γ_{s_n} состояние системы и сопряженное состояние, соответствующие управлению w_{s_n}, то легко проверить, что

множество функций $\sqrt{T - s_n}\,\beta_{s_n}$ ограничено в $L^2(0,\ 1;\ V)$;

множество функций $\sqrt{T - s_n}\,\gamma_{s_n}$ ограничено в $L^2(0,\ 1;\ V)$.

Далее, из первых двух соотношений (4.36) следует, что

$$\frac{d\beta_{s_n}}{d\tau} \to 0, \qquad \frac{d\gamma_{s_n}}{d\tau} \to 0 \quad \text{в} \quad L^2(0,\ 1;\ V'),$$

а отсюда с помощью двух последних равенств (4.36) заключаем, что $\beta_{s_n} \to h$ и $\gamma_{s_n} \to 0$ в пространстве непрерывных функций $[0,\ 1] \to V'$.

[1]) Добавлено автором при подготовке русского издания.— *Прим. перев.*

Следовательно, $P(s_n)h = \gamma_{s_n}(0) \to 0$ в пространстве V' при $s_n \to T$. В силу леммы 4.5 можно извлечь такую подпоследовательность — мы ее также обозначим через $\{s_n\}$,— что

$$P(s_n)h \to 0 \quad \text{слабо в пространстве} \quad H.$$

4.3. Формальные преобразования

Исходя из тождества (4.27), проведем ряд формальных преобразований, которые будут обоснованы ниже.

Продифференцируем формально тождество (4.27), используя общее обозначение $dX/dt = X'$, и результат подставим во второе из уравнений (4.9):

$$-P'y - Py' - r' + A^*p - D_2y = g.$$

Затем, используя первое уравнение из (4.9), найдем

$$-P'y - P[f - Ay - D_1p] - r' + A^*p - D_2y = g.$$

Заменим здесь p по формуле (4.27); тогда

$$(-P' + PA)y - Pf + PD_1(Py + r) - r' + \\ + A^*(Py + r) - D_2y = g,$$

или

$$(-P' + PA + A^*P + PD_1P - D_2)y + \\ + (-r' + A^*r + PD_1r - Pf - g) = 0. \quad (4.54)$$

Так как y «произвольно» (это тоже должно быть обосновано!), то система (4.9) «эквивалентна» соотношениям

$$-\frac{dP}{dt} + PA + A^*P + PD_1P = D_2 \quad \text{в} \quad (0, T); \quad (4.55)$$

$$-\frac{dr}{dt} + A^*r + PD_1r = Pf + g \quad \text{в} \quad (0, T). \quad (4.56)$$

Далее, тождество (4.27) при $t = T$ дает

$$p(T) = P(T)y(T) + r(T) = 0,$$

что «эквивалентно» равенствам

$$P(T) = 0, \quad (4.57)$$

$$r(T) = 0. \quad (4.58)$$

Таким образом, формально получен следующий результат: *оператор $P(t) \in \mathcal{L}(H; H)$ определяется как решение нелинейного уравнения типа Риккати* (4.55) *с граничным условием* (4.57), *а функция $r(t)$ определяется как решение абстрактного параболического уравнения (4.56) с граничным условием (4.58).*

Замечание 4.1. В дальнейшем проведенные преобразования будут обоснованы. Подчеркнем, что *существование* оператора $P(t)$ установлено в следствии 4.2; при доказательстве этого факта прямое решение задачи (4.55), (4.57) не используется.

4.4. Конечномерный случай; аппроксимация

Для обоснования преобразований, проведенных в разд. 4.3, мы будем аппроксимировать нашу задачу аналогичными *конечномерными* задачами — к таким задачам приводит применение метода Фаедо — Галеркина.

Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — базис пространства V (в смысле разд. 1.4).

Пусть $y_m(v)$ обозначает m-е *приближение состояния*, являющееся решением задачи

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dy_m(t;\,v)}{dt},\ w_j\right)+a(t;\,y_m(t;\,v),\,w_j)=\\&\qquad=(f(t),\,w_j)+(B(t)\,v(t),\,w_j),\quad 1\leqslant j\leqslant m;\\&y_m(0;\,v)=y_{0m}=\sum_{i=1}^{m}\xi_{im}w_i\to y_0\quad\text{в}\ \ H\quad\text{при}\quad m\to\infty,\end{aligned}\right\}\tag{4.59}$$

где $y_m(t;\,v)$ принадлежит подпространству, порожденному элементами $w_1, \ldots, w_m$.

Рассмотрим функцию стоимости

$$J_m(v)=\int_0^T\|C(t)\,y_m(t;\,v)-z_{\text{д}}(t)\|_F^2\,dt+\int_0^T(N(t)\,v,\,v)_E\,dt\tag{4.60}$$

и будем искать

$$\inf_v J_m(v)\quad\text{при}\quad v\in L^2(0,\,T;\,E)=\mathcal{U}.$$

Пусть u_m обозначает m-е *приближение оптимального управления*. Определим m-е *приближение сопряженного состояния* $p_m(t;\,v)$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\left(-\frac{dp_m(t;\,v)}{dt},\ w_j\right)+a^*(t;\,p_m(t;\,v),\,w_j)=\\&\qquad=(Cy_m(t;\,v)-z_{\text{д}},\,C(t)\,w_j)_E,\quad 1\leqslant j\leqslant m;\\&p_m(T;\,v)=0,\end{aligned}\right\}\tag{4.61}$$

где $p_m(t;\,v)$ принадлежит подпространству, порожденному элементами $w_1, \ldots, w_m$.

Для оптимального управления u_m удовлетворяются соотношения (4.59), (4.61) (при $v = u_m$) и

$$B^* p_m + \Lambda_E N u_m = 0. \tag{4.62}$$

Исключая отсюда u_m, получаем (в обозначениях разд. 4.1) задачу

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dy_m}{dt}, w_j\right) + a(t; y_m, w_j) + (D_1(t) p_m, w_j) = (f(t), w_j), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leqslant j \leqslant m; \\ &\left(-\frac{dp_m}{dt}, w_j\right) + a^*(t; p_m, w_j) - (D_2(t) y_m, w_j) = (g(t), w_j), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leqslant j \leqslant m; \\ &y_m(0) = y_{0m} \to y_0, \quad p_m(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения разд. 4.1, функция стоимости $J_m(v)$ для приближенной задачи порядка m (4.59) имеет вид (4.60), а оптимальное управление u_m получается из решения задачи (4.63) согласно соотношению (4.62). Тогда*

$$\inf_v J_m(v) = J_m(u_m) \to \inf_v J(v) = J(u);$$

$$u_m \to u \quad \textit{сильно в} \quad L^2(0, T; E) = \mathcal{U};$$

$$y_m \to y, \ p_m \to p \quad \textit{сильно в} \quad L^2(0, T; V).$$

Доказательство. Как известно (см. примечание 1 на стр. 114),

$$y_m(t; v) \to y(t; v) \quad \text{сильно в} \quad L^2(0, T; V).$$

Очевидно, что $J_m(u_m) \leqslant J_m(u) \to J(u)$, откуда $\overline{\lim}\, J_m(u_m) \leqslant \leqslant J(u)$. Так как

$$J_m(u_m) \geqslant \nu \int_0^T \|u_m\|_E^2\, dt,$$

то можно извлечь такую подпоследовательность $\{u_\mu\}$, что $u_\mu \to \tilde{u}$ слабо в пространстве $\mathcal{U}$. Тогда $y_\mu(u_\mu) \to y(\tilde{u})$ слабо в $L^2(0; T; V)$, так что $\underline{\lim}\, J_\mu(u_\mu) \geqslant J(\tilde{u})$. Следовательно, $\tilde{u} = u$. Итак,

$$J_m(u_m) \to J(u) \ \text{и} \ u_m \to u \ \text{слабо в} \ \mathcal{U},$$

и потому

$$y_m = y_m(u_m) \to y(u) \ \text{слабо в} \ L^2(0, T; V)$$

и

$$p_m = p_m(u_m) \to p(u) \ \text{слабо в} \ L^2(0, T; V).$$

Но так как $J_m(u_m) \to J(u)$, то (рассуждаем от противного)

$$\int_0^T (Nu_m, u_m)\, dt \to \int_0^T (Nu, u)\, dt.$$

Отсюда, поскольку $u_m \to u$ слабо в $\mathcal{U}$, следует, что $u_m \to u$ *сильно* в $\mathcal{U}$ и утверждение теоремы очевидно.

Теперь можно «расцепить» конечномерную задачу (4.63), как мы это делали в предыдущем разделе.

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} V_m \text{ — подпространство, порожденное} \\ \qquad \text{элементами } w_1, \ldots, w_m. \end{array}\right\} \tag{4.64}$$

Рассмотрим в подпространстве V_m задачу, аналогичную задаче (4.12), (4.13):

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{d\varphi_m}{dt}, w_j\right) + a(t; \varphi_m, w_j) + (D_1(t)\psi_m, w_j) = (f(t), w_j), \\ \left(-\dfrac{d\psi_m}{dt}, w_j\right) + a^*(t; \psi_m, w_j) - (D_2(t)\varphi_m, w_j) = (g(t), w_j), \\ \varphi_m(s) = h, \qquad \psi_m(T) = 0, \end{array}\right\} \tag{4.65}$$

где $1 \leqslant j \leqslant m$, а h — данный элемент подпространства V_m. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \psi_m(s) = P_m(s)h + r_m(s), \\ P_m(s) \in \mathcal{L}(V_m; V_m), \ r_m(s) \in V_m, \ P_m^*(s) = P_m(s), \end{array}\right\} \tag{4.66}$$

и мы имеем тождество

$$p_m(t) = P_m(t)\, y_m(t) + r_m(t). \tag{4.67}$$

Формальные преобразования, аналогичные выполненным в разд. 4.3, приводят к соотношениям

$$\left.\begin{array}{l} \left(-\dfrac{dP_m}{dt} w_i, w_j\right) + a(t; w_i, P_m w_j) + a^*(t; P_m w_i, w_j) + \\ + (D_1 P_m w_i, P_m w_j) = (D_2 w_i, w_j) \quad \forall i, j, \ 1 \leqslant i, j \leqslant m; \\ P_m(T) = 0 \end{array}\right\} \tag{4.68}$$

и

$$\left.\begin{array}{l} \left(-\dfrac{dr_m}{dt}, w_j\right) + a^*(t; r_m, w_j) + (P_m D_1 r_m, w_j) = \\ = (P_m f + g, w_j) \quad \forall j, \ 1 \leqslant j \leqslant m; \\ r_m(T) = 0. \end{array}\right\} \tag{4.69}$$

Обратно, пусть $P_m(t)$ — *локальное* решение системы уравнений Риккати (4.68), определенное на интервале (s, T), где $T - s$

достаточно мало. Пусть $r_m(t)$ — решение задачи (4.69), определенное на том же интервале. Тогда, если определить

$$p_m(s) = P_m(s)\, y_m(s) + r_m(s),$$

можно получить соотношение, аналогичное (4.52) (для размерности m), и аналогичную (4.49) оценку

$$|P_m(s)\, h| \leqslant C_1 |h| \qquad \forall h \in V_m, \tag{4.70}$$

где C_1 — константа, не зависящая от s и m.

Следовательно, решение P_m задачи (4.68) и решение r_m задачи (4.69) существуют глобально, т. е. на всем интервале $(0, T)$. Тем самым обоснованы равенства (4.68), (4.69), т. е. доказана

Теорема 4.2. *Если выполнены условия теоремы* 4.1, *то оператор* $P_m(t)$ *и функция* $r_m(t)$ *отображают отрезок* $[0, T]$ *соответственно в пространства* $\mathcal{L}(V_m; V_m)$ *и* V_m *и имеют измеримые и ограниченные производные по* t; *при этом* P_m — *решение системы Риккати* (4.68), *а* r_m — *решение задачи* (4.69). *Кроме того, выполняется неравенство* (4.70).

Теперь устремим m к бесконечности.

4.5. Предельный переход

Применяя аналог теоремы 4.1 к паре функций $\{\varphi_m, \psi_m\}$, где $\varphi_m(s) = h \in V_{m_0}$, $m \geqslant m_0$, получаем

$$\varphi_m \to \varphi \text{ и } \psi_m \to \psi \quad \text{сильно в} \quad L^2(s, T; V),$$

где $\{\varphi, \psi\}$ — решение задачи (4.14), (4.16), (4.17).

С помощью второго из уравнений (4.65) легко проверить оценку

$$|\psi_m(s)| \leqslant \text{const}, \tag{4.71}$$

а значит, можно считать, что $\psi_\mu(s) \to \chi$ слабо в пространстве H. Но

$$(\psi_\mu(s), w_j) = \int_s^T [a^*(t; \psi_\mu, w_j) - (D_2\varphi_\mu, w_j) - (g, w_j)]\, dt,$$

так что $(\chi, w_j) = (\psi(s), w_j)$ при всех j, откуда

$$\chi = \psi(s). \tag{4.72}$$

Поэтому

$$\psi_m(s) = P_m(s)\, h + r_m(s) \to \psi(s) = P(s)\, h + r(s) \quad \text{слабо в } H. \tag{4.73}$$

Положим в соотношении (4.73) сначала $h = 0$, а затем будем считать h произвольным; тогда

$$r_m(s) \to r(s) \quad \text{слабо в} \quad H \quad \forall s; \tag{4.74}$$

$$P_m(s)\, h \to P(s)\, h \quad \text{слабо в} \quad H \quad \forall h \in V_{m_0},\ \forall s. \tag{4.75}$$

В силу теоремы Лебега из соотношения (4.75) следует, что

$$(P_m(s)\,h,\ \overline{h}) \to (P\,(s)\,h,\ \overline{h}) \text{ в } L^1(0,\ T) \quad \forall h \in V_{m_0},\ \overline{h} \in H, \tag{4.76}$$

и, таким образом, справедлива

Теорема 4.3. *Если выполнены условия теоремы 4.2 и $m \to \infty$, то $P_m \to P$ в том смысле, что*

$$(P_m h,\ \overline{h}) \to (Ph,\ \overline{h}) \qquad \text{в } L^1(0,\ T) \qquad \forall h \in V_{m_0},\ h \in H$$

(m_0 — произвольное фиксированное число), а $r_m \to r$ слабо в пространстве $L^2(0,\ T;\ H)$.

4.6. Интегро-дифференциальное уравнение Риккати

Перейдем теперь к пределу в задачах (4.68) и (4.69) и получим соотношения (4.55) — (4.58). Возникающие при этом трудности связаны с нелинейностью задачи (4.68) (и наличием члена $P_m D_1 r_m$ в первом из равенств (4.69)).

Этот предельный переход мы совершим при *дополнительном*, довольно жестком, предположении [1]); в следующем разделе мы приведем пример, когда это предположение не выполняется, но тем не менее соотношения (4.55) — (4.58) можно непосредственно обосновать.

Это дополнительное предположение таково:

$$B\,(t) \in \mathscr{L}\,(E;\ H) \quad (\text{вместо } \mathscr{L}\,(E;\ V')) \tag{4.77}$$

и

$$\text{вложение пространства } V \text{ в } H \text{ вполне непрерывно} \tag{4.78}$$

(это условие не налагает никаких ограничений на отображения, если, например, множество Ω *ограничено*).

Лемма 4.7. *Если кроме условий теоремы 4.1 выполнены еще условия (4.77), (4.78) и $f \in L^2\,(0,\ T;\ H)$, то*

$$r \in W(0,\ T) \quad \left(\text{т. е. } r \in L^2(0,\ T;\ V),\ \frac{dr}{dt} \in L^2\,(0,\ T;\ V')\right). \tag{4.79}$$

Доказательство. Так как

$$(P_m D_1 r_m,\ w_j) = (D_1 r_m,\ P_m w_j), \quad (P_m f,\ w_j) = (f,\ P_m w_j),$$

то первое из соотношений (4.69) позволяет записать

$$\left(-\frac{dr_m}{dt},\ r_m\right) + a^*\,(t;\ r_m,\ r_m) = -D_1\,(r_m P_m r_m) + (f,\ P_m r_m) + (g,\ r_m).$$

1) Вероятно, излишнем.

Интегрируя это равенство от s до T и принимая во внимание оценку (4.70), получаем

$$\frac{1}{2}|r_m(s)|^2+\alpha\int_s^T\|r_m(\sigma)\|^2d\sigma-\lambda\int_s^T|r_m(\sigma)|^2d\sigma\leqslant$$
$$\leqslant c\int_s^T(|r_m|^2+|f|\cdot|r_m|+\|g\|_{V'}\cdot\|r_m\|)\,d\sigma,$$

откуда

$$|r_m(s)|^2+\int_s^T\|r_m(\sigma)\|^2d\sigma\leqslant C\int_s^T|r_m(\sigma)|^2d\sigma+$$
$$+C\int_s^T(|f(\sigma)|^2+\|g(\sigma)\|_{V'}^2)\,d\sigma. \qquad (4.80)$$

Используя неравенство Гронуола, заключаем, что

$$\int_0^T\|r_m(\sigma)\|^2d\sigma\leqslant\text{const}. \qquad (4.81)$$

Далее, из соотношений (4.69) следует, что

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dr_m}{dt},\ w_j\right)=(\rho_m(t),\ w_j)_V,\quad r_m(T)=0;\\&\text{функция } \rho_m \text{ ограничена в } L^2(0,\ T;\ V).\end{aligned}\right\} \qquad (4.82)$$

Продолжим ρ_m нулем вне интервала $(0,\ T)$. Так как $r_m(T)=0$, то можно считать, что

$$\left(\frac{dr_m}{dt},\ w_j\right)=(\rho_m(t),\ w_j)_V\quad\text{на}\quad\mathbf{R}.$$

Сделав преобразование Фурье по t ($\hat{\varphi}$ — преобразование Фурье для φ), будем иметь

$$i\tau(\hat{r}_m(\tau),\ w_j)=(\hat{\rho}_m(\tau),\ w_j)_V, \qquad (4.83)$$

где

$$\hat{r}_m(\tau)=\sum_{i=1}^m\hat{g}_{im}(\tau)\,w_i.$$

Умножим равенство (4.83) на $\overline{\hat{g}_{jm}(\tau)}$ и просуммируем затем по j; получим $|\tau|\cdot|\hat{r}_m(\tau)|^2\leqslant\|\hat{\rho}_m(\tau)\|\cdot\|\hat{r}_m(\tau)\|$, откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|\,|\hat{r}_m(\tau)|^2\,d\tau\leqslant\text{const}. \qquad (4.84)$$

Оценка (4.84) показывает, что производная порядка $^1/_2$ от функции r_m по переменной t ограничена в пространстве

$L^2(0, T; H)$ при $m \to \infty$. Согласно лемме о компактности (см. Лионс [3, предложение 4.2]), можно извлечь такую подпоследовательность $\{r_\mu\}$, что

$$r_\mu \to r \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V)\ ^{1)},$$
$$r_\mu \to r \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H)\ ^{2)}.$$

Поэтому

$$\int_0^T (P_\mu D_1 r_\mu, w_j\varphi)\,dt = \int_0^T (D_1 r_\mu, P_\mu w_j \varphi)\,dt \to$$
$$\to \int_0^T (D_1 r, P w_j \varphi)\,dt \quad \forall \varphi \in C^0[0, T],$$

и тогда, в частности,

$$(P_\mu D_1 r_\mu, w_j) \to (PD_1 r, w_j) \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'((0, T)).$$

Таким образом, в соотношениях (4.69) можно перейти к пределу при $m \to \infty$; в результате получим

$$\left(-\frac{dr}{dt}, w_j\right) + a^*(t; r, w_j) + (PD_1 r, w_j) = (Pf + g, w_j) \quad \forall j,$$

откуда и следует (4.56). Из него вытекает, что $dr/dt \in L^2(0, T; V')$, а потому соотношение (4.79) справедливо.

Теорема 4.4. *Пусть кроме условий теоремы* 4.1 *выполнены еще условия* (4.77), (4.78) *и* $f \in L^2(0, T; H)$. *Если* $\{y, p\}$ — *решение задачи* (4.9), (4.11), *определяющее оптимальное управление, то*

$$p = Py + r, \tag{4.85}$$

где оператор P *и функция* r *обладают следующими свойствами:*

$$\left.\begin{aligned} &P(t) \in \mathscr{L}(H; H), \quad P^*(t) = P(t);\\ &\textit{если } \eta \in W(0, T) \textit{ и } d\eta/dt + A(t)\eta \in L^2(0, T; H),\\ &\textit{то} \quad P(t)\eta \in W(0, T); \end{aligned}\right\} \tag{4.86}$$

P *удовлетворяет уравнению* (4.55) *в том смысле, что*

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dP}{dt}\eta + PA\eta + A^*P\eta + PD_1P\eta = D_2\eta\\ &\textit{для всех } \eta \in W(0, T), \textit{ для которых}\\ &d\eta/dt + A(t)\eta \in L^2(0, T; H),\ A\eta \in L^2(0, T; H), \end{aligned}\right\} \tag{4.87}$$

---

1) Этот факт вместе с оценкой (4.84) доказан для нелинейных задач Лионсом [6].

2) Мы уже знаем, что $r_m \to r$ слабо в пространстве $L^2(0, T; H)$ (см. теорему 4.3).

и граничному условию $P(T) = 0$; r — решение в пространстве $W(0, T)$ задачи (4.56), (4.58). Оператор P и функция r определяются однозначно.

Доказательство. Пусть функция η обладает указанными в (4.86) свойствами. Обозначим через p решение задачи

$$-\frac{dp}{dt} + A^*(t)p = D_2\eta + g, \qquad p(T) = 0,$$

а затем определим f формулой

$$f = \frac{d\eta}{dt} + A(t)\eta + D_1p; \qquad f \in L^2(0, T; H).$$

Если положить $y_0 = \eta(0)$, то пара $\{\eta, p\}$ будет решением задачи (4.9), (4.11). Следовательно, $p = P\eta + r$, и так как $r \in W(0, T)$ (см. лемму 4.7), то утверждения (4.86) справедливы.

Пусть Θ — пространство функций η, обладающих указанными в (4.87) свойствами (следовательно, $\eta' \in L^2(0, T; H)$). Тогда

$$\eta \to \frac{d}{dt}(P(t)\eta) - P(t)\left(\frac{d\eta}{dt}\right)$$

— линейное непрерывное отображение $\Theta \to L^2(0, T; V')$. На пересечении $\Theta \cap \mathscr{D}((0, T); H)$ оно совпадает с отображением $\eta \to P'(t)\eta = \frac{dP(t)}{dt}\eta$, где $P'(t)$ — обобщенная производная отображения $t \to P(t)$ отрезка $[0, T]$ в пространство $\mathscr{L}(H; H)$.

Таким образом, можно считать, что

$$\frac{d}{dt}(P(t)\eta) - P(t)\left(\frac{d\eta}{dt}\right) = P'(t)\eta = \left(\frac{dP(t)}{dt}\right)\eta$$

(на самом деле это соотношение полностью обосновано лишь при условии, что пересечение $\Theta_0 \cap \mathscr{D}((0, T); H)$ плотно в пространстве $\Theta_0 = \{\eta \mid \eta \in \Theta, \eta(0) = \eta(T) = 0\}$).

Проведенные в разд. 4.3 преобразования (при $y = \eta$) можно провести и здесь, так что, пользуясь введенными в начале доказательства обозначениями, получаем соотношение (4.87) и равенство (4.56). Поскольку, кроме того, должно быть $P(T)y(T) + r(T) = 0$ при любом $y(T)$, соотношения (4.57) и (4.58) доказаны.

Остается лишь показать, что соотношения (4.86), (4.87), (4.57) однозначно определяют оператор P, а (4.56), (4.58) — функцию r. Предположим, что P и r удовлетворяют указанным соотношениям.

Пусть y — решение задачи

$$\frac{dy}{dt}+Ay+D_1Py=f-D_1r, \qquad y(0)=y_0,$$

и пусть $p = Py + r$. Тогда легко проверить, что p удовлетворяет уравнению

$$-\frac{dp}{dt}+A^*p-D_2y=g,$$

а значит, пара $\{y, p\}$ служит решением задачи (4.9), (4.11). Отсюда и следует единственность P и r.

Замечание 4.2. *Нелинейное* уравнение (4.55) (или (4.87)) является эволюционным уравнением типа Риккати (конкретные примеры см. в следующем параграфе).

Замечание 4.3. Оператор $P(t)$ и функция $r(t)$ позволяют осуществить *синтез* оптимального управления (обратную связь): оптимальное управление определяется *через состояние* системы по формуле

$$u(t)=-N^{-1}(t)\Lambda_E^{-1}B^*(t)[P(t)y(t)+r(t)]. \tag{4.88}$$

Тем самым мы получаем обобщение результатов, известных для конечномерного случая (см. Калман [1], [2]), на ограниченные операторы.

Замечание 4.4. Если область определения оператора $A(t)$ в пространстве H не зависит от переменной t, т. е. $D(A(t)) = D$ при всех $t\in[0, T]$, то в соотношении (4.87) можно взять $\eta\in D$ *независимо* от t.

4.7. Связь с теорией Гамильтона — Якоби

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда в предыдущих задачах $f = 0$ и $z_д = 0$.

Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy(v)}{dt}+A(t)y(v)=B(t)v \quad \text{в} \quad (s, T);\\ &y(s; v)=h,\end{aligned}\right\} \tag{4.89}$$

а функция стоимости имеет вид (см. доказательство леммы 4.5)

$$\overset{\circ}{J}{}_s^h(v)=\int_s^T[\|Cy(t; v)\|_F^2+(Nv, v)_E]\,dt. \tag{4.90}$$

Положим

$$\mathscr{W}(h, s)=\frac{1}{2}\inf_{v} \overset{\circ}{J}{}_s^h(v), \qquad v\in L^2(s, T; E), \tag{4.91}$$

и поставим своей целью получить соотношение, которому удовлетворяют функции $\mathscr{W}$, $\partial\mathscr{W}/\partial s$ и $\partial\mathscr{W}/\partial h$ (производная понимается в смысле Фреше).

Заметим (см. (4.52)), что

$$\mathscr{W}(h, s)=\frac{1}{2}(P(s)h, h), \tag{4.92}$$

и, значит,

$$\frac{\partial\mathscr{W}(h, s)}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\frac{dP(s)}{ds}h,\ h\right), \qquad \frac{\partial\mathscr{W}(h, s)}{\partial h}=P(s)h.$$

Применяя равенство (4.87) (предполагается, что оно выполнено!), получаем (если $h\in V$)

$$-\frac{d}{ds}(P(s)h, h)+(A(s)h, P(s)h)+(P(s)h, A(s)h)+$$
$$+(N^{-1}(s)\Lambda_E^{-1}B^*(s)P(s)h,\ B^*(s)P(s)h)=(D_2(s)h,\ h)=\|C(s)h\|_F^2.$$

Таким образом, если ввести функцию

$$H^0(h, p, s)=\frac{1}{2}\|C(s)h\|_F^2-(p, A(s)h)-(N^{-1}(s)\Lambda_E^{-1}B^*(s)p, B^*(s)p) \tag{4.93}$$

(здесь h и p —«независимые переменные» в пространстве V), то

$$\frac{\partial\mathscr{W}(h, s)}{\partial s}+H^0\left(h, \frac{\partial\mathscr{W}(h, s)}{\partial h}, s\right)=0, \quad h\in V,\ s\in(0, T). \tag{4.94}$$

Введем гамильтониан

$$H(h, p, s, e)=\frac{1}{2}\|C(s)h\|_F^2-(p, A(s)h)+\frac{1}{2}(N(s)e, e)+(p, B(s)e). \tag{4.95}$$

Легко проверить, что

$$H^0(h, p, s)=\inf_{e\in E} H(h, p, s, e). \tag{4.96}$$

Следовательно, уравнение (4.94) можно записать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial\mathscr{W}(h, s)}{\partial s}+\inf_{e\in E} H\left(h, \frac{\partial\mathscr{W}(h, s)}{\partial h}, s, e\right)=0, \quad h\in V,\ 0<s<T. \tag{4.94'}$$

Уравнение (4.94′) (или (4.94)) представляет собой *уравнение Гамильтона — Якоби*. Разумеется, к нему нужно присоединить еще граничное условие

$$\mathcal{W}(h,\ T) = 0. \tag{4.97}$$

Замечание 4.5. Уравнение (4.94) — это дифференциальное уравнение с частными производными типа Фреше — Вольтерра. В рассматриваемом случае, когда ограничения на управление отсутствуют, оператор $h \to \partial\mathcal{W}(h,\ s)/\partial h$ линеен, но это свойство не является общим (см. разд. 4.8).

4.8. Случай наличия ограничений на управление

Возникает следующий естественный вопрос: можно ли получить уравнение (4.94′) в случае наличия ограничений на управление? Пользуясь методом динамического программирования (см. Беллман [1]), покажем, что *формально* это возможно.

Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in L^2(0,\ T;\ E),\ v(t) \in E_\partial\}, \tag{4.98}$$

где E_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства E. Введем функцию (ср. с (4.96))

$$\Pi^0(h, p, s) = \inf_{e \in E} \Pi(h, p, s, e) \tag{4.99}$$

и «проверим» (*формально*), что

$$\frac{\partial\mathcal{W}(h,\ s)}{\partial s} + \Pi^0\left(h,\ \frac{\partial\mathcal{W}(h,\ s)}{\partial h},\ s\right) = 0, \tag{4.100}$$

где теперь

$$\mathcal{W}(h,\ s) = \frac{1}{2} \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} \mathring{J}_s^h(v). \tag{4.101}$$

Возьмем число δ, $0 < \delta < T - s$ (потом δ устремим к нулю). Тогда

$$2\mathcal{W}(h,\ s) = \inf_v \Big\{ \int_s^{s+\delta} \|Cy(t;\ v)\|_F^2\, dt + \int_s^{s+\delta} (Nv,\ v)_E\, dt + \\ + \int_{s+\delta}^T [\|Cy(t;\ v)\|_F^2 + (Nv,\ v)_E]\, dt \Big\}.$$

Положим $v(s) = e$ (где $e \in E_\partial$). Из соотношений (4.89) получаем (подчеркнем еще раз, что наши рассуждения носят *формальный характер*), что

$$y(s + \delta;\ v) = y(s) + \delta\,[B(s)\,e - A(s)\,h] + O(\delta),$$

где $\delta^{-1} \| O(\delta) \| \to 0$ при $\delta \to 0$, а норма берется в смысле соответствующего пространства (в нашем случае пространства V'). Тогда

$$2\mathscr{W}(h, s) = \inf_v \Big\{\delta [\| C(s) h \|_F^2 + (N(s) e, e)_E] + \\ + \int_{s+\delta}^{T} [\| Cy(t; v) \|_F^2 + (Nv, v)_E] \, dt + O(\delta)\Big\}, \qquad (4.102)$$

где переменную v, по которой берется нижняя грань, можно рассматривать как *пару* $\{e, v|_{s+\delta}^{T}\}$.

В соотношении (4.102) функцию $y(t; v)$ можно рассматривать как состояние системы, описываемой на интервале $(s+\delta, T)$ уравнением (4.89) с начальным условием

$$y(s+\delta; v) = h + \delta [B(s) e - A(s) h] + O(\delta).$$

В таком случае

$$\inf_v \int_{s+\delta}^{T} [\| Cy(t; v) \|_F^2 + (Nv, v)_E] \, dt = \\ = 2\mathscr{W}(h + \delta [B(s) e - A(s) h], s + \delta) + O(\delta). \qquad (4.103)$$

Но («принцип оптимальности» Беллмана [1])

$$2\mathscr{W}(h, s) = \inf_{e \in E_\partial} \Big\{\delta [\| C(s) h \|_F^2 + (N(s) e, e)_E] + \\ + \inf_{\substack{v \in L^2(s+\delta, T; E) \\ v(t) \in E_\partial}} \int_{s+\delta}^{T} [\| Cy(t; v) \|_F^2 + (Nv, v)_E] \, dt + O(\delta)\Big\},$$

откуда

$$2\mathscr{W}(h, s) = \inf_{e \in E_\partial} \{\delta [\| C(s) h \|_F^2 + (N(s) e, e)_E] + \\ + 2\mathscr{W}(h + \delta [B(s) e - A(s) h], s + \delta) + O(\delta)\} = \\ = \inf_{e \in E_\partial} \Big\{\delta [\| C(s) h \|_F^2 + (N(s) e, e)_E] + 2\mathscr{W}(h, s) + \\ + 2\delta \left(\frac{\partial \mathscr{W}(h, s)}{\partial h}, B(s) e - A(s) h\right) + 2\delta \frac{\partial \mathscr{W}(h, s)}{\partial s} + O(\delta)\Big\}.$$

Так как члены $2\mathscr{W}(h, s)$ слева и справа взаимно уничтожаются, то после деления на 2δ имеем

$$\inf_{e \in E_\partial} \Big\{\frac{\partial \mathscr{W}(h, s)}{\partial s} + \left(\frac{\partial \mathscr{W}(h, s)}{\partial h}, B(s) e - A(s) h\right) + \\ + \frac{1}{2} \| C(s) h \|_F^2 + \frac{1}{2} (N(s) e, e)_E\Big\} = 0,$$

откуда и следует соотношение (4.100).

4.9. Дополнительные замечания[1])

4.9.1. Прямое исследование уравнения Риккати. Мы покажем сейчас, как можно провести «прямое» исследование некоторых систем типа (4.9) (т. е. не использующее связи этих систем с теорией управления).

Рассмотрим два гильбертовых пространства V_i $(i = 1,\ 2)$, $V_i \subset H$, V_i плотно в H, и два оператора A_1, A_2, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{aligned} & A_i \in \mathscr{L}(V_i;\ V_i'); \\ & (A_i v,\ v) \geqslant \alpha \| v \|^2_{V_i}, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V_i, \quad i = 1,\ 2. \end{aligned}\right\} \tag{4.104}$$

Речь будет идти о следующей «двухточечной граничной задаче»:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} + A_1 y - p = f, \\ & -\frac{dp}{dt} + A_2 p + y = g; \end{aligned}\right\} \tag{4.105}$$

$$y(0) = 0, \qquad p(T) = 0. \tag{4.106}$$

Замечание 4.6. С одной стороны, система (4.105) более общая, чем система (4.9), поскольку здесь допустимы соотношения $V_1 \neq V_2$, $A_2 \neq A_1^*$; с другой стороны, система (4.105) менее общая, чем система (4.9), поскольку здесь $D_1(t) = -I$, $D_2(t) = -I$. Добавим, что приведенные ниже исследования легко распространяются на случай, когда операторы A_1 и A_2 зависят от переменной t.

Ответ на вопрос о разрешимости системы (4.105) при граничных условиях (4.106) можно получить двумя способами.

(i) Положим

$$w = \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} d/dt & 0 \\ 0 & -d/dt \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & -I \\ I & A_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix};$$

тогда систему (4.105) можно записать в эквивалентной форме

$$\Lambda w + A w = F.$$

Заметим, что в силу граничных условий (4.106)

$$\int_0^T (\Lambda w,\ w)\, dt = \frac{1}{2} \{ | y(T) |^2 + | p(0) |^2 \} \geqslant 0,$$

[1]) Добавлено автором к английскому переводу книги.— *Прим. перев.*

а в силу предположений (4.104)

$$\int_0^T (Aw, w)\,dt = \int_0^T [(A_1y, y) + (A_2p, p)]\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \alpha \int_0^T [\|y(t)\|_{V_1}^2 + \|p(t)\|_{V_2}^2]\,dt.$$

Отсюда и следует существование и единственность решения задачи (4.105), (4.106) (Лионс и Мадженес [1, т. 1, теорема 1.1]). Более точные результаты получены Лионсом [3].

(ii) Другой метод, принадлежащий Куперу [1], применим при более ограничительных предположениях относительно операторов A_1, A_2, но зато он дает *сильное* решение. Именно, будем считать, что выполнены условия (4.104) и, кроме того, оба оператора A_i, $i = 1, 2$, симметричны, т. е.

$$(A_i\varphi, \psi) = (\varphi, A_i\psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in V_i, \qquad i = 1, 2. \tag{4.107}$$

Если положить

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & -I \\ -I & -A_2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}, \tag{4.108}$$

то систему (4.105) можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{dw}{dt} + \mathcal{A}w = G. \tag{4.109}$$

Умножим обе части равенства (4.109) скалярно на $\mathcal{A}w$ и заметим, что

$$\int_0^T \left(\frac{dw}{dt}, \mathcal{A}w\right) dt = \frac{1}{2}\{(A_1w_1(T), w_1(T)) + (A_2w_2(0), w_2(0))\} \geqslant 0.$$

Так как $\mathcal{A}$ — сюръективное отображение, то из этого неравенства следует существование и единственность решения задачи (4.105), (4.106). Более подробно этот вопрос изложен у Лионса [3].

4.9.2. Другой подход к прямому исследованию уравнения Риккати. Мы хотим упомянуть здесь, опуская технические детали, некоторые результаты Да Прато [1], [2]. Эти результаты касаются «прямого» исследования «абстрактного» дифференциального уравнения с частными производными вида (4.87) или более общего вида

$$-\frac{dP}{dt} + PA_1 + A_2P + \Phi(P) = B, \tag{4.110}$$

где B — данный оператор, A_1 и A_2 — не обязательно сопряженные друг к другу операторы, а Φ — некоторая нелинейная аналитическая функция.

В работе Да Прато [1] изучается случай, когда операторы A_i ($i = 1, 2$) не зависят от переменной t. Доказывается локальная теорема существования и единственности (решение $P(t)$ уравнения (4.110) однозначно определяется на малом отрезке $[T - \alpha, T]$); локальное решение является глобальным, если известна некоторая априорная оценка. Случай, когда операторы A_i зависят от переменной t, и соответствующие примеры рассмотрены в работе Да Прато [2]. При проведении доказательств используется вводимый специально новый класс полугрупп в пространстве линейных непрерывных отображений.

4.9.3. Еще один подход к прямому исследованию уравнения Риккати. Еще один метод «прямого» исследования уравнений Риккати типа (4.87) предложил Темам [1]; этот метод дает также возможность конструктивно построить приближенное решение (соответствующие алгоритмы вместе с численными расчетами см. у Неделека [1]).

Изложим вкратце суть этого метода. Рассмотрим уравнение типа (4.87). Для того чтобы воспользоваться более привычными обозначениями, обратим время t и обозначим неизвестный оператор через Q:

$$\frac{dQ}{dt} + A^*Q + QA + QQ = F, \tag{4.111}$$

$$Q(0) = Q_0. \tag{4.112}$$

Описываемый метод применим также и в случае, когда в уравнении (4.111) вместо члена QQ стоит произведение $Q \ldots Q$ произвольного числа сомножителей.

Пусть $\mathscr{H}$ — пространство операторов $H \to H$ типа Гильберта — Шмидта [1]). Предположим, что

$$\left.\begin{array}{ll} F \in L^2(0, T; \mathscr{H}), & F(t) \geqslant 0; \\ Q_0 \in \mathscr{H}, & Q_0 \geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{4.113}$$

Приближенное значение Q^n оператора Q в момент времени $n\Delta t$ определяется следующим образом. Положим $Q^0 = Q_0$. Если значение Q^n уже известно ($Q^n \in \mathscr{H}$, $Q^n \geqslant 0$), то значение Q^{n+1} находится в три этапа (это вариант хорошо известного «метода дробных шагов», см. Яненко [1], Темам [3]):

(i) находим $Q^{n+1/3}$ из равенства

$$\frac{Q^{n+1/3} - Q^n}{\Delta t} + Q^n Q^{n+1/3} = 0; \tag{4.114}$$

в результате однозначно определяется оператор $Q^{n+1/3} \in \mathscr{H}$, $Q^{n+1/3} \geqslant 0$;

[1]) Снабженное естественной структурой гильбертова пространства.

(ii) находим $Q^{n+2/3}$ из равенства

$$\frac{Q^{n+2/3}-Q^{n+1/3}}{\Delta t}+Q^{n+2/3}A=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}F(\sigma)\,d\tau; \qquad (4.115)$$

в результате однозначно определяется оператор $Q^{n+2/3}$: $V' \to H$ типа Гильберта — Шмидта;

(iii) находим Q^{n+1} из равенства

$$\frac{Q^{n+1}-Q^{n+2/3}}{\Delta t}+A^*Q^{n+1}=0; \qquad (4.116)$$

в результате однозначно определяется оператор $Q^{n+1}\in\mathscr{H}$, $Q^{n+1}\geqslant 0$ (причем Q^{n+1}: $H \to V$ есть оператор типа Гильберта — Шмидта).

Можно получить далее «энергетические оценки» (см. Темам [1]). Определяя $Q_{\Delta t}$ как кусочно постоянную функцию, равную Q^n на $[n\Delta t, (n+1)\Delta t)$, можно доказать, что (в подходящим образом введенной топологии) $Q_{\Delta t}$ стремится при $\Delta t \to 0$ к решению Q задачи (4.111), (4.112), обладающему следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} Q\in L^2(0,T;\mathscr{V}),\ \text{где } \mathscr{V} \text{ — пространство операторов} \\ V'\to H \text{ и } H\to V \text{ типа Гильберта — Шмидта;} \\ Q\in L^\infty(0,\ T;\ \mathscr{H});\quad Q(t)\geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (4.117)$$

Замечание 4.7. Свойства регулярности решения задачи (4.111), (4.112) (в предположении регулярности данных элементов) изучал Темам [1].

Замечание 4.8. Метод Темама применим и в случае, когда A — оператор произвольного *четного* порядка. В том специальном случае, когда A — эллиптический оператор второго порядка, другой путь «прямого» изучения уравнения Риккати предложил Кушнер [1].

Замечание 4.9. Метод дробных шагов применяется для решения некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. Демидов и Марчук [1], Темам [2], Лионс [13, гл. 4]).

Замечание 4.10. Еще один подход к исследованию задачи (4.111), (4.112), использующий нелинейные полугруппы, разработал Брезис [4] [1]). Он рассмотрел также *вариационные неравенства*, связанные с уравнением (4.111). Отметим, что вопрос интерпретации этих неравенств в терминах теории оптимального управления остается открытым.

1) См. также Брезис [5].— *Прим. перев.*

§ 5. Расщепление и интегро-дифференциальное уравнение Риккати (II)

5.1. Приложение теоремы Шварца о ядрах

Рассмотрим случай 3.1.1 из разд. 3.1. В дополнение к сформулированным там предположениям будем считать, что $E = H = L^2(\Omega)$, $B(t)$ — тождественный оператор (так что применима теорема 4.4), $N(t) = N$, $C_1(t)$ — вложение $V \to H$, $D_2(t)$ — тождественный оператор, $D_1(t) = N^{-1}$.

Согласно теореме Шварца о ядрах (Шварц [2], [3]),

$$P(t)\varphi = \int_\Omega P(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{5.1}$$

где $P(x, \xi, t)$ — *ядро* оператора $P(t)$, т. е. распределение на $\Omega_x \times \Omega_\xi$, определяемое однозначно по оператору $P(t)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены сделанные только что предположения. Тогда ядро $P(x, \xi, t)$ оператора $P(t)$, обладающего свойствами, указанными в теореме 4.4, удовлетворяет соотношениям*

$$-\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial t} + (A_x^* + A_\xi^*)P(x, \xi, t) + \\ + \int_\Omega P(x, \zeta, t)N^{-1}P(\zeta, \xi, t)\,d\zeta = \delta(x - \xi), \tag{5.2}$$

$$P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &P(x, \xi, t) = 0,\ x \in \Gamma,\ \xi \in \Omega,\ t \in (0, T) \\ &(\text{и тогда в силу } (5.3)\ P(x, \xi, t) = 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \Gamma, \\ &\qquad\qquad t \in (0, T)); \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

$$P(x, \xi, T) = 0, \quad x, \xi \in \Omega_x \times \Omega_\xi. \tag{5.5}$$

Замечание 5.1. Ядро $P(x, \xi, t)$ обладает, кроме того, свойствами регулярности, соответствующими свойствам, указанным в (4.86). В рассматриваемом случае можно получить, однако, более сильный результат. Действительно, как легко видеть — по крайней мере, если в выражении для оператора $A(x, t, \partial/\partial x)$ коэффициенты достаточно регулярны,—

$$P(t) \in \mathscr{L}(L^2(\Omega);\ H_0^1(\Omega)). \tag{5.6}$$

Таким образом, в теореме установлено существование глобального решения нелинейной задачи (5.2) — (5.5) в некотором специальном классе функций (которые рассматриваются как ядра линейных отображений). В нелинейных задачах выбор пространства, в котором ищется решение, играет весьма существенную роль (гораздо более важную, чем в случае линейных задач).

Доказательство теоремы 5.1. Равенство (5.3) следует из того, что $P^*(t) = P(t)$, а равенство (5.5) вытекает из соотношения $P(T) = 0$. Если (например) $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, то должно выполняться соотношение $P(t)\varphi \in L^2(0, T; V)$, а значит, $P(t) = 0$ на поверхности $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ (так как $V = H_0^1(\Omega)$ и, следовательно, выполняется соотношение (5.4)).

Заметим, что (для $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$)

$$PA\varphi(x) = \int_\Omega P(x, \xi, t) A_\xi \varphi(\xi)\, d\xi = \int_\Omega A_\xi^* P(x, \xi, t)\varphi(\xi)\, d\xi,$$

откуда видно, что ядром оператора $P(t) A$ является $A_\xi^* P(x, \xi, t)$. Тогда (поскольку $\delta(x - \xi)$ есть ядро тождественного оператора) из соотношения (4.87) получаем равенство (5.2).

Замечание 5.2. Соотношения (5.2) — (5.5) представляют собой нелинейную задачу для уравнения с частными производными параболического типа с нелинейностью «типа Риккати».

Замечание 5.3. Результаты разд. 4.4 и 4.5 показывают, что можно аппроксимировать оператор P, следуя методу Галеркина.

5.2. Пример: смешанная задача Неймана с граничным управлением

Рассмотрим систему, описываемую уравнением (3.16); функция стоимости имеет вид (3.21) (пример 3.5).

В этом случае пара $\{y, p\}$ определяется как решение задачи (3.25). Можно применить далее результаты § 4, кроме тех (основных!), которые содержатся в разд. 4.6: так как в данном случае оператор $B(t) \in \mathscr{L}(L^2(\Gamma); V')$ [1]) определяется соотношением

$$(Bu, \psi) = (B(t)u, \psi) = \int_\Gamma u\psi\, d\Gamma,$$

то условие (4.77) не выполняется. Тем не менее окончательные результаты, как мы увидим, остаются в силе; чтобы в этом убедиться, надо рассуждать, как и в общем случае, но принять во внимание специфику рассматриваемой частной задачи.

---

[1]) На самом деле справедливо более сильное утверждение: $\forall\, \varepsilon > 0$ $B \in \mathscr{L}(L^2(\Gamma); (H^{1/2+\varepsilon}(\Omega))')$, но и этого недостаточно для возможности применить результаты разд. 4.6.

Выпишем для нашей задачи соотношения (4.28) — (4.31), определяющие оператор $P(s)$ и функцию $r(s)$: ператор $P(s)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\beta}{\partial t}+A\beta=0,\ -\frac{\partial\gamma}{\partial t}+A^*\gamma-\beta=0\quad \text{в}\quad \Omega\times(s,T);\\ &\frac{\partial\beta}{\partial\nu_A}+N^{-1}\gamma=0,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial\nu_{A^*}}=0\quad \text{на}\quad \Gamma\times(s,T);\\ &\beta(x,s)=h(x),\quad \gamma(x,T)=0,\quad x\in\Omega\\ &(h\ \text{— данный элемент пространства}\ L^2(\Omega)),\end{aligned}\right\}\tag{5.7}$$

а именно

$$P(s)\,h=\gamma(0,s);\tag{5.8}$$

функция $r(s)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\eta}{\partial t}+A\eta=f,\ -\frac{\partial\xi}{\partial t}+A^*\xi-\eta=-z_{\text{д}}\quad \text{в}\quad \Omega\times(s,T);\\ &\frac{\partial\eta}{\partial\nu_A}+N^{-1}\xi=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial\nu_{A^*}}=0\quad \text{на}\quad \Gamma\times(s,T);\\ &\eta(x,s)=0,\quad \xi(x,T)=0,\quad x\in\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

а именно

$$r(x,s)=\xi(x,s),\ x\in\Omega.\tag{5.10}$$

Теорема 5.2. *Пусть в выражении для оператора $A(x, t, \partial/\partial x)$ коэффициенты регулярны*[1]) *в цилиндре $\bar\Omega\times[0,T]$ и граница Γ регулярна*[2]). *Тогда оператор $P(t)$ удовлетворяет соотношениям*

$$-(P'\varphi,\psi)+a(t;\varphi,P\psi)+a^*(t;P\varphi,\psi)+\\ +(N^{-1}P\varphi,P\psi)_{L^2(\Gamma)}=(\varphi,\psi)\quad \forall\varphi,\psi\in H^1(\Omega),\tag{5.11}$$

$$P(T)=0,\ P^*(t)=P(t);\tag{5.12}$$

а функция $r(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$-(r',\psi)+a^*(t;r,\psi)+(N^{-1}r,P\psi)_{L^2(\Gamma)}=\\ =(Pf-z_{\text{д}},\psi)\quad \forall\psi\in H^1(\Omega),\tag{5.13}$$

$$r(T)=0.\tag{5.14}$$

---

[1]) Например, дважды непрерывно дифференцируемы.

[2]) Например, дважды непрерывно дифференцируема.

Если, кроме того, $N = \nu I$, $\nu > 0$, то ядро $P(x, \xi, t)$ оператора $P(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial t} + (A_x^* + A_\xi^*) P(x, \xi, t) + \\ &+\nu^{-1}\int_\Gamma P(x, \zeta, t) P(\zeta, \xi, t)\, d\Gamma_\zeta = \delta(x-\xi) \text{ в } \Omega_x \times \Omega_\xi \times (0, T); \end{aligned}\right\} \quad (5.15)$$

$$P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t); \quad (5.16)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A_x^*}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ &\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A_\xi^*}} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \Gamma, \quad t \in (0, T); \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

$$P(x, \xi, T) = 0, \quad x, \xi \in \Omega_x \times \Omega_\xi. \quad (5.18)$$

Доказательство. 1) Заметим прежде всего, что

$$P(s) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega)). \quad (5.19)$$

Действительно, пусть β, γ — решение задачи (5.7); как известно, $\beta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Рассмотрим совокупность соотношений

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial \gamma}{\partial t} + A^*\gamma = \beta \quad \text{в} \quad \Omega \times (s, T); \\ &\frac{\partial \gamma}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (s, T); \quad \gamma(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\}$$

как граничную задачу для функции γ. Тогда в силу сделанных предположений о регулярности (ср. со случаем задачи Дирихле в примере 3.1) $\gamma \in H^{2,1}(\Omega \times (s, T))$, и потому $\gamma(x, s) \in H^1(\Omega)$. Отсюда и следует (5.19) (непрерывность оператора $P(s)$ проверяется непосредственно [1])).

Легко видеть, что $s \to P(s)h$ есть непрерывное отображение $[0, T] \to H^1(\Omega)$. Тогда $P(t)y(t) \in L^2(0, T; V)$ (где $V = H^1(\Omega)$), и в силу равенства (4.27)

$$r = p - Py \in L^2(0, T; V).$$

Сделав замену $t = s + \tau(T - s)$ (ср. с доказательством леммы 4.4), нетрудно убедиться, что

$$\left.\begin{aligned} &s \to P(s)h \text{ — непрерывно дифференцируемое} \\ &\text{отображение } [0, T] \to V. \end{aligned}\right\} \quad (5.20)$$

[1]) Или с помощью теоремы о замкнутом графике.

2) Формальные преобразования разд. 4.3 можно теперь обосновать. Мы проведем их сейчас применительно к рассматриваемой задаче [1]).

Запишем задачу (3.25) в вариационной форме:

$$\left.\begin{aligned} &(y', \varphi) + a(t; y, \varphi) + (N^{-1}p, \varphi)_{L^2(\Gamma)} = (f, \varphi) \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega); \\ &-(p', \psi) + a^*(t; p, \psi) - (y, \psi) = -(z_д, \psi) \quad \forall\psi \in H^1(\Omega); \\ &y(0) = y_0, \quad p(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

Используя тождество $p = Py + r$, из второго уравнения (5.21) получаем

$$-(P'y + Py' + r', \psi) + a^*(t; Py + r, \psi) - (y, \psi) = -(z_д, \psi). \tag{5.22}$$

Но так как $-(Py', \psi) = -(y', P\psi)$ и, согласно первому из уравнений (5.21),

$$-(y', P\psi) = a(t; y, P\psi) + (N^{-1}p, P\psi)_{L^2(\Gamma)} - (f, P\psi),$$

то равенство (5.22) принимает вид

$$\begin{aligned} -(P'y, \psi) + a(t; y, P\psi) + a^*(t; Py, \psi) + (N^{-1}p, P\psi)_{L^2(\Gamma)} - \\ -(y, \psi) - (r', \psi) + a^*(t; r, \psi) - (f, P\psi) = -(z_д, \psi). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Заменяя в нем p на $Py + r$, находим

$$\begin{aligned} [-(P'y, \psi) + a(t; y, P\psi) + a^*(t; Py, \psi) + (N^{-1}Py, P\psi)_{L^2(\Gamma)} - \\ -(y, \psi)] + [-(r', \psi) + a^*(t; r, \psi) - (Pf - z_д, \psi)] = 0 \ \forall\psi \in H^1(\Omega) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Фиксируем $t = s$ (что имеет смысл почти всюду); так как $y(s)$ можно выбрать заранее произвольным образом, то из равенства (5.24) получаем (5.11), а затем и (5.13).

3) Ядро $P(x, \xi, t)$ оператора $P(t)$ удовлетворяет соотношению (5.16), поскольку $P^*(t) = P(t)$. При $N = \nu I$ можно *формально* провести следующие преобразования (используя ядра операторов):

$$a(t; \varphi, P\psi) + a^*(t; P\varphi, \psi) + \nu^{-1}(P\varphi, P\psi)_{L^2(\Gamma)} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega\times\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial x_j} \psi(\xi)\, dx\, d\xi +$$

[1]) В конкретных примерах проще проделать эти преобразования заново, чем применять общую теорию и выписывать выражения для операторов — *методы, изложенные в § 4, более важны, чем полученные там результаты.*

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega\times\Omega} a_{ji}(x,\,t)\,\frac{\partial P(x,\,\xi,\,t)}{\partial x_i}\,\varphi(\xi)\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\,dx\,d\xi+$$

$$+\nu^{-1}\int_{\Omega\times\Omega}\Big(\int_{\Gamma} P(x,\,\zeta,\,t)\,P(\zeta,\,\xi,\,t)\,d\Gamma_\zeta\Big)\varphi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi=$$

(в силу равенства $P(x,\,\xi,\,t)=P(\xi,\,x,\,t)$)

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega\times\Omega} a_{ij}(x,\,t)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial P(x,\,\xi,\,t)}{\partial x_j}\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega\times\Omega} a_{ij}(\xi,\,t)\,\frac{\partial P(x,\,\xi,\,t)}{\partial\xi_j}\,\varphi(x)\,\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi_j}\,dx\,d\xi+$$

$$+\nu^{-1}\int_{\Omega\times\Omega}\Big(\int_{\Gamma} P(x,\,\zeta,\,t)\,P(\zeta,\,\xi,\,t)\,d\Gamma_\zeta\Big)\varphi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi=$$

(по формуле Грина)

$$=\int_{\Gamma_x\times\Omega_\xi}\frac{\partial P(x,\,\xi,\,t)}{\partial\nu_{A_x^*}}\,\varphi(x)\,\psi(\xi)\,d\Gamma_x\,d\xi+\int_{\Omega\times\Omega}(A_x^*P)\,\varphi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi+$$

$$+\int_{\Omega_x\times\Gamma_\xi}\frac{\partial P(x,\,\xi,\,t)}{\partial\nu_{A_\xi^*}}\,\varphi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\Gamma_\xi+\int_{\Omega\times\Omega}(A_\xi^*P)\,\varphi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi+$$

$$+\nu^{-1}\int_{\Omega\times\Omega}\Big(\int_{\Gamma} P(x,\,\zeta,\,t)\,P(\zeta,\,\xi,\,t)\,d\Gamma_\zeta\Big)\varphi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (5.11), приходим к соотношениям (5.15) и (5.17).

Замечание 5.4. Было бы интересно построить решение задачи типа (5.15) — (5.18) прямыми методами и получить утверждения о регулярности ядра.

5.3. Пример: смешанная задача Неймана с финальным наблюдением

Рассмотрим систему, описываемую уравнением (3.16); функция стоимости имеет вид (3.31) (пример 3.7).

В этом случае пара $\{y,\,p\}$ определяется как решение задачи (3.35) и можно непосредственно применить рассуждения § 4.

Оператор $P(s)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\beta}{\partial t}+A\beta=0,\quad -\frac{\partial\gamma}{\partial t}+A^*\gamma=0\ \text{ в }\ \Omega\times(s,\,T);\\&\frac{\partial\beta}{\partial\nu_A}+N^{-1}\gamma=0,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial\nu_{A^*}}=0\ \text{ на }\ \Gamma\times(s,\,T);\\&\beta(x,\,s)=h(x),\quad \gamma(x,\,T)=\beta(x,\,T),\quad x\in\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{5.25}$$

а именно

$$P(s)\,h = \gamma(0, s); \tag{5.26}$$

функция $r(s)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\eta}{\partial t} + A\eta = f, \quad -\frac{\partial\xi}{\partial t} + A^*\xi = 0 \ \text{в}\ \Omega\times(s, T);\\
&\frac{\partial\eta}{\partial\nu_A} + N^{-1}\xi = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial\nu_{A*}} = 0 \ \text{на}\ \Gamma\times(s, T);\\
&\eta(x, s) = 0, \quad \xi(x, T) = \eta(x, T), \quad x\in\Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

а именно

$$r(x, s) = \xi(x, s), \qquad x\in\Omega. \tag{5.28}$$

Если выполнены условия теоремы 5.2, то в силу регулярности решений параболических задач $r(s)\in H^1(\Omega)$ и $s\to r(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция $[0, T]\to H^1(\Omega)$. Поэтому, исходя из тождества

$$p(t) = P(t)\,y(t) + r(t), \tag{5.29}$$

можно провести преобразования, аналогичные приведенным в разд. 4.3.

Заметим, что задача (3.35) записывается в вариационной форме следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&(y', \varphi) + a(t; y, \varphi) + (N^{-1}p, \varphi)_{L^2(\Gamma)} = (f, \varphi) \ \ \forall\varphi\in H^1(\Omega);\\
&-(p', \psi) + a^*(t; p, \psi) = 0 \qquad \forall\psi\in H^1(\Omega);\\
&y(0) = y_0, \quad p(T) - y(T) = -z_д.
\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Точно так же, как и теорема 5.2, доказывается

Теорема 5.3. *Если выполнены условия теоремы* 5.2, *то оператор* $P(t)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\left.\begin{aligned}
&-(P'\varphi, \psi) + a(t; \varphi, P\psi) + a^*(t; P\varphi, \psi) +\\
&\qquad + (N^{-1}P\varphi, P\psi)_{L^2(\Gamma)} = 0 \ \ \forall\varphi, \psi\in H^1(\Omega),
\end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

$$P(T) = I \quad \text{в}\ \ H, \tag{5.32}$$

$$P^*(t) = P(t), \tag{5.33}$$

а функция $r(t)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$-(r', \psi) + a^*(t; r, \psi) + (N^{-1}r, P\psi)_{L^2(\Gamma)} = (f, P\psi) \ \ \forall\psi\in H^1(\Omega), \tag{5.34}$$

$$r(T) = -z_д. \tag{5.35}$$

Если, кроме того, $N=\nu I$, $\nu>0$, то ядро $P(x, \xi, t)$ оператора $P(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial t}+(A_x^*+A_\xi^*)P(x, \xi, t)+\\ &+\nu^{-1}\int_\Gamma P(x, \zeta, t)P(\zeta, \xi, t)\,d\Gamma_\zeta=0 \text{ в } \Omega_x\times\Omega_\xi\times(0, T); \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

$$P(x, \xi, T)=\delta(x-\xi), \quad x, \xi\in\Omega_x\times\Omega_\xi; \tag{5.37}$$

$$P(x, \xi, t)=P(\xi, x, t); \tag{5.38}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A_x^*}}=0, \quad x\in\Gamma, \ \xi\in\Omega, \ t\in(0, T),\\ &\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A_\xi^*}}=0, \quad x\in\Omega, \ \xi\in\Gamma, \ t\in(0, T). \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

Замечание 5.5. Изложенный выше *метод* доказательства теоремы 5.2 общий; его можно использовать при рассмотрении любого из приведенных в этой главе примеров.

5.4. Пример: смешанная задача Неймана с финальным наблюдением и управлением из векторного подпространства

Снова рассмотрим систему, описываемую уравнением (3.16); функция стоимости имеет вид (3.31) (разд. 3.2). Предположим, что

$$\mathcal{U}_\partial=\{v \mid v \text{ с носителем в } \Sigma_1, \ \Sigma_1\subset\Sigma\}, \tag{5.40}$$

т. е. $\mathcal{U}_\partial$ — замкнутое векторное *подпространство* пространства $\mathcal{U}$.

Тогда оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t}+Ay=f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t}+A^*p=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}}=0 \text{ на } \Sigma, \ \frac{\partial y}{\partial \nu_A}=0 \text{ на } \Sigma-\Sigma_1, \ p+N\frac{\partial y}{\partial \nu_A}=0 \text{ на } \Sigma_1;\\ &y(x, 0)=y_0(x), \qquad p(x, T)=y(x, T)-z_д(x), \qquad x\in\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

а именно

$$u=\left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_{\Sigma_1}.$$

Расцепление задачи (5.41) возможно, но это связано с большими трудностями, за исключением случая, когда

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \qquad \Gamma_1 \subset \Gamma. \tag{5.42}$$

Если условие (5.42) выполнено и $N = \nu I$, $\nu > 0$, то для ядра $P(x, \xi, t)$ получаем уравнение (ср. с (5.36))

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + (A_x^* + A_\xi^*) P + \nu^{-1} \int_{\Gamma_1} P(x, \zeta, t) P(\zeta, \xi, t)\, d\Gamma_\zeta = 0, \tag{5.43}$$

а соотношения (5.37) — (5.39) остаются без изменений.

5.5. Замечания о расцеплении при наличии ограничений на управление

Пусть в дополнение к предположениям разд. 4.1

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U},\ v(t) \in E_\partial \text{ почти всюду}\}, \tag{5.44}$$

где E_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства E. Тогда оптимальное управление u определяется по теореме 2.1, а в силу теоремы 2.1 гл. 2 условие (2.21) эквивалентно условию

$$\left.\begin{gathered}(\Lambda_u^{-1} B^* p(t; u) + Nu(t),\ e - u(t))_E \geqslant 0 \quad \forall e \in E_\partial\\ \text{для почти всех } t.\end{gathered}\right\} \tag{5.45}$$

Сделаем еще одно предположение (относительно множества E_∂):

$$\left.\begin{gathered}\text{для любого } \xi \in E,\ \xi \neq 0, \text{ существует единст-}\\ \text{венный элемент } \Phi(\xi) \in E_\partial, \text{ для которог}\\ (\xi,\ e - \Phi(\xi))_E \geqslant 0 \quad \forall e \in E_\partial.\end{gathered}\right\} \tag{5.46}$$

Пример 5.1. Пусть $E_\partial = \{e \mid \|e\|_E \leqslant M\}$. Тогда

$$\Phi(\xi) = -\xi \frac{M}{\|\xi\|_E}.$$

В силу предположения (5.46) условие (5.45) эквивалентно условию

$$\left.\begin{aligned}&\text{либо} \quad u(t) = \Phi(\Lambda_u^{-1} B^* p(t; u) + Nu(t)),\\ &\qquad \text{если} \quad \Lambda_u^{-1} B^* p(t; u) + Nu(t) \neq 0,\\ &\text{либо} \quad \Lambda_u^{-1} B^* p(t; u) + Nu(t) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

Теперь можно расцепить задачу (2.19), (2.20), (5.47) следующим образом. В интервале (s, T), $0 < s < T$, рассмотрим (ср.

с леммой 4.1) нелинейную задачу

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dt}+A\varphi=f+B(t) \text{ в } (s,\,T);\\&-\frac{d\psi}{dt}+A^*\psi=C^*\Lambda_E(C\varphi-z_{\text{д}}) \text{ в } (s,\,T);\\&\varphi(s)=h,\quad \psi(T)=0,\\&u \text{ удовлетворяет (5.47) почти всюду в } (s,T).\end{aligned}\right\}\qquad(5.48)$$

Эта задача имеет единственное решение, с помощью которого можно определить отображение

$$h \to \psi(s) \qquad (5.49)$$

пространства H в себя. Но в силу условия (5.47) отображение (5.49) *не является* аффинным; именно из-за этого простой результат, аналогичный «интегро-дифференциальному уравнению Риккати», не получается. См. также § 14.

§ 6. Поведение при $T \to \infty$

6.1. Предположения

До сих пор мы считали, что $T < \infty$. Рассмотрим теперь вопрос, как оптимальное управление, оператор $P(t)$ и т. д. зависят от T и как они себя ведут при $T \to +\infty$.

Пусть выполнены предположения разд. 4.1; будем считать, кроме того, что

$$a(t;\ \varphi,\ \varphi) \geqslant \alpha\,\|\varphi\|^2,\ \alpha > 0,\quad \forall t \geqslant 0,\qquad \forall \varphi \in V\,^{1)}. \qquad (6.1)$$

Предположим, что операторы $B(t)$, $C(t)$, $N(t)$ (разд. 4.1) определены для всех $t \geqslant 0$, причем

$$\|B(t)\|_{\mathscr{L}(E;V')} \leqslant c,\ \|C(t)\|_{\mathscr{L}(V;F)} \leqslant c,\ \|N(t)\|_{\mathscr{L}(E;V')} \leqslant c\quad \forall t \geqslant 0.$$

Обозначим состояние системы через $y_T(v)$ (чтобы подчеркнуть его зависимость от T); таким образом, $y_T(v)$ — решение задачи (2.2) — (2.4) на интервале $(0,\ T)$. Разумеется, если $T < T'$, то $y_T(v) = y_{T'}(v)$ на интервале $(0,\ T)$; следовательно, вместо $y_T(v)$ можно писать $y(v)$.

Функция стоимости имеет вид

$$J_T(v) = \int_0^T \|C(t)\,y(t;\ v) - z_{\text{д}}(t)\|_F^2\,dt + \int_0^T (N(t)\,v,\ v)_E\,dt, \qquad (6.2)$$

[1]) Иными словами, предполагается, что неравенство (1.2) справедливо при $\lambda = 0$ и для всех $t \geqslant 0$ (см. также (1.13)).

где $z_д$ — данная функция,

$$z_д \in L^2(0, \infty; F). \tag{6.3}$$

Тогда *для каждого* T существует единственное оптимальное управление u_T (рассматривается случай *отсутствия ограничений* на управление, но, очевидно, этот же результат справедлив и при наличии ограничений).

Наконец, пусть $\{y_T, p_T\}$ — решение задачи (4.9) — (4.11) на интервале $(0, T)$[1], а $P_T(t)$ и $r_T(t)$ — соответствующие оператор $P(t)$ и функция $r(t)$ (см. § 4).

6.2. Случай $T = \infty$

Рассмотрим (в обозначениях разд. 6.1) задачу минимизации функции стоимости $J_\infty(v)$ в случае отсутствия ограничений на управление. И в этой задаче оптимальное управление существует и единственно; обозначим его через u_∞.

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$-\frac{dp(v)}{dt} + A^*p(v) = D_2 y(v) - g, \tag{6.4}$$

$$p(v) \in L^2(0, \infty; V), \tag{6.5}$$

где элемент g задан равенством (4.10).

Предложение 6.1. *Сопряженное состояние* $p(v)$ *соотношениями* (6.4), (6.5) *определяется однозначно.*

Доказательство. 1) Для упрощения записи положим $\tilde{f} = D_2 y(v) - g \in L^2(0, \infty; V')$. Нужно показать существование и единственность функции $p(v) = p \in L^2(0, \infty; V)$, удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{dp}{dt} + A^*p = \tilde{f}. \tag{6.6}$$

Из равенства (6.6) следует, что $dp/dt \in L^2(0, \infty; V')$, а это значит, что $p(t)$ — непрерывное отображение $[0, \infty) \to H$, *обращающееся в нуль на бесконечности.*

2) *Единственность.* Предположим, что при $\tilde{f} = 0$ справедливо равенство (6.6). Тогда

$$\int_0^\infty \left(-\frac{dp}{dt}, p\right) dt + \int_0^\infty a^*(t; p, p)\, dt = 0,$$

[1]) Здесь $y_T = y(u_T)$.

и так как (согласно 1))

$$\int_0^\infty \left(-\frac{dp}{dt},\ p\right) dt = \frac{1}{2}|p(0)|^2,$$

то

$$\frac{1}{2}|p(0)|^2 + \alpha \int_0^\infty \|p(t)\|^2 dt \leqslant 0,$$

откуда $p = 0$.

3) *Существование.* Пусть q_T — решение в пространстве $L^2(0,\ T;\ V)$ задачи

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dq_T}{dt} + A^* q_T = \tilde{f} \quad \text{в} \quad (0,\ T), \\ q_T(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Первое из соотношений (6.7) показывает, что

$$\frac{1}{2}|q_T(0)|^2 + \alpha \int_0^T \|q_T(t)\|^2 dt \leqslant \int_0^T \|\tilde{f}(t)\|_{V'} \|q_T(t)\| dt.$$

Таким образом [1]),

$$\int_0^T \|q_T(t)\|^2 dt \leqslant c_1 \int_0^T \|\tilde{f}(t)\|_{V'}^2 dt \leqslant c_2, \tag{6.8}$$

где c_2 — константа, не зависящая от T.

Далее, если $\tilde{q}_T$ — продолжение функции q_T нулем при $t > T$, а $\tilde{f}_T = \tilde{f}$ на интервале $(0,\ T)$ и $\tilde{f}_T = 0$ при $t > T$, то

$$-\frac{d\tilde{q}_T}{dt} + A^* \tilde{q}_T = \tilde{f}_T \quad \text{на} \quad (0,\ \infty). \tag{6.9}$$

Отсюда в силу неравенства (6.8) вытекает оценка

$$\int_0^\infty \|\tilde{q}_T(t)\|^2 dt \leqslant c_2. \tag{6.10}$$

Следовательно, существует такая последовательность $\{T_n\} \to \infty$, что $\tilde{q}_{T_n} \to q$ слабо в пространстве $L^2(0,\ \infty;\ V)$. Переходя к пределу в равенстве (6.9), записанном для $T = T_n$, получаем

$$-\frac{dq}{dt} + A^* q = \tilde{f},$$

т. е. $p = q$ действительно является решением уравнения (6.6).

[1]) Ср. с рассуждениями, проведенными в разд. 1.4.— *Прим. перев.*

Для отыскания оптимального управления u_∞ необходимо найти решение системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_\infty}{dt}+Ay_\infty+D_1p_\infty=f \quad \text{в} \quad (0,\infty),\\ &-\frac{dp_\infty}{dt}+A^*p_\infty-D_2y_\infty=g \quad \text{в} \quad (0,\infty) \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

(где $g=-C^*\Lambda_F z_{\text{д}}$) с граничными условиями

$$y_\infty,\ p_\infty\in L^2(0,\ \infty;\ V),\qquad y_\infty(0)=y_0. \tag{6.12}$$

Как и в разд. 4.2, можно показать (рассматривая интервал $(s,\ \infty)$ вместо $(s,\ T)$), что справедливо *тождество*

$$p_\infty(t)=P_\infty(t)y_\infty(t)+r_\infty(t) \text{ на } (0,\ \infty), \tag{6.13}$$

где *оператор* $P_\infty(s)$ определяется через решение задачи (ср. с (4.28))

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt}+A\beta+D_1\gamma=0 \quad \text{в} \quad (s,\infty),\\ &-\frac{d\gamma}{dt}+A^*\gamma-D_2\beta=0 \quad \text{в} \quad (s,\infty),\\ &\beta(s)=h, \quad \beta,\gamma\in L^2(s,\infty;V), \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

а именно

$$P_\infty(s)h=\gamma(s); \tag{6.15}$$

функция $r_\infty(s)$ определяется через решение задачи (ср. с (4.30))

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dt}+A\eta+D_1\xi=f \quad \text{в} \quad (s,\infty),\\ &-\frac{d\xi}{dt}+A^*\xi-D_2\eta=g \quad \text{в} \quad (s,\infty),\\ &\eta(s)=0, \quad \eta,\xi\in L^2(s,\infty;V), \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

а именно

$$r(s)=\xi(s). \tag{6.17}$$

Теорема 6.1. *Если выполнены предположения разд.* 6.1 *и* $A(t)=A,\ B(t)=B,\ C(t)=C,\ N(t)=N$, *т. е. эти операторы не зависят от* t, *то*

$$P_\infty(s)\equiv P_\infty \quad (P_\infty \text{ не зависит от } s), \tag{6.18}$$

$$P_\infty\in\mathscr{L}(H;H),\quad P_\infty^*=P_\infty. \tag{6.19}$$

Если, кроме того, выполнены условия теоремы 4.4 (соответственно теоремы 5.2), то

$$P_\infty \in \mathscr{L}(V;\ V) \cap \mathscr{L}(V';\ V') \tag{6.20}$$

$$(\text{соответственно } P_\infty \in \mathscr{L}(H;\ V) \cap \mathscr{L}(V';\ H)) \tag{6.21}$$

и

$$P_\infty A + A^* P_\infty + P_\infty D_1 P_\infty = D_2. \tag{6.22}$$

Функция r_∞ *удовлетворяет соотношению*

$$-r'_\infty + A^* r_\infty + P_\infty D_1 r_\infty = P_\infty f + g, \tag{6.23}$$

причем

$$r_\infty \in L^2(0,\ \infty;\ V). \tag{6.24}$$

Доказательство. Здесь новым является только утверждение (6.18), а все остальные — или следствие, или другой вариант уже известных результатов. Но в случае, когда операторы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $N(t)$ *не зависят от* t, задача (6.14) «не зависит от s» в следующем смысле: если сделать замену $t \to t - s$, то, как легко видеть, $P_\infty(s) = P_\infty(0)$.

Замечание 6.1. В случае, когда применима теорема Шварца о ядрах (см. разд. 5.1), ядро $P_\infty(x, \xi)$ оператора P_∞ удовлетворяет соотношениям

$$(A_x^* + A_\xi^*) P_\infty(x,\ \xi) + \int_\Omega (D_1 P_\infty)(x,\ \zeta) P_\infty(\zeta,\ \xi)\, d\zeta =$$
$$= D_2(x,\ \xi) \quad \text{в} \quad \Omega_x \times \Omega_\xi \tag{6.25}$$

(где $D_2(x, \xi)$ — ядро оператора D_2),

$$P(x,\ \xi) = P(\xi,\ x) \tag{6.26}$$

и граничным условиям, зависящим от рассматриваемой задачи. Например, для задачи разд. 5.1 эти граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} P_\infty(x,\ \xi) &= 0, \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in \Omega \\ (\text{и тогда } P_\infty(x,\ \xi) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \Gamma), \end{aligned}\right\} \tag{6.27'}$$

а для задачи разд. 5.2 таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P_\infty(x,\ \xi)}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Gamma, \quad \xi \in \Omega \\ &(\text{и тогда } \frac{\partial P_\infty(x,\ \xi)}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \Gamma)^{1)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.27''}$$

[1]) Разумеется, есть и много других задач.

Прямое исследование нелинейных эллиптических задач только что описанного типа представляется интересным. По-видимому, оно еще не проводилось.

Покажем теперь, что в подходящих топологиях $u_T \to u_\infty$, $y_T \to y_\infty$ и т. д., если $T \to \infty$.

6.3. Предельный переход при $T \to \infty$

Теорема 6.2. *Пусть выполнены предположения разд.* 6.1. *Обозначим через* $\tilde{u}_T$ *(соответственно* $\tilde{y}_T$, $\tilde{p}_T$*) продолжение на* $(0, +\infty)$ *функции* u_T *(соответственно* y_T, p_T*) нулем вне интервала* $(0, T)$. *Тогда при* $T \to \infty$

$$\tilde{u}_T \to u_\infty \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, \infty; E), \tag{6.28}$$

$$\tilde{y}_T \to y_\infty, \ \tilde{p}_T \to p_\infty \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, \infty; V), \tag{6.29}$$

$$P_T(s)\,h \to P_\infty(s)\,h \quad \text{слабо в} \quad H, \ \forall s < \infty, \ \forall h \in H. \tag{6.30}$$

Доказательство. 1) Пусть

$$j_T = \inf_v J_T(v), \quad j_\infty = \inf_v J_\infty(v).$$

При любом управлении $v \in L^2(0, \infty; E)$ имеем $J_T(v) \leqslant J_\infty(v)$, а потому $j_T \leqslant j_\infty$. Но

$$j_T = J_T(u_T) \geqslant \nu \int_0^T \|u_T(t)\|_E^2\, dt,$$

откуда [1])

$$\|\tilde{u}_T\|_{L^2(0,\infty;E)} \leqslant C, \tag{6.31}$$

а тогда

$$\|\tilde{y}_T\|_{L^2(0,\infty;V)} \leqslant C \tag{6.32}$$

и

$$\|\tilde{p}_T\|_{L^2(0,\infty;V)} \leqslant C. \tag{6.33}$$

Так как $\dfrac{d}{dt}(\tilde{p}_T) = \widetilde{\dfrac{dp_T}{dt}}$ (ибо $p_T(T) = 0$), то

$$-\frac{d\tilde{p}_T}{dt} + A^*\tilde{p}_T = D_2\tilde{y}_T + \tilde{g}_T \tag{6.34}$$

(где $\tilde{g}_T = g$ на интервале $(0, T)$ и $\tilde{g}_T = 0$ на интервале (T, ∞)), откуда

$$\left\|\frac{dp_T}{dt}\right\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant C. \tag{6.35}$$

[1]) Все константы, не зависящие от T, будем обозначать через C.

Далее, так как

$$\left\|\frac{dy_T}{dt}\right\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant C,$$

то

$$|y_T(T)| \leqslant C. \tag{6.36}$$

Следовательно, существует такая последовательность $\{T_n\} \to \to \infty$, что

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}_{T_n} \to w \quad & \textit{слабо в} \quad L^2(0, \infty; E), \\ \tilde{y}_{T_n} \to \bar{y},\ \tilde{p}_{T_n} \to \bar{p} \quad & \textit{слабо в} \quad L^2(0, \infty; V), \\ \frac{d\tilde{p}_{T_n}}{dt} \to \frac{d\bar{p}}{dt} \quad & \textit{слабо в} \quad L^2(0, \infty; V'). \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

Равенство (6.34) после перехода к пределу принимает вид

$$-\frac{d\bar{p}}{dt} + A^*\bar{p} - D_2\bar{y} = g. \tag{6.38}$$

Кроме того,

$$\frac{d\tilde{y}_T}{dt} + A\tilde{y}_{T_n} + D_1\tilde{p}_{T_n} = \tilde{f}_{T_n} + y_{T_n}(T_n)\,\delta(t - T_n),$$

а в силу оценки (6.36) $y_{T_n}(T_n)\,\delta(t - T_n) \to 0$ в смысле пространства $\mathscr{D}'((0, \infty); H)$. Таким образом, переходя к пределу, получаем

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + A\bar{y} + D_1\bar{p} = f. \tag{6.39}$$

Так как $y(0) = y_0$, то, сравнивая (6.39) и (6.38) с (6.11) и (6.12), заключаем, что $\bar{y} = y_\infty$ и $\bar{p} = p_\infty$. Равенство $Nu_T + \Lambda_E^{-1}B^*p_T = 0$, записанное при $T = T_n$, после перехода к пределу дает $Nw + \Lambda_E^{-1}B^*p_\infty = 0$, откуда $w = u_\infty$. Тем самым соотношения (6.28), (6.29) доказаны [1]).

2) Для доказательства соотношения (6.30) напомним, что оператор $P_T(s)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta_T}{dt} + A\beta_T + D_1\gamma_T = 0 \quad & \text{в} \quad (s, T), \\ -\frac{d\gamma_T}{dt} + A^*\gamma_T - D_2\beta_T = 0 \quad & \text{в} \quad (s, T), \\ \beta_T(s) = h, \qquad \gamma_T(T) = 0, & \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

[1]) Так как $J_T(u_T) \to J_\infty(u_\infty)$, можно показать, что $\tilde{u}_T \to u_\infty$ *сильно* в $L^2(0, \infty; E)$.

а именно
$$P_T(s)\,h = \gamma_T(s).$$

Кроме того (см. доказательство леммы 4.1), пара $\{\beta_T, \gamma_T\}$ позволяет отыскивать оптимальное управление в случае, когда состояние φ системы определяется как решение задачи
$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = Bv \quad \text{в} \quad (s, T); \qquad \varphi(s) = h,$$
а функция стоимости имеет вид
$$J^h_{s,T}(v) = \int_s^T \|C\varphi(v)\|_F^2\,dt + \int_s^T (Nv, v)_E\,dt.$$

Так как (см. доказательство леммы 4.5)
$$\inf_v J^h_{s,T}(v) = (P_T(s)\,h, h) \leqslant J^h_{s,T}(0) \leqslant C\,|h|^2,$$
то
$$|P_T(s)\,h| \leqslant C\,|h|, \tag{6.41}$$
где C — константа, не зависящая от s и T. Далее, если w_T — оптимальное управление для указанной системы, то (как в пункте 1))
$$\int_s^T \|w_T(t)\|_E^2\,dt \leqslant C.$$

Продолжая управление w_T нулем при $t > T$ и обозначая получающуюся функцию через $\tilde{w}_T$, заключаем, что эта функция (соответственно конструируемые так же функции $\tilde{\beta}_T$, $\tilde{\gamma}_T$) принадлежит ограниченному подмножеству пространства $L^2(0, \infty; E)$ (соответственно пространства $L^2(0, \infty; V)$). Следовательно, существует такая последовательность $\{T_n\} \to \infty$, что $\tilde{w}_{T_n} \to w$, $\tilde{\beta}_{T_n} \to \bar{\beta}$, $\tilde{\gamma}_{T_n} \to \bar{\gamma}$ слабо в соответствующих пространствах. Значит, пара $\{\bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$ удовлетворяет соотношениям (6.14) (отметим, что $|\beta_T(T)| \leqslant C$), а тогда $\bar{\beta} = \beta$, $\bar{\gamma} = \gamma$ и $\gamma_{T_n}(s) \to \gamma(s)$ слабо в пространстве H. Отсюда и следует соотношение (6.30).

§ 7. Задачи, не обязательно коэрцитивные

7.1. Распределенное наблюдение [1])

Пусть выполнены предположения разд. 4.1; состояние $y(t; v)$ определяется как решение задачи
$$y'(t; v) + A(t)\,y(t; v) = f + B(t)\,v, \quad y(0; v) = y_0, \tag{7.1}$$
а функция стоимости имеет вид (рассматривается случай $N = 0$)
$$J(v) = \int_0^T \|C(t)\,y(t; v) - z_д\|_F^2\,dt. \tag{7.2}$$

[1]) В оригинале observation distribuée.— *Прим. перев.*

Теорема 7.1. *Пусть состояние системы определяется как решение задачи* (7.1) [1]), *а функция стоимости задана равенством* (7.2). *Предположим, что множество* $\mathcal{U}_\partial \subset \mathcal{U} = L^2(0, T; E)$ *ограничено и каждый из операторов* B *и* C *описывает взаимно однозначное отображение. Тогда оптимальное управление существует и единственно.*

Доказательство. Воспользуемся замечанием 5.5 гл.1. Положим

$$y(v) - y(0) = lv, \qquad l \in \mathscr{L}(L^2(0, T; E); \; W(0, T)). \tag{7.3}$$

Тогда, если u — некоторое оптимальное управление (оно существует, так как множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено), то множеством всех оптимальных управлений будет $(u + \operatorname{Ker}(Cl)) \cap \mathcal{U}_\partial$.

Пусть $V \subset \operatorname{Ker}(Cl)$. Так как C — взаимно однозначный оператор, то $lv = 0$, а значит, $d(lv)/dt + A(lv) = 0$. Но $d(lv)/dt + A(lv) = Bv$, а тогда $v = 0$, поскольку B — взаимно однозначный оператор.

Пример 7.1. В случае 3.1.1 разд. 3.1 условия теоремы 7.1 выполнены. Они выполнены также в случаях 3.1.2 разд. 3.1 и 3.2.1 разд. 3.2.

Замечание 7.1. Если речь идет о *финальном наблюдении*, то отображение $v \to y(T; v) - y(T; 0)$ не является взаимно однозначным, и поэтому здесь нет аналога теоремы 7.1. Относительно этого случая см. разд. 7.2.

7.2 Финальное наблюдение

Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение задачи (7.1), а функция стоимости имеет вид

$$J(v) = |Dy(T; v) - z_д|^2, \qquad D \in \mathscr{L}(H; H). \tag{7.4}$$

Нам потребуется

Определение 7.1. Говорят, что (параболический) оператор $-d/dt + A^*(t)$ обладает свойством *обратной единственности* [2]), если из условий

$$\psi \in L^2(0, T; V), \qquad \frac{d\psi}{dt} \in L^2(0, T; V'), \tag{7.5}$$

$$-\frac{d\psi}{dt} + A^*(t)\psi = 0 \quad \text{в} \quad (0, T), \tag{7.6}$$

$$\psi(s) = 0, \quad \text{точка } s \in (0, T) \text{ фиксирована}, \tag{7.7}$$

следует, что $\psi \equiv 0$ в интервале (s, T).

---

[1]) Вместе с предположениями (1.1) и (1.2) относительно оператора $A(t)$.

[2]) В оригинале unicité rétrograde.— *Прим. перев.*

Замечание 7.2. «Естественное» граничное условие для (7.6), (7.5) имеет вид «$\psi(T)$ дано». Задача (7.5) — (7.7) с данным значением $\psi(s)$, вообще говоря, *не корректна*, но *может* обладать свойством единственности решения.

Обращая время, можем заключить, что свойство обратной единственности равносильно предположению о том, что задача

$$\theta \in W(0, T),$$

$$\frac{d\theta}{dt} + A^*(T-t)\theta = 0 \quad \text{в} \quad (0, T),$$

$$\theta(T) = 0$$

имеет лишь решение $\theta \equiv 0$. Этим и объясняется смысл термина «обратная единственность».

Замечание 7.3. В работе Лионса и Мальгранжа [1] показано, что параболический оператор обладает свойством обратной единственности при более сильных предположениях, чем (7.5) [1].

Приведем более простой пример, когда оператор обладает свойством обратной единственности. Пусть $A(t) = A = A^*$, а вложение $V \to H$ вполне непрерывно. Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — собственные функции оператора A, т. е. $Aw_i = \lambda_i w_i$, $i = 1, 2, \ldots$; $\lambda_i > 0$; $(w_i, w_j) = \delta_i^j$. Тогда всякая функция ψ, удовлетворяющая соотношениям (7.5), (7.6), имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\psi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t)\, w_j, \qquad \psi_j \in L^2(0, T) \ \ \forall j; \\ &\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_0^T |\psi_j(t)|^2\, dt < \infty; \ \ \psi_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}\ . \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Таким образом, если $\psi(s) = 0$, то $\psi_j(s) = 0$ при всех j, откуда $c_j = 0$ и, следовательно, $\psi \equiv 0$ в интервале (s, T) [2].

Теорема 7.2. *Пусть состояние системы определяется как решение задачи* (7.1), *а функция стоимости задана равенством* (7.4). *Предположим, что оператор обладает свойством обратной*

---

[1]) Что вполне согласуется с конкретными приложениями: уравнения параболического типа с достаточно регулярными коэффициентами этим свойством обладают.

[2]) В случае, когда вложение $V \to H$ не является вполне непрерывным, доказательство проводится аналогично, если воспользоваться спектральным разложением оператора A.

единственности и

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) > 0; \tag{7.9}$$

$$\left.\begin{array}{l} B^*(t) \text{ — взаимно однозначный оператор (для} \\ \qquad \text{почти всех } t); \\ D^* \text{ — взаимно однозначный оператор.} \end{array}\right\} \tag{7.10}$$

Пусть, наконец,

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in L^2(0, T; E),\ v(t) \in E_\partial \text{ почти всюду}\}, \tag{7.11}$$

где E_∂ *— выпуклое замкнутое ограниченное подмножество пространства* E. *Тогда оптимальное управление и существует и удовлетворяет условию*

$$u(t) \in \partial E_\partial \text{ для почти всех } t\,^{1)}, \tag{7.12}$$

где ∂E_∂ *— граница множества* E_∂.

Доказательство. Так как множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено, то оптимальное управление u существует (но априори не известно, единственно оно или нет). Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$-\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)p(u) = 0, \qquad p(u) \in L^2(0, T; V),$$

$$p(T; u) = D^*[Dy(T; u) - z_д],$$

условие оптимальности управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ имеет вид (здесь $p(t) = p(t; u(t))$)

$$\int_0^T (B^*(t)p(t),\ v(t) - u(t))_E\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

По теореме 2.1 гл. 2 это неравенство равносильно неравенству

$$(B^*(t)\,p(t), e - u(t))_E \geqslant 0 \quad \forall e \in E_\partial \text{ для почти всех } t. \tag{7.13}$$

Далее,

$$B^*(t)\,p(t) \neq 0 \text{ почти всюду} \tag{7.14}$$

(и даже всюду, если оператор $B(t)$ определен всюду). В самом деле, если $B^*(s)\,p(s) = 0$, то в силу первого из предположений (7.10) имеем $p(s) = 0$, а тогда в силу свойства обратной единственности $p \equiv 0$ в интервале (s, T). Следовательно, $p(T) = 0$, т. е.

$$D^*[Dy(T; u) - z_д] = 0.$$

---

[1]) Этот факт, если воспользоваться терминологией, принятой в конечномерном случае, можно назвать *свойством релейности* оптимального управления.

В силу второго из предположений (7.10) отсюда вытекает, что $Dy(T;\ u) - z_д = 0$, а значит,

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) = J(u) = |Dy(T;\ u) - z_д|^2 = 0.$$

Но это противоречит условию (7.9).

Таким образом, соотношение (7.14) обосновано, а тогда из неравенства (7.13) следует утверждение (7.12).

Следствие 7.1. *Если выполнены условия теоремы* 7.2 *и множество* E_∂ *строго выпукло, то оптимальное управление и единственно.*

Доказательство. Если u_1 и u_2 — два оптимальных управления, то $^1/_2(u_1 + u_2)$ — также оптимальное управление[1]). Тогда $u_1 = u_2$ почти всюду в силу соотношения (7.12) и строгой выпуклости множества E_∂.

Пример 7.2. Теорема 7.2 применима в случае 3.2.2 разд. 3.2. Предположим, например, что состояние системы определяется как решение задачи[2])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + A(t)\, y(v) = f \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times (0,\ T), \\ &\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = v; \quad y(x,\ 0;\ v) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

а D — тождественный оператор, так что

$$J(v) = \int_\Omega [y(x,\ T;\ v) - z_д(x)]^2\, dx. \tag{7.16}$$

Пусть $\mathcal{U} = L^2(0,\ T;\ L^2(\Gamma))\ (= L^2(\Sigma))$, т. е. $E = L^2(\Gamma)$, и

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\partial = \{v \mid \xi_0(x) \leqslant v(x,\ t) \leqslant \xi_1(x) \text{ почти всюду на } \Sigma; \\ \xi_0,\ \xi_1 \in L^\infty(\Gamma)\}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_\partial = \{e \mid e \in L^2(\Gamma),\ \xi_0(x) \leqslant e(x) \leqslant \xi_1(x) \\ \text{почти всюду на } \Gamma\}, \end{aligned} \tag{7.18}$$

т. е. можно применить следствие 7.1. Таким образом, *если* $\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) > 0$, *то оптимальное управление имеет вид*

$$u(x,\ t) = \begin{cases} \xi_0(x) & \textit{почти всюду, если } p(x,\ t) > 0, \\ \xi_1(x) & \textit{почти всюду, если } p(x,\ t) < 0. \end{cases} \tag{7.19}$$

---

[1]) Множество оптимальных управлений выпукло; см. разд. 5.1 гл. 1.

[2]) Здесь $A(t)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого являются аналитическими функциями переменных x и t.

Было бы интересно получить информацию о свойствах множества, разделяющего на поверхности Σ области, где управление u принимает значения ξ_0 и ξ_1 соответственно.

Замечание 7.4. Неравенство (7.9) означает, что *не существует* такого элемента $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которого $J(u) = 0$, если образ множества $\mathcal{U}_\partial$ при отображении $v \to Dy(T;\ v)$ *замкнут*. Следует иметь в виду, что этот образ, вообще говоря, *не является* замкнутым множеством; так, в примере 7.2 этот образ не замкнут.

Замечание 7.5. Предположим, что множество $\mathcal{U}_\partial$ определено соотношениями (7.17), (7.18) и существует управление u, для которого

$$\left.\begin{aligned} &y(T;\ u) = z_д \ (\text{следовательно}, \inf_v J(v) = 0), \\ &\xi_0(x) < u(x,\ t) < \xi_1(x) \ \text{на} \ \Sigma_0, \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

где Σ_0 — непустое открытое подмножество поверхности Σ. Тогда существует *бесконечно много* оптимальных управлений.

Действительно, можно показать, что существует бесконечное множество определенных на поверхности Σ таких функций w, что

$$w \text{ имеет носитель в } \Sigma_0,\ w \in L^\infty(\Sigma), \tag{7.21}$$

и решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi(w)}{\partial t} + A(t)\psi(w) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,\ T); \\ &\left.\frac{\partial\psi(w)}{\partial\nu_A}\right|_\Sigma = w; \qquad \psi(x,\ 0;\ w) = 0, \qquad x\in\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

удовлетворяет условию $\psi(x,\ T;\ w) = 0$.

Тогда функция $y(u+\varepsilon w) = y(u) + \varepsilon\psi(w)$ удовлетворяет условию $y(T;\ u+\varepsilon w) = z_д$ и $u+\varepsilon w \in \mathcal{U}_\partial$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Пример см. у Ю. Егорова [1].

7.3. Случай, когда $N=0$ и $\mathcal{U}_\partial$ не ограничено[1]).

Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{dt} + A(t)\,y(v) = f + v, \\ &y(0;\ v) = y_0,\ \ y(v)\in L^2(0,\ T;\ V), \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

причем

$$v \in \mathcal{U} = L^2(0,\ T;\ V'). \tag{7.24}$$

[1]) Этот раздел аналогичен разд. 3.1 гл. 2.

Предположим, что наблюдение имеет вид

$$Cy(v)=\left\{y(v), \frac{dy(v)}{dt}\right\}\in L^2(0, T; V)\times L^2(0, T; V')\ ^{1)}, \qquad (7.25)$$

а функция стоимости задается равенством

$$\begin{aligned}J(v) &= \|Cy(v)-z_{д}\|^2_{W(0,T)} = \\ &= \int_0^T \|y(v)-z^0_{д}\|^2_V\,dt + \int_0^T \left\|\frac{dy(v)}{dt}-z^1_{д}\right\|^2_{V'}dt, \qquad (7.26)\end{aligned}$$

где $z_{д}=\{z^0_{д}, z^1_{д}\}$.

Теорема 7.3. *Если выполнены условия* (7.23) — (7.26) *и* $\mathcal{U}_\partial \subset \mathcal{U}$ — *произвольное выпуклое замкнутое множество, то существует единственное оптимальное управление.*

Доказательство. В обозначениях § 1 гл. 2

$$\pi(v, v)=\|y(v)-y(0)\|^2_{W(0,T)}, \qquad (7.27)$$

а так как отображение

$$v\to y(v)-y(0)=lv \qquad (7.28)$$

является *изоморфизмом* $L^2(0, T; V')=\mathcal{U}\to W_0(0, T)$, где

$$W_0(0, T)=\{\psi \mid \psi\in W(0, T),\ \psi(0)=0\}, \qquad (7.29)$$

то

$$\pi(v, v)\geqslant C\|v\|^2_{\mathcal{U}},\quad C>0,\quad \forall v\in\mathcal{U}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Для получения соотношений, характеризующих оптимальное управление, нужно транспонировать изоморфизм [2]) (7.28), или, что то же самое, его обратный: отображение

$$\psi\to\frac{d\psi}{dt}+A\psi(=l^{-1}\psi)$$

является изоморфизмом $W_0(0, T)\to\mathcal{U}$. Следовательно, если σ — линейная непрерывная форма на пространстве $W_0(0, T)$, то суще-

[1]) Так что наблюдение принадлежит пространству $W(0, T)$.

[2]) Этот прием — основной при изучении неоднородных граничных задач; см. разд. 4.2 гл. 2, а также Лионс и Мадженес [1].

ствует единственный элемент $p \in L^2(0, T; V)$, для которого

$$\int_0^T \left(p, \frac{d\psi}{dt} + A\psi\right) dt = \sigma(\psi) \qquad \forall \psi \in W_0(0, T). \tag{7.30}$$

Отсюда вытекает, что существует единственный элемент $p(u) \in \in L^2(0, T; V)$, для которого

$$\int_0^T \left(p(u), \frac{d\psi}{dt} + A\psi\right) dt = \int_0^T (y(u) - z_{\text{д}}^0, \psi(t))_V \, dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\frac{dy(u)}{dt} - z_{\text{д}}^1, \frac{d\psi(t)}{dt}\right)_{V'} dt \qquad \forall \psi \in W_0(0, T). \tag{7.31}$$

Уравнение (7.31) однозначно определяет сопряженное состояние системы.

Таким образом, для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (7.23) (при $v = u$), (7.31) и

$$\int_0^T (p(u), v - u) \, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{7.32}$$

Пример 7.3. Пусть выполняются предположения разд. 3.1 (в частности, $V = H_0^1(\Omega)$) и

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q = \Omega \times (0, T)\}. \tag{7.33}$$

Тогда соотношение (7.31) можно интерпретировать в виде следующей задачи [1]):

$$-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + A^* p(u) = \Lambda_V (y(u) - z_{\text{д}}^0) - \frac{d}{dt} \Lambda_V^{-1} \left(\frac{dy(u)}{dt} - z_{\text{д}}^1\right), \tag{7.34}$$

$$p(u)|_\Sigma = 0, \tag{7.35}$$

$$p(T; u) = \Lambda_V^{-1} \left(\frac{dy(u)}{dt} - z_{\text{д}}^1\right)\Bigg|_T, \tag{7.36}$$

а неравенство (7.32) эквивалентно соотношениям

$$p(u) \geqslant 0, \quad u \geqslant 0, \quad up(u) = 0 \text{ почти всюду в } Q. \tag{7.37}$$

---

[1]) Λ_V — канонический изоморфизм $V \to V'$. В данном случае $\Lambda_V = -\Delta_x + I$, т. е. Λ_V есть оператор $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, причем

$$(\varphi, \psi)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\varphi\psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) \, dx.$$

§ 8. Другие типы наблюдения и управления

8.1. Точечное наблюдение

Пусть оператор $A = A\,(x,\ t,\ d/dx)$ определен, как в разд. 3.1. Допустим, что выполнены предположения разд. 3.1; в частности, состояние $y\,(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y\,(v)}{\partial t} + Ay\,(v) = f + v,\ f \in L^2(Q),\ \ v \in L^2(Q) = \mathcal{U}, \\ &y\,(v)\,|_\Sigma = 0, \quad y\,(x,\ 0;\ v) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Пусть $x^1, \ldots, x^\mu$ — точки области Ω; предположим, что наблюдение задано в виде $\{y(x^j,\ t;\ v\},\ 1 \leqslant j \leqslant \mu$ (если, конечно, входящие сюда выражения имеют смысл).

Если предположить, что в выражении для оператора A коэффициенты достаточно гладкие, то решение $y\,(v)$ задачи (8.1) удовлетворяет условию (см. (3.4), (3.5))

$$y\,(v) \in H^{2,1}(Q). \tag{8.2}$$

Следовательно, $y\,(v) \in L^2\,(0,\ T;\ H^2\,(\Omega))$, и $y\,(x^j,\ t)$ *имеет смысл* (а отображение $t \to y\,(x^j,\ t)$ принадлежит пространству $L^2\,(0,\ T)$), если только

$$H^2\,(\Omega) \subset C^0\,(\Omega). \tag{8.3}$$

Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда $1/2 - 2/n < 0$, т. е. $n \leqslant 3$.

Поэтому в дальнейшем будем считать $n \leqslant 3$. В этом случае

$$z\,(v) = Cy\,(v) = \{y\,(x^j,\ t;\ v)\} \in (L^2\,(0,\ T))^\mu. \tag{8.4}$$

Если наблюдение определено по формуле (8.4), то говорят, что имеет место *локальное наблюдение.*

Функция стоимости задана равенством

$$J\,(v) = \|\,Cy\,(v) - z_д\,\|^2_{(L^2(0,T))^\mu} + (Nv,\ v)_{\mathcal{U}}; \tag{8.5}$$

если $z_д = \{z_{д_1}, \ldots, z_{д\mu}\}$, то

$$J\,(v) = \sum_{j=1}^{\mu} \int_0^T |\,y\,(x^j,\ t;\ v) - z_{д_j}\,(t)\,|^2\,dt + (Nv,\ v)_{\mathcal{U}}. \tag{8.6}$$

Если $\mathcal{U}_\partial \subset \mathcal{U}$ — выпуклое замкнутое множество и $N \geqslant \nu I$, $\nu > 0$, то существует единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, характеризующееся тем, что

$$\sum_{j=1}^{\mu} \int_0^T [y\,(x^j,\ t;\ u) - z_{д_j}]\,[y\,(x^j,\ t;\ v) - y\,(x^j,\ t;\ u)]\,dt + (Nu,\ v - u) \geqslant 0$$
$$\forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{8.7}$$

Определим сопряженное состояние как решение задачи [1])

$$-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+A^*p(u)=\sum_{j=1}^{\mu}[y(x^j,\,t;\,u)-z_{д\,j}(t)]\otimes\delta(x-x^j), \tag{8.8}$$

$$p(u)\,|_{\Sigma}=0, \tag{8.9}$$

$$p(x,\;T;\;u)=0,\qquad x\in\Omega. \tag{8.10}$$

Замечание 8.1. Задача (8.8) — (8.10) имеет единственное решение в пространстве $L^2(Q)$ (например), определяемое с помощью транспонирования (как в разд. 7.3):

$$\left.\begin{aligned}&\int_Q p(u)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+A\psi\right)dx\,dt=\sum_{j=1}^{\mu}\int_0^T[y(x^j,\,t;\,u)-z_{д\,j}(t)]\,\psi(x^j,\,t)\,dt\\&\qquad\forall\psi\in H^{2,1}(Q));\;\psi|_{\Sigma}=0,\qquad\psi(x,\,T)=0,\qquad x\in\Omega\;^{2)}.\end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Тогда неравенство (8.7) принимает вид

$$\int_Q[p(u)+Nu](v-u)\,dx\,dt\geqslant0\qquad\forall v\in\mathcal{U}_{\partial}. \tag{8.12}$$

Пример 8.1. Пусть $\mathcal{U}_{\partial}=\{v\mid v\geqslant0$ почти всюду в $Q\}$; этот случай уже рассматривался несколько раз. Неравенство (8.12) приводится тогда к соотношениям

$$p(u)+Nu\geqslant0,\quad u\geqslant0,\quad[p(u)+Nu]\,u=0\ \text{почти всюду в}\ Q.$$

Пример 8.2. Пусть $\mathcal{U}_{\partial}=\mathcal{U}$. Тогда оптимальное управление находится из решения задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial y}{\partial t}+Ay+N^{-1}p=f,\\&-\frac{\partial p}{\partial t}+A^*p=\sum_{j=1}^{\mu}[y(x^j,\,t)-z_{д\,j}(t)]\otimes\delta(x-x^j);\\&y|_{\Sigma}=0,\;p|_{\Sigma}=0;\;y(x,\,0)=y_0(x),\;p(x,\,T)=0,\;x\in\Omega.\end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

Утверждения относительно *расцепления* (§ 4—6) остаются справедливыми и для этой задачи. В частности,

$$p(t)\equiv P(t)\,y(t)+r(t), \tag{8.14}$$

[1]) Здесь $g(t)\otimes\delta(x-x^j)$ — распределение

$$\psi\to\int_0^T g(t)\,\psi(x^j,\,t)\,dt,\qquad\psi\in\mathcal{D}(Q).$$

[2]) Правая часть равенства (8.11) представляет собой при $n\leqslant3$ линейную непрерывную форму на пространстве $H^{2,1}(\Omega)$.

причем ядро $P(x, \xi, t)$ оператора $P(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$-\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial t} + (A_x^* + A_\xi^*)\, P(x, \xi, t) + \\ + \iint\limits_{\Omega\times\Omega} P(x, \xi_1, t)\, N^{-1}(\xi_1, \xi_2)\, P(\xi_2, \xi, t)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \\ = \sum_{j=1}^{\mu} \delta(x - x^j) \otimes \delta(\xi - x^j) \text{ в } \Omega_x \times \Omega_\xi \times (0, T); \tag{8.15}$$

$$P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t); \tag{8.16}$$

$$P(x, \xi, t) = 0, \ x \in \Gamma, \ \xi \in \Omega, \ t \in (0, T); \tag{8.17}$$

$$P(x, \xi, T) = 0, \quad x, \xi \in \Omega_x \times \Omega_\xi, \tag{8.18}$$

а функция $r(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &-r' + A^* r + PN^{-1} r = Pf - \sum_{j=1}^{\mu} z_{дj} \otimes \delta(x - x^j), \\ &r|_\Sigma = 0; \quad r(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

Пример 8.3. Рассмотрим случай, когда $N = 0$, а $\mathcal{U}_\partial$ — ограниченное множество. Тогда оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ существует и удовлетворяет условию

$$\int\limits_Q p(v - u)\, dx\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{8.20}$$

Пусть, например,

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \xi_0(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \xi_1(x, t) \\ \text{почти всюду в } Q, \ \xi_0, \xi_1 \in L^\infty(Q)\}. \tag{8.21}$$

В этом случае неравенство (8.20) эквивалентно соотношению

$$\left.\begin{aligned} &p(x, t; u)\, u(x, t) = \inf_v\, [p(x, t; u)\, \xi] \text{ почти всюду в } Q, \\ &\xi_0(x, t) \leqslant \xi \leqslant \xi_1(x, t). \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Предположим, что в выражении для оператора A коэффициенты *аналитичны* в цилиндре Q и граница Γ аналитична. *Тогда $p = 0$ почти всюду в цилиндре Q.*

Действительно, функция p аналитична в цилиндре Q вне множества $\bigcup\limits_{j=1}^{\mu} \{x^j\} \times (0, T)$, и если $p = 0$ на некотором множестве положительной меры, то носитель функции p принадлежит множеству $\bigcup_{j=1}^{\mu} \{x^j\} \times (0, \ T)$. Но тогда равенство

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = \sum_{j=1}^{\mu} y(x^j, t) - z_{\text{д}j}(t)] \otimes \delta(x - x^j)$$

возможно лишь при условии, что $y(x^j, t; u) = z_{\text{д}j}(t)$, $j = 1, \ldots, \mu$.

Следовательно, если $\inf\limits_{v} J(v) > 0$, то $p \neq 0$ почти всюду в цилиндре Q, и оптимальное управление имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \xi_0(x, t) \text{ почти всюду, если } p(x, t; u) > 0, \\ \xi_1(x, t) \text{ почти всюду, если } p(x, t; u) < 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что оптимальное управление единственно.

Замечание 8.2. Аналогично можно исследовать случай, когда состояние системы определено, как в разд. 3.2.

Замечание 8.3. Подобное исследование можно провести и для систем, описываемых параболическими операторами вида $\partial/\partial t + A(x, t, \partial/\partial x)$, где порядок оператора A равен $2m$ [1]).

Замечание 8.4. Если наблюдение имеет вид $\mathcal{M}_j y(x^j, t)$, $\mathcal{M}_j \in \mathcal{L}(L^2(0, T); L^2(0, T))$, такое исследование тоже удается провести, при этом сопряженное состояние p определяется как решение уравнения

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = \sum_{j=1}^{\mu} \mathcal{M}_j^* (\mathcal{M}_j y(x^j, t) - z_{\text{д}j}(t) \otimes \delta(x - x^j), \tag{8.23}$$

а остальные соотношения (8.13) остаются без изменения.

8.2. Точечное управление

Рассмотрим еще один случай, представляющий собой вариант предыдущего и имеющий важное значение для приложений. Речь идет о задаче с *точечным управлением*.

Пусть оператор A определен, как и в разд. 8.1, состояние $y(v)$ системы определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = \sum_{j=1}^{\mu} v_j(t) \otimes \delta(x - x^j), \quad x^j \in \Omega, \tag{8.24}$$

где

$$v = \{v_j\} \in (L^2(0, T))^{\mu}, \tag{8.25}$$

а граничные условия, например, таковы:

$$y(v)|_{\Sigma} = 0, \tag{8.26}$$

$$y(x, 0; v) = y_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{8.27}$$

[1]) В этом случае $y(x^j, t; v)$ имеет смысл, если $n \leqslant 4m - 1$.

Разумеется, нужно еще уточнить, в каком смысле понимается решение задачи (8.24), (8.26), (8.27).

Пользуясь снова методом транспонирования (см. замечание 8.1 и разд. 7.3), определим состояние $y(v)$ как тот единственный элемент пространства $L^2(Q)$, для которого

$$\left.\begin{aligned} &\int_Q y(v)\left(-\frac{\partial\psi}{\partial t}+A^*\psi\right)dx\,dt=\sum_{j=1}^{\mu}\int_0^T \psi(x^j, t)\, v_j(t)\,dt+\\ &\qquad\qquad+\int_\Omega \psi(x, 0)\, y_0(x)\,dx\\ &\forall\psi\in H^{2,1}(Q),\quad \psi|_\Sigma=0,\quad \psi(x, T)=0,\quad x\in\Omega. \end{aligned}\right\}\quad(8.28)$$

При этом предполагается, что $n\leqslant 3$ (тогда правая часть равенства (8.28) представляет собой линейную непрерывную форму на пространстве $H^{2,1}(Q)$).

Если функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\int_Q [y(v)-z_д]^2\,dx\,dt+(Nv, v)_{\mathcal{U}},\tag{8.29}$$

где $\mathcal{U}=(L^2(0, T))^\mu$, $N\in\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, $N\geqslant\nu I$, $\nu>0$, то существует единственное оптимальное управление. Сопряженное состояние $p(v)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(v)}{\partial t}+A^*p(v)=y(v)-z_д;\\ &p(v)|_\Sigma=0;\quad p(x, T; v)=0,\quad x\in\Omega, \end{aligned}\right\}\tag{8.30}$$

и оптимальное управление $u\in\mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями (8.24), (8.26), (8.27), (8.30) (при $v=u$) и

$$\sum_{j=1}^{\mu}\int_0^T p(x^j, t; u)[v_j(t)-u_j(t)]\,dt+(Nu, v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0\quad\forall v\in\mathcal{U}_\partial.\tag{8.31}$$

Замечание 8.5. Заметим, что как в предыдущем, так и в этом разделах состояния y и p «двойственны» друг к другу (как, впрочем, и должно быть): если состояние y регулярно (случай разд. 8.1) (соответственно нерегулярно (случай разд. 8.2)), то состояние p нерегулярно (соответственно регулярно), и формула Грина всегда применима.

8.3. Граничные управление и наблюдение

Рассмотрим теперь пример задачи (наиболее важной для приложений), когда *управление и наблюдение одновременно являются граничными.*

Очевидно, здесь бесконечно много возможностей. Мы изучим в этой главе два типичных случая. Первый из них рассматривается ниже, а второй (связанный с дополнительными техническими трудностями) излагается в следующем параграфе.

Пусть выполняются предположения разд. 3.2; в частности, состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t}+Ay(v)=f \quad \text{в} \quad Q;\\ &\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}=v \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad v\in L^2(\Sigma)=\mathcal{U};\\ &y(x,0;v)=y_0(x), \qquad x\in\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

Пусть наблюдение имеет вид

$$z(v)=Cy(v)=\mathcal{M}(y(v)|_\Sigma), \quad \mathcal{M}\in\mathcal{L}(L^2(\Sigma);\ L^2(\Sigma)). \tag{8.33}$$

Здесь $y(v)|_\Sigma$ означает след функции $y(v)$ на поверхности Σ. Так как след $y(v)|_\Sigma$ принадлежит, в частности [1]), пространству $L^2(\Sigma)$, то смысл соотношения (8.33) ясен.

Пример 8.4. Если $\mathcal{M}$ — тождественный оператор, то наблюдаются значения функции $y(v)$ на поверхности Σ.

Если $\mathcal{M}$ — оператор умножения на характеристическую функцию множества $\Sigma_0\subset\Sigma$, то наблюдаются значения функции $y(v)$ на подмножестве Σ_0 поверхности Σ.

Если функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\int_\Sigma[\mathcal{M}(y(v)|_\Sigma)-z_д]^2\,d\Sigma+(Nv,\ v)_{L^2(\Sigma)}, \tag{8.34}$$

где $N\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\ \mathcal{U})$, $N\geqslant\nu I$, $\nu>0$, то существует единственное оптимальное управление $u\in\mathcal{U}_\partial$, характеризующееся тем, что

$$\int_\Sigma[\mathcal{M}(y(u)|_\Sigma)-z_д]\,\mathcal{M}(y(v)|_\Sigma-y(u)|_\Sigma)\,d\Sigma+$$
$$+(Nu,\ v-u)_{L^2(\Sigma)}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial\subset L^2(\Sigma). \tag{8.35}$$

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+A^*p(u)=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}}=\mathcal{M}^*[\mathcal{M}(y(u)|_\Sigma)-z_д] \ \text{на}\ \Sigma,\ p(x,T;u)=0,\ x\in\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.36}$$

[1]) Справедлив более сильный результат: $y(v)|_\Sigma\in H^{1/2,1/4}(\Sigma)$; см. Лионс и Мадженес [1].

Заметим, что задача (8.36) имеет в пространстве $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ единственное решение, определяемое соотношением

$$\left.\begin{aligned} &\int_Q \left[\left(p(u), \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + a^*(t; p(u), \psi)\right] dx\,dt = \\ &\qquad\qquad = \int_\Sigma \mathcal{M}^* [\mathcal{M}(y(u)|_\Sigma) - z_д]\psi\, d\Sigma \\ &\forall \psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),\ \frac{\partial\psi}{\partial t} \in L^2(Q),\ \psi(x, T) = 0,\ x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \qquad (8.37)$$

Тогда неравенство (8.35) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\int_\Sigma [p(u) + Nu](v - u)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \qquad (8.38)$$

Таким образом, доказана

Теорема 8.1. *Если состояние системы определяется как решение задачи* (8.32), *а функция стоимости имеет вид* (8.34), *то оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется соотношениями* (8.32) (*при $v = u$*), (8.36) *и* (8.38).

Пример 8.5. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in L^2(\Sigma),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Sigma\},$$

а $\mathcal{M}$ — тождественный оператор. Тогда оптимальное управление u получается из решения односторонней задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f,\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = y - z_д,\quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ &p + N\frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0,\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\left(p + N\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) = 0 \text{ на } \Sigma; \\ &y(x, 0) = y_0(x),\quad p(x, T) = 0,\quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \qquad (8.39)$$

а именно

$$u = \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \quad \text{на} \quad \Sigma. \qquad (8.40)$$

Мы снова сталкиваемся здесь с нерешенной задачей, которую уже не раз встречали: получить информацию о свойствах множества, разделяющего на поверхности Σ области, где $\partial y/\partial \nu_A = 0$ и $p + N\,\partial y/\partial \nu_A = 0$ соответственно.

Пример 8.6. Пусть множество $\mathcal{U}_\partial$ определено, как в примере 8.5, а $\mathcal{M}$ — оператор умножения на характеристическую функцию измеримого подмножества Σ_0 поверхности Σ.

Тогда граничное условие на поверхности Σ в задаче (8.36) принимает вид

$$\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} = \begin{cases} y(u) - z_д & \text{на } \Sigma_0, \\ 0 & \text{на } \Sigma - \Sigma_0, \end{cases} \tag{8.41}$$

и для получения результата достаточно произвести соответствующие изменения в односторонней задаче (8.39).

Пример 8.7. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда оптимальное управление u получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &\frac{\partial y}{\partial \nu_A} + N^{-1} p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = \mathcal{M}^*(\mathcal{M}(y|_\Sigma) - z_д) \text{ на } \Sigma; \\ &y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{8.42}$$

а именно

$$u = \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{8.43}$$

Мы покажем теперь, как «расщепить» задачу (8.42), предположив для простоты, что $\mathcal{M}$ — тождественный оператор. Перепишем эту задачу в вариационной форме:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dy(t)}{dt}, \varphi\right) + a(t; y, \varphi) + (N^{-1}p, \varphi)_{L^2(\Gamma)} = (f, \varphi) \\ &\qquad\qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ &-\left(\frac{dp(t)}{dt}, \psi\right) + a^*(t; p, \psi) - (y, \psi)_{L^2(\Gamma)} = -(z_д, \psi)_{L^2(\Gamma)} \\ &\qquad\qquad \forall \psi \in H^1(\Omega) \\ &y(0) = y_0, \quad p(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.44}$$

Можно, как и в § 4, 5, доказать тождество

$$p(t) = P(t)\, y(t) + r(t), \quad \text{где } P^*(t) = P(t), \tag{8.45}$$

и, как в § 5, провести следующие преобразования. Подставляя выражение для $p(t)$ из тождества (8.45) во второе из равенств (8.44),

получаем

$$-\left(\frac{dP(t)}{dt}y(t),\psi\right)-\left(P(t)\frac{dy(t)}{dt},\psi\right)-\left(\frac{dr(t)}{dt},\psi\right)+$$

$$+a^*(t;P(t)y+r(t),\psi)-(y,\psi)_{L^2(\Gamma)}=-(z_{\text{д}},\psi)_{L^2(\Gamma)}. \quad (8.46)$$

Так как $\left(P(t)\frac{dy}{dt},\psi\right)=\left(\frac{dy}{dt},P(t)\psi\right)$, то с помощью первого из равенств (8.44) находим, что

$$\left(P(t)\frac{dy}{dt},\psi\right)=-a(t;y,P(t)\psi)-(N^{-1}p,P(t)\psi)_{L^2(\Gamma)}+(f,P(t)\psi).$$

Подставив полученное выражение в соотношение (8.46) (и еще раз используя тождество (8.45)), будем иметь

$$-\left(\frac{dP}{dt}y,\psi\right)-\left(\frac{dr}{dt},\psi\right)+a(t;y,P,\psi)+$$

$$+(N^{-1}(Py+r),P\psi)_{L^2(\Gamma)}-(f,P\psi)+$$

$$+a^*(t;Py+r,\psi)-(y,\psi)_{L^2(\Gamma)}=-(z_{\text{д}},\psi)_{L^2(\Gamma)}.$$

Следовательно, оператор $P(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$-\left(\frac{dP}{dt}\varphi,\psi\right)+a(t;\varphi,P\psi)+a^*(t;P\varphi,\psi)+$$

$$+(N^{-1}P\varphi,P\psi)_{L^2(\Gamma)}=(\varphi,\psi)_{L^2(\Gamma)}\quad\forall\varphi,\ \psi\in H^1(\Omega), \quad (8.47)$$

$$P(T)=0, \quad (8.48)$$

а функция $r(t)$ — соотношениям

$$\left(\frac{dr}{dt},\psi\right)+a^*(t;r,\psi)+(N^{-1}r,P\psi)_{L^2(\Gamma)}=(Pf,\psi)-(z_{\text{д}},\psi)_{L^2(\Gamma)}, \quad (8.49)$$

$$r(T)=0. \quad (8.50)$$

Выпишем, наконец, соотношения для ядра $P(x,\xi,t)$ оператора $P(t)$. Из равенства (8.47) (полагая для простоты $N=\nu I$) имеем

$$-\frac{\partial P(x,\xi,t)}{\partial t}+(A_x^*+A_\xi^*)P(x,\xi,t)+$$

$$+\nu^{-1}\int_\Gamma P(x,\zeta,t)P(\zeta,\xi,t)\,d\Gamma_\xi=0 \text{ в } \Omega_x\times\Omega_\xi\times(0,T); \quad (8.51)$$

$$P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \tag{8.52}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A^*_x}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ &\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A^*_\xi}} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \Gamma, \quad t \in (0, T), \\ &\frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A^*_x}} = \frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial \nu_{A^*_\xi}} = \frac{1}{2}\delta(x - \xi), \\ &\qquad x \in \Gamma_x, \quad \xi \in \Gamma_\xi \quad t \in (0, T)\,^{1)}; \end{aligned}\right\} \tag{8.53}$$

$$P(x, \xi, T) = 0, \qquad x, \xi \in \Omega_x \times \Omega_\xi. \tag{8.54}$$

Замечание 8.6. Представляет интерес прямое исследование (нелинейных) задач типа (8.51) — (8.54), в частности выяснение свойств регулярности оператора P.

Замечание 8.7. *Разложение по собственным функциям.* Вернемся к задаче (8.32), предполагая, что оператор A не зависит от t, $A = A^*$, а множество Ω ограничено и имеет достаточно гладкую границу.

Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — собственные функции оператора A для задачи Неймана:

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \quad \left.\frac{\partial w_j}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \ldots; \quad (w_j, w_k) = \delta_j^k. \tag{8.55}$$

Тогда решение задачи (8.32) можно выразить через функции w_j.

Чтобы не ошибиться в знаке, полезно сначала переписать задачу (8.32) в вариационной форме [2]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(y, \psi) + a(y, \psi) = (f, \psi) + (v, \psi)_{L^2(\Gamma)} \;\forall \psi \in H^1(\Omega), \\ &y(0) = y_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

---

[1] Здесь $\delta(x - \xi)$ — распределение на $\Gamma_x \times \Gamma_\xi$:

$$\theta \to \int_{\Gamma_x \times \Gamma_\xi} \delta(x - \xi)\,\theta(x, \xi)\,d\Gamma_x\,d\Gamma_\xi = \int_\Gamma \theta(x, x)\,d\Gamma_x.$$

Равенства (8.53) можно записать аналитически:

$$\int_{\Gamma_x \times \Omega_\xi} \frac{\partial P}{\partial \nu_{A^*_x}} \varphi(x)\,\psi(\xi)\,d\Gamma_x\,d\xi + \int_{\Omega_x \times \Gamma_\xi} \frac{\partial P}{\partial \nu_{A^*_\xi}} \varphi(x)\,\psi(\xi)\,dx\,d\Gamma_\xi = -\int_{\Gamma \times \Gamma} \varphi(x)\,\psi(\xi)\,d\Gamma_x\,d\Gamma_\xi \qquad \forall \varphi, \psi.$$

[2] При этом вместо $y(v)$ будем писать y.

Представим решение y этой задачи в виде

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t) w_j; \quad y_j \in L^2(0, T), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T |y_i(t)|^2 dt < \infty. \tag{8.57}$$

Положим

$$f_j(t) = (f(t), w_j), \quad y_{0j} = (y_0, w_j),$$
$$v_j(t) = (v(t), w_j)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma v(x, t) w_j(x) d\Gamma_x,$$

подставим (8.57) в (8.56) и возьмем $\psi = w_j$. Тогда

$$y_j'(t) + \lambda_j y_j(t) = f_j(t) + v_j(t), \quad y_j(0) = y_{0j}. \tag{8.58}$$

Заметим, что «граничный член» $v(t)$ порождает слагаемое $v_j(t)$ в первом из равенств (8.58), а соотношение $\left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = v$ (см. (8.32)) понимается в *среднем*; поэтому нет никакого противоречия в том, что производная $\partial y/\partial \nu_A$ на поверхности Σ представляется с помощью производных $\partial w_j/\partial \nu_A$, равных там нулю.

Очевидно, можно выразить оператор $P(t)$ через функции w_j:

$$P(t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} P_{jk}(t) w_j \otimes w_k \tag{8.59}$$

(или $P(x, \xi, t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} P_{jk}(t) w_j(x) w_k(\xi)$), где коэффициенты P_{jk} обладают свойством

$$P_{jk} = P_{kj} \quad \forall j,k. \tag{8.60}$$

Полагая в равенстве (8.47) $\varphi = w_j$, $\psi = w_k$, получаем для коэффициентов $P_{jk}(t)$ бесконечную систему уравнений типа Риккати:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d}{dt} P_{jk}(t) + \frac{1}{\nu} \sum_{r,s=1}^{\infty} P_{rj}(t) P_{sk}(t) \int_\Gamma w_r w_s \, d\Gamma + \\ &+ (\lambda_j + \lambda_k) P_{jk}(t) = \int_\Gamma w_j w_k \, d\Gamma \quad \forall j, k, \quad t \in (0, T); \\ &P_{jk}(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.61}$$

Отметим, что если рассмотреть «урезанную» систему порядка m, т. е. взять уравнения (8.61) при $j, k \leqslant m$, то сходимость решения приближенной системы к решению системы (8.61) при $m \to \infty$ доказывается рассуждениями, аналогичными проведенным в разд. 4.5.

§ 9. Граничное управление и граничное или финальное наблюдение для системы, описываемой смешанной задачей Дирихле

9.1. План дальнейшего исследования

В разд. 8.3 мы привели первый пример задачи, когда *управление и наблюдение одновременно являются граничными*. Рассмотрим теперь другой случай [1]).

Пусть оператор A определен, как в разд. 3.1 [2]), а состояние $y(v)$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f \quad \text{в} \quad Q; \tag{9.1}$$

$$y(v)|_\Sigma = v; \tag{9.2}$$

$$y(x, 0; v) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{9.3}$$

Пусть наблюдение имеет вид

$$z(v) = Cy(v) = \mathcal{M}\left(\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma\right), \tag{9.4}$$

где $\mathcal{M}$ — некоторый «оператор, определенный на поверхности Σ» [3]).

При решении этой задачи возникают следующие трудности:

(i) Если управление v выбирается, например, из пространства $L^2(\Sigma)$, то, во-первых, нужно решить задачу (9.1) — (9.3) (т. е. выяснить, *в каком смысле* понимается ее решение) и, во-вторых, поскольку $\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma$ принадлежит пространству, более широкому, чем $L^2(\Sigma)$ (в силу потери регулярности), нужно *определить* $\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma$, а следовательно, и функцию стоимости.

(ii) Затруднений, о которых говорится в (i), можно избежать, если выбирать управление v *более регулярным* [4]), например, $v \in H_0^1(\Sigma)$, но тогда член $(Nv, v)_{\mathcal{U}}$ записывается сложнее, а потому и отыскание оптимального управления в свою очередь становится труднее.

Мы рассмотрим последовательно оба возможных подхода (i) и (ii) к решению задачи.

---

[1]) Смысл встречающихся при этом граничных задач будет уточнен ниже.

[2]) То есть $A(t)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого являются достаточно гладкими функциями переменных x и t.

[3]) Необходимые уточнения будут даны ниже.

[4]) Это, впрочем, не очень реалистично с точки зрения приложений.

9.2. Неоднородная смешанная задача Дирихле [1])

Воспользуемся методом транспонирования, как в разд. 7.3 и замечании 8.1.

Рассмотрим изоморфизм $\varphi \xrightarrow{l} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi$ пространства Φ в $L^2(Q)$, где

$$\Phi = \{\varphi \mid \varphi \in H^{2,1}(Q);\ \varphi|_\Sigma = 0;\ \varphi(x, T) = 0,\ x \in \Omega\}.$$

Применяя транспонирование, заключаем, что если $M(\varphi)$ — линейная непрерывная форма на пространстве Φ (с топологией, индуцированной топологией пространства $H^{2,1}(Q)$, см. (3.5)), то существует единственный элемент $y \in L^2(Q)$, для которого

$$\int_Q y\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi\right)dx\,dt = M(\varphi) \qquad \forall\varphi\in\Phi; \tag{9.5}$$

и

$$\left.\begin{array}{l} M \to y \text{ — линейное непрерывное} \\ \qquad \text{отображение } \Phi' \to L^2(Q). \end{array}\right\} \tag{9.6}$$

Рассмотрим формулу

$$M(\varphi) = \int_Q f\varphi\,dx\,dt + \int_\Omega y_0(x)\varphi(x, 0)\,dx - \int_\Sigma v\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Sigma, \tag{9.7}$$

где

$$f \in L^2(Q),\ y_0 \in L^2(\Omega),\ v \in L^2(\Sigma). \tag{9.8}$$

Ясно, что формула (9.7) определяет линейную непрерывную форму на пространстве Φ [2]).

Таким образом, доказана

Теорема 9.1. *Для элементов f, y_0, v, удовлетворяющих условиям* (9.8), *в пространстве $L^2(Q)$ существует такая единственная функция $y(v)$, что*

$$\int_Q y(v)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi\right)dx\,dt = \int_Q f\varphi\,dx\,dt + \\ + \int_\Omega y_0(x)\varphi(x, 0)\,dx - \int_\Sigma v\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Sigma \qquad \forall\varphi\in\Phi. \tag{9.9}$$

---

[1]) Ср. с § 5 гл. 2.

[2]) В самом деле, $\varphi(x, 0) \in H^1(\Omega)$; следовательно, в частности, $\varphi(x, 0) \in L^2(\Omega)$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}} \in L^2(\Sigma)$ (в действительности справедлив более сильный результат: $\partial\varphi/\partial\nu_{A^*} \in H^{1/2,1/4}(\Sigma)$; см. Лионс и Мадженес [1]).

Формально удостоверимся, что имеет смысл определять решение $y(v)$ задачи (9.1) — (9.3) как функцию, удовлетворяющую соотношениям (9.5) и (9.7). Действительно, запишем сначала равенство (9.5) для $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$. Тогда форма $M(\varphi)$ принимает вид $\int\limits_Q f\varphi\, dx\, dt$, и потому

$$\int\limits_Q y\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi\right)dx\,dt=\int\limits_Q f\varphi\,dx\,dt \qquad \forall\varphi\in\mathscr{D}(Q)$$

Отсюда и следует равенство (9.1). Умножая равенство (9.1) на $\varphi \in \Phi$ и применяя формулу Грина, получаем

$$\int\limits_Q f\varphi\,dx\,dt=-\int\limits_\Omega y(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx+\int\limits_\Sigma y\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}d\Sigma+\\+\int\limits_Q y\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi\right)dx\,dt.$$

Принимая во внимание соотношения (9.5) и (9.7), находим, что

$$\int\limits_\Omega y(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx-\int\limits_\Sigma y\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}d\Sigma=\\=\int\limits_\Omega y_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx-\int\limits_\Sigma v\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}d\Sigma \qquad \forall\varphi\in\Phi,$$

откуда вытекают равенства (9.2) и (9.3).

Замечание 9.1. Таким образом, состояние системы определяется как решение уравнения (9.9).

Замечание 9.2. (Ср. с замечанием 8.7.) Пусть оператор A не зависит от t и $A = A^*$. Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — собственные функции оператора A для задачи Дирихле:

$$Aw_j=\lambda_j w_j,\ \ w_j|_\Gamma=0,\ \ j=1,2\ldots;\ \ (w_j,w_k)=\delta_j^k. \tag{9.10}$$

Тогда решение $y(v) = y \in L^2(Q)$ задачи (9.1) — (9.3) можно однозначно представить в виде

$$y=\sum_{j=1}^\infty y_j(t)\,w_j,\quad y_j\in L^2(0,T),\quad \sum_{j=1}^\infty\int\limits_0^T|y_j(t)|^2\,dt<\infty. \tag{9.11}$$

Для определения коэффициентов $y_j(t)$ положим в равенстве (9.9)

$$\varphi(x,t)=\psi(t)\,w_j(x),\quad \psi\in C^1([0,T]),\quad \psi(T)=0$$

(а значит, $\varphi \in \Phi$). Тогда

$$\int_0^T y_j(t)\left(-\frac{d\psi}{dt}+\lambda_j\psi\right)dt=\int_0^T f_j(t)\,\psi(t)\,dt+ \\ +y_{0j}\psi(0)-\int_0^T v_j(t)\,\psi(t)\,dt \qquad \forall\psi, \tag{9.12}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} f_j(t)&=\int_\Omega f(x,\,t)\,w_j(x)\,dx, \quad y_{0j}=\int_\Omega y_0(x)\,w_j(x)\,dx,\\ v_j(t)&=\int_\Gamma v(x,\,t)\,\frac{dw_j(x)}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Gamma_x. \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

Равенство (9.12) эквивалентно соотношениям

$$y_j'(t)+\lambda_j y_j(t)=f_j(t)-v_j(t), \qquad y_j(0)=y_{0j}. \tag{9.14}$$

Далее можно повторить сказанное в замечании 8.7.

9.3. Определение $\partial y/\partial\nu_A$; наблюдение

Вычислим интеграл $\int_Q (\partial y/\partial t+Ay)\,\varphi\,dx\,dt$, считая, что $\varphi \in H^{2,1}(Q)$, $\varphi(x,\ T)=0$, но $\varphi|_\Sigma \neq 0$. Применим формально формулу Грина; получим

$$\int_Q\left(\frac{\partial y}{\partial t}+Ay\right)\varphi\,dx\,dt=-\int_\Omega y(x,\,0)\,\varphi(x,\,0)\,dx-\int_\Sigma\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\varphi\,d\Sigma+ \\ +\int_\Sigma v\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Sigma+\int_Q y\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi\right)dx\,dt$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \int_\Sigma\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\varphi\,d\Sigma&=\int_Q y\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi\right)dx\,dt+\int_\Sigma v\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Sigma-\\ &\quad-\int_\Omega y_0(x)\,\varphi(x,\,0)\,dx-\int_Q f\varphi\,dx\,dt\\ \forall\varphi\in H^{2,1}(Q),&\ \varphi(x,\ T)=0,\ x\in\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

Определим теперь производную $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\nu_A}\right|_\Sigma$ с помощью соотношения (9.15). Для этого возьмем «подходящую» функцию ψ, заданную на поверхности Σ, а функцию φ, заданную в цилиндре Q, выберем так, чтобы было $\varphi|_\Sigma=\psi$ (выбор функции φ, очевидно, неоднозначен). Определим производную $\partial y/\partial\nu_A$ так, чтобы выполнялось равенство [1])

$$\int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial\nu_A}\psi\,d\Sigma = \int_Q y\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi\right)dx\,dt+\int_\Sigma v\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}}\,d\Sigma - \\ -\int_\Omega y_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx-\int_Q f\varphi\,dx\,dt. \tag{9.16}$$

Можно показать [2]), что

$$\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\in H^{-1}(\Sigma)\,^{3)}; \tag{9.17}$$

здесь $H^{-1}(\Sigma)$ — пространство, двойственное к

$$H_0^1(\Sigma)=\{\psi\mid\psi\in H^1(\Sigma);\ \psi(x,0)=0,\ \psi(x,T)=0,\ x\in\Omega\}.$$

В качестве наблюдения возьмем

$$\left.\begin{array}{l} z(v)=\left.\dfrac{\partial y(v)}{\partial\nu_A}\right|_{\Sigma_0} \text{— сужение производной } \left.\dfrac{\partial y(v)}{\partial\nu_A}\right|_{\Sigma} \text{ на} \\ \qquad\text{открытое подмножество } \Sigma_0\subseteq\Sigma;\ z(v)\in H^{-1}(\Sigma_0). \end{array}\right\} \tag{9.18}$$

9.4. Функция стоимости; соотношения, характеризующие оптимальное управление

Пусть функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\left\|\frac{\partial y(v)}{\partial\nu_A}-z_д\right\|^2_{H^{-1}(\Sigma_0)}+(Nv,v)_{\mathcal{U}}, \tag{9.19}$$

где $\mathcal{U}=L^2(\Sigma)$; $N\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U})$, $N\geqslant\nu I$, $\nu>0$. Норма в пространстве $H^{-1}(\Sigma_0)$ задается следующим образом. Обозначим через $-\Delta_\Sigma$ оператор Лапласа — Бельтрами на поверхности Σ (так что $-\Delta_\Sigma=-\Delta_\Gamma-\partial/\partial t$, где $-\Delta_\Gamma$ есть оператор Лапласа—Бельтрами на границе Γ). Тогда, если $f,g\in H^{-1}(\Sigma_0)$, то по определению

$$(f,g)_{H^{-1}(\Sigma_0)}=\int_{\Sigma_0}[(-\Delta_\Sigma)^{-1}f]\,g\,d\Sigma=\int_{\Sigma_0}f\,[(-\Delta_\Sigma)^{-1}g]\,d\Sigma,$$

где $(-\Delta_\Sigma)^{-1}f=\psi$ — решение в пространстве $H_0^1(\Sigma_0)$ задачи

$$(-\Delta_\Sigma)\psi=f \text{ в } \Sigma_0;\qquad \psi=0 \text{ на границе подмножества } \Sigma_0.$$

---

[1]) Функция φ при фиксированной функции ψ определяется неоднозначно, но правая часть равенства (9.16) не зависит от выбора функции φ, если только выполнено условие $\varphi|_\Sigma=\psi$.

[2]) См. Лионс и Мадженес [1, гл. 4].

[3]) Ср. с разд. 5.2 гл. 2.

Таким образом, $\|f\|^2_{H^{-1}(\Sigma_0)} = (f,\ f)_{H^{-1}(\Sigma_0)}$. Следовательно, функция стоимости (9.19) полностью определена.

Если $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L^2(\Sigma)$, то существует единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, характеризующееся тем, что

$$\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д,\ \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)_{H^{-1}(\Sigma_0)} + (Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.20}$$

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + A^* p(u) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \tag{9.21}$$

$$p(u) = \begin{cases} (-\Delta_\Sigma)^{-1}\left(\dfrac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д\right) & \text{на} \quad \Sigma_0\text{[1]}, \\ 0 \quad \text{на} \quad \Sigma - \Sigma_0; \end{cases} \tag{9.22}$$

$$p(x,\ T;\ u) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{9.23}$$

Решение p этой задачи «регулярно»[2]: $p(u)|_\Sigma \in H_0^1(\Sigma)$, так что, в частности, $p(u) \in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))$.

Для преобразования неравенства (9.20) применим формулу Грина: умножая соотношение (9.21) на $y(v) - y(u)$ и интегрируя, получаем

$$0 = -\int_\Sigma \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}}[y(v) - y(u)]\,d\Sigma + \int_\Sigma p(u)\left[\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right]d\Sigma + $$
$$+ \int_Q p(u)\left[\left(\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v)\right) - \left(\frac{\partial y(u)}{\partial t} + Ay(u)\right)\right]dx\,dt,$$

откуда, учитывая равенство (9.22), находим, что

$$\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д,\ \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)_{H^{-1}(\Sigma_0)} = \int_\Sigma \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}}(v-u)\,d\Sigma\text{[3]}. \tag{9.24}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 9.2. *Если состояние системы определяется как решение уравнения* (9.9), *а функция стоимости имеет вид* (9.19),

[1]) То есть p — решение задачи

$$(-\Delta_\Sigma)p = \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д \text{ в } \Sigma_0; \quad p = 0 \text{ на границе подмножества } \Sigma_0.$$

[2]) Это все то же свойство двойственности, о котором говорилось в замечании 8.5.

[3]) Можно показать, что $\partial p(u)/\partial \nu_{A^*} \in L^2(\Sigma)$.

то для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ *удовлетворяются соотношения* (9.9) (*при* $v = u$), (9.21) — (9.23) *и*

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} + Nu\right)(v-u)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.25}$$

Пример 9.1. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &y + N^{-1}\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ &p = \begin{cases} (-\Delta_\Sigma)^{-1}\left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} - z_д\right) & \text{на} \quad \Sigma_0, \\ 0 \quad \text{на} \quad \Sigma - \Sigma_0; \end{cases} \\ &y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

а именно

$$u = y\,|_\Sigma. \tag{9.27}$$

«Расщепление» задачи (9.26) формально можно осуществить так же, как и в предыдущих параграфах, но нам не известно, как обосновать необходимые для этого преобразования.

Пример 9.2. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$. Тогда мы приходим к следующей односторонней задаче:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &p = (-\Delta_\Sigma)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - z_д\right) \quad \text{на } \Sigma \text{ (если } \Sigma_0 = \Sigma); \\ &y \geqslant 0, \ \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} + Ny \geqslant 0, \ y\left(\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} + Ny\right) = 0 \ \text{на } \Sigma; \\ &y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

Оптимальное управление получается из решения этой задачи, а именно $u = y\,|_\Sigma$.

9.5. Регулярное управление

Рассмотрим теперь второй возможный подход к решению задачи, о котором говорилось в конце разд. 9.1.

Пусть $\mathcal{U} = H_0^1(\Sigma)$. Если состояние $y(v)$ определяется как решение задачи (9.1) — (9.3), то легко показать, что

$$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} \in L^2(\Sigma). \tag{9.29}$$

Если наблюдение имеет вид $\partial y(v)/\partial \nu_A|_\Sigma$, то в качестве функции стоимости можно взять

$$J(v) = \int_\Sigma \left| \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - z_д \right|^2 d\Sigma + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{9.30}$$

где $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, $N \geqslant \nu I$, $\nu > 0$.

Сопряженное состояние в этом случае определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + A^* p(u) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &p(u) = \frac{\partial u(u)}{\partial \nu_A} - z_д \quad \text{на} \quad \Sigma; \\ &p(x, T; u) = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

более простой, чем задача (9.21) — (9.23).

Управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ оптимально тогда и только тогда, когда

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_д \right) \left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} \right) d\Sigma + (Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.32}$$

Это неравенство, если использовать выражение для $p(u)$, можно переписать в виде

$$\int_\Sigma \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} (v-u)\, d\Sigma + (Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,$$

а так как

$$(Nu, v-u)_{\mathcal{U}} = \int_\Sigma [(-\Delta_\Sigma)(Nu)](v-u)\, d\Sigma,$$

то окончательно неравенство (9.32) принимает вид

$$\int_\Sigma \left[\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} + (-\Delta_\Sigma)(Nu) \right] (v-u)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.33}$$

Таким образом, более простой вид задачи, определяющей сопряженное состояние, влечет за собой усложнение условия оптимальности (9.33), содержащего оператор $(-\Delta_\Sigma)$ (условие оптимальности (9.25) этого оператора не содержало).

9.6. Финальное наблюдение

Рассмотрим снова систему, состояние которой определяется как решение задачи (9.1) — (9.3), но будем считать, что *наблюдение финально*, т. е.

$$z(v) = y(\cdot, T; v). \tag{9.34}$$

Если $v \in L^2(\Sigma)$, то состояние $y(v)$ принадлежит пространству $L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))$ (оно определяется как решение уравнения (9.9)). Так как тогда $Ay(v) \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$, то из равенства (9.1) следует, что

$$\frac{dy(v)}{dt} \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Отсюда (Лионс и Мадженес [1, гл. 1]) вытекает, что

$$t \to y(t; v) \text{ — непрерывное отображение } [0, T] \to H^{-1}(\Omega). \tag{9.35}$$

Следовательно, правая часть равенства (9.34) имеет вполне определенный смысл и наблюдение принадлежит пространству $H^{-1}(\Omega)$.

Замечание 9.3. Результат (9.35) — не самый сильный: вместо пространства $H^{-1}(\Omega)$ можно взять $H^{-1/2}(\Omega)$ [1]), но тогда функция $y(x, T; v)$ не будет принадлежать пространству $L^2(\Omega)$.

Пусть, например, $\Omega = (0, 1)$, а состояние системы определяется как решение задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,\ y(x, 0) = 0,\ y(0, t) = 0,\ y(1, t) = v(t)\ ^{2)}. \tag{9.36}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t)\, w_j(x), \\ &w_j(x) = \sqrt{2}\sin(j\pi x),\quad y_j(t) = -w_j'(1)\int_0^t e^{-\pi^2 j^2 (t-\sigma)}\, v(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{9.37}$$

---

[1]) Поскольку норма в пространстве $H^{-1/2}(\Omega)$ имеет сложный вид, предпочтительнее рассматривать наблюдение как элемент пространства $H^{-1}(\Omega)$.

[2]) Следовательно, управление имеет носитель в подмножестве $\{1\} \times (0, T)$ поверхности Σ.

Если выбрать

$$v(\sigma)=(T-\sigma)^{-\alpha}, \quad \frac{1}{4}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}, \tag{9.38}$$

то $v\in L^2(0,\ T)$ и $|y_j(T)|^2\geqslant c/j^{2-4\alpha}$. Значит, $\sum_{j=1}^{\infty}|y_j(T)|^2=\infty$, а потому $y(x,\ T,\ v)\notin L^2(\Omega)$.

Замечание 9.4. Аналогичные рассуждения справедливы и в случае параболических операторов произвольного порядка. Пусть, например, A — эллиптический оператор четвертого порядка (см. разд. 3.3), а состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y(v)}{\partial t}+Ay(v)=f \quad \text{в} \quad Q;\\
&y(v)|_\Sigma=v\in L^2(\Sigma),\quad \left.\frac{\partial y(v)}{\partial\nu}\right|_\Sigma=0\,^{1)};\\
&y(x,\ 0;\ v)=y_0(x),\quad x\in\Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{9.39}$$

Тогда решение $y(v)$ принадлежит $L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))$ (оно определяется снова методом транспонирования) и, согласно первому из соотношений (9.39), $dy(v)/dt\in L^2(0,\ T;\ H^{-4}(\Omega))$. Следовательно, $y(\cdot,\ T;\ v)\in H^{-2}(\Omega)$.

В частном случае параболических операторов второго порядка можно получить дальнейшие результаты, касающиеся функции $y(\cdot,\ T;\ v)$, если, например, $v\in L^\infty(\Sigma)$; см. разд. 9.7.

В качестве функции стоимости возьмем

$$J(v)=\|y(T;\ v)-z_{д}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}+(Nv,\ v)_{L^2(\Sigma)}, \tag{9.40}$$

где $N\in\mathscr{L}(L^2(\Sigma);\ L^2(\Sigma))$, $N\geqslant\nu I$, $\nu>0$. Норма в пространстве $H^{-1}(\Omega)$ задается формулой

$$\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)}=\int_\Omega((-\Delta)^{-1}f)\,f\,dx,$$

где $(-\Delta)^{-1}f=\varphi$ — решение задачи

$$(-\Delta)\,\varphi=f \quad \text{в} \quad \Omega; \quad \varphi=0 \text{ на } \Gamma.$$

Оптимальное управление $u\in\mathscr{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$(y(T;\ u)-z_{д},\ y(T;\ v)-y(T;\ u))_{H^{-1}(\Omega)}+\\
+(Nu,\ v-u)_{L^2(\Sigma)}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathscr{U}_\partial. \tag{9.41}$$

---

[1]) $\partial/\partial\nu$ — нормальная производная.

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+A^*p(u)=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &p(u)|_\Sigma=0;\ p(x, T; u)=-(-\Delta)^{-1}[y(T; u)-z_д]^{1)},\ x\in\Omega. \end{aligned}\right\} \quad (9.42)$$

Неравенство (9.41) можно преобразовать, если умножить первое из соотношений (9.42) на $y(v) - y(u)$ и применить формулу Грина. Так доказывается

Теорема 9.3. *Если состояние системы определяется как решение задачи* (9.1) — (9.3) (*или уравнения* (9.9)), *а функция стоимости имеет вид* (9.40), *то для оптимального управления* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *удовлетворяются соотношения* (9.1) — (9.3) (*при* $v = u$), (9.42) *и*

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}}+Nu\right)(v-u)\,d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial. \quad (9.43)$$

Пример 9.3. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t}+Ay=f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t}+A^*p=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &p=0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}}+Ny=0 \quad \text{на} \quad \Sigma;\\ &y(x, 0)=y_0(x),\ p(x, T)=-(-\Delta)^{-1}[y(x, T)-z_д] \ \text{в} \ \Omega, \end{aligned}\right\} \quad (9.44)$$

а именно $u = y|_\Sigma$.

Пример 9.4. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$. Тогда оптимальное управление получается из решения односторонней задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t}+Ay=f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t}+A^*p=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &p=0,\ y\geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Sigma,\\ &\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}}+Ny\geqslant 0, \quad y\left(\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}}+Ny\right)=0 \ \text{на} \ \Sigma;\\ &y(x, 0)=y_0(x),\ p(x, T)=-(-\Delta)^{-1}[y(x, T)-z_д] \ \text{в} \ \Omega, \end{aligned}\right\} \quad (9.45)$$

а именно $u = y|_\Sigma$.

[1]) То есть $p(x, T; u)$ — решение задачи

$$\Delta p(x, T; u)=y(x, T; u)-z_д \ \text{в} \ \Omega;\ p(x, T; u)=0 \ \text{на} \ \Gamma.$$

Пример 9.5. Пусть $N = 0$ (ср. с разд. 7.2) и

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U}, v(t) \in E_\partial \text{ почти всюду}\},\tag{9.46}$$

где E_∂ — выпуклое замкнутое ограниченное подмножество пространства $L^2(\Gamma)$.

Тогда справедливо утверждение, аналогичное теореме 7.2: если в выражении для оператора A коэффициенты достаточно гладкие и $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) > 0$, то оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ существует и удовлетворяет условию

$$u(t) \in \partial E_\partial \text{ для почти всех } t,\tag{9.47}$$

где ∂E_∂ — граница множества E_∂.

Действительно, если управление u оптимально, то неравенство (9.43) выполняется при $N = 0$, откуда (теорема 2.1 гл. 2) для почти всех t

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial p(t; u)}{\partial \nu_{A^*}} u(t)\, d\Gamma \leqslant \int\limits_\Gamma \frac{\partial p(t; u)}{\partial \nu_{A^*}} e\, d\Gamma \qquad \forall e \in E_\partial.\tag{9.48}$$

Но в силу свойства обратной единственности (разд. 7.2), которое здесь имеет место,

$$\frac{\partial p(t; u)}{\partial \nu_{A^*}} \neq 0 \text{ почти всюду.}$$

Поэтому из неравенства (9.48) следует утверждение (9.47).

Заметим, что отсюда же вытекает и *единственность* оптимального управления, если множество E_∂, кроме того, еще и строго выпукло.

Пример 9.6. Если выбрать множество E_∂, как в (7.18), то

$$u(x, t) = \begin{cases} \xi_0(x) \text{ почти всюду, если } \dfrac{\partial p(x, t; u)}{\partial \nu_{A^*}} > 0, \\ \xi_1(x) \text{ почти всюду, если } \dfrac{\partial p(x, t; u)}{\partial \nu_{A^*}} < 0. \end{cases}\tag{9.49}$$

Было бы интересно получить информацию о свойствах множества, разделяющего на поверхности Σ области, где управление u принимает значения ξ_0 и ξ_1 соответственно.

Замечание 9.5. Можно было бы избежать использования нормы пространства $H^{-1}(\Omega)$, если предположить управление v «регулярным» (как в разд. 9.5), но тогда усложнилось бы выражение $(Nv, v)_{\mathcal{U}}$.

Замечание 9.6. В примере 9.6 можно избежать использования нормы пространства $H^{-1}(\Omega)$, когда A — оператор второго порядка; см. разд. 9.7.

9.7. Финальное наблюдение; параболические операторы второго порядка

Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial y(v)}{\partial t}+Ay(v)=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &y(v)|_{\Sigma}=v;\ y(x,0;v)=y_0(x),\ x\in\Omega,\ y_0\in L^{\infty}(\Omega),\end{aligned}\right\} \tag{9.50}$$

и предположим, что

$$\mathcal{U}_{\partial} \text{ — выпуклое замкнутое подмножество в } L^{\infty}(\Sigma) \tag{9.51}$$

(тогда множество $\mathcal{U}_{\partial}$ замкнуто в пространстве $L^2(\Sigma)$).

Согласно принципу максимума для параболических уравнений (см. Ладыженская, Солонников и Уральцева [1, теорема 7.2, гл. 3]), $y(v)\in L^{\infty}(Q)$, а $v\to y(v)$ — (аффинное) непрерывное отображение $L^{\infty}(\Sigma)\to L^{\infty}(Q)$. Поэтому $y(T;v)\in L^{\infty}(\Omega)$ и, в частности, $y(T;v)\in L^2(\Omega)$.

В качестве функции стоимости можно взять

$$J(v)=\int_{\Omega}[y(x,T;v)-z_{д}(x)]^2\,dx+(Nv,v)_{\mathcal{U}}, \tag{9.52}$$

где $\mathcal{U}=L^2(\Sigma)$; $N\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U})$, $N\geqslant\nu I$, $\nu>0$.

Согласно замечанию 1.1 гл. 1, существует такой единственный элемент $u\in\mathcal{U}_{\partial}$, что

$$J(u)\leqslant J(v)\quad \forall v\in\mathcal{U}_{\partial},$$

причем этот минимизирующий элемент характеризуется тем, что

$$\int_{\Omega}[y(x,T;u)-z_{д}][y(x,T;v)-y(x,T;u)]\,dx+\\ +\int_{\Sigma}Nu(v-u)\,d\Sigma\geqslant 0\quad \forall v\in\mathcal{U}_{\partial}. \tag{9.53}$$

Определим сопряженное состояние как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+A^*p(u)=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &p(u)|_{\Sigma}=0;\ p(x,T;u)=-[y(x,T;u)-z_{д}(x)],\ x\in\Omega,\end{aligned}\right\} \tag{9.54}$$

т. е. так же, как и в разд. 9.6 (см. (9.42)), но уже без помощи оператора $(-\Delta)^{-1}$. Тогда можно сказать, что управление $u\in\mathcal{U}_{\partial}$ оптимально в том и только в том случае, если удовлетворяются соотношения (9.50) (при $v=u$), (9.54) и

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial p(u)}{\partial\nu_{A^*}}+Nu\right)(v-u)\,d\Sigma\geqslant 0\qquad \forall v\in\mathcal{U}_{\partial}. \tag{9.55}$$

Пример 9.7. Возьмем множества $\mathcal{U}_\partial$ и E_∂ такими же, как в (9.46), (7.18). Применив полученный только что результат, получим

$$u(x, t) = \begin{cases} \xi_0(x) \text{ почти всюду, если } \dfrac{\partial p(x, t; u)}{\partial \nu_{A^*}} + Nu(x, t) > 0, \\ \xi_1(x) \text{ почти всюду, если } \dfrac{\partial p(x, t; u)}{\partial \nu_{A^*}} + Nu(x, t) < 0, \end{cases}$$

и

$$\frac{\partial p(x, t; u)}{\partial \nu_{A^*}} + Nu(x, t) = 0 \text{ в остальных точках поверхности } \Sigma.$$

Если $N = 0$, то справедливы утверждения, аналогичные утверждениям примера 9.5.

§ 10. Управляемость

10.1. Постановка задачи

Определение 10.1. Система, состояние которой определяется как решение задачи (2.2) — (2.4), называется *управляемой*, если наблюдение $Cy(v)$ заметает (аффинное) подпространство, плотное в пространстве наблюдений, когда управление v пробегает все пространство управлений (т. е. ограничения на управление отсутствуют).

Замечание 10.1. Определение 10.1 представляет собой аналог известного в конечномерном случае определения для финального наблюдения $Cy(v) = y(T; v)$.

Замечание 10.2. В бесконечномерном случае нужно, очевидно, различать плотное подпространство и все пространство. В приложениях (аффинное) подпространство, заметаемое наблюдением $Cy(v)$, *не является* замкнутым для параболических уравнений; оно *может быть* замкнутым для гиперболических уравнений (см. гл. 4).

Замечание 10.3. Естественно, что определение 10.1 легко адаптировать применительно к любой из рассмотренных выше задач (а не только к задаче (2.2) — (2.4)).

Мы покажем на примерах, как проблема управляемости сводится к вопросу единственности.

10.2. Управляемость и единственность

Пример 10.1. Рассмотрим сначала случай 3.1.1 разд. 3.1: состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f + v \quad \text{в} \quad Q; \\ &y(v)|_\Sigma = 0; \; y(x, 0; v) = y_0(x), \; x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

а наблюдение $y(v)$ принадлежит пространству $L^2(Q)$.

Если управление v пробегает пространство $L^2(Q)$, то наблюдение $y(v)$ заметает некоторое (аффинное) подпространство, плотное в пространстве $L^2(Q)$; иными словами, рассматриваемая система управляема.

Действительно, с помощью соответствующей замены всегда можно свести задачу к случаю $f = 0$ и $y_0 = 0$. Пусть функция $\psi \in L^2(Q)$ ортогональна к подпространству, заметаемому наблюдением $y(v)$:

$$\int_Q \psi y(v)\, dx\, dt = 0 \qquad \forall v \in L^2(Q). \tag{10.2}$$

Рассмотрим функцию ξ — решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial \xi}{\partial t} + A^*\xi = \psi \quad \text{в} \quad Q; \\ &\xi|_\Sigma = 0; \; \xi(x, T) = 0, \; x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Тогда

$$\int_Q \psi y(v)\, dx\, dt = \int_Q \left(-\frac{\partial \xi}{\partial t} + A^*\xi\right) y(v)\, dx\, dt =$$
$$= \int_Q \xi \left[\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v)\right] dx\, dt = \int_Q \xi v\, dx\, dt = 0 \quad \forall v \in L^2(Q).$$

Следовательно, $\xi = 0$, а значит, и $\psi = 0$. В силу теоремы Хана — Банаха отсюда следует утверждение об управляемости.

Замечание 10.4. Использованный в предыдущем примере метод является общим. Мы приведем еще два примера его применения.

Пример 10.2. Рассмотрим случай 3.2.2 разд. 3.2: состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = v, \; v \in \mathcal{U} = L^2(\Sigma); \; y(x, 0; v) = 0, \; x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

а наблюдение $y(x, T; v)$ принадлежит пространству $L^2(\Omega)$.

В данном случае система также управляема. Действительно, пусть $\psi \in L^2(\Omega)$ и

$$\int_\Omega \psi(x)\, y(x, T; v)\, dx = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{10.5}$$

Рассмотрим функцию ξ — решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial \xi}{\partial t} + A^*\xi = 0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &\left.\frac{\partial \xi}{\partial \nu_{A^*}}\right|_\Sigma = 0; \;\; \xi(x, T) = \psi(x), \;\; x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

Тогда

$$\int_Q \left(-\frac{\partial \xi}{\partial t} + A^*\xi\right) y(v)\, dx\, dt = 0 =$$

$$= \int_\Sigma \xi \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} d\Sigma - \int_\Omega \psi(x)\, y(x, T; v)\, dx,$$

откуда, согласно (10.5),

$$\int_\Sigma \xi v\, d\Sigma = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Следовательно, $\xi = 0$ на поверхности Σ. Но если данные Коши для функции ξ на поверхности Σ равны нулю, то (Мизохата [1]) $\xi = 0$, а значит, и $\psi = 0$.

Пример 10.3. Рассмотрим теперь систему, описываемую следующей задачей для параболического уравнения четвертого порядка:

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + \Delta^2 y(v) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \tag{10.7}$$

$$y(v)|_\Sigma = v_1, \quad v_1 \in L^2(\Sigma), \tag{10.8}$$

$$\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu}\right|_\Sigma = v_2, \quad v_2 \in L^2(\Sigma); \tag{10.9}$$

$$y(x, 0; v) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{10.10}$$

здесь управление $v = \{v_1, v_2\}$ принадлежит пространству $\mathcal{U} = L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma)$.

Решение этой задачи определяется с помощью транспонирования: существует единственная функция $y(v) \in L^2(Q)$, для которой

$$\int_Q y(v)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Delta^2\varphi\right)dx\,dt=\int_\Sigma v_1\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial\nu}d\Sigma-\int_\Sigma v_2\,\Delta\varphi\,d\Sigma\quad\forall\varphi\in\Phi,\tag{10.11}$$

где

$$\Phi=\left\{\varphi\,|\,D_x^p\varphi\in L^2(Q),\ |p|\leqslant 4,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^2(Q);\right.$$

$$\left.\varphi(x,\ t)|_\Sigma=0,\ \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\nu}\Big|_\Sigma=0;\ \varphi(x,\ T)=0,\ x\in\Omega\right\}.\tag{10.12}$$

Предположим, что наблюдением является $y(x,\ T;\ v)$, $x\in\Omega$. Как известно (см. замечание 9.4),

$$y(\cdot,\ T;\ v)\in H^{-2}(\Omega).\tag{10.13}$$

Рассматриваемая система управляема. Действительно, пусть функция $\psi\in H_0^2(\Omega)$ такова, что

$$(y(\cdot,\ T;\ v),\ \psi)=0\ ^{1)}\qquad\forall v\in\mathcal{U}.\tag{10.14}$$

Определим функцию ξ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial\xi}{\partial t}+\Delta^2\xi=0\quad\text{в}\quad Q;\\&\xi|_\Sigma=0,\ \frac{\partial\xi}{\partial\nu}\Big|_\Sigma=0;\ \xi(x,\ T)=\psi(x),\ x\in\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{10.15}$$

Тогда

$$\int_Q\left(-\frac{\partial\xi}{\partial t}+\Delta^2\xi\right)y(v)\,dx\,dt=0=-(y(\cdot,\ T;\ v),\ \psi)+$$
$$+\int_\Sigma v_1\frac{\partial\,\Delta\xi}{\partial\nu}d\Sigma-\int_\Sigma v_2\,\Delta\xi\,d\Sigma+\int_Q\xi\left(\frac{\partial y(v)}{\partial t}+\Delta^2y(v)\right)dx\,dt,$$

откуда

$$\int_\Sigma v_1\frac{\partial\,\Delta\xi}{\partial\nu}d\Sigma-\int_\Sigma v_2\,\Delta\xi\,d\Sigma=0\qquad\forall v\in\mathcal{U}.\tag{10.16}$$

Следовательно,

$$\Delta\xi=0,\qquad\frac{\partial\,\Delta\xi}{\partial\nu}=0\quad\text{на}\quad\Sigma.\tag{10.17}$$

---

[1]) Скобки здесь обозначают скалярное произведение элементов, принадлежащих пространствам $H^{-2}(\Omega)$ и $H_0^2(\Omega)$ соответственно.

Сравнивая эти соотношения с указанными в (10.15) условиями на поверхности Σ, заключаем, что данные Коши для функции ξ на поверхности Σ равны нулю, а потому (Мизохата [1], Танабе [1]) $\xi = 0$ и $\psi = 0$. Отсюда и следует наше утверждение.

10.3. Суперуправляемость и супереинственность [1]

Снова рассмотрим систему, описанную в примере 10.3, но предположим, что управление v *пробегает подпространство* $\{0, L^2(\Sigma)\}$ пространства $L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma)$. Говорят, что *имеет место суперуправляемость*, если подпространство, заметаемое наблюдением $y(x, T; v)$, плотно в пространстве $H^{-2}(\Omega)$.

Итак, пусть состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи [2])

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y(v)}{\partial t} + \Delta^2 y(v) = 0 \quad \text{в} \quad Q;\\
&y(v)|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu}\right|_\Sigma = v \in L^2(\Sigma);\\
&y(x, 0; v) = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

Для того чтобы выяснить, плотно ли подпространство, заметаемое наблюдением $y(x, T; v)$, в пространстве $H^{-2}(\Omega)$, рассмотрим функцию $\psi \in H_0^2(\Omega)$, удовлетворяющую условию (10.14). Пусть ξ — решение задачи (10.15); тогда равенство (10.16) принимает вид

$$\int_\Sigma v \Delta \xi \, d\Sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\Sigma),$$

откуда $\Delta\xi = 0$ на поверхности Σ. Следовательно, функция ξ удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \Delta^2 \xi = 0 \quad \text{в} \quad Q;\\
&\xi, \ \frac{\partial \xi}{\partial \nu}, \ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \nu^2} = 0 \ \text{на} \quad \Sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

Таким образом, необходимо выяснить, имеет ли место *супер-единственность*: вытекает ли из соотношений (10.19) равенство $\xi = 0$? Приведем один результат, дающий положительный ответ на этот вопрос (Фатторини [5]).

---

[1]) В оригинале super-contrôlabilité et super-unicité.— *Прим. перев.*

[2]) Мы пишем здесь v вместо v_2.

Теорема 10.1. *Если функция ξ удовлетворяет соотношениям* (10.19) *и принадлежит* $L^2(0, T; H^2(\Omega))$, *причем размерность n равна* 1, *а область Ω есть* $(0, \infty)$, *то* $\xi = 0$.

Доказательство. Введем функцию

$$\hat{\xi}(\mu, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(x\mu)\,\xi(x, t)\,dx.$$

Так как $\xi(0, t) = 0$, $\dfrac{\partial^2\xi(0, t)}{\partial x^2} = 0$, то из уравнения

$$-\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} = 0$$

следует, что

$$-\frac{d\hat{\xi}}{dt} + \mu^4\hat{\xi} = 0,$$

а значит,

$$\hat{\xi}(\mu, t) = \exp[-\mu^4(T - t)]\,\hat{\xi}(\mu, T).$$

Тогда

$$\frac{\partial\xi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \sin(x\mu)\,\hat{\xi}(\mu, t)\,d\mu\right)\Big|_{x=0} =$$

$$= \int_0^\infty \mu\exp[-\mu^4(T - t)]\,\hat{\xi}(\mu, T)\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \exp(-\lambda\tau)\,\lambda^{-1/2}\hat{\xi}(\lambda^{1/4}, T)\,d\lambda = 0, \quad 0 < \tau < T.$$

Таким образом, преобразование Лапласа от функции $\lambda^{-1/2}\hat{\xi}(\lambda^{1/4}, T)$ равно нулю, а потому $\hat{\xi}(\lambda^{1/4}, T) = 0$. Отсюда вытекает, что $\xi(x, T) = 0$ и, значит, $\xi = 0$.

Замечание 10.5 [1]). Говорят, что система *нуль-управляема* [2]) (соответственно *нуль-управляема при наличии ограничений* $v \in \mathcal{U}_\partial$), если начало координат O принадлежит замыканию множества, заметаемого наблюдением $Cy(v)$, когда управление v пробегает все пространство $\mathcal{U}$ (соответственно множество $\mathcal{U}_\partial$).

Можно указать (Фатторини [8]) достаточные условия для того, чтобы эти два понятия были эквивалентны в случае, когда множество $\mathcal{U}_\partial$ задается глобальными ограничениями (типа (2.55) гл. 2). Эти условия удовлетворяются, в частности, для систем,

---

1) Замечания 10.5—10.7 добавлены автором в английском издании.— *Прим. перев.*

2) В оригинале null-controllability.— *Прим. перев.*

описываемых волновыми операторами (конечно, приведенные выше определения легко распространяются на гиперболические системы, рассматриваемые нами в гл. 4).

Замечание 10.6. Одной из важнейших для приложений является проблема управляемости при наличии *аддитивных возмущений*. Речь идет об отыскании допустимого управления, которое приводит систему в нужное состояние при *наихудших*, наиболее неблагоприятных возмущениях. Эта проблема, таким образом, тесно связана с *теорией игр*.

Относительно геометрического подхода к этой проблеме (и, в частности, развития метода Антосевича [1]) см. работу Делфура и Миттера [1].

Замечание 10.7. Другое связанное с управляемостью понятие — *модальная управляемость* [1]), которая, говоря нестрого, означает следующее: существует управление, «улучшающее» спектр (например, улучшающее устойчивость системы). *Модальная управляемость относительно данного спектра* означает возможность выбора управления, которое обеспечивает получение системой нужного спектра.

Это понятие, введенное Розенброком [1], детально изучалось Саймоном и Миттером [1], Вонхамом [2] и др. в случае конечномерного пространства.

Укажем на интересную аналогию между проблемой модальной управляемости относительно данного спектра и следующего рода задачами численных методов линейной алгебры (так называемые «обратные задачи»): дана матрица A (эрмитова или действительная); найти такую действительную диагональную матрицу B, чтобы матрица $A+B$ имела данный действительный спектр (Даунинг и Хаусхолдер [1], Хадлер [1], Лаборд [1]).

§ 11. Стартовое управление [2])

11.1. Постановка задачи. Общий результат

Пусть выполнены предположения § 2, причем

$$\mathcal{U} = H. \tag{11.1}$$

Состояние $y(v) \in L^2(0, T; V)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{dy(v)}{dt} + A(t)\, y(v) = f, \tag{11.2}$$

$$y(0; v) = v, \tag{11.3}$$

[1]) В оригинале modal controllability.— *Прим. перев.*

[2]) В оригинале contrôle initial.— *Прим. перев.*

где f — данный элемент пространства $L^2(0, T; V')$. Таким образом, *управлением здесь служит начальное состояние системы.*

Для определенности [1]) будем считать, что наблюдением является $y(T; v)$, а функция стоимости имеет вид

$$J(v) = |y(T; v) - z_д|^2 + (Nv, v), \tag{11.4}$$

где $N \in \mathcal{L}(H; H)$, $N \geqslant \nu I$, $\nu > 0$.

Оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$(y(T; u) - z_д, y(T; v) - y(T; u)) + \\ + (Nu, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{11.5}$$

Введем сопряженное состояние как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)p(u) = 0;\\ &p(T; u) = y(T; u) - z_д, \quad p(t; u) \in L^2(0, T; V). \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Тогда неравенство (11.5) эквивалентно неравенству

$$(p(0, u) + Nu, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{11.7}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 11.1. *Если состояние системы определяется как решение задачи* (11.2), (11.3), *а функция стоимости имеет вид* (11.4), *то для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения* (11.2), (11.3) (*при* $v = u$), (11.6) *и* (11.7).

11.2. Примеры

Пример 11.1. Если ограничения на управление отсутствуют (т. е. если $\mathcal{U}_\partial = H$), то $p(0; u) + Nu = 0$. Поэтому оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)y = f, \quad -\frac{dp}{dt} + A^*(t)p = 0;\\ &y(0) + N^{-1}p(0) = 0, \; p(T) = y(T) - z_д; \; y, p \in L^2(0, T; V), \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

а именно $u = -N^{-1}p(0)$.

Пример 11.2. Пусть выполнены предположения разд. 3.1, причем $\partial/\partial t + A$ — параболический оператор второго порядка, а

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{11.9}$$

[1]) Мы предоставляем читателю самому провести необходимые рассуждения (аналогичные нижеследующим и использующие результаты предыдущих параграфов) для иных типов наблюдения.

Тогда оптимальное управление получается из решения односторонней граничной задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t}+Ay=f, \quad -\frac{\partial p}{\partial t}+A^*p=0 \ \text{ в } \ Q;\\ &y|_\Sigma=0, \quad p|_\Sigma=0;\\ &y(x,0)\geqslant 0, \quad p(x,0)+Ny(x,0)\geqslant 0,\\ &y(x,0)[p(x,0)+Ny(x,0)]=0 \ \text{ в } \Omega;\\ &p(x,T)=y(x,T)-z_\text{д}(x), \quad x\in\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

а именно $u(x) = y(x, 0)$.

Пример 11.3. Пусть выполнены предположения разд. 11.1, причем $N = 0$ и

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{U}_\partial \text{ — ограниченное выпуклое замкнутое}\\ &\quad \text{подмножество пространства } H\ (=\mathcal{U}). \end{aligned}\right\} \tag{11.11}$$

Тогда оптимальное управление *существует*; каждое оптимальное управление $u\in\mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$(p(0;\ u),\ v-u)\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial \tag{11.12}$$

(это неравенство получается из неравенства (11.7) при $N = 0$).

Если дополнительно предположить, что имеет место свойство обратной единственности (разд. 7.2), то

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v)>0 \Rightarrow p(0;\ u)=0. \tag{11.13}$$

Тогда оптимальное управление удовлетворяет условию

$$u\in\partial\mathcal{U}_\partial, \tag{11.14}$$

где $\partial\mathcal{U}_\partial$ — граница множества $\mathcal{U}_\partial$. Если множество $\mathcal{U}_\partial$ к тому же строго выпукло, то оптимальное управление *единственно*.

11.3. Управляемость

Можно легко адаптировать определение 10.1 применительно к условиям рассматриваемой сейчас задачи: система, состояние которой определяется как решение задачи (11.2), (11.3), *управляема* (в момент времени T), если (аффинное) подпространство, заметаемое наблюдением $y(T;\ v)$, когда управление v пробегает все пространство $\mathcal{U} = H$, плотно в пространстве H.

Мы убедимся (используя точно такие же рассуждения, как в § 10), что выяснение этого свойства управляемости сводится к установлению свойства обратной единственности.

Предположим, что с помощью соответствующей замены переменных мы получили $f = 0$ в уравнении (11.2). Пусть элемент

$h \in H$ таков, что

$$(y(T; v), h) = 0 \qquad \forall v \in H. \tag{11.15}$$

Введем функцию $\xi \in L^2(0, T; V)$ — решение задачи

$$-\frac{d\xi}{dt} + A^*(t)\,\xi = 0, \quad \xi(T) = h. \tag{11.16}$$

Тогда

$$\int_0^T \left(-\frac{d\xi}{dt} + A^*(t)\,\xi,\ y(t; v)\right) dt =$$

$$= 0 = -(y(T; v), h) + (\xi(0), y(0; v)),$$

откуда в силу (11.15) и (11.3)

$$(\xi(0), v) = 0 \qquad \forall v \in H.$$

Таким образом, $\xi(0) = 0$. Если имеет место свойство обратной единственности, то $\xi \equiv 0$, а потому $h = 0$, так что доказана

Теорема 11.2. *Если имеет место свойство обратной единственности, то система, состояние которой определяется как решение задачи* (11.2), (11.3), *управляема.*

Замечание 11.1. Если выполнены условия теоремы 11.2, то в случае параболического уравнения подпространство, заметаемое наблюдением $y(T; v)$, *не замкнуто* в пространстве H.

Действительно, если бы оно было замкнутым, то отображение $v \to y(T; v)$ было бы сюръективным, а тогда для любого элемента $h \in H$ существовало бы решение $y \in L^2(0, T; V)$ задачи с обращенным временем

$$\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = 0, \qquad y(T) = h.$$

Однако известно, что это не так, ибо параболические уравнения «необратимы».

11.4. Одна задача об оценке

Пусть состояние y системы описывается параболическим оператором второго порядка [1])

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0 \quad \text{в} \quad Q. \tag{11.17}$$

[1]) Проводимые ниже рассуждения легко распространить на любые параболические операторы, для которых справедлива теорема Мизохата [1].

Рассмотрим задачу о нахождении (*неизвестного*) *начального состояния* $y(0)$ по измеренным (или наблюдаемым) характеристикам управляемой системы

$$y|_\Sigma = g_0, \tag{11.18}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = g_1. \tag{11.19}$$

Точнее, предполагается, что функции g_0 и g_1 (принадлежащие пространству $L^2(\Sigma)$) известны и существует функция y, удовлетворяющая соотношениям (11.17) — (11.19). Тогда эта функция y единственна: если $\tilde{y}$ — вторая такая функция, то разность $\bar{y} = y - \tilde{y}$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A\bar{y} = 0 \quad \text{в} \quad Q, \qquad \bar{y}|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = 0,$$

а значит (Мизохата [1]), $\bar{y} = 0$.

Следовательно, существует вполне определенное начальное состояние $y(0)$, которое нас и интересует. Иными словами, речь идет о (приближенном) вычислении значения $y(0)$ решения *некорректной* задачи Коши (11.17) — (11.19).

Преобразование задачи. Будем рассматривать $y(0) = u$ как *управление*, которое нужно определить оптимальным образом.

Пусть $v \in L^2(\Omega) = \mathcal{U}$. Введем две системы, состояния $y^1(v)$ и $y^2(v)$ которых определяются как решения соответствующих задач

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y^1(v)}{\partial t} + Ay^1(v) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &y^1(v) = g_0 \text{ на } \Sigma, \quad y^1(0; v) = v \text{ в } \Omega \end{aligned}\right\} \tag{11.20}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y^2(v)}{\partial t} + Ay^2(v) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ &\frac{\partial y^2(v)}{\partial \nu_A} = g_1 \text{ на } \Sigma, \quad y^2(0; v) = v \text{ в } \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{11.21}$$

Ясно, что если $v = u$, то $y^1(u) = y^2(u)$. Введем функцию

$$J(v) = \int_Q [y^1(v) - y^2(v)]^2\, dx\, dt. \tag{11.22}$$

Тогда можно утверждать, что

$$\left.\begin{array}{l}\inf\limits_{v\in\mathcal{U}} J(v)=0, \quad \text{т. е. существует единственный}\\ \text{элемент } u, \text{ для которого } J(u)=0.\end{array}\right\} \qquad (11.23)$$

Мы будем искать значение $y(0)=u$, исходя из соотношения (11.23).

Замечание 11.2. Поскольку соотношение (11.23) эквивалентно исходной задаче, в нем сохраняется «неустойчивость» этой задачи. Функция $J(v)$, определенная формулой (11.22), *некоэрцитивна* на пространстве $\mathcal{U}$ (§ 5 гл. 1); поэтому мы должны еще «регуляризовать» эту функцию.

Приложение теоремы 5.3 гл. 1. Для $\varepsilon>0$ зададим функцию

$$J_\varepsilon(v)=J(v)+\varepsilon|v|^2 \qquad \left(|v|^2=\int\limits_\Omega [v(x)]^2\,dx\right). \qquad (11.24)$$

Тогда, согласно теореме 5.3 гл. 1,

$$\left.\begin{array}{l}\text{если } u_\varepsilon\in\mathcal{U}=H \text{ — единственный элемент, миними-}\\ \text{зирующий } J_\varepsilon(v), \text{ то } u_\varepsilon\to u \text{ в } H \text{ при } \varepsilon\to 0.\end{array}\right\} \qquad (11.25)$$

Таким образом, мы свели рассматриваемую задачу к отысканию (или аппроксимации) элемента u_ε. Эта новая задача уже *устойчива*.

Действительно, соотношение (11.23) справедливо только для некоторых *частных* значений g_0 и g_1 (удовлетворяющих условиям совместности). Поэтому элемент u в соотношении (11.23) «не зависит непрерывно» от функций g_0 и g_1. В то же время элемент u_ε «зависит непрерывно» от этих функций.

Отыскание u_ε. Рассмотрим более общую задачу:

$$\text{найти } \inf J_\varepsilon(v), \text{ если } v\in\mathcal{U}_\partial\subset\mathcal{U}=H. \qquad (11.26)$$

Пусть $u_\varepsilon\in\mathcal{U}_\partial$ — оптимальное управление, характеризующееся тем, что

$$\int\limits_Q [y^1(u_\varepsilon)-y^2(u_\varepsilon)][y^1(v)-y^2(v)-y^1(u_\varepsilon)+y^2(u_\varepsilon)]\,dt\,dx+$$
$$+\varepsilon(u_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial. \qquad (11.27)$$

Сопряженное состояние $p=\{p^1,\ p^2\}$ определяется как решение задач

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{\partial p^1}{\partial t}+A^*p^1=y^1(u_\varepsilon)-y^2(u_\varepsilon) \quad \text{в} \quad Q;\\ p^1=0 \text{ на } \Sigma, \quad p^1(x,T)=0 \text{ в } \Omega\end{array}\right\} \qquad (11.28)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p^2}{\partial t}+A^*p^2=y^1(u_\varepsilon)-y^2(u_\varepsilon) \quad \text{в} \quad Q;\\ &\frac{\partial p^2}{\partial\nu_{A^*}}=0 \text{ на } \Sigma,\ p^2(x,T)=0 \quad \text{в} \quad \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{11.29}$$

Неравенство (11.27) можно преобразовать; для этого умножим первое из соотношений (11.28) (соответственно (11.29)) на $y^1(v)-y^1(u_\varepsilon)$ (соответственно на $y^2(v)-y^2(u_\varepsilon)$), проинтегрируем по цилиндру Q и вычтем одно соотношение из другого:

$$\int_Q\left(-\frac{\partial p^1}{\partial t}+A^*p^1\right)[y^1(v)-y^1(u_\varepsilon)]\,dx\,dt-$$
$$-\int_Q\left(-\frac{\partial p^2}{\partial t}+A^*p^2\right)[y^2(v)-y^2(u_\varepsilon)]\,dx\,dt=$$
$$=\int_\Omega[p^1(x,0)-p^2(x,0)](v-u_\varepsilon)\,dx.$$

В результате убеждаемся, что справедлива

Теорема 11.3. *Для отыскания оптимального управления u_ε необходимо решить следующую задачу*:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y^1}{\partial t}+Ay^1=0, \quad \frac{\partial y^2}{\partial t}+Ay^2=0,\\ &-\frac{\partial p^1}{\partial t}+A^*p^1=y^1-y^2, \quad -\frac{\partial p^2}{\partial t}+A^*p^2=y^1-y^2 \end{aligned}\right\} \text{ в } Q; \tag{11.30}$$

$$\left.\begin{aligned} &y^1=g_0, \qquad \frac{\partial y^2}{\partial\nu_A}=g_1,\\ &p^1=0, \qquad \frac{\partial p^2}{\partial\nu_{A^*}}=0 \end{aligned}\right\} \text{ на } \Sigma; \tag{11.31}$$

$$\left.\begin{aligned} &y^1(x,0)=y^2(x,0),\ p^1(x,T)=0,\ p^2(x,T)=0,\\ &p^1(x,0)-p^2(x,0)+\varepsilon y^1(x,0)=0 \end{aligned}\right\} \text{ в } \Omega. \tag{11.32}$$

§ 12. Двойственность

12.1. Общие замечания

Пусть $J(v)$ — квадратичный функционал [1] на пространстве $\mathcal{U}$; его можно записать в виде

$$J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + J(0), \tag{12.1}$$

где $\pi(u, v)$ — билинейная непрерывная форма на пространстве $\mathcal{U}$, а $L(v)$ — линейная непрерывная форма на этом же пространстве. Предположим, что

$$\pi(v, v) \geqslant c \|v\|^2_{\mathcal{U}}, \qquad c > 0, \qquad \forall v \in \mathcal{U}, \tag{12.2}$$

а $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$.

Рассмотрим задачу

$$\text{найти } \inf J(v), \text{ если } v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{12.3}$$

Введем функцию $v \to F(v)$, определенную на пространстве $\mathcal{U}$ формулой

$$F(v) = \begin{cases} -L(v), & \text{если } v \in \mathcal{U}_\partial, \\ +\infty, & \text{если } v \notin \mathcal{U}_\partial. \end{cases} \tag{12.4}$$

Тогда задачу (12.3) можно представить в виде

$$\text{найти } \inf_{v \in \mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F(v)]. \tag{12.5}$$

Функция F обладает следующими свойствами (в дальнейшем только эти свойства нам и потребуются):

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ выпукла и полунепрерывна снизу; принимает} \\ \text{значения в } (-\infty, +\infty];\ F \not\equiv +\infty. \end{array}\right\} \tag{12.6}$$

Определим функцию, двойственную к F относительно билинейной формы π [2]:

$$F^*(u) = \sup_{v \in \mathcal{U}} [\pi(u, v) - F(v)]. \tag{12.7}$$

Функция F^* также обладает перечисленными в (12.6) свойствами. Действительно, она представляет собой верхнюю огибающую семейства линейных непрерывных функций; поэтому доста-

[1]) Это предположение вовсе не обязательно (см. примечания к настоящей главе).

[2]) Иногда функцию F^* называют сопряженной функцией к функции F, или преобразованием Юнга функции F; см. Иоффе и Тихомиров [2].— *Прим. перев.*

точно убедиться в том, что $F^* \not\equiv +\infty$. Но последнее очевидно: существуют такой элемент $u_0 \in \mathcal{U}$ и такое число $\gamma \in \mathbf{R}$, что

$$\pi(u_0, v) - \gamma \leqslant F(v); \tag{12.8}$$

отсюда $F^*(u_0) \leqslant \gamma < \infty$.

Замечание 12.1. Если предположить, что вместо неравенства (12.2) выполняется только

$$\pi(v, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}, \tag{12.9}$$

то тождество $F^* \equiv +\infty$ становится возможным (достаточно взять $\pi = 0$); однако если функция F ограничена снизу, то очевидно, что $F^* \not\equiv +\infty$.

Замечание 12.2. Функция F^{**}, двойственная к F^* относительно билинейной формы π, совпадает с F. Однако это, вообще говоря, не верно, если выполняется только неравенство (12.9) (Брезис [3]). Если билинейная форма π удовлетворяет условию (12.2), но не симметрична, то функция, двойственная к F^* относительно формы π^*, совпадает с F.

Теорема 12.1. *Пусть выполнено условие* (12.2). *Тогда*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F(v)] + \inf_{v \in \mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F^*(v)] = 0. \tag{12.10}$$

Если первая нижняя грань в левой части равенства (12.10) *достигается на элементе u, то вторая нижняя грань достигается на элементе $-u$.*

Доказательство. 1) Как известно (теорема 1.2 гл. 1), элемент $u \in \mathcal{U}$, минимизирующий функционал $\pi(v, v) + 2F(v)$, характеризуется тем, что

$$\pi(u, u) - L(u) \leqslant \pi(u, v) - L(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial,$$

т. е.

$$\pi(u, u) + F(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} [\pi(u, v) + F(v)]. \tag{12.11}$$

Это утверждение верно и для функции F^*, поскольку она обладает свойствами, перечисленными в (12.6) (теорема 1.6 гл. 1). Следовательно, существует единственный элемент $w \in \mathcal{U}$, для которого

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F^*(v)] = \pi(w, w) + 2F^*(w), \tag{12.12}$$

а это соотношение эквивалентно равенству

$$\pi(w, w) + F^*(w) = \inf_{v \in \mathcal{U}} [\pi(w, v) + F^*(v)]. \tag{12.13}$$

2) Соотношение (12.11) можно переписать в виде

$$\pi(u, u) + F(u) + \sup_{v\in\mathcal{U}} [\pi(-u, v) - F(v)] = 0,$$

или

$$\pi(u, u) + F(u) + F^*(-u) = 0. \qquad (12.14)$$

Таким образом (см. замечание 12.2),

$$\pi(-u, -u) + F^*(-u) = -F(u) = -F^{**}(u) =$$
$$= -\sup_{v\in\mathcal{U}} [\pi(u, v) - F^*(v)] = \inf_{v\in\mathcal{U}} [\pi(-u, v) + F^*(v)].$$

Сравнивая этот результат с равенством (12.13), заключаем, что $w = -u$.

3) Теперь легко доказать формулу (12.10):

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F(v)] + \inf_{v\in\mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F^*(v)] =$$
$$= \pi(u, u) + 2F(u) + \pi(-u, -u) + 2F^*(-u) =$$
$$= 2[\pi(u, u) + F(u) + F^*(-u)] = 0;$$

здесь использовано равенство (12.14).

Замечание 12.3. Допустим, что выполняется только неравенство (12.9). Пусть X — множество (предполагаемое непустым) оптимальных управлений (X — выпуклое замкнутое подмножество множества $\mathcal{U}_\partial$ — см. гл. 1, § 5). Тогда $F^* \not\equiv +\infty$ и множество X^* элементов w, на которых выполняется равенство (12.13), непусто. Точнее,

$$X^* \supset -X, \qquad (12.15)$$

и соотношение (12.10) также выполняется (оно доказывается аналогично; следует заметить, что $F^{**} \leqslant F$).

Замечание 12.4. Равенство (12.10) можно представить еще в виде

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F(v)] = \sup_{v\in\mathcal{U}} [-\pi(v, v) - 2F^*(v)], \qquad (12.16)$$

что позволяет оценить значение $\inf J(v)$.

Замечание 12.5. Правую часть равенства (12.16) можно записать в виде

$$\sup_{v\in\mathcal{U}} [-\pi(v, v) - 2F^*(-v)].$$

Согласно определению (12.7),

$$F^*(-u) = \sup_{v \in \mathcal{U}} [\pi(-u, v) - F(v)] = \sup_{v \in \mathcal{U}_\partial} [\pi(u, -v) + L(v)],$$

и так как (гл. 1, § 1)

$$\pi(u, -v) + L(v) = \frac{1}{2} J'(u) \cdot (-v), \tag{12.17}$$

то

$$F^*(-u) = \frac{1}{2} \sup_{v \in \mathcal{U}_\partial} (-J'(u), v), \quad J'(u) \in \mathcal{U}'. \tag{12.18}$$

Для $\xi \in \mathcal{U}'$ положим

$$\mathcal{A}_{\mathcal{U}_\partial}(\xi) = \sup_{v \in \mathcal{U}_\partial} (\xi, v) \tag{12.19}$$

(т. е. $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_\partial}(\xi)$ — значение на элементе ξ опорной функции множества $\mathcal{U}_\partial$); тогда

$$F^*(-u) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mathcal{U}_\partial}(-J'(u)). \tag{12.20}$$

Следовательно, равенство (12.16) можно записать еще в виде

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} [\pi(v, v) + 2F(v)] = \sup_{v \in \mathcal{U}} [-\pi(v, v) - \mathcal{A}_{\mathcal{U}_\partial}(-J'(v))]. \tag{12.21}$$

12.2. Один пример

Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid (v, g_i)_{\mathcal{U}} \leqslant \alpha_i, \ i = 1, \ldots, m\}, \tag{12.22}$$

где элементы $g_i \in \mathcal{U}$ и числа $\alpha_i \in \mathbf{R}$ даны, причем для определенности положим $\mathcal{U} = L^2(\Sigma)$. Состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f \quad \text{в} \quad Q; \\ &y(v)|_\Sigma = v, \ y(x, 0; v) = y_0(x), \ x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{12.23}$$

а функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_\Sigma [y(v) - z_д]^2 \, d\Sigma + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)} \tag{12.24}$$

(см. разд. 8.3). В рассматриваемом случае

$$\pi(u, v) = \int_\Sigma [y(u) - y(0)][y(v) - y(0)]\, d\Sigma + (Nu, v)_{L^2(\Sigma)},$$

$$L(v) = \int_\Sigma [z_д - y(0)][y(v) - y(0)]\, d\Sigma.$$

Пусть $\xi \in L^2(\Sigma)$; тогда

$$\sup_{v \in \mathcal{U}_\partial} (\xi, v)_{L^2(\Sigma)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \xi_i \alpha_i, & \text{если } \xi = \sum_{i=1}^m \xi_i g_i, \quad \xi_i \geqslant 0; \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{12.25}$$

Действительно, если $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i g_i$, $\xi_i \geqslant 0$, то первое равенство (12.25) очевидно. Если же ξ не имеет указанного вида, то по теореме Хана — Банаха существует элемент $h \in L^2(\Sigma)$, для которого $(\xi, h) > 0$; $(h, g_i) < 0$, $i = 1, \ldots, m$. Но тогда для достаточно больших чисел $\lambda > 0$ элемент λh лежит в множестве $\mathcal{U}_\partial$, а потому

$$\sup_{v \in \mathcal{U}_\partial} (\xi, v)_{L^2(\Sigma)} \geqslant \lim_{\lambda \to +\infty} (\xi, \lambda h)_{L^2(\Sigma)} = +\infty.$$

Соотношение (12.25) доказано.

Правая часть равенства (12.21) принимает тогда вид

$$\sup_{v \in \mathcal{U}} \left[-\pi(v, v) - \sum_{i=1}^m \xi_i \alpha_i \right], \quad -J'(v) = \sum_{i=1}^m \xi_i g_i, \quad \xi_i \geqslant 0. \tag{12.26}$$

Это задача *квадратичного программирования* (требующая, однако, предварительного вычисления величин $\pi((J')^{-1} g_i, (J')^{-1} g_i)$).

§ 13. Ограничения на управление и на состояние

13.1. Один общий результат

Пусть $\mathcal{U}$ — (гильбертово) пространство управлений, Φ — векторное топологическое локально выпуклое рефлексивное пространство над $\mathbf{R}$ и

$$\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \Phi). \tag{13.1}$$

Пусть

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ — замкнутый выпуклый конус в } \Phi \\ \quad \text{с вершиной в начале координат.} \end{array} \right\} \tag{13.2}$$

Определим множество допустимых управлений

$$\mathcal{U}_\partial = \{ v \mid \varphi_0 + \rho v \in \mathcal{C} \}, \tag{13.3}$$

где φ_0 — данный элемент пространства Φ. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial \neq \varnothing$. Множество $\mathcal{U}_\partial$ выпукло и замкнуто.

Замечание 13.1. В разд. 13.2 будет показано на примерах, каким образом определение (13.3) охватывает ограничения на управление и на состояние.

Пусть задано отображение $v \to J(v)$ множества $\mathcal{U}_\partial$ в $\mathbf{R}$; предполагается, что это выпуклый и дифференцируемый функционал (гл. 1, § 1). Как обычно, ищется $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$. Известно (гл. 1, § 1), что необходимое и достаточное условие оптимальности управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ задается неравенством

$$J'(u) \cdot (v-u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{13.4}$$

Определим множество

$$\mathscr{C}^+ = \{\varphi' \mid \varphi' \in \Phi',\ \langle \varphi', \varphi \rangle \geqslant 0\ \ \forall \varphi \in \mathscr{C}\}, \tag{13.5}$$

где $\langle \varphi', \varphi \rangle$ — скалярное произведение элементов $\varphi' \in \Phi'$ и $\varphi \in \Phi$.

Покажем, что

$$(\mathscr{C}^+)^+ = \mathscr{C}. \tag{13.6}$$

В самом деле, ясно, что $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^+)^+$. Предположим, что это включение — строгое; тогда найдется такой элемент $\xi \in (\mathscr{C}^+)^+$, что $\xi \notin \mathscr{C}$. В этом случае по теореме Хана — Банаха существует такой элемент $\varphi' \in \Phi'$, что $\varphi' \geqslant 0$ на множестве $\mathscr{C}$ и $\langle \varphi', \xi \rangle < 0$. Но

$$\varphi' \geqslant 0 \text{ на множестве } \mathscr{C} \Rightarrow \varphi' \in \mathscr{C}^+,$$

а так как $\xi \in (\mathscr{C}^+)^+$, то $\langle \varphi', \xi \rangle \geqslant 0$. Полученное противоречие и доказывает формулу (13.6).

Теорема 13.1. *Пусть $\rho^* \in \mathscr{L}(\Phi'; \mathcal{U}')$ — оператор, сопряженный к оператору ρ. Предположим, что*

$$\text{\textit{множество} } \rho^* \mathscr{C}^+ \text{ \textit{замкнуто в} } \mathcal{U}'; \tag{13.7}$$

$$-\varphi_0 \text{ \textit{принадлежит замыканию множества} } \rho\mathcal{U}_\partial \text{ \textit{в} } \Phi. \tag{13.8}$$

Тогда если u — оптимальное управление (предполагается, что оно существует), то найдется элемент $\lambda \in \mathscr{C}^+$, для которого

$$J'(u) = \rho^* \lambda \tag{13.9}$$

и

$$\langle \lambda, \varphi_0 + \rho u \rangle = 0. \tag{13.10}$$

Обратно, если элементы $u \in \mathcal{U}_\partial$ и $\lambda \in \mathscr{C}^+$ удовлетворяют условиям (13.9) и (13.10), то u — оптимальное управление.

Доказательство. 1) Для фиксированного управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ определим множество

$$\mathcal{U}_\partial^u = \{v \mid v \in \mathcal{U},\ u + \varepsilon v \in \mathcal{U}_\partial \text{ для подходящего } \varepsilon > 0\}. \quad (13.11)$$

Если $v \in \mathcal{U}_\partial$, то $v - u \in \mathcal{U}_\partial^u$, ибо $u + (v - u) \in \mathcal{U}_\partial$. Следовательно, согласно соотношению (13.4),

$$J'(u) \in (\mathcal{U}_\partial^u)^+ \quad (13.12)$$

(заметим, что определение (13.5) имеет смысл независимо от того, является множество $\mathscr{C}$ конусом или нет).

Убедимся, что

$$(\rho^*\mathscr{C}^+)^+ \subset \mathcal{U}_\partial^u. \quad (13.13)$$

Действительно,

$$w \in (\rho^*\mathscr{C}^+)^+ \Longleftrightarrow (w,\ \rho^* c_+) \geqslant 0\ ^{1)} \qquad \forall c_+ \in \mathscr{C}^+,$$

т. е. $(\rho w,\ c_+) \geqslant 0$. Но $\varphi_0 + \rho u \in \mathscr{C}$ (так как по условию $u \in \mathcal{U}_\partial$); следовательно, согласно свойству (13.6), $\varphi_0 + \rho u \in (\mathscr{C}^+)^+$. Но тогда

$$\langle \varphi_0 + \rho\,(u + \theta w),\ c_+\rangle \geqslant 0 \qquad \forall \theta \geqslant 0,$$

откуда $u + \theta w \in \mathcal{U}_\partial$ для любого $\theta \geqslant 0$, а значит, $w \in \mathcal{U}_\partial^u$. Это и доказывает соотношение (13.13).

Так как, согласно предположению (13.7), множество $\rho^*\mathscr{C}^+$ *замкнуто*, то к нему применима формула (13.6), т. е. $((\rho^*\mathscr{C}^+)^+)^+ = \rho^*\mathscr{C}^+$. Поэтому из соотношения (13.13) следует, что

$$(\mathcal{U}_\partial^u)^+ \subset \rho^*\mathscr{C}^+. \quad (13.14)$$

Из соотношений (13.12) и (13.14) теперь вытекает, что существует элемент $\lambda \in \mathscr{C}^+$, удовлетворяющий условию (13.9).

Далее,

$$(J'(u),\ u) = \langle \lambda,\ \rho u\rangle = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} (J'(u),\ v) =$$
$$= \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} \langle \lambda,\ \rho v\rangle = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} \langle \lambda,\ \varphi_0 + \rho v\rangle - \langle \lambda,\ \varphi_0\rangle. \quad (13.15)$$

Так как

$$\lambda \in \mathscr{C}^+ \Rightarrow \langle \lambda,\ \varphi_0 + \rho v\rangle \geqslant 0,$$

то в силу предположения (13.8)

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} \langle \lambda,\ \varphi_0 + \rho v\rangle = 0.$$

Поэтому из равенства (13.15) следует соотношение (13.10).

---

[1]) Скобками обозначено скалярное произведение элементов, принадлежащих пространствам $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ соответственно.

2) Обратно, пусть элементы $\lambda \in \mathscr{C}^+$ и $u \in \mathscr{U}_\partial$ удовлетворяют условиям (13.9) и (13.10). Тогда для любого управления $v \in \mathscr{U}_\partial$

$$J'(u)\cdot(v-u) = \langle\lambda, \rho v - \rho u\rangle =$$
$$= \langle\lambda, \varphi_0 + \rho v\rangle - \langle\lambda, \varphi_0 + \rho u\rangle = \langle\lambda, \varphi_0 + \rho v\rangle \geqslant 0,$$

поскольку $\lambda \in \mathscr{C}^+$. Следовательно, $J'(u)\cdot(v-u) \geqslant 0$ для любого управления $v \in \mathscr{U}_\partial$, т. е. u — оптимальное управление.

Пример 13.1. Пусть $\mathscr{C} = \{0\}$. Тогда $\mathscr{C}^+ = \Phi'$. Поскольку по условию $\mathscr{U}_\partial \neq \varnothing$, существует такое управление $v \in \mathscr{U}_\partial$, что $\varphi_0 + \rho v = 0$. Таким образом, выполняется условие (13.8), и мы получаем:

если $\mathscr{C} = \{0\}$, то ***теорема*** *13.1 применима в случае, когда множество $\rho^*\Phi'$ замкнуто в пространстве $\mathscr{U}'$.* (13.16)

Замечание 13.2. (Это замечание поглощает и пример 13.1.)

Если $\varphi_0 = \rho u_0$, где $u_0 \in \mathscr{U}_\partial$, то условие (13.8) *выполнено.* (13.17)

Действительно, $w = -u_0 \in \mathscr{U}_\partial$, и потому $\varphi_0 + \rho w = 0$

13.2. Приложения (I)

Пусть выполняются предположения разд. 2.1, причем $\mathscr{U} = L^2(0, T; V')$. Состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy(v)}{dt} + A(t)\,y(v) = f + v, \quad v \in \mathscr{U}, \quad f \in L^2(0, T; V');\\ &y(0; v) = y_0, \qquad y_0 \in H, \end{aligned}\right\} \tag{13.18}$$

а функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_0^T |y(t; v) - z_д|^2\,dt + (Nv, v)_{\mathscr{U}}, \tag{13.19}$$

где $z_д \in L^2(0, T; H)$, $N \in \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{U})$, $N \geqslant \nu I$, $\nu > 0$.

Допустим, что

$$\mathscr{U}_\partial = \{v \mid y(T; v) \in y_1 + \mathscr{C}\}, \tag{13.20}$$

где y_1 — данный элемент пространства H, а $\mathscr{C}$ — замкнутый выпуклый конус в пространстве H с вершиной в начале координат. Предполагается, что $\mathscr{U}_\partial \neq \varnothing$.

Укажем связь введенных сейчас обозначений с применявшимися в разд. 13.1:

$$\Phi = H, \ \rho v = y(T; v) - y(T; 0), \ \varphi_0 = y(T; 0) - y_1.$$

Сопряженный оператор $\rho^* \in \mathscr{L}(H; L^2(0, T; V))$ определяется следующим образом: если $h \in H$, то $\rho^* h = w$ — решение задачи

$$-\frac{dw}{dt} + A^*(t)\, w = 0 \text{ в } (0,\ T), \qquad w(T) = h. \qquad (13.21)$$

Действительно,

$$\int_0^T \left(-\frac{dw}{dt} + A^*(t)\, w,\ y(t;\ v) - y(t;\ 0)\right) dt =$$

$$= 0 = -(h,\ \rho v) + \int_0^T (w,\ v)\, dt,$$

откуда

$$w = \rho^* h. \qquad (13.22)$$

Лемма 13.1. *Условие* (13.7) *выполнено.*

Доказательство. Пусть $h_n \in \mathscr{C}^+$ и $w_n = \rho^* h_n \to w$ в пространстве $L^2(0,\ T;\ V)$. Тогда

$$-\frac{dw_n}{dt} + A^*(t)\, w_n = 0,\ A^*(t)\, w_n \to A^*(t)\, w \text{ в } L^2(0,\ T;\ V'),$$

откуда $dw_n/dt \to dw/dt$ в пространстве $L^2(0,\ T;\ V')$. Поэтому $w_n(T) = h_n \to w(T)$ в пространстве H.

Положим $h = w(T)$. Тогда $h_n \to h$ в пространстве H и (так как множество $\mathscr{C}^+$ замкнуто)

$$h \in \mathscr{C}^+,\quad -\frac{dw}{dt} + A^* w = 0,\ w(T) = h.$$

Отсюда и следует, что $w = \rho^* h$.

Лемма 13.2. *Условие* (13.8) *выполнено.*

Доказательство. Справедливо даже более сильное утверждение: существует такое управление $v \in \mathscr{U}_\partial$, что $\varphi_0 + \rho v = 0$, т. е. $y(T;\ v) = y_1$. В самом деле, всегда найдется такая функция $z \in L^2(0,\ T;\ V)$, что $dz/dt \in L^2(0,\ T;\ V')$ и $z(0) = y_0$, $z(T) = y_1$, где y_0 и y_1 — выбранные произвольным образом элементы пространства H. Тогда достаточно взять $v = dz/dt + A(t)\, z - f$ (ср. с замечанием 13.2).

Таким образом, можно применить теорему 13.1. Введем сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи

$$-\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)\, p(u) = y(u) - z_д,\ p(T;\ u) = 0. \qquad (13.23)$$

Легко проверить, что

$$J'(u) = 2\,[p(u) + \Lambda_V^{-1} N u], \qquad (13.24)$$

где Λ_V — канонический изоморфизм пространства V на V'.

Согласно теореме 13.1, существует такой элемент λ, что [1])

$$\lambda \in \mathscr{C}^+, \quad p(u) + \Lambda_V^{-1} N u = \rho^* \lambda, \tag{13.25}$$

$$(\lambda,\ y(T;\ u) - y_1) = 0. \tag{13.26}$$

Положим $w = \rho^* \lambda$ и $q = p(u) - w$. Тогда (в силу соотношений (13.21))

$$-\frac{dq}{dt} + A^*(t)\, q = y(u) - z_д, \quad q(T) = -\lambda. \tag{13.27}$$

Исключая отсюда u, убеждаемся, что справедлива

Теорема 13.2. *Пусть состояние системы определяется как решение задачи* (13.18), *функция стоимости имеет вид* (13.19), *а множество* $\mathscr{U}_\partial$ *задано соотношением* (13.20), *причем* $\mathscr{U}_\partial \neq \varnothing$. *Если оптимальное управление существует, то найдется такой элемент* $\lambda \in H$, *что оптимальное управление и получается из решения задачи*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\, y + N^{-1}\Lambda_V q = f, \quad y(0) = y_0;\\ &-\frac{dq}{dt} + A^*(t)\, q = y - z_д, \quad q(T) = -\lambda;\\ &(\lambda,\ y(T) - y_1) = 0, \quad \lambda \in \mathscr{C}^+, \end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

а именно

$$\Lambda_V^{-1} N u + q = 0. \tag{13.29}$$

13.3. Приложения (II)

Пусть выполняются предположения разд. 3.2. Состояние системы $y(v)$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + A(t)\, y(v) = f \text{ в } Q, \quad f \in L^2(Q); \tag{13.30}$$

$$\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = v, \quad v \in \mathscr{U} = L^2(\Sigma); \tag{13.31}$$

$$y(x, 0;\ v) = y_0(x), \quad x \in \Omega,\ y_0 \in L^2(\Omega), \tag{13.32}$$

---

[1]) Всегда можно заменить λ на $\lambda/2$.

а функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\int_\Omega [y(x, T; v)-z_д(x)]^2\,dx+(Nv, v)_{L^2(\Sigma)}, \tag{13.33}$$

где $N\in\mathscr{L}(L^2(\Sigma);\ L^2(\Sigma))$, $N\geqslant\nu I$, $\nu>0$.

Допустим, что

$$\mathscr{U}_\partial=\{v \mid y(T; v)\in y_1+\mathscr{C}\}, \tag{13.34}$$

где y_1 — данный элемент пространства $H=L^2(\Omega)$, а $\mathscr{C}$ — замкнутый выпуклый конус в пространстве H с вершиной в начале координат.

Таким образом, в обозначениях разд. 13.1

$$\Phi=H=L^2(\Omega),\quad \rho v=y(T; v)-y(T; 0),\quad \varphi_0=y(T; 0)-y_1.$$

Оператор ρ принадлежит пространству $\mathscr{L}(L^2(\Sigma);\ L^2(\Omega))$; сопряженный оператор $\rho^*\in\mathscr{L}(L^2(\Omega);\ L^2(\Sigma))$ определяется следующим образом: если $h\in L^2(\Omega)$, а w — решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial w}{dt}+A^*(t)\,w=0 \quad \text{в} \quad Q;\\ &\left.\frac{\partial w}{\partial\nu_{A^*}}\right|_\Sigma=0,\quad w(x, T)=h(x),\quad x\in\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{13.35}$$

то

$$\rho^* h=w|_\Sigma. \tag{13.36}$$

В рассматриваемом случае условие (13.7), вообще говоря, не выполняется. Действительно, решение задачи (13.35) принадлежит пространству $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ и, следовательно, в частности, $w|_\Sigma\in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$. Но это пространство представляет собой *незамкнутое* подпространство пространства $L^2(\Sigma)$.

Очевидно, что

$$\left.\begin{array}{l}\textit{условие (13.7) выполнено, если конус } \mathscr{C}^+\\ \textit{содержится в конечномерном пространстве.}\end{array}\right\} \tag{13.37}$$

Теорема 13.3. *Пусть состояние системы определяется как решение задачи* (13.30) — (13.32), *функция стоимости имеет вид* (13.33), *множество* $\mathscr{U}_\partial$ *задано соотношением* (13.34), *где* $y_1=y(T; 0)$, *а конус* $\mathscr{C}^+$ *содержится в конечномерном пространстве. Если оптимальное управление существует, то найдется такая функция* $\lambda\in L^2(\Omega)$, *что оптимальное управление и полу-*

чается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial t}+A(t)\,y=f,\quad -\frac{\partial q}{\partial t}+A^*(t)\,q=0 \quad \text{в} \quad Q;\\
&N\frac{\partial y}{\partial \nu_A}+q=0,\quad \frac{\partial q}{\partial \nu_{A^*}}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma;\\
&y(x,0)=y_0(x),\ q(x,T)=y(x,T)-z_{\text{д}}(x)-\lambda(x) \ \text{в}\ \Omega;\\
&\int\limits_{\Omega}\lambda(x)\,y(x,T)\,dx=0,\quad \lambda\in\mathscr{C}^+,
\end{aligned}\right\}\quad (13.38)$$

а именно $u=-N^{-1}(q\,|_\Sigma)$.

Доказательство. Так как $y_1=y(T;0)$, то $\varphi_0=0$, и можно применить замечание 13.2. Введем сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи

$$-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+A^*(t)\,p(u)=0,\quad p(T;u)=y(T;u)-z_{\text{д}};$$

тогда

$$\frac{1}{2}J'(u)=p(u)\,|_\Sigma+Nu.$$

Согласно теореме 13.1, существует такой элемент λ, что[1])

$$\lambda\in\mathscr{C}^+,\ p(u)\,|_\Sigma+Nu=\rho^*\lambda=w\,|_\Sigma$$

(см. определение (13.36)) и $\int\limits_\Omega \lambda(x)y(x,T;u)\,dx=0$. Полагая $q=p(u)-w$, легко убеждаемся в справедливости теоремы.

Замечание 13.3. Аналогичные примеры можно привести для систем, описываемых параболическими уравнениями произвольного порядка, или системами параболических уравнений.

Замечание 13.4. Ясно, что теорема 13.1 применима также и в случае систем, описываемых эллиптическими уравнениями (гл. 2).

§ 14. Неквадратичные функции стоимости

14.1. План дальнейшего исследования

Функции стоимости в рассмотренных до сих пор задачах были квадратичными. Однако все предыдущие результаты (кроме расцепления — см. разд. 14.3) можно распространить и на случай,

[1]) Всегда можно заменить λ на $\lambda/_2$.

когда $J(v)$ — выпуклая дифференцируемая (неквадратичная) функция. Для этого следует воспользоваться теоремой 1.3 гл. 1.

Мы ограничимся лишь одним простым примером (разд. 14.2), а затем укажем на те (значительные) трудности, которые возникают в задаче расщепления (разд. 14.3).

14.2. Один пример

Рассмотрим систему, описываемую параболическим оператором второго порядка [1]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t}+A(t)\,y(v)=f+v \quad \text{в} \quad Q; \\ &y(v)|_{\Sigma}=0; \;\; y(x,0;v)=y_0(x), \;\; x\in\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

причем

$$\mathcal{U}=L^q(Q), \qquad 1<q<\infty\ ^{2)}, \tag{14.2}$$

$$f\in L^q(Q), \qquad y_0\in L^q(Q). \tag{14.3}$$

Задача (14.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$y(v), \frac{\partial y(v)}{\partial x_i}\in L^q(Q), \quad i=1,\ \ldots,\ n\ ^{3)}. \tag{14.4}$$

Тогда можно в качестве функции стоимости взять

$$J(v)=\int_Q |y(x,t;v)-z_{\text{д}}(x,t)|^q\,dx\,dt+\nu\,\|v\|^q_{L^q(\Omega)}, \tag{14.5}$$

где $z_{\text{д}}$ — данная функция из $L^q(Q)$, $\nu>0$.

Замечание 14.1. Можно также рассматривать неквадратичную форму на гильбертовом пространстве. Именно, если $\mathcal{U}=L^2(Q)$, то $y(v)\in L^q(Q)$ при $1<q<2$ (можно пойти еще дальше, применяя, например, теорему Соболева). Следовательно, можно определить функцию стоимости, в частности, формулой (14.5) при $1<q<2$.

Замечание 14.2. Существенно более трудным этапом является переход от случая линейной системы (14.1) к нелиней-

---

[1] Излагаемые ниже результаты распространяются и на более общий случай.

[2] Следовательно, если $q\neq 2$, то $\mathcal{U}$ — рефлексивное банахово (но не гильбертово) пространство. Как отмечалось в гл. 1, результаты типа теоремы 1.3 гл. 1 остаются справедливыми и в этом случае.

[3] Относительно решения параболических задач в пространстве L^q, $q\neq 2$, см. Гривар [1], [2], Солонников [1].

ным системам. Некоторые частные результаты в этом направлении приведены в следующих параграфах.

Согласно теореме 1.3 гл. 1 (в случае, когда $\mathcal{U}$ — рефлексивное банахово пространство), существует единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, характеризующееся тем, что

$$J'(u)\cdot(v-u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial \tag{14.6}$$

(если $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$).

Для функции стоимости (14.5) при $w \in \mathcal{U}$ имеем:

$$J'(u)\cdot w = \frac{d}{d\xi} J(u+\xi w)|_{\xi=0} =$$

$$= q\int_Q |y(u)-z_д|^{q-2}[y(u)-z_д]\frac{\partial y(u)}{\partial u}\cdot w\,dx\,dt +$$

$$+ q\nu\int_Q |u|^{q-2}uw\,dx\,dt. \tag{14.7}$$

Полагая

$$\frac{\partial y(u)}{\partial u}\cdot w = \psi(w), \tag{14.8}$$

легко убеждаемся, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi(w)}{\partial t} + A\psi(w) = w \quad \text{в} \quad Q;\\ &\psi(w)|_\Sigma = 0;\ \psi(x, 0; w) = 0,\ x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

Следовательно, неравенство (14.6) эквивалентно (после деления на число q) неравенству

$$\int_Q |y(u)-z_д|^{q-2}[y(u)-z_д]\psi(v-u)\,dx\,dt +$$

$$+ \nu\int_Q |u|^{q-2}u(v-u)\,dx\,dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{14.10}$$

Преобразуем это неравенство, вводя сопряженное состояние $p(u)$ как решение в пространстве $L^{q'}(Q)$ (где $1/q + 1/q' = 1$) задачи [1])

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + A^*(t)p(u) = |y(u)-z_д|^{q-2}[y(u)-z_д] \ \text{в} \ Q;\\ &p(u)|_\Sigma = 0; \quad p(x, T; u) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{14.11}$$

---

[1]) Заметим, что $|y(u)-z_д|^{q-2}[y(u)-z_д] \in L^{q'}(Q)$; задача (14.11) имеет единственное решение $p(u)$, для которого

$$\partial p(u)/\partial x_i,\ \ \partial p(u)/\partial t,\ \ \partial^2 p(u)/\partial x_i\partial x_j \in L^{q'}(Q).$$

Тогда первое слагаемое левой части неравенства (14.10) принимает вид

$$\int_Q \left(-\frac{\partial p(u)}{\partial t} + A^*(t)\,p(u)\right)\psi(v-u)\,dx\,dt = \int_Q p(u)(v-u)\,dx\,dt,$$

а потому оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$\int_Q [p(u) + \nu\,|u|^{q-2}u](v-u)\,dx\,dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{14.12}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 14.1. *Пусть состояние системы определяется как решение задачи* (14.1), *а функция стоимости имеет вид* (14.5). *Тогда единственное оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями* (14.1) (*при* $v = u$), (14.11) *и* (14.12).

Пример 14.1. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U} = L^q(Q),\ v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q\}.$$

Тогда неравенство (14.12) эквивалентно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &p(u) + \nu\,|u|^{q-2}u \geqslant 0, \quad u \geqslant 0,\\ &[p(u) + \nu\,|u|^{q-2}u]\,u = 0 \text{ почти всюду в } Q, \end{aligned}\right\} \tag{14.13}$$

и мы снова получаем одностороннюю задачу.

14.3. Замечания о расцеплении

Рассмотрим теперь в условиях теоремы 14.1 случай отсутствия ограничений на управление, т. е. $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$.

Тогда оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{1}{\nu^{q'-1}}|p|^{q'-2}p = f && \text{в } Q;\\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = |y - z_д|^{q-2}(y - z_д) && \text{в } Q;\\ &y|_\Sigma = 0, \quad p|_\Sigma = 0;\\ &y(x, 0) = y_0(x),\ p(x, T) = 0,\ x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{14.14}$$

а именно

$$u = -\frac{1}{\nu^{q'-1}}|p|^{q'-2}p. \tag{14.15}$$

Действительно, соотношение (14.12) в рассматриваемом случае приводится к виду $p(u) + \nu\,|u|^{q-2}u = 0$.

Чтобы *расцепить* задачу (14.14), будем рассуждать, как в § 4. Определим пару $\{\varphi, \psi\}$ как решение задачи (ср. с леммой 4.1)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A\varphi+\frac{1}{\nu^{q'-1}}|\psi|^{q'-2}\psi=f \quad && \text{в } \Omega\times(s,\,T);\\ &-\frac{\partial\psi}{\partial t}+A^*\psi=|y-z_\text{д}|^{q-2}(y-z_\text{д}) \quad && \text{в } \Omega\times(s,\,T);\\ &\varphi=0,\quad \psi=0 \quad \text{на} \quad \Gamma\times(s,\,T);\\ &\varphi(x,\,s)=h(x),\quad \psi(x,\,T)=0,\quad x\in\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{14.16}$$

Эта (нелинейная) задача имеет единственное решение, поскольку она соответствует задаче оптимального управления, аналогичной задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе (только теперь используется $\Omega\times(s,\,T)$ вместо $\Omega\times(0,\,T)$ и h вместо y_0).

Таким образом, можно ввести отображение

$$h\to\psi(x,\,s) \text{ пространства } L^q(\Omega) \text{ в } L^{q'}(\Omega); \tag{14.17}$$

это отображение уже не является аффинным. Если положить $\Phi(h,\,s)=\psi(0,\,s)$, где

$$\eta,\,t\to\Phi(\eta,\,t) \text{ — отображение } L^q(\Omega)\times(0,\,T)\to L^{q'}(\Omega), \tag{14.18}$$

то придем к тождеству

$$p(s)=\Phi(y(s),\,s),\qquad 0<s<T. \tag{14.19}$$

Теперь можно получить соотношения для функции Φ — оказывается, что она удовлетворяет некоторому функциональному уравнению с частными производными (ср. с разд. 4.8 и 5.5). Именно, подставим выражение (14.18) для $p(s)$ во второе из уравнений (14.14) и, проделав *формальные* выкладки, получим

$$\frac{\partial\Phi(y(t),\,t)}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial\Phi(y(t),\,t)}{\partial}+A^*\Phi(y(t),\,t)=$$
$$=|y(t)-z_\text{д}|^{q-2}[y(t)-z_\text{д}].$$

Используя теперь первое из уравнений (14.14), найдем

$$-\frac{\partial\Phi(y(t),\,t)}{\partial\eta}\left(-Ay-\frac{1}{\nu^{q'-1}}|\Phi|^{q'-2}\Phi+f\right)-\frac{\partial\Phi(y(t),\,t)}{\partial t}+$$
$$+A^*\Phi(y(t),\,t)=|y(t)-z_\text{д}|^{q-2}[y(t)-z_\text{д}].$$

Так как речь идет об отыскании равенства, справедливого при любой функции $y(t)$, то из последнего соотношения следует, что

$$-\frac{\partial\Phi(\eta,t)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi(\eta,t)}{\partial\eta}A\eta+A^*\Phi(\eta,t)+\frac{1}{\nu^{q'-1}}\frac{\partial\Phi(\eta,t)}{\partial\eta}|\Phi|^{q'-2}\Phi-$$
$$-\frac{\partial\Phi(\eta,t)}{\partial\eta}f=|\eta-z_{\text{д}}|^{q-2}(\eta-z_{\text{д}})\qquad\forall\eta;\tag{14.20}$$

сюда нужно еще добавить «граничные условия»

$$\Phi(\eta,T)=0\qquad\forall\eta\tag{14.21}$$

и

$$\Phi(\eta,t)=0\quad\text{на}\quad\Sigma.\tag{14.22}$$

Эти (громоздкие) соотношения и являются аналогом интегро-дифференциального уравнения Риккати, рассмотренного в § 4 и 5.

§ 15. Теоремы существования оптимального управления

15.1. План дальнейшего исследования

Настоящий параграф представляет собой аналог § 7 гл. 2 для случая систем, описываемых *нелинейными эволюционными уравнениями*. Мы рассмотрим только *частные примеры*; на некоторые общие результаты указано в библиографических замечаниях.

В следующем параграфе мы дадим необходимые условия оптимальности первого порядка.

15.2. Нелинейная задача с распределенным управлением

Рассмотрим (как в § 3) параболический оператор второго порядка [1]) $\partial/\partial t+A(t)$ и предположим, что состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t}+A(t)y(v)+vy(v)=f\ \text{в}\ Q,\quad f\in L^2(Q);\tag{15.1}$$

$$y(v)|_\Sigma=0;\tag{15.2}$$

$$y(x,0;v)=y_0(x),\ x\in\Omega,\ y_0\in L^2(\Omega),\tag{15.3}$$

причем

$$v\in\mathcal{U}=L^\infty(Q).\tag{15.4}$$

Задача (15.1) — (15.3) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$y(v)\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).\tag{15.5}$$

1) Тот факт, что порядок оператора равен двум, в разд. 15.2—15.4 никак не используется.

Замечание 15.1. Разумеется, отображение $v \to y(v)$ *нелинейно.*

Замечание 15.2. Можно доказать существование и единственность решения $y(v)$ задачи (15.1) — (15.3) при более общих, чем (15.4), предположениях об управлении v, например при $v \in L^p(Q)$ для подходящего значения p (см. Ладыженская, Солонников и Уральцева [1]).

Для определенности возьмем функцию стоимости в виде

$$J(v) = \int_\Omega [y(x, T; v) - z_\text{д}(x)]^2 dx + \nu \| v \|_{L^\infty(Q)}, \qquad \nu > 0. \quad (15.6)$$

Замечание 15.3. Из соотношений (15.1) и (15.5) следует, что $\partial y(v)/\partial t \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$; поэтому функция $y(x, T; v)$ имеет смысл и принадлежит пространству $L^2(\Omega)$.

Замечание 15.4. В выражении (15.6) можно брать и $\nu = 0$, если *определяемое ниже множество* $\mathcal{U}_\partial$ *ограничено* в пространстве $L^\infty(Q)$.

В качестве множества допустимых управлений выберем

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}_\partial\text{— выпуклое подмножество пространства } L^\infty(Q),\\ \text{замкнутое в смысле } *\text{-слабой топологии.}\end{array}\right\} \quad (15.7)$$

Ставится задача

$$\text{найти } \inf J(v), \quad \text{если} \quad v \in \mathcal{U}_\partial. \quad (15.8)$$

Теорема 15.1. *Предположим, что* $\partial/\partial t + A$ — *параболический оператор второго порядка, удовлетворяющий условиям* (1.28), *функция стоимости* $J(v)$ *имеет вид* (15.6), *а множество* $\mathcal{U}_\partial$ *определено соотношением* (15.7). *Тогда существует оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$.

Доказательство. Пусть $\{v_n\}$, $v_n \in \mathcal{U}_\partial$, — минимизирующая последовательность: $J(v_n) \to \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$. Положим $y_n = y(v_n)$. Благодаря наличию слагаемого $\nu \| v \|_{L^\infty(Q)}$ в выражении (15.6) для функции стоимости последовательность $\{v_n\}$ ограничена в пространстве $L^\infty(Q)$, и потому

$$\{y_n\} \text{ ограничена в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (15.9)$$

Действительно, из равенства (15.1) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_n(t)|^2 + a(t; y_n(t), y_n(t)) + \int_\Omega v_n y_n^2 \, dx = \int_\Omega f y_n \, dx,$$

откуда (интегрируя от 0 до t и используя ограниченность последовательности $\{v_n\}$ в пространстве $L^\infty(Q)$) получаем [1])

$$|y_n(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|y_n(\sigma)\|^2 d\sigma \leqslant C_1 \int_0^t |y_n(\sigma)|^2 d\sigma + C_2.$$

В силу леммы Гронуолла последовательность $\{y_n\}$ ограничена в пространстве $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, и утверждение (15.9) справедливо.

Согласно соотношению (15.1),

$$\frac{\partial y_n}{\partial t} = f - A(t)\, y_n - v_n y_n,$$

причем правая часть этого равенства ограничена в пространстве $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$; следовательно,

$$\left\{\frac{\partial y_n}{\partial t}\right\} \quad \text{ограничена в} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \tag{15.10}$$

Так как вложение $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ вполне непрерывно (см. доказательство теоремы 7.1 гл. 2), то, согласно лемме о компактности (Лионс [3, предложение 4.2 гл. 4]), из утверждений (15.9) и (15.10) вытекает, что из последовательности $\{v_n, y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{v_n, y_n\}$, — что

$$\left.\begin{aligned} & y_n \to y && \text{слабо в} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),\\ & \frac{\partial y_n}{\partial t} \to \frac{\partial y}{\partial t} && \text{слабо в} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),\\ & y_n \to y && \text{сильно в} \quad L^2(Q); \end{aligned}\right\} \tag{15.11}$$

$$v_n \to u \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(Q), \quad u \in \mathcal{U}_\partial. \tag{15.12}$$

Но тогда (см. доказательство теоремы 7.1 гл. 2) $y_n v_n \to yu$, например в пространстве $\mathcal{D}'(Q)$, а следовательно, элемент y удовлетворяет соотношениям (15.1) — (15.3) (заметим, что $y_n(x, 0) \to y(x, 0)$ слабо в пространстве $L^2(\Omega)$). Значит, $y = y(u)$ и $\lim J(v_n) \geqslant J(u)$, т. е. u — оптимальное управление.

15.3. Нелинейная задача с распределенным управлением; сингулярное возмущение

Пусть (ср. с замечанием 7.6 гл. 2) ξ_0, ξ_1 — данные функции из пространства $L^\infty(Q)$, причем

$$0 < \beta \leqslant \xi_0(x, t) \leqslant \xi_1(x, t) \quad \text{почти всюду в } Q, \tag{15.13}$$

и пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid \xi_0(x,t) \leqslant v(x, t) \leqslant \xi_1(x, t) \text{ почти всюду в } Q\}. \tag{15.14}$$

[1]) Через $|\ \ |$ и $\|\ \ \|$ обозначены нормы в пространствах $L^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно.

Для любой функции $v \in \mathcal{U}_\partial$ положим

$$A(v)\psi \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, v(x, t)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right), \tag{15.15}$$

где функции a_{ij} удовлетворяют условиям (1.28).

Определим состояние $y(v)$ системы как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + A(v)\, y(v) = f, \quad f \in L^2(Q); \tag{15.16}$$

$$y(v)|_\Sigma = 0; \quad y(x, 0; v) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{15.17}$$

Задача (15.16), (15.17) имеет единственное решение. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить результаты § 1 в случае, когда форма $a(t;\ \varphi, \psi)$ задана равенством

$$a_v(t;\ \varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x, t)\, v(x, t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx, \quad \varphi,\psi \in H^1(\Omega). \tag{15.18}$$

Тогда в силу соотношений (15.13) и (1.28)

$$a_v(t;\ \varphi, \varphi) \geqslant \alpha\beta \int_\Omega |\operatorname{grad}\varphi|^2\, dx \geqslant C\,\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega);$$

$$a_v(t;\ \varphi, \varphi) + \lambda|\varphi|^2 \geqslant C\,\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \lambda > 0, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

Рассмотрим теперь функцию стоимости (15.6), но при $\nu = 0$ (это возможно, ибо множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено):

$$J(v) = \int_\Omega [y(x, T;\ v) - z_{\text{д}}(x)]^2\, dx. \tag{15.19}$$

Нам не известно, существует ли оптимальное управление для сформулированной задачи (ср. с замечанием 7.6 гл. 2). Трудность решения этого вопроса заключается в следующем: если $v_n \to u$ *-слабо в пространстве $L^\infty(Q)$, а $y_n \to y$ слабо в пространстве $L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega))$, то, вообще говоря, неверно, что $A(v_n)\, y_n \to A(u)\, y$, а поэтому не ясно, существует ли такое управление $w \in \mathcal{U}_\partial$, для которого $y(w) = y$.

Обойти — но не преодолеть — эту трудность можно, видимо, тремя путями, аналогичными указанным в разд. 7.2 гл. 2 подходам (i), (ii), (iii). Мы рассмотрим подробно только один (третий) подход, использующий идею сингулярного возмущения (ср. с разд. 7.3 гл. 2).

Пусть (ср. с (7.23) гл. 2)

$$\left.\begin{aligned} &b(\varphi, \psi) \text{ — непрерывная билинейная форма на } H_0^2(\Omega);\\ &b(\psi, \psi) \geqslant \gamma\,\|\psi\|^2_{H_0^2(\Omega)}, \quad \gamma > 0, \quad \forall\psi \in H_0^2(\Omega), \end{aligned}\right\} \tag{15.20}$$

а B — соответствующий оператор, т. е. $b(\varphi, \psi) = (B\varphi, \psi)$. Если положить

$$a_{\varepsilon,v}(t;\, \varphi, \psi) = \varepsilon b(\varphi, \psi) + a_v(t;\, \varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in H_0^2(\Omega), \tag{15.21}$$

где $\varepsilon > 0$ —«малый» параметр, то легко видеть, что

$$a_{\varepsilon,v}(t;\, \psi, \psi) \geqslant \varepsilon \|\psi\|^2_{H_0^2(\Omega)} + c\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad c > 0. \tag{15.22}$$

Введем оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + [\varepsilon B + A(v)]$$

(параболический оператор четвертого порядка), называемый *сингулярным возмущением оператора* $\partial/\partial t + A(v)$. Определим состояние $y_\varepsilon(v)$ системы как решение задачи [1])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial t} + [\varepsilon B + A(v)]\, y_\varepsilon(v) = f \quad \text{в} \quad Q;\\ &y_\varepsilon(v) \in L^2(0, T;\, H_0^2(\Omega));\ y_\varepsilon(x, 0;\, v) = y_0(x),\ x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{15.23}$$

Докажем теоремы, аналогичные теоремам 7.2 и 7.3 гл. 2.

Теорема 15.2. *Если* $\varepsilon \to 0$, *то*

$$y_\varepsilon(v) \to y(v) \ \text{ в } \ L^2(0, T;\, H_0^1(\Omega)); \tag{15.24}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\varepsilon}\, y_\varepsilon(v) \to 0 \ \text{ в } \ L^2(0, T;\, H_0^2(\Omega)),\\ &\frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial t} \to \frac{\partial y(v)}{\partial t} \ \text{ в } \ L^2(0, T;\, H^{-2}(\Omega)). \end{aligned}\right\} \tag{15.25}$$

Теорема 15.3. *Для фиксированного* $\varepsilon > 0$ *существует оптимальное управление, т. е. такой элемент* $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial$, *что*

$$\int_\Omega [y_\varepsilon(x, T;\, u_\varepsilon) - z_д(x)]^2\, dx \leqslant \int_\Omega [y_\varepsilon(x, T;\, v) - z_д(x)]^2\, dx \ \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{15.26}$$

Доказательство теоремы 15.2 (Юэ [1]). С помощью неравенства (15.22) легко показать, что последовательность $\{y_\varepsilon(v)\}$ (соответственно $\{\sqrt{\varepsilon}\, y_\varepsilon(v)\}$) ограничена в пространстве $L^2(0, T;\, H_0^1(\Omega))$ (соответственно в $L^2(0, T;\, H_0^2(\Omega))$). Переписывая первое из соотношений (15.23) в виде

$$\frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial t} = f - [\varepsilon B + A(v)]\, y_\varepsilon(v),$$

получаем утверждения (15.24), (15.25) для *слабой* сходимости. Затем убеждаемся в справедливости этих утверждений для *силь-*

[1]) Эта задача в силу неравенства (15.22) имеет единственное решение

ной сходимости; достаточно рассмотреть функцию

$$X_\varepsilon = \frac{1}{2} | y_\varepsilon(T; v) - y(T; v)|^2 + \varepsilon \int_0^T b \ (y_\varepsilon(v), y_\varepsilon(v))\, dt + \\ + \int_0^T a_v(t; y_\varepsilon(v) - y(v), y_\varepsilon(v) - y(v))\, dt,$$

и доказать, что она стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство теоремы 15.3. Будем опускать индекс ε. Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность и $y_n = y(v_n)$. Так как ε фиксировано, то из неравенства (15.22) следует, что

$$\left. \begin{array}{l} y_n \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^2(0,\ T;\ H_0^2(\Omega)). \end{array} \right\} \qquad (15.27)$$

С помощью первого из соотношений (15.23) получаем, что

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial y_n}{\partial t} \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^2(0,\ T;\ H^{-2}(\Omega)). \end{array} \right\} \qquad (15.28)$$

Так как вложение $H_0^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ вполне непрерывно (см., например, Лионс и Мадженес [1, гл. 1]), то (как и при доказательстве теоремы 15.1), согласно лемме о компактности (Лионс [3, предложение 4.2 гл. 4]), из утверждений (15.27) и (15.28) вытекает, что из последовательности $\{v_n,\ y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже $\{v_n,\ y_n\}$,— что

$$\left. \begin{array}{lll} y_n \to y & \text{слабо в} & L^2(0,\ T;\ H_0^2(\Omega)), \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial t} \to \dfrac{\partial y}{\partial t} & \text{слабо в} & L^2(0,\ T;\ H^{-2}(\Omega)), \\ y_n \to y & \text{сильно в} & L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)); \end{array} \right\} \qquad (15.29)$$

$$v_n \to u \qquad *\text{-слабо в } L^\infty(Q),\ u \in \mathcal{U}_\partial.$$

Но тогда можно перейти к пределу, поскольку

$$a_{ij} v_n \frac{\partial y_n}{\partial x_j} \to a_{ij} u \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(Q).$$

Следовательно, $y = y(u)$. Заканчивается доказательство так же, как и в теореме 15.1.

Замечание 15.5. (Ср. с замечанием 7.7 гл. 2.) Нам не известно, будет ли при $\varepsilon \to 0$

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} \int_\Omega [y_\varepsilon(x,\ T;\ v) - z_д]^2\, dx \to \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} \int_\Omega [y(x,\ T;\ v) - z_д]^2\, dx.$$

Замечание 15.6. Если коэффициенты при производных порядка не выше $2m$ зависят от управления, то нужно прибавить сингулярное возмущение εB, где B — оператор порядка $2m+2$.

15.4. Нелинейная задача с граничным управлением

Пусть оператор $A = A(x, t, \partial/\partial x)$ определен, как в разд. 15.2, а состояние $y(v)$ — как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f \text{ в } Q, \quad f \in L^2(Q); \tag{15.30}$$

$$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} + v\theta(y(v)) = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad v \in \mathcal{U} = L^\infty(\Sigma); \tag{15.31}$$

$$\theta(y) = |y|^{\rho-2} y, \qquad \rho \geqslant 2; \tag{15.32}$$

$$y(x, 0; v) = y_0(x), \qquad x \in \Omega, \qquad y_0 \in L^2(\Omega). \tag{15.33}$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\partial = \{v \mid 0 < \beta \leqslant \xi_0(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \xi_1(x, t) \\ \text{почти всюду на } \Sigma;\ \xi_0, \xi_1 \in L^\infty(\Sigma)\}. \end{aligned} \tag{15.34}$$

Решение задачи (15.30) — (15.33) понимается в следующем смысле. Рассмотрим пространство

$$V = \{\psi \mid \psi \in H^1(\Omega),\ \psi|_\Gamma \in L^\rho(\Gamma)\}, \tag{15.35}$$

снабженное нормой (7.34) гл. 2; это — рефлексивное банахово пространство. Для элементов $\varphi, \psi \in V$ определим форму

$$a_v(t; \varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma x\theta(\varphi)\psi\, d\Gamma. \tag{15.36}$$

Теорема 15.4. *Существует единственная функция $y(v)$, для которой*

$$y(v) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \tag{15.37}$$

$$y(v)|_\Sigma \in L^\rho(\Sigma), \tag{15.38}$$

$$\frac{d}{dt}(y(v), \psi) + a_v(t; y(v), \psi) = (f(t), \psi) \qquad \forall \psi \in V, \tag{15.39}$$

$$y(0; v) = y_0. \tag{15.40}$$

Из соотношения (15.39) следуют равенства (15.30) и, формально, (15.31). Далее, $\partial y(v)/\partial t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, т. е. равенство (15.33) имеет смысл. Поэтому разумно определить решение задачи (15.30) — (15.33) как функцию, существование и единственность которой гарантирует теорема 15.4.

Доказательство теоремы 15.4. Эта теорема немедленно следует из общих результатов теории монотонных эволюционных уравнений (Браудер [2], Брезис [1], Лионс [7], [13, гл. 2], Випник [2]). Достаточно только заметить, что определенная в (15.36) форма $a_v(t; \varphi, \psi)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам (7.38) — (7.40) гл. 2.

Пусть функция стоимости $J(v)$ снова имеет вид (15.19). Справедлива

Теорема 15.5. *Если множество $\mathcal{U}_\partial$ задано соотношением* (15.34), *а функция стоимости имеет вид* (15.19), *то существует оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$.*

Доказательство. Пусть $\{v_n\}$, $v_n \in \mathcal{U}_\partial$,— минимизирующая последовательность; положим $y_n = y(v_n)$. В силу соотношений (15.34) и (1.28)

$$a_v(t; \psi, \psi) \geqslant \alpha \int_\Omega |\operatorname{grad}\psi|^2 dx + \beta \int_\Gamma |\psi|^\rho d\Gamma,$$

откуда

$$a_v(t; \psi, \psi) \geqslant c_1 \|\psi\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad c_1 > 0,$$

$$a_v(t; \psi, \psi) \geqslant c_2 \int_\Gamma |\psi|^\rho d\Gamma, \quad c_2 > 0,$$

где константы c_1 и c_2 не зависят от v. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} y_n \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \end{array}\right\} \tag{15.41}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_n|_\Sigma \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^\rho(\Sigma), \end{array}\right\} \tag{15.42}$$

и так как $\partial y_n/\partial t = f - Ay_n$, то

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial y_n}{\partial t} \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{array}\right\} \tag{15.43}$$

Так как вложение $H^1(\Omega) \to H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)$ ($\varepsilon \in (0, {}^1/_2)$ — фиксированное число) вполне непрерывно, то, согласно лемме о компактности (Лионс [3, предложение 4.2 гл. 4]), из утверждений (15.41) и (15.43) вытекает, что из последовательности $\{v_n, y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{v_n, y_n\}$,— что

$$\left.\begin{aligned} y_n &\to y \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} &\to \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ y_n &\to y \quad \text{сильно в} \quad L^2(0, T; H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)); \end{aligned}\right\} \tag{15.44}$$

$$v_n \to u \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(\Sigma), \; u \in \mathcal{U}_\partial.$$

Но тогда (поскольку $\psi \to \psi|_\Sigma$ — *непрерывное* отображение $H^{1/2+\varepsilon}(\Omega) \to L^2(\Gamma)$)

$$y_n \to y \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Sigma). \tag{15.45}$$

Поэтому можно считать (извлекая, если надо, новую подпоследовательность), что

$$y_n \to y \quad \text{почти всюду на} \quad \Sigma \tag{15.46}$$

и, согласно свойству (15.42), что

$$y_n \to y \quad \text{слабо в} \quad L^\rho(\Sigma). \tag{15.47}$$

Отсюда вытекает, что

$$\theta(y_n) \to \theta(y) \quad \text{в} \quad L^{\rho'-\eta}(\Sigma), \; \eta > 0, \; 1/\rho + 1/\rho' = 1,$$

и, следовательно, $y = y(u)$. Заканчивается доказательство так же, как и в теоремах 15.1 и 15.3.

15.5. Использование выпуклости и принципа максимума для параболических уравнений второго порядка

Пусть оператор $A = A(x, t, \partial/\partial x)$ определен, как в разд 15.2 [1]). Пусть

$$b_0, \; b_1 \in L^\infty(Q), \tag{15.48}$$

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in L^\infty(Q); \; \xi_0 \leqslant v(x, t) \leqslant \xi_1; \; \xi_0, \xi_1 \in \mathbf{R}\}, \tag{15.49}$$

$$\left.\begin{aligned} &f(x, t; \lambda) \text{ — непрерывная функция при } x \in \overline{\Omega}, \\ &\qquad t \in [0, T], \; \xi_0 \leqslant \lambda \leqslant \xi_1; \\ &\text{функция } \lambda \to f(x, t; \lambda), \; \lambda \in [\xi_0, \xi_1], \textit{ выпукла.} \end{aligned}\right\} \tag{15.50}$$

Для управления $v \in \mathcal{U}_\partial$ обозначим через $f(x, t; v)$ функцию $x, t \to f(x, t; v(x, t))$ и определим состояние $y(v)$ системы как

[1]) Тот факт, что порядок оператора A равен *двум*, играет здесь существенную роль.

решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) + (b_0 v + b_1)\, y = f(x, t; v); \\ &y(v)|_\Sigma = 0; \ y(x, 0; v) = y_0(x), \ x \in \Omega, \ y_0 \in L^2(\Omega). \end{aligned}\right\} \quad (15.51)$$

Пусть g — данная функция пространства $L^2(\Omega)$, причем $g \geqslant 0$ почти всюду. В качестве функции стоимости возьмем

$$J(v) = \int_\Omega y(x, T; v)\, g(x)\, dx. \quad (15.52)$$

Теорема 15.6. *Если выполнены условия* (15.48) — (15.50), *а функция стоимости имеет вид* (15.52), *то существует оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$.

При доказательстве этой теоремы нам понадобится одна классическая лемма вариационного исчисления (утверждающая полунепрерывность снизу некоторого функционала).

Лемма 15.1. *Пусть* $\mathcal{O}$ — *открытое множество в (конечномерном) пространстве* $\mathbf{R}^m$, K — *выпуклое замкнутое ограниченное множество в (конечномерном) пространстве* $\mathbf{R}^p$, *а* $\xi, k \to \Phi(\xi, k)$ — *такое непрерывное отображение* $\bar{\mathcal{O}} \times K \to \mathbf{R}$, *что функция*

$$k \to \Phi(\xi, k) \ \text{выпукла на} \ K \quad \forall \xi \in \mathcal{O}. \quad (15.53)$$

Пусть $\{u_n\}$ — *последовательность функций, удовлетворяющая условиям*

$$\left.\begin{aligned} &u_n \in L^\infty(\mathcal{O}; \mathbf{R}^p) \ (= (L^\infty(\mathcal{O}))^p, \\ &u_n(\xi) \in K \ \text{почти всюду}, \\ &u_n \to u \ \text{*-слабо в} \ L^\infty(\mathcal{O}; \mathbf{R}^p). \end{aligned}\right\} \quad (15.54)$$

Тогда

$$\underline{\lim} \int_\mathcal{O} \Phi(\xi, u_n(\xi))\, d\xi \geqslant \int_\mathcal{O} \Phi(\xi, u(\xi))\, d\xi. \quad (15.55)$$

Доказательство. 1) Положим $\psi_n(\xi) = \Phi(\xi, u_n(\xi))$; ясно, что элементы ψ_n остаются в некотором ограниченном подмножестве пространства $L^\infty(\mathcal{O})$. Из последовательности $\{\psi_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{\psi_n\}$, — что $\psi_n \to \psi_*$ *-слабо в $L^\infty(\mathcal{O})$. Тогда

$$\underline{\lim} \int_\mathcal{O} \Phi(\xi, u_n(\xi))\, d\xi = \int_\mathcal{O} \psi_*(\xi)\, d\xi. \quad (15.56)$$

Пусть $\mathcal{O}_E$ — совокупность точек множества $\mathcal{O}$, являющихся точками Лебега для функций u и ψ_*. Как известно [1]),

$$|\mathcal{O} - \mathcal{O}_E| = 0. \tag{15.57}$$

Если взять точку $\xi_0 \in \mathcal{O}_E$ и обозначить через Δ куб с центром в точке ξ_0, содержащийся в множестве $\mathcal{O}$, то

$$\Phi(\xi_0, u_n(\xi_0)) = \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta \Phi(\xi, u(\xi))\, d\xi. \tag{15.58}$$

Докажем неравенство

$$\Phi(\xi_0, u(\xi_0)) \leqslant \psi_*(\xi_0), \tag{15.59}$$

выполняющееся (в силу свойства (15.57)) почти всюду на $\mathcal{O}$. Из неравенства (15.59) будет следовать, что

$$\int_{\mathcal{O}} \Phi(\xi, u(\xi))\, d\xi \leqslant \int_{\mathcal{O}} \psi_*(\xi)\, d\xi,$$

а это вместе с равенством (15.56) доказывает утверждение (15.55).

2) Для доказательства неравенства (15.59) воспользуемся *выпуклостью* функции $k \to \Phi(\xi, k)$ на множестве K (см. (15.53)). Это свойство влечет за собой существование аффинной функции $k \to l_{\xi_0}(k)$, отображающей множество K в $\mathbf{R}$ и такой, что

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(\xi_0, k) \geqslant l_{\xi_0}(k) \qquad \forall k \in K, \\ &\Phi(\xi_0, u(\xi_0)) = l_{\xi_0}(u(\xi_0)). \end{aligned}\right\} \tag{15.60}$$

Тогда

$$\Phi(\xi_0, u(\xi_0)) = \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta l_{\xi_0}(u(\xi))\, d\xi. \tag{15.61}$$

Но

$$\Phi(\xi_0, u_n(\xi)) \leqslant \Phi(\xi, u_n(\xi)) + O(|\Delta|) \qquad \forall \xi \in \Delta, \ \forall n,$$

и, согласно первому из соотношений (15.60),

$$l_{\xi_0}(u_n(\xi)) \leqslant \Phi(\xi, u_n(\xi)) + O(|\Delta|),$$

откуда

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta l_{\xi_0}(u_n(\xi))\, d\xi \leqslant \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta \Phi(\xi, u_n(\xi))\, d\xi + O(|\Delta|). \tag{15.62}$$

Так как функция l_{ξ_0} аффинна, то $l_{\xi_0}(u_n) \to l_{\xi_0}(u)$ $*$-слабо в $L^\infty(\mathcal{O})$; следовательно,

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta l_{\xi_0}(u_n(\xi))\, d\xi \to \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta l_{\xi_0}(u(\xi))\, d\xi.$$

---

[1]) $|\omega|$ обозначает меру множества ω.

Далее, так как $\Phi(\xi, u_n) = \psi_n \to \psi_*$ $*$-слабо в $L^\infty(\mathcal{O})$, то из неравенства (15.62) вытекает, что

$$\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} l_{\xi_0}(u(\xi))\,d\xi \leqslant \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} \psi_*(\xi)\,d\xi + O(|\Delta|).$$

Устремляя $|\Delta|$ к нулю и используя равенство (15.61) и тот факт, что ξ_0 — точка Лебега для функции ψ_*, убеждаемся, что неравенство (15.59) справедливо.

Доказательство теоремы 15.6. Пусть $\{v_n\}$, $v_n \in \mathcal{U}_\partial$, — минимизирующая последовательность, т. е.

$$J(v_n) \to j = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v).$$

Как и при доказательстве теоремы 15.1, можно проверить, что $y_n = y(u_n)$ остаются в некотором ограниченном подмножестве пространства $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ (заметим, что последовательность $\{f(x, t; v_n)\}$ ограничена, в частности, в пространстве $L^\infty(Q)$. С помощью первого из соотношений (15.51) получаем, что $\partial y_n/\partial t$ остаются в некотором ограниченном подмножестве пространства $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Таким образом, как и при доказательстве теоремы 15.1, из последовательности $\{v_n, y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{v_n, y_n\}$,— что

$$\left.\begin{array}{lll} y_n \to y & \text{слабо в} & L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial t} \to \dfrac{\partial y}{\partial t} & \text{слабо в} & L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ y_n \to y & \text{сильно в} & L^2(Q); \end{array}\right\} \tag{15.63}$$

$$v_n \to u \quad *\text{-слабо в } L^\infty(Q), \quad u \in \mathcal{U}_\partial. \tag{15.64}$$

Можно также считать, что

$$f(x, t; v_n) \to f_* \ *\text{-слабо в } L^\infty(Q). \tag{15.65}$$

Но тогда $b_0 v_n y_n \to b_0 v y$, например, в пространстве $\mathcal{D}'(Q)$ и, следовательно, элемент y удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + (b_0 v + b_1)\,y = f_*; \\ y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \ y(x, 0) = y_0(x), \ x \in \Omega. \end{array}\right\} \tag{15.66}$$

Применим теперь лемму 15.1 в следующих условиях: $\mathcal{O} = Q$, $\xi = (x, t) \in \mathcal{O}$; $u_n = v_n$; $\Phi(\xi, k) = h(\xi) f(x, t; k)$, $h \in \mathcal{D}(Q)$, $h \geqslant 0$, $k \in K = [\xi_0, \xi_1]$.

Неравенство (15.55) позволяет записать

$$\underline{\lim} \int_Q hf(x, t; v_n)\, dx\, dt \geqslant \int_Q hf(x, t; v)\, dx\, dt,$$

откуда в силу соотношения (15.65)

$$\int_Q hf_*\, dx\, dt \geqslant \int_Q hf(x, t; v)\, dx\, dt \qquad \forall h \in \mathscr{D}(Q),\ h \geqslant 0,$$

так что

$$f_*(x, t) \geqslant f(x, t; v) \text{ почти всюду в } Q. \tag{15.67}$$

Из соотношений (15.66), (15.67) и того факта, что A — эллиптический оператор второго порядка, заключаем (согласно принципу максимума для параболических уравнений второго порядка — см., например, Ладыженская, Солонников и Уральцева [1]), что

$$y_*(x, t) \geqslant y(x, t; v) \text{ почти всюду в } Q \tag{15.68}$$

(здесь $y_*(x, t)$ означает решение задачи (15.66)). Тогда $y_*(x, T) \geqslant y(x, T; v)$ почти всюду на множестве Ω, что в свою очередь дает

$$\int_\Omega y_*(x, T)\, g(x)\, dx \geqslant J(v).$$

Но, согласно соотношениям (15.63),

$$J(v_n) \to \int_\Omega y_*(x, T)\, g(x)\, dx,$$

а потому $j \geqslant J(u)$. Отсюда следует, что $j = J(u)$, т. е. u — оптимальное управление.

15.6. Управление системами, описываемыми эволюционными неравенствами

Как и в разд. 7.5 гл. 2, можно рассматривать системы, состояние которых определяется как решение односторонней граничной задачи в эволюционном случае, например,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f \quad \text{в} \quad Q;\\
&y(x, 0; v) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega;\\
&y(v) \geqslant 0 \quad \text{почти всюду на} \quad \Sigma,\\
&\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} \geqslant v \quad \text{почти всюду на} \quad \Sigma,\ v \in L^2(\Sigma),\\
&\left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - v\right) y(v) = 0 \quad \text{почти всюду на} \quad \Sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{15.69}$$

Относительно решения задачи (15.69) см. Лионс и Стампаккья [1], Брезис [1].

Для подобных задач можно получить (как и в разд. 7.5 гл. 2) некоторые теоремы существования оптимального управления. Но в целом эти задачи еще очень мало исследованы [1]).

§ 16. Необходимые условия первого порядка

16.1. Формулировка теоремы

Будем пользоваться обозначениями, аналогичными принятым в § 8 гл. 2. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid x,\ t \to v(x,\ t) \text{ — такая измеримая функция } Q \to \mathbf{R}^m, \text{ что } v(x,\ t) \in K \text{ почти всюду}\}, \tag{16.1}$$

где K — выпуклое замкнутое множество в пространстве $\mathbf{R}^m$. Пусть $A = A(x,\ t,\ \partial/\partial x)$ — оператор, удовлетворяющий условиям (1.28), и

$$\left.\begin{array}{l} b(x,\ t;\ \lambda),\ f(x,\ t;\ \lambda) \text{ — непрерывные} \\ \text{ограниченные функции } Q \times K \to \mathbf{R}. \end{array}\right\} \tag{16.2}$$

Обозначим через $b(x,\ t;\ v)$, $v \in \mathcal{U}_\partial$, функцию

$$x,\ t \to b(x,\ t;\ v(x,\ t));$$

аналогично определяется $f(x,\ t;\ v)$. Мы часто будем писать просто $b(v)$ и $f(v)$. Введем также следующие обозначения:

$$\left.\begin{array}{l} A(v)\psi \equiv A\psi + b(x,\ t;\ v)\psi \equiv A\psi + b(v)\psi, \\ \Lambda(v) \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + A(v). \end{array}\right\} \tag{16.3}$$

Состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) + b(v)\,y(v) = f(v) \text{ в } Q; \tag{16.4}$$

$$y(v)\,|_\Sigma = 0; \tag{16.5}$$

$$y(x,\ 0;\ v) = y_0(x),\ x \in \Omega,\ y_0 \in L^\infty(\Omega). \tag{16.6}$$

Функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_\Omega y(x,\ T;\ v)\,g(x)\,dx, \tag{16.7}$$

где g — данная функция пространства $L^\infty(\Omega)$, причем $g \geqslant 0$.

[1]) Весьма широкий круг задач механики формулируется в терминах вариационных неравенств (см. Дюво и Лионс [1], [2]), и поэтому теория таких неравенств найдет свои приложения.

Определим сопряженное состояние $p(v)$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p(v)}{\partial t} + A^* p(v) + b(v)\,p(v) = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\ p(v)|_\Sigma = 0; \quad p(x, T; v) = g(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

Теорема 16.1. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям* (1.28), *выполняются соотношения* (16.1), (16.2), (16.7) *и существует оптимальное управление u. Тогда почти всюду в цилиндре Q*

$$p(x, t; u(x, t))\,[f(x, t; u(x, t)) - b(x, t; u(x, t))\,y(x, t; u(x, t))] =$$
$$= \inf_{k \in K} p(x, t; u(x, t))\,[f(x, t; k) - b(x, t; k)\,y(x, t; u(x, t))]. \tag{16.9}$$

16.2. Доказательство теоремы

План доказательства тот же, что и в случае теоремы 8.1 гл. 2.

16.2.1. Алгебраическое преобразование. Пусть u — оптимальное управление, так что

$$\int_\Omega [y(x, T; v) - y(x, T; u)]\,g(x)\,dx \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{16.10}$$

Умножая первое из соотношений (16.8) (записанное при $v = u$) на $y(v) - y(u)$ и применяя формулу Грина, получаем

$$\int_\Omega [y(x, T; v) - y(x, T; u)]\,g(x)\,dx =$$
$$= \int_Q p(u)\,\Lambda(u)\,(y(v) - y(u))\,dx\,dt =$$
$$= \int_Q p(u)\,[\Lambda(v)\,y(v) - \Lambda(u)\,y(u) - (\Lambda(v) - \Lambda(u))\,y(u) -$$
$$- (\Lambda(v) - \Lambda(u))\,(y(v) - y(u))]\,dx\,dt =$$
$$= \int_Q p(u)\,[f(v) - f(u) - (b(v) - b(u))\,y(u) -$$
$$- (b(v) - b(u))\,(y(v) - y(u))]\,dx\,dt.$$

Таким образом, неравенство (16.10) эквивалентно неравенству

$$\int_Q p(u)\,[f(v) - f(u) - (b(v) - b(u))\,y(u) -$$
$$- (b(v) - b(u))\,(y(v) - y(u))]\,dx\,dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{16.11}$$

16.2.2. Применение неравенства (16.11). Здесь справедливы замечания, сделанные в пункте 8.2.2 § 8 гл. 2.

Введем обозначения:

$$\{x_0, t_0\} \in Q;$$

$\mathcal{O}_j = G_j \times I_j$ — куб, содержащийся в цилиндре Q, с центром в точке $\{x_0, t_0\}$;

G_j — куб в пространстве $\mathbf{R}^n$ с центром в точке x_0;

I_j — интервал действительной прямой с центром в точке t_0;

$|\mathcal{O}_j|$, $|G_j|$ — меры множеств $\mathcal{O}_j$, G_j;

$v_j = (1 - \chi_j) u + \chi_j k$; $k \in K$;

χ_j — характеристическая функция множества $\mathcal{O}_j$.

Положим

$$b_j = \frac{1}{|\mathcal{O}_j|} \int_Q p(u) [f(v_j) - f(u)]\, dx\, dt,$$

$$c_j = \frac{1}{|\mathcal{O}_j|} \int_Q p(u) [b(v_j) - b(u)]\, y(u)\, dx\, dt,$$

$$d_j = \frac{1}{|\mathcal{O}_j|} \int_Q p(u) [b(v_j) - b(u)] [y(v_j) - y(u)]\, dx\, dt.$$

Если взять $v = v_j$ $(\in \mathcal{U}_\partial)$, то из неравенства (16.11) получим, что

$$b_j - c_j - d_j \geqslant 0.$$

Пусть точка $\{x_0, t_0\}$ принадлежит совокупности точек цилиндра Q, являющихся точками Лебега для функций $p(u)$, $f(u)$, $b(u)$, $y(u)$. Допустим, что нам удалось доказать соотношение

$$d_j \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty \tag{16.12}$$

(предполагается, что при этом $|\mathcal{O}_j| \to 0$, $|I_j| \to 0$). Тогда

$$\begin{aligned} p(x_0, t_0; u(x_0, t_0)) [f(x_0, t_0; k) - f(x_0, t_0; u(x_0, t_0))] - \\ - p(x_0, t_0; u(x_0, t_0)) [b(x_0, t_0; k) - \\ - b(x_0, t_0; u(x_0, t_0))]\, y(x_0, t_0; u(x_0, t_0)) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{16.13}$$

почти всюду на Q, откуда и следует равенство (16.9).

16.2.3. Доказательство соотношения (16.12). Заметим сначала (Ладыженская, Солонников и Уральцева [1, теорема 7.1 гл. 3]), что $p(u) \in L^\infty(Q)$. Поэтому

$$|d_j| \leqslant \frac{c}{|\mathcal{O}_j|} \int_{\mathcal{O}_j} |b(v_j) - b(u)| \cdot |y(v_j) - y(u)|\, dx,$$

откуда

$$|d_j| \leqslant \frac{c}{|\mathcal{O}_j|^{1/2}} \left(\int_{\mathcal{O}_j} |y(v_j) - y(u)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{16.14}$$

Положим

$$\psi_j = y(v_j) - y(u). \tag{16.15}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda(u)\psi_j = f(v_j) - f(u) - [b(v_j) - b(u)]\, y(v_j) \equiv g_j \text{ в } Q;\\ &\psi_j|_\Sigma = 0; \quad \psi_j(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{16.16}$$

Отсюда следует, что

$$\|\psi_j\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C\|g_j\|_{L^2(Q)}. \tag{16.17}$$

Но (Ладыженская, Солонников и Уральцева [1]) функции $y(v_j)$ принадлежат ограниченному подмножеству пространства $L^\infty(Q)$, а потому

$$\|g_j\|_{L^2(Q)} \leqslant C|\Theta_j|^{1/2}. \tag{16.18}$$

По теореме Соболева [1] существует такое число $r > 2$, что $H^1(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, а тогда из неравенств (16.17) и (16.18) заключаем, что

$$\|\psi_j\|_{L^2(0,T;\,L^r(\Omega))} \leqslant C|\Theta_j|^{1/2}. \tag{16.19}$$

Применяя неравенство Гёльдера

$$\|\psi_j\|_{L^2(\Theta_j)} \leqslant |G_j|^{1/2}\|\psi_j\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))},$$

из соотношения (16.14) с учетом оценки (16.19) получаем

$$|d_j| \leqslant C|G_j|^{1/2},$$

и соотношение (16.12) доказано.

Замечание 16.1. Можно было бы заменить условия (16.2) менее сильными предположениями о принадлежности функций $b(x, t; \lambda)$ и $f(x, t; \lambda)$ подходящему пространству L^r (Ладыженская, Солонников, Уральцева [1]). Напротив, тот факт, что A — оператор второго порядка, играет в приведенном доказательстве существенную роль.

Замечание 16.2. Если из анализа задачи (16.8) можно заключить, что $p(x, t; v) > 0$ почти всюду (это легко сделать, например, в случае $b \equiv 0$), то равенство (16.9) принимает вид

$$\begin{aligned} f(x, t; u(x, t)) - b(x, t; u(x, t))\, y(x, t; u(x, t)) =\\ = \inf_{k \in K}[f(x, t; k) - b(x, t; k)\, y(x, t; u(x, t))]. \end{aligned} \tag{16.20}$$

Тогда для функции $y(x, t; u(x, t)) \equiv y(x, t)$ удовлетворяются соотношения

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \inf_{k \in K}[f(x, t; k) - b(x, t; k)\, y] = 0 \text{ в } Q;$$

$$y|_\Sigma = 0; \qquad y(x, 0) = y_0(x), \qquad x \in \Omega.$$

§ 17. Оптимальное быстродействие

17.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy(t,v)}{dt}+A(t)\,y(t;v)=f+Bv\text{¹}, && (17.1)\\ &y(0;v)=y_0. && (17.2)\end{aligned}\right\}$$

Пусть $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$, а y_1 — данный элемент пространства H.

Предположим, что система *управляема*,

$$\left.\begin{aligned}&\text{существует такое } v\in\mathcal{U}_\partial, \text{ что}\\ &y(\tau;v)=y_1 \text{ для некоторого } \tau\text{²}.\end{aligned}\right\} \qquad (17.3)$$

Оптимальное время определяется равенством

$$\tau_0=\inf\tau, \qquad (17.4)$$

т. е. τ_0 — нижняя грань всех значений τ, для которых выполняется условие (17.3).

Мы остановимся на следующих вопросах:

(i) *существование управления, оптимального в смысле быстродействия*, т. е. существование такого (таких) $u\in\mathcal{U}_\partial$, что

$$y(\tau_0;u)=y_1; \qquad (17.5)$$

(ii) *свойства оптимального быстродействия*, если оно существует.

Эти вопросы рассматриваются в разд. 17.2 и 17.3.

Замечание 17.1. Очевидно, можно поставить те же вопросы для систем, описываемых *нелинейными* уравнениями.

17.2. Теорема существования

Теорема 17.1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), (17.3), (2.1) *и* $\mathcal{U}_\partial$ *— ограниченное подмножество пространства* $\mathcal{U}$. *Тогда существует управление, оптимальное в смысле быстродействия.*

---

[1]) Эта запись — символическая. Управление может быть и граничным.

[2]) Одновременно всегда предполагается, что $\tau\in[0,T]$, т. е. $\tau\leqslant T$. Но, поскольку значение T можно выбрать произвольно, в этом нет никакого ограничения.

Доказательство. Пусть значения τ_n таковы, что

$$y(\tau_n;\ v_n) = y_1, \quad v_n \in \mathcal{U}_\partial, \tag{17.6}$$

$$\tau_n \to \tau_0. \tag{17.7}$$

Положим $y_n = y(v_n)$. Так как множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено, то

$$\left.\begin{array}{l} y_n \text{ (соответственно } y_n') \text{ остаются в ограничен-} \\ \text{ном подмножестве пространства } L^2(0,\ T;\ V) \\ \text{(соответственно, } L^2(0,\ T;\ V')). \end{array}\right\} \tag{17.8}$$

Тогда из последовательности $\{v_n,\ y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность—мы обозначим ее тоже через $\{v_n,\ y_n\}$,—что

$$\left.\begin{array}{lll} v_n \to u & \text{слабо в} & \mathcal{U},\quad u \in \mathcal{U}_\partial, \\ y_n \to y & \text{слабо в} & L^2(0,\ T;\ V), \\ y_n' \to y' & \text{слабо в} & L^2(0,\ T;\ V'). \end{array}\right\} \tag{17.9}$$

Из равенств $y_n' + Ay_n = f + Bv_n$, $y(0,\ v_n) = y_0$ следует, что $y' + Ay = f + Bu$, $y(0) = y_0$, а потому

$$y = y(u). \tag{17.10}$$

Но если рассмотреть очевидное тождество

$$\begin{aligned} y(\tau_n;\ v_n) - y(\tau_0;\ u) &= \\ &= y(\tau_n;\ v_n) - y(\tau_0;\ v_n) + y(\tau_0;\ v_n) - y(\tau_0;\ u) \end{aligned} \tag{17.11}$$

и заметить, что $y(\tau_0;\ v_n) \to y(\tau_0;\ u)$ слабо в пространстве H (это вытекает из соотношений (17.9)) и

$$\begin{aligned} \| y(\tau_n;\ v_n) - y(\tau_0;\ v_n) \|_{V'} &= \| \int_{\tau_0}^{\tau_n} y'(t;\ v_n)\, dt \|_{V'} \leqslant \\ &\leqslant (\tau_n - \tau_0)^{1/2} \Big(\int_{\tau_0}^{\tau_n} \| y'(t;\ v_n) \|_{V'}^2\, dt \Big)^{1/2} \leqslant C(\tau_n - \tau_0)^{1/2}, \end{aligned}$$

то можно показать, что

$$y(\tau_n;\ v_n) - y(\tau_0;\ u) \to 0 \text{ слабо в } V'.$$

Отсюда, учитывая равенство (17.6), заключаем, что $y(\tau_0;\ u) = y_1$.

Замечание 17.2. По поводу одной гораздо более общей теоремы существования оптимального в смысле быстродействия управления для системы, описываемой *нелинейным* параболическим оператором, см. Лионс [2], а также разд. 10.3 гл. 4.

Пример 17.1. Пусть $\mathcal{U} = L^2(\Sigma)$ и состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи (разд. 3.2)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f \quad \text{в} \quad Q; \\ &\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_{\Sigma} = v; \; y(x, 0; v) = y_0(x), \; x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{17.12}$$

Теорема 17.1 в этом случае применима. Следовательно, эта теорема охватывает и случай граничного управления.

Замечание 17.3. Теорему 17.1 легко переформулировать применительно к системам, описываемым задачей Дирихле, с граничным управлением (см. § 9).

17. 3. Теорема о релейности

Пусть выполнены предположения разд. 17.2, причем

$$A \text{ не зависит от } t, \tag{17.13}$$

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid |v(t)| \leqslant 1 \text{ почти всюду}\}. \tag{17.14}$$

Тогда (см., например, разд. 1.6) оператор A есть инфинитезимальный производящий оператор некоторой полугруппы $G(t)$ в пространстве H.

Замечание 17.4. Приводимые ниже рассуждения относятся к случаю, когда H — рефлексивное банахово пространство, а оператор $-A$ есть инфинитезимальный производящий оператор полугруппы в этом пространстве.

Справедлива (принадлежащая Фатторини [1])

Теорема 17.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), (17.13), (17.14), (17.3), *а u — управление, оптимальное в смысле быстродействия, т. е. элемент множества $\mathcal{U}_\partial$, удовлетворяющий условию* (17.5) (*по теореме* 17.1 *такие элементы существуют*). *Тогда*

$$|u(t)| = 1 \quad \textit{почти всюду на} \quad (0, \tau_0). \tag{17.15}$$

Эту теорему мы докажем чуть позже, после того как получим несколько нужных для этого лемм. А сейчас отметим вытекающее из теоремы

Следствие 17.1. *Если выполнены условия теоремы* 17.2, *то существует единственное управление, оптимальное в смысле быстродействия.*

Доказательство. Если $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_\partial$ и $y(\tau_0; u_i) = y_1$, $i = 1, 2$, то и $y(\tau_0; (1-\theta)u_1 + \theta u_2) = y_1$, $0 < \theta < 1$, а потому управление $u = (1-\theta)\,u_1 + \theta u_2$ удовлетворяет условию (17.15). Но это возможно, лишь если $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &K_s = \{h \mid h \in G{*}v(s)\,^{1)},\ v \in L^\infty(0, s; H)\},\\ &K_s(e) = \{h \mid h = G{*}v(s),\ v \in L^\infty(0, s; H),\ v \text{ имеет} \\ &\qquad \text{носитель в } e \cap [0, s],\ e \text{ — измеримое} \\ &\qquad \text{подмножество отрезка } [0, T]\}. \end{aligned}\right\} \tag{17.16}$$

Лемма 17.1. *В обозначениях* (17.16)

$$K_s = K_{s'} \qquad \forall s, s'. \tag{17.17}$$

Если обозначить

$$K = K_s \qquad \forall s, \tag{17.18}$$

то

$$G(s)\,H \subset K. \tag{17.19}$$

Доказательство. 1) Пусть $\tau > s$. Тогда, как легко видеть,

$$\left.\begin{aligned} &G * v(s) = G * \tilde{v}(\tau),\\ &\tilde{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < \tau - s,\\ v(t - (\tau - s)) & \text{при } t > \tau - s. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{17.20}$$

Таким образом,

$$K_s \subset K_\tau. \tag{17.21}$$

2) Пусть $\tau < s$. Тогда, как легко видеть,

$$\left.\begin{aligned} &G * v(\tau) = G * w(s),\\ &w(t) = v(t + \tau - s) + \frac{1}{\ldots} G(t) \int_0^{\tau - s} (G(\tau - s - t)\, v(t))\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{17.22}$$

Отсюда следует включение, обратное включению (17.21), а потому и равенство (17.17). Тем самым обосновано обозначение (17.18).

3) Легко убедиться, что

$$G(s)\,h = G * \left(\frac{1}{s} Gh\right)(s), \tag{17.23}$$

откуда вытекает (17.19).

В дальнейшем фундаментальную роль сыграет

---

[1] $G{*}v(s) = \int_0^s G(s-t)\, v(t)\, dt.$

Лемма 17.2. *Для почти всех* $t \in e$

$$K_t(e) = K. \tag{17.24}$$

Доказательство. 1) Ясно, что $K_t(e) \subset K$; поэтому достаточно убедиться, что $K \subset K_t(e)$ для почти всех $t \in e$.

Пусть $h \in K$. Тогда $h \in K_s$ при произвольно малом s, а потому для любого $t_1 < t$ справедливо представление (см. (17.20))

$$h = \int_{t_1}^{t} G(t-\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma, \quad v \in L^\infty(0, T; H). \tag{17.25}$$

Допустим, что существует такая последовательность $\{t_n\}$, что

$$\left.\begin{array}{l} \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots < t, \ t_n \to t; \\ \operatorname{mes}([t_n, t_{n+1}] \cap e) \geqslant \rho(t_{n+1} - t), \ \rho > 0; \\ \dfrac{t_{n+1} - t_n}{t_{n+2} - t_{n+1}} \leqslant c. \end{array}\right\} \tag{17.26}$$

Ниже мы проверим (см. вторую часть доказательства), что

$$\left.\begin{array}{l}\text{для почти всех } t \in e \text{ можно найти последовательность} \\ \{t_n\}, \text{ удовлетворяющую условиям (17.26).}\end{array}\right\} \tag{17.27}$$

Выберем в качестве значения t_1, участвующего в соотношении (17.25), первый член последовательности $\{t_n\}$; тогда из равенства (17.25) получим

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} G(t - t_{n+1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} G(t_{n+1} - \sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{e \cap [t_{n+1}, t_{n+2}]} \frac{1}{\operatorname{mes}(e \cap [t_{n+1}, t_{n+2}])} G(t - \sigma_1) \times$$

$$\times G(\sigma_1 - t_{n+1})\, d\sigma_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} G(t_{n+1} - \sigma_2)\, v(\sigma_2)\, d\sigma_2 =$$

$$= \int_0^t G(t-\sigma)\, w(\sigma)\, d\sigma,$$

где

$$w(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{mes}(e \cap [t_{n+1}, t_{n+2}])} G(\sigma - t_{n+1}) \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} G(t_{n+1} - \sigma_2)\, v(\sigma_2)\, d\sigma_2 \\ \qquad\qquad\qquad \text{на} \quad e \cap [t_{n+1}, t_{n+2}], \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 0 \qquad\qquad\quad \text{вне} \quad e \cap [t_{n+1}, t_{n+2}], \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Из условий (17.26) вытекает оценка

$$|w(\sigma)| \leqslant \frac{1}{\rho(t_{n+2}-t_{n+1})} C(t_{n+1}-t_n) \leqslant \text{const}.$$

Таким образом, $h \in G_* w(t)$, где функция w принадлежит $L^\infty(0, T; H)$ и имеет носитель в множестве e, т. е. $h \in K_t(e)$. Итак, лемма будет доказана, если будет доказано утверждение (17.27).

2) Утверждение (17.27) представляет собой известный результат из теории меры. Введем множество

$$e_m = \left\{\sigma \mid \sigma \in e, \ \text{mes}\left(e \cap \left[\sigma - \frac{1}{k}, \ \sigma\right]\right) \geqslant \frac{1}{2k}, \ k \geqslant m\right\}$$

и обозначим через d_m совокупность точек плотности множества e_m (см. Рисс и Секефальви-Надь [1, гл. 1, § 6]). Как известно, $\text{mes}(e - \bigcap_{m \geqslant 1} d_m) = 0$, так что достаточно доказать утверждение (17.27) для случая $t \in d_m$.

В этом случае можно построить такую последовательность $\{t_n\}$, что $t_n \in d_m$ для всех n; $t_{n+1} = t_n + s_n < t$, $s_n > 0$, $s_n/s_{n+1} \leqslant c$ (таким образом, последнее из соотношений (17.26) выполняется). Так как $t_n \in d_m \subset e_m$ при любом n, то существует такая константа $\rho > 0$, что

$$\text{mes}([t_n, t_{n+1}] \cap e) \geqslant \rho(t_{n+1} - t_n).$$

Лемма 17.3. *Пусть $u \in \mathcal{U}_\partial$ — управление, оптимальное в смысле быстродействия относительно пары состояний $\{y_0, y_1\}$* [1]*, т. е.*

$$y(0; u) = y_0, \quad y(\tau; u) = y_1 \text{ при минимальном } \tau.$$

Тогда для любого $s < \tau$ управление u оптимально в смысле быстродействия относительно пары состояний $\{y_0, y(s; u)\}$. Другими словами, если управление $w \in \mathcal{U}_\partial$ таково, что

$$y(\sigma; w) = y(s; u) \text{ для некоторого } \sigma, \tag{17.28}$$

то $\sigma \geqslant s$.

Доказательство. Предположим, что равенство (17.28) выполняется при некотором $\sigma < s$. Определим тогда управление

$$v(t) = \begin{cases} w(t) & \text{в } (0, \sigma), \\ u(t+s-\sigma) & \text{в } (\sigma, T-(s-\sigma)). \end{cases}$$

[1] В оригинале u est $\{y_0, y_1\}$ optimal.— *Прим. перев.*

Из равенства (17.28) следует, что $y(\sigma;\ v) = y(\sigma;\ w) = y(s;\ u)$. Так как

$$\frac{d}{dt} y(t;\ v) + Ay(t;\ v) = u(t + s - \sigma) \text{ при } t \geqslant \sigma,$$

то $y(t - (s - \sigma);\ v) = y(t;\ u)$ при $t \geqslant s$, а потому

$$y(\tau - (s - \sigma);\ v) = y(\tau;\ u) = y_1.$$

Так как $\tau - (s - \sigma) < \tau$, то это противоречит предположению о том, что управление u оптимально в смысле быстродействия относительно пары состояний $\{y_0,\ y_1\}$.

Лемма 17.4. *Пусть управление $v \in \mathcal{U}_\partial$ таково, что*

$$|v(t)| \leqslant 1 - \varepsilon \text{ почти всюду},\ \varepsilon > 0, \tag{17.29}$$

$$y(\tau;\ v) = y_1 \text{ для некоторого } \tau. \tag{17.30}$$

Тогда $\tau > \tau_0$.

Доказательство. Покажем, что существует такой момент $s < \tau$ и такое управление $w \in \mathcal{U}_\partial$, что

$$y(s;\ w) = y(\tau;\ v) \tag{17.31}$$

(это означает, что τ не может быть оптимальным временем).

Заметим сначала, что равенство (17.31) равносильно равенству

$$\int_0^\tau G(\tau - \sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma + G(\tau)\, y_0 - G(s)\, y_0 = \int_0^s G(s - \sigma)\, w(\sigma)\, d\sigma. \tag{17.32}$$

Легко видеть, что левую часть равенства (17.32) можно представить в виде $\int_0^s G(s - \sigma)\, \tilde{v}(\sigma)\, d\sigma$, где

$$\tilde{v}(\sigma) = v(\sigma + \tau - s) + \frac{1}{s} G(\sigma) \int_0^{\tau - s} G(\tau - s - \sigma_1)\, v(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \frac{1}{s}[G(\sigma + \tau - s)\, y_0 - G(\sigma)\, y_0].$$

Отсюда ясно, что если $\tau - s$ достаточно мало, то в силу условия (17.29) $|\tilde{v}(\sigma)| \leqslant 1$, а потому можно взять $w = \tilde{v}$.

Доказательство теоремы 17.2. Предположим, что соотношение (17.15) не выполняется. Тогда существует такое множество $e \subset [0,\ \tau_0]$, $\operatorname{mes} e > 0$, что

$$|u(t)| \leqslant 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in e. \tag{17.33}$$

Согласно лемме 17.2, можно найти такое s, что $K_s(e) = K = K_s$. Иначе говоря, существует такая функция $\bar{g} \in L^\infty(0,\ T;\ H)$

с носителем в множестве e, что

$$\int_0^s G(s-\sigma)\bar{g}(\sigma)\,d\sigma = \int_0^s G(s-\sigma)u(\sigma)\,d\sigma. \tag{17.34}$$

Зададим управление v формулой

$$v = \begin{cases} (1-\delta)u + \delta\bar{g} & \text{в } (0, \tau_0),\ \delta > 0, \\ 0 \text{ для } t > \tau_0, \end{cases} \tag{17.35}$$

где δ выберем так, чтобы

$$|v(t)| \leqslant 1 - \varepsilon_1 \text{ почти всюду для некоторого } \varepsilon_1 > 0. \tag{17.36}$$

Это возможно; действительно, на множестве e в силу (17.33)

$$|v(t)| \leqslant (1-\delta)(1-\varepsilon) + \delta|\bar{g}(t)| \leqslant 1 - \varepsilon_2$$

для достаточно малого δ, а вне множества e

$$|v(t)| = (1-\delta)|u(t)| \leqslant 1 - \delta,$$

поскольку $u \in \mathcal{U}_\partial$, т. е. $|u(t)| \leqslant 1$.

Очевидно, что

$$y(s;\ v) = (1-\delta)\int_0^s G(s-\sigma)u(\sigma)\,d\sigma + \delta\int_0^s G(s-\sigma)\bar{g}(\sigma)\,d\sigma + G(s)y_0,$$

а потому, учитывая (17.34), получаем

$$y(s;\ v) = y(s;\ u). \tag{17.37}$$

Но тогда, применяя лемму 17.4 (поскольку условие (17.36) выполнено), заключаем, что управление u не оптимально относительно пары состояний $\{y_0,\ y(s;\ u)\}$. Согласно лемме 17.3, отсюда следует, что управление u не может быть оптимальным в смысле быстродействия относительно пары состояний $\{y_0,\ y_1\}$, а это противоречит условиям теоремы.

З а м е ч а н и е 17.5. Можно получить дальнейшие результаты (причем гораздо более простыми рассуждениями) в случае, если полугруппа G является на самом деле *группой*, иначе говоря, если можно *обратить время* (см. гл. 4, § 1). В частности, справедлива

Т е о р е м а 17.3. *Пусть $-A$ есть инфинитезимальный производящий оператор группы $G(t)$ и*

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v(t) \in H_\partial \subset H,\ H_\partial \text{— окрестность нуля в } H\}. \tag{17.38}$$

Если выполнено условие (17.3) и существует управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, оптимальное в смысле быстродействия, то

$$u(t) \in \partial H_\partial \text{ почти всюду}, \tag{17.39}$$

где ∂H_∂ — граница множества H_∂.

Доказательство. Если соотношение (17.39) не выполняется, то существует такое множество $e \subset [0, \tau_0]$, $\operatorname{mes} e > 0$, что

$$d(u(t), \partial H_\partial) \geqslant c_1 > 0 \quad \text{для почти всех} \quad t \in e, \tag{17.40}$$

где $d(\omega, \Omega)$ — расстояние между множествами ω и Ω.

Пусть χ_e — характеристическая функция множества e. Тогда равенство

$$y(\tau_0; u) = y_1 = G(\tau_0) y_0 + \int_0^{\tau_0} G(\tau_0 - \sigma) u(\sigma) d\sigma$$

можно переписать (используя тот факт, что G — *группа*) в виде

$$y(\tau_0; u) = G(\tau_1) y_0 + \int_0^{\tau_1} G(\tau_1 - \sigma) \tilde{u}(\sigma) d\sigma, \tag{17.41}$$

где

$$\tilde{u}(\sigma) = u(\sigma) + \frac{\chi_e(\sigma)}{\operatorname{mes} e} G(\sigma - \tau_1)[y(\tau_0; u) - y(\tau_1; u)], \quad \tau_1 < \tau_0. \tag{17.42}$$

Если выбрать τ_1 столь близким к τ_0, что

$$|\tilde{u}(\sigma) - u(\sigma)| \leqslant \frac{c_1}{2} \quad \text{при} \quad \sigma \in e,$$

то с помощью соотношения (17.40) легко проверить, что $\tilde{u} \in \mathcal{U}_\partial$, а в силу равенства (17.41) $y(\tau_1; \tilde{u}) = y(\tau_0; u) = y_1$. Это противоречит предположению о том, что τ_0 — оптимальное время.

Теорема 17.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 17.3 *и множество* H_∂ *выпукло. Тогда существует такой элемент* $h_0 \in H$, *что*

$$(h_0, y(\tau_0; v) - y(\tau_0; u)) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{17.43}$$

Доказательство. 1) Определим множество

$$K = \{h \mid h \in H, \ h = y(\tau_0; v) - y(\tau_0; 0), \ v \in \mathcal{U}_\partial\}; \tag{17.44}$$

очевидно, что оно выпукло. Покажем, что

$$0 \text{ — внутренняя точка множества } K; \tag{17.45}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{точка } y_1 - y(\tau_0; 0) \text{ принадлежит } K, \text{ но} \\ \text{не является внутренней для } K.\end{array}\right\} \tag{17.46}$$

Пусть h — произвольный элемент пространства H. Чтобы доказать утверждение (17.45), достаточно убедиться, что $\varepsilon h \in K$

для достаточно малых $|\varepsilon|$. Так как

$$h=\int_0^{\tau_0} G(\tau_0-\sigma)\,G(\sigma-\tau_0)\,h\,d\sigma,$$

то

$$\varepsilon h = y(\tau_0;\quad \varepsilon G(\sigma-\tau_0)\,h) - y(\tau_0; 0) \in K$$

для достаточно малого $|\varepsilon|$.

Чтобы доказать утверждение (17.46), будем рассуждать от противного. Если бы точка $y_1 - y(\tau_0;\ 0)$ была внутренней для K, то для некоторого $\varepsilon > 0$ точка $y_1 - y(\tau_0;\ 0) + \varepsilon\,(y_1 - G(\tau_0)\,y_0)$ принадлежала бы K, т. е. существовало бы такое управление $v \in \mathcal{U}_\partial$, что

$$y_1 - y(\tau_0;\ 0) + \varepsilon\,(y_1 - G(\tau_0)\,y_0) = y(\tau_0;\ v) - y(\tau_0;\ 0).$$

Отсюда следовало бы, что

$$y_1 = y(\tau_0;\ 0) + \int_0^{\tau_0} G(\tau_0-\sigma)\,\frac{1}{1+\varepsilon}\,v(\sigma)\,d\sigma = y(\tau_0;\ w),$$

т. е. что управление $w(\sigma)$ принадлежит внутренности множества $\mathcal{U}_\partial$ вопреки утверждению (17.39).

2) Теорема вытекает теперь из утверждений (17.45), (17.46) и следствия 6 § 9 гл. 5 книги Данфорда и Шварца [1].

Замечание 17.6. Если определить сопряженное состояние $p(t)$ как решение задачи

$$-\frac{dp}{dt} + A^*p = 0 \quad \text{в} \quad (0, \tau_0), \tag{17.47}$$

$$p(\tau_0) = h_0, \tag{17.48}$$

то неравенство (17.43) будет эквивалентно неравенству

$$\int_0^{\tau_0} (p(t),\ v(t) - u(t))\,dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{17.49}$$

Учитывая наличие *локальных* ограничений на управление, получаем неравенство (см. теорему 2.1 гл. 2)

$$(p(t),\ h - u(t)) \geqslant 0 \ \text{ почти всюду в } (0,\ \tau_0),\ \ \forall h \in H_\partial. \tag{17.50}$$

Пример 17.2. Если H_∂ — единичный шар пространства H, то

$$u(t) = -\frac{p(t)}{|p(t)|}. \tag{17.51}$$

§ 18. Некоторые обобщения

18.1. Уравнения с запаздыванием

18.1.1. Определение состояния. Рассмотрим сначала эволюционные уравнения с запаздыванием без управления. Решим типичную [1]) задачу: пусть дано число $\omega > 0$; найти функцию $y(t)$, удовлетворяющую условиям

$$y \in L^2(0, T; V), \quad y' \in L^2(0, T; V'), \text{ т. е. } y \in W(0, T); \tag{18.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) + A(t)\,y(t) + y(t-\omega) = f_1(t) \text{ при } t > \omega, \\ y(t) = g(t) \quad \text{в} \quad (0, \omega), \end{array}\right\} \tag{18.2}$$

где $f_1 \in L^2(\omega, T; V')$ и $g \in W(0, \omega)$ — данные функции [2]).

Представим сформулированную задачу в более удобной форме. Зададим оператор $M \in \mathscr{L}(L^2(0, T; V); L^2(0, T; V))$ формулой

$$My(t) = \begin{cases} y(t-\omega), & \text{если} \quad t > \omega, \\ 0, & \text{если} \quad t < \omega, \end{cases} \tag{18.3}$$

и определим функцию

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{если} \quad t > \omega, \\ g' + Ag, & \text{если} \quad t < \omega \end{cases} \tag{18.4}$$

(так что $f \in L^2(0, T; V')$) и число

$$y_0 = g(0) \tag{18.5}$$

(так что $y_0 \in H$). Тогда (при условии, что выполняются соотношения (1.1) и (1.2)) можно представить равенства (18.2) в виде

$$y' + Ay + My = f \quad \text{в } (0, T); \; y(0) = y_0. \tag{18.6}$$

Действительно, на интервале (ω, T) первое из равенств (18.6) сводится, очевидно, к первому из соотношений (18.2), а на интервале $(0, \omega)$ равенства (18.6) превращаются в

$$y' + Ay = g' + Ag, \qquad y(0) = g(0),$$

откуда в силу доказанной в теореме 1.2 единственности следует, что $y \equiv g$ на $(0, \omega)$.

Эволюционную задачу с запаздыванием (18.6) легко обобщить. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} t \to \omega(t) \text{ — измеримая положительная} \\ \qquad \text{ограниченная функция на } [0, T]. \end{array}\right\} \tag{18.7}$$

---

[1]) Мы ограничиваемся здесь лишь простыми примерами. Более общие результаты (в случае отсутствия управления) можно найти в работах Артоля [1] и Байокки [1]. Относительно конечномерных систем см. книгу Халаная [1] (и библиографию к ней).

[2]) Это можно обобщить.

Определим на функциях $y \in W(0, T)$ оператор M формулой

$$My(t) = \begin{cases} y(t-\omega(t)), & \text{если} \quad t-\omega(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad t-\omega(t) < 0; \end{cases} \tag{18.8}$$

тогда можно искать решение $y \in W(0, T)$ задачи (18.6), где оператор M задан формулой (18.8).

Если выполнены условия (1.1), (1.2) *и* (18.7), *а оператор M определен формулой* (18.8), *то задача* (18.6) *имеет единственное решение* (см. Артоля [1], Байокки [1]).

18.1.2. Задача управления. Пусть теперь $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{H})$. Рассмотрим систему, состояние $y(v)$ которой определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &y'(v) + A(t)\,y(v) + My(v) = f + Bv, \\ &y(0; v) = y_0. \end{aligned}\right\} \tag{18.9}$$

Будем считать, что функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_0^T |y(t; v) - z_д|^2\,dt + (Nv, v)_{\mathcal{U}}. \tag{18.10}$$

Наконец, пусть $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$, а $u \in \mathcal{U}_\partial$ — оптимальное управление.

Введем сопряженное состояние следующим образом: заметив, что $M \in \mathcal{L}(C^0([0, T]; H); L^2(0, T; H))$, а значит,

$$M \in \mathcal{L}(W(0, T); L^2(0, T; H)), \tag{18.11}$$

построим сопряженный оператор M^*, удовлетворяющий условию

$$M^* \in \mathcal{L}(L^2(0; T; H); W(0, T)'), \tag{18.12}$$

и определим сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи,

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)\,p(u) + M^*p(u) = y(u) - z_д, \\ &p(T; u) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18.13}$$

З а м е ч а н и е 18.1. Если предположить, например, что функция $\omega(t)$ монотонна и регулярна, так что оператор M^* определяется формулой, аналогичной формуле (18.8), то задача (18.13) имеет единственное решение (см. Байокки [1]). В иных случаях нужно применить метод транспонирования.

Оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$\int_0^T (y(t; u) - z_д, y(t; v) - y(t; u))\,dt + (Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

С помощью соотношения (18.13) получаем отсюда

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial. \tag{18.14}$$

Следовательно, для оптимального управления $u\in\mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (18.9) (при $v=u$), (18.13) и (18.14).

Пример 18.1. В случае $\omega(t)\equiv\omega$

$$\left.\begin{aligned}
&y'(u)+A(t)\,y(u)+y(t-\omega;u)=f,\ t>\omega_1,\\
&y'(u)+A(t)\,y(u)=f \quad \text{в} \quad (0,\omega),\\
&y(0;u)=y_0,\\
&-p'(u)+A^*(t)\,p(u)+p(t+\omega;u)=\\
&\qquad =y(t;u)-z_{\text{д}},\quad 0<t<T-\omega,\\
&-p'(u)+A^*(t)\,p(u)=y(t;u)-z_{\text{д}},\qquad T-\omega<t<T,\\
&p(T;u)=0;
\end{aligned}\right\} \tag{18.15}$$

сюда следует присоединить еще неравенство (18.14).

18.2. Ненормируемые пространства

В общей теории систем (Балакришнан [3]) естественно рассматривать управление как элемент ненормируемого пространства. Мы приведем здесь простейший пример такой ситуации

Введем пространство

$$\mathcal{D}'_+(V')=\mathcal{L}(\mathcal{D}_-;\,V'); \tag{18.16}$$

где $\mathcal{D}_-$ — пространство функций класса C^∞ на $\mathbf{R}$ с носителями, ограниченными справа [1]). Иными словами, $\mathcal{D}'_+(V')$ есть пространство распределений со значениями в V' и с носителями, ограниченными слева (т. е. если $f\in\mathcal{D}'_+(V')$, то $f\equiv 0$ при $t<t_f$). Пусть

$$\mathcal{U}=\mathcal{D}'_+(V'), \tag{18.17}$$

$$\mathcal{U}_\partial \text{ — замкнутое подмножество в } \mathcal{D}'_+(V'). \tag{18.18}$$

Если предположить, что функция $t\to a(t;\varphi,\psi)$ определена и бесконечно дифференцируема на числовой прямой $\mathbf{R}$, то (Лионс [1]) существует такая единственная функция $y(v)\in\mathcal{D}'_+(V')$, что

$$\frac{dy(v)}{dt}+A(t)\,y(v)=f+v. \tag{18.19}$$

Будем считать, что функция стоимости имеет вид

$$J(v)=(g,\,y(v))=\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t),\,y(t;v))\,dt, \tag{18.20}$$

---

[1]) С топологией Шварца [1]; запись $\varphi\in\mathcal{D}_-$ означает, что φ— функция класса C^∞ и $\varphi(t)\equiv 0$ при $t\geqslant t_\varphi$.

где $g \in \mathscr{D}_-(V)$ (т. е. g — бесконечно дифференцируемая функция со значениями в V и с носителем, ограниченным справа) [1]).

Пусть u — оптимальное управление (предполагается, что оно существует), т. е. $J(u) \leqslant J(v)$ для всех $v \in \mathscr{U}_\partial$. Определим сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи

$$-\frac{dp(u)}{dt} + A^*p(u) = g, \qquad p(u) \in \mathscr{D}_-(V). \tag{18.21}$$

Тогда оптимальное управление $u \in \mathscr{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t; u)(v - u)\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathscr{U}_\partial. \tag{18.22}$$

§ 19. Недифференцируемая функция стоимости [2])

19.1. Основной результат

Рассмотрим изучавшуюся в § 2 задачу управления, но в максимально простой ситуации. Отметим, что все наши рассмотрения можно перенести и на общий случай.

Пусть $\mathscr{U} = L^2(0, T; H)$, $B \in \mathscr{L}(H; H)$; состояние системы определяется как решение задачи (см. (2.2) — (2.4))

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy(v)}{dt} + A(t)\, y(v) = f + Bv; \\ &y(v)|_{t=0} = y_0, \qquad y(v) \in L^2(0; T; V). \end{aligned}\right\} \tag{19.1}$$

Будем считать, что $z = y$ и $N = \nu I$, $\nu > 0$. В качестве функции стоимости возьмем

$$J(v) = \int_0^T |y(t; v) - z_д|^2\, dt + \nu \int_0^T |v(t)|^2\, dt + $$
$$+ 2g \int_0^T |v(t)|\, dt, \quad g = \text{const} > 0. \tag{19.2}$$

Функционал $v \to J(v)$ *не является дифференцируемым* из-за наличия слагаемого $2g \int_0^T |v(t)|\, dt$.

Ставится задача отыскания $\inf\limits_{v \in \mathscr{U}_\partial} J(v)$, где $\mathscr{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathscr{U}$. Ясно, что существует

[1]) См. Шварц [2].

[2]) Этот параграф добавлен автором к русскому изданию.— *Прим. перев.*

единственное оптимальное управление, т. е. такой элемент $u \in \mathcal{U}_\partial$, что

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{19.3}$$

Согласно теореме 1.6 гл. 1, оптимальное **управление** $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$\int_0^T (y(t; u) - z_д,\ y(t; v) - y(t; u))\, dt + \nu \int_0^T (u, v-u)\, dt + g \int_0^T |v|\, dt - g \int_0^T |u|\, dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{19.4}$$

Определим сопряженное состояние p как решение задачи

$$-\frac{dp}{dt} + A^*(t)p = y(u) - z_д, \qquad p(T) = 0. \tag{19.5}$$

Тогда (см. предыдущие параграфы) неравенство (19.4) эквивалентно неравенству

$$\int_0^T (B^*p + \nu u, v-u)\, dt + g \int_0^T |v|\, dt - g \int_0^T |u|\, dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{19.6}$$

Таким образом, для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (19.1) (при $v = u$), (19.5) и (19.6).

19.2. Частный случай

Рассмотрим случай отсутствия ограничений на управление, т. е. $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Для упрощения записи положим

$$B^*p + \nu u = \psi. \tag{19.7}$$

Тогда неравенство (19.6) примет вид

$$\int_0^T [(\psi, v) + g|v|]\, dt - \int_0^T [(\psi, u) + g|u|]\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{19.8}$$

Возьмем сначала $v = \lambda w$, затем $v = -\lambda w$, где $\lambda > 0$, а w — произвольный элемент пространства $\mathcal{U}$. Из неравенства (19.8) получим

$$\lambda \int_0^T [(\psi, w) + g|w|]\, dt - \int_0^T [(\psi, u) + g|u|]\, dt \geqslant 0 \qquad \forall \lambda \geqslant 0$$

и

$$\lambda \int_0^T [-(\psi, w) + g|w|]\,dt - \int_0^T [(\psi, u) + g|u|]\,dt \geqslant 0 \quad \forall \lambda \geqslant 0,$$

откуда

$$-\int_0^T g|w|\,dt \leqslant \int_0^T (\psi, w)\,dt \leqslant \int_0^T g|w|\,dt \quad \forall w \in \mathcal{U} = L^2(0, T; H); \tag{19.9}$$

$$\int_0^T [(\psi, u) + g|u|]\,dt \leqslant 0. \tag{19.10}$$

Двойное неравенство (19.9) эквивалентно неравенству

$$|(\psi, w)| \leqslant g\,|w| \qquad \forall w \in H,$$

что дает

$$|\psi(t)| \leqslant g. \tag{19.11}$$

Таким образом, $(\psi, u) + g\,|u| \geqslant 0$ почти всюду, а это вместе с неравенством (19.10) показывает, что

$$(\psi(t), u(t)) + g\,|u(t)| = 0 \quad \text{почти всюду.} \tag{19.12}$$

Итак, *если ограничения на управление отсутствуют, а функция стоимости имеет вид* (19.2), *то оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = f + Bu, \\ &-\frac{dp}{dt} + A^*(t)\,p = y = z_{\text{д}}, \\ &y(0) = y_0, \qquad p(T) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{19.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &|B^*p(t) + \nu u(t)| \leqslant g \ \text{почти всюду на } [0, T], \\ &(B^*p(t) + \nu u(t), u(t)) + g\,|u(t)| = 0 \ \text{почти всюду на } [0, T]. \end{aligned}\right\} \tag{19.14}$$

Замечание 19.1. Соотношения (19.14) можно интерпретировать следующим образом:

(i) если $|B^*p(t) + \nu u(t)| < g$, то $u(t) = 0$;

(ii) если $|B^*p(t) + \nu u(t)| = g$, то

$$(B^*p(t) + \nu u(t), u(t)) = -\,|B^*p(t) + \nu u(t)| \cdot |u(t)|,$$

и потому $B^*p(t) + \nu u(t) = -\lambda u(t)$, $\lambda \geqslant 0$. Иначе говоря,

$$\left.\begin{aligned} &|B^*p(t) + \nu u(t)| < g \Rightarrow u(t) = 0; \\ &|B^*p(t) + \nu u(t)| = g \Rightarrow B^*p(t) + \mu u(t) = 0, \ \mu \geqslant \nu. \end{aligned}\right\} \tag{19.15}$$

Пример. Рассмотрим самую простую задачу из разд. 3.1, например случай $A = -\Delta$. Соотношения (19.13) и (19.15) принимают тогда вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f + u, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = y - z_д \text{ в } Q;\\ &y|_\Sigma = 0, \; p|_\Sigma = 0; \; y(x, 0) = y_0(x),\\ &p(x, T) = 0, \quad x \in \Omega;\end{aligned}\right\} \tag{19.16}$$

и

$$\left.\begin{aligned}&\int_\Omega |p(x, t) + \nu u(x, t)|^2 dx < g^2 \Rightarrow u(x, t) = 0\\ &\qquad \left(\text{т. е. } \int_\Omega |p(x, t)|^2 dx < g^2 \Rightarrow u(x, t) = 0\right),\\ &\int_\Omega |p(x, t) + \nu u(x, t)|^2 dx = g^2 \Rightarrow\\ &\qquad \Rightarrow p(x, t) + \mu u(x, t) = 0, \; \mu \geqslant \nu.\end{aligned}\right\} \tag{19.17}$$

Замечание 19.2. Очевидно, аналогичные примеры можно построить для всех задач настоящей главы, а также гл. 2 и 4.

Замечание 19.3. Пусть u_g — оптимальное управление, т. е. решение задачи (19.3), если функция стоимости $J(v)$ имеет вид (19.2). Можно проверить, что $u_g \to u$ в пространстве $\mathcal{U}$ при $g \to 0$, где u — оптимальное управление в задаче с «дифференцируемой» функцией стоимости (когда в формулу (19.2) подставлено $g = 0$).

Замечание 19.4. Многочисленные задачи минимизации, содержащие *недифференцируемые функционалы*, встречаются в механике (см. разд. 3.10 гл. 1, а также работы Дюво и Лионса [1], [2]).

Примечания

Результаты, изложенные в § 1, мы привели лишь для удобства читателя. Наше доказательство существования следует методу Фаэдо — Галёркина. Другие доказательства см. в книгах Лионса [3], Лионса и Мадженеса [1, гл. 3]. См. также Фридман [1], Ладыженская, Солонников и Уральцева [1].

Эволюционные неравенства [1]) мы не рассматриваем (см. примечания к гл. 1).

В разд. 1.6 дается минимум сведений из теории полугрупп, необходимый для понимания дальнейшего. Более подробно эта теория изложена в монографиях Хилле и Филлипса [1], Като [1], Иосиды [1]. Метод полугрупп тесно связан с методом преобразования Лапласа по t, по поводу которого см. Гарнир [1], Лионс [4].

Весь § 1 посвящен исключительно *линейным* задачам. О нелинейных задачах речь идет в § 15, 16.

[1]) Задачи управления системами, описываемыми эволюционными неравенствами, еще очень мало изучены. См., например, разд. 15.6.

В § 2 результаты, хорошо известные для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (Калман [1], [2]), переносятся на системы, описываемые эволюционными дифференциальными уравнениями с частными производными. В этом случае совокупность равенств, фигурирующих в теореме 2.1, можно назвать *двухточечной граничной задачей*; новым здесь является только наличие граничных условий (или неравенств) на боковой поверхности.

В § 4, 5 на случай *неограниченных* операторов в бесконечномерном пространстве обобщается теория синтеза (обратной связи), являющаяся классической в конечномерном случае (см. Атанс и Фалб [1], Калман и Бюси [1], Бюси и Джозеф [1], Ли и Маркус [1]; случай *ограниченных* операторов в бесконечномерном пространстве рассматривали Фалб и Клейнман [1], Форр [1]). При таком обобщении обоснование формальных вычислений разд. 4.3 вызывает серьезные трудности. Эти трудности обусловлены нелинейностью (квадратичные нелинейности «типа Риккати») рассматриваемых уравнений. Примененный для определения оператора $P(t)$ и функции $r(t)$ метод здесь описан впервые; см. также Балакришнан и Лионс [1], Бенсуссан [3].

Прямое исследование [1]) нелинейных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа, характеризующих ядро $P(x, \xi, t)$ (см. § 5), проводили Да Прато [1], Темам [1], [4]. Численный анализ уравнений этого типа дал Неделек [1].

Можно привести и другие примеры, когда вариационное исчисление помогает решать нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными. В этой связи упомянем работу Флеминга [5], который, следуя идее Хопфа (см. Хопф [1], Конвей и Хопф [1]), рассматривает некоторое нелинейное уравнение *гиперболического* типа как уравнение Гамильтона — Якоби одной стохастической задачи вариационного исчисления.

Случай некоэрцитивной функции стоимости $J(v)$ в конечномерном пространстве исследовал Форр [2].

Естественно, можно записать функции y и p с помощью фундаментального решения эволюционного параболического оператора $\partial/\partial t + A(t)$, а в частном случае, когда $A(t) \equiv A$,— с помощью полугруппы, для которой $-A$ является инфинитезимальным производящим оператором (см. Балакришнан [1], [2], Аксельбанд [1]). Можно также использовать все классические методы представления решений: разложение по собственным функциям, преобразования Лапласа, Меллина и т. д. (см., например, Сакава [1], [2]).

В § 6 результаты Калмана [1], [2] (касающиеся поведения при $T \to \infty$) переносятся на бесконечномерный случай. При этом, как и в § 4, 5, метод определения оператора P_∞ и функции r_∞ отличается от используемых в конечномерном случае. *Скалярный* случай (линейный и нелинейный) более подробно изучен Калманом и Бюси [1].

Интегро-дифференциальные уравнения Риккати, о которых шла речь в § 4, 5, 6, были уже введены раньше (но не в такой общности) многими авторами (см., например, Эрцбергер и Ким [1], Цафестас и Найтингейл [1], [2], Вонг [1] и библиографию к последней работе). Но при этом возникала следующая трудность (остававшаяся непреодоленной): *отыскивались* априори (по аналогии с классическим случаем) такой оператор P и такая функция r, чтобы выполнялось тождество $p = Py + r$; это в свою очередь приводило к необходимости *прямого* исследования интегро-дифференциального уравнения Риккати. Мы же, напротив, сначала *определяем* P и r, проверяем справедливость тождества $p = Py + r$, а потом показываем (в разд. 4.6 и в примерах § 5), что P и r удовлетворяют «естественным» уравнениям. Таким способом, удается обеспечить *глобальное существование* оператора $P(t)$ и его ядра $P(x, \xi, t)$ (с помощью теоремы Шварца о ядрах).

---

[1]) То есть исследование, не использующее связей с теорией управления.

Уравнение Риккати связано с *теорией поля* в вариационном исчислении (см. Хестенс [1]; метод инвариантного погружения Беллмана см. Беллман, Калаба и Винг [1]; метод выметания Гельфанда см. Гельфанд и Фомин [1, § 31]). Аналогичные методы часто применяются в астрофизике (метод инвариантов см. Амбарцумян [1], Чандрасекар [1]; преобразование Риккати см., например, Хаммер и Рыбицкий [1]).

Из результатов разд. 4.5 следует сходимость приближений, построенных по методу Фаэдо — Галёркина (классическому для эволюционных уравнений без управления: см. Фаедо [1], Грин [1], Лионс [3]).

Результаты разд. 4.7 хорошо известны для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями; см. Калман [1], [2].

Рассуждения разд. 4.8 *формальны* (что подчеркнуто и в тексте); при этом применен метод динамического программирования (см. Беллман [1]; Моисеев [1]); аналогичные рассуждения содержатся в книге Бутковского [1] и в работе Вонга [1]. Результаты разд. 4.8, конечно, можно обосновать, но применение уравнения Гамильтона — Якоби (4.100), являющегося функционально-дифференциальным уравнением, наталкивается на существенные трудности. Уравнения такого типа рассматривали в иной связи Донскер и Лионс [1], а в задачах, близких к нашим, Флеминг [1], [2] и Мортенсен [1], [2] ¹). Эти уравнения решаются с помощью интегрирования в функциональных пространствах (см. Донскер [1]) ²).

Свойство обратной единственности (разд. 7.2) изучали Лионс и Мальгранж [1] методом Карлемана (Трев [1, гл. 2, разд. 2.2]). Другой метод, использующий выпуклость, был применен Агмоном и Ниренбергом [1], [2]. См. также Крейн [1], [2], Зейдман [1].

Результаты § 8, 9 в более общем виде изложены в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 6] (там рассматривается параболический оператор порядка $2m$ с общими граничными условиями, но односторонние задачи и вопросы расщепления не затрагиваются совсем), а также в работе Лионса [1, статья III].

Утверждение (9.17) в тексте не доказано; мы отсылаем читателя к книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 4]. Другое доказательство, менее общее, но более элементарное, можно получить с помощью формулы Реллиха для эллиптического случая (Нечас [1]) и преобразования Лапласа по t.

Различные конкретные примеры содержатся в книге Бутковского [1] и в работах Брогана [1] и Виберга [1]. Эти авторы не пользуются транспонированием при постановке граничных задач с ненулевыми граничными условиями, а сразу вводят распределения, сосредоточенные на поверхности цилиндра Q. Отметим, что такой способ трудно применять, если размерность пространства больше 1.

Результаты разд. 10.3 принадлежат Фатторини [5] (который доказал управляемость также и непосредственно, без привлечения теории двойственности). В этой же работе содержатся еще и другие результаты — для абстрактных параболических операторов и параболических операторов произвольного порядка в случае, когда размерность пространства равна 1 (а также для гиперболических операторов). Примеры решения вычислительных задач, примыкающих к разд. 10.2, см. в книге Латтеса и Лионса [1], где вводится и изучается метод *квазиобращения* (который, кстати, было бы интересно распространить на суперединственность, см. разд. 10.3).

Более обстоятельное, чем в разд. 11.3, исследование управляемости систем с начальным состоянием в качестве управления провел Фатторини [2], [3], [4]. См. также Миранкер [1].

¹) В частности, используя результаты Нельсона [1], можно прийти к задачам такого типа для систем, описываемых *уравнением Шредингера*.

²) В рассматриваемом нами случае естественно исходить из представления состояния системы через функциональные интегралы.

Результаты разд. 11.4 принадлежат Бенсуссану [1], предложившему также численный метод решения задач такого типа (другой метод можно найти в книге Латтеса и Лионса [1]).

Состояние системы можно записать «явно», используя фундаментальное решение оператора $\partial/\partial t + A\ (t)$. Тогда задачу об управляемости (например, рассмотренную в разд. 11.3) удается переформулировать на языке операторов. Именно этот путь избрали Конти [1], [2] и Миттер [1], обобщившие на бесконечномерный случай один результат Антосевича [1], доказанный им для случая конечного числа измерений.

Пусть состояние системы определяется, например, как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = 0 \text{ в } \Omega, \\ &yv|_{\Sigma} = v; \qquad y(x,\ 0;\ v) = y_0(x), \qquad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

а наблюдение имеет вид $Cy(v)$. Эта система называется *наблюдаемой*, если

$$v = 0, \quad Cy(0) = 0 \implies y_0 = 0$$

(Калман [1], [2], Маркус [1]). Если, например, $Cy(v) = \left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_{\Sigma}$, то система (*) наблюдаема в силу *теоремы единственности для задачи Коши*. Если некоторая система *ненаблюдаема*, то — по крайней мере теоретически — ее можно сделать наблюдаемой, переходя к факторпространству (вообще говоря, по бесконечномерному подпространству, явное нахождение которого весьма сложно); см. Балакришнан [3].

Теорема 12.1 представляет собой вариант одного классического результата (Мандельбройт [1]; Фенчел [1]). Функции, удовлетворяющие условиям (12.6), систематически использовались в работе Моро [1], где можно найти и теорему 12.1 (сформулированную иначе). Приведенное нами изложение, далеко не самое общее; см. Минти [1], [2], Моро [1] (и библиографию к этой работе), Рокафеллер [1], [2], [3], Сеа [1]. К разд. 12.2 примыкает работа Рассела [2]. Результат, более общий, чем теорема 12.1, получил Брезис [3]; относительно других результатов и их приложений см. Бенсуссан [3].

Естественно, теорему 12.1 можно применить также в «эллиптических ситуациях» (гл. 2) и в «гиперболических ситуациях» (гл. 4).

Относительно приложений теории двойственности см. работу Пирсона [1].

В разд. 13.1 предлагается один из возможных способов перенесения классической теории множителей Лагранжа на бесконечномерный случай. Мы следовали здесь изложению Обина [1], [2]. Необходимо упомянуть также фундаментальные работы Джона [1], Куна и Таккера [1].

Некоторые дополнения (частично эвристические) к разд. 14.3 имеются в работе Лионса [12], где нелинейная обратная связь разлагается в ряд Тейлора, коэффициенты которого удовлетворяют последовательности интегро-дифференциальных уравнений с частными производными.

Более общие, чем в разд. 15.2—15.4, результаты можно найти в работе Лионса [2] (см. также Лионс [8]). Теорема 15.6 принадлежит Флемингу [5].

Другие варианты теоремы 16.1 дал Флеминг [5]. Исследование регулярности решений параболических уравнений (играющей фундаментальную роль) проводили Ильин, Калашников и Олейник [1]. Как и в эллиптическом случае (см. примечания к гл. 2), следует остерегаться «аксиоматических» доказательств утверждений типа теоремы 16.1 (или типа принципа максимума Понтрягина), при которых все трудности проблемы переносятся в условия теоремы.

Теорема 17.1 в менее общем виде была доказана Ю. Егоровым [1]; см. также Валле [1].

Теорема 17.2 принадлежит Фатторини [1]. В работе Фридмана [1] есть ошибка (в лемме 2, по недоразумению приписываемой Фатторини, нельзя фиксировать T). Подробное исследование этой же проблемы проводил Ю. Егоров [2]. См. также Балакришнан [1], Фалб [1]. Теорема 17.2 представляет собой обобщение результата о релейности оптимального управления в конечномерном случае (Беллман, Гликсберг и Гросс [1], Халкин [1], Ла-Салль [1], Маркус [2]).

Теорема 17.3 принадлежит Фридману [1] и Фатторини [6]; мы следовали изложению Фатторини (в работе Фатторини [6] рассмотрен и более общий случай, когда оператор $A(t)$ зависит от t).

Можно рассматривать управление как элемент более общих, чем в этой книге, пространств, погружая их в гильбертовы пространства Соболева «отрицательного показателя». Например, в работе Лионса и Мадженеса [2] изучается случай, когда управление выбирается в пространстве Жеврея. В разд. 18.2 приводится (тривиальный) пример, когда управление является *распределением*.

Мы не рассматриваем здесь случай, когда на управление и наблюдение накладывается шум. Систематическое исследование таких задач, а также систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с частными производными, содержится в работах Бенсуссана [2], [3] и Кушнера [1]; конечномерный случай рассматривали Калман и Бюси [1].

Мы не рассматривали также системы, описываемые дифференциальными уравнениями с частными производными с двумя управлениями — антагонистическими (теория игр) или нет. Вероятно, можно распространить на этот случай некоторые результаты Варейя [1]. Отметим также работы Понтрягина [1], [2], Мищенко и Понтрягина [1], [2] и Пшеничного [1], [2] по дифференциальным играм, которые было бы интересно по мере возможности обобщить и на случай систем, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными.

Наличие двух *неантагонистических* управлений приводит к случаю, когда состояние системы определяется как решение некоторой *односторонней граничной задачи*. Это в свою очередь приводит к важной проблеме (упомянутой в разд. 7.5 гл. 2) *оптимального управления системами, описываемыми односторонними граничными задачами*. Систематическое исследование этой (трудной) проблемы не проводилось.

Наконец, мы не рассмотрели систем, описываемых многозначными дифференциальными уравнениями, коэффициентами в которых служат неограниченные операторы (относительно случая ограниченных операторов см. Кастэн [1]).

Отметим, что односторонние граничные задачи, изучавшиеся в этой главе, обладают некоторой аналогией с задачами, встречающимися в теории пластичности (см. Кристеску [1], а также примечания к гл. 1).

ГЛАВА 4

Управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными гиперболического типа или корректными по Петровскому

§ 1. Эволюционные уравнения второго порядка

1.1. Обозначения и предположения

Будем пользоваться обозначениями § 1 гл. 3. Рассмотрим такие гильбертовы пространства V и H, что

$$V \subset H, \ V \text{ плотно в } H, \ V \text{ сепарабельно.} \tag{1.1}$$

Отождествляя H с его двойственным и обозначая через V' пространство, двойственное к пространству V, можем записать

$$V \subset H \subset V'. \tag{1.2}$$

Далее, пусть дано семейство операторов $A(t) \in \mathscr{L}(V; V')$. Определим семейство билинейных форм на пространстве V:

$$a(t; \varphi, \psi) = (A(t)\varphi, \psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in V, \tag{1.3}$$

и предположим, что

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varphi, \psi \in V \quad \text{функция} \quad t \to a(t; \varphi, \psi) \\ \text{непрерывно дифференцируема на } [0, T]; \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

$$a(t; \varphi, \psi) = a(t; \psi, \varphi) \qquad \forall \varphi, \psi \in V; \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{существует такое число } \lambda \in \mathbf{R}, \text{ что }^{1)} \\ a(t; \varphi, \varphi) + \lambda |\varphi|^2 \geqslant \alpha \|\varphi\|^2, \ \alpha > 0, \\ \forall \varphi \in V, \ \forall t \in [0, T]. \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Сделанные предположения далеко не самые общие из тех, при которых справедливы приводимые ниже результаты. Но *методы*, применяемые в дальнейшем, являются общими (см. также Лионс [3]).

1.2. Постановка задачи. Теорема существования и единственности

Рассмотрим следующую эволюционную задачу: *найти функцию y, удовлетворяющую условиям*

$$y \in L^2(0, T; V), \quad \frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; H), \tag{1.7}$$

---

1) $|\varphi| = \|\varphi\|_H$, $\|\varphi\| = \|\varphi\|_V$.

уравнению

$$\frac{d^2y}{d^2} + A(t)\,y = f \quad \textit{в} \quad (0,\ T), \tag{1.8}$$

где

$$f \text{ — данная функция пространства } L^2(0,\ T;\ H), \tag{1.9}$$

и начальным условиям

$$y(0) = y_0, \tag{1.10}$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = y_1, \tag{1.11}$$

где y_0 и y_1 — данные элементы пространств V и H соответственно.

Замечание 1.2. Из равенства (1.8) следует, что

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f - A(t)\,y \in L^2(0,\ T;\ V').$$

Отсюда, в частности, вытекает (см. теорему 1.1 гл. 3), что производная dy/dt — почти всюду непрерывная функция $[0,\ T] \to V'$. А тогда в силу соотношения (1.7) y — непрерывная функция $[0,\ T] \to H$. Следовательно, равенства (1.10) и (1.11) имеют смысл.

Докажем, что справедлива

Теорема 1.1. *Если выполнены предположения* (1.4) — (1.6), *то задача* (1.7) — (1.11) *имеет единственное решение, причем*

$$\{f,\ y_0,\ y_1\} \to \left\{y,\ \frac{dy}{dt}\right\} \tag{1.12}$$

— линейное непрерывное отображение

$$L^2(0,\ T;\ H) \times V \times H \to L^2(0,\ T;\ V) \times L^2(0,\ T;\ H).$$

Замечание 1.3. В действительности справедливо более сильное утверждение (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 3]):

$$\left.\begin{aligned} &y \text{ — непрерывная функция } [0,\ T] \to V; \\ &\frac{dy}{dt} \text{ — непрерывная функция } [0,\ T] \to H. \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

Замечание 1.4. Существенное отличие сформулированной сейчас задачи от эволюционной задачи, поставленной в § 1 гл. 3, состоит в том, что теперь *можно обратить время*, чего нельзя сделать в параболических задачах. Иначе говоря, если рассмотреть задачу (1.7) — (1.9) с начальными условиями (вместо (1.10), (1.11))

$$y(T) = \bar{y}_0, \tag{1.14}$$

$$\frac{dy(T)}{dt} = \bar{y}_1, \tag{1.15}$$

где $\bar{y}_0$ и $\bar{y}_1$ — данные элементы пространств V и H соответственно то она также имеет единственное решение, непрерывно зависящее от исходных данных (как в теореме 1.1).

1.3. Доказательство единственности

Пусть элемент y удовлетворяет соотношениям (1.7) — (1.11) при $f = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$. Зафиксируем $s \in (0, T)$ и положим

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int\limits_t^s y(\sigma)\,d\sigma, & t < s, \\ 0, & t > s. \end{cases}$$

Согласно (1.8) (при $f = 0$),

$$\int\limits_0^T \left(\frac{d^2y}{dt^2} + A(t)\,y,\ \psi(t)\right) dt = 0.$$

Интегрируя по частям [1]), получаем

$$\int\limits_0^s [a(t; \psi', \psi) - (y', y)]\,dt = 0. \tag{1.16}$$

Введем обозначение

$$\frac{d}{dt}\,a(t; \varphi, \psi) = a'(t; \varphi, \psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in V. \tag{1.17}$$

Тогда равенство (1.16) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^s \frac{d}{dt}[a(t; \psi, \psi) - |y(t)|^2]\,dt - \int\limits_0^s a(t; \psi, \psi)\,dt = 0,$$

или

$$a(0; \psi(0), \psi(0)) + |y(s)|^2 = \int\limits_0^s a'(t; \psi, \psi)\,dt.$$

Следовательно (в силу (1.6)),

$$\|\psi(0)\|^2 + |y(s)|^2 \leqslant c_1\left(\int\limits_0^s \|\psi\|^2\,dt + |\psi(0)|^2\right). \tag{1.18}$$

Если положить $w(t) = \int\limits_0^t y(\sigma)\,d\sigma$, то неравенство (1.18) примет вид

$$\|w(s)\|^2 + |y(s)|^2 \leqslant c_1\left(\int\limits_0^s \|w(t) - w(s)\|^2\,dt + |w(s)|^2\right),$$

[1]) Как и обычно, $z' = dz/dt$.

откуда

$$(1-2c_1s)\,\|w(s)\|^2+|y(s)|^2\leqslant c_2\int_0^s(\|w(t)\|^2+|y(t)|^2)\,dt. \qquad (1.19)$$

Таким образом, если выбрать число s_0, например, так, чтобы было $1-2c_1s_0=1/2$, то из оценки (1.19) получим

$$\|w(s)\|^2+|y(s)|^2\leqslant c_3\int_0^s(\|w(t)\|^2+|y(t)|^2)\,dt \quad \text{для} \quad 0\leqslant s\leqslant s_0.$$

Это в свою очередь означает, что $y\equiv 0$ на отрезке $[0, s_0]$. Поскольку, однако, длина s_0 этого отрезка не зависит от выбора начала координат, то $y\equiv 0$ на отрезке $[s_0, 2s_0]$ и т. д., т. е. единственность доказана.

1.4. Доказательство существования[1])

Пусть $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — «базис» пространства V (в смысле (1.14) гл. 3). Пусть

$$\left.\begin{aligned} &y_{0m}=\sum_{i=1}^m \xi_{im}^0 w_i, \quad y_{0m}\to y_0 \quad \text{в} \quad V \quad \text{при} \quad m\to\infty;\\ &y_{1m}=\sum_{i=1}^m \xi_{im}^1 w_i, \quad y_{1m}\to y_1 \quad \text{в} \quad H \quad \text{при} \quad m\to\infty.\end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

Определим *приближенное решение* $y_m(t)$ нашей задачи соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &y_m(t)=\sum_{i=1}^m g_{im}(t)\,w_i;\\ &\left(\frac{d^2y_m(t)}{dt^2},\ w_j\right)+a(t;\ y_m(t),\ w_j)=(f(t),\ w_j), \quad 1\leqslant j\leqslant m,\\ &y_m(0)=y_{0m}, \quad y_m'(0)=y_{1m}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.21)$$

Очевидно, что эта задача Коши для системы m линейных дифференциальных уравнений относительно $g_{im}(t)$ имеет *единственное* решение.

Для получения априорной оценки функции $y_m(t)$ умножим второе из соотношений (1.21) на $g_{jm}'(t)$ и просуммируем по j; тогда

$$(y_m''(t),\ y_m'(t))+a(t;\ y_m(t),\ y_m'(t))=(f(t),\ y_m'(t)),$$

[1]) Ср. с разд. 1.4 гл. 3.

т. е.

$$\frac{d}{dt}[|y_m'(t)|^2+a(t;\ y_m(t),\ y_m(t))]-a'(t;\ y_m(t),\ y_m(t))=$$
$$=2(f(t),\ y_m'(t)).$$

Следовательно,

$$|y_m'(t)|^2+a(t;\ y_m(t),\ y_m(t))=|y_{1m}|^2+a(0;\ y_{0m},\ y_{0m})+$$
$$+\int_0^t a'(\sigma;\ y_m(\sigma),\ y_m(\sigma))\,d\sigma+2\int_0^t (f(\sigma),\ y_m'(\sigma))\,d\sigma,$$

откуда

$$|y_m'(t)|^2+\|y_m(t)\|^2\leqslant(\|y_{0m}\|^2+|y_{1m}|^2)+c\,|y_m(t)|^2+$$
$$+c\int_0^t[\|y_m(\sigma)\|^2+|f(\sigma)|\cdot|y_m'(\sigma)|]\,d\sigma. \tag{1.22}$$

Но

$$|y_m(t)|\leqslant|y_{0m}|+\int_0^t|y_m'(\sigma)|\,d\sigma;$$

поэтому если положить

$$|y_m'(t)|^2+\|y_m(t)\|^2=Y_m(t), \tag{1.23}$$

то из неравенства (1.22) получим

$$Y_m(t)\leqslant c\left[\|y_{0m}\|^2+|y_{1m}|^2+\int_0^t|f(\sigma)|^2\,d\sigma\right]+c\int_0^t Y_m(\sigma)\,d\sigma. \tag{1.24}$$

В силу леммы Гронуолла отсюда следует, что

$$\|y_m(t)\|\leqslant C,\qquad t\in[0,\ T], \tag{1.25}$$

где C — константа, не зависящая от m.

Соотношение (1.25) означает, что

$$\left.\begin{array}{l}y_m \text{ остаются в ограниченном подмножестве}\\ \text{пространства } L^\infty(0,\ T;\ V);\\ \dfrac{dy_m}{dt} \text{ остаются в ограниченном подмножестве}\\ \text{пространства } L^\infty(0,\ T;\ H).\end{array}\right\} \tag{1.26}$$

Следовательно, можно извлечь такую подпоследовательность

$\{y_\mu\}$, что

$$\left.\begin{aligned} &y_\mu \to z \quad *\text{-слабо} \quad \text{в} \quad L^\infty(0, T; V); \\ &\frac{dy_\mu}{dt} \to \frac{dz}{dt} \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0; T; H). \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

Тогда, в частности, $y_\mu(0) \to z(0)$ слабо в пространстве H и так как, согласно (1.20),

$$y_\mu(0) = y_{0\mu} \to y_0 \text{ в } V,$$

то

$$z(0) = y_0. \tag{1.28}$$

Пусть $\varphi \in C^1([0, T])$, $\varphi(T) = 0$; обозначим $\varphi_j(t) = \varphi(t) w_j$. Умножив второе из соотношений (1.21) (при $m = \mu > j$, где j — произвольное фиксированное число) на функцию $\varphi(t)$ и проинтегрировав от 0 до T, получим

$$\int_0^T [-(y'_\mu, \varphi'_j) + a(t; y_\mu, \varphi_j)]\, dt = \int_0^T (f, \varphi_j)\, dt + (y_{1\mu}, \varphi_j(0)).$$

Переходя здесь к пределу при $\mu \to \infty$ (что возможно в силу (1.27)), находим

$$\int_0^T [-(z', w_j)\varphi' + a(t; z, w_j)\varphi]\, dt = \\ = \int_0^T (f, w_j)\varphi\, dt + (y_1, w_j)\varphi(0). \tag{1.29}$$

Если взять $\varphi \in \mathcal{D}((0, T))$, то соотношение (1.29), как легко проверить, даст

$$\frac{d^2}{dt^2}(z, w_j) + a(t; z, w_j) = (f, w_j) \qquad \forall j,$$

а потому

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + A(t) z = f.$$

Отсюда следует, что

$$(z'(0), w_j)\varphi(0) = (y_1, w_j)\varphi(0) \qquad \forall j, \ \forall \varphi,$$

а значит, $z'(0) = y_1$.

Таким образом, элемент z действительно является решением задачи (1.7) — (1.11).

Замечание 1.5. На самом деле мы доказали даже больше: $y \in L^\infty(0, T; V)$, $dy/dt \in L^\infty(0, T; H)$. Как было отмечено в замечании 1.3, справедлив и еще более сильный результат.

Замечание 1.6. Легко показать, что

$$\left.\begin{array}{lll} y_m \to y & \text{сильно в} & L^2(0, T; V); \\ \dfrac{dy_m}{dt} \to \dfrac{dy}{dt} & \text{слабо в} & L^2(0, T; H). \end{array}\right\} \tag{1.30}$$

Действительно, слабая сходимость уже доказана, а рассматривая

$$X_m = \int_0^T [a(t; y_m - y, y_m - y) + |y_m'(t) - y'(t)|^2]\, dt,$$

легко проверить, что $X_m \to 0$. Отсюда следуют соотношения (1.30).

1.5. Примеры (I)

Будем пользоваться обозначениями § 1 гл. 3. Пусть функции $a_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij}(x, t) \in L^\infty(\Omega) \quad \text{при фиксированном } t \in [0, T]; \\ a_{ij}(x, t) \in C^1([0, T]) \text{ при фиксированном } x \in \Omega; \\ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j; \\ \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \ \alpha > 0, \ \xi_i \in \mathbf{R}. \end{array}\right\} \tag{1.31}$$

Пусть V — подпространство пространства $H^1(\Omega)$, причем

$$H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega), \tag{1.32}$$

а $H = L^2(\Omega)$. Для $\varphi, \psi \in V$ положим

$$a(t; \varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x, t) \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx. \tag{1.33}$$

Тогда выполнены условия теоремы 1.1. Конкретные результаты зависят от выбора V. Приведем три примера.

Пример 1.1. Пусть $V = H_0^1(\Omega)$. Тогда по теореме 1.1 существует единственная функция y, удовлетворяющая соотношениям

$$y, \ \frac{\partial y}{\partial x_i}, \ \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q), \quad Q = \Omega \times (0, T); \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) y = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{1.35}$$

где

$$A\psi = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = A(t)\psi = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right); \tag{1.36}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma \times (0, T); \tag{1.37}$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y_1(x), \quad x \in \Omega, \quad y_0 \in H_0^1(\Omega), \quad y_1 \in L^2(\Omega). \tag{1.38}$$

Пример 1.2. Пусть $V = H^1(\Omega)$. Тогда по теореме 1.1 существует единственная функция y, удовлетворяющая соотношениям (1.34), (1.35), (1.38) (при $y_0 \in H^1(\Omega)$) и

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma\ ^{1)}. \tag{1.39}$$

Пример 1.3. Пусть выбрано $\Gamma_0 \subset \Gamma$ (подмножество положительной меры границы Γ) и

$$V = \{\psi \mid \psi \in H^1(\Omega);\ \psi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0\}. \tag{1.40}$$

Тогда по теореме 1.1 существует единственная функция y, удовлетворяющая соотношениям (1.34), (1.35), (1.38) (при $y_0 \in V$) и

$$y = 0 \text{ на } \Gamma_0 \times (0, T);$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T), \quad \text{где} \quad \Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0.$$

Естественно, при $\Gamma_0 = \Gamma$ (соответственно $\Gamma_0 \neq \varnothing$) мы придем к примеру 1.1 (соответственно к примеру 1.2).

Замечание 1.7. Оператор $\partial^2/\partial t^2 + A$ — *гиперболический оператор второго порядка.*

Задачи, рассмотренные в примерах 1.1—1.3, являются *смешанными задачами в смысле Адамара*; см. Адамар [1], Ладыженская [1].

1.6. Примеры (II)

Рассмотрим «эволюционную задачу второго порядка», аналогичную рассмотренной в разд. 2.7 гл. 2.

Пусть функция $a(x, t)$ такова, что

$$\left.\begin{aligned} &a(x, t) \in L^\infty(\Omega) \quad \text{при фиксированном} \quad t \in [0, T]; \\ &a(x, t) \in C^1([0, T]) \quad \text{при фиксированном} \quad x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

---

1) Формальная проверка этого равенства осуществляется так же, как в примере 1.2 гл. 3; обоснование см. в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 5].

Введем

$$V=\{\psi \mid \psi,\ \Delta\psi \in L^2(\Omega)\}, \quad H=L^2(\Omega), \tag{1.42}$$

$$a(t;\ \varphi,\ \psi)=\int_\Omega a(x,\ t)\,\Delta\varphi\,\Delta\psi\,dx \qquad \forall \varphi,\ \psi\in V. \tag{1.43}$$

Тогда можно применить теорему 1.1, согласно которой существует единственная функция y, удовлетворяющая соотношениям

$$y,\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \Delta y\in L^2(Q); \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\Delta(a\,\Delta y)=f \quad \text{в} \quad Q; \tag{1.45}$$

$$\Delta y=0,\ \frac{\partial\,\Delta y}{\partial n}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma; \tag{1.46}$$

$$y(x,\ 0)=y_0(x),\ \frac{\partial y(x,\ 0)}{\partial t}=y_1(x),\ x\in\Omega,\ y_0\in V,\ y_1\in L^2(\Omega). \tag{1.47}$$

Замечание 1.8. Оператор $\psi\to\partial^2\psi/\partial t^2+\Delta(a\Delta\psi)$ является *корректным по Петровскому*; см. Гельфанд и Шилов [1, т. 3].

1.7. План дальнейшего исследования

Отметим, что в рассмотренных примерах граничные условия на поверхности Σ были *однородными*, т. е. записывались в виде $B_jy\,|_\Sigma=0$, где $j=1$ или $j=1,\,2$ и т. д., а B_j — дифференциальный оператор порядка 0 или 1 и т. д. Если же мы хотим изучать задачи с граничным управлением, то очевидно, что от однородности граничных условий необходимо отказаться.

Сначала мы займемся задачами с распределенным управлением — как в цилиндре Q, так и в области Ω. Затем уже исследуем задачи с граничным управлением.

§ 2. Задачи управления

2.1. Обозначения. Простейшие свойства

Будем пользоваться обозначениями, аналогичными принятым в § 2 гл. 3. Пусть

$$B\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\ L^2(0,\ T;\ H)), \tag{2.1}$$

а f, y_0, y_1 — данные элементы пространств $L^2(0,\ T;\ H)$, V и H соответственно. Предположим, что *состояние* $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{d^2y(v)}{dt^2} + A(t)\,y(v) = f + Bv; \tag{2.2}$$

$$y(0;\, v) = y_0, \qquad \frac{dy(0;\, v)}{dt} = y_1; \tag{2.3}$$

$$y \in L^2(0,\, T;\, V), \qquad \frac{dy}{dt} \in L^2(0,\, T;\, H)\,^{1)}. \tag{2.4}$$

Наблюдение $z(v)$ можно задать так же, как в разд. 2.1 гл. 3. Если определить $W(0,\, T)$ как пространство, заметаемое состоянием y, когда $v = 0$, а тройка $\{f,\, y_0,\, y_1\}$ пробегает произведение $L^2(0,\, T;\, H) \times V \times H$, то можно воспользоваться формулой (2.5) гл. 3.

Если оператор N обладает свойствами (2.6) гл. 3, то функцию стоимости $J(v)$ можно выбрать в виде (2.7) гл. 3.

Пусть множество допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$. Тогда существует единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, характеризующееся соотношением (2.13) гл. 3.

Мы уточним этот результат, рассматривая более конкретные наблюдения $z(v)$. Именно, будут изучены следующие случаи:

$$C \in \mathcal{L}(L^2(0,\, T;\, V);\, \mathcal{H}), \quad z(v) = Cy(v); \tag{2.5}$$

$$C \in \mathcal{L}(L^2(0,\, T;\, H);\, \mathcal{H}), \quad z(v) = Cy'(v); \tag{2.6}$$

$$D_0 \in \mathcal{L}(V;\, \mathcal{H}), \quad z(v) = D_0 y(T;\, v); \tag{2.7}$$

$$D \in \mathcal{L}(H;\, \mathcal{H}), \quad z(v) = Dy'(T;\, v). \tag{2.8}$$

Конечно, можно рассматривать все четыре случая вместе (введя четыре гильбертовых пространства $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_4$), но лучше исследовать их по отдельности, чтобы разделить трудности, специфические для каждого случая.

2.2. Случай (2.5)

Функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \|Cy(v) - z_д\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv,\, v)_{\mathcal{U}}, \tag{2.9}$$

---

[1]) Отличие рассматриваемой задачи от сформулированной в гл. 3 состоит в следующем: здесь мы берем функцию f в пространстве $L^2(0,\, T;\, H)$, тогда как в гл. 3 можно с самого начала считать, что $f \in L^2(0,\, T;\, V')$.

а оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$(Cy(u) - z_{\text{д}},\ Cy(v) - Cy(u))_{\mathcal{H}} + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.10}$$

Так как $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}';\ L^2(0,\ T;\ V'))$ то, обозначая через $\Lambda_{\mathcal{H}} = \Lambda$ канонический изоморфизм $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, перепишем неравенство (2.10) в эквивалентной форме:

$$\int_0^T (C^*\Lambda[Cy(u) - z_{\text{д}}],\ y(v) - y(u))\,dt + (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.11}$$

Здесь мы сталкиваемся со следующей трудностью. *Формально* можно определить сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p(u)}{dt^2} + A(t)p(u) = C^*\Lambda(Cy(u) - z_{\text{д}});\\ &p(T;u) = 0, \quad \frac{dp(T;u)}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Однако поскольку $C^*\Lambda[Cy(u) - z_{\text{д}}] \in L^2(0,\ T;\ V')$, нельзя применить результаты § 1 [1]). Поэтому наложим более сильное условие на оператор C:

$$C \in \mathcal{L}(L^2(0,\ T;\ H);\ \mathcal{H}). \tag{2.13}$$

Тогда $C^*\Lambda[Cy(u) - z_{\text{д}}] \in L^2(0,\ T;\ H)$, и по теореме 1.1 *задача* (2.12) *имеет единственное решение*, причем

$$p(u) \in L^2(0,\ T;\ V), \quad \frac{dp(u)}{dt} \in L^2(0,\ T;\ H). \tag{2.14}$$

Преобразуем неравенство (2.11). Умножим первое из равенств (2.12) скалярно (в пространстве H) на $y(v) - y(u)$ и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T \left(\frac{d^2p(u)}{dt^2} + A(t)p(u),\ y(v) - y(u)\right) dt = \\ = \int_0^T (C^*\Lambda[Cy(u) - z_{\text{д}}],\ y(v) - y(u))\,dt. \tag{2.15}$$

[1]) Эта трудность преодолевается, если обобщить результаты § 1, что и будет сделано ниже; см. также Лионс и Мадженес [1, гл. 3]; Байокки [1].

а затем применим формулу Грина к левой части равенства (2.15). Заметим, что если $\varphi, \psi \in L^2(0, T; V)$; $\varphi', \psi' \in L^2(0, T; H)$; $\varphi'', \psi'' \in L^2(0, T; V')$, то

$$\int_0^T (\varphi'', \psi)\, dt = (\varphi'(T), \psi(T)) - (\varphi'(0), \psi(0)) - \\ - (\varphi(T), \psi'(T)) + (\varphi(0), \psi'(0)) + \int_0^T (\varphi, \psi'')\, dt.$$

Поэтому равенство (2.15) принимает вид

$$\int_0^T \left(p(u), \left(\frac{d^2}{dt^2} + A(t)\right) y(v) - \left(\frac{d^2}{dt^2} + A(t)\right) y(u)\right) dt = \\ = \int_0^T (C^*\Lambda[Cy(u) - z_д], \; y(v) - y(u))\, dt;$$

левая часть этого соотношения, если учесть уравнение (2.2), записывается так:

$$\int_0^T (p(u), B(v-u))\, dt = (B^*p(u), v-u)^{1)} = (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u), v-u)_{\mathcal{U}}.$$

Таким образом, условие (2.11) оптимальности управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ эквивалентно неравенству

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.16}$$

Замечание 2.1. Условие (2.16) аналогично условию (2.18) гл. 3.

Замечание 2.2. Предыдущие выкладки показывают, что

$$\frac{1}{2} J'(u) = B^* p(u) + \Lambda_{\mathcal{U}} Nu. \tag{2.17}$$

Полученный результат (ср. с теоремой 2.1 гл. 3) формулируется как

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения* (1.4) — (1.6) *и функция стоимости имеет вид* (2.9), *где оператор* C *удовлетворяет условию* (2.13). *Тогда оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями*

$$\frac{d^2 y(u)}{dt^2} + A(t)\, y(u) = f + Bu, \;\; y(0; u) = y_0, \;\; y'(0; u) = y_1; \tag{2.18}$$

---

[1]) Скобки здесь обозначено скалярное произведение элементов, принадлежащих пространствам $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}$ соответственно.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p(u)}{dt^2} + A(t)p(u) = C^*\Lambda(Cy(u) - z_{\text{д}}), \\ &p(T; u) = 0, \quad p'(T; u) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial; \tag{2.20}$$

где

$$y(u),\ p(u) \in L^2(0, T; V), \quad y'(u),\ p'(u) \in L^2(0, T; H). \tag{2.21}$$

Замечание 2.3. Если $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$, то соотношение (2.20) приводится к виду

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu = 0. \tag{2.22}$$

Исключив с его помощью u, заключаем, что оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + Ay + BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p = f, \\ &\frac{d^2p}{dt^2} + Ap - C^*\Lambda Cy = -C^*\Lambda z_{\text{д}}; \\ &y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ p(T) = 0,\ p'(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

а именно

$$u = -N^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p.$$

Задача (2.23) будет более подробно изучена в § 4.

2.3. Случай (2.6)

Функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \|Cy'(v) - z_{\text{д}}\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{2.24}$$

а оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$(Cy'(u) - z_{\text{д}},\ Cy'(v) - Cy'(u))_{\mathcal{H}} + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.25}$$

Так как $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}'; L^2(0, T; H))$, то неравенство (2.25) эквивалентно неравенству

$$\int_0^T (C^*\Lambda[Cy'(u) - z_{\text{д}}],\ y'(v) - y'(u))\,dt + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.26}$$

Наша цель — как и в разд. 2.2 — состоит в том, чтобы преобразовать условие (2.26) к более удобному виду. Определим сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи

$$p''(u) + Ap(u) + \int_t^T A'(\sigma)\, p(\sigma; u)\, d\sigma = C^*\Lambda(Cy'(u) - z_д); \tag{2.27}$$

$$p(T; u) = 0, \qquad p'(T; u) = 0, \tag{2.28}$$

где оператор $A'(\sigma)$ вводится по формуле

$$a'(\sigma; \varphi, \psi) = (A'(\sigma)\varphi, \psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in V.$$

Задача (2.27), (2.28) *имеет единственное решение — по крайней мере при наличии дополнительного предположения* [1])

$$A'(\sigma) \in \mathcal{L}(V; H). \tag{2.29}$$

Действительно, обращая время и изменяя обозначения, перепишем задачу (2.27), (2.28) в виде

$$\left.\begin{aligned} &y'' + Ay + \int_0^t A'(\sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma = f; \\ &y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

Определим (как и в разд. 1.4) приближенное решение $y_m(t)$:

$$\left.\begin{aligned} &(y_m'', w_j) + (A(t)\, y_m, w_j) + \int_0^t (A'(\sigma)\, y_m(\sigma), w_j)\, d\sigma = \\ &\qquad\qquad = (f(t), w_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m; \\ &y_m(0) = 0, \qquad y_m'(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{d}{dt}[|y_m'(t)|^2 + a(t; y_m(t), y_m(t))] - a'(t; y_m(t), y_m(t)) +$$
$$+ 2\int_0^t (A'(\sigma)\, y_m(\sigma), y_m'(t))\, d\sigma = 2(f(t), y_m'(t)),$$

откуда

$$|y_m'(t)|^2 + \|y_m(t)\|^2 \leqslant C\int_0^t (|y_m'(\sigma)|^2 + \|y_m(\sigma)\|^2)\, d\sigma +$$
$$+ C\int_0^t \left(\int_0^\sigma \|y_m(\sigma_1)\|\, d\sigma_1\right) |y_m'(\sigma)|\, d\sigma.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в разд. 1.4. Единственность доказывается аналогично тому, как это делалось в разд. 1.3.

[1]) Нам не известно, как обстоит дело без предположения такого типа.

Теперь преобразуем неравенство (2.26). Сначала выкладки проведем формально, а потом их обоснуем. Умножим равенство (2.27) скалярно на $y'(v) - y'(u)$ и проинтегрируем от 0 до T; при этом надо иметь в виду, что скалярное произведение *не имеет смысла*. Полагая далее

$$q(t) = \int_t^T A'(\sigma) p(\sigma) \, d\sigma,$$

получаем

$$\int_0^T (p''(u) + Ap(u), y'(v) - y'(u)) \, dt + \int_0^T (q, y'(v) - y'(u)) \, dt =$$
$$= \int_0^T (C^* \Lambda [Cy'(u) - z_{\text{д}}], y'(v) - y'(u)) \, dt. \qquad (2.32)$$

Интегрируя по частям и учитывая уравнение (2.2), переписываем левую часть равенства (2.32):

$$- \int_0^T (p'(u), y''(v) - y''(u)) \, dt + \int_0^T a(t; p(u), y'(v) - y'(u)) \, dt +$$
$$+ \int_0^T (A'(t) p(u), y(v) - y(u)) \, dt =$$
$$= - \int_0^T (p'(u), B(v - u)) \, dt + \int_0^T [a(t; p'(u), y(v) - y(u)) +$$
$$+ a(t; p(u), y'(v) - y'(u)) + a'(t; p(u), y(v) - y(u))] \, dt =$$
$$= - \int_0^T (p'(u), B(v - u)) \, dt + \int_0^T \frac{d}{dt} a(t; p(u), y(v) - y(u)) \, dt =$$
$$= - \int_0^T (p'(u), B(v - u)) \, dt = (-B^* p'(u), v - u) =$$
$$= (-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p'(u), v - u)_{\mathcal{U}}.$$

Таким образом, неравенство (2.26) эквивалентно неравенству

$$(-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p'(u) + Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \qquad (2.33)$$

Теперь остается *обосновать* формальные выкладки, проведенные выше.

Введем сначала функцию ψ как решение задачи (при этом мы продолжаем оператор $A\ (t)$ на всю прямую $\mathbf{R}$ так, чтобы он обладал свойствами, аналогичными свойствам оператора $A\ (t)$ на интервале $(0,\ T)$)

$$\left.\begin{array}{l}\psi'' + A\,(t)\,\psi = \begin{cases} B\,(v-u) & \text{на} \quad (0,\ T), \\ 0 \quad \text{при} & t > T; \end{cases} \\ \psi\,(0) = 0, \quad \psi'\,(0) = 0, \end{array}\right\} \tag{2.34}$$

и продолжим ее на полуось $t < 0$, полагая равной нулю. Затем введем функцию π как решение задачи

$$\left.\begin{array}{l}\pi'' + A\,(t)\,\pi + \int\limits_t^T A'\,(\sigma)\,\pi\,(\sigma)\,d\sigma = \begin{cases} C^*\Lambda\,(Cy'\,(u) - z_д) \text{ на } (0,\ T), \\ 0 \text{ при } t < 0; \end{cases} \\ \pi\,(T) = 0, \quad \pi'\,(T) = 0; \end{array}\right\} \tag{2.35}$$

и продолжим ее на интервал $t > T$, полагая равной нулю.

На интервале $(0,\ T)$, очевидно, справедливы равенства $\psi = y\,(v) - y\,(u)$, $\pi = p\,(u)$ и

$$(Cy'\,(u) - z_д,\ Cy'\,(v) - Cy'\,(u))_{\mathscr{H}} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\pi'' + A\pi + \int\limits_t^T A'\,(\sigma)\,\pi\,(\sigma)\,d\sigma,\ \psi'\right) dt. \tag{2.36}$$

Пусть $\{\rho_n\,(t)\}$ — регуляризирующая последовательность на действительной прямой $\mathbf{R}$. Тогда правая часть равенства (2.36) равна [1])

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left((\pi'' + A\pi) * \rho_n + \left(\int\limits_t^T A'\,(\sigma)\,\pi\,(\sigma)\,d\sigma\right) * \rho_n,\ \psi' * \rho_n\right) dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty} X_n. \tag{2.37}$$

Выражение X_n, введенное в равенстве (2.37), упрощаем, применяя интегрирование по частям:

$$X_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(-\pi' * \rho_n,\ \psi'' * \rho_n) + ((A\pi) * \rho_n,\ \psi' * \rho_n) +$$
$$+ ((A'\pi) * \rho_n,\ \psi * \rho_n)]\,dt =$$

---

[1]) $g * \rho_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\,(t-\sigma)\,\rho_n\,(\sigma)\,d\sigma.$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-\pi' * \rho_n, B(v-u) * \rho_n)\, dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} [(\pi' * \rho_n, (A\psi) * \rho_n) + ((A\pi) * \rho_n, \psi' * \rho_n) +$$

$$+ ((A'\pi) * \rho_n, \psi * \rho_n)]\, dt.$$

Мы получим нужный результат, если покажем, что второй интеграл (обозначим его через Y_n) в этом выражении стремится к нулю при $n \to \infty$. Этот интеграл можно переписать в виде

$$Y_n = \int_{-\infty}^{+\infty} [(\pi' * \rho_n, A(\psi * \rho_n)) + (A(\pi * \rho_n), \psi' * \rho_n) +$$

$$+ (A'(\pi * \rho_n), \psi * \rho_n)]\, dt + Y_n^1 + Y_n^2 + Y_n^3,$$

где

$$Y_n^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi' * \rho_n, (A\psi) * \rho_n - A(\psi * \rho_n))\, dt,$$

$$Y_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} ((A\pi) * \rho_n - A(\pi * \rho_n), \psi' * \rho_n)\, dt,$$

$$Y_n^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} ((A'\pi) * \rho_n - A'(\pi * \rho_n), \psi * \rho_n)\, dt.$$

Так как первое слагаемое в выражении Y_n равно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} a(t; \pi * \rho_n, \psi * \rho_n)\, dt = 0,$$

то $Y_n = Y_n^1 + Y_n^2 + Y_n^3$. Далее, согласно одной лемме Фридрихса (см., например, Лионс [3, лемма 7.2 гл. 4]),

$$\frac{d}{d} [(A\psi) * \rho_n - A(\psi * \rho_n)] \to 0 \quad \text{в} \quad L^2(\mathbf{R}; V'),$$

а потому

$$Y_n^1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\pi * \rho_n, \frac{d}{dt} [(A\psi) * \rho_n - A(\psi * \rho_n)]\right) dt \to 0.$$

Аналогично доказывается, что $Y_n^2 \to 0$ и $Y_n^3 \to 0$; это и завершает обоснование неравенства (2.33).

Таким образом, доказана

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения* (1.4) — (1.6) *и функция стоимости имеет вид* (2.24), *где оператор C удовлетворяет условию* (2.6). *Допустим, кроме того, что выполнено* *предположение* (2.29). *Тогда оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями*

$$\frac{d^2y(u)}{dt^2} + A(t)\,y(u) = f + Bu, \quad y(0;u) = y_0, \quad y'(0;u) = y_1; \tag{2.38}$$

$$\frac{d^2p(u)}{dt^2} + A(t)\,p(u) + \int_t^T A'(\sigma)\,p(\sigma;u)\,d\sigma =$$

$$= C^*\Lambda(Cy'(u) - z_д), \quad p(T;u) = 0, \quad p'(T;u) = 0; \tag{2.39}$$

$$(-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p'(u) + Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.40}$$

Замечание 2.4. Если $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$, то соотношение (2.40) приводится к виду

$$-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p'(u) + Nu = 0. \tag{2.41}$$

Исключив с его помощью u, заключаем, что оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + A(t)\,y - BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p' = f,\\ &\frac{d^2p}{dt^2} + A(t)\,p + \int_t^T A'(\sigma)\,p(\sigma)\,d\sigma = C^*\Lambda(Cy' - z_д);\\ &y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad p(T) = 0, \quad p'(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

а именно

$$u = N^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p'.$$

Замечание 2.5. Подчеркнем, что однозначная разрешимость задачи (2.38) — (2.40) нам известна (из самого способа, которым эта задача получена). *Прямое* доказательство теоремы существования и единственности для этой задачи не представляется очевидным.

2.4. Случай (2.7)

Функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \|D_0y(T;v) - z_д\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{2.43}$$

а оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$(D_0y(T;u) - z_д,\ D_0y(T;v) - D_0y(T;u))_{\mathcal{H}} +$$

$$+ (Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{2.44}$$

или

$$(D_0^*\Lambda[D_0y(T;\,u)-z_д],\ y(T;\,v)-y(T;\,u))+$$
$$+(Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0\quad \forall v\in\mathcal{U}_\partial,\tag{2.45}$$

где первое слагаемое левой части неравенства (2.45) обозначает скалярное произведение элементов, принадлежащих пространствам V' и V соответственно.

Определим (*формально*) сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи

$$\frac{d^2p(u)}{dt^2}+A(t)\,p(u)=0;\tag{2.46}$$

$$p(T;\,u)=0;\tag{2.47}$$

$$p'(T;\,u)=D_0^*\Lambda[D_0y(T;\,u)-z_д].\tag{2.48}$$

Теорему 1.1 можно применить, лишь если $p'(T;\,u)$ принадлежит пространству H [1]). Поэтому наложим более сильное условие на оператор D_0:

$$D_0\in\mathcal{L}(H;\,\mathcal{H}).\tag{2.49}$$

Тогда *задача* (2.46) — (2.48) *имеет единственное решение.*

Умножая уравнение (2.46) скалярно на $y(t;\,v)-y(t;\,u)$ и применяя формулу Грина (что в данном случае законно), получаем

$$\int_0^T\left(p(u),\ \left(\frac{d^2}{dt^2}+A\right)y(v)-\left(\frac{d^2}{dt^2}+A\right)y(u)\right)dt+$$
$$+(D_0^*\Lambda[D_0y(T;\,u)-z_д],\ y(T;\,v)-y(T;\,u))=0.$$

Таким образом, неравенство (2.45) эквивалентно неравенству

$$(-B^*p(u),\ v-u)+(Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0\qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial,\tag{2.50}$$

или

$$(-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0\qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial.\tag{2.51}$$

Тем самым доказана

Теорема 2.3. *Пусть выполнены предположения* (1.4) — (1.6) *и функция стоимости имеет вид* (2.43), *где оператор* D_0 *удовлетворяет условию* (2.49). *Тогда оптимальное управление*

---

[1]) Если это не так, то нужно использовать слабые решения; см. ниже § 3.

$u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями*

$$\frac{d^2y(u)}{dt^2} + A(t)\,y(u) = f + Bu, \quad y(0;u) = y_0, \quad y'(0;u) = y_1; \tag{2.52}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p(u)}{dt^2} + A(t)\,p(u) = 0, \\ &p(T;u) = 0, \quad p'(T;u) = D_0^*\Lambda\,[D_0y(T;u) - z_д]; \end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

$$(-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial.$$

Замечание 2.6. Если $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$, то соотношение (2.51) приводится к виду

$$-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu = 0. \tag{2.54}$$

С его помощью можно исключить u из соотношений (2.52), (2.53).

2.5. Случай (2.8)

Функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \|Dy'(T;v) - z_д\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{2.55}$$

а оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$\begin{aligned} &(Dy'(T;u) - z_д,\ Dy'(T;v) - Dy'(T;u))_{\mathcal{H}} + \\ &\quad + (Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \end{aligned} \tag{2.56}$$

или

$$\begin{aligned} &(D^*\Lambda\,[Dy'(T;u) - z_д],\ y'(T;v) - y'(T;u)) + \\ &\quad + (Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Сопряженное состояние $p(u)$ определяется (*формально*) как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p(u)}{dt^2} + A(t)\,p(u) = 0; \\ &p(T;u) = D^*\Lambda\,[Dy'(T;u) - z_д], \quad p'(T;u) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

Тогда $p(T;u)$ принадлежит пространству H, и поэтому необходимо обобщить результаты § 1. Это будет сделано в следующем параграфе, где (как следствие) решена настоящая задача.

§ 3. Применение метода транспонирования в задачах управления

3.1. Транспонирование

Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда для данной функции $f \in L^2(0, T; H)$ существует такая единственная функция φ, что

$$\varphi'' + A(t)\varphi = f; \quad \varphi(T) = 0, \ \varphi'(T) = 0, \tag{3.1}$$

причем $\varphi \in L^2(0, T; V)$, $\varphi' \in L^2(0, T; H)$.

Обозначим через X пространство, заметаемое функцией φ, когда элемент f пробегает пространство $L^2(0, T; H)$. Снабженное нормой $\|\varphi\|_X = \|f\|_{L^2(0,T;H)}$, пространство X становится гильбертовым, а оператор $\varphi \to \varphi'' + A\varphi$ является изоморфизмом $X \to L^2(0, T; H)$.

С помощью *транспонирования* заключаем:

$$\left.\begin{array}{l}\text{если } \varphi \to L\varphi \text{ — непрерывная линейная форма}\\ \text{на } X\text{, то существует такой единственный}\\ \text{элемент } y \in L^2(0, T; H)\text{, что}\\ \displaystyle\int_0^T (y, \varphi'' + A\varphi)\,dt = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in X.\end{array}\right\} \tag{3.2}$$

Кроме того, $L \to y$ — непрерывное отображение $X' \to L^2(0, T; H)$.

Если положить

$$L(\varphi) = \int_0^T (f, \varphi)\,dt + (y_1, \varphi(0)) - (y_0, \varphi'(0)), \tag{3.3}$$

где

$$f \in L^1(0, T; V'), \tag{3.4}$$

$$y_0 \in H, \tag{3.5}$$

$$y_1 \in V', \tag{3.6}$$

то мы определим тем самым непрерывную линейную форму на пространстве X. Следовательно, применяя утверждение (3.2) к форме $L(\varphi)$, определенной соотношениями (3.3) — (3.6), убеждаемся, что справедлива

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1, *а* f, y_0, y_1 *— данные элементы, удовлетворяющие условиям* (3.4) — (3.6). *Тогда существует такая единственная функция* $y \in L^2(0, T; H)$, *что*

$$\int_0^T (y, \varphi'' + A\varphi)\,dt = \int_0^T (f, \varphi)\,dt + (y_1, \varphi(0)) - (y_0, \varphi'(0)) \quad \forall \varphi \in X; \tag{3.7}$$

при этом $\{f,\ y_0,\ y_1\} \to y$ — *непрерывное отображение*

$$L^1(0,\ T;\ V') \times H \times V' \to L^2(0,\ T;\ H).$$

Мы дадим *формальную* интерпретацию соотношению (3.7) (обоснование см. в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 3]). Выбрав в соотношении (3.7) в качестве $\varphi(t)$ гладкую функцию с компактным носителем в интервале $(0,\ T)$, получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A(t)\,y = f \quad \text{в} \quad (0,\ T). \tag{3.8}$$

Умножая скалярно это равенство на функцию φ и интегрируя по частям, приходим к соотношению

$$\int_0^T (f,\ \varphi)\,dt = -(y'(0),\ \varphi(0)) + (y(0),\ \varphi'(0)) + \int_0^T (y,\ \varphi'' + A\varphi)\,dt,$$

откуда, сравнивая с соотношением (3.7), находим начальные условия

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1. \tag{3.9}$$

3.2. Приложение (I)

Теперь мы можем уточнить, в каком смысле понимается решение задачи (2.58).

Применим теорему 3.1, обращая время; тогда сопряженное состояние $p(u)$ определяется как единственный элемент пространства $L^2(0,\ T;\ H)$, удовлетворяющий соотношению

$$\int_0^T (p(u),\ \varphi'' + A(t)\,\varphi)\,dt = (Dy'(T;\ u) - z_д,\ D\varphi'(T))_{\mathscr{H}} \tag{3.10}$$

для любой функции φ, для которой

$$\varphi'' + A(t)\,\varphi \in L^2(0,\ T;\ H),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0.$$

Следовательно, в соотношении (3.10) можно взять $\varphi = y(v) - y(u)$, а тогда

$$(Dy'(T;\ u) - z_д,\ D[y'(T;\ v) - y'(T;\ u)]) = \int_0^T (p(u),\ B(v-u))\,dt.$$

Неравенство (2.57) эквивалентно неравенству

$$(B^*p(u),\ v-u) + (Nu,\ v-u)_{\mathscr{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathscr{U}_\partial, \tag{3.11}$$

или

$$(\Lambda_{\mathscr{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu,\ v-u)_{\mathscr{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathscr{U}_\partial. \tag{3.12}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения* (1.4) — (1.6) *и функция стоимости имеет вид* (2.55). *Тогда оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями* (3.10), (3.12) *и*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y(u)}{dt^2} + A(t)\,y(u) = f + B\bar{u};\\ &y(0;\,u) = y_0,\ \ y'(0;\,u) = y_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

3.3. Приложение (II)

Несколько обобщим рассмотрения разд. 2.4. Именно, пусть функция стоимости по-прежнему имеет вид (2.43), но $D_0 \in \mathcal{L}(V,\ \mathcal{H})$ (вместо предположения (2.49)).

Тогда $D_0^*\Lambda\,[D_0y(T;\ u) - z_д] \in V'$, и мы можем применить теорему 3.1 для исследования задачи (2.46) — (2.48): сопряженное состояние $p(u)$ определяется как единственный элемент пространства $L^2(0,\ T;\ H)$, удовлетворяющий соотношению

$$\int_0^T (p(u),\ \varphi'' + A(t)\,\varphi)\,dt = -(D_0y(T;\ u) - z_д,\ D_0\bar{\varphi}(T))_{\mathcal{H}} \tag{3.14}$$

для любой функции φ, для которой

$$\varphi'' + A(t)\,\varphi \in L^2(0,\ T;\ H),\ \ \varphi(0) = 0,\ \ \varphi'(0) = 0.$$

Выбирая $\varphi = y(v) - y(u)$ в соотношении (3.14), легко убедиться, что неравенство (2.44) эквивалентно неравенству

$$(-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u) + Nu,\ v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.15}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.3. *Пусть выполнены предположения* (1.4) — (1.6) *и функция стоимости имеет вид* (2.43), *причем* $D_0 \in \mathcal{L}(V;\ \mathcal{H})$. *Тогда оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями* (3.13) — (3.15).

3.4. Приложение (III)

Можно также дополнить рассмотрения разд. 2.2. Будем считать, что $C \in \mathcal{L}(L^2(0,\ T;\ V);\ \mathcal{H})$ (вместо предположения (2.13)).

Для решения задачи (2.12) применим теорему 3.1: сопряженное состояние $p(u)$ определяется как единственный элемент пространства $L^2(0, T; H)$, удовлетворяющий соотношению

$$\int_0^T (p(u), \varphi'' + A(t)\varphi)\,dt = (Cy(u) - z_д, C\varphi)_{\mathcal{H}} \tag{3.16}$$

для любой функции φ, для которой

$$\varphi'' + A(t)\varphi \in L^2(0, T; H), \quad \varphi(0) = 0, \ \varphi'(0) = 0.$$

Полагая $\varphi = y(v) - y(u)$ в соотношении (3.16), убеждаемся, что справедлива

Теорема 3.4. *Пусть выполнены предположения* (1.4) — (1.6) *и функция стоимости имеет вид* (2.9), *причем* $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V); \mathcal{H})$. *Тогда оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями* (3.13), (3.16) *и*

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{3.17}$$

Замечание 3.1. Пусть

$$\mathcal{U} = L^2(0, T; E); \tag{3.18}$$

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U},\ v(t) \in E_\partial \text{ почти всюду}\}, \tag{3.19}$$

где E_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства E. С помощью теоремы 2.1 гл. 2 легко проверить, что неравенство (3.17) [1]) в данном случае эквивалентно неравенству

$$\left.\begin{aligned} &((\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu)(t),\ e - u(t))_E \geqslant 0 \\ &\text{почти всюду на } (0, T) \quad \forall e \in E_\partial. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

§ 4. Примеры

4.1. Гиперболические задачи с распределенным управлением и распределенным наблюдением

Пусть оператор A определен, как в разд. 1.5, а C — тождественный оператор, рассматриваемый как элемент пространства $\mathcal{L}(L^2(0; T; H); L^2(0, T; H))$. Пусть, далее,

$$\mathcal{U} = L^2(Q); \ B \text{ — тождественный оператор.} \tag{4.1}$$

Наконец, пусть $V = H_0^1(\Omega)$, состояние системы определяется как

[1]) Это замечание, очевидно, применимо и в других рассмотренных выше случаях.

решение задачи [1])

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2}+Ay(v)=f+v;\quad y(v)|_\Sigma=0;\\&y(x,0;v)=y_0(x),\ \frac{\partial y(x,0;v)}{\partial t}=y_1(x),\ x\in\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

а функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\int_Q [y(v)-z_{\text{д}}]^2\,dx\,dt+(Nv,v)_{\mathcal{U}}.\tag{4.3}$$

Согласно теореме 2.1, для оптимального управления $u\in\mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (4.2) (при $v=u$),

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2}+A(t)p(u)=y(u)-z_{\text{д}};\\&p(u)|_\Sigma=0;\ p(x,T;u)=0,\ \frac{\partial p(x,T;u)}{\partial t}=0,\ x\in\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

и

$$\int_Q [p(u)+Nu](v-u)\,dx\,dt\geqslant 0\qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial.\tag{4.5}$$

Пример 4.1. Пусть

$$\mathcal{U}_\partial=\{v\mid v\geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q\}.\tag{4.6}$$

Тогда оптимальное управление получается из решения односторонней задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+Ap=y-z_{\text{д}}\ \text{в}\ Q;\\&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ay-f\geqslant 0,\ p+N\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ay-f\right)\geqslant 0,\\&\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ay-f\right)\left[p+N\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ay-f\right)\right]=0\ \text{в}\ Q;\\&y=0,\ p=0\ \text{на}\ \Sigma;\\&y(x,0)=y_0(x),\ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=y_1(x),\\&p(x,T)=0,\quad \frac{\partial p(x,T)}{\partial t}=0\ \text{на}\ \Omega,\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

[1]) Если $V=H^1(\Omega)$, то второе равенство (4.2) должно иметь вид $\partial y(v)/\partial\nu_A|_\Sigma=0$ (см. разд. 1.5).

а именно

$$u = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay - f.$$

Замечание 4.1. Если $(\partial^2/\partial t^2 + A)\, z_д \neq f$ почти всюду в цилиндре Q и $N = \nu I$, $\nu > 0$, то, как и в примере 3.1 гл. 3, можно получить дополнительную информацию об оптимальном управлении:

$$u = -\frac{1}{\nu}\inf(0, p) \quad \text{почти всюду в} \quad Q. \tag{4.8}$$

Таким образом, в этом случае оптимальное управление находится из решения нелинейной задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay + \frac{1}{\nu}\inf(0, p) = f \text{ в } Q;\\
&\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + Ap = y - z_д \text{ в } Q;\\
&y = 0,\ p = 0 \text{ на } \Sigma;\\
&y(x, 0) = y_0(x),\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y_1(x),\\
&p(x, T) = 0,\ \frac{\partial p(x, T)}{\partial t} = 0 \text{ на } \Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Заметим, что (в частности) $p \in H^1(Q)$, а тогда из равенства (4.8) следует, что

$$u \in H^1(Q) \tag{4.10}$$

(свойство *регулярности* оптимального управления).

Замечание 4.2. Будем теперь считать, что C — тождественный оператор, рассматриваемый как элемент пространства $\mathcal{L}(L^2(0, T; V); L^2(0, T; V))$. Пусть, далее, $V = H_0^1(\Omega)$, а функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_Q \left[[y(v) - z_д]^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(y(v) - z_д) \right]^2 \right] dx + (Nv, v)_{\mathcal{U}}. \tag{4.11}$$

Тогда (ср. с (3.13) гл. 3) сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2} + Ap(u) = (-\Delta_x + I)[y(u) - z_д] \text{ в } Q;\\
&p(u)|_\Sigma = 0;\ p(x, T; u) = 0,\ \frac{\partial p(x, T; u)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Так как $(-\Delta_x + I)[y(u) - z_д] \in L^2(0, T; V')$, то нужно применить результаты § 3 (теорему 3.4).

4.2. Гиперболические задачи с распределенным управлением и финальным наблюдением

Предположим, что состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи (4.2), а наблюдением является

$$y(x, T; v) \in L^2(\Omega). \tag{4.13}$$

Тогда $Cy(v) = D_0 y(T; v)$, где D_0 — тождественный оператор $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Пусть функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_\Omega [y(x, T; v) - z_д(x)]^2 dx + (Nv, v)_{L^2(Q)}. \tag{4.14}$$

В рассматриваемом случае можно применить теорему 2.3: для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (4.2) (при $v = u$),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2} + Ap(u) = 0 \text{ в } Q;\\ &p(u) = 0 \text{ на } \Sigma;\\ &p(x, T; u) = 0, \quad \frac{\partial p(x, T; u)}{\partial t} = y(x, T; u) - z_д(x) \text{ на } \Omega \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

и

$$(-p(u) + Nu, v - u)_{L^2(Q)} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{4.16}$$

Пример 4.2. Пусть множество $\mathcal{U}_\partial$ определено, как в (4.6). Тогда неравенство (4.16) эквивалентно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} u &\geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q,\\ -p(u) + Nu &\geqslant 0 \text{ почти всюду в } Q,\\ u[-p(u) + Nu] &= 0 \text{ почти всюду в } Q. \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Замечание 4.3. Если наблюдением является $y(x, T; v) \in V$ (следовательно, D_0 — тождественный оператор $V \to V$), а функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_\Omega \left[[y(x, T; v) - z_д]^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(y(x, T; v) - z_д)\right]^2 \right] dx + (Nv, v)_{L^2(Q)}, \tag{4.18}$$

то в правой части последнего из соотношений (4.15) нужно заменить $y(x, T; u) - z_д(x)$ на $(-\Delta_x + I)[y(x, T; u) - z_д(x)]$. Решение получающейся задачи нужно понимать в смысле теоремы 3.1.

З а м е ч а н и е 4.4. Предположим, что наблюдением является

$$y'(x, T; v) \in L^2(\Omega); \tag{4.19}$$

следовательно, $Cy(v) = Dy'(T; v)$, где D — тождественный оператор $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Пусть функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_\Omega [y'(x, T; v) - \dot z_д(x)]^2\, dx + (Nv, v)_{\mathcal{U}}. \tag{4.20}$$

Сопряженное состояние определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2} + A(t)p(u) = 0 \text{ в } Q;\\ &p(u) = 0 \text{ на } \Sigma;\\ &p(x, T; u) = y'(x, T; u) - z_д(x), \quad \frac{\partial p(x, T; u)}{\partial t} = 0 \text{ в } \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Решение этой задачи нужно понимать в смысле теоремы 3.1 [1]).

Согласно теореме 3.2, для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (4.2) (при $v = u$), (4.21) и

$$\int_Q [p(u) + Nu](v - u)\, dx\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{4.22}$$

4.3. Уравнение типа Петровского с распределенным управлением и распределенным наблюдением

Рассмотрим теперь систему, состояние которой определяется как решение задачи (см. разд. 1.6)

$$\frac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2} + \Delta(a\Delta y(v)) = f + v, \quad v \in L^2(Q); \tag{4.23}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta y(v) = 0, \quad \frac{\partial \Delta y(v)}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma;\\ &y(x, 0; v) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(x, 0; v)}{\partial t} = y_1(x) \text{ на } \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

---

[1]) То есть

$$\int_Q p(u)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + A(t)\varphi\right) dx\, dt = \int_\Omega [y'(x, T; u) - z_д(x)]\,\varphi'(x, T)\, dx$$

для любой функции φ, для которой

$$\varphi \in H^1(Q), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + A(t)\varphi \in L^2(Q); \quad \varphi|_\Sigma = 0; \quad \varphi(x, 0) = 0, \quad \varphi'(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Если функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_Q [y(x, t; v) - z_д]^2 \, dx \, dt + (Nv, v)_{\mathcal{U}}, \quad \mathcal{U} = L^2(Q), \tag{4.25}$$

т. е. наблюдением является $y(v) \in L^2(Q)$, то, согласно теореме 2.1, для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (4.23), (4.24) (при $v = u$),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2} + \Delta(a\Delta p(u)) = y(u) - z_д \ \text{в}\ Q; \\ &\Delta p(u) = 0, \ \frac{\partial \Delta p(u)}{\partial n} = 0 \ \text{на}\ \Sigma; \\ &p(x, T; u) = 0, \ \frac{\partial p(x, T; u)}{\partial t} = 0 \ \text{на}\ \Omega \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

и

$$\int_Q [p(u) + Nu](v - u) \, dx \, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{4.27}$$

Пример 4.3. Если множество $\mathcal{U}_\partial$ определено соотношением (4.6), то задача сводится к односторонней задаче типа (4.7) и справедливо замечание, аналогичное замечанию 4.1.

4.4. Уравнение типа Петровского с распределенным управлением и финальным наблюдением

Рассмотрим ту же систему, что и в разд. 4.3, но будем считать, что наблюдением является

$$y'(x, T; v) \in L^2(\Omega), \tag{4.28}$$

а функция стоимости имеет вид (4.20).

Сопряженное состояние $p(u)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2} + \Delta(a\Delta p(u)) = 0 \ \text{в}\ Q; \\ &\Delta p(u) = 0, \ \frac{\partial \Delta p(u)}{\partial n} = 0 \ \text{на}\ \Sigma; \\ &p(x; T; u) = y'(x, T; u) - z_д(x), \ \frac{\partial p(x, T; u)}{\partial t} = 0 \ \text{в}\ \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Решение этой задачи понимается в смысле теоремы 3.1, т. е.

$$\int\limits_Q p(u)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\Delta(a\Delta\varphi)\right)dx\,dt=$$

$$=\int\limits_\Omega [y'(x, T; u)-z_д(x)]\,\varphi'(x, T)\,dx \quad (4.30)$$

для любой функции φ, для которой

$$\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \Delta\varphi\in L^2(Q),\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\Delta(a\Delta\varphi)\in L^2(Q);$$

$$\Delta\varphi|_\Sigma=0,\ \left.\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n}\right|_\Sigma=0;\ \varphi(x, 0)=0,\ \varphi'(x, 0)=0,\ x\in\Omega.$$

Для оптимального управления $u\in\mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (4.23), (4.24) (при $v=u$), (4.27) и (4.29).

4.5. План дальнейшего исследования

Выясним теперь, в какой степени и каким образом результаты, относящиеся к *расцеплению* (§ 4, 5 гл. 3), можно перенести на задачи этой главы. Кроме того, рассмотрим случаи, когда управление и наблюдение определяются иначе, чем в приведенных выше задачах,— в частности, когда управление и наблюдение *граничны*.

§ 5. Расцепление

5.1. Постановка задачи. Сведение к системе уравнений первого порядка

Снова обратимся к задаче, рассматривавшейся в разд. 2.2 (и в разд. 3.4). Оказывается, что при этом очень удобно записывать уравнение, определяющее состояние системы, в виде системы уравнений первого порядка, что мы сейчас и сделаем.

Замечание 5.1. Формально мы возвратимся к случаю, рассмотренному в гл. 3, но методы доказательств будут уже другие — ясно, что одним лишь изменением записи невозможно перейти от гиперболического случая к параболическому.

Чтобы не увеличивать чисто технические трудности, предположим, что

$$\left.\begin{aligned}&a(t;\varphi,\psi)=a(\varphi,\psi)\ \text{не зависит от}\ t;\\&a(\varphi,\varphi)\geqslant\alpha\|\varphi\|_V^2,\quad \alpha>0,\qquad \forall\varphi\in V.\end{aligned}\right\}\quad (5.1)$$

Введем пространство

$$\mathfrak{h} = V \times H. \tag{5.2}$$

Если $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}$, где $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1\}$, $\psi = \{\psi_0, \psi_1\}$, то определим скалярное произведение в $\mathfrak{h}$:

$$[\varphi, \psi] = a(\varphi_0, \psi_0) + (\varphi_1, \psi_1) \tag{5.3}$$

(такое определение законно, так как $a(\varphi_0, \psi_0) = a(\psi_0, \varphi_0)$ и имеет место соотношение (5.1)). Затем введем пространство

$$\mathscr{V} = V \times V. \tag{5.4}$$

Отождествим пространство $\mathfrak{h}$ *с двойственным к нему пространством*; пусть $\mathscr{V}'$ — пространство, двойственное к $\mathscr{V}$. Тогда очевидно, что $\mathscr{V} \subset \mathfrak{h} \subset \mathscr{V}'$ и

$$\mathscr{V}' = V \times V'. \tag{5.5}$$

Пусть состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y(v)}{dt^2} + Ay(v) = f + Bv, \\ &y(v) \in L^2(0, T; V), \ \frac{dy(v)}{dt} \in L^2(0, T; H); \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

$$y(0; v) = \xi_0, \ y'(0; v) = \xi_1 \text{ }^{1)}. \tag{5.7}$$

Предположим, что (обозначения аналогичны принятым в § 4 гл. 3)

$$\mathcal{U} = L^2(0, T; E), \ \mathscr{H} = L^2(0, T; F); \tag{5.8}$$

$$Bv = «t \to B(t)\, v(t)», \ B(t) \in \mathscr{L}(E; H). \tag{5.9}$$

Введем

$$\mathbf{y} = \{y_0, y_1\} \in L^2(0, T; \mathfrak{h}). \tag{5.10}$$

Наконец, для $\varphi \in \mathscr{V}$ определим

$$\mathscr{A}\varphi = \{-\varphi_1, A\varphi_0\}; \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Очевидно, что

$$\mathscr{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V}; \mathscr{V}'). \tag{5.12}$$

Заметим также, что $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h}; H \times V')$.

---

1) Мы изменили здесь обозначения (ξ_i вместо y_i, $i = 0, 1$), чтобы не смешивать потом начальное значение с $\mathbf{y} = \{y_0, y_1\}$.

Легко теперь убедиться, что задача (5.6), (5.7) эквивалентна задаче[1])

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{y}(v)}{dt}+\mathscr{A}\mathbf{y}(v)=\mathbf{f}+\mathscr{B}v,\quad \mathbf{y}(v)\in L^2(0,T;\mathfrak{h});\\ &\mathbf{y}(0;v)=\boldsymbol{\xi}=\{\xi_0,\xi_1\}\in\mathfrak{h},\end{aligned}\right\}\tag{5.13}$$

где

$$\mathbf{f}=\{0,f\},\tag{5.14}$$

$$\mathscr{B}v=\{0,Bv\}.\tag{5.15}$$

Именно эту задачу (5.13) мы и будем изучать.

Отметим, что

$$\mathscr{A}+\mathscr{A}^*=0.\tag{5.16}$$

Действительно, если $\varphi\in\mathscr{V}$, $\psi\in\mathscr{V}$, то

$$[\mathscr{A}^*\varphi,\psi]=[\varphi,\mathscr{A}\psi]=a(\varphi_0,-\psi_1)+(\varphi_1,A\psi_0)=$$
$$=a(\varphi_1,\psi_0)+(-A\varphi_0,\psi_1);$$

поэтому $\mathscr{A}^*\varphi=\{\varphi_1,-A\varphi_0\}$, откуда и следует равенство (5.16).

5.2. Совокупность соотношений, характеризующих оптимальное управление

Рассмотрим систему, изучавшуюся в разд. 2.2 (и разд. 3.4). Функция стоимости $J(v)$ задается формулой (2.9), которая в предположениях разд. 5.1 принимает вид

$$J(v)=\int_0^T\|C(t)y(t;v)-z_д\|_F^2dt+\int_0^T(N(t)v(t),v(t))_E\,dt;\tag{5.17}$$

при этом мы считаем, что

$$Nv=«t\to N(t)v(t)»,\quad N(t)\in\mathscr{L}(E;E).$$

Введем оператор $\mathscr{C}(t)$:

$$\mathscr{C}(t)\varphi=C(t)\varphi_0,\quad \mathscr{C}(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{h};F);\tag{5.18}$$

тогда функцию $J(v)$ можно записать в виде

$$J(v)=\int_0^T\|\mathscr{C}(t)\mathbf{y}(v)-z_д\|_F^2dt+\int_0^T(N(t)v(t),v(t))_E\,dt.\tag{5.19}$$

Оптимальное управление $u\in\mathscr{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$\int_0^T(\mathscr{C}(t)\mathbf{y}(t;u)-z_д,\ \mathscr{C}(t)[\mathbf{y}(t;v)-\mathbf{y}(t;u)])_F\,dt+$$
$$+(Nu,v-u)_{\mathscr{U}}\geqslant 0\qquad\forall v\in\mathscr{U}_\partial,\tag{5.20}$$

[1]) $\mathbf{y}(v)=\{y_0(v),y_1(v)\}$.

или

$$\int_0^T [\mathscr{C}^*(t)\Lambda_F[\mathscr{C}(t)\,\mathbf{y}(u)-z_{\text{д}}],\ \mathbf{y}(v)-\mathbf{y}(u)]\,dt+$$
$$+(Nu,\ v-u)_{\mathscr{U}}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathscr{U}_\partial. \quad (5.21)$$

Оператор $\mathscr{C}^*(t)\in\mathscr{L}(F';\ \mathfrak{h})$ задается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}[\mathscr{C}^*(t)f',\ \varphi]=(f',\ \mathscr{C}(t)\,\varphi)=(f',\ C(t)\,\varphi_0)=(C^*(t)f',\ \varphi_0),\\ f'\in F',\ C(t)\in\mathscr{L}(V;\ F),\ C^*(t)\in\mathscr{L}(F',\ V');\end{array}\right\} \quad (5.22)$$

поэтому

$$[\mathscr{C}^*(t)f',\ \varphi]=a\,(A^{-1}C^*(t)\,f',\ \varphi_0),$$

откуда

$$\mathscr{C}^*(t)f'=\{A^{-1}C^*(t)\,f',\,0\},\quad f'\in F'. \quad (5.23)$$

Сопряженное состояние $\mathbf{p}(u)$ определяется естественным образом (по аналогии с гл. 3) как решение задачи

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{d\mathbf{p}(u)}{dt}+\mathscr{A}^*\mathbf{p}(u)=\mathscr{C}^*(t)\,\Lambda_F[\mathscr{C}(t)\,\mathbf{y}(u)-z_{\text{д}}];\\ \mathbf{p}(T;\ u)=0.\end{array}\right\} \quad (5.24)$$

Замечание 5.2. Так как

$$\mathscr{C}^*(t)\,\Lambda_F[\mathscr{C}(t)\,\mathbf{y}(u)-z_{\text{д}}]=$$
$$=\{A^{-1}C^*(t)\,\Lambda_F[C(t)\,y_0(u)-z_{\text{д}}],\ 0\}\in L^2(0,\ T;\ \mathfrak{h}), \quad (5.25)$$

то задача (5.24) имеет единственное решение $\mathbf{p}(u)\in L^2(0,\ T;\ \mathfrak{h})$.

Преобразуем теперь неравенство (5.21). Используя первое из равенств (5.24) и первое из равенств (5.13), получаем

$$\int_0^T [\mathscr{C}^*(t)\,\Lambda_F[\mathscr{C}(t)\,\mathbf{y}(u)-z_{\text{д}}],\ y(v)-y(u)]\,dt=$$
$$=\int_0^T\left[-\frac{d\mathbf{p}(u)}{dt}+\mathscr{A}^*\mathbf{p}(u),\ \mathbf{y}(v)-\mathbf{y}(u)\right]dt=$$
$$=\int_0^T\left[\mathbf{p}(u),\ \left(\frac{d}{dt}+\mathscr{A}\right)(\mathbf{y}(v)-\mathbf{y}(u))\right]dt=$$
$$=\int_0^T[\mathbf{p}(u),\ \mathscr{B}(v-u)]\,dt=\int_0^T(\mathscr{B}^*\mathbf{p}(u),\ v-u)\,dt=$$
$$=\int_0^T(\Lambda_E^{-1}\mathscr{B}^*\mathbf{p}(u),\ v-u)_E\,dt.$$

Следовательно, неравенство (5.21) можно переписать в виде

$$(\Lambda_E^{-1}\mathscr{B}^*\mathbf{p}(u)+Nu,\ v-u)_{\mathscr{U}}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathscr{U}_\partial. \tag{5.26}$$

Однако, как легко проверить, $\mathscr{B}^*\mathbf{p}(u)=\mathscr{B}^*p_1(u)$, а потому неравенство (5.21) окончательно эквивалентно такому:

$$(\Lambda_E^{-1}B^*p_1(u)+Nu,\ v-u)_{\mathscr{U}}\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathscr{U}_\partial. \tag{5.27}$$

Запишем задачу (5.24) более подробно:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_0(u)}{dt}+p_1(u)=A^{-1}C^*(t)\Lambda_F[C(t)y_0(u)-z_д],\\ &-\frac{dp_1(u)}{dt}-Ap_0(u)=0;\\ &p_0(T;u)=0,\qquad p_1(T;u)=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Второе из уравнений (5.28) показывает, что $p_0(u)=-A^{-1}\dfrac{dp_1(u)}{dt}$; поэтому из соотношений (5.28) можно исключить $p_0(u)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p_1(u)}{dt^2}+Ap_1(u)=C^*(t)\Lambda_F[C(t)y_0(u)-z_д];\\ &p_1(T;u)=0,\quad \frac{dp_1(T;u)}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

Таким образом, функция $p_1(u)$ равняется сопряженному состоянию $p(u)$, определенному как решение задачи (2.19) или (3.16) (в зависимости от того, $C(t)\in\mathscr{L}(H;F)$ или $C(t)\in\mathscr{L}(V;F)$).

З а м е ч а н и е 5.3. В примененном сейчас методе нет надобности различать случаи $C(t)\in\mathscr{L}(H;F)$ и $C(t)\in\mathscr{L}(V;F)$ вплоть до соотношений (5.24) и (5.26). Однако такое различие необходимо, если пытаться интерпретировать задачу (5.29). В первом из указанных случаев решение этой задачи «обычное», а во втором следует использовать метод транспонирования (см. § 3).

З а м е ч а н и е 5.4. *Формально* задача (5.13) записывается аналогично задачам, рассмотренным в гл. 3. Но оператор $\mathscr{A}$ *некоэрцитивен* на пространстве $\mathscr{V}'$ — из равенства (5.16) следует, что $[\mathscr{A}\varphi,\varphi]=0$ и, следовательно, результаты гл. 3 *неприменимы*.

Однако можно «аппроксимировать» оператор $\mathscr{A}$ возмущенными операторами, коэрцитивными на пространстве $\mathscr{V}'$, а значит, «аппроксимировать» рассматриваемые гиперболические задачи управления параболическими задачами управления. Этот прием, называемый *параболической регуляризацией*, описывается в следующей главе.

5.3. Расцепление

В случае отсутствия ограничений на управление ($\mathscr{U}_\partial = \mathscr{U}$) неравенство (5.26) эквивалентно соотношению

$$\Lambda_E^{-1}\mathscr{B}^* p(u) + Nu = 0. \tag{5.30}$$

Это соотношение дает возможность исключить управление u из задач (5.13) (при $v = u$) и (5.24):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \mathscr{A}\mathbf{y} + \mathscr{D}_1\mathbf{p} = \mathbf{f},\\ &-\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathscr{A}^*\mathbf{p} - \mathscr{D}_2\mathbf{y} = -\mathscr{C}^*(t)\Lambda_F z_д \equiv \mathbf{g};\\ &\mathbf{y}(0) = \xi, \quad \mathbf{p}(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

где

$$\mathscr{D}_1 = \mathscr{B}N^{-1}\Lambda_E^{-1}\mathscr{B}^*, \qquad \mathscr{D}_2 = \mathscr{C}^*\Lambda_F\mathscr{C}. \tag{5.32}$$

Далее будем рассуждать так же, как в § 4 гл. 3. Пусть $s \in (0, T)$, а $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}$. Рассмотрим задачу (ср. с (4.12), (4.13) гл. 3)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} + \mathscr{A}\varphi + \mathscr{D}_1\psi = \mathbf{f} \quad &&\text{в} \quad (s, T);\\ &-\frac{d\psi}{d} + \mathscr{A}^*\psi - \mathscr{D}_2\varphi = \mathbf{g} \quad &&\text{в} \quad (s, T);\\ &\varphi(s) = \mathbf{h}, \quad \psi(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

Лемма 5.1. *Задача* (5.33) *имеет единственное решение, причем*

$$\varphi, \ \psi \in L^2(s, T; \mathfrak{h}).$$

Доказательство. Действительно, соотношения (5.33) можно рассматривать как задачу, решение которой позволяет найти оптимальное управление в случае, когда состояние системы определяется как решение задачи

$$\frac{d\varphi(v)}{dt} + \mathscr{A}\varphi(v) = \mathbf{f} + \mathscr{B}v, \quad \varphi(s) = \mathbf{h}, \tag{5.34}$$

функция стоимости имеет вид

$$J_s^{\mathrm{h}}(v) = \int_s^T \| \mathscr{C}(t)\,\varphi(v) - z_{\text{д}} \|_F^2\, dt + \int_s^T (N(t)\, v(t),\ v(t))_E\, dt, \tag{5.35}$$

а управление v пробегает пространство

$$\mathscr{U}(s,\ T) = L^2(s,\ T;\ E).$$

Рассуждая, как и при доказательстве леммы 4.2 гл. 3, можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{h} \to \{\varphi,\ \psi\} \text{ — непрерывное аффинное} \\ &\text{отображение } \mathfrak{h} \to L^2(s,\ T;\ \mathfrak{h}) \times L^2(s,\ T;\ \mathfrak{h}). \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Так как, согласно (5.33), $d\psi/dt \in L^2(s,\ T;\ H \times V')$, то выражение $\psi(s)$ *имеет смысл*. Если перейти к «скалярной» записи для «компонент» ψ_0, ψ_1, то получим для функции ψ_1 задачу, аналогичную задаче (5.29).

Предположим, что [1])

$$C(t) \in \mathscr{L}(H;\ F); \tag{5.37}$$

тогда ψ_1 — непрерывная функция $[s,\ T] \to V$; ψ_1' — непрерывная функция $[s,\ T] \to H$; $\psi_0 = -A^{-1}\psi_1'$ — непрерывная функция $[s,\ T] \to D(A)$.

Лемма 5.2. *Если выполнено предположение* (5.37), *то*

$$\mathbf{h} \to \psi(s) \tag{5.38}$$

— аффинное непрерывное отображение $\mathfrak{h} \to D(A) \times V$ [2]).

Следствие 5.1. *Если выполнено предположение* (5.37), *то*

$$\psi(s) = \mathscr{P}(s)\,\mathbf{h} + \mathbf{r}(s), \tag{5.39}$$

где $\mathscr{P}(s) \in \mathscr{L}(\mathfrak{h};\ D(A) \times V)$, $\mathbf{r}(s) \in \mathfrak{h}$.

Как и в лемме 4.3 гл. 3, отсюда следует «основное тождество»

$$\mathbf{p}(t) = \mathscr{P}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{r}(t) \qquad \forall t \in (0,\ T), \tag{5.40}$$

где оператор $\mathscr{P}(t)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + \mathscr{A}\beta + \mathscr{D}_1\gamma = 0 && \text{в } (s,\ T); \\ &-\frac{d\gamma}{dt} + \mathscr{A}^*\gamma - \mathscr{D}_2\beta = 0 && \text{в } (s,\ T); \\ &\beta(s) = \mathbf{h},\ \gamma(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

[1]) Если $C(t) \in \mathscr{L}(V;\ F)$, то нижеследующие выкладки *формальны*.

[2]) Если $C(t) \in \mathscr{L}(V;\ F)$, то можно показать, что (5.38) — непрерывное отображение $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$.

а именно
$$\mathcal{P}(s)\,\mathbf{h}=\boldsymbol{\gamma}(s), \tag{5.42}$$

а функция $\mathbf{r}(t)$ определяется через решение задачи
$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{A}\eta+\mathcal{D}_1\xi=\mathfrak{f} && \text{в } (s,T);\\ &-\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{A}^*\xi-\mathcal{D}_2\eta=\mathfrak{g} && \text{в } (s,T);\\ &\eta(s)=0,\ \ \xi(T)=0, \end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

а именно
$$\mathbf{r}(s)=\xi(s). \tag{5.44}$$

Лемма 5.3. *Справедливо равенство*
$$\mathcal{P}^*(s)=\mathcal{P}(s), \tag{5.45}$$

где $\mathcal{P}^*(s)$ — *оператор, сопряженный с оператором* $\mathcal{P}(s)$ *в пространстве* $\mathcal{L}(\mathfrak{h};\mathfrak{h})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{h}\in\mathfrak{h}$, а $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ — соответствующее решение задачи (5.41). Тогда
$$0=\int_s^T\left[-\frac{d\gamma}{dt}+\mathcal{A}^*\gamma-\mathcal{D}_2\beta,\ \bar{\beta}\right]dt=$$
$$=[\gamma(s),\ \bar{\beta}(s)]-\int_s^T[\mathcal{D}_2\bar{\beta},\ \beta]\,dt+\int_s^T\left[\gamma,\ \frac{d\bar{\beta}}{dt}+\mathcal{A}\bar{\beta}\right]dt$$

откуда
$$[\mathcal{P}(s)\,\mathbf{h},\ \bar{\mathbf{h}}]=\int_s^T([\mathcal{D}_1\gamma,\ \bar{\gamma}]+[\mathcal{D}_2\beta,\ \bar{\beta}]\,dt. \tag{5.46}$$

Правая часть равенства (5.46) симметрична относительно $\mathbf{h}$ и $\bar{\mathbf{h}}$, а это и доказывает формулу (5.45).

Лемма 5.4. *Существует такая константа* c_1, *что*
$$[\mathcal{P}(s)\mathbf{h}]\leqslant c_1[\mathbf{h}]\qquad\forall\mathbf{h}\in\mathfrak{h},\ \ \forall s\in[0,\ T], \tag{5.47}$$

где $[\mathbf{h}]=[\mathbf{h},\ \mathbf{h}]^{1/2}$.

Доказательство. Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение задачи (5.34) при $f=0$, а функция стоимости имеет вид (5.35) при $z_д=0$, т. е.
$$\mathring{J}_s^{\mathbf{h}}(v)=\int_s^T\|\mathscr{C}(t)\,\varphi(v)\|_F^2\,dt+\int_s^T(N(t)\,v(t),\ v(t))_E\,dt. \tag{5.48}$$

Если u — соответствующее оптимальное управление, то

$$\overset{\circ}{J}{}_s^{\mathbf{h}}(u) \leqslant \overset{\circ}{J}{}_s^{\mathbf{h}}(0) \leqslant c_1 [\mathbf{h}]^2.$$

Кроме того, для оптимального управления u удовлетворяются соотношения (5.41) и

$$\Lambda_E^{-1}\mathscr{B}^*\boldsymbol{\gamma} + Nu = 0. \tag{5.49}$$

Но тогда легко убедиться, что

$$\overset{\circ}{J}{}_s^{\mathbf{h}}(u) = \int_s^T [\mathscr{D}_2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}]\, dt + \int_s^T (\Lambda_E Nu, u)\, dt =$$

$$= \int_s^T \left[-\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} + \mathscr{A}^*\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \right] dt + \int_s^T (\Lambda_E Nu, u)\, dt = [\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\beta}(s)].$$

Таким образом,

$$\overset{\circ}{J}{}_s^{\mathbf{h}}(u) = [\mathscr{P}(s)\,\mathbf{h}, \mathbf{h}], \tag{5.50}$$

откуда, применяя оценку $[\mathscr{P}(s)\,\mathbf{h}, \mathbf{h}] \leqslant c_1 [\mathbf{h}]^2$, получаем неравенство (5.47).

Кроме того, аналогично лемме 4.4 гл. 3 можно показать, что функция $t \to [\mathscr{P}(t)\,\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}}]$ непрерывна на отрезке $[0, T]$, каковы бы ни были элементы $\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}} \in \mathfrak{h}$.

5.4. Интегро-дифференциальное уравнение Риккати

Исходя из тождества (5.40) [1]), мы проведем теперь некоторые формальные преобразования. Подставим во второе из уравнений (5.31) выражение для $\mathbf{p}(t)$ из тождества (5.40):

$$-\mathscr{P}'(t)\,\mathbf{y}(t) - \mathscr{P}(t)\,\mathbf{y}'(t) - \mathbf{r}'(t) +$$
$$+ \mathscr{A}^*[\mathscr{P}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{r}(t)] - \mathscr{D}_2\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}. \tag{5.51}$$

Используя затем первое из уравнений (5.31), получим

$$-\mathscr{P}'\mathbf{y} - \mathscr{P}[-\mathscr{A}\mathbf{y} - \mathscr{D}_1(\mathscr{P}\mathbf{y} + \mathbf{r}) + \mathbf{f}] - \mathbf{r}' +$$
$$+ \mathscr{A}^*(\mathscr{P}\mathbf{y} + \mathbf{r}) - \mathscr{D}_2\mathbf{y} = \mathbf{g}. \tag{5.52}$$

Так как (5.52) является тождеством относительно $\mathbf{y}(t)$ (t — произвольное фиксированное число), то заключаем, что должны выполняться два соотношения

$$-\mathscr{P}'(t) + \mathscr{P}(t)\mathscr{A} + \mathscr{A}^*\mathscr{P}(t) + \mathscr{P}(t)\mathscr{D}_1\mathscr{P}(t) = \mathscr{D}_2; \tag{5.53}$$

$$-\mathbf{r}'(t) + \mathscr{A}^*\mathbf{r}(t) + \mathscr{P}(t)\mathscr{D}_1\mathbf{r}(t) = \mathscr{P}(t)\,\mathbf{f} + \mathbf{g}, \tag{5.54}$$

---

[1]) Как и в гл. 3, мы специально подчеркнем то обстоятельство, что существование оператора $\mathscr{P}(s)$ и функции $\mathbf{r}(s)$ уже установлено.

к которым следует присоединить условия (соответствующие условию $\mathbf{p}(T)=0$)

$$\mathcal{P}(T)=0, \tag{5.55}$$

$$\mathbf{r}(T)=0. \tag{5.56}$$

Замечание 5.5. Учитывая равенство (5.16), уравнение (5.53) можно записать еще в виде

$$-\mathcal{P}'(t)+\mathcal{P}(t)\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{P}(t)+\mathcal{P}(t)\mathcal{D}_1\mathcal{P}(t)=\mathcal{D}_2. \tag{5.57}$$

Формально задача (5.53), (5.55) идентична задаче для интегро-дифференциального уравнения Риккати (4.55), (4.57) гл. 3; однако в уравнении (4.55) гл. 3 операторы A и A^* коэрцитивны, тогда как в уравнении (5.53) $\mathcal{A}+\mathcal{A}^*=0$.

Теперь наша цель заключается в следующем:

(i) обосновать проведенные выше формальные преобразования;

(ii) изучить более подробно уравнение (5.53) и привести примеры.

(i) Обоснование этих преобразований возможно провести двумя способами.

Во-первых, можно следовать методу § 4 гл. 3, т. е. рассмотреть сначала конечномерную задачу, а затем перейти к пределу (как в разд. 4.5 гл. 3). Технические детали такого доказательства громоздки, но существенно не отличаются от изложенного в § 4 гл. 3.

Во-вторых, можно использовать параболическую регуляризацию; по этому поводу см. § 2 гл. 5.

(ii) Представим оператор $\mathcal{P}(s)$ в виде

$$\mathcal{P}(s)=\begin{pmatrix} P_0(s) & P_1(s)\\ P_2(s) & P_3(s)\end{pmatrix}, \tag{5.58}$$

где в силу леммы 5.2 и следствия 5.1

$$\left.\begin{matrix} P_0(s)\in\mathcal{L}(V;\,D(A)); & P_1(s)\in\mathcal{L}(H;\,D(A));\\ P_2(s)\in\mathcal{L}(V;\,V); & P_3(s)\in\mathcal{L}(H;\,V)^{1)}.\end{matrix}\right\} \tag{5.59}$$

Лемма 5.5. *Операторы* $P_i(s)$, $i=0, 1, 2, 3$, *удовлетворяют соотношениям*

$$P_0^*(s)A=AP_0(s); \tag{5.60}$$

$$P_2(s)=P_1^*(s)A; \tag{5.61}$$

$$P_3^*(s)=P_3(s), \tag{5.62}$$

где сопряженные операторы берутся в смысле двойственности пространства H (соответственно V) к себе (соответственно к V').

[1]) Если $C(t)\in\mathcal{L}(V;\,F)$, то $P_0(s)\in\mathcal{L}(V;\,V)$; $P_1(s)\in\mathcal{L}(H;\,V)$; $P_2(s)\in\mathcal{L}(V;\,H)$; $P_3(s)\in\mathcal{L}(H;\,H)$.

Доказательство. Действительно, используя равенство (5.45), получаем

$$a(P_0(s)h_0+P_1(s)h_1, \bar h_0)+(P_2(s)h_0+P_3(s)h_1, \bar h_1)=$$
$$=a(h_0, P_0(s)\bar h_0+P_1(s)\bar h_1)+(h_1, P_2(s)\bar h_0+P_3(s)\bar h_1),$$
$$\forall \mathbf{h}=\{h_0, h_1\},\ \bar{\mathbf{h}}=\{\bar h_0, \bar h_1\}\in \mathfrak{h},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Заметим, что

$$\mathscr{D}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & BN^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D_1\end{pmatrix};$$

$$\mathscr{D}_2=\begin{pmatrix}A^{-1}C^*\Lambda_F C & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1}D_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

легко убедиться, что уравнение (5.53) эквивалентно уравнениям

$$-P_0'+P_1A+P_2+P_1D_1P_2=A^{-1}D_2, \tag{5.63}$$

$$-P_1^1-P_0+P_3+P_1D_1P_3=0, \tag{5.64}$$

$$-P_2'+P_3A-AP_0+P_3D_1P_2=0, \tag{5.65}$$

$$-P_3'-P_2-AP_1+P_3D_1P_3=0 \tag{5.66}$$

с условиями $P_i(T)=0$, $i=0, 1, 2, 3$. Но уравнение (5.65) — следствие уравнений (5.60) — (5.62) и (5.64). В самом деле, переходя в уравнении (5.64) к сопряженным операторам, получаем

$$-(P_1^*)'-P_0^*+P_3^*+P_3^*D_1P_1^*=0,$$

а умножая затем справа на A, находим

$$-(P_1^*A)'-P_0^*A+P_3^*A+P_3^*D_1P_1^*A=0;$$

отсюда, принимая во внимание равенства (5.60) — (5.62), получаем соотношение (5.65).

Таким образом, справедливо

Предложение 5.1. *Пусть операторы P_0, P_1, P_3 удовлетворяют соотношениям* (5.60), (5.62), (5.63) (*где P_2 заменяется на P_1^*A*) *и условиям $P_i(T)=0$, $i=0, 1, 3$. Тогда оператор $\mathscr{P}(t)$ определяется формулой*

$$\mathscr{P}(t)=\begin{pmatrix}P_0(t) & P_1(t)\\ P_1^*(t)A & P_3(t)\end{pmatrix}.$$

Замечание 5.6. Операторы $P_i(t)$ удовлетворяют *системе интегро-дифференциальных уравнений Риккати*. Уравнение (5.53) (или (5.57)) более «симметрично», чем совокупность упомянутых в предложении 5.1 уравнений; поэтому для расцепления удобнее записывать уравнения в виде системы первого порядка по t.

Замечание 5.7. В примерах каждый из операторов $P_i(t)$ представляется своим *ядром* — распределением $P_i(x, \xi, t)$; см. § 5 гл. 3. Таким образом получаются классы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными Риккати, прямое исследование которых, насколько нам известно, не проводилось.

5.5. Расцепление в другой задаче управления

Рассмотрим теперь задачу, изучавшуюся в разд. 2.3; функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_0^T \| C(t)\, y'(t; v) - z_д \|_F^2 \, dt + \int_0^T (N(t)\, v(t), v(t))_E \, dt. \tag{5.67}$$

Введем оператор $\mathscr{C}(t)$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{C}(t)\,\varphi = C(t)\,\varphi_1, \quad \mathscr{C}(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{h}; F);\\ &\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1\} \in \mathfrak{h}, \quad C(t) \in \mathscr{L}(H; F). \end{aligned}\right\} \tag{5.68}$$

Тогда формулу (5.67) можно записать в виде

$$J(v) = \int_0^T \| \mathscr{C}(t)\, \mathbf{y}(v) - z_д \|_F^2 dt + \int_0^T (N(t)\, v(t), v(t))_E \, dt. \tag{5.69}$$

Оператор $\mathscr{C}^*(t)$ задается соотношением

$$\mathscr{C}^*(t) f' = \{0, C^*(t) f'\}, \quad f' \in F'. \tag{5.70}$$

Сопряженное состояние $\mathbf{p}(u)$ определяется как решение задачи [1])

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\mathbf{p}(u)}{dt} + \mathscr{A}^*\mathbf{p}(u) = \mathscr{C}^*(t)\,\Lambda_F[\mathscr{C}(t)\,\mathbf{y}(u) - z_д];\\ &\mathbf{p}(T; u) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.71}$$

Оптимальное управление $u \in \mathscr{U}_\partial$ характеризуется тем, что (см. (5.26))

$$(\Lambda_E^{-1}\mathscr{B}^*\mathbf{p}(u) + Nu, \ v - u)_{\mathscr{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathscr{U}_\partial. \tag{5.72}$$

В случае отсутствия ограничений на управление это неравенство эквивалентно соотношению

$$\Lambda_E^{-1}\mathscr{B}^*\mathbf{p}(u) + Nu = 0. \tag{5.73}$$

[1]) Запись такая же, как в задаче (5.24), но оператор $\mathscr{C}(t)$ — другой.

Если перейти к «скалярной» записи задачи (5.71) для «компонент» p_0, p_1, то получим

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dp_0(u)}{dt}+p_1(u)=0,\\ &-\frac{dp_1(u)}{dt}-Ap_0(u)=C^*(t)\Lambda_F[C(t)y_1(u)-z_д];\\ &p_0(T;u)=0,\quad p_1(T;u)=0,\end{aligned}\right\} \tag{5.74}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2p_0(u)}{dt^2}+Ap_0(u)=-C^*(t)\Lambda_F[C(t)y_1(u)-z_д];\\ &p_0(T;u)=0,\quad \frac{dp_0(T;u)}{dt}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5.75}$$

Сравнивая эту задачу с задачей (2.27), (2.28) (там рассматривался случай, когда оператор A зависит от t), мы видим, что $p_0 = -p$.

Замечая, что неравенство (5.72) можно записать в виде

$$(\Lambda_E^{-1}B^*p_1+Nu,\ v-u)_{\mathcal{U}}\geqslant 0\qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial, \tag{5.76}$$

легко убедиться, что оно эквивалентно неравенству (2.33).

З а м е ч а н и е 5.8. Чтобы получить соотношение (5.72), нужно воспользоваться интегрированием по частям и формулой Грина, а это приводит к таким же техническим трудностям, как и в разд. 2.3.

Расцепление осуществляется точно так же, как в разд. 5.3 и 5.4. Снова имеет место тождество

$$\mathbf{p}(t)=\mathcal{P}(t)\,\mathbf{y}(t)+\mathbf{r}(t), \tag{5.77}$$

которое приводит к уравнениям (5.53), (5.54) (с новыми операторами $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$). Таким образом, опять получается *система интегро-дифференциальных уравнений Риккати.*

З а м е ч а н и е 5.9. Естественно, если оператор $\mathcal{P}(t)$ и функция $\mathbf{r}(t)$ известны, то можно осуществить *синтез* оптимального управления (см. замечание 4.3 гл. 3)

$$u(t)=-N^{-1}(t)\Lambda_E^{-1}\mathcal{B}^*[\mathcal{P}(t)\,\mathbf{y}(t)+\mathbf{r}(t)]. \tag{5.78}$$

Справедливы также замечания, аналогичные сделанным в разд. 4.7 и 4.8 гл. 3.

§ 6. Стартовое управление

6.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение задачи

$$y''(v) + A(t)\,y(v) = f \text{ в } (0, T); \tag{6.1}$$

$$y(0; v) = 0, \quad y'(0; v) = v, \tag{6.2}$$

где $f \in L^2(0, T; H)$, а v — данный элемент пространства H. Следовательно,

$$\mathcal{U} = H. \tag{6.3}$$

Пусть, далее, функция стоимости имеет вид [1])

$$J(v) = \| y(T; v) - z_{д}^0 \|^2 + | y'(T; v) - z_{д}^1 |^2, \tag{6.4}$$

где $z_{д}^0 \in V$, $z_{д}^1 \in H$.

Наконец, пусть множество допустимых управлений

$$\mathcal{U}_\partial \text{ — ограниченное замкнутое подмножество в } \mathcal{U}. \tag{6.5}$$

Изучается задача об отыскании $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$.

З а м е ч а н и е 6.1. Функция стоимости (6.4) не содержит слагаемого $(Nv, v)_{\mathcal{U}}$. Если $N \geqslant \nu I$, $\nu > 0$, то дальнейшее справедливо и при наличии этого члена, однако случай (6.4) наиболее интересен.

6.2. Коэрцитивная задача

Т е о р е м а 6.1. *Пусть справедливы предположения* (1.4)—(1.6), *а функция стоимости имеет вид* (6.4). *Тогда существует единственное оптимальное управление.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим однородную квадратичную часть (обозначим ее через $\pi(v, v)$) функции $J(v)$:

$$\pi(v, v) = \| y(T; v) - y(T; 0) \|^2 + | y'(T; v) - y'(T; 0) |^2.$$

Положим $\psi = y(t; v) - y(t; 0)$; тогда

$$\psi'' + A(t)\,\psi = 0; \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = v \tag{6.6}$$

и

$$\pi(v, v) = \| \psi(T) \|^2 + | \psi'(T) |^2. \tag{6.7}$$

---

[1]) Напомним, что через $\|\quad\|$ (соответственно через $|\quad|$) обозначена норма в пространстве V (соответственно в H).

Легко убедиться, что

$$\pi(v, v) \geqslant c\,|v|^2, \quad c > 0, \quad \forall v \in H. \tag{6.8}$$

В самом деле, рассмотрим задачу с обращенным временем

$$\psi'' + A(t)\psi = 0;$$

$$\psi(T) \text{ дано в } V, \quad \psi'(T) \text{ дано в } H.$$

Эта задача *корректна* и, в частности, $\{\psi(t), \psi'(T)\} \to \psi'(0)$ — непрерывное отображение $V \times H \to H$; следовательно,

$$|\psi'(0)|^2 \leqslant c_1 (\|\psi(T)\|^2 + |\psi'(T)|^2),$$

что равносильно неравенству (6.8).

Замечание 6.2. Если функция стоимости равна

$$J(v) = |y(T; v) - z_д^0|^2 + |y'(T; v) - z_д^1|^2,$$

то аналог теоремы 6.1 *не имеет места.*

Существование оптимального управления (вообще говоря, не единственного) обеспечено, если *множество* $\mathcal{U}_\partial$ *ограничено в пространстве* H.

Это означает следующее:

(i) если ограничения на управление v отсутствуют ($\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$) или если множество $\mathcal{U}_\partial$ не ограничено, то нужно наблюдать $y(T; v)$ в пространстве V и $y'(T; v)$ в пространстве H;

(ii) если множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено, то *может* оказаться достаточным наблюдать $y(T; v)$ и $y'(T; v)$ в пространстве H — или даже только $y(T; v)$ в пространстве H.

Замечание 6.3. Результат теоремы 6.1 справедлив для *обратимых по времени систем*, т. е. систем, для которых в уравнениях, описывающих состояние системы, можно обратить время. В случаях, рассмотренных в гл. 3, аналога этого утверждения нет.

6.3. Совокупность соотношений, характеризующих оптимальное управление

Пусть функция стоимости имеет вид (6.4). Оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$(y(T; u) - z_д^0, \quad y(T; v) - y(T; u))_V +$$
$$+ (y'(T; u) - z_д^1, \quad y'(T; v) - y'(T, u)) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{6.9}$$

Определим сопряженное состояние $p(u)$, используя аналог теоремы 3.1 (для обращенного времени): *существует такая един-*

ственная функция $p(u) \in L^2(0, T; H)$, *что*

$$\int_0^T (p(u), \varphi'' + A\varphi)\,dt = (y'(T; u) - z_д^1, \varphi'(T)) + (y(T; u) - z_д^0, \varphi(T))_V \quad (6.10)$$

для любой функции φ, *для которой* $\varphi \in L^2(0, T; V)$, $\varphi' \in L^2(0, T; H)$, $\varphi'' + A\varphi \in L^2(0, T; H)$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$.

Можно показать, кроме того, что $p(u)$ — непрерывная функция $[0, T] \to H$ и имеет место формула Грина (см. Байокки [1], [2])

$$\int_0^T (p(u), \psi'' + A\psi)\,dt = (y'(T; u) - z_д^1, \psi'(T)) + \\ + (y(T; u) - z_д^0, \psi(T))_V - (p(0; u), \psi'(0)), \quad (6.11)$$

где функция ψ обладает теми же свойствами, что и функция φ, но при этом $\psi'(0) \neq 0$.

Положим в равенстве (6.11) $\psi = y(v) - y(u)$; тогда

$$(y(T; u) - z_д^0, y(T; v) - y(T; u))_V + \\ + (y'(T; u) - z_д^1, y'(T; v) - y'(T; u)) = (p(0; u), v - u),$$

и, следовательно, неравенство (6.9) эквивалентно неравенству

$$(p(0; u), v - u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \quad (6.12)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Тогда оптимальное управление* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *характеризуется соотношениями*

$$\left.\begin{aligned} & y''(u) + A(t)\,y(u) = f; \\ & y(0; u) = 0, \quad y'(0; u) = u, \end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

(6.10) *и* (6.12).

Замечание 6.4. Пусть Λ — канонический изоморфизм $V \to V'$. Тогда соотношению (6.10) можно дать следующую интерпретацию:

$$\left.\begin{aligned} & p''(u) + A(t)\,p(u) = 0; \\ & p(T; u) = y'(T; u) - z_д^1, \; p'(T; u) = -\Lambda[y(T; u) - z_д^0]. \end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

Замечание 6.5. Из соотношений (6.12) — (6.14) можно исключить u; в результате мы придем к нелинейной задаче типа односторонних граничных задач:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + A(t)\,y = f,\ p'' + A(t)\,p = 0 \text{ в } (0,\,T);\\ y(0) = 0,\ p(T) = y'(T) - z_{д}^{1},\ p'(T) = -\Lambda\,[y(T) - z_{д}^{0}],\\ (p(0),\ v - y'(0)) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{\partial}. \end{array}\right\} \tag{6.15}$$

Пример 6.1. Пусть A — оператор второго порядка, определенный, как и в разд. 1.5. Пусть, далее,

$$V = H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{U}_{\partial} = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Omega\}.$$

Тогда задача (6.15) принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + A\left(x,\ t,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\right) y = f,\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + A\left(x,\ t,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\right) p = 0 \text{ в } Q;\\ y(x,\,0) = 0,\ p(x,\,T) = \dfrac{\partial y(x,\,T)}{\partial t} - z_{д}^{1}(x) \qquad \text{в } \Omega;\\ \dfrac{\partial p(x,\,T)}{\partial t} = -(-\Delta_x + I)\,[y(x,\,T) - z_{д}^{0}(x)]\,^{1)} \qquad \text{в } \Omega;\\ y = 0,\ p = 0 \text{ на } \Sigma;\\ \dfrac{\partial y(x,\,0)}{\partial t} \geqslant 0,\ p(x,\,0) \geqslant 0,\ p(x,\,0)\,\dfrac{\partial y(x,\,0)}{\partial t} = 0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{почти всюду в } \Omega. \end{array}\right\} \tag{6.16}$$

Пример 6.2. Если в предыдущем примере $V = H^1(\Omega)$, то граничные условия

$$«y = 0, \quad p = 0 \text{ на } \Sigma»$$

в задаче (6.16) должны быть заменены следующими:

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{6.17}$$

Замечание 6.6. Все сказанное выше верно и в случае, когда оператор A не обязательно симметричен, а симметрична только его главная часть второго порядка. Тогда достаточно в уравнениях, определяющих сопряженное состояние p, заменить A на A^*.

---

[1]) Предполагается, что

$$(\varphi,\ \psi)_V = (\varphi,\ \psi)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\varphi\psi + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) dx;$$

поэтому $\Lambda = -\Delta_x + I$.

Замечание 6.7. Если состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} y''(v)+A(t)\,y(v)=f;\\ y(0;\,v)=v,\quad y'(0;\,v)=0,\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

то получаются аналогичные результаты.

Если $\mathcal{U}=V$, то решение задачи (6.18) понимается в смысле § 1. Если $\mathcal{U}=H$, то решение задачи (6.18) понимается в смысле § 3, т. е. как такая функция $y(v)\in L^2(0,\,T;\,H)$, что

$$\int_0^T (y(v),\,\varphi''+A(t)\,\varphi)\,dt=\int_0^T (f,\,\varphi)\,dt+(v,\,\varphi'(T)) \tag{6.19}$$

для любой функции φ, для которой $\varphi\in L^2(0,\,T;\,V)$, $\varphi'\in L^2(0,\,T;\,H)$, $\varphi''+A(t)\,\varphi\in L^2(0,\,T;\,H)$; $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$. В этом случае $y(T;\,v)\in H$, $y'(T;\,v)\in V'$ и можно получить результаты, аналогичные предыдущим, если

$$J(v)=|\,y(T;\,v)-z_д^0\,|^2+\|\,y'(T;\,v)-z_д^1\,\|_{V'}^2. \tag{6.20}$$

§ 7. Граничное управление (I)

7.1. Постановка задачи

Будем рассматривать теперь случаи, когда *управление является граничным*.

Спачала изучим систему, состояние которой определяется как решение задачи [1])

$$\frac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2}+Ay(v)=f \quad \text{в} \quad Q; \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}=v \quad \text{на} \quad \Sigma; \tag{7.2}$$

$$y(x,\,0)=y_0(x),\quad \frac{\partial y(x,\,0)}{\partial t}=y_1(x),\quad x\in\Omega. \tag{7.3}$$

В следующем параграфе мы исследуем случай, когда условие (7.2) (условие Неймана) заменено условием Дирихле:

$$y(v)=v \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{7.2$'$}$$

[1]) A — оператор второго порядка, определенный, как и в разд. 1.5.

Нужно, конечно, сначала определить, как понимать решение задачи (7.1) — (7.3), что мы сейчас и сделаем, предполагая, что

$$v \in \mathcal{U} = L^2(\Sigma). \tag{7.4}$$

Замечание 7.1. Можно избежать трудности формулировки разд. 7.2, если выбирать управление *v более регулярным*, но тогда мы столкнемся с другими трудностями — при выписывании условия оптимальности (см. разд. 9.1 гл. 3). Мы ограничимся лишь рассмотрением случая, когда выполняется соотношение (7.4).

7.2. Определение состояния

Лемма 7.1. *Существует такой единственный элемент $y(v) \in L^2(Q)$, что*

$$\int_Q y(v)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + A\varphi\right) dx\,dt = \int_Q f\varphi\,dx\,dt -$$

$$- \int_\Omega y_0(x)\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}\,dx + \int_\Omega y_1(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int_\Sigma v\varphi\,d\Sigma \tag{7.5}$$

для всех функций $\varphi \in X$, где

$$X = \Big\{\varphi \mid \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),\ \varphi' \in L^2(Q),\ \varphi'' + A\varphi \in L^2(Q);$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A}\right|_\Sigma = 0;\ \varphi(x, T) = 0,\ \varphi'(x, T) = 0,\ x \in \Omega\Big\}. \tag{7.6}$$

Доказательство. Действительно, если $v \in L^2(\Sigma)$, то линейная форма $\varphi \to \int_\Sigma v\varphi\,d\Sigma$ *непрерывна* на пространстве X [1]). Поэтому правая часть равенства (7.5) непрерывна на пространстве X, а отсюда в силу утверждения (3.2) следует справедливость леммы.

Заметим, кроме того, что

$$\left.\begin{array}{l} v \to y(v) \text{ — аффинное непрерывное} \\ \text{отображение } L^2(\Sigma) \to L^2(Q). \end{array}\right\} \tag{7.7}$$

Замечание 7.2. Формально применяя формулу Грина, можно убедиться, что решение $y(v)$ уравнения (7.5) удовлетворяет соотношениям (7.1) — (7.3).

Таким образом, теперь мы будем рассматривать систему, состояние которой определяется как решение уравнения (7.5).

[1]) Это верно, даже если $v \in H^{-1/2}(\Sigma)$.

Замечание 7.3. *Разложение по собственным функциям* [1]. Пусть оператор $A(t) = A$ не зависит от t; пусть, кроме того, $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — собственные функции оператора A для задачи Неймана:

$$A w_j = \lambda_j w_j, \quad \left.\frac{\partial w_j}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma = 0, \quad j = 1, 2, \ldots; \ (w_j, w_k) = \delta_j^k. \tag{7.9}$$

Тогда решение $y(v) = y$ уравнения (7.5) можно однозначно представить в виде

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t)\, w_j; \tag{7.10}$$

$$y_j \in L^2(0, T), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T |y_j(t)|^2\, dt < \infty. \tag{7.11}$$

Для определения коэффициентов $y_j(t)$ положим в равенстве (7.5)

$$\varphi(x, t) = \psi(t)\, w_j(x), \ \psi \in C^2([0, T]), \ \psi(T) = 0, \ \psi'(T) = 0. \tag{7.12}$$

Тогда

$$\int_0^T (y_j\psi'' + \lambda_j y_j \psi)\, dt = \int_0^T f_j \psi\, dt - y_{0j}\psi'(0) + y_{1j}\psi(0) + \int_0^T v_j\psi\, dt \quad \forall \psi, \tag{7.13}$$

где использованы обозначения

$$\left.\begin{aligned} f_j(t) &= \int_\Omega f(x, t)\, w_j(x)\, dx, & v_j(t) &= \int_\Gamma v(x, t)\, w_j(x)\, d\Gamma_x, \\ y_{0j} &= \int_\Omega y_0(x)\, w_j(x)\, dx, & y_{1j} &= \int_\Omega y_1(x)\, w_j(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

Следовательно,

$$y_j'' + \lambda_j y_j = f_j + v_j, \quad y_j(0) = y_{0j}, \quad y_j'(0) = y_{1j}. \tag{7.15}$$

7.3. Распределенное наблюдение

Предположим сначала, что мы наблюдаем функцию $y(v)$ в цилиндре Q, а функция стоимости имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &J(v) = \int_Q [y(v) - z_д]^2\, dx\, dt + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)}; \\ &N \in \mathscr{L}(L^2(\Sigma); L^2(\Sigma)), \ N \geqslant \nu I, \ \nu > 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

Если $\mathscr{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathscr{U} = L^2(\Sigma)$, то существует единственное оптимальное управление $u \in \mathscr{U}_\partial$, которое характеризуется тем, что

$$\int_Q [y(u) - z_д][y(v) - y(u)]\, dx\, dt + (Nu, v - u)_{L^2(\Sigma)} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathscr{U}_\partial. \tag{7.17}$$

[1] Ср. с замечаниями 8.7 и 9.3 гл. 3.

Определим сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2}+Ap(u)=y(u)-z_{\text{д}} \text{ в } Q;\\&\left.\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A}\right|_{\Sigma}=0;\ p(x, T; u)=0,\ \frac{\partial p(x, T; u)}{\partial t}=0,\ x\in\Omega,\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

которая имеет единственное решение.

Для того чтобы преобразовать неравенство (7.17), заметим, что если из равенства (7.5) вычесть это же равенство, записанное для $v=u$, то получим

$$\int_Q [y(v)-y(u)]\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+A\varphi\right)dx\,dt=\int_\Sigma (v-u)\,\varphi\,d\Sigma \qquad \forall\varphi\in X; \tag{7.19}$$

положив здесь $\varphi=p(u)$, будем иметь

$$\int_Q [y(v)-y(u)][y(u)-z_{\text{д}}]\,dx\,dt=\int_\Sigma (v-u)\,p(u)\,d\Sigma. \tag{7.20}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7.1. *Пусть состояние системы определяется как решение уравнения* (7.5), *а функция стоимости имеет вид* (7.16). *Тогда для оптимального управления* $u\in\mathcal{U}_\partial$ *удовлетворяются соотношения* (7.5) (*при* $v=u$), (7.18) *и*

$$\int_\Sigma [p(u)+Nu](v-u)\,d\Sigma\geqslant 0 \qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial. \tag{7.21}$$

Пример 7.1. Пусть $\mathcal{U}_\partial=\mathcal{U}$. Тогда соотношение (7.21) приводится к виду

$$p(u)+Nu=0. \tag{7.22}$$

Это равенство позволяет исключить u из соотношений (7.5) (при $v=u$) и (7.18), т. е. прийти к задаче

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ay=f,\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+Ap=y-z_{\text{д}} \text{ в } Q;\\&\frac{\partial y}{\partial \nu_A}+N^{-1}p=0,\ \frac{\partial p}{\partial \nu_A}=0 \text{ на } \Sigma;\\&y(x, 0)=y_0(x),\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t}=y_1(x) \text{ на } \Omega;\\&p(x, T)=0,\qquad \frac{\partial p(x, T)}{\partial t}=0 \text{ на } \Omega.\end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

Пример 7.2. Пусть $\mathcal{U}_{\partial} = \{v \mid v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$. Оптимальное управление получается из решения односторонней граничной задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay = f, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + Ap = y - z_{\text{д}} \text{ в } Q;\\
&\frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0, \quad p + N\frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0 \text{ на } \Sigma;\\
&\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\left(p + N\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_A} = 0 \text{ на } \Sigma;\\
&y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y_1(x) \text{ на } \Omega;\\
&p(x, T) = 0, \quad \frac{\partial p(x, T)}{\partial t} = 0 \text{ на } \Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

а именно

$$u = \left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_{\Sigma}. \tag{7.25}$$

7.4. Граничное наблюдение

Пусть теперь мы наблюдаем функцию $y(v)$ на поверхности Σ. Допустим, что справедлива

Лемма 7.2. *Решение уравнения* (7.5) *таково, что* $y(v)|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$ *и* $v \to y(v)|_{\Sigma}$ — *аффинное непрерывное отображение пространства* $L^2(\Sigma)$ *в себя.*

Замечание 7.4. Идея доказательства леммы 7.2 заключается в следующем.

Мы отметили (см. сноску на стр. 328), что если $v \in H^{-1/2}(\Sigma)$, то $y(v) \in L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))$; можно непосредственно проверить, что если $v \in H^{1/2}(\Sigma)$, то $y(v) \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Тогда, используя теорию интерполяции[1] (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 1]), заключаем, что если $v \in L^2(\Sigma)$, то $y(v) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ и, в частности, $y(v)|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$, откуда и следует утверждение леммы.

Пусть функция стоимости имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&J(v) = \int_{\Sigma} [y(v) - z_{\text{д}}]^2\, d\Sigma + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)};\\
&N \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma); L^2(\Sigma)), \quad N \geqslant \nu I, \quad \nu > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

[1] Сводя аффинный случай к линейному.

Пусть по-прежнему $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$. Оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ характеризуется тем, что

$$\int_\Sigma [y(u) - z_д][y(v) - y(u)]\, d\Sigma + (Nu, v-u)_{L^2(\Sigma)} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{7.27}$$

Определим сопряженное состояние $p(u)$ как решение задачи [1])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p(u)}{\partial t^2} + Ap(u) = 0 \ \text{ в } Q;\\ &\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A} = y(u) - z_д \ \text{ на } \Sigma;\\ &p(x, T; u) = 0, \ \frac{\partial p(x, T; u)}{\partial t} = 0 \ \text{ на } \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

Преобразуем (формально) неравенство (7.27) следующим образом: умножив первое из соотношений (7.28) на $y(v) - y(u)$ и применив формулу Грина, будем иметь

$$0 = -\int_\Sigma \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A}[y(v) - y(u)]\, d\Sigma + \int_\Sigma p(u)\left(\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right) d\Sigma =$$

$$= -\int_\Sigma [y(u) - z_д][y(v) - y(u)]\, d\Sigma + \int_\Sigma p(u)(v-u)\, d\Sigma.$$

Эти формальные преобразования можно обосновать, например, аппроксимируя функцию y регулярными функциями и переходя к пределу.

В результате получаем, что неравенство (7.27) эквивалентно неравенству

$$\int_\Sigma [p(u) + Nu](v-u)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{7.29}$$

Тем самым доказана

Теорема 7.2. *Пусть состояние системы определяется как решение уравнения* (7.5), *а функция стоимости имеет вид* (7.26). *Тогда для единственного оптимального управления* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *удовлетворяются соотношения* (7.5) (*при* $v = u$), (7.28) *и* (7.29).

---

[1]) Для определения решения $p(u)$ используется аналог леммы **7.1 для** обращенного времени.

Пример 7.3. Пусть $\mathscr{U}_\partial = \mathscr{U}$. Тогда соотношение (7.29) приводится к виду

$$p(u) + Nu = 0 \text{ на } \Sigma. \tag{7.30}$$

Исключая (с помощью этого равенства) u из соотношений (7.5) (при $v = u$) и (7.28), приходим к задаче

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay = f, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + Ap = 0 \text{ в } Q;\\
&\frac{\partial y}{\partial \nu_A} + N^{-1}p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_A} = y - z_{\text{д}} \text{ на } \Sigma;\\
&y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y_1(x) \text{ на } \Omega;\\
&p(x, T) = 0, \quad \frac{\partial p(x, T)}{\partial t} = 0 \text{ на } \Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

Пример 7.4. Пусть $\mathscr{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$. Тогда оптимальное управление получается из решения односторонней граничной задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay = f, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + Ap = 0 \text{ в } Q;\\
&p + N\frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geqslant 0 \text{ на } \Sigma;\\
&\left(p + N\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_A} = y - z_{\text{д}} \text{ на } \Sigma;\\
&y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y_1(x) \text{ на } \Omega;\\
&p(x, T) = 0, \quad \frac{\partial p(x, T)}{\partial t} = 0 \text{ на } \Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

а именно $u = \left.\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma$.

Замечание 7.5. Предыдущие рассмотрения распространяются и на случай систем, описываемых, например, такими операторами, как в разд. 4.3.

§ 8. Граничное управление (II)

8.1. Постановка задачи

Будем использовать обозначения, аналогичные принятым в предыдущем параграфе.

Предположим, что состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2} + Ay(v) = f \text{ в } Q; \tag{8.1}$$

$$y(v) = v \text{ на } \Sigma; \tag{8.2}$$

$$y(x, 0; v) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(x, 0; v)}{\partial t} = y_1(x). \tag{8.3}$$

В этом случае управление *граничное*, а смешанная задача (8.1) — (8.3) является задачей типа Дирихле.

Если считать, что $v \in L^2(\Sigma)$, то решение задачи (8.1) — (8.3) можно определить с помощью транспонирования (как в предыдущем параграфе), но при этом не известно, будет ли решение $y(v)$ принадлежать пространству $L^2(Q)$.

Можно, конечно, рассматривать задачи управления, в которых $y(v) \notin L^2(Q)$; например, если $y(v) \in H^{-1}(Q)$ (что соответствует рассматриваемому случаю — см. Лионс и Мадженес [1]), то возьмем в качестве функции стоимости

$$J(v) = \| y(v) - z_д \|^2_{H^{-1}(Q)} + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)}. \tag{8.4}$$

Но мы будем считать в дальнейшем, что управление v «регулярно».

8.2. Регулярное управление

Пусть имеет место очень сильное предположение:

$$\mathcal{U} = H_0^2(\Sigma), \tag{8.5}$$

т. е. $v \in \mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда все вторые производные управления v на поверхности Σ принадлежат пространству $L^2(\Sigma)$ и

$$v(x, 0) = v(x, T) = v'(x, 0) = v'(x, T) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда задача (8.1) — (8.3) имеет единственное решение $y(v) \in H^1(Q)$. Действительно, возьмем такую функцию ψ, что

$$\psi \in H^2(Q); \ \psi|_\Sigma = v; \ \psi(x, 0) = 0, \ \psi'(x, 0) = 0, \ x \in \Omega;$$

тогда функция $z = y(v) - \psi$ должна удовлетворять соотношениям

$$z'' + Az = f - (\psi'' + A\psi) \equiv \tilde{f} \in L^2(Q);$$

$$z|_\Sigma = 0;\ z(x, 0) = y_0(x),\ z'(x, 0) = y_1(x), \quad x \in \Omega.$$

Пусть $y(x, T; v)$ — финальное наблюдение, и пусть

$$J(v) = |y(x, T; v) - z_д|^2_{L^2(\Omega)} + \nu \|v\|^2_{H_0^2(\Sigma)}, \quad \nu > 0; \tag{8.6}$$

здесь

$$\|v\|^2_{H_0^2(\Sigma)} = \int_\Sigma (\Delta_\Gamma v)^2\, d\Gamma\, dt + \int_\Sigma (v'')^2\, d\Gamma\, dt, \tag{8.7}$$

а Δ_Γ — оператор Лапласа — Бельтрами на границе Г.

Если $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U} = H_0^2(\Sigma)$, то оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, которое в данном случае существует и единственно, характеризуется тем, что

$$(y(x, T; u) - z_д,\ y(x, T; v) - y(x, T; u)) + \\ + \nu (u, v - u)_{H_0^2(\Sigma)} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{8.8}$$

Сопряженное состояние $p(u)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &p''(u) + Ap(u) = 0 \ \text{ в } Q; \\ &p(u) = 0 \ \text{ на } \Sigma; \\ &p(x, T; u) = 0,\ p'(x, T; u) = y(x, T; u) - z_д(x),\ x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Можно показать (см. Лионс и Мадженес [1]), что

$$\left.\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma \in H^{-2}(\Sigma) \tag{8.10}$$

(этот результат не самый сильный).

Тогда из соотношений (8.9) с помощью формулы Грина получаем

$$(y(x, T; u) - z_д,\ y(x, T; v) - y(x, T; u)) = \int_\Sigma \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A}(v - u)\, d\Sigma.$$

Поэтому неравенство (8.8) принимает вид

$$\int_\Sigma \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A}(v - u)\, d\Sigma + \nu (u, v - u)_{H_0^2(\Sigma)} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial, \tag{8.11}$$

или

$$\int_\Sigma \left[\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_A} + \nu\left(\Delta_\Gamma^2 + \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right)u\right](v - u)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{8.12}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8.1. *Пусть выполнено предположение* (8.5), *а функция стоимости имеет вид* (8.6). *Тогда для оптимального управления* $u \in \mathcal{U}_\partial$ *удовлетворяются соотношения* (8.1) — (8.3) (*при* $v = u$), (8.9) *и* (8.12).

8.3. Примеры

Пример 8.1. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned}
&y'' + Ay = f, \ p'' + Ap = 0 \ \text{в} \ Q;\\
&p = 0, \ \frac{\partial p}{\partial \nu_A} + \nu\left(\Delta_\Gamma^2 + \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right) y = 0 \ \text{на} \ \Sigma;\\
&y(x, 0) = y_0(x), \ y'(x, 0) = y_1(x) \quad \text{на} \ \Omega;\\
&p(x, T) = 0, \ p'(x, T) = y(x, T) - z_\text{д}(x) \quad \text{на} \ \Omega;\\
&y(x, 0) = y(x, T) = y'(x, 0) = y'(x, T) = 0, \ x \in \Gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

а именно $u = y|_\Sigma$.

Пример 8.2. Пусть $U = \{v \mid v \in H_0^2(\Sigma), v \geqslant 0$ почти всюду на $\Sigma\}$. Тогда оптимальное управление получается из решения односторонней граничной задачи

$$\left.\begin{aligned}
&y'' + Ay = f, \ p'' + Ap = 0 \ \text{в} \ Q;\\
&p = 0, \ y \geqslant 0, \ \frac{\partial p}{\partial \nu_A} + \nu\left(\Delta_\Gamma^2 + \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right) y \geqslant 0 \ \text{на} \ \Sigma;\\
&y\left[\frac{\partial p}{\partial \nu_A} + \left(\Delta_\Gamma^2 + \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right) y\right] = 0 \quad \text{на} \ \Sigma;\\
&y(x, 0) = y_0(x), \ y'(x, 0) = y_1(x) \quad \text{на} \ \Omega;\\
&p(x, T) = 0, \ p'(x, T) = y(x, T) - z_\text{д}(x) \ \text{на} \ \Omega;\\
&y(x, 0) = y(x, T) = y'(x, 0) = y'(x, T) = 0, \ x \in \Gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

а именно $u = y|_\Sigma$.

§ 9. Параболическо-гиперболические системы

9.1. Один общий результат

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathfrak{h}$ — такие гильбертовы пространства [1]) над полем действительных чисел $\mathbf{R}$, что

$$\mathcal{V} \subset \mathfrak{h}, \ \mathcal{V} \ \text{плотно в} \ \mathfrak{h}.$$

[1]) Они будут играть здесь иную роль, чем пространства $\mathcal{V}^0$ и $\mathfrak{h}$, введенные в § 5.

Отождествляя пространство $\mathfrak{h}$ с его двойственным и обозначая через $\mathscr{V}'$ пространство, двойственное к пространсту $\mathscr{V}$, получаем

$$\mathscr{V} \subset \mathfrak{h} \subset \mathscr{V}'.$$

Пусть $\mathscr{A}$ — данный оператор:

$$\mathscr{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V};\ \mathscr{V}'), \tag{9.1}$$

$$\langle \mathscr{A}\varphi, \varphi \rangle \geqslant \alpha \|\varphi\|^2_{\mathscr{V}}, \quad \alpha > 0, \quad \forall \varphi \in \mathscr{V}\text{ [1]}, \tag{9.2}$$

а Λ — оператор, неограниченный в пространстве $\mathfrak{h}$ и такой, что

— Λ есть инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $G(s)$ в $\mathfrak{h}$, в $\mathscr{V}$ и в $\mathscr{V}'$, причем $G(s)$ является сжимающей полугруппой в $\mathfrak{h}$ [2]. (9.3)

Обозначим через $D(\Lambda;\ \mathfrak{h})$, $D(\Lambda;\ \mathscr{V})$ и $D(\Lambda;\ \mathscr{V}')$ области определения оператора Λ соответственно в пространствах $\mathfrak{h}$, $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$.

Доказана (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 3])

Теорема 9.1. *Пусть $f \in \mathscr{V}'$. Тогда существует такой единственный элемент y, что*

$$y \in \mathscr{V} \cap D(\Lambda;\ \mathscr{V}'), \tag{9.4}$$

$$\Lambda y + \mathscr{A} y = f; \tag{9.5}$$

при этом $f \to y$ — непрерывное отображение $\mathscr{V}' \to \mathscr{V} \cap D_{\mathfrak{s}}(\Lambda;\ \mathscr{V}')$.

Рассмотрим пару действительных переменных $\{x_0,\ t\}$, где

$$\{x_0, t\} \in \mathcal{O} = (0,\ a_0) \times (0,\ T), \quad a_0 < \infty, \quad T < \infty. \tag{9.6}$$

Далее, пусть, как и в § 1, пространства V и H таковы, что $V \subset H \subset V'$. Положим

$$\mathscr{V} = L^2(\mathcal{O};\ V), \quad \mathfrak{h} = L^2(\mathcal{O};\ H)\text{ [3]}; \tag{9.7}$$

тогда $\mathscr{V}' = L^2(\mathcal{O};\ V')$.

---

[1] Ломаные скобки обозначают скалярное произведение элементов, при надлежащих соответственно пространствам $\mathscr{V}'$ и $\mathscr{V}$.

[2] То есть $\|G(s)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{h};\ \mathfrak{h})} \leqslant 1$.

[3] Так что, например, $\mathscr{V} = \{\psi \mid \psi(x_0,\ t) \in V;\ x_0,\ t \to \psi(x_0,\ t)$ — измеримая функция $\mathcal{O} \to V;\ \int_{\mathcal{O}} \|\psi(x_0, t)\|^2_V dx_0 dt < \infty\}$.

Пусть $a(x_0, t; \varphi, \psi)$ — семейство билинейных непрерывных форм на пространстве V, обладающих следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &x_0, t \to a(x_0, t; \varphi, \psi) \text{ — измеримая} \\ &\qquad\qquad \text{ограниченная функция на } \mathcal{O}; \\ &a(x_0, t; \varphi, \varphi) \geqslant \alpha \|\varphi\|_V^2 \text{ почти всюду в } \mathcal{O}, \\ &\qquad\qquad \alpha > 0, \quad \forall \varphi \in V\,^{1)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Определим оператор $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathcal{V}$: если $\psi \in \mathcal{V}$, то

$$\mathcal{A}\psi = «x_0, t \to A(x_0, t)\,\psi(x_0, t)», \tag{9.9}$$

где оператор

$$A(x_0, t) \in \mathcal{L}(V; V') \tag{9.10}$$

задан формулой

$$(A(x_0, t)\,\varphi_1, \varphi_2) = a(x_0, t; \varphi_1, \varphi_2) \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in V.$$

Ясно, что предположение (9.2) выполнено.

Оператор Λ зададим формулой

$$\Lambda\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}; \tag{9.11}$$

его область определения в пространстве $\mathfrak{h}$ имеет вид

$$D(\Lambda; \mathfrak{h}) = \left\{\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{h},\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} \in \mathfrak{h},\ \varphi(x_0, 0) = 0,\ \varphi(0, t) = 0\right\}^{2)}. \tag{9.12}$$

Оператор Λ удовлетворяет условию (9.3); в этом легко убедиться, если заметить, что

$$G(s)\,\varphi(x_0, t) = \begin{cases} \varphi(x_0 - s,\ t - s) \text{ при } x_0 > s,\ t > s; \\ 0 \quad \text{в противном случае}. \end{cases} \tag{9.13}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 9.1, а потому справедлива

Теорема 9.2. *Пусть выполнены предположения* (9.8) [3]. *Тогда существует такая единственная функция* $y = y(x_0, t)$, *что*

$$y \in L^2(\mathcal{O}; V),\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \in L^2(\mathcal{O}; V'); \tag{9.14}$$

---

[1]) Достаточно, чтобы для подходящего λ выполнялось неравенство

$$a(x_0, t; \varphi, \varphi) + \lambda \|\varphi\|_H^2 \geqslant \alpha \|\varphi\|_V^2.$$

[2]) Входящие сюда условия, очевидно, имеют смысл. Области определения этого оператора в пространствах $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$, т. е. $D(\Lambda; \mathcal{V})$ и $D(\Lambda; \mathcal{V}')$, определяются аналогично.

[3]) Подчеркнем, что форма $a(x_0, t; \varphi, \psi)$ не обязательно симметрична относительно переменных φ и ψ.

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x_0}+A(x_0,\ t)\,y=f,\ f\in L^2(\Theta;\ V'); \tag{9.15}$$

$$y(x_0,\ 0)=0,\ x_0\in(0,\ a_0); \tag{9.16}$$

$$y(0,\ t)=0,\ t\in(0,\ T). \tag{9.17}$$

Пример 9.1. Пусть $V=H_0^1(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$ и

$$A(x_0,\ t)\,\varphi=A\left(x,\ x_0,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\equiv-\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ x_0,\ t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right),$$

где $a_{ij}(x,\ x_0,\ t)\in L^\infty(\Omega\times\Theta)$ и

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\ x_0,\ t)\,\xi_i\xi_j\geqslant\alpha(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2),\ \alpha>0,\ \forall\xi_i\in\mathbf{R}.$$

Теорема 9.2 дает возможность утверждать существование решения задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x_0}+A\left(x,\ x_0,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)y=f\ \text{в}\ \Omega\times\Theta;$$

$$y(x,\ x_0,\ t)=0,\ x\in\Gamma;$$

$$y(x,\ 0,\ t)=0,\ x\in\Omega,\ t\in(0,\ T);$$

$$y(x,\ x_0,\ 0)=0,\ x\in\Omega,\ x_0\in(0,\ a_0);$$

$$y,\ \frac{\partial y}{\partial x_i}\in L^2(\Omega\times\Theta).$$

Ниже будут приведены и другие примеры использования теоремы 9.2.

Замечание 9.1. Оператор $\partial/\partial t+\partial/\partial x_0+A(x,\ x_0,\ t,\ \partial/\partial x)$ представляет собой «комбинацию» *гиперболического* оператора $\partial/\partial t+\partial/\partial x_0$ и *параболического* оператора $\partial/\partial t+A(x,\ x_0,\ t,\ \partial/\partial x)$; этим и объясняется заглавие настоящего параграфа.

Замечание 9.2. Разумеется, можно рассмотреть гораздо более общие примеры этого же типа, если взять в качестве Λ гиперболический оператор или гиперболическую систему первого порядка в множестве $\Theta=G\times(0,\ T)$, где G — открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^m$ и $x_0\in\mathbf{R}^m$.

Замечание 9.3. В качестве оператора $A(x,\ x_0,\ t,\ \partial/\partial x)$ в теореме 9.2 можно также взять оператор — или систему — порядка $2m$, $m>1$.

9.2. Дополнение

Обобщим теорему 9.1 на случай, когда начальное условие (9.16) *ненулевое*. Для этого нам понадобится следующее *предложение о следах*.

Лемма 9.1. *Пусть* $z \in L^2(\mathcal{O};\ V)$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial x_0} \in L^2(\mathcal{O};\ V')$; *тогда можно определить функцию* $z(x_0, 0) \in L^2(0, a_0; H)$. *Обратно, если* $\varphi(x_0)$ — *данная функция из пространства* $L^2(0, a_0; H)$, *то можно найти функцию* z *(не единственную), обладающую указанными выше свойствами, непрерывно зависящую от функции* φ *и такую, что* $z(x_0, 0) = \varphi(x_0)$.

Доказательство. 1) Используя продолжения с помощью отражений от границы, можно свести задачу к случаю, когда $\mathcal{O} = \mathbf{R}^2$; для этого случая мы и проведем доказательство.

Воспользуемся методом «диагонализации» (см. Диксмье [1]): существует такое представление [1])

$$\mathfrak{h} = \int^{\oplus} \mathfrak{h}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad 0 < \lambda_0 \leqslant \lambda < \infty,$$

что канонический изоморфизм Λ: $V \to V'$ превращается в оператор умножения на λ^2; точнее, существует такой унитарный оператор J: $H \to \mathfrak{h}$, что

$$J\Lambda\varphi = \lambda^2 J\varphi \qquad \forall \varphi \in V.$$

Далее, применим преобразование Фурье $\tilde{\mathcal{F}}$ по переменным x_0 и t (обозначая через ξ_0 и τ двойственные переменные). Если $\hat{z} = \tilde{\mathcal{F}} J z$, то

$$\lambda \hat{z} \in L^2(\mathbf{R}^2;\ \mathfrak{h}); \quad \frac{1}{\lambda}(\xi_0 + \tau)\,\hat{z} \in L^2(\mathbf{R}^2;\ \mathfrak{h}). \tag{9.18}$$

Положим

$$B = B(\xi_0, \tau, \lambda) = \left[\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}(\xi_0 + \tau)^2\right]^{1/2}. \tag{9.19}$$

Мы хотим доказать, что $z(x_0, 0) \in L^2(\mathbf{R}_t;\ H)$; так как операторы J и $\tilde{\mathcal{F}}$ унитарны, то это равносильно доказательству соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}(\xi_0, \tau, \lambda)\, d\tau = \psi(\xi_0, \lambda) \in L^2(\mathbf{R}_{\xi_0};\ \mathfrak{h}). \tag{9.20}$$

[1]) Предполагается, что пространство V сепарабельно.

Но $\psi(\xi_0, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B\hat{z}\frac{1}{B}\,d\tau$; отсюда

$$\|\psi(\xi_0, \lambda)\|^2_{\mathfrak{h}(\lambda)} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B^2 \|\hat{z}(\xi_0, \tau, \lambda)\|^2_{\mathfrak{h}(\lambda)}\,d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{B^2}\,d\tau,$$

и, следовательно,

$$\|\psi(\xi_0, \lambda)\|^2_{\mathfrak{h}(\lambda)} \leqslant c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} B^2 \|\hat{z}(\xi_0, \tau, \lambda)\|^2_{\mathfrak{h}(\lambda)}\,d\tau.$$

Поэтому в силу соотношений (9.18) имеем

$$\int\limits_{\lambda}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\psi(\xi_0, \lambda)\|^2_{\mathfrak{h}(\lambda)}\,d\xi_0\,d\mu(\lambda) < \infty,$$

откуда и следует соотношение (9.20).

2) Обратно, пусть φ — данная функция из пространства $L^2(0, T; H)$; мы хотим построить функцию z, обладающую указанными в формулировке леммы свойствами.

Снова сведем задачу к случаю действительной прямой $\mathbf{R}_t$ и плоскости. Используя те же приемы, что и в 1), можем сказать, что по данной функции $\psi \in L^2(\mathbf{R}_\tau; \mathfrak{h})$ нужно построить функцию $\hat{z}$, удовлетворяющую условиям (9.18) и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}(\xi_0, \tau, \lambda)\,d\tau = \psi(\xi_0, \lambda). \tag{9.21}$$

Возьмем $\hat{z}(\xi_0, \tau, \lambda) = F(\xi_0, \tau, \lambda)\,\psi(\tau, \lambda)$, где

$$F(\xi_0, \tau, \lambda) = \frac{c}{\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}(\xi_0+\tau)^2}, \quad c^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{1+\rho^2}.$$

Легко проверить, что в этом случае условия (9.18) и (9.21) действительно удовлетворяются.

Теорема 9.3. *Пусть выполнены предположения* (9.8). *Тогда для данных функций*

$$f \in L^2(\mathcal{O}; V'), \tag{9.22}$$

$$y_0(x_0) \in L^2(0, a_0; H) \tag{9.23}$$

существует единственная функция $y = y(x_0, t)$, *для которой удовлетворяются соотношения* (9.14), (9.15), (9.17) *и*

$$y(x_0, 0) = y_0(x_0). \tag{9.24}$$

Доказательство. Согласно лемме 9.1, существует такая функция $z \in L^2(\Theta; V)$, что

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x_0}\in L^2(\Theta; V') \quad \text{и} \quad z(x_0, 0)=y_0(x_0).$$

Тогда функция $\tilde{y}=y-z$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_0}+A\tilde{y}=f-\left(\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)-Az\equiv\tilde{f}$$

и равенствам, аналогичным условиям (9.16), (9.17). Так как $\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x_0}\in L^2(\Theta; V')$ и $Az\in L^2(\Theta; V')$, то $\tilde{f}\in L^2(\Theta; V')$, и доказываемое утверждение следует из теоремы 9.2.

9.3. Задача управления

Пусть $\mathcal{U}$ — пространство управлений и

$$B\in\mathcal{L}(\mathcal{U}; L^2(\Theta; V')). \tag{9.25}$$

Для управления $v\in\mathcal{U}$ состояние $y(v)=y(x_0, t; v)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t}+\frac{\partial y(v)}{\partial x_0}+A(x_0, t)\,y(v)=f+Bv \text{ в } \Omega\times\Theta; \tag{9.26}$$

$$y(x_0, 0; v)=y_0(x_0),\ x_0\in(0, a_0); \tag{9.27}$$

$$y(0, t; v)=0,\ t\in(0, T); \tag{9.28}$$

здесь f и y_0 — данные функции, удовлетворяющие условиям (9.22) и (9.23).

Предположим, что наблюдение распределено [1]) по множеству $\Omega\times\Theta$, а функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\int_{\Theta}|y(x_0, t; v)-z_{\text{д}}|_H^2\,dx_0\,dt+(Nv, v)_{\mathcal{U}}, \tag{9.29}$$

где $z_{\text{д}}\in L^2(\Omega\times\Theta; H)$ — данная функция, $N\in\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, $N\geqslant\nu I$, $\nu>0$.

Пусть $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$. Ставится задача об отыскании $\inf\limits_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v)$.

[1]) Очевидно, возможны и другие случаи: можно наблюдать $y(x_0; T; v)\in L^2(0, a_0; H)$ или $y(a_0, t; v)\in L^2(0, T; H)$ и т. д. Мы не рассматриваем подробно все эти случаи, ибо они исследуются аналогично.

Оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$ существует и единственно; оно характеризуется тем, что

$$\int_{\Theta} (y(u) - z_{\text{д}},\ y(v) - y(u))\, dx_0\, dt + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.30}$$

Сопряженное состояние $p(u)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u)}{\partial t} - \frac{\partial p(u)}{\partial x_0} + A^*(x_0, t)\, p(u) = y(u) - z_{\text{д}} \text{ в } \Omega \times \Theta; \\ &p(x_0, T; u) = 0,\ x_0 \in (0, a_0),\ p(a_0, t; u) = 0,\ t \in (0, T), \end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

причем

$$p(u) \in L^2(\Theta; V), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) p(u) \in L^2(\Theta; V'). \tag{9.32}$$

Допустим, что имеет место

Лемма 9.2. *Выполняется равенство*

$$\int_{\Theta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) p(u),\ y(v) - y(u)\right) dx_0\, dt =$$

$$= -\int_{\Theta} \left(p(u),\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) [y(v) - y(u)]\right) dx_0\, dt. \tag{9.33}$$

Тогда из соотношений (9.31), (9.33) и (9.26) вытекает, что

$$\int_{\Theta} (y(u) - z_{\text{д}},\ y(v) - y(u))\, dx_0\, dt =$$

$$= \int_{\Theta} \left(p(u),\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0} + A(x_0, t)\right) [y(v) - y(u)]\right) dx_0\, dt =$$

$$= \int_{\Theta} (p(u),\ B(v - u))\, dx_0\, dt = (B^* p(u),\ v - u)^{1)} =$$

$$= (\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u),\ v - u)_{\mathcal{U}}.$$

Таким образом, если верна лемма 9.2, то справедлива

---

[1]) Скобками обозначено скалярное произведение элементов, принадлежащих соответственно пространствам $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}$.

Теорема 9.4. *Пусть состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи* (9.26) — (9.28), *а функция стоимости имеет вид* (9.29). *Тогда существует единственное оптимальное управление $u \in \mathcal{U}_\partial$, для которого удовлетворяются соотношения* (9.26) — (9.28) (*при $v = u$*), (9.31) *и*

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.34}$$

Доказательство леммы 9.2. Очевидно, что

$$y(v) - y(u) \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}'), \quad \text{где } \Lambda = \partial/\partial t + \partial/\partial x_0,$$

так как $y(x_0, 0; v) - y(x_0, 0; u) = 0$. Кроме того, $p(u) \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*; \mathcal{V}')$. Поэтому равенство (9.33) эквивалентно равенству

$$(\Lambda\varphi, \psi) = (\varphi, \Lambda^*\psi)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}'), \quad \forall \psi \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda^*, \mathcal{V}').$$

Но это последнее равенство верно для всех $\varphi \in D(\Lambda; \mathcal{V})$. Поскольку множество $D(\Lambda; \mathcal{V})$ плотно в множестве $\mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}')$, то утверждение леммы получается предельным переходом.

9.4. Пример (I)

Пусть в условиях разд. 9.3

$$V = H_0^1(\Omega); \quad \mathcal{U} = L^2(\Theta; V') = L^2(\Theta; H^{-1}(\Omega));$$

B — тождественный оператор. Тогда для оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y(u)}{\partial t} + \frac{\partial y(u)}{\partial x_0} + A\left(x, x_0, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) y(u) = f + u \quad \text{в } \Omega \times \Theta;\\
&-\frac{\partial p(u)}{\partial t} - \frac{\partial p(u)}{\partial x_0} + A^*\left(x, x_0, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) p(u) = y(u) - z_{\text{д}} \quad \text{в } \Omega \times \Theta;\\
&y(x, x_0, t; u) = 0,\ p(x, x_0, t; u) = 0,\ x \in \Gamma,\ \{x_0, t\} \in \Theta;\\
&y(x, x_0, 0; u) = y_0(x, x_0),\ x_0 \in (0, a_0),\ x \in \Omega;\\
&y(x, 0, t; u) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega;\\
&p(x, x_0, T; u) = 0, \quad x_0 \in (0, a_0), \quad x \in \Omega;\\
&p(x, a_0, t; u) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega;
\end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

$$\int\limits_{\Omega \times \Theta} [p(u) + (-\Delta_x + I) Nu](v - u)\, dx\, dx_0\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.36}$$

Если

$$\mathcal{U} = L^2(\Omega \times \Theta), \tag{9.37}$$

то задача (9.35) остается без изменения, а вместо неравенства (9.36) имеем

$$\int\limits_{\Omega\times\Theta} [p(u) + Nu](v-u)\,dx\,dx_0\,dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{9.38}$$

9.5. Пример (II)

Пусть в условиях разд. 9.3

$$V = H^1(\Omega);\ B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\ L^2(\Theta \times \Gamma)). \tag{9.39}$$

Умножая равенство (9.26) скалярно на $\psi \in V$, перепишем его в виде

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) y(v),\ \psi\right) + a(x_0,\ t;\ y(v),\ \psi) = \int\limits_{\Omega} f\psi\,dx + $$
$$+ \int\limits_{\Gamma} Bv(x,\ x_0,\ t)\,\psi\,d\Gamma_x \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega). \tag{9.40}$$

Для упрощения записи допустим, что

$$\mathcal{U} = L^2(\Theta \times \Gamma);\ B\text{—тождественный оператор.} \tag{9.41}$$

Тогда соотношение (9.40) интерпретируется так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) y(v) + A\left(x,\ x_0,\ t;\ \frac{\partial}{\partial x}\right) y(v) = f \text{ в } \Omega \times \Theta; \tag{9.42}$$

$$\frac{\partial y(x,\ x_0,\ t;\ v)}{\partial \nu_A} = v, \quad x \in \Gamma, \quad \{x_0,\ t\} \in \Theta; \tag{9.43}$$

к этим равенствам следует добавить еще условия (9.27), (9.28).

Следовательно, состояние системы определяется как решение *параболическо-гиперболической задачи с управлением в граничных условиях.*

Предположим, например, что

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Gamma \times \Theta\}. \tag{9.44}$$

Тогда оптимальное управление получается из решения односторонней граничной задачи

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) y + A\left(x,\ x_0,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) y = f && \text{в } \Omega \times \Theta; \\ -&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) p + A^*\left(x,\ x_0,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) p = y - z_д && \text{в } \Omega \times \Theta; \end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p(x, x_0, t)}{\partial \nu_{A^*}}=0,\quad \frac{\partial y(x, x_0, t)}{\partial \nu_A}\geqslant 0 && \text{на } \Gamma\times\Theta;\\ &p(x, x_0, t)+N\frac{\partial y(x, x_0, t)}{\partial \nu_A}\geqslant 0,\quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\left[p+N\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right]=0 && \text{на } \Gamma\times\Theta;\end{aligned}\right\}\tag{9.46}$$

$$\left.\begin{aligned}&y(x, x_0, 0)=y_0(x_0),\ p(x, x_0, T)=0,\ x_0\in(0, a_0),\quad x\in\Omega;\\ &y(x, 0, t)=0,\ p(x, a_0, t)=0,\ t\in(0; T),\ x\in\Omega;\end{aligned}\right\}\tag{9.47}$$

а именно

$$u=\frac{\partial y(x,x_0,t)}{\partial \nu_A}\ \text{на } \Gamma\times\Theta.$$

9.6. Расцепление

Пусть выполнены условия теоремы 9.4 и $\mathcal{U}_\partial=\mathcal{U}$. Тогда неравенство (9.34) приводится к соотношению

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu=0.\tag{9.48}$$

Поэтому оптимальное управление получается из решения системы

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x_0}+Ay+BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p=f,\\ &-\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_0}+A^*p-y=-z_д\end{aligned}\right\}\tag{9.49}$$

с граничными условиями (9.47).

Мы в общих чертах исследуем *расцепление* этой системы с помощью того же метода, что и в § 4, 5 гл. 3 и § 5 настоящей главы.

Предположим, что

$$\mathcal{U}=L^2(\Theta;\ E);\ B=B(x_0,\ t)\in\mathcal{L}(E;\ V').\tag{9.50}$$

Рассмотрим задачу (ср. с леммой 4.1 гл. 3)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}+A\varphi+BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*\psi=f,\ x_0\in(0, a_0),\ t\in(s, T);\\ &-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial x_0}+A^*\psi-\varphi=-z_д,\ x_0\in(0, a_0),\ t\in(s, T);\end{aligned}\right\}\tag{9.51}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x_0, s)=h(x_0),\quad \psi(x_0, T)=0;\\ &\varphi(0, t)=0,\qquad \psi(a_0, t)=0,\end{aligned}\right\}\tag{9.52}$$

где h — данный элемент пространства $L^2(0,\ a_0;\ H)$.

Эта задача имеет единственное решение. Действительно, она соответствует задаче отыскания оптимального управления (при отсутствии ограничений на управление) системой, состояние $\varphi(v)$ которой определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\varphi(v)+A\varphi(v)=\\&=f+B(x_0, t)\,v,\quad x_0\in(0, a_0),\quad t\in(s, T);\\&\varphi(x_0, s)=h(x_0),\ \varphi(0, t)=0,\end{aligned}\right\}\tag{9.53}$$

а функция стоимости имеет вид

$$J(v)=\int\limits_{(0, a_0)\times(s, T)}|y(v)-z_д|^2\,dx_0\,dt+\int\limits_{(0, a_0)\times(s, T)}(Nv, v)_E\,dx_0\,dt\text{[1]}.$$

Согласно лемме 9.1, функция $\psi(x_0, s)$ определяется однозначно и принадлежит пространству $L^2(0, a_0; H)$; следовательно,

$$\left.\begin{aligned}&h\to\psi(x_0, s)\text{ — аффинное непрерывное}\\&\text{отображение пространства } L^2(0, a_0; H) \text{ в себя.}\end{aligned}\right\}\tag{9.54}$$

Обозначим через $\psi(s)$ функцию $x_0\to\psi(x_0, s)$, принадлежащую пространству $L^2(0, a_0; H)$. Тогда

$$\psi(s)=P(s)\,h+r(s),\tag{9.55}$$

где

$$P(s)\in\mathscr{L}(L^2(0, a_0; H); L^2(0, a_0; H)),\tag{9.56}$$

$$r(s)\in L^2(0, a_0; H).\tag{9.57}$$

Отсюда следует «основное тождество»

$$p(t)=P(t)\,y(t)+r(t),\tag{9.58}$$

где через $p(t)$ обозначена функция $x_0\to p(x_0, t)$ и аналогично объясняются обозначения $y(t)$ и $r(t)$.

Оператор $P(t)$ определяется через решение задачи (ср. с леммой 4.3 гл. 3)

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\beta+A\beta+BN^{-1}\Lambda_{\mathscr{U}}^{-1}B^*\gamma=0,\quad x\in(0, a_0),\ t\in(s, T);\\&-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\gamma+A^*\gamma-\beta=0,\qquad x\in(0, a_0),\ t\in(s, T);\end{aligned}\right\}\tag{9.59}$$

$$\beta(x_0, s)=h,\ \gamma(x_0, T)=0;\ \beta(0, t)=0,\ \gamma(a_0, t)=0,\tag{9.60}$$

а именно

$$P(s)\,h=\gamma(x_0, s);\tag{9.61}$$

---

[1]) Предполагается, что $N=N(x_0, t)\in\mathscr{L}(E; E)$.

функция $r(t)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\eta+A\eta+BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*\xi=f, \quad x\in(0,\,a_0),\ t\in(s,\,T);\\ &-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\xi+A^*\xi-\eta=-z_{\text{д}}, \qquad x\in(0,\,a_0),\ t\in(s,\,T);\\ &\eta(x_0,\,s)=0,\ \ \xi(x_0,\,T)=0;\ \eta(0,\,t)=0,\ \ \xi(a_0,\,t)=0,\end{aligned}\right\} \tag{9.62}$$

а именно

$$r(s)=\xi(x_0,\,s). \tag{9.63}$$

Можно показать (аналогично доказательству леммы 4.4 гл. 3), что

$$P^*(t)=P(t). \tag{9.64}$$

Проведем теперь *формальные* преобразования, использующие ядра операторов (обоснование этих преобразований в данном случае технически весьма сложно). Согласно теореме Шварца о ядрах (см. Шварц [2], [3]), имеет место представление

$$P(s)\,h=\int_0^{a_0}P(x_0,\,\xi_0,\,s)\,h(\xi_0)\,d\xi_0, \tag{9.65}$$

где $P(x_0,\ \xi_0\ s)$ — ядро оператора $P(s)$, т. е. распределение на $(0,\ a_0)\times(0,\ a_0)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(H;\ H)$. Тогда

$$p(x_0,\,t)=\int_0^{a_0}P(x_0,\,\xi_0,\,t)\,y(\xi_0,\,t)\,d\xi_0+r(x_0,\,t)$$

и, следовательно,

$$-\int_0^{a_0}\frac{\partial P}{\partial x_0}y(\xi_0,\,t)\,d\xi_0-\frac{\partial r}{\partial x_0}-\int_0^{a_0}\frac{\partial P}{\partial t}\,y(\xi_0,\,t)\,d\xi_0-\frac{\partial r}{\partial t}-$$
$$-\int_0^{a_0}P\,\frac{\partial y(\xi_0,\,t)}{\partial t}\,d\xi_0+\int_0^{a_0}A^*Py(\xi_0,\,t)\,d\xi_0+A^*r-y(\xi_0,\,t)=-z_{\text{д}}.$$

Отсюда, принимая во внимание первое из соотношений (9.49), получим

$$-\int_0^{a_0}\frac{\partial P}{\partial x_0}y\,d\xi_0-\frac{\partial r}{\partial x_0}-\int_0^{a_0}\frac{\partial P}{\partial t}y\,d\xi_0-\frac{\partial r}{\partial t}+$$
$$+\int_0^{a_0}P\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_0}+Ay+BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p-f\right)d\xi_0+$$
$$+\int_0^{a_0}A^*Py\,d\xi_0+A^*r-y=-z_{\text{д}}.$$

Окончательно приходим к уравнениям

$$-\frac{\partial P}{\partial t}-\left(\frac{\partial P}{\partial x_0}+\frac{\partial P}{\partial \xi_0}\right)+PA+A^*P+$$

$$+\int_0^{a_0} P(x_0, \eta_0, t)BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*P(\eta_0, \xi_0, t)\,d\eta_0=I\otimes\delta(\xi-x_0) \qquad (9.66)$$

и

$$-\frac{\partial r}{\partial t}-\frac{\partial r}{\partial x_0}+A^*r+\int_0^{a_0} P(x_0, \xi_0, t)BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*r(\xi_0, t)\,d\xi_0=$$

$$=\int_0^{a_0} P(x_0, \xi_0, t)f(\xi_0, t)\,d\xi_0-z_{\text{д}} \qquad (9.67)$$

с граничными и начальными условиями

$$P(a_0, \xi_0, t)=0,\ \ P(x_0, a_0, t)=0,\quad P(x_0, \xi_0, T)=0; \qquad (9.68)$$

$$r(a_0, t)=0,\ r(x_0, T)=0. \qquad (9.69)$$

Пример. В условиях разд. 9.4 пусть $P(x, \xi, x_0, \xi_0, t)$ — *ядро* оператора P. Для простоты предположим, что $\mathcal{U}=L^2(\Omega\times\Theta)$ и $N=\nu I$, $\nu>0$. Тогда ядро $P(x, \xi, x_0, \xi_0, t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial x_0}-\frac{\partial P}{\partial \xi_0}-(A_x^*+A_\xi^*)P+$$

$$+\nu^{-1}\int_{\Omega\times(0,\,a_0)} P(x, \eta, x_0, \eta_0, t)P(\eta, \xi, \eta_0, \xi_0, t)\,d\eta\,d\eta_0=$$

$$=\delta(x-\xi)\,\delta(x_0-\xi_0); \qquad (9.70)$$

$$\left.\begin{aligned}&P(x, \xi, x_0, \xi_0, t)=P(\xi, x, \xi_0, x_0, t);\\&P(x, \xi, x_0, \xi_0, t)=0,\ x\in\Gamma \text{ или } \xi\in\Gamma,\\&\qquad\{x_0, \xi_0, t\}\in(0, a_0)\times(0, a_0)\times(0, T);\\&P(x, \xi, a_0, \xi_0, t)=0,\ P(x, \xi, x_0, a_0, t)=0;\\&P(x, \xi, x_0, \xi_0, T)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (9.71)$$

Таким образом, получается нелинейное интегро-дифференциальное параболическо-гиперболическое уравнение типа Риккати.

Существование *слабого* решения задачи (9.70), (9.71) известно априори.

Как мы уже отмечали в аналогичных случаях для параболических или гиперболических уравнений, было бы очень интересно провести *прямое* исследование задач типа (9.70), (9.71).

§ 10. Теоремы существования оптимального управления

10.1. План дальнейшего исследования

В этом параграфе мы докажем некоторые теоремы существования оптимального управления для нелинейных систем. Речь идет о результатах, аналогичных полученным в § 15 гл. 3 для параболического случая.

10.2. Пример. Введение «вязкости»

Пусть

$$\mathcal{U} = L^\infty(Q),\ Q = \Omega \times (0,\ T), \tag{10.1}$$

а состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2} + Ay(v) + v\frac{\partial y}{\partial t} = f \text{ в } Q; \tag{10.2}$$

$$y(v) = 0 \text{ на } \Sigma; \tag{10.3}$$

$$y(x,\ 0;\ v) = y_0(x),\ \frac{\partial y(x,\ 0;\ v)}{\partial t} = y_1(x),\ x \in \Omega, \tag{10.4}$$

где A — оператор второго порядка, заданный, как в разд. 1.5 [1]).

Предположим, что функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_Q |y(v) - z_д|^2\,dx\,dt + \nu \|v\|_{L^\infty(Q)},\quad \nu > 0. \tag{10.5}$$

Ставится задача об отыскании $\inf\limits_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v)$, где $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое подмножество пространства $L^\infty(Q)$, замкнутое в смысле слабой $*$-топологии.

Даже в рассматриваемом весьма простом случае мы сталкиваемся со следующей существенной трудностью (аналогичной той, которая уже встречалась в разд. 15.3 гл. 3).

Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность. Тогда с помощью формулы (10.5) [2]) заключаем, что

v_n остаются в ограниченном подмножестве пространства $L^\infty(Q)$.

Поэтому из последовательности $\{v_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{v_n\}$,— что

$$v_n \to u \text{ } *\text{-слабо в } L^\infty(Q);\ u \in \mathcal{U}_\partial. \tag{10.6}$$

---

[1]) Задача (10.2) — (10.4) имеет единственное решение $y(v) \in H^1(Q)$.

[2]) Слагаемое $\nu \|v\|_{L^\infty(Q)}$ в формуле (10.5) является излишним, если множество $\mathcal{U}_\partial$ ограничено.

Далее, умножив равенство (10.2) (записанное при $v = v_n$) на $\partial y(v_n)/\partial t$ и обозначив $y(v_n)$ через y_n, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|y'_n|^2 + a(t; y_n, y_n)] +$$
$$+ \int_\Omega v_n (y'_n)^2 dx - \frac{1}{2} a'(t; y_n, y_n) = \int_\Omega f y'_n dx, \quad (10.7)$$

где $|y'_n|^2 = \int_\Omega (y'_n)^2 dx$. Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} y_n \text{ (соответственно } y'_n\text{) остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \text{(соответственно } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\text{).} \end{array}\right\} \quad (10.8)$$

Тогда из последовательности $\{y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{y_n\}$,— что

$$\left.\begin{array}{ll} y_n \to y & \text{слабо в } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ y'_n \to y' & \text{слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{array}\right\} \quad (10.9)$$

Однако этого *недостаточно*, чтобы можно было заключить, что

$$v_n y'_n \to u y', \text{ например, в пространстве } \mathscr{D}'(Q). \quad (10.10)$$

Замечание 10.1. Утверждение (10.10), очевидно, справедливо, если можно показать *более сильную* сходимость последовательности $\{v_n\}$. Это удается сделать в случае, когда *управление более регулярно.*

Положим, например,

$$\mathscr{U} = L^\infty(Q) \cap H^1(Q), \quad (10.11)$$

а в качестве функции стоимости возьмем (вместо (10.5))

$$J_\varepsilon(v) = \int_Q |y(v) - z_д|^2 dx\,dt + \nu \|v\|_{L^\infty(Q)} + \varepsilon \|v\|_{H^1(Q)}, \quad \varepsilon > 0. \quad (10.12)$$

Тогда, как легко проверить, $v_n \to u$ *сильно* [1]) в пространстве $L^2(Q)$, а значит, имеет место утверждение (10.10).

Следовательно, в предположениях (10.11), (10.12) *оптимальное управление существует.*

Мы придем к такому же выводу, *изменяя уравнение, описывающее состояние системы* [2]). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что

---

[1]) Так как вложение $H^1(Q) \to L^2(Q)$ вполне непрерывно.

[2]) Это пример *параболической регуляризации*; гл. 5.

состояние $y(v)$ системы определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2} + Ay(v) - \varepsilon\Delta y'(v) + vy'(v) = f \text{ в } Q \tag{10.13}$$

с граничными условиями (10.3), (10.4).

Легко видеть, что задача (10.13), (10.3), (10.4) имеет такое единственное решение $y(v)$, что

$$y(v) \in H^1(Q),\ y'(v) \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)).$$

Теорема 10.1. *Пусть состояние системы определяется как решение задачи* (10.13), (10.3), (10.4), *а функция стоимости имеет вид* (10.5). *Тогда существует хотя бы одно оптимальное управление.*

Доказательство. Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность; обозначим $y(v_n)$ через y_n. Тогда последовательность $\{v_n\}$ ограничена в пространстве $L^\infty(Q)$, а из соотношений (10.13), (10.4), (10.3) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|y_n'(t)|^2 + a(t;\ y_n(t),\ y_n(t))] - \frac{1}{2}a'(t;\ y_n(t),\ y_n(t)) +$$
$$+ \varepsilon\int_\Omega |\operatorname{grad}_x y_n'(x,\ t)|^2 dx + \int_\Omega v_n(y_n')^2 dx = \int_\Omega fy_n'\, dx.$$

Отсюда заключаем, что

$$\left.\begin{array}{l} y_n \text{ и } y_n' \text{ остаются в ограниченном подмножестве} \\ \text{пространства } L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)); \\ y_n' \text{ остаются в ограниченном подмножестве} \\ \text{пространства } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)). \end{array}\right\} \tag{10.14}$$

Согласно равенству (10.13),

$$y_n'' = f - Ay_n + \varepsilon\Delta y_n' - v_n y_n'; \tag{10.15}$$

поэтому последовательность $\{y_n''\}$ ограничена в пространстве $L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$. На основании «леммы о компактности» (Лионс [3, предложение 4.2 гл. 4]) из последовательности $\{y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{y_n\}$,— что наряду с соотношениями (10.6) и (10.9) имеем

$$y_n' \to y' \quad \text{сильно в } L^2(Q). \tag{10.16}$$

Тогда утверждение (10.10) справедливо и, следовательно, $y = y(u)$, т. е. u — оптимальное управление.

Замечание 10.2. Пусть $y_\varepsilon(v)$ — решение задачи (10.13), (10.3), (10.4), а функция стоимости равна

$$J_\varepsilon(v) = \int_Q |y_\varepsilon(v) - z_д|^2 dx\, dt + \nu\|v\|_{L^\infty(Q)},\quad \nu > 0.$$

Нам не известно, верно ли, что

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} J_\varepsilon(v) \to \inf_{v\in\mathcal{U}_\partial} J(v) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Замечание 10.3. Аналогичный теореме 10.1 результат справедлив, если A — эллиптический по x оператор порядка $2m$.

10.3. Оптимальное быстродействие

Пусть

$$\mathcal{U}_\partial \text{ — выпуклое замкнутое ограниченное подмножество пространства } H^1(Q). \tag{10.17}$$

Положим

$$\beta(\varphi) = |\varphi|^{\rho-1}\varphi, \quad \rho > 1. \tag{10.18}$$

Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение уравнения

$$y''(v) + Ay(v) + \beta(y'(v)) = f + v \text{ в } Q \tag{10.19}$$

с граничными условиями (10.3) и (10.4); здесь $f\in L^2(Q)$, $v\in\mathcal{U}_\partial$, а оператор A задан так же, как и в разд. 10.2.

Как известно (см. Лионс и Штраус [1] [1])), существует единственное решение $y(v)$ задачи (10.9), (10.3), (10.4), причем

$$y(v)\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad y'(v)\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad y(v)\in L^{\rho+1}(Q). \tag{10.20}$$

Пусть

$$K \text{ — слабо замкнутое подмножество в } V\times H. \tag{10.21}$$

Предположим, что

$$\left.\begin{array}{l}\text{существует такой элемент } v\in\mathcal{U}_\partial, \text{ что}\\ \{y(\tau;\, v),\ y'(\tau;\, v)\}\in K \text{ для некоторого } \tau\in(0,\ T).\end{array}\right\} \tag{10.22}$$

Оптимальное время определяется равенством

$$\tau_0 = \inf \tau, \tag{10.23}$$

т. е. τ_0 — нижняя грань всех значений τ, удовлетворяющих условию (10.22).

Теорема 10.2. *Пусть выполнены предположения* (10.17), (10.21) *и* (10.22). *Тогда существует такое управление* $u\in\mathcal{U}_\partial$, *что*

$$\{y(\tau_0;\, u),\ y'(\tau_0;\, u)\}\in K, \tag{10.24}$$

где τ_0 *— оптимальное время.*

[1]) В этой работе имеются более общие теоремы существования и единственности.

Доказательство. 1) Пусть значения τ_n таковы, что

$$\{y(\tau_n;\ v_n),\ y'(\tau_n;\ v_n)\} \in K,\ \tau_n \to \tau_0,\ v_n \in \mathcal{U}_\partial.$$

Положим $y_n = y(v_n)$. Из соотношений (10.19), (10.3), (10.4) (записанных при $v = v_n$) получим [1])

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|y_n'(t)|^2 + a(y_n(t),\ y_n(t))] + \int_\Omega |y_n'|^{\rho+1}dx = \int_\Omega (f + v_n)\,y_n'\,dx, \tag{10.25}$$

откуда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} y_n \text{ (соответственно } y_n') \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)) \\ \text{(соответственно } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)) \cap L^{\rho+1}(Q)) \end{array}\right\} \tag{10.26}$$

и что

$$\|y_n(\tau_n)\|_V + |y_n'(\tau_n)| \leqslant \text{const}. \tag{10.27}$$

Следовательно, можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{v_n,\ y_n\}$,— что

$$v_n \to u \text{ слабо в } H^1(Q) \text{ и сильно в } L^2(Q);\ u \in \mathcal{U}_\partial; \tag{10.28}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_n \to y \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), \\ y_n' \to y' \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)) \cap L^{\rho+1}(Q); \end{array}\right\} \tag{10.29}$$

$$\beta(y_n') \to g \quad \text{слабо в} \quad L^{(\rho+1)/\rho}(Q). \tag{10.30}$$

Так как $y_n'' = f + v_n - Ay_n - \beta(y_n')$, то

$$y_n'' \to y'' = f + u - Ay - g \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega)) \cap L^{(\rho+1)/\rho}(Q). \tag{10.31}$$

Согласно оценке (10.27), можно считать, что

$$\{y_n(\tau_n),\ y_n'(\tau_n)\} \to \{\chi_0,\ \chi_1\} \text{ слабо в } V \times H;\ \{\chi_0,\ \chi_1\} \in K. \tag{10.32}$$

Легко убедиться, что

$$\left.\begin{array}{l} y_n(\tau_n) \to y(\tau_0) \quad \text{слабо в } H, \\ y_n'(\tau_n) \to y'(\tau_0) \quad \text{слабо в } H^{-1}(\Omega) \cap L^{(\rho+1)/\rho}(\Omega). \end{array}\right\} \tag{10.33}$$

Действительно,

$$y_n(\tau_n) - y(\tau_0) = y_n(\tau_n) - y_n(\tau_0) + y_n(\tau_0) - y(\tau_0);$$

но, согласно первому из соотношений (10.29), имеем, в частности,

[1]) Для простоты предполагается, что оператор A не зависит от t; в противном случае см. Лионс и Штраус [1], Штраус [1].

$y_n(\tau_0) \to y(\tau_0)$ слабо в H и

$$|y_n(\tau_n) - y_n(\tau_0)| = \left|\int_{\tau_0}^{\tau_n} y_n'(t)\,dt\right| \leqslant c\,|\tau_n - \tau_0| \to 0.$$

Аналогично (применяя соотношение (10.31)) проверяем и второе утверждение (10.33).

Сравнивая соотношения (10.33) и (10.32), заключаем:

$$\{y(\tau_0),\ y'(\tau_0)\} = \{\chi_0,\ \chi_1\} \in K. \qquad (10.34)$$

Следовательно, мы докажем теорему, если убедимся, что $y = y(u)$, для чего достаточно показать, что

$$g = \beta(y'). \qquad (10.35)$$

2) Для доказательства равенства (10.35) воспользуемся *монотонностью* оператора $y' \to \beta(y')$. Пусть φ — некоторая функция, обладающая свойствами, аналогичными указанным в (10.20) и (10.3) свойствам функции $y = y(v)$.

Из монотонности оператора $y' \to \beta(y')$ следует, что

$$\int_Q [\beta(y_n') - \beta(\varphi')](y_n' - \varphi')\,dx\,dt \geqslant 0 \qquad \forall \varphi. \qquad (10.36)$$

С другой стороны,

$$\int_Q \beta(y_n')(y_n' - \varphi')\,dx\,dt =$$

$$= -\int_Q (y_n'' + Ay_n - f - v_n)(y_n' - \varphi')\,dx\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}[|y_n'(T)|^2 + a(y_n(T),\ y_n(T))] + \frac{1}{2}[|y_1|^2 + a(y_0,\ y_0)] +$$

$$+ \int_Q (f + v_n)(y_n' - \varphi')\,dx\,dt + \int_Q (y_n'' + Ay_n)\,\varphi'\,dx\,dt,$$

откуда

$$\varliminf \int_Q \beta(y_n')(y_n' - \varphi')\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}[|y'(T)|^2 + a(y(T),\ y(T))] + \frac{1}{2}[|y_1|^2 + a(y_0,\ y_0)] +$$

$$+ \int_Q (f + u)(y' - \varphi')\,dx\,dt\,^{1)} + \int_Q (y'' + Ay)\,\varphi'\,dx\,dt. \qquad (10.37)$$

Так как $y'' + Ay + g = f + v$, то правая часть неравенства (10.37) равняется $\int_Q g(y' - \varphi')\,dx\,dt$, а потому неравенство (10.36)

[1]) Здесь (и только здесь) используется *сильная* сходимость v_n к u. Нам не известно, останется ли теорема в силе, если не предполагать множество $\mathcal{U}_\partial$ относительно компактным в пространстве $L^2(Q)$.

переписывается в виде

$$\int_Q [g - \beta(\varphi')](y' - \varphi')\, dx\, dt \geqslant 0 \qquad \forall \varphi. \tag{10.38}$$

Применим теперь прием, предложенный в работе Минти [2]. В неравенстве (10.38) возьмем $\varphi = y - \lambda\psi$, где $\lambda > 0$, а функция ψ обладает такими же свойствами, что и функция φ. Тогда получим

$$\lambda \int_Q [g - \beta(y' - \lambda\psi)]\, \psi\, dx\, dt \geqslant 0 \qquad \forall \psi,$$

т. е.

$$\int_Q [g - \beta(y' - \lambda\psi)]\, \psi\, dx\, dt \geqslant 0.$$

Устремляя величину λ к нулю, приходим к неравенству

$$\int_Q [g - \beta(y')]\, \psi\, dx\, dt \geqslant 0 \qquad \forall \psi,$$

откуда и следует соотношение (10.35).

Замечание 10.4. В частном случае, когда функция β имеет вид (10.18), примененный выше общий метод доказательства может быть заменен специальным рассуждением (принадлежащим де Джоржи), использующим равномерную выпуклость (см. Лионс и Штраус [1]).

Примечания

Доказательство единственности (разд. 1.3) принадлежит Ладыженской [1]; оно совпадает с тем, которое приведено в книге Лионса и Madженеса [1, гл. 3].

При доказательстве существования (разд. 1.4) используется метод Фаэдо — Галеркина — аналогично тому, как это сделано в § 1 гл. 3.

Теоремы 2.1—3.4 (за исключением теоремы 3.1) представляют собой обобщение на *неограниченные* операторы в бесконечномерном случае результатов классической теории двухточечных граничных задач в конечномерном пространстве (обобщение на ограниченные операторы в бесконечномерном случае тривиально). Рассматриваемая ситуация аналогична той, которую мы встречали уже в гл. 3 для *параболических* операторов. Хотя здесь возникают серьезные дополнительные трудности технического характера, основным методом по-прежнему остается использование транспонирования.

Примеры, рассмотренные в § 4, приводят нас к многочисленным *односторонним граничным задачам* (причем отличным от тех, которые формулировались в гл. 3). Глубокий анализ этих задач (регулярность решения; изучение множества, разделяющего области, где решение обладает разными свойствами, и т. д.) представляет собой неисследованную и очень интересную проблему.

Расщепление (§ 5) приводит к интегро-дифференциальным уравнениям типа Риккати (которые формально аналогичны изучавшимся в гл. 3). Строгое обоснование получения этих уравнений связано со значительными трудностями. Мы подробно исследовали только один частный случай; расщепление задач, приведенных в примерах 7.2 и 7.3, не рассматривается. Систематическое изучение этого вопроса, и в особенности *прямое* исследование уравнений типа Риккати (т. е. исследование, не использующее их связи с теорией управления), представляется весьма интересным.

Для изучения ситуации, рассмотренной в § 6, можно привлечь теорию двойственности Калмана; относительно конечномерного случая см. Калман [3], Калман и Бюси [1].

Приведенные в § 7 утверждения распространяются — теми же методами — на случай систем, описываемых операторами порядка $2m$. Примеры можно найти в работе Сиразетдинова [1].

Результаты, содержащиеся в § 8, являются технически сложными и, вероятно, далеко не самыми сильными. Здесь мы наталкиваемся на трудность в исследовании регулярности решений гиперболических уравнений (отмеченную и детально изученную в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 5]. Отметим, в частности, что оценки в L^q, $q \neq 2$, в гиперболическом случае не являются точными (см. Литтман [1]). Именно поэтому результаты, полученные в § 14 гл. 3, не распространяются на гиперболический случай.

Доказательство теоремы 9.1 содержится в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 3]. Глубокое изучение односторонних граничных задач, сформулированных в этом параграфе (и особенно регулярности решения) представляется нам интересным. То же самое можно сказать и об уравнении типа Риккати, полученном в разд. 9.6.

Вместо оператора $\partial/\partial t + \partial/\partial x_0$ можно рассматривать *гиперболическую систему первого порядка*

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\mu} B_i(x_0, t) \frac{\partial}{\partial x_{0i}};$$

это порождает, в частности, и новые уравнения типа Риккати. Например, уравнение (9.70) в этом случае принимает вид

$$-\frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{0i}} (B_i(x_0, t) P) - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_{0i}} (B_i(\xi_0, t) P) -$$

$$-(A_x^* + A_\xi^*) P + \nu^{-1} \int\limits_{\Omega \times G} P(x, \eta, x_0, \eta_0, t) P(\eta, \xi, \eta_0, \xi_0, t)\, d\eta\, d\eta_0 =$$

$$= \delta(x - \xi)\, \delta(x_0 - \xi_0),$$

где P — теперь *матрица* $\| P(x, \xi, x_0, \xi_0, t) \|$, A — матрица эллиптической системы, а G — область, которую пробегает переменная x_0. При этом граничные условия будут довольно сложными; придется использовать теорию граничных задач для гиперболических систем первого порядка.

В таком же плане можно изучать *уравнения переноса*, а также *эллиптическо-параболические уравнения* — см. Олейник [1]. Уравнения с частными производными типа рассмотренных в разд. 9.2 (но без управления) исследовали Ильин [1] и Лионс [9].

Полученные в § 10 результаты порождают много проблем. Например, в доказательстве теоремы 10.2 используется как монотонность, так и компактность, причем не известно, действительно ли это необходимо. Другие теоремы существования см. в работе Шмаедеке [1].

Мы совсем не затронули целый ряд задач, которые в гиперболическом случае можно сформулировать вполне аналогично задачам, рассматривавшимся в гл. 3. Так, например, вне рамок этой главы остались:

— случай наличия ограничений на управление и на состояние системы (см. § 13, гл. 3);

— приложения теории двойственности (см. § 12 гл. 3) [1]);

— случай точечного управления (см. § 8 гл. 3) [2]);

— случай гиперболических операторов или операторов, корректных по Петровскому, *с запаздываниями*.

Выяснению *управляемости* гиперболических систем посвящены работы Фатторини [5], Рассела [3], Цуйока [1].

В работе А. Егорова [1] получен вариант принципа максимума Понтрягина для систем, описываемых гиперболическими уравнениями и задачей Гурса.

Применяя формулы, дающие явное выражение состояния системы (через собственные функции), можно свести некоторые задачи управления к *проблеме моментов*; см. Бутковский и Полтавский [1], Бутковский [1].

Наконец, рассмотренными методами можно изучать управление системами, описываемыми уравнениями Шредингера. В случае отсутствия ограничений на управление расцепление приводит к новым нелинейным уравнениям с частными производными типа Риккати.

---

[1]) В связи с этим вопросом см. работу Бенсуссана [3]

[2]) Относительно этого случая мы отсылаем к книге Лионса и Мадженеса [1].

ГЛАВА 5

Регуляризация, аппроксимация и метод штрафов

§ 1. Регуляризация

1.1. Параболическая регуляризация

Пусть выполнены предположения § 1 гл. 4; тогда $V \subset H \subset V'$. Для простоты предположим, что форма $a(t; \varphi, \psi)$ *не зависит от* переменной t, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} a(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi) \text{ — непрерывная} \\ \text{билинейная симметричная форма на } V. \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Для того чтобы упростить изложение, допустим, что

$$a(\varphi, \varphi) \geqslant \alpha \|\varphi\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall \varphi \in V. \tag{1.2}$$

Рассмотрим сначала эволюционное уравнение без управления

$$y'' + Ay = f, \tag{1.3}$$

где f — данная функция в пространстве $L^2(0, T; H)$, с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \; y'(0) = y_1, \quad y_0 \in V, \; y_1 \in H. \tag{1.4}$$

Как мы видели (§ 1 гл. 4), задача (1.3), (1.4) имеет такое единственное решение y, что

$$y \in L^2(0, T; V), \; y' \in L^2(0, T; H). \tag{1.5}$$

Будем *аппроксимировать* задачу (1.3) — (1.5) некоторой задачей *параболического* типа.

Пусть ε — данное положительное число. Докажем следующие предложения.

Теорема 1.1. *Существует единственная функция* y_ε, *для которой*

$$y_\varepsilon'' + Ay_\varepsilon + \varepsilon A y_\varepsilon' = f; \tag{1.6}$$

$$y_\varepsilon(0) = y_0, \; y_\varepsilon'(0) = y_1, \tag{1.7}$$

$$y_\varepsilon \in L^2(0, T; V), \; y_\varepsilon' \in L^2(0, T; H). \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. *Если* $\varepsilon \to 0$, *то*

$$y_\varepsilon \to y \;\; \text{в} \;\; L^2(0, T; V), \tag{1.9}$$

$$y_\varepsilon' \to y' \;\; \text{в} \;\; L^2(0, T; H), \tag{1.10}$$

где y *— решение задачи* (1.3) — (1.5).

Замечание 1.1. Задача (1.6) — (1.8) называется *параболической регуляризацией* задачи (1.3) — (1.5). Такое название объясняется ниже (после того, как уравнение (1.3) будет записано в виде системы первого порядка).

Доказательство теоремы 1.1. Будем рассуждать как в разд. 5.1 гл. 4. Введем пространства

$$\mathscr{V} = V \times V, \quad \mathfrak{h} = V \times H, \quad \mathscr{V}' = V \times V';$$

в пространстве $\mathfrak{h}$ скалярное произведение определим по формуле

$$[\varphi, \psi] = a(\varphi_0, \psi_0) + (\varphi_1, \psi_1),$$

где $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1\} \in \mathfrak{h}$, $\psi = \{\psi_0, \psi_1\} \in \mathfrak{h}$.

Введем обозначения:

$$y_\varepsilon = y_{\varepsilon 0}, \quad y_\varepsilon' = y_{\varepsilon 1}, \quad \mathbf{y}_\varepsilon = \{y_{\varepsilon 0}, y_{\varepsilon 1}\}, \tag{1.11}$$

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & \varepsilon A \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Перепишем задачу (1.6) — (1.8), используя эти обозначения:

$$\frac{d\mathbf{y}_\varepsilon}{dt} + \mathscr{A}_\varepsilon \mathbf{y}_\varepsilon = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \{0, f\}; \tag{1.13}$$

$$\mathbf{y}_\varepsilon(0) = \{y_0, y_1\}; \tag{1.14}$$

$$\mathbf{y}_\varepsilon \in L^2(0, T; \mathscr{V}), \quad \mathbf{y}_\varepsilon' \in L^2(0, T; \mathscr{V}'). \tag{1.15}$$

Теорема 1.1 будет доказана, если мы убедимся, что выполняются условия теоремы 1.2 гл. 3 (этим и оправдывается терминология, введенная в замечании 1.1). Но, как мы видели (см. формулу (5.16) гл. 4),

$$[\mathscr{A}\varphi, \varphi] = 0, \text{ поэтому } [\mathscr{A}_\varepsilon\varphi, \varphi] = \varepsilon a(\varphi_1, \varphi_1)$$

и, следовательно, при $\lambda > 0$

$$[\mathscr{A}_\varepsilon\varphi, \varphi] + \lambda[\varphi]^2 = \lambda a(\varphi_0, \varphi_0) + [\lambda |\varphi_1|^2 + \varepsilon a(\varphi_1, \varphi_1)] \geqslant \geqslant \alpha \inf(\lambda, \varepsilon) \|\varphi\|^2_{\mathscr{V}}.$$

Отсюда и вытекает справедливость неравенства (1.2) гл. 3, т. е. теорема 1.2 гл. 3 действительно применима.

Доказательство теоремы 1.2. Умножая скалярно обе части уравнения (1.6) на производную функции y_ε, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|y_\varepsilon'(t)|^2 + a(y_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))] + \varepsilon a(y_\varepsilon'(t), y_\varepsilon'(t)) = (f(t), y_\varepsilon'(t)),$$

откуда

$$|y_\varepsilon'(t)|^2 + a(y_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) + 2\varepsilon\int_0^t a(y_\varepsilon'(\sigma), y_\varepsilon'(\sigma))\,d\sigma =$$
$$= |y_1|^2 + a(y_0, y_0) + 2\int_0^t (f(\sigma), y_\varepsilon'(\sigma))\,d\sigma.$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{y}_\varepsilon \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^2(0,\ T;\ \mathfrak{h})\ ^{1)};\end{array}\right\} \qquad (1.16)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\varepsilon}\, y_\varepsilon' \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^2(0,\ T;\ V).\end{array}\right\} \qquad (1.17)$$

Следовательно, из последовательности $\{y_\varepsilon\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{y_\varepsilon\}$,— что

$$\left.\begin{array}{l} y_\varepsilon \to z \ \text{ слабо в } L^2(0,\ T;\ V); \\ y_\varepsilon' \to z' \ \text{ слабо в } L^2(0,\ T;\ H).\end{array}\right\} \qquad (1.18)$$

Так как, согласно соотношению (1.17), $\varepsilon A y_\varepsilon' \to 0$ в пространстве $L^2(0,\ T;\ V')$ при $\varepsilon \to 0$, то из соотношений (1.6) и (1.18) заключаем, что

$$y_\varepsilon'' \to z'' = f - Az \ \text{ слабо в } L^2(0,\ T;\ V'). \qquad (1.19)$$

Тогда, в частности, $y_\varepsilon(0) \to z(0)$ слабо в H; $y_\varepsilon'(0) \to z'(0)$ слабо в V'; поэтому $z(0) = y_0$, $z'(0) = y_1$ и в силу единственности решения задачи (1.3) — (1.5) $z = y$.

Таким образом, мы показали, что $\mathbf{y}_\varepsilon \to \mathbf{y}$ слабо в пространстве $L^2(0,\ T;\ \mathfrak{h})$; остается доказать теперь *сильную* сходимость. Для этого рассмотрим выражение

$$X_\varepsilon = |y_\varepsilon'(t) - y'(t)|^2 + a(y_\varepsilon(t) - y(t),\ y_\varepsilon(t) - y(t)) +$$
$$+ 2\varepsilon\int_0^t a(y_\varepsilon'(\sigma), y_\varepsilon'(\sigma))\,d\sigma. \qquad (1.20)$$

Применяя равенства (1.6) и (1.3), легко проверить, что

$$X_\varepsilon = 2\int_0^t (f, y_\varepsilon')\,d\sigma + 2\int_0^t (f, y')\,d\sigma -$$
$$- 2\left[(y_\varepsilon'(t), y'(t)) + a(y_\varepsilon(t), y(t))\right] + 2(|y_1|^2 + a(y_0, y_0)). \qquad (1.21)$$

---

[1]) На самом деле — даже в некотором ограниченном подмножестве пространства $L^\infty(0,\ T;\ \mathfrak{h})$.

С другой стороны, из тех же равенств (1.6) и (1.3) следует, что

$$(y''(t),\ y'_\varepsilon(t)) + a(y(t),\ y'_\varepsilon(t)) = (f(t),\ y'_\varepsilon(t)),$$

$$(y''_\varepsilon(t),\ y'(t)) + a(y_\varepsilon(t),\ y'(t)) + \varepsilon a(y'_\varepsilon(t),\ y'(t)) = (f(t),\ y'(t))$$

и поэтому

$$(y'_\varepsilon(t),\ y'(t)) + a(y_\varepsilon(t),\ y(t)) = \int_0^t (f(\sigma),\ y'_\varepsilon(\sigma) + y'(\sigma))\,d\sigma -$$

$$- \varepsilon \int_0^t a(y'_\varepsilon(\sigma),\ y'(\sigma))\,d\sigma + |y_1|^2 + a(y_0,\ y_0).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (1.21), получаем

$$X_\varepsilon \to 0 \qquad \forall t. \tag{1.22}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathbf{y}_\varepsilon \to \mathbf{y} \quad \textit{сильно в} \quad L^2(0,\ T;\ \mathfrak{h}).$$

Замечание 1.2. На самом деле из соотношения (1.22) следует более сильное утверждение:

$$y_\varepsilon(t) \to y(t) \text{ сильно в } V \quad \forall t \in [0,\ T]; \tag{1.23}$$

$$y'_\varepsilon(t) \to y'(t) \text{ сильно в } H. \tag{1.24}$$

1.2. Приложение к задачам оптимального управления

Рассмотрим теперь систему, состояние $y(v)$ которой определяется как решение задачи (см. § 2 гл. 4)

$$y''(v) + Ay(v) = f + Bv; \tag{1.25}$$

$$y(0;\ v) = y_0,\ y'(0;\ v) = y_1; \tag{1.26}$$

$$y(v) \in L^2(0,\ T;\ V),\ y'(v) \in L^2(0,\ T;\ H), \tag{1.27}$$

где

$$B \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\ L^2(0,\ T;\ H)). \tag{1.28}$$

Пусть функция стоимости имеет вид (см. разд. 2.2 гл. 4)

$$J(v) = \|Cy(v) - z_д\|^2_{\mathscr{H}} + (Nv,\ v)_{\mathscr{U}}, \tag{1.29}$$

где

$$C \in \mathscr{L}(L^2(0,\ T;\ H);\ \mathscr{H})\ ^{1)}, \tag{1.30}$$

$$N \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\ \mathscr{U}), \qquad N \geqslant \nu I, \qquad \nu > 0. \tag{1.31}$$

---

[1]) Можно также рассмотреть случай, когда $C \in \mathscr{L}(L^2(0,\ T;\ V);\ \mathscr{H})$ (см. разд. 3.4 гл. 4), показав предварительно, что процесс параболической регуляризации сходится также в случаях, когда применяется транспонирование (см. разд. 3.1 гл. 4). Мы не будем подробно останавливаться на этом.

Рассмотрим далее состояние $y_\varepsilon(v)$, определенное как решение задачи, являющейся параболической регуляризацией задачи (1.25), (1.26):

$$y''_\varepsilon(v) + Ay_\varepsilon(v) + \varepsilon Ay'_\varepsilon(v) = f + Bv, \quad \varepsilon > 0; \tag{1.32}$$

$$y_\varepsilon(0; v) = y_0, \ y'_\varepsilon(0; v) = y_1; \tag{1.33}$$

в качестве функции стоимости возьмем

$$J_\varepsilon(v) = \|Cy_\varepsilon(v) - z_д\|^2_{\mathscr{H}} + (Nv, v)_{\mathscr{U}}. \tag{1.34}$$

Пусть $\mathscr{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathscr{U}$; положим

$$j = \inf J(v), \ j_\varepsilon = \inf J_\varepsilon(v), \ v \in \mathscr{U}_\partial, \tag{1.35}$$

и допустим, что u (соответственно u_ε) — оптимальное управление для системы (1.25) — (1.31) (соответственно (1.32) — (1.34)), т. е.

$$u, u_\varepsilon \in \mathscr{U}_\partial, \ J(u) = j, \ J_\varepsilon(u_\varepsilon) = j_\varepsilon. \tag{1.36}$$

Теорема 1.3. *Пусть выполнены предположения* (1.1), (1.2), *а* u, u_ε — *оптимальные управления* (*см.* (1.36) *и* (1.35)). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \to u \ \text{в} \ \mathscr{U}; \tag{1.37}$$

$$\left.\begin{aligned} &y_\varepsilon(u_\varepsilon) \to y(u) \ \text{в} \ L^2(0, T; V), \\ &y'_\varepsilon(u_\varepsilon) \to y'(u) \ \text{в} \ L^2(0, T; H); \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

$$j_\varepsilon \to j. \tag{1.39}$$

Доказательство. 1) Согласно теореме **1.2**, для любого фиксированного $v \in \mathscr{U}$

$$J_\varepsilon(v) \to J(v). \tag{1.40}$$

Тогда, в частности, $j_\varepsilon \leqslant J_\varepsilon(u) \to J(u) = j$, т. е.

$$\overline{\lim}\, j_\varepsilon \leqslant j. \tag{1.41}$$

2) С другой стороны,

$$j_\varepsilon = J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant \nu \|u_\varepsilon\|^2_{\mathscr{U}}, \tag{1.42}$$

что вместе с соотношением (1.41) доказывает ограниченность величины $\|u_\varepsilon\|_{\mathscr{U}}$.

Таким образом, из последовательности $\{u_\varepsilon\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{u_\varepsilon\}$,— что

$$u_\varepsilon \to w \ \text{слабо в} \ \mathscr{U}; \ w \in \mathscr{U}_\partial. \tag{1.43}$$

Тогда, согласно теореме 1.2, можно утверждать, что

$$y_\varepsilon(u_\varepsilon) \to y(w) \text{ слабо в } L^2(0,\ T;\ V),$$

$$y'_\varepsilon(u_\varepsilon) \to y'(w) \text{ слабо в } L^2(0;\ T;\ H).$$

Поэтому

$$\underline{\lim}\, J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant J(w), \tag{1.44}$$

откуда, сравнивая с оценкой (1.41), находим, что $w = u$ и выполняется соотношение (1.39).

Таким образом, соотношения (1.37), (1.38) справедливы в смысле слабой сходимости.

3) Так как

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = (Cy_\varepsilon(u_\varepsilon),\ Cy_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\mathscr{H}} + (Nu_\varepsilon,\ u_\varepsilon)_{\mathscr{U}} - \\ - 2\,(Cy_\varepsilon(u_\varepsilon),\ z_д) - \|z_д\|^2 \to J(u)$$

и $J_\varepsilon(0) \to J(0)$, то, полагая

$$(C[y_\varepsilon(u_\varepsilon) - y_\varepsilon(0)],\ C[y_\varepsilon(u) - y_\varepsilon(0)]) + (Nu_\varepsilon,\ u_\varepsilon)_{\mathscr{U}} = \\ = |||u_\varepsilon|||^2_{\mathscr{U}},$$

получаем $|||u_\varepsilon|||_{\mathscr{U}} \to |||u|||_{\mathscr{U}}$. Поскольку норма $|||\cdot|||_{\mathscr{U}}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{\mathscr{U}}$, приходим к соотношению (1.37); соотношение (1.38) отсюда следует по теореме 1.2.

Замечание 1.3. В силу замечания 1.2 справедливы результаты, аналогичные теореме 1.3, для следующих функций стоимости:

$$J(v) = \|Cy'(v) - z_д\|^2_{\mathscr{H}} + (Nv,\ v)_{\mathscr{U}}, \tag{1.45}$$

$$C \in \mathscr{L}(L^2(0,\ T;\ H);\ \mathscr{H}) \tag{1.46}$$

(см. разд. 2.3 гл. 4);

$$J(v) = \|D_0 y(T;\ v) - z_д\|^2_{\mathscr{H}} + (Nv,\ v)_{\mathscr{U}}, \tag{1.47}$$

$$D_0 \in \mathscr{L}(H;\ \mathscr{H})\,^{1)} \tag{1.48}$$

(см. разд. 2.4 гл. 4);

$$J(v) = \|Dy'(T;\ v) - z_д\|^2_{\mathscr{H}} + (Nv,\ v)_{\mathscr{U}}, \tag{1.49}$$

$$D \in \mathscr{L}(H;\ \mathscr{H}) \tag{1.50}$$

(см. разд. 2.5 гл. 4).

Замечание 1.4. Ясно, что, применяя результаты гл. 3, можно записать соотношения, характеризующие оптимальное управление u_ε. Мы сделаем это, считая выполненными условия теоремы 1.3.

---

[1]) Если $D_0 \in \mathscr{L}(V;\ \mathscr{H})$, то можно получить аналогичные результаты, применяя метод транспонирования к параболической регуляризации.

Запишем уравнение (1.32) в виде системы первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{y}_\varepsilon(v)}{dt} + \mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{y}_\varepsilon(v) = \mathbf{f} + \mathcal{B}v, \tag{1.51}$$

где (см. разд. 5.1 гл. 4)

$$\mathcal{B}v = \{0, Bv\}. \tag{1.52}$$

Вводя (как в разд. 5.1 гл. 4) оператор

$$\mathcal{C} \in \mathcal{L}(L^2(0, T; \mathfrak{h}); \mathcal{H}); \ \mathcal{C}\mathbf{y} = Cy_0, \ \mathbf{y} = \{y_0, y_1\},$$

можем записать функцию стоимости (1.34) в виде

$$J_\varepsilon(v) = \| \mathcal{C}\mathbf{y}_\varepsilon(v) - z_д \|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_{\mathcal{U}}. \tag{1.53}$$

Определим сопряженное состояние $\mathbf{p}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathbf{p}_\varepsilon$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\mathbf{p}_\varepsilon}{dt} + \mathcal{A}^*_\varepsilon \mathbf{p}_\varepsilon = \mathcal{C}^* \Lambda_{\mathcal{H}} [\mathcal{C}\mathbf{y}_\varepsilon(u_\varepsilon) - z_д], \\ &\mathbf{p}_\varepsilon(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

Тогда для оптимального управления u_ε удовлетворяются соотношения (1.51) (при $v = u_\varepsilon$), $\mathbf{y}_\varepsilon(0; u_\varepsilon) = \{y_0, y_1\}$, (1.54) и

$$(\Lambda^{-1}_{\mathcal{U}} \mathcal{B}^* \mathbf{p}_\varepsilon + Nu_\varepsilon, \ v - u_\varepsilon)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.55}$$

Вернемся к «скалярной» записи. Положим

$$\mathbf{p}_\varepsilon = \{p_{\varepsilon 0}, p_{\varepsilon 1}\}, \qquad p_\varepsilon = p_{\varepsilon 1}. \tag{1.56}$$

Тогда (ср. с разд. 5.1 гл. 4)

$$\left.\begin{aligned} &-p'_{\varepsilon 0} + p_{\varepsilon 1} = A^{-1} C^* \Lambda_{\mathcal{H}} [Cy_\varepsilon(u_\varepsilon) - z_д], \\ &-p'_{\varepsilon 1} - Ap_{\varepsilon 0} + \varepsilon A p_{\varepsilon 1} = 0; \\ &p_{\varepsilon 0}(T) = 0, \ p_{\varepsilon 1}(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.57}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &p''_\varepsilon + Ap_\varepsilon - \varepsilon A p'_\varepsilon = C^* \Lambda_{\mathcal{H}} [Cy_\varepsilon(u_\varepsilon) - z_д]; \\ &p_\varepsilon(T) = 0, \ p'_\varepsilon(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.58}$$

Неравенство (1.55) принимает вид

$$(\Lambda^{-1}_{\mathcal{U}} B^* p_\varepsilon + Nu_\varepsilon, \ v - u_\varepsilon)_{\mathcal{U}} \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{1.59}$$

Таким образом,

оптимальное управление $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial$ для задачи (1.32) — (1.34) характеризуется соотношениями (1.32), (1.33) (при $v = u_\varepsilon$), (1.58), (1.59). (1.60)

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3, *а* p_ε — *сопряженное состояние, определенное как решение задачи* (1.58). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\left.\begin{aligned} p_\varepsilon &\to p \quad \text{в } L^2(0, T; V); \\ p'_\varepsilon &\to p' \quad \text{в } L^2(0, T; H), \end{aligned}\right\} \tag{1.61}$$

где p — *решение задачи*

$$\left.\begin{aligned} &p'' + Ap = C^*\Lambda_{\mathscr{H}}[Cy(u) - z_д]; \\ &p(T) = 0, \quad p'(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.62}$$

Таким образом, $p(u)$ — сопряженное состояние для системы (1.25) — (1.31) (см. соотношения (2.19) гл. 4).

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1.3, $y_\varepsilon(u_\varepsilon) \to y(u)$ в пространстве $L^2(0, T; H)$, а потому можно применить теорему 1.2 к функциям, удовлетворяющим соотношениям (1.58) и (1.62). (При этом нужно обратить время, что в данном случае возможно.)

Замечание 1.5. В случае $\mathscr{U}_\partial = \mathscr{U}$ оптимальное управление системой (1.25) — (1.31) получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &y'' + Ay + BN^{-1}\Lambda_{\mathscr{U}}^{-1}B^*p = f, \\ &p'' + Ap - C^*\Lambda_{\mathscr{H}}Cy = -C^*\Lambda_{\mathscr{H}}z_д; \\ &y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ p(T) = 0, \ p'(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.63}$$

а оптимальное управление для параболической регуляризации (1.32) — (1.34) получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &y''_\varepsilon + Ay_\varepsilon + \varepsilon Ay'_\varepsilon + BN^{-1}\Lambda_{\mathscr{U}}^{-1}B^*p_\varepsilon = f, \\ &p''_\varepsilon + Ap_\varepsilon - \varepsilon Ap'_\varepsilon - C^*\Lambda_{\mathscr{H}}Cy_\varepsilon = -C^*\Lambda_{\mathscr{H}}z_д; \\ &y_\varepsilon(0) = y_0, \ y'_\varepsilon(0) = y_1, \ p_\varepsilon(T) = 0, \ p'_\varepsilon(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

а именно

$$u = N^{-1}\Lambda_{\mathscr{U}}^{-1}B^*p, \quad u_\varepsilon = N^{-1}\Lambda_{\mathscr{U}}^{-1}B^*p_\varepsilon. \tag{1.65}$$

1.3. Приложение к задаче расцепления

Пусть $\mathscr{U} = L^2(0, T; E)$, $\mathscr{H} = L^2(0, T; F)$ (см. § 5 гл. 4), а операторы B, C, N определяются так:

$$\begin{aligned} Bv &= «t \to B(t)\,v», \\ Cy &= «t \to C(t)\,y», \\ Nv &= «t \to N(t)\,v». \end{aligned}$$

Введем операторы $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ по формулам (5.32) гл. 4. Тогда задача (1.64) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{y}_\varepsilon' + \mathscr{A}_\varepsilon \mathbf{y}_\varepsilon + \mathscr{D}_1 \mathbf{p}_\varepsilon = \mathbf{f}, \\ &-\mathbf{p}_\varepsilon' + \mathscr{A}_\varepsilon \mathbf{p}_\varepsilon - \mathscr{D}_2 \mathbf{y}_\varepsilon = -\mathscr{C}^* \Lambda_{\mathscr{H}} z_д; \end{aligned}\right\} \tag{1.66}$$

$$\mathbf{y}_\varepsilon(0) = \{y_0, y_1\}, \ \mathbf{p}_\varepsilon(T) = 0. \tag{1.67}$$

Для этой задачи выполнены все условия, при которых применима теория § 4 гл. 3. Поэтому справедливо тождество

$$\mathbf{p}_\varepsilon(t) = \mathscr{P}_\varepsilon(t)\,\mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathbf{r}_\varepsilon(t), \tag{1.68}$$

$$\mathscr{P}_\varepsilon(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{h};\ \mathfrak{h}),\ \mathscr{P}_\varepsilon^*(t) = \mathscr{P}_\varepsilon(t), \tag{1.69}$$

где оператор $\mathscr{P}_\varepsilon(t)$ определяется через решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{\beta}_\varepsilon}{dt} + \mathscr{A}_\varepsilon \boldsymbol{\beta}_\varepsilon + \mathscr{D}_1 \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon = 0 \quad \text{в } (s, T); \\ &-\frac{d\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon}{dt} + \mathscr{A}_\varepsilon^* \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon - \mathscr{D}_2 \boldsymbol{\beta}_\varepsilon = 0 \quad \text{в } (s, T); \\ &\boldsymbol{\beta}_\varepsilon(s) = \mathbf{h} \in \mathfrak{h},\ \ \boldsymbol{\gamma}_\varepsilon(T) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.70}$$

а именно

$$\mathscr{P}_\varepsilon(s)\,\mathbf{h} = \mathbf{y}_\varepsilon(s). \tag{1.71}$$

Оператор $\mathscr{P}_\varepsilon(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению типа Риккати

$$\left.\begin{aligned} &-\mathscr{P}_\varepsilon' + \mathscr{P}_\varepsilon \mathscr{A}_\varepsilon + \mathscr{A}_\varepsilon^* \mathscr{P}_\varepsilon + \mathscr{P}_\varepsilon \mathscr{D}_1 \mathscr{P}_\varepsilon = \mathscr{D}_2 \ \text{в } (0, T); \\ &\mathscr{P}_\varepsilon(T) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.72}$$

или, после исключения оператора $\mathscr{A}_\varepsilon$,

$$\left.\begin{aligned} &-\mathscr{P}_\varepsilon' + (\mathscr{P}_\varepsilon \mathscr{A} - \mathscr{A}\mathscr{P}_\varepsilon) + 2\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \mathscr{P}_\varepsilon + \mathscr{P}_\varepsilon \mathscr{D}_1 \mathscr{P}_\varepsilon = \mathscr{D}_2 \ \text{в } (0, T); \\ &\mathscr{P}_\varepsilon(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.73}$$

Кроме того, справедливо тождество (см. разд. 5.3 гл. 4)

$$\mathbf{p}(t) = \mathscr{P}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{r}(t), \tag{1.74}$$

и тогда по теореме 1.4 получаем [1], что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathscr{P}_\varepsilon(t)\,\mathbf{h} \to \mathscr{P}(t)\,\mathbf{h} \ \text{в } \mathfrak{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathfrak{h}. \tag{1.75}$$

[1]) Используя результат, аналогичный только что сформулированному для задачи (1.70).

Это позволяет *доказать*, что оператор $\mathcal{P}(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &-\mathcal{P}' + (\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{P})^{*} + \mathcal{P}\mathcal{D}_1\mathcal{P} = \mathcal{D}_2 \text{ в } (0, T);\\ &\mathcal{P}(T) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

1.4. Несколько замечаний

Замечание 1.6. Можно также аппроксимировать *параболические* задачи *эллиптическими*. Если, например, состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи (см. § 2 гл. 3)

$$\frac{dy(v)}{dt} + A(t)\,y(v) = f + Bv;\quad y(0;\, v) = 0, \tag{1.77}$$

то функцию $y(v)$ можно аппроксимировать решением $y_\varepsilon(v)$ задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\varepsilon\frac{d^2y(v)}{dt^2} + \frac{dy_\varepsilon(v)}{dt} + A(t)\,y_\varepsilon(v) = f + Bv,\quad \varepsilon > 0;\\ &y_\varepsilon(0;\, v) = 0,\quad \frac{dy_\varepsilon(T;\, v)}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.78}$$

и получить результаты, аналогичные теореме 1.3.

Замена задачи (1.77) задачей (1.78) называется *эллиптической регуляризацией* (см. Лионс [10], Олейник [1]).

Замечание 1.7. Можно не менять типа задачи и получить *теоремы устойчивости* следующего, например, характера.

Пусть состояние системы определяется как решение задачи (1.25) — (1.27). Пусть, далее, $\{A_m\}$ — последовательность таких операторов, что

$$\left.\begin{aligned} &(A_m\varphi, \psi) = a_m(\varphi, \psi) = a_m(\psi, \varphi) \to a(\varphi, \psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in V;\\ &a_m(\varphi, \varphi) \geqslant \alpha\|\varphi\|^2,\ \alpha > 0 \text{ и не зависит от } m. \end{aligned}\right\} \tag{1.79}$$

Обозначим через $y_m(v)$ состояние системы, описываемой с помощью оператора A_m, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &y_m''(v) + A_m y_m(v) = f + Bv;\\ &y_m(0;\, v) = y_{0m},\quad y_m'(0;\, v) = y_{1m}, \end{aligned}\right\} \tag{1.80}$$

причем

$$y_{0m} \to y_0 \text{ в } V;\quad y_{1m} \to y_1 \text{ в } H. \tag{1.81}$$

Наконец, пусть функция стоимости для системы (1.25) — (1.27) имеет вид (1.29), а для системы (1.80)

$$J_m(v) = \|Cy_m(v) - z_д\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_{\mathcal{U}}. \tag{1.82}$$

Тогда имеют место результаты, аналогичные теореме 1.3 (при этом J_ε и y_ε надо заменить на J_m и y_m соответственно).

Это позволяет получить *теоремы об аппроксимации*, если использовать

(i) метод Фаэдо — Галеркина — для аппроксимации состояния;

(ii) метод конечных разностей — также для аппроксимации состояния (в этом случае возникают дополнительные технические трудности [1]); см. Боссави [1], Неделек [1].

Замечание 1.8. Аналогичные результаты о сходимости справедливы и для некоторых *нелинейных* систем.

Замечание 1.9. Методы, описанные выше, не следует путать с методом *регуляризации управления* (см. разд. 1.5).

Замечание 1.10. Необходимо иметь в виду, что *управляемость не является устойчивой* относительно регуляризации и аппроксимации.

1.5. Регуляризация управления

Пусть выполнены предположения разд. 8.3 гл. 3. Состояние системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f \ \text{ в } Q, \ f \in L^2(Q); \\ &\left.\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = v; \ y(0; v) = y_0 \ \text{ на } \Omega, \ y_0 \in L^2(\Omega), \end{aligned}\right\} \tag{1.83}$$

где

$$v \in \mathcal{U} = L^2(\Sigma) = L^2(0, T; L^2(\Gamma)). \tag{1.84}$$

Функция стоимости имеет вид

$$J(v) = \int_\Sigma [y(v)|_\Sigma - z_д]^2 \, d\Sigma + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)}. \tag{1.85}$$

Предположим, что

$$\mathcal{U}_\partial = \{v \mid v \in \mathcal{U}, \ v(t) \in K \text{ почти всюду}\}, \tag{1.86}$$

где K — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L^2(\Gamma)$.

Введем *более регулярное пространство управлений*

$$\mathcal{U}^1 = H^1(0, T; L^2(\Gamma)) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Sigma), \ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Sigma) \right\}, \tag{1.87}$$

[1]) Весьма серьезные, например, при аппроксимации ядра $\mathscr{P}(x, \xi, t)$ оператора $\mathscr{P}(t)$.

представляющее собой гильбертово пространство с нормой

$$\| v \|_{\mathcal{U}^1} = \left(\int_\Sigma (| v |^2 + | v' |^2) \, d\Sigma \right)^{1/2}.$$

Затем введем множество

$$\mathcal{U}_\partial^1 = \mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}_\partial \tag{1.88}$$

($\mathcal{U}_\partial^1$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}^1$) и *определим регуляризованную функцию стоимости*

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Sigma [y(v)|_\Sigma - z_д]^2 \, d\Sigma + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)} + \varepsilon \| v' \|^2_{L^2(\Sigma)}, \ \varepsilon > 0. \tag{1.89}$$

Регуляризованная задача управления состоит в отыскании

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial^1} J_\varepsilon(v).$$

Очевидно, что существует единственный элемент $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial^1$, для которого

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial^1} J_\varepsilon(v). \tag{1.90}$$

Теорема 1.5. *Пусть состояние системы определяется как решение задачи* (1.83), *а функция стоимости и регуляризованная функция стоимости имеют вид* (1.85) *и* (1.89) *соответственно. Пусть множества* $\mathcal{U}_\partial$ *и* $\mathcal{U}_\partial^1$ *определены соотношениями* (1.86) *и* (1.88) *соответственно. Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \to u \ \text{в} \ L^2(\Sigma), \tag{1.91}$$

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial^1} J_\varepsilon(v) \to \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{1.92}$$

Доказательство. 1) Так как $\mathcal{U}_\partial^1 \subset \mathcal{U}_\partial$, то

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial^1} J(v) \geqslant \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) = J(u). \tag{1.93}$$

Докажем следующее утверждение:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для любого } \eta > 0 \text{ существует такое } \varepsilon(\eta), \text{ что} \\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J(u) + \eta \text{ при } \varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta). \end{array} \right\} \tag{1.94}$$

Для этого выберем элемент $w \in \mathcal{U}_\partial^1$ так, чтобы

$$J(w) \leqslant J(u) + \frac{1}{2}\eta. \tag{1.95}$$

Это возможно, поскольку множество $\mathcal{U}_\partial^1$ *плотно* в множестве $\mathcal{U}_\partial$. Действительно, пусть $\tilde{u}$ есть продолжение функции u на действительную прямую $\mathbf{R}_t$, причем $\tilde{u} \in L^2(\mathbf{R}_t; L^2(\Gamma))$ и $\tilde{u}(t) \in K$ почти всюду (такое продолжение, очевидно, существует). Регуляризуя затем функцию $\tilde{u}$:

$$\tilde{u} * \rho_n = \tilde{w}_n, \quad \rho_n \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_t), \quad \rho_n \geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_n \, dt = 1, \tag{1.96}$$

убеждаемся, что (в силу теоремы о выпуклости) $\tilde{w}_n(t) \in K$ почти всюду. Обозначая далее через w_n сужение функции $\tilde{w}_n$ на интервал $(0, T)$, находим, что $w_n \in \mathscr{U}_\partial^1$ и при $n \to \infty$

$$w_n \to u \text{ в } L^2(0, T; L^2(\Gamma)).$$

Следовательно, имеет место неравенство (1.95). Но тогда

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(w) \leqslant J(u) + \frac{1}{2}\eta - \varepsilon \| w' \|^2_{L^2(\Sigma)},$$

откуда и следует (1.94), если взять $\varepsilon(\eta) \| w' \|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant \eta/2$.

Из утверждения (1.94) в свою очередь вытекает неравенство

$$\overline{\lim}\, J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J(u), \tag{1.97}$$

которое вместе с неравенствами (1.93) доказывает соотношение (1.92).

2) В силу сказанного

$$C \geqslant J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant \nu \| u_\varepsilon \|^2_{L^2(\Sigma)} + \varepsilon \| u'_\varepsilon \|^2_{L^2(\Sigma)}.$$

Значит, из последовательности $\{u_\varepsilon\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{u_\varepsilon\}$, — что

$$u_\varepsilon \to u^0 \text{ слабо в } \mathscr{U}; \; u^0 \in \mathscr{U}_\partial.$$

С другой стороны,

$$\underline{\lim}\, J_\varepsilon(u) \geqslant \underline{\lim}\, J(u_\varepsilon) \geqslant J(u^0),$$

что вместе с неравенством (1.97) доказывает справедливость соотношения (1.91) в смысле *слабой* сходимости.

Далее поступаем так же, как в части 3 доказательства теоремы 1.3. Полагая

$$|||v|||^2 = \int\limits_\Sigma [y(v) - y(0)]^2 d\Sigma + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)},$$

легко проверить, что $|||u_\varepsilon|||^2 + \varepsilon |||u'_\varepsilon|||^2_{L^2(\Sigma)} \to |||u|||^2$; поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$|||u_\varepsilon - u|||^2 + \varepsilon \| u'_\varepsilon \|^2_{L^2(\Sigma)} \to 0,$$

т. е. выполняется соотношение (1.91).

Замечание 1.11. Запишем совокупность соотношений, характеризующих оптимальное управление u_ε. Сопряженное состояние $p(u_\varepsilon)$ определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p(u_\varepsilon)}{\partial t}+A^*p(u_\varepsilon)=0 \text{ в } Q;\\ &\frac{\partial p(u_\varepsilon)}{\partial \nu_{A^*}}=y(u_\varepsilon)-z_д \text{ на } \Sigma,\\ &p(x, T; u_\varepsilon)=0 \text{ на } \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{1.98}$$

Для оптимального управления $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial^1$ удовлетворяются соотношения (1.83) (при $v = u_\varepsilon$), (1.98) и

$$\int_\Sigma [(p(u_\varepsilon)+Nu_\varepsilon)(v-u_\varepsilon)+\varepsilon u_\varepsilon'(v'-u_\varepsilon')]\,dt\,d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial^1. \tag{1.99}$$

Из теоремы 1.5 следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$p(u_\varepsilon)\to p(u) \text{ в } L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Пример. Пусть

$$K = \{f \mid f \geqslant 0 \text{ почти всюду на } \Gamma,\ f \in L^2(\Gamma)\}.$$

Тогда оптимальное управление u_ε получается из решения односторонней граничной задачи

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}+Ay_\varepsilon=f, \quad -\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}+A^*p_\varepsilon=0 \text{ в } Q;$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*}}=y_\varepsilon-z_д,\\ &\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\geqslant 0,\ p_\varepsilon+N\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\right)\geqslant 0,\\ &\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\left[p_\varepsilon+N\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\right)\right]=0 \end{aligned}\right\} \text{ на } \Sigma;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\right)=0 \text{ при } t=0 \text{ и } t=T,\ x\in\Gamma;$$

$$y_\varepsilon(x, 0)=y_0(x),\ p(x, T)=0,\ x\in\Omega,$$

а именно

$$u_\varepsilon=\left.\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma.$$

§ 2. Аппроксимация системами типа Коши — Ковалевской

2.1. Эволюционные уравнения на многообразии

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное множество с регулярной границей Γ, а оператор A определен формулой

$$A\psi \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) + a_0\psi, \tag{2.1}$$

где $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, $a_0 \in L^\infty(\overline{\Omega})$. Введем также форму

$$\left.\begin{aligned} &a(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_0\varphi\psi\,dx;\\ &a(\varphi, \varphi) \geqslant \alpha\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)},\ \alpha > 0,\ \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Исследуемые ниже задачи можно рассматривать и в случае, когда коэффициенты a_{ij}, a_0 *зависят от* t (являясь измеримыми ограниченными функциями t), а также в случае эллиптических операторов произвольного порядка. С незначительными техническими изменениями излагаемый далее метод применим и в случае, когда $a_0 < 0$.

Состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$Ay(v) = 0 \text{ в } \Omega \quad (\text{и при любом } \in (0, T)); \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} = v \text{ на } \Sigma = \Gamma \times (0, T); \tag{2.4}$$

$$y(x, 0; v) = y_0(x),\ x \in \Gamma. \tag{2.5}$$

Нужно, очевидно, начать с определения решения задачи (2.3)—(2.5). Покажем, что эта задача того же типа, что и рассмотренные в § 1,2 гл. 3, так что мы имеем дело с параболическим эволюционным уравнением на границе Γ.

Оператор $\tilde{A}$. Пусть h — данный элемент пространства $H^{1/2}(\Gamma)$. Существует такая единственная функция $\psi \in H^1(\Omega)$, что

$$A\psi = 0 \text{ в } \Omega;\ \psi = h \text{ на } \Gamma. \tag{2.6}$$

Тогда (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2]) можно определить производную $\partial\psi/\partial\nu_A$ как элемент пространства $H^{-1/2}(\Gamma)$. Зададим оператор $\tilde{A}$ формулой

$$\tilde{A}h = \left\{\frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} \text{ на } \Gamma\right\}, \tag{2.7}$$

ясно, что

$$\tilde{A} \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma);\ H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{2.8}$$

Лемма 2.1. *Для любого $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ справедливо неравенство*

$$(\tilde{A}h, h)_\Gamma \equiv \int_\Gamma (\tilde{A}h)\, h\, d\Gamma \geqslant \alpha_1 \|h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \alpha_1 > 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Так как

$$(A\psi, \psi) = \int_\Omega (A\psi)\,\psi\, dx = -\int_\Gamma \frac{\partial\psi}{\partial\nu_A}\psi\, d\Gamma + a(\psi, \psi) = 0,$$

то

$$(\tilde{A}h, h)_\Gamma = a(\psi, \psi) \geqslant \alpha \|\psi\|^2_{H^{1/2}(\Omega)} \geqslant \alpha_1 \|h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Таким образом, задачу (2.3) — (2.5) можно переформулировать следующим образом: пусть

$$y(\cdot, t)|_\Gamma = \tilde{y}(t), \quad y(\cdot, t; v) = \tilde{y}(t; v); \tag{2.10}$$

найти решение $\tilde{y}$ задачи [1])

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} + \tilde{A}\tilde{y} = v \text{ в } (0, T); \tag{2.11}$$

$$\tilde{y}(0) = y_0 \text{ на } \Gamma. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.11) с начальным условием (2.12) подпадает под рассмотренный в § 1 гл. 3 тип задач, если считать, что $V = H^{1/2}(\Gamma)$, $H = L^2(\Gamma)$, $V' = H^{-1/2}(\Gamma)$, а оператор A заменен оператором $\tilde{A}$. Предположение (1.2) гл. 3 выполняется (при $\lambda = 0$) в силу неравенства (2.9).

Следовательно, если $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)) = L^2(\Sigma)$ [2]) и $y_0 \in L^2(\Gamma)$, то задача (2.11), (2.12) имеет такое единственное решение, что

$$\tilde{y} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)), \ \tilde{y}' \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{2.13}$$

Для отыскания функции y остается еще *решить* задачу

$$\left.\begin{aligned} &Ay(x, t) = 0 \text{ в } \Omega,\ t \text{ фиксировано (почти всюду)};\\ &y(x, t) = \tilde{y}(x, t) \text{ на } \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Таким образом, справедлива

---

[1]) Для краткости записи зависимость функции $\tilde{y}$ от управления v не указана.

[2]) В более общем случае $v \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено предположение* (2.2), *а* v — *данный элемент пространства* $L^2(\Sigma)$. *Тогда существует единственная функция* $y(v) = y$, *являющаяся решением задачи* (2.3) — (2.5) *и удовлетворяющая условию*

$$y \in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)). \tag{2.15}$$

Замечание 2.2. Уравнение (2.11) представляет собой *параболическое уравнение на многообразии* Γ, а оператор $\widetilde{A}$ — *псевдодифференциальный эллиптический оператор первого порядка на многообразии* Γ.

Задача управления. Пусть функция стоимости имеет вид [1])

$$\left.\begin{aligned} &J(v) = \int_\Sigma [y(v) - z_д]^2\, d\Sigma + (Nv,\ v)_{L^2(\Sigma)};\\ &v \in \mathcal{U} = L^2(\Sigma);\ N \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma),\ L^2(\Sigma)),\ N \geqslant \nu I,\ \nu > 0.\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Ищется

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v),$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{U}$.

Условие оптимальности управления $u \in \mathcal{U}_\partial$ таково:

$$\int_\Sigma [y(u) - z_д][y(v) - y(u)]\, d\Sigma + (Nu,\ v - u)_{L^2(\Sigma)} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.17}$$

Можно применить результаты разд. 2.3 гл. 3. Определим сопряженное состояние $\widetilde{p}(u)$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\widetilde{p}(u)}{dt} + \widetilde{A}^*\widetilde{p}(u) = y(u) - z_д \text{ на } \Sigma;\\ &\widetilde{p}(T;\ u) = 0 \text{ на } \Gamma.\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Тогда неравенство (2.17) эквивалентно неравенству

$$\int_\Sigma [\widetilde{p}(u) + Nu](v - u)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.19}$$

Лемма 2.2. *Оператор* $\widetilde{A}^*$ *определяется следующим образом: решим задачу*

$$A^*\chi = 0 \text{ в } \Omega,\ \chi|_\Gamma = k, \tag{2.20}$$

где k — *данный элемент пространства* $H^{1/2}(\Gamma)$; *тогда*

$$\widetilde{A}^* k = \left.\frac{\partial\chi}{\partial\nu_{A^*}}\right|_\Gamma. \tag{2.21}$$

[1]) Можно также рассмотреть функцию стоимости, соответствующую финальному наблюдению.

Доказательство. По формуле Грина имеем

$$0=\int_\Omega (A\psi)\chi\,dx=-\int_\Gamma (\widetilde{A}h)k\,d\Gamma+\int_\Gamma h\frac{\partial\chi}{\partial\nu_{A^*}}d\Gamma+\int_\Omega \psi(A^*\chi)\,dx,$$

а потому $(\widetilde{A}h,\ k)_\Gamma=\left(h,\dfrac{\partial\chi}{\partial\nu_{A^*}}\right)_\Gamma$; отсюда и следует равенство (2.21).

Используя лемму 2.2, можно утверждать, что задача (2.18) эквивалентна задаче

$$\left.\begin{aligned}&A^*p(u)=0 \text{ в } \Omega \text{ (и при любом } t\in(0,T));\\&-\frac{\partial p(u)}{\partial t}+\frac{\partial p(u)}{\partial\nu_{A^*}}=y(u)-z_д \text{ на } \Sigma;\\&p(x,T;u)=0,\quad x\in\Gamma\\&(\text{и } \widetilde{p}(u)=p(u) \text{ на поверхности } \Sigma).\end{aligned}\right\}\qquad(2.22)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *а функция стоимости имеет вид* (2.16). *Тогда для оптимального управления* $u\in\mathcal{U}_\partial$ *удовлетворяются соотношения* (2.3) — (2.5) (*при* $v=u$), (2.22) *и*

$$\int_\Sigma [p(u)+Nu](v-u)\,d\Sigma\geqslant 0\qquad \forall v\in\mathcal{U}_\partial.\qquad(2.23)$$

Пример 2.1. Если $\mathcal{U}_\partial=\mathcal{U}$, то для отыскания оптимального управления необходимо найти решение задачи

$$\left.\begin{aligned}&Ay=0,\ A^*p=0 \text{ в } \Omega\quad \text{(и при любом } t\in(0,T));\\&\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial\nu_{A^*}}+N^{-1}p=0,\ \frac{\partial p}{\partial\nu_{A^*}}=y-z_д \text{ на } \Sigma;\\&y(x,0)=y_0(x),\ p(x,T)=0,\ x\in\Gamma.\end{aligned}\right\}\qquad(2.24)$$

Пользуясь введенными выше обозначениями $\widetilde{y}$, $\widetilde{p}$, эту задачу можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t}+\widetilde{A}\widetilde{y}+N^{-1}\widetilde{p}=0,\ -\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial t}+\widetilde{A}^*\widetilde{p}=\widetilde{y}-z_д;\\&\widetilde{y}(0)=y_0,\quad \widetilde{p}(T)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2.25)$$

Тогда

$$u=-N^{-1}p\,|_\Sigma=-N^{-1}\widetilde{p}.\qquad(2.26)$$

Задача (2.25) допускает *расцепление* (см. § 4, 5 гл. 3). Именно, справедливо тождество

$$\widetilde{p}(t)=\widetilde{P}(t)\,\widetilde{y}(t)+\widetilde{r}(t),\qquad(2.27)$$

где

$$-\frac{d\widetilde{P}}{dt}+\widetilde{P}\widetilde{A}+\widetilde{A}^*\widetilde{P}+\widetilde{P}N^{-1}\widetilde{P}=I, \quad P(T)=0; \tag{2.28}$$

$$-\frac{d\widetilde{r}}{dt}+\widetilde{A}^*\widetilde{r}+\widetilde{P}N^{-1}\widetilde{r}=-z_{\text{д}}, \quad \widetilde{r}(T)=0. \tag{2.29}$$

Уравнение (2.28) представляет собой нелинейное параболическое интегро-дифференциальное уравнение типа Риккати на многообразии $\Gamma\times\Gamma$.

Теорема Шварца о ядрах в рассматриваемом сейчас случае позволяет представить оператор $\widetilde{P}$ с помощью его ядра $\widetilde{P}$ (x, ξ, t), являющегося распределением на произведении $\Gamma_x\times\Gamma_\xi$. Заметим, что ядро $\widetilde{A}$ (x, ξ) оператора $\widetilde{A}$ *не сосредоточено* на диагонали $\Gamma_x\times\Gamma_\xi$, так как $\widetilde{A}$ не является дифференциальным оператором.

Соотношение (2.27), естественно, можно «распространить» с границы Γ на все множество Ω. Следовательно, существует оператор $P(t)\in\mathscr{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$, удовлетворяющий, в частности, условию

$$p(t)=P(t)\,y(t)+r(t). \tag{2.30}$$

Пример 2.2. Рассмотрим теперь случай, когда

$$\mathscr{U}_\partial=\{v\mid v\geqslant 0 \ \text{ почти всюду на } \ \Sigma,\ v\in L^2(\Sigma)\}. \tag{2.31}$$

Оптимальное управление получается из решения односторонней граничной задачи

$$\left.\begin{aligned}
&Ay=0,\ A^*p=0 \text{ в } \Omega \quad (\text{и при любом } t\in(0, T));\\
&\frac{\partial p}{\partial\nu_{A^*}}=y-z_{\text{д}},\\
&\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\geqslant 0,\ p+N\left(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)\geqslant 0 \quad \text{на } \ \Sigma,\\
&\left(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)\left[p+N\left(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)\right]=0 \quad \text{на } \ \Sigma,\\
&y(x, 0)=y_0(x),\ p(x, T)=0 \text{ на } \Gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

а именно

$$u=\frac{\partial y}{dt}+\frac{\partial y}{\partial\nu_A} \text{ на } \Sigma.$$

Замечание 2.3. Можно рассмотреть аналогичные задачи, содержащие производные второго порядка по t, например:

$$\left.\begin{aligned} &Ay(v)=0 \text{ в } \Omega \quad (\text{и при любом } t\in(0, T));\\ &\frac{\partial^2 y(v)}{\partial t^2}+\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A}=v \text{ на } \Sigma;\\ &y(x, 0; v)=y_0(x),\ \frac{\partial y(x, 0; v)}{\partial t}=y_1(x) \text{ на } \Gamma, \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

где y_0 и y_1 — данные элементы, принадлежащие пространствам $H^{1/2}(\Gamma)$ и $L^2(\Gamma)$ соответственно; при этом предполагается, что

$$A = A^*. \tag{2.34}$$

В этом случае мы приходим к задачам гл. 4 — но на многообразии Γ, а не на множестве Ω. Здесь также можно применить параболическую регуляризацию (см. § 1).

2.2 Аппроксимация системами типа Коши — Ковалевской

Рассматриваемая *в открытом множестве* Ω (а не на многообразии Γ), задача (2.3) — (2.5) *не является* задачей типа Коши — Ковалевской. Мы увидим, что ее, однако, можно очень просто *аппроксимировать* параболической задачей типа Коши — Ковалевской в области Ω.

Для $\varepsilon>0$ определим состояние $y_\varepsilon(v)$ как решение задачи

$$\varepsilon\frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial t}+Ay_\varepsilon(v)=0 \text{ в } \Omega\times(0, T); \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial t}+\frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu_A}=v \text{ на } \Sigma; \tag{2.36}$$

$$y_\varepsilon(x, 0; v)=\hat{y}_0(x) \text{ на } \Omega, \tag{2.37}$$

где функция $\hat{y}_0$ удовлетворяет условиям

$$A\hat{y}_0=0 \text{ в } \Omega;\ \hat{y}_0=y_0 \text{ на } \Gamma\ ^{1)}. \tag{2.38}$$

Задача (2.35) — (2.37) — типа Коши — Ковалевской в области Ω — имеет единственное решение. Действительно, она эквивалентна задаче ($y_\varepsilon(t; v)=y_\varepsilon(t)$)

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{d}{dt}(y_\varepsilon(t), \psi)+\frac{d}{dt}(y_\varepsilon(t), \psi)_\Gamma+a(y_\varepsilon(t), \psi)=&\\ =(v(t), \psi)_\Gamma \quad &\forall\psi\in H^1(\Omega); \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$y_\varepsilon(0)=\hat{y}_0, \tag{2.40}$$

[1]) Эта задача (см. Лионс и Мадженес [1, гл. 2]) имеет единственное решение в пространстве $H^{1/2}(\Omega)$; поэтому, в частности, $\hat{y}\in L^2(\Omega)$.

обладающей единственным решением (см. § 1 гл. 3), причем

$$\left.\begin{array}{l} y_\varepsilon(v) \in L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega));\ t \to y_\varepsilon(t;\ v) - \\ \text{непрерывное отображение } [0,\ T] \to L^2(\Omega). \end{array}\right\} \tag{2.41}$$

Теорема 2.3. *Пусть в условиях теоремы 2.1 функция $y_\varepsilon(v)$ — решение задачи* (2.35) — (2.37), (2.41). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$y_\varepsilon(v) \to y(v) \quad \text{в} \quad L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)). \tag{2.42}$$

Доказательство. Будем писать y_ε (соответственно y) вместо $y_\varepsilon(v)$ (соответственно $y(v)$).

Полагая в равенстве (2.39) $\psi = y_\varepsilon$ и интегрируя, получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\|y_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_0^T a(y_\varepsilon,\ y_\varepsilon)\,dt =$$

$$= \int_0^T (v,\ y_\varepsilon)_\Gamma\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\|\hat{y}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\left.\begin{array}{l} y_\varepsilon \text{ остаются в ограниченном} \\ \text{подмножестве пространства } L^2(0,T;H^1(\Omega)); \end{array}\right\} \tag{2.43}$$

$$\|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C, \quad \sqrt{\varepsilon}\,\|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C. \tag{2.44}$$

Следовательно, из последовательности $\{y_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность — мы обозначим ее тоже через $\{y_\varepsilon\}$,— что

$$y_\varepsilon \to z \text{ слабо в } L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega)), \tag{2.45}$$

$$y_\varepsilon(T) \to \chi \text{ слабо в } L^2(\Gamma). \tag{2.46}$$

Пусть $\varphi \in C^1([0,\ T];\ H^1(\Omega))$; из равенства (2.39) (при $\psi = \varphi$) следует, что

$$-\varepsilon\int_0^T (y_\varepsilon(t),\ \varphi')\,dt - \int_0^T (y_\varepsilon(t),\ \varphi')_\Gamma\,dt + \int_0^T a(y_\varepsilon,\ \varphi)\,dt =$$

$$= \int_0^T (v(t),\ \varphi)_\Gamma\,dt + \varepsilon(\hat{y}_0,\ \varphi(0)) + (y_0,\ \varphi(0))_\Gamma -$$

$$- \varepsilon(y_\varepsilon(T),\ \varphi(T)) - (y_\varepsilon(T),\ \varphi'(T))_\Gamma. \tag{2.47}$$

В силу соотношений (2.45) (из которого вытекает, что $y_\varepsilon|_\Sigma \to z|_\Sigma$ в пространстве $L^2(\Sigma)$), (2.46) и (2.44) в равенстве (2.47) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда получим

$$-\int_0^T (z,\ \varphi')_\Gamma\,d\Gamma + \int_0^T a(z,\ \varphi)\,dt = \int_0^T (v,\ \varphi)_\Gamma\,dt + (y_0,\ \varphi(0))_\Gamma - (\chi,\ \varphi(T))_\Gamma. \tag{2.48}$$

Если взять функцию φ такой, что $\varphi(T) = 0$, то из равенства (2.48) получаем $z = y$ и далее $(\chi, \varphi(T))_\Gamma = (y(T), \varphi(T))_\Gamma$, т. е. $\chi = y(T)$. А тогда из соотношений (2.45), (2.46) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &y_\varepsilon \to y \quad \text{слабо в } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ &y_\varepsilon(T) \to y(T) \text{ слабо в } L^2(\Gamma). \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

Рассмотрим выражение

$$X_\varepsilon = \int_0^T a(y_\varepsilon - y, y_\varepsilon - y)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \| y_\varepsilon(T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \frac{1}{2} \| y_\varepsilon(T) - y(T) \|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Привлекая уравнения, которым удовлетворяют функции y_ε и y, получаем:

$$X_\varepsilon = \int_0^T [(v, y_\varepsilon)_\Gamma + (v, y)_\Gamma]\, dt - \int_0^T [a(y_\varepsilon, y) + a(y, y_\varepsilon)]\, dt - \\ - (y_\varepsilon(T), y(T))_\Gamma + \frac{1}{2} \| \hat{y}_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| y_0 \|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Следовательно, при $\varepsilon \to 0$

$$X_\varepsilon \to 2 \int_0^T [(v, y)_\Gamma - a(y, y)]\, dt - \| y(T) \|^2_{L^2(\Gamma)} + \| y_0 \|^2_{L^2(\Gamma)} = 0,$$

откуда и вытекает соотношение (2.42).

Наряду с задачей оптимального управления разд. 2.1 поставим следующую: найти

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J_\varepsilon(v), \tag{2.50}$$

где

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Sigma | y_\varepsilon(v) - z_д |^2 d\Sigma + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)}, \tag{2.51}$$

а $y_\varepsilon(v)$ — решение задачи (2.35) — (2.37); элемент, на котором реализуется (2.50), обозначим через u_ε.

Из теоремы 2.3 теми же рассуждениями, что и при доказательстве теоремы 1.3, получается

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Пусть для любого* $\varepsilon > 0$ *состояние* $y_\varepsilon(v)$ *определяется как решение задачи* (2.35) — (2.37), *а функция стоимости* $J_\varepsilon(v)$ *имеет вид* (2.51). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \to u \text{ в } \mathcal{U} = L^2(\Sigma), \tag{2.52}$$

$$y_\varepsilon(u_\varepsilon) \to y(u) \text{ в } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \tag{2.53}$$

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \to J(u). \tag{2.54}$$

Для отыскания оптимального управления $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial$ можно использовать результаты гл. 3. Определим сопряженное состояние $p_\varepsilon(u_\varepsilon)$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}
&-\varepsilon\frac{\partial p_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial t} + A^* p_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \text{ в } \Omega \times (0, T);\\
&-\frac{\partial p_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial p_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial \nu_{A^*}} = y(u_\varepsilon) - z_д \text{ на } \Sigma;\\
&p_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \text{ при } x \in \Omega,\ t = T.
\end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

Теорема 2.5. *Для оптимального управления* $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial$ *аппроксимирующей системы типа Коши — Ковалевской удовлетворяются соотношения* (2.35) — (2.37) (*при* $v = u_\varepsilon$), (2.55) *и*

$$\int_\Sigma [p_\varepsilon(u_\varepsilon) + N u_\varepsilon](v - u_\varepsilon)\, d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.56}$$

Заметим также, что, применяя теорему 2.3 (при обращенном времени) к задаче (2.55), получаем

$$p_\varepsilon(u_\varepsilon) \to p(u) \text{ в } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \tag{2.57}$$

Пример 2.3. Пусть $\mathcal{U}_\partial = \mathcal{U}$. Тогда оптимальное управление получается из решения задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + A y_\varepsilon = 0, \quad -\varepsilon\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + A^* p_\varepsilon = 0 \text{ в } Q;\\
&\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A} + N^{-1} p_\varepsilon = 0 \qquad \text{на } \Sigma;\\
&-\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*}} = y_\varepsilon - z_д \qquad \text{на } \Sigma;\\
&y_\varepsilon(x, 0) = \hat{y}_0(x),\ p_\varepsilon(x, T) = 0,\ x \in \Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

а именно

$$u_\varepsilon = -N^{-1} p_\varepsilon. \tag{2.59}$$

Если $\{y, p\}$ — решение задачи (2.24), то при $\varepsilon \to 0$

$$\{y_\varepsilon, p_\varepsilon\} \to \{y, p\} \text{ в } (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2.$$

Можно *расцепить* задачу (2.58) — по аналогии с § 4, 5 гл. 3. В результате получим

$$p_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t)\, y_\varepsilon(t) + r_\varepsilon(t), \tag{2.60}$$

где оператор P_ε удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению типа Риккати (ср. с разд. 5.2 гл. 3):

$$-\varepsilon(P_\varepsilon'\varphi, \psi) - (P_\varepsilon'\varphi, \psi)_\Gamma + a(\varphi, P_\varepsilon\psi) + a^*(P_\varepsilon\varphi, \psi) + \\ + (N^{-1}P_\varepsilon\varphi, P_\varepsilon\psi)_\Gamma = (\varphi, \psi)_\Gamma \quad \forall\varphi, \psi \in H^1(\Omega); \tag{2.61}$$

$$P_\varepsilon(T) = 0\,[1], \tag{2.62}$$

а функция r_ε является решением задачи

$$-\varepsilon(r_\varepsilon', \psi) - (r_\varepsilon', \psi)_\Gamma + a^*(r_\varepsilon, \psi) + (N^{-1}r_\varepsilon, P_\varepsilon\psi)_\Gamma = \\ = -(z_д, \psi)_\Gamma \quad \forall\psi \in H^1(\Omega); \tag{2.63}$$

$$r_\varepsilon(T) = 0. \tag{2.64}$$

При $\varepsilon \to 0$ имеем, в частности,

$$P_\varepsilon(t)\psi \to P(t)\psi \text{ в } L^2(\Omega) \quad \forall\psi \in H^1(\Omega). \tag{2.65}$$

Замечание 2.4. Было бы интересно провести *прямое* доказательство существования и единственности решения задачи (2.61), (2.62) во всем интервале $(0, T)$, а также соотношения (2.65) (которое, впрочем, может быть улучшено).

Пример 2.4. Пусть множество $\mathcal{U}_\partial$ определено, как и в примере 2.2. Тогда оптимальное управление получается из решения односторонней граничной задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon = 0, \quad -\varepsilon\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + A^*p_\varepsilon = 0 \text{ в } Q;\\
&-\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*}} = y_\varepsilon - z_д;\\
&\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A} \geqslant 0, \quad p_\varepsilon + N\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\right) \geqslant 0 \quad \text{на } \Sigma;\\
&\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\right)\left[p_\varepsilon + N\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A}\right)\right] = 0 \quad \text{на } \Sigma;\\
&y_\varepsilon(x, 0) = \hat{y}_0(x), \quad p_\varepsilon(x, T) = 0 \text{ на } \Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{2.66}$$

---

[1] Устанавливая равенство (2.61), отметим, что оператор P_ε удовлетворяет также условию $\varepsilon(P_\varepsilon\varphi, \psi) + (P_\varepsilon\varphi, \psi)_\Gamma = \varepsilon(\varphi, P_\varepsilon\psi) + (\varphi, P_\varepsilon\psi)_\Gamma$.

а именно

$$u_\varepsilon = \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A} \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{2.67}$$

Если $\{y, p\}$ — решение задачи (2.32), то при $\varepsilon \to 0$

$$\{y_\varepsilon, p_\varepsilon\} \to \{y, p\} \quad \text{в} \quad (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2.$$

Замечание 2.5. В случае, когда состояние системы определяется как решение задачи (2.33), можно рассматривать следующую аппроксимацию задачей типа Коши — Ковалевской в области Ω:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon \frac{\partial^2 y_\varepsilon(v)}{\partial t^2} + A y_\varepsilon(v) = 0 \ \text{в} \ Q;\\
&\frac{\partial^2 y_\varepsilon(v)}{\partial t^2} + \frac{\partial y_\varepsilon(v)}{\partial \nu_A} = v \quad \text{на} \quad \Sigma;\\
&y_\varepsilon(x, 0; v) = \hat{y}_0(x), \ \frac{\partial y_\varepsilon(x, 0; v)}{\partial t} = \hat{y}_1(x) \ \text{на} \ \Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

где функция $\hat{y}_0$ удовлетворяет условиям

$$A\hat{y}_0 = 0 \ \text{в} \ \Omega; \ \hat{y}_0 = y_0 \ \text{на} \ \Gamma$$

(функция $\hat{y}_1$ удовлетворяет аналогичным условиям).

2.3. Линеаризованная система Навье — Стокса

Пусть состояние $\mathbf{y}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{y}_0(\mathbf{v}), y_{n+1}(\mathbf{v})\}$ системы определяется как решение задачи

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{y}_0(\mathbf{v})}{\partial t} - \Delta \mathbf{y}_0(\mathbf{v}) + \operatorname{grad} y_{n+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} + \mathbf{v} \quad \text{в} \quad Q\\
&\operatorname{div} \mathbf{y}_0(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{в} \ Q\\
&\mathbf{y}_0(\mathbf{v}) \equiv \{y_{01}(\mathbf{v}), \ldots, y_{0n}(\mathbf{v})\} = 0 \ \text{на} \ \Sigma,\\
&\mathbf{y}_0(x, 0; \mathbf{v}) = \mathbf{y}_0(x).
\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

Это линеаризованная система Навье — Стокса.

Можно точнее сформулировать задачу (2.69). Рассмотрим пространства

$$\left.\begin{aligned}
V &= \{\varphi \mid \varphi \in (H_0^1(\Omega))^n, \ \operatorname{div} \varphi = 0\},\\
H &= \{\varphi \mid \varphi \in (L^2(\Omega))^n, \ \operatorname{div} \varphi = 0\},
\end{aligned}\right\} \tag{2.70}$$

представляющие собой замкнутые подпространства пространств

$(H_0^1(\Omega))^n$ и $(L^2(\Omega))^n$ соответственно. Положим

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \varphi_i \psi_i \, dx, \quad a(\varphi, \psi) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx.$$

Ставится задача отыскания такой функции $\mathbf{y}_0(\mathbf{v})$, что

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{y}_0(\mathbf{v}), \psi) + a(\mathbf{y}_0(\mathbf{v}), \psi) = (\mathbf{f} + \mathbf{v}, \psi) \qquad \forall \psi \in V, \tag{2.71}$$

$$\mathbf{y}(0; \mathbf{v}) = \mathbf{y}_0 \text{ в } H, \tag{2.72}$$

где $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$ — элементы пространства $(L^2(Q))^n$.

Таким образом, при переходе к вариационной «формулировке» этой задачи «исключается» функция $y_{n+1}(\mathbf{v})$.

Задача (2.71), (2.72), согласно теореме 1.2 гл. 3, имеет единственное решение, для которого

$$\mathbf{y}_0(t; \mathbf{v}) \in L^2(0, T; V). \tag{2.73}$$

Если функция стоимости имеет вид

$$J(\mathbf{v}) = \int_Q |\mathbf{y}_0(x, t; \mathbf{v}) - \mathbf{z}_д|^2 dx\, dt + (N\mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathcal{U}}, \tag{2.74}$$

где $\mathcal{U} = (L^2(Q))^n$, то применимы результаты § 2 гл. 3. Для оптимального управления $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_\partial$ удовлетворяются соотношения (2.71), (2.72) (при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$),

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_0(\mathbf{u}), \psi) + a(\mathbf{p}_0(\mathbf{u}), \psi) = (\mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{z}_д, \psi) \quad \forall \psi \in V; \\ &\mathbf{p}_0(T; \mathbf{u}) = 0; \ \mathbf{p}_0(\mathbf{u}) \in L^2(0, T; V); \end{aligned}\right\} \tag{2.75}$$

$$(\mathbf{p}_0(\mathbf{u}) + N\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geqslant 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_\partial. \tag{2.76}$$

Задачу (2.69) можно аппроксимировать следующей задачей типа Коши — Ковалевской: для $\varepsilon > 0$ определим $\{\mathbf{y}_0^\varepsilon, y_{n+1}^\varepsilon\}$ как решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial t} - \Delta \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{v}) + \operatorname{grad} y_{n+1}^\varepsilon = \mathbf{f} + \mathbf{v} \text{ в } Q; \\ &\varepsilon \frac{\partial y_{n+1}^\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{v}) = 0 \text{ в } Q; \\ &\mathbf{y}_0^\varepsilon(x, 0; \mathbf{v}) = \mathbf{y}_0(x), \ y_{n+1}^\varepsilon(x, 0; \mathbf{v}) = g(x), \ x \in \Omega; \\ &\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{v}) \in L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^n), \ y_{n+1}^\varepsilon(\mathbf{v}) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}\right\} \tag{2.77}$$

где g — произвольный элемент пространства $L^2(\Omega)$.

Можно показать (тем же методом, что и при доказательстве теоремы 1.2 гл. 3), что задача (2.77) имеет единственное решение, причем при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{v}) \to \mathbf{y}_0(\mathbf{v}) \quad \text{в} \quad L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^n). \tag{2.78}$$

Если определить функцию стоимости как

$$J_\varepsilon(v) = \int_Q |\mathbf{y}_0^\varepsilon(x, t; \mathbf{v}) - \mathbf{z}_д|^2 \, dx\, dt + (N\mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathcal{U}}, \tag{2.79}$$

то легко убедиться, что при $\varepsilon \to 0$

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}_\partial} J_\varepsilon(\mathbf{v}) = J_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) \to J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}_\partial} J(\mathbf{v}), \tag{2.80}$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u} \text{ в } \mathcal{U} = (L^2(Q))^n, \tag{2.81}$$

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) \to \mathbf{y}_0(\mathbf{u}) \quad \text{в} \quad L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^n). \tag{2.82}$$

Таким образом, справедливы результаты, аналогичные указанным в разд. 2.3.

З а м е ч а н и е 2.6. Такие же результаты могут быть получены и для *нелинейной* системы Навье — Стокса (случай, когда управление отсутствует, рассмотрен Лионсом [11]).

§ 3. Метод штрафов

Рассмотрим случай 3.2.2 § 3 гл. 3. Состояние $y(v)$ системы определяется как решение задачи

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f \text{ в } Q, \quad f \in L^2(Q); \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} = v \text{ па } \Sigma, \quad v \in L^2(\Sigma); \tag{3.2}$$

$$y(x, 0; v) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad y_0 \in L^2(\Omega), \tag{3.3}$$

где $A = A(x, t, \partial/\partial x)$ — эллиптический оператор второго порядка. Пусть

$$\mathcal{U} = L^2(\Sigma), \ \mathcal{U}_\partial \text{—выпуклое замкнутое подмножество в } \mathcal{U}. \tag{3.4}$$

Предположим, что наблюдение финально, так что функция стоимости имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &J(v) = \int_\Omega [y(x, T; v) - z_д(x)]^2 \, dx + (Nv, v)_{L^2(\Sigma)}; \\ &N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U}), \quad N \geqslant \nu I, \quad \nu > 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Ставится следующая задача:

$$\text{найти} \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v) = j; \tag{3.6}$$

оптимальное управление для этой задачи обозначим через u.

Аппроксимируем эту задачу семейством вспомогательных задач, где y и v будут *независимыми переменными*.

Определим пространство

$$Y = \left\{ y \mid y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),\ \frac{\partial y}{\partial t} + Ay \in L^2(Q),\ \left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma \in L^2(\Sigma) \right\}. \tag{3.7}$$

Заметим, что это определение *имеет смысл*. В самом деле, если $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ и $\partial y/\partial t + Ay \in L^2(Q)$, то можно определить производную $\partial y/\partial \nu_A$ на Σ (с помощью формулы Грина — см. Лионс и Мадженес [1, гл. 4]), причем $\partial y/\partial \nu_A \in L^2(\Sigma)$. Легко видеть, что пространство Y, снабженное нормой

$$\|y\|_Y = \left(\|y\|^2_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial y}{\partial t} + Ay \right\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \right\|^2_{L^2(\Sigma)} \right)^{1/2}, \tag{3.8}$$

является *гильбертовым пространством*.

Далее, положим

$$\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\},\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1, 2, 3, \tag{3.9}$$

и определим на произведении $Y \times \mathcal{U}$ функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(y, v) = \int_\Omega [y(x, T) - z_д(x)]^2\, dx + (Nv, v)_{\mathcal{U}} + \\ + \frac{1}{\varepsilon_1} \left\| \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f \right\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_\Sigma \left[\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - v \right]^2 d\Sigma + \\ + \frac{1}{\varepsilon_3} \int_\Omega [y(x, 0) - y_0(x)]^2\, dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Теперь рассмотрим новую задачу (говорят, что она получается из задачи (3.6) *введением штрафов*[1]):

$$\text{найти} \inf_{\substack{v \in Y \\ v \in \mathcal{U}_\partial}} \mathcal{J}_\varepsilon(y, v) = j_\varepsilon. \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Задача* (3.11) *имеет единственное решение*

$$\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Рассмотрим однородную часть второй степени квадратичной формы $\mathcal{J}_\varepsilon(y, v)$:

$$\beta(y, v) = \int_\Omega y^2(x, T)\,dx + (Nv, v)_{\mathcal{U}} + \frac{1}{\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial y}{\partial t} + Ay\right\|^2_{L^2(Q)} + \\ + \frac{1}{\varepsilon_2}\int_\Sigma \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - v\right)^2 d\Sigma + \frac{1}{\varepsilon_3}\int_\Omega y^2(x, 0)\,dx.$$

Достаточно показать, что

$$\beta(y, v) \geqslant C(\|y\|_Y^2 + \|v\|_{\mathcal{U}}^2). \tag{3.13}$$

Так как $(Nv, v)_{\mathcal{U}} \geqslant \nu\,\|v\|^2_{\mathcal{U}}$, то

$$\beta(y, v) \geqslant \nu\|v\|^2_{\mathcal{U}} + \frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\frac{\partial y}{\partial \nu_A} - v\right\|^2_{\mathcal{U}} + \frac{1}{\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial y}{\partial t} + Ay\right\|^2_{L^2(Q)} + \\ + \frac{1}{\varepsilon_3}\int_\Omega y^2(x, 0)\,dx + \int_\Omega y^2(x, T)\,dx;$$

следовательно,

$$\beta(y, v) \geqslant \left(\nu + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\|v\|^2_{\mathcal{U}} + \frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right\|^2_{\mathcal{U}} - \frac{2}{\varepsilon_2}\|v\|_{\mathcal{U}}\left\|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right\|_{\mathcal{U}} + \\ + \frac{1}{\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial y}{\partial t} + Ay\right\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon_3}\int_\Omega y^2(x, 0)\,dx + \int_\Omega y^2(x, T)\,dx,$$

откуда и получаем неравенство (3.13) (причем константа C зависит от ε).

---

[1]) Множители $1/\varepsilon_i$ характеризуют величину «штрафа», если соотношения (3.1) — (3.3) не удовлетворены точно.

Теорема 3.2. *Если* $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \to 0$, *то*

$$j_\varepsilon \to j, \tag{3.14}$$

$$u_\varepsilon \to u \text{ в } \mathcal{U}, \tag{3.15}$$

$$y_\varepsilon \to y(u) \text{ в } Y. \tag{3.16}$$

Доказательство. 1) Так как при $y = y(u)$, $v = u$ характеризующие «штраф» слагаемые в выражении (3.10) *равны нулю*, то

$$\mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqslant \mathcal{J}_\varepsilon(y(u), u) = J(u) = j. \tag{3.17}$$

2) В силу оценки (3.17), функция $\mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ *ограничена*, а потому, используя выражение (3.10), заключаем:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \nu \|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{U}};$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon - f\right\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A} - u_\varepsilon\right\|^2_{\mathcal{U}} + \frac{1}{\varepsilon_3}\|y_\varepsilon(x, 0) - y_0(x)\|^2_{L^2(Q)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{U}} \leqslant C, \tag{3.18}$$

$$\left\|\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon - f\right\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}, \tag{3.19}$$

$$\left\|\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A} - u_\varepsilon\right\|_{\mathcal{U}} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_2}, \tag{3.20}$$

$$\|y_\varepsilon(x, 0) - y_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_3}. \tag{3.21}$$

Поэтому, в частности, при $\varepsilon \to 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{множество функций } \partial y_\varepsilon/\partial t + Ay_\varepsilon \text{ ограничено в } L^2(Q);\\ \text{множество функций } y_\varepsilon(x, 0) \text{ ограничено в } L^2(\Omega);\\ \text{множество функций } \partial y_\varepsilon/\partial \nu_A \text{ ограничено в } L^2(\Sigma),\end{array}\right\} \tag{3.22}$$

а тогда[1])

$$\text{множество функций } y_\varepsilon \text{ при } \varepsilon \to 0 \text{ ограничено в } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \quad (3.23)$$

Соотношения (3.19) — (3.21), (3.23) показывают, что множество функций y_ε ограничено в пространстве Y при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, можно извлечь такую подпоследовательность $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$, что

$$\left.\begin{array}{ll} y_\varepsilon \to \tilde{y} & \text{слабо в } V, \\ u_\varepsilon \to \tilde{u} & \text{слабо в } \mathcal{U}; \quad \tilde{u} \in \mathcal{U}_\partial. \end{array}\right\} \quad (3.24)$$

Используя еще раз неравенства (3.19) — (3.21), заключаем:

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + A\tilde{y} = f \quad \text{в} \quad Q; \quad \left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \nu_A}\right|_\Sigma = \tilde{u}; \quad \tilde{y}(x, 0) = y_0, \quad x \in \Omega;$$

отсюда видно, что

$$\tilde{y} = y(\tilde{u}). \quad (3.25)$$

Так как

$$\mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \int_\Omega [y_\varepsilon(x, T) - z_д]^2\, dx + (Nu_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\mathcal{U}} \quad (3.26)$$

и

$$y_\varepsilon(x, T) \to \tilde{y}(x, T) \text{ слабо в } L^2(\Omega),$$

то неравенство (3.26) влечет неравенство

$$\underline{\lim}\, \mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \int_\Omega [y(x, T) - z_д]^2\, dx + (N\tilde{u}, \tilde{u})_{\mathcal{U}},$$

или в силу (3.25)

$$\underline{\lim}\, \mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant J(\tilde{u}). \quad (3.27)$$

Неравенства (3.17) и (3.27) показывают справедливость соотношения (3.14), а также равенства $\tilde{u} = u$. Следовательно, утверждения (3.15), (3.16) справедливы в смысле *слабой* сходимости.

3) Остается показать, что эти утверждения справедливы и

---

[1]) В силу теоремы 1.2 гл. 3 (ср. с разд. 3.2 гл. 3).

в смысле сильной сходимости. В самом деле, рассмотрим представление

$$\mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon - 2\int_\Omega y_\varepsilon(x, T)\, z_д(x)\, dx + \int_\Omega z_д^2(x)\, dx,$$

где

$$\alpha_\varepsilon = \int_\Omega y_\varepsilon^2(x, T)\, dx + (Nu_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\mathcal{U}},$$

$$\beta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_1}\left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon - f \right\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon_2}\left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A} - u_\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Sigma)} + $$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_3}\int_\Omega [y_\varepsilon(x, 0) - y_0(x)]^2\, dx.$$

Так как

$$\mathcal{J}_\varepsilon(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \to j = J(u) = \alpha - 2\int_\Omega y(x, T; u)\, z_д(x)\, dx + \int_\Omega z_д^2(x)\, dx,$$

где

$$\alpha = \int_\Omega y^2(x, T; u)\, dx + (Nu, u)_{\mathcal{U}},$$

то $\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon \to \alpha$. Однако $\underline{\lim}\, \alpha_\varepsilon \geqslant \alpha$ (в силу слабой сходимости), а потому

$$\alpha_\varepsilon \to \alpha, \tag{3.28}$$

$$\beta_\varepsilon \to 0. \tag{3.29}$$

Из соотношения (3.28) вытекает, что $u_\varepsilon \to u$ сильно в $\mathcal{U}$, т. е. утверждение (3.15) справедливо. Тогда $\partial y_\varepsilon / \partial \nu_A \to u$ сильно в $\mathcal{U} = L^2(\Sigma)$ и, поскольку, как мы уже знаем,

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon \to f \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q),$$

$$y_\varepsilon(x, 0) \to y_0(x) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega),$$

утверждение (3.16) справедливо.

Замечание 3.1. Тем самым мы еще раз доказали оценки (3.19) — (3.21), причем в силу соотношения (3.29) с произвольно малой константой C для достаточно малого $|\varepsilon|$.

Замечание 3.2. Мы изложили метод штрафов на примере задачи (3.1) — (3.3), однако это *общий метод*. Он применим с небольшими естественными видоизменениями также в случае линейных эллиптических, параболических и других задач, рассмотренных в предыдущих главах.

Замечание 3.3. Можно, очевидно, охарактеризовать пару $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$, привлекая развитые в предыдущих главах методы. Тогда мы придем к новым односторонним граничным задачам.

Замечание 3.4. Можно применить аналогичные приемы для исследования систем, описываемых *нелинейными* уравнениями с частными производными.

Например, если состояние системы определяется, как в разд. 15.2 гл. 3, а функция стоимости имеет вид (15.6) гл. 3, то можно ввести функционал

$$\mathcal{J}_\varepsilon(y, v) = \int_\Omega [y(x, T) - z_д(x)]^2\, dx + \nu \|v\|_{L^\infty(Q)} + \\ + \frac{1}{\varepsilon_1} \left\| \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + vy - f \right\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon_2} \| y(x, 0) - y_0(x) \|^2_{L^2(\Omega)},$$

определенный на векторном пространстве [1]) $Y \times \mathcal{U}$ управлений $v \in \mathcal{U} = L^\infty(Q)$ и таких функций $y \in Y$, что

$$y \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega)), \quad \frac{\partial y}{\partial t} + Ay \in L^2(Q)\ ^{2)}.$$

Можно показать, что если $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ реализует минимум функционала $\mathcal{J}_\varepsilon(y, v)$, то можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к оптимальной паре $\{y(u), u\}$ в произведении $Y \times \mathcal{U}$.

Примечания

Метод параболической регуляризации разд. 1.1 используется также в книге Лионса и Мадженеса [1, гл. 3]. Применяя этот метод, совокупность соотношений, характеризующих оптимальное управление в задачах гл. 4, можно получить предельным переходом, исходя из результатов гл. 3. Именно так мы и поступили в разд. 1.2 и 1.3.

Идея, близкая к использованной при доказательстве теоремы 1.5, содержится в работе Тихонова [1].

Задачи, подобные рассмотренным в разд. 2.1, но при отсутствии управления, изучаются (другим методом) в книге Лионса [3, гл. 6, § 6]. См. также Фридман и Шинброт [1], Лионс и Мадженес [1]. Такие задачи встречаются в приложениях — см. Гарипов [1]. Аппроксимация задачами типа Коши — Ковалевской была предложена (для удобства использования метода конечных разностей) Лионсом [11].

В разд. 2.3 мы ограничились *линейными* уравнениями Навье — Стокса. Используя работы Лере [1], [2], [3] и Ладыженской [2], можно (как указано в замечании 2.6) перенести результаты разд. 2.3 о существовании и аппрок-

---

1) Хотя дифференциальный оператор не является линейным, функция y принадлежит векторному пространству благодаря специальной структуре этого оператора.

2) Следовательно, $Y = H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$, если коэффициенты оператора достаточно регулярны.

симации на нелинейный случай (вопрос о единственности оптимального управления не решен). Управление системами, описываемыми уравнениями Навье — Стокса, в стационарном случае изучал Госсе [1].

Метод штрафов в том виде, в котором он предложен в § 3, является, насколько нам известно, новым. Обычно рассматривают (см. работу Куранта [1] и весьма многочисленные исследования по нелинейному программированию) «штраф» за невыполнение *ограничения*, тогда как здесь мы вводим «штраф», относящийся к *уравнению состояния*. Этот вариант метода штрафов был разработан (в августе 1967 г. в Лос-Анджелесе) в связи с потребностями вычислительных задач, относительно которых см. работу Ивона [1]. См. также Балакришнан [4], [5], Бенсуссан и Кеннет [1]. Этот же метод для изучения некоторых дифференциальных игр применял Тартар [1]. Вариант этого метода оказался весьма полезным при исследовании *стохастических* задач оптимального управления — см. Бенсуссан [1], Бенсуссан и Лемарешаль [1].

Библиография[1])

Агмон, Ниренберг (Agmon S., Nirenberg L.)

[1] Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **16** (1963), 129—239.

[2] Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **20** (1967), 207—229.

Агранович М. С., Вишик М. И.

[1] Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, *УМН*, 19. № 3 (1964), 53—161.

Адамар (Hadamard J.)

[1] Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris, 1932.

Аксельбанд (Axelband E. I.)

[1] A solution to the optimal pursuit problem for distributed parameter systems, *J. Comput. and System Sci.*, **1** (1967), 261—286.

Амбарцумян В. А.

[1] К вопросу о диффузном отражении света мутной средой, *ДАН СССР*, 38 (1943), 257—261.

Аннин (Annin B. D.)

[1] Existence and uniqueness of the solution of the elastic plastic torsion problem for a cylindrical bar of oval cross-section, *J. Appl. Math. and Mech.*, 29 (1965), 1038—1047.

Антосевич (Antosiewicz H. A.)

[1] Linear control systems, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, **12** (1963), 313—324.

Ароншайн (Aronszajn N.)

[1] A unique continuation theorem for solution of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *J. Math. Pures et Appl.*, 36 (1957), 235—249.

Артоля (Artola M.)

[1] Équations paraboliques à retardement, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **264** (1967), 668—671.

[2]* Sur les perturbations des équations d'évolution. Applications à des problèmes de retard, *Ann. École Norm. Supér.*, **2** (1969), 137—253.

Атанс М., Фалб П.

[1] Оптимальное управление, изд-во «Машиностроение», М., 1968.

Ауслендер (Auslender L.)

[1]* Methodes numériques pour la resolution des problèmes d'optimisation avec constraintes, Thèse, Université de Grenoble, 1969.

Байокки (Baiocchi C.)

[1] Sulle equazioni differenziale astratte lineari del primo e del secondo

---

[1]) Работы, отмеченные звездочкой, добавлены или уточнены при подготовке русского издания.— *Прим. перев.*

ordine negli spazi di Hilbert, *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, **76** (1967), 233—304.
[2] Soluzioni ordinarie e generalizzate del problema di Cauchy per equazioni differenziali astratte lineari del secondo ordine negli spazi di Hilbert, *Ric. Mat.*, **16** (1967), 27—95.

Балакришнан (Balakrishnan A. V.)
[1] Optimal control problems in Banach spaces, *SIAM J. Control*, **3** (1965), 152—180.
[2] Semi-group theory and control theory, Washington, 1965.
[3] Foundation of the state space theory, *J. Comput. and System Sci.*, **1** (1967).
[4]* A new computing technique in system identification, *J. Comput. and System Sci.*, **2** (1968), 102—116.
[5]* On a new computing technique in optimal control, *SIAM J. Control*, **6** (1968), 149—173.

Балакришнан, Лионс (Balakrishnan A. V., Lions J.-L.)
[1] State estimation for infinite dimensional systems, *J. Comput. and System Sci.*, **1** (1967), 391—403.

Беллман Р.
[1] Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.

Беллман, Гликсберг, Гросс (Bellman R., Glicksberg I., Gross O. A.)
[1] On the «bang-bang» control problem, *Quart. Appl. Math.*, **14** (1956), 11—18.
[2]* Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, М., 1962.

Беллман, Калаба, Винг (Bellman R., Kalaba R., Wing G. M.)
[1] Invariant imbedding and mathematical physics. Particle processes, *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 280—308.

Бенсуссан (Bensoussan A.)
[1] Une méthode d'identification de valeur initiale, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **265** (1967), 724—727.
[2]* Equations integrales operationnelles stochastiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 423—425; Sur les propriétés de la solution d'une équation intégrale opérationelle stochastique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 457—459.
3]* Sur l'indentification et le filtrage de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, *Cahier IRIA*, **1** (1969), 1—233.
[4]* Filtrage optimal des systèmes linéaires, Paris, 1971.

Бенсуссан, Боссави, Неделек (Bensoussan A., Bossavit A., Nédelec J. C.)
[1]* Approximation des problèmes de contrôle, *Cahier IRIA*, **2** (1970).

Бенсуссан, Кеннет (Bensoussan A., Kenneth P.)
[1] Готовится к печати.

Бенсуссан, Лемарешаль (Bensaussan A., LeMarechal)
[1] Готовится к печати.

Берковиц, Поллард (Berkowitz L. D., Pollard H.)
[1]* A non classical variational problem arising from an optimal filter problem, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, **26** (1967), 281—304.
[2]* A variational problem related to an optimal filter problem with self correlated noise, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **142** (1969), 155—175.

Болтянский В. Г.
[1]* Математические методы оптимального управления, изд-во «Наука», М., 1969.

Боссави (Bossavit A.)
[1] Thèse, Paris, 1971.
Браудер (Browder F. E.)
[1] Non linear monotone operations and convex sets in Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 780—785.
[2] On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone non linear operations in Banach space, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 56 (1966), 419—425.
[3]* Non linear operators and non linear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Symp. on non linear functional analysis, Chicago, 1968.
Брезис (Brezis H.)
[1] Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968), 115—175.
[2]* Thèse, Paris, 1970.
[3] Fonctions duales relativement à une forme bilinéaire, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **264** (1967), 284—286.
[4]* Inéquations variationnelles associées à des opérateurs d'évolution, в книге «Theory and applications of monotone operators», Nato Summer School, Venise, 1968.
[5]* Semi-groupes non linéaires et applications, Colloque Rome, 1970.
Брезис, Лионс (Brezis H., Lions J.-L.)
[1] Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **264** (1967). 928—931.
Брезис, Сибони (Brezis H., Sibony M.)
[1] Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 28 (1968), 59—82.
Брезис, Стампаккья (Brézis H., Stampacchia G.)
[1]* Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, 96 (1968), 153—180.
Броган (Brogan W. L.)
[1] Optimal control theory applied to systems described by partial differential equations, Ph. D. Thesis, U. C. L. A., 1965.
Бруновский (Brunovsky P.)
[1]* Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems, *J. Diff. Equat.*, 6 (1969), 296—313.
Бурбаки.
[1] Интегрирование, изд-во «Наука», М., 1967.
Бутковский А. Г.
[1] Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, изд-во «Наука», М., 1965.
Бутковский А. Г., Полтавский Л. Н.
[1] Оптимальное управление волновыми процессами, *Автоматика и телемеханика*, **27** (1966), 553—563.
Бюси, Джозеф (Bucy R. S., Joseph P. D.)
[1] Filtering for stochastic processes with applications to guidance, Interscience, New York, 1968.
Валле (Vallée A.)
[1] Un problème de contrôle optimum dans certaines équations différentielles d'évolution, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **20** (1966), 25—30.
Варга (Warga J.)
[1] Relaxed variational problems, *J. Math. Anal. and Appl.*, 4 (1962), 111—128.
Варейя (Varaiya P. P.)
[1] On the existence of solutions to a differential game, *SIAM J. Control*, 5 (1967), 153—162.

[2]* An extremal problem in Banach space with application to optimal control (готовится к печати).

Виберг (Wiberg D. M.)

[1] Feedback control of linear distributed systems, *J. Basic Engineering*, 890 (1967), 379—384.

Вишик М. И.

[1] О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, 29 (1951), 615—676.

[2] О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков, *Матем. сб.*, 59 (1962), 289—325.

Вонг (Wang P. K. C.)

[1] Control of distributed parameter systems, в книге «Advances in control systems. Theory and applications», ed. by C. T. Leondes, v. 1, Acad. Press, New York—London, 1964. 75—172.

[2]* Control of a distributed parameter system with a free boundary, *Int. J. Control*, 5 (1967), 317—329.

[3]* Optimal control of a class of linear symmetric hyperbolic systems with applications to plasma confinement. *J. Math. Anal. and Appl.*, 28 (1969), 594—608.

Вонхам (Wonham W. M.)

[1]* On pole-assignement in multi-input controllable linear systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-12 (1967), 660—665.

[2]* On a matrix Riccati equation of stochastic control, *SIAM J. Control*, 6 (1968), 681—697.

Габасов Р., Кириллова Ф.

[1]* Качественная теория оптимальных процессов, изд-во «Наука», М., 1971.

Гамкрелидзе Р. В.

[1] On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control, *SIAM J. Control*, 3 (1965), 106—128.

Гарипов (Garipov R. M.)

[1] On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 24 (1967), 352—362.

Гарнир (Garnir H. G.)

[1] Les problèmes aux limites de la physique mathématiques, Stuttgart, 1958.

Гейнц (Heinz E.)

[1] Über die Eindeugkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1 (1955), 1—12.

Гельфанд И. М., Фомин С. В.

[1] Вариационное исчисление, Физматгиз, М., 1961.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.

[1] Обобщенные функции, т. 1, 2, 3, Физматгиз, М., 1958.

Гловинский, Лионс, Тремольер (Glowinski R., Lions J.-L., Tremolieres R.)

[1]* Méthodes numériques de résolution des problèmes d'inéquations en mécanique et en physique (готовится к печати).

Госсе (Gossez J. P.)

[1]* Existence of optimal controls for some nonlinear processes, *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 3 (1969), 89—97.

[2]* Optimisation pour certains problèmes aux limites non linéaires, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2 (1969), 167—182.

Гривар (Grisvard P.)

[1] Problèmes aux limites résolus par le calcul opérationnel, *C. R. Acad. Sci Paris*, 262 (1966), 1306—1308.

[2] Equations opérationnelles abstraites dans les espaces de Banach et problèmes aux limites dans des ouverts cylindriques, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **21** (1967), 307—347.

Грин (Green J. W.)

[1] An expansion method for parabolic partial differential operators, *J. Res. Net. Bur. Stand.*, **51** (1953), 127—132.

Данфорд Н., Шварц Дж.

[1] Линейные операторы, т. I, ИЛ, М., 1962; т. II, изд-во «Мир», М., 1966.

Да Прато (Da Prato G.)

[1]* Equations d'évolution dans des algèbres d'opérateurs et application à des équations quasi linéaires, *J. Math. Pures et Appl.*, **48** (1968), 59—107.

[2]* Equations non linéaires dans des cônes et applications à l'équation de Riccati opérationnelle (готовится к печати).

Даунинг, Хаусхолдер (Downing A. C., Householder A. S.)

[1]* Some inverse characteristic value problems, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **3** (1956), 203—207.

Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. Г.

[1] Об оптимальном управлении одномерными процессами с распределенными параметрами, *Автоматика и телемеханика*, **28** (1967), 29—38.

Делфур, Миттер (Delfour M. C., Mitter S. K.)

[1]* Reachability of perturbed systems and min-sup problems, *SIAM J. Control*, **7** (1969), 521—533.

Демидов Г. В., Марчук Г. И.

[1]* Теория существования решения задачи краткосрочного прогноза погоды, *ДАН СССР*, **170** (1966), 1006—1008.

Джон (John F.)

[1] Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Courant anniversary volume, 1948, 187- 204.

Диксмье (Dixmier J.)

[1] Les algèbres d'opérateurs dans les espaces Hilbertiens, Paris, 1957.

Донскер (Donsker M. D.)

[1] On function space integrals, в книге «Analysis in function space», ed. by W. T. Martin and I. Segal, M. I. T. Press, 1964, 17—30.

Донскер, Лионс (Donsker M. D., Lions J.-L.)

[1] Frechet-Volterra variational equations, boundary value problems and function space integrals, *Acta Math.*, **108** (1962), 147—228.

Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.

[1]* Задачи на экстремум при наличии ограничений, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **5** (1965), 395—453.

[2]* Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления, изд-во «Наука», М., 1971.

Дьедонне Дж.

[1] Основы современного анализа, изд-во «Мир», М., 1964.

Дюво, Лионс (Duvaut C., Lions J.-L.)

[1]* Les inéquations en mécanique et en physique, Paris, 1971.

[2]* Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la mécanique. Le cas stationnaire, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 510—513; Le cas d'évolution, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 570—572.

[3]* Nouvelles inéquations variationnelles rencontrées en thermique et en thermoélasticité, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 1198—1201.

[4]* Ecoulement d'un fluide rigide viscoplastique incompressible, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **270** (1970), 58—61.

[5]* Sur les équations de Maxwell des milieux polarisables et sur la magnétodynamique des fluides de Bingham, *C. R. Acad. Sci Paris*, **270** (1970), 1600—1603.

Егоров А. И.

[1] Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами, *Матем. сб.*, **69** (1966), 371—421.

Егоров Ю. В.

[1] Некоторые задачи теории оптимального управления, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **3** (1963), 887—904.

[2] Необходимые условия оптимальности управления в банаховом пространстве, *Матем. сб.*, **64** (1964), 79—101.

Зейдман (Zaidman S.)

[1] Convexity properties for weak solutions of some differential equations in Hilbert space, *Can. J. Math.*, **17** (1965), 802—807.

Ивон (Ivon J. P.)

[1]* Application de la pénalisation à la résolution d'un problème de contrôle optimal, *Cahier IRIA*, **2** (1970), 4—50.

Ильин А. М.

[1] Об одном классе ультрапараболических уравнений, *ДАН СССР*, 159 (1964), 1214—1217.

Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.

[1] Линейные уравнения второго порядка параболического типа, *УМН*, **17** (1962), 3—146.

Иосида К.

[1] Функциональный анализ, изд-во «Мир», М., 1967.

Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.

[1]* Расширения вариационных задач, *Труды Моск. Матем. Об-ва*, **18** (1968), 187—246.

[2]* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, *УМН*, **23**, № 6 (1968), 51—116.

Калман (Kalman R. E.)

[1] Contributions to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5 (1960), 102—119.

[2] The theory of optimal control and the calculus of variations, в книге «Mathematical optimization techniques», ed. by R. Bellman, Univ. of California Press, Berkeley, 1963, 309—331.

[3] Об общей теории систем управления, в книге «Труды I конгресса ИФАК», т. 2, изд-во АН СССР, М., 1961, 521—547.

Калман Р., Бюси Р.

[1] Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания, *Труды Америк. Об-ва Инж.-Мех.*, сер. Д, № 1 (1961), 123.

Калман Р., Фалб П., Арбиб М.

[1]* Очерки по математической теории систем, изд-во «Мир», М., 1971.

Кастэн (Castaing C.)

[1] Les multi-applications mesurables, Thèse, Paris, 1967.

Като Т.

[1] Теория возмущений линейных операторов, изд-во «Мир», М., 1972.

Конвей, Хопф (Conway E. D., Hopf E.)

[1] Hamilton's theory and generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equation, *J. Math. and. Mech.*, **13** (1964), 939—986.

Конти (Conti R.)

[1] Contribution to linear control theory. *J. Diff. Equat.*, **1** (1965), 427—445.

[2] On some aspects of linear control theory, в книге «Mathematical theory of control», ed. by A. V. Balakrishnan and L. Neustadt, Acad. Press, New York, 1967, 285—300.

Кордес (Cordes H. O.)

[1] Über die Bestimmtheit der Lösungen elliptischer differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, **11** (1956), 239—258.

Красовский Н. Н.

[1]* Игровые задачи о встрече движений, изд-во «Наука», М., 1970.

Крейн С. Г.

[1] О классах корректности для некоторых граничных задач, *ДАН СССР*, **114** (1957), 1162—1165.

[2] Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, изд-во «Наука», М., 1967.

Кристеску (Cristescu N.)

[1] Dynamic plasticity, North Holland, 1967.

Кун, Таккер (Kuhn H. W., Tucker A. W.)

[1] Non linear programming, Proc. Symp. Math. Stat., Univ. Cal. Press, 1951, 481—492.

Купер (Cooper J. F.)

[1] Готовится к печати.

Курант (Courant R.)

[1] Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 1—23.

Кушнер (Kushner H. J.)

[1]* On the optimal control of a system governed by a linear parabolic equation with white noise inputs, *SIAM J. Control*, **6** (1968), 596—614.

Лабордe (Laborde F.)

[1]* Sur un problème inverse d'un problème de valeurs propres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **268** (1969), 153—156.

Лаврук, Ролевич (Lawruk B., Rolewicz S.)

[1] The minimum time control problem for a certain class of linear parabolic partial differential equations controlled by the boundary condition, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **16** (1968), 489—493.

Ладыженская О. А.

[1] Смешанная задача для гиперболических уравнений, Гостехиздат, М., 1953.

Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.

[1] Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, изд-во «Наука», М., 1967.

Лакс, Мильграм (Lax P. D., Milgram N.)

[1] Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations, *Ann. Math. Studies*, 33 (1954), 167—190.

Ландис Е. М.

[1] Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений, *УМН*, **14** (1959), 21—85.

Ланшон, Дюво (Lanchon H., Duvaut G.)

[1] Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section quelconque, *C. R. Acad. Sci Paris.*, **264** (1967), 520—523.

[2]* Sur la solution du problème de la torsion élastoplastique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 791—794.

Ла-Салль (La Salle J.)
[1] The time optimal control problem, в книге «Contributions to the theory of non linear oscillations», v. 5, Princeton Univ. Press, 1960, 1—24.

Латтес Р., Лионс Ж.-Л.
[1] Метод квазиобращения и его приложения, изд-во «Мир», М., 1970.

Лере (Leray J.)
[1] Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math. Pures et Appl.*, **12** (1933), 1—82.
[2] Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *J. Math. Pures et Appl.*, **13** (1934). 331—418.
[3] Sur les mouvements d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, **63** (1934), 193—248.

Лере, Лионс (Leray J., Lions J.-L.)
[1] Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 97—107.

Ли, Маркус (Lee E. B., Markus L.)
[1] Foundations of optimal control theory, J. Wiley, 1967.

Лионс (Lions J.-L.)
[1] Sur le contrôle optimal de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), I: 661—663; II: 713—715; III: 776—779.
[2] Optimisation pour certaines classes d'équations d'évolution non linéaire, *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, **72** (1966), 275—294.
[3] Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Berlin—Heidelberg—New York, 1961; Operational differential equations and boundary value problems, 2 ed., Berlin — Heidelberg — New York, 1970.
[4] Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta Math.*, **94** (1955), 13—153.
[5]* On some non linear partial differential equations related to optimal control theory, Proc. Symp. on non linear functional analysis, Chicago, 1968.
[6] Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles, *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 254—273.
[7] Sur certaines équations paraboliques non linéaires, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 155—175.
[8] On some optimization problems for linear parabolic equations, в книге «Functional analysis and optimization», ed. by E. Caianiello, Acad. Press, New York, 1966, 115—131.
[9] Sur certaines équations aux dérivées partielles á coefficients opérateurs non bornés, *J. Anal. Math.*, **6** (1958), 333—335.
[10] Equations différentielles opérationnielles dans les espaces de Hilbert, Centro Int. Mat. Estivo, Varenna, 1963. (Equazioni differenziali astratte, Cremonese, Roma, 1963.)
[11] Approximation par des systèmes du type Cauchy—Kowalevska, Ecole d'été CEA-EDF, 1965; cours CIME, 1967.
[12] Sur le feedback non linéaire, Rapport IRIA, 1968.
[13]* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, 1969.

[14]* Sur certains problèmes non linéaires liés au contrôle optimal de systèmes gouvernés par des èquations aux dèrivèes partielles, Colloq. Bruxelles, CBRM, 1970, 99—107.

[15]* Sur l'approximation de la solution d'inéquations d'évolution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), 55—57.

[16]* О неравенствах в частных производных, *УМН*, **26**, № 2 (1971), 205—263.

Лионс, Мадженес (Lions J.-L., Magenes E.)

[1] Problèmes aux limites non homogènes et applications, v. 1, 2, 3, Paris, 1968. (Русский перевод первого тома: Неоднородные граничные задачи и их приложения, изд-во «Мир», М., 1971.)

[2]* Contrôle optimal et espaces du type de Gevrey, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.*, **44** (1968), I: 34—39; II: 151—157.

Лионс, Мальгранж (Lions J.-L., Malgrange B.)

[1] Sur l'unicité rétrograde dans les problémes mixtes parabolique, *Math. Scand.*, 8 (1960), 277—286.

Лионс, Стампаккья (Lions J.-L., Stampacchia G.)

[1] Variational inequalities, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **20** (1967), 493—519.

[2] Inéquations variationnelles non coercitives, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **261** (1965), 25—27.

Лионс, Темам (Lions J.-L., Temam R.)

[1]* Une méthode d'éclatement des opérateurs et des constraintes en calcul des variations, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263**, (1966), 563—565.

Лионс, Штраус (Lions J.-L., Strauss W. A.)

[1] Some non linear evolution equations, *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 43—96.

Литтман (Littman W.)

[1] The wave operator and L^p-norms, *J. Math. and. Mech.*, **12** (1963), 55—68.

Лоран (Laurent P. J.)

[1] Approximation convex, Séminaire d'analyse numérique, Grenoble, 1967.

[2]* Cônes de déplacement admissibles, ces gradients et approximation convexe dans un espace normé, Summer School OTAN, Venezia, 1968.

[3]* Approximation et optimisation (готовится к печати).

Лурье К. А.

[1] Оптимальное управление проводимостью жидкости, движущейся по каналу в магнитном поле, *Прикл. матем. и мех.*, 28 (1964), 258—267.

Лукес (Lukes D. L.)

[1]* Optimal regulation of non linear dynamical systems, *SIAM J. Control*, 7 (1969), 75—100.

Лукес, Расселл (Lukes D. L., Russell D. L.)

[1]* The quadratic criterion for distributed systems, *SIAM J. Control*, 7 (1969), 101—121.

Мак-Ками, Мизел, Зейдман (MacCamy R. C., Mizel V. J., Seidman T. I.)

[1]* Approximate boundary controllability for the heat equation. *J. Math. Anal. and Appl.*, I: **23** (1968), 699—703; II: **28** (1969), 482—492.

Мак-Шейн (McShane E. J.)

[1] Optimal controls, relaxes and ordinary, в книге «Mathematical theory of control», ed. by A. V. Balakrishnan and L. Neustadt, Acad. Press, New York — London, 1967, 1—9.

Малановский (Malanowski K.)

[1]* On optimal control of vibrating string, *SIAM J. Control*, 7 (1969), 260—271.

Мандельбройт (Mandelbrojt S.)
[1] Sur les fonctions convexes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **209** (1939), 977—978.
Маркус (Markus L.)
[1] Controllability and observability, в книге «Functional analysis and optimization», ed. by E. Caianiello, Acad. Press, New York, 1966, 133—143.
[2] The bang-bang principle, в книге «Lecture series in differential equations», Georgetown Univ., 1965, 25—45.
Мизел, Зейдман (Mizel V. J., Seidman T. I.)
[1]* Observation and prediction for the heat equation, *J. Math. Anal. and Appl.*, 28 (1969), 303—312.
Мизохата (Mizohata S.)
[1] Unicite du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, *Mem. Colloq. Sci. Univ. Kyoto, ser. A*, **31** (1958), 219—239.
Минти (Minty G. J.)
[1] On the generalization of a direct method of the calculus of variations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 315—321.
[2] Monotone (non linear) operations in Hilbert space, *Duke Math. J.*, 29 (1962), 341—346.
Миранкер (Miranker W.)
[1] Approximate controllability for distributed linear systems, *J. Math. Anal. and Appl.*, **10** (1965), 378—387.
Миттер (Mitter S. K.)
[1] Theory of inequalities and the controllability of linear systems, в книге «Mathematical theory of control», ed. by A. V. Balakrishnan and L. Neustadt, Acad. Press, New York 1967, 203—212.
Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. Ф.
[1]* Линейные дифференциальные игры, *ДАН СССР*, **174** (1967), 27—29.
[2]* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх, *Дифференц. уравнения*, **7** (1971), 436—445.
Моисеев Н. Н.
[1] Optimization, в книге «Mathématiques appliquées à la physique», Roubine ed., Unesco Publication.
Моро (Moreau J. J.)
[1] Proximité et dualité dans un espace Hilbertien, *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 273—299.
Мортенсен (Mortensen R. E.)
[1] A priori open loop optimal control of continuous time stochastic systems, *Int. J. Control*, **3** (1966), 113—127.
[2] Stochastic optimal control with noisy observations, *Int. J. Control*, **4** (1966), 455—464.
Мосолов П. П.
[1]* О проблеме минимума функционалов, *Изв. АН СССР, сер. матем.* **31** (1967), 1289—1310.
Мосолов П. П., Мясников В. П.
[1] Вариационные методы в теории течений вязкопластической среды, *Прикл. матем. и мех.*, **29** (1965), 468—492.
Мюллер (Müller C.)
[1] On the behavoir of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x, u)$ in the neighborhood of a point, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **7** (1954), 505—515.
Неделек (Nédelec J. C.)
[1]* Schemas d'approximation pour des équations intégro-différentielles de Riccati, Thèse, Paris, 1970.

Нейштадт (Neustadt L.)
[1] An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems, *SIAM J. Control*, I: 4 (1966), 505—527; II: 5 (1967), 90—137.
Нельсон (Nelson E.)
[1] L'équation de Schroedinger et les intégrales de Feynman, Colloq. Int. C.N.R.S., Paris, 1962, 151—158.
[2]* Feynman integrals and the Schroedinger equation, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 332—343.
Нечас (Nečas J.)
[1] Sur méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques, Acad. Tchécoslovaque des Sciences, Prague, 1967.
Обин (Aubin J. P.)
[1]* Characterization of the set of constraintes for which the necessary conditions for optimization problems hold, *SIAM J. Control*, 8 (1970), 148—162.
[2]* Filtrage optimal des systèmes linéaires, Paris, 1970.
Огазо (Haugazeau I.)
[1]* Sur des inéquations variationnelles, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 265 (1967), 95—98.
[2]* Sur les inéquations variationnelles et la minimisation de fonctionnelles convexes, Thése, Paris, 1968.
Олейник О. А.
[1]* О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой, *Матем. сб.*, 69 (1966), 111—140.
Олейник О. А., Радкевич Е. В.
[1] Уравнение второго порядка с неотрицательной характеристической формой, «Итоги науки», ВИНИТИ АН СССР, Математический анализ, 1970.
Педерсон (Pederson R. N.)
[1] On the unique continuation theorem for certain second and fourth order elliptic equations, *Comm. Pure and Appl. Math.* 11 (1958), 67—80.
Пирсон (Pearson J. D.)
[1] Duality and a decomposition technique, *SIAM J. Control*, 4 (1966), 164—172.
Понтрягин Л. С.
[1]* К теории дифференциальных игр, *УМН*, 21, № 4 (1966) 219—274.
[2]* О линейных дифференциальных играх, *ДАН СССР*, I: 174 (1967), 1278—1280; II: 175 (1967), 764—766.
Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
[1] Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961; изд-во «Наука», М., 1969.
Пуччи (Pucci C.)
[1] Un problema variazionale per i coefficienti di equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 16 (1962), 159—172.
[2] Operatori ellittici estremanti, *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, 72 (1966), 141—170.
Пшеничный Б. Н.
[1] О линейных дифференциальных играх, *Кибернетика*, 1 (1968), 13—22.
[2] Линейные дифференциальные игры, *Автоматика и телемеханика*, 1 (1968), 65—78.
[3]* Необходимые условия экстремума, изд-во «Наука», М., 1969.
Расселл (Russell D. L.)
[1] Optimal regulation of linear symmetric hyperbolic systems with

finite dimensional controls, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 4 (1966), 276—294.

[2] The Kuhn — Tucker conditions in Banach space with an application to control theory, *J. Math. Anal.*, **15** (1966), 200—212.

[3] On boundary value control of linear symmetric hyperbolic systems, в книге «Mathematical theory of control», ed. by A. V. Balakrishnan and L. Neustadt, Acad. Press, New York, 1967, 312—321.

[4]* Continuity in the strong topology of operatorvalued solutions of nonlinear differential equations with an application to optimal control, *SIAM J. Control*, **7** (1969), 132—141.

[5]* Linear stabilization of the linear oscillator in Hilbert space, *J. Math. Anal. and Appl.*, **3** (1969), 663—675.

Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.

[1] Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1956.

Розенброк (Rosenbrock H. H.)

[1]* Distinctive problems of process control, *Chem. Eng. Prog.*, 58 (1962).

Рокафеллар (Rockafellar R. T.)

[1] Minimax theorems and conjugate saddle functions, *Math. Scand.*, **14** (1964), 151—173.

[2] Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, *Duke Math. J.*, **33** (1966), 81—90.

[3] Conjugates and Legendre transforms of convex functions, *Canad. J. Math.*, **19** (1967), 200—205.

[4]* Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations, *J. Math. Anal. and Appl.*, **32** (1970), 174—222.

Саймон, Миттер (Simon J. D., Mitter S. K.)

[1]* A theory of modal control, *Information and Control*, **13** (1968), 316-353.

Сакава (Sakawa Y.)

[1] Solution of an optimal control problem in a distributed parameter system, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-9** (1964), 420—426.

[2] Optimal control of a certain type of linear distributed parameter systems, *IEEE Automatic Control*, **AC-11** (1966), 35—41.

Сеа (Céa J.)

[1] Théorie de l'optimization, Cours Fac. Sci. Rennes, 1966—1967.

[2]* Optimisation. Théorie et algorithmes, Dunod, Paris, 1971.

Сиразетдинов Т. Г.

[1] Об оптимальном управлении упругими летательными аппаратами, *Автоматика и телемеханика*, **27** (1966), 1139—1152.

Сирина (Cirina M.)

[1]* Boundary controllability of nonlinear hyperbolic systems, *SIAM J. Control*. **7** (1969), 198—212.

Соболев С. Л.

[1] Некоторые применения функционального анализа в математической физике, изд-во ЛГУ, Л., 1950; изд-во Сибирского отд. АН СССР, Новосибирск, 1962.

Солонников В. А.

[1]* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида, *Тр. Матем. ин-та им. Стеклова*, 83 (1965), 3-162.

Стампаккья (Stampacchia G.)

[1] Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258 (1964), 4413—4416.

[2] Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, **15** (1965), 189—258.

Т а н а б е (T a n a b e H.)
[1] On differentiability and analyticity of solutions of weighted elliptic boundary value problems, *Osaka Math. J.*, **2** (1965), 163—190.
Т а р т а р (T a r t a r L.)
[1] Готовится к печати.
Т е м а м (T e m a m R.)
[1]* Etude directe d'une équation d'évolution du type de Riccati, associée à des opérateurs non bornés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **268** (1969), 1335—1338.
[2]* Sur la solution exacte et approchée d'un problème hyperbolique linéaire de T. Carleman, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 3 (1969), 351—362.
[3]* Sur la stabilité et la convergence de la méthod des pas fractionnaires, *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, **79** (1968), 191—380.
[4] Sur l'équation de Riccati associée à des opérateurs non bornés (готовится к печати).
Т и н г (T i n g T. W.)
[1]* Elastic-plastic torsion problem, I: *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123** (1966), 369—401; *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, II: **25** (1967), 342—366; III: **34** (1969), 228—244.
Т и х о н о в А. Н.
[1] О методах регуляризации задач оптимального управления, *ДАН СССР*, **162** (1965), 763—765.
Т р е в Ф.
[1] Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, изд-во «Мир», М., 1966.
Т у Дж.
[1]* Современная теория управления, изд-во «Машиностроение», М., 1971.
Ф а е д о (F a e d o S.)
[1] Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **1** (1949), 1—40.
Ф а л б (F a l b P. L.)
[1] Infinite dimensional control problems, I: On the closure of the set of attainable states for linear systems, *J. Math. Anal. and Appl.*, **9** (1964), 12—22.
Ф а л б, К л е й н м а н (F a l b P. L., K l e i n m a n D. L.)
[1] Remarks on the infinite dimensional Riccati equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-11** (1966), 534—536.
Ф а т т о р и н и (F a t t o r i n i H. O.)
[1] Time optimal control of solutions of operational differential equations, *SIAM J. Control*, 2 (1964), 54—59.
[2] Some remarks on complete controllability, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **4** (1966), 686—693.
[3] On complete controllablity of linear systems, *J. Diff. Equat.*, **3** (1967), 391—402.
[4] Controllability of higher order linear systems, в книге «Mathematical theory of control» ed. by A. V. Balakrishnan and L. Neustadt, Acad. Press, New York, 1967, 301—311.
[5]* Boundary control systems, *SIAM J. Control*, **6** (1968), 349—385.
[6]* An observations on a paper of A. Friedman. *J. Math. Anal. and Appl.*, **22** (1962) 382—384.
[7]* A remark on the bang-bang principle for linear control system in infinite dimensional space, *SIAM J. Control*, 6 (1968), 109—113.
[8]* Control with bounded inputs, в книге «Computing methods in optimization problems», San Remo, 1968.

[9]* Ordinary differential equations in linear topological spaces, II, *J. Diff. Equat.*, 6 (1969), 50—70.
[10]* Control in finite time of differential equations in Banach space, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **19** (1966), 17—34.

Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г.
[1]* Методы теории автоматического управления, изд-во «Наука», М., 1971.

Фенчел (Fenchel W.)
[1] On conjugate convex functions, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 73—77.

Филлипсон, Миттер (Phillipson G. A., Mitter S. K.)
[1]* Numerical solution of a distributed identification problem via a direct method, в книге «Computing methods in optimization problems», ed. by L. A. Zadeh, L. Neustadt and A. V. Balakrishnan, Acad. Press, New York, 1969.
[2]* State identification of distributed parameter systems, Proc. IV IFAC Congress, Warsaw, 1969.

Фикера (Fichera G.)
[1] Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Acad. Naz. Lincei*, **7** (1964), 91—140.

Флеминг (Fleiming W. H.)
[1] Some Markovian optimization problems, *J. Math. and Mech.*, **12** (1963), 131—140.
[2] Duality and a priori estimates in Markovian optimization problems, *J. Math. Anal. and Appl.*, **16** (1966), 254—279.
[3] Stochastic Lagrange multipliers, Proc. Conf. Math. Control Theory, Los Angeles, 1967.
[4]* Optimal control of partially observable diffusions, *SIAM J. Control*, **6** (1968), 194—1214.
[5]* The Cauchy problem for a non linear first order partial differential equation, *J. Diff. Equat.*, 5 (1969), 515—530.

Форр (Faurre P.)
[1]* Navigation inertielle optimale et filtrage statistique, Paris, 1971.
[2] Sur les points conjugués en commande optimale (готовится к печати).

Фридман (Friedman A.)
[1] Optimal control in Banach spaces, *J. Math. Anal. and Appl.*, **18** (1967), 35—55.
[2] Optimal control for parabolic equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, 18 (1967), 479—491.
[3] Уравнения с частными производными параболического типа, изд-во «Мир», М., 1968.
[4]* Optimal control in Banach space with fixed points, *I. Math. Anal. and Appl.* **24** (1968), 161—181.
[5]* Differential games of pursuit in Banach space, *J. Math. Anal. and Appl.*, **25** (1969), 93—113.

Фридман, Шинброт (Friedman A., Shinbrot M.)
[1] The initial value problem for the linearized equations of water waves, *J. Math. and. Mech.*, **27** (1967), 107—180.

Хадлер (Hadeler K. P.)
[1]* Ein inverse Eigenwertproblem, *Linear Algebra and its Applications*, **1** (1968), 83—101.

Халанай (Halanay H.)
[1] Differential equations, Acad. Press, New York, 1966.

Халкин (Halkin H.)
[1] A generalization of LaSalle's bang-bang principle, *SIAM J. Control*, **2** (1965), 199—202.

[2] Non linear non convex programming in an infinite dimensional space, в книге «Mathematical theory of control», ed. by A. V. Balakrishnan and L. Neustadt, Acad. Press, New York, 1967, 10—25.

Халкин, Нейштадт (Halkin H., Neustadt L.)

[1] General necessary conditions for optimization problems, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 56 (1966), 1066—1071.

Хаммер, Рыбицкий (Hummer D. G., Rybicki G.)

[1] Computational methods for non-LTE line-transfer problems, в книге «Methods in computational physics», v. 7, Acad. Press, New York, 1967, 53—127.

Хартман, Стампаккья (Hartman P., Stampacchia G.)

[1] On some non linear elliptic differential functional equations, *Acta Math.*, **115** (1966), 271—310.

Хестенс (Hestenes M. R.)

[1] Calculus of variations and optimal control theory, Wiley, 1966.

Хилле Э., Филлипс Р.

[1] Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.

Хопф (Hopf E.)

[1] The partial differential equation $u_t + uu_x = uu_{xx}$, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201—230.

Хорват (Horvath J.)

[1] Topological vector spaces and distributions, Addison-Wesley, Readings, 1966.

Цафестас, Найтингейл (Tzafestas S. G., Nightingale J. M.)

[1]* Optimal filtering, smoothing and prediction in linear distributed systems, *Proc. IEEE*, **115**, (1968), 1207—1212.

[2]* Optimal control of a class of linear stochastic distributed parameter systems, *Proc. IEEE*, 115 (1968), 1213—1220.

Цуйока (Tsujioka K.)

[1]* Remarks on controllability of second order evolution equations in Hilbert spaces, *SIAM J. Control*, 8 (1970), 90—99.

Чандрасекар (Chandrasekhar S.)

[1] Radiative transfer, Oxford, Clarendon Press, 1950.

Чезари (Cesari L.)

[1] Multidimensional Lagrange problems of optimization in a fixed domain and an application to a problem magnetohydrodynamics, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 29 (1968), 81—104.

[2] Existence theorems for multidimensional problems of optimal control, в книге «Differential equations and dinamical systems», Akad. Press, New York, 1967, 115—132.

Чеччони (Cecconi J.)

[1] Sulla teoria dei controlli, Colloque Analyse Fonctionnelle, Rome, 1968.

Шварц (Schwartz L.)

[1] Theorie des distributions, Paris, v. I, 1950 (2 ed. 1957); v. II, 1951.

[2] Distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier*, I: **7** (1957), 1—141; II: 8 (1958), 1—209.

[3] Теория ядер, *Математика*, **3**, № 3 (1959), 69—79.

Шмаедеке (Schmaedeke W.)

[1] Mathematical theory of optimal control for semi-linear hyperbolic systems in two independent variables, *SIAM J. Control*, 5 (1967), 138—152.

Штраус (Strauss W. A.)

[1]* The initial value problem for certain non linear evolution equations, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 249—259.

Экеланд (Ekeland I.)
[1]* Relaxation de problémes de contrôle pour des systémes décrits par des équations aux dérivées partielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **270** (1970), 1283—1286.
[2]* Formes équivalentes d'un probléme relaxé, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **271** (1970), 289—292.
Эрцбергер, Ким (Erzberger H., Kim M.)
[1] Optimum boundary control of distributed parameter systems, *Information and Control*, 9 (1966), 265—278.
Юнг (Young L. C.)
[1] Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations, *C.R. Soc. Sci. et Lettres Varsovie*, cl. III, 30 (1937), 212—234.
Юэ (Huet D.)
[1] Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites, *Ann. Inst. Fourier*, 10 (1960), 1—96.
Яненко Н. Н.
[1]* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, изд-во Сибирского отд. АН СССР, Новосибирск, 1967.

Предметный указатель

Аппроксимация гиперболических задач параболическими 359
— минимизирующего элемента 25, 48, 51
— параболических задач эллиптическими 368
— системами типа Коши — Ковалевской 378, 384, 391

Базис 111

Вполне непрерывное вложение 94, 100, 245, 248, 250, 351

Гамильтониан 159

Двойственность 227, 279, 358
Дифференциальные игры 280, 392

Задача вариационная 7
— в вариационной форме 53, 63, 64, 75, 115, 129, 170, 172, 197, 199, 345, 384
— гиперболическая типа Дирихле 305, 334
— — — Неймана 327
— граничная односторонняя 36, 38, 40, 42, 51, 66, 101, 127, 132, 196, 208, 255, 305, 326, 331, 333, 336, 345, 356
— Гурса 358
— некорректная 184, 224
— некоэрцитивная 182, 277, 314
— нелинейная 92, 98, 243, 246, 249, 251, 256, 261, 350
— параболическая типа Дирихле 126, 190, 193, 213, 230, 262
— — — — неоднородная 202
— — — Неймана 130, 166, 167, 171, 173, 179, 195
— смешанная в смысле Адамара 116, 288
— со свободной границей 36, 38
— стохастическая 280, 392
— типа Коши — Ковалевской 378

Задача управления 53, 119, 289, 312, 342, 362, 375
— — регуляризованная 370
— эволюционная 110, 281
— эллиптическая типа Дирихле 31, 59, 76, 83
— — — — неоднородная 78
— — — Неймана 32, 64, 65, 81

Канонический изоморфизм 56, 74, 189, 340
Квадратичное программирование 231
Конус 17, 35, 37
Коэрцитивность 13, 52, 108, 110, 227, 281, 337

Лемма о компактности 156, 245, 248, 250, 352

Метод динамического программирования 160
— дробных шагов 164, 165
— квазиобращения 278
— Фаэдо — Галеркина 112, 150, 276, 278, 284, 294, 356, 369
— штрафов 385, 392
Минимизация функционала 13, 16
— — недифференцируемого 19, 42
— — неквадратичного 15, 17
— — некоэрцитивного 46, 225
Минимизирующая последовательность 14
Минимизирующий элемент 16
Множество допустимых управлений 7, 10, 13, 54, 119, 290
— — — невыпуклое 21
— — — неограниченное 73, 187
— — — совпадающее с пространством управлений 17, 62, 122, 124, 125, 139, 176, 197, 241, 274, 293, 298, 300, 315, 321, 324, 330, 333, 336, 346

Наблюдаемость 279
Наблюдение 7, 10, 53, 119, 121, 214, 290, 312, 321, 342

Наблюдение граничное 77, 81, 84, 195, 201, 230, 331
— локальное 87, 190
— распределенное 59, 63, 64, 121, 126, 128, 130, 166, 167, 182, 194, 290, 293, 304, 308, 329, 342
— точечное 86, 190
— финальное 123, 128, 131, 171, 173, 183, 209, 213, 221, 222, 298, 300, 303, 307, 309, 324, 335
Нахождение начального состояния 224, 279
Необходимые условия оптимальности первого порядка 29, 103, 107, 256, 279
Неравенство вариационное 17, 18, 23, 50
— эволюционное 255
Нуль-управляемость 219

Обратная единственность 183, 222, 278
— связь 158, 277, 279, 322
Обращение времени 184, 267, 278, 282, 324
Ограничения глобальные 67, 219
— локальные 67, 269
— на состояние 88, 231, 357
— — управление 7, 13, 160, 174, 231, 357
Оператор высшего порядка 40, 70, 106, 136, 210, 216, 289
— гиперболический второго порядка 288
— инфинитезимальный производящий оператор полугруппы 117, 262, 267, 277, 337
— корректный по Петровскому 289
— коэрцитивный 52, 108, 110, 281, 337
— Лапласа 39, 74, 189, 210, 276, 289, 306
— Лапласа — Бельтрами 65, 84, 205, 335
— линейный 53, 108, 281
— параболический второго порядка 116
— псевдодифференциальный эллиптический первого порядка на многообразии 375
— эллиптический второго порядка 58
Оптимальное быстродействие 260, 279, 353, 357
— время 260, 353
— управление 7, 10, 20, 55, 120, 290
Оптимальное управление, единственность 54, 73, 120, 176, 183, 186, 188, 212, 222, 262, 274, 290, 323, 329, 335, 343
— — неединственность 20, 46, 55, 58, 120, 187, 229, 324
— — регулярность 60, 61, 126, 129, 130, 306
— — релейность 62, 83, 107, 185, 186, 193, 212, 214, 222, 262, 267, 280
— — существование 54, 55, 73, 92, 120, 176, 183, 185, 188, 212, 222, 244, 250, 252, 260, 274, 290, 323, 329, 335, 343, 351
— — характеристические соотношения 56, 57, 120, 122, 124, 221, 292, 297, 299, 303, 304, 312, 325, 344, 365, 372, 381

Полугруппа 117, 262, 267, 276
— сжимающая 337
Преобразование Фурье 28
Принцип максимума Понтрягина 104, 107, 125, 192, 257, 279, 358
Проблема моментов 358
Пространство двойственное 29
— Жеврея 280
— наблюдений 53, 119, 290
— ненормируемое 272, 280
— непрерывных линейных отображений 24
— операторов типа Гильберта — Шмидта 164
— распределений (обобщенных функций) 11, 26, 50
— Соболева 11, 27, 29, 30, 50
— управлений 13, 53, 119, 289
— $C^0([0, T]; H)$ 110
— $C^1(\overline{\Omega}; E)$ 11
— $C^k(\overline{\Omega})$ 10
— $\mathcal{D}(\Omega)$ 10, 26, 50
— $\mathcal{D}_-$ 272
— $\mathcal{D}_-(V)$ 273
— $\mathcal{D}'(\Omega)$ 11, 26, 50
— $\mathcal{D}'((0, T); V)$ 11, 109
— $\mathcal{D}'_+(V')$ 272
— $H^1(\Omega)$ 45, 75
— $H^m(\Omega)$ 11, 27
— $H^1_0(\Omega)$ 74, 189
— $H^m_0(\Omega)$ 11, 30
— $H^1_0(\Sigma)$ 205
— $H^2_0(\Sigma)$ 334, 335
— $H^s(\Omega)$ 11, 29
— $H^{-1}(\Omega)$ 210
— $H^{-1/2}(\Gamma)$ 65

Пространство $H^{-1}(\Gamma)$ 84
— $H^{-1}(\Sigma)$ 205, 206
— $H^{2,1}(Q)$ 126
— $H^1(\Omega; E)$ 11, 369
— $\mathcal{L}(X, Y)$ 24
— $L^2(\Omega)$ 11, 26
— $L^p(\Omega)$ 26
— $L^\infty(\Omega)$ 26
— $L^2(0, T; V)$ 11, 108
— $L^2(S; E)$ 11, 67
— $L^\infty(S; E)$ 11
— $W(0, T)$ 109, 141, 188
— $W_0(0, T)$ 188
— X 301, 328
— $\varnothing$ 202, 217

Разложение по собственным функциям 80, 118, 184, 199, 203, 209, 329, 358
Регуляризация параболическая 315, 351, 360, 363, 391
— управления 369
— функционала 48, 225
— эллиптическая 368
Расщепление 143, 166, 178, 191, 197, 242, 277, 315, 322, 346, 356, 366, 376, 382

Сепарабельность 111
Сингулярное возмущение оператора 96, 246, 351
Синтез оптимального управления 158, 277, 279, 322
Система Навье — Стокса 383, 391
— обратимая по времени 324
— параболическо-гиперболическая 336, 357
— уравнений, описывающая состояние 39, 69, 134, 310, 360, 383
Следы функции 28, 80, 84, 195, 204, 251, 331, 340
Состояние 7, 8, 10, 53, 119, 289, 312, 342
— сопряженное 10, 56, 121, 123, 291, 294, 299, 300, 313, 321, 343
Суперединственность 218, 278
Суперуправляемость 218

Теорема сравнения 44
Топология индуктивного предела 10, 26
— $*$-слабая (слабая двойственная) 27, 92
Транспонирование 79, 188, 202, 216, 301, 328

Управление 7, 10
— граничное 65, 81, 83, 98, 130, 167, 171, 173, 195, 201, 209, 213, 230, 327, 334, 345
— допустимое 7, 10
— оптимальное см. Оптимальное управление
— распределенное 59, 64, 76, 92, 126, 166, 182, 190, 304, 307, 308, 309, 312, 342
— стартовое 220, 224, 278, 323, 327
— точечное 86, 193, 358
Управляемость 85, 214, 222, 260, 278, 279, 358, 369
— и единственность 215
— — обратная единственность 222
— модальная 220
— при наличии аддитивных возмущений 220
Уравнение Гамильтона — Якоби 160, 278
— гиперболического типа 281
— гиперболическое на многообразии 378
— корректное по Петровскому 281, 308, 309
— параболического типа 108
— параболическое на многообразии 375
— переноса 357
— Риккати интегро-дифференциальное 149, 154, 162, 167, 179, 200, 277, 318, 322, 349, 356, 367, 377, 382
— с запаздыванием 270, 358
— типа Петровского 308, 309
— Шредингера 278, 358
— эволюционное второго порядка 281, 290, 359
— — — — сведение к системе уравнений первого порядка 310, 360
— — на многообразии 373, 378
— — первого порядка 110, 282
— Эйлера 17
— эллиптическо-параболическое 357
— эллиптического типа 52
Условие граничное 116
— Дирихле 116, 327
— начальное 116
— Неймана 116, 327
— неоднородное 116
— однородное 116
— сопряжения 34

Форма билинейная непрерывная 13, 31, 52, 58, 108, 115, 281, 286
— коэрцитивная 13, 31, 52, 108, 110, 227, 281

Форма некоэрцитивная 47, 228
— несимметричная 23, 31, 44, 47
— полубилинейная эрмитова 17
— симметричная 13
Формула Грина 32, 41, 79, 194
Функция двойственная 227
— Дирака 26, 86
— опорная 230
— стоимости 7, 10, 54, 119, 290, 293, 298, 300, 312, 321, 342
Функция стоимости недифференцируемая 273
— — неквадратичная 17, 238
— — регуляризованная 370
— строго выпуклая 14

Штраф 387, 392

Ядро оператора 166, 348, 377
— отображения 30, 50
— Пуассона 87

Оглавление

От редактора перевода 5
Предисловие к русскому изданию 6
Введение 7
Основные обозначения 10

Глава 1. **Минимизация функционалов и односторонние граничные задачи** 13

§ 1. Минимизация коэрцитивных форм 13
§ 2. Прямое решение некоторых вариационных неравенств . . 22
§ 3. Примеры 25
§ 4. Теорема сравнения 44
§ 5. Некоэрцитивные формы 46

Глава 2. **Управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными эллиптического типа** 52

§ 1. Управление в эллиптических вариационных задачах . . . 52
§ 2. Непосредственные приложения 58
§ 3. Примеры для случая $N = 0$, множество $\mathcal{U}_\partial$ произвольно 73
§ 4. Граничное наблюдение 76
§ 5. Граничные управление и наблюдение. Случай задачи Дирихле 83
§ 6. Ограничения на состояние системы 88
§ 7. Теоремы существования оптимального управления 92
§ 8. Необходимые условия первого порядка 103

Глава 3. **Управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными параболического типа** 108

§ 1. Эволюционные уравнения 108
§ 2. Задачи управления 119
§ 3. Примеры 126
§ 4. Расщепление и интегро-дифференциальное уравнение Риккати (I) 139
§ 5. Расщепление и интегро-дифференциальное уравнение Риккати (II) 166
§ 6. Поведение при $T \to \infty$ 175
§ 7. Задачи, не обязательно коэрцитивные 182
§ 8. Другие типы наблюдения и управления 190
§ 9. Граничное управление и граничное или финальное наблюдение для системы, описываемой смешанной задачей Дирихле 201
§ 10. Управляемость 214
§ 11. Стартовое управление 220
§ 12. Двойственность 227

§ 13. Ограничения на управление и на состояние 231
§ 14. Неквадратичные функции стоимости 238
§ 15. Теоремы существования оптимального управления . . . 243
§ 16. Необходимые условия первого порядка 256
§ 17. Оптимальное быстродействие 260
§ 18. Некоторые обобщения 270
§ 19. Недифференцируемая функция стоимости 273

Глава 4. **Управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными гиперболического типа или корректными по Петровскому** 281

§ 1. Эволюционные уравнения второго порядка 281
§ 2. Задачи управления 289
§ 3. Применение метода транспонирования в задачах управления 301
§ 4. Примеры 304
§ 5. Расщепление 310
§ 6. Стартовое управление 323
§ 7. Граничное управление (I) 327
§ 8. Граничное управление (II) 334
§ 9. Параболическо-гиперболические системы 336
§ 10. Теоремы существования оптимального управления 350

Глава 5. **Регуляризация, аппроксимация и метод штрафов** 359

§ 1. Регуляризация 359
§ 2. Аппроксимация системами типа Коши — Ковалевской . . 373
§ 3. Метод штрафов 385

Библиография 393
Предметный указатель 409

Ж.-Л. ЛИОНС

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ,
ОПИСЫВАЕМЫМИ УРАВНЕНИЯМИ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Редакторы *И. А. Маховая, Л. Б. Штейнпресс*
Художник *Д. В. Орлов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *М. М. Матюшина,*
Т. А. Максимова

Сдано в набор 24/XII 1971 г.
Подписано к печати 1/VI 1972 г.
Бумага кн. журн. $60\times90^1/_{16}$=13 бум. л.,
26 печ. л. Уч.-изд. л. 23,15
Изд. № 1/5818. Цена 1 р. 81 к. Зак. 1230.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
г. Москва, Трехпрудный пер., 9

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».