Л. ЛЮМИС

ВВЕДЕНИЕ В АБСТРАКТНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Перевод с английского
и примечания
Д. А. РАЙКОВА

С предисловием
М. А. НАЙМАРКА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1956

AN INTRODUCTION TO ABSTRACT HARMONIC ANALYSIS

by

LYNN H. LOOMIS

Associate professor of mathematics

1953

D. Van Nostrand Company

Toronto *New York* *London*

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В современной книжной литературе довольно полно представлены те разделы функционального анализа, которые связаны с исследованием линейных нормированных пространств и спектральным анализом самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Значительно хуже представлен в книгах ряд разделов функционального анализа, разработанных сравнительно недавно. К ним в первую очередь следует отнести теорию нормированных колец, исключительно богатую новыми идеями и результатами и имеющую многочисленные приложения в других разделах анализа.

Теория коммутативных нормированных колец была построена в работах И. М. Гельфанда, и уже первые применения этой теории к тригонометрическим рядам показали силу развитых в ней методов. Дальнейшим еще более важным приложением теории коммутативных нормированных колец был построенный в работах И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и М. Г. Крейна гармонический анализ на коммутативных локально бикомпактных группах, охватывающий в качестве весьма частного случая (когда рассматриваемая группа есть аддитивная группа действительных чисел) классический интеграл Фурье. Пользуясь гармоническим анализом, Д. А. Райкову удалось найти простое доказательство теоремы двойственности Л. С. Понтрягина, не использующее тонкие теоремы о структуре коммутативных локально бикомпактных групп.

Другое важное направление теория коммутативных нормированных колец получила в работах Г. Е. Шилова, посвященных исследованию различных классов таких колец и идеалов в них; одним из важных приложений теории были здесь различные весьма общие теоремы тауберова типа.

Следующим шагом было начатое в работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка исследование некоммутативных нормированных колец с инволюцией и их представлений операторами в гильбертовом пространстве и, с другой стороны, установление И. М. Гельфандом и Д. А. Райковым полноты системы неприводимых унитарных представлений локально бикомпактной группы.

В связи с последним результатом возникла задача построения неприводимых унитарных представлений различных конкретных классов групп. Для случая комплексных классических групп эта задача была решена в работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка, причем для комплексной унимодулярной группы (т. е. группы всех комплексных матриц данного порядка с определителем, равным единице) ими была выведена формула, обобщающая классическую формулу Планшереля и являющаяся основой построения гармонического анализа на такой группе. В дальнейшем в работах М. А. Наймарка было доказано, что построенными представлениями исчерпываются все с точностью до эквивалентности неприводимые унитарные представления комплексных классических групп.

Все эти результаты получили дальнейшее развитие в большом числе работ как советских, так и зарубежных авторов. Тем не менее, до последнего времени ни в СССР, ни за границей не было книг, посвященных теории нормированных колец, если не считать книги Э. Хилла «Функциональный анализ и полугруппы», в которой были изложены основы этой теории, используемой в книге как вспомогательный аппарат.

Предлагаемая вниманию советских читателей книга Люмиса до некоторой степени восполняет этот пробел.

В книге ставится задача изложения гармонического анализа на коммутативной локально бикомпактной, а также некоммутативной бикомпактной группе на основе теории нормированных колец. Поэтому главное внимание уделено теории коммутативных колец и теории так называемых H-алгебр. Для удобства чтения в первых трех главах изложены необходимые сведения из теории множеств, топологии, теории нормированных пространств и абстрактного интегрирования. Следует, однако, отметить, что изложение в этих главах весьма сжатое и по существу предполагает, что у читателя уже имеется некоторое представление о рассматриваемых в них вопросах. Весьма сжатым и даже не совсем аккуратным является также изложение некоторых других мест книги.

Поэтому читателю окажут большую пользу примечания переводчика Д. А. Райкова, поясняющие и уточняющие наиболее трудные места текста [1]).

Центральную часть книги занимают главы IV и V, в которых излагается теория, главным образом коммутативных, нормированных колец. Изложение здесь несколько усложнено тем обстоятельством, что кольца не предполагаются содержащими единичный элемент; во многих случаях можно было бы упростить изложение, считая, что единичный элемент уже присоединен к кольцу, а затем, пользуясь простыми соображениями, получить соответствующий результат и для колец без единицы. Исключением здесь являются только некоторые теоремы о регулярных кольцах и теория H-алгебр, где отсутствие единичного элемента существенно.

В последующих главах VI—VIII дается применение теории нормированных колец к гармоническому анализу на коммутативной локально бикомпактной и некоммутативной бикомпактной группах, причем в главе VI излагаются элементы теории топологических групп и инвариантного интегрирования на локально бикомпактной группе. Некоторые возражения здесь может вызвать расположение материала; так, теорему двойственности Л. С. Понтрягина естественнее было бы поместить непосредственно за теоремой Планшереля для коммутативной группы, а не разделять эти два связанных между собой вопроса теоремами тауберова типа.

Несмотря на указанные недостатки, книга безусловно окажется полезной для советских читателей и послужит хорошим введением в теорию нормированных колец и современный гармонический анализ. Конечно, в эту книгу не вошли многие вопросы теории нормированных колец, что объясняется той задачей, которую ставил перед собой автор.

Так, в книгу не включены общая теория колец с инволюцией и их представлений, общая теория представлений локально бикомпактных групп, теория колец операторов в гильбертовом пространстве, вопросы разложения данного кольца на неприводимые кольца и разложения унитарного представления локально бикомпактной группы на неприводимые представления, теория колец

---

[1]) Эти примечания нумеруются маленькими цифрами в круглых скобках.— *Прим. ред.*

вектор-функций, различные обобщения теории на топологические (вообще ненормируемые) кольца и другие вопросы.

В последней главе IX автор делает обзор некоторых из этих вопросов; однако, их изложение здесь настолько кратко и неполно, а местами неточно, что читатель не сможет составить себе о них сколько-нибудь отчетливого представления. Некоторую помощь ему окажут здесь примечания, помещенные в конце книги. Читатель же, который заинтересуется этими вопросами, найдет достаточно полное их изложение в моей книге «Нормированные кольца», которая выйдет в 1956 г.

М. А. Наймарк.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла на основе курса, читанного в Гарвардском университете Макки и затем автором. Первоначально курс следовал книге А. Вейля [48] и охватывал в основном содержащийся в ней материал. По мере ознакомления с гельфандовской теорией банаховских алгебр и ее применимостью к гармоническому анализу на группах, методы и содержание курса неизбежно меняли свое направление, и предлагаемая книга написана уже почти исключительно с точки зрения этой теории. Таким образом, наше изложение базируется на главах IV и V, в которых строится элементарная теория банаховских алгебр, группы же низведены до роли основного объекта приложения теории.

Типичным результатом этой переориентации в самом подходе и методе является наша трактовка теоремы Планшереля. Впервые эта теорема была сформулирована как теорема на общих локально компактных коммутативных группах А. Вейлем. Ее доказательство основывалось на теории строения этих групп и было трудным. Затем Крейн [29], повидимому, не зная о теореме А. Вейля, обнаружил, что теорема Планшереля является естественным результатом применения гельфандовской теории к L^1-алгебре группы. Это совершенно естественно привело к формулированию указанной теоремы как теоремы об абстрактных коммутативных (банаховских) алгебрах с инволюцией, и, следуя Годману [20], мы кладем в основу именно эту форму теоремы Планшереля. (Другое доказательство теоремы Планшереля на группах, основанное на теореме Крейна и Мильмана, дали Картан и Годман [8].)

Выбрав в качестве основного инструмента банаховские алгебры, мы должны были оставить в стороне такие средства, как теорема Крейна и Мильмана или неймановская теория прямого интегрирования, хотя они и играют важную роль в исследованиях по общему гармоническому анализу и допускают систематическое применение. Однако элементарная теория банаховских алгебр с ее приложениями уже сама по себе представляет большой интерес и может служить введением в современные исследования во всей рассматриваемой области, а достигнутая этой теорией степень изящества является признаком ее зрелости.

Предполагается, что читатель владеет понятиями элементарной современной алгебры и топологии метрического пространства. Кроме того, в книге дважды применяется теорема Лиувилля из элементарной теории аналитических функций. На деле, вероятно, требования к читателю идут дальше этого, ибо при отсутствии некоторого знакомства с теорией меры, общей топологией и теорией банаховских пространств технический аппарат мог бы заслонить основное содержание книги. Во избежание этого, в главах I—III сжато изложен предварительный материал, в предположении, что о лежащих в его основе идеях читатель уже имеет некоторое представление. При этом мы ограничиваемся лишь теми вопросами, которые нужны для последующих глав, отнюдь не пытаясь писать краткие руководства по затрагиваемым областям. С этой оговоркой мы, тем не менее, надеемся, что читатель найдет эти главы достаточно цельными и содержащими все необходимое для дальнейшего.

Как было уже упомянуто, центральное место в книге занимает глава IV, содержащая элементы теории банаховских алгебр, изложенные, конечно, обстоятельнее и систематичнее, чем первые три главы. В главе V рассматриваются некоторые специальные банаховские алгебры и устанавливается ряд понятий и теорем гармонического анализа в их абстрактной форме. Глава VI посвящена доказательству существования и единственности интеграла Хаара на произвольной локально компактной группе, а в главах VII и VIII теория банаховских алгебр применяется для распространения стандартного гармонического анализа на локально компактные коммутативные и соответственно компактные группы. В главе VII рассмотрены, в частности, положительно определенные функции и обобщенная теорема Бохнера, преобразование Фурье и теорема Планшереля, тауберова теорема Винера и понтрягинский закон двойственности. Глава VIII посвящена теории представлений и теории почти периодических функций. Книга заканчивается главой IX, содержащей краткое введение в проблемы и литературу некоторых еще не исчерпанных областей, сохраняющих живой научный интерес.

Глава I

ТОПОЛОГИЯ

§ 1. Множества

1A. Предполагается, что читатель знаком с алгеброй множеств; настоящий пункт посвящен лишь обозначениям. Для указания индивидуальных множеств применяются фигурные скобки. Так, $\{a, b\}$ есть множество, составленное из элементов a и b, а $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество, образованное элементами $a_1, \ldots, a_n$. Однако, вообще говоря, множества не могут быть заданы перечнем их элементов и чаще определяются свойствами, для чего мы пользуемся записью вида $\{x: (\ )\}$, означающей множество всех x, обладающих свойством, указанным в круглых скобках. Запись «$a \in A$» означает, что a есть элемент множества A, а «$B \subset A$» — что B есть подмножество множества A; так, $A = \{x: x \in A\}$.

Для комбинаций множеств употребляются обычные обозначения: $A \cup B$ для объединения множеств A и B, $A \cap B$ — для их пересечения; $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ для объединения счетного семейства множеств $\{A_n\}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — для их пересечения. Более общо, $\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{F}} A$ или $\bigcup \{A: A \in \mathfrak{F}\}$ означает объединение произвольного семейства $\mathfrak{F}$ множеств, а $\bigcap \{A: A \in \mathfrak{F}\}$ — их пересечение. Дополнение A' множества A берется каждый раз относительно рассматриваемого «пространства», т. е. того класса, в котором проводится данное рассмотрение. Пустой класс обозначается символом $\varnothing$. Из логики используются лишь символы «$\Rightarrow$» («влечет») и «$\Leftrightarrow$» («равносильно»).

1B. Бинарное отношение «$<$» между элементами класса A называют *частичным упорядочением* этого класса (в слабом смысле), если оно *транзитивно* ($a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$), *рефлексивно* ($a < a$ для каждого $a \in A$) и $a < b$, $b < a \Rightarrow a = b$. A называют ***направленным множеством*** относительно отношения «$<$», если оно частично упорядочено этим отношением и для любых $a, b \in A$ существует

$c \in A$ такое, что $c < a$ и $c < b$. Точнее, в этом случае A называют направленным *вниз*; двойственное этому понятие направленности *вверх* определяется очевидным образом.

Частично упорядоченное множество A *линейно упорядочено*, если для любых двух различных элементов $a, b \in A$ либо $a < b$, либо $b < a$. Множество A частично упорядочено отношением «$<$» в сильном смысле, если «$<$» транзитивно и нерефлексивно ($a \nless a$). В этом случае соответствующим слабым частичным упорядочением служит «$\leqq$»; и обратно, с каждым слабым частичным упорядочением ассоциировано соответствующее сильное.

1С. На протяжении всей книги мы будем часто пользоваться фундаментальной аксиомой теории множеств, допускающей равносильные формулировки в виде леммы Цорна, аксиомы выбора или гипотезы полной упорядочиваемости. Использование ее абсолютно необходимо для применения некоторых абстрактных методов, в частности, в гельфандовской теории банаховских алгебр. Многие математики сомневаются в законности аксиомы выбора. Но следует напомнить, что, как показал Гёдель, если математика непротиворечива без аксиомы выбора, то она остается непротиворечивой и после присоединения этой аксиомы (и аналогичное верно для обобщенной гипотезы континуума). Таким образом, теорема, доказанная с помощью аксиомы выбора, никогда не сможет быть опровергнута, если только математика не содержит уже противоречия, не связанного с этой аксиомой.

Лемма Цорна. *Каждое частично упорядоченное множество A содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество. Если каждое линейно упорядоченное подмножество из A обладает верхней границей в A, то A содержит максимальный элемент* ([1]).

Второе утверждение вытекает из первого. Действительно, верхняя граница x максимального линейно упорядоченного подмножества $B \subset A$ есть максимальный элемент в A, ибо всякий элемент, строго больший, чем x, можно было бы присоединить к B без нарушения линейного порядка, в противоречие с максимальностью B. Ниже приводится вывод аксиомы выбора из леммы Цорна. Какое из этих двух свойств принять за аксиому, а какое доказывать как теорему, есть дело вкуса. Однако доказательство, излагаемое ниже, значительно легче доказательства обратного предложения.

1D. Теорема (аксиома выбора). *Пусть F — функция с областью определения D, относящая каждому $x \in D$ какое-то непустое множество $F(x)$. Тогда существует функция f с той же областью определения D такая, что $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in D$.*

Доказательство. Будем обычным образом рассматривать функцию как класс упорядоченных пар (график). Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех функций g, области определения которых $(g) \subset D$, а значения $g(x) \in F(x)$ для каждого $x \in (g)$. $\mathfrak{F}$ не пусто, ибо для любого фиксированного $x_0 \in D$ и любого фиксированного $y_0 \in F(x_0)$ упорядоченная пара $\langle x_0, y_0 \rangle$ (точнее, класс $\{\langle x_0, y_0 \rangle\}$, образованный одной этой парой) принадлежит $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}$ частично упорядочено по включению, и объединение всех функций (как множеств упорядоченных пар), образующих любое линейно упорядоченное подсемейство $\mathfrak{F}_0$ семейства $\mathfrak{F}$, как легко видеть, принадлежит $\mathfrak{F}$ и служит верхней границей для $\mathfrak{F}_0$. Поэтому $\mathfrak{F}$ содержит максимальный элемент f. Его область определения $(f) = D$, ибо в противном случае, взяв точку $x_0 \in D - (f)$ и элемент $y_0 \in F(x_0)$, мы получили бы функцию $f \cup \{\langle x_0, y_0 \rangle\}$ в $\mathfrak{F}$, строго бóльшую, чем f, в противоречие с максимальностью последней. Тем самым f обладает свойством, утверждаемым в теореме.

§ 2. Топология

2A. Семейство $\mathfrak{J}$ подмножеств пространства (множества) S называют *топологией* на S тогда и только тогда, когда

(а) $\mathfrak{J}$ содержит $\varnothing$ и S;

(б) если $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}$, то и $\bigcup \{A : A \in \mathfrak{J}_1\} \subset \mathfrak{J}$, т. е. $\mathfrak{J}$ вместе с любым подсемейством входящих в него множеств содержит и их объединение;

(в) пересечение любого конечного числа множеств из $\mathfrak{J}$ есть множество из $\mathfrak{J}$.

Если $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ — две топологии на S и если $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}_2$, то говорят, что $\mathfrak{J}_1$ *слабее*, чем $\mathfrak{J}_2$.

2B. Пусть $\mathfrak{A}$ — любое семейство подмножеств из S. Топологией $\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$, *порожденной* семейством $\mathfrak{A}$, называется наименьшая топология на S, содержащая $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ называется *подбазисом* этой топологии. Легко видеть, что $A \in \mathfrak{J}(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда

A есть $\varnothing$, S или (возможно, несчетное) объединение пересечений конечных подсемейств множеств из $\mathfrak{A}$. Если каждое множество из $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\mathfrak{A})$ есть объединение множеств из $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ называется *базисом топологии* $\mathfrak{J}$.

2C. S с заданной на нем топологией $\mathfrak{J}$ называют *топологическим пространством*, а множества из $\mathfrak{J}$ — его *открытыми* множествами. Объединение открытых подмножеств любого множества $A \subset S$ называют *внутренней частью* A и обозначают $\operatorname{int} A$; очевидно, $\operatorname{int} A$ есть наибольшее открытое подмножество в A, и множество A является открытым тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{int} A$.

A называют *окрестностью* всякой точки $p \in \operatorname{int} A$. Обычно, хотя и не всегда, рассматриваются лишь открытые окрестности. Совокупность окрестностей точки p называют *базисом окрестностей* этой точки, если каждое открытое множество, содержащее p, содержит и некоторую окрестность из этой совокупности.

2D. Подмножество из S называют *замкнутым* (относительно топологии $\mathfrak{J}$), если его дополнение открыто. Отсюда следует, что $\varnothing$ и S замкнуты, что пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто и что объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное подмножество $A \subset S$, называют *замыканием* A и обычно обозначают $\bar{A}$; очевидно, $\bar{A}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A, и A замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \bar{A}$. Далее, $p \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда $p \notin \operatorname{int}(A')$, т. е. когда каждое открытое множество, содержащее p, содержит хотя бы одну точку из A.

2E. На каждом подмножестве S_0 топологического пространства S можно ввести топологию, приняв за открытые множества в S_0 пересечения S_0 со всевозможными открытыми множествами из S. Ее называют *относительной топологией*, индуцированной в S_0 топологией из S.

2F. Функцию f, область определения D и множество значений R которой являются топологическими пространствами, называют *непрерывной в точке* $p_0 \in D$, если $f^{-1}(U) = \{p : f(p) \in U\}$ есть окрестность точки p_0 для всякой окрестности U точки $f(p_0)$. Если f непрерывна в каждой точке своей области определения, то ее называют просто *непрерывной* (на D). Следовательно, f непрерывна тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто в D для каждого открытого $U \subset R$, или, что то же, когда $f^{-1}(C)$ замкнуто для каждого замкнутого C.

Если f взаимно однозначна, а f и f^{-1} — обе непрерывны, то f называют *гомеоморфизмом* топологических пространств D и R. Очевидно, гомеоморфизм определяет взаимно однозначное соответствие между топологиями $\mathfrak{J}_D$ на D и $\mathfrak{J}_R$ на R.

2G. Подмножество A топологического пространства S называют *компактным* (2), если оно обладает любым из следующих трех свойств, равносильность которых очевидным образом получается переходом к дополнительным множествам.

(а) Каждое семейство открытых множеств, покрывающее A, содержит конечное подсемейство, покрывающее A (свойство Гейне — Бореля).

(б) Каждое семейство относительно замкнутых подмножеств из A, имеющее пустое пересечение, содержит конечное подсемейство, имеющее пустое пересечение.

(в) Если семейство относительно замкнутых подмножеств из A центрировано (т. е. каждое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение), то и все семейство имеет непустое пересечение.

Из (б) или (в) непосредственно следует, что замкнутое подмножество компактного множества компактно.

2H. Теорема. *Непрерывная функция с компактной областью определения имеет компактное множество значений.*

Доказательство. Если $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие (3) множества R значений функции f, то $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ есть открытое покрытие компактной области ее определения и потому содержит конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}$, образ которого $\{U_{\alpha_i}\}$ является тогда конечным покрытием для R. Тем самым R обладает свойством Гейне — Бореля, т. е. компактно.

2I. Множество точек $\{p_\alpha\}$ называют *направленным* (вниз), если индексы α образуют направленную (вниз) систему. Говорят, что направленное множество точек $\{p_\alpha\}$ сходится к p, если для каждой окрестности U точки p существует индекс β такой, что $p_\alpha \in U$ для всех $\alpha < \beta$. В терминах этой сходимости могут быть выражены все понятия топологии. Так например, назовем точку p *предельной точкой* направленного множества $\{p_\alpha\}$, если для каждой ее окрестности U и каждого индекса β существует индекс $\alpha < \beta$ такой, что $p_\alpha \in U$; тогда легко доказать, что пространство компактно в том и только в том случае, если каждое направленное множество его точек обладает по крайней мере одной предельной точкой.

В дальнейшее рассмотрение понятий, введенных в этом пункте, мы входить не будем, поскольку они мало используются в этой книге.

§ 3. Аксиомы и теоремы отделимости

3A. *Хаусдорфовым пространством* называют топологическое пространство, в котором каждые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Лемма. *Если C — компактное подмножество хаусдорфова пространства S и точка $p \notin C$, то существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $p \in U$ и $C \subset V$.*

Доказательство. Так как S — хаусдорфово пространство, то для каждой точки $q \in C$ существует пара непересекающихся открытых множеств A_q, B_q такая, что $p \in A_q$, $q \in B_q$. Так как C компактно, то его открытое покрытие $\{B_q\}$ содержит конечное подпокрытие $\{B_{q_i}\}$. Множества $V = \bigcup B_{q_i}$, $U = \bigcap A_{q_i}$ и обладают тогда утверждаемым свойством.

Следствие 1. *Компактное подмножество C хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Если $p \notin C$, то, в силу леммы, $p \notin \overline{C}$, так что $\overline{C} \subset C$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{J}_1$ — хаусдорфова и $\mathfrak{J}_2$ — компактная топология на S, причем $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}_2$, то $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2$.*

Доказательство. Каждое множество $C \subset S$, компактное в $\mathfrak{J}_2$, компактно в $\mathfrak{J}_1$, ибо каждое $\mathfrak{J}_1$-покрытие этого множества есть также $\mathfrak{J}_2$-покрытие и потому содержит конечное подпокрытие. Но тогда C замкнуто в $\mathfrak{J}_1$, поскольку топология $\mathfrak{J}_1$ — хаусдорфова. Таким образом, каждое множество, замкнутое в $\mathfrak{J}_2$, оказывается замкнутым в $\mathfrak{J}_1$, и $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1$.

3B. Топологическое пространство называют *нормальным*, если оно хаусдорфово и для каждых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 существуют непересекающиеся открытые множества U_1 и U_2 такие, что $F_i \subset U_i$ $(i = 1, 2)$.

Теорема. *Компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство — такое же, как для леммы 3A. Для каждого $p \in F_1$, в силу этой леммы, существует пара непересекающихся открытых множеств U_p, V_p таких, что $p \in U_p$ и $F_2 \subset V_p$. Так как F_1 компактно, то открытое покрытие его $\{U_p\}$ содержит конечное подпокрытие $\{U_{p_i}\}$. Множества $U_1 = \bigcup U_{p_i}$, $U_2 = \bigcap V_{p_i}$ и обладают тогда требуемым свойством.

3C. Лемма Урысона. *Для каждых двух непересекающихся замкнутых подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства S существует непрерывная вещественная функция f на S такая, что $f = 0$ на F_0, $f = 1$ на F_1 и $0 \leqslant f \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $V_1 = F_1'$. Из нормальности пространства S следует существование открытого множества $V_{\frac{1}{2}}$ такого, что $F_0 \subset V_{\frac{1}{2}}$, $\overline{V}_{\frac{1}{2}} \subset V_1$. Далее, существуют открытые множества $V_{\frac{1}{4}}$ и $V_{\frac{3}{4}}$ такие, что $F_0 \subset V_{\frac{1}{4}}$, $\overline{V}_{\frac{1}{4}} \subset V_{\frac{1}{2}}$, $\overline{V}_{\frac{1}{2}} \subset V_{\frac{3}{4}}$, $\overline{V}_{\frac{3}{4}} \subset V_1$. Неограниченно продолжая этот процесс, мы для каждой правильной двоичной дроби $r = \frac{m}{2^n}$, $0 < m < 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$, определим открытое множество V_r так, что эти множества будут удовлетворять условиям $F_0 \subset V_r$, $\overline{V}_r \subset V_1$ и $\overline{V}_r \subset V_s$ при $r < s$.

Определим теперь функцию f следующим образом: $f(p) = 1$, если p не принадлежит ни одному из множеств V_r, и $f(p) = \inf\{r : p \in V_r\}$ в противном случае. Тогда $f = 1$ на F_1, $f = 0$ на F_0 и множество значений $f \subset [0, 1]$. Далее, $f(p) < b$, где $0 < b \leqslant 1$, тогда и только тогда, когда $p \in V_r$ для некоторого $r < b$, так что $\{p : f(p) < b\} = \bigcup\limits_{r<b} V_r$, т. е. является открытым множеством. Аналогично, $f(p) > a$, где $0 \leqslant a < 1$, тогда и только тогда, когда $p \in \overline{V}_r'$ для некоторого $r > a$, и $\{p : f(p) > a\} = \bigcup\limits_{r>a} \overline{V}_r'$ — также открытое множество. Так как интервалы $[0, b)$ и $(a, 1]$ и их пересечения образуют базис топологии отрезка $[0, 1]$, то мы заключаем, что прообраз каждого открытого множества открыт и, значит, f непрерывна.

3D. Топологическое пространство называют *локально компактным,* если каждая его точка обладает замкнутой компактной окрестностью.

Локально компактное пространство S можно сделать компактным добавлением одной единственной точки. Действительно, пусть $S_\infty = S \cup \{p_\infty\}$, где p_∞ — любая точка, не принадлежащая S. Введем на S_∞ топологию, приняв за открытые множества все открытые множества из S и, кроме того, еще все множества вида $O \cup \{p_\infty\}$, где O — открытое множество из S, имеющее компактное дополнение. Тогда S_∞ будет компактным. В самом деле, в любом его открытом покрытии $\{O_\alpha\}$ по крайней мере одно множество, скажем O_{α_0}, содержит p_∞ и потому имеет своим дополнением компактное подмножество $C \subset S$. Так как множества $O_\alpha \cap S$ открыты в S и покрывают C, то уже некоторое конечное число их покрывает C. Вместе с O_{α_0} это дает конечное подсемейство из $\{O_\alpha\}$, покрывающее S_∞. Таким образом, S_∞ обладает свойством Гейне — Бореля, т. е. компактно. Ясно, что первоначальная топология пространства S есть относительная топология его как подмножества в S_∞. Мы будем называть S_∞ *одноточечным компактным расширением* пространства S.

Если S — хаусдорфово пространство, то S_∞—также хаусдорфово пространство, ибо любые две точки, отличные от p_∞, отделимы той же парой окрестностей, что и раньше, точку же p_∞ можно отделить от любой другой точки p, взяв открытое множество O, содержащее p и имеющее компактное замыкание, так что $\bar{O}'$ будет окрестностью точки p_∞ в S_∞, очевидно, не пересекающейся с окрестностью O точки p.

3E. Теорема. *Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство, а C и U — соответственно компактное и открытое его подмножества такие, что $C \subset U$. Тогда на S существует вещественная непрерывная функция f такая, что $f = 1$ на C, $f = 0$ на U'* и $0 \leqslant f \leqslant 1$.

Доказательство этой теоремы можно было бы получить путем модификации доказательства леммы Урысона 3C. Однако достаточно заметить, что одноточечное компактное расширение S_∞ пространства S есть хаусдорфово пространство, в котором C и U' являются непересекающимися компактными множествами, так что к ним непосредственно приложима лемма Урысона.

§ 4. Теорема Стона — Вейерштрасса

4A. Через $C(S)$ мы будем обозначать в случае компактного множества S совокупность всех вообще непрерывных комплексных функций на S, а в случае локально компактного, но не компактного S — совокупность всех тех из них, которые «обращаются в нуль на бесконечности», в том смысле, что $\{p: |f(p)| \geqslant \varepsilon\}$ компактно для каждого положительного ε; в этом случае $C(S)$ можно рассматривать как подмножество всех функций из $C(S_\infty)$, обращающихся в нуль в точке p_∞ (см. п. 3D), откуда и выражение «обращаются в нуль на бесконечности». В обоих случаях $C^R(S)$ будет обозначать соответствующую совокупность вещественных непрерывных функций.

4B. *Алгеброй* A над полем F называют векторное пространство над F, являющееся одновременно кольцом, в котором скалярное и кольцевое умножения связаны смешанным законом ассоциативности:

$$(\lambda x) y = x(\lambda y) = \lambda(xy).$$

Если умножение коммутативно, то A называют коммутативной алгеброй.

Очевидно, что относительно обычного сложения и умножения функций $C(S)$ есть коммутативная алгебра над полем комплексных, а $C^R(S)$ — над полем вещественных чисел. Если множество S компактно, то эти алгебры содержат постоянные и потому обе обладают мультипликативной единицей. Если S локально компактно, но не компактно, то в $C(S)$ и $C^R(S)$ единицы нет. Заметим также для дальнейшего, что $C^R(S)$ замкнута относительно операций

$$f \cup g = \max(f, g), \qquad f \cap g = \min(f, g),$$

тем самым образуя по ним структуру.

4C. Лемма. *Пусть A — множество вещественных непрерывных функций на компактном пространстве S, замкнутое отно-*

сительно структурных операций $f \cup g$ *и* $f \cap g$. *Тогда его равномерное замыкание содержит каждую непрерывную функцию на* S, *аппроксимируемую в любой паре точек функциями из* A.

Доказательство. Пусть f — непрерывная функция на S, аппроксимируемая указанным образом, и $f_{p,q}$ — аппроксимирующая ее при заданных $\varepsilon > 0$ и точках p, q функция из A, т. е.

$$|f(p) - f_{p,q}(p)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |f(q) - f_{p,q}(q)| < \varepsilon.$$

Положим

$$U_{p,q} = \{r:\ f_{p,q}(r) < f(r) + \varepsilon\} \quad \text{и} \quad V_{p,q} = \{r:\ f_{p,q}(r) > f(r) - \varepsilon\}.$$

При фиксированном q и переменном p открытые множества $U_{p,q}$ покрывают S, и потому S покрывается уже некоторым конечным их числом. Минимум конечного числа соответствующих функций $f_{p,q}$ будет непрерывной функцией $f_q \in A$ такой, что $f_q < f + \varepsilon$ на всем S и $f_q > f - \varepsilon$ на открытом множестве V_q, являющемся пересечением соответствующих множеств $V_{p,q}$. Сделав теперь переменным q и аналогичным образом взяв максимум конечного числа функций f_q, мы получим функцию $f_\varepsilon \in A$ такую, что $f - \varepsilon < f_\varepsilon < f + \varepsilon$ на всем S, что и требовалось.

4D. Лемма. *Равномерно замкнутая алгебра* A *ограниченных вещественных функций на произвольном множестве* S *замкнута также относительно структурных операций.*

Доказательство. Так как $f \cup g = \max(f, g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$, то достаточно показать, что вместе с $f \in A$ также $|f| \in A$. При этом можно предполагать, что $\|f\| = \max\limits_{p \in S} |f(p)| \leqslant 1$.

Ряд Тейлора функции $\sqrt{t + \varepsilon^2}$ по степеням $t - \frac{1}{2}$ равномерно сходится на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому существует полином $P(x^2)$ относительно $x^2 = t$ такой, что $|P(x^2) - \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}| < \varepsilon$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $|P(0)| < 2\varepsilon$, и, положив $Q = P - P(0)$, мы будем иметь $|Q(x^2) - \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}| < 3\varepsilon$. Так как $\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - |x| \leqslant \varepsilon$, то заключаем, что $|Q(x^2) - |x|| < 4\varepsilon$ на отрезке $[-1, 1]$. Но Q не содержит свободного члена, следовательно, $Q(f^2) \in A$, причем $\|Q(f^2) - |f|\| < 4\varepsilon$. Из равномерной замкнутости алгебры A вытекает, что $|f| \in A$, что и требовалось доказать.

4E. Теорема Стона — Вейерштрасса (см. [46]). *Пусть S — компактное пространство и A — алгебра вещественных непрерывных функций на S, отделяющая точки, т. е. для каждых двух различных точек p_1, $p_2 \in S$ существует $f \in A$ такая, что $f(p_1) \neq f(p_2)$. Тогда равномерное замыкание $\bar{A}$ алгебры A есть либо алгебра $C^R(S)$ всех непрерывных вещественных функций на S, либо алгебра всех непрерывных вещественных функций, обращающихся в нуль в одной и той же точке $p_\infty \in S$.*

Доказательство. Предположим сначала, что для каждой точки $p \in S$ существует функция $f \in A$ такая, что $f(p) \neq 0$. Тогда для любой пары различных точек p_1, $p_2 \in S$ найдется функция $f \in A$, удовлетворяющая условиям $0 \neq f(p_1) \neq f(p_2) \neq 0$. Но в таком случае, каковы бы ни были вещественные числа a и b, существует $g \in A$ такая, что $g(p_1) = a$ и $g(p_2) = b$. (В качестве g можно взять, например, надлежащим образом выбранную линейную комбинацию указанной функции f и f^2.) Так как алгебра $\bar{A}$ замкнута относительно структурных операций (лемма 4D), то из леммы 4C следует, что она содержит каждую непрерывную вещественную функцию и $\bar{A} = C^R(S)$.

Остается возможность обращения всех функций $f \in A$ в нуль в некоторой точке p_∞. Нам нужно показать, что в этом случае $\bar{A}$ содержит любую непрерывную функцию g, обращающуюся в нуль в точке p_∞. Но, присоединив к A постоянные, мы окажемся в уже рассмотренной ситуации. Поэтому g может быть аппроксимирована функцией вида $f + c$, $\|g - (f + c)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, где $f \in A$ и c — постоянная. Беря значения в точке p_∞, получаем $|c| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\|f - g\| < \varepsilon$. Следовательно, $g \in \bar{A}$, и теорема полностью доказана.

§ 5. Декартовы произведения и слабая топология

5A. *Декартовым произведением* $S_1 \times S_2$ множеств S_1, S_2 называют совокупность всех упорядоченных пар $\langle p, q\rangle$, где $p \in S_1$, $q \in S_2$. Так, декартова плоскость аналитической геометрии есть декартово произведение вещественной прямой с самой собой. Определение декартова произведения очевидным образом распространяется на любое конечное число сомножителей: $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ есть совокупность всех упорядоченных групп по n элементов $\langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$, где $p_i \in S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В целях дальнейшего обобщения этого определения переформулируем его. Нам дано некоторое множество индексов, а именно, совокупность всех натуральных чисел от 1 до n, и для каждого индекса i — пространство S_i, а $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ есть просто функция, определенная на этом множестве индексов, множество значений которой подчинено лишь требованию, чтобы $p_i \in S_i$ для каждого i. Пусть теперь вообще дано непустое множество индексов A и для каждого индекса $\alpha \in A$ — непустое пространство S_α. Декартово произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} S_\alpha$ определяется как совокупность всех функций p с областью определения A таких, что $p(\alpha) = p_\alpha \in S_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Аксиома выбора (1D) утверждает, что $\prod\limits_\alpha S_\alpha$ непусто.

5B. Пусть $\{f_\alpha\}$ — совокупность функций с общей областью определения S, множества значений которых S_α являются топологическими пространствами. Если S топологизировано так, что все эти функции непрерывны, то множества $\overset{-1}{f_\alpha}(U_\alpha)$ должны быть открытыми для любого индекса α и любого открытого подмножества $U_\alpha \subset S_\alpha$. Топология, порожденная на S подбазисом, образованным всеми этими множествами, является, таким образом, слабейшей из топологий на S, при которых все функции f_α непрерывны; ее называют *слабой топологией* на S, порожденной функциями f_α. Для построения ее подбазиса достаточно для каждого α брать лишь множества U_α, образующие подбазис топологии в S_α. Ясно, что *если $S_1 \subset S$ и f_α' — функция, индуцированная функцией f_α на S_1, то слабая топология на S_1, порожденная функциями f_α', есть относительная топология, индуцированная на S_1 слабой топологией, порожденной на S функциями f_α.*

5C. Функцию f_α, отображающую каждую точку p декартова произведения $S = \prod\limits_\alpha S_\alpha$ на ее координату p_α в α-вом координатном пространстве S_α, называют *проекцией S на S_α*. Если пространства S_α топологические, то от всякой топологии на S естественно требовать, чтобы проекции были непрерывны, и принято приписывать S слабейшую из возможных таких топологий, т. е. слабую топологию, порожденную проекциями ([4]).

Относительная топология, индуцированная на произвольном подмножестве $M \subset \prod\limits_{\alpha} S_\alpha$ указанной топологией на $\prod\limits_{\alpha} S_\alpha$, есть слабейшая из топологий, в которых все проекции f_α, рассматриваемые на M, непрерывны.

5D. Теорема (Тихонова). *Топологическое произведение любого семейства компактных пространств компактно.*

Доказательство (по Бурбаки). Пусть $\mathfrak{F}$ — любое центрированное семейство замкнутых множеств пространства $S = \prod\limits_{\alpha} S_\alpha$ (т. е. пересечение любого конечного числа множеств из $\mathfrak{F}$ непусто). Нам нужно доказать, что пересечение всех множеств из $\mathfrak{F}$ непусто.

Прежде всего, основываясь на лемме Цорна, расширим $\mathfrak{F}$ до максимального центрированного семейства $\mathfrak{F}_0$ (не обязательно замкнутых) множеств из S. Проекции множеств семейства $\mathfrak{F}_0$ на координатное пространство S_α образуют в этом пространстве центрированное семейство $\mathfrak{F}_0^\alpha$, и так как S_α предположено компактным, то существует точка p_α, содержащаяся в замыкании каждого из множеств семейства $\mathfrak{F}_0^\alpha$. Пусть p — точка пространства S, имеющая p_α своей α-вой координатой для любого α. Мы покажем, что p содержится в замыкании каждого из множеств семейства $\mathfrak{F}_0$, а потому — в каждом из множеств семейства $\mathfrak{F}$, чем доказательство и будет завершено. Итак, пусть U — любое открытое множество в S, содержащее p. Тогда (по определению тихоновской топологии) существует конечное число открытых множеств $U_{\alpha_i} \subset S_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset U,$$

где f_α — проекция S на S_α. Это, в частности, означает, что $p_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$, и потому U_{α_i} пересекает каждое множество из $\mathfrak{F}_0^{\alpha_i}$. Но тогда $f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ пересекает каждое множество из $\mathfrak{F}_0$ и тем самым принадлежит $\mathfrak{F}_0$ (поскольку $\mathfrak{F}_0$ максимально относительно свойства центрированности). А в таком случае, по той же причине, и

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \mathfrak{F}_0,$$

откуда и $U \in \mathfrak{F}_0$. Таким образом, U пересекает каждое множество из $\mathfrak{F}_0$, а так как U — любое открытое множество в S, содержащее p, то заключаем, что p содержится в замыкании любого множества из $\mathfrak{F}_0$, и теорема доказана.

5E. *Топологическое произведение любого семейства хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство.*

Доказательство. Если $p \neq q$, то $p_\alpha \neq q_\alpha$ по крайней мере для одного α, и так как S_α хаусдорфово, то в S_α существуют непересекающиеся открытые множества A_α и B_α такие, что $p_\alpha \in A_\alpha$ и $q_\alpha \in B_\alpha$. Но тогда $f_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ и $f_\alpha^{-1}(B_\alpha)$ будут непересекающимися открытыми множествами в $\prod_\alpha S_\alpha$, содержащими соответственно p и q, что и требовалось.

5F. В главе VI нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть $f(p, q)$ — непрерывная функция на топологическом произведении $S_1 \times S_2$ хаусдорфовых пространств S_1, S_2, и пусть C и O — соответственно компактное множество в S_1 и открытое множество в пространстве значений функции f. Тогда множество*

$$W = \{q\colon f(p, q) \in O \text{ для всех } p \in C\}$$

открыто в S_2.

Доказательство представляет собой третье применение приема, использованного в доказательствах леммы 3A и теоремы 3B. При фиксированном $q_0 \in W$ для каждого $p \in C$ существует открытое множество $U \times V$, содержащее $\langle p, q_0 \rangle$, на котором $f(p, q) \in O$. Но C, будучи компактным, может быть покрыто конечным числом $U_1, \ldots, U_n$ указанных U-множеств, и, полагая $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, где V_i — соответствующие V-множества, имеем $f(p, q) \in O$ для всех $q \in V$ и $p \in C$. Таким образом, для каждого $q_0 \in W$ существует содержащее его открытое множество $V \subset W$, чем и доказано, что W открыто.

5G. Теорема. *Слабая топология, порожденная на локально компактном пространстве S семейством $\mathfrak{F}$ непрерывных комплексных функций, обращающихся в нуль на бесконечности, отде-*

ляющих точки пространства S и не обращающихся одновременно в нуль ни в одной точке, совпадает с исходной топологией пространства S.

Доказательство. Пусть S_∞ — одноточечное компактное расширение пространства S и $\mathfrak{J}_2$ — его топология. Функции семейства $\mathfrak{F}$ продолжаются до непрерывных функций на S_∞, обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке p_∞. Поэтому, обозначая через $\mathfrak{J}_1$ слабую топологию, порождаемую на S_∞ этим семейством продолженных функций, имеем $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}_2$. При этом $\mathfrak{J}_1$ — хаусдорфова топология, поскольку продолженные функции, очевидно, отделяют точки пространства S_∞. В силу следствия 2 леммы 3А, $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2$. Следовательно, совпадают и топологии, индуцированные на S, и теорема доказана.

Глава II

БАНАХОВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 6. Нормированные линейные пространства

6А. *Нормированным линейным пространством* называют векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, на котором определена неотрицательная вещественная функция $\|x\|$, именуемая *нормой*, обладающая следующими свойствами:

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \text{ (неравенство треугольника)},$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ (однородность)}.$$

В дальнейшем нормированные линейные пространства мы будем рассматривать вообще над полем комплексных чисел, если же мы будем иметь в виду нормированное линейное пространство над полем вещественных чисел, то это будет явно указываться присоединением прилагательного «вещественное». Нормированное линейное пространство, в котором $\|x-y\|$ принято за расстояние $\rho(x, y)$ между элементами x и y, является метрическим пространством. Нормированное линейное пространство называют *банаховским пространством*, если оно полно в этой метрике, т. е. если из $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$ следует существование элемента x такого, что $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Напомним читателю, что рассматриваемая здесь (метрическая) топология имеет своим базисом семейство всех открытых шаров, где открытым шаром $S(x_0, r)$ с центром x_0 и радиусом r называется множество $\{x\colon \|x - x_0\| < r\}$. Открытые шары с центром x_0 образуют базис окрестностей точки x_0.

Из неравенства треугольника непосредственно следует, что $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$, так что $\|x\|$ есть непрерывная функция от x.

n-мерное евклидово пространство является вещественным банаховским пространством, если за норму точки (вектора) x принята обычная длина $\sqrt{\sum x_i^2}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты (или компоненты) x. Оно остается банаховским пространством, если эту норму x заменить на $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ с любым фиксированным $p \geqslant 1$, хотя при $p \neq 2$ неравенство треугольника доказывается труднее. Эти банаховские пространства являются простейшими примерами пространств L^p теории меры, основные свойства которых будут полно (хотя и сжато) изложены в главе III. Здесь мы упомянем только, что L^p есть пространство всех «интегрируемых» вещественных функций f на фиксированном пространстве с мерой, имеющих конечный интеграл $\int |f|^p$, с нормой $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$. Другим примером банаховского пространства может служить совокупность всех ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве S с $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$. Эту норму называют *равномерной*, ибо $f_n \to f$ по этой норме (т. е. $\|f_n - f\| \to 0$) тогда и только тогда, когда функции f_n равномерно сходятся к f. Полнота этого нормированного линейного пространства равносильна теореме о том, что предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных непрерывных функций сам является ограниченной непрерывной функцией.

6В. Следующая теорема доставляет один из наиболее важных способов получения новых банаховских пространств, исходя из уже данных.

Теорема. *Пусть M — замкнутое векторное подпространство нормированного линейного пространства X. Векторное фактор-пространство X/M превращается в нормированное линейное пространство, если за норму смежного класса y принять его расстояние от нулевой точки: $\|y\| = \inf\{\|x\|: x \in y\}$. Если X полно, то и X/M полно.*

Доказательство. Прежде всего $\|y\| = 0$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $x_n \in y$ такая, что $\|x_n\| \to 0$. Так как смежный класс y замкнут, то это будет в том и только в том случае, когда $0 \in y$, так что $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = M$. Далее,

$$\begin{aligned}\|y_1 + y_2\| &= \inf\{\|x_1 + x_2\|: x_1 \in y_1, x_2 \in y_2\} \leqslant \\ &\leqslant \inf\{\|x_1\| + \|x_2\|: x_1 \in y_1, x_2 \in y_2\} = \\ &= \inf\{\|x_1\|: x_1 \in y_1\} + \inf\{\|x_2\|: x_2 \in y_2\} = \|y_1\| + \|y_2\|.\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\|\lambda y\| = |\lambda| \cdot \|y\|$, и, значит, X/M есть нормированное линейное пространство.

Пусть теперь $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность в X/M. Можно предположить, перейдя в случае надобности к подпоследовательности, что $\|y_{n+1} - y_n\| < 2^{-n}$. Тогда можно индуктивно выбрать элементы $x_n \in y_n$ так, чтобы $\|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n}$, поскольку $\rho(x_n, y_{n+1}) = \rho(y_n, y_{n+1}) < 2^{-n}$. Если X полно, то фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ стремится к некоторому пределу x_0, и так как для смежного класса y_0, содержащего x_0, имеем $\|y_n - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\|$, то y_n стремится к y_0. Сходимость первоначальной последовательности к y_0 вытекает тогда из следующей общей леммы: если фундаментальная последовательность элементов метрического пространства содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится. Таким образом, если X полно, то и X/M полно.

§ 7. Ограниченные линейные отображения

7A. Теорема. *Для линейного отображения T нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y следующие условия равносильны:*

1) *T непрерывно.*

2) *T непрерывно в некоторой точке.*

3) *T ограничено, т. е. существует положительная постоянная C такая, что $\|T(x)\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Если T непрерывно в точке x_0, то существует положительная постоянная B такая, что $\|T(x - x_0)\| = \|T(x) - T(x_0)\| \leqslant 1$ при $\|x - x_0\| \leqslant B$. Таким образом, $\|T(h)\| \leqslant 1$ при $\|h\| \leqslant B$, и для любого $y \neq 0$ имеем

$$\|T(y)\| = \frac{\|y\|}{B} \left\| T\left(\frac{B}{\|y\|} y\right) \right\| \leqslant \frac{\|y\|}{B},$$

т. е. T удовлетворяет условию 3 с

$$C = \frac{1}{B}.$$

Но тогда

$$\|T(x) - T(x_1)\| = \|T(x - x_1)\| \leqslant C\|x - x_1\| < \varepsilon \text{ при } \|x - x_1\| < \frac{\varepsilon}{C},$$

так что T непрерывно в каждой точке x_1.

7B. *Нормой* $\|T\|$ непрерывного (ограниченного) линейного отображения T называют наименьшую из указанных постоянных C. Таким образом,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|},$$

откуда непосредственно следует, что *совокупность всех ограниченных линейных отображений нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y (с обычными сложением и умножением на скаляры и нормой $\|T\|$) само является нормированным линейным пространством. Если Y полно (т. е. является банаховским пространством), то полно и это пространство отображений.*

Так, например, если $\{T_n\}$ — фундаментальная последовательность относительно определенной выше нормы, то $\{T_n(x)\}$ есть фундаментальная последовательность в Y для каждого $x \in X$, и, обозначая ее предел через $T(x)$, легко проверить, что T — ограниченное линейное отображение и $\|T_n - T\| \to 0$.

7C. Совокупность $\mathfrak{B}(X)$ всех ограниченных линейных отображений нормированного линейного пространства X в себя есть не только нормированное линейное пространство, но и алгебра, с произведением T_1T_2, определенным обычным образом: $(T_1T_2)(x) = T_1(T_2(x))$. При этом

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|T_2\|;$$

действительно,

$$\|T_1T_2\| = \sup \frac{\|T_1(T_2(x))\|}{\|x\|} \leqslant \sup \frac{\|T_1\| \cdot \|T_2\| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|T_1\| \cdot \|T_2\|.$$

Алгебра над полем комплексных чисел, являющаяся вместе с тем нормированным линейным пространством, в котором выполняется указанное неравенство для нормы произведения, называется *нормированной алгеброй*. Полная нормированная алгебра называется *банаховской алгеброй* ([5]). Таким образом, если X — банаховское пространство, то $\mathfrak{B}(X)$ есть банаховская алгебра.

Другим примером банаховской алгебры может служить пространство $C(S)$ всех ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве S, с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$. Легко проверить, что $C(S)$ — нормированная алгебра, и так как равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций имеет непрерывный предел, то $C(S)$ также полно и, значит, есть банаховская алгебра.

7D. Теорема. *Пусть N — ядро ограниченного линейного отображения T (т. е. подпространство, образованное всеми элементами $x \in X$, для которых $T(x)=0$). Тогда $\|T\|$ не изменится, если T рассматривать как линейное отображение, определенное на X/N.*

Доказательство. T можно рассматривать как отображение, определенное на X/N, ибо если x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же смежному классу y, то $x_1-x_2 \in N$ и $T(x_1)=$ $=T(x_2)$. Пусть $|||T|||$ — новая норма T. Имеем

$$|||T||| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|T(y)\|}{\|y\|} = \sup_{y \neq 0} \sup_{x \ni y} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \notin N} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T\|.$$

7E. Нормированное линейное пространство X называют *прямой суммой* его подпространств M и N, если X алгебраически есть прямая сумма M и N и проекции X на M и N обе непрерывны (т. е. топология в X есть тихоновская топология произведения $M \times N$). Если X есть прямая сумма своих подпространств M и N, то алгебраический изоморфизм между M и X/N (относящий каждому элементу из M содержащий его смежный класс из X/N) является также гомеоморфизмом. Действительно, отображение M на X/N, по определению нормы в X/N, не увеличивает нормы, а отображение X/N на M, в силу теоремы 7D, имеет ту же норму, что и проекция X на M.

7F. Заметим для дальнейшего, что ограниченное линейное отображение T плотного подпространства M нормированного линейного пространства X в банаховское пространство однозначно продолжается до ограниченного линейного отображения всего пространства X. Это — частный случай теоремы, утверждающей, что равномерно непрерывная функция, определенная на плотном подмножестве метрического пространства, обладает однозначно определенным непрерывным продолжением на все пространство. Наметим простое непосредственное доказательство. Пусть T определено на последовательности $\{x_n\}$ и $x_n \to x_0$. Из неравенства $\|T(x_n)-T(x_m)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|$ вытекает, что последовательность $\{T(x_n)\}$ — фундаментальная и потому сходящаяся. Обозначив ее предел через $T(x_0)$, легко проверить, что это определение $T(x_0)$ однозначно (и согласуется с первоначальным, если T уже определено в точке x_0); оно и доставляет требуемое продолжение T на все X.

7G. Этот пункт посвящен важной теореме о замкнутом графике. Здесь впервые существенно используется то, что рассматриваемые пространства — банаховские.

Лемма 1. *Пусть T — ограниченное линейное отображение банаховского пространства X в банаховское пространство Y. Если образ единичного шара $S_1 = S(0,1)$ пространства X плотен в некотором шаре $U_r = S(0, r)$ пространства Y с центром в нулевой точке, то он содержит U_r.*

Доказательство. Множество $A = U_r \cap T(S_1)$, по предположению, плотно в U_r. Пусть $\bar{y}$ — произвольная точка из U_r. Задав любое δ, $1 > \delta > 0$, и приняв $y_0 = 0$, выберем индуктивно последовательность $y_n \in Y$ так, что $y_{n+1} - y_n \in \delta^n A$ и $\|y_{n+1} - \bar{y}\| < \delta^{n+1} r$ для всех $n \geqslant 0$. Тогда будет существовать последовательность $\{x_n\}$ такая, что $T(x_{n+1}) = y_{n+1} - y_n$ и $\|x_{n+1}\| < \delta^n$. Положив $\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, будем иметь $\|\bar{x}\| < \frac{1}{1-\delta}$ и $T(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}) = \bar{y}$. Тем самым U_r покрывается образом шара радиуса $\frac{1}{1-\delta}$ с центром в нулевой точке. Значит, $U_{r(1-\delta)} \subset T(S_1)$ для каждого $\delta > 0$, и, следовательно, $U_r \subset T(S_1)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если образ единичного шара S_1 при отображении T не плотен ни в каком шаре пространства Y, то множество значений этого отображения не содержит никакого шара из Y.*

Доказательство. Если $T(S_1)$ не плотно ни в каком шаре из Y, то тем же свойством обладает и $T(S_n) = \{T(x) \colon \|x\| \leqslant n\} = nT(S_1)$. Поэтому в любом шаре $S \subset Y$ содержится замкнутый шар $\bar{S}(y_1, r_1)$, не пересекающийся с $T(S_1)$, и можно индуктивно построить последовательность замкнутых шаров $\bar{S}(y_n, r_n) \subset \bar{S}(y_{n-1}, r_{n-1})$, где $\bar{S}(y_n, r_n)$ не пересекается с $T(S_n)$. При этом можно потребовать, чтобы $r_n \to 0$, так что $\{y_n\}$ будет фундаментальной последовательностью. Ее предел y принадлежит всем шарам $\bar{S}(y_n, r_n)$ и потому не содержится ни в одном из $T(S_n)$. Так как

$\bigcup_n T(S_n) = T(X)$, то мы тем самым доказали, что $T(X)$ не содержит никакого шара $S \subset Y$, что и утверждалось.

Теорема. *Если T — взаимно однозначное ограниченное линейное отображение банаховского пространства X на банаховское пространство Y, то отображение T^{-1} ограничено.*

Доказательство. Лемма 2 показывает, что $T(S_1)$ плотно в некотором шаре пространства Y, и, следовательно, $T(S_2)$ плотно в некотором шаре U_r (6). Но тогда, в силу леммы 1, $U_r \subset T(S_2)$, значит, $T^{-1}(U_r) \subset S_2$ и $\|T^{-1}\| \leqslant 2/r$, чем теорема и доказана.

Следствие. *Линейное отображение T банаховского пространства X в банаховское пространство Y, имеющее в пространстве $X \times Y$ замкнутый график, ограничено.*

Доказательство. График $\{\langle x, T(x)\rangle : x \in T\}$ отображения T, в силу предположения, является банаховским пространством относительно нормы $\|\langle x, T(x)\rangle\| = \|x\| + \|T(x)\|$ (7). Так как отображение $\langle x, T(x)\rangle \to x$ есть линейное отображение на X, не повышающее нормы, то из доказанной теоремы следует, что обратное отображение $x \to \langle x, T(x)\rangle$ ограничено, а значит, и T ограничено, что и требовалось доказать.

Это и есть теорема о замкнутом графике.

§ 8. Линейные функционалы

8A. Пространство непрерывных линейных отображений нормированного линейного пространства X в поле комплексных чисел Y (рассматриваемое как нормированное линейное пространство с $\|y\| = |y|$) называют пространством, *сопряженным* к X; мы будем обозначать его X^*. Элементы этого пространства называют (непрерывными) *линейными функционалами*. Так как поле комплексных чисел полно, то из 7B следует, что

X^* всегда является банаховским пространством.

Если $(0 \neq) F \in X^*$ и N — его ядро, то X/N одномерно, поскольку отображение F, рассматриваемое на X/N, взаимно однозначно (см. п. 7D). Иными словами, замкнутое подпространство $N \subset X$ имеет дефект 1.

8B. Существование достаточно богатого запаса линейных функционалов обеспечивается известной теоремой продолжения Хана — Банаха. Будем обозначать линейное подпространство векторного пространства, порожденное его подмножеством A, через $[A]$.

Теорема (Хана — Банаха). *Пусть F — ограниченный линейный функционал на линейном подпространстве M нормированного линейного пространства X и x_0 — точка пространства X, не принадлежащая M. Тогда F можно, не изменяя его нормы, продолжить на $M+[x_0]$.*

Доказательство. Пусть сперва X — вещественное нормированное линейное пространство. Задача заключается в надлежащем определении значения $\alpha = F(x_0)$, после чего определение $F(x+\lambda x_0)$ для каждого $x \in M$ и каждого вещественного λ формулой $F(x+\lambda x_0) = F(x) + \lambda\alpha$, очевидно, и даст требуемое линейное продолжение F на $M+[x_0]$. Без ограничения общности можно считать, что $\|F\| = 1$. Тогда α должно быть таково, чтобы $|F(x)+\lambda\alpha| \leqslant \|x+\lambda x_0\|$ для каждого $x \in M$ и каждого вещественного $\lambda \neq 0$. Поделив это неравенство на λ, можно переписать его так:

$$-F(x_1) - \|x_1+x_0\| \leqslant \alpha \leqslant -F(x_2) + \|x_2+x_0\| \text{ для любых } x_1, x_2 \in M.$$

Но $F(x_2)-F(x_1) = F(x_2-x_1) \leqslant \|x_2-x_1\| \leqslant \|x_2+x_0\| + \|x_1+x_0\|$; поэтому

$$\sup_{x_1 \in M} \{-F(x_1) - \|x_1+x_0\|\} \leqslant \inf_{x_2 \in M} \{-F(x_2) + \|x_2+x_0\|\},$$

и мы видим, что в качестве α можно взять любое число, заключенное в этих границах.

Комплексный случай мы выведем теперь из вещественного, следуя [6] ([8]). Заметим прежде всего, что комплексное нормированное линейное пространство одновременно вещественно (если ограничиться умножением на вещественные скаляры) и что вещественная и мнимая части G и H комплексного линейного функционала F являются, каждая, линейным функционалом в этом вещественном пространстве. При этом

$$G(ix) + iH(ix) = F(ix) = iF(x) = -H(x) + iG(x),$$

так что $H(x) = -G(ix)$ и $F(x) = G(x) - iG(ix)$. Если теперь $\|F\| = 1$ на M, то $\|G\| \leqslant 1$ и, по доказанному, G можно продолжить на вещественное линейное пространство $M + [x_0]$ с сохранением этого неравенства. Присоединив затем аналогично ix_0, мы получим комплексное подпространство, порожденное подпространством M и элементом x_0, и определенный на нем вещественный линейный функционал G с $\|G\| \leqslant 1$. Положим теперь на этом подпространстве $F(x) = G(x) - iG(ix)$; как мы видели, на M это равенство справедливо. Очевидно, на расширенном подпространстве F есть линейный функционал относительно умножения на вещественные скаляры. Чтобы убедиться в его линейности и относительно умножения на комплексные скаляры, достаточно поэтому заметить, что

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = i[G(x) - iG(ix)] = iF(x).$$

Наконец, выбирая $e^{i\theta}$ при заданном x так, чтобы $e^{i\theta}F(x)$ было неотрицательным вещественным числом, имеем

$$|F(x)| = |F(e^{i\theta}x)| = |G(e^{i\theta}x)| \leqslant \|e^{i\theta}x\| = \|x\|,$$

так что $\|F\| \leqslant 1$, и теорема полностью доказана.

8C. Из леммы Цорна следует, что *рассмотренный выше функционал F может быть продолжен с сохранением линейности и нормы на все пространство X*. Действительно, такие продолжения функционала F на линейные подпространства пространства X частично упорядочены по включению, а объединение любого линейно упорядоченного семейства этих продолжений, очевидно, есть продолжение, включающее все члены семейства и потому служащее его верхней границей. Следовательно, в силу леммы Цорна, существует максимальное продолжение. Но тогда оно должно быть определено на всем X, поскольку в противном случае, в силу теоремы 8B, его можно было бы снова продолжить.

Отсюда, в частности, следует, что *для каждого ненулевого элемента $x_0 \in X$ существует линейный функционал $F \in X^*$ такой, что $F(x_0) = \|x_0\|$ и $\|F\| = 1$*. Действительно, $F(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$ есть линейный функционал с нормой $\|F\| = 1$, определенный на $[x_0]$, и, значит, он может быть продолжен требуемым образом на все X.

Точно так же *для каждого замкнутого подпространства M и элемента $x_0 \notin M$ существует функционал $F \in X^*$ такой, что*

$\|F\| = 1$, $F = 0$ *на* M *и* $F(x_0) = d$, *где* d — *расстояние от* x_0 *до* M. Действительно, функционал F, определенный на подпространстве $[x_0] + M$ формулой $F(\lambda x_0 - x) = \lambda d$, линеен и

$$\|F\| = \sup_{x \in M} \frac{|\lambda d|}{\|\lambda x_0 - x\|} = \sup_{x \in M} \frac{d}{\|x_0 - x\|} = \frac{d}{\inf\limits_{x \in M} \|x_0 - x\|} = \frac{d}{d} = 1;$$

остается взять какое-либо его продолжение на все X, сохраняющее линейность и норму.

Совокупность $M^{\perp}$ всех $F \in X^*$, обращающихся в нуль на M, называют *аннулятором* подпространства M. Только что доказанное предложение означает, что *x принадлежит замкнутому подпространству M тогда и только тогда, когда $F(x) = 0$ для каждого $F \in M^{\perp}$*. Этот факт можно выразить так: $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

8D. Теорема. *Естественное отображение (вложение) $x \to x^{**}$ нормированного линейного пространства X в его второе сопряженное X^{**} по формуле*

$$x^{**}(F) = F(x) \text{ для всех } F \in X^*$$

есть изоморфизм, сохраняющий норму.

Доказательство. Функционал $x^{**}(F) = F(x)$, где x фиксировано, а F пробегает X^*, очевидно, линеен на X^*. Так как $|x^{**}(F)| = |F(x)| \leqslant \|F\| \cdot \|x\|$, то x^{**} ограничен, причем $\|x^{**}\| \leqslant \|x\|$. С другой стороны, так как, по 8C, существует $F \in X^*$ такой, что $F(x) = \|x\|$ и $\|F\| = 1$, то $\|x^{**}\| = \sup\limits_{F} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \geqslant \|x\|$. Следовательно, $\|x^{**}\| = \|x\|$, и теорема доказана.

Вообще X есть собственное подпространство пространства X^{**}. Если $X = X^{**}$, то говорят, что X *рефлексивно*.

8E. Пусть T — ограниченное линейное отображение нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y. Для каждого фиксированного $G \in Y^*$ функционал F, определенный формулой $F(x) = G(T(x))$, является элементом пространства X^*. Определенное так отображение T^* пространства Y^* в X^*, очевидно, линейно; его называют *сопряженным* к T. Если X вложено в X^{**}, то T^{**} служит продолжением T. Действительно, для каждого $x \in X$ и $G \in Y^*$ имеем:

$$(T^{**}x^{**})G = x^{**}(T^*G) = (T^*G)x = G(Tx) = (Tx)^{**}G,$$

так что $T^{**}(x^{**}) = (Tx)^{**}$.

Так как $|F(x)| = |G(T(x))| \leqslant \|G\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$, то $\|T^*G\| = \|F\| \leqslant \leqslant \|G\| \cdot \|T\|$, так что T^* ограничено и $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. А так как T^{**} есть продолжение T, то, наоборот, $\|T\| \leqslant \|T^{**}\| \leqslant \|T^*\|$. Следовательно, $\|T^*\| = \|T\|$.

8F. В главе IV нам понадобится следующая

Теорема. *Если $\{F_n\}$ — последовательность ограниченных линейных функционалов на банаховском пространстве X такая, что множество $\{|F_n(x)|\}$ ограничено для каждого $x \in X$, то множество норм $\{\|F_n\|\}$ ограничено.*

Доказательство. Достаточно показать, что рассматриваемая последовательность функционалов ограничена на некотором замкнутом шаре. Действительно, если $|F_n(x)| \leqslant B$ для всех $x \in S(x_0, r) = \{x: \|x - x_0\| < r\}$, то

$$|F_n(y)| \leqslant |F_n(y + x_0)| + |F_n(x_0)| \leqslant 2B \quad \text{при} \quad \|y\| < r$$

и нормы $\|F_n\|$ имеют общую верхнюю границу $\frac{2B}{r}$.

Если предположить, что последовательность $\{F_n\}$ не ограничена на каждом шаре, то можно индуктивно построить последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\{\bar{S}_m\}$ с радиусами, стремящимися к нулю, и подпоследовательность $\{F_{n_m}\}$ такую, что $|F_{n_m}(x)| > m$ на всем $\bar{S}_m$. Действительно, если $\bar{S}_m$ уже построен, то, так как последовательность $\{F_n\}$, по предположению, не ограничена на $\bar{S}_m$, можно выбрать точку P_{m+1} внутри $\bar{S}_m$ и функционал $F_{n_{m+1}}$ так, чтобы $|F_{n_{m+1}}(P_{m+1})| > m + 1$; по непрерывности функционала $F_{n_{m+1}}$, неравенство $|F_{n_{m+1}}(P)| > m + 1$ сохраняется на некотором замкнутом шаре с центром P_{m+1}, содержащемся в $\bar{S}_m$; этот шар мы и примем за $\bar{S}_{m+1}$. Но так как X полно, то существует точка $x_0 \in \bigcap\limits_m \bar{S}_m$. А тогда $|F_{n_m}(x_0)| > m$ для всех m, в противоречие с предположенной ограниченностью множества $\{|F_n(x_0)|\}$. Таким образом, последовательность $\{F_n\}$ не может быть неограниченной на каждом шаре, откуда и следует справедливость теоремы.

Следствие. *Если $\{x_n\}$ — последовательность элементов нормированного линейного пространства X такая, что множество $\{|F(x_n)|\}$ ограничено для каждого $F \in X^*$, то совокупность норм $\{\|x_n\|\}$ ограничена.*

Это — применение доказанной теоремы к $\{x_n\}$, рассматриваемой, согласно п. 8D, как последовательность ограниченных линейных функционалов на банаховском пространстве X^*.

§ 9. Слабая топология на X^*

9A. Так как пространство X^*, сопряженное к нормированному линейному пространству X, является некоторой совокупностью комплексных функций на X, то X^* можно рассматривать как подмножество топологического произведения $\prod\limits_{x\in X} C_x$, где индексами служат всевозможные элементы $x \in X$, а координатным пространством C_x для каждого x является комплексная плоскость. Относительную топологию, индуцированную на X^* из $\prod\limits_{x\in X} C_x$, называют слабой топологией на X^*. Как мы знаем (см. п. 5C), это — слабейшая из топологий на X^*, в которых все функции $x \to x^{**}$ (проекции X^* на координатные пространства) непрерывны. Множества вида $\{F: |F(x) - \lambda_0| < \varepsilon\}$, зависящие от x, λ_0 и ε, образуют подбазис слабой топологии на X^*.

9B. Теорема. *Сильно замкнутый единичный шар в X^* компактен в слабой топологии.*

Доказательство. Сильно замкнутый единичный шар в X^* есть, конечно, множество $S = \{F: \|F\| \leqslant 1\}$. Значения, принимаемые функционалами $F \in S$ в точке $x \in X$, являются комплексными числами, принадлежащими замкнутому кругу $S_x \subset C_x$ радиуса $\|x\|$. Поэтому S есть подмножество топологического произведения $\prod\limits_{x\in X} S_x$. Так как последнее, по теореме Тихонова (5D), компактно, то достаточно показать, что S слабо замкнуто в $\prod\limits_{x\in X} S_x$. Но действительно, пусть G — функция, содержащаяся в слабом замыкании множества $S \subset \prod\limits_{x\in X} S_x$. Каковы бы ни были $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$, множество

$$\{F: |F(x) - G(x)| < \varepsilon\} \cap \{F: |F(y) - G(y)| < \varepsilon\} \cap \\ \cap \{F: |F(x+y) - G(x+y)| < \varepsilon\}$$

открыто в $\prod\limits_{x} S_x$ и содержит $G(x)$, а вместе с ним и некоторый элемент $F \in S$. Но $F(x+y)=F(x)+F(y)$, следовательно, $|G(x)+G(y)-G(x+y)|<3\varepsilon$. В силу произвольности ε, заключаем, что функция G аддитивна. Аналогично устанавливается, что $G(\lambda x)=\lambda G(x)$ и $|G(x)| \leqslant \|x\|$. Следовательно, $G \in S$, т. е. S слабо замкнуто в $\prod\limits_x S_x$, и теорема доказана.

9C. Слабая топология в X^* обладает рядом интересных и важных свойств, с которыми, хотя они и не понадобятся в этой книге, следует в общеобразовательных целях познакомить читателя хотя бы на каком-либо образце. Ограничимся следующим. В п. 8C было показано, что замкнутое подпространство $M \subset X$ есть аннулятор своего аннулятора ($M = M^{\perp\perp}$). Аналогично можно охарактеризовать и слабо замкнутые подпространства пространства X^*.

Теорема. *Пусть M — подпространство пространства X^*, $M^{\perp}$ — пересечение ядер всех функционалов из M и $(M^{\perp})^{\perp}$ — совокупность всех функционалов из X^*, обращающихся в нуль на $M^{\perp}$. Тогда $M=(M^{\perp})^{\perp}$ в том и только в том случае, когда M слабо замкнуто.*

Доказательство. Функционал $x^{**}(F)=F(x)$ для каждого фиксированного $x \in X$, по определению, непрерывен в слабой топологии пространства X^*, и потому ядро его слабо замкнуто. Следовательно, совокупность функционалов, обращающихся в нуль на любом фиксированном подмножестве $A \subset X$, как пересечение таких ядер, также слабо замкнута. В частности, $(M^{\perp})^{\perp}$ слабо замкнуто. Так как $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$, то остается лишь показать, что если F_0 не принадлежит слабому замыканию множества M, то F_0 не принадлежит $(M^{\perp})^{\perp}$, т. е. существует $x_0 \in M^{\perp}$ такой, что $F_0(x_0) \neq 0$. Но если F_0 не принадлежит слабому замыканию множества M, то существует слабая окрестность функционала F_0, не пересекающая M, т. е. существуют $\varepsilon > 0$ и $x_1, \ldots, x_n \in X$ такие, что никакое $G \in M$ не удовлетворяет одновременно неравенствам $|G(x_i)-F_0(x_i)|<\varepsilon$ для всех $i=1, \ldots, n$. Отсюда следует, что подпространство n-мерного комплексного евклидова пространства, являющееся образом M при отображении $G \to \langle G(x_1), \ldots, G(x_n)\rangle$, не содержит ни одной точки ε-куба с центром в точке $\langle F_0(x_1), \ldots, F_0(x_n)\rangle$. В частности, оно не содержит самой этой точки и потому имеет комплексную размерность, не превосходящую $n-1$, так что существуют постоянные $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} c_i G(x_i) = 0$ для каждого $G \in M$, а $\sum_{i=1}^{n} c_i F_0(x_i) = 1$. Если положить $x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, то эти условия принимают вид $G(x_0) = 0$ для каждого $G \in M$, а $F_0(x_0) = 1$, чем и доказано, что F_0 не принадлежит $(M^{\perp})^{\perp}$.

Замечание. Более тонким рассуждением этого типа можно показать, что если пересечение M с каждым сильно замкнутым шаром слабо замкнуто, то $M = (M^{\perp})^{\perp}$ [9] (см. [11]).

§ 10. Гильбертово пространство

10А. *Гильбертово пространство* H есть банаховское пространство, в котором норма удовлетворяет дополнительному требованию, позволяющему ввести понятие ортогональности. Пожалуй, наиболее ясной формулировкой этого дополнительного свойства является закон параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \tag{1}$$

Формулой

$$4\,(x, y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 \tag{2}$$

определяется затем скалярное произведение (x, y), и довольно кропотливыми элементарными подсчетами устанавливаются следующие его свойства:

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y); \tag{3}$$

$$(\lambda x, y) = \lambda\,(x, y); \tag{4}$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}; \tag{5}$$

$$(x, x) > 0, \text{ если } x \neq 0. \tag{6}$$

При доказательстве свойства аддитивности (3) вещественные и мнимые части разделяются и для получения равенства вещественных частей закон параллелограмма применяется к четырем суммам типа $\|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|x_1 - x_2 + y\|^2$ [10]. Повторным применением свойства (3) приходим к равенству $\left(\frac{m}{2^n} x, y\right) =$

$=\frac{m}{2^n}(x, y)$, откуда, по непрерывности, следует, что $(ax, y) = a(x, y)$ для любых положительных a. С другой стороны, из формулы (2) непосредственно видно, что $(-x, y) = -(x, y)$ и $(ix, y) = i(x, y)$, чем доказательство свойства (4) и завершается. Остальные два свойства непосредственно явствуют из формулы (2).

10B. Однако в большинстве применений скалярное произведение первичнее, чем норма, и обычное построение теории гильбертовых пространств исходит из свойств (3)—(6) скалярного произведения, принимаемых за аксиомы, норма же определяется формулой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, откуда закон параллелограмма сразу следует. Из разложения

$$0 \leqslant (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \lambda(y, x) - \bar{\lambda}(x, y) + |\lambda|^2 (y, y),$$

полагая $\lambda = \frac{(x, x)}{(y, x)}$, получаем неравенство Шварца ([11])

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{7}$$

где равенство достигается только для пропорциональных x и y. При $(y, x) = 0$ это неравенство тривиально. Далее, раскрывая правую часть равенства $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y)$ и применяя неравенство Шварца, получаем неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \tag{8}$$

где равенство достигается лишь в том случае, когда x и y пропорциональны с неотрицательным вещественным коэффициентом пропорциональности. Таким образом, H есть нормированное линейное пространство, и теперь — довольно безвкусно — делается заключительное предположение, что

$$H \text{ полно по норме } \|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{9}$$

Элементы x и y называют *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Отсюда непосредственно следует их пифагорово свойство: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

10C. Теорема. *Замкнутое выпуклое* ([12]) *подмножество C гильбертова пространства содержит однозначно определенный элемент с наименьшей нормой.*

Доказательство. Пусть $d = \inf \{\|x\|: x \in C\}$. Выберем $x_n \in C$ так, чтобы $\|x_n\| \downarrow d$ ([13]). Поскольку C выпукло, $\frac{x_n + x_m}{2} \in C$ и, значит, $\|x_n + x_m\| \geqslant 2d$. Так как, в силу закона параллелограмма,

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \|x_n + x_m\|^2,$$

то заключаем, что $\|x_n - x_m\| \to 0$, когда $n, m \to \infty$. Полагая $x_0 = \lim x_n$, имеем $\|x_0\| = \lim \|x_n\| = d$. Если бы C содержало еще элемент x с $\|x\| = d$, то $\frac{x + x_0}{2}$ был бы элементом множества C, имеющим, в силу неравенства (8), норму, меньшую чем d. Следовательно, x_0 — единственный элемент из C, норма которого равна d.

10D. Теорема. *Пусть M — замкнутое подпространство гильбертова пространства. Тогда каждый элемент $x \in H$ однозначно представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$ элемента $x_1 \in M$ и элемента $x_2 \perp M$. При этом x_1 является ближайшим к x элементом из M.*

Доказательство. Пусть $x \notin M$. Смежный класс $\{x - y: y \in M\}$ можно назвать гиперплоскостью, проходящей через x параллельно M. Очевидно, она выпукла и замкнута и потому содержит однозначно определенный элемент $x - x_1$, ближайший к нулевой точке (теорема 10C). Полагая $x_2 = x - x_1$, имеем $\|x_2 - \lambda y\|^2 \geqslant \|x_2\|^2$ для каждого $y \in M$ и каждого комплексного λ. Беря здесь $\lambda = \frac{(x_2, y)}{(y, y)}$, получаем, что $-|(y, x_2)| \geqslant 0$, откуда $(y, x_2) = 0$. Таким образом, $x_2 \perp M$. Обращая это рассуждение, можно из ортогональности x_2 к M вывести минимальность $\|x_2\|$ и тем самым единственность разложения. Разумеется, последнюю легко доказать и непосредственно.

10E. Совокупность всех элементов, ортогональных к M, образует замкнутое подпространство $M^\perp$, и теорема 10D равносильна утверждению, что H есть прямая сумма своих подпространств M и $M^\perp$. Элемент x_1 называют *проекцией* x на M, а преобразование E, определенное формулой $E(x) = x_1$, естественно,— *проектированием* на M. Очевидно, это идемпотентное ($E^2 = E$) линейное преобразование с нормой 1. Множеством значений его служит M, а ядром $M^\perp$.

Лемма. *Всякое линейное преобразование A пространства H, отображающее подпространства M и $M^{\perp}$ в себя, перестановочно с E (т. е. $AE = EA$).*

Доказательство. Если $x_1 \in M$, то $Ax_1 \in M$, так что $AEx_1 = Ax_1 = EAx_1$. Если $x_2 \in M^{\perp}$, то $Ax_2 \in M^{\perp}$, так что $AEx_2 = 0 = EAx_2$. Так как каждое $x \in H$ представимо в виде $x_1 + x_2$, то заключаем, что $AEx = EAx$ для всех $x \in H$, что и требовалось доказать.

Если M_1 и M_2 — ортогональные замкнутые подпространства, то из пифагорова свойства $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, справедливого для любых двух элементов $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$, легко следует, что алгебраическая сумма $M_1 + M_2$ полна и, значит, замкнута. Пусть теперь $M_1, \ldots, M_n$ — конечное множество попарно ортогональных замкнутых подпространств и M_0 — ортогональное дополнение их (замкнутой) алгебраической суммы. Тогда H есть прямая сумма подпространств $M_0, M_1, \ldots, M_n$, компонентой вектора x в M_i служит его ортогональная проекция x_i на M_i, и имеет место формула $\|x\|^2 = \|\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \|x_i\|^2$, обобщающая пифагорово свойство. Из этого замечания в качестве следствия получается неравенство Бесселя: *если $M_1, \ldots, M_n$ — попарно ортогональные замкнутые подпространства гильбертова пространства и x_i — проекция x на M_i, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

10F. Теорема. *Пусть $\{M_\alpha\}$ есть, возможно несчетное, семейство попарно ортогональных замкнутых подпространств гильбертова пространства H и M — замыкание их алгебраической суммы. Каков бы ни был элемент $x \in H$, его проекции x_α на M_α отличны от нуля не более чем для счетного множества индексов α_n, причем ряд $\sum x_{\alpha_n}$ сходится и его сумма есть проекция x на M.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — любой конечный набор индексов α. Из неравенств $\sum \|x_{\alpha_i}\|^2 \leqslant \|x\|^2$ следует, что $x_\alpha = 0$ для всех индексов α, кроме, быть может, не более чем счетного их множества $\{\alpha_n\}$, и что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_{\alpha_i}\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Полагая $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{\alpha_i}$, имеем $\|y_n - y_m\|^2 = \sum\limits_{i=m+1}^{n} \|x_{\alpha_i}\|^2 \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Поэтому y_n сходится к некоторому элементу $y \in M$, и так как проекцией y на M_α, очевидно, служит x_α, то $x - y$ ортогонально к M_α для любого α, а значит, ортогонально и к M, и теорема доказана.

10G. Теорема. *Для каждого линейного функционала $F \in H^*$ существует однозначно определенный элемент $y \in H$ такой, что $F(x) = (x, y)$.*

Доказательство. Если $F = 0$, то берем $y = 0$. В противном случае пусть M — ядро функционала F и z — ненулевой элемент, ортогональный к M. Выберем скаляр c так, чтобы для элемента $y = cz$ удовлетворялось равенство $F(y) = (y, y)$ $\left(\text{т. е. положим } c = \frac{F(z)}{(z, z)}\right)$. Так как H/M одномерно, то каждое $x \in H$ обладает однозначно определенным представлением в виде $x = m + \lambda y$, где $m \in M$. Поэтому $F(x) = F(m + \lambda y) = \lambda F(y) = \lambda (y, y) = (m + \lambda y, y) = (x, y)$, что и требовалось.

§ 11. Инволюция на $\mathfrak{B}(H)$

11A. Мы уже отмечали, что ограниченные линейные отображения банаховского пространства в себя образуют банаховскую алгебру (7C). В случае пространства H эта нормированная алгебра $\mathfrak{B}(H)$ допускает еще одну важную операцию — взятие сопряженного элемента (см. 8E). Действительно, по отождествлении H с H^* (теорема 10G) преобразование T^*, сопряженное к преобразованию $T \in \mathfrak{B}(H)$, тоже оказывается элементом из $\mathfrak{B}(H)$. В терминах скалярного произведения T^* определяется формулой

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in H. \tag{1}$$

Нам понадобится дальше следующая

Лемма. *Ядро ограниченного линейного преобразования A является ортогональным дополнением к множеству значений сопряженного преобразования A^*.*

Действительно, $Ax = 0$ тогда и только тогда, когда $(Ax, y) = 0$ для всех $y \in H$, а так как $(Ax, y) = (x, A^*y)$, то это, очевидно, равносильно ортогональности элемента x к множеству значений преобразования A^*.

11В. Теорема. *Операция $T \to T^*$ обладает следующими свойствами:*

1) $T^{**} = T$.
2) $(S+T)^* = S^* + T^*$.
3) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$.
4) $(ST)^* = T^* S^*$.
5) $\| T^* T \| = \| T \|^2$.
6) $(I + T^* T)^{-1} \in \mathfrak{B}(H)$ (*I — тождественное преобразование*).

Доказательство. Свойства 1—4 более или менее очевидны в силу формулы (1). Так, 4 следует из того, что

$$(x, (ST)^* y) = (STx, y) = (Tx, S^* y) = (x, T^* S^* y).$$

Что касается свойства 5, то мы уже знаем, что $\| T^* T \| \leqslant \leqslant \| T^* \| \cdot \| T \| = \| T \|^2$ (см. п. 8Е), так что остается лишь показать, что $\| T \|^2 \leqslant \| T^* T \|$. Но, используя неравенство Шварца, имеем:

$$\| T \|^2 = \sup \frac{(Tx, Tx)}{\| x \|^2} = \sup \frac{(x, T^* Tx)}{\| x \|^2} \leqslant \sup \frac{\| x \| \cdot \| T^* Tx \|}{\| x \|^2} \leqslant \| T^* T \|.$$

Для доказательства свойства 6 заметим, что

$$\| x \|^2 + \| Tx \|^2 = ((I + T^* T) x, x) \leqslant \| (I + T^* T) x \| \cdot \| x \|,$$

так что $\| (I + T^* T) x \| \geqslant \| x \|$. В частности, преобразование $I + T^* T$ взаимно однозначно, и так как оно, очевидно, самосопряженное, то, в силу леммы 11А, множество его значений плотно в H. Поэтому для любого $y_0 \in H$ существует последовательность x_n такая, что $(I + T^* T) x_n \to y_0$, и так как $(I + T^* T)^{-1}$ не увеличивает норму, то x_n есть фундаментальная последовательность и сходится к некоторому $x_0 \in H$. Таким образом, $(I + T^* T) x_0 = y_0$, т. е. множеством значений преобразования $I + T^* T$ служит все H. Тем самым $(I + T^* T)^{-1}$ есть ограниченное линейное преобразование на H с нормой, не превосходящей единицы, и теорема полностью доказана.

11С. $*$-операцию в алгебре A над полем комплексных чисел, обладающую указанными выше свойствами 1—4, называют *инволюцией*. Банаховскую алгебру с единицей и инволюцией, обладающей всеми свойствами 1—6, называют C^*-алгеброй. Гельфанд и Наймарк [13] показали, что каждая C^*-алгебра изометрически изоморфна некоторой алгебре ограниченных линейных преобразований надлежащего гильбертова пространства. Таким образом, наиболее общие C^*-алгебры можно рассматривать как подалгебры алгебры $\mathfrak{B}(H)$. В главе V мы в качестве простого следствия гельфандовской теории получим, что коммутативная C^*-алгебра изометрически изоморфна алгебре всех непрерывных комплексных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве. Одним из применений этого результата будет весьма изящное доказательство спектральной теоремы.

11D. В заключение приведем еще лемму, относящуюся к паре линейных преобразований A и B любого векторного пространства.

Лемма. *Если N и R — соответственно ядро и множество значений преобразования A и $AB = BA$, то $B(N) \subset N$ и $B(R) \subset R$.*

Доказательство. Если $x \in N$, то $0 = BAx = A(Bx)$, так что $Bx \in N$. Если $x \in R$, так что $x = Ay$ для некоторого y, то $Bx = BAy = ABy \in R$.

Глава III

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Теорию меры Хаара на локально компактных группах удобно выводить, отправляясь от «элементарного интеграла» (линейного функционала), определенного для непрерывных функций, обращающихся в нуль вне компактных множеств (см. главу VI). В соответствии с этим мы начнем эту главу изложением общей теории Даниэля продолжения элементарного интеграла до интеграла Лебега [9]. Остальная часть главы будет посвящена пространствам L^p и теореме Фубини.

§ 12. Интеграл Даниэля

12А. Пусть L — векторное пространство ограниченных вещественных функций, определенных на некотором множестве S, замкнутое относительно структурных операций $f \cup g = \max(f, g)$ и $f \cap g = \min(f, g)$. L замкнуто тогда и относительно операции взятия абсолютной величины, поскольку $|f| = f \cup 0 - f \cap 0$. Пусть, далее, на L определен неотрицательный линейный функционал I, непрерывный относительно монотонного перехода к пределу. Таким образом, I подчинен следующим условиям:

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \tag{1}$$

$$I(cf) = cI(f), \tag{2}$$

$$f \geqslant 0 \Rightarrow I(f) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$f \geqslant g \Rightarrow I(f) \geqslant I(g), \tag{3'}$$

$$f_n \downarrow 0 \Rightarrow I(f_n) \downarrow 0. \tag{4}$$

Здесь «$f_n \downarrow$» означает, что последовательность f_n монотонно убывает в каждой точке, т. е. $f_{n+1}(p) \leqslant f_n(p)$ для всех n и p, а «$f_n \downarrow f$» — что f_n, монотонно убывая, стремится в каждой точке к пределу f.

Во избежание смешения с ограниченными линейными функционалами теории нормированных линейных пространств мы будем называть такой функционал *интегралом*. Нашей задачей будет продолжить I на более широкий класс функций, обладающий всеми указанными свойствами пространства L (кроме ограниченности функций) и, сверх того, замкнутый относительно некоторых счетных операций.

Так, в качестве L можно взять совокупность всех непрерывных функций на $[0, 1]$, а в качестве I — обыкновенный интеграл Римана. Свойства (1)—(3) его хорошо известны, а (4) следует из того, что на компактном пространстве точечная монотонная сходимость непрерывных функций к непрерывной функции равномерна (см. п. 16A). Расширением L служит тогда совокупность всех функций на $[0, 1]$, суммируемых по Лебегу, а продолжением I — обыкновенный интеграл Лебега.

12B. Каждая возрастающая последовательность вещественных функций сходится, если допустить, чтобы предельная функция могла принимать также значение $+\infty$. Пусть U — совокупность пределов всех монотонно возрастающих последовательностей функций из L. U содержит L, поскольку последовательность $f_n = f$ есть тривиальная возрастающая последовательность, стремящаяся к f. Ясно, что U замкнута относительно сложения ([14]), умножения на неотрицательные постоянные ([14]) и структурных операций.

Для продолжения I на U мы примем очевидное определение: $I(f) = \lim I(f_n)$, где $f_n \uparrow f$ и $f_n \in L$, причем $I(f)$ может принимать и значение $+\infty$. В п. 12C будет показано, что $I(f)$ не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$, стремящейся к f. Тогда очевидно, что в случае $f \in L$ новое определение согласуется со старым (ибо мы можем положить $f_n = f$) и что положительный функционал I удовлетворяет условиям (1) и (2) с $c \geqslant 0$. Из леммы 12C будет также следовать, что I удовлетворяет условию (3′).

12C. Лемма. *Если $\{f_n\}$ и $\{g_m\}$ — возрастающие последовательности функций из L и $\lim g_m \leqslant \lim f_n$, то $\lim I(g_m) \leqslant \lim I(f_n)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $k \in L$ и $\lim f_n \geqslant k$, то $\lim I(f_n) \geqslant I(k)$. Действительно, $f_n \geqslant f_n \cap k$ и

$f_n \cap k \uparrow k$, так что $\lim I(f_n) \geqslant \lim I(f_n \cap k) = I(k)$ на основании условий (3′) и (4).

Беря здесь $k = g_m$ и переходя к пределу по $m \to \infty$, получаем, что $\lim I(f_n) \geqslant \lim I(g_m)$, и лемма доказана. Если $\lim f_n = \lim g_m$, то имеет место также обратное неравенство, чем доказана однозначность определения I на U.

12D. Лемма. *Если $f_n \in U$ и $f_n \uparrow f$, то $f \in U$ и $I(f_n) \uparrow I(f)$.*

Доказательство. Выберем $g_n^m \in L$ так, чтобы $g_n^m \uparrow_m f_n$, и пусть $h_n = g_1^n \cup \ldots \cup g_n^n$. Функции $h_n \in L$ и образуют возрастающую последовательность. При этом $g_i^n \leqslant h_n \leqslant f_n$ для $i \leqslant n$. Переходя к пределу сперва по n, а затем по i, получаем, что $f \leqslant \lim h_n \leqslant f$. Таким образом, $h_n \uparrow f$ и $f \in U$. Выполняя те же предельные переходы в неравенствах $I(g_i^n) \leqslant I(h_n) \leqslant I(f_n)$, получаем, что $\lim I(f_i) \leqslant I(f) \leqslant \lim I(f_i)$, т. е. $I(f_i) \uparrow I(f)$, и лемма доказана.

12E. Обозначим через $-U$ класс функций, получающихся умножением функций из U на -1: $-U = \{f\colon -f \in U\}$. Распространим функционал I на $-U$, приняв для $f \in -U$ очевидное определение: $I(f) = -I(-f)$. Если f принадлежит также U, то это определение согласуется с прежним, ибо $f + (-f) = 0$, а I аддитивен на U. Класс $-U$, очевидно, обладает свойствами, вполне аналогичными свойствам класса U. Так, $-U$ замкнут относительно операции взятия предела монотонно убывающей последовательности, структурных операций, сложения ([14]) и умножения на неотрицательные постоянные ([14]), а I обладает на $-U$ свойствами (1), (2) и (3′). Важно заметить, что если $g \in -U$, $h \in U$ и $g \leqslant h$, то $h - g \in U$ и $I(h) - I(g) = I(h - g) \geqslant 0$.

Назовем теперь функцию f *суммируемой* (или, лучше, I-суммируемой), если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют функции $g \in -U$ и $h \in U$ такие, что $g \leqslant f \leqslant h$, $I(g)$ и $I(h)$ конечны и $I(h) - I(g) < \varepsilon$. Тогда $\inf\limits_{h \in U} I(h) = \sup\limits_{g \in -U} I(g)$ и $I(f)$ определяется как их общее значение. Класс суммируемых функций мы будем обозначать через L^1 (или $L^1(I)$); он и является искомым расширением пространства L.

Непосредственно очевидно, что если $f \in U$ и $I(f) < \infty$, то $f \in L^1$ и новое определение $I(f)$ согласуется с прежним. Действительно, тогда существуют $f_n \in L$ такие, что $f_n \uparrow f$, и мы можем принять $h = f$ и $g = f_n$ для достаточно большого n.

12F. Теорема. *L^1 и I на L^1 обладают всеми постулированными свойствами L и I на L* ([15]).

Доказательство. Пусть $f_1, f_2 \in L^1$ и $\varepsilon > 0$. Существуют $g_1, g_2 \in -U$ и $h_1, h_2 \in U$ такие, что $g_i \leqslant f_i \leqslant h_i$ и $I(h_i) - I(g_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ $(i = 1, 2)$. Понимая под $\circ$ любую из операций $+$, $\cap$, $\cup$, имеем тогда $g_1 \circ g_2 \leqslant f_1 \circ f_2 \leqslant h_1 \circ h_2$ и $h_1 \circ h_2 - g_1 \circ g_2 \leqslant (h_1 - g_1) + (h_2 - g_2)$, откуда $I(h_1 \circ h_2) - I(g_1 \circ g_2) < \varepsilon$. Следовательно, $f_1 + f_2$, $f_1 \cup f_2$ и $f_1 \cap f_2 \in L^1$ и, в силу аддитивности I на U и $-U$, $I(f_1 + f_2) - I(f_1) - I(f_2) | < 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, то тем самым I обладает на L^1 свойством (1). То, что $cf \in L^1$ и $I(cf) = cI(f)$ для всех $f \in L^1$, очевидно; заметим только, что при $c < 0$ аппроксимирующие функции меняются ролями. Если $f \geqslant 0$, то $h \geqslant 0$ и $I(f) = \inf I(h) \geqslant 0$, значит, выполнено и условие (3). Выполнение условия (4) вытекает из следующей более общей теоремы:

12G. Теорема. *Если $f_n \in L^1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $f_n \uparrow f$ и $\lim I(f_n) < \infty$, то $f \in L^1$ и $I(f_n) \uparrow I(f)$.*

Доказательство. Мы можем считать, вычтя, в случае надобности, из всех f_n по f_0, что $f_0 = 0$. Существуют $h_n \in U$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что $f_n - f_{n-1} \leqslant h_n$ и $I(h_n) < I(f_n - f_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда $f_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} h_i$ и $\sum_{i=1}^{n} I(h_i) < I(f_n) + \varepsilon$. Полагая $h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i$, согласно лемме 12D имеем $h \in U$ и $I(h) = \sum_{i=1}^{\infty} I(h_i)$. Далее, $f \leqslant h$ и $I(h) \leqslant \lim I(f_n) + \varepsilon$. Поэтому при достаточно большом m существует функция $g \in -U$ такая, что $g \leqslant f_m \leqslant f \leqslant h$ и $I(h) - I(g) < 2\varepsilon$. Следовательно, $f \in L^1$ и $I(f) = \lim I(f_m)$.

12H. Будем называть семейство вещественных функций *монотонным*, если оно замкнуто относительно операций взятия пределов монотонно возрастающих и монотонно убывающих последовательностей. Обозначим через $\mathfrak{B}$ наименьшее монотонное семейство, содержащее L; члены этого семейства будем называть *бэровскими* функциями.

Если $h \leqslant k$, то любое монотонное семейство $\mathfrak{M}$, содержащее $(g \cup h) \cap k$ для каждой $g \in L$, содержит также $(f \cup h) \cap k$ для каждой $f \in \mathfrak{B}$, ибо функции f, для которых $(f \cup h) \cap k \in \mathfrak{M}$, образуют монотонное семейство, содержащее L, а потому и $\mathfrak{B}$. В частности ([16]), наименьшим монотонным семейством, содержащим L^+, является $\mathfrak{B}^+$ (где C^+ для любого класса функций C обозначает совокупность всех неотрицательных функций из C).

Теорема. *$\mathfrak{B}$ замкнуто относительно алгебраических и структурных операций.*

Доказательство (по Халмошу [23]). Пусть $\mathfrak{M}(f)$ для любой функции $f \in \mathfrak{B}$ означает совокупность всех функций $g \in \mathfrak{B}$ таких, что $f+g$, $f \cup g$ и $f \cap g \in \mathfrak{B}$. Очевидно, $\mathfrak{M}(f)$ — монотонное семейство, и если $f \in L$, то $\mathfrak{M}(f)$ содержит L и, значит, есть все $\mathfrak{B}$. Но $g \in \mathfrak{M}(f)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathfrak{M}(g)$. Следовательно, $\mathfrak{M}(g)$ содержит L для любого $g \in \mathfrak{B}$, и потому $\mathfrak{M}(g) = \mathfrak{B}$ для любого $g \in \mathfrak{B}$. Но это означает, что если f и $g \in \mathfrak{B}$, то $f+g$, $f \cup g$ и $f \cap g \in \mathfrak{B}$ ([17]).

Аналогично, класс $\mathfrak{M}$ функций $f \in \mathfrak{B}$ таких, что $cf \in \mathfrak{B}$ для всех вещественных c, монотонен и содержит L, а потому $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$.

12I. Будем называть функцию f *L-ограниченной*, если существует функция $g \in L^+$ такая, что $|f| \leqslant g$. Будем называть семейство $\mathfrak{F}$ функций *L-монотонным*, если предел всякой монотонно возрастающей или монотонно убывающей последовательности L-ограниченных функций из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма. *Если $f \in \mathfrak{B}$, то существует $g \in U$ такая, что $f \leqslant g$.*

Доказательство. Семейство функций $f \in \mathfrak{B}$, для которых это справедливо, монотонно (согласно лемме 12D) и содержит L, а потому совпадает с $\mathfrak{B}$.

Теорема. *$\mathfrak{B}^+$ есть наименьшее L-монотонное семейство функций, содержащее L^+.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — это наименьшее семейство. Для любой фиксированной $g \in L^+$ функции $f \in \mathfrak{B}^+$ такие, что $f \cap g \in \mathfrak{F}$, образуют монотонное семейство, содержащее L^+ и потому совпадающее с $\mathfrak{B}^+$. Поэтому, если $f \in \mathfrak{B}^+$ и $f \leqslant g$, то $f = f \cap g \in \mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{F}$ содержит все L-ограниченные функции из $\mathfrak{B}^+$. Пусть теперь f — любая функция из $\mathfrak{B}^+$. Выберем (на основании леммы) функцию $g \in U$, для которой $f \leqslant g$. Существуют $g_n \in L^+$ такие, что $g_n \uparrow g$. Так как функции $f \cap g_n$ (будучи L-ограниченными) принадлежат $\mathfrak{F}$ и $f \cap g_n \uparrow f$, то, по определению L-монотонного семейства, $f \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{B}^+ \subset \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{B}^+$ само является L-монотонным семейством, содержащим L^+, а $\mathfrak{F}$ — наименьшее такое семейство, то заключаем, что $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{F}$, что и требовалось доказать.

12J. Мы заменим теперь L^1 на $L^1 \cap \mathfrak{B}$, т. е. будем в дальнейшем считать принадлежащими L^1 лишь функции, удовлетворяющие прежнему определению суммируемости (см. п. 12E) и являющиеся, кроме того, бэровскими. Это ограничение бэровскими функциями диктуется исключительно соображениями удобства. Оно избавляет от необходимости заниматься некоторыми «нульмерными» рассмотрениями в ряде доказательств, таких, как 16C, 31A и 33A, и оказывается также полезным при одновременном рассмотрении нескольких интегралов.

Теорема. *Для того чтобы $f \in L^1$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in \mathfrak{B}$ и существовала $g \in L^1$ такая, что $|f| \leqslant g$.*

Доказательство. Необходимость тривиальна ([18]). При доказательстве достаточности можно предполагать, что $f \geqslant 0$. Но семейство функций $h \in \mathfrak{B}^+$ таких, что $h \cap g \in L^1$, монотонно (в силу теоремы 12G) и содержит L^+, а потому совпадает с $\mathfrak{B}^+$. А тогда $f = f \cap g \in L^1$, что и требовалось доказать.

12K. Распространим теперь I на все функции из $\mathfrak{B}^+$, положив $I(f) = +\infty$, если f не суммируема. Будем называть функцию $f \in \mathfrak{B}$ *интегрируемой*, если суммируема ее положительная часть $f^+ = f \cup 0$ или отрицательная часть $f^- = -(f \cap 0)$. Тогда $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$ имеет вполне определенное значение, хотя, быть может, равное $+\infty$ или $-\infty$, и f суммируема тогда и только тогда, когда она интегрируема и $|I(f)| < \infty$. Из теорем 12F и 12G в качестве непосредственного следствия ([19]) вытекает следующая

Теорема. *Если f и g интегрируемы, причем $I(f)$ и $I(g)$ не равны бесконечностям противоположных знаков, то $f + g$ интегрируема и $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Если f_n интегрируемы, $I(f_1) > -\infty$ и $f_n \uparrow f$, то f интегрируема и $I(f_n) \uparrow I(f)$.*

§ 13. Эквивалентность и измеримость

13A. Будем обозначать через φ_A характеристическую функцию множества $A \subset S$:

$$\varphi_A(p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \in A, \\ 0, & \text{если} \quad p \in A'. \end{cases}$$

Если $\varphi_A \in \mathfrak{B}$, то мы будем говорить, что множество A *интегрируемо*, и *мерой* его $\mu(A)$ назовем $I(\varphi_A)$. Из теоремы 12H следует, что если A и B интегрируемы, то интегрируемы также $A \cup B$, $A \cap B$ и $A - B$ ([20]), а из теоремы 12G — что если $\{A_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся интегрируемых множеств, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ интегрируемо и $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Интегрируемое множество A, мера которого $\mu(A) < +\infty$, мы будем называть *суммируемым*. Если все пространство S суммируемо, то мы будем называть интеграл I *ограниченным*; ясно, что в этом случае I есть ограниченный линейный функционал относительно равномерной нормы.

13B. Мы наложим теперь на L дальнейшее ограничение, приняв следующее допущение, введенное Стоном [47]:

$$f \in L \Rightarrow f \cap 1 \in L.$$

Тогда также $f \cup (-1) \in L$, причем эти свойства сохраняются при расширении L до $\mathfrak{B}$, так что $f \in \mathfrak{B} \Rightarrow f \cap 1 \in \mathfrak{B}$. Мы принимаем эту аксиому для того, чтобы могла быть доказана следующая

Теорема. *Если $f \in \mathfrak{B}$, то множество $A = \{p\colon f(p) > a\}$ интегрируемо для любого $a > 0$. При этом, если $f \in L^1$, то A суммируемо.*

Доказательство. $f_n = [n(f - f \cap a)] \cap 1 \in \mathfrak{B}$, и легко видеть, что $f_n \uparrow \varphi_A$, так что $\varphi_A \in \mathfrak{B}$ и A интегрируемо. Второе утверждение теоремы вытекает из неравенств $0 \leqslant \varphi_A \leqslant \frac{f^+}{a}$.

13C. Чрезвычайно важно, что верна и обратная

Теорема. *Если $f \geqslant 0$ и множество $A = \{p\colon f(p) > a\}$ интегрируемо для каждого $a > 0$, то $f \in \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Для каждого $\delta > 1$ образуем множество

$$A_m^{\delta} = \{p\colon \delta^m < f(p) \leqslant \delta^{m+1}\}, \qquad -\infty < m < \infty.$$

Пусть φ_m^δ — характеристическая функция множества A_m^δ и $f_\delta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta^m \varphi_m^\delta$. Так как, в силу предположения, все $\varphi_m^\delta \in \mathfrak{B}^+$, то $f_\delta \in \mathfrak{B}^+$. Но если $\delta \downarrow 1$ по надлежащим образом выбранной последовательности значений (например, $\delta_n = 2^{2^{-n}}$), то $f_\delta \uparrow f$; значит, $f \in \mathfrak{B}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если $f \in \mathfrak{B}^+$ и $a > 0$, то $f^a \in \mathfrak{B}^+$.*

Доказательство. $f^a > b$ тогда и только тогда, когда $f > b^{\frac{1}{a}}$, и утверждение вытекает из теорем 13C и 13B.

Следствие 2. *Если f и $g \in \mathfrak{B}^+$, то $fg \in \mathfrak{B}^+$.*

Доказательство. $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$.

Следствие 3. *Если $f \in \mathfrak{B}^+$, то $I(f) = \int f d\mu$, где интеграл понимается в обычном смысле.*

Доказательство. Функция f_δ доказательства теоремы была введена как раз с учетом этого следствия. Имеем $f_\delta \leqslant f \leqslant \delta f_\delta$ и

$$I(f_\delta) = \sum \delta^m I(\varphi_m^\delta) = \sum \delta^m \mu(A_m^\delta) = \int f_\delta d\mu.$$

Так как

$$I(f_\delta) \leqslant I(f) \leqslant \delta I(f_\delta) \quad \text{и} \quad \int f_\delta d\mu \leqslant \int f d\mu \leqslant \delta \int f_\delta d\mu,$$

то мы видим, что из конечности одного из чисел $I(f)$ и $\int f d\mu$ вытекает конечность другого и

$$\left| I(f) - \int f d\mu \right| \leqslant (\delta - 1) I(f_\delta) \leqslant (\delta - 1) I(f).$$

Так как $\delta > 1$ произвольно, то заключаем, что $I(f) = \int f d\mu$.

13D. Будем называть функцию $f \in \mathfrak{B}$, для которой $I(|f|) = 0$, *нулевой*. Будем называть множество $A \subset S$ *нулевым*, если его характеристическая функция нулевая, т. е. если A интегрируемо и имеет меру нуль. Любое интегрируемое подмножество нулевого множества — нулевое, и объединение счетного семейства нулевых множеств — нулевое множество. Любая функция из $\mathfrak{B}$, мажорируемая нулевой функцией, — нулевая функция, и сумма счетного числа нулевых функций — нулевая функция. Функции f и

g, разность которых $f-g$ есть нулевая функция, мы будем называть *эквивалентными*.

Теорема. *$f \in \mathfrak{B}$ есть нулевая функция тогда и только тогда, когда множество $\{p: f(p) \neq 0\}$ нулевое.*

Доказательство. Пусть $A = \{p: f(p) \neq 0\}$. Если A — нулевое множество, то функция $n\varphi_A$ — нулевая для любого натурального n. Но $n\varphi_A \uparrow \infty\varphi_A$, так что и функция $\infty\varphi_A$, равная $+\infty$ на A и 0 вне A, — нулевая. А так как $0 \leqslant |f| \leqslant \infty\varphi_A$, то, следовательно, и f — нулевая функция. Обратно, если f — нулевая функция, то и $(n|f|) \cap 1$ — нулевая функция, и так как $(n|f|) \cap 1 \uparrow \varphi_A$, то заключаем, что φ_A — нулевая функция и, значит, A — нулевое множество.

Теперь мы в состоянии разрешить одну неясность, остававшуюся в п. 12F: поскольку суммируемые функции могут принимать также значения $\pm\infty$, сумма $f_1 + f_2$ суммируемых функций f_1 и f_2 не определена на множестве, где одновременно $f_1 = \pm\infty$ и $f_2 = \mp\infty$ ([15]). Однако легко видеть, что если f суммируема, то множество, на котором $|f| = \infty$, нулевое, и потому можно вовсе исключить из рассмотрения бесконечные значения функций, ограничиваясь рассмотрением сходимости почти всюду (т. е. всюду, за исключением нулевого множества). Другим способом разрешения указанной неясности является объединение в один элемент всех функций, эквивалентных данной, и определение сложения двух таких классов эквивалентных функций путем сложения их представителей, не принимающих значений $\pm\infty$.

13E. Очень часто само S не является интегрируемым множеством, что порождает ряд технических трудностей в теории меры. При этом, однако, может оказаться (как это имеет место для меры Хаара на локально компактной группе), что S есть объединение (быть может, несчетного) семейства $\{S_\alpha\}$ попарно не пересекающихся интегрируемых множеств, обладающего тем свойством, что каждое интегрируемое множество содержится в объединении конечного или счетного числа множеств S_α. В этом случае упомянутые трудности не возникают. Множество A считается по определению *измеримым*, если все пересечения $A \cap S_\alpha$ интегрируемы, а функция *измеримой*, если она интегрируема на каждом S_α. Отсюда следует, что пересечение измеримого множества с любым интегрируемым множеством интегрируемо и что измеримая функция интегрируема на любом интегрируемом множестве. Понятие нулевой функции расширяется включением в него функций, нулевых на каждом S_α, и то же для нулевых множеств. Две функции рассматриваются как *эквивалентные*, если их разность есть нулевая функция в указанном более широком смысле. Семейства измеримых функций и измеримых множеств обладают почти всеми теми же элементарными свойствами, что и соответствующие интегрируемые семейства, так что нет необходимости вдаваться в дальнейшие подробности. Важным свойством измеримого пространства указанного типа является возможность построения измеримой функции по частям путем определения ее на каждом из множеств S_α. В общем пространстве S с мерой построение измеримой функции совокупностью таких локальных определений невозможно.

Так как каждое интегрируемое множество есть объединение счетного числа суммируемых ([21]), то в случае надобности множества S_α можно считать суммируемыми.

§ 14. Вещественные пространства L^p

14А. Через $L^p\,(p \geqslant 1)$ мы будем обозначать совокупность всех функций $f \in \mathfrak{B}$, для которых $|f|^p$ суммируема. Нашей ближайшей задачей будет показать, что L^p, снабженное нормой $\|f\|_p = [I(|f|^p)]^{\frac{1}{p}}$, является, говоря не совсем точно, банаховским пространством. Так как $\|f\|_p = 0$ для нулевых функций f, то, строго говоря, банаховским пространством является фактор-пространство $L^p/\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — подпространство нулевых функций. Однако это логическое различие обычно игнорируют и L^p рассматривают как банаховское пространство функций.

Для $I(fg)$, где $fg \in L^1$, удобно пользоваться принятым для скалярного произведения обозначением (f, g). Устанавливаемое ниже неравенство Гёльдера показывает, что L^2 есть вещественное гильбертово пространство; аналогично получается, что рассматриваемое дальше комплексное пространство L^2 является (комплексным) гильбертовым пространством. Это — наиболее важные реализации гильбертова пространства.

14B. (Неравенство Гёльдера.) *Если* $f \in L^p$ *и* $g \in L^q$, *где* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *то* $fg \in L^1$ *и*

$$|(f,\ g)| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Доказательство. Из теоремы Лагранжа о конечном приращении следует, что если $x \geqslant 1$ и $p \geqslant 1$, то $x^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{x}{p}+\frac{1}{q}$. Полагая $x=\frac{a}{b}$, получаем: $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$. Пусть $f \in L^p$, $g \in L^q$ и $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Положим в полученном неравенстве $a = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}$, $b=\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$. Из следствия 2 п. 13C и теоремы 12J будет следовать, что левая часть суммируема; интегрируя, мы получаем $I\left(\frac{|fg|}{\|f\|_p\ \|g\|_q}\right) \leqslant 1$, откуда

$$|(f,\ g)| = |I(fg)| \leqslant I(|fg|) \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Если $\|f\|_p=0$ или $\|g\|_q=0$, то fg — нулевая функция и утверждаемое неравенство тривиально.

Следствие. *Если* $f,\ g \in \mathfrak{B}^+$, *то* $(f,\ g) \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

14C. (Неравенство Минковского.) *Если* $f,\ g \in L^p$ $(p \geqslant 1)$, *то* $f+g \in L^p$ *и*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказательство. При $p=1$ это непосредственно следует из того, что $|f+g| \leqslant |f|+|g|$. В случае $p>1$ неравенства

$$|f+g|^p \leqslant [2\max(|f|,\ |g|)]^p \leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)$$

показывают, что если $f,\ g \in L^p$, то и $f+g \in L^p$. Тогда

$$\|f+g\|_p^p \leqslant I(|f+g|^{p-1}|f|) + I(|f+g|^{p-1}|g|) \leqslant$$
$$\leqslant \|f+g\|_p^{p-1}\|f\|_p + \|f+g\|_p^{p-1}\|g\|_p,$$

где второе неравенство следует из неравенства Гёльдера. Деля на $\|f+g\|_p^{p-1}$, получаем неравенство Минковского. При $\|f+g\|_p = 0$ оно тривиально.

Следствие. *Если* $f,\ g \in \mathfrak{B}^+$, *то* $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

14D. В соединении со свойством однородности $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, очевидным в силу определения $\|f\|_p$, неравенство Минковского показывает, что L^p (точнее — его фактор-пространство по нулевым функциям) есть нормированное линейное пространство. Остается показать, что L^p полно.

Теорема. L^p $(p \geqslant 1)$ *полно.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $f_n \in L^p$, $f_n \geqslant 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$, то $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^p$ и $\|f\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$. Действительно, $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \in L^p$ и, в силу неравенства Минковского, $\|g_n\|_p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p$; так как $g_n \uparrow f$, то, на основании теоремы 12G, отсюда следует, что $f \in L^p$ и $\|f\|_p = \lim \|g_n\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$.

Пусть теперь $\{f_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в L^p. Будем сначала предполагать, перейдя, если нужно, к подпоследовательности, что

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n}.$$

Положим $g_n = f_n - \sum_{i=n}^{\infty} |f_{i+1} - f_i|$ и $h_n = f_n + \sum_{i=n}^{\infty} |f_{i+1} - f_i|$. Из нашего первого замечания следует, что g_n и $h_n \in L^p$ и $\|h_n - g_n\|_p < 2^{-n+2}$. Так как при этом последовательности g_n и h_n соответственно — возрастающая и убывающая, то, положив $f = \lim g_n$, будем иметь $f \in L^p$ и $\|f - f_n\|_p \leqslant \|h_n - g_n\|_p < 2^{-n+2}$. Таким образом, наша первоначальная последовательность является фундаментальной последовательностью, подпоследовательность которой стремится к f; значит, и сама эта последовательность стремится к f, что и требовалось.

14E. Будем говорить, что измеримая функция f *существенно ограничена сверху*, если она эквивалентна функции, ограниченной сверху. *Существенной верхней гранью* функции f будем называть наименьшую из верхних граней эквивалентных f ограниченных сверху функций. Существенную верхнюю грань функции $|f|$ будем обозначать через $\|f\|_\infty$; это — тот же символ, который уже использовался для равномерной нормы, и $\|f\|_\infty$, очевидно, является наименьшей из равномерных норм функций, эквивалентных f. Пусть L^∞ — совокупность всех существенно ограниченных измеримых функций, где эквивалентные функции отождествлены. Очевидно, L^∞ есть банаховское пространство (и даже банаховская алгебра) относительно нормы $\|f\|_\infty$. Употребление значка ∞ в $\|f\|_\infty$ оправдывается следующей теоремой.

14F. Теорема. *Если $f \in L^p$ для некоторого $p > 0$, то $\lim\limits_{q\to+\infty}\|f\|_q$ существует и равен $\|f\|_\infty$, где для предела допускается и значение ∞.*

Доказательство. Если $\|f\|_\infty = 0$, то $\|f\|_q = 0$ для каждого $q > 0$ и теорема тривиальна. Пусть $\|f\|_\infty > 0$, a — произвольное положительное число, меньшее, чем $\|f\|_\infty$, и $A_a = \{x: |f(x)| > a\}$. Тогда $\|f\|_q \geqslant a\,[\mu(A_a)]^{\frac{1}{q}}$. При этом $0 < \mu(A_a) < \infty$, где первое неравенство вытекает из того, что $a < \|f\|_\infty$, а второе — из того, что $f \in L^p$. Поэтому $\varliminf\limits_{q\to\infty}\|f\|_q \geqslant a$, и так как a — любое число, меньшее, чем $\|f\|_\infty$, то $\varliminf\limits_{q\to\infty}\|f\|_q \geqslant \|f\|_\infty$.

Если $\|f\|_\infty = \infty$, то дуальное этому неравенство $\varlimsup\limits_{q\to\infty}\|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty$ очевидно. Пусть поэтому $\|f\|_\infty < \infty$. Тогда $|f|^q \leqslant |f|^p (\|f\|_\infty)^{q-p}$ и потому

$$\|f\|_q \leqslant (\|f\|_p)^{\frac{p}{q}} (\|f\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}},$$

откуда и следует требуемое неравенство $\varlimsup\limits_{q\to\infty}\|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty$.

14G. Теорема. *L плотно в L^p* $(1 \leqslant p < \infty)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что L плотно в L^1 по самому определению L^1 (через U). Пусть теперь f—произвольная неотрицательная функция из L^p $(p > 1)$. Пусть $A = \left\{x: \frac{1}{n} < f(x) < n\right\}$ и $g = f\varphi_A$. Тогда $f - g \downarrow 0$ при $n \to \infty$, и мы можем выбрать n так, чтобы $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $0 \leqslant g \leqslant n\varphi_A$, то из теорем 13B и 12J следует, что $g \in L^1$. Взяв $h \in L^+$ так, чтобы $\|h - g\|_1 < \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^p$ и $h \leqslant n$ (см. п. 13B), будем иметь

$$\|h - g\|_p \leqslant (n^{p-1}\|h - g\|_1)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\|f - h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < \varepsilon,$$

что и требовалось.

§ 15. Пространство, сопряженное к L^p

15А. Положительная и отрицательная части ограниченного функционала. Мы будем теперь рассматривать пространство L п. 12А как вещественное нормированное линейное пространство относительно равномерной нормы $\|f\|_\infty$ (см. п. 13А).

Теорема. *Каждый ограниченный линейный функционал на L может быть представлен в виде разности двух ограниченных интегралов (неотрицательных линейных функционалов).*

Доказательство. Пусть F — заданный ограниченный функционал. Положим для всякой $f \geqslant 0$

$$F^+(f) = \sup\{F(g)\colon\ 0 \leqslant g \leqslant f\}.$$

Тогда $F^+(f) \geqslant 0$ и $|F^+(f)| \leqslant \|F\| \cdot \|f\|$. Очевидно также, что $F^+(cf) = cF^+(f)$ для всех $c > 0$. Пусть f_1 и f_2 — две произвольные неотрицательные функции из L. Если $0 \leqslant g_1 \leqslant f_1$ и $0 \leqslant g_2 \leqslant f_2$, то $0 \leqslant g_1 + g_2 \leqslant f_1 + f_2$ и

$$F^+(f_1 + f_2) \geqslant \sup F(g_1 + g_2) = \sup F(g_1) + \sup F(g_2) = F^+(f_1) + F^+(f_2).$$

Обратно, если $0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$, то $0 \leqslant f_1 \cap g \leqslant f_1$ и $0 \leqslant g - (f_1 \cap g) \leqslant f_2$, так что

$$F^+(f_1 + f_2) = \sup F(g) \leqslant \sup F(f_1 \cap g) + \sup F(g - (f_1 \cap g)) \leqslant$$
$$\leqslant F^+(f_1) + F^+(f_2).$$

Таким образом, F^+ аддитивен на неотрицательных функциях. Но тогда F^+ можно продолжить как линейный функционал на все L посредством обычного определения: $F^+(f_1 - f_2) = F^+(f_1) - F^+(f_2)$ для неотрицательных f_1 и f_2. При этом F^+ будет ограниченным, так как $|F^+(f)| \leqslant F^+(|f|) \leqslant \|F\| \cdot \|f\|$.

Положим теперь $F^-(f) = F^+(f) - F(f)$. Так как $F^+(f) \geqslant F(f)$ при $f \geqslant 0$, то мы видим, что F^- — также ограниченный неотрицательный линейный функционал. Но $F = F^+ - F^-$, и теорема доказана ([22]).

15В. Интеграл J называют *абсолютно непрерывным* относительно интеграла I, если каждое I-нулевое множество является и J-нулевым.

Теорема Радона — Никодима. *Если ограниченный интеграл J абсолютно непрерывен относительно ограниченного* *интеграла I, то существует однозначно определенная I-суммируемая функция f_0 такая, что ff_0 I-суммируема и $\mathfrak{J}(f)=I(ff_0)$ для каждой $f \in L^1(J)$.*

Доказательство. (По [23].) Рассмотрим ограниченный интеграл $K=I+J$ и вещественное гильбертово пространство $L^2(K)$. Если $f \in L^2(K)$, то $f=f\cdot 1 \in L^1(K)$, и на основании неравенства Шварца (или Гёльдера)

$$|J(f)| \leqslant J(|f|) \leqslant K(|f|) \leqslant \|f\|_2 \cdot \|1\|_2.$$

Таким образом, J — ограниченный линейный функционал на $L^2(K)$ и, согласно теореме 10G, существует однозначно определенная $g \in L^2(K)$ такая, что

$$J(f)=(f, g)=K(fg).$$

Очевидно, g неотрицательна (за исключением K-нулевого множества). Разложение

$$J(f)=K(fg)=I(fg)+J(fg)=I(fg)+I(fg^2)+J(fg^2)=\ldots$$
$$\ldots=I\left(f\sum_{i=1}^{n} g^i\right)+J(fg^n)$$

показывает, во-первых, если взять в качестве f характеристическую функцию множества, на котором $g \geqslant 1$, что это множество I-нулевое, а значит, и J-нулевое. Таким образом, $fg^n \downarrow 0$ почти всюду для любой неотрицательной $f \in L^1(K)$, и так как $f \in L^1(J)$, то, согласно теореме 12G, $J(fg^n) \downarrow 0$. Во-вторых, то же разложение показывает, если положить $f_0=\sum_{i=1}^{\infty} g^i$, что, снова на основании теоремы 12G, $ff_0 \in L^1(I)$ и $J(f)=I(ff_0)$. Полагая $f=1$, получаем, в частности, что $f_0 \in L^1(I)$. I-единственность f_0 следует из K-единственности g и равенства $g=\frac{f_0}{1+f_0}$. Так как интегралы $J(f)$ и $I(ff_0)$ совпадают на $L^2(K)$ и, в частности, на L, то они совпадают на $L^1(J)$.

Это доказательство сохраняет силу и в том более общем случае, когда J не обязательно абсолютно непрерывен относительно I. Нужно только отбросить множество N, на котором $g \geqslant 1$, являющееся, как выше, I-нулевым, но уже не обязательно J-нулевым, и рассматривать f лишь на дополнительном множестве $S-N$.

15C. Теорема. *Если I — ограниченный интеграл и F — ограниченный линейный функционал на $L^p(I)$, $1 \leqslant p < \infty$, то существует однозначно определенная функция $f_0 \in L^q$ (где $q = \frac{p}{p-1}$, если $p > 1$, и $q = \infty$, если $p = 1$) такая, что $\|f_0\|_q = \|F\|$ и*

$$F(g) = (g, f_0) = I(gf_0)$$

для каждой $g \in L^p$. Таким образом, $(L^p)^* = L^q$.

Доказательство. Положительная и отрицательная части F^+ и F^- функционала F являются интегралами на L, поскольку $f_n \downarrow 0$ влечет $\|f_n\|_p \downarrow 0$, а F^+ и F^- — ограниченные функционалы на $L^p(I)$ ($\|F^+\|$ и $\|F^-\| \leqslant \|F\|$). Так как $\|f\|_p = 0$ и потому $F^+(f) = F^-(f) = 0$ для каждой I-нулевой функции f, то F^+ и F^- абсолютно непрерывны относительно I. Поэтому, в силу теоремы Радона — Никодима, существует суммируемая функция f_0 такая, что

$$F(g) = I(gf_0)$$

для каждой функции g, суммируемой относительно F^+ и F^-, и, в частности, для каждой $g \in L^p$. Если $g \in L^p$ ограничена, $0 \leqslant g \leqslant |f_0|$ и $p > 1$, то

$$I(g^q) \leqslant I(g^{q-1} \operatorname{sgn} f_0 \cdot f_0) \leqslant \|F\| \cdot \|g^{q-1}\|_p = \|F\| \cdot [I(g^q)]^{\frac{1}{p}},$$

так что $\|g\|_q \leqslant \|F\|$. Но такие функции $g = g_n$ можно выбрать так, чтобы $g_n \uparrow |f_0|$; поэтому, в силу теоремы 12G, заключаем, что $f_0 \in L^q$ и $\|f_0\|_q \leqslant \|F\|$.

Случай $p = 1$ удобнее рассмотреть отдельно. Если бы мы имели $\|f_0\|_\infty \geqslant \|F\| + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то, обозначая через g характеристическую функцию множества $A = \left\{p\colon |f_0(p)| \geqslant \|F\| + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, мы получили бы противоречивое неравенство

$$\left(\|F\| + \frac{\varepsilon}{2}\right) \mu(A) \leqslant I(|gf_0|) = F(g \operatorname{sgn} f_0) \leqslant \|F\| \cdot \|g\|_1 = \|F\| \mu(A).$$

Это показывает, что, как и в предыдущем случае, $\|f_0\|_\infty \leqslant \|F\|$.

С другой стороны, имеем $|F(g)| \leqslant I(|gf_0|) \leqslant \|g\|_p \|f_0\|_q$ (в силу неравенства Гёльдера, если $p > 1$), так что $\|F\| \leqslant \|f_0\|_q$. Сопоставляя это с результатом, полученным в предыдущих двух абзацах, заключаем, что $\|F\| = \|f_0\|_q$.

Единственность f_0 можно вывести из п. 15B. В ней можно убедиться и непосредственно, заметив, что если f_0 не эквивалентна нулю, то F — ненулевой функционал, так что неэквивалентные функции f_0 определяют различные функционалы F.

15D. Требование ограниченности I в доказанной сейчас теореме при $p>1$ можно отбросить; однако при $p=1$ его приходится заменить некоторым условием типа, указанного в п. 13E.

Действительно, если F рассматривать на подпространстве пространства L^p, состоящем из функций, обращающихся в нуль вне заданного суммируемого множества S_1, то норма F во всяком случае не повысится. Теорема предыдущего пункта ставит F в соответствие функцию f_1, определенную на S_1. Если S_2, f_2 — другая подобная пара, то часть теоремы 15C, относящаяся к единственности, показывает, что f_1 и f_2 эквивалентны на $S_1 \cap S_2$. Пусть теперь $p>1$. Пусть $b = \sup \|f\|_q$ по всем таким f и S_n — расширяющаяся последовательность, для которой $\|f_n\|_q \uparrow b$. Тогда $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность функций из L^q, и ее предел f_0 сосредоточен на $S_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, причем $\|f_0\|_q = b$. Вследствие этого максимального свойства функции f_0, на каждом суммируемом множестве S', не пересекающемся с S_0, функционалу F отвечает уже нулевая функция f' ([23]). Если теперь $g \in L^p$, то множество, на котором $g \neq 0$, разбивается на счетное число попарно не пересекающихся суммируемых множеств A_m, функция f_m, индуцируемая функцией f_0 на A_m, есть функция, соответствующая по теореме 15C функционалу F на множестве A_m, и

$$F(g) = \sum_{m=1}^{\infty} F(g_m) = \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m f_m) = I(g f_0).$$

Как и прежде, $\|F\| \leqslant \|f_0\|_q$, и так как $\|f_0\|_q = b \leqslant \|F\|$, то $\|f_0\|_q = \|F\|$.

Если теперь $p=1$, то этот максимизирующий процесс не может дать единой функции $f_0 \in L^\infty$, и в общем случае не существует *никакого* способа склеивания из функций f_α, соответствующих по теореме 15C функционалу F на суммируемых множествах S_α, функции f_0, определенной на всем S. Однако, если существует базисное семейство $\{S_\alpha\}$ *попарно не пересе-*

кающихся множеств, обладающее свойством, рассмотренным в п. 13Е, то функция f_0, равная f_α на S_α для каждого α, измерима, и легко показать (как в рассмотренном случае $p > 1$), что $F(g) = I(gf_0)$ для всех $g \in L^1$.

§ 16. Интегрирование на локально компактных хаусдорфовых пространствах

16А. Применим теперь рассмотрения § 12 к тому случаю, когда S есть локально компактное хаусдорфово пространство, а L — алгебра всех вещественных непрерывных функций, равных нулю вне компактных множеств. Через L^+ будем обозначать совокупность всех неотрицательных функций из L и через L_A и L_A^+ — совокупность всех функций из L, соответственно L^+, равных нулю вне A.

Лемма 1. *Если $f_n \in L$ и $f_n \downarrow 0$, то $f_n \downarrow 0$ равномерно.*

Доказательство. Пусть $C_n = \{p\colon f_n(p) \geqslant \varepsilon\}$, где ε — заданное положительное число. Так как C_n компактны, убывают и $\bigcap\limits_n C_n = \varnothing$, то $C_n = \varnothing$ для некоторого n. Таким образом, $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$ для некоторого, а значит, и для всех последующих n, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Неотрицательный линейный функционал ограничен на L_C для всякого компактного C.*

Доказательство. Мы можем выбрать $g \in L^+$ так, чтобы $g \geqslant 1$ на C. Тогда для $f \in L_C$ будем иметь $|f| \leqslant \|f\|_\infty g$ и $|I(f)| \leqslant \leqslant I(g) \cdot \|f\|_\infty$, так что $\|I\|$ на L_C будет $\leqslant I(g)$.

Теорема. *Каждый неотрицательный линейный функционал на L есть интеграл.*

Доказательство. Если $f_n \downarrow 0$, то, по лемме 1, $\|f_n\|_\infty \downarrow 0$. Пусть $f_1 \in L_C$; тогда $f_n \in L_C$ для всех n и $|I(f_n)| \leqslant B\|f_n\|_\infty$, где B — граница I на C (лемма 2), откуда $I(f_n) \downarrow 0$. Следовательно, I — интеграл.

16В. *Пусть S_1 и S_2 — локально компактные хаусдорфовы пространства, а I и J — неотрицательные линейные функционалы соответственно на $L(S_1)$ и $L(S_2)$. Тогда $I_x(J_y f(x, y)) = J_y(I_x f(x, y))$ для каждой $f \in L(S_1 \times S_2)$, и это общее значение есть интеграл на $L(S_1 \times S_2)$.*

Доказательство. Пусть $f(x,y)\in L(S_1\times S_2)$, $C_1\in S_1$ и $C_2\in S_2$ — компактные множества такие, что f равно нулю вне $C_1\times C_2$, B_1 и B_2 — границы I и J на C_1 и C_2. Для каждого заданного $\varepsilon>0$ существует функция $k(x,y)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,h_i(y)$, $g_i\in L_{C_1}$, $h_i\in L_{C_2}$, такая, что $\|f-k\|_\infty<\varepsilon$, ибо по теореме Стона—Вейерштрасса алгебра таких функций k плотна в $L_{C_1\times C_2}$. Отсюда следует, во-первых, что

$$|\,J_y f(x,y)-\sum J(h_i)\,g_i(x)\,|=|\,J_y(f-k)\,|<\varepsilon B_2,$$

так что $J_y f$ есть равномерный предел непрерывных функций от x и потому сам непрерывен, и, во-вторых, что

$$|\,I_x J_y f-\sum I(g_i)\,J(h_i)\,|<\varepsilon B_1 B_2.$$

В соединении с таким же неравенством для $J_y I_x f$ это дает

$$|\,I_x J_y f-J_y I_x f\,|<2\varepsilon B_1 B_2$$

для каждого $\varepsilon>0$, так что $I_x J_y f=J_y I_x f$. Этот функционал, очевидно, линеен и неотрицателен и потому является интегралом.

16C. (Теорема Фубини.) *Пусть K — определенный выше функционал на $L(S_1\times S_2)$ и $f(x,y)\in\mathfrak{B}^+(S_1\times S_2)$. Тогда $f(x,y)\in\mathfrak{B}^+(S_1)$ как функция от x для каждого y, $I_x f(x,y)\in\mathfrak{B}^+(S_2)$ и $Kf=J_y(I_x f(x,y))$.*

Доказательство. Как явствует из п. 16B, семейство $\mathfrak{F}$ функций из $\mathfrak{B}^+(S_1\times S_2)$, для которых верно утверждение теоремы, содержит $L^+(S_1\times S_2)$. Кроме того, оно L-монотонно. Действительно, пусть $\{f_n\}$ — последовательность L-ограниченных функций из $\mathfrak{F}$ такая, что $f_n\uparrow f$ или $f_n\downarrow f$. Тогда, повторно применяя теорему 12K или 12G, получаем ([24]):

$$K(f)=\lim K(f_n)=\lim J_y(I_x f_n)=J_y(\lim I_x f_n)=$$
$$=J_y(I_x\lim f_n)=J_y I_x f.$$

Как L-монотонное семейство, содержащее L^+, $\mathfrak{F}$, согласно теореме 12I, совпадает с $\mathfrak{B}^+$.

Следует заметить, что теорема Фубини справедлива, конечно, и при отсутствии топологии, но доказательство носит тогда более технический характер, рассмотренный же случай содержит все, что нам нужно в этой книге.

16D. Более обычный подход к мере и интегрированию на декартовых произведениях пространств имеет своим исходным пунктом элементарную меру $\mu(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$ на «прямоугольниках» $A\times B$ $(A\subset S_1,\ B\subset S_2)$. Это равносильно принятию за исходный пункт элементарного интеграла

$$\int\sum c_i\varphi_{A_i\times B_i}=\sum c_i\mu_1(A_i)\,\mu_2(B_i)$$

на совокупности L линейных комбинаций характеристических функций прямоугольников. Выполнение аксиом п. 12A для элементарного интеграла здесь легко проверяется. Заметим прежде всего, что для функции $f(x, y)$ указанного вида $\int f$ фактически определяется как повторный интеграл:

$$\int f=\int\left(\int f dx\right)dy=\int\left(\int f\,dy\right)dx.$$

Если теперь $f_n(x, y)$ — последовательность элементарных функций такая, что $f_n\downarrow 0$, то $f_n\downarrow 0$ как функция от x для каждого y и потому $\int f_n dx\downarrow 0$ для каждого y по свойству 12G интеграла в первом пространстве S_1. Но тогда $\int\left(\int f_n dx\right)dy\downarrow 0$ по тому же свойству интеграла во втором пространстве. Поэтому $\int f_n d\mu\downarrow 0$, т. е. аксиома (4) п. 12A доказана. Остальные аксиомы проверяются еще легче, и тем самым к $\int f$ применима вся теория меры и интегрирования, развитая в этой главе.

В том случае, когда S_1 и S_2 — локально компактные пространства, а μ_1 и μ_2 порождены элементарными интегралами на непрерывных функциях, мы имеем теперь два метода введения интегрирования на $S_1\times S_2$, и следует показать, что они приводят к одинаковому результату. Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ — порождаемые при этом семейства бэровских функций ($\mathfrak{B}$ — непрерывными элементарными функциями и $\mathfrak{B}'$ — введенными выше кусочно постоянными функциями). Требуется показать, что $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}'$ и оба интеграла совпадают на любом множестве функций, порождающем это семейство. Но легко видеть, что если A и B — интегрируемые множества соответственно на S_1 и S_2, то $\varphi_{A\times B}\in\mathfrak{B}$, ибо $\varphi_{A\times B}=\varphi_A(x)\,\varphi_B(y)$ содержится в монотонном семействе, порожденном функциями $f(x)g(y)$, где f и g — элементарные непрерывные функции на S_1 и S_2. Таким образом, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$. С другой стороны, если $f \in L(S_1)$ и $g \in L(S_2)$, то произведение $f(x)g(y)$ может быть равномерно аппроксимировано кусочно-постоянными функциями вида $\sum \varphi_{A_i}(x) \cdot \varphi_{B_j}(y)$, а следовательно, в силу теоремы Стона — Вейерштрасса, и любая непрерывная функция $f(x, y)$, равная нулю вне компактного множества, может быть аппроксимирована таким образом. Тем самым $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$, и, следовательно, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$. Таким же образом убеждаемся в том, что оба интеграла совпадают для функций $f(x, y)$ вида $f(x)g(y)$, а значит, и на всем $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$.

§ 17. Комплексные пространства L^p

17А. Примем очевидное определение, что комплексная функция $f = u + iv$ измерима или суммируема, если измеримы или суммируемы ее вещественная и мнимая части. Ясно, что измеримая функция f суммируема в том и только в том случае, если суммируема функция $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$; при этом имеет место фундаментальное неравенство:

$$|I(f)| \leqslant I(|f|).$$

Доказательство. $h = \dfrac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}} \in L^1$. Поэтому к $|u| = \sqrt{h}\sqrt[4]{u^2+v^2}$ можно применить неравенство Шварца, в результате чего мы получим $|I(u)|^2 \leqslant I(h)\,I(\sqrt{u^2+v^2})$. Сложение с аналогичным неравенством для v даст

$$|I(u)|^2 + |I(v)|^2 \leqslant [I(\sqrt{u^2+v^2})]^2,$$

что и требовалось.

17В. Расширим теперь определение L^p, включив в этот класс все комплексные измеримые функции f с суммируемой p-й степенью модуля $|f|^p$ и сохранив норму $\|f\|_p = [I(|f|^p)]^{\frac{1}{p}}$. Ясно, что $f \in L^p$ тогда и только тогда, когда $u, v \in L^p$. Неравенства Гёльдера и Минковского, в силу неравенства 17А, остаются в силе. Расширенное пространство L^p полно, поскольку последовательность $f_n = u_n + iv_n$ фундаментальна тогда и только тогда, когда ее вещественная и мнимая части u_n и v_n — фундаментальные последовательности вещественных функций.

17C. Вещественная и мнимая части ограниченного линейного функционала F на L^p являются вещественными ограниченными линейными функционалами на подмножестве, составленном вещественными функциями. В совокупности они определяют, в силу теоремы 15C, комплексную измеримую функцию $f_0 \in L^q$ такую, что $F(g) = I(g\bar{f}_0)$ для каждой вещественной функции $g \in L^p$, а следовательно, благодаря комплексной однородности функционала F,— вообще для каждой $g \in L^p$. Доказательство того, что $\|F\| = \|f_0\|_q$, проведенное в п. 15C для вещественного случая, сохраняет силу и для комплексного случая, если заменить всюду f_0 на $\bar{f}_0$ и вспомнить, что $\operatorname{sgn} f_0 = e^{i \arg f_0}$.

Впрочем, поскольку сейчас нам уже известно, что $f_0 \in L^q$, можно произвести небольшое упрощение. А именно, то, что $\|F\| \leqslant \|f_0\|_q$, как и прежде, вытекает из неравенства Гёльдера. При $p > 1$ мы можем положить $g = |f_0|^{q-1} e^{i \arg f_0}$, откуда $F(g) = I(|f_0|^q) = \|f_0\|_q^q$, $\|g\|_p = (\|f_0\|_q)^{\frac{q}{p}}$ и $\frac{|F(g)|}{\|g\|_p} = \|f_0\|_q$. Таким образом, $\|F\| \geqslant \|f_0\|_q$ и, следовательно, $\|F\| = \|f_0\|_q$.

Глава IV

БАНАХОВСКИЕ АЛГЕБРЫ

Настоящая глава посвящена изложению основ теории банаховских алгебр, с упором на коммутативную теорию, обязанную своим происхождением основоположной работе Гельфанда [12]. Эта теория, вместе с ее ответвлениями, оказала заметное объединяющее влияние на большие разделы математики; в частности, мы увидим, что она послужила базисом значительной части общей теории гармонического анализа. Мы начнем, в § 19, с наводящего рассмотрения специальной банаховской алгебры $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве и затем обратимся к изучению введенных при этом понятий максимального идеала, спектра и дополнительного (или квазиобратного) элемента. Основные элементарные теоремы общей теории собраны в § 24.

§ 18. Определение и примеры

Определение. *Банаховская алгебра есть алгебра над полем комплексных чисел, в которой введена норма, превращающая эту алгебру в банаховское пространство и связанная с умножением неравенством*

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Если банаховская алгебра A обладает единицей e, то $\|e\| = \|ee\| \leqslant \|e\|^2$, так что $\|e\| \geqslant 1$. При этом всегда можно перенормировать A введением эквивалентной меньшей нормы $|||x|||$ так, чтобы $|||e||| = 1$. Для этого нужно лишь приписать элементу y норму ограниченного линейного преобразования, определяемого на A левым умножением на y $\left(|||y||| = \sup \frac{\|yx\|}{\|x\|}\right)$, и заметить, что тогда $\frac{\|y\|}{\|e\|} \leqslant |||y||| \leqslant \|y\|$. Поэтому мы всегда будем предполагать, что $\|e\| = 1$.

Если A не обладает единицей, то, как будет показано в 20С, совокупность упорядоченных пар

$$\{\langle x, \lambda\rangle:\ \ \lambda \text{ — комплексное число},\quad x \in A\}$$

является расширением A до алгебры с единицей, и простые вычисления покажут читателю, что норма $\|\langle x, \lambda\rangle\| = \|x\| + |\lambda|$ превращает эту расширенную алгебру в банаховскую.

Мы уже указали в подготовительных главах несколько банаховских алгебр. Это были:

1а. Совокупность всех ограниченных непрерывных комплексных функций на топологическом пространстве S, с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in S} |f(x)|$ (см. п. 4В).

1б. Совокупность всех существенно ограниченных измеримых комплексных функций на пространстве с мерой S, с существенно равномерной нормой (см. п. 14Е).

2а. Совокупность всех ограниченных линейных преобразований (операторов) на банаховском пространстве (см. п. 7С).

2б. Совокупность всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве (§ 11).

Из этих алгебр алгебры 1а и 2б будут сохранять для нас постоянный интерес. Еще более важное значение будут иметь групповые алгебры локально компактных групп, примерами которых являются:

3а. Совокупность бесконечных в обе стороны последовательностей комплексных чисел $a = \{a_n\}$ с $\|a\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ и умножением $a * b$ по формуле

$$(a * b)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{n-m}\, b_m.$$

Здесь пространством с мерой служит группа G целых чисел, где мера каждой точки равна единице. За норму принята просто норма в L^1, $\|a\| = \int\limits_G |a|$, и алгебра совпадает с $L^1(G)$. Умножение в ней, определенное выше, называют *свертыванием*, а результат его — *сверткой*. Мы опустим проверку того, что свертывание обладает алгебраическими свойствами умножения.

Заметим только, что неравенство $\|a*b\| \leqslant \|a\|\cdot\|b\|$ получается путем обращения порядка двойного суммирования, что представляет собой частный случай применения теоремы Фубини:

$$\|a*b\| = \sum_n \Big|\sum_m a_{n-m} b_m\Big| \leqslant \sum_n \Big(\sum_m |a_{n-m} b_m|\Big) = \\ = \sum_m \Big(\sum_n |a_{n-m} b_m|\Big) = \sum_m |b_m|\cdot\|a\| = \|a\|\cdot\|b\|.$$

Последовательность e, для которой $e_0 = 1$ и $e_n = 0$ при $n \neq 0$, очевидно, служит в этой алгебре единицей.

3б. $L^1(-\infty, \infty)$ со свертыванием в качестве умножения:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Здесь группой служит аддитивная группа всех вещественных чисел, с обычной лебеговской мерой. Неравенство $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\cdot\|g\|_1$ снова следует из теоремы Фубини:

$$\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy\right| dx \leqslant \\ \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)\,g(y)|\,dy\right) dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)\,g(y)|\,dx\right) dy = \|f\|_1\cdot\|g\|_1.$$

Мера, указанная в примерах 3а и 3б, есть так называемая мера Хаара на рассматриваемой группе.

Приведем еще два примера важных типов банаховских алгебр, которыми мы, однако, почти не будем заниматься.

4. Совокупность всех комплексных функций, непрерывных на замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$ и аналитических в его внутренней части $|z| < 1$, с равномерной нормой.

5. Совокупность всех комплексных функций на отрезке $[0, 1]$, имеющих непрерывную первую производную, с $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

§ 19. Функциональные алгебры

Вложение банаховского пространства X в его второе сопряженное X^{**}, т. е. представление X в виде некоторого пространства линейных функционалов на банаховском пространстве X^*, является важным приемом общей теории банаховских пространств. В гельфандовской теории коммутативных банаховских алгебр аналогичное представление играет главную роль. Мы рассмотрим здесь пространство Δ всех непрерывных гомоморфных отображений коммутативной банаховской алгебры A на поле комплексных чисел, для каждого $x \in A$ — функцию $x^\wedge$ на Δ, определяемую равенством $x^\wedge(h) = h(x)$ для всех $h \in \Delta$, и алгебраически гомоморфное отображение A на алгебру $A^\wedge$ всех таких функций. Очевидно, Δ есть подмножество пространства A^*, сопряженного к A, рассматриваемой как банаховское пространство, и $x^\wedge$ есть функция, индуцируемая функционалом x^{**} на $\Delta \subset A^*$. Это изменение области определения функции x^{**} весьма значительно меняет характер теории. Так, если A содержит единицу, то Δ есть слабо замкнутое подмножество замкнутого единичного шара в A^* и потому слабо компактно. Далее, линейность x^{**} теряет значение, поскольку Δ не обладает алгебраическими свойствами, так что $x^\wedge$ есть просто некая непрерывная функция на компактном пространстве. Более близкой аналогичной теоремой представления для банаховских пространств могло бы служить то обстоятельство, что отображение $x \to x^0$, где x^0 — функция, индуцируемая функционалом x^{**} на сильно замкнутом единичном шаре в A^*, есть линейная изометрия пространства X с некоторым банаховским (относительно равномерной нормы) пространством непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве. Но в то время, как эта теорема представления для банаховского пространства лишена серьезного значения и имеет характер безделушки ([25]), соответствующее представление $x \to x^\wedge$ коммутативной банаховской алгебры посредством алгебры функций чрезвычайно важно. Так, представляющая алгебра $A^\wedge$ есть та область, в которой развертывается значительная часть теории банаховских алгебр, а преобразование $x \to x^\wedge$ является обобщением преобразования Фурье.

Если бы нас интересовала только коммутативная теория, мы положили бы в основу простое понятие функциональной алгебры и строили бы всю теорию на нем. Мы не придерживаемся этого способа изложения, ибо хотим включить некоторый материал из общей некоммутативной теории. Однако начнем мы в этом параграфе с некоторых простых рассмотрений, относящихся к функциональным алгебрам, отчасти для мотивирования последующей теории, отчасти же в качестве первых ее шагов,

19A. Под гомоморфным отображением h одной комплексной алгебры на другую понимается, конечно, кольцевой гомоморфизм, сохраняющий умножение на скаляры: $h(\lambda x) = \lambda h(x)$.

Лемма. *Пусть $x \to x^\wedge$ — гомоморфное отображение алгебры A на алгебру $A^\wedge$ комплексных функций, определенных на некотором множестве S. Если $p \in S$, то $x \to x^\wedge(p)$ есть гомоморфное отображение h_p алгебры A в поле комплексных чисел, ядром которого служит либо максимальный идеал M_p в A с дефектом 1, либо вся A. Отображение $p \to h_p$ осуществляет (возможно, не взаимно однозначное) вложение S в совокупность H всех гомоморфных отображений алгебры A в поле комплексных чисел. Обратно, для любого подмножества $S \subset H$ отображение $x \to x^\wedge$, где $x^\wedge$ — функция, определенная на S равенством $x^\wedge(h) = h(x)$ для всех $h \in S$, есть гомоморфное отображение алгебры A на алгебру $A^\wedge$ всех таких функций.*

Утверждения леммы очевидны.

Псевдонормой называют неотрицательный функционал $\|x\|$, удовлетворяющий всем требованиям, предъявляемым к норме, за тем исключением, что могут существовать ненулевые x, для которых $\|x\| = 0$. Понятие псевдонормированной алгебры определяется очевидным образом. Неравенства $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ и $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ показывают, что совокупность I всех тех x, для которых $\|x\| = 0$, есть идеал в A. При этом псевдонорма $\|x\|$ постоянна на каждом смежном классе фактор-алгебры A/I и определяет в ней настоящую норму. Каждое линейное отображение алгебры A, ограниченное относительно псевдонормы, равно нулю на I и потому, на основании теоремы 7D, переносится с сохранением нормы на фактор-алгебру A/I. В частности, сопряженное пространство A^* отождествляется так с $(A/I)^*$.

Лемма. *Если алгебра $A^\wedge$ предыдущей леммы состоит из ограниченных функций, то $A^\wedge$ определяет на A псевдонорму*

$\|x\| = \|x^{\wedge}\|_{\infty}$, *а отображение* $p \to h_p$ *отождествляет* S *с подмножеством единичного шара пространства* A^*, *сопряженного к* A.

Доказательство очевидно.

19В. Следующая теорема весьма важна для дальнейшего. Это — наша замена слабой компактности единичного шара в A^*.

Теорема. *Множество* Δ *всех непрерывных гомоморфных отображений нормированной алгебры* A *на поле комплексных чисел локально компактно в слабой топологии, определенной функциями из* $A^{\wedge}$. *Если* A *содержит единицу, то* Δ *слабо компактно. Если* Δ *не слабо компактно, то все функции из* $A^{\wedge}$ *обращаются в нуль на бесконечности.*

Доказательство. Ядро M_h отображения $h \in \Delta$ является замкнутым идеалом, фактор-пространство по которому есть нормированное линейное пространство, изоморфное полю комплексных чисел. Если E — единичный смежный класс, то $h(x) = \lambda$ тогда и только тогда, когда $x \in \lambda E$. Но E не может содержать элементов, нормы которых меньше единицы, так как в противном случае, будучи замкнутым относительно умножения, он содержал бы элементы с произвольно малой нормой. Вообще, если $x \in \lambda E$, то $\frac{x}{\lambda} \in E$, $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| \geqslant 1$ и $\|x\| \geqslant |\lambda| = |h(x)|$. Таким образом, $\|h\| \leqslant 1$ для каждого $h \in \Delta$, и Δ есть подмножество замкнутого единичного шара $\bar{S}_1$ пространства A^*. Так как $\bar{S}_1$ слабо компактен (теорема 9В), то заключаем, что замыкание $\bar{\Delta}$ множества Δ в $\bar{S}_1$ компактно.

Но то же рассуждение, что и в п. 9В, показывает, что если $F \in \bar{\Delta}$, то $x \to F(x)$ есть гомоморфное отображение алгебры A в поле комплексных чисел. Действительно, для заданных $x, y \in A$ и $\varepsilon > 0$, в силу предположения, что $F \in \bar{\Delta}$, и определения слабой топологии, существует элемент $h \in \Delta$ такой, что $|F(x) - h(x)| < \varepsilon$, $|F(y) - h(y)| < \varepsilon$ и $|F(xy) - h(xy)| < \varepsilon$. Так как $h(xy) = h(x)h(y)$, то отсюда следует, что $|F(xy) - F(x)F(y)| < 3\varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$, и потому $F(xy) = F(x)F(y)$. Таким образом, либо F — ненулевое гомоморфное отображение и $F \in \Delta$, либо $F = 0$.

Тем самым имеются две возможности: либо $\bar{\Delta} = \Delta$ и Δ компактно — что будет, если замыкание Δ не содержит нулевого отображения h_0,— либо, в противном случае, $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{h_0\}$ и Δ

есть компактное пространство с удаленной точкой, т. е. локально компактно. В этом втором случае каждая функция $x^\wedge \in A^\wedge$ обращается в нуль на бесконечности, ибо $x^\wedge$ непрерывна на компактном замыкании $\overline{\Delta} = \Delta \cup \{h_0\}$ пространства Δ и $x^\wedge(\infty) = h_0(x) = 0$.

Если A содержит единицу e, то $e^\wedge(h) = h(e) = 1$ для всех $h \in \Delta$ и, следовательно, $e^\wedge(F) = F(e) = 1$ для всех $F \in \overline{\Delta}$. Это исключает возможность того, что $h_0 \in \overline{\Delta}$, так что имеет место первый случай и Δ компактно. Тем самым теорема полностью доказана.

При доказательстве мы попутно получили, что $\|x^\wedge\|_\infty \leqslant \|x\|$ для всех $x \in A$. Таким образом, мы имеем стандартное не повышающее норму представление нормированной алгебры A алгеброй $A^\wedge$ непрерывных комплексных функций на локально компактном хаусдорфовом пространстве Δ всех непрерывных гомоморфных отображений алгебры A на поле комплексных чисел. Мы будем называть его гельфандовским представлением нормированной алгебры A.

В более простом случае нормированного линейного пространства, которого мы вскользь коснулись выше, отображение $x \to x^0$ было изометрией, грубо говоря, потому, что непрерывные линейные функционалы имеются в изобилии (п. 8С). Но ясно, что функционалу труднее быть гомоморфизмом алгебры, нежели просто линейным; может даже оказаться, что таких ненулевых гомоморфизмов вовсе нет. Во всяком случае множество Δ значительно беднее единичного шара пространства A^*, и следует ожидать, что гельфандовское представление вообще понижает норму и что могут существовать такие $x \neq 0$, для которых $x^\wedge \equiv 0$. Если отображение $x \to x^\wedge$ взаимно однозначно (хотя, возможно, и понижает норму), то мы будем называть A *функциональной алгеброй* и вообще заменять ее изоморфной алгеброй функций $A^\wedge$ ([26]).

19С. Соответствие $h \to M_h$ между гомоморфным отображением h и его ядром M_h позволяет заменить Δ совокупностью $\mathfrak{M}$ замкнутых максимальных идеалов алгебры A, являющихся подпространствами дефекта 1. Вообще говоря, существует много других максимальных идеалов, либо не замкнутых, либо — не дефекта 1, и потому не соответствующих точкам множества Δ.

Весьма важно для успешного применения алгебраических методов, что этого не может быть, если A — коммутативная банаховская алгебра с единицей; в этом случае каждый максимальный идеал замкнут и служит ядром гомоморфного отображения алгебры A на поле комплексных чисел. Для общего случая это будет доказано позже; здесь же мы докажем это для специальной алгебры, которую можно рассматривать как простейший тип функциональной алгебры, а именно, для алгебры $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве S.

Теорема. *Для всякого собственного идеала I алгебры $C(S)$, где S — компактное хаусдорфово пространство, существует точка $p \in S$ такая, что $I \subset M_p$. Если I максимален, то $I = M_p$. Это соответствие между максимальными идеалами алгебры $C(S)$ и точками пространства S взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть I — собственный идеал алгебры $C(S)$. Допустим, что для каждой точки $p \in S$ существует функция $f_p \in I$ такая, что $f_p(p) \neq 0$. Имеем $|f_p|^2 = f_p\overline{f}_p \in I$. Так как $|f_p|^2 \geqslant 0$ и $|f_p|^2 > 0$ на открытом множестве, содержащем p, то, по теореме Гейне—Бореля, существует функция f, равная сумме конечного числа таких $|f_p|^2$, положительная на всем S. Так как $\frac{1}{f} \in C(S)$, то мы получаем, что $1 = f \cdot \frac{1}{f} \in I$ и, значит, $I = C(S)$, в противоречие с предположением, что идеал I — собственный. Следовательно, $I \subset M_p$ для некоторого p, и если идеал I — максимальный, то $I = M_p$. Наконец, если $p \neq q$, то существует $f \in C(S)$ такая, что $f(p) = 0$ и $f(q) \neq 0$ (см. лемму Урысона 3С), так что $M_p \neq M_q$, т. е. отображение $p \to M_p$ взаимно однозначно.

19D. Мы доказали не только то, что все максимальные идеалы алгебры $C(S)$ замкнуты и имеют дефект 1, но также что все они определяются точками пространства S. В общей теории функциональных алгебр эти два свойства разделяются. Так, из простых доказываемых позже (пп. 21D—F) лемм следует, что в алгебре A ограниченных функций всякий максимальный идеал замкнут и имеет дефект 1, в предположении, что A *замкнута относительно обращения*, т. е. что при $f \in A$ и $\inf |f| > 0$

также $\frac{1}{f} \in A$. Тогда можно особо поставить вопрос, когда замкнутая относительно обращения алгебра A ограниченных функций на S такова, что $S = \Delta$. Ясно, что для этого необходимо (если A содержит единицу), чтобы S было компактно в слабой топологии, определяемой функциями из A, так что, принимая во внимание теорему 5G, мы можем считать, что дана замкнутая относительно обращения алгебра непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве S, отделяющая его точки. Однако этого еще недостаточно: и при этом может оказаться, что $S \neq \Delta$. Но добавление еще одного условия, налагаемого на A, неожиданно снова весьма упрощает положение. Будем называть алгебру *самосопряженной*, если $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$.

Лемма. *Если A — самосопряженная замкнутая относительно обращения алгебра непрерывных комплексных функций на компактном пространстве S, отделяющая его точки, то каждый ее максимальный идеал имеет вид $M = M_p$, где $p \in S$. В частности, $\Delta = S$.*

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 19C.

Следствие. *Если A — самосопряженная замкнутая относительно обращения алгебра ограниченных комплексных функций на множестве S, отделяющая его точки, то S плотно в Δ.*

Доказательство. Замыкание $\bar{S}$ множества S в Δ компактно. Применение предшествующей леммы к алгебре функций, являющихся продолжениями функций из A на $\bar{S}$, показывает, что $\bar{S} = \Delta$, что и утверждалось.

Топологию $\mathfrak{J}$ пространства S, вполне определяемую имеющимися на нем непрерывными комплексными функциями, называют *вполне регулярной*. Под этим условием мы понимаем, что $\mathfrak{J}$ совпадает со слабой топологией $\mathfrak{J}_w$, определенной на S алгеброй $C(S)$ всех ограниченных $\mathfrak{J}$-непрерывных комплексных функций на S. Так как включение $\mathfrak{J}_w \subset \mathfrak{J}$ всегда имеет место, то полная регулярность равносильна включению $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}_w$, и легко видеть, что для его наличия необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого множества C и любой точки $p \notin C$ существовала непрерывная вещественная функция f такая, что $f \equiv 0$ на C и $f(p) = 1$ ([27]).

Если S вполне регулярно, то применение установленного выше следствия к $C(S)$ дает вложение S как плотного подмножества в компактное хаусдорфово пространство Δ с совпадением топологии, заданной на S, с его относительной топологией, индуцированной из Δ. Это не что иное, как так называемое максимальное (или чеховское) компактное расширение вполне регулярного пространства.

19E. То обстоятельство, что доказанное в п. 19C свойство алгебры $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве S присуще (как установлено в п. 19D) значительно более широкому классу функциональных алгебр, наводит на мысль о существовании и других не обнаруженных еще свойств алгебры $C(S)$. Мы рассмотрим два из них, причем начнем с относительно слабого свойства, также разделяемого алгеброй $C(S)$ со многими другими функциональными алгебрами. Чтобы представить эти свойства в виде, наиболее удобном для последующего сравнения с другими алгебрами, мы примем следующие общие определения.

В каждом кольце с единицей будем называть *ядром* $k(B)$ какого-либо множества B максимальных идеалов идеал, являющийся их пересечением, и *оболочкой* $h(I)$ идеала I — множество всех содержащих его максимальных идеалов.

Обращаем внимание читателя на то, что термин «ядро» употребляется нами и в другом смысле (см., например, п. 19A).

Теорема. *Если $B \subset S$, где S — компактное хаусдорфово пространство, то $\bar{B} = h(k(B))$.*

Доказательство. Пусть I_B — ядро множества B:

$$I_B = k(B) = \{f\colon\ f \in C(S) \text{ и } f = 0 \text{ на } B\}.$$

Полагая $C = \bar{B}$, имеем $I_B = I_C$, ибо непрерывная функция равна нулю на B тогда и только тогда, когда она равна нулю на $\bar{B} = C$. Если $p \notin C$, то, в силу леммы Урысона 3C, существует непрерывная функция f, равная нулю на C ($f \in I_C$) и отличная от нуля в p ($f \notin I_p$). Таким образом, $I_C \subset I_p$ тогда и только тогда, когда $p \in C$, так что $h(I_C) = C$. Тем самым мы имеем $\bar{B} = C = h(I_C) = h(I_B)$, что и требовалось доказать.

19F. Мы видели сейчас, что подмножество компактного хаусдорфова пространства S замкнуто тогда и только тогда, когда, рассматриваемое как множество максимальных идеалов алгебры $C(S)$, оно совпадает с оболочкой своего ядра. Это «оболочечно-ядерное» определение замыкания можно использовать для введения топологии в пространстве максимальных идеалов любой алгебры с единицей. Этот вопрос мы рассмотрим в п. 20E; сейчас нас будет интересовать сравнение этой оболочечно-ядерной топологии $\mathfrak{J}_{hk}$, определенной на множестве S какой-либо алгеброй A комплексных функций на S, со слабой топологией $\mathfrak{J}_w$, определенной алгеброй A, или с любой другой (более сильной) топологией $\mathfrak{J}$, в которой все функции из A непрерывны. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть A — алгебра непрерывных комплексных функций на пространстве S с топологией $\mathfrak{J}$. Тогда $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{hk}$ в том и только в том случае, когда для каждого замкнутого множества $C \subset S$ и каждой точки $p \notin C$ существует $f \in A$ такая, что $f \equiv 0$ на C и $f(p) \neq 0$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что так как A может содержать максимальные идеалы, отличные от точек пространства S, здесь под оболочкой идеала будет пониматься пересечение полной оболочки с S. Пусть C — множество, замкнутое в топологии $\mathfrak{J}_{hk}$, т. е. $C = h(I)$, где $I = k(C)$. Но множество максимальных идеалов, содержащих заданный элемент $f \in A$, есть просто множество, на котором функция f равна нулю, и потому замкнуто в $\mathfrak{J}$. Следовательно, и оболочка идеала I, будучи пересечением таких множеств для всех $f \in I$, замкнута в $\mathfrak{J}$. Тем самым каждое множество C, замкнутое в $\mathfrak{J}_{hk}$, замкнуто в $\mathfrak{J}$, и, значит, всегда $\mathfrak{J}_{hk} \subset \mathfrak{J}$.

Поэтому теорема сводится к нахождению условия того, чтобы замкнутое множество C было оболочкой своего ядра. Но ядро множества C — это идеал, образованный элементами $f \in A$, обращающимися в нуль на C, оболочка же этого идеала будет совпадать с C тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \notin C$ в этом идеале содержится функция f такая, что $f(p) \neq 0$. А это и есть условие теоремы.

Если взять в этой теореме $A = C(S)$, то условие теоремы будет как раз условием, характеризующим вполне регулярные пространства. Таким образом, для вполне регулярных пространств $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_w = \mathfrak{J}_{hk}$. Функциональную алгебру A, удовлетворяющую условию, указанному в теореме, называют *регулярной* функциональной алгеброй.

19G. Перейдем теперь к результату, гораздо менее поддающемуся обобщению, чем полученный в п. 19E. Границы его применимости или неприменимости в таких регулярных алгебрах, как алгебра преобразований Фурье функций из $L^1(-\infty, \infty)$, связаны с теоремами типа тауберовой теоремы Винера.

Теорема. *Идеал I алгебры $C(S)$ на компактном хаусдорфовом пространстве S, замкнутый в топологии равномерной сходимости, является ядром своей оболочки.*

Доказательство. Пусть C — оболочка идеала I, $C = \{p: f(p) = 0$ для всех $f \in I\}$. Так как каждая функция $f \in I$ непрерывна, то множество ее нулей (оболочка f) замкнуто, значит, и C, как пересечение этих множеств нулей, замкнуто. Рассмотрим пространство $S_1 = S - C$. Оно локально компактно, и функции из I_C образуют на S_1 алгебру всех непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности (см. п. 3D). Функции из I образуют равномерно замкнутую подалгебру в I_C. Пусть p_1 и p_2 — две различные точки пространства S_1 и f — функция из $C(S)$ такая, что $f = 0$ на C, $f(p_2) = 0$ и $f(p_1) = 1$. В силу леммы Урысона 3C, такая функция существует. Пусть g — функция из I, для которой $g(p_1) \neq 0$. Тогда $gf \in I$, $(gf)(p_1) \neq 0$ и $(gf)(p_2) = 0$. Отсюда, на основании теоремы Стона — Вейерштрасса 4E, заключаем, что $I = I_C$, что и требовалось доказать.

§ 20. Максимальные идеалы

Общую теорию мы начнем с изложения некоторых результатов о максимальных идеалах в произвольных кольцах и алгебрах. Следующая простая теорема является едва ли не основным средством на том пути абстрактного построения гармонического анализа, которым мы здесь следуем. Ее доказательство непосредственно опирается на лемму Цорна.

20A. Теорема. *В кольце R с единицей каждый собственный (правый) идеал может быть расширен до максимального собственного (правого) идеала.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathfrak{F}$ всех собственных (правых) идеалов кольца R, содержащих заданный идеал I. Это семейство частично упорядочено по включению. Объединение идеалов, образующих любое линейно упорядоченное подсемейство, также есть идеал, и притом собственный, поскольку в нем не содержится единица. Тем самым каждое линейно упорядоченное подсемейство семейства $\mathfrak{F}$ обладает в $\mathfrak{F}$ верхней границей, и, следовательно, по лемме Цорна, $\mathfrak{F}$ содержит максимальный элемент.

20B. Если R не содержит единицы, доказательство теряет силу, поскольку нельзя утверждать, что объединение линейно упорядоченного подсемейства идеалов из $\mathfrak{F}$ есть собственный идеал. Однако это доказательство можно спасти, если R обладает (левой) единицей по модулю I, т. е. содержит элемент u такой, что $ux - x \in I$ для всех $x \in R$. Действительно, тогда u не может содержаться ни в каком собственном (правом) идеале J, содержащем I ($u \in J$ и $ux - x \in J$ для всех $x \in R \Rightarrow x \in J$ для всех $x \in R$, в противоречие с предположением, что J — собственный идеал), и то же доказательство проходит с заменой e на u. (Правый) идеал I, по модулю которого R обладает (левой) единицей, называют *регулярным*. Нами доказана следующая

Теорема. *Каждый собственный регулярный (правый) идеал может быть расширен до максимального собственного регулярного (правого) идеала.*

20C. Мы неоднократно будем убеждаться в том, что наличие в алгебре единицы делает теорию проще и нагляднее, чем это возможно, когда единица отсутствует. Поэтому важно заметить, что, как это устанавливается в нижеследующей теореме, алгебру, не обладающую единицей, всегда можно расширить до алгебры с единицей, и мы всегда будем пользоваться этим там, где сочтем это полезным. Однако во многих важных ситуациях такое расширение представляется неестественным и нежелательным. Поэтому мы будем придерживаться изложения, учитывающего обе возможности, с тем чтобы там, где можно, обойтись без присоединения единицы.

Теорема. *Алгебру A без единицы можно вложить в качестве максимального идеала с дефектом 1 в алгебру A_e с единицей так, что отображением $I_e \to I = A \cap I_e$ будет устанавливаться взаимно однозначное соответствие между семейством всех (правых) идеалов I_e из A_e, не содержащихся в A, и семейством всех регулярных (правых) идеалов I из A.*

Доказательство. Алгеброй A_e будет служить совокупность всех упорядоченных пар $\langle x, \lambda \rangle$, где $x \in A$, а λ — комлексные числа. Чтобы можно было рассматривать $\langle x, \lambda \rangle$ как $x + \lambda e$, очевидно, нужно принять следующее определение умножения:

$$\langle x, \lambda \rangle \langle y, \mu \rangle = \langle xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu \rangle.$$

Мы опускаем шаблонную проверку того, что расширенная система A_e является алгеброй. Очевидно, $\langle 0, 1 \rangle$ служит в A_e единицей и соответствие $x \to \langle x, 0 \rangle$ осуществляет вложение A в A_e в качестве максимального идеала дефекта 1.

Пусть теперь I_e — произвольный (правый) идеал алгебры A_e, не содержащийся в A, и $I = I_e \cap A$. Идеал I_e должен содержать элемент v вида $\langle x, -1 \rangle$. Тогда элемент $u = v + e = \langle x, 0 \rangle \in A$ является (левой) единицей по модулю I_e в A_e ($uy - y = (u-e)y = vy \in I_e$ для всех $y \in A_e$), а тем самым автоматически и по модулю I в A. Таким образом, идеал I регулярен в A. При этом, поскольку $uy - y \in I_e$ и $uy \in A$ для всех y, мы видим, что $y \in I_e$ тогда и только тогда, когда $uy \in I$.

Обратно, пусть I — регулярный (правый) идеал в алгебре A и $u = \langle x, 0 \rangle$ — (левая) единица идеала I в A. Положим $I_e = \{y\colon\ uy \in I\}$. Из определения умножения в A_e непосредственно следует, что I есть (правый) идеал в A_e; поэтому и I_e есть (правый) идеал в A_e. Он не содержится в A, поскольку $u \langle x, -1 \rangle = u(u - e) = u^2 - u \in I$ и поэтому $u - e = \langle x, -1 \rangle \in I_e$. При этом то обстоятельство, что $uy - y \in I$ для каждого $y \in A$, показывает, что $y \in I$ тогда и только тогда, когда $uy \in I$ и $y \in A$, т. е. $I = I_e \cap A$.

Таким образом, нами установлено взаимно однозначное и сохраняющее включение соответствие между семейством всех регулярных (правых) идеалов в A и семейством всех (правых) идеалов в A_e, не содержащихся в A. В частности, регулярными максимальными (правыми) идеалами в A служат пересечения с A максимальных (правых) идеалов в A_e, отличных от A.

Следствие. *Регулярные максимальные идеалы алгебры $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на локально компактном хаусдорфовом пространстве S, обращающихся в нуль на бесконечности, задаются точками пространства S, как описано в* п. 19C.

Доказательство. Соответствие $\langle f, \lambda \rangle \to f + \lambda$ устанавливает изоморфизм расширенной алгебры $C_e(S)$ с алгеброй $C(S_\infty)$ всех непрерывных комплексных функций на одноточечном компактном расширении S_∞ пространства S. В последней $C(S)$ является максимальным идеалом, соответствующим бесконечно удаленной точке, а остальные максимальные идеалы алгебры $C_e(S)$, соответствующие точкам пространства S, дают, по предшествующей теореме, регулярные максимальные идеалы алгебры $C(S)$.

20D. *Регулярный идеал M коммутативного кольца R максимален тогда и только тогда, когда R/M есть поле.*

Доказательство. Если R/M обладает собственным идеалом J, то объединение смежных классов, входящих в J, есть собственный идеал в R, содержащий M как правильную часть. Таким образом, идеал M максимален в R тогда и только тогда, когда R/M не содержит собственных идеалов. В этом случае для любого ненулевого $X \in R/M$ идеал $\{XY\colon Y \in R/M\}$ совпадает со всем R/M. В частности, $XY = E$ для некоторого Y и единицы E кольца R/M. Тем самым каждый элемент $X \in R/M$ обладает обратным и R/M есть поле. Обратное утверждение вытекает из того, что поле не обладает нетривиальными идеалами.

Если R — алгебра над полем комплексных чисел, то поле R/M содержит поле комплексных чисел в качестве своего подполя. В § 22 мы увидим, что если R — банаховская алгебра, то R/M само есть поле комплексных чисел, что и даст возможность продвинуть дальше выполнение нашей программы представления банаховских алгебр.

20E. В заключение этого параграфа мы рассмотрим некоторые простые, но важные свойства оболочечно-ядерной топологии, заимствованные главным образом у Сегала [44]. Для каждого подмножества B совокупности $\mathfrak{M}$ всех регулярных максимальных (двусторонних) идеалов кольца R мы определим $\overline{B}$ как $h(k(B))$, т. е. как оболочку ядра B. Раньше нам не было необходимости знать, что $B \to \overline{B}$ есть действительно операция замыкания. Конечно, свойства $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ и $B \subset \overline{B} = \overline{\overline{B}}$ непосредственно следуют из очевидных свойств монотонности $A \subset B \Rightarrow k(B) \subset k(A)$ и $I \subset J \Rightarrow h(J) \subset h(I)$ ([28]). Однако закон $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ не столь очевиден, и мы приведем его формальное доказательство.

Лемма. *Если A и B — замкнутые подмножества пространства $\mathfrak{M}$, то $A \cup B$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $A \cup B$ незамкнуто. Тогда существует точка $M \in \mathfrak{M}$ такая, что $k(A \cup B) \subset M$, но $M \notin A \cup B$. Так как A замкнуто, то $k(A) \not\subset M$, так что $k(A) + M = R$. Отсюда следует существование таких $a \in k(A)$ и $m_1 \in M$, что $e = a + m_1$, где e — единица по модулю M. Аналогично, $e = b + m_2$, где $b \in k(B)$ и $m_2 \in M$. Перемножая эти равенства, получаем, что $e^2 - ab \in M$, и так как $e^2 - e \in M$, то заключаем, что ab есть единица по модулю M. Но $ab \in M$ (ибо $ab \in k(A) \cap k(B) = k(A \cup B) \subset M$), и мы пришли к противоречию.

Замечания. Это доказательство теряет силу для пространства регулярных максимальных правых идеалов, поскольку там нельзя заключить ни что $e^2 - ab \in M$, ни что $ab \in M$. Понятие оболочечно-ядерного замыкания сохраняет смысл и здесь, однако мы уже не можем заключить, что оно определяет топологию.

Обратим также внимание читателя на то, что каждая оболочка замкнута. Как и элементарные топологические свойства, приведенные перед леммой, это вытекает из того, что операции образования оболочки и ядра обращают включения. Действительно, если $C = h(I)$, то $I \subset k(C)$ и $h(k(C)) \subset h(I) = C$, т. е. $\overline{C} \subset C$, что и требовалось. Аналогично устанавливается, что каждое ядро есть ядро своей оболочки.

20F. В п. 19G мы видели, что для замкнутого идеала I алгебры $C(S)$ всех непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве S выполняется соотношение $I = k(h(I))$. Этот результат не сохраняется для идеалов произвольного кольца, даже замкнутых в надлежащей топологии. Наилучшим общим результатом указанного типа является приведенная ниже теорема, открытая в различных вариантах независимо Годманом, Сегалом и Шиловым и служащая алгебраической основой предложений гармонического анализа, подобных тауберовой теореме Винера. Будем называть кольцо *полупростым*, если пересечение всех его регулярных максимальных идеалов содержит только нулевой элемент.

Лемма. *Если I и J — идеалы с непересекающимися оболочками и J регулярен, то I содержит единицу по модулю J.*

Доказательство. Единица e по модулю J является также единицей по модулю $I+J$, так что идеал $I+J$ регулярен. Но в силу предположения, $I+J$ не содержится ни в каком регулярном максимальном идеале. Следовательно, $I+J=R$, и, в частности, существуют элементы $i \in I$ и $j \in J$ такие, что $i+j=e$. Но элемент $i=e-j$, очевидно, является единицей по модулю J, что и требовалось.

Теорема. *Пусть R — полупростое кольцо, I — идеал в R и U — открытое множество регулярных максимальных идеалов такое, что $h(I) \subset U$ и $k(U')$ регулярно. Тогда $k(U) \subset I$.*

Доказательство. Предположение замкнутости U' равносильно предположению, что $U'=h(J)$, где $J=k(U')$. Таким образом, I и J имеют непересекающиеся оболочки и, по лемме, I содержит единицу по модулю J, скажем, i. Для $x \in k(U)$ отсюда следует, что $ix-x$ принадлежат каждому регулярному максимальному идеалу, или, в силу полупростоты кольца R, что $ix-x=0$. Таким образом, $x=ix \in I$, что и требовалось доказать.

Приведем еще, главным образом для сравнения с излагаемой позже теорией регулярных банаховских алгебр, следующий вариант:

Теорема. *Пусть R — коммутативное полупростое кольцо и I — идеал в R. Тогда I содержит каждый элемент x, для которого $h(I) \subset \operatorname{int} h(x)$ и $x=ex$ при некотором $e \in R$.*

Доказательство. Пусть C — дополнение к $h(x)$ и $J=k(C)$. Тогда первое предположение относительно x означает, что I и J имеют непересекающиеся оболочки. Второе же предположение влечет, что e есть единица по модулю J, хотя это отнюдь не является непосредственно очевидным. В основе вывода лежит следующая

Лемма. *Два подмножества полупростого коммутативного кольца R аннулируют друг друга тогда и только тогда, когда объединение их оболочек совпадает с R.*

Доказательство. Если элементы $x, y \in R$ таковы, что $h(x) \cup h(y) = R$, то xy принадлежит каждому регулярному максимальному идеалу и, следовательно, $xy = 0$, в силу полупростоты R. Обратно, пусть A и B — подмножества из R такие, что $AB = 0$. Если бы $h(A) \cup h(B) \neq R$, то существовал бы регулярный максимальный идеал M, не содержащий некоторые элементы $a \in A$ и $b \in B$. Тем самым ни a, ни b не было бы нулем по модулю M, тогда как $ab = 0$, а это противоречит тому, что R/M — поле.

Продолжим теперь доказательство теоремы. Из равенства $x(ey - y) = (xe - x)y$, в силу леммы, вытекает, что $ey - y$ принадлежит всем регулярным максимальным идеалам, не содержащим x, а значит, и идеалу J. Тем самым e является единицей по модулю J, откуда следует, что $x \in I$, совершенно так же, как в доказательстве предшествующей теоремы.

20G. Мы заключим этот параграф теоремой об инвариантности оболочечно-ядерной топологии относительно гомоморфизмов.

Теорема. *Пусть I — собственный идеал кольца R. Подмножество из R/I является идеалом в R/I тогда и только тогда, когда оно имеет вид J/I, где J — идеал кольца R, содержащий I. Идеал J/I регулярен и (или) максимален в R/I тогда и только тогда, когда J регулярен и (или) максимален в R. Таким образом, пространство регулярных максимальных идеалов в R/I соответствует оболочке идеала I в пространстве регулярных максимальных идеалов кольца R, причем это соответствие гомеоморфно при оболочечно-ядерных топологиях.*

Доказательство. Непосредственная проверка.

§ 21. Спектр; дополнительный элемент

В этом параграфе мы присоединим к нашему репертуару два весьма важных понятия — *спектра* и *дополнительного элемента*. Они естественно порождаются вопросом о том, что вообще может означать утверждение: x принимает значение λ. Оно должно было бы иметь один и тот же смысл с утверждением, что $x-\lambda e$ принимает значение 0, и этот смысл должен был бы совпадать с обычным в случае алгебры $C(S)$ всех непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве, служащей нам моделью. В последнем случае имеются две очевидные алгебраические формулировки указанного утверждения: первая — что $x-\lambda e$ принадлежит некоторому максимальному идеалу, и вторая — что $(x-\lambda e)^{-1}$ не существует. Ниже мы покажем, что эти два свойства в любой алгебре равносильны, так что за требуемое обобщение может быть принято любое из них. Положим $y = x - \lambda e$ и докажем равносильность указанных свойств для y в любом кольце с единицей.

21A. Теорема. *Элемент y кольца R с единицей обладает правым обратным тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком максимальном правом идеале. Если y принадлежит центру кольца R, то y^{-1} существует в том и только в том случае, когда y не принадлежит никакому максимальному (двустороннему) идеалу.*

Доказательство. Если y обладает правым обратным элементом z и принадлежит правому идеалу I, то $e = yz \in I$, так что $I = R$. Таким образом, y не может принадлежать никакому собственному правому идеалу. Обратно, если y не обладает правым обратным элементом, то множество $\{yz\colon z \in R\}$ является правым идеалом, содержащим y, и, согласно теореме 20A, может быть расширено до максимального правого идеала, содержащего y. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. То же доказательство годится и для второго утверждения, с тем дополнительным замечанием, что, поскольку y предполагается теперь перестановочным со всеми элементами кольца R, множество $\{yz\colon z \in R\}$ является двусторонним идеалом.

21B. Пусть x — произвольный элемент алгебры A с единицей. Совокупность всех тех λ, для которых $(x-\lambda e)^{-1}$ не существует, соответствующую множеству значений функции в случае алгебры $C(S)$, называют *спектром* элемента x.

Если A не содержит единицы, мы определим спектр элемента x как совокупность комплексных чисел, становящуюся спектром x в только что определенном смысле, когда к A присоединяется единица, как описано в п. 20С.

В этом случае $\lambda = 0$ всегда должно принадлежать спектру любого элемента $x \in A$, поскольку последний не может обладать обратным элементом в расширенной алгебре A_e (ибо $x(y+\lambda e) = e \Rightarrow e = xy + \lambda x \in A$). Ненулевой же спектр элемента x можно определить также, не выходя за пределы алгебры A, перефразируя описание элемента $(x - \lambda e)^{-1}$ так, что оно не будет содержать e. Действительно, положив $x = \lambda y$ и вынеся λ за скобки, мы можем записать элемент $(y - e)^{-1}$, если он существует, в виде $u - e$, и равенство $(y - e)(u - e) = e$ примет вид $y + u - yu = 0$, что и является искомым условием. Такой элемент u должен принадлежать A, ибо $u = yu - y \in A$. Этим подсказывается следующее очевидное определение:

Если в каком-нибудь кольце R справедливо равенство $x + y - xy = 0$, то будем называть y *правым дополнительным элементом к* x, а x — *левым дополнительным элементом к* y. Ниже мы увидим, что если x имеет и правый и левый дополнительные элементы, то они совпадают и единственны; этот однозначно определенный элемент называют просто *дополнительным к* x.

Сделанные выше заключения принимают теперь следующий вид:

Теорема. *Если A — алгебра без единицы, то спектр каждого элемента содержит 0, а $\lambda \neq 0$ принадлежит спектру элемента $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\frac{x}{\lambda}$ не обладает в A дополнительным элементом.*

21С. Обратимся теперь к доказательству совпадения правого и левого дополнительных элементов.

Теорема. *Если элемент x произвольного кольца R имеет и правый и левый дополнительные элементы, то они совпадают и единственны.*

Доказательство. Пусть u и v — левый и правый дополнительные элементы к x. Доказательство их совпадения и единственности равносильно обычному доказательству совпадения и единственности левого и правого обратных к $e-x$ элементов $e-u$ и $e-v$ и может быть получено из последнего доказательства исключением e.

Более предпочтительный способ, допускающий систематическое применение, основывается на замечании, что отображение $e-x \to x$ преобразует умножение в новую операцию $x \circ y = x + y - xy$ и переводит e в 0. Очевидно, что эта операция ассоциативна и что $0 \circ x = x \circ 0 = x$. Доказательство теоремы принимает теперь следующий вид:

$$u = u \circ 0 = u \circ (x \circ v) = (u \circ x) \circ v = 0 \circ v = v.$$

21D. Исключение e из доказательства теоремы 21A, проведенного для элемента $y = x - e$, приводит к следующему ее заменителю:

Теорема. *Элемент x любого кольца R обладает правым дополнительным тогда и только тогда, когда не существует никакого регулярного максимального правого идеала, по модулю которого x был бы левой единицей.*

Доказательство. Если x не обладает правым дополнительным элементом, то множество $\{xy - y\colon y \in R\}$ является не содержащим x правым идеалом, по модулю которого x, очевидно, есть левая единица ($xy = y \bmod I$, поскольку $xy - y \in I$), и этот идеал, согласно теореме 20B, может быть расширен до максимального регулярного идеала, обладающего тем же свойством. Обратно, если x обладает правым дополнителным элементом x' и является левой единицей для правого идеала I, то $x = xx' - x' \in I$; тогда $y = xy - (xy - y) \in I$ для каждого $y \in R$, и $I = R$. Таким образом, x не может служить левой единицей ни для какого собственного правого идеала.

Если x принадлежит центру кольца R, то установленная сейчас теорема обладает ожидаемым дубликатом, относящимся к дополнительному элементу и регулярным двусторонним идеалам. В частности, имеем

Следствие. *$\lambda \neq 0$ принадлежит спектру элемента центра алгебры A тогда и только тогда, когда $\frac{x}{\lambda}$ есть единица по модулю некоторого максимального регулярного идеала.*

21Е. Теорема. *Если P — полином без свободного члена, то спектр элемента $P(x)$ совпадает с множеством значений P на спектре элемента x.*

Доказательство. Мы можем считать, произведя, если надо, расширение, что рассматриваемая алгебра содержит единицу. Пусть λ_0 — фиксированное комплексное число и $\mu \prod (x - \mu_n e)$ — разложение $P(x) - \lambda_0 e$ на линейные множители. $(P(x) - \lambda_0 e)^{-1}$ не существует тогда и только тогда, когда $(x - \mu_n e)^{-1}$ не существует хотя бы для одного n. Так как, по определению чисел μ_n, $P(\mu_n) - \lambda_0 = 0$, то тем самым показано, что λ_0 принадлежит спектру $P(x)$ тогда и только тогда, когда существует число μ_0, принадлежащее спектру x, такое, что $\lambda_0 = P(\mu_0)$, и теорема доказана.

§ 22. Банаховские алгебры; элементарная теория

Результаты §§ 22—25, если отвлечься от произведенных нами небольших модификаций, принадлежат Гельфанду [12]. Главные отклонения состоят в предосторожностях, таких, как оперирование дополнительными элементами, регулярными идеалами и т. п., предпринятых на случай отсутствия единичного элемента. Существование единицы будет предполагаться лишь там, где она или обратный элемент будут явно упомянуты.

В этом параграфе мы покажем, что совокупность элементов, обладающих обратным (дополнительным), открыта, откуда будет вытекать, что максимальный идеал M замкнут и, следовательно, A/M есть нормированное поле. Элементарное применение теории аналитических функций приводит к заключению, что существует только одно нормированное поле, а именно поле комплексных чисел, и это завершит первый этап нашей программы представления банаховских алгебр.

22А. Для доказательства существования в банаховской алгебре элементов $(e - x)^{-1}$ можно обычным образом воспользоваться обычной геометрической прогрессией.

Теорема. *Если* $\|x\|<1$, *то* x *обладает дополнительным элементом, а* $e-x$ *обратным, задаваемыми соответственно выражениями* $x'=-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ *и* $(e-x)^{-1}=e-x'=e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$, *причем оба они непрерывно зависят от* x.

Доказательство. Положим $y_n=-\sum_{i=1}^{n}x^i$. Тогда

$$\|y_n-y_m\|=\left\|\sum_{i=m+1}^{n}x^i\right\|\leqslant\sum_{i=m+1}^{n}\|x\|^i<\frac{\|x\|^{m+1}}{1-\|x\|}\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Таким образом, последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна и ее предел y задается обычным образом бесконечным рядом $-\sum_{i=1}^{\infty}x^i$. Тогда $x+y-xy=\lim(x+y_n-xy_n)=\lim x^{n+1}=0$ и элемент y — правый дополнительный к x. Аналогично, или на основании того, что y перестановочен с x, заключаем, что y является также левым дополнительным, а потому и единственным просто дополнительным к x. Если e существует, то, конечно, $e-y=(e-x)^{-1}$. Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty}x^i$, очевидно, равномерно сходится в замкнутом шаре $\|x\|\leqslant r<1$, то заключаем, что дополнительный (или обратный) элемент является непрерывной функцией от x в открытом шаре $\|x\|<1$.

В случае интегрального оператора x геометрическая прогрессия $\sum_{i=0}^{\infty}x^i$ представляет собой классический ряд Неймана для $(e-x)^{-1}$.

Замечание. $\|x'\|\leqslant\dfrac{\|x\|}{1-\|x\|}$.

22В. Теорема. *Если элемент* y *обладает обратным, то и* $y+x$ *при* $\|x\|<a=\dfrac{1}{\|y^{-1}\|}$ *обладает обратным, причем*

$$\|(x+y)^{-1}-y^{-1}\|\leqslant\frac{\|x\|}{(a-\|x\|)\,a}.$$

Таким образом, совокупность элементов, обладающих обратным, открыта и функция y^{-1} *на ней непрерывна.*

Доказательство. Если $\|x\| < \|y^{-1}\|^{-1}$, то $\|y^{-1}x\| \leqslant \|y^{-1}\| \cdot \|x\| < 1$ и элемент $y + x = y(e + y^{-1}x)$ обладает обратным, в силу теоремы 22А. Далее,

$$(y + x)^{-1} - y^{-1} = [(e + y^{-1}x)^{-1} - e]\, y^{-1} = -(-y^{-1}x)'\, y^{-1},$$

так что по замечанию, сделанному в конце п. 22А,

$$\|(y + x)^{-1} - y^{-1}\| \leqslant \frac{\|x\| \cdot \|y^{-1}\|^2}{1 - \|x\| \cdot \|y^{-1}\|} = \frac{\|x\|}{(a - \|x\|)\, a},$$

где $a = \dfrac{1}{\|y^{-1}\|}$.

22С. Теорема. *Если элемент y обладает дополнительным элементом y', то и $y + x$, где $\|x\| < a = \dfrac{1}{1 + \|y'\|}$, обладает дополнительным элементом, причем*

$$\|(y + x)' - y'\| \leqslant \frac{\|x\|}{(a - \|x\|)\, a}.$$

Таким образом, совокупность элементов, обладающих дополнительным, открыта и отображение $y \to y'$ на ней непрерывно.

Доказательство. Если $\|x\| < a = \dfrac{1}{1 + \|y'\|}$, то $\|x - xy'\| \leqslant \|x\|(1 + \|y'\|) < 1$ и $u = x - xy'$ обладает дополнительным элементом, в силу теоремы 22А. Но $(y + x) \circ y' = x - xy' = u$, так что $y + x$ имеет $y' \circ u'$ своим правым дополнительным элементом. Аналогично, $y + x$ имеет левый дополнительный, а потому и единственный просто дополнительный элемент, равный $y' \circ u'$. Наконец, $(y + x)' - y' = (y' \circ u') - y' = u' - y'u'$, так что

$$\|(y + x)' - y'\| \leqslant (1 + \|y'\|)\|u'\| \leqslant \frac{(1 + \|y'\|)\|u\|}{1 - \|u\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|x\|(1 + \|y'\|)^2}{1 - \|x\|(1 + \|y'\|)} = \frac{\|x\|}{(a - \|x\|)\, a}.$$

Замечание. Если мы возьмем $x = \lambda y$, то $u = \lambda(y - yy') = -\lambda y'$. Поэтому

$$\frac{(y + \lambda y)' - y'}{\lambda} = \frac{(-\lambda y')' - y'(-\lambda y')'}{\lambda} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^{n-1} [(y')^n - (y')^{n+1}] \to (y')^2 - y' \text{ при } \lambda \to 0$$

Это доказывает аналитичность $(\lambda y)'$ как функции от λ, что дальше будет использовано.

22D. *Если u — единица по модулю собственного регулярного идеала I, то* $\rho(I, u) \geqslant 1$. Действительно, если существует элемент $x \in I$ такой, что $\|u-x\| < 1$, то $u-x$ обладает дополнительным элементом a: $(u-x)a - a - (u-x) = 0$. Так как элементы x, xa и $ua-a$ принадлежат I, то заключаем, что $u \in I$, что невозможно (см. п. 20B). Отсюда вытекает

Лемма. *Если I — собственный регулярный идеал, то и его замыкание $\bar{I}$ есть собственный регулярный идеал. В частности, регулярный максимальный идеал замкнут.*

Доказательство. $\bar{I}$, очевидно, есть идеал, а $\rho(I, u) \geqslant 1$ влечет $\rho(\bar{I}, u) \geqslant 1$, так что $\bar{I}$ — собственный идеал.

22E. Теорема. *Фактор-кольцо A/I банаховской алгебры A по ее замкнутому регулярному идеалу I есть банаховская алгебра с единицей.*

Доказательство. Из теоремы 6B мы уже знаем, что A/I для любого замкнутого (не обязательно регулярного) I есть банаховское пространство. Пусть X и Y — два смежных класса из A/I. Тогда

$$\|XY\| = \inf\{\|xy\|:\ x \in X \text{ и } y \in Y\} \leqslant \inf\{\|x\| \cdot \|y\|\} =$$
$$= \inf\{\|x\|:\ x \in X\} \cdot \inf\{\|y\|:\ y \in Y\} = \|X\| \cdot \|Y\|.$$

Если идеал I регулярен и u — единица по модулю I, то смежный класс E, содержащий u, служит единицей в A/I и, в силу 22D,

$$\|E\| = \inf\{\|x\|:\ x \in E\} = \inf\{\|u-y\|:\ y \in I\} = \rho(I, u) \geqslant 1.$$

Если в A есть единица e, то $e \in E$ и $\|E\| \leqslant \|e\| = 1$, так что в этом случае $\|E\| = 1$, и доказательство закончено. Если же A не содержит единицы, то может оказаться, что $\|E\| > 1$. Как было показано в § 18, в этом случае можно перенормировать A/I введением равносильной меньшей нормы так, чтобы $\|E\| = 1$.

Из п. 20D и доказанной сейчас теоремы вытекает

Следствие. *Если I — регулярный максимальный идеал и A коммутативна, то A/I есть нормированное поле.*

22F. Теорема. *Каждое нормированное поле изометрически изоморфно полю комплексных чисел.*

Доказательство. Нам нужно показать, что для любого элемента x нашего поля существует комплексное число λ такое, что $x=\lambda e$. Будем вести доказательство от противного, а именно, допустим, что $x-\lambda e$ ни для какого λ не обращается в нуль и, значит, $(x-\lambda e)^{-1}$ существует для всех λ. Тогда, как показывает непосредственное вычисление, подобное проведенному в п. 22B, $F((x-\lambda e)^{-1})$ для любого непрерывного линейного функционала F, определенного на нашем поле как на банаховском пространстве, в качестве функции от λ имеет своей производной $F((x-\lambda e)^{-2})$ ([29]) и, следовательно, является целой аналитической функцией от λ. Но $(x-\lambda e)^{-1}\to 0$ при $\lambda\to\infty$, ибо $(x-\lambda e)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}-e\right)^{-1}$, а $\left(\frac{x}{\lambda}-e\right)^{-1}\to -e$ при $\lambda\to\infty$, в силу теоремы 22A. Следовательно, $F((x-\lambda e)^{-1})\to 0$ при $\lambda\to\infty$ и, по теореме Лиувилля, $F((x-\lambda e)^{-1})\equiv 0$. Из п. 8C вытекает тогда, что $(x-\lambda e)^{-1}=0$, что, однако, невозможно ([30]).

Замечание. Проведенное сейчас доказательство не опирается на коммутативность умножения. Таким образом, мы фактически показали, что *поле комплексных чисел является единственной нормированной алгеброй с делением.*

§ 23. Пространство максимальных идеалов коммутативной банаховской алгебры

23A. В предыдущем параграфе доказаны все составные части следующей теоремы, являющейся основной теоремой гельфандовской теории.

Теорема. *Каждый регулярный максимальный идеал коммутативной банаховской алгебры A замкнут и имеет дефект 1, каждое гомоморфное отображение ее на поле комплексных чисел непрерывно и имеет норму $\leqslant 1$, а соответствие $h\to M_h$ между такими (непрерывными) гомоморфными отображениями h и их ядрами M_h отождествляет пространство Δ этих отображений с множеством $\mathfrak{M}$ всех регулярных максимальных идеалов.*

Доказательство. Из пп. 22D — F непосредственно видно, что каждый регулярный максимальный идеал есть ядро гомоморфного отображения алгебры A на поле комплексных чисел. Ясно, что и обратно, ядро любого такого отображения является регулярным максимальным идеалом. Для завершения доказательства теоремы остается лишь установить, что такое гомоморфное отображение имеет своей границей 1 (что, вместе с тем, равносильно замкнутости его ядра). Наиболее прямой путь доказательства таков. Предполагаем, что $|h(x)|>\|x\|$ для некоторого x, и, полагая $\lambda=h(x)$, замечаем, что тогда $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|<1$, $\left(\frac{x}{\lambda}\right)'$ существует и, следовательно, $h\left(\frac{x}{\lambda}\right)\neq 1$, в противоречие с определением λ.

Для выяснения роли различных свойств, установленных последней теоремой, докажем следующее предложение.

Лемма. *Если A — коммутативная нормированная алгебра, то каждый регулярный максимальный идеал в A замкнут тогда и только тогда, когда каждый элемент $x\in A$ с $\|x\|<1$ обладает дополнительным элементом.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что если u — единица по модулю замкнутого регулярного максимального идеала M, то $\rho(M, u)\geqslant 1$, ибо если бы существовал элемент $x\in M$ такой, что $\|x-u\|=\delta<1$, то, положив $y=u-(u-x)^n$, мы имели бы $\|u-y\|=\|(u-x)^n\|\leqslant\delta^n$, и так как y, как сумма положительных степеней x, принадлежит M, то отсюда следовало бы, что $u\in\overline{M}=M$, что невозможно. Предположим теперь, что каждый максимальный идеал замкнут, и пусть $\|x\|<1$. Тогда должен существовать дополнительный элемент x', ибо в противном случае x, в силу теоремы 21D, должен был бы служить единицей по модулю некоторого регулярного максимального идеала M, и в то же время $1>\|x\|=$ $=\|x-0\|\geqslant\rho(x, M)$, в противоречие со сделанным замечанием.

Обратно, из существования x' для всех x с $\|x\|<1$ совершенно так же, как в п. 22D, следует, что каждый регулярный максимальный идеал замкнут.

Если теперь коммутативная нормированная алгебра A обладает одним, а значит, и другим из этих равносильных свойств, то теорема 22F показывает, что каждый регулярный максимальный идеал в A имеет дефект 1, а тогда справедливы и дальнейшие утверждения рассматриваемой теоремы. В частности, она верна для всякой алгебры A ограниченных функций, замкнутой относительно обращения (см. п. 19D).

23B. Сделаем сводку фактов, относящихся к гельфандовскому представлению, заменив Δ пространством $\mathfrak{M}$ всех регулярных максимальных идеалов. Пусть F_M — гомоморфизм из Δ, ядром которого служит регулярный максимальный идеал M. Число $F_M(x)$ непосредственно определяется следующим образом: пусть e_M — единица поля A/M и $\overline{x}$ — смежный класс из A/M, содержащий x; тогда $F_M(x)$ есть то комплексное число λ, для которого $\overline{x} = \lambda e_M$. Из 22E следует также, что $|F_M(x)| \leqslant \|x\|$.

При x фиксированном и M переменном $F_M(x)$ определяет комплексную функцию $x^\wedge$ $(x^\wedge(M) = F_M(x))$ на множестве $\mathfrak{M}$ всех регулярных максимальных идеалов из A. Отображение $x \to x^\wedge$ является тогда не повышающим норму гомоморфным отображением алгебры A на некоторую алгебру $A^\wedge$ комплексных функций на $\mathfrak{M}$ с равномерной нормой $\|x^\wedge\|_\infty$. На $\mathfrak{M}$ определяется слабая топология, в которой все функции $x^\wedge \in A^\wedge$ становятся непрерывными, причем, как было показано в п. 19B, в этой топологии $\mathfrak{M}$ компактно или локально компактно.

Функциональная алгебра $A^\wedge$, вообще говоря, не совпадает со всей алгеброй $C(\mathfrak{M})$ и даже не является ее равномерно замкнутой подалгеброй; она можеть быть, а может и не быть плотной в $C(\mathfrak{M})$. Но она всегда разделяет с $C(\mathfrak{M})$ то свойство, что ее регулярные максимальные идеалы точно соответствуют точкам из $\mathfrak{M}$. И $A^\wedge$ всегда замкнута относительно операции взятия аналитических функций, т. е. если $x \in A$ и функция f аналитична на замыкании области значений $x^\wedge$, то существует элемент $y \in A$ такой, что $y^\wedge(M) \equiv f(x^\wedge(M))$. Все эти свойства очень важны и будут подробнее рассмотрены позже, главным образом в § 24.

Мы будем называть функцию $x^\wedge$ *преобразованием Фурье* элемента x, а гомоморфное отображение $x \to x^\wedge(M) = F_M(x)$, определяемое регулярным максимальным идеалом M, — *характером* алгебры A. Собственно, эти термины следовало бы применять к кольцам, подчиненных некоторым дальнейшим ограничениям; так, в некоторых случаях правильнее называть $x^\wedge$ *преобразованием Лапласа* для x ([31]). Бо́льшая часть настоящего параграфа будет посвящена известным примерам, проливающим свет на эту терминологию. Однако мы начнем с простой предварительной теоремы о связи спектра элемента x со значениями, принимаемыми функцией $x^\wedge$.

Теорема. *Множество значений функции $x^\wedge$ совпадает либо со всем спектром элемента x, либо со спектром, из которого удалено значение* 0. *Если $x^\wedge$ не принимает значения* 1, *то* $\frac{x^\wedge}{1-x^\wedge} \in A^\wedge$. *Если A содержит единицу и $x^\wedge$ не принимает значения* 0, *то* $\frac{1}{x^\wedge} \in A^\wedge$.

Доказательство. $\lambda \neq 0$ принадлежит спектру элемента x тогда и только тогда, когда $\frac{x}{\lambda}$ есть единица по модулю некоторого максимального идеала M, т. е. тогда и только тогда, когда $F_M\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1$, или $x^\wedge(M) = F_M(x) = \lambda$, чем первое утверждение теоремы доказано. (Если $F_M(x) = 0$, то $x \in M$ и 0 принадлежит спектру x.) Если спектр x не содержит единицы, то, в силу теоремы 21D, x обладает дополнительным элементом y, и из равенства $x + y - xy = 0$ следует, что $y^\wedge = \frac{x^\wedge}{x^\wedge - 1} \in A^\wedge$. Аналогично, последнее утверждение представляет собой перевод теоремы 21A. Оба эти утверждения будут следовать также из общей теоремы об аналитических функциях от элементов алгебры, доказываемой в п. 24D.

23C. В качестве первого примера рассмотрим алгебру A бесконечных в обе стороны комплексных числовых последовательностей $a = \{a_n\}$ с $\|a\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ и свертыванием в качестве умножения:

$$(a * b)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{n-m} b_m,$$

т. е. пример 3а § 18. То, что определенная так A является банаховской алгеброй, будет вытекать из последующей общей теории (групповых алгебр) и легко также проверяется непосредственно. Алгебра A обладает единицей e, где $e_0=1$ и $e_n=0$ для всех $n\neq 0$. Пусть g — элемент из A такой, что $g_1=1$ и $g_n=0$ для всех $n\neq 1$. Он обладает обратным ($(g^{-1})_n=1$ при $n=-1$ и 0 при $n\neq -1$), и A есть просто алгебра бесконечных рядов $a=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g^n$ по степеням g с обычным формальным умножением рядов. Пусть M — произвольный максимальный идеал алгебры A и $\lambda=F_M(g)$. Тогда $|\lambda|\leqslant\|g\|=1$. Но $F_M(g^{-1})=\frac{1}{\lambda}$, так что аналогично $\left|\frac{1}{\lambda}\right|\leqslant\|g^{-1}\|=1$. Таким образом, $|\lambda|=1$ и $\lambda=e^{i\theta_M}$ с некоторым $\theta_M\in(-\pi,\ \pi]$. Тогда $F_M(g^n)=e^{in\theta_M}$ и $F_M(a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta_M}$ для любого $a\in A$. Обратно, любое $\theta\in(-\pi,\ \pi]$ порождает гомоморфное отображение F алгебры A на поле комплексных чисел, определяемое формулой $F(a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, и ядром этого отображения служит, конечно, максимальный идеал алгебры A. Таким образом, пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов может быть отождествлено с интервалом $(-\pi,\ \pi]$ и преобразованиями $a^\wedge$ служат просто непрерывные функции на $(-\pi,\ \pi]$, обладающие абсолютно сходящимся рядом Фурье. Если такая функция нигде не обращается в нуль, то, по предыдущей теореме, $\frac{1}{a^\wedge}$ также есть функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Мы получили известный результат Винера.

Заметим, что слабая топология на интервале $(-\pi,\ \pi]$, рассматриваемом как множество максимальных идеалов, совпадает с обычной топологией этого интервала (с отождествленными π и $-\pi$) ([32]). Действительно, $g^\wedge(\theta)=e^{i\theta}$ непрерывна в обычной топологии и отделяет точки, так что применима теорема 5G.

Пусть теперь A_0 — подмножество из A, образованное последовательностями a, все члены которых a_n с отрицательными номерами n равны нулю. Легко проверить, что A_0 замкнуто относительно свертывания и образует замкнутую подалгебру алгебры A. A_0 содержит образующий элемент g, но не содержит обратного g^{-1}, и проведенное выше рассуждение показывает, что гомоморфные отображения алгебры A_0 на поле комплексных чисел (а следовательно, и ее максимальные идеалы) порождаются комплексными числами из замкнутого единичного круга $|z| \leqslant 1$ по формуле $F_z(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Таким образом, пространство максимальных идеалов алгебры A_0 может быть отождествлено с замкнутым единичным кругом (спектром образующего элемента g), и функциональная алгебра $A_0^{\wedge}$ есть просто алгебра аналитических функций в открытом круге $|z| < 1$, ряд Тейлора которых абсолютно сходится на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Так как $g(z) \equiv z$ отделяет точки этого круга, то из теоремы 5G, как и в случае алгебры A, следует, что слабая топология на круге $|z| \leqslant 1$ совпадает с обычной.

Упомянутой выше теореме Винера соответствует здесь следующая

Теорема. *Если $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < 1$, имеющая ряд Тейлора, абсолютно сходящийся на круге $|z| \leqslant 1$, и не обращающаяся в нуль ни в какой точке последнего круга, то ряд Тейлора функции $\frac{1}{f}$ абсолютно сходится на круге $|z| \leqslant 1$.*

23D. В качестве третьего примера рассмотрим $A = L^1(-\infty, \infty)$ с $\|f\| = \|f\|_1$ и, как и прежде, свертыванием в качестве умножения:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

(пример 3б § 18). Пусть F — гомоморфное отображение этой алгебры A на поле комплексных чисел, удовлетворяющее условию $|F(f)| \leqslant \|f\|_1$. Так как F есть, в частности, линейный функционал на L^1, то существует функция $\alpha \in L^{\infty}$ с $\|\alpha\|_{\infty} \leqslant 1$ такая, что $F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{\alpha(x)}\, dx$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(y)\,\overline{\alpha(x+y)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,\overline{\alpha(x)}\,dx\,dy =$$

$$= F(f*g) = F(f)\cdot F(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\alpha(x)}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\overline{\alpha(y)}\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(y)\,\overline{\alpha(x)}\,\overline{\alpha(y)}\,dx\,dy.$$

Таким образом, $\alpha(x+y)=\alpha(x)\alpha(y)$ почти для всех (x, y), и, поскольку (как будет вытекать из последующей теории) $\alpha(x)$ можно считать непрерывной, отсюда следует, что это равенство справедливо для всех значений x и y. Но единственными непрерывными решениями этого функционального уравнения служат функции вида e^{ax}, и так как $|e^{ax}|\leqslant 1$, то a должно быть чисто мнимым, $a=iy$, и $\alpha(x)=e^{iyx}$. Обращение проведенного рассуждения показывает, что каждая функция $\alpha(x)=e^{iyx}$ определяет указанным образом гомоморфное отображение алгебры A на поле комплексных чисел. Таким образом, регулярные максимальные идеалы алгебры A оказываются в естественном взаимно однозначном соответствии с точками $y \in (-\infty, \infty)$, а $f^\wedge$ — обычным преобразованием Фурье:

$$f^\wedge(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iyx}dx.$$

Но, как легко видеть, эти функции непрерывны в обычной топологии прямой $(-\infty, \infty)$; поэтому из теоремы 5G снова следует, что слабая и обычная топология на $(-\infty, \infty)$ совпадают.

Пусть теперь $\omega(x)$ — неотрицательная весовая функция на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющая для всех значений x и y неравенству

$$\omega(x+y)\leqslant\omega(x)\,\omega(y),$$

и пусть A — подмножество функций из $L^1(-\infty, \infty)$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\omega(x)\,dx<\infty$, с этим интегралом в качестве нормы

$f\|$ и со свертыванием в качестве умножения. Читатель легко проверит, что неравенство $\omega(x+y) \leqslant \omega(x)\omega(y)$ гарантирует замкнутость A относительно этого умножения. Как и выше, для каждого не повышающего норму гомоморфного отображения F алгебры A на поле комплексных чисел существует функция $\alpha \in L^\infty$ с $\|\alpha\|_\infty \leqslant 1$ такая, что $F(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\alpha(x)}\omega(x)\,dx$, что приводит теперь к функциональному уравнению

$$\alpha(x+y)\omega(x+y) = \alpha(x)\omega(x)\alpha(y)\omega(y).$$

Поэтому $\alpha(x)\omega(x) = e^{-sx}e^{itx}$, где s таково, что $e^{-sx} \leqslant \omega(x)$. Обратно, каждое комплексное число $s+it$, где s таково, что $e^{-sx} \leqslant \omega(x)$ для всех x, порождает регулярный максимальный идеал. В качестве примера возьмем $\omega(x) = e^{a|x|}$ с некоторым $a > 0$. Тогда регулярные максимальные идеалы алгебры A будут находиться во взаимно однозначном соответствии с точками полосы $|s| \leqslant a$ плоскости $s+it$. Функция

$$f^\wedge(s+it) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-(s+it)x}dx$$

будет двусторонним преобразованием Лапласа, аналитическим внутри указанной полосы. То, что обычная топология на этой полосе совпадает с топологией последней как множества максимальных идеалов, следует, как и в предыдущих примерах, из теоремы 5G.

23E. Добавим еще пример, являющийся обобщением примера, рассмотренного в п. 23C. Пусть A — произвольная банаховская алгебра с единицей и одной образующей g. Существует ли в этой алгебре g^{-1} или нет — в обоих случаях пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ находится во взаимно однозначном соответствии со спектром S элемента g. Действительно, рассмотрим естественное отображение $M \to g^\wedge(M)$ пространства $\mathfrak{M}$ на S. Так как g порождает A, то равенство $g^\wedge(M_1) = g^\wedge(M_2)$ означает, что $x^\wedge(M_1) = x^\wedge(M_2)$ для всех $x \in A$ и потому $M_1 = M_2$. Таким образом, это отображение взаимно однозначно. Как и раньше, $g^\wedge$ отождествляется с функцией $f(z) \equiv z$, и слабая топология; которую $g^\wedge$ индуцирует на S, совпадает с топологией S как подмножества комплексной плоскости. Тем самым $A^\wedge$ можно рассматривать как некоторую алгебру непрерывных комплексных функций на S. Если S содержит внутренние точки, то функция $x^\wedge$ аналитична на $\operatorname{int} S$ для каждого $x \in A$, поскольку $g^\wedge$ отождествлена с комплексным переменным z и потому $x^\wedge$ есть предел равномёрно сходящейся последовательности полиномов от z.

§ 24. Некоторые основные общие теоремы

В этом параграфе собраны основные рабочие теоремы коммутативной теории. Прежде всего устанавливается формула для вычисления $\|x^\wedge\|_\infty$ через $\|x\|$, затем теорема о том, что в случае полупростой алгебры A, обратно, топология A как нормированного пространства определяется функциональной алгеброй $A^\wedge$. Третьей основной теоремой является упомянутая выше теорема о том, что алгебра $A^\wedge$ замкнута относительно операции взятия аналитических функций. Наконец, мы доказываем существование и рассматриваем свойства *границы* пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов.

24А. Формулу для вычисления $\|x^\wedge\|_\infty$ можно вывести в общей некоммутативной форме, если заменить $\|x^\wedge\|_\infty$ *спектральной нормой* $\|x\|_{sp}$, определяемой для элемента x любой комплексной алгебры как $\sup\{|\lambda|: \lambda \in \text{спектру } x\}$. Формула для коммутативного случая следует из равенства $\|x^\wedge\|_\infty = \|x\|_{sp}$, доказанного в п. 23В.

Теорема. *Во всякой банаховской алгебре*

$$\|x\|_{sp} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что если μ принадлежит спектру элемента y, то $|\mu| \leqslant \|y\|$, ибо если $|\mu| > \|y\|$, то $\left\|\frac{y}{\mu}\right\| < 1$ и $\frac{y}{\mu}$, в силу теоремы 22А, обладает дополнительным элементом, в противоречие с теоремой 21В. Таким образом, $\|y\|_{sp} \leqslant \|y\|$. Далее, как мы знаем (п. 21Е), если λ принадлежит спектру элемента x, то λ^n принадлежит спектру элемента x^n. Следовательно, $\|x\|_{sp} \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|_{sp}}$. Комбинируя эти неравенства, получаем, что $\|x\|_{\text{sp}} \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|}$ для каждого n и, значит, $\|x\|_{\text{sp}} \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Остается показать, что $\|x\|_{\text{sp}} \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. По определению спектра и спектральной нормы, $(\lambda x)'$ существует для $|\lambda| < \dfrac{1}{\|x\|_{\text{sp}}}$. Пусть F — любой линейный функционал на A. Из замечания в конце п. 22C следует, что в указанном круге $f(\lambda) = F((\lambda x)')$ есть аналитическая функция от λ и, значит, ее ряд Тейлора в этом круге сходится. Для вычисления его коэффициентов вспомним, что, для малых значений λ, $(\lambda x)' = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda x)^n$, откуда

$$f(\lambda) = F((\lambda x)') = -\sum_{n=1}^{\infty} F(x^n)\,\lambda^n.$$

Отсюда, в частности, следует, что $|F(x^n)\,\lambda^n| = |F(\lambda^n x^n)| \to 0$ при $n \to \infty$ для $|\lambda| < \dfrac{1}{\|x\|_{\text{sp}}}$. Так как это верно для любого $F \in A^*$, то из доказанной раньше основной теоремы теории банаховских пространств (п. 8F, следствие) вытекает, что последовательность норм $\|\lambda^n x^n\|$ ограничена сверху некоторым числом B. Тогда $\sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant \leqslant \dfrac{\sqrt[n]{B}}{|\lambda|}$ и $\varlimsup \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}$. Так как λ может быть любым числом, удовлетворяющим неравенству $|\lambda| < \dfrac{1}{\|x\|_{\text{sp}}}$, то заключаем, что $\varlimsup \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant \|x\|_{\text{sp}}$, и теорема доказана.

Следствие. *Во всякой коммутативной банаховской алгебре* $\|x^\wedge\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

24B. *Радикал* коммутативной алгебры есть пересечение всех ее регулярных максимальных идеалов; если радикал содержит только нуль, то алгебру называют *полупростой*. Элемент x коммутативной банаховской алгебры A принадлежит ее радикалу тогда и только тогда, когда $x^\wedge(M) = 0$ для всех M, т. е. когда $\|x^\wedge\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$. Таким образом, для полупростоты A необходимо и достаточно, чтобы $x^\wedge \equiv 0 \Rightarrow x = 0$, т. е. чтобы отображение $x \to x^\wedge$ алгебры A на $A^\wedge$ было алгебраическим изоморфизмом. Тогда возникает естественный вопрос, определяется ли топология в A функциональной алгеброй $A^\wedge$, или, что то же, алгебраическими свойствами A. Что это действительно так, вовсе не очевидно, как было в случае алгебры $C(S)$, ибо теперь $\|x^\wedge\|_\infty$ вообще меньше, чем $\|x\|$, и обратное отображение вообще не непрерывно по норме. Тем не менее ответ оказывается утвердительным, причем он опирается непосредственно на теорему о замкнутом графике. Мы установим сперва более общий результат.

Теорема. *Пусть T — алгебраически гомоморфное отображение коммутативной банаховской алгебры A_1 на плотное подмножество коммутативной банаховской алгебры A_2. Тогда:*

(1) *Сопряженное отображение T^* порождает гомеоморфное отображение пространства $\mathfrak{M}_2$ максимальных идеалов алгебры A_2 на замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{M}_1$ максимальных идеалов алгебры A_1.*

(2) *Если алгебра A_2 полупростая, то отображение T непрерывно.*

Доказательство. Поскольку мы не предположили непрерывности отображения T, мы не можем считать сопряженное отображение T^* определенным в обычном смысле. Однако, если α — гомоморфное отображение алгебры A_2 на поле комплексных чисел, то $\alpha(T(x))$ есть гомоморфное отображение алгебры A_1 в это поле, и так как α автоматически непрерывно (теорема 23A), а $T(A_1)$ плотно в A_2, то заключаем, что $\alpha(T(x))$ есть отображение на все поле. Естественно принять его по определению за $T^*\alpha$. Ясно, что если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $T^*\alpha_1 \neq T^*\alpha_2$, так что T^* есть взаимно однозначное отображение множества Δ_2 гомоморфных отображений алгебры A_2 на поле комплексных чисел на часть аналогичного множества Δ_1. Так как $T(A_1)$ плотно в A_2, то топология на Δ_2 есть слабая топология, определенная алгеброй функций $[T(x)]^\wedge$. Но

$$[T(x)]^\wedge(\alpha) = \alpha(Tx) = (T^*\alpha)(x) = x^\wedge(T^*\alpha),$$

и так как функции $x^\wedge$ определяют топологию на Δ_1, отображение T^* гомеоморфно.

Пусть теперь β_0 — произвольный гомоморфизм из Δ_1, входящий в замыкание множества $T^*(\Delta_2)$. Иначе говоря, для любых $\varepsilon > 0$ и $x_1, \ldots, x_n \in A_1$ существует $\alpha \in \Delta_2$ такое, что $|\beta_0(x_i) - \alpha(Tx_i)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда, во-первых, следует, что если $T(x_1) = T(x_2)$, то $\beta_0(x_1) = \beta_0(x_2)$, так что функционал α_0, определенный на $T(A_1)$ формулой $\alpha_0(T(x)) = \beta_0(x)$, однозначен, и, во-вторых, что $|\alpha_0(y)| \leqslant \|y\|$. Таким образом, α_0 есть ограниченное гомоморфное отображение алгебры $T(A_1)$ на поле комплексных чисел и может быть однозначно продолжено на всю алгебру A_2. Мы доказали, что если β_0 принадлежит замыканию множества $T^*(\Delta_2)$, то существует $\alpha_0 \in \Delta_2$ такое, что $\beta_0(x) \equiv \alpha_0(Tx)$, т. е. $\beta_0 = T^*\alpha_0$. Таким образом, $T^*(\Delta_2)$ замкнуто в Δ_1, и первая часть теоремы полностью доказана.

Если $x_n \to x$ и $T(x_n) \to y$, то $x_n^\wedge$ и $[T(x_n)]^\wedge$ равномерно стремятся соответственно к $x^\wedge$ и $y^\wedge$, и так как $z^\wedge(T^*(\alpha)) = (Tz)^\wedge(\alpha)$ для всех $z \in A_1$, то мы заключаем, что $x^\wedge(T^*(\alpha)) \equiv y^\wedge(\alpha)$, т. е. что $(Tx)^\wedge = y^\wedge$. Если алгебра A_2 полупростая, то отсюда $y = Tx$, и тем самым график отображения T замкнут. Из теоремы о замкнутом графике (п. 7G, следствие) вытекает тогда, что T непрерывно, чем доказана и вторая часть теоремы.

Следствие. *Пусть A — коммутативная комплексная алгебра, никакой ненулевой элемент которой не переводится всеми гомоморфными отображениями ее в поле комплексных чисел в нуль. Тогда существует (с точностью до эквивалентности) не более одной нормы, в которой A является банаховской алгеброй.*

Доказательство. Если имеются две такие нормы, то, поскольку алгебра A в каждой из них полупростая, тождественное отображение A на себя, в силу утверждения (2) теоремы, непрерывно в обе стороны, т. е. эти нормы эквивалентны.

24C. Здесь естественно поставить вопрос, при каких условиях алгебра $A^\wedge$ равномерно замкнута, т. е. является банаховским пространством относительно равномерной нормы. В случае полупростой алгебры A ответ несложен.

Теорема. *Для того, чтобы алгебра A была полупростой, а алгебра $A^\wedge$ — равномерно замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная постоянная K такая, что*

$\|x\|^2 \leqslant K\|x^2\|$ *для каждого* $x \in A$. *Отображение* $x \to x^\wedge$ *устанавливает тогда гомеоморфизм* A *и* $A^\wedge$.

Доказательство. Если алгебра A полупростая, то отображение $x \to x^\wedge$ есть алгебраический изоморфизм, и если множество значений его $A^\wedge$ равномерно замкнуто, то обратное отображение, в силу теоремы о замкнутом графике (7G), непрерывно. Таким образом, существует постоянная K такая, что $\|x\| \leqslant K\|x^\wedge\|_\infty$. Тогда

$$\|x\|^2 \leqslant K^2\|x^\wedge\|_\infty^2 = K^2\|(x^2)^\wedge\|_\infty \leqslant K^2\|x^2\|.$$

Тем самым условие теоремы необходимо. Обратно, если такая постоянная существует, то

$$\|x\| \leqslant K^{\frac{1}{2}}\|x^2\|^{\frac{1}{2}} \leqslant K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\|x^4\|^{\frac{1}{4}} \leqslant \ldots \leqslant K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+2^{-n}}\|x^{2^n}\|^{2^{-n}},$$

и тем самым $\|x\| \leqslant K \lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = K\|x^\wedge\|_\infty$. Это показывает, что алгебра A полупростая и алгебра $A^\wedge$ полна относительно равномерной нормы, так что условие теоремы также достаточно.

Следствие. *Для того, чтобы алгебра* A *была изометрична алгебре* $A^\wedge$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\|x\|^2 = \|x^2\|$ *для всех* $x \in A$.

Доказательство. Случай $K = 1$ доказательства теоремы.

24D. Третья наша теорема устанавливает замкнутость алгебры $A^\wedge$ относительно операции взятия аналитических функций.

Теорема. *Пусть* x — *элемент алгебры* A, R — *область комплексной плоскости, содержащая его спектр (область значений функции* $x^\wedge$ *плюс* 0, *если* $\mathfrak{M}$ *не компактно),* Γ — *спрямляемая простая замкнутая кривая в* R, *содержащая внутри этот спектр, и* $F(z)$ — *функция, аналитическая в* R. *Тогда элемент*

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} F(\lambda)\, d\lambda$$

обладает тем свойством, что

$$y^\wedge(M) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\lambda)}{\lambda - x^\wedge(M)}\, d\lambda = F(x^\wedge(M))$$

для каждого регулярного максимального идеала M. Таким образом, функциональная алгебра $A^\wedge$ замкнута относительно операции взятия аналитических функций.

Доказательство. Предположим на время, что A содержит единицу e. Так как на Γ нет точек спектра элемента x, то, в силу теоремы 22B, $(\lambda e - x)^{-1}$ существует и является непрерывной функцией от λ. Таким образом, подинтегральное выражение $F(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}$ на компактном множестве Γ непрерывно, а значит, и равномерно непрерывно. Классическое доказательство существования интеграла Римана — Стильтьеса, проведенное без взяких изменений, показывает тогда, что элементы

$$y_\Delta = \sum F(\lambda_i)(\lambda_i e - x)^{-1} \Delta\lambda_i$$

сходятся по норме в A к некоторому пределу, и интеграл y определяется как этот предел. Так как отображение $x \to x^\wedge$ не повышает норму, то функция

$$y_\Delta^\wedge(M) = \sum \frac{F(\lambda_i)}{\lambda_i e - x^\wedge(M)} \Delta\lambda_i$$

по меньшей мере столь же быстро сходится по равномерной норме к $y^\wedge(M)$. Но предел правой части для каждого M есть обыкновенный комплексный интеграл Римана — Стильтьеса, и теорема доказана.

В случае алгебры $A^\wedge$ функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, эта теорема была установлена Винером ([33]) как обобщение его результата о существовании обратных элементов, упомянутого в конце п. 23C.

Преобразуем теперь формулу теоремы так, чтобы заменить обратный элемент дополнительным. Прежде всего,

$$(\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \left(\frac{x}{\lambda}\right)'\right) = \frac{1}{\lambda}e - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)'.$$

Отсюда

$$y = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda\right)e - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)' d\lambda.$$

Если A не содержит единицы, то мы не можем писать первый член, и потому в общем случае определяем y формулой

$$y = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)' d\lambda.$$

Существование y доказывается так же, как в предыдущем случае, с тем отличием, что обратный элемент заменяется теперь дополнительным. Вспоминая, что $x'^{\wedge}(M) = \frac{x^{\wedge}(M)}{x^{\wedge}(M)-1} = 1 + \frac{1}{x^{\wedge}(M)-1}$, мы видим, что

$$y^{\wedge}(M) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(\lambda)}{\lambda}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(\lambda)}{\lambda - x^{\wedge}(M)}d\lambda.$$

Первый интеграл здесь пропадает, и получается требуемая формула $y^{\wedge}(M) = F(x^{\wedge}(M))$, если либо (а) $F(0) = 0$, либо (б) Γ не содержит внутри точку $z = 0$. Но последнего не может случиться, если $\mathfrak{M}$ не компактно, ибо тогда спектр элемента x автоматически содержит 0 ($x^{\wedge}$ обращается в нуль на бесконечности). Если же $\mathfrak{M}$ компактно и существует элемент x такой, что $x^{\wedge}$ нигде не обращается в нуль, то для него условие (б) выполняется. Взяв в этом случае $F \equiv 1$, мы получим $y^{\wedge} \equiv 1$, т. е. $A^{\wedge}$ будет содержать единицу, а потому, если алгебра A полупростая, и она будет содержать единицу.

Следствие. *Полупростая алгебра A с компактным пространством $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов, содержащая элемент x, для которого $x^{\wedge}$ нигде не обращается в нуль, содержит единицу.*

Замечание. Если спектр элемента x не связен, контур Γ может состоять из нескольких жордановых кривых. Мы должны поэтому уточнить выбор области R: за R следует взять область со связным дополнением и, значит, с односвязными компонентами.

24E. Последняя теорема, относящаяся к понятию границы, принадлежит Шилову [17].

Теорема. *Пусть A — алгебра непрерывных комплексных функций на локально компактном пространстве S, обращающихся в нуль на бесконечности, отделяющая точки этого пространства. Тогда существует однозначно определенное замкнутое подмножество $F_0 \subset S$, называемое границей пространства S относительно алгебры A, являющееся наименьшим замкнутым множеством, на котором все функции $|f|$, $f \in A$, достигают своего наибольшего значения.*

Доказательство. Предположение, что A отделяет точки, включено для того, чтобы каждая точка отделялась от бесконечно удаленной, т. е. чтобы функции из A не обращались одновременно в нуль ни в одной точке пространства S. Ранее мы доказали, что при этих условиях слабая топология, индуцируемая на S функциями из A, совпадает с заданной топологией пространства S (теорема 5G).

Перейдем к определению границы F_0. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех замкнутых подмножеств $F \subset S$, на каждом из которых каждая функция $|f|$, $f \in A$, достигает своего наибольшего значения. Пусть $\mathfrak{F}_0$ — максимальное линейно упорядоченное подсемейство из $\mathfrak{F}$ и $F_0 = \bigcap \{F: F \in \mathfrak{F}_0\}$. Тогда $F_0 \in \mathfrak{F}$, ибо для каждой ненулевой функции $f \in A$ множество, на котором $|f|$ принимает свое наибольшее значение, компактно и пересекает каждое $F \in \mathfrak{F}_0$, а потому и F_0. Таким образом, F_0 служит нижней границей для $\mathfrak{F}_0$, а потому является минимальным элементом в $\mathfrak{F}$.

Единственность F_0 мы установим, показав, что каждое минимальное F_1 содержится в F_0. Допустим противное. Тогда существует точка $p_1 \in F_1 - F_0$. Пусть N — окрестность точки p_1, не пересекающая F_0. Можно считать, что

$$N = \{p: |f_i(p) - f_i(p_1)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

где ε — какое-то положительное число и $f_1, \ldots, f_n$ — какие-то элементы из A. При этом можно предполагать, что $\max\limits_{p \in S} |f_i - c_i| \leqslant 1$, где $c_i = f_i(p_1)$. Так как F_1 минимально, то существует $f_0 \in A$, для которой $|f_0|$ не достигает своего наибольшего значения на $F_1 - N$. Заменив f_0 достаточно высокой степенью f_0^n, можно добиться, чтобы $\max |f_0| = 1$ и $|f_0| < \varepsilon$ на $F_1 - N$. Тогда $|f_i f_0 - c_i f_0| < \varepsilon$ на всем F_1, а значит, и всюду. Поэтому, выбрав $p_0 \in F_0$ так, чтобы $|f_0(p_0)| = 1$, будем иметь $|f_i(p_0) - c_i| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, и, значит, $p_0 \in N$. Но тогда $p_0 \in F_0 \cap N$, в противоречие с предположением, что $N \cap F_0 = \varnothing$. Поэтому $F_1 \subset F_0$ и, значит, $F_1 = F_0$, т. е. F_0 — единственный минимальный элемент в $\mathfrak{F}$.

Замечание. Основание для наименования этого минимального множества границей пространства S можно усмотреть из второго примера п. 23C. Функциональной алгеброй $A_0^\wedge$ была там совокупность всех аналитических функций в круге $|z| < 1$, ряд Тейлора которых абсолютно сходится в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, а пространством $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов — замкнутый круг $|z| \leqslant 1$. Из принципа максимума теории функций следует, что границей $\mathfrak{M}$ относительно $A_0^\wedge$ служит обычная граница $|z| = 1$.

С л е д с т в и е. *Если A — регулярная функциональная алгебра, то $F = S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $F \neq S$ и $p \in S - F$, то по условию регулярности (п. 19F) существует функция $f \in A$ такая, что $f = 0$ на F и $f(p) \neq 0$. Но это противоречит определению границы, так что F должно совпадать со всем S.

С л е д с т в и е. *Если A — самосопряженная функциональная алгебра, то $F = S$.*

Доказательство будет дано в п. 26B.

Глава V

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ БАНАХОВСКИЕ АЛГЕБРЫ

В этой главе будет развита теория некоторых классов банаховских алгебр, с которыми мы встретимся при изучении групповых алгебр локально компактных коммутативных групп и компактных групп. В § 25 рассматриваются регулярные коммутативные банаховские алгебры, представляющие собой естественное поле действия тауберовой теоремы Винера и ее обобщений. В § 26 изучаются банаховские алгебры с инволюцией, являющиеся естественной областью исследования положительной определенности. Наконец, в § 27 излагается теория гильбертовых H^*-алгебр Амброзе, включающих как частный случай групповую L^2-алгебру компактной группы.

§ 25. Регулярные коммутативные банаховские алгебры

Этот параграф посвящен рассмотрению той части теории идеалов коммутативной банаховской алгебры, которая связана с тауберовой теоремой Винера и ее обобщениями. Здесь ставится следующий общий вопрос: дана коммутативная банаховская алгебра A, обладающая тем свойством, что каждое (слабо) замкнутое множество ее регулярных максимальных идеалов есть оболочка своего ядра; когда замкнутый идеал в A является ядром своей оболочки? Тауберова теорема Винера утверждает, что это верно для идеалов с пустой оболочкой, в предположении, что алгебра удовлетворяет некоторому дополнительному условию. Вопросы этого рода трудны и требуют глубоких рассмотрений, и положение в общем случае до конца еще не выяснено.

25A. Банаховскую алгебру A называют регулярной, если она коммутативна и ее гельфандовское представление $A^\wedge$ есть регулярная функциональная алгебра. По определению это означает, что слабая топология на $\mathfrak{M}$, определенная алгеброй $A^\wedge$, совпадает с оболочечно-ядерной топологией, что (согласно п. 19F) равносильно существованию для каждого (слабо) замкнутого множества $C \subset \mathfrak{M}$ и каждой точки $M_0 \notin C$ функции $f \in A^\wedge$ такой, что $f \equiv 0$ на C и $f(M_0) \neq 0$. Нижеследующая лемма показывает, что представляющая алгебра регулярной банаховской алгебры обладает «локальными единицами», и дальнейшие результаты этого параграфа верны для любой регулярной замкнутой относительно обращения функциональной алгебры, обладающей этим свойством существования «локальных единиц».

Лемма. *Для каждого регулярного максимального идеала M_0 регулярной банаховской алгебры A существует элемент $x \in A$ такой, что $x^\wedge \equiv 1$ в некоторой окрестности точки M_0.*

Доказательство. Выберем $x \in A$ так, чтобы $x^\wedge(M_0) \neq 0$, и компактную окрестность C точки M_0, на которой $x^\wedge$ нигде не обращается в нуль. Тогда, в силу предположенной регулярности алгебры A, множество C замкнуто в оболочечно-ядерной топологии и, как мы знаем ([34]), функции из $A^\wedge$, рассматриваемые на C, образуют представляющую алгебру для $A/k(C)$. Так как эта алгебра содержит функцию (индуцируемую функцией $x^\wedge$), нигде не обращающуюся в нуль, то из теоремы 24D об аналитических функциях следует, что она содержит постоянную 1. Но это означает, что $A^\wedge$ содержит функцию $x_0^\wedge$, тождественно равную 1 на C, что и требовалось доказать.

25B. Начиная отсюда, мы будем понимать под A (если не сделано специальной оговорки) любую замкнутую относительно обращения алгебру непрерывных функций на локально компактном хаусдорфовом пространстве S, обращающихся в нуль на бесконечности, такую, что $S = \Delta$, регулярную и обладающую свойством, указанным в предыдущей лемме.

Лемма. *Для каждого компактного подмножества $C \subset S$ существует функция $f \in A$, тождественно равная 1 на C.*

Доказательство. Если $f_1 = 1$ на B_1 и $f_2 = 1$ на B_2, то, очевидно, $f_1 + f_2 - f_1 f_2 = 1$ на $B_1 \cup B_2$. Этот шаг аналогичен известному алгебраическому приему продолжения идемпотентов. В силу компактности C и предыдущей леммы, существует конечное число открытых множеств B_i, покрывающее C, и функций

$f_i \in A$ таких, что $f_i = 1$ на B_i. Последовательно комбинируя эти функции указанным только что способом, мы через конечное число шагов придем к функции f, равной 1 на $\bigcup B_i$.

Следствие. *Полупростая регулярная банаховская алгебра A с компактным пространством максимальных идеалов обладает единицей.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{M}$ компактно, то из леммы следует, что представляющая алгебра $A^\wedge$ содержит постоянную 1; таким образом, $A^\wedge$ обладает единицей. Но полупростота алгебры A означает, по определению, что естественное гомоморфное отображение $x \to x^\wedge$ алгебры A на $A^\wedge$ есть изоморфизм; следовательно, и A обладает единицей.

25C. Лемма. *Для каждого замкнутого $F \subset S$ и компактного $C \subset S$, не пересекающегося с F, существует $f \in A$ такая, что $f = 0$ на F и $f = 1$ на C. Более того, каждый идеал, имеющий F своей оболочкой, содержит такую функцию f.*

Доказательство. В силу предыдущей леммы, это предложение является точной копией первой леммы п. 20F. Однако, ввиду важности результата, мы дадим здесь несколько иное доказательство. Пусть A_C — функциональная алгебра, образованная функциями из A, рассматриваемыми на C. A_C изоморфна фактор-алгебре $A/k(C)$. По предыдущей лемме, A_C содержит единицу, и так как C замкнуто в оболочечно-ядерной топологии, то максимальные идеалы алгебры A_C исчерпываются порожденными точками множества C. Пусть теперь I — произвольный идеал, имеющий F своей оболочкой, и I_C — идеал алгебры A_C, образованный функциями из I, рассматриваемыми на C. Функции из I не могут одновременно обращаться в нуль ни в одной точке множества C, поскольку такая точка должна была бы принадлежать тогда к оболочке идеала I, т. е. к F. Таким образом, I_C не содержится ни в каком максимальном идеале алгебры A_C и, следовательно, $I_C = A_C$. В частности, I_C содержит единицу алгебры A_C, т. е. I содержит функцию, которая на C тождественно равна 1.

25D. *Носителем* функции f называется замыкание множества тех точек, в которых $f \neq 0$.

Теорема. *Для каждого замкнутого множества $F \subset S$ функции из A с компактными носителями, не пересекающимися с F, образуют идеал $j(F)$, имеющий F своей оболочкой и содержащийся во всяком другом идеале с оболочкой F.*

Доказательство. Совокупность всех функций с компактными носителями, не пересекающимися с F, очевидно, образует идеал $j(F)$, оболочка которого содержит F. Каждая точка $p \notin F$ обладает окрестностью N с компактным замыканием, не пересекающимся с F. По условию регулярности, существует функция $f \in A$ такая, что $f(p) \neq 0$ и $f = 0$ на N'. Это означает, что f обладает компактным носителем ($\subset \overline{N}$), не пересекающимся с F, т. е. $f \in j(F)$, и, следовательно, $p \notin h(j(F))$. Таким образом, из $p \notin F$ вытекает $p \notin h(j(F))$, и $h(j(F)) = F$.

Пусть теперь I — произвольный идеал, имеющий I своей оболочкой, и f — любая функция из $j(F)$, с компактным носителем C, не пересекающимся с F. Тогда, по предыдущей лемме, I содержит функцию e, тождественно равную 1 на C, так что $f = fe \in I$. Тем самым $j(F) \subset I$, и теорема полностью доказана.

В качестве следствия этой теоремы мы выведем тауберову теорему Винера, однако, в форме, которая читателю может показаться весьма совершенной маскировкой. Связь с обычной формой теоремы Винера будет рассмотрена в п. 37A.

Следствие. *Пусть A — регулярная полупростая банаховская алгебра, обладающая тем свойством, что совокупность элементов x, для которых $x^\wedge$ есть функция с компактным носителем, плотна в A. Тогда каждый собственный замкнутый идеал содержится в регулярном максимальном идеале.*

Доказательство. Пусть I — замкнутый идеал; предположим, что он не содержится ни в каком регулярном максимальном идеале. Нам нужно показать, что $I = A$. Но так как I имеет своей оболочкой пустое множество, то он содержит идеал всех элементов $x \in A$, для которых $x^\wedge$ обладает компактным носителем. А так как последний идеал, по предположению, плотен в A, то $I = A$, что и требовалось доказать.

25E. Говорят, что *функция f локально принадлежит идеалу I в точке p*, если существует функция $g \in I$, совпадающая с f в окрестности точки p. Если p — бесконечно удаленная точка, то это означает, что $g = f$ вне некоторого компактного множества.

Теорема. *Если f локально принадлежит идеалу I во всех точках пространства S и в бесконечно удаленной точке, то $f \in I$.*

Доказательство. В силу предположения о бесконечно удаленной точке, мы можем без ограничения общности считать, что S компактно, а A содержит постоянные. Тогда существуют конечное семейство открытых множеств U_i, покрывающее S, и функции $f_i \in I$ такие, что $f = f_i$ на U_i. В таком случае можно найти открытые множества V_i, покрывающие S, такие, что $\overline{V_i} \subset U_i$, и теорема вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если $f_i \in I$ и $f = f_i$ на U_i, $i = 1, 2$, то для каждого компактного множества $C \subset U_2$ существует функция $g \in I$ такая, что $f = g$ на $U_1 \cup C$.*

Доказательство. Пусть $e \in A$ такова, что $e = 1$ на C и $e = 0$ на U_2'. Положим $g = f_2 e + f_1(1 - e)$. Тогда $g = f_2 = f$ на C, $g = f_1 = f$ на $U_1 - U_2$ и $g = fe + f(1 - e) = f$ на $U_1 \cap \overline{U_2}$. В соединении эти равенства показывают, что $g = f$ на $U_1 \cup C$, что и утверждалось.

При применении доказанной теоремы оказывается полезной следующая

Лемма. *Элемент f локально принадлежит идеалу I во всякой точке, не содержащейся в $h(I)$, и во всякой точке, лежащей внутри $h(f)$.*

Доказательство. Если $p \notin h(I)$, то, в силу леммы 25С, существует функция $e \in I$, равная 1 в окрестности $N(p)$. Тогда $ef \in I$ и $f = ef$ в $N(p)$, так что f локально принадлежит I в p. Второе утверждение леммы следует из того, что I содержит 0.

25F. Теорема предыдущего пункта приводит к наиболее сильной известной сейчас теореме, гарантирующей принадлежность элемента x коммутативной банаховской алгебры A к идеалу I. Будем говорить, что алгебра A удовлетворяет условию D (видоизмененному условию Диткина), если для каждого $x \in M \in \mathfrak{M}$ существует последовательность $x_n \in A$ такая, что $\hat{x_n} = 0$ в окрестности V_n точки M и $xx_n \to x$. Если $\mathfrak{M}$ не компактно, то требуется, чтобы это условие удовлетворялось также в бесконечно удаленной точке.

Теорема. *Пусть A — регулярная полупростая банаховская алгебра, удовлетворяющая условию D, и I — замкнутый идеал в A. Тогда I содержит каждый элемент $x \in k(h(I))$, обладающий тем свойством, что пересечение границы $h(x)$ с $h(I)$ не содержит непустого совершенного множества.*

Доказательство. Покажем, что множество тех точек, в которых $x^\wedge$ не принадлежит локально $I^\wedge$, совершенно (в одноточечном компактном расширении $\mathfrak{M}_\infty$ пространства $\mathfrak{M}$). Очевидно, оно замкнуто. Допустим, что оно имеет изолированную точку M_0, и пусть U — окрестность точки M_0 такая, что $x^\wedge$ локально принадлежит $I^\wedge$ в каждой точке из $\overline{U}$, за исключением M_0. Согласно условию D, существует последовательность y_n такая, что $y_n x \to x$ и каждая из функций $y_n^\wedge$ равна нулю в некоторой окрестности точки M_0. Пусть $e \in A$ таково, что $e^\wedge = 0$ в U' и $e^\wedge = 1$ в окрестности $V \subset U$ точки M_0. Тогда $y_n^\wedge x^\wedge e^\wedge$ локально принадлежит $I^\wedge$ в каждой точке пространства $\mathfrak{M}_\infty$ и потому, в силу предыдущей теоремы, содержится в $I^\wedge$. Так как идеал I замкнут и $y_n x \to x$, то заключаем, что $xe \in I$ и потому $x^\wedge$ локально принадлежит $I^\wedge$ в точке M_0 (ибо $xe = x$ в V). Таким образом, множество тех точек, в которых $x^\wedge$ не принадлежит локально $I^\wedge$, совершенно. Так как, по второй лемме п. 25E и предположению, что $h(I) \subset h(x)$, это множество содержится и в $h(I)$ и в границе $h(x)$, то оно, в силу предположения теоремы, должно быть пустым. Таким образом, $x^\wedge$ локально принадлежит $I^\wedge$ во всех точках, и, в силу теоремы 25E, $x \in I$.

В п. 37C мы увидим, что групповая алгебра локально компактной коммутативной группы удовлетворяет условию D, и это даст нам сильнейшую известную теорему тауберова типа для общих групп.

§ 26. Банаховские алгебры с инволюцией

Напомним читателю, что инволюцией в алгебре A называют отображение $x \to x^*$ этой алгебры на себя, обладающее по крайней мере первыми четырьмя из следующих свойств:

$$x^{**} = x, \tag{1}$$

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \tag{2}$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, \tag{3}$$

$$(xy)^* = y^* x^*, \tag{4}$$

$$\|xx^*\| = \|x\|^2, \tag{5}$$

$-xx^*$ имеет дополнительный элемент ($e + xx^*$ имеет обратный) для каждого x. (6)

Инволюцией обладают многие важные банаховские алгебры. Так, во всех примерах § 18, кроме 2а и 4, имеется естественная инволюция ([35]). В функциональных алгебрах 1 и 5 инволюция определяется формулой $f^* = \bar{f}$ и свойства (1) — (6) непосредственно очевидны. В алгебре 2б всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве A^* есть оператор, сопряженный к A, и выполнение свойств (1) — (6) мы уже проверили в п. 11В. Групповые алгебры будут весьма подробно рассмотрены позже.

Существование инволюции необходимо для значительной части стандартной теории гармонического анализа, включая всю теорию положительной определенности. Мы начнем этот параграф с установления элементарных следствий, вытекающих из наличия инволюции, а затем докажем теорему представления для самосопряженных банаховских алгебр, спектральную теорему для ограниченного самосопряженного оператора, теорему Бохнера для положительно определенных функционалов и общую теорему Планшереля.

26А. Наше систематическое изложение в начальной части этого параграфа будет носить, быть может, слишком технический характер. Поэтому мы попытаемся несколько облегчить работу читателя, доказав в первую очередь и вне прочего контекста одну из простейших и наиболее важных теорем. Читатель сможет тогда при желании опустить пп. 26В — Е и перейти непосредственно к пунктам, имеющим более классическое содержание.

Теорема. *Пусть A — коммутативная банаховская алгебра с единицей и с инволюцией, обладающей свойствами* (1) — (5). *Тогда $A^\wedge$ есть алгебра $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов, а $x \to x^\wedge$ есть изометрическое отображение A на $C(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что если x — самосопряженный элемент ($x = x^*$), то функция $x^\wedge$ вещественна. Действительно, если бы $x^\wedge$ принимала мнимое значение $a + bi$ ($b \neq 0$), то $y^\wedge$ для $y = x + iBe$ принимала бы значение $a + i(b + B)$. Так как $y^* = x - iBe$, то мы имели бы

$$a^2 + b^2 + 2bB + B^2 \leqslant \|y^\wedge\|_\infty^2 \leqslant \|y\|^2 = \|yy^*\| = \\ = \|x^2 + B^2 e\| \leqslant \|x^2\| + B^2,$$

что невозможно, если выбрать B так, чтобы $2bB > \|x\|^2$. Этот вывод принадлежит Аренсу [2].

Элементы $x + x^*$ и $i(x - x^*)$ самосопряжены для любого x, и $x = \frac{1}{2}\{(x + x^*) - i[i(x - x^*)]\}$. Так как функции $x^\wedge$ отделяют точки пространства $\mathfrak{M}$, то вещественные функции из $A^\wedge$ образуют вещественную алгебру, отделяющую точки из $\mathfrak{M}$ и потому, в силу теоремы Стона — Вейерштрасса, плотную в $C^R(\mathfrak{M})$. Следовательно, $A^\wedge$ плотна в $C(\mathfrak{M})$. Приведенное выше выражение для x через самосопряженные элементы показывает также, что $x^{*\wedge} = \overline{x^\wedge}$.

Докажем, наконец, что $A^\wedge$ изометрична A, следовательно, полна относительно равномерной нормы, следовательно, совпадает с $C(\mathfrak{M})$. Для самосопряженного элемента y имеют место, совершенно так же, как в п. 24С, неравенства

$$\|y\| \leqslant \|y^2\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \ldots \leqslant \|y^{2^n}\|^{2^{-n}},$$

откуда $\|y\| = \|y^\wedge\|_\infty$. А тогда для произвольного $x \in A$ получаем

$$\|x\| = \sqrt{\|xx^*\|} = \sqrt{\|x^\wedge x^{*\wedge}\|_\infty} = \sqrt{\||x^\wedge|^2\|_\infty} = \|x^\wedge\|_\infty,$$

и теорема полностью доказана.

26B. Будем называть коммутативную банаховскую алгебру *самосопряженной*, если для каждого $x \in A$ существует $y \in A$ такой, что $y^\wedge = \overline{x^\wedge}$. Отметим несколько простых следствий этого определения.

Лемма 1. *Если A — самосопряженная алгебра, то $A^\wedge$ плотна в $C(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Пусть элементы x и y таковы, что $y^\wedge = \overline{x^\wedge}$. Тогда $\frac{x^\wedge + y^\wedge}{2}$ и $\frac{x^\wedge - y^\wedge}{2i}$ представляют собой вещественную и мнимую части функции $x^\wedge$. Это показывает, что вещественные функции из $A^\wedge$ образуют вещественную алгебру, отделяющую точки пространства $\mathfrak{M}$ и потому, в силу теоремы Стона — Вейерштрасса, плотную в $C^R(\mathfrak{M})$. Следовательно, $A^\wedge$ плотна в $C(\mathfrak{M})$.

Следствие. *Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов самосопряженной алгебры служит своей собственной границей.*

Доказательство. В противном случае пусть M_0 — точка из $\mathfrak{M}$, не принадлежащая границе, f — непрерывная функция, равная 1 в M_0 и 0 на границе, и $x^\wedge$ — произвольная функция из $A^\wedge$, для которой $\|f - x^\wedge\|_\infty < \frac{1}{2}$. Тогда $|x^\wedge(M_0)| > \frac{1}{2}$ и $|x^\wedge| < \frac{1}{2}$ на границе, в противоречие с тем, что $|x^\wedge|$ должен достигать на границе своего наибольшего значения. Тем самым такая точка M_0 существовать не может и $\mathfrak{M}$ совпадает со своей границей.

Лемма 2. *Для каждого компактного подмножества C пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов самосопряженной алгебры A существует элемент $x \in A$ такой, что $x^\wedge \geqslant 0$ и $x^\wedge > 0$ на C.*

Доказательство. Для каждой точки $M \in C$ существует элемент $x \in A$ такой, что $x^\wedge(M) \neq 0$. Тогда функция $|x^\wedge|^2$, которая, по определению самосопряженности, принадлежит $A^\wedge$, положительна в окрестности точки M. А из теоремы Гейне — Бореля следует тогда существование конечной суммы таких функций, положительной на всем C, что и требовалось доказать. Это — то самое рассуждение, которое было использовано в п. 19C.

Следствие. *Полупростая самосопряженная алгебра A с компактным пространством $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов содержит единицу.*

Доказательство. По лемме 2, существует элемент $x \in A$ такой, что $x^\wedge > 0$ на всем $\mathfrak{M}$, а тогда существование единицы в A вытекает из следствия теоремы 24D.

26C. Если самосопряженная алгебра A полупростая, то для каждого x существует единственный элемент y такой, что $y^\wedge = \overline{x^\wedge}$. Если обозначить этот y через x^*, то отображение $x \to x^*$

будет, очевидно, инволюцией на A, обладающей свойствами (1)—(4). Она обладает также свойством (6), ибо $-|x^{\wedge}|^2$ нигде не принимает значения 1 и потому $-xx^*$ не служит единицей по модулю какого бы то ни было регулярного максимального идеала, так что, в силу теоремы 21D, $-xx^*$ имеет дополнительный элемент. Обратное предложение также верно и притом без предположения полупростоты.

Теорема. *Коммутативная банаховская алгебра с инволюцией, обладающей свойствами* (1) — (4) *и* (6), *является самосопряженной, причем* $x^{*\wedge} = \overline{x^{\wedge}}$ *для каждого* $x \in A$.

Доказательство. Для доказательства того, что $x^{*\wedge} = \overline{x^{\wedge}}$, достаточно показать, что функция $x^{\wedge}$, соответствующая самосопряженному элементу x ($x^* = x$), вещественна. Действительно, $x + x^*$ и $i(x - x^*)$ — всегда самосопряженные элементы, и если уже известно, что представляющие их функции вещественны, то равенство $x^{*\wedge} = \overline{x^{\wedge}}$ для произвольного x следует из представления последнего в виде $\frac{1}{2}\{(x + x^*) - i[i(x - x^*)]\}$ и свойства (3).

Итак, пусть x — самосопряженный элемент и пусть функция $x^{\wedge}$ — невещественная, $x^{\wedge}(M) = a + bi$ для некоторого M, причем $b \neq 0$. Так как пары (a, b) и $(a^2 - b^2, 2ab)$ линейно независимы, то существует чисто мнимая линейная комбинация чисел $x^{\wedge}(M)$ и $(x^2)^{\wedge}(M)$ с вещественными коэффициентами. А именно, $y^{\wedge}(M) = i$ для $y = \frac{(b^2 - a^2)x + ax^2}{b(a^2 + b^2)}$. Но тогда $(-y^2)^{\wedge}(M) = 1$ и $-y^2 = -yy^*$ не может иметь дополнительного элемента, в противоречие со свойством (6). Тем самым функция $x^{\wedge}$ для самосопряженного x вещественна, и теорема доказана.

26D. Теорема. *В полупростой коммутативной банаховской алгебре непрерывность инволюции следует из одних свойств* (1) — (4).

Доказательство. Здесь применимо почти дословно рассуждение, проведенное в п. 24B. Доказательство теоремы 24B нужно лишь немного модифицировать для приспособления его к отображению T алгебры A_1 на плотную подалгебру алгебры A_2, несколько отклоняющемуся от гомоморфизма (в той мере, в какой инволюция отличается от изоморфизма). Эту очевидную модификацию мы предоставим читателю провести самостоятельно.

26E. Займемся теперь вопросом, подсказываемым рассмотрениями п. 26B: когда для самосопряженной алгебры $A^{\wedge}=C(\mathfrak{M})$? Некоторые рассуждения будут те же, что и в п. 24C, но мы их все же повторим. Если $A^{\wedge}=C(\mathfrak{M})$ и алгебра A — полупростая, то, по теореме о замкнутом графике, непрерывное взаимно однозначное линейное отображение $x \to x^{\wedge}$ алгебры A на $A^{\wedge}=C(\mathfrak{M})$ должно обладать непрерывным обращением. Поэтому существует постоянная K такая, что $\|x\| \leqslant K\|x^{\wedge}\|_{\infty}$ для всех x и, в частности,

$$\|x\|^2 \leqslant K^2\|x^{\wedge}\|_{\infty}^2 = K^2\|x^{\wedge}\overline{x^{\wedge}}\|_{\infty} \leqslant K^2\|xx^*\|.$$

Обратно, этого условия достаточно для того, чтобы $A^{\wedge}=C(\mathfrak{M})$, даже без предположения самосопряженности.

Теорема. *Если коммутативная банаховская алгебра обладает инволюцией, удовлетворяющей условиям* (1) — (4) *и неравенству* $\|x\|^2 \leqslant K\|xx^*\|$, *то* $\|x\| \leqslant K\|x^{\wedge}\|_{\infty}$ *для всех* $x \in A$, *алгебра* A — *полупростая и самосопряженная и* $A^{\wedge}=C(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Для самосопряженного y предположенное в теореме неравенство принимает вид $\|y\|^2 \leqslant K\|y^2\|$. Отсюда по индукции получаем

$$\|y\| \leqslant K^{\frac{1}{2}}\|y^2\|^{\frac{1}{2}} \leqslant K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\|y^4\|^{\frac{1}{4}} \leqslant \ldots \leqslant K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+2^{-n}}\|y^{2^n}\|^{2^{-n}}.$$

Следовательно,

$$\|y\| \leqslant K \lim \|y^m\|^{\frac{1}{m}} = K\|y^{\wedge}\|_{\infty}.$$

Далее, так как $x^{*\wedge}(M^*)=\overline{x^{\wedge}(M)}$ (36), то $\|x^{*\wedge}\|_{\infty}=\|x^{\wedge}\|_{\infty}$; поэтому $\|x\|^2 \leqslant K\|xx^*\| \leqslant K^2\|x^{\wedge}x^{*\wedge}\|_{\infty} \leqslant K^2\|x^{\wedge}\|_{\infty}^2$, и $\|x\| \leqslant K\|x^{\wedge}\|_{\infty}$, как и утверждается в теореме. Одним из очевидных следствий этого неравенства является полупростота алгебры A. Другим — что взаимно однозначное отображение $x \to x^{\wedge}$ непрерывно в обе стороны, так что алгебра $A^{\wedge}$ равномерно замкнута. Если мы докажем самосопряженность алгебры A, то отсюда, в силу леммы 1 п. 26B, будет следовать, что $A^{\wedge}=C(\mathfrak{M})$.

Равенство $x^{*\wedge}(M^*)=\overline{x^{\wedge}(M)}$ показывает, что если F — минимальное замкнутое множество, на котором каждая функция $|x^{\wedge}|$ достигает своего наибольшего значения, то таким же является и F^*. Но единственным таким минимальным замкнутым множеством служит граница F_0 пространства $\mathfrak{M}$. Следовательно, $F_0 = F_0^*$. Покажем теперь, что $M = M^*$ для всякой точки $M \in F_0$. Действительно, в противном случае существуют окрестность U точки M такая, что $U \cap U^* = \varnothing$, и функция $x^\wedge \in A^\wedge$, принимающая свое наибольшее по абсолютной величине значение в U и нигде вне ее на F_0. Тогда можно считать, что $\max|x^\wedge| = 1$ и $|x^\wedge| < \varepsilon$ на $F_0 - U$ (заменяя, если нужно, функцию $x^\wedge$ ее степенью $(x^\wedge)^n$ с достаточно большим показателем n). В таком случае $|x^{*\wedge}| < \varepsilon$ на $F_0 - U^*$ и $|x^\wedge x^{*\wedge}| < \varepsilon$ на всей границе F_0, а потому — вообще всюду. Но тогда $1 \leqslant \|x\|^2 \leqslant K^2 \|x^\wedge x^{*\wedge}\|_\infty < K^2\varepsilon$, что невозможно, если $\varepsilon < \frac{1}{K^2}$. Таким образом, на границе $x^{*\wedge} = \overline{x^\wedge}$. Так как алгебра $A^\wedge$ равномерно замкнута, то мы видим, что, в силу леммы 1 п. 26B, рассматриваемая на F_0, она совпадает с алгеброй $C(F_0)$ всех непрерывных комплексных функций, обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке пространства F_0. Но мы знаем (пп. 19C и 20C), что F_0 есть множество всех регулярных максимальных идеалов этой алгебры, и так как алгебра $A^\wedge$, рассматриваемая на F_0, по определению границы, изоморфна (и изометрична) алгебре $A^\wedge$ на всем $\mathfrak{M}$, то мы заключаем, что F_0 есть множество всех регулярных максимальных идеалов алгебры $A^\wedge$, т. е. $F_0 = \mathfrak{M}$. А тогда $x^{*\wedge} = \overline{x^\wedge}$ всюду и алгебра A — самосопряженная.

Следствие. *Коммутативная банаховская алгебра A с инволюцией, удовлетворяющей условиям* (1) — (5), *изоморфна и изометрична алгебре $C(\mathfrak{M}) = A^\wedge$.*

Доказательство. Теперь $K = 1$, и из неравенства $\|x\| \leqslant K\|x^\wedge\|_\infty$ следует, что $\|x\| = \|x^\wedge\|_\infty$.

Следствие. *Коммутативная алгебра A ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, замкнутая относительно операторной нормы и операции взятия сопряженного оператора, изометрически изоморфна алгебре $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на некотором локально компактном хаусдорфовом пространстве $\mathfrak{M}$, обращающихся в нуль на бесконечности.*

Доказательство. Предыдущее следствие и п. 11B.

Нелишне заметить, что эту теорему можно доказать, не опираясь на понятие границы, присоединением единицы и применением теоремы 26А. Как и в первой части проведенного выше доказательства, показываем вначале, что норма на A эквивалентна спектральной норме. Решающим шагом затем является следующая

Лемма. *Если A — коммутативная банаховская алгебра с инволюцией, удовлетворяющая условию $\|x\|^2 \leqslant K\|xx^*\|$, то $\|x\|_{sp}^2 = \|xx^*\|_{sp}$.*

Доказательство. $\sqrt[n]{\|(xx^*)^n\|} = \sqrt[n]{\|x^n x^{*n}\|} \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|}\sqrt[n]{\|x^{*n}\|}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|xx^*\|_{sp} \leqslant \|x\|_{sp}\|x^*\|_{sp} = \|x\|_{sp}^2.$$

Обратно, $\|x^n\|^2 \leqslant K\|x^n x^{n*}\| = K\|(xx^*)^n\|$, $\sqrt[n]{\|x^n\|^2} \leqslant \sqrt[n]{K}\sqrt[n]{\|(xx^*)^n\|}$, и в пределе, при $n \to \infty$, $\|x\|_{sp}^2 \leqslant \|xx^*\|_{sp}$.

Заменив теперь норму, заданную в алгебре A, спектральной нормой, мы присоединяем единицу ([37]) и замечаем, что норма $\|x + \lambda e\| = \|x\| + |\lambda|$ удовлетворяет предположенному в теореме неравенству с $K = 16$. Действительно, если $\|x\| < 3|\lambda|$, то

$$\|x + \lambda e\|^2 = (\|x\| + |\lambda|)^2 < 16|\lambda|^2 \leqslant 16\|(x + \lambda e)(x^* + \bar{\lambda} e)\|,$$

а при $\|x\| \geqslant 3|\lambda|$ имеем $\|xx^* + \lambda x^* + \bar{\lambda} x\| \geqslant \|xx^*\| - \|\lambda x^* + \bar{\lambda} x\| \geqslant \geqslant \frac{\|x\|^2}{3}$, тогда как, очевидно,

$$(\|x\| + |\lambda|)^2 \leqslant 16\left(\frac{\|x\|^2}{3} + |\lambda|^2\right).$$

В силу этого, из леммы следует, что в алгебре с присоединенной единицей $\|y\|_{sp}^2 = \|yy^*\|_{sp}$, и утверждение теоремы оказывается теперь простым следствием теоремы 26А.

26F. *Представлением* T алгебры A называют гомоморфное отображение ее $x \to T_x$ на некоторую алгебру линейных преобразований векторного пространства X. Если A — алгебра с инволюцией, то за X обычно принимают гильбертово пространство H, а от T требуют еще, чтобы оно переводило сопряженные элементы в сопряженные: $T_{x^*} = (T_x)^*$. В этом случае оно называется *симметричным* представлением.

Лемма. *Каждое симметричное представление банаховской алгебры A с непрерывной инволюцией непрерывно.*

Доказательство. Так как T гомоморфно, то если y обладает дополнительным элементом, T_y также обладает им, и потому $\|T_x\|_{sp} \leqslant \|x\|_{sp}$ для каждого x. Но T_{x^*x} — самосопряженный оператор, и, следовательно (см. п. 26А),

$$\|T_x\|^2 = \|T_x^* T_x\| = \|T_{x^*x}\| = \|T_{x^*x}\|_{sp}.$$

Таким образом,

$$\|T_x\|^2 = \|T_{x^*x}\|_{sp} \leqslant \|x^*x\|_{sp} \leqslant \|x^*x\| \leqslant \|x^*\| \cdot \|x\| \leqslant B\|x\|^2,$$

где B — граница инволютивного преобразования $x \to x^*$. Тем самым T ограничено, с границей $\sqrt{B}$.

Если инволюция изометрична ($\|x^*\| = \|x\|$), то в предыдущем рассуждении $B = 1$, и $\|T\| \leqslant 1$. Упомянутая ранее теорема Гельфанда и Наймарка (§ 11) утверждает просто, что каждая C^*-алгебра обладает изометрическим симметричным представлением.

В этом пункте мы будем заниматься главным образом симметричными представлениями коммутативных самосопряженных алгебр. Проведенное выше рассуждение показывает, что в этом случае $\|T_x\| \leqslant \sqrt{\||x^\wedge|^2\|_\infty} = \|x^\wedge\|_\infty$, так что всякое такое представление может быть переведено в не повышающее норму представление функциональной алгебры $A^\wedge$, и так как $A^\wedge$ плотна в $C(\mathfrak{M})$, то последнее может быть продолжено до не повышающего норму представления алгебры $C(\mathfrak{M})$. Мы покажем теперь, что T обладает однозначно определенным продолжением на ограниченные бэровские функции на $\mathfrak{M}$.

Теорема. *Пусть T — ограниченное представление алгебры $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных (или вещественных) функций на локально компактном хаусдорфовом пространстве $\mathfrak{M}$, обращающихся в нуль на бесконечности, операторами в рефлексивном банаховском пространстве X. Тогда T может быть продолжено до представления алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ всех ограниченных бэровских функций на $\mathfrak{M}$, обращающихся в нуль на бесконечности, причем это продолжение — единственное подчиненное условию, чтобы $L_{x,y}(f) = (T_f x, y)$ было комплексным ограниченным интегралом для каждой пары $x \in X$, $y \in X^*$. Каждый ограниченный линейный оператор S на X, перестановочный с T_f для каждой функции $f \in C(\mathfrak{M})$, перестановочен с T_f и для каждой $f \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Если X — гильбертово пространство H, а T — симметричное представление, то и продолженное представление T является симметричным.*

Функция $F(f, x, y) = (T_f x, y)$, определенная для $f \in C(\mathfrak{M})$, $x \in X$, $y \in X^*$, трилинейна и

$$|F(f, x, y)| \leqslant \|T\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Для фиксированных x и y она является ограниченным интегралом на $C(\mathfrak{M})$ и потому однозначно продолжаема на $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ с сохранением того же неравенства. При этом продолженный функционал линеен относительно f, x и y. При фиксированных x и f он принадлежит $X^{**} = X$, т. е. существует элемент $T_f x \in X$ такой, что $F(f, x, y) = (T_f x, y)$ для всех $y \in X^*$. Из линейности F по всем трем аргументам и неравенства $|F(f, x, y)| \leqslant \|T\| \times \times \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ видно, что T_f линеен и ограничен числом $\|T\| \cdot \|f\|_\infty$ и что отображение $f \to T_f$ линейно и ограничено числом $\|T\|$. Теперь, для любых f, $g \in C(\mathfrak{M})$ мы имеем

$$T_{fg} = T_f T_g = T_g T_f, \tag{а}$$

или

$$F(fg, x, y) = F(f, T_g x, y) = F(f, x, T_g^* y). \tag{б}$$

Для фиксированного g это тождество трех интегралов относительно f сохраняется при расширении области $C(\mathfrak{M})$ их определения до $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$, так что равенства (а) оказываются верными и для $g \in C(\mathfrak{M})$, $f \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Так как равенства (а) симметричны относительно f и g, то (б) верно для $g \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ и $f \in C(\mathfrak{M})$. Производя расширение еще раз, получаем (б), а значит, и (а) для всех f, $g \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Тем самым продолженное отображение $f \to T_f$ является представлением алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$.

Если S перестановочен с T_f для каждой $f \in C(\mathfrak{M})$, то $(T_f Sx, y) = (ST_f x, y) = (T_f x, S^* y)$, т. е. $F(f, Sx, y) = F(f, x, S^* y)$. При описанном расширении это тождество, как и выше, сохраняется и означает, обратно, что S перестановочен с T_f для каждой $f \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$.

Наконец, если X — гильбертово пространство H, то предположение, что T — симметричное представление, равносильно тождеству $F(\bar{f}, y, x) = \overline{F(f, x, y)}$, которое снова сохраняется при расширении и означает тогда, обратно, что и продолженное T является симметричным представлением. Тем самым теорема полностью доказана.

26G. Существенным содержанием спектральной теоремы является то, что ограниченный самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве может быть аппроксимирован по операторной норме линейными комбинациями проекционных операторов. Это аналогично тому обстоятельству, что ограниченная непрерывная функция на топологическом пространстве может быть аппроксимирована по равномерной норме кусочно-постоянными функциями (т. е. линейными комбинациями характеристических функций). Гельфандовская теория обнаруживает, что эти, казалось бы, ничего общего между собой не имеющие предложения на самом деле являются равносильными утверждениями, что приводит к изящному и простому доказательству спектральной теоремы.

Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная алгебра ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H, замкнутая относительно операции взятия сопряженного оператора и топологически замкнутая по операторной норме. Без ограничения общности мы можем считать, что $\mathfrak{A}$ содержит единицу, ибо ее всегда можно присоединить. Тогда $\mathfrak{A}$ изометрически изоморфно отображается на алгебру $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на компактном пространстве $\mathfrak{M}$ ее максимальных идеалов (пп. 26A и 11B) и обратное отображение можно однозначно продолжить (теорема 26F) на алгебру $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ всех ограниченных бэровских функций на $\mathfrak{M}$. Пусть A — фиксированный самосопряженный оператор из $\mathfrak{A}$ и $A^\wedge$ — представляющая его функция на $\mathfrak{M}$. (Мы временно употребляем символ $A^\wedge$ совсем в другом смысле, чем прежде.) Будем предполагать, что $-1 \leqslant A^\wedge \leqslant 1$, и при заданном $\varepsilon > 0$ возьмем какое-нибудь разбиение $-1 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = 1$ интервала $(-1, +1)$ такое, что $\max(\lambda_i - \lambda_{i-1}) < \varepsilon$. Пусть $E_\lambda^\wedge$ — характеристическая функция компактного множества, на котором $A^\wedge \leqslant \lambda$, и λ'_i — произвольные точки отрезков $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. Тогда

$$\left\| A^\wedge - \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \left(E^\wedge_{\lambda_i} - E^\wedge_{\lambda_{i-1}}\right) \right\|_\infty < \varepsilon$$

и потому также

$$\left\| A - \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \left(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}\right) \right\| < \varepsilon,$$

где E_λ — ограниченный самосопряженный оператор, определяемый бэровской функцией $E_\lambda^\wedge$. Оператор E_λ идемпотентен (ибо $E_\lambda^{\wedge 2} = E_\lambda^\wedge$) и потому является проекционным. Установленная выше аппроксимируемость оператора A может быть записана в виде

$$A = \int \lambda dE_\lambda,$$

где справа стоит операторный интеграл в смысле Римана — Стильтьеса. Это — интегральная форма спектральной теоремы.

На этом пути могут быть получены все основные факты, связанные со спектральной теоремой. Так, например, простые рассуждения, применяемые в теории приближения вещественных функций (одно из которых может быть основано на теореме Стона — Вейерштрасса), показывают, что для каждого фиксированного λ существует последовательность полиномов P_n такая, что $P_n(A^\wedge) \downarrow E_\lambda^\wedge$. Так как $(P_n(A)x, x) = \int P_n(A^\wedge)\, d\mu_{x,x}$, где $\mu_{x,x}$ — неотрицательная мера на $\mathfrak{M}$ [38], то заключаем, что $P_n(A)$ монотонно сходится к E_λ в обычном слабом смысле: $(P_n(A)x, x) \downarrow \downarrow (E_\lambda x, x)$ для каждого $x \in H$.

26H. Мы заключим § 26 исследованием положительной определенности, доведенным до общей теоремы Планшереля. Большинство относящихся сюда элементарных фактов заимствовано из первых русских работ, однако сама теорема Планшереля представляет собой модификацию формы этой теоремы, предложенной Годманом [20].

Пусть A — комплексная алгебра с инволюцией. Линейный функционал φ на A называют *положительным*, если $\varphi(xx^*) \geqslant 0$ для всех $x \in A$. Значение положительности заключается в том, что форма $[x, y] = \varphi(xy^*)$ обладает тогда всеми свойствами скалярного произведения, за исключением того, что $[x, x]$ может обращаться в нуль и для $x \neq 0$. Линейность формы $[x, y]$ по x и сопряженная линейность по y очевидны, и остается лишь проверить, что $[x, y] = \overline{[y, x]}$. Но, раскрывая левую часть неравенства $\varphi((x + \lambda y)(x + \lambda y)^*) \geqslant 0$, мы видим, что $\lambda\varphi(yx^*) + \bar{\lambda}\varphi(xy^*)$ вещественно при каждом комплексном значении λ, а тогда элементарное рассуждение показывает, что $\varphi(yx^*) = \overline{\varphi(xy^*)}$, что и требовалось.

Теперь заключаем (см. п. 10В), что справедливо неравенство Шварца

$$|\varphi(xy^*)| \leqslant \sqrt{\varphi(xx^*)}\sqrt{\varphi(yy^*)}.$$

Если A содержит единицу, то, положив $y = e$ в этом неравенстве и равенстве $\varphi(xy^*) = \overline{\varphi(yx^*)}$, мы получим, что

$$|\varphi(x)|^2 \leqslant k\varphi(xx^*), \quad \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)},$$

где $k = \varphi(e)$. Положительный функционал, удовлетворяющий этим дополнительным условиям, независимо от того, содержит A единицу или нет, мы будем называть *продолжаемым*; основания для этого выясняются следующей леммой.

Лемма 1. *Для того, чтобы φ мог быть продолжен с сохранением положительности на алгебру A с присоединенной единицей, необходимо и достаточно, чтобы он был продолжаемым в указанном сейчас смысле.*

Доказательство. Необходимость уже установлена выше. Обратно, пусть φ удовлетворяет указанным условиям. Положив $\varphi(e) = k$, будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi((x+\lambda e)(x+\lambda e)^*) &= \varphi(xx^*) + 2\mathfrak{R}\bar{\lambda}\varphi(x) + |\lambda|^2 k \geqslant \\ &\geqslant \varphi(xx^*) - 2|\lambda|\sqrt{k}\sqrt{\varphi(xx^*)} + |\lambda|^2 k = \\ &= \left[\sqrt{\varphi(xx^*)} - |\lambda|\sqrt{k}\right]^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

чем доказана и достаточность.

Лемма 2. *На банаховской алгебре A с единицей и непрерывной инволюцией положительный функционал φ непрерывен.*

Доказательство. Если A — банаховская алгебра с единицей и $\|x\| < 1$, то $e - x$ обладает квадратным корнем, который можно вычислить посредством обычного разложения $\sqrt{1-t}$ в ряд по степеням t. Если в A имеется непрерывная инволюция и элемент x — самосопряженный, то самосопряженным будет и значение $y = \sqrt{e-x}$, доставляемое указанным рядом. Но тем самым $\varphi(e-x) = \varphi(yy^*) \geqslant 0$ и, значит, $\varphi(x) \leqslant \varphi(e)$. Аналогично $\varphi(-x) \leqslant \leqslant \varphi(e)$, и мы приходим к заключению, что если x — самосопряженный элемент с нормой $\|x\| < 1$, то $|\varphi(x)| \leqslant \varphi(e)$. Для произвольного x имеем обычное выражение

$$x = \frac{1}{2}\{(x + x^*) - i[i(x - x^*)]\},$$

где элементы $x + x^*$ и $i(x - x^*)$ — самосопряженные. Если наша непрерывная инволюция обладает границей B, то мы заключаем отсюда, что $|\varphi(x)| \leqslant \sqrt{2}\,\varphi(e)$ при $\|x\| < \frac{2}{B+1}$, т. е. φ непрерывен, с границей $\frac{(B+1)\varphi(e)}{\sqrt{2}}$.

26I. Теорема (Герглотца — Бохнера — Вейля — Райкова). *Линейный функционал φ на полупростой самосопряженной коммутативной банаховской алгебре A положителен и продолжаем тогда и только тогда, когда на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов существует конечная положительная бэровская мера μ_φ такая, что*

$$\varphi(x) = \int x^\wedge d\mu_\varphi \quad \text{для всех } x \in A.$$

Доказательство. Если $\varphi(x) = \int x^\wedge d\mu$, где μ — конечная положительная бэровская мера на $\mathfrak{M}$, то ([39])

$$\varphi(xx^*) = \int |x^\wedge|^2 d\mu \geqslant 0,$$

$$\varphi(x^*) = \int x^{*\wedge} d\mu = \overline{\int x^\wedge d\mu} = \overline{\varphi(x)},$$

$$|\varphi(x)|^2 = \left|\int x^\wedge d\mu\right|^2 \leqslant \int |x^\wedge|^2 d\mu \cdot \int 1\, d\mu = \|\mu\|\,\varphi(xx^*),$$

т. е. φ — положительный продолжаемый функционал. Обратно, если φ — положительный продолжаемый функционал, то (по лемме 2 предыдущего пункта ([40])) он непрерывен и

$$|\varphi(x)|^2 \leqslant k\varphi(xx^*) \leqslant k^{1+\frac{1}{2}}[\varphi((xx^*)^2)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant k^{1+\frac{1}{2}+\ldots+2^{-n}}[\varphi((xx^*)^{2^n})]^{2^{-n}} \leqslant$$

$$\leqslant k^{1+\frac{1}{2}+\ldots+2^{-n}}\|\varphi\|^{2^{-n}}\|(xx^*)^{2^n}\|^{2^{-n}}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и извлекая квадратные корни, получаем $|\varphi(x)| \leqslant k\|x^\wedge\|_\infty$. Так как $A^\wedge$ плотна в $C(\mathfrak{M})$, то ограниченный линейный функционал I, определенный на $A^\wedge$ формулой $I_\varphi(x^\wedge)=\varphi(x)$, может быть однозначно продолжен на всю $C(\mathfrak{M})$. Если $f\in C(\mathfrak{M})$ и $f\geqslant 0$, то $\sqrt{f}$ может быть равномерно аппроксимирован функциями $x^\wedge\in A^\wedge$ и потому f равномерно аппроксимируема функциями $|x^\wedge|^2$. Так как $I_\varphi(|x^\wedge|^2)=\varphi(xx^*)\geqslant 0$ и $I_\varphi(|x^\wedge|^2)$ аппроксимируют $I_\varphi(f)$, то заключаем, что $I_\varphi(f)\geqslant 0$. Тем самым I_φ — ограниченный интеграл. Обозначая через μ_φ определяемую им меру, получаем требуемое равенство $\varphi(x)=\int x^\wedge d\mu_\varphi$ для всех $x\in A$.

26J. Обстановку нашей теоремы Планшереля составляют полупростая самосопряженная коммутативная банаховская алгебра A и фиксированный положительный функционал φ, определенный на плотном идеале $A_0\subset A$. Элемент $p\in A_0$ мы будем называть *положительно определенным относительно* φ, если функционал θ_p, определенный на A формулой $\theta_p(x)=\varphi(px)$, положителен и продолжаем. Тогда, по теореме Бохнера 26I, существует однозначно определенный ограниченный интеграл I_p на $C(\mathfrak{M})$ (конечная положительная бэровская мера μ_p на $\mathfrak{M}$) такой, что

$$\varphi(px)=I_p(x^\wedge)=\int x^\wedge d\mu_p.$$

Совокупность положительно определенных элементов, очевидно, замкнута относительно сложения и умножения на положительные скаляры. Заметим теперь, что она содержит каждый элемент вида xx^*, где $x\in A_0$. Действительно, легко непосредственно проверить, что θ_{xx^*} не только положителен, но и может быть продолжен с сохранением положительности, ибо, полагая

$$\theta_{xx^*}(y+\lambda e)=\varphi(xx^*y+\lambda xx^*),$$

имеем

$$\theta_{xx^*}((y+\lambda e)(y+\lambda e)^*)=\varphi((xy+\lambda x)(xy+\lambda x)^*)\geqslant 0.$$

Если p и q — положительно определенные элементы, то $I_q(x^\wedge p^\wedge)=\varphi(pqx)=I_p(x^\wedge q^\wedge)$ для каждого $x\in A$ и потому $I_q(hp^\wedge)=I_p(hq^\wedge)$ для всех $h\in C(\mathfrak{M})$. Пусть S_f—носитель функции $f\in C(\mathfrak{M})$, т. е. замыкание множества тех точек, в которых $f\neq 0$. Если $|p^\wedge q^\wedge|$ имеет на S_f положительную нижнюю границу, то $h=\frac{f}{p^\wedge q^\wedge}\in C(\mathfrak{M})$ и $I_q\left(\frac{f}{q^\wedge}\right)=I_p\left(\frac{f}{p^\wedge}\right)$. Определим теперь функционал I

на совокупности $L(\mathfrak{M})$ функций из $C(\mathfrak{M})$ с компактными носителями формулой $I(f) = I_p\left(\frac{f}{p^\wedge}\right)$, где p — любой положительно определенный элемент из A_0 такой, что $|p^\wedge|$ имеет на S_f положительную нижнюю границу, так что $\frac{f}{p^\wedge} \in L$. Такой элемент p существует, ибо S_f для $f \in L$ компактно и, в силу теоремы Гейне — Бореля, существует элемент $p \in A_0$ вида $x_1x_1^* + \ldots + x_nx_n^*$, для которого $p^\wedge > 0$ на S_f. Выше мы видели, что $I(f)$ не зависит от выбора p; взяв только что построенное p, получаем, что $I(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$. Таким образом, I — интеграл. Исходное тождество $I_p(hq^\wedge) = I_q(hp^\wedge)$ показывает, что интеграл I_p равен нулю на замкнутом множестве, где $p^\wedge = 0$, а отсюда, в соединении с тождеством $I(f) = I_p\left(\frac{f}{p^\wedge}\right)$, справедливым для всех f, равных нулю на этом замкнутом множестве, вытекает, что $I(gp^\wedge) = I_p(g)$ для всех g ([41]). Следовательно, $I(p^\wedge) = I_p(1) = \|I_p\|$.

Наконец, $\varphi(pq^*) = I_p(\overline{q^\wedge}) = I(p^\wedge \overline{q^\wedge})$ для всех положительно определенных элементов p и q, и потому $p \to p^\wedge$ есть унитарное отображение порожденного положительно определенными элементами подпространства гильбертова пространства H_φ на подпространство пространства $L^2(I)$. Нами доказана следующая

Теорема. *Пусть A — полупростая самосопряженная коммутативная банаховская алгебра и φ — положительный функционал, определенный на плотном идеале $A_0 \subset A$. Тогда на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов существует однозначно определенная бэровская мера μ такая, что $p^\wedge \in L^1(\mu)$ и $\varphi(px) = \int x^\wedge p^\wedge \, d\mu$ для всякого p, положительно определенного относительно φ. Поэтому отображение $p \to p^\wedge$, рассматриваемое на подпространстве гильбертова пространства H_φ, порожденном положительно определенными элементами, является унитарным отображением этого подпространства на подпространство пространства $L^2(\mu)$, причем оно продолжаемо на все H_φ, если известно, что A_0^2 H_φ-плотно в A_0.*

26K. В последних двух теоремах без нужды предполагалось, что A — банаховская алгебра. Более общим образом можно было бы отправляться от произвольной комплексной алгебры A с инволюцией и положительного функционала φ на A. Неравенство Шварца для φ показывает, что если $\varphi(xx^*) = 0$, то $\varphi(xaa^*x^*) = 0$ для всех $a \in A$, так что совокупность тех x, для которых $\varphi(xx^*) = 0$, является правым идеалом I, а умножение справа на a становится линейным оператором U_a на фактор-пространстве A/I. Условием ограниченности U_a относительно скалярного произведения, определяемого функционалом φ, является, очевидно, существование постоянной k_a такой, что $\varphi(xaa^*x^*) \leqslant k_a\varphi(xx^*)$ для каждого $x \in A$, и в этом случае U_a может быть однозначно продолжен до ограниченного линейного оператора на гильбертовом пространстве H_φ, являющемся пополнением A/I по норме φ. Если оператор U_a ограничен для каждого a, то φ называется *унитарным*; легко видеть, что тогда отображение $a \to U_a$ является симметричным представлением алгебры A (см. [20]). Это — единственное новое понятие, нужное в коммутативной теории для более абстрактного формулирования теорем Бохнера и Планшереля. Для перехода к пространству Δ гомоморфных отображений алгебры A на поле комплексных чисел следует теперь только заметить, что так как отображение $a \to U_a$ является симметричным представлением алгебры A, то пространство $\mathfrak{M}_\varphi$ максимальных идеалов алгебры операторов U_a можно тем самым отождествить с некоторым замкнутым подмножеством в Δ. Поле действия теорем Бохнера и Планшереля ограничивается теперь пределами этого подмножества $\mathfrak{M}_\varphi$, состоящего лишь из самосопряженных идеалов, и потому сделанное выше предположение, что $x^{*\wedge} = \overline{x^\wedge}$ на всем Δ, становится излишним. Последний момент представляет интерес даже в том случае, когда A есть банаховская алгебра; с помощью неоднократно уже использованного приема бесконечного повторного применения неравенства Шварца легко доказать, что непрерывный положительный функционал автоматически унитарен, и потому предположение, что $x^{*\wedge} = \overline{x^\wedge}$, можно в обеих наших теоремах отбросить.

§ 27. Гильбертовы алгебры

Предыдущие параграфы этой главы найдут применение главным образом в теории локально компактных коммутативных групп. В этом параграфе будет проведено весьма специальное исследование, оказывающееся возможным в гильбертовых алгебрах Амброзе [1] и охватывающее как частный случай теорию групповой L^2-алгебры компактной группы. *Гильбертовой алгеброй называется банаховская алгебра H, являющаяся в той же норме гильбертовым* *пространством, в которой определена инволюция, обладающая свойствами* (1) — (4) § 26 *и, кроме того, связующим свойством*

$$(xy, z) = (y, x^*z),$$

имеющим решающее значение. Предполагается также, что $\| x^* \| = \| x \|$ *и что* $x^*x \neq 0$ *при* $x \neq 0$. Из равенства $\| x^* \| = \| x \|$ следует, что инволюция сопряженно унитарна [т. е. $(x^*, y^*) = (y, x)$] и потому $(xy, z) = (x, zy^*)$ ([42]).

Оказывается, что такая алгебра обладает следующим строением. H может быть единственным образом разложена в прямую сумму ее (взаимно ортогональных) минимальных замкнутых двусторонних идеалов. Минимальный замкнутый двусторонний идеал может быть разложен (но уже не однозначно) в прямую сумму ортогональных минимальных левых (или правых) идеалов, каждый из которых содержит идемпотентную образующую. Отсюда следует, что минимальный замкнутый двусторонний идеал изоморфен полной матричной (возможно, бесконечномерной) алгебре над полем комплексных чисел и действует как такая алгебра относительно умножения слева на каждый из ее минимальных левых идеалов.

27А. Начнем с некоторых лемм об идемпотентах и левых идеалах.

Лемма. *Пусть x — самосопряженный элемент алгебры H, норма которого как оператора левого умножения равна единице. Тогда последовательность x^{2n} сходится к самосопряженному идемпотенту, отличному от нуля.*

Доказательство. Пусть $|||y|||$ — операторная норма элемента y: $|||y||| = \sup\limits_z \frac{\|yz\|}{\|z\|}$. Так как $\|yz\| \leqslant \|y\| \cdot \|z\|$, то $|||y||| \leqslant \|y\|$. Согласно предположению, x есть самосопряженный элемент с $|||x||| = 1$. Тогда $\|x^n\| = 1$ (см. п. 11В) и потому $\|x^n\| \geqslant 1$ для всех n. Для четных m и n, $m - n = 2p > 0$, имеем

$$(x^m, x^n) \leqslant |||x^{m-n}||| \, (x^n, x^n) = (x^n, x^n),$$

$$(x^m, x^m) \leqslant |||x^p|||^2 \, (x^{n+p}, x^{n+p}) = (x^m, x^n).$$

Таким образом, $1 \leqslant (x^m, x^m) \leqslant (x^m, x^n) \leqslant (x^n, x^n) \leqslant \ldots \leqslant (x^2, x^2)$, и (x^m, x^n) стремится к пределу $l \geqslant 1$, когда m и $n \to \infty$ по четным значениям. Поэтому

$$\lim \| x^m - x^n \|^2 = \lim (x^m - x^n,\ x^m - x^n) =$$
$$= \lim (x^m, x^m) - \lim (x^n, x^m) - \lim (x^m, x^n) + \lim (x^n, x^n) = 0,$$

и x^n сходится к самосопряженному элементу e с нормой $\| e \| \geqslant 1$. Так как x^{2n} сходится и к e и к e^2, то заключаем, что e — идемпотент.

Следствие. *Каждый левый идеал I содержит самосопряженный идемпотент, отличный от нуля.*

Доказательство. Для любого $y \in I$, отличного от нуля, $y^* y$ есть ненулевой самосопряженный элемент, принадлежащий I, и в качестве элемента x леммы 1 можно взять надлежаще выбранное скалярное кратное $y^* y$. Тогда $e = \lim x^{2n} = \lim x^{2n} x^2 = e x^2 \in I$, что и требовалось.

27B. Ясно, что, обратно, совокупность He левых кратных всякого идемпотента e есть замкнутый ([43]) левый идеал. Идемпотент e называют *приводимым*, если он может быть представлен в виде суммы $e = e_1 + e_2$ ненулевых идемпотентов e_1 и e_2, аннулирующих друг друга: $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$. При этом, если e самосопряжен, то мы будем требовать, чтобы e_1 и e_2 также были самосопряженными, а в таком случае условие взаимной аннулируемости равносильно ортогональности: $0 = (e_1, e_2) = (e_1^2, e_2^2) = (e_1 e_2, e_1 e_2) \Leftrightarrow e_1 e_2 = 0$. Так как тогда $\| e \|^2 = \| e_1 \|^2 + \| e_2 \|^2$, а норма ненулевого идемпотента не может быть меньше единицы, то заключаем, что самосопряженный идемпотент может допускать лишь конечное число повторных приведений и потому всегда может быть выражен в виде суммы конечного числа взаимно ортогональных неприводимых самосопряженных идемпотентов.

Лемма. *I является минимальным левым идеалом тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде $I = He$, где e — неприводимый самосопряженный идемпотент.*

Доказательство. Если $e \in I$ и $e = e_1 + e_2$, где e_1 и e_2 — ортогональные самосопряженные идемпотенты, то He_1 и He_2 — ортогональные левые идеалы, входящие в I ([44]), и I — не минимальный. Таким образом, если I — минимальный левый идеал, то каждый содержащийся в нем самосопряженный идемпотент e неприводим, и так как He есть левый идеал $\subset I$, то $I = He$.

Пусть теперь $I = He$, где e — неприводимый самосопряженный идемпотент, отличный от нуля. Если I_1 — собственный левый подидеал в I и h — ненулевой самосопряженный идемпотент, содержащийся в I_1, то $e_1 = eh = ehe$ есть самосопряженный идемпотент из I_1, перестановочный с e, и $e = e_1 + e_2$ $(e_2 = e - e_1)$ есть разложение e на ортогональные самосопряженные идемпотенты, в противоречие с предположением, что e неприводим. (Заметим, что $e_1 \neq 0$, поскольку $he_1 = heh = h^2 = h \neq 0$, и $e_1 \neq e$, поскольку $He_1 \subset I_1 \neq He$.) Следовательно, I минимален.

Отметим, что каждый минимальный левый идеал замкнут (так как имеет вид He).

Следствие. *H есть замкнутая линейная оболочка своих минимальных (замкнутых) левых идеалов.*

Доказательство. Пусть M — наименьшее замкнутое подпространство, содержащее все минимальные левые идеалы алгебры H. Если $M \neq H$, то M есть собственный замкнутый левый идеал. Тогда $M^\perp$ является ненулевым замкнутым левым идеалом ([45]), следовательно, содержит ненулевой неприводимый самосопряженный идемпотент, а с ним — и порожденный им минимальный левый идеал. Но это противоречит определению M.

Замечание. Если $x \in H$ и e — самосопряженный идемпотент, то xe есть проекция x на He, ибо

$$(x - xe,\ he) = ((x - xe)e,\ h) = (0,\ h) = 0,$$

так что $x - xe \perp He$.

27С. Теорема. *Каждый минимальный левый идеал порождает минимальный двусторонний идеал. Минимальные двусторонние идеалы взаимно ортогональны, и H есть прямая сумма их замыканий.*

Доказательство. Пусть $I = He$ — минимальный левый идеал с образующим самосопряженным идемпотентом e и N — порожденный им двусторонний идеал, т. е. подпространство, натянутое на $IH = HeH$. Заметим прежде всего, что $N^* = N$, ибо $(HeH)^* = HeH$. Пусть теперь N_1 — двусторонний идеал, содержащийся в N. Так как $N_1 I \subset N_1 \cap I$, а I минимален, то либо $I \subset N_1$ и $N_1 = N$, либо $N_1 I = 0$. Но в последнем случае $N_1(IH) = N_1 N = 0$ и $N_1 N_1^* \subset N_1 N = 0$, так что $N_1 = 0$. Таким образом, N не содержит собственных двусторонних подидеалов и, значит, есть минимальный двусторонний идеал.

Отсюда следует, что $N^2 = N$, ибо $N^2 \subset N$ и $N^2 = NN^* \neq 0$. Пусть теперь N_1 и N_2 — два различных минимальных двусторонних идеала. Тогда $N_1N_2 = N_2N_1 = 0$, так как $N_1N_2 \subset N_1 \cap N_2$ и потому либо $N_1 = N_1 \cap N_2 = N_2$, что противоречит предположению, либо $N_1N_2 = 0$. Отсюда следует, что $(xy, z) = (y, x^*z) = 0$ для любых $x, y \in N_1$ и $z \in N_2$, так что $N_1 = N_1^2 \perp N_2$. Таким образом, различные минимальные двусторонние идеалы ортогональны.

Так как H есть замкнутая линейная оболочка своих минимальных левых идеалов, а каждый минимальный левый идеал содержится в минимальном двустороннем идеале, то заключаем, что H есть прямая сумма замыканий своих минимальных двусторонних идеалов, т. е. прямая сумма своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов.

Следствие. *Каждый замкнутый двусторонний идеал I есть прямая сумма содержащихся в нем минимальных замкнутых двусторонних идеалов.*

Доказательство. Каждый минимальный двусторонний идеал либо содержится в I, либо ортогонален к I, и утверждение вытекает из того, что минимальные двусторонние идеалы порождают H, а тем самым и I.

Замечание. Так как ортогональное дополнение идеала есть замкнутый идеал, а ортогональное дополнение минимального идеала есть максимальный идеал, то из установленного сейчас следствия вытекает, что каждый замкнутый двусторонний идеал есть пересечение содержащих его максимальных двусторонних идеалов.

27D. Перейдем теперь к исследованию отдельного минимального замкнутого двустороннего идеала N.

Лемма 1. *Если $I = He$ — минимальный (замкнутый) левый идеал с порождающим идемпотентом e, то eHe изоморфно полю комплексных чисел.*

Доказательство. Это—классическое доказательство структурной теоремы Веддербёрна. Если $0 \neq x \in He$, то $0 \neq Hx \subset He$ и потому $Hx = He$, поскольку He минимален. Следовательно, существует элемент $a \in H$ такой, что $ax = e$. Если же $x \in eHe$, так что $x = exe$, то $(eae)(exe) = eaxe = e$. Таким образом, eHe есть алгебра с единицей, в которой каждый ненулевой элемент обладает левым обратным. Тогда, как доказывается в элементарной теории групп, каждый такой элемент имеет двусторонний обратный. Тем самым eHe есть нормированная алгебра с делением и, следовательно, согласно замечанию в конце п. 22F, изоморфна полю комплексных чисел. Это, конечно, означает, что каждый элемент из eHe имеет вид λe.

Лемма 2. *Следующие условия равносильны:*

(а) $\{e_\alpha\}$ *есть максимальное семейство взаимно ортогональных неприводимых самосопряженных идемпотентов из* N;

(б) $\{He_\alpha\}$ *есть семейство взаимно ортогональных минимальных левых идеалов, порождающее* N;

(в) $\{e_\alpha H\}$ *есть семейство взаимно ортогональных минимальных правых идеалов, порождающее* N.

Доказательство. Равносильность условий (а) и (б) следует из того, что $He_\alpha \perp He_\beta$ тогда и только тогда, когда $e_\alpha \perp e_\beta$, и из п. 27В. То же справедливо и для (а) и (в). Существование такого максимального семейства гарантируется леммой Цорна.

27E. Пусть $\{e_\alpha\}$ и N имеют прежний смысл. Выберем какой-нибудь фиксированный элемент $e_1 \in \{e_\alpha\}$, и пусть e_α — любой другой элемент из $\{e_\alpha\}$. Так как $He_\alpha H$ порождает N, то $e_1 He_\alpha He_1 \neq 0$ и потому $e_1 He_\alpha \neq 0$. Пусть $e_{1\alpha}$ — произвольный ненулевой элемент из $e_1 He_\alpha$. Тогда $e_{1\alpha}e_{1\alpha}^* \in e_1 He_1$ и $e_{1\alpha}$ можно подогнать с помощью скалярного множителя так, чтобы $e_{1\alpha}e_{1\alpha}^* = e_1$. Далее, $e_{1\alpha}^* \subset (e_1 He_\alpha)^* = e_\alpha He_1$, и легко проверить, что $e_{1\alpha}^* e_{1\alpha}$ идемпотентно в поле $e_\alpha He_\alpha$, а потому равно e_α. Положим $e_{\alpha 1} = e_{1\alpha}^*$ и $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha 1}e_{1\beta}$. Из этих определений непосредственно вытекают формулы

$$e_{\alpha\beta}\, e_{\gamma\delta} = \begin{cases} e_{\alpha\delta}, & \text{если } \beta = \gamma, \\ 0, & \text{если } \beta \neq \gamma, \end{cases}$$

$$e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha}^*, \quad e_{\alpha\alpha} = e_\alpha.$$

Далее, $(e_{\alpha\beta},\ e_{\gamma\delta}) = (e_{\alpha 1}e_{1\beta},\ e_{\gamma 1}e_{1\delta}) = (e_{1\beta}e_{\delta 1},\ e_{1\alpha}e_{\gamma 1})$, откуда

$$(e_{\alpha\beta},\ e_{\gamma\delta}) = \begin{cases} (e_1,\ e_1), & \text{если } \alpha = \gamma \text{ и } \beta = \delta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Множество $e_\alpha He_\beta$ есть одномерное пространство, образованное скалярными кратными элемента $e_{\alpha\beta}$, ибо при заданном $x \in H$ имеем $e_\alpha x e_{\beta\alpha} \in e_\alpha H e_\alpha \Rightarrow e_\alpha x e_{\beta\alpha} = ce_\alpha$ для некоторого $c \Rightarrow e_\alpha x e_\beta = ce_{\alpha\beta}$.

Как мы знаем, ye_β для любого $y \in H$ есть проекция y на He_β, а $e_\alpha y$—на $e_\alpha H$. Поэтому для $x \in N$ имеем $x = \sum\limits_\beta xe_\beta = \sum\limits_{\alpha,\beta} e_\alpha x e_\beta = \sum\limits_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$, чем доказано, что совокупность элементов $e_{\alpha\beta}$ образует ортогональный базис для N и $e_\alpha x e_\beta$ есть проекция x на $e_\alpha H e_\beta$. Коэффициенты Фурье $c_{\alpha\beta}$ вычисляются обычным образом: $c_{\alpha\beta} = \frac{(x,\ e_{\alpha\beta})}{\| e_{\alpha\beta} \|^2}$. Тем самым нами доказана следующая

Теорема. *Алгебра N изоморфна алгебре всех комплексных матриц $\{c_{\alpha\beta}\}$, для которых $\sum\limits_{\alpha,\beta} |c_{\alpha\beta}|^2 < \infty$, причем изоморфизм устанавливается соответствием $x \leftrightarrow \{c_{\alpha\beta}\}$, где $x = \sum\limits_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta} = \frac{(x,\ e_{\alpha\beta})}{\|e_{\alpha\beta}\|^2}$.*

В проведенном исследовании неявно содержится также следующая

Теорема. *Два минимальных левых идеала алгебры H (операторно) изоморфны тогда и только тогда, когда они содержатся в одном и том же минимальном замкнутом двустороннем идеале N.*

Доказательство. Пусть I_1 и I_2 — минимальные левые идеалы с самосопряженными образующими идемпотентами e_1 и e_2. Предположим, что они оба содержатся в N. Если I_1 и I_2 не ортогональны, то отображение $x \to xe_1$ переводит I_2 в ненулевой подидеал в I_1, и так как I_1 и I_2 минимальны, то оно является изоморфным отображением I_2 на I_1; то, что такое отображение есть операторный изоморфизм, непосредственно следует из ассоциативного закона: $y(xe_1) = (yx)e_1$. Если же I_1 и I_2 ортогональны, то они содержатся в некотором максимальном семействе ортогональных минимальных идеалов леммы 2 п. 27D, и требуемый изоморфизм осуществляется отображением $x \to xe_{21}$.

Напротив, если I_1 и I_2 содержатся в ортогональных минимальных двусторонних идеалах N_1 и N_2, то они не могут быть операторно изоморфны, поскольку $N_1I_2 = 0$, тогда как $N_1I_1 = I_1$.

27F. Теорема. *Следующие предложения равносильны:*

(a) *Минимальный замкнутый двусторонний идеал N конечномерен.*

(б) N, *как подалгебра в* H, *содержит единицу.*

(в) N *содержит ненулевой центральный элемент.*

Доказательство. Если идеал N конечномерен, то конечная сумма $e = \sum_\alpha e_\alpha$ является самосопряженным идемпотентом таким, что $x = \sum_\alpha xe_\alpha = xe$ и $x = \sum_\alpha e_\alpha x = ex$ для каждого $x \in N$. Таким образом, e — единица для N. Далее, для любого $x \in H$ имеем $xe = e(xe) = (ex)e = ex$, так что e принадлежит центру алгебры H. Итак, (а)$\Rightarrow$(б) и (в). Обратно, если e — единица для N, то $e_\alpha = ee_\alpha$ есть проекция e на He_α и, значит, $e = \sum e_\alpha$. Так как элементы e_α имеют все одинаковую норму ([46]), то эта сумма должна быть конечной, т. е. N — конечномерным. Наконец, предположим, что N содержит центральный элемент $x \neq 0$. Так как $xe_\alpha = (xe_\alpha)e_\alpha = e_\alpha xe_\alpha$, то проекция x на He_α имеет вид $c_\alpha e_\alpha$, где c_α — некоторая постоянная, и $x = \sum c_\alpha e_\alpha$. Тогда $c_\beta e_{\beta\delta} = xe_{\beta\delta} = e_{\beta\delta}x = c_\delta e_{\beta\delta}$, так что $c_\beta = c_\delta$, т. е. все коэффициенты c_α равны. Значит, разложение N в прямую сумму He_α снова должно быть конечным и N конечномерно. Вместе с тем мы видим, что в этом случае центральные элементы из N имеют вид ce, где c — общее значение коэффициентов c_α.

Пусть теперь $\{N_\alpha\}$ — множество всех минимальных замкнутых двусторонних идеалов алгебры H. Тогда каждый элемент $x \in H$ обладает однозначно определенным разложением $x = \sum x_\alpha$, где x_α — проекция x на N_α. Ясно, что $(xy)_\alpha = x_\alpha y = xy_\alpha = x_\alpha y_\alpha$, откуда, в частности, следует, что x_α центральны, если x централен: $x_\alpha y = (xy)_\alpha = (yx)_\alpha = yx_\alpha$. Поэтому при заданном α либо $x_\alpha = 0$ для каждого центрального элемента x, либо N_α содержит единицу e_α. Таким образом, мы получили

Следствие. *Пусть* H_0 — *подпространство в* H, *являющееся прямой суммой всех конечномерных минимальных двусторонних идеалов. Тогда каждый центральный элемент* x *содержится в* H_0 *и обладает разложением вида* $x = \sum c_\alpha e_\alpha$, *где* c_α — *скаляр, а* e_α — *единица в* $N_\alpha \subset H_0$. H_0 — *замкнутый двусторонний идеал, порождаемый центральными элементами алгебры* H.

27G. Если алгебра H коммутативна, то каждый ее элемент — центральный, а все минимальные идеалы N_α одномерны и образованы каждый скалярными кратными своей единицы e_α. Минимальные идеалы N_α являются ортогональными дополнениями максимальных идеалов M_α, причем гомоморфизм $x \to x^\wedge(M_\alpha)$ задается формулой $x^\wedge(M_\alpha) = \frac{(x, e_\alpha)}{\|e_\alpha\|^2}$, так что $x^\wedge(M_\alpha)$ есть просто коэффициент в разложении x по ортогональному базису $\{e_\alpha\}$. Это следует из того, что изоморфизм между H/M_α и полем комплексных чисел устанавливается соответствием $H/M_\alpha \cong N_\alpha = \{ce_\alpha\}$ и $ce_\alpha \leftrightarrow c$.

В частности, непрерывная функция $e_\alpha^\wedge$ равна 1 в точке M_α и 0 в других точках, так что пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов дискретно.

Глава VI

ИНТЕГРАЛ ХААРА

В этой главе будет доказано, что на каждой локально компактной группе существует однозначно определенный лево-инвариантный интеграл (или мера); мы будем называть его *интегралом (мерой) Хаара*. Для аддитивной группы R вещественных чисел, группы R/I вещественных чисел, приведенных по модулю 1, и декартова произведения R^n (т. е. n-мерного евклидова пространства) это — обыкновенный интеграл Лебега. Для любой дискретной группы, скажем, группы I целых чисел, интеграл Хаара приписывает каждой точке меру 1. В случае топологического произведения бесконечного множества интервалов единичной длины (групп R/I) мера Хаара есть не что иное, как так называемая тороидальная мера Иессена. Таким образом, в каждом из этих случаев мера Хаара есть очевидная мера, уже определенная на данном пространстве известной его структурой. Однако в случае групп матриц отнюдь не столь ясно, как определять меру структурными рассмотрениями. Для более же сложных групп положение оказалось обратным: не структура была использована как средство построения меры, а, напротив, инвариантная мера — как средство открытия их структуры. Поэтому совершенно необходимо было иметь общее неструктурное доказательство существования инвариантной меры. Первое такое доказательство, явившееся вместе с тем прототипом всех последующих, было дано Хааром в 1933 г. [22].

Первые три параграфа этой главы посвящены непосредственно интегралу Хаара: в § 28 устанавливаются необходимые элементарные топологические свойства рассматриваемых групп, в § 29 даются доказательства существования и единственности и в § 30 рассматривается модулярная функция. В §§ 31 и 32 рассматривается групповая алгебра и устанавливаются некоторые элементарные теоремы представления. Глава заканчивается, в § 33, теорией инвариантных мер на фактор-пространствах.

§ 28. Топология локально компактных групп

Топологическая группа — это группа вместе с заданной на ней топологией, в которой групповые операции непрерывны. Каждая группа, снабженная дискретной топологией, является топологической группой, и притом локально компактной. Упомянутые выше специальные группы R, R/I, R^n, $(R/I)^{\aleph}$ все являются локально компактными коммутативными топологическими группами; при этом вторая и четвертая компактны. Простым примером некоммутативной локально компактной группы может служить группа всех линейных преобразований $y = ax + b$ прямой, для которых $a > 0$, снабженная обычной топологией декартовой полуплоскости, образованной точками $\langle a, b \rangle$ с $a > 0$. Более обще, любая группа матриц n-го порядка, рассматриваемая как подмногообразие n^2-мерного евклидова пространства, есть локально компактная группа, обычно некоммутативная. Такие группы представляют для нас интерес в том отношении, что, будучи локально компактными, они, в силу общей теоремы § 29, обладают инвариантной мерой и потому образуют естественное поле действия общего гармонического анализа. Разумеется, существуют широкие классы не локально компактных топологических групп, играющие весьма важную роль в других областях математики.

В этом параграфе будет изложен минимальный запас топологических сведений, необходимых для теории интегрирования.

28A. Мы начнем с некоторых простых непосредственных следствий определения топологической группы G.

1) При фиксированном $a \in G$, $x \to ax$ есть гомеоморфное отображение пространства G на себя, переводящее часть G, окружающую единичный элемент e, в часть, окружающую a. Если V — окрестность e, то aV — окрестность a, и если U — окрестность a, то $a^{-1}U$ — окрестность e. Таким образом, пространство G «однородно» в том смысле, что топология вблизи любой его точки — та же самая, что и вблизи любой другой. Отображение $x \to xa$ есть, вообще говоря, другой гомеоморфизм, переводящий e в a. Обращение $x \to x^{-1}$ также является гомеоморфным отображением G на себя.

2) Каждая окрестность U единичного элемента e содержит *симметричную* его окрестность W, т. е. такую, что $W = W^{-1}$.

Действительно, такой окрестностью может служить $W = U \cap U^{-1}$. Аналогично, если $f(x)$ — непрерывная комплексная функция, равная нулю вне W, то функция $g(x) = f(x) + f(x^{-1})$ симметрична [т. е. $g(x) = g(x^{-1})$] и равна нулю вне W, а $h(x) = \overline{f(x)} + f(x^{-1})$ эрмитово-симметрична [т. е. $\overline{h(x)} = h(x^{-1})$].

3) Каждая окрестность U единичного элемента e содержит окрестность его V такую, что $V^2 = V \cdot V \subset U$. Действительно, прообраз открытого множества U при отображении $G \times G \to G$, осуществляемом непрерывной функцией xy, является открытым множеством в $G \times G$, содержащим (e, e), и потому должен содержать множество вида $V \times V$. Аналогично, взяв V симметричной или же рассматривая непрерывные функции xy^{-1} и $x^{-1}y$, можно найти окрестность V элемента e такую, что $VV^{-1} \subset U$ или $V^{-1}V \subset U$.

Заметим, что $V^{-1}V \subset U$ тогда и только тогда, когда $aV \subset U$ для всех a таких, что $e \in aV$.

4) Групповое произведение двух компактных множеств компактно. Действительно, если $A \subset G$ и $B \subset G$ компактны, то $A \times B$ компактно в $G \times G$ и AB компактно как множество значений непрерывной функции xy на компактном множестве $A \times B$ (см. теорему 2Н).

5) Для всякого подмножества $A \subset G$ его замыкание $\overline{A}$ есть $\bigcap\limits_V AV$, где пересечение берется по всем окрестностям V единичного элемента e. Действительно, если $y \in \overline{A}$, то yV^{-1} для любой окрестности V единичного элемента есть открытое множество, содержащее y, а значит, и некоторую точку $x \in A$. Тем самым $y \in xV \subset AV$, значит, $\overline{A} \subset AV$ для каждого V, т. е. $\overline{A} \subset \bigcap\limits_V AV$. Обратно, если $y \in \bigcap\limits_V AV$, то yV^{-1} пересекает A для каждого V и $y \in \overline{A}$. Таким образом, $\bigcap\limits_V AV = \overline{A}$.

6) Если V — симметричная компактная окрестность единичного элемента e, то V^n компактно для каждого натурального n и, следовательно, подгруппа $V^\infty = \lim\limits_{n\to\infty} V^n$ σ-компактна (т. е. является объединением счетного семейства компактных множеств). Очевидно, что V^∞ — открытое множество, ибо $y \in V^\infty \Rightarrow yV \subset V^\infty V = V^\infty$; а так как $\overline{V^\infty} \subset V^\infty V = V^\infty$, то V^∞ также замкнуто. Так как и все смежные классы группы G по подгруппе V^∞

являются открыто-замкнутыми множествами, то G есть объединение (возможно, несчетного) семейства непересекающихся σ-компактных открыто-замкнутых множеств. Это замечание важно тем, что гарантирует невозможность возникновения патологий в теории меры на локально компактной группе (см. п. 15D).

28B. Теорема. *На локально компактной группе всякая функция f из алгебры L непрерывных функций с компактными носителями лево- (и право-) равномерно непрерывна. Другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V единичного элемента e такая, что $|f(sx) - f(x)| < \varepsilon$ для всех x и всякого $s \in V$ или, что то же, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех x и y таких, что $xy^{-1} \in V$.*

Доказательство. Пусть C — компактное множество, для которого $f \in L_C$ (т. е. $f = 0$ вне C), и U — симметричная компактная окрестность e. Согласно теореме 5F, множество W точек s таких, что $|f(sx) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in UC$, открыто; очевидно, оно содержит $s = e$. С другой стороны, $f(x)$ и $f(sx)$ при $s \in U$ обе равны нулю вне UC. Поэтому при $s \in V = W \cap U$ имеем $|f(sx) - f(x)| < \varepsilon$ для всех x, что и требовалось.

Каждая функция f на G порождает функции f_s и f^s, определяемые равенствами

$$f_s(x) = f(sx), \qquad f^s(x) = f(xs^{-1}).$$

Их можно рассматривать как левые и правые сдвиги функции f. Выбор в одном из этих определений s, а в другом s^{-1} необходим, если требовать, чтобы выполнялись ассоциативные законы $f_{st} = (f_s)_t$ и $f^{st} = (f^s)^t$. (По другим причинам f_s часто определяют формулой $f_s(x) = f(s^{-1}x)$.)

Следствие. *Пусть $f \in L$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и I — интеграл на L. Тогда f_s и f^s, как элементы пространства $L^p(I)$, являются непрерывными функциями от s.*

Доказательство. В случае $p = \infty$ утверждается просто равномерная непрерывность функции f, а мы видели выше, что $\|f_s - f\|_\infty < \varepsilon$ при $s \in V$. Пусть B — граница I (см. п. 16C) на компактном множестве $\overline{V}C$, где V и C — те же, что выше. Тогда

$$\|f_s - f\|_p = [I(|f_s - f|^p)]^{\frac{1}{p}} \leqslant B^{\frac{1}{p}} \|f_s - f\|_\infty < B^{\frac{1}{p}}\varepsilon \text{ при } s \in V,$$

и непрерывность f_s в L^p доказана. Доказательство для f^s проводится аналогично.

28C. Фактор-пространства. Пусть S — любое множество и Π — его разбиение на непересекающиеся классы. *Фактор-пространство* S/Π, или расслоение S посредством Π, получается путем объединения всех элементов каждого класса в одну точку. В том случае, когда S — топологическое пространство, соответствующую топологию на S/Π естественно подчинить следующим двум требованиям. Первое состоит в том, чтобы естественное отображение α пространства S на S/Π, переводящее каждую точку из S в содержащий ее класс, было непрерывно. Таким образом, подмножество $A \subset S/\Pi$ не должно быть открытым, если $\alpha^{-1}(A)$ не открыто в S. Второе требование заключается в том, чтобы для любой непрерывной функции f на S, постоянной на каждом классе, соответствующая функция F на S/Π, определяемая формулой $F(\alpha(x)) = f(x)$, была непрерывна на S/Π. Чтобы удовлетворить этому второму требованию, за топологию на S/Π берут сильнейшую из всех топологий, удовлетворяющих первому: подмножество $A \subset S/\Pi$ считается по определению открытым в том и только в том случае, если $\alpha^{-1}(A)$ — открытое подмножество в S. Тогда отображение α автоматически непрерывно, причем, так как для всякой непрерывной функции f на S, постоянной на каждом классе, и всякого открытого множества U множество $\alpha^{-1}(F^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ открытое, то $F^{-1}(U)$ — открытое множество для каждого открытого U, т. е. функция F непрерывна.

Очевидно, подмножество $B \subset S/\Pi$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1}(B)$ замкнуто в S. В частности, если каждый класс замкнут в S, то каждая точка фактор-пространства S/Π образует в нем замкнутое множество, т. е. S/Π является так называемым T_1-*пространством.*

Все сказанное применимо, в частности, к фактор-пространству левых смежных классов топологической группы G по ее подгруппе H. Получающиеся так расслоения G/H обладают и дальнейшими свойствами, в общем случае уже не имеющими места. Так, справедлива

Теорема. *Естественное отображение α топологической группы G на пространство G/H левых смежных классов по ее* *подгруппе H открыто, т. е. $\alpha(A)$ — открытое множество в G/H, если A — открытое множество в G.*

Доказательство. Пусть $A \subset G$ есть открытое множество. $\alpha^{-1}(\alpha A) = AH = \bigcup \{Ax \colon x \in H\}$, как объединение открытых множеств, является открытым множеством. Но тогда, по определению топологии в G/H, и αA — открытое множество, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если G — локально компактная группа, то G/H локально компактно для любой подгруппы H.*

Доказательство. Если C — компактное подмножество в G, то $\alpha(C)$ — компактное подмножество в G/H (ибо α — непрерывное отображение; см. теорему 2H). В силу доказанной теоремы, каждая внутренняя точка x множества C имеет своим образом $\alpha(x)$ внутреннюю точку множества $\alpha(C)$. Поэтому компактные окрестности отображаются в компактные окрестности, и утверждение доказано.

Следствие 2. *Если G — локально компактная группа, то для каждого компактного замкнутого множества $B \subset G/H$ существует компактное множество $A \subset G$ такое, что $B = \alpha(A)$.*

Доказательство. Пусть C — компактная окрестность единичного элемента группы G. Выберем точки $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \alpha(x_i C) = \alpha\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i C\right).$$

Тогда $\alpha^{-1}(B) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i C\right)$ будет компактным множеством в G, образом которого при отображении α служит B, ибо оно представляет собой просто совокупность тех точек из $\bigcup_{i=1}^{n} x_i C$, которые отображаются в B.

28D. Мы покажем теперь, что, как это нужно для целей теории интегрирования, топологическую группу можно предполагать хаусдорфовым пространством.

Теорема. *Топологическая группа G обладает минимальным замкнутым нормальным делителем и тем самым — максимальной фактор-группой, являющейся T_1-пространством.*

Доказательство. Пусть H — наименьшее замкнутое множество, содержащее единичный элемент e группы G. Покажем, что H — подгруппа. Действительно, если $y \in H$, то $e \in Hy^{-1}$ и, значит, $H \subset Hy^{-1}$ (поскольку H — наименьшее замкнутое множество, содержащее e). Следовательно, если x, $y \in H$, то $x \in Hy^{-1}$, или $xy \in H$. Так как H^{-1} замкнуто, то аналогично заключаем, что $H \subset H^{-1}$. Таким образом, H замкнуто относительно операций умножения и обращения, т. е. является подгруппой.

При этом подгруппа H — нормальная, так как $H \subset xHx^{-1}$ и, следовательно, $x^{-1}Hx \subset H$ для каждого $x \in G$, т. е. $H = xHx^{-1}$ для каждого $x \in G$.

Так как H — наименьшая замкнутая подгруппа группы G, то G/H — наибольшая фактор-группа группы G, обладающая T_1-топологией.

Лемма. *Топологическая группа, являющаяся T_1-пространством, является хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Пусть $x \neq y$, U — открытое множество, служащее дополнением к точке xy^{-1}, и V — симметричная окрестность единичного элемента такая, что $V^2 \subset U$. Тогда V не пересекается с Vxy^{-1} и потому Vx и Vy являются непересекающимися открытыми множествами, содержащими соответственно точки x и y.

Каждая непрерывная функция на топологической группе G постоянна на всех смежных классах по минимальной замкнутой подгруппе H. Следовательно, то же верно и для всех бэровских функций. Таким образом, непрерывные функции и бэровские функции на G являются по существу непрерывными и бэровскими функциями на G/H, так что с точки зрения теории интегрирования можно заменить G на G/H, или, что равносильно этому, считать G хаусдорфовым пространством. Для простоты мы с этого момента будем предполагать, что все рассматриваемые группы обладают этим свойством, хотя многие результаты (в частности, все результаты ближайших трех пунктов) от него не зависят.

§ 29. Интеграл Хаара

Доказательство существования меры Хаара мы проведем, следуя А. Вейлю [48], а затем дадим новое доказательство ее единственности. Такой порядок изложения страдает тем дефектом, что при доказательстве существования привлекается аксиома выбора, в форме выбора точки топологического произведения пространств, а затем установление единственности выбранного функционала показывает, что эта аксиома, теоретически говоря, была не нужна. Существуют доказательства, в которых эта трудность обходится путем одновременного установления и существования и единственности (см. [7] и [33]), однако они более сложны и менее наглядны, и мы решили поступиться бóльшим изяществом такого доказательства ради простоты традиционного метода.

29A. Для любых двух ненулевых функций f и g из L^+ существуют положительные постоянные c_i и точки s_i, $i=1,\ldots,n$, такие, что

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\, g(s_i x).$$

Так, все c_i можно взять равными любому числу, превышающему $\frac{m_f}{m_g}$, где m_f и m_g — максимальные значения функций f и g. *Функцией хааровского покрытия* $(f;\ g)$ *мы называем нижнюю грань совокупности всех сумм* $\sum_{i=1}^{n} c_i$ *коэффициентов таких линейных комбинаций сдвигов функции* g.

Число $(f;\ g)$ есть, очевидно, некая грубая мера веса f относительно g, и перечисленные ниже его свойства, непосредственно следующие из определения, показывают, что при фиксированном g это число ведет себя некоторым образом подобно инвариантному интегралу:

$$(f_s;\ g) = (f;\ g), \tag{1}$$

$$(f_1 + f_2;\ g) \leqslant (f_1;\ g) + (f_2;\ g), \tag{2}$$

$$(cf;\ g) = c\,(f;\ g) \text{ для всех } c > 0, \tag{3}$$

$$f_1 \leqslant f_2 \Rightarrow (f_1;\ g) \leqslant (f_2;\ g), \tag{4}$$

$$(f;\ h) \leqslant (f;\ g)(g;\ h), \tag{5}$$

$$(f;\ g) \geqslant \frac{m_f}{m_g}. \tag{6}$$

Чтобы убедиться в справедливости свойства (6), выбираем x так, чтобы $f(x) = m_f$, и тогда имеем $m_f \leqslant \sum c_i g(s_i x) \leqslant \left(\sum c_i\right) m_g$, откуда $\sum c_i \geqslant \frac{m_f}{m_g}$. Свойство (5) вытекает из замечания, что если $f(x) \leqslant \sum\limits_i c_i g(s_i x)$ и $g(x) \leqslant \sum\limits_j d_j h(t_j x)$, то $f(x) \leqslant \sum\limits_{i,j} c_i d_j h(t_j s_i x)$, откуда

$$(f;\ g) \leqslant \inf \sum_{i,j} c_i d_j = \inf \sum_i c_i \cdot \inf \sum_j d_j = (f;\ g)(g;\ h).$$

Остальные свойства очевидны.

29B. Для того, чтобы $(f;\ g)$ точнее выражало меру относительного веса, нужно брать функции g со все уменьшающимся носителем, а чтобы в результате получилась чистая мера веса функции f, следует перейти к отношению. В соответствии с этим, зафиксируем раз навсегда какую-нибудь функцию $f_0 \in L^+$ $(f_0 \neq 0)$ и положим

$$I_\varphi(f) = \frac{(f;\ \varphi)}{(f_0;\ \varphi)}.$$

Свойство (5) показывает, что

$$\frac{1}{(f_0;\ f)} \leqslant I_\varphi(f) \leqslant (f;\ f_0), \tag{7}$$

так что $I_\varphi'(f)$ ограничено сверху и снизу равномерно для всех φ. Далее, свойства (1), (2) и (3) показывают, что *функционал I_φ лево-инвариантен, полуаддитивен и однороден.* Покажем, что I_φ для малых φ почти аддитивен.

Лемма. *Для любых двух заданных функций f_1 и f_2 из L^+ и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V единичного элемента такая, что*

$$I_\varphi f_1 + I_\varphi f_2 \leqslant I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon \tag{8}$$

для всех $\varphi \in L_V^+$.

Доказательство. Выберем в L^+ функцию f', равную 1 всюду, где $f_1+f_2>0$. Пусть δ и ε' — пока произвольные положительные числа, $f=f_1+f_2+\delta f'$, $h_i=\frac{f_i}{f}$ там, где $f\neq 0$, и $h_i=0$ там, где $f=0$ $(i=1, 2)$. Очевидно, $h_i \in L^+$. Выберем (на основании теоремы 28B) V так, чтобы $|h_i(x)-h_i(y)|<\varepsilon'$ при $xy^{-1}\in V$. Если $\varphi \in L_V^+$ и $f(x)\leqslant \sum\limits_j c_j\varphi(s_jx)$, то, поскольку

$$\varphi(s_jx)\neq 0 \Rightarrow |h_i(x)-h_i(s_j^{-1})|<\varepsilon',$$

имеем

$$f_i(x)=f(x)\,h_i(x)\leqslant \sum_j c_j\varphi(s_jx)\,h_i(x)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_j c_j\varphi(s_jx)\,[h_i(s_j^{-1})+\varepsilon'],$$

$$(f_i;\,\varphi)\leqslant \sum_j c_j\,[h_i(s_j^{-1})+\varepsilon'],$$

$$(f_1;\,\varphi)+(f_2;\,\varphi)\leqslant \sum_j c_j(1+2\varepsilon').$$

Так как сумму $\sum c_j$ можно считать сколь угодно близкой к $(f;\,\varphi)$, то

$$I_\varphi f_1+I_\varphi f_2\leqslant I_\varphi f\cdot(1+2\varepsilon')\leqslant [I_\varphi(f_1+f_2)+\delta I_\varphi(f')]\,(1+2\varepsilon').$$

Чтобы получить отсюда неравенство (8), остается с самого начала выбрать δ и ε' так, чтобы

$$2\varepsilon'(f_1+f_2;\,f_0)+\delta(1+2\varepsilon')(f';\,f_0)<\varepsilon.$$

29C. Мы показали, что I_φ тем лучше имитирует инвариантный интеграл, чем меньше взято φ; для получения самого́ инвариантного интеграла остается лишь перейти к какому-то обобщенному пределу по φ.

Теорема. *На L существует нетривиальный неотрицательный лево-инвариантный интеграл.*

Доказательство. Пусть S_f для каждой ненулевой функции $f\in L^+$ обозначает замкнутый интервал $\left[\frac{1}{(f_0;\,f)},(f;\,f_0)\right]$, а S есть компактное хаусдорфово пространство $\prod\limits_f S_f$ (топологическое произведение пространств S_f). Функционал I_φ для каждой ненулевой функции $\varphi\in L^+$ можно рассматривать как точку пространства S, имеющую своей f-координатой (проекцией на S_f) число $I_\varphi f$. Пусть C_V для каждой окрестности V единичного элемента группы G есть замыкание множества $\{I_\varphi\colon \varphi \in \overset{+}{L}_V\}$ в S. Совокупность компактных множеств C_V центрирована, поскольку

$$C_{V_1} \cap \ldots \cap C_{V_n} = C_{V_1 \cap \ldots \cap V_n}.$$

Пусть I—произвольная точка, принадлежащая пересечению всех C_V. Тогда для любой V, любых $f_1, \ldots, f_n$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi \in \overset{+}{L}_V$ такая, что $|I(f_i) - I_\varphi(f_i)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда и из результатов п. 29В вытекает, что I — неотрицательный лево-инвариантный аддитивный и однородный функционал, причем

$$\frac{1}{(f_0;\, f)} \leqslant I(f) \leqslant (f;\, f_0).$$

Продолжение его с L^+ на L по формуле

$$I(f_1 - f_2) = I(f_1) - I(f_2)$$

является нетривиальным лево-инвариантным интегралом, существование которого утверждает теорема.

Интеграл I распространяется на неотрицательные бэровские функции, как описано в главе III, и к нему применим весь развитый там аппарат лебеговской теории. Отметим здесь лишь то обстоятельство, что так как локально компактная группа является объединением непересекающихся открыто-замкнутых σ-компактных подмножеств (п. 28А, 6), то трудности, которые могут отягчать не σ-конечные меры, здесь не возникают. В частности, проходит намеченное в п. 15D доказательство того, что $(L^1)^* = L^\infty$. (См. также п. 13Е.)

29D. Теорема. *Интеграл I единственен с точностью до мультипликативной постоянной.*

Доказательство. Пусть I и J — два лево-инвариантных неотрицательных интеграла на L и $f \in L^+$. Выберем компактное множество C, для которого $f \in \overset{+}{L}_C$, содержащее его открытое множество U с компактным замыканием и функцию $f' \in L^+$, равную 1 на U. Далее, при заданном $\varepsilon > 0$, выберем симметричную окрестность V единичного элемента так, чтобы $\|f_y - f^z\|_\infty < \varepsilon$ для всех $y, z \in V$ и вместе с тем $CV \cup VC \subset U$. Последнее условие гарантирует, что

$$f(xy) = f(xy) f'(x) \quad \text{и} \quad f(yx) = f(yx) f'(x) \text{ для всех } y \in V,$$

и вместе с предшествующим показывает, что

$$|f(xy) - f(yx)| < \varepsilon f'(x) \text{ для всех } y \in V \text{ и всех } x.$$

Пусть h — любая ненулевая симметричная функция из $\overset{+}{L_V}$. Установленное сейчас неравенство в соединении с теоремой Фубини и левой инвариантностью интегралов I и J дает:

$$\begin{aligned} &I(h) J(f) = I_y J_x h(y) f(x) = I_y J_x h(y) f(yx), \\ &J(h) I(f) = I_y J_x h(x) f(y) = I_y J_x h(y^{-1}x) f(y) = \\ &\qquad = J_x I_y h(x^{-1}y) f(y) = J_x I_y h(y) f(xy) = I_y J_x h(y) f(xy), \\ &|I(h) J(f) - J(h) I(f)| \leqslant I_y J_x \{h(y) |f(yx) - f(xy)|\} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \varepsilon I_y J_x h(y) f'(x) = \varepsilon I(h) J(f'). \end{aligned}$$

Аналогично, для $g \in L^+$, при надлежащем дальнейшем ограничении на h,

$$|I(h) J(g) - J(h) I(g)| \leqslant \varepsilon I(h) J(g'),$$

где g' фиксирована и так же связана с g, как f' — с f. Отсюда

$$\left| \frac{J(f)}{I(f)} - \frac{J(g)}{I(g)} \right| \leqslant \varepsilon \left| \frac{J(f')}{I(f)} + \frac{J(g')}{I(g)} \right|,$$

и так как ε произвольно, то левая часть равна нулю, т. е. входящие в нее отношения равны между собой. Таким образом, фиксируя $g = g_0$ и полагая $c = \frac{J(g_0)}{I(g_0)}$, имеем $J(f) = cI(f)$ для всех $f \in L^+$, и теорема доказана.

Если интеграл I не только лево-, но и право-инвариантен, как это имеет место, например, в том случае, когда группа G коммутативна, доказательство единственности становится тривиальным. Действительно, если f и $h \in L^+$, то, полагая $h^*(x) = h(x^{-1})$, имеем

$$\begin{aligned} J(h) I(f) &= J_y I_x h(y) f(x) = J_y I_x h(y) f(xy) = I_x J_y h(y) f(xy) = \\ &= I_x J_y h(x^{-1}y) f(y) = J_y I_x h^*(y^{-1}x) f(y) = \\ &= J_y I_x h^*(x) f(y) = I(h^*) J(f), \end{aligned}$$

так что $J(f) = cI(f)$, где $c = \frac{J(h)}{I(h^*)}$.

29E. Теорема. *G компактна тогда и только тогда, когда $\mu(G) < \infty$ (т. е. постоянные суммируемы).*

Доказательство. Если G компактна, то $1 \in L$ и $\mu(G) = I(1) < \infty$. Наоборот, если G некомпактна, то какую бы мы ни взяли окрестность V единичного элемента, имеющую компактное замыкание, никакое конечное число ее сдвигов не может покрыть G. Поэтому существует последовательность $\{p_n\}$ точек из G такая, что $p_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} p_i V$. Пусть теперь U — симметричная окрестность единичного элемента такая, что $U^2 \subset V$. Тогда открытые множества $p_n U$ попарно не пересекаются, ибо, если бы $p_n U \cap p_m U \neq \varnothing$ для каких-нибудь номеров n и $m > n$, то мы имели бы $p_m \in p_n U^2 \subset p_n V$, в противоречие со свойством последовательности $\{p_n\}$. Так как все открытые множества $p_n U$ имеют одинаковую положительную меру, то отсюда следует, что мера G бесконечна и постоянные не суммируемы, что и требовалось доказать.

Если G компактна, то меру Хаара обычно нормируют так, чтобы $\mu(G) = 1$ $\left(\int 1 d\mu = I(1) = 1\right)$.

§ 30. Модулярная функция

30A. Лево-инвариантная мера Хаара не обязательно также право-инвариантна: вообще говоря, $I(f^t) \neq I(f)$. Однако $I(f^t)$ при каждом фиксированном t является лево-инвариантным интегралом,

$$I(f_s^t) = I({f^t}_s) = I(f^t),$$

и потому, в силу единственности меры Хаара, существует положительная постоянная $\Delta(t)$ такая, что

$$I(f^t) \equiv \Delta(t) I(f).$$

Функция $\Delta(t)$ называется *модулярной функцией* группы G; если $\Delta(t) \equiv 1$, так что мера Хаара одновременно и лево- и право-инвариантна, то G называют *унимодулярной*.

Лемма. *Коммутативные группы и компактные группы унимодулярны.*

Доказательство. Коммутативный случай тривиален. Если G компактна, то для $f \equiv 1$ имеем

$$\Delta(s) = \Delta(s) I(f) = I(f^s) = I(1) = 1,$$

так что случай компактной группы оказывается также тривиальным.

Выше мы уже заметили, что $I(f^t)$ для каждой $f \in L$ является непрерывной функцией от t. Тем самым модулярная функция $\Delta(t)$ непрерывна. При этом

$$\Delta(st) I(f) = I(f^{st}) = I((f^s)^t) = \Delta(t) I(f^s) = \Delta(s)\Delta(t) I(f).$$

Таким образом, $\Delta(t)$ *есть непрерывное гомоморфное отображение группы G в группу положительных вещественных чисел.*

30B. **Как и можно было ожидать, мера Хаара, вообще говоря,** не инверсно-инвариантна; модулярная функция и здесь играет регулирующую роль. Будем вместо $I(f)$ пользоваться обычным обозначением $\int f(x)\,dx$, ввиду большей его гибкости при замене переменной.

Теорема. $\int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,dx = \int f(x)\,dx.$

Прежде чем перейти к доказательству, введем в рассмотрение функцию

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\,\Delta(x^{-1}),$$

где вместо $f(x^{-1})$ взята комплексно сопряженная функция $\overline{f(x^{-1})}$ с тем, чтобы отображение $f \to f^*$, как это нам позже понадобится, было инволюцией. Из этого определения непосредственно вытекают формулы

$$f^{*s} = \Delta(s) f_s^{\,*}, \qquad f^{s*} = \Delta(s) f^*_s.$$

Доказательство теоремы. Заметим прежде всего, что интеграл теоремы $J(f) = I(\overline{f^*})$ лево-инвариантен:

$$J(f_s) = I(\overline{f_s^{\,*}}) = \Delta(s^{-1}) I(\overline{f^{*s}}) = I(\overline{f^*}) = J(f).$$

Поэтому $J(f) = cI(f)$. Но для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать симметричную окрестность V единичного элемента e, на которой $|1 - \Delta(s)| < \varepsilon$, и затем симметричную функцию $f \in \overset{+}{L}_V$, для которой $I(f) = 1$. Тогда будем иметь

$$|1 - c| = |(1 - c) I(f)| = |I(f) - J(f)| =$$
$$= |I\{(1 - \Delta^{-1}) f\}| < \varepsilon I(f) = \varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то $c = 1$, и теорема доказана.

Следствие 1. *$f^* \in L^1$ тогда и только тогда, когда $f \in L^1$, причем $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$.*

Это вытекает из теоремы в силу того, что L плотно в L^1.

Следствие 2. *Мера Хаара инверсно-инвариантна тогда и только тогда, когда группа G унимодулярна.*

30C. Нижеследующая теорема, собственно, не относится к рассматриваемой теме, однако мы не нашли для нее более удобного места.

Теорема. *Пусть $g(x) \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Тогда $g_s(x)$ и $g^s(x)$ как элементы пространства L^p являются непрерывными функциями от s.*

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, выберем $f \in L$ так, чтобы $\|g - f\|_p = \|g_s - f_s\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, и затем, на основании следствия теоремы 28B, выберем V так, чтобы $\|f - f_s\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $s \in V$. Тогда

$$\|g - g_s\|_p \leqslant \|g - f\|_p + \|f - f_s\|_p + \|f_s - g_s\|_p < \varepsilon \quad \text{для всех } s \in V,$$

и, значит, g_s — непрерывная функция от s в точке $s = e$. Так как $\|f^s - g^s\|_p = [\Delta(s)]^{\frac{1}{p}} \|f - g\|_p$, то предыдущее неравенство сохраняет силу при замене g_s и f_s на g^s и f^s, если только выбор V изменить так, чтобы $\|f - f^s\|_p < \frac{\varepsilon}{6}$ и $[\Delta(s)]^{\frac{1}{p}} < 2$ для всех $s \in V$. Равенства $\|f_{sx} - f_x\|_p = \|f_s - f\|_p$ и $\|f^{sx} - f^x\|_p = [\Delta(x)]^{\frac{1}{p}} \|f^s - f\|_p$ показывают, что обе функции непрерывны всюду, причем f_s лево равномерно непрерывна.

30D. Подробно рассматриваемые в этой главе коммутативные группы унимодулярны. Однако многие важные группы не унимодулярны, и будет нелишне продемонстрировать один из классов таких групп. Пусть G и H — локально компактные унимодулярные группы, и предположим, что каждый элемент $\sigma \in G$ определяет автоморфизм группы H (т. е. дано гомоморфное отображение группы G в группу автоморфизмов группы H); результат применения автоморфизма σ к элементу $x \in H$ будем обозначать $\sigma(x)$ [47].

Читатель проверит, что декартово произведение $G \times H$ является группой относительно умножения, определенного формулой

$$\langle \sigma_1, x_1 \rangle \langle \sigma_2, x_2 \rangle = \langle \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2(x_1) x_2 \rangle.$$

При этом, если $\sigma(x)$ непрерывно по совокупности обоих аргументов σ и x, то эта группа — топологическая и тем самым локально компактная в обычной топологии произведения $G \times H$. Такую группу называют *полупрямым произведением* H *на* G. Она содержит H как нормальный делитель, и в каждый смежный класс ее фактор-группы по H входит по одному элементу из G ([48]).

$\langle \sigma_0, x_0 \rangle (A \times B)$, где A и B — компактные подмножества соответственно из G и H, есть совокупность всех пар $\langle \sigma_0 \sigma, \sigma(x_0) x \rangle$, где $\sigma \in A$ и $x \in B$. Введя в $G \times H$ меру, равную произведению мер Хаара μ и ν, определенных соответственно в G и H, и вычислив ее для множества $\langle \sigma_0, x_0 \rangle (A \times B)$ с помощью теоремы Фубини, интегрируя сначала по x, мы получим $\mu(A) \nu(B)$ ([49]). Но это — также мера множества $A \times B \subset G \times H$. Таким образом, произведение мер Хаара групп G и H является лево-инвариантной мерой Хаара для их полупрямого произведения.

Для вычисления модулярной функции Δ рассмотрим множество

$$(A \times B) \langle \sigma_0, x_0 \rangle = (A \sigma_0) \times (\sigma_0(B) x_0),$$

имеющее меру $\mu(A) \nu(\sigma_0(B))$. Последняя равна $\delta(\sigma_0) \mu(A) \nu(B)$, где $\delta(\sigma_0)$ — число, на которое умножается мера Хаара группы H при автоморфизме σ_0. Поэтому модулярная функция $\Delta(\langle \sigma, x \rangle)$ равна $\delta(\sigma)$, и полупрямое произведение унимодулярно, лишь если $\delta \equiv 1$.

В качестве простого примера примем за H аддитивную группу вещественных чисел R и за G — мультипликативную группу положительных чисел, с $\sigma(x) = \sigma \cdot x$, так что $\langle a, x \rangle \langle b, y \rangle = \langle ab, bx + y \rangle$. Тогда $\Delta(\langle a, x \rangle) = a$, и, значит, эта группа не унимодулярна.

30E. Ясно, что если G и H имеют модулярные функции Δ_1 и Δ_2, то проведенное выше вычисление должно дать выражение модулярной функции Δ полупрямого произведения группы H на G через Δ_1 и Δ_2. Как и выше, произведение мер Хаара групп G и H оказывается лево-инвариантной мерой на их полупрямом произведении, но теперь этой мерой для

$$(A \times B) \langle \sigma_0, x_0 \rangle = (A \sigma_0) \times (\sigma_0(B) x_0)$$

оказывается $\delta(\sigma_0)\Delta_1(\sigma_0)\Delta_2(x_0)\mu(A)\nu(B)$, так что

$$\Delta(\langle\sigma, x\rangle) = \delta(\sigma)\Delta_1(\sigma)\Delta_2(x).$$

Если мы примем здесь за H аддитивную группу вещественных чисел (так что $\Delta_2 \equiv 1$) и положим $\sigma(x) = \frac{x}{\Delta_1(\sigma)}$, то $\delta(\sigma) = \frac{1}{\Delta_1(\sigma)}$ и $\Delta(\langle\sigma, x\rangle) \equiv 1$. Таким образом, любую локально компактную группу G можно путем небольшого продолжения довести до унимодулярной группы, представляющей собой полупрямое произведение аддитивной группы вещественных чисел на группу G. Это замечание принадлежит Глисону [18].

§ 31. Групповая алгебра

В этом параграфе мы докажем существование в $L^1(G)$ операции свертывания и покажем, что с этой операцией в качестве умножения $L^1(G)$ становится банаховской алгеброй. Затем, в пп. 31С — G, мы установим некоторые специальные свойства этой алгебры, более или менее непосредственно вытекающие из ее определения.

31А. Мы определяем *свертку* функций f и g, обозначаемую через $f * g$, формулой

$$(f * g)(x) = \int f(xy)\,g(y^{-1})\,dy = \int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy,$$

где равенство интегралов обеспечивается левой инвариантностью интеграла Хаара. Обычная свертка на вещественной прямой, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$, очевидно, является частным случаем этого определения. Оно обобщает также классическое понятие свертки, применяемое в теории конечных групп. Конечная группа G в ее дискретной топологии компактна, и точки ее, будучи конгруэнтными непустыми открытыми множествами, должны обладать одинаковой положительной мерой Хаара. Если нормировать меру Хаара на G, приписав каждой точке меру 1, то для любых двух комплексных функций f и g на G будем иметь:

$$(f * g)(x) = \int f(xy)\,g(y^{-1})\,dy = \sum_y f(xy)\,g(y^{-1}) = \sum_{uv=x} f(u)\,g(v),$$

что представляет собой классическую формулу свертки.

Приведенное выше определение свертки пока что — чисто формальное, и мы должны прежде всего показать, что $f*g$ существует.

Лемма. *Если* $f \in L_A$ *и* $g \in L_B$, *то* $f*g \in L_{AB}$.

Доказательство. Подинтегральная функция $f(y)\,g(y^{-1}x)$ непрерывна как функция от y для каждого x и равна нулю, если не выполнено хоть одно из условий $y \in A$ и $y^{-1}x \in B$. Таким образом, $(f*g)(x)$ определена для каждого x и равна нулю, если $x \notin AB$. Далее,

$$|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| \leqslant \|f_{x_1}-f_{x_2}\|_\infty \cdot \int |g(y^{-1})|\,dy,$$

и так как, согласно теореме 28B, f_x непрерывна в равномерной норме как функция от x, то заключаем, что $f*g$ — непрерывная функция.

Теорема. *Если* f, $g \in \mathfrak{B}^+$, *то* $f(y)\,g(y^{-1}x) \in \mathfrak{B}^+(G\times G)$ *и*

$$\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\,\|g\|_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Доказательство. Обозначим функцию $f(y)\,g(y^{-1}x)$ через $f\circ g$. Если $f \in L^+$, то семейство функций $g \in \mathfrak{B}^+$, для которых $f\circ g \in \mathfrak{B}^+(G\times G)$, L-монотонно, включает L^+ и потому совпадает с $\mathfrak{B}^+$. Далее, если g — L-ограниченная функция из $\mathfrak{B}^+$, то семейство функций $f \in \mathfrak{B}^+$, для которых $f\circ g \in \mathfrak{B}^+$, включает L^+, L-монотонно и потому совпадает с $\mathfrak{B}^+$. В частности, $f\circ g \in \mathfrak{B}^+$ для любых двух L-ограниченных функций f и g из $\mathfrak{B}^+$. Общее утверждение следует тогда из того, что любая неотрицательная бэровская функция есть предел возрастающей последовательности L-ограниченных бэровских функций ([50]). Теорема Фубини показывает теперь, что $f(y)\,g(y^{-1}x)$ интегрируема по y для каждого x, что

$$(f*g)(x) = \int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy$$

интегрируема и что

$$\|f*g\|_1 = \iint f(y)\,g(y^{-1}x)\,dx\,dy = \|f\|_1\,\|g\|_1.$$

Если $h \in \mathfrak{B}^+$, то также $f(y)\,g(y^{-1}x)\,h(x) \in \mathfrak{B}^+(G\times G)$ (см. п. 13C, следствие 2) и, как выше,

$$(f*g,\ h)=\int f(y)\left(\int g\ (y^{-1}x)\,h(x)\,dx\right)dy\leqslant\|f\|_1\|g\|_p\|h\|_q$$

на основании общего неравенства Гёльдера 14В.

В силу теоремы 15С, отсюда следует, что $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p$ и, в частности, что $f*g\in L^p$, если $f\in L^1$ и $g\in L^p$. Случай $p=\infty$ очевиден.

Следствие. *Если $f\in L^1$ и $g\in L^p$, то $f(y)g(y^{-1}x)$ суммируемо по y почти для всех x, $(f*g)(x)\in L^p$ и $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p$.*

Доказательство. Шестнадцать сверток, полученных свертыванием каждой из четырех неотрицательных частей функции f с каждой из четырех неотрицательных частей функции g, по доказанной теореме, принадлежат L^p, и их алгебраическая сумма, равная $\int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy$, когда все шестнадцать слагаемых конечны (и, как обычно, не определенная там, где слагаемые имеют бесконечные значения противоположных знаков), является, таким образом, элементом пространства L^p. При этом, в силу той же теоремы 15С,

$$\|f*g\|_p\leqslant\||f|*|g|\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p.$$

31В. Теорема. *$L^1(G)$ со свертыванием в качестве умножения является банаховской алгеброй, обладающей естественной непрерывной инволюцией $f\to f^*$.*

Доказательство. Выше мы уже видели, что отображение $f\to f^*$ пространства L^1 на себя сохраняет норму, и теперь завершим доказательство того, что это отображение есть инволюция. Оно, очевидно, аддитивно и сопряженно-линейно. Далее,

$$\begin{aligned}(f*g)^*(x)&=\int\overline{f(x^{-1}y)\,g(y^{-1})}\,\Delta(x^{-1})\,dy=\\&=\int\overline{g(y^{-1})}\,\Delta(y^{-1})\,\overline{f((y^{-1}x)^{-1})}\,\Delta((y^{-1}x)^{-1})\,dy=\\&=(g^**f^*)(x),\end{aligned}$$

так что $(f*g)^*=g^**f^*$.

Ассоциативность свертывания следует из левой инвариантности интеграла Хаара. Для $f,\ g,\ h\in\mathfrak{L}^+$ имеем:

$$((f*g)*h)(x)=\int (f*g)(xy)\,h(y^{-1})\,dy=$$
$$=\iint f(xyz)\,g(z^{-1})\,h(y^{-1})\,dy\,dz=$$
$$=\iint f(xz)\,g(z^{-1}y)\,h(y^{-1})\,dy\,dz=$$
$$=\int f(xz)\,(g*h)(z^{-1})\,dz=(f*(g*h))(x).$$

Поэтому ассоциативный закон выполняется для любой тройки функций f, g, h из классов L^p, для которых определены все четыре свертки $f*g$, $(f*g)*h$, $g*h$ и $f*(g*h)$. Свертка $f*g$, очевидно, также линейна относительно f и g. Так как пространство L^1 замкнуто относительно операции свертывания и, согласно следствию теоремы 31A, $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$, то заключаем, что L^1 есть банаховская алгебра относительно свертывания как умножения. Ее называют *групповой алгеброй* (или групповым кольцом) группы G, в обобщение понятия групповой алгебры, применяемого в классической теории конечных групп.

Переходим к доказательству ряда полезных элементарных свойств групповой алгебры $L^1(G)$.

31C. Теорема. *Групповая алгебра $L^1(G)$ коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна группа G.*

Доказательство. Если G коммутативна, то она унимодулярна и

$$f*g=\int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy=\int g(yx)\,f(y^{-1})\,dy=$$
$$=\int g(xy)\,f(y^{-1})\,dy=g*f.$$

Пусть теперь, обратно, $L^1(G)$ коммутативна. Тогда для f, $g\in L$ имеем

$$0=f*g-g*f=\int [f(xy)\,g(y^{-1})-g(y)\,f(y^{-1}x)]\,dy=$$
$$=\int g(y)\,[f(xy^{-1})\,\Delta(y^{-1})-f(y^{-1}x)]\,dy.$$

Так как это равенство справедливо для всех $g\in L$, то отсюда следует, что

$$f(xu)\,\Delta(u)-f(ux)\equiv 0.$$

Взяв здесь $x = e$, получаем $\Delta(u) \equiv 1$, так что $f(xu) - f(ux) = 0$ для каждой $f \in L$. Так как L отделяет точки, то это показывает, что $xu = ux$, т. е. G коммутативна.

31D. Теорема. *$L^1(G)$ обладает единицей тогда и только тогда, когда G дискретна.*

Доказательство. Если G дискретна, то ее точки являются конгруэнтными открытыми множествами, имеющими одинаковую положительную меру Хаара, которую можно принять равной 1. Поэтому функция $f(x)$ суммируема в том и только в том случае, если она отлична от нуля лишь на конечном или счетном множестве точек $\{x_n\}$, причем в последнем случае $\sum |f(x_n)| < \infty$. Тогда функция $e(x)$, равная 1 для $x = e$ и 0 для всех $x \neq e$, является в $L^1(G)$ единицей:

$$(f * e)(x) = \int f(y)\, e(y^{-1}x)\, dy = \sum_y f(y)\, e(y^{-1}x) = f(x).$$

Пусть, обратно, $L^1(G)$ обладает единицей $u(x)$. Покажем, что тогда меры непустых открытых (бэровских) множеств имеют положительную нижнюю границу. Действительно, в противном случае для любого $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность V единичного элемента e, мера которой меньше ε, а следовательно, и V такая, что $\int_V |u(x)|\, dx < \varepsilon$ ([51]). Возьмем симметричную окрестность U единичного элемента, для которой $U^2 \subset V$, и пусть f — ее характеристическая функция. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) = (u * f)(x) &= \int u(y)\, f(y^{-1}x)\, dy = \\ &= \int_{xU} u(y)\, dy \leqslant \int_V |u(y)|\, dy < \varepsilon \end{aligned}$$

почти для всех $x \in U$, в противоречие с тем, что $f(x) \equiv 1$ на U. Таким образом, существует число $a > 0$, не превосходящее меры любого непустого открытого бэровского множества. Но отсюда сразу следует, что каждое открытое множество, имеющее компактное замыкание и тем самым конечную меру, содержит лишь конечное число точек, ибо иначе его мера была бы $\geqslant na$ для любого n, поскольку в нем можно было бы выбрать любое число

n попарно непересекающихся открытых подмножеств. Тем самым каждая точка является открытым множеством, т. е. топология рассматриваемой группы — дискретная.

31E. Дискретна или не дискретна группа G, ее групповая алгебра $L^1(G)$ во всяком случае обладает «аппроксимативной единицей».

Теорема. *При любых $f \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и $\varepsilon > 0$ существует окрестность V единичного элемента e такая, что $\|f * u - f\|_p < \varepsilon$ и $\|u * f - f\|_p < \varepsilon$ для любой функции $u \in (L^1)^+$, равной нулю вне V и удовлетворяющей условию $\int u = 1$.*

Доказательство. Пусть $h \in L^q$. Из теоремы Фубини и неравенства Гёльдера вытекает, что

$$|(u * f - f,\ h)| = \left| \iint u(y)\,[f(y^{-1}x) - f(x)]\,\overline{h(x)}\,dy\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|h\|_q \int \|f_{y^{-1}} - f\|_p\, u(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$\|u * f - f\|_p \leqslant \int \|f_{y^{-1}} - f\|_p\, u(y)\,dy.$$

Выбрав (на основании теоремы 30C) V так, чтобы $\|f_{y^{-1}} - f\|_p < \varepsilon$ для всех $y \in V$, при $u \in (L^1)^+_V$ будем иметь

$$\|u * f - f\|_p < \varepsilon \int u = \varepsilon.$$

Доказательство для $f * u$ аналогично, но несколько сложнее, если группа G не унимодулярна. Пусть $m = \int u(x^{-1})\,dx$. Тогда

$$|(f * u - f,\ h)| = \left| \iint \left[f(xy) - \frac{1}{m} f(x) \right] u(y^{-1})\,\overline{h(x)}\,dy\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|h\|_q \int \|m f^{y^{-1}} - f\|_p \frac{u(y^{-1})}{m}\,dy$$

и

$$\|f * u - f\|_p \leqslant \int \|m f^{y^{-1}} - f\|_p \frac{u(y^{-1})}{m}\,dy.$$

Но $m \to 1$, когда V стягивается к e [ибо

$$m = \int [u(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})]\,\Delta(x)\,dx,$$

где $\int u(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,dx = \int u(x)\,dx = 1$, а $\Delta(x)$ непрерывна и $\Delta(e)=1$]. Таким образом, существует окрестность V единичного элемента такая, что $\|mf^{y^{-1}} - f\|_p < \varepsilon$ для всех $y^{-1} \in V$, и для $u \in (L^1)_V^+$ получаем

$$\|f*u - f\|_p < \varepsilon \int \frac{u(y^{-1})}{m}\,dy = \varepsilon.$$

Окрестности V единичного элемента образуют направленную систему по включению. Обозначая через u_V неотрицательную функцию, равную 0 вне V и удовлетворяющую условию $\int u_V = 1$, на основании доказанной теоремы заключаем, что $u_V * f$ и $f * u_V$ сходятся к f по норме L^p для любой $f \in L^p$. Направленная система функций u_V может служить вместо единицы во многих рассуждениях, и потому мы будем называть ее *аппроксимативной единицей*.

31F. Теорема. *Замкнутое подмножество в L^1 есть левый (правый) идеал тогда и только тогда, когда оно является лево- (право-) инвариантным подпространством.*

Доказательство. Пусть I — замкнутый левый идеал и u пробегает аппроксимативную единицу. Если $f \in I$, то и $u_x * f \in I$. Но $u_x * f = (u*f)_x \to f_x$, поскольку $u*f \to f$; следовательно, $f_x \in I$. Таким образом, каждый замкнутый левый идеал является лево-инвариантным подпространством.

Пусть теперь, обратно, I — замкнутое лево-инвариантное подпространство в L^1. $I^\perp$ есть совокупность всех $g \in L^\infty$ таких, что $(f, g) = 0$ для любой $f \in I$. Как мы знаем (см. п. 8С), $I = (I^\perp)^\perp$, т. е. функция f из L^1 принадлежит I тогда и только тогда, когда $(f, g) = 0$ для каждой $g \in I^\perp$. Но если $h \in L^1$, $f \in I$ и $g \in I^\perp$, то

$$\begin{aligned}(h*f, g) &= \iint h(y)\,f(y^{-1}x)\,\overline{g(x)}\,dy\,dx = \\ &= \int h(y)\left(\int f(y^{-1}x)\,\overline{g(x)}\,dx\right)dy = 0\end{aligned}$$

(ибо $f_y \perp g$ для всех y), а это, в силу предыдущего замечания, показывает, что $h*f \in I$, т. е. I — левый идеал.

То же самое доказательство, лишь с тривиальными модификациями, годится и для правых идеалов.

31G. В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о положительно определенных функциях. При этом мы ограничимся исключительно унимодулярными группами. Напомним, что понятие положительности было введено при изучении абстрактной банаховской алгебры, обладающей непрерывной инволюцией. Этой алгеброй является теперь $L^1(G)$, и нашим отправным пунктом будет идеал L^0, образованный равномерно непрерывными функциями из L^1, и функционал φ, определенный на L^0 формулой $\varphi(f) = f(e)$. Так как

$$\varphi(f * f^*) = \int f(x)\overline{f(x)}\,dx = \|f\|_2^2 \geqslant 0,$$

то φ положителен, а H_φ есть $L^2(G)$. Поскольку

$$\|g * f\|_2 \leqslant \|g\|_1 \|f\|_2,$$

операторы U_g, определенные формулой $U_g f = g * f$, ограничены и отображение $g \to U_g$ является симметричным представлением алгебры $L^1(G)$. Оно называется *левым регулярным представлением* и будет рассмотрено позже, в п. 32D. Таким образом, функционал φ унитарен, но, очевидно, не непрерывен (в норме L^1).

На другом полюсе находятся положительные функционалы, непрерывные в норме L^1.

Лемма. *Положительный функционал на $L^1(G)$ непрерывен тогда и только тогда, когда он продолжаем.*

Доказательство. Выше мы видели (п. 26H, лемма 2), что любой продолжаемый положительный функционал автоматически непрерывен. Обратное утверждение получается здесь благодаря существованию аппроксимативной единицы. Для любого непрерывного положительного функционала P имеем

$$|P(f)|^2 = \lim |P(f * u)|^2 \leqslant P(f * f^*)\,\overline{\lim}\, P(u^* * u) \leqslant \leqslant \|P\| P(f * f^*),$$

$$P(f^*) = \lim P(f^* * u) = \lim \overline{P(u^* * f)} = \overline{P(f)},$$

и лемма доказана.

Теперь, каждый непрерывный функционал P на L^1 определяется функцией $p \in L^\infty$; если P положителен, то p называют *положительно определенной*. Отметим, что тогда $p = p^*$, ибо

$$(f, p) = P(f) = \overline{P(f^*)} = \overline{(f^*, p)} = (p, f^*) = (f, p^*)$$

для каждой $f \in L^1$. Это понятие положительной определенности формально совпадает с введенным в п. 26J, если за соответствующий фиксированный унитарный функционал принять функционал φ, введенный в начале этого пункта:

$$P(f) = (f, p) = (f, p^*) = (p, f^*) = (p * f)(e) = \varphi(p * f).$$

Условие положительной определенности функции $p \in L^\infty$ может быть записано так:

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\, p(xy^{-1})\, dx\, dy \geqslant 0 \text{ для всех } f \in L^1.$$

§ 32. Представления

32A. *Представлением* T группы G называют сильно непрерывное гомоморфное отображение ее в группу линейных преобразований комплексного векторного пространства X. Другими словами, преобразование T_s, соответствующее групповому элементу s, должно удовлетворять условиям: $T_{st} = T_s T_t$ и $T_s(x)$ — непрерывная функция от s для каждого $x \in X$. Если X конечномерно, то это требование непрерывности может быть выражено как требование непрерывности коэффициентов матрицы, представляющей преобразование T_s при выборе фиксированного базиса в X. Если пространство X бесконечномерно, то оно должно быть как-то топологизированным. Обычно X предполагается банаховским пространством, и здесь мы ограничимся рефлексивными банаховскими пространствами и гильбертовым пространством. Мы будем называть представление T *ограниченным*, если норма $\|T_s\|$ равномерно ограничена сверху для всех $s \in G$. T называют *унитарным* представлением, если X — гильбертово пространство и все преобразования T_s унитарны.

32B. *Пусть T — ограниченное представление группы G на рефлексивном банаховском пространстве X. Для каждой функции $f \in L^1$ положим*

$$T_f = \int f(x)\, T_x\, dx.$$

Тогда $f \to T_f$ будет ограниченным представлением для $L^1(G)$. Если T унитарно, то указанное интегральное представление является симметричным представлением алгебры $L^1(G)$.

Доказательство. Функция

$$F(f, x, y) = \int f(s)(T_s x, y)\, ds = \int f(s)\, y(T_s x)\, ds$$

трилинейна и удовлетворяет неравенству

$$|F(f, x, y)| \leqslant \|f\|_1 B \|x\| \|y\|.$$

Так же, как в п. 26F, отсюда следует существование на X однозначно определенного линейного преобразования T_f такого, что

$$(T_f x, y) = \int f(s)(T_s x, y)\, ds, \qquad \|T_f\| \leqslant B\|f\|_1$$

и отображение $f \to T_f$ линейно. Далее,

$$\begin{aligned}(T_{f*g}x, y) &= \iint f(t)\, g(t^{-1}s)(T_s x, y)\, dt\, ds = \\ &= \iint f(t)\, g(s)(T_{ts}x, y)\, ds\, dt = \\ &= \int g(s)(T_f T_s x, y)\, ds = \int g(s)(T_s x, (T_f)^* y)\, ds = \\ &= (T_g x, (T_f)^* y) = (T_f T_g x, y).\end{aligned}$$

Таким образом, $T_{f*g} = T_f T_g$, и отображение $f \to T_f$ гомоморфно. Если X — гильбертово пространство и T — унитарное представление, то

$$\begin{aligned}(T_{f^*}x, y) &= \int \overline{f(s^{-1})}\, \Delta(s^{-1})(T_s x, y)\, ds = \\ &= \int f(s)\, \overline{(T_s y, x)}\, ds = \overline{(T_f y, x)} = (x, T_f y).\end{aligned}$$

Таким образом, $(T_f)^* = T_{f^*}$ и T — симметричное представление.

Замечание. *Ни один ненулевой элемент из X не аннулируется всеми T_f.* Действительно, если $0 \neq x \in X$, то, взяв $y \in X^*$, для которого $(x, y) \neq 0$, можно найти окрестность V единичного элемента группы G такую, что $(T_s x, y)$ при $s \in V$ сколь угодно мало отличается от (x, y). Если f — характеристическая функция множества V, то тогда

$$(T_f x, y) = \int_V (T_s x, y)\, ds$$

сколь угодно мало отличается от $\mu(V)(x, y)$ и потому $T_f x \neq 0$.

32С. Теорема. *Обратно, всякое ограниченное представление T алгебры $L^1(G)$ на банаховском пространстве X, обладающее тем свойством, что объединение множеств значений всех операторов T_f, $f \in L^1$, плотно в X, может быть получено описанным образом. При этом, если X — гильбертово пространство и T — симметричное представление, то T унитарно.*

Доказательство. Пусть X_r — объединение множеств значений всех операторов T_f $(f \in L^1)$; по предположению, X_r плотно в X. Пусть u пробегает аппроксимативную единицу в L^1. Как мы знаем, $u_a * f = (u * f)_a \to f_a$ и потому $\| T_{u_a} T_f - T_{f_a} \| \to 0$. Таким образом, T_{u_a} сходятся сильно (т. е. в каждой точке) на X_r к оператору U_a, удовлетворяющему условию $U_a T_f = T_{f_a}$, и так как $\| T_{u_a} \| \leqslant B \| u_a \|_1 = B$ для каждого u, то заключаем, что $\| U_a \| \leqslant B$ и оператор U_a однозначно определен на всем X (см. п. 7F). Так как

$$U_{ab} T_f = T_{f_{ab}} = T_{(f_a)_b} = U_b T_{f_a} = U_b U_a T_f$$

(т. е. $U_{ab} = U_b U_a$ на X_r), то $U_{ab} = U_b U_a$, так что отображение $a \to U_a$ есть антигомоморфизм. Наконец, f_a как элемент из L^1 является непрерывной функцией от a, и потому $U_a T_f = T_{f_a}$ есть непрерывная функция от a. Таким образом, U_a сильно непрерывен на X_r, а значит, и на X. Так как U — антигомоморфизм, то для получения прямого гомоморфизма полагаем $T_a = U_{a^{-1}}$.

Остается показать, что $(T_f x, y) = \int f(s) (T_s x, y)\, ds$ для всех $x \in X$, $y \in X^*$ и $f \in L^1$. При этом, очевидно, можно ограничиться любым плотным множеством точек $x \in X$ и функциями $f \in L$. Таким образом, достаточно показать, что

$$(T_{f\,\bullet}\ z, y) = \int f(s) (T_s T_g z, y)\, ds \text{ для всех } f, g \in L.$$

Но при фиксированных x и y линейный функционал $J(f) = (T_f x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$| J(f) | \leqslant B \| x \| \| y \| \| f \|_1$$

и потому является комплексным интегралом (суммой своих четырех частей — см. п. 15A). Поэтому, в силу теоремы Фубини,

$$(T_{f*g}x, y) = J_t\left(\int f(s)\, g(s^{-1}t)\, ds\right) =$$
$$= \int f(s)\, J_t\,[g(s^{-1}t)]\, ds = \int f(s)\,(T_sT_gx, y)\, ds,$$

что и требовалось.

Если X — гильбертово пространство и T — симметричное представление, то нужно еще показать, что T_s унитарно для каждого $s \in G$, т. е. что $T_s^* = T_s^{-1} = T_{s^{-1}}$. Но

$$T_s^* = T_{s^{-1}} \Leftrightarrow T_s^*T_f = T_{s^{-1}}T_f = T_{f_s} \text{ для всех } f \in L^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{s^{-1}}^{\;*} * f \to f_s, \text{ когда } u \text{ пробегает аппроксимативную единицу } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^* * u_{s^{-1}} \to f_s^* \Leftrightarrow g * u_{s^{-1}} \to g^*{}_s^{\;*}.$$

Но непосредственное вычисление показывает, что

$$g^*{}_s^{\;*} = \Delta(s^{-1})\, g^s \text{ и } g * u_{s^{-1}} = \Delta(s^{-1})\, g^s * u,$$

и так как мы знаем, что $g^s * u \to g^s$, то утверждаемое соотношение действительно справедливо.

32D. Взяв в качестве X банаховское пространство $L^p(G)$ с некоторым фиксированным $p \in [1, \infty]$ и определив на X оператор T_f формулой $T_fg = f * g$ для произвольных $f \in L^1$, $g \in L^p$, можно непосредственно проверить, что отображение $f \to T_f$ есть ограниченное представление алгебры $L^1(G)$. Так, $T_fT_gh = f*(g*h) = (f*g)*h = T_{f*g}h$, откуда $T_{f*g} = T_fT_g$. Далее, неравенство $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$ показывает, что $\|T_f\| \leqslant \|f\|_1$, так что это представление имеет границу 1.

С другой стороны, имеется очевидное групповое представление $s \to T_s$, определенное формулой $T_sf = f_{s^{-1}}$, или $(T_sf)(t) = f(s^{-1}t)$. В силу левой инвариантности меры Хаара, все преобразования T_s являются изометриями.

Взаимосвязь этой пары представлений совершенно такая же, как в предыдущих двух теоремах. Так, если $g \in L^p$ и $h \in L^q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, то

$$\int f(s)\,(T_sg, h)\, ds = \iint f(s)\, g(s^{-1}t)\,\overline{h(t)}\, ds\, dt = (f*g, h) = (T_fg, h).$$

При $p=2$ преобразования T_s, в силу левой инвариантности меры Хаара, унитарны:

$$(T_s f, T_s g) = \int f(s^{-1}t)\overline{g(s^{-1}t)}\,dt = \int f(t)\overline{g(t)}\,dt = (f, g).$$

Из нашей общей теории следует, что рассматриваемое представление алгебры L^1 симметрично. Разумеется, это можно проверить и непосредственно: равенство $(f * g, h) = (g, f^* * h)$ непосредственно вытекает из теоремы Фубини и левой инвариантности интеграла Хаара. Описанные сейчас представления называют (левыми) *регулярными* представлениями соответственно группы G и ее групповой алгебры $L^1(G)$. Оба они являются точными (взаимно однозначными) представлениями. Действительно, если $s \neq e$, то можно выбрать g равным нулю вне столь малой окрестности e, чтобы $gg_s = 0$, откуда, в частности, $T_s g \neq g$ в $L^2(G)$, и для $f \neq 0$ можно выбрать аналогично $u \in L^1 \cap L^2$ так, чтобы $\|f * u - f\|_2 < \varepsilon \|f\|_2$, откуда, в частности, $T_f u = f * u \neq 0$ в $L^2(G)$.

§ 33. Фактор-меры

В этом параграфе мы рассмотрим инвариантные меры на фактор-группах и, более обще, фактор-пространствах и докажем теорему, подобную теореме Фубини, связывающую такие фактор-меры с инвариантными мерами на всей группе и ядерной подгруппе. Этот материал для большей части последующих рассмотрений не нужен, и, так как он носит довольно технический характер, читатель при желании может пропустить его. Применяемый метод целиком заимствован у А. Вейля [48].

33A. Пусть H — фиксированная замкнутая подгруппа локально компактной группы G, а I и J соответственно лево-инвариантные интегралы Хаара на G и H. Если f — функция на G, то под $J(f)$ будет пониматься интеграл по H от функции, индуцируемой ею на H. Если $f \in L(G)$, то из равномерной непрерывности f следует, что функция f', определенная формулой

$$f'(x) = J(f_x) = J_t f(xt),$$

непрерывна. Далее, вследствие левой инвариантности J на H, $f'(xs) = f'(x)$ для каждого $s \in H$, так что f' постоянна на левых смежных классах группы G по H. Если $f \in L_C$, то соответствующая ей функция F на G/H, определенная формулой

$$F(\alpha(x)) = f'(x) = J(f_x) = J_t f(xt),$$

принадлежит $L_{\alpha(C)}$. Значение $F(\alpha(x)) = f'(x)$ можно также получить как интеграл функции f по смежному классу, содержащему x, относительно меры Хаара на H, перенесенной на этот смежный класс.

Если H — замкнутый *нормальный делитель* группы G, то G/H является группой и обладает лево-инвариантным интегралом Хаара K. Под $K_x J_t f(xt)$ мы будем понимать $K(F)$, где $F(\alpha(x)) = J_t f(xt)$. Это равносильно переносу области определения интеграла K на непрерывные функции на G, постоянные на смежных классах по H и равные нулю вне множеств вида CH с компактными C. Если g — такая функция, то такой же является и g_y, и левая инвариантность интеграла K теперь означает просто, что $K(g) = K(g_y)$ для всех $y \in G$. Тогда $K_x J_t f(xt)$ есть лево-инвариантный интеграл на $L(G)$:

$$K_x J_t f_y(xt) = K_x f'_y(x) = K_x f'(x) = K_x J_t f(xt),$$

и $K_x J_t f(xt) = kI(f)$. Это приводит нас к следующему результату:

Теорема. *Если $f \in \mathfrak{B}^+(G)$, то $f_x \in \mathfrak{B}^+(H)$ для каждого $x \in G$ и $J(f_x) = J_t f(xt) \in \mathfrak{B}^+(G/H)$. При надлежащей нормировке интегралов I, J и K, $K_x J_t f(xt) = I(f)$ для каждой $f \in \mathfrak{B}^+(G)$.*

Доказательство. Как мы видели выше, семейство неотрицательных функций, для которых, при надлежащей нормировке интеграла I, верны утверждения теоремы, содержит L^+. Но если утверждения теоремы справедливы для последовательности $\{f_n\}$ L-ограниченных функций из $\mathfrak{B}^+$, монотонно сходящейся к f, то

$$I(f) = \lim I(f_n) = \lim K_x J_t f_n(xt) = K_x(\lim J_t f_n(xt)) =$$
$$= K_x J_t(\lim f_n(xt)) = K_x J_t f(xt).$$

Таким образом, указанное семейство L-монотонно и потому совпадает с $\mathfrak{B}^+(G)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если $f \in L^1(G)$, то $f_x \in L^1(H)$ почти для всех x, $J_t f(xt) \in L^1(K)$ и $K_x J_t f(xt) = I(f)$.*

33B. Возвратимся к случаю замкнутой, но не обязательно нормальной подгруппы H группы G. Определенное выше отображение $f \to F$ пространства $L(G)$ в $L(G/H)$, очевидно, линейно. Мы покажем теперь, что оно есть отображение на все $L(G/H)$.

Лемма. *Для каждой функции $F \in L^+(G/H)$ существует $f \in L^+(G)$ такая, что $F(\alpha(x)) = J(f_x)$.*

Доказательство. Пусть B — компактное подмножество пространства G/H такое, что $F \in L_B^+$, A — компактное подмножество группы G, для которого $\alpha(A) = B$, и h — функция из $L^+(G)$, положительная на A. Заметим, что $J(h_x) > 0$, если смежный класс, содержащий x, пересекает A, т. е. если $x \in AH = \alpha^{-1}(B)$, и что $F(\alpha(x)) = 0$ на открытом множестве $(AH)' = \alpha^{-1}(B')$. Поэтому

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{F(\alpha(x))}{J(h_x)}, & \text{если } J(h_x) > 0, \\ 0, & \text{если } J(h_x) = 0, \end{cases}$$

есть всюду непрерывная функция. При этом $g(x)$ постоянна на смежных классах по H. Поэтому $f = gh \in L^+(G)$ и

$$J_t f(xt) = g(x) J_t h(xt) = F(\alpha(x)),$$

что и требовалось.

33C. И в том случае, когда подгруппа H не является нормальным делителем, каждый элемент $y \in G$ определяет гомеоморфное отображение пространства G/H на себя: $\alpha(x) \to \alpha(yx)$, или $xH \to yxH$. Если интеграл K на G/H инвариантен относительно всех этих гомеоморфизмов, то теорема 33A полностью сохраняет силу. Более обще, пусть интеграл K *относительно инвариантен*, в том смысле, что при гомеоморфизме, порожденном элементом y, K умножается на постоянную $D(y)$: $K(F_y) = D(y) K(F)$, где, конечно, $F_y(\alpha(x)) = F(\alpha(yx))$. Функция $D(y)$ называется *модулем*, или *модулярной функцией*, интеграла K и подобно Δ оказывается непрерывной и мультипликативной.

Теорема. *Если интеграл K относительно инвариантен, с модулем D, то функционал*

$$M(f) = K_x J_t [D(xt) f(xt)]$$

совпадает (с точностью до постоянного множителя) с интегралом Хаара $I(f)$ и справедливы, с соответствующей модификацией, все утверждения теоремы 33А.

Доказательство. Имеем

$$M(f_y) = K_x J_t D(xt) f(yxt) = D(y^{-1}) K_x [J_t D(xt) f(xt)]_y = \\ = K_x J_t D(xt) f(xt) = M(f).$$

Таким образом, функционал $M(f)$ на $L(G)$ лево-инвариантен и, значит, с точностью до постоянного множителя равен $I(f)$. Распространение на $\mathfrak{B}^+$ и L^1 производится так же, как в п. 33А.

33D. Будем называть *вещественным характером* каждое непрерывное гомоморфное отображение группы G в мультипликативную группу вещественных чисел. Примерами вещественных характеров могут служить модулярные функции Δ и D.

Теорема. *Для того, чтобы вещественный характер D был модулярной функцией для относительно инвариантной меры K на фактор-пространстве G/H, где H — замкнутая подгруппа группы G с модулярной функцией δ, необходимо и достаточно, чтобы $D(s) = \frac{\Delta(s)}{\delta(s)}$ для всех $s \in H$.*

Доказательство. Если D — модулярная функция для K, то, как выше, при надлежащей нормировке $M(f) = I(f)$ и для $s \in H$ имеем:

$$\Delta(s) M(f) = M(f^s) = K_x J_t D(xt) f(xts^{-1}) = \\ = D(s) K_x J_t D(xts^{-1}) f(xts^{-1}) = \\ = D(s) \delta(s) K_x J_t D(xt) f(xt) = D(s) \delta(s) M(f).$$

Следовательно, $\Delta(s) = D(s)\delta(s)$ для всех $s \in H$.

Пусть теперь, обратно, $D(x)$ — вещественный характер такой, что $\Delta(s) = D(s)\delta(s)$ для всех $s \in H$. Определим на $L(G/H)$ функционал K формулой $K_x(J(f_x)) = I(D^{-1}f)$. Из леммы 33В следует, что этот функционал определен на всем $L(G/H)$, если только установлено, что его определение однозначно, т. е. что $J(f_x) = 0$ влечет $I(D^{-1}f) = 0$. Но если $J_t f(xt) = 0$ для всех $x \in G$, то для любой функции $g \in L^+(G)$ имеем

$$0 = I_x J_t g(x) D^{-1}(x) f(xt) = J_t I_x \delta(t^{-1}) g(xt^{-1}) D^{-1}(x) f(x) = \\ = I_x \{D^{-1}(x) f(x) J_t [\delta(t^{-1}) g(xt^{-1})]\} = I_x D^{-1}(x) f(x) J_t g(xt)$$

Поэтому для доказательства того, что $I(D^{-1}f)=0$, достаточно выбрать $g \in L^+(G)$ так, чтобы $J(g_x)=J_t\, g(xt)=1$ для каждого x, для которого $f(x)\neq 0$. Но если $f\in L_A$, то выбираем в $L^+(G/H)$ функцию, равную 1 на компактном множестве $\alpha(A)$, а по ней требуемая функция g строится так же, как в доказательстве леммы 33В.

Остается проверить, что определенный так на $L^+(G/H)$ функционал K относительно инвариантен и имеет своей модулярной функцией D:

$$K_xJ(f_{yx})=I(D^{-1}f_y)=D(y)\,I((D^{-1}f)_y)=$$
$$=D(y)\,I(D^{-1}f)=D(y)\,K_xJ(f_x).$$

Тем самым теорема полностью доказана.

33Е. Возвращаясь к тому случаю, когда H — нормальный делитель, мы видим теперь, поскольку G/H обладает инвариантным интегралом, с модулярной функцией $D\equiv 1$, что $\Delta(s)\equiv\delta(s)$ для всех $s\in H$. Беря в качестве H нормальный делитель, образованный теми $t\in G$, для которых $\Delta(t)=1$, заключаем отсюда, что $\delta\equiv 1$ и, значит, H унимодулярен. Но вещественный характер Δ сам является гомоморфизмом, имеющим эту подгруппу своим ядром. Поэтому фактор-группа G/H изоморфна подгруппе мультипликативной группы положительных вещественных чисел. Тем самым каждая локально компактная группа в некотором смысле почти унимодулярна. Другой смысл, в котором это верно, был указан в п. 30Е.

Глава VII

ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ГРУППЫ

L^1-алгебра локально компактной коммутативной группы является коммутативной банаховской алгеброй с инволюцией, и к ней непосредственно применима бо́льшая часть общей теории, изложенной в главе V. Так, мы можем, если пожелаем, перенести сюда теорему Бохнера и Планшереля или заняться вопросами теории идеалов типа тауберовой теоремы Винера. Особое внимание мы уделим переводу этой теории на язык характер-функции (ядра преобразования Фурье), причем значительная часть наших рассмотрений будет сосредоточена на топологических вопросах.

В § 34 исследуется характер-функция и определяется группа характеров. В § 35 рассматриваются различные стандартные примеры. § 36 посвящен вопросам положительности и содержит теоремы Бохнера, Планшереля и Стона. Содержание § 37 более разнородно, здесь рассматриваются, в частности, понтрягинская теорема двойственности, тауберова теорема Винера и простая форма формулы суммирования Пуассона. Глава завершается в § 38 кратким рассмотрением компактных коммутативных групп; общая теория компактных групп излагается в следующей главе.

§ 34. Группа характеров

Как мы знаем, каждый регулярный максимальный идеал M в $L^1(G)$ является ядром гомоморфного отображения $f \to f^\wedge(M)$ алгебры L^1 на поле комплексных чисел (см. пп. 23А, В), причем этот гомоморфизм, как элемент пространства L^{1*}, сопряженного к L^1, однозначно представляется функцией $\alpha_M \in L^\infty$:

$$f^\wedge(M) = \int f(x) \overline{\alpha_M(x)}\, dx$$

(см. пп. 15С, D). Мы увидим ниже, что α_M есть (с точностью до эквивалентности) непрерывная функция, $|\alpha_M(x)| \equiv 1$ и $\alpha_M(xy) =$

$=\alpha_M(x)\alpha_M(y)$. Таким образом, α_M — непрерывное гомоморфное отображение группы G в мультипликативную группу комплексных чисел, равных по абсолютной величине 1; такую функцию называют *характером* группы G. При этом каждый характер группы G может быть получен таким образом. Тем самым пространство $\mathfrak{M}$ регулярных максимальных идеалов групповой алгебры $L^1(G)$ можно отождествить с совокупностью $G^\wedge$ всех характеров группы G. В силу этого отождествления, $G^\wedge$, в слабой топологии пространства L^∞, становится, как мы знаем, локально компактной. И довольно легко устанавливается, что относительно обычного поточечного умножения ее элементов как функций $G^\wedge$ является локально компактной группой. В силу указанного отождествления, функции $f^\wedge$ можно считать определенными не на $\mathfrak{M}$, а на $G^\wedge$, и $f^\wedge$ оказывается тогда классическим преобразованием Фурье функции f.

Перейдем к подробному изложению.

34A. Теорема. *Пусть M — фиксированный регулярный максимальный идеал алгебры $L^1(G)$ и функция $f \in L^1$ такова, что $f^\wedge(M) \neq 0$. Тогда функция*

$$\alpha_M(x) = \frac{f_x^\wedge(M)}{f^\wedge(M)}$$

является характером группы G. Она не зависит от f, равномерно непрерывна по x и непрерывна как функция двух аргументов x и M. Когда u пробегает аппроксимативную единицу, $u_x^\wedge(M)$ равномерно сходится к $\alpha_M(x)$.

Доказательство. Равномерная непрерывность функции $\alpha_M(x)$ вытекает из неравенства

$$|f_x^\wedge(M) - f_y^\wedge(M)| \leqslant \|f_x - f_y\|_1$$

и того обстоятельства, что f_x, как элемент пространства L^1, есть равномерно непрерывная функция от x (теорема 30C). Неравенство

$$|f_x^\wedge(M) - f_{x_0}^\wedge(M_0)| \leqslant \|f_x - f_{x_0}\|_1 + |f_{x_0}^\wedge(M) - f_{x_0}^\wedge(M_0)|$$

показывает, что $f_x^\wedge(M)$, а значит, по делении на $f^\wedge(M)$, также $\alpha_M(x)$, непрерывна по совокупности переменных x и M.

Остальные свойства α_M заключены в равенстве

$$f^\wedge(M)\, g_x^\wedge(M) = f_x^\wedge(M)\, g^\wedge(M)$$

(вытекающем из формулы $f*g_x=f_x*g$). Так, $\frac{f_x^\wedge}{f^\wedge}=\frac{g_x^\wedge}{g^\wedge}$, и следовательно, α не зависит от выбора f. Далее, беря $g=f_y$ и деля на $f^{\wedge 2}$, получаем, что $\alpha_M(yx)=\alpha_M(y)\alpha_M(x)$. Тем самым α_M есть непрерывное гомоморфное отображение группы G в мультипликативную группу комплексных чисел, отличных от нуля. Допустив, что $|\alpha_M(x_0)|>1$, мы имели бы $|\alpha_M(x_0^n)|=|\alpha_M(x_0)|^n\to\infty$. Однако α_M ограничена. Поэтому $\|\alpha_M\|_\infty\leqslant 1$. Тогда и $\left|\frac{1}{\alpha_M(x)}\right|=$ $=|\alpha_M(x^{-1})|\leqslant 1$, так что $|\alpha_M(x)|\equiv 1$. Тем самым α_M — характер.

Наконец, взяв $g=u$, получим $u_x^\wedge(M)=k\alpha_M(x)$, где $k=u^\wedge(M)$, и так как $u^\wedge(M)\to 1$, когда u пробегает аппроксимативную единицу ($\|u^\wedge f^\wedge-f^\wedge\|_\infty\leqslant\|u*f-f\|_1\to 0$), то заключаем, что $u_x^\wedge(M)$ равномерно сходится к $\alpha_M(x)$.

34B. Теорема. *$M\to\alpha_M$ есть взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{M}$ регулярных максимальных идеалов групповой алгебры $L^1(G)$ на совокупность всех характеров группы G, причем*

$$f^\wedge(M)=\int f(x)\overline{\alpha_M(x)}\,dx.$$

Доказательство. Выведем прежде всего последнюю формулу. При заданном M гомоморфизм $f\to f^\wedge(M)$ является, в частности, линейным функционалом на L^1, и потому существует $\alpha\in L^\infty$ такая, что $f^\wedge(M)=\int f(x)\overline{\alpha(x)}\,dx$. Тогда

$$\begin{aligned}\int f(x)\overline{\alpha_M(x)}\,dx &= \lim_u\int f(x)\,u_{x^{-1}}^\wedge(M)\,dx=\\ &=\lim_u\iint f(x)\,u(x^{-1}y)\overline{\alpha(y)}\,dx\,dy=\\ &=\lim_u\int (f*u)(y)\overline{\alpha(y)}\,dy=\\ &=\int f(y)\overline{\alpha(y)}\,dy=f^\wedge(M),\end{aligned}$$

что и требовалось. В частности, M определяется характером α_M, так что отображение $M\to\alpha_M$ взаимно однозначно.

Пусть теперь α — любой характер группы G. Линейный функционал $\int f(x)\overline{\alpha(x)}\,dx$ мультипликативен:

$$\int (f*g)(x)\overline{\alpha(x)}\,dx=\iint f(xy)\,g(y^{-1})\,\overline{\alpha(xy)}\,\overline{\alpha(y^{-1})}\,dx\,dy=$$

$$= \iint f(x)\overline{\alpha(x)}\, g(y)\overline{\alpha(y)}\, dx\, dy =$$
$$= \int f(x)\overline{\alpha(x)}\, dx \int g(y)\overline{\alpha(y)}\, dy.$$

Тем самым он осуществляет гомоморфное отображение $L^1(G)$ на поле комплексных чисел, и равенство

$$\int f(x)\overline{\alpha(x)}\, dx = \int f(x)\overline{\alpha_M(x)}\, dx,$$

где M — ядро этого гомоморфизма, показывает, что $\alpha = \alpha_M$.

Эта теорема позволяет отождествить совокупность $G^\wedge$ всех характеров группы G с пространством $\mathfrak{M}$ регулярных максимальных идеалов групповой алгебры $L^1(G)$ (которое уже отождествлялось и использовалось на равных правах с подмножеством сопряженного пространства, образованным нетривиальными гомоморфизмами на поле комплексных чисел). Вообще, начиная отсюда, мы будем считать функции $f^\wedge$ определенными на $G^\wedge$. При этом значение характера α на групповом элементе x мы будем обозначать через (x, α), так что преобразование Фурье будет теперь записываться так:

$$f^\wedge(\alpha) = \int f(x)\overline{(x, \alpha)}\, dx.$$

34C. *Топология пространства $G^\wedge$ есть топология равномерной сходимости на компактных подмножествах группы G. Иными словами, если $C \subset G$ компактно, $\varepsilon > 0$ и $\alpha_0 \in G^\wedge$, то множество характеров*

$$U(C, \varepsilon, \alpha_0) = \{\alpha : |(x, \alpha) - (x, \alpha_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in C\}$$

открыто и семейство всех таких открытых множеств образует базис топологии пространства $G^\wedge$.

Доказательство. То, что $U(C, \varepsilon, \alpha_0)$ — открытое множество, сразу следует из леммы 5F. При этом пересечение двух таких окрестностей характера α_0 содержит третью:

$$U(C_1 \cup C_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \alpha_0) \subset U(C_1, \varepsilon_1, \alpha_0) \cap U(C_2, \varepsilon_2, \alpha_0).$$

Поэтому достаточно показать, что любая окрестность N характера α_0, принадлежащая обычному подбазису слабой топологии, определяемой на $G^\wedge$ функциями $f^\wedge$ ($f \in L^1$), содержит окрестность указанного вида. Но

$$N = \{\alpha: \ |f^\wedge(\alpha) - f^\wedge(\alpha_0)| < \delta\} \quad (f \in L^1, \ \delta > 0).$$

Выбрав C так, чтобы $\int\limits_{C'} |f| < \frac{\delta}{4}$, мы для $\alpha \in G^\wedge$, удовлетворяющих неравенству $|(x, \alpha) - (x, \alpha_0)| < \varepsilon = \frac{\delta}{2\|f\|_1}$ для всех $x \in C$, будем иметь:

$$|f^\wedge(\alpha) - f^\wedge(\alpha_0)| \leqslant \int |f(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0)| \leqslant \int\limits_C + \int\limits_{C'} \leqslant \|f\|_1 \cdot \frac{\delta}{2\|f\|_1} + 2 \cdot \frac{\delta}{4} = \delta,$$

т. е. $U(C, \varepsilon, \alpha_0) \subset N$, что и требовалось.

34D. Теорема. *Поточечное произведение двух характеров есть характер, причем с этим определением умножения $G^\wedge$ является локально компактной коммутативной группой.*

Доказательство. То, что произведение двух характеров есть характер, очевидно. Постоянная 1 является характером и служит единицей относительно умножения. Для любого характера α функция $\frac{1}{\alpha}$ есть характер и притом обратный по отношению к α. Все это очевидно, и остается лишь доказать непрерывность умножения. Но если $C \subset G$ компактно и на нем $|\alpha - \alpha_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta - \beta_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, то на нем

$$|\alpha\beta - \alpha_0\beta_0| \leqslant |\alpha - \alpha_0| \cdot |\beta_0| + |\alpha| \cdot |\beta - \beta_0| < \varepsilon.$$

А согласно п. 34C, это и означает, что умножение характеров непрерывно.

34E. Замечание. Читателю может показаться, что α_M было бы естественнее определить так, чтобы $f^\wedge(M) = \int f(x)\,\alpha_M(x)\,dx$, а не $\int f(x)\,\overline{\alpha_M(x)}\,dx$. Единственное оправдание сделанного нами выбора, которое мы можем сейчас привести, состоит в том, что он ближе к формализму скалярного произведения и свертки: мы определили $f^\wedge(M)$ как $(f, \alpha_M) = (f * \alpha_M)(e)$. Позже мы увидим, что наше определение в случае аддитивной группы вещественных чисел приводит к обычному прямому преобразованию Фурье, тогда как альтернативное определение дало бы обычное обратное преобразование Фурье. Отметим, что характер, отнесенный нами регулярному максимальному идеалу M, обратен к характеру, который был бы определен альтернативной формулой.

§ 35. Примеры

Для нахождения групп характеров простых специальных групп мы обладаем двумя способами. Первый состоит в определении характера по связанному с ним гомоморфизму групповой алгебры; именно этим способом мы воспользовались при рассмотрении примеров § 23. Второй, более естественный с точки зрения наших теперешних целей, состоит в непосредственном применении определения характера как непрерывного гомоморфного отображения группы G на группу T комплексных чисел, равных по модулю 1. Прямая проверка наличия нужной топологии на $G^\wedge$ при этом способе, быть может, несколько длиннее, поскольку теорема 5G об эквивалентности слабой топологии с данной здесь не действует, однако это вряд ли можно считать существенным возражением.

35A. Теорема. *Группа характеров прямого произведения $G_1 \times G_2$ двух локально компактных коммутативных групп изоморфна и гомеоморфна прямому произведению $G_1^\wedge \times G_2^\wedge$ их групп характеров.*

Доказательство. Алгебраический изоморфизм почти очевиден. Любой характер α группы $G_1 \times G_2$ является произведением индуцируемых им функций на G_1 и G_2,

$$\alpha(\langle x_1,\ x_2\rangle) = \alpha(\langle x_1,\ e_2\rangle)\,\alpha(\langle e_1,\ x_2\rangle),$$

а они служат характерами соответственно для G_1 и G_2. Очевидно, и обратно, произведение

$$\alpha(\langle x_1,\ x_2\rangle) = \alpha_1(x_1)\,\alpha_2(x_2)$$

любых двух характеров групп G_1 и G_2 является характером группы $G_1 \times G_2$. При этом установленное так взаимно однозначное соответствие $\alpha \leftrightarrow \langle\alpha_1,\ \alpha_2\rangle$ между $(G_1 \times G_2)^\wedge$ и $G_1^\wedge \times G_2^\wedge$, очевидно, является изоморфизмом.

Пусть теперь C — компактное подмножество из $G_1 \times G_2$, содержащее $e = \langle e_1, e_2\rangle$ и имеющее вид $C = C_1 \times C_2$. Если $|\alpha - \alpha^0| < \varepsilon$ на C, то (беря $x_2 = e_2$) имеем $|\alpha_1 - \alpha_1^0| < \varepsilon$ на C_1 и аналогично $|\alpha_2 - \alpha_2^0| < \varepsilon$ на C_2. Обратно, если $|\alpha_1 - \alpha_1^0| < \varepsilon$ на C_1 и $|\alpha_2 - \alpha_2^0| < \varepsilon$

на C_2, то $|\alpha - \alpha^0| = |\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^0\alpha_2^0| < 2\varepsilon$ на C. Из п. 34С следует тогда, что топология на $(G_1 \times G_2)^\wedge$ есть не что иное, как тихоновская топология на $G_1^\wedge \times G_2^\wedge$. Это же непосредственно вытекает из следующей теоремы.

35В. Теорема. *Группа характеров фактор-группы G/H локально компактной коммутативной группы G по ее замкнутой подгруппе H изоморфна и гомеоморфна подгруппе группы $G^\wedge$, образованной теми характерами группы G, которые постоянны на H и ее смежных классах.*

Доказательство. Если β — характер группы G/H, то функция $\alpha(x) = \beta(Hx)$ непрерывна на G и

$$\alpha(x_1x_2) = \beta(Hx_1x_2) = \beta(Hx_1Hx_2) = \beta(Hx_1)\beta(Hx_2) = \alpha(x_1)\alpha(x_2),$$

так что $\alpha(x)$ есть характер группы G. Обратно, если $\alpha(x)$ — характер группы G, постоянный на H, а потому и на любом смежном классе, то функция β, определенная на G/H формулой $\beta(Hx) = \alpha(x)$, является характером группы G/H.

Остается показать, что топология, индуцируемая на этой подгруппе, есть топология группы характеров группы G/H. Но, как мы знаем, если $F \subset G$ компактно, то $C = \{Hx\colon x \in F\}$ компактно в G/H, причем каждое компактное подмножество из G/H получается таким способом (см. п. 28С). Тогда $|\beta(u) - \beta_0(u)| < \varepsilon$ для всех $u \in C$ в том и только в том случае, если $|\beta(Hx) - \beta_0(Hx)| < \varepsilon$ для всех $x \in F$, и требуемый результат следует из п. 34С.

35С. Теорема. *Каждый характер аддитивной группы R вещественных чисел имеет вид $\alpha(x) = e^{iyx}$, а $R^\wedge$ изоморфна и гомеоморфна R при соответствии $e^{iyx} \leftrightarrow y$.*

Доказательство. Каждое непрерывное решение уравнения $\alpha(x+y) = \alpha(x)\alpha(y)$ имеет вид $\alpha(x) \equiv e^{ax}$, и, поскольку α ограничено, a должно быть чисто мнимым. Тем самым $\alpha(x) = e^{iyx}$ с некоторым вещественным y. Обратно, каждое вещественное y определяет характер e^{iyx}, и, в силу правила перемножения степеней с одинаковым основанием, это взаимно однозначное соответствие между R и $R^\wedge$ есть изоморфизм. Множество характеров α таких, что $|\alpha(x) - 1| < \varepsilon$ на $[-n, n]$, является окрестностью единичного характера, и совокупность таких множеств образует базис окрестностей единичного характера. Но $|e^{iyx}-1|<\varepsilon$ на $[-n, n]$ тогда и только тогда, когда y принадлежит открытому интервалу $(-\delta, \delta)$, где $\delta=\frac{2}{n}\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому отображение $R\leftrightarrow R^{\wedge}$ непрерывно в обе стороны в начале, а тем самым и всюду.

35D. Теорема. *Каждый характер группы R/I, где I — аддитивная группа целых чисел, имеет вид $e^{2\pi inx}$, а $(R/I)^{\wedge}$ изоморфна и гомеоморфна I, при соответствии $e^{2\pi inx}\leftrightarrow n$.*

Доказательство. Утверждения теоремы непосредственно следуют из теорем 35B и C: характер e^{iyx} имеет для всех целых x значение 1 тогда и только тогда, когда $y=2\pi m$, где m — целое, а дискретная подгруппа $\{2\pi m\}$ группы R, очевидно, изоморфна (и тривиально гомеоморфна) группе I.

35E. Теорема. *Каждый характер группы I имеет вид $e^{2\pi ixn}$, где $0\leqslant x<1$, а $I^{\wedge}$ изоморфна и гомеоморфна R/I, при соответствии $e^{2\pi ixn}\leftrightarrow x$.*

Доказательство. Если $\alpha(n)$ — характер группы I, то $\alpha(1)=e^{2\pi ix}$, где $0\leqslant x<1$, и $\alpha(n)=e^{2\pi ixn}$. Очевидно, что каждое такое x определяет характер и что $y\to e^{2\pi iyn}$ есть гомоморфное отображение группы R на $I^{\wedge}$, с ядром I. Таким образом, группа $I^{\wedge}$ изоморфна R/I. Множество

$$\{y\colon\ 0\leqslant y<1 \ \text{ и } \ |e^{2\pi iyn}-1|<\varepsilon,\ n=1,\ldots,N\}$$

есть базисная окрестность элемента $e=0$ из I, и легко видеть, что оно является в R/I открытым интервалом с центром в 0. Обратно, каждый открытый интервал в R/I с центром в 0 является таким множеством (с $N=1$ и некоторым $\varepsilon>0$), так что обе топологии тождественны.

35F. Таким образом, каждая из трех групп R, R/I и I изоморфна и гомеоморфна своей собственной второй группе характеров. Эти результаты представляют собой частные случаи понтрягинской теоремы двойственности, утверждающей, что каждая локально компактная коммутативная группа есть группа характеров своей группы характеров; эта теорема будет доказана в § 37.

Общая формула преобразования Фурье переходит для этих групп в хорошо известные формулы

$$f^{\wedge}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} \, dx,$$

$$f^{\wedge}(n) = c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \, dx,$$

$$f^{\wedge}(x) = \int_I f(n) e^{-2\pi i x n} \, dn = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n x}.$$

То обстоятельство, что преобразование Фурье является по своему исходному определению отображением $L^1(G)$ в $C(G^{\wedge})$, сводится здесь к тому, что каждый из указанных интегралов при $f \in L^1$ абсолютно сходится (в последнем из указанных случаев это означает, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$), а $f^{\wedge}$ непрерывна и (в первых двух случаях) обращается в нуль на бесконечности. Теорема 35A позволяет также написать соответствующие формулы для кратных рядов и преобразований Фурье, равно как и их комбинаций, причем теорема двойственности допускает непосредственную проверку и для соответствующих групповых произведений.

§ 36. Теоремы Бохнера и Планшереля

36A. Мы применим теперь к групповой алгебре $L^1(G)$ общую теорию коммутативных банаховских алгебр §§ 25 и 26, с учетом того дополнительного обстоятельства, что пространство $G^{\wedge}$ характеров (пространство максимальных идеалов алгебры $L^1(G)$, пространство ее гомоморфизмов) само является локально компактной группой, со своей собственной мерой Хаара и собственной групповой алгеброй.

Начнем с положительности. Как мы уже видели в п. 31G, положительный линейный функционал на $L^1(G)$ продолжаем тогда и только тогда, когда он непрерывен. Поэтому действие теоремы Бохнера 26I распространяется на положительно определенные функции $p \in L^{\infty}$. Далее, предположение этой теоремы, что $f^{*\wedge} = \overline{f^{\wedge}}$, здесь автоматически выполнено, поскольку

$$f^{*\wedge}(\alpha) = \int \overline{f(x^{-1})}\,\overline{(x, \alpha)}\, dx = \int \overline{f(x)}\,\overline{(x^{-1}, \alpha)}\, dx = \overline{\int f(x)\overline{(x, \alpha)}\, dx} = \overline{f^{\wedge}(\alpha)}.$$

Наконец, обозначая через μ_p меру на $G^\wedge$, соответствующую положительно определенной функции $p \in L^\infty(G)$, имеем

$$\int f(x)\overline{p(x)}\,dx = \int f^\wedge(\alpha)\,d\mu_p(\alpha) = \int f(x)\left(\int \overline{(x,\alpha)}\,d\mu_p(\alpha)\right)dx$$

для всех $f \in L^1$, откуда следует, что

$$p(x) = \int (x,\alpha)\,d\mu_p(\alpha)$$

почти для всех x. При этом любая определенная так функция p является положительно определенной, поскольку она, очевидно, принадлежит L^∞ и

$$(f * f^*, p) = \iint (f * f^*)(x)\overline{(x,\alpha)}\,dx\,d\mu_p(\alpha) = \int |f^\wedge|^2\,d\mu_p \geqslant 0.$$

Поэтому теорему Бохнера в рассматриваемом случае можно переформулировать следующим образом:

Теорема. *Формула*

$$p(x) = \int (x,\alpha)\,d\mu(\alpha)$$

устанавливает сохраняющий норму изоморфизм между выпуклым множеством всех конечных положительных бэровских мер μ на $G^\wedge$ и выпуклым множеством всех положительно определенных функций $p \in L^\infty(G)$.

Следствие. *Каждая положительно определенная функция $p \in L^\infty(G)$ (существенно) равномерно непрерывна.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из того, что мера μ_p сосредоточена в основном на компактных множествах C, а характеристическая функция (x,α) непрерывна по x равномерно для всех $\alpha \in C$. А именно, при заданном $\varepsilon > 0$ выбираем компактное подмножество $C \subset G^\wedge$ так, чтобы $\mu_p(C') < \frac{\varepsilon}{4}$ (где C' — дополнение множества C), а затем находим окрестность V единичного элемента группы G такую, что

$$|(x_1,\alpha)-(x_2,\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2\mu_p(G)}, \quad \text{если } x_1x_2^{-1} \in V \text{ и } \alpha \in C$$

(снова на основании леммы 5F). Тогда при $x_1x_2^{-1} \in V$ имеем

$$\left|\int [(x_1, \alpha) - (x_2, \alpha)]\, d\mu_p(\alpha)\right| \leqslant \int\limits_C + \int\limits_{C'} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым $\int (x, \alpha)\, d\mu_p(\alpha)$ — равномерно непрерывная функция.

36B. Будем через $\mathfrak{P}$ обозначать класс всех положительно определенных функций. Из того, что $L^1(G)$ содержит аппроксимативную единицу, вытекает, что *векторное пространство* $[L^1 \cap \mathfrak{P}]$, *порожденное множеством* $L^1 \cap \mathfrak{P}$, *плотно в* L^1. Действительно, $L^1 \cap L^\infty$ плотно в L^1, если же $f \in L^1 \cap L^\infty$, а u пробегает аппроксимативную единицу, то $f * u$ представляет собой одновременно аппроксимацию к f и линейную комбинацию четырех положительно определенных функций вида $(f + u) * (f + u)^*$. Совершенно так же устанавливается, что $[L^1 \cap \mathfrak{P}]$ *плотно в* $L^2(G)$.

Сформулированная здесь теорема Бохнера и абстрактная теорема планшерелевского типа 26J приводят теперь к следующей теореме обращения для классов L^1:

Теорема. *Если $f \in [L^1 \cap \mathfrak{P}]$, то $f^\wedge \in L^1(G^\wedge)$ и почти для всех x*

$$f(x) = \int (x, \alpha) f^\wedge(\alpha)\, d\alpha,$$

где $d\alpha$ — надлежаще нормированная мера Хаара на $G^\wedge$.

Доказательство. Пусть φ — положительный функционал, определенный на идеале L^0 равномерно непрерывных функций из L^1 формулой $\varphi(f) = f(e)$. Выше мы заметили (п. 31G), что функции $p \in L^1 \cap \mathfrak{P}$ являются положительно определенными относительно φ в смысле теоремы планшерелевского типа 26J; следовательно, мы можем на основании этой теоремы заключить, что на $G^\wedge$ существует однозначно определенная положительная бэровская мера m такая, что $p^\wedge \in L^1(m)$ и

$$(f, p) = \int f^\wedge p^\wedge\, dm \quad \text{для всех } p \in L^1 \cap \mathfrak{P} \text{ и } f \in L^1.$$

Формула теоремы Бохнера 36A принимает вид ([52])

$$p(x) = \int (x, \alpha)\, p^\wedge(\alpha)\, dm(\alpha).$$

Остается лишь доказать, что m есть мера Хаара на $G^\wedge$. Но непосредственная проверка показывает, что если $p \in L^1 \cap \mathfrak{P}$, то $p(x)\overline{(x, \alpha_0)} \in L^1 \cap \mathfrak{P}$ для любого характера α_0, и мы имеем

$$\int p^\wedge(\alpha)\, dm(\alpha) = p(e) = p(e)(e, \alpha_0) = \int p^\wedge(\alpha_0\alpha)\, dm(\alpha),$$

где использовано то непосредственно проверяемое обстоятельство, что $p^{\wedge}_{\alpha_0}$ есть преобразование Фурье произведения $p\overline{\alpha_0}$. Так как алгебра, порожденная множеством $L^1 \cap \mathfrak{P}$, плотна в L^1 и потому преобразования Фурье $p^{\wedge}$ плотны в $C(G^{\wedge})$, то последнее равенство показывает, что мера m инвариантна относительно сдвигов и является тем самым мерой Хаара на $G^{\wedge}$.

З а м е ч а н и е. Определяемое формулой $p(x) = \int (x, \alpha)\, d\mu(\alpha)$ отображение $\mu \to p$ пространства $[C(G^{\wedge})]^*$ всех ограниченных комплексных бэровских мер на $G^{\wedge}$ в пространство $L^{\infty}(G)$ $(= [L^1(G)]^*)$ есть не что иное, как отображение T^*, сопряженное к преобразованию Фурье $T\,(f \to f^{\wedge})$, отображающему $L^1(G)$ в $C(G^{\wedge})$. Нужно, однако, помнить, что L^{∞} следует отождествлять с L^{1*} с о п р я ж е н н о-л и н е й н ы м образом для того, чтобы можно было применять обычную формулу для скалярного произведения: $P(f) = \int f(x)\overline{p(x)}\,dx$, где P и p — соответствующие друг другу элементы из L^{1*} и L^{∞}. То же замечание относится к отождествлению пространства $[C(G^{\wedge})]^*$ с пространством ограниченных бэровских мер. Именно этой особенностью определяется появление (x, α) в подинтегральном выражении для T^* и $\overline{(x, \alpha)}$ — для T.

Установленная нами формула обращения показывает, что на $[L^1 \cap \mathfrak{P}]$ $T^* = T^{-1}$. Однако функции $f^{\wedge}$, составляющие множество значений оператора T, рассматриваются как элементы пространства $C(G^{\wedge})$, тогда как те же функции как элементы области определения оператора T^* рассматриваются как меры $f^{\wedge}(\alpha)\, d\alpha$ на $G^{\wedge}$. Это расхождение исчезает при введении норм L^2; T оказывается тогда унитарным отображением и равенство $T^* = T^{-1}$ имеющим прямой смысл. В этом — суть теоремы Планшереля как в ее общей форме (26J), так и в групповой (36D).

36C. Очевидно, что при переходе к другой мере Хаара на G формулу обращения следует умножить на соответствующую постоянную; иначе говоря, формула обращения по заданной мере Хаара на G отбирает однозначно определенную меру Хаара на $G^{\wedge}$. Правильное определение меры m на $G^{\wedge}$ по мере μ на G представляет в некоторых частных случаях интересную и нетривиальную задачу. Одним из возможных способов ее решения является непосредственный подсчет прямого и обратного преобразований Фурье для некоторых специально подобранных удобных для вычисления функций.

В качестве иллюстрации рассмотрим группу R и функцию $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Дифференцируя формулу

$$f^\wedge(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-iyx}\, dx$$

по y и интегрируя затем по частям, получаем, что $u = f^\wedge(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $du = -uy\,dy$, так что $f^\wedge(y) = Ce^{-\frac{y^2}{2}}$. Для определения C замечаем, что $f^\wedge(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Отсюда

$$C^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r dr\, d\theta = 2\pi$$

и $C = \sqrt{2\pi}$. Следовательно, если в качестве меры Хаара на R мы вместо dx возьмем $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$, то функция $e^{-\frac{x^2}{2}}$ будет преобразовываться сама в себя. Теперь мы должны выбрать на $R^\wedge = R$ меру Хаара $C'dy$ так, чтобы имела место формула обращения

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{iyx}\, C'dy.$$

Так как выражение в правой части этого равенства должно быть вещественным, то оно совпадает с комплексно сопряженным выражением, рассмотренным выше, и C' должна равняться $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Таким образом, если $f(x) \in [L^1 \cap \mathfrak{P}]$ и

$$f^\wedge(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iyx} dx,$$

то $f^\wedge(y) \in [L^1 \cap \mathfrak{P}]$ и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(y)\, e^{iyx} dy,$$

где оба интеграла абсолютно сходятся. Это и есть классический выбор мер Хаара на R и $R^\wedge = R$. Легко видеть, что все другие пары ассоциированных мер будут вида $\frac{\lambda dx}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{dy}{\lambda\sqrt{2\pi}}$.

Теорема 38В устанавливает также аналогичное соответствие между мерами для компактных и дискретных групп, таких, как R/I и I.

36D. Теорема Планшереля. *Преобразование Фурье $f \to Tf = f^\wedge$, рассматриваемое на $[L^1 \cap \mathfrak{P}]$, сохраняет скалярные произведения, а его замыкание по норме L^2 является унитарным отображением $L^2(G)$ на $L^2(G^\wedge)$.*

Доказательство. Основное содержание теоремы Планшереля, а именно то, что преобразование Фурье $f \to Tf = f^\wedge$, рассматриваемое на $[L^1 \cap \mathfrak{P}]$, удовлетворяет условию

$$(Tf, Tp) = (f^\wedge, p^\wedge) = \varphi(f * p) = (f, p)$$

и является тем самым изометрией в нормах L^2, было уже установлено в п. 26J и передоказано неявно в предыдущей теореме обращения для классов L^1.

Остается показать, что T однозначно продолжается до унитарного отображения всего $L^2(G)$ на все $L^2(G^\wedge)$. То, что $[L^1 \cap \mathfrak{P}]$ плотно в L^2, было уже замечено выше; при этом мы опирались на то, что свертки $f * g$, где f, $g \in L^1 \cap L^2$, принадлежат $[L^1 \cap \mathfrak{P}]$ и плотны в L^2. Следовательно, T однозначно продолжается на все $L^2(G)$, причем множество значений продолженного оператора является полным (и потому замкнутым) подпространством пространства $L^2(G^\wedge)$. Поэтому доказательство будет завершено, если мы сможем показать, что множество значений оператора T плотно в $L^2(G^\wedge)$.

Но если $F \in (L^1 \cap L^2)(G^\wedge)$, то $f = T^*(F) \in L^2(G)$. Действительно, функция f ограничена и равномерно непрерывна, и для всякой $g \in (L^1 \cap L^2)(G)$ имеем

$$|(g, f)| = |(g^\wedge, F)| \leqslant \|F\|_2 \cdot \|g^\wedge\|_2 = \|F\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

откуда и следует, что $f \in L^2(G)$, причем $\|f\|_2 \leqslant \|F\|_2$. Далее, для $H \in (L^1 \cap L^2)(G^\wedge)$ имеем $h \in L^2(G)$ и $hf = T^*(H * F) \in [L^1 \cap \mathfrak{P}]$. Тем самым, по теореме обращения, $H * F = T(hf)$, и так как такие свертки $H * F$ плотны в $L^2(G^\wedge)$, то теорема полностью доказана.

Примененный метод доказательства дает также такое

Следствие. *Групповая алгебра $L^1(G)$ полупроста и регулярна.*

Доказательство. Если $f \in L^1$ и $g \in L^2$, то $f * g \in L^2$ и $T(f*g) = f^\wedge g^\wedge$. При $f \neq 0$ оператор U_f свертывания с f, определенный на $L^2(G)$, — ненулевой (п. 32D) и потому также оператор умножения на $f^\wedge$, определенный на $L^2(G^\wedge)$, — ненулевой. Другими словами, если $f \neq 0$ в $L^1(G)$, то $f^\wedge \neq 0$ в $C(G^\wedge)$, и, значит, алгебра $L^1(G)$ — полупростая ([53]).

Напомним теперь читателю, что $L^1(G)$ регулярна, если для каждого замкнутого множества $F \subset G^\wedge$ и каждой точки $\alpha \notin F$ существует функция $f \in L^1$ такая, что $f^\wedge = 0$ на F и $f^\wedge(\alpha) \neq 0$. Мы докажем даже более сильное утверждение о локальных единицах в L^1 (п. 25C), а именно, что для любого компактного $F \subset G^\wedge$ и содержащего его открытого $U \subset G^\wedge$ существует $f \in L^1(G)$ такая, что $f^\wedge \equiv 1$ на F и $f \equiv 0$ на U'. Чтобы убедиться в этом, выберем симметричную бэровскую окрестность V единицы в $G^\wedge$ такую, что $V^3F \subset U$, и пусть $g^\wedge$ и $h^\wedge$ характеристические функции соответственно множества V и бэровского открытого множества, заключенного между VF и V^2F. Тогда их свертка $g^\wedge * h^\wedge$ совпадает с $m(V)$ на F и равна нулю вне U. Так как $g^\wedge * h^\wedge = T(gh)$, то нужной нам функцией является $f = \frac{gh}{m(V)}$.

36E. В заключение этого параграфа дадим перевод теоремы представления 26F на групповой язык. Рассмотрения, проведенные в § 32, показывают, что унитарное представление $T\,(s \to T_s)$ локально компактной коммутативной группы G унитарными преобразованиями гильбертова пространства H вполне эквивалентно симметричному представлению групповой алгебры $L^1(G)$. Тогда, как в п. 26F, T может быть «перенесено» на алгебру преобразований Фурье $f^\wedge$ и затем продолжено до симметричного представления алгебры всех ограниченных бэровских функций на $G^\wedge$. Трилинейный функционал

$$I(f^\wedge, x, y) = (T_f x, y)$$

при фиксированных x и y является ограниченным комплексным интегралом на $C(G^\wedge)$, причем

$$I(Fg^\wedge, x, y) = I(F, T_g x, y) \quad \text{для всех} \quad F \in C(G^\wedge) \text{ и } g \in L^1(G).$$

Таким образом,

$$(T_sT_gx, y) = (T_{g_{s^{-1}}}x, y) = I((s^{-1}, \alpha)\, g^{\wedge}(\alpha), x, y) = I(\bar{s}, T_gx, y).$$

Оператор T_{φ_E}, соответствующий характеристической функции φ_E множества E, является проекцией, обозначим его P_E; (P_Ex, y) есть комплексная мера, соответствующая указанному интегралу. (Соответствие $E \to P_E$ называют проекционной мерой.) Поэтому предыдущее равенство можно записать в виде

$$(T_su, y) = \int \overline{(s, \alpha)}\, d(P_\alpha u, y),$$

где $u = T_gx$. Так как такие элементы плотны в H, то это ограничение на u можно отбросить. Полученный результат можно, пользуясь символическим интегралом спектральной теории, подытожить следующим образом:

Теорема Стона. *Для каждого унитарного представления T локально компактной коммутативной группы G унитарными преобразованиями гильбертова пространства H существует проекционная мера P_E на $G^{\wedge}$ такая, что*

$$T_s = \int \overline{(s, \alpha)}\, dP_\alpha.$$

Проекции P_E образуют так называемое спектральное семейство семейства перестановочных операторов T_s. Каждая такая проекция определяет разложение представления T в прямую сумму представления TP_E, действующего на множестве значений оператора P_E, и $T(1 - P_E) = TP_{E'}$, действующего на ее ортогональном дополнении в H. Дальнейшее разложение представления T непосредственно опирается на теорию кратности спектрального семейства и выходит за рамки этой книги.

§ 37. Различные теоремы

Этот параграф содержит тауберову теорему и ее обобщения, понтрягинскую теорему двойственности и один простой случай формулы суммирования Пуассона.

37A. Тауберова теорема, доказанная в п. 25D, применима к любой регулярной коммутативной банаховской алгебре и, в частности (см. п. 36D, следствие), к групповой L^1-алгебре коммутативной локально компактной группы. Дополнительное условие этой теоремы, что элементы, преобразования Фурье которых равны нулю вне компактных множеств, плотны в рассматриваемой алгебре, в данном случае всегда выполнено. Действительно, $L(G^{\wedge})$ плотно в $L^2(G^{\wedge})$, и потому элементы из $L^2(G)$, преобразования Фурье которых принадлежат $L(G^{\wedge})$, плотны в $L^2(G)$; а так как каждая функция из $L^1(G)$ есть произведение функций из $L^2(G)$, то с помощью неравенства Шварца заключаем, что функции из $L^1(G)$, преобразования Фурье которых принадлежат $L(G^{\wedge})$, плотны в $L^1(G)$. Тем самым установлена следующая тауберова

Теорема. *Каждый собственный замкнутый идеал групповой алгебры $L^1(G)$ локально компактной коммутативной группы G содержится в регулярном максимальном идеале.*

Следствие 1. *Если функция $f \in L^1$ такова, что $f^{\wedge}$ нигде не обращается в нуль, то сдвиги f порождают L^1.*

Доказательство. В силу предположения, f не содержится ни в каком регулярном максимальном идеале. Но замкнутое подпространство, порожденное сдвигами функции f, является (согласно теореме 31F) замкнутым идеалом и потому, в силу установленной сейчас теоремы, совпадает со всем L^1.

Следствие 2. (Обобщенная тауберова теорема Винера.) *Пусть G — любая локально компактная, но не компактная коммутативная группа. Пусть $k \in L^1(G)$ такова, что $k^{\wedge}$ нигде не обращается в нуль, и $g \in L^{\infty}$ такова, что непрерывная функция $k * g$ обращается в нуль на бесконечности. Тогда $f*g$ обращается в нуль на бесконечности для каждой $f \in L^1(G)$.*

Доказательство. Совокупность I функций $f \in L^1$ таких, что $f * g$ обращается в нуль на бесконечности, очевидно, образует линейное подпространство, и притом инвариантное, поскольку $f_x * g = (f * g)_x$ обращается в нуль на бесконечности вместе с $f * g$. I также замкнуто. Действительно, при заданных $f \in \bar{I}$ и $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать $h \in I$ так, чтобы $\|f-h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{\infty}}$, а затем выбрать компактное множество C так, чтобы $|(h*g)(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ вне C. Так как

$$|(f*g)(x) - (h*g)(x)| \leqslant \|f-h\|_1 \cdot \|g\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2},$$

то заключаем, что $|(f*g)(x)|<\varepsilon$ вне C. Следовательно, $f*g$ обращается в нуль на бесконечности и $f \in I$.

Поэтому (снова в силу теоремы 31F) I есть замкнутый идеал, и так как в нем содержится k, то он не содержится ни в каком регулярном максимальном идеале. Из теоремы следует тогда, что $I = L^1$.

Следствие 3. (Тауберова теорема Винера.) *Если $k \in L^1(R)$ такова, что $k^\wedge$ нигде не обращается в нуль, и $g \in L^\infty$ такова, что $(k*g)(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $(f*g)(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ для каждой $f \in L^1$.*

Это не вполне частный случай предыдущего следствия, поскольку здесь предполагается обращение в нуль на бесконечности лишь в одном направлении. Однако доказательство остается то же.

37B. Тауберова теорема в ее общей форме 37A утверждает, что замкнутый идеал есть ядро своей оболочки, если последняя — пустая, и тем самым представляет собой положительное решение частного случая общей задачи о том, при каких условиях замкнутый идеал групповой алгебры $L^1(G)$ служит ядром своей оболочки. Что ответ может быть отрицательным, показал Л. Шварц [C. R. Acad. Sci. Paris, **227**, 424—426 (1948)], давший контрпример в случае аддитивной группы G трехмерного евклидова пространства. Положительная теорема справедлива также для одноточечных оболочек. Для вещественной прямой это доказал Сегал [44], а на общие локально компактные коммутативные группы, опираясь на теорию их строения, распространил Капланский [27]. Доказательство этой обобщенной теоремы, не зависящее от структурных рассмотрений, дал Хельсон [24]. В излагаемом ниже доказательстве используется рассматривавшаяся Хельсоном, а также Рейтером [42a] функция при прямом доказательстве выполнения условия Диткина (см. п. 25F) в L^1-алгебре локально компактной коммутативной группы. Последнее (в силу теоремы 25F) имеет своим непосредственным следствием наиболее сильную известную положительную теорему, относящуюся к рассматриваемой задаче.

Лемма. *Если регулярная полупростая банаховская алгебра A содержит аппроксимативную единицу и обладает тем свойством (из теоремы 25D), что элементы x, для которых $x^\wedge$ имеет ком-*

пактный носитель, плотны в A, то $A^\wedge$ удовлетворяет условию D *на бесконечности.*

Доказательство. Эта лемма содержательна только тогда, когда $\mathfrak{M}$ некомпактно. Мы должны показать, что для любых x и ε существует y такой, что $y^\wedge$ имеет компактный носитель и $\|xy-x\|<\varepsilon$. Так как A содержит аппроксимативную единицу, то существует элемент $u \in A$ такой, что $\|xu-x\|<\frac{\varepsilon}{2}$; по винеровскому же условию леммы, существует элемент $y \in A$ такой, что $y^\wedge$ имеет компактный носитель и $\|y-u\|<\frac{\varepsilon}{2\|x\|}$. Но тогда $\|xy-xu\|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $\|xy-x\|<\varepsilon$, что и требовалось.

Следствие. *Замкнутый идеал I с компактной оболочкой содержит каждый элемент x такой, что $h(I) \subset \operatorname{int} h(x)$.*

Доказательство. Из леммы следует существование элемента y, для которого $y^\wedge$ имеет компактный носитель и $\|xy-x\|<\varepsilon$. Но тогда, в силу теоремы 25D, $xy \in I$, и так как идеал замкнут, то $x \in I$.

37C. Для установления того, что условие D выполняется в конечных точках, мы введем упомянутую выше функцию.

Пусть U — любая симметричная бэровская окрестность единичного элемента $e^\wedge$ группы $G^\wedge$ такая, что $m(U)<\infty$, где m — мера Хаара на $G^\wedge$. Пусть V — другая такая окрестность, имеющая компактное замыкание, содержащееся в U, и столь большая, что $\frac{m(U)}{m(V)}<4$. Пусть $u^\wedge$ и $v^\wedge$ — характеристические функции соответственно окрестностей U и V, а u и v — их обратные преобразования Фурье в $L^2(G)$. Тогда функция $j=\frac{uv}{m(V)}$ принадлежит $L^1(G)$ и

$$\|j\|_1 \leqslant \frac{\|u\|_2\|v\|_2}{m(V)}=\frac{\|u^\wedge\|_2\|v^\wedge\|_2}{m(V)}=\sqrt{\frac{m(U)}{m(V)}}<2.$$

При этом

$$j^\wedge=\frac{u^\wedge * v^\wedge}{m(V)}=\frac{1}{mV}\int u^\wedge(\alpha)\,v^\wedge(\alpha^{-1}\beta)\,d\alpha=1$$

для всех $\beta \in W$, если W — окрестность $e^\wedge$ такая, что $VW \subset U$.

Лемма. *Для любого компактного множества $C \subset G$ и любого*

$\varepsilon>0$ существует функция $j \in L^1$ такая, что $j^\wedge \equiv 1$ в некоторой окрестности единичного элемента $e^\wedge$ группы $G^\wedge$, $\|j\|_1<2$ и $\|j-j_x\|_1<\varepsilon$ для каждого $x \in C$.

Доказательство. Определяем j, как выше, беря в качестве U любое симметричное бэровское открытое подмножество открытого множества

$$\{\alpha: \ |1-(x,\alpha)|<\frac{\varepsilon}{4} \text{ для всех } x \in C\}$$

(см. п. 5F). Так как

$$j-j_x=\frac{u(v-v_x)+v_x(u-u_x)}{m(V)}$$

и так как, при указанном выборе U

$$\|u-u_x\|_2^2=\int |u^\wedge(\alpha)[1-(x,\alpha)]|^2 d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant m(U) \sup_{\alpha \in U} |1-(x,\alpha)|^2<m(U)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \text{ для всех } x \in C$$

(и аналогично для $\|v-v_x\|_2^2$), то

$$\|j-j_x\|_1 \leqslant 2\sqrt{m(U)\,m(V)}\,\frac{\varepsilon}{4m(V)}<\varepsilon \text{ для каждого } x \in C,$$

что и требовалось.

Следствие. *Если $f \in L^1(G)$ и $f^\wedge(e^\wedge)=0$, то $f*j \to 0$, когда симметричные бэровские окрестности U единичного элемента $e^\wedge \in G^\wedge$ стягиваются к $e^\wedge$.*

Доказательство. При заданном $\delta>0$ выбираем C в предыдущей лемме симметричным и удовлетворяющим условию $\int_{C'}|f|<\frac{\delta}{8}$ и полагаем $\varepsilon=\frac{\delta}{2\|f\|_1}$. Тогда

$$(f*j)(y)=\int f(x)\,j(x^{-1}y)\,dx=\int f(x)\,[j(x^{-1}y)-j(y)]\,dx$$

и

$$\|f*j\|_1 \leqslant \int |f(x)|\,\|j_{x^{-1}}-j\|_1\,dx=\int_C+\int_{C'}<\|f\|_1\varepsilon+\frac{\delta}{8}\cdot 4=\delta.$$

Это следствие сразу влечет выполнение условия D в $e^\wedge$, в остальных же точках оно получается путем сдвига.

Теорема. *Существует равномерно ограниченное направленное множество функций $v \in L^1(G)$ такое, что $v^\wedge \equiv 0$ в некоторой* *окрестности единичного элемента* $e^\wedge$ *и* $j * v \to f$ *для каждой функции* $f \in L^1(G)$, *удовлетворяющей условию* $f^\wedge(e^\wedge) = 0$.

Доказательство. Положим $v = u - j * u$, где u пробегает аппроксимативную единицу. Тогда $\|v_1\| \leqslant 3$ и $v^\wedge = u^\wedge - u^\wedge j^\wedge = 0$ в той окрестности единичного элемента $e^\wedge$, где $j^\wedge = 1$. Далее,

$$\|f - f * v\|_1 \leqslant \|f - f * u\|_1 + \|f * j\|_1 \cdot \|u\|_1 \to 0,$$

что и требовалось.

Это показывает, что для групповых алгебр локально компактных коммутативных групп справедлива теорема Шилова 25F. Мы сформулируем ее в несколько иной редакции.

Теорема. *Пусть I — замкнутый идеал в $L^1(G)$ и f — функция из $L^1(G)$, обладающая тем свойством, что $f^\wedge(\alpha) = 0$ для любого характера α, на котором все функции из I обращаются в нуль, иначе говоря, $h(I) \subset h(f)$ или $f \in k[h(I)]$. Предположим, далее, что та часть границы множества $h(f)$, которая входит в $h(I)$, не содержит никакого непустого совершенного множества. Тогда $f \in I$.*

Следствие. *Замкнутый идеал $I \subset L^1(G)$, имеющий дискретную (т. е. состоящую лишь из изолированных точек) оболочку, является ее ядром: $I = k[h(I)]$.*

37D. Мы видели, что характер-функция (x, α) $(x \in G,\ \alpha \in G^\wedge)$ непрерывна по совокупности аргументов x и α, причем

$$(x, \alpha_1\alpha_2) = (x, \alpha_1)(x, \alpha_2).$$

Тем самым каждый элемент $x \in G$ определяет характер группы $G^\wedge$, и определенное так отображение G в $G^{\wedge\wedge}$, очевидно, является алгебраическим гомоморфизмом. Понтрягинская теорема двойственности утверждает, что это есть изоморфное и гомеоморфное отображение G на $G^{\wedge\wedge}$, так что G можно отождествить с $G^{\wedge\wedge}$.

Использование находящегося теперь в нашем распоряжении замечательного аналитического аппарата позволяет дать короткое доказательство этой теоремы.

Пространство $[L^1 \cap \mathfrak{P}](G)$, переводящееся преобразованием Фурье как раз в $[L^1 \cap \mathfrak{P}](G^\wedge)$, представляет собой некоторую алгебру A равномерно непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности и отделяющих точки на G (ибо она содержит подалгебру, порожденную пространством $[(L^1 \cap L^2) * (L^1 \cap L^2)]$; см. пп. 36A,B). Поэтому слабая топология, которую A определяет на G, совпадает с заданной топологией на G (теорема 5G). Но в качестве преобразования Фурье функции $f^\wedge \in [L^1 \cap \mathfrak{P}]\,(G^\wedge)$, каждая $f \in A$ однозначно продолжается на всю $G^{\wedge\wedge}$, причем этим продолжением устанавливается изоморфизм $[L^1 \cap \mathfrak{P}]\,(G)$ и $[L^1 \cap \mathfrak{P}]\,(G^{\wedge\wedge})$. Поскольку топология на $G^{\wedge\wedge}$ есть слабая топология, определяемая этими продолженными функциями, мы заключаем, что G, рассматриваемое как подмножество в $G^{\wedge\wedge}$, имеет относительную топологию, индуцированную из $G^{\wedge\wedge}$, и плотно в $G^{\wedge\wedge}$ (в противном случае можно было бы построить ненулевую свертку двух функций из $(L^1 \cap L^2)\,(G^{\wedge\wedge})$, равную нулю на всем G, в противоречие с изоморфизмом продолжения). Так как подмножества из G и $G^{\wedge\wedge}$, на которых $|f^{\wedge\wedge}| > \varepsilon > 0$, имеют в обоих топологиях компактные замыкания и одно плотно в другом, то эти замыкания должны совпадать. Поэтому $G = G^{\wedge\wedge}$, и теорема двойственности доказана.

37E. Формула суммирования Пуассона. Пусть f — функция на $R = (-\infty, \infty)$, F — ее преобразование Фурье, α — произвольное положительное число и $\beta = \frac{2\pi}{\alpha}$. Можно показать, что при надлежащих ограничениях на f

$$\sqrt{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\alpha) = \sqrt{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\beta),$$

что и представляет собой формулу Пуассона.

Формальный вывод ее таков. Функция $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n\alpha)$ периодична и потому может считаться заданной на группе вещественных чисел, приведенных по модулю α. Характерами этой фактор-группы служат функции $e^{imx\frac{2\pi}{\alpha}} = e^{im\beta x}$, а ее группа характеров, рассматриваемая как подгруппа группы $R^\wedge = R$ (см. п. 35B), есть дискретная группа $\{m\beta\}_{-\infty}^{+\infty}$. Тогда

$$G(m\beta) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha e^{-im\beta x} g(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^\alpha e^{-im\beta x} f(x + n\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} e^{-im\beta x} f(x)\, dx = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-im\beta x} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} F(m\beta) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, F(m\beta).$$

Но, по формуле обращения, $g(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{im\beta x} G(m\beta)$. Поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\alpha) = g(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(m\beta) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m\beta),$$

откуда и следует формула Пуассона.

Мы дадим теперь доказательство обобщения формулы Пуассона на группы, наложив при этом на f довольно сильные ограничения, при которых законность всех этапов формального вывода очевидна. Эти ограничения можно было бы ослабить за счет утяжеления доказательства, однако, мы хотим здесь только показать групповой смысл формулы Пуассона.

Теорема. *Пусть G — локально компактная коммутативная группа, H — ее замкнутая подгруппа и меры Хаара на G, H и G/H согласованы так, что $\int\limits_G = \int\limits_{G/H} \int\limits_H$. Если функция $f \in [L^1 \cap \mathfrak{P}](G)$ такова, что $g(y) = \int\limits_H f(xy)\, dx$ есть непрерывная (на G/H) функция от y, то*

$$\int_H f(x)\, dx = \int_{(G/H)^\wedge} f^\wedge(\alpha)\, d\alpha.$$

Доказательство. Согласно теореме 35B, группу характеров для G/H образуют характеры $\alpha \in G^\wedge$ такие, что $(xy, \alpha) = (y, \alpha)$ для всех $x \in H$. Тогда

$$g^\wedge(\alpha) = \int_{G/H} \overline{(y, \alpha)}\, g(y)\, dy = \int_{G/H} \overline{(y, \alpha)} \left(\int_H f(xy)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{G/H} \int_H \overline{(xy, \alpha)}\, f(xy)\, dx dy = \int_G \overline{(x, \alpha)}\, f(x)\, dx = f^\wedge(\alpha).$$

Но, по теореме обращения,

$$g(y) = \int_{(G/H)^\wedge} (y, \alpha)\, g^\wedge(\alpha)\, d\alpha.$$

Поэтому

$$\int\limits_{H} f(x)\,dx = g(e) = \int\limits_{(G\times H)^\wedge} g^\wedge(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_{(G\times H)^\wedge} f^\wedge(\alpha)\,d\alpha,$$

а это и есть утверждаемая формула.

§ 38. Компактные коммутативные группы и обобщенные ряды Фурье

Теория преобразования Фурье для компактной коммутативной группы содержится в анализе гильбертовых алгебр, проведенном в § 27 и применяемом к произвольным компактным группам в главе VIII. Здесь же мы дадим простое изложение ее, не зависящее от указанных общих теорий.

38A. Теорема. *G компактна тогда и только тогда, когда $G^\wedge$ дискретна.*

Доказательство. Меняя ролями G и $G^\wedge$, замечаем прежде всего, что если G дискретна, то $L^1(G)$ содержит единицу (теорема 31D) и потому $G^\wedge$ компактна как пространство максимальных идеалов коммутативной банаховской алгебры с единицей (теорема 19B). Обратно, так как $L^1(G)$ — полупростая самосопряженная алгебра, то из следствия леммы 2 п. 26B вытекает, что если $G^\wedge$ компактна, то в $L^1(G)$ можно прямо построить единицу, взяв аналитическую функцию, тождественно равную 1, от всюду положительной функции $f^\wedge$ из алгебры преобразований Фурье, и, значит (в силу той же теоремы 31D), G дискретна. Справедливость утверждения теоремы в приведенной ее формулировке следует теперь из теоремы двойственности.

Вторую половину доказательства можно заменить следующим прямым рассуждением. Если G компактна, то множество характеров α, удовлетворяющих неравенству $\|\alpha - 1\|_\infty < \frac{1}{2}$, является (согласно п. 34C) открытой окрестностью единичного характера 1, очевидно, содержащей только его; тем самым топология в $G^\wedge$ — дискретная.

38B. Теорема. *Если группа G компактна и мера Хаара на ней нормирована так, что $\mu(G) = 1$, то формула обращения диктует такую нормировку меры Хаара на $G^\wedge$, при которой каждая точка имеет меру 1.*

Доказательство. Если мера точки на $G^\wedge$ равна 1, то единицей алгебры $L^1(G^\wedge)$ служит функция $u^\wedge$, равная 1 при $\alpha = e^\wedge$ и 0 во всех других точках. Так как сверткам на $G^\wedge$ соответствуют обычные поточечные произведения на G, то $u^\wedge$ есть преобразование Фурье функции $u \equiv 1$. Таким образом,

$$u^\wedge(\alpha) = \int \overline{(x, \alpha)}\, dx = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = e^\wedge, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq e^\wedge. \end{cases}$$

Поскольку $(x, e^\wedge) \equiv 1$, отсюда следует, что $\mu(G) = \int 1 dx = 1$, так что меры связаны указанным в теореме образом.

Установленную выше формулу можно переписать в следующем виде:

$$\int (x, \alpha_1)\overline{(x, \alpha_2)}\, dx = \int \overline{(x, \alpha_2\alpha_1^{-1})}\, dx = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_2 = \alpha_1, \\ 0, & \text{если } \alpha_2 \neq \alpha_1. \end{cases}$$

Тем самым имеем

Следствие. *Характеры группы G образуют ортогональное семейство.*

38C. *Характеры образуют полное ортонормальное семейство в $L^2(G)$, и разложение (ряд Фурье)*

$$f(x) = \sum_n (f, \alpha_n)\alpha_n$$

функции $f \in L^2(G)$ есть обратное преобразование Фурье.

Доказательство. Если $f(x) \in L^2(G)$, то $f^\wedge \in L^2(G^\wedge)$, так что $f^\wedge(\alpha) = 0$ вне некоторого конечного или счетного множества $\{\alpha_n\}$, и полагая

$$c_n = f^\wedge(\alpha_n) = \int f(x)\overline{(x, \alpha_n)}\, dx = (f, \alpha_n),$$

имеем

$$\int |f|^2 dx = \int |f^\wedge|^2 d\alpha = \sum_n |c_n|^2,$$

т. е. равенство Парсеваля. Непрерывная функция $f_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$ по самому своему определению является обратным преобразованием Фурье конечнозначной функции $f_n^\wedge$, равной c_i в α_i для $i \leqslant n$ и 0 во всех других точках. Так как $f_n^\wedge$, очевидно, сходится по норме L^2 к $f^\wedge$, то заключаем, что f_n сходится по норме L^2 к f, так что справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x, \alpha_n),$$

и так как $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x, \alpha_n) = \int f^\wedge(\alpha)(x, \alpha)\, d\alpha$, то это равенство есть формула обратного преобразования Фурье.

38D. *Каждая непрерывная функция на G может быть равномерно аппроксимирована конечными линейными комбинациями характеров.*

Это вытекает из теоремы Стона — Вейерштрасса, поскольку характеры отделяют точки и среди них содержится постоянная 1. Так как произведение двух характеров есть характер, то совокупность всех конечных линейных комбинаций характеров образует алгебру, обладающую, таким образом, всеми требуемыми свойствами.

Можно дать и непосредственное доказательство. Прежде всего, непрерывная функция f равномерно аппроксимируема функциями $f * u$, где u — элементы аппроксимативной единицы из $L^1(G)$. Как и выше, f аппроксимируется по норме L^2 функциями $f_n = \sum_{i=1}^{n} c_i (x, \alpha_i)$, а u — функциями $u_n = \sum_{i=1}^{n} d_i (x, \alpha_i)$, где последовательность $\{\alpha_n\}$ содержит все характеры, в которых $f^\wedge$ или $u^\wedge \neq 0$. Тогда $f * u$ равномерно аппроксимируется функциями

$$f_n * u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i (x, \alpha_i),$$

где последнее равенство можно проверить либо непосредственным свертыванием, либо вспомнив, что $f_n * u_n = T^* (\hat{f_n} \hat{g_n})$.

Частичные суммы разложения Фурье функции f, вообще говоря, не осуществляют равномерной аппроксимации.

Глава VIII

КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Если группа G компактна, то $L^2(G)$ является гильбертовой алгеброй, так что на нее распространяется вся теория, развитая в § 27. Так, $L^2(G)$ есть прямая сумма своих (взаимно ортогональных) минимальных двусторонних идеалов, причем оказывается, что все они конечномерны и состоят из одних непрерывных функций, а ее единицами (образующими идемпотентами) служат *характеры* группы G. Эти факты, представляющие собой непосредственное обобщение классической теории групповой алгебры конечной группы, устанавливаются в § 39; в § 40 они используются для полного раскрытия строения унитарных представлений группы G. В § 41 излагается теория почти периодических функций на произвольной группе, основанная на новом подходе.

§ 39. Групповая алгебра компактной группы

39A. Мера Хаара компактной группы G конечна; мы будем считать ее нормированной так, что $\mu(G) = 1$. Тогда

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty.$$

Далее, неравенство Шварца для любой унимодулярной группы дает

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

В совокупности эти неравенства показывают, что L^∞ и L^2 обе являются банаховскими алгебрами. Последняя есть даже гильбертова алгебра; действительно, она уже является гильбертовым пространством, выполнение же остальных требований, а именно, что $(f * g, h) = (g, f^* * h)$, $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$ и $f * f^* \neq 0$, если $f \neq 0$, допускает непосредственную проверку. Так $f * f^*$ непрерывна и $(f * f^*)(e) = \|f\|_2^2 > 0$ при $f \neq 0$, выполнение же остальных двух условий вытекает из инверсной инвариантности меры Хаара на G. То обстоятельство, что $L^2(G)$ есть гильбертова алгебра, означает, что ее алгебраическое строение известно весьма детально из анализа, проведенного в § 27. Привлечение же групповых соображений позволяет установить дальнейшие ее свойства; так, мы можем показать, что все минимальные идеалы здесь конечномерны. Согласно теореме 27F, это будет установлено, если мы сможем показать, что каждый (ненулевой) замкнутый двусторонний идеал содержит ненулевой центральный элемент, и мы предпошлем здесь доказательство этого переформулированию общих результатов § 27.

Лемма 1. *Непрерывная функция $h(x)$ принадлежит центру алгебры $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда $h(xy) \equiv h(yx)$.*

Доказательство. h принадлежит центру алгебры L^2 тогда и только тогда, когда

$$\int [h(xy)f(y^{-1}) - f(y)h(y^{-1}x)]\,dy = 0.$$

Утверждение леммы получается отсюда, если заменить во втором члене y на y^{-1} и вспомнить, что f произвольна. Это доказательство сохраняет силу также для L^1-алгебры унимодулярной локально компактной группы.

Лемма 2. *Каждый ненулевой замкнутый двусторонний идеал $I \subset L^2$ содержит ненулевой элемент из центра алгебры L^2.*

Доказательство (по Сегалу [44]). Положим $f = g * g^*$, где g — произвольный ненулевой элемент из I. Функция f непрерывна, поскольку $f(x) = (g_x, g)$, а g_x как элемент пространства L^2 есть непрерывная функция от x. Поэтому $f(axa^{-1})$ при фиксированном x есть непрерывная функция от a, а как элемент пространства L^∞ — непрерывная функция от x (см. п. 28B). Следовательно, функция

$$h(x) = \int f(axa^{-1})\,da$$

непрерывна, и так как $h(e) = f(e) = \|g\|_2^2 > 0$, то $h \neq 0$. Наконец, заменяя a на ay^{-1} в интеграле для $h(yx)$, заключаем из правой инвариантности меры Хаара, что $h(yx) = h(xy)$ и, значит, h — центральный элемент в L^2. Далее, легко видеть, что $h \in I$, ибо $f \in I$ и, в силу теоремы 31F, $f_a^a \in I$, а тогда из теоремы Фубини, как в доказательстве теоремы 31F, следует, что $h \in I^{\perp\perp} = I$. Тем самым лемма полностью доказана.

Из теоремы 27F следует теперь, что каждый минимальный двусторонний идеал $N \subset L^2(G)$ конечномерен и содержит свою единицу e. Отсюда, далее, следует, что каждая функция $f \in N$ непрерывна, ибо $f = f * e$, или $f(x) = (f_x, e)$, а мы знаем, что f_x как элемент пространства L^2 непрерывно зависит от x.

Результаты § 27 с полученными для рассматриваемого случая уточнениями приводят к следующей глобальной структурной теореме:

Теорема. *$L^2(G)$ как гильбертово пространство является прямой суммой (взаимно ортогональных) минимальных двусторонних идеалов N_α. Каждый минимальный двусторонний идеал N_α представляет собой конечномерное подпространство непрерывных функций. Он обладает единицей e_α, и проекцией любой функции $f \in L^2(G)$ на N_α служит $f_\alpha = f * e_\alpha = e_\alpha * f$. Регулярные максимальные идеалы в L^2 суть ортогональные дополнения минимальных идеалов, и каждый замкнутый идеал в L^2 есть одновременно прямая сумма содержащихся в нем минимальных идеалов и пересечение содержащих его максимальных идеалов.*

Единственными центральными функциями в N_α являются скалярные кратные единицы e_α, и каждая центральная функция $f \in L^2$ разлагается в ряд Фурье $f = \sum \lambda_\alpha e_\alpha$, где $\lambda_\alpha e_\alpha = f * e_\alpha$. Если G коммутативна и компактна, то все N_α одномерны, а единицы e_α суть характеры группы G.

39B. Полное описание строения отдельного минимального двустороннего идеала N также переносится из § 27, с некоторыми дополнениями. Начнем на этот раз с формулирования теоремы.

Теорема. *Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — ортогональные минимальные левые идеалы, прямая сумма которых образует минимальный двусторонний идеал N. Тогда $I_1^*, \ldots, I_n^*$ — минимальные правые идеалы, обладающие тем же свойством, причем $I_i^* \cap I_j = I_i^* * I_j$ одномерны. Поэтому существуют элементы $e_{ij} \in I_i^* \cap I_j$, однозначно определенные при $i = j$ и определенные с точностью до* *скалярного множителя, равного по модулю* 1, *при* $i \neq j$, *такие, что*

$$e_{ij} * e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{если} \quad j = k, \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k, \end{cases} \qquad e_{ij} = e_{ji}^* \ \text{ и } \ e = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}.$$

Функции $\{e_{ij}\}$ *образуют ортогональный базис в* N *и соответствие* $f \leftrightarrow (c_{ij})$, *где* $f = \sum c_{ij} e_{ij}$, *устанавливает алгебраический изоморфизм между* N *и полной алгеброй матриц* n-*го порядка, причем инволюция переходит в сопряженное транспонирование. Далее,*

$$\| e_{ij} \|_2^2 = n \quad \text{и} \quad n e_{ik}(xy) = \sum_j e_{ij}(x) e_{jk}(y).$$

Левые идеалы I_i *изоморфны друг другу (при соответствии* $I_i e_{ij} = I_j$) *и каждому другому минимальному левому идеалу в* N.

Доказательство. Новым здесь является лишь равенство $n e_{ik}(xy) = \sum_j e_{ij}(x) e_{jk}(y)$. Левый идеал I_k имеет базис $e_{1k}, \ldots, e_{nk}$ и инвариантен относительно левых сдвигов. Поэтому для заданных x и i существуют постоянные $c_{ij}(x)$ такие, что

$$e_{ik}(xy) = \sum_j c_{ij}(x) e_{jk}(y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_{ij}(x) = (e_{i1} * e_{1j})(x) &= \int e_{i1}(xy) e_{1j}(y^{-1})\, dy = \\ &= \sum_m c_{im}(x) \int e_{m1}(y) \overline{e_{j1}(y)}\, dy = c_{ij}(x) \| e_{j1} \|_2^2 = \\ &= c_{ij}(x) \| e_{11} \|_2^2, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждаемое равенство, если $\| e_{11} \|_2^2 = n$. Но

$$\begin{aligned} \| e_{11} \|_2^4 = \| e_{11} \|_2^2\, e_{11}(e) = \| e_{11} \|_2^2 \sum_{j=1}^{n} c_{1j}(x) e_{j1}(x^{-1}) &= \\ = \sum_{j=1}^{n} e_{1j}(x) e_{j1}(x^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} | e_{1j}(x) |^2&, \end{aligned}$$

и, интегрируя, мы получаем

$$\| e_{11} \|_2^4 = \sum_{j=1}^{n} \| e_{1j} \|_2^2 = n \| e_{11} \|_2^2,$$

или $\| e_{11} \|_2^2 = n$, что и требовалось.

39С. Как и в коммутативной теории, единицы e_α в компактной теории называют *характерами*; эта терминология также заимствована из классической теории конечных групп. Нет ничего неожиданного в том, что, как и в коммутативном случае, характеры подчиняются некоторому функциональному уравнению.

Теорема. *Некоторое скалярное кратное $\frac{f}{\lambda}$ функции $f \in L^\infty(G)$ является характером тогда и только тогда, когда существует скаляр γ такой, что*

$$\int f(xsx^{-1}t)\,dx = \frac{f(s)\,f(t)}{\gamma}.$$

Доказательство. Пусть e_α — характер (или единица) из минимального идеала N_α. Вследствие центральности e_α, имеем

$$\int e_\alpha(xsx^{-1}t)\,dx = \int e_\alpha(sx^{-1}tx)\,dx.$$

Как в доказательстве леммы 2 п. 39А, замечаем, что, в силу левой инвариантности меры Хаара, последний интеграл является центральной функцией от t для каждого фиксированного s. Принадлежа N_α, эта центральная функция является скалярным кратным e_α:

$$\int e_\alpha(xsx^{-1}t)\,dx = k(s)\,e_\alpha(t).$$

Для вычисления $k(s)$ положим $t = e$; получим $e_\alpha(s) = k(s)\,n$ и

$$\int e_\alpha(xsx^{-1}t)\,dx = \frac{e_\alpha(s)\,e_\alpha(t)}{n}, \quad \text{где} \quad n = e_\alpha(e) = \|e_\alpha\|_2^2.$$

Тогда для $f = \lambda e_\alpha$, очевидно, имеем

$$\int f(xsx^{-1}t)\,dx = \frac{f(s)\,f(t)}{\gamma}, \quad \text{где} \quad \gamma = n\lambda.$$

Пусть теперь, обратно, f тождественно удовлетворяет этому уравнению. Так же, как выше, убеждаемся в том, что $\int f(xsx^{-1}t)\,dx$ является центральной функцией от s для каждого фиксированного t, и из предположенного тождества следует, что f центральна. Пусть N_α — какой-либо минимальный двусторонний идеал, такой, что проекция $f * e_\alpha = \lambda e_\alpha$ функции f на N_α — ненулевая; тогда

$$\iint f(xsx^{-1}t)\, e_\alpha(t^{-1})\, dx dt = \lambda \int e_\alpha(xsx^{-1})\, dx = \lambda e_\alpha(s),$$

а с другой стороны,

$$\iint f(xsx^{-1}t)\, e_\alpha(t^{-1})\, dx dt = \frac{f(s)}{\gamma} \int f(t)\, e_\alpha(t^{-1})\, dt = f(s) \frac{(f, e_\alpha)}{\gamma}.$$

Так как $(f, e_\alpha) = (f * e_\alpha)(e) = \lambda e_\alpha(e) = \lambda n$, то заключаем, что $f(s) = \dfrac{\gamma e_\alpha(s)}{n}$, а это и утверждалось. Отметим, что, как и раньше, $\gamma = \lambda n$.

39D. Функция $f \in L^2$ называется *почти инвариантной*, если ее смешанные сдвиги f_a^b порождают конечномерное подпространство пространства L^2. Это подпространство является тогда, в силу теоремы 31F, двусторонним идеалом и потому суммой конечного числа минимальных идеалов. Таким образом, f почти инвариантна тогда и только тогда, когда она содержится в сумме конечного числа минимальных двусторонних идеалов. Функции из минимального идеала можно назвать минимальными почти инвариантными функциями, а разложение $f = \sum f_\alpha$ рассматривать как однозначное разложение f на минимальные почти инвариантные функции.

Совокупность всех почти инвариантных функций есть двусторонний идеал и, более того, алгебраическая сумма $\sum\limits_\alpha N_\alpha$ всех минимальных идеалов. Обычное поточечное произведение fg двух почти инвариантных функций f и g есть снова почти инвариантная функция. Действительно, если $\{f_i\}$ — множество смешанных сдвигов функции f, на которые натянуто порожденное ею инвариантное подпространство, и $\{g_j\}$ — аналогичное множество для g, то совокупность всех сдвигов произведения fg натянута на конечное множество функций $\{f_i g_j\}$. Таким образом, почти инвариантные функции образуют подалгебру в $C(G)$.

Теорема. *Каждая непрерывная функция на G может быть равномерно аппроксимирована почти инвариантными функциями.*

Доказательство. Если u — аппроксимативная единица, то $u * f$ равномерно аппроксимирует f (ибо если $u=0$ вне V, то $|(u*f)(x)-f(x)| = \left|\int u(y)[f(y^{-1}x)-f(x)]\,dy\right| \leqslant \max\limits_{y^{-1}\in V}\|f_y - f\|_\infty$ и т. д.), так что достаточно показать, что $u * f$ равномерно аппроксимируется почти инвариантными функциями. Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность, содержащая все α, для которых $f_\alpha \neq 0$ или $u_\alpha \neq 0$, и n таково, что

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha_i} \right\|_2 < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left\| u - \sum_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} \right\|_2 < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left\| u * f - \sum_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} * f_{\alpha_i} \right\|_\infty = \left\| \left(u - \sum_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}\right) * \left(f - \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}\right) \right\|_\infty < \varepsilon^2,$$

что и требовалось.

Другое доказательство получается из сделанного выше замечания, что векторное подпространство почти инвариантных функций замкнуто относительно обычного поточечного умножения, если воспользоваться теоремой Стона — Вейерштраса.

39E. В заключение этого параграфа покажем, что теория идеалов алгебры $L^1(G)$ совпадает с теорией идеалов алгебры $L^2(G)$. Так как $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$, то пересечение любого замкнутого идеала $I \subset L^1$ с L^2 является замкнутым идеалом в L^2. При этом, если $I \neq 0$, то $I \cap L^2 \neq 0$. Действительно, $I \cap L^2$ плотно по норме L^1 в I, ибо если $0 \neq f \in I$ и $u \in L^1 \cap L^2$ пробегает аппроксимативную единицу, то $u * f \in I \cap L^2$ и аппроксимирует f в L^1. Так как замыкание в L^1 замкнутого идеала из L^2 есть, очевидно, замкнутый идеал в L^1, то отображение $I \to I \cap L^2$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между замкнутыми идеалами алгебр L^1 и L^2. Минимальные идеалы алгебры L^2, будучи конечномерными, совпадают со своими замыканиями в L^1, и любой замкнутый в L^1 идеал I является прямой в смысле L^1 суммой содержащихся в нем минимальных идеалов. Чтобы убедиться в этом, аппроксимируем $f \in I$ функциями $g \in I \cap L^2$, а последние — суммами конечного числа их компонент. Эта аппроксимация только улучшается при переходе от нормы L^2 к норме L^1, так что f аппроксимируется в L^1 суммами конечного числа минимальных почти инвариантных функций из I.

Аналогичное рассмотрение допускают и другие алгебры L^p; единый подход к алгебре общего типа, примерами которой они служат, предложил Капланский [26], назвавший такую алгебру *дуальной*.

§ 40. Теория представлений

40A. Пусть T — любое ограниченное представление группы G. Другими словами, T — сильно непрерывное гомоморфное отображение $x \to T_x$ группы G на некоторую группу равномерно ограниченных линейных преобразований $\{T_x\}$ нормированного линейного пространства H в себя.

Теорема. *Если H — гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v), то*

$$[u, v] = \int (T_x u, T_x v)\, dx$$

есть эквивалентное скалярное произведение и относительно него все преобразования T_x унитарны.

Доказательство. Очевидно, $[u, v]$ обладает всеми алгебраическими свойствами скалярного произведения, за исключением, разве, того, что $u \neq 0$ влечет $[u, u] \neq 0$. Но последнее следует из того, что $(T_x u, T_x u)$ есть непрерывная функция от x, положительная при $x = e$. Далее,

$$[T_y u, T_y v] = \int (T_x T_y u, T_x T_y v)\, dx = \int (T_{xy} u, T_{xy} v)\, dx = \\ = \int (T_x u, T_x v)\, dx = [u, v],$$

так что преобразования T_x при этом скалярном произведении все унитарны. В случае конечномерного H доказательство этим и завершается.

Пусть B — верхняя граница множества норм $\{\|T_x\| : x \in G\}$. Полагая $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, $|||u||| = \sqrt{[u, u]}$, сразу имеем $|||u||| \leqslant B\|u\|$. С другой стороны, так как из $v = T_x u$ следует $u = T_{x^{-1}} v$, то $\|u\| \leqslant B \|T_x u\|$ и потому $\|u\| \leqslant B\, |||u|||$. Тем самым нормы $\|u\|$ и $|||u|||$ эквивалентны, и теорема полностью доказана.

40B. Начиная отсюда, мы будем всюду предполагать, что T есть представление группы G унитарными операторами в гильбертовом пространстве H. Как мы знаем (см. пп. 32B, C), T эквивалентно не повышающему норму и сохраняющему инволюцию представлению алгебры L^1 ограниченными операторами в H. Так как $L^2 \subset L^1$ и $\|f\|_2 \geqslant \|f\|_1$, если G компактна и $\mu(G) = 1$, то мы имеем тем самым и не повышающее норму представление алгебры $L^2(G)$, которое мы будем обозначать той же буквой T.

Дальнейшие наши рассуждения справедливы для симметричных представлений любой гильбертовой алгебры.

Теорема. *Каждое симметричное представление гильбертовой алгебры A однозначно представимо в виде прямой суммы (точных) представлений некоторых ее минимальных двусторонних идеалов.*

Доказательство. Пусть N_1 и N_2 — два различных (и потому ортогональных) минимальных двусторонних идеала алгебры A и H — пространство представления. Если $f \in N_1$ и $g \in N_2$, то $(T_f u, T_g v) = (u, T_{f * g} v) = 0$ для любых $u, v \in H$, поскольку $f * g = 0$. Если мы нормируем H, удалив пересечение ядер всех операторов T_f, и для каждого индекса α обозначим через H_α замыкание объединения множеств значений всех операторов T_f, соответствующих функциям $f \in N_\alpha$, а через T^α — представление, которое T индуцирует на N_α, то ясно, что H_α будут ортогональными подпространствами, сумма которых совпадает с H, а T — прямой суммой представлений T^α (простых) алгебр N_α. Так как каждое N_α является минимальным замкнутым двусторонним идеалом, то T^α — либо нулевое, либо точное, и ядром T служит как раз сумма тех идеалов N_α, для которых $T^\alpha = 0$.

40C. Введенные выше представления T^α не обязательно неприводимы, и мы можем подвергнуть их дальнейшему разложению, хотя уже и не однозначно определенному. В дальнейшем нашем исследовании мы сосредоточим свое внимание на отдельном минимальном идеале N и точном его симметричном представлении операторами в гильбертовом пространстве H, предполагая при этом, что объединение множеств значений операторов T_f плотно в H. Кроме того, мы будем предполагать, что N конечномерно; наше доказательство эквивалентности неприводимых составляющих теряет силу для бесконечномерного N.

Для каждого ненулевого $v_1 \in H$ существует минимальный левый идеал $I \subset N$ с порождающим идемпотентом e таким, что $T_e v_1 \neq 0$. Тогда $H_1 = \{T_f v_1 \colon f \in I\}$ является конечномерным подпространством пространства H, инвариантным относительно операторов T_f, $f \in N$, и операторно изоморфным I при соответствии $f \to T_f v_1$. Взаимная однозначность этого отображения вытекает обычным образом из замечания, что в противном случае его ядро было бы ненулевым собственным подидеалом в I. Операторный изоморфизм его вытекает из равенства $T_g(T_f v_1) = (T_g T_f) v_1 = T_{gf} v_1$, устанавливающего требуемую связь между левым умножением на g в I и применением оператора T_g в H_1. Наконец, H_1 неприводимо, ибо, каково бы ни было $v = T_f v_1 \in H_1$, так как существует $g \in N$ такое, что $gf = e$, то $T_f v = T_e v_1$ и подпространство, порождаемое элементом v, совпадает с H_1.

Если H_1 — собственное подпространство пространства H, то берем $v_2 \in H_1^{\perp}$ и замечаем, что тогда

$$(T_f v_2, T_f v_1) = (v_2, T_{g^* f} v_1) = 0,$$

так что любое минимальное подпространство, полученное указанным выше образом из v_2, автоматически ортогонально к H_1. Продолжая этот процесс, мы разложим H в прямую сумму конечномерных неприводимых частей H_α. Пусть T^α — неприводимое представление, индуцированное представлением T на H_α. Из предыдущего пункта и второй теоремы п. 27E следует, что все T^α эквивалентны. Тем самым мы доказали, что *каждое точное представление минимального замкнутого двустороннего идеала есть прямая сумма эквивалентных неприводимых представлений.*

40D. Мы можем теперь ограничиться рассмотрением того случая, когда T — неприводимое представление в конечномерном гильбертовом пространстве V.

Пусть N — минимальный идеал, на котором T является изоморфизмом, и (e_{ij}) — матрица, описанная в п. 39B. Будем теперь вместо T_f пользоваться обозначением $T(f)$. Так как $e_{kk}^2 = e_{kk}$, то $T(e_{kk})$ есть проекция; пусть V_k — множество ее значений. Если v_1 — ненулевой вектор из V_1, то $v_j = T(e_{j1}) v_1$ есть вектор из V_j, поскольку

$$T(e_{jj}) v_j = T(e_{jj} e_{j1}) v_1 = T(e_{j1}) v_1 = v_j.$$

Аналогично убедимся в том, что $v_j = T(e_{ji})v_i$. Так как $T(e_{ij})v_n = 0$, если $j \neq n$, то векторы v_j линейно независимы, и равенство $v_j = T(e_{ji})v_i$ показывает, что матрица коэффициентов разложения любого $f \in N$ относительно базиса (e_{ij}) совпадает с матрицей $T(f)$ относительно базиса $\{v_j\}$ в натянутом на него подпространстве V'. Таким образом, V' инвариантно относительно T и операторно изоморфно любому минимальному идеалу из N. Но так как T неприводимо, то $V' = V$.

Используя теперь предположение, что T есть симметричное представление, т. е. что $T(f^*) = [T(f)]^*$, получаем:

$$\|v_j\|^2 = (T(e_{j1})v_1, T(e_{j1})v_1) = (v_1, T(e_{1j}e_{j1}v_1)) = \\ = (v_1, T(e_{11})v_1) = (v_1, v_1) = \|v_1\|^2$$

и

$$(v_i, v_j) = (T(e_{i1})v_1, T(e_{j1})v_1) = (v_1, T(e_{1i}e_{j1})v_1) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Поэтому базис $\{v_i\}$ при $\|v_1\| = 1$ ортонормален.

Пусть теперь снова T порождается представлением T_x компактной группы. Так как $T_x f = e^x * f$ на N, а

$$e^x(y) = e(yx^{-1}) = \sum_i e_{ii}(yx^{-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i,j} e_{ij}(y)\,e_{ji}(x^{-1}) = \\ = \sum_{i,j} \frac{\overline{e_{ij}(x)}}{n}\, e_{ij}(y),$$

то заключаем, что матрицей для T_x относительно ортонормального базиса $\{v_i\}$ пространства V служит $\left(\frac{\overline{e_{ij}(x)}}{n}\right)$. Всякий другой ортонормальный базис для V получается из рассмотренного здесь некоторым унитарным преобразованием, под действием которого функции e_{ij} порождают новое семейство аналогичных функций, связанное с новым базисом. Нами доказана следующая

Теорема. *Пусть T — неприводимое представление компактной группы G унитарными преобразованиями конечномерного гильбертова пространства V. Распространим его обычным образом на $L^2(G)$, и пусть N — минимальный идеал, на котором T есть изоморфизм, так что ядром T служит регулярный максимальный идеал $M = N^{\perp}$. Если $c_{ij}(x)$ — матрица преобразования T_x относительно произвольного фиксированного ортонормаль-*

ного базиса в V, *то функции* $e_{ij}(x) = \overline{nc_{ij}(x)}$ *являются матричными образующими для* N *из теоремы* 39B, *и каждое семейство таких матричных образующих может быть получено этим путем.*

§ 41. Почти периодические функции

В этом параграфе вниманию читателя предлагается, насколько известно автору, новый подход к почти периодическим функциям. Мы отправляемся от простого замечания, что лево почти периодические функции на топологической группе G образуют в равномерной норме коммутативную C^*-алгебру (кратко обозначаемую нами ЛПП), которую можно поэтому рассматривать как алгебру $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на компактном пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов ЛПП. Точки группы G определяют часть этих идеалов, притом образующую плотное множество в $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{M}$ можно представлять себе получающимся из G, во-первых, путем отождествления тех точек, которые не отделяются ни одной функцией $f \in$ ЛПП, затем присоединения новых точек, соответствующих остальным максимальным идеалам, и, наконец, ослабления топологии до слабой топологии, определяемой алгеброй ЛПП. Основная лемма устанавливает, что групповые операции на G, рассматриваемой как подмножество пространства $\mathfrak{M}$, **равномерно непрерывны** в топологии этого пространства и потому однозначно продолжаемы на все $\mathfrak{M}$. Мы приходим в итоге к непрерывному гомоморфному отображению α группы G на плотную подгруппу компактной группы $\mathfrak{M}$, обладающему тем свойством, что функциями на G вида $f(\alpha(s))$, где $f \in C(\mathfrak{M})$, являются как раз почти периодические функции на G (т. е. что сопряженное отображение α^* есть изометрически изоморфное отображение $C(\mathfrak{M})$ на ЛПП).

41A. *Лево почти периодической функцией* на топологической группе G называют ограниченную непрерывную комплексную функцию f, семейство левых сдвигов которой $S_f = \{f_s\colon s \in G\}$ вполне ограничено в равномерной норме. Напоминаем читателю, что метрическое пространство S называют вполне ограниченным тогда и только тогда, когда оно покрываемо конечным числом шаров радиуса ε для любого $\varepsilon > 0$. Далее, метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно. Так как замыкание $\overline{S}_f$ семейства S_f в равномерной норме автоматически полно, то мы видим, что f лево почти периодична тогда и только тогда, когда $\overline{S}_f$ компактно. Пусть ЛПП — совокупность всех лево почти периодических функций на G.

Если f, $g \in$ ЛПП, то топологическое произведение $\overline{S}_f \times \overline{S}_g$ компактно и его отображение $\langle h, k\rangle \to h+k$ непрерывно. Поэтому множество значений этого отображения, т. е. множество всех сумм функции из $\overline{S}_f$ с функцией из $\overline{S}_g$, компактно, а следовательно, его подмножество S_{f+g} вполне ограничено. Тем самым мы доказали, что ЛПП замкнута относительно сложения, и очевидно, что то же доказательство проходит и для умножения.

Пусть теперь $f^n \in$ ЛПП и равномерно сходятся к f. Так как $\|f^n_x - f_x\|_\infty = \|f^n - f\|_\infty$, то последовательность f^n_x сходится к f_x равномерно для всех $x \in G$. Выбрав при заданном $\varepsilon > 0$ функцию f^n так, чтобы $\|f^n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, и затем точки x_i так, чтобы множество $\{f^n_{x_i}\}$ образовывало в S_{f^n} $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть, мы стандартным комбинированием неравенств убедимся в том, что $\{f_{x_i}\}$ образует в S_f ε-сеть. Таким образом, $f \in$ ЛПП, и, значит, ЛПП полна.

Если f лево почти периодична, то то же верно и для ее вещественной и мнимой частей, а потому и для комплексно сопряженной функции $\bar{f}$. Таким образом, ЛПП замкнута относительно инволюции $f \to \bar{f}$. Нами доказана

Теорема. *Совокупность всех лево почти периодических функций на топологической группе G образует в равномерной норме коммутативную C^*-алгебру с единицей.*

41B. Из этой теоремы (и теоремы 26А) следует, что алгебра ЛПП изоморфна и изометрична алгебре $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве $\mathfrak{M}$ ее максимальных идеалов. Каждая точка $s \in G$ определяет гомоморфное отображение $f \to f(s)$ алгебры ЛПП в поле комплексных чисел, и потому имеется естественное отображение α группы G в пространство $\mathfrak{M}$ (где $\alpha(s)$ — ядро гомоморфизма, соответствующего элементу α). Множества $\{M: |f^\wedge(M) - k| < \varepsilon\} \subset \mathfrak{M}$ образуют подбазис топологии на $\mathfrak{M}$. Так как прообразом такого множества относительно α является открытое множество $\{s: |f(s)-k|<\varepsilon\}$, то α непрерывно. Наконец, $\alpha(G)$ плотно в $\mathfrak{M}$, ибо в противном случае на $\mathfrak{M}$ существовала бы ненулевая непрерывная функция, которой на G соответствовал бы тождественный нуль, что невозможно.

Разумеется, отображение α, вообще говоря, не взаимно однозначно, и априори не очевидно, что семейства неотделимых точек из G являются смежными классами по замкнутой нормальной подгруппе, так что α определяет групповую структуру на образе $\alpha(G)\subset\mathfrak{M}$. А если принять, что этот вопрос уже удовлетворительно разрешен, то остается еще задача распространения этой групповой структуры на все $\mathfrak{M}$. Исследование этих вопросов обнаруживает необходимость основной комбинаторной леммы, которую мы дадим здесь в форме прямого элементарного доказательства того, что лево почти периодическая функция также право почти периодична. Основная идея этого доказательства — та же, что и доказательства того, что изометрии компактного метрического пространства образуют в равномерной норме вполне ограниченное множество.

Лемма. *Для каждой функции $f\in$ ЛПП и каждого $\varepsilon>0$ существует конечное множество точек $\{b_i\}$, обладающее тем свойством, что для любого b найдется по крайней мере одна из точек b_i такая, что $|f(xby)-f(xb_iy)|<\varepsilon$ для всех x и y.*

Доказательство. Пусть $\{f_{\alpha_i}\}$ — конечная $\frac{\varepsilon}{4}$-сеть в семействе S_f всех левых сдвигов функции f. При заданных $b\in G$ и i функция f_{a_ib} отстоит от f_{α_j} для некоторого j на расстояние, меньшее $\frac{\varepsilon}{4}$. Считая i переменным, мы получаем целочисленную функцию $j(i)$ такую, что $\|f_{a_ib}-f_{a_{j(i)}}\|_\infty<\frac{\varepsilon}{4}$ для каждого i. Выберем для каждой такой целочисленной функции $j(i)$ какое-нибудь одно такое b (если хоть одно существует), и пусть $\{b_j\}$ — полученное так конечное множество. Тогда, по самому определению множества $\{b_j\}$, для каждого b в нем содержится точка b_k такая, что $\|f_{a_ib}-f_{a_ib_k}\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$ для всех i. Так как для любого $x\in G$ можно найти a_i такое, что $\|f_x-f_{a_i}\|_\infty<\frac{\varepsilon}{4}$, то

$$\|f_{xb}-f_{xb_k}\|_\infty \leqslant \|f_{xb}-f_{a_ib}\|_\infty+\|f_{a_ib}-f_{a_ib_k}\|_\infty+\|f_{a_ib_k}-f_{xb_k}\|_\infty<$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Иными словами, для каждого $b\in G$ найдется одна из точек b_k такая, что $|f(xby)-f(xb_ky)|<\varepsilon$ для всех x и y, что и требовалось.

Следствие 1. *Множество функций* $\{f_{ij}\}$, *определенных формулой* $f_{ij}(x)=f(b_ixb_j)$, *образует* 2ε-*сеть в совокупности всех смешанных сдвигов* $\{f_a^b\}$ *функции* f.

Следствие 2. *Если* x *и* y *таковы, что* $|f(b_ixb_j)-f(b_iyb_j)|<\varepsilon$ *для всех* i *и* j, *то* $|f(uxv)-f(uyv)|<5\varepsilon$ *для всех* $u, v\in G$.

Доказательство. При заданных u и v выбираем i и j так, чтобы $\|f(uxv)-f(b_ixb_j)\|_\infty<2\varepsilon$. Это неравенство в соединении с предположенным и даст требуемое неравенство $|f(uxv)-f(uyv)|<$ $<5\varepsilon$.

41C. Мы покажем теперь, что умножение однозначно продолжаемо с G на все $\mathfrak{M}$. Для этого, полагая $x^\wedge=\alpha(x)$, мы покажем, что если $x_1^\wedge\to M_1$ и $x_2^\wedge\to M_2$, где $M_1, M_2\in\mathfrak{M}$, то $(x_1x_2)^\wedge$ сходится. Что нам уже известно — это то, что при заданных $f\in$ ЛПП и $\varepsilon>0$ существуют слабые окрестности N_1 и N_2 точек M_1 и M_2 такие, что если $x_1^\wedge, y_1^\wedge\in N_1$ и $x_2^\wedge, y_2^\wedge\in N_2$, то $|f(x_1x_2)-$ $-f(y_1y_2)|<\varepsilon$; это вытекает из следствия 2 предыдущего пункта, если написать

$$f(x_1x_2)-f(y_1y_2)=f(x_1x_2)-f(x_1y_2)+f(x_1y_2)-f(y_1y_2) \quad ({}^{54}).$$

Множества $\{(x_1x_2)^\wedge: x_1\in N_1, x_2\in N_2\}$, где N_1 и N_2 стягиваются соответственно к M_1 и M_2, очевидно, образуют центрированное семейство, и так как $\mathfrak{M}$ компактно, то их замыкания имеют непустое пересечение. Если M и M' — две его точки, то, в силу предшествующего замечания, $|f^\wedge(M)-f^\wedge(M')|<\varepsilon$ для каждого $\varepsilon>0$ и каждой $f\in$ ЛПП, так что $M=M'$. Таким образом, для любых заданных $M_1, M_2\in\mathfrak{M}$ существует однозначно определенная точка $M\in\mathfrak{M}$, обладающая тем свойством, что для каждой слабой окрестности $N(M)$ существуют слабые окрестности $N_1(M_1)$ и $N_2(M_2)$ такие, что $(x_1x_2)^\wedge\in N$ для всех $x_1^\wedge\in N_1$ и $x_2^\wedge\in N_2$. Это показывает, во-первых, что произведение M_1M_2 однозначно определено и, во-вторых, если взять $x_1^\wedge$ и $x_2^\wedge$ стремящимися к другим точкам из N_1 и N_2,— что произведение M_1M_2 непрерывно по совокупности обоих множителей. Читатель, знакомый с теорией равномерных пространств, заметит, что проведенное рассуждение является довольно неуклюжим выражением того, что $(x_1x_2)^\wedge$ есть равномерно непрерывная функция от $x_1^\wedge$ и $x_2^\wedge$ в равномерной топологии пространства $\mathfrak{M}$ и потому однозначно продолжаема на все $\mathfrak{M}$.

Нам нужно еще показать существование и непрерывность обратных элементов, т. е., говоря грубее, что если $x^\wedge \to M$, то x^{-1} сходится. Но, в силу следствия 2 п. 41B, при заданных $f \in$ ЛПП и $\varepsilon > 0$ существует слабая окрестность $N(M)$ такая, что если $x, y \in N$, то $|f(uxv) - f(uyv)| < \varepsilon$ для всех u и v. При $u = x^{-1}$ и $v = y^{-1}$ это дает $|f(y^{-1}) - f(x^{-1})| < \varepsilon$ и совершенно так же, как выше, доказывает существование однозначно определенного гомеоморфного отображения $M \to M^{-1}$ пространства $\mathfrak{M}$ на себя такого, что $(x^\wedge)^{-1} = (x^{-1})^\wedge$ для всех $x \in G$. Таким образом, $MM^{-1} = \lim (x^\wedge x^{\wedge -1}) = e^\wedge$ и M^{-1} обратен M. Нами получена требуемая

Теорема. *Для любой топологической группы G существуют компактная группа $\mathfrak{M}$ и непрерывное гомоморфное отображение α группы G на плотную подгруппу группы $\mathfrak{M}$ такие, что функция f на G лево почти периодична тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция g на $\mathfrak{M}$ такая, что $f(s) \equiv g(\alpha(s))$ (т. е. $f = \alpha^* g$).*

По поводу этой теоремы следует еще заметить, что группа $\mathfrak{M}$ с точностью до изоморфизма однозначно определена. Действительно, если $\mathfrak{M}'$ — другая такая группа, с гомоморфизмом β, то $\beta^{*-1}\alpha^*$ есть алгебраически изоморфное отображение алгебры $C(\mathfrak{M})$ на $C(\mathfrak{M}')$ и потому определяет гомеоморфное отображение γ пространства $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$. Так как γ, очевидно, есть продолжение отображения $\beta\alpha^{-1}$, являющегося изоморфизмом на плотной подгруппе $\alpha(G)$, то γ само есть изоморфизм. Иными словами, любые две такие группы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ непрерывно изоморфны.

41D. В силу последней теоремы, совокупность (лево) почти периодических функций на группе G приобретает все алгебраические свойства групповой алгебры компактной группы. Так, любая функция из ЛПП может быть равномерно аппроксимирована почти инвариантными функциями, т. е. почти периодическими функциями, сдвиги которых порождают конечномерные подпространства пространства L^∞. Верна также более точная теорема L^2-теории, согласно которой каждая почти периодическая функция обладает разложением Фурье в ряд по однозначно определенным минимальным почти инвариантным функциям, но она имеет тот кажущийся дефект, что для определения скалярного произведения, на первый взгляд, необходим интеграл Хаара на ассоциированной компактной группе. Однако И. Нейман [39], доказав нижеследующую теорему, показал, что можно дать внутреннее определение среднего $M(f)$ почти периодической функции.

Теорема. *Равномерно замкнутое выпуклое множество функций, порожденное левыми сдвигами почти периодической функции f, содержит и притом только одну постоянную.*

Значение этой постоянной, конечно, и принимается за $M(f)$ Нейман доказал существование и свойства $M(f)$ совершенно элементарными методами, опираясь лишь на определение почти периодичности. Для нас будет короче, принимая во внимание развитую выше теорию, установить существование $M(f)$ с помощью интеграла Хаара на $\mathfrak{M}$. Так как при этом окажется, что $M(f) = \int f^\wedge d\mu$, то тем самым будет также доказана тождественность теории разложения почти периодических функций, основанной на неймановском среднем, с теорией, перенесенной из ассоциированной компактной группы.

Доказательство теоремы. Выпуклое множество, порожденное семейством S_f, есть совокупность всех конечных сумм $\sum c_i f(a_i x)$, где $c_i > 0$ и $\sum c_i = 1$. Нам нужно показать, что такими суммами можно равномерно аппроксимировать постоянную $M(f) = \int f^\wedge d\mu$ и притом из постоянных — только ее. Так как S_f изометрично вкладывается в $C(\mathfrak{M})$, а $\alpha(G)$ плотно в $\mathfrak{M}$, то достаточно доказать теорему на $\mathfrak{M}$. При заданном $\varepsilon > 0$ выберем V так, чтобы $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $xy^{-1} \in V$, и возьмем $h \in L_V^+$. Так как $\mathfrak{M}$ компактно, то существует такое конечное число точек $a_1, \ldots, a_n$, что $H(x) = \sum_{i=1}^{n} h(xa_i^{-1}) > 0$ на $\mathfrak{M}$. Тогда функции $g_i = \frac{h^{a_i}}{H}$ обладают тем свойством, что $g_i = 0$ вне V_{a_i} и $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) \equiv 1$. Полагая $c_i = \int g_i$, имеем

$$\left|\int f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i y)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \int g_i(x)\,[f(xy) - f(a_i y)]\,dx\right| < \varepsilon,$$

ибо $|f(xy) - f(a_i y)| < \varepsilon$, когда $g_i(x) \neq 0$. Таким образом, $M(f) = \int f$ действительно аппроксимируется элементами $\sum c_i f_{a_i}$ выпуклого множества, порожденного семейством S_f.

Обратно, если k—постоянная, которую можно так аппроксимировать: $\|k - \sum c_i f(a_i y)\|_\infty < \varepsilon$, то интегрирование дает $\left|k - \int f(y)\,dy\right| < \varepsilon$, так что $k = \int f = M(f)$, и теорема полностью доказана.

Следствие. *При введении $M(f)$ в качестве интеграла в классе почти периодических функций каждая почти периодическая функция обладает однозначно определенным L^2-разложением на сумму минимальных почти инвариантных функций.*

41E. Если G коммутативна, то ассоциированная с ней компактная группа G_c коммутативна и допускает простое описание. Минимальными почти инвариантными функциями на G_c служат, конечно, ее характеры, и, следовательно, минимальными почти инвариантными функциями на G — характеры группы G, ибо если h — характер группы G_c, то, очевидно, $f(x) = h(\alpha(x))$ — характер группы G. Таким образом, отображение, сопряженное к α, определяет алгебраический изоморфизм между группами характеров групп G и G_c. Так как $G_c^\wedge$ дискретна, то она отождествляется с абстрактной группой характеров группы G, взятой в дискретной топологии. Тем самым G_c есть группа характеров группы G^0, где G^0 — группа $G^\wedge$ характеров группы G, но только взятая в дискретной топологии.

Для коммутативной группы теоремы аппроксимации и разложения дают, что каждая почти периодическая функция может быть равномерно аппроксимирована линейными комбинациями характеров и обладает однозначно определенным L^2-разложением в бесконечный ряд по характерам. В частности, на аддитивной группе вещественных чисел функция почти периодична тогда и только тогда, когда она может быть равномерно аппроксимирована линейными комбинациями показательных функций $\sum_{n=1}^{m} c_n e^{i\lambda_n x}$. Это совпадет с классическим результатом, если мы покажем, что неймановские определения почти периодичности и среднего значения эквивалентны классическим. Это устанавливается нижеследующими двумя теоремами.

41F. Теорема. *Непрерывная функция f на R почти периодична тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$ такое, что на каждом интервале длины T имеется по крайней мере одна точка a, для которой $\|f - f_a\|_\infty < \varepsilon$.*

Доказательство. Прежде всего, перефразируем условие теоремы следующим образом: при каждом $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$ такое, что для каждого a существует $b \in [-T, T]$, для которого $\|f_a - f_b\|_\infty < \varepsilon$.

Если f почти периодична и множество $\{f_{a_i}\}$ образует ε-сеть в S_f, то для выполнения перефразированного условия достаточно лишь взять в качестве $[-T, T]$ наименьший отрезок, содержащий все точки a_i.

Обратно, предположим, что перефразированное условие выполнено. Покажем прежде всего, что f равномерно непрерывна. Для этого выберем δ так, чтобы $|f(b+t) - f(b)| < \varepsilon$, когда $b \in [-T, T]$ и $|t| < \delta$. Так как при любом данном x можно выбрать $b \in [-T, T]$ так, чтобы $\|f_x - f_b\| < \varepsilon$, то будем иметь

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x+t) - f(b+t)| + |f(b+t) - f(b)| + |f(b) - f(x)| < 3\varepsilon$$

и, следовательно, $\|f - f_t\| < 3\varepsilon$ при $|t| < \delta$.

Пусть теперь $\{a_1, \ldots, a_n\}$ есть δ-сеть в $[-T, T]$. При заданном a выбираем сначала $b \in [-T, T]$ так, чтобы $\|f_a - f_b\| < \varepsilon$, а затем a_i, для которого $|a_i - b| < \delta$, так что, согласно предыдущему,

$$\|f_b - f_{a_i}\|_\infty = \|f_{b-a_i} - f\|_\infty < 3\varepsilon.$$

Тогда

$$\|f_a - f_{a_i}\| \leqslant \|f_a - f_b\| + \|f_b - f_{a_i}\| < 4\varepsilon,$$

т. е. $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ есть 4ε-сеть в S_f, и, значит, f почти периодична.

41G. Теорема. $M(f)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\,dx.$

Доказательство. При заданном $\varepsilon>0$ выберем конечные множества $\{c_i\}$ и $\{a_i\}$ так, чтобы

$$\|M(f)-\sum c_i f(x-a_i)\|_\infty<\varepsilon.$$

Интегрированием получим

$$\left|M(f)-\frac{1}{2T}\sum c_i\int\limits_{-T}^{T}f(x-a_i)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Но если $T>T_\varepsilon=\frac{\|f\|_\infty \max|a_i|}{\varepsilon}$, то

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(x-a_i)\,dx=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T-a_i}^{T-a_i}f(y)\,dy=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(y)\,dy+\delta_i,$$

где $|\delta_i|<\frac{|a_i|\,\|f\|_\infty}{T}<\varepsilon$. Поэтому

$$\left|M(f)-\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(y)\,dy\right|<\varepsilon$$

для всех $T>T_\varepsilon$, и теорема доказана.

Содержащиеся в теоремах 41F и G равносильные прежним характеристики почти периодичности и среднего $M(f)$ суть не что иное, как классические определения этих понятий для вещественной прямой. Таким образом, из нашей общей теории вытекают основные результаты классической теории почти периодических функций.

41H. В заключение этого параграфа скажем несколько слов по поводу обычного определения компактной группы G_c, ассоциируемой с G почти периодическими функциями на G. Мы определили лево почти периодическую функцию f как функцию, обладающую тем свойством, что равномерное замыкание $\overline{S_f}$ семейства S_f ее левых сдвигов является компактным метрическим пространством. Пусть U_a^f — оператор, индуцированный на $\overline{S_f}$ оператором левого сдвига U_a ($U_af=f_{a^{-1}}$). U_a^f является изометрией, и элементарное (но не тривиальное) рассуждение показывает, что гомоморфное отображение $a\to U_a^f$ группы G в группу изометрий пространства $\overline{S}_f$, снабженную равномерной нормой, непрерывно. Но с помощью рассуждений, аналогичных примененным в п. 41В, можно показать, что изометрии компактного метрического пространства образуют в равномерной норме компактную группу. Таким образом, равномерное замыкание G_f группы $\{U_a^f\colon a \in G\}$ является компактной метрической группой, и топологическое произведение $\prod\limits_f G_f$ компактно. Пусть $\overline{G}$ — группа изометрических отображений T пространства ЛПП на себя таких, что для каждого f отображение T^f, индуцируемое изометрией T на S_f, принадлежит G_f. Каждая изометрия из $\overline{G}$ определяет точку в $\prod\limits_f G_f$, и легко видеть, что получающееся так подмножество в $\prod\limits_f G_f$ замкнуто и потому компактно. Тем самым $\overline{G}$ сама компактна, если ввести на ней топологию, в которой подбазис окрестностей изометрии $T_0 \in \overline{G}$ образуют множества изометрий $T \in \overline{G}$ таких, что $\|T^f - T_0^f\| < \varepsilon$ ($f \in$ ЛПП). При этом гомоморфное отображение α группы G в $\overline{G}$, определенное формулой $\alpha(s) = U_s$, непрерывно в этой топологии.

Если $f \in$ ЛПП, то

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|f_x - f_y\|_\infty \leqslant \|U_x^f - U_y^f\|.$$

Тем самым функция F, определенная формулой $F(U_x^f) = f(x)$, равномерно непрерывна на плотном подмножестве пространства G_f и потому однозначно продолжается на все G_f. Так как проекция $\overline{G}$ на G_f ($T \to T^f$) непрерывна, мы можем тогда считать F определенной и непрерывной на всем $\overline{G}$. При этом, по определению, $F(\alpha(s)) = f(s)$. Таким образом, для каждой $f \in$ ЛПП существует $F \in C(\overline{G})$ такая, что $f(s) = F(\alpha(s))$. Обратно, как было выше замечено, каждая непрерывная функция F на компактной группе $\overline{G}$ почти периодична, и потому $F(\alpha(s))$ почти периодична на G. Таким образом, $\overline{G}$ изоморфна компактной группе G_c, ассоциированной с G. Этот метод построения рассматриваемой компактной группы в существенных чертах совпадает с предложенным А. Вейлем [48].

Глава IX

НЕКОТОРЫЕ ДАЛЬНЕЙШИЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ

В этой главе мы дадим краткое резюме результатов, полученных в тех частях этой обширной области, которые разведаны пока лишь частично. Нашей целью будет не столько изложение, сколько указание некоторых направлений, в которых читатель мог бы пожелать углубиться в дальнейшую литературу. В этой связи мы рекомендуем читателю ознакомиться также с обзорной статьей Макки [35], в которой многие из этих вопросов разобраны более тщательно.

§ 42. Некоммутативная теория

42А. Теорема Планшереля. Начнем с проблемы обобщения теоремы Планшереля. Читатель мог заметить, что существует значительная степень аналогии между преобразованием Фурье на коммутативной группе и разложением функции в сумму минимальных почти инвариантных функций на компактной группе. Этим двум ситуациям общи следующие свойства. Существует локально компактное топологическое пространство $G^\wedge$, с каждой точкой которого ассоциировано минимальное инвариантное относительно сдвигов пространство V_α ограниченных непрерывных функций на G. Каждой функции $f \in L^1$ соответствует однозначно определенная составляющая функция $f_\alpha \in V_\alpha$ такая, что $f_\alpha(x)$ для каждого фиксированного x есть непрерывная функция от α, обращающаяся в нуль на бесконечности. На $G^\wedge$ существует мера μ такая, что какова бы ни была функция $f \in (L^1 \cap \mathfrak{P})(G)$, $f_\alpha(x) \in L^1(\mu)$ для каждого x и $f(x) = \int f_\alpha(x)\, d\mu(\alpha)$. V_α является (конечномерным) гильбертовым пространством с естественно определенным скалярным произведением, и для $f \in (L^1 \cap L^2)(G)$ имеет место формула

$$\|f\|_2^2 = \int \|f_\alpha\|^2\, d\mu(\alpha)$$

(теорема Парсеваля). Тем самым отображение $f \to f_\alpha$ может быть продолжено с сохранением этого равенства на все $L^2(G)$, с тем осложнением, что теперь f_α будет определена уже с точностью до множеств значений α, мера которых равна нулю. Это и есть теорема Планшереля.

В каждом подпространстве V_α имеется однозначно определенная функция e_α, характеризуемая как центральная положительно определенная минимальная почти инвариантная функция. Компонента f_α функции $f \in L^1$ в V_α получается по формуле $f_\alpha = f * e_\alpha = U_f e_\alpha$, где U — левое регулярное представление. Подпространства V_α инвариантны относительно U, и функции e_α задаются также равенством $e_\alpha(x) = \operatorname{tr} U_x^\alpha$, где U^α — представление, которое U индуцирует на V_α. Компонента f_α также допускает аналогичное второе определение: $f_\alpha(x) = \operatorname{tr}(U_x^\alpha U_f^\alpha)$.

Коммутативный случай упрощается тем обстоятельством, что каждое подпространство V_α одномерно, будучи образованным скалярными кратными одного единственного характера $\alpha(x)$; но этот случай более сложен в том отношении, что функция f выражается через свои компоненты f_α посредством процесса интегрирования, а не суммирования. В этом отношении случай компактной группы проще: f есть обычная сумма своих компонент f_α; однако подпространства V_α здесь не одномерны.

Разумеется, без некоторого экспериментального материала невозможно отобрать из приведенной богатой коллекции общих свойств компактных и коммутативных локально компактных групп те, которые могли бы составлять содержание теоремы Планшереля и связанной с ней теоремы разложения для локально компактной группы, не являющейся ни компактной, ни коммутативной. Однако в некотором смысле можно сказать, что развитая выше сложная теория обязана своим успехом существованию достаточно большого запаса центральных функций, и степень ее применимости должна быть связана с тем, в какой мере общая группа обладает центральными функциями или по крайней мере центральными свойствами какого-либо рода.

Все то, чего удалось здесь достичь в общем случае, основывается на неймановской теории приведения колец операторов [40], к краткому очерку которой мы и переходим.

Пусть даны пространство S с мерой, каждой точке α которого поставлено в соответствие гильбертово пространство H_α, и векторное пространство функций f на S таких, что $f(\alpha) \in H_\alpha$ для каждого $\alpha \in S$ и $\|f(\alpha)\| \in L^2(S)$. Обычное пополнение этого векторного пространства по норме L^2 является тогда гильбертовым пространством H функций f указанного вида, и мы пишем $H = \int H_\alpha \, d\mu(\alpha)$, где μ — заданная мера на S (55).

Если H — какое-нибудь заданное сепарабельное гильбертово пространство и $\mathfrak{B}$ — полная булевская алгебра перестановочных друг с другом проекций на H, то стандартную теорию унитарной эквивалентности можно интерпретировать как дающую прямое интегральное представление $H = \int H_\alpha \, d\mu(\alpha)$, в котором проекции из $\mathfrak{B}$ служат как раз проекциями E_C, соответствующими измеримым подмножествам $C \subset S$: $E_C f = \int\limits_C f(\alpha) \, d\mu$.

Если $H = \int H_\alpha \, d\mu(\alpha)$, то ограниченный линейный оператор T на H, по определению, называется прямым интегралом тогда и только тогда, когда для каждого α существует ограниченный линейный оператор T_α на H_α такой, что

$$T(x) = \int (T_\alpha x_\alpha) \, d\mu(\alpha) \quad \text{для каждого} \quad x = \int x\alpha \, d\mu(\alpha) \in H \ (^{56}).$$

Одна из основных неймановских теорем устанавливает, что оператор T, перестановочный со всеми проекциями E_C, соответствующими измеримым подмножествам C индексного пространства S, есть прямой интеграл.

Алгебру ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H называют слабо замкнутой, если она является замкнутым подмножеством алгебры всех ограниченных линейных операторов в слабой топологии, порожденной функциями $f_{x,y}(T) = (Tx, y)$, и, кроме того, замкнута относительно инволюции $T \to T^*$. Через $\mathfrak{A}'$ для любого множества $\mathfrak{A}$ операторов обозначают совокупность всех операторов, перестановочных с каждым оператором из $\mathfrak{A}$. Фундаментальное значение имеет тот факт, что замкнутое относительно инволюции множество $\mathfrak{A}$ операторов является слабо замкнутой алгеброй тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$.

Центром слабо замкнутой алгебры $\mathfrak{A}$, очевидно, служит $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$. Он состоит лишь из скалярных кратных единицы тогда и только тогда, когда объединение $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ порождает алгебру $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов на H; в этом случае $\mathfrak{A}$ называют *фактором*. Одним из основных результатов является построенная И. Нейманом и Мэрреем теория размерности факторов, с классификацией всех факторов по типам I_n, I_∞, II_1, II_∞ и III; однако, мы не будем здесь входить в ее рассмотрение ([57]).

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — любая слабо замкнутая алгебра ограниченных линейных операторов на H и $H = \int H_\alpha \, d\mu(\alpha)$ — представление H в виде прямого интеграла относительно центра алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. проекции E_C, соответствующие измеримым подмножествам C индексного пространства, суть как раз проекции, принадлежащие центру $\mathfrak{A}$. Пусть T_n — последовательность операторов из $\mathfrak{A}$, порождающая $\mathfrak{A}$, $T_n = \int T_{n,\alpha} \, d\mu(\alpha)$ — представление T_n в виде прямого интеграла и $\mathfrak{A}_\alpha$ — слабо замкнутая алгебра ограниченных операторов на H_α, порожденная последовательностью $T_{n,\alpha}$. Тогда $\mathfrak{A}$ является прямым интегралом алгебр $\mathfrak{A}_\alpha$ в том смысле, что ограниченный оператор T на H принадлежит $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда он является прямым интегралом $\int T_\alpha \, d\mu(\alpha)$, где $T_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$. Следующая фундаментальная теорема Неймана утверждает, что в этом разложении алгебры $\mathfrak{A}$ в прямой интеграл почти все алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$ являются факторами, а $\mathfrak{A}'$ есть прямой интеграл коммутирующих факторов $\mathfrak{A}'_\alpha$. Годман, Маутнер и Сегал ([21], [37], [38], [45]; основная работа Годмана в этом направлении не была еще опубликована, когда писалась эта книга) рассматривали $L^1(G)$ на сепарабельной унимодулярной локально компактной группе G как одновременно правую и левую операторную алгебру на гильбертовом пространстве $L^2(G)$ и обнаружили тот фундаментальный факт, что слабые замыкания $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ этих операторных алгебр связаны соотношениями $\mathfrak{L}' = \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}' = \mathfrak{L}$. Тем самым пересечение $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$ является центром каждой из этих алгебр, и применение неймановской теории приведения показывает, что $H = L^2(G)$ может быть представлено в виде прямого интеграла гильбертовых пространств H_α так, что каждый оператор $A \in \mathfrak{L}$ будет прямым интегралом операторов A_α, действующих в H_α, причем слабо замкнутая алгебра $\mathfrak{L}_\alpha$, порожденная операторами A_α, почти для всех α является фактором.

Это разложение $\mathfrak{L}$ на факторы есть то, что в более простых теориях соответствует разложению $L^1(G)$ на минимальные части, и имеет место формула Парсеваля: если $f \in L^1 \cap L^2$, то $\|f\|_2^2 = \int \mathrm{tr}\,(U_f^\alpha U_{f^*}^\alpha)\, d\alpha$ (58). Однако за этими упрощенными формулировками на самом деле скрывается множество усложнений, и мы отсылаем читателя по поводу деталей к указанной выше литературе. Годман построил свою работу так, что она охватывает не только двусторонние регулярные представления, упомянутые выше, но и другие двусторонние представления, и топологизировал свое индексное пространство, отправляясь от замечания, что общий центр $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$ является коммутативной банаховской C^*-алгеброй и потому изометричен пространству $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве $\mathfrak{M}$ своих максимальных идеалов. Годмановскими индексами α являются точки $M \in \mathfrak{M}$, подвергнутые некоторым дальнейшим отождествлениям. Капланский [28], исследовавший более узкий класс групп, пришел зато к значительно более удовлетворительной теории.

42B. Теория представлений. Приведенную выше теорему Планшереля можно интерпретировать как разложение левого регулярного представления группы G на факторные представления, чем подсказывается постановка соответствующей проблемы для произвольных представлений. Это — не то же самое, что разложение представления на неприводимые части, однако кажется нам во многих отношениях более естественной целью. По общей теории представлений локально компактных групп до сих пор известно очень мало сверх тех основных фактов, что всегда существует достаточно много неприводимых представлений, причем они, вообще говоря, бесконечномерны.

Однако имеется значительная литература по теории специальных групп, а также общих групп в специальных ситуациях. Русские математики опубликовали ряд работ (из которых мы указали только одну [14]), посвященных исследованию неприводимых представлений некоторых конечномерных групп Ли. Макки [36] удалось охватить многие из этих специальных результатов предложенным им обобщением теории индуцированных представлений конечных групп на сепарабельные унимодулярные локально компактные группы. Теория представлений групп Ли разрабатывается также в ее связи с теорией представлений алгебр Ли.

В § 32 мы видели, что представления групп тесно связаны с представлением соответствующих L^1-алгебр. Групповые алгебры впервые и были введены в качестве средства изучения представлений конечных групп (см. [32]). Разумеется, теория представлений общих банаховских алгебр является естественным объектом изучения совершенно независимо от таких мотивировок. К сожалению, полученные здесь пока результаты скудны. Мы привели два из них. Первый — это теорема 26F о представлениях коммутативной самосопряженной алгебры, и второй — теорема Гельфанда и Наймарка [13] о том, что каждая C^*-алгебра изометрична и изоморфна некоторой алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Конечно, эти результаты имеют весьма ограниченное значение ([59]), но по общей теории представлений известно мало, даже для такого специального случая, как банаховская алгебра с инволюцией (см. [28]).

§ 43. Коммутативная теория

43A. Преобразование Лапласа. Макки [34] заметил, что ядру $e^{(x+iy)s}$ классического преобразования Лапласа можно дать характеристику, годную для случая общей локально компактной коммутативной группы почти так же, как теория преобразования Фурье переносится на этот случай путем замены ядра e^{iys} общей характер-функцией $\alpha(s)$. Нижеследующее упрощенное описание может дать представление о характере предпринимаемых для этого шагов. Мы заменяем отображение $s \to (x+iy)s$, где x и y фиксированы, непрерывным гомоморфным отображением v коммутативной топологической группы G в аддитивную группу всех комплексных чисел. Совокупность всех таких гомоморфизмов, очевидно, является комплексным векторным пространством V, и элемент $v \in V$ мы будем называть просто вектором. Ядро $e^{(x+iy)s}$ заменяется тогда ядром $e^{v(s)}$ $(v \in V,\ s \in G)$, и обобщенным преобразованием Лапласа называется отображение $f \to F$, где

$$F(v) = \int e^{v(s)} f(s)\, ds.$$

Комплексная функция, определенная на соответствующем подмножестве пространства V, называется аналитической в точке v, если для каждого $u \in V$ существует

$$F(v, u) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(v + \lambda u) - F(v)}{\lambda},$$

где λ — комплексная переменная. Оставляя в стороне вопросы существования, мы видим, что формально преобразование Лапласа F функции f на G аналитично и

$$F(v, u) = \int e^{v(s)} u(s) f(s)\, ds.$$

Макки показал, что в надлежаще ограниченном L^2-смысле функция F, определенная на V, аналитична тогда и только тогда, когда она является преобразованием Лапласа. На групповую обстановку естественно распространяются и многие другие теоремы теории преобразования Лапласа, и абстрактная формулировка этой теории, повидимому, приводит к плодотворной точке зрения. В частности, можно ожидать, что при постановке в такой общей форме прояснятся некоторые вопросы теории функций нескольких комплексных переменных.

43В. Алгебры Бейрлинга. Другой проблемой, приводящей к тому же обобщению преобразования Лапласа и рассмотренной в частном случае Бейрлингом [4], является теория подалгебр из $L^1(G)$, которые сами суть пространства L^1 относительно мер, более «широких», чем мера Хаара. Речь идет об алгебрах типа, рассмотренного во второй половине п. 23D. Более обще, пусть ω — положительная весовая функция на произвольной локально компактной коммутативной группе, такая, что $\omega(xy) \leqslant \omega(x)\omega(y)$ для всех $x, y \in G$. Тогда совокупность L^ω всех измеримых функций f, для которых $\int |f|\omega < \infty$, представляет собой пространство $L^1(\mu)$, где $\mu(A) = \int\limits_A \omega(s)\, ds$, и из неравенства, которому по нашему предположению удовлетворяет ω, вытекает, что L^ω замкнута и является коммутативной банаховской алгеброй относительно свертывания. Вхождение L^ω как подмножества в $L^1(G)$ можно гарантировать простым условием, что ω всюду $\geqslant 1$. Тогда каждый максимальный идеал из $L^1(G)$ определяет максимальный идеал в L^ω (см. теорему 24В), и пространство максимальных идеалов алгебры $L^1(G)$ можно рассматривать как (замкнутое) подмножество пространства максимальных идеалов алгебры L^ω, вообще говоря, собственное. Гомоморфные отображения алгебры L^ω на поле комплексных чисел задаются функциями $\theta_M \in L^\infty(G)$:

$$f^\wedge(M) = \int f(s)\, \overline{\theta_M(s)}\, \omega(s)\, ds,$$

и простое рассуждение, подобное проведенному в п. 23D, показывает, что произведение $\theta_M(s)\omega(s)$ является *обобщенным характером*, т. е. непрерывным гомоморфным отображением группы G в мультипликативную группу комплексных чисел, отличных от нуля, так что его логарифм, если он существует, есть то, что мы назвали в предыдущем пункте вектором. Таким образом, преобразования $f^\wedge$ элементов $f \in L^\infty$ следует вообще рассматривать как двусторонние преобразования Лапласа, и теория таких алгебр L^∞ сливается с общей теорией преобразования Лапласа.

43C. Тауберовы теоремы. В том случае, когда функция ω такова, что алгебра $L^\omega = \{f\colon \int |f|\omega < \infty\}$ обладает тем же самым пространством максимальных идеалов, что и более широкая алгебра $L^1(G)$, естественно возникает вопрос, остаются ли в силе такие теоремы теории идеалов, как тауберова теорема Винера. Вопросы этого рода были подняты Бейрлингом в 1938 г. [4] для специального случая вещественной прямой. Основная теорема Бейрлинга в этом направлении, грубо говоря, состоит в том, что если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \omega(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty,$$

то алгебра L^ω регулярна и тауберова теорема имеет место: каждый замкнутый собственный идеал содержится в регулярном максимальном идеале.

Следует заметить, что Бейрлинг в значительной степени опирается на формулу $\|f^\wedge\|_\infty = \lim \sqrt[n]{\|f^n\|}$. Данное им доказательство этой формулы существенным образом использует свойства вещественных чисел и необобщаемо. Данное позже Гельфандом доказательство этой же формулы для общих банаховских алгебр исходит из совершенно иной идеи.

Возвращаясь к нашей теме, заметим, что тауберова теорема на локально компактной коммутативной группе может быть перефразирована в утверждение, что всякое инвариантное собственное замкнутое подпространство в $L^1(G)$ содержится в максимальном таком подпространстве, а затем, по ортогональности, перефразирована далее в утверждение, что каждое непустое инвариантное относительно сдвигов слабо замкнутое подпространство в L^∞ содержит минимальное такое подпространство (совокупность скалярных кратных характера). В другой своей работе [5] Бейрлинг доказал тауберову теорему в этой ее форме для иного пространства, а именно, пространства ограниченных непрерывных функций на вещественной прямой с топологией равномерной сходимости на компактных множествах и одновременной сходимости равномерных норм. Кроме того, он показал, что неодномерное замкнутое инвариантное подпространство содержит более одной экспоненциальной функции. Это, очевидно, аналог теоремы Сегала — Капланского — Хельсона, подсказывающий следующую постановку общей тауберовой проблемы: требуется найти условия, при которых замкнутый идеал коммутативной банаховской алгебры A был бы ядром своей оболочки, или, двойственно этому, — слабо замкнутое инвариантное подпространство в A^* было бы натянуто на содержащиеся в нем гомоморфизмы. Эти условия должны относиться либо к алгебре, либо к подпространству, а в групповом случае — к мере, определяющей алгебру со свертыванием, или к топологии, применяемой на сопряженном пространстве.

43D. Примарные идеалы. Хотя замкнутый идеал коммутативной банаховской алгебры, вообще говоря, не является пересечением максимальных идеалов (т. е. ядром своей оболочки), известно два эффектных случая, в которых каждый замкнутый идеал есть пересечение *примарных идеалов*, где под примарным идеалом понимается идеал, содержащийся лишь в одном максимальном идеале. Первый (рассмотренный Уитнеем [49]) — это алгебра функций класса C^r в некоторой области n-мерного евклидова пространства, с топологией, учитывающей все производные до r-го порядка включительно. Вторым (рассмотренным Л. Шварцем [43]) случаем является алгебра всех ограниченных комплексных бэровских мер на вещественной прямой, сосредоточенных на компактных множествах, топологизированная как пространство, сопряженное к пространству всех (не обязательно ограниченных) непрерывных функций с топологией равномерной сходимости на компактных множествах. Непрерывные гомоморфные отображения этой алгебры на поле комплексных чисел задаются показательными функциями $e^{\alpha t}$ $\left(\mu^{\wedge}(\alpha)=\int e^{\alpha t}\,d\mu(t)\right)$, так что пространством регулярных максимальных идеалов служит комплексная плоскость, а преобразования $\mu^{\wedge}$ образуют некоторую алгебру целых функций. Каждый примарный идеал этой алгебры определяется комплексным числом α_0 и натуральным числом n и состоит из мер μ таких, что $\mu^{\wedge}$ и ее первые n производных обращаются в нуль в точке α_0. А каждый замкнутый идеал есть пересечение примарных.

В обоих этих примерах наличие и важность примарных идеалов связаны с дифференцированием.

43Е. В заключение упомянем кратко о замечательной аналогии, исследованной Левитаном, частично в сотрудничестве с Повзнером, в ряде работ, из которых мы указываем лишь одну [31]. Левитан заметил, что теорию разложения по собственным функциям дифференциального уравнения Штурма — Лиувилля можно рассматривать как обобщение теории преобразований Фурье групповых алгебр, развитой в главе VII. Рассмотрим, в частности, дифференциальное уравнение

$$y''-[\rho(x)-\lambda]\,y=0$$

на положительной вещественной оси, с граничным условием в точке $x=0$. Сопоставим с этим обыкновенным дифференциальным уравнением уравнение в частных производных

$$u_{xx}-u_{yy}-[\rho(x)-\rho(y)]\,u=0$$

с начальными условиями $u(x, 0)=f(x)$, $u'_y(x, 0)=0$, где ρ и f — четные функции. Решение $u(x, y)=(T_y f)(x)$ этого уравнения рассматривается как обобщение сдвига функции $f(x)$ на y. Определив очевидным образом обобщенное свертывание, мы получаем L^1-алгебру с этим свертыванием, обнаруживающую весьма далеко идущую аналогию с групповой L^1-алгеброй. В частности, на ней можно развить следующие темы: обобщенные характеры (собственные функции), положительно определенные функции, теорема Бохнера, теорема обращения для классов L^1 и однозначно определенная мера на пространстве обобщенных характеров и, наконец, теорема Планшереля. Теория действительна не только в том случае, когда спектр дискретен, но распространяется также на предельный случай непрерывного спектра, хотя в этом последнем случае не вполне еще разработана. За дальнейшими подробностями мы отсылаем читателя к литературе.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

(¹) (К стр. 10.) «Лемму Цорна» составляет лишь второе утверждение, впервые сформулированное (без доказательства) в [64] для частично упорядоченных по включению семейств множеств. Оно является непосредственным следствием первого утверждения, принадлежащего Хаусдорфу и опубликованного им еще в 1914 г. [63]. Оба эти утверждения равносильны аксиоме выбора.

(²) (К стр. 13.) В русской математической литературе такие множества, следуя П. С. Александрову и П. С. Урысону, впервые выделившим их в особый класс [50], называют *бикомпактными*.

(³) (К стр. 13.) То есть покрытие открытыми множествами.

(⁴) (К стр. 20.) Эту топологию впервые ввел А. Н. Тихонов [62]. Декартово произведение топологических пространств, топологизированное указанным образом, называют *топологическим произведением* этих пространств, а его топологию — *тихоновской*.

(⁵) (К стр. 27.) В русской математической литературе такие алгебры называют *нормированными кольцами* (см. [12]).

(⁶) (К стр. 30.) Из того, что $T(S_1)$ плотно в шаре $S(y_0, r) \subset Y$, следует уже, что $T(S_1)$ плотно в $U_r = S(0, r)$. Действительно, так как шар S_1 симметричен, $-S_1 = S_1$, то $T(S_1)$ плотно и в $-S(y_0, r) = S(-y_0, r)$. Но любой элемент $y \in U_r$ можно представить в виде $y = \frac{(y+y_0)+(y-y_0)}{2}$, где $y + y_0 \in S(y_0, r)$, $y - y_0 \in S(-y_0, r)$. Поэтому, взяв $x_n', x_n'' \in S_1$ так, чтобы $T(x_n') \to y + y_0$, $T(x_n'') \to y - y_0$, будем иметь $T\left(\frac{x_n' + x_n''}{2}\right) \to y$. Так как $\frac{x_n' + x_n''}{2} \in S_1$, то это означает, что $T(S_1)$ плотно в U_r.

(⁷) (К стр. 30.) Топологическое произведение $X \times Y$ банаховских пространств X и Y также становится банаховским пространством, если определить сложение и умножение на скаляры формулами

$$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \quad \text{и} \quad \lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, \lambda y\rangle,$$

а норму — формулой $\|\langle x, y\rangle\| = \|x\| + \|y\|$. При этом топология, определяемая в $X \times Y$ этой нормой, совпадает с тихоновской топологией в $X \times Y$.

(8) (К стр. 31.) Теорему Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов впервые распространил на комплексные банаховские пространства (в своей кандидатской диссертации, защищенной 5 января 1937 г.) Г. А. Сухомлинов [61].

(9) (К стр. 37.) Эту теорему, в другой форме, впервые установил Банах [3, стр. 103 украинского издания, лемма 2]. Затем она была обобщена М. Г. Крейном и В. Л. Шмульяном [55, теорема 5]. В приведенном здесь виде она впервые сформулирована у Бурбаки [51]; доказательство см. у Дьёдонне [54, теорема 23]. В. Птак в 1954 г. показал [59], что эта теорема равносильна теореме о замкнутом графике (7G).

(10) (К стр. 37.) На основании «закона параллелограмма» (1) (заключающегося в том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон), можно написать:

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|x_1 - x_2 + y\|^2 = 2\,[\|x_1 + y\|^2 + \|x_2\|^2],$$
$$\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_1 - x_2 - y\|^2 = 2\,[\|x_1 - y\|^2 + \|x_2\|^2],$$
$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|x_2 - x_1 + y\|^2 = 2\,[\|x_2 + y\|^2 + \|x_1\|^2],$$
$$\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_2 - x_1 - y\|^2 = 2\,[\|x_2 - y\|^2 + \|x_1\|^2].$$

Взяв знакопеременные суммы левых и правых частей этих равенств, после очевидных сокращений получим:

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 =$$
$$= \|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2$$

или, в силу (2),

$$4\mathfrak{R}(x_1 + x_2, y) = 4\mathfrak{R}(x_1, y) + 4\mathfrak{R}(x_2, y),$$

а по замене y на iy — также

$$4\mathfrak{J}(x_1 + x_2, y) = 4\mathfrak{J}(x_1, y) + 4\mathfrak{J}(x_2, y),$$

чем формула (3) и доказана.

(11) (К стр. 38.) В современной русской математической литературе это равенство называют *неравенством Коши — Буняков-*

ского, по именам математиков, установивших первые важные частные его случаи:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(неравенство Коши) и

$$\left|\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |y(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

(неравенство Буняковского).

(12) (К стр. 38.) Множество элементов вещественного или комплексного векторного пространства называют выпуклым, если вместе с каждыми двумя своими элементами x_1 и x_2 это множество содержит и весь соединяющий их «отрезок», т. е. все точки $(1-\rho)x_1+\rho x_2$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$.

(13) (К стр. 39.) То есть $\|x_n\|\to d$, монотонно убывая, точнее — не возрастая ($\|x_{n+1}\|\leqslant\|x_n\|$).

(14) (К стр. 45.) Принимается, что если $x>-\infty$, то $+\infty+x=$ $=x+(+\infty)=+\infty$; если $x<+\infty$, то $-\infty+x=x+(-\infty)=-\infty$; если $x>0$, то $x\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$; если $x<0$, то $x\cdot(\pm\infty)=\mp\infty$; наконец, $0\cdot\pm\infty=0$. Относительно смысла символов $\pm\infty+(\mp\infty)$ см. примечание (17).

(15) (К стр. 47.) Содержащееся здесь утверждение, что если f_1 и $f_2\in L^1$, то также $f_1+f_2\in L^1$, лишено смысла, если f_1 и f_2 принимают в какой-нибудь точке бесконечные значения противоположных знаков, поскольку тогда сумма f_1+f_2 не определена. Но из доказательства видно, что это утверждение, а также равенство $I(f_1+f_2)=I(f_1)+I(f_2)$, сохраняет силу, если приписать сумме f_1+f_2 в каждой такой точке какое угодно значение. См. также 13D.

(16) (К стр. 48.) При $h\equiv 0$, $k\equiv+\infty$.

(17) (К стр. 48.) Дефект, отмеченный в примечании (15), имеется и здесь. Однако устранить его указанным там образом здесь невозможно. Чтобы спасти замкнутость семейства $\mathfrak{B}$ относительно сложения, необходимо однозначно определить суммы $+\infty+(-\infty)$ и $-\infty+(+\infty)$. Сделать это с сохранением всех законов сложения невозможно. Но ведь уже при определении

сумм $\pm\infty+x$, где $x>-\infty$ (соотв. $<+\infty$), была нарушена однозначная обратимость сложения: из $\pm\infty+x=\pm\infty+y$ не следует $x=y$. Теперь придется поступиться и коммутативностью. А именно, примем, что $\pm\infty+(\mp\infty)=\pm\infty$, т. е. что $\pm\infty+x=\pm\infty$ для всех x, включая $x=\mp\infty$. Тогда $+\infty+(-\infty)=+\infty$, а $-\infty+(+\infty)=-\infty$, т. е. коммутативность сложения нарушится. Но зато сохранится ассоциативность и, что наиболее важно, монотонность сложения: если $x_1\leqslant x_2$ и $y_1\leqslant y_2$, то $x_1+y_1\leqslant x_2+y_2$. В силу последнего обстоятельства, доказательство теоремы 12H при указанном определении сумм $\pm\infty+(\mp\infty)$ в основном сохранится, ибо $\mathfrak{M}(f)$ действительно будет монотонным семейством. Требуется внести лишь следующую поправку: $g\in\mathfrak{M}(f)$ влечет $f\in\mathfrak{M}(g)$, **если** $g+f=f+g$, следовательно, во всяком случае, если $f\in L$. Но только это и нужно: так как $g\in\mathfrak{M}(f)$, каковы бы ни были $f\in L$ и $g\in\mathfrak{B}$, то $f\in\mathfrak{M}(g)$ для всех $f\in L$ и, значит, $\mathfrak{M}(g)=\mathfrak{B}$, каково бы ни было $g\in\mathfrak{B}$.

([18]) (К стр. 49.) Если $f\in L^1$, то, в силу теоремы 12F, и $|f|=f\cup 0-f\cap 0\in L^1$, так что можно взять $g=|f|$.

([19]) (К стр. 49.) Доказательство опирается также на теорему 12J (и, разумеется, 12H). Рассмотрим первую часть теоремы. Пусть f не суммируема и, скажем, $I(f^+)=+\infty$. Тогда $I(f^-)<+\infty$, $I(g^-)<+\infty$, $I(g^+)\leqslant+\infty$. Так как $(f+g)^-=$ $=\frac{|f+g|-(f+g)}{2}\leqslant\frac{(|f|-f)+(|g|-g)}{2}=f^-+g^-$, то, в силу теоремы 12J, $(f+g)^-\in L^1$, т. е. $f+g$ интегрируема. С другой стороны, в силу той же теоремы, $f^++g^+\notin L^1$, и так как $f^++g^+=(f+g)^++f^-+g^--(f+g)^-$, то (в силу теоремы 12F) также $(f+g)^+\notin L^1$. Поэтому $I(f+g)=I((f+g)^+)-I((f+g)^-)=$ $=+\infty=I(f)+I(g)$. В случае $I(f^-)=+\infty$ доказательство проводится аналогично, с использованием неравенства $(f+g)^+\leqslant f^++g^+$. Вторая часть также опирается на теорему 12J (в случае, если одна из функций f_n не суммируема).

([20]) (К стр. 50.) $\varphi_{A\cup B}=\varphi_A\cup\varphi_B$, $\varphi_{A\cap B}=\varphi_A\cap\varphi_B$, $\varphi_{A-B}=$ $=\varphi_A-\varphi_A\cap\varphi_B$.

([21]) (К стр. 53.) Пусть A — интегрируемое множество, т. е. $\varphi_A\in\mathfrak{B}$. В силу леммы 12J, существует функция $g\in U$ такая, что $\varphi_A\leqslant g$. По определению U, $g=\lim\uparrow f_n$, где $f_n\in L$; при этом, так как $g\geqslant 0$, можно считать, что все $f_n\geqslant 0$. Положим $\varphi_n=f_n\cap\varphi_A$

и $A_n = \left\{p\colon \varphi_n(p) > \frac{1}{2}\right\}$. Так как, по теореме 12J, $\varphi_n \in L^1$, то, в силу теоремы 13B, A_n суммируемо. Но $\varphi_n \uparrow \varphi_A$ и потому $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

([22]) (К стр. 57.) F^+ и F^- — так называемые положительная и отрицательная части функционала F. Легко видеть, что F^+ и F^- — наименьшие неотрицательные линейные функционалы, разность которых равна F, т. е. если $F = F_1 - F_2$, где F_1 и F_2 — неотрицательные линейные функционалы, то $F^+(f) \leqslant F_1(f)$ и $F^-(f) \leqslant F_2(f)$ для всех $f \in L$.

([23]) (К стр. 60.) Пусть f' — функция, соответствующая по теореме 15С функционалу F на S'. Тогда на $S_n' = S_n \cup S'$ ему будет соответствовать функция $f_n' = f_n + f'$, и так как $f_n f' = 0$, то $\|f_n'\|_q^q = \|f_n\|_q^q + \|f'\|_q^q$. Но $\|f_n'\|_q^q \leqslant b^q$, а $\|f_n\|_q^q \to b^q$. Следовательно, $\|f'\|_q = 0$, т. е. f' — нулевая. При $p = 1$, т. е. $q = \infty$, это рассуждение теряет силу.

([24]) (К стр. 62.) В случае $f_n \uparrow f$ непосредственно применима теорема 12K. В случае $f_n \downarrow f$ рассуждаем следующим образом: так как $f_n \in \mathfrak{B}(S_1 \times S_2)$ и $0 \leqslant f_n \leqslant f_1 \leqslant \varphi_1 \in L^+(S_1 \times S_2)$, то, в силу теоремы 12J, все $f_n \in L^1(S_1 \times S_2)$; далее, так как $0 \leqslant I_x f_n \leqslant I_x \varphi_1$ и, согласно п. 16B, $I_x \varphi_1 \in L^1(S_2)$, то, снова по теореме 12J, все $I_x f_n \in L^1(S_2)$; затем повторно применяем теорему 12G к последовательности $-f_n \uparrow -f$.

([25]) (К стр. 69.) Столь пренебрежительная оценка указанной теоремы представления банаховских пространств, конечно, лишена основания. Так, из этой теоремы, например, вытекает известная теорема об «универсальности» пространства $C[0, 1]$, утверждающая, что каждое сепарабельное банаховское пространство изометрически и изоморфно вкладывается в $C[0, 1]$.

([26]) (К стр. 72.) Очевидно, всякая алгебра функций, определенных на любом множестве, является функциональной алгеброй в смысле данного здесь определения.

([27]) (К стр. 75.) Действительно, если это условие выполнено, то любая точка $p \notin C$ отделима от C слабой окрестностью $\{q\colon |f(p) - f(q)| < 1\}$, так что всякое множество C, замкнутое $\mathfrak{F}$, замкнуто $\mathfrak{F}_w$. Обратно, если C замкнуто $\mathfrak{F}_w$ и $p \notin C$, то существуют $f_1, \ldots, f_n \in C(S)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\{q\colon |f_k(q) - f_k(p)| < \varepsilon \text{ для } k = 1, \ldots, n\} \cap C = \varnothing.$$

Тогда $f(q) = 1 - \min\left\{\frac{1}{\varepsilon} \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |f_k(q) - f_k(p)|, 1\right\} \in C(S)$ и обладает указанным свойством: $f(q) = 0$ для всех $q \in C$ и $f(p) = 1$.

Заметим, что, как непосредственно следует из теоремы 3Е, локально компактное хаусдорфово пространство вполне регулярно.

(28) (К стр. 81.) Доказательство равенства $\bar{B} = \bar{\bar{B}}$ опирается еще на то также очевидное свойство, что $k(h(I)) \supset I$. См. замечание в конце п. 20Е.

(29) (К стр. 91.) Для $|h| < \frac{1}{\|x - \lambda e\|}$ имеем (ср. п. п. 22В и 22А)

$$\frac{(x-(\lambda+h)e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}}{h} = \frac{(e-h(x-\lambda e)^{-1})^{-1}-e}{h}(x-\lambda e)^{-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x - \lambda e)^{-n-1} h^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x-(\lambda+h)e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}}{h} = (x-\lambda e)^{-2}$$

и в силу предположенной непрерывности и линейности функционала F,

$$\frac{d}{d\lambda} F((x-\lambda e)^{-1}) = F((x-\lambda e)^{-2}).$$

(30) (К стр. 91.) Теорему 22F впервые опубликовал (без доказательства) Мазур [58]. Изложенное доказательство принадлежит Гельфанду [12]; Стон [60] нашел доказательство этой теоремы, не опирающееся на теорему Лиувилля и вообще не использующее теории аналитических функций.

(31) (К стр. 94.) Введенную автором терминологию можно считать оправданной лишь для банаховских алгебр с умножением типа свертывания. Для функциональных алгебр с обыкновенным умножением она совершенно неудачна.

(32) (К стр. 95.) То есть с топологией окружности.

(33) (К стр. 104.) Ошибка. Это обобщение теоремы Винера принадлежит П. Леви [57].

(34) (К стр. 109.) См. теорему 20G.

(35) (К стр. 114.) Алгебра примера 4 также обладает естественной инволюцией:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \to f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n z^n.$$

(36) (К стр. 118.) В силу свойств (1) — (4) инволюции,

$x^* \to \overline{x^\wedge(M)}$ есть гомоморфное отображение алгебры A на поле комплексных чисел, имеющее своим ядром совокупность M^* всех элементов, сопряженных к элементам максимального идеала M. А это означает, что M^* — тоже (регулярный) максимальный идеал и $x^*(M^*) = \overline{x^\wedge(M)}$.

([37]) (К стр. 120.) На алгебру с присоединенной единицей инволюция распространяется формулой

$$(x + \lambda e)^* = x^* + \bar{\lambda} e.$$

То, что e^* должно совпадать с e, следует из свойства (4) инволюции и единственности единицы.

([38]) (К стр. 124.) См. п. 26I.

([39]) (К стр. 126.) Определение инволюции в рассматриваемом кольце см. в начале п. 26С.

([40]) (К стр. 126.) И теореме 26D.

([41]) (К стр. 128.) В этой, недостаточно ясной и точной, краткой фразе скомкана наиболее сложная часть рассуждения и не указан ключ к расшифровке. Этим ключом является неотрицательность функций $p^\wedge$ для всех положительно определенных элементов p на общем носителе мер μ_p. Что функция $p^\wedge$, соответствующая положительно определенному элементу p, не обязана быть неотрицательной всюду, показывает простой пример положительного функционала $\varphi_0(x) = x^\wedge(M_0)$. Так как $\varphi_0(px) = p^\wedge(M_0)x^\wedge(M_0)$, то для положительной определенности элемента p относительно φ_0 нужно лишь, чтобы $p^\wedge(M_0) \geqslant 0$, так что $p^\wedge(M)$ может быть при этом отрицательным в любой точке $M \neq M_0$.

Пусть P_φ — совокупность всех $p \in A_0$, положительно определенных относительно φ, и $\mathfrak{M}_\varphi$ — общий носитель мер μ_p, т. е. совокупность всех точек $M \in \mathfrak{M}$, на каждой окрестности которых хотя бы одна из этих мер не равна нулю. Очевидно, $\mathfrak{M}_\varphi$ — замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{M}$, так что $\mathfrak{M}'_\varphi$ можно определить как наибольшее открытое множество, на котором все $\mu_p = 0$. (В приведенном выше примере $\mathfrak{M}_{\varphi_0} = M_0$.)

1. *Если $q \in P_\varphi$ и $q^\wedge(M_1) > 0$ в точке $M_1 \in \mathfrak{M}_\varphi$, то M_1 принадлежит носителю S_{μ_q} меры μ_q.*

Действительно, пусть, вопреки утверждению, $\mu_q = 0$ на некоторой окрестности U точки M_1. Так как $q^\wedge$ непрерывна, то U можно взять столь малой, чтобы на ней $q^\wedge(M)$ было $> \frac{1}{2} q^\wedge(M_1)$.

Тогда для любой функции $h \in L_U^+$ и любого $p \in P_\varphi$ будем иметь:

$$0 = \int hp^\wedge \, d\mu_q = \int hq^\wedge \, d\mu_p \geqslant \frac{1}{2} q^\wedge (M_1) \int h \, d\mu_p \geqslant 0,$$

откуда $\int h \, d\mu_p = 0$ для всех $h \in L_U^+$ и $p \in P_\varphi$, и, следовательно, $\mu_p(U) = 0$ для всех $p \in P_\varphi$, вопреки предположению, что $M_1 \in \mathfrak{M}_\varphi$.

2. *Если $p \in P_\varphi$, то $p^\wedge (M) \geqslant 0$ на всем $\mathfrak{M}_\varphi$.*

Действительно, пусть, вопреки утверждению, $p^\wedge (M_1) < 0$ в некоторой точке $M_1 \in \mathfrak{M}_\varphi$. Так как $p^\wedge$ непрерывна, то $p^\wedge (M) \leqslant \frac{1}{2} p^\wedge (M_1) < 0$ для всех M, принадлежащих некоторой окрестности U точки M_1. Возьмем теперь какое-нибудь $x_1 \in A_0$, для которого $x_1 (M_1) \neq 0$, так что $q = x_1 x_1^* \in P_\varphi$ и $q^\wedge (M_1) > 0$; при этом U можно взять столь малой, чтобы $q^\wedge (M)$ было > 0 для всех $M \in U$. Тогда для любой функции $h \in L_U^+$ будем иметь

$$0 \leqslant \int hq^\wedge \, d\mu_p = \int hp^\wedge d\mu_q \leqslant \frac{1}{2} p^\wedge (M) \int h \, d\mu_q \leqslant 0,$$

откуда $\int h \, d\mu_q = 0$ для всех $h \in L_U^+$ и, следовательно, $\mu_q(U) = 0$, вопреки предыдущему предложению.

Теперь расшифровка рассуждения автора — уже дело чистой техники. Прежде всего, так как вне $\mathfrak{M}_\varphi$ все I_p равны нулю, то это же верно и для I; поэтому все интегралы можно считать взятыми по множеству $\mathfrak{M}_\varphi$. Пусть теперь

$$F = \{M \in \mathfrak{M}_\varphi \colon \; p^\wedge (M) = 0\}, \qquad O = F' = \{M \in \mathfrak{M}_\varphi \colon \; p^\wedge (M) > 0\},$$
$$C_n = \left\{M \in \mathfrak{M}_\varphi \colon p^\wedge (M) \geqslant \frac{1}{n}\right\}, \qquad D_n = \left\{M \in \mathfrak{M}_\varphi \colon p^\wedge (M) \leqslant \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Так как $p^\wedge (M) \to 0$ при $M \to M_\infty$, то все C_n компактны. Поэтому, в силу теоремы 3Е, существуют $h_n \in C(\mathfrak{M})$, обладающие следующими свойствами: $0 \leqslant h_n \leqslant 1$ всюду, $h_n = 1$ на C_n и $h_n = 0$ на D_n. Полагая $k_n = 1 - h_n$, имеем тогда: $0 \leqslant k_n \leqslant 1$ всюду, $k_n = 0$ на C_n и $k_n = 1$ на D_n. Пусть, наконец, χ_F и χ_O — характеристические функции множеств F и O.

3. $I_p(\chi_F g) = 0$ *для всех* $g \in C(\mathfrak{M}_\infty)$.

Так как, на $\mathfrak{M}_\varphi$, $k_n \downarrow \chi_F$ и $k_n p^\wedge \downarrow 0$, то $I_q(k_n p^\wedge) \downarrow 0$, а $I_p(k_n q^\wedge) \downarrow I_p(\chi_F q^\wedge)$. Следовательно, $I_p(\chi_F q^\wedge) = 0$ для всех $q \in P_\varphi$. А так как алгебра с единицей, натянутая на P_φ, плотна в $C(\mathfrak{M}_\infty)$, то мы и заключаем, что $I_p(\chi_F g) = 0$ для всех $g \in C(\mathfrak{M}_\infty)$.

4. $I(gp\hat{\ }) = I_p(g)$ *для всех* $g \in C(\mathfrak{M}_\infty)$.

Достаточно ограничиться неотрицательными g. Так как $p\hat{\ } > \frac{1}{n+1} > 0$ на множестве тех точек из $\mathfrak{M}_\varphi$, где $gh_np\hat{\ } \neq 0$, то

$$I(gh_np\hat{\ }) = I_p(gh_n).$$

Но на $\mathfrak{M}_\varphi$ имеем $gh_np\hat{\ } \uparrow g\chi_O p\hat{\ } = gp\hat{\ }$, а $gh_n \uparrow g\chi_O$. Поэтому, принимая во внимание предыдущее предложение, получаем в пределе

$$I(gp\hat{\ }) = I_p(g\chi_{O'}) = I_p(g) - I_p(g\chi_F) = I_p(g),$$

что и требовалось доказать.

В заключение заметим, что так как I сосредоточен на $\mathfrak{M}_\varphi$, а $p\hat{\ } \geqslant 0$ на $\mathfrak{M}_\varphi$, то $I(p\hat{\ }) = I(|p\hat{\ }|)$. Поэтому равенство $I(p\hat{\ }) = I_p(1) (< \infty)$ действительно показывает, как утверждается дальше в теореме, что $p\hat{\ } \in L^1(\mu)$.

([42]) (К стр. 130.) Имеем:

$$(x^*, y^*) = \frac{1}{4}\{\|x^* + y^*\|^2 + \|x^* - y^*\|^2 + i\|x^* + iy^*\|^2 - i\|x^* - iy^*\|^2\} =$$
$$= \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + i\|x - iy\|^2 - i\|x + iy\|^2\} = (y, x);$$
$$(xy, z) = (y, x^*z) = (z^*x, y^*) = (x, zy^*).$$

([43]) (К стр. 131.) Если $x_ne \to y$, то $x_ne^2 \to ye$, а так как $x_ne^2 = x_ne$, то $y = ye \in He$.

([44]) (К стр. 131.) $(xe_1, ye_2) = (xe_1e_2, y) = (0, y) = 0$, следовательно, $He_1 \perp He_2$; $e_1 = e_1e$ и $e_2 = e_2e$, следовательно, $He_1 \subset He$ и $He_2 \subset He$.

([45]) (К стр. 132.) Если $x \perp M$, то $(m, zx) = (z^*m, x) = 0$ для любого $m \in M$ и всех $z \in H$.

([46]) (К стр. 136.) $(e_\alpha, e_\alpha) = (e_{\alpha\alpha}, e_{\alpha\alpha}) = (e_1, e_1)$ (см. п. 27E).

([47]) (К стр. 152.) Таким образом, $(\sigma_1\sigma_2)(x) = \sigma_2(\sigma_1(x))$.

([48]) (К стр. 153.) Пусть K — рассматриваемое полупрямое произведение группы H на группу G. Последние естественно отождествляются с подгруппами $H_0, G_0 \in K$, образованными соответственно элементами вида (e_1, x) и (σ, e_2), где e_1 и e_2 — единичные элементы групп H и G, и, очевидно, изоморфны последним. При этом, так как

$$\langle \sigma_0, x_0\rangle \langle e, x\rangle = \langle e, y\rangle \langle \sigma_0, x_0\rangle, \quad \text{где} \quad y = \sigma_0^{-1},$$

то H_0 — нормальный делитель в K. Наконец, $K/H \cong G$, ибо каждый смежный класс

$$\{\langle \sigma_0, x_0\rangle \langle e, x\rangle\} = \{\langle \sigma_0, x_0x\rangle\} \in K/H$$

содержит в качестве своего представителя (при $x = x_0^{-1}$) единственный элемент $\langle \sigma_0, e \rangle \in G_0 \cong G$. Таким образом, K есть так называемое расширение группы H при помощи группы G [56, стр. 66].

([49]) (К стр. 153.) Положим $C = \langle \sigma_0, x_0 \rangle (A \times B)$. Характеристическая функция этого множества

$$\chi_C(\sigma, x) = \chi_A(\sigma_0^{-1}\sigma)\, \chi_B((\sigma^{-1}\sigma_0)(x_0)\, x),$$

где χ_A и χ_B — характеристические функции множеств A и B на G и H. Поэтому, в силу теоремы Фубини и левой инвариантности мер ν и μ,

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(C) &= \iint\limits_{G \times H} \chi_C(\sigma, x)\, d(\mu \times \nu)(\sigma, x) = \\ &= \int\limits_G \chi_A(\sigma_0^{-1}\sigma) \Big(\int\limits_H \chi_B((\sigma^{-1}\sigma_0)(x_0)\, x)\, d\nu(x) \Big) d\mu(\sigma) = \\ &= \int\limits_G \chi_A(\sigma_0^{-1}\sigma) \Big(\int\limits_H \chi_B(x)\, d\nu(x) \Big) d\mu(\sigma) = \\ &= \int\limits_G \chi_A(\sigma_0^{-1}\sigma)\, \nu(B)\, d\mu(\sigma) = \mu(A)\, \nu(B).\end{aligned}$$

([50]) (К стр. 155.) См. доказательство теоремы 12I.

([51]) (К стр. 158.) Пусть $\mu(V_n) < \frac{1}{n}$ и $V_{n+1} \subset V_n$ для всех натуральных n. Тогда характеристическая функция $\chi_n(x)$ окрестности V_n при $n \to \infty$ стремится к пределу $\chi(x)$, почти всюду равному нулю, и

$$\int\limits_{V_n} |u(x)|\, dx = \int\limits_G |u(x)|\, \chi_n(x)\, dx \to \int\limits_G |u(x)|\, \chi(x)\, dx = 0.$$

([52]) (К стр. 181.) В силу теоремы Фубини, предшествующая формула подробнее записывается так:

$$\begin{aligned}\int\limits_G f(x)\, \overline{p(x)}\, dx = (f, p) &= \int\limits_{G^\wedge} \Big(\int\limits_G f(x)\, \overline{(x, \alpha)}\, dx \Big) p^\wedge(\alpha)\, dm(\alpha) = \\ &= \int\limits_G f(x) \Big(\int\limits_{G^\wedge} p^\wedge(\alpha)\, \overline{(x, \alpha)}\, dm(\alpha) \Big) dx.\end{aligned}$$

Так как здесь f — произвольная функция из $L^1(G)$, то заключаем, что, почти для всех x,

$$\overline{p(x)} = \int\limits_{G^\wedge} \overline{(x, \alpha)}\, p^\wedge(\alpha)\, dm(\alpha)$$

или

$$p(x) = \overline{p(x^{-1})} = \int_{G^\wedge} (x, \alpha)\, p^\wedge(\alpha)\, dm(\alpha).$$

([53]) (К стр. 185.) Значительно более простое доказательство полупростоты алгебры $L^1(G)$ дано в [17], стр. 130—132.

([54]) (К стр. 211.) Берем $N_1 = \{M\colon |f(b_iMb_j) - f(b_iM_1b_j)| < \frac{\varepsilon}{20}$ для всех $i, j\}$ и аналогично определяем N_2. [Разумеется, здесь $f(b_iMb_j) = \varphi^\wedge(M)$, где $\varphi(x) = f(b_ixb_j)$.] Если тогда $x_1, y_1 \in N_1$, то $|f(b_ix_1b_j) - f(b_iy_1b_j)| < \frac{\varepsilon}{10}$ для всех i, j и, согласно следствию 2,

$$|f(ux_1v) - f(uy_1v)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } u, v \in G.$$

Полагая здесь $u = e$, $v = y_2$, получаем, что

$$|f(x_1y_2) - f(y_1y_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } x_1, y_1 \in N_1 \text{ и любого } y_2.$$

Совершенно так же (положив в конце $u = x_1$, $v = e$) получим, что

$$|f(x_1x_2) - f(x_1y_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } x_2, y_2 \in N_2 \text{ и любого } x_1.$$

В соединении это даст:

$$|f(x_1x_2) - f(y_1y_2)| < \varepsilon \text{ для всех } x_1, y_1 \in N_1 \text{ и } x_2, y_2 \in N_2,$$

что и требовалось.

([55]) (К стр. 220.) В этом описании пропущены существенные черты определения пространства H. В действительности в неймановской теории (которая, кстати сказать, несмотря на свою важность, не является сейчас единственно возможной основой общего гармонического анализа на группах, как это утверждает автор) пространство $H = \int_S H_\alpha d\mu(\alpha)$ строится следующим образом. Сначала рассматривается тот случай, когда все H_α имеют одинаковую размерность, так что их можно считать совпадающими с одним и тем же пространством H_0. Тогда $\int_S H_\alpha d\mu(\alpha)$ определяется как совокупность всех вектор-функций $f(\alpha)$ со значениями из H_0, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функция $(f(\alpha), g)$ μ-измерима для любого $g \in H_0$;

б) $\int\limits_S \|f(\alpha)\|^2 d\mu(\alpha) < \infty$.

При этом вектор-функции $f(\alpha)$ задаются лишь на множествах, имеющих дополнение μ-меры нуль, и отождествляются, если совпадают на таком множестве. (Мы не останавливаемся здесь на вопросах, возникающих вследствие возможности различных отождествлений пространств H_α с H_0.) Если же пространства H_α могут иметь различные размерности, то предполагается, что S распадается на μ-измеримые подмножества $S_\varkappa$, на каждом из которых все H_α имеют одинаковую размерность, и под $\int\limits_S H_\alpha d\mu(\alpha)$ понимается дискретная прямая сумма пространств $\int\limits_{S_\varkappa} H_\alpha d\mu(\alpha)$.

([56]) (К стр. 220.) На самом деле требуется существование операторов T_α лишь на множестве значений α, дополнение которого имеет μ-меру нуль, причем предполагается, что операторная функция T_α слабо μ-измерима, т. е. $(T_\alpha f, g)$ μ-измеримо для любых $f, g \in H_0$.

([57]) (К стр. 221.) Мэррей и И. Нейман доказали, что на каждом факторе $\mathfrak{A}$ существует так называемая размерностная функция $D(P)$, определенная на всех проекционных операторах $P \in \mathfrak{A}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

а) $0 \leqslant D(P) \leqslant +\infty$, причем $D(P) = 0$ лишь для $P = 0$;

б) $D(P) = D(Q)$ тогда и только тогда, когда P и Q «эквивалентны относительно $\mathfrak{A}$», т. е. когда существует оператор $A \in \mathfrak{A}$ такой, что $A^*A = P$, $AA^* = Q$;

в) $D(P + Q) = D(P) + D(Q)$, если $PQ = 0$.

Этими условиями функция $D(P)$ определяется однозначно с точностью до множителя пропорциональности, причем этот множитель можно выбрать так, что множество значений $D(P)$ будет одного из следующих пяти видов:

$$1)\ 1, 2, \ldots, n; \quad 2)\ 1, 2, \ldots, +\infty;$$
$$3)\ [0, 1]; \quad 4)\ [0, +\infty];$$
$$5)\ 0, +\infty.$$

В соответствии с тем, какая из этих возможностей осуществляется, $\mathfrak{A}$ называют фактором класса I_n, I_∞, II_1, II_∞ или III.

В факторах первых четырех классов можно ввести понятие следа. Именно, следом положительно определенного эрмитова оператора $A \in \mathfrak{A}$ называют интеграл

$$\operatorname{tr}(A) = \int_0^\infty \lambda dD(P(\lambda)) \quad (\leqslant +\infty),$$

где $P(\lambda)$ — спектральная функция этого оператора, а затем это определение очевидным образом распространяется на линейные комбинации положительно определенных операторов, имеющих конечный след.

Так, например, кольцо $\mathfrak{A}$ всех линейных операторов в n-мерном пространстве есть фактор класса I_n, причем надлежаще нормированное $D(P)$ совпадает с обычной размерностью подпространства, на которое проектирует P, а $\operatorname{tr}(A)$ — с обычным следом оператора $A \in \mathfrak{A}$.

([58]) (К стр. 222.) Формула

$$\|f\|_2^2 = \int_S \operatorname{tr}(U_f^\alpha U_{f^*}^\alpha)\, d\alpha \qquad (f \in L^1 \cap L^2)$$

впервые для не бикомпактной и не коммутативной локально бикомпактной группы (а именно, для комплексной унимодулярной группы, а затем и других классических групп) была получена И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [14, 52, 53]. При этом были явно указаны пространство S и мера $d\alpha$, по которой производится интегрирование, точкам $g \in S$ отвечали неприводимые унитарные представления U_g^α рассматриваемой группы (входящие в так называемое регулярное ее представление), под U^α понимался оператор $\int U_g^\alpha f(g)\, dg$, а под $\operatorname{tr}(U_f^\alpha U_{f^*}^\alpha)$—обычный след, для которого давалось явное выражение. Впоследствии Хариш-Чандра, Гельфанд и Граев, Годман, Маутнер, Сегал, Капланский обобщили эту формулу на другие локально бикомпактные группы. Это обобщение состояло в том, что слабое пополнение кольца $L^1(G)$, рассматриваемого как кольцо операторов, действующих в пространстве $L^2(G)$ по формуле $U_f x = \int_G f(g)\, x(g^{-1}h)\, dg$, разлагалось на факторы $\mathfrak{A}_\alpha$ и устанавливалась формула вида

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_S \operatorname{tr}_\alpha (U_f^\alpha U_{f^*}^\alpha)\, d\alpha \qquad (f \in L^1 \cap L^2),$$

где tr_α — след уже в факторе $\mathfrak{A}_\alpha$.

([59]) (К стр. 223.) С этой оценкой работы Гельфанда и Наймарка [13] нельзя согласиться. Эта работа открыла совершенно новую область исследований — общую теорию нормированных колец с инволюцией и их представлений, а доказанная в ней основная теорема о C^*-алгебрах является важным рабочим инструментом в этой теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ambrose W., Strukture theorems for a special class of Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 57, 364—386 (1945).
2. Arens R., On a theorem of Gelfand and Neumark, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 32, 237—239 (1946).
3. Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932. Украинский перевод: Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.
4. Beurling A., Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle, Congrès des Mathématiques à Helsingfors, 1938.
5. Beurling A., Un théorème sur les fonctions bornées et uniformement continues sur l'axe réel, Acta Math., 77, 127—136 (1945).
6. Bohnenblust H., Sobczyk A., Extensions of functionals on complex linear spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 44, 91—93 (1938).
7. Cartan H., Sur la mesure de Haar, C. R. Acad. Sci. Paris, 211, 759—762 (1940).
8. Cartan H., Godement R., Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abelians localement compacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 64, 79—99 (1947).
9. Daniell P., A general form of integral, Ann. of Math., 19, 279—294 (1917).
10. Диткин В. А., Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах, Ученые записки Моск. Унив., Мат., 30, 83—130 (1939).
11. Dixmier J., Sur un théorème de Banach, Duke Math. J., 15, 1057—1071 (1948).
12. Гельфанд И. М., Normierte Ringe, Мат. сб. (Н. С.), 9, 3—24 (1941).
13. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Мат. сб. (Н. С.), 12 (54), 197—213 (1943).
14. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Изв. АН СССР, Мат., 11, 411—504 (1947).
15. Гельфанд И. М., Райков Д. А., К теории характеров коммутативных топологических групп, ДАН СССР, 28, 195—198 (1940).
16. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Мат. сб. (Н. С.), 13 (55), 301—316 (1943).
17. Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, УМН, 2 (12), 48—146 (1946).
18. Gleason A., A note on locally compact groups, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 744—745 (1949).

19. Godement R., Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc., **63**, 1—84 (1948).
20. Godement R., Sur la théorie des représentations unitaires, Ann. of Math. (2), **53**, 68—124 (1951).
21. Godement R., Memoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, Journal de Math. Pures et Appliquées, **30**, 1—110 (1951).
22. Haar A., Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math., **34**, 147—169 (1933).
23. Halmos P., Measure Theory, New York, 1950. Русский перевод: Халмош П., Теория меры, М., 1953.
24. Helson H., Spectral synthesis of bounded functions, Ark. Mat., **1**, 497—502 (1951).
25. Jacobson N., The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math., **67**, 300—320 (1945).
26. Kaplansky I., Dual rings, Ann. of Math. (2), **49**, 689—701 (1948).
27. Kaplansky I., Primary ideals in group algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **35**, 133—136 (1949).
28. Kaplansky I., The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **70**, 219—255 (1951).
29. Крейн М. Г., Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе, ДАН СССР (Н. С.), **30**, 484—488 (1941).
30. Крейн М. Г., Мильман Д., On extreme points of regular convex sets, Studia Mathematica, **9**, 133—138 (1940).
31. Левитан Б. М., Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, УМН (Н. С.), **4**, № 1 (29), 3—112 (1949).
32. Littlewood D. E., The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, Oxford Univ. Press, New York, 1940.
33. Loomis L. H., Haar measure in uniform structures, Duke Math. J., **16**, 193—208 (1949).
34. Mackey G., The Laplace transform for locally compact Abelian groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **34**, 156—162 (1948).
35. Mackey G., Functions on locally compact groups, Bull. Amer. Math. Soc., **56**, 385—412 (1950). Русский перевод: Маккей Г., Функции на локально компактных группах, УМН, **8**, 4, 95—129 (1953).
36. Mackey G., On induced representations of groups, Amer. J. Math., **73**, 576—592 (1951).
37. Mautner F. I., Unitary representations of locally compact groups I, Ann. of Math., **51**, 1—25 (1950).
38. Mautner F. I., Unitary representations of locally compact groups II, Ann. of Math., будет напечатано.
39. Neumann J., Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc., **36**, 445—492 (1934).

40. Neumann J., On rings of operators. Reduction theory, Ann. of Math., 50, 401—485 (1949).

41. Райков Д. А., Обобщенный закон двойственности для коммутативных групп с инвариантной мерой, ДАН СССР, 30, 583—585 (1941).

42. Райков Д. А., Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 14 (1945).

42a. Reiter H. J., Investigations in harmonic analysis, Trans. Amer. Math. Soc., 73, 401—427 (1952).

43. Schwartz L., Théorie générale des fonctions moyennepériodiques, Ann. of Math., 48, 857—929 (1947).

44. Segal I. E., The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc., 61, 69—105 (1947).

45. Segal I. E., An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, Ann. of Math. (2) 52, 272—292 (1950).

46. Stone M. H., The generalized Weierstrass approximation theorem, Math. Mag., 21, 167—184, 237—254 (1948).

47. Stone M. H., Notes on integration: II, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 34, 447—455 (1948).

48. Weil A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1938. Русский перевод: Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950.

49. Whitney H., On ideals of differentiable functions, Amer. J. Math., 70, 635—658 (1948).

Литература к примечаниям переводчика

50. Александров П. С., Урысон П. С., Sur les espaces topologiques compacts. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, série A: Sciences mathématiques, 5—8, 1923. Русский перевод: Компактные топологические пространства, в книге П. С. Урысон, Труды по топологии и другим областям математики, т. II, стр. 848—851.

51. Bourbaki N., Sur les espaces de Banach, C. R. Acad. Sci. Paris, 206, 1701—1704 (1938).

52. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Аналог формулы Планшереля для комплексной унимодулярной группы, ДАН СССР, 63, 609—612 (1948).

53. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 36 (1950).

54. Dieudonne J., La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. Ecole Norm. (3), 59, 107—139 (1942).

55. Крейн М. Г., Шмульян В. Л., On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, Ann. of Math. (2), 41, 556—583 (1940).

56. Курош А. Г., Теория групп, изд. 2, М.—Л., 1953.
57. Lévy P., Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Compositio Mathematica, 1, 1—14 (1934).
58. Mazur S., Sur les anneaux linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 207, 1025 (1938).
59. Птак В., О полных топологических линейных пространствах, Чехосл матем. ж., 3 (78), 301—364 (1953).
60. Stone M. H., On the theorem of Gelfand—Mazur, Pocznik Polskiego Tow. Matematycznego, Ann. Soc. Polon. Math., 25, 238—240 (1952).
61. Сухомлинов Г. А., О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве, Матем. сб., 3 (45), 353—358 (1938).
62. Тихонов А. Н., Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann., 102, 544—561 (1929).
63. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, S. 140.
64. Zorn M., A remark on method in transfinite algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 41, 667—670 (1935).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ