ИСЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ПРИ I М. Г. У.

Л. А. ЛЮСТЕРНИК и Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ★ 1930

L. LUSTERNIK ET L. SCHNIRELMANN

MÉTHODES TOPOLOGIQUES DANS LES PROBLÈMES VARIATIONNELS

Главлит А-62401. Н. 11. Гиз 39544. Зак. 1218. Тираж 1 000 экз. $4^1/_4$ п. л.

1-я Образцовая типография Госиздата. Москва, Валовая, 28.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ПРИ I МГУ

Л. А. ЛЮСТЕРНИК и Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

МОСКВА ★ 1930

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей работе мы излагаем результаты наших исследований в области топологических методов в вариационном исчислении, полученные нами главным образом в конце 1927 г. и начале 1928 г. По мере их получения, они излагались на докладах в московских научных учреждениях. О них же было доложено на V международном математическом съезде (в г. Болонье в 1928 г.).

Мы не касались здесь наших более ранних работ в этой области, которые велись другими методами, а равно и работ последнего времени.

Первая глава служит введением — в ней дается очерк главнейших из работ, к которым тематически и методически примыкают наши исследования. Впрочем при изложении основного материала мы не предполагали от читателя знакомства с этими результатами. Для его понимания достаточно знакомства с основными идеями вариационного исчисления, диференциальной геометрии и топологии. Исключение представляет лишь § 5, гл. II, где изложение опирается на более новые результаты в области комбинаторной топологии. Поэтому предложения § 4, необходимые для дальнейшего, мы изложили пользуясь менее общими, но зато более элементарными правилами.

В настоящей работе мы прежде всего находим условия существования решений уравнений вариационного типа; здесь наша работа является непосредственным обобщением результатов Пуанкаре (Poincaré) и Биркгофа (Birkhof); с другой стороны, мы ставим новую задачу оценки числа решений вариационной задачи. Исследование в этом направлении ведется в настоящей работе впервые.

Кроме разработки общих теорий, мы приводим некоторые применения ее к геометрии. Из этих приложений мы упомянем прежде всего о решении проблемы Пуанкаре о существовании трех

самонепересекающихся замкнутых геодезических на поверхности жанра 0. Даются также применения к теории геодезических петель, осей поверхности, собственных значений квадратической, и вообще четной формы и др.

Мы, конечно, понимаем, что работа в этом направлении в сущности лишь началась вестись.

Поэтому настоящая брошюра не претендует на систематичность и полноту изложения.

ГЛАВА I.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Постановка задачи

Основные вопросы, которые возникают при исследовании уравнений могут быть разделены на три категории:

1. Проблема фактического представления решения в виде некоторых конечных выражений: решение алгебраических уравнений первых четырех степеней в радикалах; решение линейных уравнений с помощью аппарата детерминантов; униформизация алгебраических функций посредством тех или иных классов автоморфных функций; интегрирование в квадратурах некоторых уравнений движения и т. п.

2. Проблема приближенного решения уравнений: например методом последовательных приближений, прямыми методами; отделение корней; приближенная квадратура и т. п.

3. Исследование решения, производящееся без его предварительного получения в конечной или приближенной форме. Сюда относятся прежде всего многие из доказательств существования; исследования группового характера о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах; теоремы Штурма (Sturm) о расположении корней интегралов диференциальных уравнений вида $\frac{d^2y}{dx^2}=Py$; Oszillationstheorem Клейна (Klein); метод minimum maximorum Куранта (Courant) в теории собственных значений линейных уравнений Сюда же относятся исследования Пуанкаре и современных американских математиков в области уравнений вариационного типа, о которых мы расскажем ниже.

Как известно, уравнения механики суть уравнения вариационного типа. Целый ряд важнейших задач, особенно в области небесной механики (проблема трех тел), приводит к нелинейным вариационным

задачам. Поскольку отсутствует аппарат их непосредственного решения, здесь могут ставиться задачи второго и третьего типов. С одной стороны изыскиваются методы приближенного решения уравнений движения, с другой стороны, со времен Пуанкаре стали ставить задачи „качественного“ исследования решения.

Основной задачей, поставленной Пуанкаре в небесной механике, было исследование формы и расположения орбит, т. е. формы и расположения экстремалей соответственных вариационных задач. При этом оказалось, что распределение произвольных орбит тесным образом связано с распределением замкнутых орбит (т. е. с характером периодических движений). Возникла задача об отыскании замкнутых экстремалей (периодических орбит для механической задачи).

Из задач, относящихся к этой области, наиболее известными являются задачи о форме и расположении геодезических линий, в частности — отыскание замкнутых геодезических. Эти задачи привлекли особое внимание как благодаря их геометрической наглядности, так и потому, что специфические трудности проблем подобного рода выступают здесь в наиболее отчетливой форме. Все результаты, относящиеся к геодезическим линиям механически переносятся на экстремали произвольной позитивно-определенной вариационной задачи.

До сих пор исследования производились почти исключительно в теории замкнутых геодезических (и вообще замкнутых экстремалей) на поверхностях. В механических задачах им отвечают орбиты при движении с двумя степенями свободы. И лишь в настоящее время, когда у нас выработался целый ряд методов, можно перейти к исследованию более сложного случая — распределения периодических экстремалей на многообразиях высшего числа измерений (исследование движения с несколькими степенями свободы).

§ 2. Метод минимума

Метод по идее очень прост и применялся в различных математических задачах очень давно. Для случая функции F, определенной на многообразии R, он сводится к следующему: мы ставим себе задачей отыскание точек R, в которых градиент функции F обращается в 0. Если точка a, в которой функция F достигает мини-

мума, расположена внутри R, то в ней градиент обращается в 0 (принцип минимума).

Этот же принцип употребляется для обнаруживания некоторых экстремалей в вариационной задаче (так называемых минимальных экстремалей). Отыскивается линия, на которой функционал принимает наименьшее значение. Если такая линия существует, она оказывается искомой экстремалью. На этом принципе основан целый ряд доказательств существования решений уравнений вариационного типа [например, предложенный Риманном (Riemann) план решения проблемы Дирихле (Dirichlet)].

Пуанкаре показал, что уже этот элементарный принцип достаточен для обнаружения замкнутых геодезических на поверхностях жанра выше 0. Пусть дана, например, поверхность гомеоморфная тору. На ней расположено бесконечное множество классов, несводимых друг к другу и несводимых к точке замкнутых линий. Рассмотрим один из таких классов линий. Не представляет особого труда доказать, что существует линия наименьшей длины среди кривых этого класса и что она будет замкнутой геодезической.

Если мы рассматривали бы класс линий, сводимых к точке, то линия наименьшей длины была бы просто точкой, и мы не получили бы в этом случае замкнутой геодезической. На поверхности жанра 0 все линии сводимы к точке. Поэтому метод минимума в непосредственной форме здесь неприменим. Случай поверхности жанра 0 представляет наибольшие трудности и наибольший интерес. На этом именно случае было сосредоточено главное внимание и развились методы „качественного“ исследования решения вариационных задач.

Впрочем Пуанкаре искусственным приемом получил, пользуясь только методом минимума, доказательство существования замкнутой геодезической на выпуклой поверхности [1]. К сожалению это доказательство неприменимо для случая любой поверхности жанра 0. Рассмотрим семейство замкнутых линий, делящих поверхность по кривизне пополам, т. е. линий, разбивающих поверхность на две части, для каждой из которых интеграл $\int k\,d\sigma$ равен $2n$ (здесь k означает гауссову кривизну, $d\sigma$ — элемент поверхности).

Пуанкаре доказал, что существует линия наименьшей длины среди линий этого семейства, и она оказывается замкнутой геодезической.

§ 3. Метод аналитического продолжения Пуанкаре [2]

Пуанкаре применил к теории замкнутых геодезических другой метод: метод аналитического продолжения. Он заключается в следующем; в исследуемое уравнение вводится параметр и изучается изменение решения уравнения в зависимости от введенного параметра. Аналогичный метод применялся давно в алгебраической геометрии под названием принципа сохранения числа решений. Требовалось найти число элементов пересечения некоторых алгебраических многообразий. В уравнения, определяющие эти многообразия, вводятся параметры. Они подбираются так, чтобы для некоторой системы значений параметров мы получили данные многообразия, а для другой системы значений мы получили бы многообразия, распавшиеся на линейные. Для последнего случая задача о числе элементов пересечения решается непосредственно. Если число решений не изменяется с параметром, то мы могли бы определить число решений в нужном нам случае. Неизменяемость же числа решений постулировалась.

Трудности при строгом проведении этого метода заключаются в том, что для некоторых значений параметра появляются особенности слияния решений, континуальное множество решений. Только недавно было получено Ван-дер-Варденом (Van-der-Warden) [3] строгое проведение метода и установлены границы его применения с помощью тонких исследований в теории идеалов полиномиальных областей.

В алгебраической геометрии мы отыскиваем комплексное решение. В других геометрических задачах мы имеем дело с вещественными уравнениями и отыскиваем их вещественные корни. В этом случае принцип сохранения числа решений превращается в принцип сохранения их числа по модулю 2 (так как мы пренебрегаем комплексными решениями, появляющимися только в четном числе, в виде некоторого числа пар сопряженных решений). Если для какого-нибудь значения параметра имеется нечетное число решений, то оно будет нечетным и для других значений параметра, следовательно не может равняться нулю. Доказательство существования хоть одного решения заменяется доказательством нечетности числа решений.

Такие рассуждения были применены Пуанкаре к задаче о числе замкнутых геодезических линий на выпуклых поверхностях

жанра 0. Он вводил в уравнение поверхности параметр, который подбирался так, что для одного из значений параметра поверхность обращалась в эллипсоид, а для другого — в исследуемую поверхность. Пуанкаре изучал изменения геодезических линий вместе с изменением поверхности, зависящим от изменения параметра. Прежде всего он показал, что число точек самопересечения замкнутой геодезической сохраняется при таком изменении. В частности самонепересекающиеся геодезические не могут перейти в самопересекающиеся.

Вообще говоря, при непрерывном изменении параметра геодезические изменяются тоже непрерывно, за исключением некоторых критических значений параметра. Мы опишем типичный пример критического значения параметра. Пара замкнутых геодезических при увеличении параметра сближается, для критического значения кривые сливаются, с дальнейшим увеличением параметра они исчезают. Точнее говоря, парные решения уравнений геодезических становятся сначала равными, затем комплексными сопряженными. Число вещественных решений, т. е. число замкнутых геодезических изменилось на два, четность или нечетность при этом не изменилась.

На эллипсоиде имеется нечетное число замкнутых самонепересекающихся геодезических (прежде всего три главных сечения; если кроме них существуют другие самонепересекающиеся геодезические, то их число из соображений симметричности должно быть четное). Отсюда делался вывод о существовании нечетного числа самонепересекающихся геодезических на заданной поверхности.

Против последнего доказательства Пуанкаре было выставлено справедливое возражение: мы имеем дело с произвольным обобщением чисто алгебраического метода на трансцендентный случай. Число решений такой задачи может стать для некоторого интервала значений параметра счетным. Таким образом нельзя говорить вообще о сохранении нечетности числа решений, потому что из счетного оно может стать четным и даже равным нулю. Поэтому метод аналитического продолжения, несмотря на его общность и целый ряд преимуществ, является лишь эвристическим методом. Строгого проведения этого метода для диференциальной геометрии и вариационного исчисления in Grossen до сих пор не дано. Одним из возможных законных способов применения в таких задачах метода аналитического продолжения является следующий: трансцендентную задачу мы считаем предельным случаем алгебраической. Соответ-

ГЛАВА II.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА МНОГООБРАЗИИ

§ 1. Топологические классы [11]

Назовем замкнутое множество A, расположенное в абстрактном компактном пространстве R, образом замкнутого множества M, если каждой точке множества M отвечает точка множества A, и это соответствие однозначно и непрерывно в направлении от M к A (но оно не должно быть, вообще говоря, взаимно однозначным).

Определим деформацию замкнутого множества A следующим образом: каждой точке m множества A и каждому значению числового параметра t отвечает некоторая точка $a(m, t)$ которую мы обозначим $a(t)$, где $a(t_0) = м$. Мы можем рассматривать $a(t)$, как функцию $a(m, t)$ точки m множества M и вещественного числа t. Допустим, что $a(m, t)$ непрерывна относительно каждой из переменных m и t. Множество точек, которые мы получим, полагая t равным фиксированной величине t_1, назовем результатом преобразования множества A и обозначим через $A(t_1)$.

Назовем топологическим классом замкнутых множеств в компактном пространстве совокупность замкнутых множеств, обладающую следующим свойством: если она содержит множество A, то она содержит также и все те множества, которые могут быть получены из A при помощи деформаций. Пример: совокупность всех замкнутых линий на сфере, могущих самопересекаться или даже заполнять некоторую часть сферы наподобие кривой Peano, является топологическим классом образов круга на сфере.

На торе мы можем образовать несколько различных топологических классов образов круга, именно: можно взять два круга, не гомологичных между собой, и каждый из них деформировать, со-

семейство линий, то любая заданная на многообразии функция имеет хотя бы одну точку минимакса. (Мы приводить доказательства не будем, так как в следующей главе докажем обобщение принципа минимакса.)

Пусть дана поверхность S жанра 0.

Биркгоф рассмотрел многообразие, элементом которого является полигон с n сторонами, причем каждая сторона является геодезической дугой на поверхности S минимального типа. Это многообразие содержит несводимые к точке линии (см. гл. III, § 2). Следовательно любая функция, заданная на нем, содержит хоть одну точку минимакса. В качестве функций Биркгоф рассматривает длину геодезического полигона. Точке минимакса отвечает замкнутая геодезическая.

Биркгоф несомненно является основоположником топологических методов в вариационном исчислении.

Другой американский математик Марстон Морз[8] (Marston Morse) продолжил исследования Биркгофа. Он ввел в рассмотрение другие точки многообразия, в которых градиент функции обращается в 0, классифицировал их, привел интересное соотношение между точками разного рода. Но так как исследования Марстон Морза не имеют непосредственного отношения к теме нашей работы, мы их касаться не будем.

§ 5. Задача Пуанкаре

Пуанкаре, хотя и неточно, доказал существование нечетного числа самонепересекающихся замкнутых геодезических на любой выпуклой поверхности жанра 0. Им было (без доказательства) высказано предположение о том, что это число больше или равно трем, т. е. то, что верно для эллипсоида. Проблема Пуанкаре была решена нами в 1928 г. топологическими методами (см. гл. IV). Мы коснемся вкратце различных работ в этом направлении.

Покойный П. С. Урысон читал в 1924 г. в Московском математическом обществе доклад, в котором приводил доказательство существования двух замкнутых геодезических на выпуклой поверхности жанра 0. К сожалению его работы не могли быть опубликованы за его смертью. Доказательство было основано на принципе минимакса.

В книге Бляшке (Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie t. I, 1921) изложена вкратце идея доказательства существования

трех геодезических на выпуклых поверхностях жанра 0, принадлежащая Герцглотту (Herzglott). Рассматривается особый класс линий и три геодезических отвечают линиям минимальной, максимальной и минимаксной длины. Доказательство однако не проведено и вызывает существенное сомнение. Более точного проведения идеи Герцглотта, насколько нам известно, до сих пор не существует.

Более интересной является идея доказательства, принадлежащая Биркгофу и опубликованная в его книге: Dynamical systems, 1927 Она основывается на так называемой последней геометрической теореме Пуанкаре. Биркгоф касается только случая выпуклой поверхности, но он указывает, что доказательство обобщимо и на случай любой поверхности. Он не касается вопроса о самопересекаемости этих геодезических, но зато получает интересный результат о их взаимном пересечении. Ввиду важности исследований Биркгофа, было бы чрезвычайно желательно доведение их до конца.

Приведем в заключение план доказательства, предложенный нами в 1926 г. на докладе в Математическом разделе секции естественных и точных наук Комакадемии. Мы исходили из гипотезы об ограниченности длины геодезической самонепересекающейся дуги на поверхности жанра 0 (или по крайней мере на выпуклой поверхности). В этом предположении метод аналитического продолжения законен. Мы ввели в рассмотрение геодезические петли, т. е. замкнутые геодезические дуги, имеющие одну угловую точку. Метод аналитического продолжения дает нам существование четного числа геодезических петель, имеющих в любой точке данной поверхности угловую точку. Множество геодезических петель на данной поверхности не пустое (одна замкнутая геодезическая существует, она и является петлей). Мы рассматриваем самонепересекающуюся петлю минимальной и максимальной длины. Они являются замкнутыми геодезическими. Таким образом получается доказательство существования двух замкнутых самонепересекающихся линий, но так как число их должно быть нечетным, то их по крайней мере три.

§ 6. Метод минимума максимумов Куранта [9]

Прежде чем перейти к основной части нашей книги, мы хотели коснуться бегло некоторых важных идей в области теории линейных уравнений вариационного типа.

Коснемся для простоты алгебраического случая (все нижеследующее применимо и к трансцендентным задачам, в роде уравнений Штурма-Лиувилля (Sturm-Liouville), уравнений Фредгольма (Fredholm) с симметричным ядром и т. п.). Рассмотрим систему линейных уравнений.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

Эти уравнения имеют нетривиальные решения только для некоторых значений λ.

Обратим внимание, что их можно представить в виде:

$$d(F + \lambda E) = 0, \tag{2}$$

где

$$F = \sum_{ij} a_{ij}x_i x_j, \quad E = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Обозначим через M сферу, заданную уравнением $E = 1$ и будем рассматривать форму F, как функцию, определенную на M.

В точках M, в которых удовлетворяется уравнение (2) градиент F на M исчезает. Значения λ, при которых уравнение (2) или (1) разрешимы — это значения F в этих точках M.

Гильберт (Hilbert) [10] определяет наименьшее из собственных значений λ, как минимальное значение F на M. Курант определяет все собственные значения λ следующим образом.

Рассмотрим совокупности $[M_i]$ всех сфер радиуса 1 размерности $i+1$ заключенных в M ($\lambda \leqslant i \leqslant n$). Обозначим через λ_i минимум максимумов значений F на сферах совокупности $[M_i]$. λ_i равно i-му по величине собственному значению.

Метод Куранта, давший целый ряд интересных приложений в теории линейных уравнений вариационного типа, неприменим непосредственно к нелинейным уравнениям, которыми мы будем заниматься.

Однако нахождение минимума максимумов функций на некоторых более общих классах множеств будет играть основную роль в дальнейшем изложении. Основные предложения (принцип особой точки, теорема о числе решений) с этими именно связаны. Методы которыми мы будем пользоваться можно рассматривать, как синтез топологического метода Биркгофа и метода minimum maximorum Куранта.

ГЛАВА II.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА МНОГООБРАЗИИ

§ 1. Топологические классы [11]

Назовем замкнутое множество A, расположенное в абстрактном компактном пространстве R, образом замкнутого множества M, если каждой точке множества M отвечает точка множества A, и это соответствие однозначно и непрерывно в направлении от M к A (но оно не должно быть, вообще говоря, взаимно однозначным).

Определим деформацию замкнутого множества A следующим образом: каждой точке m множества A и каждому значению числового параметра t отвечает некоторая точка $a(m, t)$ которую мы обозначим $a(t)$, где $a(t_0) = м$. Мы можем рассматривать $a(t)$, как функцию $a(m, t)$ точки m множества M и вещественного числа t. Допустим, что $a(m, t)$ непрерывна относительно каждой из переменных m и t. Множество точек, которые мы получим, полагая t равным фиксированной величине t_1, назовем результатом преобразования множества A и обозначим через $A(t_1)$.

Назовем топологическим классом замкнутых множеств в компактном пространстве совокупность замкнутых множеств, обладающую следующим свойством: если она содержит множество A, то она содержит также и все те множества, которые могут быть получены из A при помощи деформаций. Пример: совокупность всех замкнутых линий на сфере, могущих самопересекаться или даже заполнять некоторую часть сферы наподобие кривой Peano, является топологическим классом образов круга на сфере.

На торе мы можем образовать несколько различных топологических классов образов круга, именно: можно взять два круга, не гомологичных между собой, и каждый из них деформировать, со-

храняя образ первоначального круга. Мы получим два различных класса, потому что ни один из кругов не может быть деформирован во второй, ему негомологичный.

Назовем замкнутым топологическим классом такой топологический класс, который содержит все предельные множества для каждой последовательности принадлежащих ему множеств.

§ 2. Принцип особой точки

Пусть R_n есть n-мерное многообразие. Пусть на нем определена произвольная функция f непрерывная также, как и ее производные до второго порядка.

Обозначим через $(f=c)$ гиперповерхность в R, определенную уравнением $f=c$, через $(f<c)$ совокупность точек, где $f<c$, и через $(df=0)$ совокупность точек, где $df=0$. Пусть $[A]$ есть замкнутый топологический класс множеств A в R.

Функция f достигает своего максимума $C(A)$ на каждом из замкнутых множеств A классов $[A]$. Обозначим через C нижнюю грань этих максимумов. Эта грань достигается по крайней мере на одном множестве A_0 класса $[A]$. Назовем такое множество A_0 минимальным, и значение C особым значением, отвечающим данному классу множеств. Невозможно преобразовать при помощи деформации никакого множества класса $[A]$ во множество, лежащее в области $(f<c)$, — по определению числа c.

Теорема. *Пусть A_0 есть минимальное множество и c — особое значение. Если пересечение $M=(f=c)\cdot A_0$, множества A_0 с гиперповерхностью $(f=c)$ заключено внутри многообразия R, то $(f=c)\cdot A_0$ содержит по крайней мере одну особую точку гиперповерхности $(f=c)$, т. е. такую точку, где $df=0$.*

Доказательство (рис. 1). Пусть на M df всюду отлично от 0. При достаточно малом ε, на сфере $S(M, \varepsilon)$ радиуса ε описанного на гиперповерхности $(f=c)$ вокруг множества M имеем: $df\neq 0$. Следовательно можно из каждой точки $\gamma\subset S(M, \varepsilon)$ восставить геодезическую нормаль $\gamma\gamma_1$ длины δ к гиперповерхности $(f=c)$, в сторону $(f<c)$, и при достаточно малом δ все нормали $\gamma\gamma_1$ не будут пересекаться между собой (вследствие неравенства нулю градиента df функции f и непрерывности частных производных f до второго порядка включительно). Совокупность нормалей $\gamma\gamma_1$ заполняет некоторый цилиндри-

ческий слой T. Произведем теперь следующую деформацию: каждую нормаль $\gamma\gamma_1$, восставленную в точке $\gamma \subset M$, мы сведем к ее концу γ_1. Каждую нормаль $\gamma\gamma_1$, восставленную в точке $\gamma \subset S\ (M, \varepsilon)$, удаленной от M на расстояние $\rho\ (0 \leqslant \rho \leqslant \varepsilon)$ мы сведем, к ее отрезку $\gamma_2\gamma_1$ длиной $\delta \cdot \frac{\rho}{\varepsilon}$. Нормали, образующие боковую поверхность цилиндра, останутся неизменными (рис. 1). Получаем деформацию T. Вместе с тем деформируется и заключенная в T часть A, причем на границе (и вне) T деформация A равна 0.

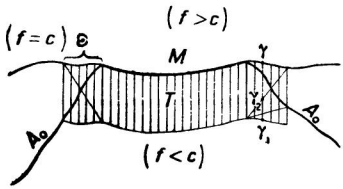


Рис. 1.

Нетрудно видеть, что при помощи описанного преобразования множество A переходит в A_1, лежащее внутри $(f < c)$, но множество A_1 принадлежит классу $[A]$. Это противоречит определению числа C.

Частными случаями принципа особой точки являются принципы минимума, максимума и минимакса (см. гл. I). Для получения принципа минимума достаточно в качестве топологического класса $[A]$ рассмотреть совокупность всех индивидуальных точек (или совокупность всех замкнутых множеств; принцип максимума получается, если мы класс $[A]$ будем считать состоящим только из одного множества — самого R (если R имеет границы, то будем допускать лишь такие деформации, которые оставляют неизменными границы R. Такие деформации переводят R в самое себя). Наконец принцип минимакса получаем, если у нас есть топологический класс, состоящий из одномерных кривых.

Пусть на многообразии M даны два несводимых друг другу путем деформации континуума A и A_1. Обозначим через $[A]$ и $[A_1]$ топологические классы, состоящие из результатов всевозможных деформаций A и A_1. По принципу особой точки этим классам отвечают две особых точки. Таким образом число несводимых друг к другу континуумов должно было бы давать минимальное число особых точек для произвольной функции. Однако в некоторых случаях значения, отвечающие различным топологическим классам, совпадают и при этом особые точки могут сливаться.

Пусть для некоторой функции совпадут два особых значения — ее минимум и максимум — функция обращается в постоянную,

во всех точках многообразия ее градиент исчезает — появляется континуум особых точек. Итак некоторые особые значения функции f являются существенно различными — их совпадение влечет за собой существование континуума решений уравнения $df = 0$.

Нашей ближайшей задачей является отыскание таких особых значений. Они будут определены в следующих параграфах; их число определяется при помощи некоторого топологического инварианта, который будем называть „категория".

Для линейного случая такая задача разрешена в теории собственных значений квадратической формы (см. конец гл. I). Они определяются, как особые значения этой формы, рассматриваемой, как функция, заданная на сфере радиуса 1; совпадение двух из этих особых значений влечет за собой появление на сфере континуума особых точек.

Последнее свойство собственных значений квадратической формы мы получим ниже, как частный случай общей теории категорий. Можно называть развиваемую нами теорию теорией собственных значений произвольной функции, определенной на произвольном многообразии и теорией собственных значений некоторых функционалов. [Роль собственных значений в гл. IV будут играть длины трех замкнутых геодезических.]

§ 3. Категория замкнутого множества относительно компактного пространства

Определение. Замкнутое множество A, расположенное в компактном пространстве, будем называть первой категории относительно этого пространства, если оно может быть сведено к точке при помощи деформации внутри R.

Замкнутое множество будем называть категории k относительно R, если оно может быть разбито на k замкнутых частей (могущих пересекаться), каждая из которых первой категории относительно R. Будем писать: $\mathrm{cat}_R A = k$.

Примеры. Внутренность круга первой категории относительно любого содержащего его пространства, в частности относительно себя самой. Сфера произвольного числа измерений второй категории относительно себя самой. Тор двух измерений третьей категории

относительно себя самого. Проективное пространство n измерений категории $n+1$ относительно себя самого, как будет показано дальше.

Основные свойства категорий.

1. Если $A \supset B$, то $\mathrm{cat}_R A \geqslant \mathrm{cat}_R B$.

2. $\mathrm{Cat}_R (A+B) \leqslant \mathrm{cat}_R A + \mathrm{cat}_R B$.

3. Пусть B — результат деформации $D(A, B)$ множества A внутри R. Мы имеем $\mathrm{cat}_R B \geqslant \mathrm{cat}_R A$.

В самом деле, пусть B есть множество первой категории, т. е. существует деформация $D(B, b)$, переводящая B в точку b.

Следовательно существует деформация $D(A, b) = D(A, B)$, $D(B, b)$ которая переводит A в точку b, т. е. $\mathrm{cat}_R A = 1$.

Пусть $\mathrm{cat}_R B = k$; по определению $B = B_1 + B_2 + \ldots + B_k$, $\mathrm{cat}_R B_i = 1$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_k$ наибольшие части A_1, которые преобразуются в $B_1, B_2, \ldots B_k$ при помощи деформации $D(A, B)$; мы имеем $A = A_1 + A_2 + \ldots, + A_k$, $\mathrm{cat}_R A_l = 1$.

Следовательно $\mathrm{cat}_R A \leqslant K$.

В дальнейшем будем считать, что R есть триангулируемое диференцируемое метрическое многообразие n измерений. Будем обозначать через $S(A, \varepsilon)$ замкнутую сферу радиуса ε, проведенную в R вокруг A.

4. Теорема. *При достаточно малом* ε, $\mathrm{cat}_R A = \mathrm{cat}_R S(A, \varepsilon)$.

Доказательство. Выберем $h > 0$ так, что всякая геодезическая дуга на R длины $\leqslant h$ есть дуга минимальной длины среди всех дуг, соединяющих ее концы. Мы разобьем R на такие симплексы диаметра $< h$ (будем их называть правильными симплексами), у которых одномерные грани суть геодезические дуги минимального типа, а i-мерные грани представляют собой пучок геодезических, соединяющих одну из вершин этой грани с противоположной $(i-1)$-мерной гранью.

Мы сейчас докажем, что всякое замкнутое множество категории 1 относительно R заключено строго внутри правильного комплекса той же категории.

Итак пусть существуют деформации $D(A, a)$, которые сводят A к точке a. Выберем положительное число $\eta \leqslant \frac{h}{3}$ таким образом что две точки A, удаленные друг от друга на расстояние $\leqslant \eta$, во

время деформации $D(A, a)$ удаляются друг от друга на расстояние, превышающее $\frac{h}{3}$.

Произведем разбиение R на правильные симплексы диаметра меньше $\frac{\eta}{6}$. Образуем из всех симплексов этого разбиения, вершины которых удалены от A на расстояние, не превышающее $\frac{\eta}{3}$, некоторый комплекс K_n. A заключено строго внутри K_n.

Докажем, что $\mathrm{cat}_R K_n = 1$.

Обозначим через K_0 совокупность вершин K_n, вообще через K_i — совокупность его i-мерных граней.

Построим последовательно деформации $D(K_0, a)$, $D(K_1, a)$, $D(K_2, a) \ldots D(K_n, a)$, сводящие соответственно $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$ к точке a.

Всякая точка из K_0 (вершина K_n) или лежит на A или удалена от A на расстояние не больше $\frac{\eta}{3}$. Деформация $D(K_0, a)$ состоит из двух частей:

А. Каждая из точек $k \subset K_0$ движется по минимальной геодезической дуге до некоторой точки $k' < A$, удаленной от нее на расстояние, не превосходящее $\frac{\eta}{3}$ (такую точку всегда можно найти). K_0 перейдут в совокупность точек $K_0' \subset A$.

Соседние вершины k и k_1 из K_0 удаляются друг от друга во время деформации на расстояние, не превосходящее $\frac{\eta}{6} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} < \eta$. Они перейдут в точки k' и k_1' совокупности K_0' с взаимным расстоянием, меньшим η.

В. Производим деформацию $D(A, a)$ множества A. K_0', изменяясь вместе с A, перейдет в точку a. Точки k' и k_0' могут удалиться друг от друга во время этой деформации на расстояние, не большее h (по определению η).

Итак, две соседних вершины k_0 и k_0' во время деформации $D(K_0, a)$ расходятся на расстояние, меньшее h. Их всегда можно соединить геодезической дугой длины $< h$.

Теперь можно определить деформацию $D(K_1, a)$. K_1 состоит из геодезических минимальных дуг, соединяющих смежные элементы K_0. Будем предполагать, что для концов этих дуг деформация $D(K_1, a)$

совпадает с $D(K_0, a)$. Сами же геодезические дуги из K_1 для любого момента деформации переходят в минимальные геодезические дуги, соединяющие точки, в которые перешли их концы. Такое определение законно, так как концы дуг расходятся по предыдущему на расстояние, не большее h.

Принимая во внимание, что K_i состоит из геодезических минимальных дуг с концами, лежащими на K_{i-1}, мы можем аналогичным путем определить $D(K_i, a)$, если известно $D(K_{i-1}, a)$.

Последовательно определим деформации $D(K_2, a)$, $D(K_s, a), \ldots$ вплоть до $D(K_n, a)$.

Итак K_n (как и все K_i) сводимо к точке, $\operatorname{cat}_R K_n = 1$.

Из построения K_n следует:

$$A \subset S\left(A, \frac{\eta}{6}\right) \subset K_n.$$

Следовательно

$$\operatorname{cat}_R S\left(A, \frac{\eta}{6}\right) = 1.$$

Пусть теперь категория A равна $l > 1$.

Имеем

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_l,$$
$$\operatorname{cat}_R A_i = 1.$$

Можно выбрать число $\varepsilon > 0$ настолько малым, что

$$\operatorname{cat} S(A_i, \varepsilon) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Так как

$$S(A, \varepsilon) = S(A_1, \varepsilon) + S(A_2, \varepsilon) + \ldots + S(A_l, \varepsilon),$$

то

$$\operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cat}_R S(A_i, \varepsilon) = l.$$

С другой стороны,

$$S(A, \varepsilon) > A,$$
$$\operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon) \geqslant \operatorname{cat}_R A,$$

следовательно

$$\operatorname{cat}_R A = \operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon).$$

5. Следствие. Пусть A есть топологический предел последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть для бесконечного множества значений индексов n, $\operatorname{cat}_R A_n \geqslant i$.

В таком случае: $\mathrm{cat}_R A \geqslant i$.

В самом деле: при достаточно малом ε, $\mathrm{cat}_R A = \mathrm{cat}_R S(A, \varepsilon)$.

Далее почти все A_n заключены внутри $S(A, \varepsilon)$. Следовательно категория $S(A, \varepsilon)$ не меньше i. Вместе с тем $\mathrm{cat}_R A = \mathrm{cat}_R S(A, \varepsilon) \geqslant i$.

Свойства 3 и 5 показывают, что категория не понижается при деформации и при переходе к пределу.

6. Обозначим через $[A_i]$ совокупность всех замкнутых множеств в R, чьи категории не меньше i. Из предыдущего следует:

Все $[A_i]$ суть замкнутые топологические классы.

В следующем параграфе мы увидим, что эти классы обладают замечательным свойством: слияние отвечающих им особых значений влечет за собой появление континуума особых точек.

7. Теорема. *Всякое замкнутое множество, лежащее в многообразии R и категории k относительно R, имеет размерность $\geqslant k+1$.*

Доказательство. В самом деле, пусть K — замкнутое множество размерности r.

Докажем, что $\mathrm{cat}_R K \leqslant r+1$. Существует столь малое число ε, что всякое множество диаметра ε, лежащее в R, может быть сведено к точке внутри R, т. е. имеет категорию 1. Сумма конечного числа подобных множеств, попарно не пересекающихся, имеет тоже категорию 1. Согласно теореме Лебега (Lebesgue), всякое множество размерности r допускает $(\varepsilon, r+1)$-покрытие, т. е. может быть покрыто конечным числом замкнутых множеств $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_n$ диаметра $\leqslant \varepsilon$, пересечение любых $(r+2)$ — x из которых пусто. Обозначим пересечения $\mathrm{K}_{i_1}, \mathrm{K}_{i_2}, \ldots, \mathrm{K}_{i_p}$ через $\mathrm{K}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$. Образуем $\Sigma \mathrm{K}_{i_1, i_2 \ldots i_{r+1}}$ всех пересечений по $(r+1)$ множеств K_i. Каждое $\mathrm{K}_{i_1, i_2 \ldots i_{r+1}}$ имеет диаметр меньший ε (потому что диаметры всех K_i меньше ε), и два различных $\mathrm{K}_{i_1, i_2 \ldots i_{r+1}}$ не могут пересекаться. Поэтому $\Sigma \mathrm{K}_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} = \Sigma_{r+1}$ есть множество первой категории на K. Существует столь малое число η, что сфера $S(\Sigma_{r+1}, \eta)$ тоже 1-й категории на K. Образуем замкнутую разность $\overline{K - S(\Sigma_{r+1}, \eta)} = K_1$. Множество K_1 допускает (ε, r)-покрытие. В самом деле замкнутые множества $\overline{\mathrm{K}_i} = \mathrm{K}_i \cdot K_1$ покрывают K_1, имеют диаметр меньший ε, и никакие $(r+1)$ из них не могут пересекаться, ибо $\overline{\mathrm{K}_i}$ суть части K_1, а $(r+1)$-множество K_i может пересечься только на Σ_{r+1}, т. е. на

расстоянии $\geqslant \eta$ от K_1. По отношению к K_1 можем повторить ту же конструкцию, образовав $\Sigma_2 = \Sigma \overline{K}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ всех пересечений $\overline{K}_i$ по r. Вычитая $K_1 - S(\Sigma_2, \eta_1) = K_2$ при достаточно малом η_1 разобьем K_1 на множество 1-й категории $S(\Sigma_2, \eta_1)$ и на множество K_2, допускающее $(\varepsilon, r-1)$-покрытие. Продолжая процесс, разложим K на $(r+1)$-множество 1-й категории.

Аксиоматическое определение категории

8. Будем рассматривать замкнутые множества A, заключенные в многообразии R, и целочисленные функции $n(A)$ этих множеств, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1°. Если A содержит только одну точку, то $n(A) = 1$.

2°. Если $A \supset B$, то $n(A) > n(B)$.

3°. $n(A+B) \leqslant n(A) + n(B)$.

4°. Если B есть результат деформации A, то $n(B) > n(A)$.

5°. $n[S(A, \varepsilon)] = n(A)$, если ε достаточно мало.

Категория замкнутых множеств есть целочисленная функция, удовлетворяющая этим аксиомам. Причем для любого множества A и для любой из целочисленных функций $n(A)$, удовлетворяющих условиям 1°—5°, $\operatorname{cat}_R A \geqslant n(A)$.

В самом деле пусть $\operatorname{cat}_R A = 1$; существует точка b, к которой путем некоторой деформации сводится A. Но тогда (аксиомы 1° и 4°):

$$n(A) \leqslant n(b) = 1.$$

Так как $n(A) \geqslant 1$ (всякое множество содержит хоть одну точку), то $n(A) = 1$.

Пусть далее

$$\operatorname{cat}_R A = k; \qquad A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k,$$
$$\operatorname{cat}_R A_i = 1.$$

Имеем:

$$n(A_i) = 1,$$
$$n(A) \leqslant n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) = k.$$

Аксиомы 1°—5° вместе с условием максимальности однозначно определяют понятие категории.

В некоторых случаях удается оценить снизу одну из функций $n(A)$. Этим самым мы оцениваем снизу и $\operatorname{cat}_R A$.

§ 4. Оценка числа решений вариационной задачи

Допустим, что многообразие R содержит по крайней мере одно множество категории k. Определим в R топологические классы $[A_1]$, $[A]_2, \ldots, [A_k]$, где $[A_i]$ – класс всех множеств категории $\geqslant i (1 \leqslant i \leqslant k)$. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_k$ особые значения функции f, принадлежащие к этим классам соответственно. Мы, очевидно, имеем:

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_k.$$

Теорема. *Если два особых значения c_i и c_j функции f, принадлежащие классам $[A_i]$, $[A_j]$, категорий i, j равны: $c_i = c_j (j > i)$ и если существует минимальное множество $A_j^\circ \subset [A_j]$, расположенное внутри R, существует множество категорий $\geqslant j - i + 1$ особых точек (где $df = 0$), в которых $f = c_i = c_j = c$.*

Доказательство. Пусть $c_i = c_j = c$; пусть $A^\circ j$ – минимальное множество в классе $[A_j]$, расположенное внутри R. Допустим, что пересечение $(f = c) \cdot (df = 0)$ категории $\leqslant j - i$. Обозначим это пересечение через P. При достаточно малом ε, $\operatorname{cat} S(P, \varepsilon) \leqslant j - i$; $\operatorname{cat} [A_j^\circ - S(P, \varepsilon)] \geqslant j - (j - i) = i$; обозначим $A_j^\circ - S(P, \varepsilon)$ через A_i°. Мы имеем: $\operatorname{cat} A_i^\circ \geqslant i$, максимум f на A_i° не может быть больше $c = c_j$, потому что $A_i^\circ \subset A_j^\circ$, но он не может быть также меньше $c = c_i$, потому что категория A_i° больше или равна i. Следовательно максимум f на A_i° равен c. A_i° есть минимальное множество в классе $[A_i]$, расположенное внутри R.

На основании принципа особой точки пересечение $A_i^\circ \times (f = c)$ содержит особую точку, которая находится на расстоянии, большем ε, от множества P и принадлежит $(df = c)$. Но это противоречит определению P. Следовательно существует на $(f = c)$ множество особых точек категории $\geqslant j - i + 1$.

Пример. Всякая функция с непрерывными производными до второго порядка, определенная на торе T, имеет по крайней мере три геометрически различных особых точки. Функция имеет на торе двух измерений, вообще говоря, четыре различных особых точки: 1) минимум (или минимум максимумов) на множествах первой категории, 2) минимум максимумов на классе, образованном из одного круга, негомологичного 0 на торе, при помощи деформации, 3) минимум максимумов на аналогичном классе, полученном из второго круга, негомологичного 0 и первому кругу, 4) максимум на торе или,

если угодно, минимум максимумов на классе, полученном деформацией самого тора внутри себя, классе, который состоит из одного только тора.

Но две из указанных особых точек, вторая и третья, могут для некоторых функций геометрически совпасть, как это легко показать на простых примерах. И это естественно, так как особые значения в этих точках принадлежат классам одной и той же категории. Но если бы минимум совпал с максимумом, очевидно, функция свелась бы к константе и в каждой точке на торе $df=0$. Из предыдущей теоремы вытекает, что если одна из точек 2 или 3 совпадает с одной из точек 1 или 4, то f имеет на T континуум второй категории на T особых точек, т. е. континуум, негомологичный 0 на торе T.

§ 5. Категория проективного пространства

Для многих задач важно уметь вычислять. категорию проективного пространства n измерений. Мы докажем сейчас элементарным путем теорему о категории проективных пространств, которую мы в следующем параграфе получим как следствие более общей теории (теории „делителей“ многообразий), основанной на применении ряда предложений из области комбинаторной топологии.

Теорема. *Проективное пространство n измерений имеет категорию $n+1$ относительно себя самого.*

Лемма 1. *Сферическая поверхность S_n, n измерений диаметра 1, заданная в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве уравнением $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1$ не может быть разбита на $n+1$ множество диаметра <1, но может быть разбита на $n+2$ подобных множества.*

Доказательство. Начнем с доказательства второй части леммы. Достаточно вписать в S_n $(n+1)$-мерный тетраедроид и разрезать соответственно S_n. Получаем разбиение S_n на $n+2$ сферических n-мерных тетраэдроида.

Несколько сложнее доказательство первой части леммы.

Впишем в S_n $(n+1)$-мерный куб K и подразделим все его грани на малые кубики со сторонами длины $\frac{\varepsilon}{2}$. Спроектируем из центра сферы полученную на гранях сетку. Получим разбиение сферы S_n на сферические кубики диаметра $<\varepsilon$. При этом каждые $(n-1)$-мерные грани кубика f_{n-1} принадлежат двум n-мерным

кубикам f_n, каждая $(n-2)$-мерная грань, не содержащая вершины основного куба K, f_{n-2} принадлежит четырем n-мерным и $(n-2)$-мерная грань, содержащая вершину основного куба, принадлежит трем n-мерным кубикам.

Допустим, что S_n разбита на $(n+1)$ множество $S_n = M_1 + M_2 + \ldots + M_{n+1}$; причем диаметры $\delta(M_i)$ множеств M все меньше 1. Очевидно можно S_n покрыть замкнутыми множествами $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots, M_{n+1}$ того же диаметра.

Положим $\eta = \frac{1 - \max\delta(M_i)}{3}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Определим теперь множества $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{n+1}$ следующим образом: $\mathfrak{M}_j$ есть совокупность всех кубиков кубильяжа со стороной $\leqslant \eta$, пересекающихся с M_j. Очевидно диаметры всех $\mathfrak{M}_j$ меньше $1 - \eta$.

Пусть P — множество на сфере. Обозначим через $\overline{P}$ множество, диаметрально-противоположное P.

Рассмотрим разность $T_1 = S_n - \mathfrak{M}_1 - \overline{\mathfrak{M}_1}$.

Это множество состоит из кубиков и отделяет $\mathfrak{M}_1$ от $\overline{\mathfrak{M}_1}$, так как $\mathfrak{M}_1$ и $\overline{\mathfrak{M}_1}$ не могут пересекаться: если бы они имели общую точку a, то по симметрии они имели бы также общую точку $\overline{a}$, т. е. каждое из них было бы диаметра 1.

Перенумеруем в некотором порядке все кубики, содержащиеся в T_1. Выберем первым из них K_1, который пересекается с $\mathfrak{M}_j$, образуем суммы $\mathfrak{M}_1 + \mathrm{K}_1$, $\overline{\mathfrak{M}_1} + \overline{\mathrm{K}_1}$. Возьмем далее первый кубик из $T_1 - \mathrm{K}_1 - \overline{\mathrm{K}_1}$ пересекающихся с $\mathfrak{M}_1 + \mathrm{K}_1$ и образуем $\mathfrak{M}_1 + \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$, $\overline{\mathfrak{M}_1} + \overline{\mathrm{K}_1} + \overline{\mathrm{K}_2}$. Продолжая тот же процесс, получим разбиение S_n на две симметрические части N_1 и $\overline{N_1}$.

Назовем первой границей F_1 множество тех граней f_{n-1}, $(n-1)$ измерения, которые принадлежат одновременно N_1 и $\overline{N_1}$. Существование F_1 очевидно. Очевидны также следующие свойства F_1.

1°. F_1 симметрично.

2°. Всякая половина большого круга на S_n пересекает F_1 в нечетном числе точек (если она расположена так, что не имеет с F_1 целых общих граней).

Докажем следующие два дальнейших свойства F_1.

На F_1 всякие две $(n-2)$-мерные грани f_{n-2} принадлежат четному числу граней f_{n-1} измерения $n-1$. Действительно если f_{n-2}

содержит вершину основного куба K, то она принадлежит трем n-мерным граням f_n, попарно между собою пересекающимся. Либо все три f_n принадлежат одной и той же части $\overline{N_1}$ или N_1 либо же две из них принадлежат N_1 и одна $\overline{N_1}$ (или наоборот). В первом случае к f_{n-2} прилегают 0, во втором — две $(n-1)$-мерные грани f_{n-1}. Аналогично, если грань f_{n-2} не содержит вершины куба K, она принадлежит четырем n-мерным кубикам f_n и 0, 2 или четырем $(n-1)$-мерным f_{n-1}.

Определим путем индукции F_k следующим образом:

1°. F_k состоит из граней $n-k$ измерений f_{n-k}.

2°. Всякая грань $(n-k-1)$-го измерения f_{n-k-1} принадлежит четному числу f_{n-k}.

3°. F_k содержится в пересечении N_k и $\overline{N_k}$.

4°. F_k пересекается в нечетном числе пар точек со всякой большой сферой k измерений на S_n определенной уравнениями:

$$\sum_{i=1}^{h+1} x_i^2 = 1;\ \alpha_1^j x_1 + \alpha_2^j x_2 + \ldots + \alpha_{n+1}^j x_{n+1} = 0,\ (j = 1, 2, \ldots, n-k)$$

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 x_{n+1} = 0,$$
$$\alpha_1^{n-k} x_1 + \alpha_2^{n-k} x_2 + \ldots + \alpha_{n+1}^{n-k} x_{n+1} = 0$$

$\left(\alpha_i^j\right.$ — постоянные числа$\left.\right)$.

5°. F_k симметрично относительно центра сферы S_n.

Пусть F_j, $N_j\,(j \leqslant k-1)$ определено. N_k строится следующим образом. Выберем первое из f_{n-k+1}, пересекающееся с некоторым $\mathfrak{M}_j$, не входившее при определении предыдущих F_i. Перенумеруем все $(n-k+1)$-мерные кубики f_{n-k+1}, содержащиеся в $F_{k-1} - \mathfrak{M}_j - \overline{\mathfrak{M}_j}$. Выберем первый из них K_1, пересекающийся с $\mathfrak{M}_j$, и образуем $\mathfrak{M}_j + \mathrm{K}_1$, $\overline{\mathfrak{M}_j} + \overline{\mathrm{K}_1}$ и т. д., пока не исчерпаем всех кубиков, входящих в F_{k-1}.

Мы получим разбиение:

$$F_{k-1} = (F_{k-1} \cdot \mathfrak{M}_j + \Sigma \mathrm{K}_i) + (\overline{F_{k-1}} \cdot \overline{\mathfrak{M}_j} + \Sigma \overline{\mathrm{K}})_i.$$

Определяем:

$$N_k = F_{k-1}\,\mathfrak{M}_j + \Sigma \mathrm{K}_i,$$
$$\overline{N_k} = \overline{F_{k-1}}\,\overline{\mathfrak{M}_j} + \Sigma \overline{\mathrm{K}_i}.$$

Определяем наконец множество F_k как совокупность кубиков f_{n-k}, $(n-k)$ измерений, которые принадлежат нечетному числу f_{n-k+1} из N_k и нечетному числу f_{n-k+1} из $\overline{N_k}$.

Докажем, что определенное таким образом множество F_k обладает свойствами 1°—5°. Свойства 1°, 3°, 5° очевидно выполняются.

Доказательство свойства 2°. Всякое f_{n-k-1} на F_{k-1} принадлежит некоторому f_{n-k+1}. Рассмотрим включение: $f_{n-k-1} \subset \subset f_{n-k} \subset f_{n-k+1}$. Внутри данного f_{n-k+1} существуют два f_{n-k}, содержащие данный f_{n-k-1}.

Отметим значком $+$ все те $f_{n-k} \supset f_{n-k-1}$, для которых f_{n-k+1} принадлежит N_k. Общее число употребленных знаков $+$ четное. Поэтому число f_{n-k}, отмеченных нечетным числом знаков $+$, должно быть четным, т. е. число f_{n-k}, содержащих данный f_{n-k-1}, принадлежащих F_k, четное.

Этим проверено выполнение для F_k свойства 2°.

Доказательство свойства 4°. Рассмотрим k-мерную сферу V_k и ее половину U_k. U_k пересекает F_{k-1} по конечной совокупности сегментов T. Граница U_k есть $(k-1)$-мерная сфера V_{k-1}. V_{k-1} пересекает F_{k-1} по нечетному числу пар симметрических точек, которые обозначим через $(p_i, \overline{p_i})$.

Следовательно U_k пересекает F_{k-1} вблизи V_{k-1} по нечетному числу пар интервалов.

Рассмотрим разбиение $F_{k-1} = N_k + \overline{N_k}$.

Могут представиться два случая:

1. $V_{k-1} \cdot F_k$ содержит четное число 2μ пар точек $(p_i, \overline{p_i})$. Нечетное число остающихся пар $(p_i, \overline{p_i})$ распределяется следующим образом: нечетное число входит в N_k и равное ему число в $\overline{N_k}$.

Отметим всякий конец одномерной грани из T, входящий в N_k знаком $+$. Общее число знаков $+$, употребленное при этом, четное. На $V_{k-1} \cdot F_k$ расположено нечетное число, значит и вне $V_{k-1} \cdot F_k$ тоже нечетное. Следовательно число концов, расположенных вне V_k, несущих на себе нечетное число знаков $+$, само нечетное, $2\nu + 1$. Следовательно общее число точек, принадлежащих пересечению $F_k \cdot V_k$ есть $2 \cdot 2\mu + 2(2\nu + 1) = 4(\mu + \nu) + 2$, т. е. удвоенное нечетное число.

2. $V_{k-1} \cdot F_k$ содержит нечетное число $2\mu + 1$ пар точек $(p_i, \overline{p_i})$. Четное число остающихся пар распределяется между N_k и $\overline{N_k}$

поровну. Следовательно, число знаков $+$ на U_k в этом случае четное. Поэтому число концов, отмеченных нечетное число раз, четное 2ν. Пересеченне $V_k \cdot F_k$ содержит $2(2\mu+1)+2(2\nu)=4(\mu+\nu)+2$ точек. Условие 4 выполнено.

Таким образом, определенное F_k олладает всеми свойствали $1^\circ - 5^\circ$.

Доказательство леммы 1. Пусть S_n разбита на части $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2\ldots+\mathfrak{M}_{n+1}$.

Образуем последовательно $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_{n+1}$. Они все не пусты.

F_{n+1} покрыто единственной $\mathfrak{M}'_i$, которая содержит поэтому пару симметрических точек и имеет диаметр 1. Получаем противоречие.

Лемма 2. *Если S_n разбита на n частей $\mathfrak{M}_i$, определенных в лемме* 1, *по крайней мере одна часть из $\mathfrak{M}_i$ содержит симметрический, относительно центра S_n, замкнутый полигон. Аналогично при разбиении на n произвольных замкнутых множеств $M_i (i=1, 2, \ldots, n)$ по крайней мере одно из них содержит симметрический, относительно центра S_n, континуум.*

Доказательство леммы 2. F_n, определенное выше, обладает следующими свойствами:

1. F_n состоит из интервалов 1-го измерения.

2. F_k — симметрично.

3. Если F_n разбито на две симметрические части A и B, существуют граничные точки между A и B.

Из этих свойств вытекает связность F_n: пусть

$$F_n = A + B,$$

где

$$A \times B = 0;$$

имеем:

$$F_n = (A \times \overline{B} + B \times \overline{A}) + (A \times \overline{A} + B \times \overline{B}).$$

Очевидно

$$(A \times \overline{B} + B \times \overline{A}) \times (A \times \overline{A} + B \times \overline{B}) = 0$$

и мы имеем разбиение F_n на две симметрические части без общих точек. Получаем противоречие.

На F_n возможно поэтому выбрать две симметрические точки и соединить их двумя симметрическими полигонами. Получим симметрический полигон на F_n. При помощи перехода к пределу можно доказать, что при произвольных F_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ одно из них по крайней мере, содержит симметрический континуум.

Доказательство теоремы. n-мерное проективное пространство R_n может быть рассматриваемо как сфера S_n с идентифицированными диаметрально-противоположными точками. Всякий континуум на R_n, отвечающий симметрическому континууму на сфере S_n, не может быть сведен к точке внутри R_n, и обратно, всякому несводимому к точке континууму на R_n отвечает на S_n симметрический континуум.

Из доказанной леммы 2 следует, что при разбиении R_n на n частей по крайней мере одна часть содержит континуум, несводимый к точке внутри R_n.

С другой стороны, можно очевидно разбить R_n на $n+1$ сводимых к точке частей, взяв тетраэдрическое разбиение сферы и построив аналогичное разбиение проективного пространства. (При этом одна из частей тетраэдрического разбиения сферы лишняя.)

Это доказывает теорему.

§ 6. Применение методов комбинаторной топологии к оценке категории

Как было доказано в § 3, категория замкнутого множества равна категории некоторого объемлющего его комплекса. Этим самым мы получаем возможность применять методы комбинаторной топологии к теории категорий. Но так как основным понятием этой части топологии является понятие гомологии, то мы сейчас определим основанный на понятии гомологии инвариант, аналогичный категории. Будем называть его „комбинаторной категорией".

Определение 1. Назовем комплекс K, заключенный в многообразии M, комплексом комбинаторной категории 1, если любой заключенный в нем цикл гомологичен нулю в R (ср. стр. 19).

Назовем комплекс $K \subset M$ комплексом комбинаторной категории k, если L может быть разбит на k частей 1-й комбинаторной категории, но не может быть разбит на меньшее их число.

Будем обозначать: $\mathrm{kat}_M K = k$ (в отличие от символа $\mathrm{cat}_M K$ означающую категорию, определенную на стр. 19).

Комбинаторную категорию замкнутого множества A будем считать равной наименьшей из комбинаторных категорий заключающих его комплексов.

Комбинаторная категория, как можно непосредственно убедиться, есть целочисленная функция замкнутого множества A в M, удовлетворяющая аксиомам 1°– 5° § 3.

На основании полученных нами результатов имеем:

$$\mathrm{kat}_M A \leqslant \mathrm{cat}_M A.$$

Для оценки категорий мы воспользуемся теорией так называемых „делителей“ многообразий, которую мы сейчас разовьем.

Определение. Назовем делителем многообразия M заключенное в нем многообразие M_1, удовлетворяющее следующему условию, пусть L есть цикл в M_1, гомологичный нулю в M. Он гомологичен нулю внутри самого M_1.

Для оправдания терминологии заметим, что если многообразие M есть произведение многообразий M_1 и M_2, то M_1 есть делитель M. В этом случае налицо также „частное“ M_2 (доказательство см. ниже). В общем случае из существования делителя многообразия M отнюдь не следует существование частного, т. е. многообразия, на которое надо помножить делителя, чтобы получить M. Здесь имеет место некоторая аналогия с понятием делимости в теории идеалов. Более глубоко эту аналогию мы сейчас развивать не будем. Обратим лишь внимание на следующее: с помощью понятия делимости многообразий мы будем оценивать категории. Последние же дают возможность ответить на вопрос, скольким изолированным особым точкам эквивалентна континуальная их совокупность. Аналогичные задачи (вопрос о кратности корней, эквивалентность континуального множества решений конечному их числу) решаются в алгебраической геометрии методами теории идеалов (см. работы Вандер-Вардена в „Mathem. Annalen“ за 1926—1928 гг.).

Теорема. *Пусть дано многообразие M, обладающее последовательностью вложенных друг в друга делителей $M \supset M_i \supset M_r$, где всякий M_{i+1} есть делитель M_i; M_r есть точка. При этих условиях* $\mathrm{kat}_M M \geqslant r+1$ *(категория относительно себя самого); тем более,* $\mathrm{cat}_M M \geqslant r+1$.

Лемма. *Существует для всякого $M_i (i=1, 2, \ldots r+1)$ цикл N_i, обладающий следующими свойствами: N_i пересекает M_i по циклу P_i, гомологичному M_{i+1} в M_i.*

Доказательство. Пусть измерения M, M_i, M_{i+1} суть соответственно u, k и l. Тогда существует, согласно теореме

Веблена (Veblen) [16], базис U_1, U_2, U_j всех $(k-l)$-мерных циклов M_l, такой что кронекеровские индексы U_i по отношению к M_{i+1} суть:

$$\chi_{M_i}(U_1, M_{i+1}) = 1, \ \chi_{M_i}(U_2, M_{i+1}) = \ldots = \chi_{M_l}(U_j, M_{i+1}) = 0.$$

Так как U_p независимы в M_i, то они независимы и в M, по отношению к которому M_i, есть делитель.

Согласно той же теореме Веблена, в M существует такой $(n-k+l)$-мерный цикл V_{i+1}, что $\chi_M(U_1, V_{i+1}) = 1$, $\chi_M(U_2, V_{i+1}) = \ldots = \chi_M(U_j, V_{i+1}) = 0$. Ввиду того, что $\chi_M(U_p, V_{i+1}) = \chi_{Mi}(U_p, V_{i+1} M_i)$, мы можем, опять-таки согласно теореме Веблена, заключить, что $M_l V_{i+1}$ гомологично M_{i+1} в M_i *.

Доказательство теоремы. Пусть $M = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$, $\mathrm{kat}_M A_i = 1$ и пусть $m \leqslant r$. Из результатов Л. С. Понтрягина [14] следует существование в M цикла, гомологичного в M любому наперед заданному циклу и не пересекающего данного A_i. Согласно предыдущему мы можем построить ряд циклов $V_1, V_2, \ldots, V_M$ таким образом, чтобы

$$V_1 \sim M_1; \ V_1 \cdot A_1 = 0; \ V_2 \cdot M_1 \sim M_2; \ V_2 A_2 = 0; \ldots$$
$$V_m \cdot M_m \sim M_m; \ V_m A_m = 0.$$

(все гомологии взяты в M).

Пересечение $V_1 \cdot V_2, \ldots, V_i$ гомологично M_i и не пересекает $A_1 + A_2 + \ldots + A_i$.

В частности, $V_1 \cdot V_2, \ldots, V_m \sim M_m$, т. е. не пусто. С другой стороны, $V_1 \cdot V_2, \ldots, V_m$ не пересекает $A_1 + A_2 + \ldots + A_m = M$. Мы получили противоречие, которое доказывает, что $m \geqslant r + 1$.

Следствие 1. Проективное пространство R_n n измерений имеет категорию $n+1$ относительно себя самого.

Лемма. *Всякое проективное пространство $R_k \subset R_n$ k измерений является делителем пространства R_n.*

В самом деле пусть L есть цикл в R_k, гомологичный 0 в R_n, т. е. существует комплекс T, граница которого равна L. Выберем проективное пространство $R_{n-1} \supset R_k$. Возьмем точку a в R_n, не принадлежащую ни T, ни R_{n-1}, и проектируем T из точки a на R_{n-1}. Мы получим комплекс T_1, граница которого равна проекции L на R_{n-1}, т. е. есть L, потому что L принадлежит $R_k \supset R_{n-1}$,

* В эту форму, упрощенную по сравнению с первоначальной, доказательство приведено Ф. Франклем.

Повторим эту операцию. Проведем проективное пространство $R_{n-2} \subset R_{n-1}$ и содержащее R_k и найдем точку $a_1 \subset R_{n-1}$ вне T_1 и R_{n-2} и проектируем T_1 на R_{n-2} из a_1. Получим T_2, граница которого есть снова L. Если мы повторим эту операцию достаточное число раз, мы получим комплекс T_j, граница которого есть L и который заключен внутри R_k.

Из предыдущего заключаем: всякий цикл, содержащийся в $R_k \subset R_n$ и гомологичный 0 в R_n, гомологичен 0 также и в R_k.

Поэтому R_k есть делитель R_n.

Образуем теперь последовательность делителей $R_n \supset R_{n-1} \supset \cdots \supset R_0$. Длина этой последовательности равна $n+1$, и в силу общей теоремы заключаем, что $\operatorname{kat} R_n \geqslant n+1$. Но R_n, n измерений, следовательно

$$\operatorname{cat} R_n \leqslant n+1,$$

т. е.

$$\operatorname{cat} R_n = \operatorname{kat} R_n = n+1.$$

Аналогичными рассуждениями нетрудно доказать:

Следствие 2. Тор n измерений (т. е. n-я степень круга) имеет категорию $n+1$.

Следствие 3. Произведение многообразий $M_1, M_2, \cdots, M_k$ имеет категорию не ниже $k+1$.

(Под произведением многообразий M_1 и M_2 понимается, как обычно, многообразие M, которое получится, если рассмотреть все пары (t_1, t_2), где t_1 — точка M_1, t_2 — точка M_2, и за окрестность точки (t_1, t_2) принять совокупность пар (t_1', t_2'), где t_1' и t_2' пробегают некоторые окрестности точек t_1 и t_2 в M_1 и M_2 соответственно).

Доказательство. Докажем, что многообразие M_1 — совокупность точек (t_1, t_2), где t_2 фиксировано и равно t_2°, есть делитель произведения $M_1 \cdot M_2$. Пусть на M_1 лежит цикл L, гомологичный 0 в M_1M_2; существует комплекс T, лежащий в M_1M_2, граница которого равна L. Всякая точка T имеет две „координаты“ — точку $t_1 \subset M_1$ и $t_2 \subset M_2$. Рассмотрим комплекс, полученный из T, таким образом, что для каждой точки (t_1, t_2) вместо t_2 взято t_2°. Всякий комплекс в T отобразится при этом на некоторый комплекс T_1, и границы комплекса перейдут в границы соответствующего ему комплекса. Поэтому граница по модулю 2 комплекса T перейдет в границу по модулю 2 симплекса T_1. Но граница L комплекса T

остается при преобразовании неподвижной. Поэтому граница T_1 равна L. Таким образом, если цикл $L \subset M_1$ гомологичен нулю в M_1M_2, то он гомологичен нулю также и в M_1, т. е. M_1 есть делитель $M_1 \cdot M_2$. Отсюда заключаем, если $M = M_1 \cdot M_2 \ldots M_k$, то, обозначая через M_0 точку, M_0, M_1, $M_1 \cdot M_2, \ldots M_1 \cdot M_2, \ldots M_{k-1}$, M есть цепочка возрастающих делителей M длины $k+1$. В силу общей теоремы $\operatorname{kat} M \geqslant k+1$.

Примечание. Можно несколько усилить это предложение. Для этого достаточно установить следующую лемму: если $M = M_1 \cdot M_2$ и P есть делитель M_1, то $P \cdot M_2$ есть делитель M.

Отсюда выводим: ранг произведения $M_1 \cdot M_2$ не менее суммы рангов сомножителей:

$$R(M_1 \cdot M_2) \geqslant RM_1 + RM_2.$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{kat}(M_1 \cdot M_2, \ldots, M_k) \geqslant RM_1 + RM_2 + \ldots + RM_k.$$

Следствие 4. Если имеем делитель M_1 многообразия M, допускающий ряд делителей $M_1 \supset M_2 \supset \ldots M_k$, то относительная комбинаторная категория M_1 в M больше или равна $k+1$.

В самом деле пусть M_1 разбит на k частей A_1, $A_2, \ldots A_k$ 1-й категории. Согласно общей теореме одна из этих частей A_i содержит цикл L, гомологичный M_k в многообразии M_1. Цикл L, будучи гомологичен M_k в M_1, тем более гомологичен M_k в M. Цикл L, гомологичный делителю M_k, не может быть гомологичен нулю в M. Следовательно A_i не первой категории в M. Получилось противоречие.

Следствие 5. Категория проективного пространства R_k относительно любого, заключающего его проективного пространства большего числа измерений R_n равна $k+1$ (независимо от n). В самом деле R_k есть делитель R_n, и предложение вытекает из следствия 4.

§ 7. Псевдо-категория псевдо-проективного пространства

Назовем псевдо-проективным пространством P_{2n} следующее $2n$-мерное топологическое пространство: точкой пространства P_{2n} служит пара точек (a, b), лежащих на n-мерной сфере S_n. При этом точки (a, b) и (b, a) считаются тождественными, и все точки (a, a) идентифицируются в одну точку, которую обозначим через O.

Определим расстояние между точками $(a, b) \cdot (c, d)$ выражением appr $[(a, b), (cd)] +$ appr $[(cd), (ab)]$. Всякому континууму K в P_{2n} отвечает некоторое замкнутое множество L на S_n. Докажем, что оно состоит самое большее из двух компонент. В самом деле рассмотрим некоторую пару точек $K: (a, b)$ и (c, d). Так как K континуум, то точки (a, b) и (c, d) могут быть соединены ε-цепью при сколь угодно малом ε. При этом точка a соединится либо с c, либо с d. Поэтому одна из точек c и d принадлежит той же компоненте множества L, что и a. Рассмотрим компоненты точек a и c в L. Очевидно, если точка c принадлежит той же компоненте, что a, d принадлежит той же компоненте, что и b [ибо (a, b) и (c, d) соединены ε-цепью при любом ε]. Итак L состоит самое большее из двух компонент — компоненты, к которой принадлежит точка a, и компоненты, к которой принадлежит точка b. Эти компоненты могут сливаться в одну.

Рассмотрим такой континуум K, в котором всякая точка может быть соединена с самой собой ε-цепью при любом ε так, что точка a перейдет в b, а b перейдет в a (свойство A).

Очевидно в этом случае L есть континуум. Рассматриваемое свойство остается инвариантным при деформации K в P_{2n} с сохранением образа K. Поэтому при любой деформации K в P_{2n} отвечающее ему L остается континуумом. Отсюда следует, что при неподвижности точки O, K может быть сведен внутри P_{2n} только к точке O и ни к какой другой точке. В самом деле для всякой точки, отличной от O, множество L, отвечающее ей, состоит из двух обыкновенных точек, т. е. не является континуумом, в то время как L, отвечающее K, остается при любой деформации континуумом.

Определим теперь инвариант аналогичный категории, который мы назовем псевдо-категорией замкнутых множеств в P_{2n}:

1°. Назовем множество $A \subset P_{2n}$ псевдо-категории 1, если оно может быть сведено к точке, отличной от O, при помощи преобразования, сохраняющего O инвариантной.

2°. Назовем множество $R \subset P_{2n}$ псевдо-категории k, если оно может быть разбито на k частей 1-й псевдо-категории. Мы пишем p kat $B = k$. Докажем, что в P_{2n} существуют замкнутые множества, псевдо-категория которых равна 1, 2, $n+1$. В самом деле рассмотрим на P_{2n} проективное n-мерное пространство R_n пар диаметрально-противоположных точек сферы S_n. При разбиении R_n

на n частей непременно хоть одна из этих частей содержит континуум, отвечающий симметрическому континууму на сфере. Этот континуум обладает свойством A и не может быть сведен в P_{2n} к какой-либо точке, отличной от O, при помощи деформации, сохраняющей O инвариантной. Поэтому R_n имеет псевдо-категорию не ниже $n+1$ относительно R_{2n}, и нетрудно доказать, что n-мерное множество, не содержащее точки O, не может иметь псевдо-категорию, большую $n+1$ (рассуждениями, аналогичными рассуждениям в теореме 7, § 3). Имеем:

$$p \operatorname{kat} R_n = n+1.$$

§ 8. Приложения и примеры

1. Теория собственных значений.

Пусть заданы квадратическая форма n переменных $F = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ и соответственная единичная форма $E = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ (см. гл. 1, § 6). Рассмотрим сферу $n-1$ измерений S_{n-1}, определенную уравнением $E=1$, и $(n-1)$-мерное проективное пространство R_{n-1}, получаемое идентификацией диаметрально-противоположных точек S_{n-1}.

Так как F принимает в диаметрально-противоположных точках S_{n-1} равные значения, то изучение поведения F на S_{n-1} сводится к изучению ее поведения на R_{n-1}.

Категория R_{n-1} равна n. Существуют n особых значений F на R_{n-1}, которые обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Им отвечают n особых точек на R_{n-1}, или n пар диаметрально-противоположных особых точек F на S_{n-1}. Обозначим через $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i$ декартовы координаты одной из пары особых точек S_{n-1}, отвечающих особому значению λ_i. В этой точке градиент F на S_{n-1} (на гиперповерхности $E=1$) исчезает, следовательно

$$d(F+\lambda_i E) = 0,$$

т. е. $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i$ дают решение системе симметричных линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \lambda_i x_i = 0.$$

(λ_i так называемые собственные значения F).

Из общей теории категорий следует появление континуума особых точек F на S_{n-1} в случае равенства двух из чисел λ_i.

Рассуждения сохраняют силу, если F и E — произвольные однородные функции одинакового порядка, инвариантные по отношению к замене знака у всех переменных, и если $E=1$ гомеоморфно $(n-1)$-мерному сферическому многообразию.

Пример. F — произвольная форма $2l$-го порядка. E — соответственная единичная форма. Существуют n вещественных чисел λ_i, для которых система уравнений

$$\frac{1}{2l}\frac{\partial F}{\partial x_j}+\lambda_i x_j^{2l-1} \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

имеет нетривиальную вещественную систему решений. Слияние двух из чисел λ_i влечет появление континуума таких систем, размерности $\geqslant k-1$, где k — число совпавших чисел λ_i.

2. Оси многообразия, гомеоморфного n-мерной сфере.

Рассмотрим многообразие G_n, гомеоморфное n-мерной сфере S_n и расположенное в некотором евклидовом пространстве m измерений E_m, представленное уравнениями:
$F_1(x_1, \ldots, x_m)=0$; $F_2(x_1, \ldots, x_m)=0, \ldots, F_{m-n}(x_1, \ldots, x_m)=0$, где F_i имеют непрерывные частные производные до 3-го порядка. Будем называть осью G_n пару точек, лежащих на G_n и таких, что функция $\rho(x, y)$, равная расстоянию точек x и y в E_m, имеет в паре точек (a, b) экстремум при условии, что x и y лежат на G_n. Имеем: координаты $a_1, \ldots, a_m, \ldots, b_1, \ldots, b_m$ точек a и b удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2]-$$
$$-\lambda_1 F_1-\lambda_2 F_2-\ldots-\lambda_{m-n}F_{m-n}\}=0,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$
$$F_1=0, \quad F_2=0, \ldots, F_{m-n}=0,$$

где

$$x_i=a_i, \quad y_i=b_i.$$

Нетрудно видеть, что прямая, соединяющая точки a и b, нормальна к G_n в точках a и b.

Будем называть длиной оси ab расстояние между a и b в E_m.

Теорема. *G_n при предыдущих условиях имеет не менее $n+1$ осей, причем, если длины двух осей совпадают, то имеется континуум осей равной длины.*

Доказательство. Рассмотрим функцию f пары точек на S_n — именно расстояние между этими точками в пространстве E_m. Эта функция непрерывна и три раза дифференцируема на G_n. В пространстве P_{2n} существуют множества, псевдо-категория которых равна 1, 2,..., $n+1$. Рассмотрим замкнутые топологические классы $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_{n+1}]$ всех множеств, псевдо-категория которых $\geqslant 1$, $\geqslant 2$, $\geqslant \ldots \geqslant n+1$ соответственно. Рассмотрим максимум минимумов f на множествах класса $[A_i]$ и, обозначив их через C_1, $C_2, \ldots$, C_{n+1}, имеем:

$$C_1 \geqslant C_2 \geqslant C_3 \geqslant C_{n+1} > 0 \ldots,$$

$C_{n+1} > 0$ (потому что можно указать на G_n множество пар точек псевдокатегории $n+1$ и такое, что расстояние между точками каждой пары больше нуля). В самом деле отобразим G_n на сферу S_n и выберем на S_n проективное пространство R_n пар диаметрально-противоположных точек. Обозначим через T_n совокупность пар точек на G_n, в которую перейдет R_n. Очевидно T_n обладает требуемыми свойствами.

Из принципа особой точки следует, что на G_n существуют пары точек (k_1, l_1), $(k_2, l_2)\ldots$, (k_n, l_n), в которых полный диференциал расстояния между ними обращается в нуль и расстояния между которыми равны соответственно C_1, $C_2, \ldots$, C_{n+1}. Если бы две из них C_i и C_j совпали, то на R_n существовал бы континуум псевдокатегории $\geqslant j-i+1$ пар точек на расстоянии $C = C_i = C_j$, так что для каждой пары $d\rho = 0$.

Для случая поверхности жанра 0, длины осей естественно определять как „длину", „ширину" и „толщину" поверхности.

3. Пример. Пусть в пространстве даны n замкнутых поверхностей S_1, $S_2, \ldots S_n$ произвольного рода. Пусть на каждой поверхности расположено по материальной точке, и эти точки взаимодействуют по любому закону, подчиненному лишь требованию, чтобы силы взаимодействия допускали потенциальную функцию. При этих условиях существует не менее $n+1$ положений равновесия, отвечающих различным уровням потенциальной функции. Если бы два из этих

уровней совпали, то существовало бы для соответствующего уровня бесконечное множество положений равновесия.

В самом деле множество положений n точек на n замкнутых поверхностях $S_1, \ldots, S_n$ образует многообразие T, являющееся произведением всех S_i; $T = S_1 \cdot S_2, \ldots, S_n$. На основании следствия 3 § 6.

$$\operatorname{kat} T \geqslant n + 1.$$

Потенциальная функция сил взаимодействия n точек зависит лишь от положения этих точек и является однозначной, непрерывной и трижды дифференцируемой функцией, определенной на T. Поэтому существует не менее $n+1$ точек, где $dT = 0$, т. е. точек равновесия системы (на основании общей теории категорий).

4. Алгебраический пример. Рассмотрим тор T_n n измерений, расположенный в $2n$-мерном евклидовом пространстве $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ уравнения которого суть $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x_2^2 + y_2^2 = 1$, $\ldots$, $x_n^2 + y_n^2 = 1$, рассмотрим непрерывную и трижды дифференцируемую функцию $F(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$, определенную на T; эта функция должна иметь на торе T не менее $n+1$ особых точек. Напишем уравнение относительного экстремума. Полагая

$$V(x_1, y_1;\ x_2, y_2; \ldots;\ x_n, y_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n) =$$
$$= F(x_1, y_1 \cdot x_n y_n) - \lambda_1(x_1^2 + y_1^2) - \lambda_2(x_2^2 + y_2^2) - \ldots - \lambda_n(x_n^2 + y_n^2),$$

имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0;\quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0,\quad x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} - 2\lambda_i x_i = 0 \\ &\qquad\qquad x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &\frac{\partial F}{\partial y_i} - 2\lambda_i y_i = 0 \end{aligned}$$

имеют всегда вещественную систему решений. Рассматриваемые уравнения могут быть, если исключить параметры λ_i, переписаны так:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} y_i - \frac{\partial F}{\partial y_i} x_i = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \\ &x_i^2 + y_i^2 = 1 \end{aligned}$$

ГЛАВА III.

КАТЕГОРИИ СЕМЕЙСТВ ЛИНИЙ

После того как даны топологические методы обнаруживания решения экстремальной задачи и числа таких решений для функции, определенной на многообразии, естественно обобщить эти результаты на случай функциональный. Это обобщение следует проводить конечно с большой осторожностью, и мы ограничимся пока отдельными задачами. Впрочем методы, развиваемые нами, могут дать читателю представление о более общих задачах.

Мы будем рассматривать только задачи об экстремумах интегралов положительных функций, определенных для некоторых семейств кривых, в частности — задачи о геодезических линиях. Мы определим понятие категории для семейств линий. То обстоятельство, что на поверхности жанра 0 можно построить семейство категории 4 самонепересекающихся замкнутых линии, обеспечивает существование 4 решений соответственных вариационных задач (например задаче о замкнутой геодезической). Одно из решений — тривиальное — изолированную точку можно рассматривать как замкнутую экстремаль. 3 других — дают 3 замкнутых экстремали (например 3 замкнутых геодезических).

Гл. III посвящена обобщению понятия категории для случая семейств линий. Гл. IV займется применением этого понятия к теории замкнутых экстремалей.

§ 1. Деформация системы кривых.

Определение 1. Пусть дана замкнутая система кривых (P) на поверхности S. Назовем эту систему образом замкнутой системы кривых (R), если

1°. Каждой кривой R_0 семейства (R) отвечает некоторая, притом единственная кривая P_0 семейства (P) [будем обозначать: $P_0 = P_0(R_0)$]. Это соответствие непрерывно относительно кривых R_0.

2°. Каждой точке r_0 кривой $R_0 < R$ отвечает единственная точка p_0 поверхности S, которая лежит на кривой $P_0(R_0)$. Это соответствие непрерывно относительно обеих переменных — кривой R_0 и точки r_0 на ней; будем писать: $p_0 = p_0(R_0, r_0)$.

3°. Когда точка r_0 пробегает кривую R_0, отвечающая ей точка $p_0(r_0, R_0)$ пробегает кривую $P_0(R_0)$.

Примечание 1. Если точка r_0 лежит на пересечении кривых R_0 и R_1 семейства (R), ей могут отвечать две различных точки $p_0(r_0, R_0)$ и $p_1(r_0, R_1)$, лежащие на двух кривых $P_0(R_0)$ и $P_1(R_1)$. (Эти последние не обязаны пересекаться.)

Примечание 2. Будем рассматривать множество $[r_0, R_0]$, элементом которого является точка r_0 кривой R_0. Точке пересечения двух кривых, R_0 и R_1, отвечают два элемента $[r_0, R_0]$ и $[r_0, R_1]$. Образуем абстрактное метрическое пространство из элементов $[r_0, R_0]$, называя расстоянием между двумя элементами $[r_0, R_0]$ и $[r_0, R_1]$ следующее число: $\zeta(r_0, r_1) + \operatorname{appr}(R_0, R_1) + \operatorname{appr}(R_1, R_0)$. (Мы обозначаем через $\operatorname{appr}(R_0 R_1)$ максимум расстояний точек R_0 от R_1).

Образуем также метрическое пространство из элементов (p_o, P_0). Условие 2° утверждает, что второе из этих абстрактных пространств есть непрерывный образ первого.

Определение 2. Теперь определим понятия деформации для семейства кривых (P). Введем параметр t. Каждому численному значению параметра t, заключенному между t_0 и t_1, отнесем некоторый образ $(P)_t$ семейства P, причем $(P)_{t_0} = (P)$. Образ $(P)_t$ будем непрерывно менять вместе с t.

Точнее:

1. Каждой точке p_0 кривой P_0 семейства (P) и каждому значению параметра t отвечает некоторая точка $p(p_0, P_0, t)$ поверхности S. Эта точка зависит непрерывным образом от трех переменных — от кривой P_0, точки p_0 на ней и параметра t.

2. При $t = t_0$, $p(p_0, P_0, t) = p_0$.

3. Когда p_0 пробегает P_0, соответственная точка $p(p_0, P_0, t)$ пробегает некоторую кривую $P(P_0, t)$.

Совокупность кривых $P(P_0, t)$ есть некоторый образ семейства (P), который мы обозначим через $(P)_t$.

Приэтом $(P)_{t_0} = (P)$.

Семейство $(P)_{t_1}$ называется результатом деформации (P), а изменение $(P)_t$ при изменении t от t_0 до t_1 — деформацией (P).

В дальнейшем мы будем иметь дело только с семействами самонепересекающихся кривых. Кроме того мы ограничимся для удобства изложения специальными семействами кривых — „нормальными" семействами, и специальными деформациями — „нормальными" деформациями.

Определение 3. Назовем семейство спрямляемых замкнутых кривых (R) нормальным семейством, если, во-первых, это семейство замкнуто; во-вторых, если длина двух дуг $\overset{\smile}{r_1 r_2}$ и $\overset{\frown}{r_1 r_2}$, определенных, на кривой R нашего семейства парой ее точек r_1 и r_2, зависит непрерывным образом от кривой R и точек r_1 и r_2 на ней.

Пример. Всякое замкнутое семейство окружностей на поверхности сферы есть нормальное семейство.

Определение 4. Назовем деформацию нормального семейства (R) нормальной деформацией, если каждой из двух дуг $\overset{\frown}{r_1 r_2}$, $\overset{\smile}{r_1 r_2}$, определяемых точками r_1 и r_2 на кривой $R < (R)$, и каждому значению параметра t отвечает пара дуг $\overset{\frown}{r_1^t r_2^t}$ и $\overset{\smile}{r_1^t r_2^t}$ соответственной кривой R_t, причем длина этих дуг непрерывным образом зависит от кривой R, точек r_1 и $r_2 \subset R$ и параметра t.

В результате нормальной деформации нормального семейства получается нормальное же семейство.

Пример нормальной деформации.

Даны на плоскости некоторое замкнутое множество и семейство окружностей радиуса 1, описанных вокруг точек этого семейства. Каждой точке p_0 окружности P_0 с центром в a и каждому значению параметра $t\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right)$ отнесем точку $p = p\,(p_0,\ P_0,\ t)$, лежащую на радиусе $a_0 p_0$ на расстоянии $1 - t$ от центра Для значения $t = 0$ мы получаем первоначальное семейство (очевидно нормальное). При $t = \frac{1}{2}$ оно деформируется в другое нормальное семейство, — семейство окружностей вдвое меньшего радиуса. Если бы мы продолжали деформацию до значения параметра $t = 1$, мы преобразовали бы каждую окружность нашего семейства в отдельную точку.

§ 2. Категория семейств кривых

Сформулируем понятие категорий для семейств кривых на поверхности жанра 0.

Будем называть в дальнейшем нуль-кривой всякую кривую, которая свелась к одной единственной точке, нуль-множеством — любое множество нуль-кривых.

Во многих дальнейших рассуждениях полезно идентифицировать все нуль-линии. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{M}$ всех спрямляемых линий на поверхности S, в которой индентифицированы все нуль-линии. Элементом этого множества является или индивидуальная кривая, или нуль-множество. Так как индивидуальная кривая сводима путем деформации к точке, то семейство, сводимое к элементу множества $\mathfrak{M}$ есть семейство, сводимое к нуль-множеству $\mathfrak{M}$.

Определение. Будем называть нормальное семейство линий на поверхности S семейством категории 1 на этой поверхности, если оно сводимо путем нормальной деформации к нуль-множеству (или, что то же самое — к элементу совокупности $\mathfrak{M}$).

Нормальное семейство A называется семейством категории k на поверхности S, если оно может быть разбито на k семейств категории 1 и не может быть разбито на меньшее число таких семейств. Будем обозначать: $\operatorname{cat}^S A = k$.

Пример 1. Нормальное семейство, не покрывающее поверхности S, обладает категорией 1 на S. В самом деле, всякая часть поверхности сводима к точке. Следовательно часть поверхности, покрытая нашим семейством, сводима вместе с ним к точке.

Пример 2. Будем называть семейство кривых семейством l раз покрывающим поверхность, если через каждые l точек поверхности проходит хоть одна кривая семейства.

Семейство, покрывающее поверхность не более чем k раз, имеет категорию не более $k+1$.

В самом деле пусть A есть такое семейство. Можно указать группу из k точек: a_1, a_2,..., a_k нашей поверхности, через которые не проходит ни одна кривая семейства. Аппроксимация любой кривой семейства от совокупности точек (a_1, a_2..., a_k) не равна нулю. И нижняя грань этих аппроксимаций отлична от нуля (мы предполагаем наше семейство замкнутым). Обозначим через A_i совокупность кривых, расстояние которых от точки a_i не меньше,

чем ε (где ε — нижняя грань аппроксимаций кривых семейства от совокупности наших точек). Всякая кривая входит хотя бы в одно из M_i, так как в противоположном случае аппроксимация этой кривой от совокупности $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ была бы меньше ε.

Имеем:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k; \quad \operatorname{cat} A_i = 1,$$

что доказывает наше предложение.

Пример 3. Будем впредь обозначать через h такое положительное число, зависящее от поверхности S, что всякая геодезическая дуга длины меньше h есть дуга минимального типа (т. е. дуга наименьшей длины среди всех дуг поверхности S соединяющих ее концы). На поверхности сферы, например h равно половине длины большого круга.

Пусть дано нормальное семейство линий, по длине меньших, чем $\frac{h}{2}$. Его категория равна 1.

В самом деле диаметры кривых этого семейства меньше $\frac{h}{2}$, вокруг каждой кривой семейства можно описать геодезическую окружность наименьшего геодезического радиуса, и притом единственную (радиус этой окружности тоже меньше $\frac{h}{2}$ и диаметр ее меньше h). Центр этих окружностей изменяется непрерывно вместе с кривыми.

Определим сейчас следующую деформацию нашего семейства: t есть параметр деформации, для каждого момента t каждая кривая переходит в подобную ей кривую с центром подобия в центре соответственной, минимальной вписанной окружности и с коэфициентом подобия, равным $1 - t$; для значения параметра $t = 1$ наше семейство перейдет в нуль-множество — в совокупность центров вписанных окружностей.

Примечание. Аналогичная деформация нам будет нужна впоследствии. Дано некоторое семейство. Мы определим деформацию, которая уменьшит по крайней мере вдвое длины всех кривых семейства, по диаметру не превосходящих $\frac{h}{4}$. Для этого, как в предыдущем примере, подвергнем для значения параметра деформации t каждую кривую, по диаметру меньшую $\frac{h}{2}$, преобразованию подобия с центром подобия в центре вписанной окружности и коэфициентом подобия, равным

$$1 - t\left(\frac{h - 2d}{h}\right),$$

здесь d — диаметр соответственной кривой.

Для значения параметра $t=1$ длины всех кривых с диаметром меньшим $\frac{h}{4}$ уменьшатся по крайней мере вдвое.

Все кривые, с диаметром превосходящим $\frac{h}{2}$, мы оставляем без изменения. Получаем деформацию нужного нам типа.

Пример 4. Семейства, несводимые к нуль-множеству, были впервые построены Birkhoff'ом именно: семейство всех параллельных между собой окружностей, покрывающих сферу. Это семейство образует некоторую пленку на поверхности сферы. При деформации оно перейдет в семейство, обладающее тем же свойством. По нашей терминологии это семейство будет обладать категорией 2.

Другим примером семейства категории 2, аналогичным данному, является семейство всех больших кругов на поверхности сферы с общим диаметром.

В следующем параграфе мы построим нормальное семейство самонепересекающихся линий категории 4, и кроме того для каждой точки поверхности — семейство категории 3 самонепересекающихся кривых, проходящих через эту точку.

В конце книги мы покажем, что не существует семейства самонепересекающихся кривых категории выше 4.

Точно так же не существует семейства таких кривых, категории выше 3, проходящих через одну точку.

§ 3. Примеры семейств самонепересекающихся кривых старших категорий

Мы построим такие семейства на сфере L радиуса 1. Деформируя такую сферу в произвольную поверхность жанра 0, получим семейства соответственных категорий на последней.

Рассмотрим на поверхности сферы L семейства:

1°. A_1 всех больших кругов с общим диаметром, или семейство A_1' всех кругов, параллельных между собой.

(Как мы видели, эти семейства имеют категорию 2.)

2°. Семейство A_2 всех больших кругов, или семейство A_2' всех окружностей, проходящих через данную точку поверхности сферы.

(Мы докажем, что эти семейства имеют категорию 3.)

3°. Семейство A_3 всех окружностей на поверхности сферы (относительно которого будет доказано, что его категория равна 4).

Для доказательства обратим внимание, что A_3, рассматриваемое как абстрактное пространство, представляет собой проективное трехмерное пространство.

В самом деле такое пространство мы получим, беря сферу L (внутренность и границу) и идентифицируя пары диаметрально противоположных точек границы.

Отнесем всякой окружности радиуса меньше 1 на поверхности сферы L точку внутри сферы, именно конец вектора, направленного из центра сферы к центру окружности (перпендикулярно к ее плоскости) длины, равной длине радиуса окружности, и с началом в центре сферы. Всем сведшимся в точке окружностям отвечает при этом центр сферы. Большим же кругам мы отнесем пару точек, а именно концы диаметра, перпендикулярного к плоскости круга. Эти пары точек идентифицируем. Получим проективное трехмерное пространство, на которое взаимно однозначно отображено множество A_3. Легко заметить, что это отображение будет взаимно непрерывным.

Семейства же A_2 и A_2' представляют собой проективные плоскости, расположенные в пространстве A_3. Прежде всего заметим, что между элементами этих семейств можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие: достаточно отнести каждому большому кругу параллельную ему окружность, проходящую через данную точку. Большому же кругу, перпендикулярному к диаметру, проходящему через данную точку, отвечает сама точка.

Далее заметим, что множество прямых, проходящих в пространстве через некоторую точку, можно рассматривать как проективную плоскость. Каждому большому кругу отнесем прямую, проходящую через центр сферы, перпендикулярно к плоскости этого круга. Итак семейства A_2 и A_2' в самом деле представляют собой проективные плоскости.

Легко убедиться также, что семейства A_1 и A_1' суть расположенные в них проективные прямые.

Категория A_3 на сфере не может превосходить 4, так как это семейство трехкратно покрывает поверхность сферы (см. пример 2 предыдущего параграфа). Мы докажем сейчас, что его категория равна 4. Заметим, что на основании результатов § 4, главы II, его категория относительно самого себя равна 4.

Будем рассматривать два рода деформаций семейства окружностей: деформации, которые переводят семейства окружностей в семейства окружностей же (или деформации внутри проективного пространства). Эти деформации будем называть *специальными*. *Общими* деформациями будем называть те, которые переводят семейство окружностей в семейство произвольных, замкнутых, спрямляемых кривых.

Лемма. *Семейство окружностей, несводимое к нуль-множеству посредством специальных деформаций, несводимо к нуль-множеству посредством общих деформаций.*

Всякое проективное пространство можно рассматривать как гиперсферу того же числа измерений с индентифицированными диаметрально-противоположными точками. Всякому несводимому множеству на проективном пространстве отвечает на гиперсфере множество, содержащее континуум, заключающий пару диаметрально-противоположных точек. Можно эту же пару точек соединить геодезическим полигоном со сколь угодно малыми сторонами, вершины которого лежат на нашем несводимом множестве Этому полигону отвечает несводимая к точке дуга проективного пространства. Больше того — он является результатом деформации любой проективной прямой нашего пространства.

Пусть мы имеем замкнутое семейство окружностей B, несводимое к нуль-множеству путем частных деформаций. Это семейство можно рассматривать как несводимое на проективном пространстве A_3 множество. Можно построить „полигон“ — образ проективной прямой — с „вершинами“, лежащими на нашем множестве, и со сколь угодно малыми сторонами. Этому полигону отвечает семейство окружностей A, его вершины — окружности семейства B, его стороны — семейства окружностей, заполняющие полоски между двумя смежными окружностями — „вершинами“.

Предположим теперь, что семейство B сводимо к нуль-множеству посредством общей деформации D. Мы докажем, что в таком случае можно свести к нуль-множеству семейство — „полигон“ A. Но при этом мы придем к противоречию, так как A есть результат деформации „проективной прямой“ A_1 или A'_1, а эти семейства путем общей деформации несводимы к нуль-множествам (см. последний пример предыдущего параграфа).

В самом деле, обозначим через h малое положительное число (меньшее во всяком случае $\frac{\pi}{2}$). Семейства произвольных кривых диаметра меньше $\frac{\pi}{2}$ можно свести к нуль-множеству (пример 3 предыдущего параграфа). Обозначим через ε столь малое положительное число, что две окружности семейства B с апроксимацией ε переходят во время деформации D в любой момент ее в пару кривых с апроксимацией, меньшей h. Окружности „вершины полигона“ мы можем выбрать удаленными друг от друга на расстояние не больше ρ. Деформация D множества A определится следующим образом: окружности-„вершины“ (принадлежащие B) деформируются так, как они деформировались во время операции D; они перейдут в конце концов в отдельные точки. „Стороны полигона“ — полоски между двумя соседними окружностями-вершинами, перейдут в полоски между их образами в соответственные моменты деформации. Деформации этих полосок можно определить методом, приведенным для аналогичного случая на стр. 21. Когда окружности-вершины перейдут в точки, полоски „стороны“ перейдут в дуги, эти точки соединяющие (длины меньше h). Все окружности, которые образовали эти полоски, перейдут если не в отдельные точки, то в линии по диаметру меньшие h. Следовательно (пример 3 предыдущего параграфа) их совокупность сводима к нуль-множеству.

Теперь мы можем доказать следующее предложение:

Теорема. *Категории семейства окружностей* (в смысле определения, данного в предыдущем параграфе) *на поверхности сферы равна его категория относительно проективного пространства* A_3.

То, что категория на сфере некоторого семейства A не может превзойти $\mathrm{cat}_{A_3} A$ — очевидно. Из предыдущей леммы видно, что она не может не быть меньше $\mathrm{cat}_{A_3} A$. В самом деле, пусть

$$\mathrm{cat}_{A_3} A = k,$$

это значит, что если разбить A на произвольные $k-1$ замкнутых частей, категория каждого из них относительно A_3 будет больше 1, т. е. она не сводима к нуль-множеству посредством частных деформаций. Следовательно на основании только что доказанной леммы, она не сводима к нуль-множеству посредством общих деформаций. Нельзя разбить A на $k-1$ множеств категории 1-й на S.

ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАМКНУТЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ

§ 1. Теоремы о замкнутых геодезических линиях

Сформулируем сейчас два предложения, доказательства которых будут даны в следующих параграфах. Методы, с помощью которых это доказывается, применимы к другим аналогичным предложениям, относящимся к теории самонепересекающихся экстремалий. В формулировках предложений можно писать вместо „геодезическая дуга“ — „экстремаль произвольной, позитивно заданной вариационной проблемы“. Достаточно ниже при доказательстве заменять также всюду слово „дуга геодезическая“ словом „дуга экстремали“.

Теорема 1. (Она представляет собою наиболее полное и точное решение проблемы Пуанкаре см. § 5, гл. I.) *На всякой замкнутой диференцируемой поверхности S жанра 0 существуют:*

1) или 3 замкнутых, самонепересекающихся геодезических кривых различной длины;

2) или семейство, покрывающее поверхность замкнутых самонепересекающихся геодезических равной длины, и одна такая геодезическая отличной длины;

3) или семейство, дважды покрывающее поверхность замкнутых самонепересекающихся геодезических равной длины.

Случай 2 реализируется на поверхностях вращения, случай 3 — на сфере.

Теорема 2. *На всякой замкнутой диференцируемой поверхности жанра 0 всякая точка является угловой точкой для двух по крайней мере геодезических петель. При этом, если длины петель совпадают, то существует покрывающее поверхность семейство подобных петель.*

(Геодезической петлей мы называем, как и выше, замкнутую геодезическую дугу с единственной угловой точкой.)

Доказательство первой теоремы сводится к следующему:

Строятся классы нормальных семейств замкнутых линий $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$ категории соответственно не ниже 2, 3, 4.

Для этого отображают сферу L на нашу поверхность S. Можно дать такое отображение L на S, при котором длина дуги кривой на S есть непрерывный функционал длины соответственной дуги на L.

Обозначим через (A_1), (A_2), (A_3) классы семейств окружностей на L категории соответственно не меньше 2, 3, 4; они перейдут в классы нормальных семейств (B_1), (B_2), (B_3), на S тех же категорий.

Обозначим через $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$ классы всех нормальных семейств самонепересекающихся кривых, получаемых путем деформации на S семейств классов (B_1), (B_2), (B_3).

Обозначим через c_1, c_2, c_3 нижние грани максимумов длин кривых семейств соответственно $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$. Так как $[B_1] > [B_2] > [B_3]$, то $c_3 \geqslant c_2 \geqslant c_1$. На основании примера 3, § 2, гл. III имеем:

$$c_1 \geqslant \frac{h}{2} > 0.$$

Мы докажем, что каждому числу c_i $(i = 1, 2, 3)$ отвечает одна по крайней мере замкнутая геодезическая без точек самопересечения длины c_i (аналог принципу особой точки). Совпадение двух или трех из этих чисел дает континуум решений нашей вариационной задачи (аналог теореме § 4 гл. II). Для доказательства определим сначала деформацию, переводящую самопересекающуюся спрямляемую кривую в такую же кривую меньшей длины.

§ 2. Операция сглаживания кривой

Первая деформация ϑ_1

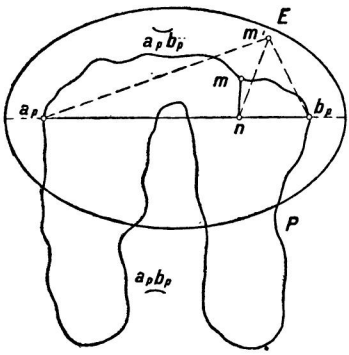
Пусть дана в плоскости кривая P, замкнутая и спрямляемая, диаметра d. Возьмем на P две точки a_p и b_p на расстоянии $c < \frac{d}{4}$; будем считать $c < 1$. Точки a_p и b_p разбивают P на две части, которые мы обозначим через $\overset{\smile}{a_p b_p}$ и $a_p \overset{\frown}{b_p}$. Пусть длина ε дуги $\overset{\smile}{a_p b_p}$ меньше $\frac{1}{4}$ и меньше, чем $\frac{d}{4}$, диаметр $a_p \overset{\frown}{b_p}$ поэтому больше

чем $\frac{3}{4}\,d$. Соединим a_p и b_p сегментом прямой, который мы обозначим $\overline{a_p b_p}$. Разность между длинами $\overset{\smile}{a_p b_p}$ и $\overline{a_p b_p}$ обозначим через α. Мы имеем $c = \varepsilon - \alpha$, построим эллипс E с фокусами в a_p и b_p, с большой осью, равной $c + \alpha$; $\overset{\smile}{a_p b_p}$ заключена внутри E.

Определим деформацию ϑ_1 кривой P, при помощи которой:

1) дуга $a_p b_p$ остается инвариантной;

2) $\overset{\smile}{a_p b_p}$ преобразуется в сегмент прямой $\overline{a_p b_p}$.



Фиг. 2.

Для этой цели приведем в соответствие каждой точке $m \subset \overset{\smile}{a_p b_p}$, расстояние которой от a_p вдоль дуги $\overset{\smile}{a_p b_p}$, равной $\rho < \varepsilon$, точку расстояние которой от a_p вдоль $\overset{\smile}{a_p b_p}$ равно $\frac{\rho}{\varepsilon}\,c$.

Соединим каждую пару соответствующих точек m и n сегментом прямой $\overline{mn}$. Пусть длина $\overline{mn}$ равна $d\,(m, n)$. Определим теперь трансформированную точку $m\,(t)$ в момент t следующим образом: $m(t)$ расположена на сегменте $\overline{mn}$ на расстоянии $t \cdot d\,(m, n)$ от m. В момент $t = 1$, $\overset{\smile}{a_p b_p}$ преобразуется в $\overline{a_p b_p}$, и кривая P преобразуется в кривую P_1 (рис. 2).

Нетрудно видеть, что наибольшее удаление точки кривой P от своего первоначального положения в течение деформации не может сделаться больше чем $\sqrt{\alpha}$.

В самом деле, удалим путем деформаций без растяжения дуги $\overset{\smile}{a_p b_p}$ точку m на наибольшее из возможных расстояний от точки n. Очевидно это произойдет тогда, когда дуга $\overset{\smile}{a_p b_p}$ обратится в ломаную с вершиной в точке m' — новом положении точки m. Так как длины дуг не изменились, то отношение отрезков $a_p m'$ и $b_p m'$ равно отношению дуг $\overset{\smile}{a_p m}$ и $\overset{\smile}{b_p m}$ (частей $\overset{\smile}{a_p b_p}$), т. е. отношению отрезков $a_p n$ и $b_p n$. Отсюда заключаем: $m'n$ есть биссектриса угла при m' в треугольнике $a_p m' b_p$ с основанием, равным $c - \alpha$ и суммой боковых сторон c. Вычисляя длину этой биссектрисы, получим для нее всегда значение меньшее $\sqrt{c\alpha} < \sqrt{\alpha}$.

Итак, в результате нашей операции:

1) дуга $\overset{\frown}{a_p b_p}$ осталась неизмененная;

2) точки $a_p b_p$ сдвинулись на расстояние меньшее $\sqrt{\alpha}$;

3) длина P уменьшилась на α.

В результате нашей деформации P могло перейти в самопересекающуюся кривую P_1. Нашей задачей является теперь деформация P_1, переводящая ее снова в самопересекающуюся кривую меньшую по длине, чем P.

Вторая деформация ϑ_2

Примем оси эллипса E в качестве прямоугольных координат x, y. Рассмотрим функцию f комплексного переменного $L = z + iy$, определенную следующим выражением:

$$f(z) = u(x, y)i + v(x, y)i = \lg \frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}}.$$

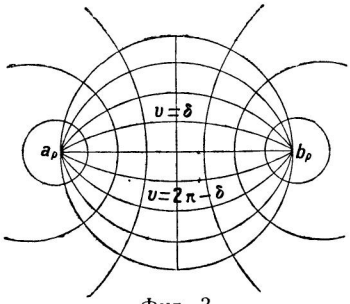
Линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ образуют две ортогональных системы: систему дуг кругов, проходящих через точки a_p и b_p, определенную уравнением $\arg\left(z - \frac{c}{2}\right) - \arg\left(z + \frac{c}{2}\right) = \text{const}$ и другую систему полных кругов, ортогональных к кругам предыдущей системы и определенных уравнением:

$$\left| \frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}} \right| = \text{const}.$$

Введем систему криволинейных координат u, v. Координата u определена в каждой точке единственным образом, координата v — циклическая и определена с точностью до $2k\pi$, где k — целое положительное или отрицательное число (рис. 3).

Проведем дуги $v = \delta$, $v = 2\pi - \delta$, где δ — положительное число < 1. Эти дуги образуют с осью $v = 0$ два малых сектора S_1 и S_2, соприкасающихся вдоль $v = 0$ и заключенных внутри E, если δ достаточно мало. Рассмотрим точку M дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$, лежащую на границе E. Подобная точка должна существовать, потому что $a_p b_p$ имеет точки как внутри, так и вне E.

Выберем координату $v(M)$ точки M таким образом, чтобы она лежала между 0 и 2π. Она заключена следовательно между δ и $2\pi - \delta$, потому что все точки, для которых v отличается от $2k\pi$ менее чем на δ, лежат внутри S_1 и S_2 и следовательно внутри E. Этим выбором координаты v она определилась единственным образом во всякой внутренней точке дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$: в самом деле значение $v(M_1)$, где $M_1 \subset \overset{\frown}{a_p b_p}$ равно:

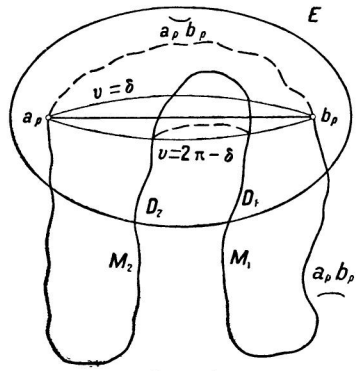


Фиг. 3.

$$v(M) + \int \left(\frac{1}{z - \frac{c}{2}} - \frac{1}{z + \frac{c}{2}} \right) dz,$$

где интеграл совершается вдоль дуги MM_1. Следовательно, если мы совершим обход вокруг точек a_p и b_p, мы придем со значением v, которое отличается от первоначального на $2k\pi$ (k есть разность между числом обходов a_p и вокруг b_p).

Лемма 1. *Всякая точка M_1 дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$, лежащая вне E, имеет координату v, заключенную между δ и $2\pi - \delta$.*



Фиг. 4.

Доказательство. Будем двигать точку M вдоль $\overset{\smile}{a_p b_p}$ в направлении к точке M_1. Пусть D_1 и D_2 суть две последовательные точки пересечения дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$ с границей E, выбранные таким образом, что дуга $\overset{\smile}{D_1 D_2}$ пересекает сегмент $\overline{a_p b_p}$. Диаметр подобной дуги превосходит $\frac{a}{2}$. Поэтому существует лишь конечное число подобных дуг на пути $MM_1 \subset \overset{\frown}{a_p b_p}$.

Рассмотрим область, ограниченную от внутренней области E дугой $\overset{\smile}{D_1 D_2}$. Эта область может либо содержать обе точки a_p и b_p, либо не содержит ни одной. В самом деле точки a_p и b_p соединимы дугой $\overset{\smile}{a_p b_p}$, лежащей внутри E и непересекающей границ нашей области: она не может пересекать $\overset{\smile}{D_1 D_2}$, потому что $\overset{\smile}{D_1 D_2}$

и $\overset{\smile}{a_p b_p}$ являются двумя частями одной и той же самонепересекающейся кривой P, она не может пересекать границы E по построению E. Следовательно, если мы заставим двигаться точку M вдоль $\overset{\smile}{D_1 D_2}$, мы придем в D_2 с тем же самым значением v, как если бы мы двигались вдоль дуги $\overset{\smile}{D_1 D_2}$ эллипса E, которая не пересекается с $\overline{a_p b_p}$. Заменим все дуги $\overset{\smile}{D_1 D_2}$ соответственными дугами эллипса $\overset{\smile}{DE_2}$. Мы получим новый путь $\overline{MM_1}$, соединяющий точки M и M_1 и непересекающий сегмента $\overline{a_p b_p}$. Интеграл

$$\int_M^{M_1} \left(\frac{1}{z - \frac{c}{2}} - \frac{1}{z + \frac{c}{2}} \right) dz$$

имеет равное значение вдоль обоих путей интеграции $\overset{\frown}{MM_1}$ и $\overline{MM_1}$ Следовательно значение v в точке M_1 заключено между 0 и 2π, и следовательно между δ и $2\pi - \delta$.

Определим теперь деформацию кривой P следующим образом:

1°. Сегмент $\overline{a_p b_p}$ остается при преобразовании ϑ_2 инвариантным.

2°. Всякая внутренняя точка $\overset{\frown}{a_p b_p}$ с координатами (u, v) преобразуется в точку с координатами $(u_1\ v_1)$, где

$$u_1 = u,\ v_1 = v, \text{ если } \delta < v < 2\pi - \delta;$$

$$u_1 = u,\ v_1 = \frac{\delta}{2} \frac{3\delta - v}{2\delta - v}, \text{ если } v < \delta;\ u_1 = u,\ v_1 = 2\pi - \delta \frac{2\pi - \delta + v}{2v}$$

при $v > 2\pi - \delta$; u_1, v_1 — очевидно непрерывные функции от u, v в каждой точке за исключением, быть может, a_p, b_p, но a_p и b_p остаются неподвижными, и точки, близкие к a_p, b_p, остаются при деформации внутри малых кругов, описанных вокруг этих точек. Следовательно деформация ϑ_2 непрерывна во всех точках.

Деформация ϑ_2 преобразует все точки $\overset{\frown}{a_p b_p}$ с произвольной координатой v внутрь области $\frac{\delta}{2} \leqslant \delta_1 \leqslant 2\pi - \frac{\delta}{2}$. При этой деформации все точки, координата v которых заключена между δ и $2\pi - \delta$, остаются неподвижными, например все точки вне эллипса E. Те точки, для которых v меньше δ, преобразуются во внутренние точки S, те точки, в которых v больше δ, преобразуются во внутренние точки S_2. Пусть ϑ_2 преобразовала дугу $\overset{\frown}{a_p b_p}$ в $(a_p b_n)'$.

Лемма 2. *Дуга $(a_p b_p)'$ не имеет кратных точек.*

Доказательство. В самом деле $\overset{\frown}{a_p b_p}$ была до деформации самонепересекающейся, т. е. различные точки $\overset{\frown}{a_p b_p}$ имели различные координаты. Две точки с различными координатами преобразуются в точки, имеющие тоже различные координаты: координата u_p остается неизменной, а координата v_p является монотонной функцией от v.

Принимая во внимание, что две различные точки преобразованной дуги имеют координаты v_p, отличающиеся не более чем на 2π, можем заключить, что точки с различными координатами являются геометрически различными. Дуга $(a_p b_p)'$ не пересекается с сегментом $\overline{a_p b_p}$ (они имеют только общие концы a_p и b_p), потому что координата v равна нулю или $2k\pi$ во всякой внутренней точке $\overline{a_p b_p}$. Обозначим через P_2 кривую $\overline{a_p b_p} + (a_p b_p)'$. Получаем следовательно, что кривая P_2 не имеет кратных точек.

Лемма 3. *Всякая точка P_1 удаляется при деформации ϑ_2 от своего первоначального положения на расстояние, не превосходящее $\sqrt{\alpha}$.*

Доказательство. В самом деле пусть точка (u, v) лежит на кругу $u = \text{const}$. Она остается на том же кругу при деформации. Но деформация не равна нулю только внутри E. Поэтому легко подсчитать, что всякая точка удаляется на расстояние, не большее чем длина оси $\sqrt{4\varepsilon\alpha} < \sqrt{\alpha}$ $\left(\text{ибо } \varepsilon < \frac{1}{4}\right)$.

Лемма 4. *Если δ достаточно мало, длина ab увеличится при деформации ϑ_2 на величину, не превосходящую $\frac{\alpha}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим линейный элемент ds кривой ab с концами (u, v) и $(u + du, v + dv)$. Этот элемент преобразуется в ds_1, концы которого определены формулами стр. 55. Линейный элемент в координатах u, v имеет выражение:

$$\sqrt{(du^2 + dv^2)} \times \frac{c}{z^2 - \frac{c^2}{4}},$$

где

$$u + iv = \lg \frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}}.$$

При деформации ϑ_2 точка (u, v) преобразуется в (u_1, v_1), лежащую на круге $u = \text{const}$, на которой

$$\frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}} = \text{const},$$

т. е.

$$\left|\frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}}\right| = \left|\frac{z_1 - \frac{c}{2}}{z_1 + \frac{c}{2}}\right| = \lambda$$

и

$$\left|z^2 - \frac{c^2}{4}\right| = \lambda\left|z + \frac{c}{2}\right|^2 = \frac{\left|z - \frac{c}{2}\right|^2}{\lambda},$$

следовательно

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{du_1^2 + dv_1^2}{du^2 + dv^2} \cdot \frac{z_1^2 - \frac{c^2}{4}}{z^2 - \frac{c^2}{4}} < \left|\frac{z - \frac{c}{2}}{z_1 - \frac{c}{2}}\right|^2 = \left|\frac{z - \frac{c}{2}}{z_1 + \frac{c}{2}}\right|^2.$$

Если элемент ds лежит вне областей s_1 или s_2, имеем $|z_1 + c < |z + c|$ и $ds_1 < ds$, потому что значение $z - c$ внутри s_1 и s_2 меньше чем вне этих сегментов. Если ds лежит внутри s_1 и s_2 ds_1 может быть больше, чем ds потому что ds может удалиться от ab. Но это удаление меньше, чем $c\frac{\delta}{2} < c\delta$. Одно из чисел $|z - c|$, или $|z + c|$, например $|z - c|$ больше, чем c; мы поэтому имеем (так как круг $v = \text{const}$ пересекает $\overline{ab}$ ортогонально)

$$|z_1 - c| < \sqrt{|z - c|^2 + (c\delta)^2} < (z - c)(1 + \delta^2)$$

и

$$\frac{ds_1}{ds} < 1 + \delta^2,$$

т. е.

$$ds_1 - ds < ds \cdot \delta^2;$$

общее увеличение всех частей кривой P_1 которые были заключены внутри областей s_1 и s_2 меньше чем $C\delta^2$, где C — общая длина всей кривой P, если мы выберем

$$\delta < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{c}} < 1.$$

Мы можем сделать эту величину меньшей чем $\frac{\alpha}{2}$, при достаточно малом δ. Деформация ϑ_2 может быть рассматриваема как непрерывная деформация P_1. Достаточно соединить прямолинейными сегментами точки дуги P_1 с соответствующими им точками P_2 и двигать каждую точку из P_1 вдоль соответствуюшего ей сегмента. Все точки, лежащие внутри эллипса E, остаются в течение всей деформации внутри последнего.

Обозначим произведение обеих деформаций ϑ_1 и ϑ_2 через ϑ. После деформации ϑ:

1°. Кривая P переходит в кривую P_2 без кратных точек.

2°. Длина кривой P уменьшается на величину, не меньшую $\frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{при деформации } \vartheta_1 \text{ она уменьшается на величину } \alpha \text{ и при деформации } \vartheta_2 \text{ увеличивается на величину } \leqslant \frac{\alpha}{2}\right)$.

3°. Все точки, лежащие вне E, остаются неподвижными, каждая точка внутри E переносится из своего первоначального положения на расстояние, не превосходящее $\sqrt{\alpha}$.

Определенная выше деформация ϑ применима ко всякой кривой P, лежащей в плоскости. Аналогичная операция может быть определена для любой кривой, лежащей на поверхности с непрерывной и диференцируемой кривизной. При этом точки a_p и b_p должны быть выбраны таким образом, чтобы дуга $\overset{\smile}{a_p b_p}$ могла быть заключена внутрь малого геодезического круга, внутри которого геодезическая геометрия совпадает с геометрией отрезков внутри плоского круга. Во всех построениях предыдущих параграфов, в которых приходилось две точки плоскости соединять прямолинейным отрезком, следует две достаточно близкие точки поверхности соединять геодезической дугой.

§ 3. Процесс сглаживания для системы кривых

Пусть задана нормальная система кривых (P) без кратных точек. Пусть на каждой кривой P системы (P) выбраны непрерывным образом пары точек a_p, b_p. Мы будем предполагать, что диаметр каждой кривой P больше α, и длина каждой дуги $\overset{\smile}{a_p b_p}$ меньше чем $\frac{\alpha}{4}$.

Лемма 5. *Если мы применяем к каждой кривой системы* (P) *деформацию* $\vartheta(P)$, *мы получаем непрерывную деформацию всей системы кривых* (P).

Доказательство. Будем рассматривать нашу плоскость как плоскость комплексного переменного. Для каждой дуги $\overset{\smile}{a_p b_p}$ мы построим по правилу, указанному в предыдущем параграфе, эллипс E_p, сегмент $a_p b_p$, дугу $\overline{a_p b_p}$ и координатную систему u_p, v_p, где

$$u_p + iv_p = \lg \frac{z - \alpha_p}{z - \beta_p};$$

α_p, β_p — числа комплексной плоскости, отвечающие точкам a_p и b_p. Значение u_p однозначно определено (оно равно логарифму отношения расстояний от данной точки L до точек a_p и b_p). v_p определено с точностью до $2k\pi$. Значение v_p для точек кривой P мы определим так же, как в предыдущем параграфе — вне E_p, $0 < v_p < 2\pi$ и в остальных точках при помощи криволинейного интеграла от функции

$$\int \left(\frac{1}{z - \alpha_p} - \frac{1}{z - \beta_p} \right) dz,$$

взятого вдоль кривой P. Таким путем координата v_p определится однозначно в каждой точке дуги $\overset{\frown}{a_p b_p} \subset P$.

Пусть $\tau > 0$. Выберем на каждой кривой дугу $\overset{\frown}{a'_p b'_p}$, которая получается из дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$, если из этой дуги выкинуть две ее части $\overset{\frown}{a_p a'_p}$, $\overset{\frown}{b_p b'_p}$ длины τ. Рассмотрим семейство всех дуг $\overset{\frown}{a'_p b'_p}$. В каждой точке, лежащей на дуге этого семейства, можно считать координаты u_p и v_p функциями двух переменных: кривой P и положения точки на P. Из определения u_p прямо следует, что она непрерывна относительно каждого из этих переменных. Но и вторая координата v_p также непрерывна на рассматриваемых дугах. Возьмем некоторую кривую P. Проведем круг диаметра $\frac{d}{2}$, внутри которого эллипс E целиком лежит. Для всех кривых P', достаточно близких к P, отвечающие им эллипсы помещаются внутри этого же круга. Все кривые P' имеют диаметр больший d, поэтому каждая кривая имеет части, выходящие за пределы круга. Для тех точек, которые лежат вне круга, v_p непрерывна относительно обеих переменных:

в самом деле v_p может иметь разрыв только формы $2k\pi$ (k — целое) и так как вне круга для всех дуг рассматриваемой окрестности кривой P v_p заключена строго между 0 и 2π — таких разрывов быть не может. Семейство (P) является замкнутым семейством самонепересекающихся линий. Существует число $\theta > 0$, зависящее только от τ, столь малое, что всякая дуга $\overset{\frown}{a_p' b_p'}$ отстоит от точек a_p, b_p на расстоянии $\geqslant \theta$. Предположим теперь, что рассматриваемая окрестность кривой P выбрана так, что апроксимация кривой этой окрестности с P меньше $\frac{\theta}{2}$. Для дуг этой окрестности величина интеграла

$$\int_A^B \left(\frac{1}{z-\alpha_p} - \frac{1}{z-\beta_p}\right) dz,$$

распространенного на дугу $\overset{\frown}{AB} \subset \overset{\frown}{a_p' b_p'}$, непрерывно зависит от A, B и от кривой P. Поэтому мы получаем, вследствие непрерывности v_p вне круга и непрерывности интеграла, непрерывность v_p как функции точки и кривой.

Применим теперь к каждой кривой последовательно две деформации ϑ_1 и ϑ_2, определенные в предыдущем параграфе. Первая из них очевидно непрерывна на всем семействе. Но и вторая деформация ϑ_2 тоже непрерывна на всем семействе. Эта деформация заключается в замене каждой точки (u_p, v_p) точкой (u_p', v_p') где u_p', v_p' — непрерывные функции от (u_p, v_p) определенные в первой лемме. Следовательно при применении операции ϑ_2 к каждой дуге $\overset{\frown}{a_p' b_p'}$ мы получаем непрерывную деформацию всего семейства этих дуг. Так как величина τ может быть выбрана сколь угодно малой, то мы можем сказать, что деформация ϑ_2 непрерывна во всех точках дуг $\overset{\frown}{a_p b_p}$, за исключением может быть самих точек a_p и b_p. Эти точки остаются однако при образовании ϑ_2 неподвижными, и они выбраны непрерывным образом на кривых семейства (P). Из результатов леммы § 4 мы знаем, что дуги $\overset{\frown}{a_p a_p'}$ и $\overset{\frown}{b_p b_p'}$ длины τ переходят в дуги длины $\leqslant (1+\delta^2)\tau$, где δ может быть выбрано сколь угодно малым. Эти исключенные дуги остаются в течение нашей деформации лежать внутри кругов диаметра 2τ

вокруг точек a_p и b_p. Из произвольной малости τ можно заключить, что ϑ_2 непрерывна также и в точках a_p и b_p, и следовательно ϑ_2 есть повсюду непрерывная деформация.

§ 4. Доказательство существования почти геодезической кривой в почти минимальной системе.

Мы вернемся к семействам $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$.

Экватором семейства линий назовем линию этого семейства наибольшей длины.

Определение 1. Назовем систему $B_i < [B_i]$, η — минимальной, если длина экватора B_i не превосходит $c_i + \eta$ (длины экватора не могут быть меньше c_i по определению числа c_i).

Определение 2. Назовем систему B_i° минимальной системой класса $[B_i]$, и если B_i° есть предел последовательности η_n — минимальных семейств класса $[B_i]$ при $\eta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Определение 3. Назовем кривую $P\alpha$ — геодезической, если:

1) диаметр $P > \frac{h}{4}$ (h сохраняет свое значение, данное в § 3),

2) какова бы ни была дуга $\overset{\smile}{a_p b_p}$ кривой P длины $< \frac{h}{8}$, разность между длинами дуги $\overset{\smile}{a_p b_p}$ и геодезической хорды $a_p b_p$ меньше чем α.

Лемма 1. *Всякая η-минимальная система $B_i < [B_i]$ содержит α-геодезическую длину $\geqslant c_i - \eta$, где $\alpha = 20\sqrt{\eta}$.*

Доказательство. Пусть наоборот существует η-минимальная система B_i, не содержащая никакой α-геодезической длины $\geqslant c_i - \eta$. Рассмотрим кривые P диаметра $\geqslant \frac{h}{3}$ и длины $\geqslant c_i - \eta$. На каждой P можно найти дугу $\overset{\smile}{a_p b_p}$ такую, что

$$\operatorname{long} \overset{\smile}{a_p b_p} - \operatorname{long} \overline{a_p b_p} > \alpha, \ \operatorname{long} \overset{\smile}{a_p b_p} < \frac{h}{8} \qquad (a)$$

(long — означает длина).

Выбор точек $a_p b_p$ на кривой P можно произвести непрерывно на соседних с P кривых. (Семейство B_i есть образ семейства кругов на сфере. На семействе кругов этот выбор может быть осуществлен

непосредственно.) На кривых P', принадлежащих окрестности $O(P)$ кривой P на B_i, достаточно узкой, эти выбранные дуги удовлетворяют условиям:

$$\operatorname{long} \overset{\smile}{a_p b_p} - \operatorname{long} \overline{a_p b_p} > \alpha, \quad \operatorname{long} \overset{\smile}{a_p b_p} \leqslant \frac{h}{8}.$$

Можно выбрать конечное число замкнутых окрестностей $O(P_1)$, $O(P_2), \ldots, O(P_k)$ таким образом, что 1) каждая кривая P попадает хоть в одну из этих окрестностей; 2) каждая кривая P попадает не более чем в 4 таких окрестностей. Возможность удовлетворить первому условию вытекает из теоремы Гейне-Бореля (Heine-Borel); возможность удовлетворить второму условию вытекает из теоремы Лебега-Урысона о разбиении множеств размерности n. В самом деле семейство кривых $[P]$, рассматриваемое как абстрактное пространство, гомеоморфно части проективного трехмерного пространства.

Можно построить также систему замкнутых окрестностей $O'(P_1)$, $O'(P_2), \cdots, O'(P_k)$, такую, что каждая $O(P_i)$ заключена строго внутри соответственной $O'(P_i)$ и каждая кривая попадает внутрь не более четырех этих расширенных окрестностей $O'(P_i)$.

На кривых, принадлежащих окрестностям $O(P_i)$, мы выбрали дуги $\overset{\smile}{a_{p'} b_{p'}}$, удовлетворяющие условиям (a). Мы продолжим этот выбор на кривые, заключенные в $O'(P_i)$ таким образом, что длины этих дуг останутся $< \frac{h}{8}$ и на границе $O'(P_i)$ эти дуги сведутся к точкам.

Применим процесс сглаживания ϑ^1 к кривым окрестности $O'(P_i)$. Этот процесс преобразует каждую выбранную дугу в сегмент геодезической. Согласно результатам предыдущего параграфа эта операция непрерывна на $O'(P_i)$. На границе $O'(P_i)$ она равна 0. Все кривые вне $O'(P_i)$ мы оставляем неизменными. Следовательно наш процесс есть непрерывная деформация $[B_i]$. Длины всех кривых $O'(P_i)$ уменьшаются на величину $\geqslant \frac{\alpha}{2}$. Длины всех остальных кривых не возрастают. Произведем последовательно сглаживание окрестностей $O'(P_1), O'(P_2), \cdots, O'(P_k)$ и обозначим эти операции через $\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^k$.

Пусть P — кривая из $O(P_i)$. Эта кривая может быть преобразована при совершении ряда операций $\vartheta^1, \ldots, \vartheta^{j-1}$, самое большее четыре раза.

Мы имеем альтернативу: или в течение одной из операций $\vartheta^1, \ldots \vartheta^{j-1}$ длина P уменьшилась на величину большую 2η или в течение каждой из этих операций длина P уменьшилась на величину $\leqslant 2\eta$.

В этом последнем случае имеем концы выбранных дуг перенесенными в течение каждой из операций на расстояние, меньшее $2\sqrt{\eta}$. Это есть следствие определения операции сглаживания. Следовательно расстояние между точками a_p и b_p может увеличиться на величину, меньшую $16\sqrt{\eta}$. Если в результате операций $\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^{i-1}$ дуга $\overset{\smile}{a_p b_p}$ преобразуется в дугу $\overset{\smile}{a'_p b'_p}$, то после преобразования ϑ_i она перейдет в сегмент геодезической $\overline{a'_p b'_p}$, причем мы имеем:

$$\log \overset{\smile}{a_p b_p} - \log \overline{a'_p b'_p} > (\log \overset{\smile}{a_p b_p} - \log \overline{a_p b_p}) -$$
$$- 16\sqrt{\eta} > \alpha - 16\sqrt{\eta} > 4\sqrt{\eta} > 4\eta.$$

Мы видим поэтому, что после указанной операции всякая кривая диаметра $\geqslant \frac{h}{2}$ и длины $c_i + \eta$ преобразуется в кривую длины $< c_i - \eta$.

Кривые же, по диаметру меньшие $\frac{h}{2}$, после деформации, описанной в главе III (§ 2, пример 3) можно уменьшить более чем вдвое по длине. Их максимальная длина станет меньшей $\frac{c_i + \eta}{2} < c_i - \eta$ при достаточно малом η. После всех преобразований наше семейство деформируется в семейство с максимумом длин $\leqslant c_i - \eta$, что противоречит определению c_i (см. рассуждения § 2, гл. II).

Существование замкнутой геодезической линии длины c_i.

Лемма 2. *Всякая минимальная система класса* $[B_i]$ *содержит замкнутую геодезическую длины* c_i. (Эта лемма заменяет принцип особой точки для нашей проблемы.)

Доказательство. Пусть B_i° есть минимальное семейство в классе $[B_i]$; $i = 1, 2, 3$. По определению минимального семейства, оно является пределом последовательности η_n-минимальных семейств B_n^i (где $\eta_n \to 0$). Обозначим через α_n число $20\sqrt{\eta_n}$. Мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Согласно предыдущей лемме на каждой B_n^i существует α_n-геодезическая P_n длины заключенной между $c_i - \eta_n$ и

$c_i + \eta_n$. Существует последовательность индексов ρ_n, для которых последовательность кривых P_{ρ_n} стремится к кривой $P \subset B_i^\circ$. Докажем, что P замкнутая геодезическая линия длины c_i. Пусть a произвольная точка на P. Выберем из кривых P_{ρ_n} последовательность точек a_{ρ_n}, стремящихся к a. Построим с каждой стороны точки a_{ρ_n} две малых дуги $\overset{\frown}{a_{\rho_n} b_{\rho_n}}$ и $\overset{\frown}{a_{\rho_n} c_{\rho_n}}$ кривой P_{ρ_n}, длины которых равны $\frac{h}{18}$. Имеем по определению α_n-геодезической:

$$0 \leqslant \operatorname{long} \overset{\frown}{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} - \operatorname{long} \overset{\frown}{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} < \alpha_n,$$

т. е.

$$\lim \operatorname{long} \overset{\frown}{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \lim \operatorname{long} \overline{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \frac{h}{18}.$$

Дуги $\overset{\frown}{a_{\rho_n} b_{\rho_n}}$ $\overset{\frown}{a_{\rho_n} c_{\rho_n}}$ стремятся к дугам $\overset{\smile}{ab}$ и $\overset{\smile}{ac}$ кривой P. Имеем:

$$\operatorname{long} \overset{\smile}{ab} \leqslant \lim \operatorname{long} \overset{\frown}{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \frac{h}{18};$$

с другой стороны

$$\operatorname{long} \overset{\smile}{ab} \geqslant \operatorname{long} \overline{ab} = \lim \operatorname{long} \overline{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \frac{h}{18};$$

так что

$$\operatorname{long} \overset{\smile}{ab} = \operatorname{long} \overline{ab} = \frac{h}{18};$$

аналогично

$$\operatorname{long} \overset{\smile}{ac} = \operatorname{long} \overline{ac} = \frac{h}{18},$$

$$\operatorname{long} \overset{\smile}{bc} = \operatorname{long} \overline{bc} = \frac{h}{9}.$$

Дуги $\overset{\smile}{ab}$, $\overset{\smile}{ac}$, $\overset{\smile}{bc}$ той же длины, что геодезические сегменты $\overline{ab}$ $\overline{ac}$, $\overline{bc}$. Поэтому эти дуги совпадают с соответствующими геодезическими сегментами. Точка a расположена в середине этой геодезической дуги.

Но a — произвольная точка P. Следовательно P — замкнутая геодезическая. Длина каждой дуги P — предел длин стремящихся к ней дуг кривых P_{ρ_i}. Следовательно

$$\operatorname{long} P = \lim_{\rho_i \to \infty} \operatorname{long} P_{\rho_i} = c_i,$$

здесь P_{2i} — самонепересекающиеся кривые. Следовательно P может самое большее самокасаться. Но у геодезической не может быть точек самокасания. Следовательно P есть кривая самонепересекающаяся.

Она не может свестись к дважды (или вообще к n раз) ($n \geqslant 2$) повторенной замкнутой кривой меньшей длины.

В самом деле пределом последовательности самопересекающихся кривых такая кривая быть не может.

Докажем это для случая плоскости. Отобразив любую поверхность жанра 0 (без одной точки) на плоскость, можем обобщить последнее рассуждение для любой такой поверхности.

Пусть плоская, спрямляемая, n раз повторенная в одном направлении кривая Q есть предел последовательности самопересекающихся спрямляемых кривых Q_n. Выберем точку a внутри Q. Она попадает внутрь почти всех Q. Рассматривая нашу плоскость, как плоскость комплексного переменного z и обозначая через α комплексную координату точки a, получим:

$$\int\limits_{Q_n} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi_i,$$

$$\int\limits_{Q} \frac{dz}{z-\alpha} = 2n\pi i.$$

Мы пришли к противоречию, так как

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{Q_n} \frac{dz}{z-\alpha} = \int\limits_{Q} \frac{dz}{z-\alpha}.$$

Из формулировки леммы следует существование трех замкнутых геодезических в случае различия чисел c_i (см. стр. 52).

Эта лемма, дающая доказательство существования решений вариационной задачи, аналогична принципу особой точки.

§ 5. Применение теории категорий

Нам остается рассмотреть случай совпадения двух чисел c_i. В гл. II мы исследовали аналогичный случай для задачи экстремума функций, определенных на многообразии. Наши рассуждения будут в общем аналогичны рассуждениям этого параграфа и тоже основаны на использовании свойств категории.

Лемма 3. *Если $c_i = c_{i+p}$, то всякое η-минимальное семейство содержит множество α-геодезических, длины которых заключены между $c_i - \eta$ и $c_i + \eta$, причем категория этого семейства не меньше $p+1$ ($\alpha = 20\sqrt{\eta}$).*

Доказательство. Пусть G есть множество всех α-геодезических, η-минимального семейства B_{i+p} и положим, что его категория меньше или равна p; B_{i+p} есть образ некоторого семейства A окружностей (т. е. некоторой части проективного пространства). Обозначим через $\overline{G}$ семейство окружностей, переходящее при отображении A в B_{i+p} в семейство G. A как часть проективного пространства можно считать метрическим пространством. Можно построить вокруг $\overline{G}$ такую сферу $\rho(\overline{G}, \varepsilon)$ в A, категория которой относительно A_3 тоже $\leqslant p$; обозначим через C замкнутую разность $\overline{A - \rho(G, \varepsilon)}$. Имеем $\operatorname{cat} C \geqslant i$; обозначим через C' семейство, отвечающее C при отображении A на B_{i+p}; C' не содержит общих элементов с G. Категория C' не меньше i. Следовательно C' входит в класс $[B_i]$. Максимум длин кривых на C' не превосходит $c_i + \eta$ (так как C' — часть η-минимального семейства B_{i+p} с максимумом длин, не превосходящим $c_{i+p} + \eta = c_i + \eta$. Следовательно C' есть η-минимальное семейство класса $[B_i]$ и содержит по крайней мере одну α-геодезическую длины $\geqslant c_i - \eta$. Эта α-геодезическая входит в G. Но C' и G не имеют общих элементов. Противоречие, полученное нами, доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть $c_i = c_{i+p}$ ($i = 1, 2$; $p = 1, 2$), тогда минимальная система B_i° содержит семейство самонепересекающихся замкнутых геодезических длины c_i, p раз покрывающих поверхность.*

Это утверждение аналогично теореме, § 4, гл. II. Обратим внимание, что семейство почти-геодезических, полученное в предыдущей лемме, p раз покрывает поверхность (см. пример 2, в § 2, гл. III). Это замечание вместе с рассуждениями леммы 2 доказывает

наше предложение. Вместе с тем доказана и основная теорема. Возможны три случая:

1. $c_1 < c_2 < c_3$.
2. $c_1 < c_2 = c_3$ или $c_1 = c_2 < c_3$.
3. $c_1 = c_2 = c_3 \, (p = 2)$.

Им отвечают три случая в формулировке теории.

Замечание 1. Мы получили 3 замкнутых геодезических, исходя из семейства A_3 категории 4. Если бы в нашем распоряжении было нормальное семейство самонепересекающихся линий категории 5, то мы пришли бы к 4 самопересекающимся замкнутым геодезическим. Равенство их длин вызвало бы появление семейства, покрывающего трижды поверхность, в частности семейство больших кругов должно было бы трижды покрывать поверхность сферы. Отсюда мы заключаем о невозможности построить нормальное семейство замкнутых непересекающихся кривых категории выше 4.

Аналогично, невозможно построить нормальное семейство самопересекающихся кривых категорий выше трех, проходящих через одну точку [17].

ПРИМЕЧАНИЯ

1. H. Poincaré, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, „Trans. of the Amer. Math. Soc.“, 1905.

2. Метод аналитического продолжения был впервые применен к задачам небесной механики Hill'ем. Целый ряд его применений дан H. Poincaré в Les methodes nouvelles de la mécanique céleste.

3. V. der Waerden, Работы В.-дер-Вердена примыкают к работам школы E. Nöther.

4. См. Л. Г. Шнирельман, О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых, „Труды мат. разд. Секции. ест. и точн. наук Ком. ак., 1927.

5. Прямые методы в вариационном исчислении заключаются в замене в вариационной задаче интегралов конечными суммами, нахождении экстремумов этих сумм и переходе к пределу, см. L. Lusternik, Über einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung, Мат. сб. 33, 1926.

6. Метод заключается в следующем: поверхность апроксимировалась замкнутой алгебраической поверхностью. Исследовалось существование на таких поверхностях псевдо-геодезических полигонов, т. е. прямолинейных полигонов с равными сторонами, с вершинами, лежащими на поверхностях, и с биссектрисами углов, совпадающими с нормалями к поверхности

в соответственной вершине. Такие полигоны определялись системой алгебраических уравнений. При аналитическом продолжении, если верна гипотеза об ограниченности самонепересекающейся дуги, псевдо-геодезические полигоны с достаточно малыми сторонами переходили в такие же полигоны. Таким образом аналитически продолжая псевдо-геодезические полигоны эллипсоида, мы приходим к псевдо-геодезическим замкнутым полигонам ограниченной длины и со сколь угодно малыми сторонами. Переход к пределу дает замкнутые геодезические.

7. Birkhoff, Dynamical systems with the degrees of freedom, „Trans. of the Amer. Math. Soc.“, 1917, vol. 18. Id., Dynamical systems, New York, 1927.

8. Marston Morse, Critical points, „Trans. of the Amer. Math. Soc.“, 1925. Id., Calculus of Variations in the large, ibid. 1928.

9. Courant und Hilbert, Methoden der mathematischen Physik.

10. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

11. Первые два параграфа главы II изложены в нашей заметке: L. Lusternik et L. Schnirelmann, Sur un principe topologique en analyse, „C. R.“, 21/I 1929.

12. L. Lusternik, Über topologische Grundlagen des allgemeinen Eigenwerttheorie, „Wiener Berichte“, 1929.

13. L. Schnirelmann, Über eine neue Kombinatorische Invariante, „Wiener Berichte“, 1929.

14. Pontrjagin, Zum Alexander'schen Dualitätssatz, Göttingener Nachrichten, 1927.

15. L. Lusternik et L. Schnirelmann, Existence de trois lignes géodésiques fermées sur chaque surface de genre 0, „C. R.“, 18/II 1929. Id. Sur la problème de trois géodésiques fermées sur la surface de genre 0, „C. R.“, 8/VIII 1929.

16. O. Veblen, „Trans. of Amer. Math. Soc.“, Vol. 25, p. 540.

17. Уже во время печатания настоящей работы авторы доказали, что всякое нормальное семейство самонепересекающихся линий на сфере сводимо к семейству кругов.