

*Д. Лойд  
М. Липов*

# НАДЕЖНОСТЬ





# RELIABILITY: MANAGEMENT, METHODS AND MATHEMATICS

David K. Lloyd and Myron Lipov  
Space Technology Laboratories, Inc.

---

Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey

1962

ДАВИД К. ЛЛОЙД и МИРОН ЛИПОВ

НАДЕЖНОСТЬ  
ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ,  
МЕТОДЫ,  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Перевод с английского  
*И. Н. КОВАЛЕНКО* и *Г. А. РУСАКОВА*  
ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
*Н. П. БУСЛЕНКО*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКОЕ РАДИО»

---

МОСКВА — 1964

В книге рассматриваются задачи, связанные с теорией надежности, вскрываются основные источники ненадежности и описываются методы улучшения качества продукции. Кроме того, освещаются вопросы, связанные с производством, контролем и эксплуатацией изделий, излагаются специфические законы распределения, используемые в теории надежности, а также инженерные методики, посвященные решению конкретных задач.

Книга является фундаментальным руководством для широкого круга специалистов, занимающихся теорией и практикой надежности.

## ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга американских авторов Д. К. Ллойда и М. Липова «Надежность: организация исследования, методы и математический аппарат» привлекает к себе внимание по многим причинам. В первую очередь необходимо отметить свойственную ей доступность изложения материала. В большинстве случаев для понимания сути вопроса вполне можно обойтись элементарными сведениями как по математическим методам, так и по существу технических приложений. Детальное рассмотрение постановки задач, подробное изложение методов расчета и иллюстрация их на общеизвестных, иногда даже бытовых примерах делают книгу понятной инженерам и техникам самых различных специальностей. Это тем более существенно, что в настоящее время нет учебников по проблеме надежности, а иногда представляет трудность даже составление программ подготовки специалистов по надежности.

Книга снабжена достаточным количеством таблиц, графиков, рисунков и вспомогательных иллюстраций, помогающих практически ориентироваться в проблеме надежности.

Заметный интерес представляет материал, связанный с оценкой надежности механических систем. В силу исторически сложившихся обстоятельств большинство опубликованных в настоящее время работ относится к радиоэлектронному оборудованию и аппаратуре. Рассмотрение таких объектов, как турбогенераторы, жидкостные реактивные двигатели, реактивные двигатели, работающие на твердом топливе, и т. д., позволяет распространить известные результаты на весьма широкий класс существующих и разрабатываемых систем.

Весьма полезным, с нашей точки зрения, представляется ознакомление читателя с принятой в США организацией работ по надежности, с особенностями сбора, передачи и обработки информации об отказах различных систем и их элементов. По вполне понятным причинам некоторые конкретные рекомендации авторов оказываются неприемлемыми для сложившейся в Советском Союзе практики разработки сложных систем. Однако эти случаи не требуют каких-либо комментариев, так как они становятся очевидными при сколько-нибудь критическом отношении к существу рассматриваемых проблем.

Нельзя также согласиться с утверждением авторов о роли второй мировой войны и войны в Корее, а также последующих военных приготовлений в ускорении технического прогресса и с рядом других относящихся сюда высказываний. Можно предположить, что подобное впечатление возникло у авторов в связи с многочисленными примерами анализа надежности различных средств вооружения.

Несмотря на эти замечания, упомянутые выше достоинства делают книгу Ллойда и Липова полезной советскому читателю.

Перевод гл. 4—12 выполнен И. Н. Коваленко, остальную часть книги перевел Г. А. Русаков. Переводчики руководствовались источником «Теория надежности в области радиоэлектроники. Терминология» (Изд-во АН СССР, 1962).

*Н. П. Бусленко*

*Моим родителям, Гарри и Дорис  
Д. К. Л.*

*Моей жене, Сусан-Ли  
М. Л.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В книге предпринята попытка ознакомить читателя с развивающейся методологией надежности. Перед ее написанием возникло много проблем, а именно: насколько исчерпывающими должны быть сведения и как широка должна быть аудитория, для которой будет предназначаться эта книга.

Надежность — сравнительно новый предмет, постоянно развивающийся и распространяющийся на все новые отрасли науки и техники, причем область использования ее не является четко ограниченной и твердо установленной подобно школьной алгебре или элементарной статистике. Более того, большая часть публикуемых работ по надежности используется лишь при решении частных задач и представляет ограниченный интерес и возможности использования. Следовательно, объем теории надежности как предмета еще точно не определен. Мы попытались решить эту проблему, представив основные понятия и рассуждения, касающиеся данного предмета, включив в качестве разделов основные статистические методы, принципы организации взаимодействия с целью передачи информации и вопросы исследования и оценки надежности. Эти разделы в настоящее время составляют основу методологии надежности. Читатель найдет в книге общий подход к решению возникающих перед ним задач по оценке надежности, а не сами решения. Каким образом он выберет необходимый метод из ряда частных примеров, будет зависеть от его способности разобраться в приведенной методологии, от типа рассматриваемого оборудования, а также от тех частных ответов на основные вопросы по надежности, которые он считает относящимися к своей задаче и применимыми в ней.



Для кого предназначена книга? Поскольку до ее написания не существовало упорядоченного и исчерпывающего представления о предмете, авторы полагали, что основное изложение должно быть довольно обширным и книга должна предназначаться главным образом для инженеров, занимающихся вопросами надежности. Поэтому основной упор был сделан на теорию вероятностей и математическую статистику с соответствующим преломлением применительно к вопросам надежности. Однако книга не является явно выраженным учебником по теории вероятностей или статистике, хотя эти предметы представляют, возможно, самый важный инструмент, находящийся в распоряжении инженера-специалиста по надежности.

Авторы считают, что книга представляет интерес не только для инженеров, занимающихся вопросами надежности, но также для руководства промышленными предприятиями, так как в его обязанности входит установление объема и эффективности работ по исследованию надежности при организации производства. Отношение руководства к надежности в свою очередь зависит от понимания ее влияния на организацию производства, возможности использования методов оценки надежности на этапах проектирования и разработок, а также статистической методологии, особенно в ее приложении к договорным обязательствам.

Это означает, что каждый из этих вопросов должен рассматриваться и с нетехнической точки зрения.

Книга предназначена также для инженеров-проектировщиков, разработчиков, испытателей, производственников и представителей отделов технического контроля, которые в той или иной мере участвуют в процессе производства на различных описываемых здесь этапах. Опыт показывает, что если они освоят имеющиеся методы оценки надежности и осознают, как это поможет им в работе, то всегда можно будет заручиться их одобрением, оценкой и, что самое главное, личным участием в использовании этой методологии.

Книгу смогут использовать студенты математических и инженерных профилей, которые усвоили курс элементарной математической статистики. Во II разделе они найдут изложение и ориентацию методов теории вероятностей и статистики, несколько отличающиеся от тех,

которые имеются в большинстве учебников по математической статистике. В соответствующих местах в текст включены упражнения различной степени трудности, однако педагог может по своему усмотрению опустить те разделы и упражнения, которые окажутся более доступными лишь при повторном чтении.

Как это следует из всего сказанного, стиль, уровень и глубина изложения материала настоящей книги весьма разнообразны, за что авторы, однако, не приносят извинений. Надежность стала слишком широким предметом, с которым соприкасаются люди, имеющие весьма различную техническую подготовку. Существуют разные степени трудности проблем надежности — от «слишком математических» до «практических в житейском смысле». Это должен учитывать инженер, занимающийся надежностью, чтобы способствовать преодолению барьеров технической связи, так часто встречающихся в настоящее время в инженерной практике.

Часть статистических методов, приведенных в книге, появляется в подобной литературе впервые. Некоторые из них созданы авторами, остальные помещены с любезного разрешения отдельных специалистов, занимающихся этими вопросами. Нам особенно хотелось бы выразить признательность нескольким авторам, которые великодушно разрешили воспользоваться значительными частями их работ, а именно: Эпштейну Б., Гарнеру Н. Р., Хартвигсену Д. Е., Будне Т. А., Бокс Г. Е. П., за существенный вклад в разделы 10-й и 13-й глав. Кроме того, мы благодарны О. Л. Девису и др. за разрешение перепечатать табл. 11.21 из книги «Проектирование и анализ промышленных экспериментов».

Мы должны также отметить полезный вклад продолжительных и часто полемических обсуждений вопросов надежности, проведенных совместно с нашими коллегами в лабораториях космической технологии и с представителями подрядчиков, работающих по программам разработок баллистических ракет и космических систем ВВС.

Техническое содержание рукописи просмотрено Шоэром Е. М. и Эйдемиллером Р. Л., членами Технического штаба фирмы «Лаборатории космической технологии, Инкорпорейтед», которым мы чрезвычайно благодарны.

Однако авторы несут всю ответственность за любые возможные технические ошибки.

Наконец, мы желаем выразить нашу искреннюю благодарность мисс Рутанн Крикшанк, которая перепечатала большую часть рукописи, а также миссис Карол Минз и миссис Колин Конуэй, помогавшим ей в работе.

*Д. К. Л.*

*М. Л.*

## ВВЕДЕНИЕ

### ВОЗРАСТАЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ

В последние годы проблема исследования надежности приобретает все большее значение. Она ставится на первое место при разработке большинства мощных систем вооружения, и в скором времени это отразится и на развитии всей промышленности страны. Промышленные круги начинают понимать, что *reliability is everybody's business* (надежность — дело каждого). В настоящее время организуются конференции по теории и практике исследования надежности, создаются отделы, ответственные за надежность выпускаемой продукции, пишутся программы и методики оценки надежности, требования по надежности появляются в технических заданиях и контрактах. Что же привело к возникновению этого понятия? Что сейчас так сильно изменилось по сравнению с недалеким прошлым? Ответ надо искать в техническом прогрессе, свидетелями которого мы являемся на протяжении последних двух-трех десятилетий. В свою очередь, значительную роль в ускорении этого процесса сыграли вторая мировая война, война в Корее и последующие военные приготовления. Однако войны не только ускорили развитие техники, но еще ярче продемонстрировали важность надежности. В ходе войны выявлялись последствия ненадежности — мы учились на неизбежном в невыгодных для нас условиях, мы учились на горьком опыте.

Ненадежность сказывается на стоимости, на временных затратах, а также психологически — в виде неудобств — и в определенных случаях грозит безопасности

отдельных людей или даже всей страны. Обычно потери за счет ненадежности представляют собой не только стоимость выходящего из строя изделия, но также и стоимость связанного с ним оборудования, которое портится или разрушается в результате отказа, что определяется взаимодействием элементов в сложных системах. Например, отказ полупроводника в радиоприемнике обычно приводит к небольшим затратам на его замену, в результате отказа такого же полупроводника в баллистической ракете могут не разделиться ее ступени, что приведет к потере всей дорогостоящей ракеты. Конечно, подобные примеры слишком очевидны. Менее очевидным примером может служить стоимость профилактических работ. Необходимость иметь подготовленный персонал для постоянной проверки оборудования, даже если результаты ненадежности не так уж существенны, обходится очень дорого. К тому же за любой элемент, который нуждается в замене, необходимо платить, а это должно включать в себя транспортные расходы, равно как и стоимость связи и организацию снабжения. Если мы будем иметь в два или три раза больше элементов, чем это требуется теоретически, чтобы надежность была равна 100%, то стоимость компенсации ненадежности станет излишне высокой (если, конечно, все функции стоимости не были оптимизированы).

Затраты времени нередко являются следствием ненадежности, а в промышленности это почти всегда приводит к денежным затратам. Например, в больших вычислительных устройствах существует понятие простоя для поиска и устранения неисправностей. При эксплуатации пассажирских самолетов устранение механических или электронных неисправностей, которые влекут за собой задержки вылета, может привести к штрафу за нарушение графика перевозок и к затратам на организацию ночлега и дополнительное питание пассажиров.

Классическим примером психологического эффекта ненадежности являются запуски печальной памяти спутников «Авангард». Соединенные Штаты, остро переживая успехи России, запустившей «Спутник-1», попытались вступить в соревнование, используя для этого почти неиспытанную ракету, которой пришлось работать почти на пределе своих возможностей. Неудачи и последовавшие за этим уныние и потеря престижа были очень

серьезны\*. В области коммерции частые или нежелательные неудобства, возникающие из-за ненадежности, сказываются на интересах как потребителя, так и производителя. К примеру, компания, производящая телевизоры или автомобили, которые постоянно находятся в ремонтной мастерской, обнаруживает, что покупатели обращаются за покупками в другое место. Неудобство состоит не только в том, что покупатель не может воспользоваться приобретенным изделием, но и в том, что он попадает в зависимость от работников мастерских.

Наконец, вероятно, наиболее важным следствием ненадежности является ее влияние на безопасность страны, которая зависит от ее ресурсов, промышленного потенциала, состояния технологии в военной промышленности, подготовленности и военного бюджета. Надежность касается в основном последних двух пунктов. Сама по себе надежность непосредственно не улучшает состояния военной техники, однако ее методология может увеличить темпы прогресса. К подготовленности же она имеет непосредственное отношение. Обычно при рассмотрении количества ракет на стартовых площадках, количества самолетов в распоряжении командования стратегической авиации или числа радиолокационных станций мы подразумеваем в действительности физическое число, а не эффективное. Отсюда, если надежность системы вооружения равна 50%, то эффективное число имеющихся в наличии средств равно половине действительного. Часто это обстоятельство упускают из виду, что равносильно допущению стопроцентной надежности систем вооружения, тогда как на самом деле страна подготовлена лишь наполовину. Главное, иногда бывает неизвестно, какие именно системы вооружения обладают такой пятидесятипроцентной эффективностью, а это означает невозможность развернуть средства вооружения и произвести ответный удар, эффективный на 100%. Этот пример подчеркивает важность того, что надежность должна быть большой или близкой к 100%, особенно в тех случаях, когда ракета предназначена для использования в качестве средства для запуска человека в космос. С другой стороны, важно знать уровень надежности, чтобы планировать в эф-

---

\* Третья попытка запустить спутник «Авангард» 7 марта 1958 г., через 3 месяца после первой попытки, увенчалась успехом.

фективных, а не в действительных числах. По различным причинам (из-за возможностей производства, общей стоимости, тактико-технических характеристик и т. д.) с точки зрения национальной экономики, стратегии и безопасности система вооружения с 50-процентной надежностью может оказаться предпочтительнее, чем система с 90-процентной надежностью. Для принятия такого решения требуется глубокое понимание надежности и сравнение усилий и затрат, требующихся для достижения любого желаемого уровня надежности.

Обычно бюджет накладывает ограничения на разработку того или иного изделия или системы (кроме, конечно, тех исключительных случаев, когда фактор времени играет решающую роль). Доля надежности в бюджете стала в некотором смысле спорной. Вначале обеспечение надежности обходится дорого, так как при этом требуется проведение определенных дорогостоящих работ (организованного и эффективного планирования, испытаний, подготовки и передачи сообщений), причем возможности немедленно продемонстрировать выгоды по сравнению с начальными расходами нет. Однако как только заканчивается этот начальный период, достигнутая более высокая надежность приносит свои плоды: ракета не взрывается, не разрушается испытательный стенд и т. д. Но поскольку мы не можем представить и непосредственно ощутить то, что не произошло, очень трудно выявить экономию за счет надежности, а это часто приводит к выделению недостаточных средств на работы по повышению надежности.

Таким образом, надежность представляет собой важную проблему. Возникает вопрос, нельзя ли применить известные решения и считать эту проблему не представляющей особого интереса?

К сожалению, панацея от ненадежности отсутствует. Нельзя ожидать, что надежность какого-либо изделия будет равна единице, если на нее влияют такие факторы, как действия оператора, четкость организации системы передачи информации о надежности, степень понимания роли надежности и требования, превосходящие существующие возможности производства. Однако в настоящее время, пользуясь имеющимися в нашем распоряжении средствами, уже можно получить решение этой проблемы, хотя бы в первом приближении.

Цель предлагаемой книги как раз и состоит в рассмотрении некоторых существующих методов; выбор же и применение наиболее эффективных методов для решения частных задач возлагаются на инженера, занимающегося надежностью, и техническое руководство.

## 0.1. ПРИЧИНЫ НЕНАДЕЖНОСТИ

Частных случаев проявления ненадежности много, однако их первопричиной можно считать трудность совмещения динамической сложности разработки систем с требованиями срочности выполнения работ и ограниченными возможностями бюджета.

### 0.1.1. Возможности эксперимента

За последние несколько десятилетий в результате двух войн наши технические возможности настолько возросли, что мы сейчас в состоянии создавать такие сложные системы и отдельные изделия и приборы, какие раньше существовали лишь в научном воображении. Например, основные законы движения были известны в течение нескольких веков, а значит, и имелся математический аппарат для обеспечения космических путешествий; однако только сейчас такое путешествие стало реальным. Давно имелась возможность оперировать с двоичными числами, но лишь после изобретения различных электронных приборов появилась возможность создать цифровое вычислительное устройство, которое позволило достигнуть огромных успехов при выполнении сложных и утомительных арифметических вычислений.

*Однако то, что является возможным и осуществимым, не обязательно надежно.* Приборы и системы недостаточно совершенны, и в различных условиях они работают неодинаково. Наши общие сведения о каком-либо изделии могут оказаться недостаточными, так что при помещении его в определенную среду, о которой мы имеем мало сведений, происходят отказы. Другими словами, мы работаем в пределах наших технологических знаний. Конечно, при наличии времени мы бы приобрели и систематизировали знания так, чтобы положение изменилось. Этому служит процесс обучения. Характерные примеры наблюдаются в ракетных программах, в ходе разработок которых отказы становятся все менее частыми. Если бы эта эволюция происходила естествен-



ным путем, проблема надежности так бы остро не возникла. Однако существующая крайняя необходимость не дает нам возможности уделять достаточно времени и внимания всем этим вопросам. Эволюционный процесс вступает в конфликт с «революционной» атмосферой. Вместо того чтобы использовать время на экспериментирование, синтез и применение знаний, мы разрабатываем все новые и новые системы и приборы. Мы исключаем возможность повторения некоторых ошибок, но вместо них обычно появляются другие ошибки за счет отличия новых систем и условий их эксплуатации.

### 0.1.2. Сложность оборудования

Сложность является не только свойством самой физической системы, но также и процессов, необходимых для ее создания. Рассмотрим сначала физическую систему. Обратимся к системе, для успешной работы которой требуется (за некоторыми исключениями, рассматриваемыми позже), чтобы все ее подсистемы, составные части и элементы также работали успешно. Эта взаимозависимость приводит нас к *теории вероятностей*. Она в своем простейшем виде утверждает: вероятность успешной работы системы определяется вероятностью того, что все элементы системы работают успешно. Математически это может быть сформулировано следующим образом: *вероятность успешной работы системы, т. е. надежность системы, равна произведению вероятностей успешной работы каждого ее элемента, т. е. произведению надежностей этих элементов, при условии что они статистически независимы*. Это правило, обычно называемое *правилом перемножения\**, позволяет сделать заключение о том, что, чем сложнее система, тем ниже ее надежность.

Другим проявлением сложности, приводящим к ненадежности, является *взаимодействие подсистем*. Это взаимодействие может определяться *воздействием окружающей среды* (например, вибрация двигателя вызывает отказы электронного оборудования) или *функциональным взаимодействием*, когда выходные параметры одного элемента могут превысить технические условия на входе сопряженного с ним другого элемента. Последнее

---

\* См. § 92. Математический вывод правила перемножения.

входит в круг вопросов, решаемых при конструировании системы, и тем не менее может служить причиной ненадежности. Сложность требует параллельных разработок. Мы добиваемся усовершенствований во многих отраслях сразу и поэтому часто не имеем достаточно сведений о пределах возможностей отдельных частей и компонентов, хотя в то же время знаем, что неправильное поведение любого компонента может отрицательно повлиять на поведение так или иначе связанного с ним соседнего.

Таким образом, при создании системы или ее отдельных частей может выявиться столько непредвиденных обстоятельств и неучтенных взаимосвязей, что конструктор в начальном проекте не в состоянии всех их охватить и каким-либо образом учесть. Он сможет сделать это со временем, но при этом будет вынужден пройти весь процесс познания, о котором уже упоминалось выше, с его непременными ошибками и неудачами.

### 0.1.3. Сложность организации

Кроме физической сложности системы существуют связанные с ней и не менее важные трудности. Сложная система требует хорошо организованного руководства, которое в свою очередь нуждается в эффективной системе связи. Если собрать вместе все сведения, касающиеся использования какого-либо типа оборудования во всевозможных условиях его применения, и правильно интерпретировать, то можно значительно снизить интенсивность его отказов. Этого можно достигнуть правильным его использованием, изменением его отдельных компонентов и с помощью *резервирования*. Однако из-за ограничений нашей системы связи невозможно производить полный обмен данными. Более того, существует проблема передачи частной и секретной информации. Это приводит к тому, что мы должны постигать все на собственном опыте, а не полагаться на чей-то другой. Не менее серьезной, чем отсутствие информации, является проблема неправильной интерпретации фактов получателем, который может находиться вдалеке от места их происшествия. В результате это приведет к напрасной трате времени и денег до тех пор, пока естественный процесс познания не вернет нас в правильное русло истинного прогресса.

#### 0.1.4. Ошибка оператора

Рассмотрим очень важный раздел надежности, посвященный ошибке человека. Отказы при этом возникают не из-за непонимания оператором того, что он делает (при условии, конечно, что он прошел соответствующую подготовку), а попросту из-за его невнимательности или забывчивости.

Обычно руководства, учебники и инструкции определяют правильную последовательность операций, которой необходимо следовать при техническом обслуживании и при работе. Тем не менее по мере знакомства с инструкцией обслуживающий персонал иногда пренебрегает ею, в результате чего обычно пропускается нечаянно какая-либо операция или нарушается их последовательность. Кроме того, из-за недостатка времени при выполнении каких-либо внеплановых работ могут быть неправильно подключены провода, в машине могут быть забыты инструменты и т. д. и т. п., что, естественно, приводит к отказам.

Но хотя вмешательство человека может привести к отказу, его отсутствие нанесет, вероятно, еще больший ущерб. Способность человека управлять процессом работы представляет собой почти незаменимый фактор с точки зрения принятия решения. Его знания и опыт позволяют предусмотреть или изменить возможные ситуации и компенсировать ухудшение условий. Однако в поисках все более высоких скоростей, сокращения времени и оптимальных конечных результатов человек почти полностью запрограммировал свои действия при работе с современными сложными системами. Например, пилот современного высокоскоростного реактивного самолета является менее абсолютным хозяином положения, чем был пилот вчерашних значительно менее скоростных винтовых самолетов. Он не может достаточно быстро принять решение, так как факторов, которые необходимо учесть и проанализировать, слишком много и они очень сложно взаимосвязаны. Поэтому большая часть работы должна выполняться за него высокоскоростными автоматическими вычислительными устройствами.

Таковы основные причины ненадежности. Большую часть отказов можно отнести к общим случаям, рассмотренным выше. Необходимо особо рассматривать так называемый внезапный отказ. Внезапный отказ

нельзя объяснить как отказ за счет неустановленной причины, поскольку мы должны осознавать различие между действительным существованием причины и нашими способностями связать ее с определенным влиянием на отказ. Если внезапный отказ относится к событию, которое является случайным *во времени*, тогда определение можно считать достоверным.

Тщательный анализ отказов позволит исключить их причины и уменьшить интенсивность отказов до допустимых пределов, а их последствия свести к минимуму.

## 0.2. ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ НЕНАДЕЖНОСТИ

Нет оснований полагать, что темпы прогресса и сложность наших систем вдруг начнут снижаться. Это означает, что факторы, определяющие ненадежность, не станут менее значительными. Поэтому мы вправе ожидать решения некоторых основных вопросов этой проблемы. Таким образом, определенные задачи должны решаться сразу же по мере их возникновения. Наши планы должны предусматривать получение максимума информации на наблюдение и в то же время учитывать тот факт, что в ходе выполнения программы разработки свойства, присущие данной системе, будут подвергаться непрерывным изменениям. В настоящее время уже имеются и развиваются выборочные планы и техника последовательного экспериментирования и производства, которые обладают необходимыми динамическими свойствами. Некоторые из этих методов описываются в данной книге.

### 0.2.1. Резервирование

Одно из основных требований надежности состоит в том, чтобы пытаться создать систему настолько простой, насколько это позволяют тактико-технические требования. Хотя это правило может показаться очевидным, ему в действительности не всегда следуют. Мы должны стремиться согласовывать цели с нашими возможностями; причем с точки зрения надежности цели должны быть немного ниже воображаемых возможностей. В теории надежности для этого вводится понятие *резервирования*. Резервирование может принимать различные фор-

мы. Одна из них состоит в выполнении расчетов с большим запасом. Другой метод заключается в создании запасных вспомогательных составных частей. Наиболее простым примером может служить система, для успешной работы которой требуется безотказная работа только одного из ее нескольких элементов. Это означает следующее: чем больше имеется запасных частей, тем выше вероятность того, что какой-нибудь элемент, а значит, и вся система, будет работать безотказно. В теории надежности эта зависимость является математической противоположностью *правилу перемножения*, о котором говорилось в п. 0.1.2. Повышая надежность за счет резервирования, мы в то же время усложняем конструкцию и увеличиваем ее вес, что в конечном счете ограничивает возможности применения этого метода.

### 0.2.2. Организация производства

Проблема отказов, возникающих при взаимодействии элементов в системе, относится к области *организации производства*. При планировании испытаний и проектировании необходимо проявлять такую тщательность, чтобы составные части, будучи удобными в обращении и эксплуатации по отдельности, могли быть без особого труда объединены в систему. Если же составные части разрабатываются слишком разобщенно и не испытываются в системе, то их конструкция оказывается, как правило, неприемлемой с точки зрения требований системы. С другой стороны, если составные части собираются в систему на слишком ранней стадии разработки, то происходит слишком много отказов по неизвестным причинам и в результате испытаний этой системы будет получено ничтожное количество полезных сведений. Статистическое экспериментирование поможет получить оценки функционального влияния и воздействия окружающей среды на изменение поведения составляющих элементов как в результате отдельных испытаний элементов, так и внутри системы в целом.

После установления пределов изменения параметров составляющих элементов можно оценить степень перекрытия их слабых областей и недостатки системы в целом, а затем выбрать удобное время для объединения элементов в систему.

### 0.2.3. Контроль со стороны руководства и организация взаимодействия по обмену информацией

Организационная сложность делает контроль необходимым для эффективной координации, анализа и распространения технических знаний, формируемых в различных подгруппах. Вопросы создания и проверки органов управления, необходимых для достижения оптимальной организации, входят в компетенцию организации производства и науки о руководстве. Та часть руководства, которая занимается опубликованием данных об отказах, их предотвращением и различными вопросами, связанными с исследованием надежности, составляет группу надежности. Все, что могло способствовать отказу или привело к нему, должно быть обязательно учтено. В этом отношении в сложных организациях плохая связь представляет собой основную опасность; поэтому группа надежности сама должна решать этот вопрос. При плохой связи могут появиться следующие недостатки: 1) неполный объем информации, т. е. сообщаются не все относящиеся к делу сведения; 2) сообщаются все данные, но не все они попадают к соответствующим ответственным и компетентным лицам; 3) неправильно истолковываются (интерпретируются) данные; 4) данные неправильно обрабатываются в первоисточнике. Наличие любого из этих недостатков или какого-либо их сочетания может способствовать появлению отказов и поэтому их отсутствие необходимо постоянно контролировать. Поскольку получение, передача, интерпретация данных о надежности, последующие решения и мероприятия составляют весь спектр деятельности при разработке системы, очень важно, чтобы группа надежности была осведомлена обо всем, что касается полезной информации.

В обязанности ей также вменяется пересмотр, изменение и постановка при необходимости новых вопросов, требующихся для того, чтобы свести к минимуму трудности проблемы связи.

Возьмем частные определения связи, о чем уже упоминалось ранее. Можно контролировать полноту охвата информации только точным определением типа передаваемых данных, а также подчеркивая важность сообщений о каждом явлении при исследовании события. Для того чтобы ответственные заинтересованные лица

получали информацию, необходимо определить каналы передачи, частоты и распределение сообщений. Словом, должен быть обеспечен эффективный и хорошо организованный сбор и анализ данных и создана система сообщений. Интерпретация данных до некоторой степени зависит от аналитических возможностей конструкторского бюро; однако объем информации, полученной из наблюдений, а также ее достоверность могут быть значительно повышены за счет использования эффективных испытательных средств.

Повышение уровня знаний и использование всякого рода консультаций позволяют применять при планировании испытаний и обработке результатов лучшие методы научных исследований и статистической методологии так, что в процессе разработки накапливаются конкретные и реальные сведения.

#### **0.2.4. Конструирование и осведомленность в вопросах надежности**

Контроль ошибок оператора производится различным образом. Можно пытаться спроектировать систему так, чтобы ее сборка, эксплуатация и техническое обслуживание были предельно просты. Это касается области конструирования и выходит за пределы рассматриваемых в этой книге вопросов. Однако преподавание надежности и сообщения об ошибках оператора очень нужны, потому что тогда больше ответственности и понимания будут проявлять все, кто участвует в выполнении программ конструирования и производства. В наш век массового производства и чрезвычайно больших и сложных программ, средний рабочий может думать, что его вклад незначителен. Следствием этого является небрежность в работе, которая приводит к ошибкам, а иногда и к отказам. Здесь большую роль должны сыграть специальные кинофильмы, плакаты и лекции о надежности, в которых показано, как все эти недостатки можно предотвратить.

Итак, мы предложили, как можно изучать, контролировать или предотвращать ненадежность. Эти общие методы представляют собой основу для развития методологии по надежности. Несмотря на то, что теория надежности все еще не является полностью определенным

предметом, уже существуют отдельные методы, которые при правильном использовании могут значительно повысить надежность любой системы и ее составных частей.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Lambert J. S. Air force electronic reliability program. IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1958, v. 14, September, p. 17—21.

Och H. G. and Tinus W. C. Systems engineering for usefulness and Reliability. IRE Trans. Military Electronics, 1959, v. 3, January, p. 8—12.

Schlager, Kenneth J. Systems engineering—key to modern engineering. IRE Trans. Engineering Management, 1956, v. EM-3, July, p. 64—66

Soucy, Chester I. A broad survey of the military electronic equipment reliability problem and its controlling factors. Proc. 1956 Electronic Components Symposium, Washington, D. C., 1956, May 1—3, p. 8—23.

Sparling, Rebecca H. Testing in the guided missile industry. ASTM Bull., 1956, v. 218, December, p. 52—56.





## РАЗДЕЛ I .

# РУКОВОДСТВО, ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

---

---

Объем специальных знаний, необходимых для исследования отдельных и вместе взятых составных частей сложной системы, становится не под силу небольшим организациям. Следовательно, по мере технического усложнения систем должна также расти и совершенствоваться организация. Это приводит к возникновению новых проблем. Они не менее сложны, чем многие технические, с которыми нам приходится встречаться, т. е. проблемы руководства и эффективности независимых в организационном смысле групп, отвечающих за отдельное, но функционально связанное оборудование. Это очень сильно сказывается на работе группы надежности, поскольку кроме решения научных проблем ей приходится уделять внимание техническим вопросам руководства. В связи с этим в настоящем разделе рассматриваются занимаемое положение и эффективность различных групп надежности в организации, основанные на опыте работы различных компаний.

Многосторонняя деятельность при выполнении широкой технической программы должна быть организована таким образом, чтобы не опустить ни одного относящегося к делу вопроса. Надежность как раз является тем предметом, который стремится учесть все возможные упущения. В результате возникли методы, которые составляют особый вид деятельности по оценке надежности. Они рассматриваются во второй главе этого раздела.

Третья глава посвящена проблеме передачи данных, жизненной связи в цепи технических мероприятий. Без соответствующей информации и без правильной организации передачи информации наши попытки в какой-то мере становятся напрасными, особенно когда речь идет о надежности, где неэффективная связь может привести к громадным затратам как времени, так и денежных средств. Поэтому здесь подробно рассматривается система передачи данных о надежности, которая успешно используется в довольно крупной организации при создании очень сложной системы.

## ГЛАВА 1

# РУКОВОДСТВО И ОРГАНИЗАЦИЯ

### 1.1. ОТВЕТСТВЕННОСТЬ РУКОВОДСТВА

Руководство несет основную ответственность за все важнейшие решения и политику, проводимые компанией или предприятием. Правильность решений руководства отражается на качестве произведенной продукции и на удовлетворении потребителей. Надежность является качественной характеристикой продукта, такой, как технические характеристики, тип, удобство в эксплуатации, экономическая характеристика и т. д. Однако надежность отличается от этих свойств в главном: она не является очевидным атрибутом, более того — это самое труднодоступное для понимания качество. Оно может иметь много различных толкований и нуждается в большом числе квалифицирующих определений. Руководство, обычно, принимает правильные решения, большей частью касающиеся других свойств, основываясь на опыте и их понимании, тогда как надежность часто остается для него загадкой.

Теория надежности, как предмет, достаточно точно еще не определена. О ней можно судить, как о простой статистической оценке численного значения надежности, или рассматривать ее в качестве пособия для руководства всей программой разработок. Как мы увидим далее, это и не то и не другое; это ряд методов, созданных для предотвращения ненадежности и оценки возможностей исключения необходимости решения предварительно запланированных проблем.

Теория и практика надежности охватывает настолько широкое многообразие видов деятельности, что ее

эффективность очень сильно зависит не только от способностей работников, но также и от занимаемого ими положения в организации. Группа надежности, составленная из способных людей, но входящая в отдел предприятия и находящаяся на положении такого отдела, который не имеет авторитета или достаточного веса, представляет собой непозволительную роскошь. Как это ни абсурдно, руководство очень часто именно так и поступает с группой надежности. Работники группы надежности должны привлекаться к составлению контрактов или предложений. Однако на практике иногда определенная часть руководства стремится ограничить усилия личного состава группы надежности. Это можно предотвратить, позволив ей занять подобающее положение внутри организации. Поскольку вопросы надежности связаны со многими видами деятельности в процессе выполнения программы разработки и эксплуатации, одна из главных задач руководства состоит в установлении наиболее эффективного распределения обязанностей, а также степени ответственности и власти, которой будет обладать личный состав группы надежности. Таким образом, главной и настоящей проблемой является проблема положения группы надежности в компании или на предприятии.

Одним из следствий многообразия выполняемых работ может быть «конфликт ответственностей». Группа надежности, как это станет понятным из последующих разделов, несет ответственность за многие участки работы, эту ответственность нельзя сразу отделить от ответственности других существующих групп. Даже в тех случаях, когда имеется двойная ответственность и они теоретически как бы дополняют друг друга, как в нашем случае с надежностью, все равно существует потенциальная проблема руководства. Всегда принятию непрошенного совета оказывается естественное сопротивление, как и произведению замены в уже утвержденной системе. Очень часто в начале работы группы надежности возникают именно оба этих положения. Например, естественно, что отдел контроля качества не любит, когда изменяют или расширяют его систему сбора данных, так же, как и отдел планирования испытаний, когда ему напоминают о том, что он не полностью использует возможности статистического экспериментиро-

вания. Исследование надежности — это не просто еще один отдельный вид работ в дополнение к конструированию, производству, контролю качества, испытанию и т. д.; исследование надежности — это дисциплина, которая входит составной частью во все виды этих работ и даже угрожает вмешательством.

Финансирование группы надежности составляет основную дилемму руководства. Правильные отношения к группе надежности может привести к созданию методов, обеспечивающих значительную экономию средств; и как раз здесь признание руководства и достижения группы надежности должны искать основу для взаимного уважения и выгоды. С другой стороны, руководство сталкивается с конфликтом между достаточно высокой стоимостью широкой программы исследования надежности и последствиями выпуска продукции с неудовлетворительной надежностью. Проблема стоимости продукта для сбыта определенно является одной из наиболее трудноразрешимых. Во многих случаях 99-процентная надежность продукта оказывается недостаточной, а повышение ее ведет к увеличению затрат на программу исследования надежности. Кроме того, существуют такие очевидные затраты, как заработная плата инженеров, занимающихся надежностью, и технических работников. При ограниченном понимании вопросов «технологии» надежности у руководства, естественно, может возникнуть вопрос, почему оно должно выплачивать эту заработную плату, когда имеются инженеры-конструкторы и кадры, обеспечивающие контроль качества, которые, как полагают, обязаны «заботиться о надежности». Однако основные затраты возникают из необходимости установить *гарантию* надежности, а не средств, расходуемых в виде заработной платы. Повышение гарантии требует увеличения числа испытаний, которые также должны обеспечиваться оборудованием, средствами и обслуживающим персоналом. Затем результаты этих испытаний должны быть определенным образом организованы и проанализированы, а это требует создания и содержания дорогостоящих систем сбора и обработки данных. Поэтому руководство рассматривает надежность как дорогостоящее излишество, а ее включение в организацию как добавочное усложнение. Таковы очевидные возражения, вызывающие не-

желание руководства поддержать деятельность группы надежности.

Руководство вправе задать вопрос: «Если мы должны платить вышеуказанные суммы за организацию работ по исследованию надежности, то что же мы получаем и стоит ли она этого?». Понятие *«организованная деятельность по исследованию надежности»* используется здесь потому, что любое руководство обычно заявляет, что оно производит надежное оборудование. Далее могут следовать вопросы: «Зачем нам нужна группа надежности? Неужели наши инженеры-конструкторы недостаточно квалифицированы, инженеры-испытатели недостаточно компетентны, а технология производства неправильно контролируется?» Ответ будет: «Нет». Техника и процессы производства недостаточно одинаковы, чтобы всегда обеспечивать успех. Если бы это было так, то не существовало бы необходимости выделять понятие надежности.

Надежность — это новая методология, одна из многих, появляющихся в различных областях науки и техники. Она не является очевидным качеством, к тому же доказательство ее достоинств не может быть получено немедленно. Однако достоинства надежности можно продемонстрировать. Примером может служить статистическая модель (§ 12.6.6), с помощью которой мы уменьшаем объем выборки при определенной программе испытаний, избегая, лишних расходов, а также возможной неправильной интерпретации информации. В качестве другого примера можно взять случай отказа, зафиксированный эффективной системой сообщений об отказах, которая предотвратит последующие расходы, вызываемые подобными отказами, и позволит сократить затраты, выделенные на замену разрушенных образцов.

Группа надежности должна убедить руководство в своей эффективности и в возможности большой экономии денежных средств и времени. Военное руководство кроме всех этих факторов рассматривает еще один — безопасность. Безопасность и надежность настолько близки друг к другу, что их можно считать чуть ли не синонимами, и, возможно, по этой причине военные признали важность надежности. Формой признания являются требования по надежности в технических зада-

ниях при заключении контрактов. Это самый верный способ стимулирования «интереса» к предмету.

Руководство должно поставить группу надежности в наиболее эффективное положение на предприятии по отношению к выполняемой программе. Этот вопрос рассматривается в последующих разделах. Однако наиболее убедительным средством признания является раздельное финансирование соответствующей деятельности группы надежности. Руководство обязано признать эволюцию надежности как основного предмета, как одно из следствий развивающейся техники.

## **1.2. ПОЛОЖЕНИЕ, ЗАНИМАЕМОЕ ГРУППОЙ НАДЕЖНОСТИ НА ПРЕДПРИЯТИИ**

Каково наиболее эффективное положение группы надежности на предприятии? Ответ на этот вопрос находится в прямой зависимости от выполняемой программы и получен на основе опыта работы во многих организациях. Рассмотрим в общих чертах преимущества и недостатки различных положений, занимаемых группой надежности.

Составим перечень мероприятий, за которые группа надежности либо несет полную ответственность, либо принимает в них участие в качестве советчика. В перечень мероприятий входят:

- 1) оценка надежности;
- 2) распределение надежности с точки зрения конструкции;
- 3) пересмотр конструкции;
- 4) контроль конструкции;
- 5) пересмотр технического задания, материалов и процессов обработки;
- 6) контроль поставщика;
- 7) планирование, проведение и анализ испытаний;
- 8) накопление запаса сведений о надежности;
- 9) системы передачи сообщений о надежности и об отказах;
- 10) математический и статистический аппарат для исследования надежности;
- 11) распространение знаний о надежности;
- 12) внутренняя координация деятельности по исследованию надежности.



В простейшем случае организацию предприятия можно представить в виде следующих отделов:

- 1) руководство;
- 2) конструирование;
- 3) испытания;
- 4) производство;
- 5) контроль качества;
- 6) продажа и контракты.

Из этого перечня видно, что деятельность группы надежности касается работы основных отделов предприятия. Казалось бы, ответственность за надежность можно поделить между соответствующими отделами. Однако это совершенно невозможно. Во-первых, в настоящее время надежность представляет собой самостоятельный предмет со своими методиками, с которыми большинство инженеров незнакомо. Поэтому надежность требует постоянного внимания и правильного осмысливания, чего нельзя достичь в этих условиях. Во-вторых, при таком подразделении будут ослаблены возможности координации функций системы и выяснения технических подробностей. Передача вопросов надежности инженерам-конструкторам или специалистам по контролю качества возвращает нас к первоначальному положению, которое явилось причиной возникновения проблемы надежности.

Итак, лучшие результаты получаются, когда за надежность отвечает отдельная группа. Необходимо решить, куда поместить ее, учитывая, что она должна быть независимой и достаточно авторитетной, координировать или охватывать все вышеуказанные виды деятельности и быть достаточно эффективной. Рассмотрим некоторые преимущества и недостатки размещения группы надежности в одном из отделов предприятия.

Когда группа надежности выполняет руководящую роль, она обладает достаточным авторитетом для того, чтобы требовать действий, направленных на утверждение надежности, но не обладает способностью оценки стоимости предпринятого действия. Само руководство тоже недостаточно обеспечено, чтобы решать технические и более мелкие вопросы, которых должна касаться группа надежности. Нагромождение этих обстоятельств приводит к ненадежности. Таким образом, хотя и существует настоятельная необходимость в том, чтобы

руководство ближе вникало в деятельность группы надежности, оно недостаточно близко к непосредственным рабочим проблемам.

Когда группа надежности входит в состав конструкторского отдела, ее преимущество состоит в непосредственном контакте с инженерами-конструкторами и разработчиками, которые раньше всех принимают на себя ответственность за обеспечение высокой надежности системы. Однако эти взаимоотношения становятся недостатком, когда группа надежности перестает быть независимой в своих критических суждениях. Другим недостатком может оказаться ее неэффективность из-за неправильного отношения к группе надежности руководства конструкторским отделом, которое по каким-либо причинам незнакомо или несогласно с методологией группы. К тому же при вступлении программы разработок в фазу производства иногда нарушается его непрерывность, что невозможно правильно проконтролировать группой надежности, являющейся частью конструкторского отдела.

Довольно часто группа надежности размещается вместе с группой контроля качества, так как некоторые считают, что возможности последней могут удовлетворить потребности группы надежности. Это не совсем правильно. Организация сообщения данных, контроль поставщика, статистическое обслуживание и некоторые другие функции выполняются группой контроля качества; но пересмотр конструкции, планирование испытаний и т. д. не входят в обязанности этой группы. Группа контроля качества играет слишком пассивную роль. Наиболее же важным вкладом группы надежности является усовершенствование конструкций и улучшение условий эксплуатации с целью повышения уровня надежности. Контроль качества, напротив, большей частью связан с поддержанием существующего уровня. Однако он составляет существенную часть надежности.

Итак, результаты работы группы надежности, представляющей собой подгруппу одного из существующих отделов предприятия, либо будут неточными из-за неполного охвата всех видов деятельности, либо, если группа попытается все охватить, это вызовет конфликты между различными отделами, что опять же скажется на результатах.

### 1.3. НЕЗАВИСИМАЯ ГРУППА НАДЕЖНОСТИ

Из изложенного выше следует, что группа надежности в идеальном случае должна быть организационно независима от всех других главных групп, но при этом руководство должно гарантировать тесное взаимодействие с каждой из них. Тогда группа надежности сможет работать весьма эффективно и достаточно подробно рассматривать все технические аспекты своей работы. Поскольку руководитель группы должен будет докладывать высшему руководству о своей работе, нельзя пренебречь его авторитетом. Эффективность группы будет также зависеть от способностей ее личного состава, в который должны входить как инженеры, так и технические специалисты. Ввиду того, что группе самостоятельно придется участвовать во всей многообразной деятельности предприятия (от пересмотра проекта до сообщений об отказах при полевых испытаниях), для организации обширного и тесного взаимодействия потребуется хорошая координация. Координация и объединение многогранной деятельности будут зависеть от рода работ, возложенных на группу надежности, от размеров группы, от способностей ее личного состава. Например, член группы надежности, пересмотрев план испытаний или программы наблюдений, может обнаружить целесообразность статистического планирования испытаний. Если он не способен сам спроектировать испытания, он должен иметь достаточный авторитет, чтобы приказывать группе статистического обслуживания, контроля качества или кому-нибудь другому составить приемлемый план.

Таким образом, если группа надежности достаточно велика и самостоятельна, чтобы выполнять всю требующуюся работу, или же мала, но, уподобляясь руководству, распределяет, направляет и координирует свою особую деятельность в других технических группах, членам ее необходимо иметь большой опыт и высокое образование. Обладая этими качествами, группа должна нести полную ответственность за деятельность предприятия по программе исследования и оценки надежности.

### 1.4. СПОСОБНОСТИ ЛИЧНОГО СОСТАВА

Группа надежности должна состоять из людей, хорошо подготовленных в следующих областях знаний:

- 1) проектировании систем и исследовании операций;

- 2) деталях машин;
  - 3) составлении и пересмотре технических заданий и материалов;
  - 4) организации производственных операций и контроля качества;
  - 5) планировании и проведении испытаний;
  - 6) проектировании и анализе статистических экспериментов;
  - 7) сборе данных, оценке, анализе и доводке;
  - 8) руководстве проектом и координации работ;
  - 9) математической статистике, теории вероятностей.
- Более подробное описание приложения этих знаний помещается в следующих главах.

### 1.5. ФИНАНСИРОВАНИЕ ГРУППЫ НАДЕЖНОСТИ

Надежность — это внутреннее свойство, которое развивается по мере разработки системы. Можно, следовательно, доказать, что фонды надежности входят в стоимость разработок всей программы. Однако наиболее эффективным способом поддержки группы надежности является отдельный бюджет, потому что только тогда она приобретает необходимую ей самостоятельность. Кроме заработной платы и вспомогательных средств нужно выделить определенные фонды на технические нужды, что позволит группе надежности проводить независимые испытания специально для исследования надежности. Независимая и высокопроизводительная группа надежности, выполняющая все перечисленные виды деятельности, является наиболее эффективной и может быть создана руководством для борьбы с ненадежностью.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Beaton G. N. Putting the r and d reliability dollar to work. Proc. 5th National Symposium, IRE Reliability and Control in Electronics, January 12—14, 1959, p. 65—72.

Cohen J. and Okun A. M. Organizing for reliability. IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1957, PGRQC-9, January, p. 1—8.

Goode, Harry H. The analogy between the problems of systems engineering and management. Chem. Eng. Progress, 1959, v. 55, January, p. 48—50.

Kuehn R. E. Organizing for reliability. Proc. 3rd National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics (IRE), Washington, 1957, D. C. January 14—16, p. 123—125.

## ГЛАВА 2

# ЗАДАЧИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ И ВЫПОЛНЕНИИ ПРОГРАММЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ

### 2.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе более детально рассмотрен перечень мероприятий по выполнению программы надежности и выяснены проблемы, с которыми нам придется встретиться при составлении такой программы.

Деятельность группы надежности можно подразделить на два вида: 1) направленная на повышение надежности продукта и 2) используемая при определении надежности и ее оценке как скрытой характеристики продукта. Последнее не менее существенно, чем предыдущее, поскольку без количественной меры, которой измеряется эффект производственной деятельности, не может существовать объективного пути к познанию эффективности ее применения.

### 2.2. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ

Надежность прибора является его качеством, которое, однако, не может измеряться непосредственно. В действительности, за исключением нескольких рассматриваемых ниже тривиальных случаев, она не может быть измерена вовсе. Мы ограничиваемся лишь ее оценкой. Надежность определяется как *вероятность успешной работы прибора в том режиме и при тех условиях, которые определяет потребитель.*

### 2.3. НАДЕЖНОСТЬ КАК ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПОНЯТИЕ

Вероятностный смысл надежности очевиден. Для нахождения вероятностей необходимо применять теорию статистических оценок во всех случаях, за исключением

таких, когда имеется полная совокупность. Например, в 1957 г. надежность стартовых ракетных ускорителей самолетов была равна 99,9%. Эта цифра представляет собой просто отношение всех успешных запусков ко всем предпринятым попыткам. В этом утверждении не делается попытка предсказать, что может случиться в 1959 г. или, если бы в 1957 г. была использована только половина ракет, какова была бы надежность остальных. Вероятность вводится тогда, когда мы пытаемся сделать утверждение о совокупности, основываясь на наблюдениях, полученных при одной выборке, или по части совокупности, или когда мы пытаемся предсказать заранее исход событий.

Когда мы делаем предсказания, статистическая теория позволяет связывать степени достоверности с любой оценкой надежности, которую мы можем задать. Так, мы можем быть на 50% уверены, что истинная надежность будет выше или в пределах определенных выбранных значений. С другой стороны, мы можем пожелать быть более точными в предсказании, т. е. уверенными на 90% или на 99% и более. Мы никогда не можем быть уверенными на 100%, за исключением тех случаев (подобно указанным выше тривиальным случаям), когда имеем полные данные о нашем изделии. В этом случае мы просто измеряем надежность, а не предсказываем ее. Однако чем большую достоверность мы желаем получить при наших прогнозах, при неизменном объеме исследуемой выборки, тем более осторожными должны быть наши предсказания. Это означает, что доверительные «пределы надежности» в наших предсказаниях должны быть уже или шире. Или, наоборот, если мы желаем остаться выше или внутри этих заранее заданных пределов, как, например, при подтверждении контрактного значения, то должны быть подготовлены к тому, чтобы произвести большую выборку. Для иллюстрации этих положений рассмотрим следующий числовой пример\*.

Предположим, что мы испытали 50 изделий и при этом имели два отказа. Что можно сказать о надежности этого образца? Одна оценка будет составлять 96%,

---

\* В примере приводятся цифры, полученные из рис. П.3 и П.5 (см. приложение, табл. П.1—П.9, рис. П.1—П.11).

другая 90%, третья 84%. Любому читателю, незнакомому со статистикой, наличие трех различных значений надежности (в действительности же существует бесчисленное множество значений), оцениваемых по нашим наблюдениям, может показаться странным. Однако ничего странного здесь нет. Требуется только знать основные правила и понимать, что представляют собой эти оценки. Первая величина (96%) — это просто отношение успехов к общему числу испытаний. Второе и третье значения надежности являются доверительными границами, т. е. нижними границами истинной надежности. Во втором случае мы на 90% уверены, что истинная надежность выше 90%. В третьем случае мы на 99% уверены, что истинная надежность больше 84%.

Как мы уже указывали, чем выше доверие, тем осторожнее становятся наши утверждения. Первая величина (96%) — точечная оценка надежности, а это означает, что она не может иметь связанного с ней доверительного уровня. Она могла бы представлять собой истинную надежность, если бы, например, 50 изделий составляли полное количество произведенных изделий такого вида и за все время из них отказали бы только два. Но если мы предположим, что это наблюдение оказалось только выборкой возможно из тысячи подобных изделий, мы можем задаться вопросом: «Что же неправильного в нашей точечной оценке? Почему бы нам всегда ей не пользоваться?» Ничего неправильного в точечной оценке нет, однако она не является достаточно показательной. Точечная оценка одинакова при одном отказе в 25 испытаниях или при двадцати отказах в 500 испытаниях, т. е. обе группы цифр дают оценку в 96%. Очевидно все-таки, что у нас больше уверенности в утверждении, сделанном по результатам 500, а не 25 или 50 наблюдений. Статистическая теория обеспечивает нас этой уверенностью в количественной форме. Тогда при двадцати отказах в 500 испытаниях мы можем утверждать с уверенностью в 90%, что истинная надежность больше, чем 95%, а при одном отказе в 25 испытаниях и с той же уверенностью в 90% мы можем утверждать, что истинная надежность больше, чем только 85%.

Оценка надежности допускает большое число статистических вариантов. Ни одна из приведенных цифр не

является несостоятельной, но из этих простых упражнений становится очевидным, что, когда мы выбираем, оцениваем или каким-либо образом приводим численные значения надежности, мы должны хорошо осознать как их статистический смысл, так и их практическое приложение с точки зрения количества и стоимости испытаний.

#### 2.4. НАДЕЖНОСТЬ КАК ФУНКЦИЯ КРИТЕРИЯ УСПЕХА

В нашем определении надежности приведены слова «успешная работа». Что же под этим подразумевается? Если мы имеем часть оборудования, которая в течение заданного промежутка времени безотказно работает, и если это время не равно времени работы, заданному заказчиком, то является ли это испытание успехом? Это не отказ. А если это успех, то полный ли? Если нет, то не нужен ли некоторый связанный с ним *весовой коэффициент* для подстановки в формулу надежности? Например, какова будет степень успеха при часовой работе вычислительного устройства, которое должно работать в течение только двух минут? Или какова вероятность успеха для ракетного двигателя, который при испытаниях безотказно работает в течение 20 сек, а в условиях эксплуатации он должен работать в течение 2 мин? Какова вероятность успеха в тех случаях, когда при проведении испытаний мы не можем полностью моделировать влияние окружающей среды, которая будет оказывать воздействие на изделие в реальных условиях?

Критерий успеха и его конечное использование мы можем рассмотреть на примерах. Ракетный двигатель, сообщаемый ракете даже 99% общего импульса, необходимого для выведения спутника на орбиту, приводит к полному отказу. Или ракетный двигатель, сообщаемый 99% общего импульса тяги, необходимого для доставки боевой части к месту назначения, может разрушить цель на 50%. Мы видим, что существует необходимость четко определить понятие «успешной работы», т. е. следует проявлять осторожность при выборе основных правил для успеха и отказа при любом испытании и связывать их с различными режимами работы. Однако тут нет причины отказываться от установления не-



скольких критериев для оценки данных в зависимости от различных конечных требований. Например, можно оценить вероятность взлета ракеты без преждевременного взрыва. Второй оценкой может служить вероятность поражения цели. Каждая из этих цифр важна, но не менее важно знать, о какой цифре идет речь. Это не понятно до тех пор, пока не станут известными основные критерии.

## 2.5. НЕПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫЕ ОБРАЗЫ И ИСПЫТАНИЯ

Следующей отличительной чертой оценки надежности является интерпретация результатов испытаний непредставительных (нерепрезентативных) изделий. В процессе выполнения программы разработок всегда происходит изменение изделий (или их образов) и, тем не менее, мы обязаны оценить, насколько хорош наш продукт и как быстро он совершенствуется. Таким образом, нам следует обсудить использование результатов испытаний систем и предварительных сборок, в которых имеются элементы, нехарактерные для окончательного варианта. Аналогичным образом определяют, какую выгоду можно извлечь из испытаний отдельных элементов и как связаны результаты частных испытаний с результатами испытаний полноразмерных образцов.

Кроме того, мы должны рассмотреть возможность использования данных, полученных при испытаниях, специально проводимых до отказа или с отказами за счет ошибок обслуживающего персонала или неисправностей в средствах испытаний.

Таковы некоторые основные проблемы оценки надежности. Совершенно очевидно, что большое внимание необходимо уделять выбору соответствующих данных, правильному толкованию результатов и применению наиболее подходящих статистических методов оценки надежности. На многие вопросы можно ответить, пользуясь статистическими методами, или тщательно контролируя информацию о надежности на основании здравого смысла или принимая произвольные решения. Однако любой ответ должен соответствовать определенным условиям. В связи с этим в частных примерах III раздела книги обсуждению этих проблем уделяется большое внимание.

## 2.6. ПРИМЕНЕНИЕ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ЗАКЛЮЧЕНИИ КОНТРАКТОВ

Можно видеть, что наибольшие трудности при оценке надежности возникают не при ее определении, а при выборе критериев и статистических методов оценки. Поэтому, когда надежность выступает в качестве требования при заключении контракта, значение различных критериев резко повышается.

Можно считать, что оценка надежности используется двояко. Во-первых, она используется как *относительная* мера и, применяя ее в ходе выполнения программы разработки, мы можем измерять рост надежности, т. е. она служит в качестве меры увеличения при последовательном применении определенного критерия. Например, нам интересно было бы знать, что надежность за прошлый месяц возросла на 5% по сравнению с предыдущим месяцем, когда она равнялась 3%. Во-вторых, оценка надежности используется как *абсолютная* мера. Мы можем пользоваться тем же критерием для оценки абсолютной величины надежности, но эта величина абсолютна только в пределах допущений этого критерия. Следовательно, если критерий неправильный, то и абсолютная величина не достоверна. В случае относительной меры при наличии неточности критерия метод можно рассматривать как первое приближение. Однако удовлетворение контрактного требования к надежности должно подтверждаться абсолютной оценкой, поэтому основные правила и статистический метод оценки должны быть полностью и тщательно определены.

Статистические методы служат повышению точности определения надежности, но надо также осознавать их возможности. Прежде всего, оценка не может быть точнее, чем данные, на которых она основывается. Кроме того, если изделие действительно лишено надежности, то никакая статистическая обработка не изменит этого. Например, если надежность прибора равна 90%, никакое количество испытаний не докажет, что она равна 95%. При любом статистическом выборочном методе существуют определенные вероятности наблюдения надежности, равной 95% или более или какой-либо другой заданной величине.

На первый взгляд, кажется странным, что в то время, как мы никогда не можем быть уверены на 100%.

в способности подтвердить определенную надежность, мы иногда на 100% гарантируем неспособность ее подтвердить. Это может иметь большое значение. Например, очень важно сознавать, что при наличии выборки в 20 изделий при доверительном уровне в 90% невозможно продемонстрировать минимальную надежность, равную 95% (см. рис. П.3). Лучший результат, который возможен при этой выборке, даже при всех успешных испытаниях, при доверительной границе в 90%,—это минимальная надежность, превышающая 89%. Если бы мы были совершенно несведущими в статистике, мы могли бы согласиться по контракту сделать невозможное. Такое положение иногда ставит людей, незнакомых со статистикой, в неудобное положение. Однако этого можно избежать, если мы будем рассматривать статистику как средство для оценки вероятностей статистического подтверждения (при наблюдении) такого события, как  $k$  успехов при  $n$  испытаниях. Можно вычислить вероятности наблюдения этого события для различных гипотетических значений истинной надежности. *Технические возможности создают истинную величину надежности прибора; наши же статистические методы позволяют только оценивать эту присущую ему характеристику.* Чем выше возможное значение надежности, тем больше, конечно, вероятность удовлетворения требований или тем меньше риск их неудовлетворения. Эти вероятности, вычисляемые статистическими методами, в терминологии контроля качества называются оперативными характеристиками. Можно только выдвинуть гипотезу, вычислить и предсказать вероятности удовлетворения договорных требований. Действительная вероятность удовлетворения этих требований соответствует нашим инженерным возможностям и тому, как они обеспечены и организованы.

## 2.7. ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАДЕЖНОСТИ

Одной из задач надежности является нахождение наиболее эффективного способа привлечения к ней внимания независимо от того, упоминается ли она в договоре или нет. Наиболее важной задачей является достижение максимального уровня надежности агрегата или системы, за которые несет ответственность организация.

Это означает, что если организация представляет собой службу войск, то основное внимание необходимо уделять надежности всей системы вооружения. Если же мы имеем дело с небольшим предприятием, то это может быть просто надежность миниатюрного вычислительного устройства.

На следующем этапе необходимо узнать, какие требования предъявляет надежность системы к подсистемам и составным частям.

Эти требования также необходимо увязать с возможностью их удовлетворения, для чего следует одновременно пересмотреть взаимозависимость составных частей системы с точки зрения надежности, их действительную и потенциальную или ожидаемую надежность, а также объем и правильность планируемой программы разработок. Методами для выполнения этого исследования являются *распределение надежности, пересмотр конструкции с точки зрения надежности, обзор существующих сведений по надежности, обзор вопросов испытаний и экспериментирования*. По ходу выполнения программы разработки эти задачи постоянно переоцениваются, и, кроме того, осуществляется деятельность, необходимая для повышения эффективности выполнения программы. Последнюю составляют: *контроль производства, контроль при продаже, сообщение данных по надежности и соответствующий контроль, координация деятельности по оценке надежности и информация, анализ надежности и обучение*. Ниже приводится более подробное описание этих вопросов.

## 2.8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ К НАДЕЖНОСТИ

Понятие распределения требований к надежности подразумевает процесс подразделения задачи исследования надежности системы на задачи исследования надежности подсистем и составных частей. Математически этот вопрос освещается в гл. 9 и приложении П.9; мы же допустим, что нам достаточно иметь только представление об этом, чтобы рассмотреть его приложения. Это распределение означает проверку согласования требований по надежности, установленных для каждой подсистемы, с текущим состоянием разработки, предполагаемыми усовершенствованиями, объемом испытаний и денежными средствами, отпущенными на разработку.

После объединения требований к надежности составных частей взаимозависимость их надежностей должна быть в состоянии удовлетворить требования к надежности системы в целом. Распределение играет огромную роль на первом этапе разделения системы на ее основные подсистемы. Часто требуется производить распределение требований к надежности именно на этом этапе, поскольку каждая из основных подсистем обычно создается различными предприятиями. Кроме того, желательно в каждый договор вносить требования в виде численных значений надежности. Такое положение может создаться, например, при производстве системы вооружения МКБР (межконтинентальной баллистической ракеты). Вся система должна иметь определенную надежность, которая согласовывается с требованиями к разработчикам надежности силовых установок, системы управления и т. д. Далее может производиться деление и этих подсистем на основные составные части, к которым также предъявляются требования по надежности. Если система силовой установки состоит из нескольких ракетных двигателей, то мы можем предъявить требования к каждому двигателю в отдельности и аналогичным образом поступать с другими системами.

Распределение требований к надежности приобретает огромное значение, если возникает потребность в подтверждении этих чисел (или числовых эквивалентов). Одно дело, решая задачи оценки назначений подсистемы, показать важность этой подсистемы или определить объем необходимых работ, и совершенно другое дело, когда речь идет о выполнении договора. Причина заключается в том, что распределение имеет свои ограничения. Как это часто бывает на практике, математические выкладки основываются на допущениях о статистической независимости и на виде математической модели, описывающей взаимосвязь между составными частями и системой. На более поздних этапах сборки независимость и модель могут оказаться очевидными; а на первых этапах модель может быть и не определена и необходимость допущения о статистической независимости может отсутствовать. При распределении наличие независимости не обязательно, хотя в этом случае математически задача значительно усложняется. Можно видеть, что эти доводы применимы, только лишь когда

мы имеем дело с числовыми значениями надежности, полученными при отдельных испытаниях составных частей или подсистем. Когда же речь идет об испытаниях подсистем как части испытаний системы в целом, математические и статистические взаимосвязи учитываются автоматически и всякие прерогативы отсутствуют. Например, совершенно справедливо (хотя, может быть, и не всегда осуществимо) требовать, чтобы воспламенитель при испытаниях ракетного двигателя показывал 99,9%-ную надежность, где величина 99,9% получена в результате распределения требований к надежности полностью снаряженного двигателя. С другой стороны, нет оснований утверждать, что мы подтверждаем эту надежность во время испытаний воспламенителя, которые проводятся независимо от двигателя. Причиной этого в нашем примере является отсутствие сведений о степени «взаимодействия» между воспламенителем и топливом. Обычно мы пытаемся установить пределы взаимодействия с помощью технических заданий, которые, однако, не всегда достаточно точно определяют систему. Это замечание всегда относится к тем системам, которые обладают сильной внутренней взаимозависимостью (например, ракетные двигатели на твердом топливе). Обычно электронное оборудование обладает слабой взаимозависимостью, а жидкостные ракетные двигатели представляют собой нечто среднее.

Физическое строение системы также играет важную роль при определении того, насколько подробно мы должны подразделять систему. Электронное оборудование, к примеру, часто состоит из многих повторяющихся элементов, таких, как одинаковые лампы и печатные схемы. К тому же функциональные влияния и воздействие окружающей среды обычно не велики. Следовательно, в этих условиях имеет смысл оценивать или подтверждать надежность элемента, так как в процессе оценки одного элемента мы получаем информацию, относящуюся ко всем другим элементам этого типа. Совсем другое дело — пример с жидкостным ракетным двигателем. Здесь имеется большое число совершенно различных составных элементов, которые к тому же испытывают воздействие высокой температуры и вибраций, возникающих при работе системы. Даже если бы мы могли установить задачи по исследованию на-

дежности составных элементов, трудность подтверждения заданного высокого значения надежности каждого отдельного элемента и моделирования воздействия окружающей среды делают эту задачу практически неосуществимой. Как же можно пользоваться методами распределения, учитывая эти соображения?

Мы видели, что при определенных обстоятельствах можно установить конечные уровни надежности подсистем или элементов, которые могут быть подтверждены с помощью достоверных результатов испытаний. Когда же эти уровни нельзя подтвердить с достаточным обоснованием либо из-за несоответствия условий испытаний реальным, либо из-за недостатка испытываемых образцов, эти отдельные значения все равно оказываются полезными, характеризуя относительное состояние разработок различных составных элементов. Последнее осуществляется путем сравнения относительной величины интенсивности отказов или неисправностей (в процентах) с интенсивностью отказов или неисправностей, полученных при распределении требований к надежности (где мы статистически преобразовали конечные значения надежности в соответствующую меру отказов). Кроме того, следует сравнить интенсивности отказов любого одного элемента в различных окружающих условиях. Распределение требований к надежности заставляет нас тщательно составлять расписания испытаний на различных этапах для того, чтобы определить степень достоверности и объем информации, которые мы можем получить в процессе их проведения. Следовательно, станет ясно, достаточно ли правильно мы организовали и финансировали наш план испытаний, и если нет, то как мы должны изменить этот план в связи со всем сказанным выше и в п. 12.6.1.

## **2.9. ПЕРЕСМОТР КОНСТРУКЦИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ**

На начальной стадии, когда группе надежности требуется составить представление о системе, она должна просмотреть предложенную конструкцию с точки зрения надежности ее основных узлов и элементов. Для того чтобы это сделать, необходимо исследовать различные типы узлов с целью определения их достоинств с точки зрения эксплуатационных качеств, веса, надеж-

ности, стоимости и т. д. Например, можно сравнивать системы насосной подачи топлива с вытеснительными системами подачи топлива, турбогенераторные источники питания с химическими источниками электрической энергии, жидкостные ракетные двигатели с ракетными двигателями на твердом топливе, сменный блок одного типа с блоком другого типа, одного изготовителя вычислительных устройств с другим. С помощью такого сравнения мы проводим предварительное исследование, чтобы получить приближенную оценку предполагаемой надежности системы.

Затем структура обсуждаемой системы пересматривается более подробно. Проведение аналитических исследований позволит судить об использовании понятия резервирования. Это понятие включает использование деталей с измененными выходными характеристиками, установление коэффициентов безопасности в критических случаях и там, где это возможно, наличие параллельных систем. Мы также обеспечиваем достаточную гибкость конструкций, чтобы она допускала последующие модификации, и пригодность этих модифицированных конструкций и запасных деталей для замены в случае возникновения трудностей в ходе выполнения программы. При использовании совершенно новых конструкций следует убедиться в том, что они значительно лучше, чем стандартные или готовые изделия, для этого требуется сравнить новую конструкцию с приблизительно такими же конструкциями, об отказах которых у нас накоплен опыт. Мы пересматриваем новую конструкцию для того, чтобы отметить, какие виды отказов были исключены за счет изменения или исключения отдельных ее частей. Нельзя забывать об оценке (при анализе и обсуждении конструкции) возможных видов отказов за счет появления любых новых конструкций. Чтобы удостовериться в учете требований легкости и простоты технического обслуживания, группа надежности должна потребовать осуществления координации работ со стороны инженеров-консультантов по эксплуатации.

Пересмотр конструкции с точки зрения надежности — деятельность очень важная, но она ни в коей мере не является дублированием работы конструктора. Конструктор стремится ориентироваться на новые кон-



струкции и формы и не задумывается о «вероятности». Как мы уже указывали во введении, не всякая осуществимая конструкция обязательно надежна.

Стремление конструктора получить наилучшие технические характеристики вполне естественно; однако если им руководит стремление к изменениям и сказывается недостаток опыта или отсутствие возможностей учиться, то сначала появляются дорогостоящие отказы, которые не всегда можно себе позволить. Оптимальность характеристик очень часто связана с низкой надежностью. Следовательно, необходимо с помощью определенных методов оценить тактико-технические требования независимо от самого конструктора. Только таким путем мы сможем получить наиболее *эффективную* систему.

### **2.9.1. Примерный перечень вопросов для пересмотра конструкции с точки зрения надежности**

1. Является ли данная деталь стандартным изделием или она разрабатывалась специально для выполнения определенного назначения?

2. Одну или более функций выполняет это изделие?

3. Сколько в нем содержится критических частей и характеристик?

4. Можно ли использовать вместо него существующее стандартное изделие? Если нет, то почему?

5. Нельзя ли соответствующим образом изменить стандартное изделие для этой цели? Как могут эти изменения повлиять на его тактико-технические характеристики и работу?

6. Должно ли это изделие использоваться на пределе его прочности или технических возможностей?

7. Если это стандартное изделие, то используется ли оно в уже изученных условиях и при номинальных режимах работы? Каковы допустимые пределы изменения тактико-технических характеристик и в каких окружающих условиях изделие может нормально работать?

8. Какие проблемы возникали при использовании подобных или неполноразмерных конструкций? Есть ли основания полагать, что эти проблемы возникнут и при использовании данной конструкции? Что может быть сделано для их исключения?

9. Какими были предшествующие типы отказов? Какие ожидаются новые типы отказов? Почему они различаются?

10. Какова история отказов этого изделия? Является ли оно критическим изделием, т. е. приведет ли его отказ к отказу системы?

11. Какие шаги надо предпринять при применении этого изделия или при проектировании системы, чтобы исключить эти типы отказов?

12. Что нужно сделать, чтобы не допустить возникновения новых типов отказов?

13. Каково ожидаемое или оцениваемое численное значение надежности изделия?

14. Достаточно ли это для того, чтобы удовлетворить требованиям распределенной надежности?

15. Есть ли возможность ввести понятие резервирования и использовать изделие при ограниченных значениях характеристик?

16. Является ли это изделие полностью взаимозаменяемым подобным изделием, получаемым от другого изготовителя? Если нет, то чем оно отличается с точки зрения отказов?

17. Что известно о сроке хранения, о заданной наработке или циклах, т. е. сколько времени или циклов рабочего или нерабочего состояния может накопиться без значительного уменьшения надежности или вообще не окажет влияния на надежность?

18. Установить методы проверки и испытаний для видов отказов, указанных в п. 9.

19. Если изделие представляет собой впервые созданную конструкцию, то каковы ее критические недостатки? Как обеспечивается возможность внесения изменений на наиболее ранних этапах, когда эти или другие недостатки проявятся во время испытаний?

20. Достигнута ли максимальная простота при конструировании? Учтена ли возможность предотвращения ошибок оператора, таких, как неправильное включение (смена полюсов), неправильная сборка и т. д.?

21. Согласовано ли оно физически и функционально с сопряженными изделиями, т. е. возможен ли уход характеристик изделия за пределы допусков его «соседей», согласованы ли их допуски и посадки? Повлияет ли

установка (монтаж) изделия на его характеристики или надежность?

22. Учтены ли физические признаки, которые могут неблагоприятно повлиять на технические характеристики или надежность, т. е. существуют ли особые случаи, которые могут привести к повреждению частей или короткому замыканию? Достаточно ли надежно изготовлено изделие, чтобы противостоять вибрациям, воздействию различной температуры, влажности, пыли и т. д.?

23. Как можно изменить конструкцию для того, чтобы увеличить надежность? Как это может повлиять на тактико-технические характеристики, стоимость, вес, пригодность, режимы работы, ремонтпригодность, надежность эксплуатации и т. д.?

24. Удовлетворяет ли конструкция изделия или системы требованиям по легкости производства, сборки, технического обслуживания и проверки?

25. Не ожидается ли появление новых проблем при контроле качества и при сбыте?

26. Учтены ли факторы погрузки, транспортировки, упаковки и прочих условий, отличные от заданных условий эксплуатации?

## 2.10. ЗАПАС ЗНАНИЙ О НАДЕЖНОСТИ

Группа надежности в процессе пересмотра конструкции должна собирать информацию по надежности конструкций и форм различных типов. По мере развития программы разработки при выполнении программы испытаний будет поступать дополнительная информация. Группа надежности организует эту дополнительную информацию и объединяет ее с имеющимися данными, в результате чего образуется запас сведений о надежности, необходимый инженерам по надежности и конструкторам для анализа.

Этот запас сведений должен содержать перечень типов отказов, причин и последствий этих отказов. Кроме того, должна быть приведена характеристика окружающих и других условий, при которых происходит отказ. Необходимо различать независимые и зависимые\*

---

\* Под зависимым понимается отказ, возникающий в составной части в результате отказа, произошедшего где-то в другом месте, т. е. зависимый отказ вызывается независимым, а не происходит сам по себе.

отказы. Желательно, чтобы приводились различные методы испытаний ослабленных элементов. Должны быть приведены параметры, служащие для измерения надежности, а также основные правила, которые определяют успех и отказ и их взаимосвязь с надежностью. По возможности необходимо получить оценки интенсивности отказов и виды распределений отказов, соответствующих этим отказам. Примеры такой информации о надежности представлены в п. 3.12.1.

## 2.11. ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ И АНАЛИЗ

В начале программы разработки пересматриваются все планы испытаний и проверяются режимы, чтобы убедиться в том, что программа сбалансирована и настолько всеобъемлюща, насколько это было возможно сделать. Основная идея испытаний должна быть очевидна из плана испытаний, и единственное, что нужно проверить, — это действительно ли выбран наиболее эффективный путь к достижению заданной надежности в пределах ограничений по времени и стоимости.

Таким образом, мы сможем увидеть, на что сделан основной упор: на испытания элементов, испытания неполноразмерных изделий или испытания системы; подходит и достаточна ли поступающая информация и не слишком ли много испытаний, которые могут привести в тупик. Далее, группа надежности определяет, своевременно ли в программе затрагиваются вопросы о воздействии окружающей среды и о процессе производства.

В тех случаях, когда из-за дороговизны, разрушительной природы испытаний, несовершенства испытательных средств или по другим причинам испытания проходят в условиях, далеких от реальных, нужно искать другие методы обеспечения гарантий. С целью проверки возможности компенсации этих несовершенств необходимо пересмотреть методы проверки. Исследуются методы испытаний без разрушения, и затем может быть проведен анализ отказов, выявляющий их доступность и достаточность, после чего для них устанавливается стандартный порядок проверки. При оценке планов испытаний определяются эффективность статистических методов, достоверность критериев проверок и соответст-

вие объемов выборок требованиям программы. Эти мероприятия рассматриваются по порядку в главах, посвященных проведению экспериментов и испытаний (гл. 12 и далее).

## **2.12. КОНТРОЛЬ ПРОИЗВОДСТВА И ПЕРЕСМОТР ТЕХНИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ, МАТЕРИАЛОВ И ОБРАБОТКИ**

Эти функции являются контролирующими в процессе превращения металла в готовую конструкцию. Путем пересмотра технических заданий на систему и ее элементы определяется их согласование, т. е. не превышает ли развиваемая мощность какого-либо элемента потребляемую мощность функционально связанных с ним соседей. Для гарантии того, что статистическое построение предельных допусков составных частей не приведет к несовершенству системы, технические задания проверяются на «напряженность». Определяются размеры, веса, давления, токи, времена и допуски, являющиеся критическими по отношению к отказам различных типов.

Выбор материалов и процессов производства проверяется для того, чтобы убедиться в соответствии используемого материала и выборочных планов требованиям надежности. Потребляемые при обработке мощности исследуются с целью определения оптимальности их сочетания. Развиваемые мощности пересматриваются для проверки воспроизводимости и согласования.

Проверяются чертежи конструкций, а их копии помещаются на хранение в центральную картотеку. После утверждения макета конструкции может быть составлен главный перечень элементов системы. В нем содержатся те элементы, которые, по мнению инженеров, ответственных за их производство, и группы надежности, являющиеся в любой заданный момент времени самыми надежными. Каждому элементу системы в этом перечне соответствует только один вариант конструкции. Но зато должны быть представлены все элементы без исключения. Назначение перечня состоит в том, чтобы в любое время иметь возможность дать полную характеристику наиболее надежной системы. Кроме того, он позволяет проверять любые пробные конфигурации и устанавливать наличие в них опытных или устаревших элементов и возможность появления отказов по их вине. Постоянно поддерживается запись всех указаний о конструк-

тивных изменениях и того, как это сказывается на надежности. Главный перечень периодически просматривается и обновляется. Его полезность описывается в п. 16.2.2. С помощью такого контроля мы можем установить, что является несовершенным — основная конструкция, отдельные детали или процесс производства.

### **2.13. КОНТРОЛЬ ПОСТАВЩИКА**

Организации, поставляющие отдельные элементы, оцениваются по техническим способностям удовлетворять требованиям тактико-технических заданий. При определенных обстоятельствах, когда позволяют возможности и стоимость, от них можно потребовать подтвердить номинальные значения полной надежности или надежности отдельных узлов, полученные в результате распределения, или обеспечить в случае их отсутствия исходные данные о надежности поставляемой продукции. Группа надежности подрядчика должна быть представлена в комиссии, инспектирующей торговые операции, в состав которой входят также представители конструкторской группы, контроля качества и группы снабжения. Эта комиссия оценивает программу продающей организации, определяя, какое внимание уделяется вопросам надежности. При необходимости (если компании небольшие) головной подрядчик должен помочь организовать программы исследования надежности продающих организаций и руководить ими. Группа надежности должна просмотреть все заказы на снабжение, чтобы убедиться в том, что требования к надежности не слишком завышены по стоимости.

В целях контроля конструирования и процессов производства подрядчика и продающей организации испытания составных элементов на надежность и качество должны проводиться по заданному образцу, после чего можно будет убедиться в том, что все элементы и технология их производства удовлетворяют тактико-техническим требованиям к системе.

### **2.14. СИСТЕМА СООБЩЕНИЯ ДАННЫХ О НАДЕЖНОСТИ И ОТКАЗАХ**

Средством для получения запаса сведений о надежности является система сообщения данных о надежности и об отказах. Этот вопрос подробно рассматривается

в гл. 3. Группа надежности, анализирующая данные и ответственная за них, должна в самом начале программы создать такую систему, чтобы ценный опыт не пропал. Эти данные должны включать сведения о всех условиях, относящихся к надежности изделия, временах и циклах, окружающих условиях, типе, конфигурации, виде испытания и т. д. Группа надежности отвечает за создание предельно простой и недорогой системы сообщения, которая в то же время охватывает весь объем информации о надежности. Это означает четкое установление возможностей обобщения оборудования, описываемого системами данных, а также стадий разработки этого оборудования. Организация потока информации и определение совершенства окончательной доработки тоже входит в обязанности группы надежности. Создаются определенные методы контроля полноты данных. Большое внимание требуется уделять правильному толкованию данных. Донесения о надежности и сводки должны периодически составляться в виде, доступном для руководства и инженерно-технического состава. Также периодически должны распределяться донесения о состоянии программы надежности. Вся информация о надежности и об отказах должна размещаться в картотеке сведений о надежности и быть легко доступной.

#### **2.15. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА**

Из всех данных должна извлекаться максимальная польза. Анализ данных преследует цель выявления математической модели. В результате подобных исследований получают оценки надежности, строят кривые роста надежности и корреляции информации, поступающей из различных источников, и определяют различные формы и этапы разработки.

Распределение надежности и исследования надежности конструкций, а также статистическое экспериментирование входит в круг вопросов, решаемых с помощью математических и статистических методов. Эти методы рассматриваются в разделе II.

#### **2.16. ВНУТРЕННЯЯ КООРДИНАЦИЯ**

Поскольку надежность охватывает большое количество взаимосвязанных функций, необходимо осуществлять строгий надзор за деятельностью всех групп и

отделов, вносящих свой вклад в исследование надежности. Таким образом, координация играет важную роль в ликвидации отставания руководства, конструирования, испытаний и производства от состояния надежности различных составных частей и всей системы в целом. Более того, она гарантирует использование всех возможных средств повышения надежности. Для разрешения всех вопросов, касающихся надежности, должны быть рассмотрены все официальные отчеты о работе, положения договоров, расписания и планы выполнения программ. Методы обеспечения координации различаются в зависимости от видов деятельности, однако во что бы то ни стало необходимо обеспечить точный контроль, который гарантировал бы факт установления координации.

Подпись является наиболее эффективным средством удостоверения того, что группа надежности ознакомилась с тем или иным документом или деятельностью. Членство в комитете представляет собой еще один официальный метод, который обеспечивает представителю группы надежности возможность координации всей деятельности по исследованию надежности. Другие методы (личные контакты или просто неофициальные обсуждения) обычно являются неудовлетворительными, так как этому часто препятствуют смена личного состава или недостаток времени.

Таким образом, между группой надежности и остальными отделами обязательно должна устанавливаться официальная и согласованная рабочая взаимосвязь.

## **2.17. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗНАНИЙ О НАДЕЖНОСТИ**

При распространении знаний о надежности следует учитывать два основных обстоятельства. Прежде всего нужно помочь понять значение надежности и осознать последствия ненадежности. Это можно сделать с помощью фильмов, лекций и плакатов, выполненных в общедоступной форме, с которыми знакомят весь личный состав. Вторая задача обучения надежности включает описание методологии надежности на более высоком техническом уровне. Например, инженерам можно объяснить понятия из теории вероятностей, а вопросы статистического синтеза и анализа экспериментов — сотрудникам, занимающимся планированием испытаний.



Подобным же образом конструкторам может быть показана ценность получения всей соответствующей информации от эффективной системы сообщений об отказах. Личному составу, не занимающемуся непосредственно вопросами надежности, не обязательно и даже не нужно вникать слишком глубоко в технические подробности этих предметов. Однако очень важно объяснить сотрудникам, как эта методология может помочь им избежать принятия неверных решений, лучше разобраться в том оборудовании, с которым они работают. Эта деятельность имеет большое значение, но надо отметить, что при часто встречающемся отношении к надежности вся тяжесть доказательства желательности этой деятельности ложится на группу надежности.

## **2.18. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОД. ПЛАН ПРОГРАММЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ**

Мы рассмотрели некоторые проблемы и мероприятия, связанные с подготовкой и выполнением программы исследования надежности. Целенаправленность этой деятельности будет меняться в процессе выполнения программы, а также в зависимости от типа и степени совершенства рассматриваемого оборудования. Как показал опыт, очень ценно в начале выполнения программы разработки сформулировать мероприятия по исследованию надежности в виде плана программы надежности. Этот план служит по меньшей мере четырем целям. Во-первых, этот подробный документ представляет собой ценное упражнение по организации подхода группы надежности к решению проблемы. Во-вторых, в процессе координации он позволяет личному составу группы надежности судить о содействии, которое могут оказать другие отделы, о поддержке руководства, а также о возможности «продать» свой вклад в программу разработки. В-третьих, подробный план программы надежности можно рассматривать как документ, который устанавливает порядок ответственности и описывает деятельность группы надежности и соответствующую деятельность по исследованию надежности в других отделах. В-четвертых, он представляет собой важный договорный документ, который должен объяснить агентству закупок или заказчику частные подробности внутренней программы надежности, так как она связана с определенным его обо-

рудованием или системой, и позволить получателю определить ее соответствие.

Программа работ по исследованию надежности должна:

- 1) установить требования к надежности системы;
- 2) определить испытания, основные правила и статистические методы подтверждения надежности;
- 3) описать состав, технические возможности, организацию и ответственность группы надежности;
- 4) определить положение группы надежности, эффективность и официальные взаимоотношения внутри предприятия или организации;
- 5) перечислить все планы и режимы проверок для всех состояний оборудования.
- 6) описать цели, объемы выборок и состояние разработки оборудования при этих различных проверках;
- 7) дать определение, какие конечные цели, преследуемые распределением требований к надежности, будут подтверждены, и охарактеризовать условия подтверждения;
- 8) подробно описать деятельность в интересах надежности при оценке, анализе и усовершенствовании продукта производства в соответствии с подзаголовками этой главы.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Brown R. W. Reliability and the component engineer. *Elec. Mfg.* 1957, v. 60, 5, November, p. 126—135.

Connor J. A. A systematic plan for predicting equipment reliability. *Proc. 1956 Electronic Component Symposium*, 1956, May, p. 233—235.

Davison W. R. Latent reliability—an approximation method. *National Convention Trans., ASQC*, 1959, p. 99—103.

Dertinger E. F. and Pertschuk D. W. Current military reliability specifications. *IRE Trans. Reliability and Quality Control*, 1958, v. 14, September, p. 6—8.

Dreste F. E., A reliability handbook for design engineers. *Electronic Engineers*, 1958, v. 77, June, p. 508—512.

Garbarino H. L. Selection of reliability levels in equipment design. *IRE. Trans. Industrial Electronics*, 1958, v. IE-5, April, p. 76—81.

Gottfried P., Schneider L. L. and Xavier M. A. Utilization of component part reliability information in circuit design. *IRE Trans. Reliability and Quality Control*, 1958, v. 14, September, p. 60—68.

Jacquemard F. C. Start quality control at the source. *Mill and Factory*, 1957, v. 60, February, p. 104—106.

L a m b J. J. RACER—A proposed rating system for electronic components and devices. IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1956, PGRQC-6, February, p. 1—10.

L e u b b e r t W. F. A systems approach to electronic reliability. Proc. IRE, 1956, v. 44, April, p. 523—528.

L u s s e r R. Components—key to reliability. Military Electronics, 1957, v. 3, 3, September, p. 38—42.

O r d e m a n n F. A. How to design reliable computers. Electronic Equipment, 1956, v. 4, June, p. 22—25.

R u t h e r F. J. and S m i t h L. D. Proof of reliability. Proc. IRE National Conference on Aeronautical Electronics, Dayton, Ohio, 1958, May, p. 449—453.

## ГЛАВА 3

### ОРГАНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ

#### 3.1. СБОР, ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ

Эта деятельность является самой важной частью программы надежности. Хорошо организованная система сбора, анализа, распространения сведений и окончательной обработки информации о надежности представляет собой один из основных аппаратов, который использует группа надежности. Следовательно, организации этой системы необходимо уделить много внимания. С одной стороны, слишком малый объем или недостоверность информации делают ее почти бесполезной; с другой стороны, мы можем создать такое количество бумаг, одна только проверка которых займет все наше время. Систематизация информации является не самоцелью, а служит на всех этапах средством обеспечения деятельности конструкторов и руководства необходимой и достоверной информацией для успешного осуществления программ разработки и производства.

Порядок обращения с информацией удобно подразделить на три этапа: 1) сбор; 2) распределение; 3) анализ, сообщение и окончательная обработка.

#### 3.2. СБОР (ТИП И ОБЪЕМ ИНФОРМАЦИИ)

При создании любой формы системы сообщения данных возникают следующие вопросы:

Какого вида данные следует собирать и почему мы желаем их получить? Этот вопрос можно уточнить: ка-

кой тип данных имеет для нас значение и как мы собираемся их анализировать?

Насколько широкую и подробную желаем мы иметь информацию, не опасаясь перегрузиться массой данных? Каков минимум данных, требующийся для удовлетворения наименьших нужд? Что является мерой единства процессов, форм и т. д., если мы имеем дело со многими разными типами изделий, с приборами разной сложности и большим числом изготовителей? С одной стороны, форма может быть удобна для передачи информации об отказах электронной аппаратуры и неприменима для гидравлических, механических и других приборов. Или, если используется универсальная форма, то возможно, что в случае ее применения для определенного типа приборов она не будет оптимальной.

Другим вопросом подобного типа, который требует пояснения, является: как глубоко мы собираемся вникать в программу разработок системы или ее составных частей, используя предложенную систему данных? Например, желаем или можем мы получить ту же информацию от составных элементов, участвующих в отдельных испытаниях, какую мы могли бы пожелать от них при испытаниях системы? Собираемся ли применить определенные системы данных к опытным конфигурациям или только к продуктам производства, предназначенным для поставок? Собираемся ли мы получать данные по всем 100% произведенных элементов, или хотим иметь по ним только выборочные данные, или же нам требуется иметь данные по каждой новой партии продуктов производства (например, по каждой партии определенных радиоламп)? Будет ли каждый элемент идентифицирован со своей партией и конечной производственной единицей? Как много данных и какого типа необходимо записать, чтобы истории непредвиденных событий, которые впоследствии вдруг приобретут значение, не были утеряны? Какими методами должны мы пользоваться для обеспечения гарантии точности и достоверности данных, так как выводы не могут быть более полными и точными, чем данные, из которых они получаются? Должен ли специалист по надежности периодически проверять сотрудников отдела контроля качества, как эффективно они выполняют технические условия процесса сборки?

Ответы на многие из этих вопросов определяются стоимостью и трудностью сбора информации (либо вообще не смогут быть получены). При автоматических методах сортировки сравнительно просто отобрать все виды «наиболее интересных» затабулированных данных. С другой стороны, при обработке информации вручную очень важно значительно ограничить ее объем и еще больше внимания уделить обсуждению того, какие данные подлежат сбору.

### **3.2.1. Формы сообщений об отказах**

Формы сообщений об отказах не должны быть сложными, чтобы лица, заполняющие эти формы, не могли неправильно толковать их. Для этого таблицы заполняют по образцу и подобию типовой формы донесения об отказе (табл. 3.1, § 3.5). Там же необходимо предусмотреть соответствующее место для примечаний, так как не всю информацию можно подразделить на категории. Все, кому придется пользоваться этими формами, должны четко представлять, когда их следует использовать. Здесь играет большую роль программа изучения надежности. Если формы заполняют различные люди, то противоречия неизбежны. Их можно избежать, выделив одного члена группы надежности для того, чтобы он пересмотрел все формы и убедился в правильности их заполнения. Кроме того, сравнивая большое число форм, используемых для различных назначений и различными людьми, можно определить, вся ли требующаяся информация передается добросовестно.

### **3.2.2. Отказы из-за ошибок оператора**

Отказы из-за ошибок оператора с развитием процесса конструирования приобретают все большее значение, вплоть до того, что этот источник неприятностей часто становится наиболее значительным из всех. Поэтому обязательно обо всех подобных отказах составлять донесения, как и о тех, которые происходят из-за неточностей изготовления. Термин «ошибка оператора» подразумевает здесь не только такие ошибки, как неправильная установка частей и т. д., т. е. ошибки за счет явной невнимательности, но также и неисправности, вызванные недостатками контрольных операций при производ-

стве, проверках и эксплуатации. Можно сослаться на многочисленные примеры, когда требования инструкций о Стандартных режимах работы (СРР) и Стандартных режимах проверки (СРП) оказываются настолько несовершенными или недостаточными, что измерения критических состояний не производятся или из-за отсутствия четких определений выполняются такие действия, которые приводят к последующим отказам. В результате, если сборщик предоставлен сам себе, в приборе могут оказаться «жучки», скрученная проводка; две нормальные детали могут быть при сборке установлены друг возле друга так, что при тепловом расширении произойдет разрушение одной из них; вместо одной петли из толстого провода могут быть смонтированы две петли из тонкого провода; кондиционные материалы могут удовлетворить требованиям стандарта, хотя сравнение с чертежом выявило бы их неприемлемость.

Отказы могут также быть вызваны отсутствием контроля за обновлением инструкций по СРР и СРП и Указаний об изменениях в конструкции, чертежах и т. д., а также плохой организацией распределения этой информации среди ответственных исполнителей в целях предотвращения использования устаревших деталей и методов проверки. Ввиду того что предупредить все непредвиденные обстоятельства, которые могут вызвать отказы, невозможно, с самого начала следует пересмотреть все технологические процессы и все изменения вносить сразу же по обнаружении несоответствия. Для этого надо настоять на составлении донесений обо всех ошибках оператора и воспрепятствовать естественному стремлению расслабиться, как только расчетная часть проблемы приблизится к концу.

### **3.3. РАСЧЕТ РАССЫЛКИ ДАННЫХ**

Следующая задача состоит в том, чтобы убедиться в правильности отсылки данных нужным людям. Для этого следует составить расчет рассылки и установить количество необходимых копий. Последнее требование определяется наличием достаточного количества листов копировальной бумаги или воспроизводимой формы. Обычно в получении хотя бы одного экземпляра копии заинтересованы следующие исполнители: составитель донесения; отдел надежности; инженер, ответственный

за изделие, о котором получена информация; отдел, к которому относится эта информация (контроля качества, технического обслуживания и т. д.); центральная картотека информации; одна копия должна остаться с оборудованием до тех пор, пока его местоположение не будет окончательно определено. Это распределение, конечно, зависит от типа передаваемой информации и более подробно рассматривается на частных примерах в § 3.6.

#### **3.4. АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ, СОСТАВЛЕНИЕ ДОНЕСЕНИИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЙ КОНТРОЛЬ**

После расчета рассылки данных следует произвести анализ информации или убедиться, что он уже произведен. Некоторые исследования могут быть начаты одиночными сообщениями. В других случаях направление необходимых исследований может быть определено либо по достаточно большому числу донесений, либо из сводных донесений. В некоторых случаях отдел надежности может непосредственно производить анализ или принимать в нем участие в качестве члена комитета. Однако обычно анализ должен производить инженер-разработчик. В этом случае отдел надежности обязан обеспечить контроль за выполнением анализа и получение копий законченного донесения. Составление донесений представляет одну из самых важных обязанностей группы надежности. Она обеспечивает соответствующей необходимой информацией весь инженерно-технический состав и руководство. Следовательно, вероятность неправильного толкования должна быть сведена к минимуму. Это очень важное требование, особенно когда речь идет о сообщении числовых данных. Поэтому, если приводятся числовые значения надежности, то тут же должно быть описание того, как они получены, или по меньшей мере сделана соответствующая ссылка. Кроме того, могут возникнуть следующие вопросы: были ли эти данные получены в результате испытаний при разработке, опытной эксплуатации, испытаний отдельных частей или системы? Что можно сказать об окружающих условиях? Однородные или представительные данные? Каков был объем выборки? Какие были сделаны допущения относительно формы распределения отказов? Таков далеко не полный перечень вопросов, включающий некоторые



из наиболее важных соображений, которые требуется обязательно учесть. Если этих сведений нет, можно неверно истолковать данные и сделать неправильные выводы.

Следующая трудность состоит в том, что существует привычка вырывать из контекста численные значения надежности. В связи с этим целесообразно упорядочить метод оценки и сообщения значения надежности, приводя, по возможности, только одну цифру (например, при нижней доверительной границе в 90%) и исключая таким образом всякую путаницу.

### 3.5. ПРИМЕР СИСТЕМЫ СООБЩЕНИЯ ДАННЫХ

Данный пример приблизительно соответствует системе сообщения об отказах и надежности, удовлетворяющей требованиям сложной организации. Эта организация осуществляет процесс разработки и производства большой и сложной системы вооружения, состоящей из множества типов оборудования, включающего электрические, электронные, механические, гидравлические системы и системы, работающие на горячем газе. Эти системы и подсистемы, находящиеся на различных стадиях разработки и сборки, производятся различными предприятиями. Несмотря на то, что представленный метод частный, описываемые идеи, формы и методики легко видоизменить применительно к большинству, если не ко всем подобным ситуациям.

Основной формой системы сообщений является донесение об отказе (табл. 3.1), которое составляется сразу же после возникновения отказа оборудования. При этом отказ представляет собой неспособность оборудования удовлетворить техническим требованиям или техническому заданию в то время, как это оборудование проверяется на безотказность работы или приемлемость или от него ожидают получить удовлетворительные технические характеристики без дополнительных наладок и переделок\*. При специальных испытаниях (типа испытаний до отказа) эта форма не используется. С другой

---

\* Это определение позволяет сообщать об отказах, которые были замечены в процессе работы, а также об условиях, которые привели бы к отказу, если бы была разрешена эксплуатация этого оборудования.

стороны, непредусмотренный вид эксплуатации может вызвать необходимость заполнения этой формы донесения. Для каждой подсистемы должен быть определен уровень сборки. (Понятие подсистемы относится к оборудованию — подсистема вычислительного устройства, подсистема двигательной установки, подсистема управления и т. д.)

Данная форма применяется для подсистем, готовых к выпуску с завода или находящихся в близком к этому состоянию. Она также применима для составных элементов, которые успешно прошли приемку, но не могли быть собраны в агрегат. Уровень распределения, соответственно которому заполняется форма донесения об отказе, согласовывается с каждым изготовителем, при этом сведения должны быть достаточно исчерпывающими. Обычно это не представляет проблемы для отказов в условиях опытной эксплуатации, так как они происходят в замкнутой системе, но в заводских условиях донесения об отказах оказываются недостаточными, если полнота сведений о них точно не установлена. Например, будут составляться донесения об отказах, обнаруженных при работе турбонасосного агрегата, который проверяется отдельно от собранного ракетного двигателя, а об отказах печатной схемы, не прошедшей еще контроль качества, донесения составляться не будут. Донесения об отказах, возникающих при испытаниях оборудования в рабочих условиях при приемно-сдаточной проверке или на заводе-поставщике при проверке окончательной сборки при приемных испытаниях, представляются по этой форме. О наведенных отказах в этих донесениях не сообщается, однако сведения должны появляться в более подробных технических отчетах. О других отказах, не предусмотренных ситуациями, указанными выше, информация может сообщаться в форме донесений группы контроля качества. Форма этих донесений может быть идентичной или подобной основной форме донесения об отказах. Донесение состоит из одного основного экземпляра и нескольких копий или репродукций. Информация заносится в отдельные графы формы в виде условных обозначений или в виде записи. Большинство названий граф не нуждается в объяснении. Однако ввиду того, что форма очень подробна, а объем информации, которую необходимо туда занести, изменяется в за-

## ДОБЕЖЕНИЯ ОБ ОТКАЗЕ

1. Номер копчения <i>LA 00438</i>	2. Номер исходного допсия <i>нет</i>	3. Средства сообщения <i>LM-374.9</i>	4. Тип ракет, модель <i>"Минерва А"</i>	5. Серийный номер ракета <i>нет</i>	6. Тип оборудования, конструкция для модели, номер модели <i>XU-34</i>	7. Серийный номер модели <i>0F-3</i>
8. Заводской номер отменяемого изделия <i>1234 LV</i>	Серийный номер отменяемого изделия <i>S 103.21</i>	10. Наименование отменяемого изделия <i>ABC</i>	11. Производство отменяемого изделия <i>ABC</i>	12. Условное обозначение отменяемого изделия <i>нет</i>		
13. Заводской номер следующего агрегата в сборе <i>1920 LV</i>	14. Серийный номер следующего агрегата в сборе <i>S 103.21</i>	15. Наименование следующего агрегата в сборе <i>ABC</i>	16. Производство следующего агрегата в сборе <i>ABC</i>	17. Условное обозначение следующего агрегата в сборе <i>нет</i>		
18. Код отказа <i>ДА</i>	19. Производство отменяемого изделия <i>БЗ074</i>	20. Заводской номер за-мены <i>нет</i>	21. Серийный номер за-мены <i>нет</i>	22. Номер системы <i>WS-135A</i>	22.а. Название системы <i>"Минерва"</i>	23. Дата отказа <i>день 20 месяц 02 год 6</i>
24. Нарботка Отказа, название Подсистема Система	Часы <i>нет</i>	Вкл-выкл циклов	Расч. зж. (сутки)	км	24. а. Время обнаружения неисправности <i>Число лет 2. Число часов 2. Человеко-часов 6.0</i>	24. б. Время на снятие и замена (до десятич) <i>Число часов нет. Человеко-часов нет</i>
25. Отказ обнаружен или произошёл при: 1) <input type="checkbox"/> стекловые исп. 5) <input type="checkbox"/> контроль 2) <input checked="" type="checkbox"/> осмотр (испекция) 6) <input type="checkbox"/> эксплуатация 3) <input type="checkbox"/> хранение 7) <input type="checkbox"/> прозв. исп. 4) <input type="checkbox"/> транспортно-розв 8) <input type="checkbox"/> предв. проз. 4) <input type="checkbox"/> др. <i>неправильная установка</i>	26. Причина (повод) для копчения 1) <input type="checkbox"/> отжиг метал 5) <input type="checkbox"/> окисл 2) <input type="checkbox"/> заданная нар-ботка 6) <input type="checkbox"/> исправ-ление об-леченного поврежде-ния 3) <input type="checkbox"/> истечение времени предв. проз. 4) <input type="checkbox"/> др. <i>неправильная установка</i>	27. Ремонт или переименование 1) <input checked="" type="checkbox"/> ремонт на месте 5) <input type="checkbox"/> отбраковка 2) <input type="checkbox"/> ремонт в установ-ках 6) <input type="checkbox"/> оставление на заводо-вом складе 3) <input type="checkbox"/> регулировка 7) <input type="checkbox"/> отправка на ремонт 4) <input checked="" type="checkbox"/> анализ 8) <input type="checkbox"/> повторные испытания	28. Замена 1) <input type="checkbox"/> идент. детали 2) <input type="checkbox"/> детал-замена 3) <input checked="" type="checkbox"/> не требуется 4) <input type="checkbox"/> отсутствует	29. Код крив. сост. 1) <input type="checkbox"/> прора-ботка 2) <input type="checkbox"/> прора-ботка 3) <input checked="" type="checkbox"/> не требуется 4) <input type="checkbox"/> отсутствует		
32. Описание неисправности при испытании согласно ТЗ <i>SOP-178</i> номер партии _____ №				32а. Замена конструкции для контролера в момент отката: Кривая. <input type="checkbox"/> глава. <input checked="" type="checkbox"/> возраст. <input type="checkbox"/> Требуется анализ Да <input checked="" type="checkbox"/> Нет <input type="checkbox"/> Отвественность: поз. исп. <input type="checkbox"/> прозв. <input type="checkbox"/> констр. <input type="checkbox"/> качеств. <input type="checkbox"/> норм. <input type="checkbox"/> стая <input type="checkbox"/> копия <input type="checkbox"/>		

Обнаружена утечка распылителя в канализацию №1 и №2  
устройства выключения двигателя

35. Кто составляет СМТ Отдел и группа ОТК Телефон 3477

36. Анализ отказа произведен Да  Нет

35. Годен к использованию после ремонта Да  Нет

36. Окончательное перемещение исключен

37. Отремонтирована отбракованы

37. Сертифицирован:  Не рем. боем  Не производстве  В полевых условиях

37А. Нарботка при переселках и повтора. Выл-выкл.

Подпись Директор Отдел и группа Проводство Телефон 2487

38. Детали, замененные при ремонте:

№ Шифр рем. работ Название детали

Серийн. номер

Шифр обоз.

Ответствен.

Поставщик

Номер конверта

Шифр постав-ки

Класс материала

Секретный шифр

Примечание

39. Человеко-часы на повторные испыт. Человечко-часы на отсыкание венспр.

39А. Ремонт произвел: Подпись *Бригун* Отдел и группа *Провод* Телефон *2488*

40. Примечания

С помощью шприца в каналы отсечки течи горизонтально установленного двигателя был введен эпитолоид ступт. Затем двигатель был установлен в вертикальное положение для того, чтобы освободить и высушить эти каналы.

41. Дата получения 20.02.6

42. Дата окончания ремонта Нет  Да

43. Контроль качества: Принято

Примечание: Принято

44. Влияние на расписание (план) Потери 24 часов

46. Номер донесения об анализе отказа

43. Окончательные подписи:

Представитель отдела Главного конструктора

Представитель группы надежности

Представитель отдела контроля качества (разработчик)

Представитель контроля качества (ВЭС)

висимости от места использования, отдел надежности должен подготовить в качестве руководства для составителя донесения перечень номеров ячеек и видов информации. Она будет вноситься в форму при определенных проверках или на испытательной станции. Остальная информация может быть внесена специально выделенным для этой цели представителем отдела надежности. Эти мероприятия полезны также и потому, что они направлены на улучшение согласованности сообщений.

### 3.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОНЕСЕНИЙ ОБ ОТКАЗАХ

Форма донесения (рис. 3.1) используется при выполнении программы от стадии опытно-конструкторских разработок и в течение всего периода эксплуатации. Распределяются эти донесения в соответствии с тем, кто является их составителем. Существует три основные организации-инициатора этих донесений:

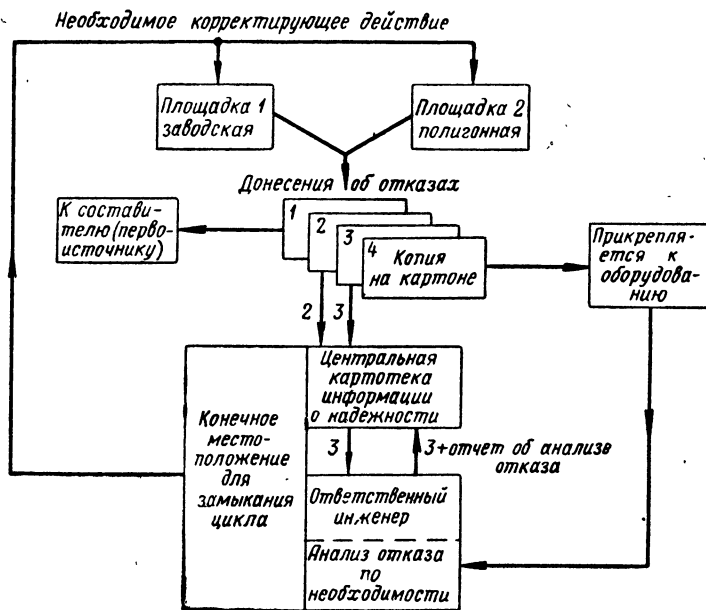


Рис. 3.1. Распределение экземпляров донесений об отказах, составленных на главных производственных и испытательных площадках подрядчика.

1. Разработчик, наблюдающий отказы собственного оборудования на своих испытательных площадках как заводских, так и полигонных. Диаграмма прохождения информации об отказах показана на рис. 3.1.

2. Разработчик, ответственный за проведение испытаний, или головной, составляющий донесения об от-

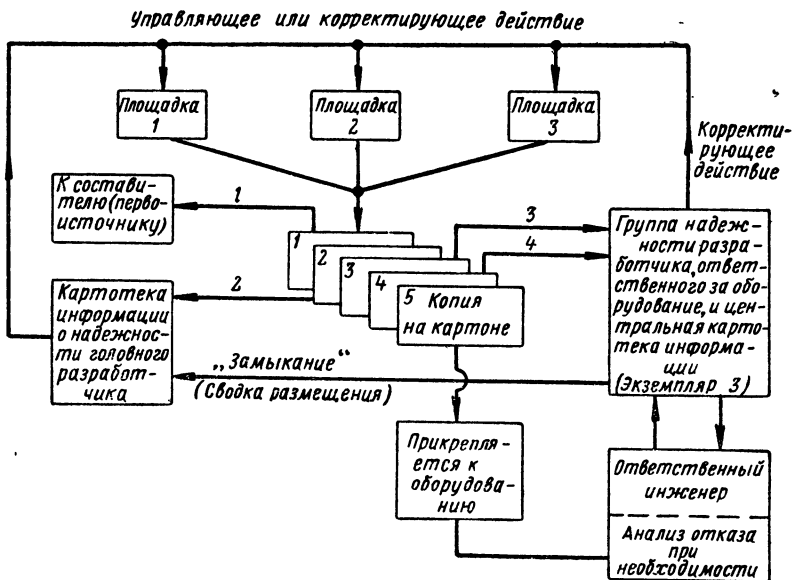


Рис. 3.2. Распределение экземпляров донесений об отказах, составленных головным подрядчиком для оборудования других подрядчиков.

казах оборудования другого подрядчика в заводских условиях или на полигоне. Диаграмма прохождения информации об отказах показана на рис. 3.2.

3. Персонал технического обслуживания или эксплуатации, составляющий донесения об отказах на своих рабочих местах. Диаграмма прохождения информации для этого случая не приведена; она очень похожа на предыдущую (рис. 3.2), но в ней дополнительно предусматривается анализ данных с точки зрения снабжения и перевозок.

### 3.7. НАЧАЛО АНАЛИЗА ОТКАЗОВ

Донесения об отказах сразу же после их получения пересматриваются и в необходимых случаях дополняются представителем группы надежности. Этот сотрудник должен иметь полное представление о замкнутой системе, чтобы судить о последствиях отказа для этой системы и устанавливать его критичность. Он также проявляет инициативу в назначении корректирующего действия. Одним из методов может служить впечатывание в донесение об отказе штампа «действие» и передача его вместе со всей соответствующей информацией ответственному инженеру. Другой метод состоит в заполнении формы запроса о корректирующем действии (табл. 3.2). В каждом случае должна быть указана дата представления ответа.

Форма запроса о корректирующем действии может быть использована и при других обстоятельствах, например, при накоплении или росте частоты отказа, который имеет значение в массе, а не единственном числе; другие обстоятельства возникают при пересмотре конструкций с точки зрения надежности, когда обнаруживаются граничные области и потенциальные слабые места, или после пересмотра технических заданий и проверки удовлетворения требований надежности. Следовательно, запрос о корректирующем действии должен подаваться при возникновении любой задачи, связанной с надежностью, вплоть до составления расписаний и прочих мероприятий руководства.

### 3.8. КОНТРОЛЬ, АНАЛИЗ И КОРРЕКТИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ

Позитивная форма контроля является обязательной для обеспечения уверенности в том, что действие будет произведено. Настоятельность и приоритет будут меняться от проблемы к проблеме, однако координатор надежности должен установить состояние запроса о корректирующем действии в течение трех дней с момента его подачи или быстрее, если он очень важен. Кроме того, группа надежности составляет еженедельный отчет, в котором перечисляется количество открытых проблем, относительная срочность их решения и промежутки времени, когда они будут еще открыты. Этот отчет, об-

## Образец запроса группы надежности о корректирующем действии

ЗАПРОС ГРУППЫ НАДЕЖНОСТИ О ДЕЙСТВИИ № \_\_\_\_\_

Дата 20.01.6

Дата представления ответа 25.01.6

Кому: Фамилия	Отдел	Местоположение	Действие	Анализ отказа	Инф.
Хиггинс Р.	Констр.	_____	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Кокс Л.	Производст.	_____	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
_____	_____	_____	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
_____	_____	_____	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
_____	_____	_____	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
От кого: Расседа К.					
	Надежности	_____	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если проверяется «Действие», возвратите один экземпляр этой формы, записав на ее обороте предложения или уже подготовленное описание корректирующего действия в группу надежности в течение \_\_\_\_\_ дней. Если проверяется «Действие» и «Анализ отказа», производите любые необходимые лабораторные исследования отказавшего изделия с учетом всех особых назначений, указанных в настоящем документе запрашивающим инженером, занимающимся надежностью.

## Описание проблемы

(Включить все сведения об истории, донесении об отказах, связанные случаи и т. д.).

См. прилагаемое донесение об отказе LA 00498 (табл. 3л).

Отказы этого типа ранее не встречались.

Этот запрос надежности о действии несет информацию, касающуюся проблемы, влияющей на надежность системы вооружения.

Предполагается познакомить соответствующий персонал с необходимостью определенного корректирующего действия и обеспечить средства для координации и регистрации этого действия. Последующая информация может быть получена от инженера, занимающегося надежностью, который выслал этот запрос.



разец которого показан в табл. 3.3, поступает во все контрольные и наблюдательные органы.

Цикл замыкается после завершения анализа отказа и возвращения отчета об анализе отказа в группу надежности к координатору донесений об отказах. Пример заполнения формы, соответствующей донесению об от-

Таблица 3.3

**Образец отчета о состоянии проблем надежности**

**ОТЧЕТ О СОСТОЯНИИ ПРОБЛЕМ НАДЕЖНОСТИ**

Открытые проблемы к началу месяца \_\_\_\_\_ Дата \_\_\_\_\_  
 Добавились новые проблемы \_\_\_\_\_ Система \_\_\_\_\_  
 Завершены решения проблем за этот период \_\_\_\_\_  
 Еще открыты общие проблемы \_\_\_\_\_  
 Средняя продолжительность существования  
 открытых проблем \_\_\_\_\_

Номер проблемы	Номер элемента, детали, узла	Номер донесения об отказе	Дата	Описание проблемы	Число критических отказов		Корректирующее действие	Расчетная эффективность	Отметка о закрытии проблемы
					за этот месяц	за 6 месяцев			

казе (табл. 3.1) и запросу о корректирующем действии (табл. 3.2), показан в табл. 3.4. Не каждое донесение об отказах требует подробного анализа, но все формы сообщений об отказах должны быть «замкнуты».

Типы отказов, причины отказов и необходимые корректирующие действия приведены в табл. 3.5.

**3.9. ДОНЕСЕНИЕ О НАРАБОТКЕ**

Несмотря на то что донесение об отказе или неисправности влечет за собой корректирующее действие, а следовательно, и быстрое уменьшение интенсивности отказов, оно не может охватить все вопросы, в частности, в нем ни слова не говорится о вероятности успешной работы. Нас же интересует, сколько времени или

## Образец составления отчета об анализе отказа

1. Общее	Донесение об отказе № LA00498 (табл. 3.1) Прикрепл.
Средство ABC	Запрос надежности о действии № 187 (табл. 3.2)
Местоположение L. A.	Дата анализа 1 февраля 196—
Страница 1	
2. Идентификация изделия	Изготовитель ABC
Наименование _____	Номер детали 1234LV
Серийный номер S103.21	Тип или модель „Минер- ва А“
3. История	<i>Предварительный анализ отсутствует</i>
4. Методы и техника анализа	<i>Визуальный осмотр</i>
5. Результаты, заключения и действия	<i>Исследовалась проблема утечки растворителя из каналов включения двигателя. Установленная причина утечки заключается в неправильном согласовании и подгонке клапанов канала отсечки тяги. Клапаны канала отсечки тяги были переконструированы, и теперь все неплотные соединения, обнаруженные при воздушных испытаниях, должны быть залиты смесью, состоящей из 60% активатора и 40% „С. 7“. Переделанные клапаны канала отсечки тяги будут готовы 5 марта 196—. Технические условия S. O. P. 179 были пересмотрены для того, чтобы учесть внесенные изменения.</i>
6. Подпись производящего анализ	<i>Хиггинс</i> дата 16 февр. 196—

**Примеры отказов, анализа и корректирующих действий  
(для передачи сообщений)**

Название и номер элемента, блока или агрегата	Вид отказа	Причина отказа	Корректирующее действие
Гелиевый стартовый клапан 2-456792	Медленная скорость спада давления	Давление газа, запортого в полости пружины, препятствует полному открытию клапана	В осевом стержне рассверлено отверстие для сглаживания давления. Передняя полость у тарельчатого клапана удлинена для более быстрого открывания клапана. На 0,2 мм увеличен ход якоря электромагнита для развития большей открывающей силы
Предохранительное уплотнение топливного насоса 3-43491A	Растрескивание мембраны уплотнения топливного насоса в спиральном шве	Плохая техника сварки	Установлен лучший контроль за процессом производства. Произведен перерасчет уплотнения для получения уверенности в концентрации мембран и правильности прогиба на испытательном стенде
Блок клапанов; рабочий двигатель; гелиевый 34-01114-27	Клапаны с № 109, 907-0060 не открылись. Клапан № 398 не закрылся	Клапаны № 109 и 398 отказали из-за коррозии в трубопроводах двигателя. Клапан № 907-0060 отказал из-за выхода из строя микровыключателя № 2	На клапан нанесено защитное покрытие, препятствующее проникновению влаги в клапан, что вызвало коррозию. Установлены приборы для определения электрических нагрузок на выключателях клапанов

Продолжение табл. 3.5

Название и номер элемента, блока или агрегата	Вид отказа	Причина отказа	Корректирующее действие
Скоростной интегроскоп 9-12345-0	Двигатель вращения испытывает воздействие избыточных токов	Произошло замыкание статора на корпус	Поставщик произвел испытания перенапряжения на статорах, уменьшил максимальный выброс тока при повороте статора и изменил нормы проверки статора; произведена переподготовка личного состава по вопросам пайки
Электромагнитный клапан 31-07398	Не работает электромагнитный клапан	Неправильное покрытие и смазка толкателей электромагнитного клапана	Предъявлены требования контроля производства для обеспечения правильного покрытия и смазки толкателей электроклапанов
Батарея	По сигналу батарея не была приведена в действие	Малая мощность пиро-запала из-за недостаточности взрывного заряда	Поставщик производит флюороскопию всех пирозапалов для определения наличия достаточного заряда
Зажим Мармана 32403-130	Зажимной Т-образный болт вышел из строя	Зажимной Т-образный болт был перегружен	Для существующих зажимных приспособлений величина крутящего момента была уменьшена с 2,535 кгм до 1,725 кгм

Примечание. Эта информация извлечена из донесений об отказах и соответствующих им сообщений об анализе отказов.

сколько циклов может выдержать прибор перед тем, как произойдет отказ, а также подробности условий работы прибора. Информационная система, предназначенная для сбора этих сведений, называется регистрацией наработки. Регистрацию наработки можно рассматривать как важное средство решения вопросов предсказания или оценки надежности, но не для предупреждения отказов или исправлений подобно системе сообщений об отказах.

Донесения об отказах составляются для любых элементов, как только происходит отказ, а система сообщений о наработке применяется только для систем, считающихся критическими в смысле времени или циклов наработки. Это непрерывная контрольная система, которая обходится очень дорого и, следовательно, несмотря на ее жизненную важность, она должна применяться лишь для тщательно отобранного числа элементов.

### 3.10. ЖУРНАЛ УЧЕТА НАРАБОТКИ

Основным документом является журнал учета наработки. Для каждого основного агрегата предусматривается отдельный журнал. В каждом агрегате обычно содержится некоторое число критических по времени наработки элементов, причем некоторые из них могут быть заменены в процессе накопления наработки агрегата. Таким образом, требуется найти метод, который позволит следить за наработкой агрегатов так же, как и за историей тех элементов, которые испытывали или будут испытывать воздействия окружающей среды, отличающихся от тех и в добавление к тем, которые испытывает сам агрегат. Например, большое значение имеет такая информация, как объем стендовых испытаний, испытаний элементов на пригодность и т. д., которые может пройти элемент до сборки. Форма записи информации для определенного типа элементов показана в табл. 3.6.

Первая страница или часть журнала содержит справочную информацию: номер агрегата, тип, модель установки и, если известен, номер обозначения в системе. В следующем разделе содержится сводка об истории отказов агрегата. Образец такой страницы показан в табл. 3.7.

Таблица 3.6

## Образец заполнения журнала учета наработки

Название элемента	История до монтажа элемента в сборку	Режим работы (опыт работы) при использовании в сборке			Общий (полный) опыт после многократного использования
		первое	второе	третье	
Деталь 1	Серийный номер 1234 Время 180 сек	Время 160 сек Циклов 1	Время 56 сек Полное число циклов 1 Общее число отказов 1	Снят для анализа отказа Заменен деталью с серийным № 2345	Число элементов 2 Полное время 558 сек Полное число циклов 3
	Полное число циклов 1 Общее число отказов 0 Условия экспериментов производственные стендовые испытания на воз- действие окружающих условий	Условия испытаний при нормальных условиях	Донесение об отказе № 7683		Полное число отказов 1
Деталь 2	Серийный номер Ноль 2345	Время 160 сек Полное число циклов 1			

(То же, что и в предыдущем)

Таблица 3.7

## Образец формы истории агрегата

Отказ	Тип элемента	Серийный номер элемента	Наработка в сборке	Число циклов в сборке	Номер донесения об отказе	Замечания об окружающих условиях
1-й						
2-й						
3-й						

В колонках «Время в сборке» и «Число циклов в сборке» указываются накопленные время и число циклов. В остальной части журнала содержатся истории каждого из критических по времени элементов, которые уже находились или только что появились в сборке.

## 3.11. МЕТОД СБОРА ВРЕМЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Информацию, требующуюся иметь в каждом отдельном элементе по мере проведения различных стендовых испытаний, испытаний на воздействие внешних условий, испытаний в сборке, переделок и повторных испытаний и т. д., записывают на карточке, которая прикрепляется к данному изделию и обновляется всякий раз при отказе или изменении места установки (или окружающих условий). После того как элемент монтируется в узел, карточки с него снимают и помещают в плотный конверт, специально для этого прикрепленный к агрегату. Спереди в конверте могут содержаться два первых раздела уже описанного журнала учета наработки, а затем подробности из истории элементов (табл. 3.6). Когда элемент переставляют или совсем снимают с агрегата, его карточку тоже переставляют или вынимают из конверта, причем информация обновляется и в конверте и на карточке.

Поскольку информация, содержащаяся в журналах учета наработки, предназначена для непрерывной оценки надежности (вообще говоря, она может стать признаком действия только благодаря системе сообщений об отказах), вовсе не обязательно рассматривать специальную систему прохождения информации. Эти данные периодически просматриваются группами, ответственными за надежность элементов и узлов, в целях усовершенствования соответствующих проектов. Примерный тип

Образец сводного отчета об отказах элемента

Подсистема	Элемент	Номер блока	Отказ обнаружен при испытаниях	Наработка (час) или число циклов	Число отказов за текущий месяц			Число действ. единиц	Наработка (час) или число циклов	Число отказов за последние 6 мес.			
					крит.	главн.	втор. полн.			крит.	главн.	втор. рост.	
Управление гироскоп	3-х степ. гироскоп	P583060 0010-1	Заводск.—на воздействие окруж. среды Заводск.—Лаборт.	142	1	3	10	14	4	372	15	26	35
					0	0	0	0	16	2261	12	26	62
Скоростной гироскоп	Скоростной гироскоп	P583060 001-5,-6	Полигон.—Др.—предзапуск. пров. Заводск.—на воздействие окруж. среды Заводск.—Лаборт.	126	2	4	4	10	4	521	12	18	34
					0	2	14	6	2	214	5	10	16
Скоростной гироскоп	Скоростной гироскоп	P583060 001-7,-8,-9.	Полигон.—Др.—предзапуск. пров. Заводск.—на воздействие окруж. среды	120									



связи, составляемой по этой информации, представлен в табл. 3.8. В методах, описываемых в других разделах книги, указывается, как можно с помощью этих данных дать оценку надежности.

### **3.12. ЦЕНТРАЛЬНАЯ КАРТОТЕКА ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ**

По мере поступления информации из таких источников, как текущие донесения об отказах, журналы учета наработки, испытания на воздействие окружающих условий, испытания в процессе конструктивных разработок, она должна быть соответствующим образом организована, чтобы обеспечить запас знаний и опыта для конструкторов и инженеров по надежности. Для элементов каждого типа, которые имели отказы при нормальных или отличных от нормальных условиях нагружения, в картотеке заводится карточка, в ней приводится по возможности следующая информация:

1. Критические расчетные и производственные конструктивные особенности.

2. Виды отказов.

3. Причины отказа.

4. Нагрузка при отказе.

5. Методы обнаружения или испытания.

6. Рекомендации необходимых предупредительных или корректирующих действий.

7. Типы распределений отказов.

8. Оценки надежности для различных приложений.

9. Головной разработчик и дополнительные источники.

Несмотря на то что большая часть этой информации может быть хорошо известна личному составу, близко связанному с оборудованием, она представляет собой ценный источник знания проблем надежности, конструктивных особенностей и т. д. для настоящих и будущих систем, в которых используются те же самые или подобные элементы при подобных или совершенно других условиях.

#### **3.12.1. Примеры информации о надежности в центральной картотеке**

Ниже приведены примеры заполнения карточек информации о надежности.

## Образец информационного листка о надежности

Агрегат *Дренажный и перепускной клапан* Поставщик \_\_\_\_\_

Заводской номер \_\_\_\_\_  
(поставщика)

Чертеж № \_\_\_\_\_ Техническое задание № \_\_\_\_\_

Агрегат последующей стадии сборки \_\_\_\_\_

Подсистема *Наддув*

### Конструктивные особенности:

Дроссельный клапан с пневматическим управлением.

### Критические характеристики

1. Утечка.
2. Открывание и закрывание.
3. Забивание льдом при низких температурах.
4. Качество материала диафрагмы.

### Виды отказов

1. Утечка.
3. Неправильное закрывание или открывание.
2. Не действует из-за замерзания или механических повреждений.

### Из опыта отказов

1. Утечка.
2. Процесс открывания и закрывания не соответствует требованиям ТЗ.
3. Не действует из-за замерзания, механических повреждений или попадания инородных тел.

### Методы контроля

1. Проверка выбора материалов.
2. Контроль производства диафрагм.
3. Контроль чистоты обработки.
4. Контроль габаритных размеров и поверхностей.

### Запас прочности

Предельное давление равно 1,3 номинального давления.

Оценка интенсивности отказов — 25 циклов.

### Действия для удовлетворения повышенных требований надежности

1. Исследовать возможности использования различных материалов для диафрагм.
2. Исследовать новую конструкцию уплотнения.
3. Исследовать единый фильтр.
4. Усилить контроль процессов производства и сборки.
5. Переделать клапан с целью исключения явлений конденсации.

Примечание. Настоящий пример является типовым, и приводимая информация не претендует на всесторонний охват.

## Образец информационного листка о надежности

Агрегат *Сопло ракетного двигателя* Поставщик \_\_\_\_\_

Заводской номер \_\_\_\_\_  
(поставщика)

Чертеж № \_\_\_\_\_ Техническое задание № \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Агрегат последующей стадии сборки *Система управления вектором тяги*

Подсистема *Силовая установка*

### Конструктивные особенности

Легковесная конструкция должна проработать 100 сек без нарушения баллистических характеристик.

### Критические характеристики

Поворотное сопло; щелевой зазор.

### Виды отказов

1. Заедание или большой момент за счет различного расширения в щелевом зазоре.
2. Заедание или большой момент за счет догорания частиц твердого топлива в щелевом зазоре.
3. Растрескивание сопловых вкладышей за счет различного теплового расширения и сжатия материалов.
4. Слиппаж (буксование) или эжекция соплового вкладыша.
5. Эрозия материала в критическом сечении.
6. Разгорание выпускного конуса (соплового раструба).

### Из опыта отказов

1. Высокие значения крутящего момента нарушают работу силового привода.
2. Сильная эрозия графитового соплового вкладыша.
3. Растрескивание соплового вкладыша.
4. Оплавление соплового вкладыша при обтекании потоком газа с высокой температурой.
5. Расплавление маслосгонного кольца потоком газов высокой температуры, что приводит к возникновению больших моментов.

### Методы контроля

1. Правильный выбор конструкции и материалов с соответствующими коэффициентами теплового расширения.
2. Защита зазора с помощью маслосгонных колец и „резервных“ уплотнений, изменение конструкции топливного заряда с целью получения соответствующих характеристик потока.
3. Правильный выбор материалов.
4. Выбор конструкции для более прочной „посадки“ соплового вкладыша.
5. Выбор материалов для обеспечения эрозионного барьера.
6. Более высокие требования при контроле качества графитовых покрытий внутренней поверхности соплового раструба (выпускного конуса).

## Варианты замены и предложения

Неподвижные сопла с использованием дефлекторов, поворотных сопловых насадок.

Неподвижные сопла с использованием впрыскивания жидкого топлива.

Примечание. Пример является типовым, и приводимая информация не претендует на всесторонний охват.

## Образец информационного листка о надежности

Агрегат *Батарея первичных элементов с автоматической активацией*

Поставщик \_\_\_\_\_ Заводской номер \_\_\_\_\_  
(поставщика)

Чертеж № \_\_\_\_\_ Техническое задание № \_\_\_\_\_

Агрегат последующей стадии сборки *Бортовая электрическая система*

Подсистема \_\_\_\_\_

### Конструктивные особенности

Высокое выходное напряжение, серебряно-цинковый гальванический элемент с активацией от системы давления, малый вес.

### Критические характеристики

Время выхода на режим, время активации и успешное возбуждение элементов.

### Виды отказов

1. Отсутствие возбуждения.
2. Замедленное возбуждение.
3. Недостаточное выходное напряжение за счет влияния температуры.
4. Утечка.
5. Слишком короткое время выхода на режим.

### Из опыта отказов

1. Низкое напряжение на выходе при холодных испытаниях.
2. Несоответствие времени возбуждения или отсутствие возбуждения.
3. Разрушение корпуса.
4. Просачивание едкой жидкости через трещины или швы.

### Методы контроля

1. Термостатический регулятор для поддержания температуры батареи в заданных пределах.
2. Улучшение изоляции корпуса батареи.

3. Наддув обеспечивается сжатым газом, с помощью поршня, газогенератора и редуктора.
4. Использование инертных материалов для предотвращения просачивания едкой жидкости.

### **Варианты замены и предложения**

Возбуждение самотеком (под действием собственной тяжести).  
Возбуждение разрежением в полости элемента.

*Примечание.* Пример является типовым, и приводимая информация не претендует на всесторонний охват.

### **3.13. ЗАЯВЛЕНИЕ ПЕРЕД ИСПЫТАНИЕМ**

Рассмотрим методы обеспечения достоверности данных (подробно об этом говорится в разделе III). Особенно это необходимо на начальных стадиях разработки, когда производится большое количество экспериментов. Нежелательно смешивать отказы, возникающие в элементах в условиях эксплуатации, с отказами экспериментальных образцов или испытываемых при ненормальных условиях, например при наблюдении пределов изменения потребляемых и развиваемых мощностей, крайних значений окружающих условий, экспериментальных процессов и т. д. Таким образом, требуется знать все обстоятельства, которые могут отличать проведенные испытания от нормальных испытаний по программе. Это можно получить, описывая назначение (задачу) испытания и перечисляя отклонения в заявлении (см. рис. 14.1; 16.1) перед началом испытания. Необходимо подчеркнуть, что цель этого мероприятия состоит не в том, чтобы усомниться в полноте охвата вопросов или ограничить деятельность инженера-разработчика или испытателя, а в том, чтобы помочь ему выделить влияние условий проведения эксперимента. Следовательно, заключения на основе этих данных станут более достоверными и оценки надежности более близкими к действительности.

### **3.14. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СВОДКИ ПО НАДЕЖНОСТИ И ОТКАЗАМ ДЛЯ РУКОВОДСТВА ПРОЕКТОМ И КОНСТРУКТОРОВ**

Эти сводки периодически, обычно ежемесячно, выпускают члены группы надежности. Они информируют инженерно-технический состав и руководство о состоянии надежности системы или элементов с точки зрения

Таблица 3.9

## Образец сводки сообщений об отказах системы

Наименование подсистемы	Номер ракеты или серийный номер	Местоположение системы	Отказ обнаружен при	Наработка или число циклов	Полное число отказов			Число отказов при включении		
					крит.	глав.	второст.			
								крит.	глав.	
Управление	B-5	AR	Контрольная проверка	10 час	1	2	4	16	2	1
			Другие испытания	20 час	0	3	12	18	1	0
	B-6	A6R/AR	Контрольная проверка	40 час	2	3	5	22	1	0
			Другие испытания	36 час	3	3	16	13	0	0
Корпус	B-5	AR	Контрольная проверка	×	0	1	2	×	0	0
			Другие испытания	×	0	0	3	×	0	0



удовлетворения конечных или каких-либо промежуточных требований. Например, в одном сообщении может быть указана вероятность полностью успешной работы, т. е. работы в полном соответствии техническим заданиям; другая же оценка может дать вероятность успеха типа некатастрофического отказа, например, способность совершить полет без внезапного взрыва, т. е. не требуя соблюдения определенных допусков тактико-технического задания. Каждая из этих оценок будет получена путем применения совокупности различных основных правил. Необходимо обратить внимание на то, чтобы все это было доступно приемщикам сообщений. Сводки должны быть довольно полными, но без лишних подробностей, чтобы получить достаточную информацию для вычисления достоверных оценок надежности.

Кроме того, в сводках следует соблюдать четкую идентификацию для того, чтобы можно было обращаться к классификации испытаний и в случае необходимости по ходу исследования их переклассифицировать.

Примеры трех различных типов сводок о надежности приведены в табл. 3.9, 3.10 и 3.8. В табл. 3.9 представлена сводка о поведении основных подсистем, испытываемых внутри системы, в табл. 3.10 — о поведении типичной основной подсистемы, испытываемой отдельно или как части полной системы; в табл. 3.8 — типичная сводка об отказах элемента.

Четвертым очень важным видом сообщений является сообщение о состоянии проблем надежности (табл. 3.1). Это сообщение аналогично тем, которые ежемесячно рассылаются всем сотрудникам, занимающимся контролем (§ 3.8), однако в нем перечисляются только критические проблемы.

### **3.15. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДОКЛАДЫ ВЫШЕСТОЯЩЕМУ РУКОВОДСТВУ О СОСТОЯНИИ НАДЕЖНОСТИ**

Эти сообщения еще более ограничены, чем рассмотренные в § 3.14, на которых они основаны. Следует организовать не только выдачу текущих оценок надежности и количества критических отказов, но и свести периодические оценки в таблицы или представить их в виде графиков, чтобы проиллюстрировать относительный рост надежности на различных этапах выполнения программы надежности.



### 3.16. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СООБЩЕНИЯ О НАДЕЖНОСТИ

Рассмотренные сообщения передаются в соответствии с определенными планами; однако на группу надежности возлагаются и другие обязанности, поскольку существует много специальных исследований, которые требуется проводить и о которых необходимо иметь сведения. Анализ таких вопросов, как исследование моделей отказов, изучение связи между результатами опытной эксплуатации и испытаний, пересмотр проектов с точки зрения надежности, рекомендации для внесения изменений в конструкцию, теоретические исследования проектируемых новых систем и т. д., — все эти исследования выпускаются в дополнение к тем сообщениям и отчетам, которые выполняются по программе. Другими словами, сообщения о надежности не ограничиваются просто пассивной записью и систематизацией событий и информации, но и включают более определенную деятельность и конструктивный анализ.

В заключение заметим, что методы сообщений и мероприятия, описанные в этой главе, были разработаны для удовлетворения нужд частной программы. Определенные форматы, мероприятия и приводимые ситуации могут оказаться не совсем подходящими для какой-либо заданной организации; но тем не менее подобные идеи и те же основные принципы позволяют предъявлять аналогичные требования к большинству систем сообщения данных о надежности и об отказах.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Culbertson J. E. and Vorhees H. A. Control charts and automation applied to analysis of field failure data. Proc. 2d National Symposium on Quality Control and Reliability in Electronics, Washington, D. C., 1956, January 9—10, p. 18—46. (available from Institute of Radio Engineers, 1 E. 79th St., New York 21, N. Y.).

Dertinger E. F. Quality control and reliability in guided missile production. Rutgers Quality Control Conference Proceedings, ASQC, 1956, p. 85—99.

Eaton W. R. Achieving reliability through integrated quality control. American Society Quality Control, 4th All-Day Conference, Dayton Sect., 1960, v. 5, March, p. 13.

Matosoff H. I. Corrective action in a quality control program. Industrial Quality Control, 1956, v. 12, January, p. 8—12.

Warner W. K. Benefits of time recording for producer and consumer. National Convention Trans. ASQC, 1959, p. 597—602.

## РАЗДЕЛ II

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ НАДЕЖНОСТИ

---

---

Наши знания о каком-либо изделии могут представить какую-нибудь ценность только в том случае, когда имеется возможность количественной оценки данного изделия. К сожалению, надежность устройства представляет собой характеристику, которую невозможно измерить подобно тому, как измеряются выходные характеристики или физические параметры устройства. Тем не менее надежность можно измерять количественно. Это означает, что суждения типа «это изделие очень надежно» можно заменять более точными суждениями, например, «с достоверностью 95% надежность изделия превосходит 90%». На основании эксперимента для характеристики качества надежности находятся численные оценки. Это становится возможным благодаря методам математической статистики и теории вероятностей, которые позволяют сопоставлять наблюдаемые, прошлые, события с будущими подобными им событиями и делать относительно этих последних статистические выводы. Оценки надежности используются затем так, как если бы это были результаты точных измерений; следовательно, можно делать выводы о точности этих оценок, как и в случае прочих параметров. Таким образом, теория оценки надежности представляет собой исключительно важный раздел теории надежности.

Однако роль математики в вопросах надежности отнюдь не сводится к роли измерительного инструмента. Она также доставляет важный аналитический аппарат, который с большим успехом применяется для более эф-

фективного планирования испытаний как в процессе конструирования системы, так и при ее приемке. На примерах будет показано, насколько надежность можно повысить даже посредством простой перестройки расположения элементов, обеспечив необходимое резервирование, рассчитанное на основании математических формул. Будет изложен также статистический выборочный метод; читатель увидит, что применение этого метода позволяет, с одной стороны, сокращать число испытаний, а с другой,—получать более достоверную и ценную информацию. При разработке и конструировании одним из наиболее важных факторов является информация. Если нам удастся сократить время и снизить стоимость ее добывания, повысить ее достоверность и, таким образом, уменьшить вероятность неправильных и дорогостоящих решений, это будет весьма ценно и полезно.

## ГЛАВА 4

### МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ И ИХ АНАЛИЗ (НЕМАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ)

Настоящая глава является введением в следующие главы, в которых будут рассмотрены специальные статистические методы, имеющие применение в области надежности.

В гл. 2 и 3 уже отмечалось, насколько важно иметь полные и достоверные исходные данные. В этой главе мы покажем, каким образом исходным данным придается статистическая интерпретация; будет также показано использование методов теории надежности при конструировании систем.

#### 4.1. ВИДЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим виды исходных данных, на которых может основываться исследование надежности. Из самого определения надежности можно видеть, что мы имеем дело с оценкой вероятности того или иного события. Можно основываться на том, что смысл самого события однозначно определен даже в том случае, когда это определение в какой-то степени произвольно. Например, интересующее нас событие может заключаться в исправной работе какого-то изделия в течение  $T$  сек при окружающей температуре  $\theta^{\circ}\text{F}$  или в попадании снаряда в определенном радиусе от цели и т. д. Если в нашем распоряжении имеется выборка результатов эксперимента, по которым можно непосредственно судить о наступлении интересующего нас события, то после этого уже сравнительно просто делаются статистические выводы о всей совокупности (конечно, в предположении, что выборка была представительной).

Рассмотрим, в каком виде будут получаться исходные данные в приведенных выше примерах.

Во втором примере исходными данными могут быть просто количество успехов и неудач (отказов) и соответственно количество попаданий в заданную площадь и количество промахов. С другой стороны, исходные данные, относящиеся к первому примеру, будут иметь более количественную природу. Они могут, например, быть представленными в таком виде: «Оборудование отказало через 500 час исправной работы при температуре  $-60^{\circ}\text{F}$ ».

Использование такой информации зависит от *математической модели*, выбранной для описания поведения устройства; по этой модели делаются выводы о будущем поведении системы. Следует отметить, что, несмотря на сходство приведенных двух видов информации, между ними имеется весьма существенное различие.

Данные в виде успехов или отказов, не доставляющие никакой информации, помимо факта выполнения или невыполнения критерия удаchi (или неудачи), называются *качественными данными*.

Данные, доставляющие дополнительную информацию какого-либо специального вида (например, факт безотказной работы на протяжении того или иного отрезка времени), называются *количественными данными*.

Иногда желательно отбрасывать дополнительные количественные данные или использовать их только с целью классификации результата эксперимента как успеха или неудачи (т. е. подобно качественным данным). Подобный подход иногда необходим, несмотря на то, что он разрушает информацию. Например, нам может быть неизвестна математическая модель, которая позволила бы использовать количественные данные в качестве информации о надежности.

Другой причиной служит наличие нескольких параметров, доступных измерению, между которыми может существовать связь, известная лишь приближенно. Если при этом с надежностью связано несколько параметров, то в силу сложности вычислений использование подробной информации зачастую невозможно или нецелесообразно. В таком случае делается качественный вывод (успех или отказ); при этом для успеха требуется, что-

бы количественные характеристики лежали в заданных пределах.

В тех же случаях, когда благодаря опыту или в результате анализа самих данных имеется уверенность в подчинении количественных характеристик известному, тем более простому математическому закону, эти данные можно с успехом использовать при оценке надежности; такая модель позволяет получать более точные оценки.

Очевидно, рассмотрение количественных данных ведет к более эффективному использованию информации; данное положение обосновывается и математическим путем. Это особенно существенно в случае дорогостоящего эксперимента и ограниченного объема выборки; однако следует подчеркнуть, что когда на основании имеющихся данных невозможно заключить о согласовании предполагаемой модели с действительностью, дью-бы, на первый взгляд, точные оценки могут лишь исказить картину. Оценки надежности, основанные на качественных данных, лишены указанного недостатка; к сожалению, трудно сформулировать общие правила, когда пользоваться качественными, а когда количественными данными.

В гл. 5 дается обзор некоторых элементов математической статистики и теории вероятностей в том объеме, в котором они понадобятся в следующих главах. Понятия выборочного пространства, случайных величин и функций распределения излагаются в таком плане, чтобы связанные с ними вероятностные соотношения и обозначения можно было использовать в качестве аппарата в алгебраических выкладках, связанных с разными статистическими моделями.

## 4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

По виду исходных данных обычно можно заключить, какой из двух классов распределений вероятностей должен использоваться для оценки надежности. Этими классами являются *дискретные* и *непрерывные распределения*. Если надежность рассматривать как параметр, то, как правило, этот параметр не будет явно входить в распределение. Исключение составляет *биномиальное распределение*, для которого  $q=1-p$  представляет вероятность успеха в одном испытании. В этом случае,

т. е. когда *единичное* испытание определяет интересующее нас событие, мы имеем дело с непосредственным измерением надежности. В общем случае, однако, надежность следует рассматривать как *некоторую функцию параметров математической модели* и перед тем, как производить какую-либо статистическую оценку надежности, необходимо пройти несколько предварительных этапов. Первый этап — установление типа распределения вероятностей, описывающего явление отказа. Второй этап — оценка параметров, однозначно определяющих закон распределения. Наконец, последний этап — это совместное использование данных о распределении вероятностей и полученных оценок параметров этого распределения с целью получения оценки надежности.

Рассмотрим более подробно все три этапа. Первая задача состоит в определении вида модели, т. е. в установлении общего закона возникновения отказов. Например, представим себе, что если бы мы могли построить некоторую функцию всей совокупности наблюдений или очень большой выборки, то мы получили бы кривые надежности, описывающие поведение устройства. Кривые надежности можно составить для большого количества функций: например, число отказов в зависимости от времени использования устройства, число отказов в зависимости от числа циклов или от величины напряжения. Существует также много способов получения выборочных данных. Так, наблюдаемыми данными могут быть наработки между отказами, количество отказов в фиксированном количестве опытов, количество успехов до первого отказа, общая наработка на отказ и т. д.

Важно заметить, таким образом, что кроме истинных характеристик отказов устройства модель отказов также определяется методом получения выборочных данных. Примером первого фактора, т. е. действия характеристик отказов, может служить тот хорошо известный факт, что так называемые «случайные отказы» часто следуют *показательному распределению*, в то время как «постепенные отказы» часто можно характеризовать *нормальным распределением*.

Примером второго фактора — влияния метода получения выборочных данных — служит то, что для оценки надежности по такой информации, как «один отказ в  $n$

испытаниях», можно пользоваться биномиальным распределением. Это распределение становится неприменимым, если известно, что испытания велись до первого отказа. Подобные два примера наблюдений, хотя и сходны по виду, взяты из двух совершенно различных опытов. В последнем случае для модели отказов следует взять *геометрическое распределение* (§ 6.4).

Модели такого рода могут быть построены из общих соображений, т. е. при помощи математического определения вероятности событий, которое наблюдается, или эмпирически; в последнем случае наблюдаемой картине отказов для устройства конкретного типа приписывается тот же характер, что и в ранее наблюдавшихся случаях. Тем не менее, как в случае теоретической, так и в случае эмпирической модели используемые наблюдения следует проверять на соответствие с выбранной моделью.

В результате проверки наблюдений может оказаться, что в данных имеются искажения или изменился характер выборочного плана. В последнем случае также может потребоваться изменение модели для получения более точного соответствия с имеющимися данными или для более правильного описания изменившегося закона, связанного с событием, которое должно наблюдаться.

Методика пригонки кривых к распределениям вероятностей не излагается подробно в книге, однако материал гл. 6 поможет соответствующим специалистам описывать законы наблюдаемых или ожидаемых отказов.

В тех случаях, когда из общих соображений модель получить нельзя или нет уверенности, что наблюдения следуют определенному закону, можно построить модель лишь в процессе проб и ошибок. Эта задача иногда облегчается различными приемами (нанесением данных на бумагу, разграфленную специальным образом, предварительным преобразованием данных), но следует иметь в виду, что только полная информация может доказать представительность выбранной модели. Понятно, что эта задача возникает всегда при пригонке кривых и никогда не является свойственной только надежности.

Большинство используемых распределений вероятностей содержит один, два и в редких случаях три параметра, полностью определяющих вид кривой распределения, ее расположение и другие характеристики. По-



сколько свойства таких распределений общеизвестны и многие из них табулированы, можно делать выводы относительно наблюдаемых данных, основываясь на нашем знании этих распределений.

Поэтому в гл. 6 приведены различные свойства наиболее полезных из изученных распределений и их применения к надежности.

После установления общего вида модели, т. е. когда принято, скажем, распределение Вейбулла, гамма-распределение, распределение Пуассона или какое-нибудь другое, приступают к следующей из отмеченных выше задач — к задаче однозначного определения распределения при помощи параметров. Это сталкивает нас с задачей оценки и связанными с ней статистическими методами.

### 4.3. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ НАБЛЮДЕНИЙ

Когда нужно оценить какой-либо параметр посредством наблюдения или эксперимента, мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что оценка сопряжена с некоторой ошибкой или неопределенностью. Например, в случае хороших данных, если в  $N=10$  независимых испытаниях 9 успехов и 1 неудача, оценкой истинной вероятности  $R$  успеха будет 0,9. Однако истинная вероятность успеха может быть любым числом между 0 и 1; так, если бы  $R$  была равной 0,1, то происшедшее событие все же имело бы хотя и малую, но положительную вероятность. Однако *правдоподобно*, что  $R$  лежит вблизи 0,9; с большой степенью вероятности можно сказать, что  $R$  больше 0,75 или что  $R$  лежит между 0,75 и 0,95.

Рассмотрим также пример количественных данных. Если произведено  $N$  независимых испытаний на долговечность и средняя наработка на отказ оказалась равной, скажем, 600 сек, то *правдоподобно*, что истинное среднее время исправной работы близко к 600 сек.

При этом чем больше  $N$ , тем большей будет уверенность в представительности средней наработки на отказ в качестве оценки истинного значения.

Мы сталкиваемся также с вопросом о точности оценки. Знание соответствующего распределения вероятностей и общей теории выборочного метода позволяет сопоставлять оценкам параметров распределений *доверительные пределы*.

#### 44. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ

В гл. 7 рассматриваются виды оценок параметров распределений и свойств этих оценок.

Кроме того, важно рассмотреть различные статистические приемы получения оценок параметров в терминах выборочных наблюдений.

*Функция надежности*, определяемая как вероятность наступления успеха, получается в результате суммирования или интегрирования по части *выборочного пространства*, определяющей осуществление успеха. Функция надежности зависит от параметров распределения. Так как в общем случае нам известны не сами параметры, а только выборочные оценки с определенным разбросом, то необходимо исследовать, как эти оценки и характеристики их разброса использовать для получения оценки надежности и доверительных пределов. В соответствии с этим основное содержание гл. 7 и 8 составляет оценка параметров и ее связь с оценкой надежности; в гл. 8 эти вопросы рассматриваются применительно к распределениям, описанным в гл. 6.

#### 45. СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ. РЕЗЕРВИРОВАНИЕ И ЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

До сих пор мы говорили об оценке надежности отдельного изделия. Пока оно является отдельной компонентой или комплексом компонент, его можно рассматривать как обособленный элемент. Однако представляет интерес также взаимосвязь надежности элементов и влияние этой взаимосвязи на надежность системы.

Если нам дана система, состоящая из элементов с известной точно или с высокой достоверностью надежностью, важно знать, насколько ненадежность элементов снижает надежность системы.

Пусть, например, имеется система из двух элементов с надежностями  $R_1$  и  $R_2$ . Равна ли надежность системы произведению  $R_1$  на  $R_2$ , их среднему арифметическому, минимуму или еще какой-то функции от  $R_1$  и  $R_2$ ? Ответ будет зависеть от функциональной связи между элементами и вероятностных характеристик их функционирования в системе. Подобная связь представляет *структур-*

ную надежность системы. В гл. 9 представлены различные типы структур.

Зная структуру системы, группа надежности может внести важный вклад в анализ проекта и построение того или иного изделия. Непосредственным примером является понятие *резервирования*, идея которого заключается в том, чтобы часть элементов системы могла заменять один или большее число отказавших основных элементов. Например, два запальника, служащие для воспламенения горючего в ракетном двигателе; для воспламенения достаточно, чтобы сработал хотя бы один из них. Здесь структурная модель дает возможность подсчитать для проектировщика вероятность успешного воспламенения или решить обратную задачу: определить, сколько резервных запальников необходимо, чтобы обеспечить заданную вероятность успешного воспламенения.

Аналогичная задача возникает и в случае количественных параметров. Представим себе ситуацию, когда для безотказной работы устройства необходимо, чтобы выходной параметр находился выше фиксированного уровня. Хотя расчетное значение выходного параметра может удовлетворять этому условию, в общем случае будет существовать разброс значений выходного параметра, вследствие чего возможен отказ. Можно подсчитать вероятность такого события, а следовательно, и вероятность успеха. Группа надежности также может установить для выходного параметра уровень в зависимости от степени разброса, что окажется существенным для обеспечения заданной вероятности безотказной работы. В данном случае имеется фиксированный уровень, превышение которого связано с отказом. Однако уровень не обязательно остается постоянным. Напротив, критический уровень сам по себе может представлять случайную величину с каким-то законом распределения. Примером может служить колебание давления в камере ТРД, сравниваемое с колебанием прочности. В этом случае разрывное давление является случайной величиной.

Если напряжение, вызванное давлением, превосходит прочность, тогда происходит отказ. Применение анализа надежности с учетом давления и прочности дает инженеру, занимающемуся надежностью, метод оценки

вероятности отказа. Это позволяет предъявлять инженеру-проектировщику требования к параметрам и обосновывать различные допуски, чтобы предотвратить отказы недопустимой интенсивности.

#### 4.6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ

В том случае, когда результаты получены по отдельным испытаниям элементов, помимо статистической задачи стыковки результатов испытаний возникает также задача правильного истолкования результатов. Например, изделие, собранное из элементов различных видов, может обладать свойствами, которые нельзя определить или выразить в виде функций сходных свойств отдельных элементов. Так, две системы, во всем подобные или даже идентичные с точки зрения количества и видов элементов, могут быть по-разному «упакованы». В одной из них под влиянием внешней вибрации возникнут большие внутренние ускорения, что приведет к отказу элементов, не рассчитанных на такие условия. В другой системе те же самые внешние условия не будут оказывать такого действия, так как приняты предупредительные меры, уменьшающие влияние внешней вибрации. Взаимодействие подобного типа наблюдается также в случае, когда два элемента, поставленные в систему, создают условия (например, колебание температуры), при которых может возникнуть внезапный отказ одного из них или даже всей системы; в то же время каждый элемент в отдельности выполняет требуемые от него функции.

Примером подобной ситуации служит питание газовой тепловой турбины. Генератор вырабатывает горячий газ в камере сгорания, после чего струя газа направляется через сопло к лопастям турбины, приводя ее в движение. Лопастя турбины насажены на вал вместе с генератором переменного электрического тока. Сам по себе газогенератор может быть годным к выполнению своей функции — обеспечению на выходе достаточной производительности. Турбина сама по себе также может быть приведена в действие *холодным газом*, оказывающим достаточное давление. Когда же эти две подсистемы собраны в один агрегат, то горячий газ, поступающий из газогенератора, может проникнуть в оболочку вала и расстроить смазку подшипников, что приведет

к определенному результату. Понятно, что при расчеге ведущей подсистемы турбины должна быть обеспечена нечувствительность к подобному взаимодействию.

Встречается также и «полезное» взаимодействие. Может случиться, что определенные отклонения параметра какого-то элемента увеличивают вероятность безотказной работы другого элемента или создают более облегченные условия. В [1] приведено интересное описание полезных взаимодействий в электронном оборудовании.

Если нужно предсказать или оценить надежность некоторой сложной системы, то следует по возможности оценить имеющиеся взаимодействия, так как они могут оказать решающее влияние на надежность всей системы. В качестве начального шага рекомендуется спроектировать систему таким образом, чтобы обезопасить ее от вредных взаимодействий, а также не использовать и полезных. Однако задача распределения и предсказания надежности при учете в модели всевозможных взаимодействий становится весьма сложной в математическом отношении. Трудности, которые здесь могут встретиться, рассматриваются в [2]. Упрощенной моделью, полезной для многих целей, служит так называемая модель *последовательной системы из независимых элементов*; для нее надежность системы определяется как произведение надежностей элементов. Эту модель следует рассматривать в качестве первого приближения к более усовершенствованной модели, в которой упомянутые взаимодействия уже учитываются.

Более того, с точки зрения рекомендованного проекта с исключенным взаимодействием, предполагающего определенную независимость или отсутствие взаимодействия, для уже имеющегося оборудования предположение о независимости становится более неприемлемым.

#### **4.7. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ВЫБОР И ПОДТВЕРЖДЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ**

Инженеры-конструкторы и руководящие работники часто опасаются, что надежность связана с очень большим числом испытаний, служащих для подтверждения ее уровня.

Часто для получения необходимой достоверности высокой надежности нужно произвести большое число испытаний или циклов. Но, с другой стороны, если положиться на интуицию инженера, то это тоже может обойтись очень дорого. Например, стоимость подтверждения надежности предохранителя взрывателя мала по сравнению с риском последствия его отказа при установке снаряда.

Отсюда следует, что очень важно внимательно подходить к планированию и целям испытаний; при этом испытания нужно рассматривать не обособленно, а как часть всей программы разработки.

Первой функцией испытаний является получение достоверной информации для последующего этапа и, если это необходимо, для улучшения проекта. Методики, служащие для оптимизации решения подобной задачи, излагаются в гл. 12 и 13. Однако на различных этапах осуществления программы разработки возникает необходимость проводить проверку и оценку надежности при жестко контролируемых условиях; это необходимо, чтобы получить истинную картину эффективности и надежности, не усложненную умозрительными выводами, связанными с методом испытаний, условиями и непредставительными ситуациями. В некоторых случаях необходимые этапы испытаний заканчиваются подтверждением требуемой надежности. Из табл. П.1 (см. приложение) видно, что минимально необходимое число испытаний для получения достаточно достоверного вывода должно быть довольно большим.

Но в этой таблице обосновывается только один вид выборочного плана:  $N$  испытаний с допустимым числом отказов, равным нулю. В гл. 10 исследуются различные разновидности выборочного метода, а также приводится ряд практических рекомендаций, полезных при выборе определенного плана. Подробные выкладки приведены только для планов, основанных на биномиальных испытаниях и предположении о показательном распределении времени безотказной работы. Помимо нормального распределения, которое везде широко используется (см. литературу к гл. 10), а также упоминавшегося показательного распределения существует несколько выборочных планов, основанных на других распределениях. Показательное распределение играет определенную роль

в статистике надежности; но его часто используют без достаточных оснований. В [3 и 4] показано, что вследствие принятия гипотезы о показательности распределения, в то время как истинное распределение — типа Вейбулла, возникают значительные ошибки.

#### 4.8. ПРЕДСКАЗАНИЕ И ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ

Оценка надежности применяется к исследованию повышения надежности. Надежность, по самой своей природе, связана с предсказанием; в настоящей книге под *предсказанием* мы будем понимать будущую проектируемую надежность, не основанную непосредственно на текущих наблюдениях. Значения надежности, полученные непосредственно по текущим и предыдущим наблюдениям, будем называть *оценками* надежности. Связь между предсказанием и оценкой надежности вводит нас в предмет *повышения* надежности.

Известно, что при осуществлении программы разработки на протяжении определенного времени надежность, вообще говоря, возрастает. Однако возникает вопрос о скорости подобного возрастания и о том, приведет ли оно, в конце концов, к выполнению заданных требований. Представляется правдоподобным, что надежность устройства возрастает благодаря последовательности шагов, соответствующих изменениям в конструкции элементов, которые служили источником отказов, а также улучшениям в процессе конструирования. Количество и частота подобных шагов будут различными для разного оборудования. Например, крупные твердотопливные ракетные двигатели с относительно небольшим количеством составных частей, создание которых, однако, связано с решением больших инженерных задач, характеризуются небольшим количеством весьма существенных скачков кривой повышения надежности. Напротив, жидкотопливные ракетные двигатели, состоящие из значительно большего количества частей, характеризуются более высоким начальным уровнем надежности, который изменяется затем уже значительно медленнее. Результаты испытаний, из которых получается величина надежности, колеблются случайным образом около истинной надежности, и если информации не слишком много, то точки, по которым затем нужно строить кривую повышения надежности, могут обладать значитель-

ным разбросом. Эти точки будут также «чувствительными» к методу, используемому при оценке. Так, *скользящее среднее*, построенное по сотням точек, будет менее «устойчивым», чем то, которое построено по 200 точкам. Таким образом, задача состоит в том, чтобы по информации подобного вида построить кривые и попытаться определить, какие факторы вносят существенный вклад в повышение надежности. Этот вопрос рассматривается в гл. 11.

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Acheson. The whole is not the sum of its parts. Proc. 4th National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, IRE, Washington, D. C., 1958, 6—8 January. См. Ф. И. Белов, Ф. С. Соловейчик. Вопросы надежности радиоэлектронной аппаратуры. Госэнергоиздат, 1961.

2. J. R. Rosenblatt. On prediction of system performance from information on component performance. Proc. Western Joint Computer Conference, 1957, February, p. 85—94.

3. M. Zelen. Factorial Experiments in life testing. Technometrics, 1959, v. 1, p. 269—288.

4. M. Zelen and M. C. Dannemiller. Are life testing procedures robust? Proc. 6th National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, IRE, Washington, D. C., 1960, January, № 11—13, p. 185—189.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Lipow M. Recent advances in rocket reliability concepts. Jet Propulsion, 1958, v. 28, June, p. 373—377.

Lusser R. Predicting reliability. Publication of research and development division, ordnance missile laboratories, redstone arsenal, 1957, October.

Wilson B. J. Analyzing missile electric system reliability and industry, 1956, September, № 26, p. 206—213.

Yueh, John H. A developmental approach to reliability in missile system equipment, IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1956, PGRQC-8, September, p. 44—54.



## ГЛАВА 5

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

### 5.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе дается элементарный обзор основных сведений из теории вероятностей и математической статистики. Цель этого обзора состоит в том, чтобы подготовить математический аппарат, необходимый при исследовании моделей отказов и их применении к задачам оценки надежности. Сюда включены только самые основные понятия и применения теории вероятностей и математической статистики, имеющие непосредственное отношение к материалу следующих глав. Читатель, желающий углубить свои знания, может обратиться к имеющейся литературе, например [1—7].

Понятие выборочного пространства дается в § 5.2. Выборочное пространство представляет собой множество всех возможных исходов эксперимента и может быть дискретным (например, успех и неудача) или непрерывным (например, множество действительных чисел некоторого интервала, соответствующих возможным результатам измерения выходного параметра).

В § 5.3 кратко описаны соотношения между подмножествами выборочного пространства (множествами исходов или событиями). Понятия случайной величины и распределения вероятностей для дискретных и непрерывных выборочных пространств вводятся в § 5.4 и 5.5. Понятие случайной величины является по существу очень простым; использование его делает терминологию теории вероятностей более наглядной. В § 5.5 и 5.6 представлены функции распределения в случае дискретных

и непрерывных распределений. § 5.7 и 5.8 посвящены некоторым аналогичным аспектам распределений вероятностей в связи с моментами и моментными производящими функциями. В § 5.9 представлены двумерные и многомерные распределения вероятностей. В § 5.10 даются некоторые понятия и применения выборочного метода. Существенной частью текста являются примеры и упражнения. Мы советуем читателю всегда убеждаться в их понимании, прежде чем переходить к следующему материалу.

## 5.2. ВЫБОРОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе дается обзор основных понятий теории вероятностей, начиная с понятий выборочной точки, события как множества выборочных точек и выборочного пространства, под которым понимается множество всех возможных выборочных точек или исходов. В действительности понятие события включает в себя все эти три понятия в том смысле, что событие есть множество выборочных точек. Оно может состоять из одной точки, части или всех выборочных точек. Для удобства рассматривается и такое абстрактное множество, которое не содержит ни одной выборочной точки; иногда его называют невозможным событием\*. Событие, содержащее все выборочные точки, называется достоверным событием.

Выборочные пространства могут содержать конечное, счетное или несчетное множество выборочных точек. В первых двух случаях говорят, что выборочное пространство дискретно, в последнем случае оно называется непрерывным. Примером конечного выборочного пространства может служить пространство, состоящее из двух исходов: успеха и неудачи. Приведем пример дискретного выборочного пространства со счетным множеством точек. Монета бросается до тех пор, пока не выпадет герб ( $\Gamma$ ). Выборочное пространство можно изобразить как

$$O_1 = \Gamma,$$

$$O_2 = H\Gamma,$$

$$O_3 = HH\Gamma, \dots$$

поскольку перед тем, как выпадет герб, мыслимо любое число выпадений надписи ( $H$ ). (Логически можно допустить, что герб не выпадет ни разу; это событие мы обозначим через  $O_0$ .) Мы видим, таким образом, что выборочное пространство дискретно.

Примером непрерывного выборочного пространства может служить пространство, состоящее из всех точек (действительных чисел) некоторого интервала. Так, время безотказной работы устройства, вообще говоря, может равняться любому вещественному числу. Множество всех положительных вещественных чисел образует выборочное пространство в случае опыта, в котором мы «запускаем» устройство в момент  $t=0$  и отмечаем момент его отказа. Понятно, что в этом случае выборочное пространство будет несчетным\*.

Для понимания следующих параграфов читателю будет полезно все время представлять себе один или несколько примеров выборочных пространств, событий и выборочных точек. Один из таких примеров используется в табл. 5.1. В п. 5.3.3 подробно разобран пример, иллюстрирующий все положения § 5.2 и 5.3. Однако при первом чтении этих параграфов понадобится лишь очень простой пример, который будет приведен в конце их. Мы настоятельно рекомендуем литературу [6, 7], где можно найти более детальное изложение и дополнительные примеры.

### 5.2.1. Действия с событиями

Пусть  $A, B, C, \dots$  обозначают множества или совокупности выборочных точек выборочного пространства  $\Omega$ . Подобные множества были определены в § 5.2 как события. Любому событию  $A$ , т. е. „ $A$  произошло“, сопоставляется событие „ $A$  не произошло“, называемое противоположным событием или дополнением к событию  $A$ . Другими словами, дополнение к  $A$  — это множество точек  $\Omega$ , не содержащихся в  $A$ . Чтобы выразить, принадлежность выборочной точки  $x$  множеству  $A$ , пишут  $x \in A$ . Для обозначения выражения „событие  $A$  содержится в со-

---

\* Интуитивно лучше всего представлять себе непрерывное пространство, как прямую, или плоскость, или  $n$ -мерное пространство. Несчетность же множества точек данного вида пространств является лишь частным свойством, не связанным с физическими представлениями (*Прим. перев.*)

бытия  $B^*$  употребляется другой символ  $A \subseteq B$ . Последнее означает, что наступление события  $A$  влечет за собой событие  $B$ . Отношение  $A \subseteq B$  эквивалентно утверждению, что из  $x \in A$  следует  $x \in B$ . Далее, коль скоро  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ , то  $A$  и  $B$  должны совпадать, т. е.  $A = B$ .

Две основные операции, которые можно производить с множествами, называются объединением и пересечением. Событие  $A \cup B$  называется объединением событий  $A$  и  $B$ ; его смысл — наступление хотя бы одного из событий  $A$  и  $B$  (возможно, и обоих вместе). Вместо этого можно сказать, что если  $x \in A$  или  $x \in B$  (или то и другое), то  $x \in A \cup B$ ; обратно, если  $x \in A \cup B$ , то либо  $x \in A$ , либо  $x \in B$  (либо то и другое). Событие  $A \cap B$  называется пересечением  $A$  и  $B$ ; его смысл — совместное наступление событий  $A$  и  $B$ . Таким образом, из того, что  $x \in A$  и  $x \in B$ , следует, что  $x \in A \cap B$ , и если  $x \in A \cap B$ , то  $x \in A$  и  $x \in B$ .

Назовем события  $A$  и  $B$  несовместными, если  $A$  и  $B$  не содержат общих точек, т. е. наступление одного из этих событий исключает наступление другого. Символически это обозначается

$$A \cap B = 0, \quad (5.1)$$

где символом  $0$  обозначено событие, не содержащее ни одной выборочной точки.

Заметим, что различные выборочные точки (исходы) всегда несовместны. В табл. 5.1 показаны некоторые свойства событий и соотношения между ними, в справедливости которых читатель может убедиться либо «алгебраически», либо на примере.

Докажем для примера соотношение (6) из табл. 5.1, т. е.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (5.2)$$

Пусть  $x$  — выборочная точка, содержащаяся в  $A \cup (B \cap C)$ . Тогда  $x \in A$  или  $x \in B \cap C$ . В первом случае  $x \in A \cup B$  и  $x \in A \cup C$ , откуда следует, что  $x$  принадлежит пересечению  $(A \cup B)$  и  $(A \cup C)$ . Если же  $x \in B \cap C$ , то  $x$  содержится как в  $B$ , так и в  $C$ . Значит,  $x$  будет содержаться в  $A \cup B$  и  $A \cup C$ , а следовательно, и в  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ , как и в предыдущем случае. Таким образом, мы показали, что

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (5.3)$$

Таблица 5.1

Номер п/п.	Свойство или соотношение	Формулировка свойства или соотношения	Проверка на примере
1	$\overline{\overline{A}} = A$	Дополнение дополнения $A$ есть само $A$ (закон инволюции)	Пусть $\Omega$ — множество исходов при бросании игральной кости, т. е. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; тогда положим $A = \{1, 2\}$ , $B = \{2, 3, 4\}$ , $C = \{2, 4, 6\}$ , $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ ; значит, $\overline{\overline{A}} = \{1, 2\} = A$ .
2	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Пересечение (объединение) $A$ с самим собой есть опять $A$ (свойство идемпотентности)	
3	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Коммутативный закон для пересечения и объединения событий. Может быть обобщен на пересечение (объединение) произвольного количества событий	
4	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Ассоциативный закон для пересечения (объединения) событий. Круглые скобки можно перемещать произвольным образом при любом количестве событий	$(B \cap C) = \{2, 4\}$ , $A \cap (B \cap C) = \{2\}$ ; $(A \cap B) = \{2\}$ ; $(A \cap B) \cap C = \{2\}$ ; $(B \cup C) = \{2, 3, 4, 6\}$ ; $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ; $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$ ; $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
5	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Дистрибутивный закон пересечения по отношению к объединению. Отметим аналогию с действиями над действительными числами, если $\cap$ и $\cup$ понимать как обычное умножение и сложение	$A \cap (B \cup C) = \{2\}$ ; $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2\} \cup \{2\} = \{2\}$

Номер п/п.	Свойство или соотношение	Формулировка свойства или соотношения	Проверка на примере
6	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Дистрибутивный закон объединения по отношению к пересечению. Отметим, что вещественные числа не обладают аналогичным свойством	$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 4\};$ $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4, 6\} = \{1, 2, 4\}$
7	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Законы погашения	$\{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ $\{1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\}$
8	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Законы двойственности	$\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ $\overline{A \cup B} = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 5, 6\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ $\overline{A \cup B} = \{5, 6\};$ $\overline{A \cap B} = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 5, 6\} = \{5, 6\}$
9	$\overline{0} = \Omega$ $\overline{\Omega} = 0$	Дополнение невозможного события есть достоверное событие, т. е. дополнение события, не содержащего ни одной выборочной точки, есть событие, содержащее все выборочные точки (и наоборот).	
10	$A \cap \Omega = A$ $A \cap 0 = 0$ $A \cup 0 = A$ $A \cup \Omega = \Omega$	Свойства событий 0 и $\Omega$ . Заметим, что если 0 и $\Omega$ интерпретировать как действительные числа 0 и 1 соответственно, а $\cap$ и $\cup$ как обычное умножение и сложение, то все соотношения, кроме последнего, будут иметь аналогию.	

Номер п/п.	Свойство или соотношение	Формулировка свойства или соотношения	Проверка на примере
11	$A \cup \bar{A} = \Omega$ $A \cap \bar{A} = 0$	Соотношения для дополнений. Первое утверждает, что должно произойти либо само событие, либо его дополнение. Второе утверждает, что событие и его дополнение несовместны	$\{1, 2\} \cap \{3, 4, 5, 6\} =$ $= \{ \} = 0$

Обратное утверждение, т. е.

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \quad (5.4)$$

устанавливается тем же путем. Отсюда следует, что оба события эквивалентны.

Подобным же образом устанавливаются и остальные соотношения.

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что если  $A \subset B$ , то  $A \cap B = A$ , и наоборот.

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что если  $A \subset B$ , то  $A \cup B = B$ , и наоборот.

### 5.3. ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

Вероятностью события  $A$  называется сопоставленное этому событию неотрицательное число, обозначаемое  $P(A)$  и обладающее следующими свойствами, которые рассматриваются как определяющие аксиомы:

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\Omega) = 1.$$

Если

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

и  $A_i$  — попарно несовместные события, т. е.

$$A_i \cap A_j = 0, \quad i \neq j,$$

то

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Эти свойства являются основными для исчисления вероятностей. В частности, последнее соотношение озна-

чает, что вероятность должна быть вполне аддитивной; это означает, что вероятность события, которое является счетным объединением взаимно несовместных подсобытий, равна просто бесконечной сумме вероятностей этих подсобытий. (Примером этого может служить распределение Пуассона (5.22)). В том случае, когда подсобытия не обязательно несовместны, равенство заменяется неравенством в широком смысле:

$$P(A) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Результат, который предлагается установить в следующем упражнении, показывает, что в общем случае можно писать и равенство, если учесть вероятность пересечения событий. Обобщение на произвольное количество событий дается в [1], стр. 88—90\*.

Упражнение 1. Показать, что  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Это соотношение можно объяснить методом „подсчета“ выборочных точек. Действительно, выборочные точки, входящие в  $A \cup B$ , — это точки  $A$  (в число которых входят точки пересечения  $A$  и  $B$ ) плюс точки, содержащиеся в  $B$  (также содержащие пересечение  $A \cap B$ ). Таким образом, точки  $A \cap B$  считались дважды, а поэтому их следует вычесть. На этом примере видна определенная эквивалентность понятий „число“ и „вероятность“. Может случиться, что каждая из  $N$  выборочных точек наделена вероятностью  $1/N$ ; в этом случае количество выборочных точек, содержащихся в любом событии, деленное на  $N$ , численно равно вероятности этого события. Для сравнения приведем математическое доказательство рассматриваемого соотношения.

Имеем

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B),$$

$$B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B),$$

$$(A \cup B) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B).$$

Первое тождество получено при помощи (11) табл. 5.1 и коммутативного закона (3) из той же таблицы:  $\bar{B} \cup B = \Omega$ . Затем, поскольку  $A = A \cap \Omega$  [(10) табл. 5.1], имеем

$$A = A \cap (\bar{B} \cup B).$$

---

\* См. также Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961, гл. 1, упражнение 20. (Прим. перев.)



Далее, согласно дистрибутивному закону [(5), табл. 5.1] мы убеждаемся в справедливости первого тождества. Остальные два тождества устанавливаются аналогичным образом.

События, взятые в скобки в каждой из строк, несовместны; стало быть, их вероятности просто складываются:

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B),$$

$$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

Требуемый результат получается уже чисто алгебраически.

Результат следующего упражнения постоянно применяется при исследовании надежности. Этот результат состоит в следующем. Если известно, что событие  $B$  должно наступить, коль скоро наступило событие  $A$ , то вероятность события  $A$  не превосходит вероятности события  $B$ .

Например, если электронная схема обязательно отказывает при отказе некоторой лампы, то вероятность второго события будет меньше или равна вероятности первого; ведь схема может отказывать и по другим причинам.

У п р а ж н е н и е 2. Пусть  $A$  и  $B$  — события выборочного пространства  $\Omega$ . Показать, что если  $A \subset B$ , то

$$P(A) \leq P(B).$$

Прежде всего, если  $A = B$ , то  $P(A) = P(B)$ . Если же  $A$  является собственной частью  $B$ , т. е. существуют точки  $B$ , не содержащиеся в  $A$ , обозначим через  $S$  событие, состоящее из всех таких точек. Тогда  $B = A \cup S$ , где согласно определению  $A$  и  $S$  несовместны. Значит,  $P(B) = P(A) + P(S)$ . Требуемое неравенство следует из того, что  $P(S) \geq 0$ .

Иной способ доказательства состоит в следующем. Обозначим  $S = \bar{A} \cup B$ . Тогда  $S$  и  $A$  несовместны и  $B = A \cup S$ . Действительно, соотношения

$$\begin{aligned} S \cap A &= (\bar{A} \cap B) \cap A = A \cap (\bar{A} \cap B) = \\ &= (A \cap \bar{A}) \cap B = 0 \cap B = 0 \end{aligned}$$

доказывают несовместность  $S$  и  $A$ , а соотношения

$$A \cup S = A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = A \cup B = B$$

вторую формулу. Остальная часть доказательства остается той же. Рекомендуем читателю расписать все доказательство шаг за шагом, всякий раз замечая, какое правило из табл. 5.1 используется.

### 5.3.1. Условная вероятность

Понятие условной вероятности вводится следующим образом.

Пусть  $H, A$  — события выборочного пространства  $\Omega$ . Предположим, нам известно, что наступило событие  $H$ . Чему равна вероятность наступления события  $A$ ? Эта вероятность обозначается символом  $P(A|H)$  и определяется формулой

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \quad (5.5)$$

(за исключением того случая, когда  $P(H) = 0$ ). Смысл формулы (5.5) состоит в следующем. Чтобы найти условную вероятность  $A$  при условии, что наступило событие  $H$ , необходимо просуммировать вероятности всех выборочных точек, общих для  $A$  и  $H$ , и разделить полученную сумму на вероятность события  $H$ . Таким образом, вероятности, сопоставленные всем событиям, входящим в  $H$ , согласно определению вероятностей в первоначальном выборочном пространстве умножаются на  $1/P(H)$ .

Очень часто бывает известна условная вероятность события  $A$  при условии, что наступило то или иное из взаимно несовместных событий. Как вычислить безусловную вероятность события  $A$ ? Будем считать, что наступление события  $A$  — это «успех», а  $H_1, H_2, \dots, H_n$  — несовместные события, которые могут привести к успеху. Будем считать также, что

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega,$$

т. е. по крайней мере одно из событий  $H$  непременно должно наступить (в силу взаимной несовместности в любом случае может наступить лишь одно из событий  $H$ ). Тогда

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup \dots \cup H_n) = \\ &= (A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n). \end{aligned}$$

В силу несовместности событий  $(A \cap H_1) \dots$  мы будем иметь

$$P(A) = \sum_i P(A \cap H_i) = \sum_i P(A|H_i) P(H_i). \quad (5.5a)$$

У п р а ж н е н и е 1. Запускается космическая ракета с целью попадания на Луну (событие  $H_1$ ), откуда она может доставить информацию о радиации на Луне (событие  $A_1$ ). Из-за ненадежности ракета может выйти на устойчивую орбиту вокруг Земли с большим эксцентриситетом; в этом случае можно добыть довольно полную информацию о радиационном поясе Ван Аллена (событие  $A_2$ ). Возможен, конечно, и такой случай  $H_3$ , когда ракета не оторвется от Земли (из-за ненадежности). Запуск будет считаться успешным, если наступит одно из событий:  $A_1$  или  $A_2$ . Чему равна вероятность успеха?

По формуле (5.5)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 | H_1) &= \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap H_1]}{P(H_1)} = \\ &= \frac{P[(A_1 \cap H_1) \cup (A_2 \cap H_1)]}{P(H_1)}. \end{aligned}$$

Но  $A_2 \cap H_1 = 0$ , т. е. попадание на Луну и доставление хорошей информации о радиационном поясе Ван Аллена — события несовместные.

Следовательно,

$$P(A_1 \cup A_2 | H_1) = P(A_1 | H_1).$$

Аналогично

$$P(A_1 \cup A_2 | H_2) = P(A_2 | H_2).$$

Наконец,

$$P(A_1 \cup A_2 | H_3) = 0.$$

Таким образом, (из 5.5а) получаем

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 | H_1) P(H_1) + P(A_2 | H_2) P(H_2).$$

Приемлемыми значениями этих вероятностей для 1962/65 г. могут быть

$$P(A_1 | H_1) = 0,80^*, \quad P(A_2 | H_2) = 0,95^*,$$

$$P(H_1) = 0,70 \quad \text{и} \quad P(H_2) = 0,25.$$

При этих значениях получается  $P(A_1 \cup A_2) = 0,7975$ .

У п р а ж н е н и е 2. Электронное устройство состоит из двух подсистем  $A$  и  $B$ . Каждая из них проходит предварительный контроль исправности. Результат 100 контрольных проверок показал, что подсистема  $A$  отказывала 10 раз. Подсистема  $B$  отказывала, когда  $A$  работала, 15 раз. Обе подсистемы отказывали вместе в пяти случаях.

а) Чему равна оценка условной вероятности отказа  $A$  при условии отказа  $B$ ?

О т в е т:  $1/4$ .

б) Чему равна оценка вероятности отказа  $A$ , сочетаемого с исправной работой  $B$ ?

О т в е т:  $5/100$ .

---

\*  $P(A_1 | H_1)$  будет, по всей вероятности, меньше, чем  $P(A_2 | H_2)$  из-за возможности повреждения аппаратуры в момент прилунения.



химического топлива. Газы, образующиеся при горении, заставляют поршень двигаться в цилиндре, выдавливая таким образом жидкий электролит в корпус батареи и смачивая пластины. Как только происходит смачивание, возникает электродвижущая сила, необходимая для работы различных органов управления космического корабля. Два воспламенителя соединяются параллельно, причем при срабатывании любого из них воспламеняется топливо. Поршень может заклинить сразу же на начальном участке, где-нибудь в середине цилиндра или он пройдет без помех всю заданную длину. В последних двух случаях электролит будет либо не полностью выдвинут и частично смочит пластины, тогда электродвижущая сила будет меньше либо электролит будет выдвинут полностью, что создаст достаточную э. д. с.

Бывают случаи, когда для успешного управления кораблем достаточно и этой ограниченной выходной мощности.

Событие  $S$ , состоящее в том, что на выходе будет получена достаточная мощность, зависит от появления следующих событий:  $A_1$  и  $A_2$ —срабатывания хотя бы одного из двух воспламенителей;  $B$ —воспламенения топливного заряда и нормального горения;  $C_1$ —нормального прохождения поршня по всей длине цилиндра;  $C_2$ —заклинивания поршня посредине цилиндра;  $D_1$ —полного выталкивания электролита и выдачи полной мощности;  $D_2$ —частичного выталкивания электролита и выдачи неполной мощности;  $E_1$ —требуется полная мощность;  $E_2$ —необходима только неполная мощность.

Таким образом, событие  $S$  можно записать следующим образом:

$$S = [(A_1 \cup A_2) \cap B \cap C_1 \cap D_1 \cap (E_1 \cup E_2)] \cup \\ \cup [(A_1 \cup A_2) \cap B \cap C_2 \cap D_2 \cap E_2]. \quad (5.9)$$

Поскольку событие  $C_1$  влечет за собой  $D_1$  и аналогично  $C_2$  влечет за собой  $D_2$ , мы будем иметь

$$C_1 \cap D_1 = C_1 \quad \text{и} \quad C_2 \cap D_2 = C_2. \quad (5.10)$$

Следовательно, из соотношения (5.9) можно исключить  $D_1$ ,  $D_2$ ; далее, можно выделить выражение  $[(A_1 \cup A_2) \cap B]$ .

После этих преобразований (5.9) приобретает следующий вид:

$$S = [(A_1 \cup A_2) \cap B] \cap \{[C_1 \cap (E_1 \cup E_2)] \cup [C_2 \cap E_2]\}. \quad (5.11)$$

Используя соотношения табл. 5.1, последнее выражение можно преобразовать к виду

$$S = [(A_1 \cup A_2) \cap B \cap C_1 \cap E_1] \cup [(A_1 \cup A_2) \cap B \cap C_1 \cap E_2] \cup [(A_1 \cup A_2) \cap B \cap C_2 \cap E_2]. \quad (5.12)$$

Мы видим, что выражения в скобках, связанные символом объединения в соотношении (5.12), обозначают несовместные события, поскольку  $C_1 \cap C_2 = 0$ ,  $E_1 \cap E_2 = 0$ . Следовательно, при подсчете вероятности  $P(S)$  вероятности этих событий просто складываются. Чтобы определить вероятность успеха  $P(S)$ , предположим сначала, что  $A_1$  и  $A_2$  статистически независимы и обладают той же самой вероятностью  $P(A)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = \\ &= P(A)(2 - P(A)). \end{aligned}$$

Далее, из физических соображений естественно ожидать, что событие  $B$  (воспламенение и горение) более вероятно в том случае, когда вместо одного запальника сработают оба. Необходимо знать  $P(B|A_1 \cup A_2)$ . Однако вместо этой величины в нашем распоряжении может оказаться величина вероятностей  $P(B|\overline{A_1} \cap A_2)$ ,  $P(B|A_1 \cap \overline{A_2})$ ,  $P(B|A_1 \cap A_2)$ . Поскольку все три условия в этих вероятностях несовместны, то определение по ним  $P(B|A_1 \cup A_2)$  не представляет труда.

Вероятности событий  $C_1$  и  $C_2$  зависят от события  $(A_1 \cup A_2) \cap B$ . Следовательно, нам необходимо знать вероятности

$$P(C_1|(A_1 \cup A_2) \cap B) \text{ и } P(C_2|(A_1 \cup A_2) \cap B).$$

**З а м е ч а н и е.** События  $C_1$  и  $C_2$  несовместны, а значит, они не являются независимыми (за исключением того случая, когда одна или обе вероятности  $P(C_1)$ ,  $P(C_2)$  равны нулю). (См. следующий пример).

События  $E_1$  и  $E_2$  должны быть статистически независимыми от всех остальных событий.

Предыдущее замечание относится также к  $E_1$  и  $E_2$ , поскольку их следует рассматривать как несовместные.

Таким образом, вероятность каждого из событий, заключенных в скобки в (5.12), например первого из них, можно записать следующим образом:

$$[2P(A) - \overline{P(A^2)}][P(B | A_1 \cup A_2)] \times \\ \times [P\{C_1 | (A_1 \cup A_2) \cap B\}][P(E_1)]. \quad (5.13)$$

В гл. 9 будут рассмотрены более общие структурные модели, а также приведены дополнительные примеры.

У п р а ж н е н и е. Несовместные события  $C_1$  и  $C_2$  независимы тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$[P(C_1) = 0] \cup [P(C_2) = 0],$$

т. е. когда выполняется указанное событие\*. Прежде всего, поскольку

$$C_1 \cap C_2 = 0, \text{ то } P(C_1 \cap C_2) = 0.$$

Докажем необходимость („только тогда“). Пусть  $C_1, C_2$  независимы. Тогда

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2) = 0,$$

откуда следует, что один или два сомножителя обязаны равняться нулю. Докажем достаточность („тогда“). Допустим, что либо  $P(C_1) = 0$ , либо  $P(C_2) = 0$ , либо и то и другое. Пусть  $P(C_1) = 0, P(C_2) > 0$ . На основании формулы (5.5)

$$P(C_1 | C_2) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_2)}. \quad (5.14)$$

Но правая часть (5.14) есть нуль.

Значит,

$$P(C_1 | C_2) = P(C_1) = 0$$

и  $C_1, C_2$  оказываются независимыми по самому определению независимости. Если поменять местами  $C_1$  и  $C_2$ , доказательство останется тем же. Остается один случай, когда  $P(C_1) = P(C_2) = 0$ . В этом случае

$$0 = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2) = 0 \cdot 0 = 0, \quad (5.15)$$

т. е. по (5.6)  $C_1$  и  $C_2$  независимы.

---

\* Имеется в виду, что если какая-либо формула справедлива, то ее можно считать «происшедшим событием». Например, можно в этом смысле считать, что имеет место «событие»  $\{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\}$ . (Прим. перев.)

## 5.4. ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Распределения вероятностей употребляются с целью описания структуры выборочного пространства исходов опыта.

По-видимому, наиболее простой пример распределения вероятностей возникает при рассмотрении выборочного пространства, состоящего из двух исходов: успеха ( $S$ ) и неудачи ( $F$ ) \*. Предпочтительнее иметь дело с числами, а не с буквами. В соответствии с этим противопоставим букве  $S$  число 0, а букве  $F$  — цифру 1. Приняв во внимание, что вероятность, соответствующая всему выборочному пространству, равна 1, сопоставим событию  $S$  вероятность  $q \geq 0$ , а событию  $F$  — вероятность  $p = 1 - q$ . Тогда естественно вероятности  $q$  и  $p$  сопоставить непосредственно числам 0 и 1.

То, что мы сделали, является, по существу, отображением выборочного пространства на действительные числа, при котором вероятности выборочных точек переходят в вероятности действительных чисел. Функция, осуществляющая подобное отображение, в общем случае называется случайной величиной. Обозначим случайную величину в приведенном примере через  $X$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} X(S) = 0 &\equiv \text{если наступает } S, \text{ то } X = 0, \\ X(F) = 1 &\equiv \text{если наступает } F, \text{ то } X = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

и, поскольку

$$\left. \begin{aligned} P(S) &= q, \\ P(F) &= p \equiv 1 - q, \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

мы будем говорить, что

$$\left. \begin{aligned} P(X = 0) &= q, \\ P(X = 1) &= p \equiv 1 - q. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Заметим, что мы не требуем обязательно взаимно однозначного соответствия. Например, вообразим себе выборочное пространство состоящим из трех исходов:  $S$ ,  $F_1$  и  $F_2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  обозначают два вида неудачи. Предположим также, что

$$P(F_1) = p_1, P(F_2) = p_2 \text{ и } p_1 + p_2 = p.$$

---

\* Начальные буквы английских слов «success» и «failure»; последнее переводится также как «отказ». (Прим. перев.)



Тогда можно рассмотреть соответствие

$$\left. \begin{aligned} X(S) &= 0, \\ X(F_1 \cup F_2) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

при котором (5.18) также будет выполняться. Тем не менее, отправляясь от нового выборочного пространства  $(0,1)$ , мы уже не сможем его однозначно отобразить на первоначальное пространство. Все, что можно сделать, — это отобразить число 1 снова на множество  $F_1$  и  $F_2$ . Таким образом, выражение « $X=1$ » дает информацию лишь о том, что произошло либо  $F_1$ , либо  $F_2$ , либо  $F_1$  совместно с  $F_2$ , т. е. произошла неудача одного вида или обоих видов одновременно. Однако можно построить и иное соответствие. Если важно различать виды неудачи, то можно, например, положить

$$Y(S) = 0, \quad Y(F_1) = 1, \quad Y(F_2) = 2 \quad (5.20)$$

с соответствующими вероятностями  $1-p_1-p_2$ ,  $p_1$  и  $p_2$ . В этом случае соответствие уже взаимно однозначно.

В приведенных примерах мы имеем дело с дискретными распределениями вероятностей на конечном выборочном пространстве. Примером дискретного распределения вероятностей, в котором выборочное пространство бесконечно, может служить схема бросания монеты (§ 5.2). Определим случайную величину  $X$  посредством соотношения  $X(O_j) = j$ . Если допустить, что

$$P(O_j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j,$$

то мы будем иметь

$$P(X=j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j, \quad j=1, 2, \dots$$

Легко видеть, что сумма всех вероятностей составляет 1.

Одним из наиболее важных дискретных распределений является *биномиальное распределение* (§ 6.2). Это двухпараметрическое распределение с параметрами  $n$  и  $p$ , где  $n$  — любое натуральное число, а  $p$  — любое вещественное число от 0 до 1. Биномиальное распределение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} P(X=f) &= \binom{n}{f} p^f q^{n-f}, \\ q &= 1-p, \\ f &= 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.21)$$

В настоящей книге всюду параметру  $p$  приписывается смысл неудачи (отказа) в отдельном испытании,  $n$  обозначает общее число испытаний. Вероятность любого сочетания исходов (неудачи или успеха) в произвольной группе из  $k \leq n$  испытаний будет неизменной, каковы бы ни были результаты остальных испытаний. Это обстоятельство может служить отправной точкой определения независимости испытаний; в подобной ситуации будем говорить, что испытания независимы.

Смысл формулы (5.21) заключается в том, что вероятность равенства  $X=f$  при  $n$  испытаниях дается выражением в правой части. Возможными значениями  $X$  являются все целые числа от 0 до  $n$ . Чтобы вывести формулу (5.21) из определения  $X$ , введем в рассмотрение выборочное пространство всех возможных исходов как множество наборов и букв  $S$  и  $F$  (выборочных точек):  $(S, S, \dots, S)$ ,  $(F, S, \dots, S)$ ,  $(S, F, \dots, S)$  и т. д. до  $(F, F, \dots, F)$ . Случайная величина  $X$  отображает на  $f$  множество возможных выборочных точек, содержащих ровно  $f$  символов  $F$  ( $f$  — целое неотрицательное число). Вероятность, соответствующая любой выборочной точке с  $f$  неудачами и  $(n-f)$  успехами, есть  $p^f q^{n-f}$ . Поскольку всего таких точек

$$\binom{n}{f} \equiv \frac{n!}{(n-f)! f!},$$

то общая вероятность, сопоставленная целому неотрицательному числу  $f$ , есть

$$\binom{n}{f} p^f q^{n-f}.$$

То, что вероятность любого исхода  $(S, \dots, F, \dots, F, S)$  с  $f$  неудачами есть

$$q \dots p \dots pq = p^f q^{n-f},$$

является следствием независимости. Вспомнив, что отдельные выборочные точки представляют собой несовместные события, мы приходим к (5.21).

**Пример.** При  $n=1$  получается распределение, уже рассмотренное ранее:

$$P(X=0) = q, \quad P(X=1) = p.$$

**Упражнение.** Каким будет распределение случайной величины  $Y = X/n$ , где  $X$  имеет биномиальное распределение (5.21)?

Пример. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  имеют одно и то же биномиальное распределение с параметрами  $p$  и  $n = 1$ .

Пусть также

$$P[(X_1 = j) \cap (X_2 = k)] = P(X_1 = j) P(X_2 = k),$$

где  $j = 0, 1$ ;  $k = 0, 1$ . Показать, что сумма  $X_1 + X_2$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $p$ ,  $n = 2$ .

Легко видеть, что событие  $X_1 + X_2 = 0$  равносильно событию  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 0) &= P[(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)] = \\ &= P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) = q^2. \end{aligned}$$

Событие  $X_1 + X_2 = 1$  равносильно событию

$$[(X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)] \cup [(X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)].$$

Так как события, обозначенные квадратными скобками, несовместны, то их вероятности складываются.

Следовательно,

$$P[X_1 + X_2 = 1] = qp + pq = 2pq.$$

Подобное же рассуждение показывает, что

$$P(X_1 + X_2 = 2) = p^2.$$

Таким образом, вообще

$$P(X_1 + X_2 = f) = \binom{2}{f} p^f q^{2-f}, \quad f = 0, 1, 2.$$

Обратим внимание на то, каким образом в этом примере использовалось соотношение

$$P[(X_1 = j) \cap (X_2 = k)] = P(X_1 = j) P(X_2 = k).$$

Это соотношение в точности является определением независимости двух дискретных случайных величин ( $j$  и  $k$  пробегает всевозможные значения соответственно  $X_1$  и  $X_2$ ).

У п р а ж н е н и е. Воспользовавшись определением условной вероятности п. 5.3.1, показать, что

$$P[(X_1 = j) | (X_2 = k)] = P(X_1 = j),$$

тогда и только тогда, когда  $X_1$  и  $X_2$  независимые случайные величины.

У к а з а н и е. Воспользоваться соотношением

$$P[(X_1 = j) | (X_2 = k)] P(X_2 = k) = P[(X_1 = j) \cap (X_2 = k)].$$

У п р а ж н е н и е. Записать условие независимости в совокупности для  $n$  дискретных случайных величин.

Использовать определение независимости в совокупности событий, приведенное в п. 5.3.2.

**Пример** Покажем, что возможен такой случай, когда  $X_1$  и  $X_2$ ;  $X_1$  и  $X_3$ ;  $X_2$  и  $X_3$  независимы и, тем не менее,  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  зависимы.

Пусть каждой из точек  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(1,1,1)$  сопоставлена вероятность  $1/4$ . Прежде всего, в общем случае

$$P(X_1 = j, X_2 = k) = \sum_n P(X_1 = j, X_2 = k, X_3 = n),$$

а также

$$P(X_1 = j, X_3 = n) = \sum_k P(X_1 = j, X_2 = k, X_3 = n)$$

и

$$P(X_2 = k, X_3 = n) = \sum_j P(X_1 = j, X_2 = k, X_3 = n).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} P(X_1 = j) &= \sum_k \sum_n P(X_1 = j, X_2 = k, X_3 = n) = \\ &= \sum_k P(X_1 = j, X_2 = k) \end{aligned}$$

и т. д. Мы находим далее, что

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4}.$$

Подобное же равенство справедливо и для остальных сочетаний  $(X_1, X_2)$  и  $(X_2, X_3)$ .

Суммируя, получаем

$$P(X_1 = j) = P(X_2 = k) = P(X_3 = n) = \frac{1}{2}, \quad j, k, n = 0, 1,$$

а следовательно,

$$P(X_1 = j, X_2 = k) = P(X_1 = j) P(X_2 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right);$$

аналогично и для всех остальных сочетаний  $(X_1, X_3)$  и  $(X_2, X_3)$ . Однако мы имеем, например:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \neq P(X_1 = 1) P(X_2 = 1) P(X_3 = 1) = \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

При изучении непрерывных случайных величин и распределений вероятностей нам придется снова возвратиться к понятию независимости. Другим важным дискретным распределением является распределение Пуассона.

$$P(X = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}, \quad \lambda > 0; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что  $\sum_{j=0}^{\infty} P(X = j) = 1$  (см. § 6.5).

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что формула

$$P(Y = j) = q^{j-1} p, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где  $q, p > 0$  и  $p + q = 1$ , задает распределение вероятностей (это распределение носит название *геометрического распределения*).

У п р а ж н е н и е 3. Пусть  $X$  обозначает число независимых испытаний с постоянной вероятностью неудачи  $p$ , которое необходимо произвести до первой неудачи. Показать, что  $X$  имеет геометрическое распределение.

У п р а ж н е н и е 4. При тех же условиях найти распределение числа испытаний до  $k$ -й неудачи.

О т в е т:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k},$$

где  $n = k, k + 1, \dots$  (см. § 6.4).

## 5.5. НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Мы рассмотрели некоторые наиболее важные дискретные распределения вероятностей, которые далее будут употребляться в этой книге. Здесь же мы дадим определение и приведем некоторые примеры непрерывных распределений вероятностей.

Если мы будем производить какие-либо измерения (например, длины стержня, веса двигателя ракеты, выходного напряжения трансформатора и т. п.), то в результате получится некоторое множество действительных чисел, например 2,53; 2,58; 2,50 и т. д. Измерительный прибор, который мы используем, может быть градуирован таким образом, что в результате измерений все время будут получаться дискретные числа. Однако легко представить себе, что шкала измерения неограниченно измельчается, так что результатами измерений

длины стержня могут быть числа 2,530663..., 2,579149..., 2,504116... и т. д. Другими словами, можно представить, что длина может принимать любые значения из некоторого интервала действительных чисел  $a \leq x \leq b$ . Это и есть пример непрерывного или несчетного выборочного пространства согласно определению § 5.2.

При любом способе повышения точности измерения на каждом конечном этапе повышения точности всегда будут пробелы, т. е. интервалы, состоящие из чисел, не принадлежащих выборочному пространству. Поэтому выборочное пространство на практике всегда дискретно\*. Таким образом, понятие непрерывного пространства используется исключительно с целью удобства. Вместе с тем следует заметить, что это удобство весьма существенно: в том случае, когда мы имеем дело с «количественными» измерениями подобного типа, достигается значительное упрощение в описании структуры выборочного пространства.

Если рассматривать непрерывные выборочные пространства как предельный случай дискретных, то мы обнаруживаем, что, хотя в допредельном случае отдельная точка может иметь положительную вероятность, в пределе вероятность каждой отдельной точки становится равной нулю\*\*. Тем не менее, если выборочное пространство есть множество точек интервала  $a \leq x \leq b$ , мы должны принять, что вероятность, соответствующая всему пространству, равна единице. Это приводит к определению *плотности вероятности*; для вычисления вероятностей при непрерывном выборочном пространстве используется операция интегрирования. Определение плотности вероятностей (на оси  $x$ ) состоит в следующем:  $f(x)$  является плотностью вероятностей, если она интегрируема,

$$f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

---

\* И, стало быть, не является плотным во множестве действительных чисел.

\*\* О разрывных функциях распределения см. § 5, 6.

Выражение  $f(x)dx$  называют *элементом плотности* в точке  $x$ ; он равен вероятности, соответствующей интервалу  $(x, x + dx)$ . Вероятность, заключенная в интервале  $a < x \leq b$ , определяется интегралом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

В случае непрерывного распределения интервалам

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq x < b, \quad a < x < b$$

соответствует та же самая вероятность

$$\int_a^b f(x) dx.$$

В случае разрывного распределения следует различать интервалы указанных типов: их вероятности не обязательно совпадают.

Теперь полезно дать определение случайных величин, как и в случае дискретных распределений. Однако мы уже не будем строить понятие случайной величины, исходя из отображения какого-то нечислового непрерывного пространства на интервалы. Вместо этого в качестве исходного выборочного пространства будет взято множество всех вещественных чисел.

Будем говорить, что случайная величина  $\xi$  принадлежит интервалу  $(a, b)$ , коль скоро  $a < \xi \leq b^*$ .

Будем также говорить о плотности вероятностей  $f$ , например,  $f(x)$ , в том смысле, что

$$P(x < \xi < x + dx) = f(x) dx$$

и, стало быть\*\*,

$$P(a < \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (5.23)$$

---

\* Общепринятое обозначение интервалов:  $(a, b) \equiv a < x < b$ ;  $(a, b] \equiv a < x \leq b$ ;  $[a, b) \equiv a \leq x < b$ ;  $[a, b] \equiv a \leq x \leq b$ .

\*\* См. приведенное выше замечание по поводу различных видов интервалов.

У п р а ж н е н и е 1. Пусть

$$f(x) = 0, \quad x < 0,$$
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Посредством интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$  следует показать, что  $f(x)$  — плотность (это плотность известного показательного закона распределения).

У п р а ж н е н и е 2. Используя вид плотности предыдущего примера, вычислить  $F(x) \equiv P(\xi \leq x)$ , считая, что случайная величина  $\xi$  имеет в качестве плотности  $f(x)$ .

Функция  $F(x) = P(\xi \leq x)$  называется *функцией распределения*\*. Одномерная функция распределения  $F(x)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;
- 2)  $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$ ;
- 3)  $F(x)$  не убывает по  $x$ ;
- 4)  $F(x)$  непрерывна по  $x$  справа в любой точке, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x + h) = F(x)$$

( $h > 0$ )\*\*.

Далее, в том случае, когда  $F'(x) = f(x)$  существует и непрерывна при всех  $x$ \*\*\*,  $f(x)$  является плотностью вероятностей и

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Важность свойства 4) будет выяснена, когда в § 5.6 рассмотрим функции распределения для дискретных распределений.

Хорошо известным примером плотности вероятности является *нормальная* плотность, задаваемая формулой

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2],$$
$$-\infty < x < \infty; \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty. \quad (5.24)$$

---

\* В отечественной литературе принято понимать под функцией распределения  $P(\xi < x)$ , а не  $P(\xi \leq x)$ . (Прим. перев.)

\*\* Последнее свойство принимается в качестве соглашения. Можно было бы определить  $F(x)$  как непрерывную слева.

\*\*\* Непрерывность *при всех  $x$*  не обязательна для выполнения данного свойства, но здесь не будет рассматриваться этот вопрос (см. [5], стр. 169).



Это двухпараметрическое распределение с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ , где  $\mu$  оказывается *средним*, а  $\sigma$  — *стандартным отклонением* случайной величины с плотностью  $f(x)$  \*. Если определить *нормированную* случайную величину  $\eta$  посредством формулы

$$\eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma}, \quad (5.25)$$

то  $\eta$  будет обладать нормальной плотностью

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}, \quad (5.26)$$

где  $\varphi(x)$  — нормированная нормальная функция распределения, определяемая формулой

$$P(\eta \leq x) = \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (5.27)$$

Как для  $\varphi(x)$ , так и для  $\Phi(x)$  составлены [подробные таблицы [10], § 6.10.

### 5.6. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Для любой случайной величины  $\xi$  с дискретным распределением

$$P(\xi = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где

$$\sum_i p_i = 1,$$

функция распределения  $F(x)$  определяется как

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i). \quad (5.28)$$

Например, если  $\xi$  обладает биномиальным распределением с  $n = 1$ , то

$$P(\xi \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ q, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < \infty. \end{cases} \quad (5.29)$$

\* Будем говорить также, что *распределение* обладает средним  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$  (эти понятия определены в § 5.7).

Эта функция распределения показана на рис. 5.1. Заметим, что

$$P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a)$$

при всех  $a$  и  $b$ ; однако, например,

$$P(a < \xi < b) \neq F(b) - F(a)$$

при всех  $a$  и  $b$ . Так, при  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$

$$P\left(\frac{1}{2} < \xi \leq 1\right) = p = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right),$$

но

$$P\left(\frac{1}{2} < \xi < 1\right) = 0.$$

Вообще, если точке  $x_0$  соответствует положительная вероятность  $p_0 = P(\xi = x_0)$ , то  $F(x)$  при прохождении этой точки слева направо испытывает «скачок» величины  $p_0$ . Обратно, если  $F(x)$  в точке  $x_0$  терпит разрыв (согласно

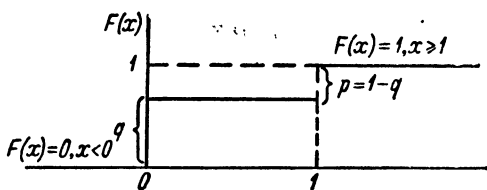


Рис. 5.1.

определению справа она обязана оставаться непрерывной) и величина скачка равна  $p_0$ , то точка  $x_0$  обладает положительной вероятностью  $P(\xi = x_0) = p_0$ . Таким образом, в случае дискретного распределения функция распределения представляет собой ступенчатую функцию.

**Пример.** Как следует записать бесконечный ряд для функции распределения  $F(x)$  общего дискретного распределения (5.28)?

**О т в е т.** Пусть  $\varepsilon(x - x_i)^*$  — единичная ступенчатая функция, определенная равенствами

$$\varepsilon(x - x_i) = \begin{cases} 0, & x < x_i, \\ 1, & x \geq x_i. \end{cases} \quad (5.30)$$

\* Эту функцию обозначают также буквой  $E$ . (Прим. перев.).

Тогда

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \varepsilon(x - x_i), \quad (5.31)$$

где

$$p_i \equiv P(\xi = x_i) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Заметим также, что  $\varepsilon(x)$  представляет собой функцию распределения, для которого вся вероятность сосредоточена в точке  $x=0$ .

### 5.7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ И МОМЕНТЫ

Пусть  $\xi$  — случайная величина с плотностью  $f(x)$ . Тогда, если  $g(\xi)$  — некоторая функция от  $\xi$ , то математическим ожиданием  $g(\xi)$  называется выражение вида

$$E(g) \equiv E[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \quad (5.32)$$

В случае дискретного распределения интеграл заменяется суммой, и мы имеем соответственно

$$E[g(\xi)] = \sum_i g(x_i) P(\xi = x_i). \quad (5.32')$$

Если  $g(\xi) = \xi^n$ , то  $\alpha_n = E(g)$  называется  $n$ -м *начальным моментом* случайной величины  $\xi$  (или распределения с плотностью  $f(x)$ ). При  $n=1$  получается *среднее* или *математическое* ожидание случайной величины  $\xi$ :

$$E(g) \equiv E(\xi) \equiv \mu. \quad (5.33)$$

Упражнение 1. Показать, что среднее, соответствующее нормальной плотности, дается формулой (5.24).

Весьма полезно рассматривать  $n$ -й момент по отношению к среднему или  $n$ -й центральный момент, который по аналогии определяется как

$$\mu_n \equiv E[(\xi - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx. \quad (5.34)$$

При  $n=2$  выражение  $E[(\xi - \mu)^2]$  называется дисперсией  $\xi$ , или сокращенно  $\text{var } \xi$ ,  $\mu_2$ , или чаще  $\sigma^{2*}$ . Корень из дисперсии

$$+ \sqrt{\text{var } \xi} = \sigma$$

называют *стандартным отклонением* случайной величины  $\xi$ .

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что параметр  $\sigma$  для случайной величины  $\xi$  с плотностью (5.24) является стандартным отклонением.

У п р а ж н е н и е 3. Показать, что  $\alpha_2 = \mu^2 + \sigma^2$ .

У п р а ж н е н и е 4. Показать, что если  $\xi$  обладает средним  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ , то у случайной величины  $\eta = (\xi - \mu)/\sigma$  среднее — нуль, а стандартное отклонение — единица.

У п р а ж н е н и е 5. Пусть функция распределения  $F(x)$  определена формулой

$$F(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du \quad (5.35)$$

при  $x > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Найти среднее и дисперсию случайной величины, обладающей этой функцией распределения. Использовать тот факт, что преобразование Лапласа функции  $t^\beta$  есть

$$\int_0^\infty t^\beta e^{-st} dt = \Gamma(\beta + 1) s^{-\beta-1}, \quad \beta > -1,$$

а также соотношение

$$E[(\xi - \mu)^2] = E(\xi^2) - \mu^2.$$

### 5.7.1. Неравенство Чебышева

Если известны все моменты распределения, то при весьма общих предположениях можно показать, что заданным набором моментов обладает только единственное распределение (см. [5], стр. 176). Однако уже первые два момента,  $E(\xi) = \mu$  и  $\text{var } \xi = \sigma^2$ , дают много ин-

\* В отечественной литературе принято обозначение  $D\xi$ . (Прим. перев.)

формации о распределении. Это видно из неравенства Чебышева

$$P(|\xi - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \quad k > 0, \quad (5.36)$$

справедливого для любой случайной величины  $\xi$  со средним  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Здесь мы докажем это неравенство лишь в случае существования плотности  $f(x)$ ; однако на самом деле оно справедливо в любом случае ([5], стр. 182)\*.

Доказательство. Пусть  $K > 0$ . Тогда  $(x - \mu)^2 \geq K$  при  $x \geq \mu + \sqrt{K}$  и при  $x \leq \mu - \sqrt{K}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(\xi - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\mu - \sqrt{K}} + \int_{\mu - \sqrt{K}}^{\mu + \sqrt{K}} + \int_{\mu + \sqrt{K}}^{\infty}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Поскольку второй интеграл  $\geq 0$ , то

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu - \sqrt{K}} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu + \sqrt{K}}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \quad (5.38)$$

Так как в интервалах

$$(-\infty, \mu - \sqrt{K}) \text{ и } (\mu + \sqrt{K}, \infty) \quad (x - \mu)^2 \geq K,$$

то правая часть (5.38) не увеличится, если заменить в обоих интегралах  $(x - \mu)^2$  на  $K$ . Следовательно,

$$\sigma^2 \geq KP(\xi \leq \mu - \sqrt{K}) + KP(\xi \geq \mu + \sqrt{K}) = KP((\xi - \mu)^2 \geq K).$$

Поскольку событие  $(\xi - \mu)^2 \geq K$  равносильно событию  $|\xi - \mu| \geq \sqrt{K}$ , то мы получим

$$P(|\xi - \mu| \geq \sqrt{K}) \leq \frac{\sigma^2}{K}.$$

Положив  $K \equiv k^2 \sigma^2$ , придем к формуле (5.36).

\* Наиболее простое доказательство неравенства Чебышева дается в книге М. Лозва «Теория вероятностей». Изд-во иностранной литературы, 1962, стр. 19. (Прим. перев.)

Более тонкое неравенство (принадлежащее Гауссу) состоит в том, что если  $f(x)$  непрерывна и имеет одну *вершину* (вершиной называется точка  $\xi = x_0$ , в которой  $f(x)$  достигает максимума), то

$$P(|\xi - x_0| \geq k\tau) \leq \frac{4}{9k^2}, \quad (5.39)$$

где  $\tau^2 = \sigma^2 + (x_0 - \mu)^2$ .

Если  $x_0 = \mu$ , то

$$P(|\xi - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{4}{9k^2},$$

что уточняет неравенство Чебышева. Однако неравенство (5.39) можно использовать не всегда.

**Пример.** Пусть  $\xi$  имеет нормальную плотность. Сравните верхнюю границу вероятности  $P(|\xi - \mu| \geq 2\sigma)$ , полученную из неравенства (5.39), с вероятностями, взятыми из таблицы нормального распределения (см. § 6.10).

**Ответ.** Из (5.39) верхняя граница получается  $\frac{1}{9} = 0,1111$ . Из таблиц [10] для нее получается значение 0,0455.

Почему в этом случае можно использовать неравенство (5.39)?

## 5.8. МОМЕНТНАЯ ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

Моментная производящая функция используется с целью получения общих формул для моментов случайной величины (моментов распределения). Моментная производящая функция (м. п. ф.) случайной величины  $\xi$  с плотностью  $f(x)$  определяется равенством

$$\psi(t) \equiv E(e^{t\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx. \quad (5.40)$$

Из этой формулы получаем

$$\psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (5.41)$$

$$\psi'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = a_1 \quad (5.42)$$

и вообще

$$\psi^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = a_n. \quad (5.43)$$

Если существуют моменты  $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ , то  $\psi(t)$  можно записать в виде бесконечного ряда

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} t^n. \quad (5.44)$$

Пример 1. Пусть

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$f(x) = 0$  для остальных  $x$ .

Тогда

$$\psi(t) = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{e^t - 1}{t}. \quad (5.45)$$

Имеем

$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

Таким образом,

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1}. \quad (5.46)$$

Пример 2. Пусть  $f(x)$  — нормальная плотность, определенная (5.24); тогда

$$\psi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2} dx. \quad (5.47)$$

Положим

$$(x - \mu)/\sigma = v, \quad dx = \sigma dv.$$

Тогда

$$\psi(t) = e^{\mu t + t^2 \sigma^2 / 2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(v-t\sigma)^2 / 2} dv = e^{\mu t + t^2 \sigma^2 / 2}. \quad (5.48)$$

Положим теперь  $\mu = 0$ . Тогда  $\alpha_n = \mu_n$ , откуда получим

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{t^2 \sigma^2 / 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right)^{2n} \frac{(2n)!}{\left( \frac{2n}{2} \right)!} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n_{\text{четн}}}^{\infty} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right)^n \frac{n!}{\left( \frac{n}{2} \right)!} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mu_n = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

$$\mu_n = \sigma^n \frac{n!}{2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)!}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (5.49)$$

Пример 3. Показать, что если  $\eta = a\xi + b$  и  $\psi(t) = E(e^{t\xi})$ , то

$$E(e^{\eta t}) = e^{bt} \psi(at). \quad (5.50)$$

Таким образом, м. п. ф. нормированной нормальной плотности, определенной (5.26), есть  $e^{t^2/2}$ .

В случае дискретного распределения м. п. ф. (см. (5.32')) дается выражением

$$\psi(t) \equiv E(e^{t\xi}) = \sum_i e^{tx_i} P(\xi = x_i). \quad (5.51)$$

Пример 4. Биномиальное распределение, определенное (5.21), обладает м. п. ф.

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (pe^t)^i q^{n-i} = (q + pe^t)^n. \quad (5.52)$$

Упражнение. Какой вид имеет м. п. ф. распределения Пуассона (5.22)?

Ответ.

$$\psi(t) = e^{-\lambda + \lambda e^t}.$$

Вычислить среднее и дисперсию.

Упражнение. Найти м. п. ф. показательного распределения, задаваемого формулой

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (5.53)$$

Ответ.

$$\psi(t) = \frac{1}{(1 - \theta t)}.$$

Из (5.50) получаем также м. п. ф. распределения случайной величины  $\xi/n$ , где  $n$  — любая постоянная:

$$\psi_1(t) = \psi\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{1 - (\theta t/n)}.$$



Справедливо следующее свойство. Если случайные величины независимы и обладают м. п. ф.  $\psi_2(t)$ , то сумма

$$\xi = \sum_{i=1}^n x_i$$

соответствует м. п. ф.

$$\psi_2(t) = \prod_{i=1}^n \psi_i(t).$$

В частности, если все  $x_i$  одинаково распределены, то

$$\psi_2(t) = (\psi(t))^n,$$

где  $\psi(t) = \psi_i(t)$  при всех  $i$ .

Например, мы можем найти распределение случайной величины

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n},$$

где все  $x_i$  обладают одним и тем же показательным распределением вида (5.53). В этом случае случайная величина  $\hat{\theta}$  обладает плотностью вида

$$g(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{n}{\theta}\right)^n x^{n-1} e^{-xn/\theta}}{\Gamma(n)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (5.54)$$

что можно показать непосредственно, обратив м. п. ф.

$$\psi_2(t) \equiv \left[ \psi\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n = \left(1 - \frac{\theta t}{n}\right)^{-n}$$

при помощи методов обратного преобразования Лапласа. Однако эти методы выходят за рамки нашей книги. Но можно показать, что  $\psi_2(t)$  является м. п. ф. распределения (5.54). Для этого понадобится лишь прямое преобразование Лапласа, выкладки с которым более просты.

Между м. п. ф. и плотностью существует определенное взаимно-однозначное соответствие. Если тем или

иным способом удалось определить м. п. ф. интересующей нас случайной величины, причем оказалось, что ее м. п. ф. совпадает с м. п. ф. известного распределения, то распределение первой случайной величины будет совпадать с последним. Теоретическое исследование задачи единственности показывает, что м. п. ф. не всегда достаточны для указанной цели, поскольку они существуют не у всякой случайной величины. Поэтому вводят *характеристические функции* (х. ф.), определяя их как  $E(e^{ikt})$ , где  $i = \sqrt{-1}$  (см. [5], гл. 10)\*.

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что м. п. ф. распределения (5.54) равна  $\psi_2(t) = \left(1 - \frac{\theta t}{n}\right)^n$ . (Воспользоваться соотношением

$$\int_0^{\infty} e^{-su} u^m du = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$$

для преобразования Лапласа).

У п р а ж н е н и е 2. Распределение вероятностей суммы  $k$  независимых пуассоновских случайных величин с параметром  $\lambda$  является также распределением Пуассона с параметром  $k\lambda$ . Обобщить этот результат на тот случай, когда  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , различны.

У п р а ж н е н и е 3. Применить м. п. ф. к биномиальному распределению. Показать, что если  $v_1, v_2, \dots, v_k$  — независимые биномиально распределенные случайные величины с параметрами  $(n_i, p)$ , то  $\sum_{i=1}^k v_i$  обладает биномиальным распределением с параметрами  $\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$ .

## 5.9. ДВУМЕРНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Двумерные распределения вероятностей возникают тогда, когда мы хотим выразить вероятность одновременного осуществления двух событий, т. е. вероятность того, что произойдет как одно, так и другое событие. Например,

$$P(F_1 < F \leq F_2, \quad r_1 < r \leq r_2).$$

\* Если в формуле (5.40) допустить для  $t$  комплексные значения, то характеристическую функцию можно определить как  $\psi(it)$ . (Прим. перев.).

Как легко видеть, в случае независимости  $F$  и  $r$  последнее выражение можно записать в виде произведения

$$P(F_1 < F \leq F_2) \cdot P(r_1 < r \leq r_2).$$

Совместная функция распределения случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  определяется формулой

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n)^*. \quad (5.55)$$

Она обладает следующими свойствами:

1.  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не убывает и непрерывна справа по каждой переменной.

2. Если любую совокупность переменных, скажем  $x_k, \dots, x_n$ , устремить к  $+\infty$ , то предельное значение обеих частей (5.55) будет функцией распределения (называемой безусловной)

$$\lim_{x_k, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv G(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ и}$$

$$G(x_1, \dots, x_{k-1}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_{k-1} \leq x_{k-1}). \quad (5.56)$$

Если же *все* переменные  $x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty$ , то  $F \rightarrow 1$ .

3. Если *какая-либо* из переменных  $x_1, \dots, x_n \rightarrow -\infty$ , то  $F \rightarrow 0^{**}$ .

Перечисленные выше свойства представляют непосредственное обобщение соответствующих свойств одномерной функции распределения. Чтобы вычислить вероятность события

$$(a_1 < \xi \leq b_1) \cap (a_2 < \eta \leq b_2),$$

мы поступим следующим образом. Имеем

$$P(a_1 < \xi \leq b_1, a_2 < \eta \leq b_2) = P(\xi \leq b_1, \eta \leq b_2) - P(\xi \leq b_1, \eta \leq a_2) - P(\xi \leq a_1, \eta \leq b_2) + P(\xi \leq a_1, \eta \leq a_2), \quad (5.57)$$

\* Вместо символа „ $\cap$ “ мы будем употреблять в подобных обозначениях запятую.

\*\* Свойств 1, 2 и 3 недостаточно для того, чтобы данная функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  была функцией распределения; необходимо добавить условие согласованности. В случае, когда  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дифференцируема, последнее сводится к неравенству  $\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \geq 0$ , которое должно выполняться для всех  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . (Прим. перев.).

$$\begin{aligned} P(a_1 < \xi \leq b_1, a_2 < \eta \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - \\ - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что на рис. 5.2  $P(\xi \leq b_1, \eta \leq b_2)$  представляет собой вероятность, заключенную в „юго-западном“ квадранте (включая вероятность границ) с вершиной  $(b_1, b_2)$ .  $P(\xi \leq b_1, \eta \leq a_2)$  дает вероятность юго-западного квадранта (с вероятностью границ) с вершиной  $(b_1, a_2)$ . Аналогичный смысл имеет и следующий член  $P(\xi \leq a_1, \eta \leq b_2)$ . Наконец, последний член „возвращает“ вероятность, содержащуюся в юго-западном квадранте (с вероятностью границ) с вершиной  $(a_1, a_2)$ , так как эта вероятность была вычтена дважды: вторым и третьим членами (5.57).

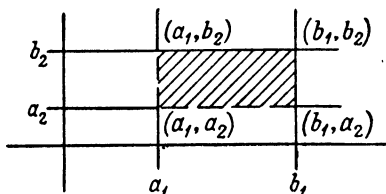


Рис. 5.2.

Если записать

$$a_1 = x, \quad b_1 = x + h_1, \quad a_2 = y, \quad b_2 = y + h_2,$$

где  $h_1, h_2 > 0$ , то (5.58) принимает вид

$$\begin{aligned} P(x < \xi_1 \leq x + h_1, y < \eta \leq y + h_2) = F(x + h_1, y + h_2) - \\ - F(x + h_1, y) - [F(x, y + h_2) - F(x, y)]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Разделив (5.59) на  $hk$ , мы получим, что в случае существования частной производной  $\partial^2 F / \partial x \partial y$  в точке  $(x, y)$  при  $h, k \rightarrow 0$  левая часть стремится к плотности вероятностей в точке  $(x, y)$ . Таким образом, мы приходим к определению плотности в случае двух величин  $\xi, \eta$ , в терминах их совместной функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (5.60)$$

Аналогично при  $h$  измерениях

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (5.61)$$

Две случайные величины называются независимыми, если их совместную функцию распределения можно представить в виде

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y), \quad (5.62)$$

где

$$F_1(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

и

$$F_2(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y),$$

т. е.  $F_1(x)$  и  $F_2(y)$  — (безусловные) функции распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  соответственно. Уравнение (5.62) можно взять в качестве определения независимости двух случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . Аналогично выражение для  $n$  случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  в случае их независимости будет иметь вид

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n F_j(x_j), \quad (5.63)$$

где  $F_j(x_j)$  — безусловная функция распределения.

Применив условие независимости к (5.58), будем иметь

$$\begin{aligned} P(a_1 < \xi \leq b_1, a_2 < \eta \leq b_2) = \\ = [F_1(b_1) - F_1(a_1)][F_2(b_2) - F_2(a_2)]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Формула (5.64) показывает, что в случае независимости

$$P(I_1, I_2) = P(I_1)P(I_2), \quad (5.65)$$

где  $I_1, I_2$  — полуинтервалы вида  $a < \xi \leq b$ . В точности так, как при обычном умножении, (5.65) сохраняет смысл не только для интервалов, но и для любых точечных множеств, которым приписана вероятность. Мы уже использовали (5.65) в том случае, когда каждый из  $I_1, I_2$  состоял из одной точки. Это свойство сохраняется также в том случае, когда  $I_1, I_2$  обозначают конечные или счетные множества точек в случае дискретного выборочного пространства.

**Пример.** Пусть  $X$  и  $Y$  независимы и биномиально-распределены с параметрами  $n = 2$  в каждом случае и соответственно  $p_1$  и  $p_2$ . Чему равна вероятность того, что ни одна из этих случайных величин не будет равна нулю?

О т в е т.

$$P(X \neq 0, Y \neq 0) = P_1(X \neq 0) P_2(Y \neq 0) = \\ = [1 - P_1(X = 0)] [1 - P_2(Y = 0)] = (1 - q_1^2) (1 - q_2^2).$$

Если совместная плотность существует, то в общем случае

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, u) dudt. \quad (5.66)$$

Формула (5.66) утверждает, что двойное интегрирование совместной плотности по заштрихованной области дает совместное распределение  $\xi$  и  $\eta$ . (Безусловное) распределение получим, положив в (5.66)  $y \rightarrow \infty$ :

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x dt \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t, u) du \right] = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt \quad (5.67)$$

(аналогично и для  $F_2(y)$ ). В (5.67)  $f_1(x)$  представляет собой (безусловную) плотность  $\xi$ :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u) du. \quad (5.68)$$

Аналогично

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y) dt \quad (5.69)$$

— (безусловная) плотность  $\eta$ .

В случае независимости величин  $\xi$  и  $\eta$  применение (5.60) и (5.62) дает

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \quad (5.70)$$

### 5.9.1. Условные распределения

Предположим, что случайная величина приняла значение из интервала  $y < \eta < y + k$ . Условная вероятность того, что  $\xi \leq x$ , будет при этом условии равна

$$P(\xi \leq x | y < \eta < y + k) = \frac{P(\xi \leq x, y < \eta < y + k)}{P(y < \eta < y + k)} = \quad (5.71)$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+k} f(t, u) dudt}{\int_y^{y+k} f_2(u) du} \quad (5.72)$$

или

$$P(\xi \leq x | y < \eta < y + k) = \frac{\frac{1}{k} \int_y^{y+k} du \left[ \int_{-\infty}^x f(t, u) dt \right]}{\frac{1}{k} \int_y^{y+k} f_2(u) du}. \quad (5.73)$$

Если теперь положить  $k \rightarrow 0$ , то правая часть (5.73) перейдет в

$$\frac{\int_{-\infty}^x f(t, y) dt}{f_2(y)}$$

и мы получим

$$P(\xi \leq x | \eta = y) = \frac{\int_{-\infty}^x f(t, y) dt}{f_2(y)}. \quad (5.74)$$

Последнее выражение называется условной функцией распределения  $\xi$  при условии, что  $\eta = y$ .

В случае независимых  $\xi$  и  $\eta$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t, y) dt &= f_2(y) \int_{-\infty}^x f_1(t) dt = \\ &= f_2(y) P(\xi \leq x), \end{aligned}$$

так что (5.74) принимает вид

$$P(\xi \leq x | \eta = y) = P(\xi \leq x), \quad (5.75)$$

и вероятность события  $\xi \leq x$  не изменяется при любых гипотезах относительно  $\eta$ , как и должно быть при независимости.

Возвратимся к уравнению (5.74). Продифференцировав его по  $x$ , мы получим плотность  $\xi$  при условии  $\eta = y$ :

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \quad (5.76)$$

Упражнение 1. Показать, что уравнение (5.74) определяет функцию распределения.

Упражнение 2. Найти  $f(y|x)$  по  $f_1(x)$  и  $f(x, y)$ .

Упражнение 3.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y - 2xy), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{для всех остальных } (x, y). \end{cases}$$

Найти безусловную плотность, совместную и условные функции распределения. Какой вид имела бы совместная плотность, если бы величины были независимы, но с теми же безусловными плотностями?

Упражнение 4. Показать, что аналогом (5.68) для дискретных распределений будет (в случае двух распределений) равенство

$$P_1(\xi = x_i) = \sum_j P(\xi = x_i, \eta = y_j). \quad (5.77)$$

### 5.9.2. Ковариация

В гл. 7 и 8 при оценке надежности, связанной с распределением вероятностей (в частности, с распределением времени безотказной работы), мы будем использовать *оценки* параметров одномерных распределений вероятностей. Если в исходное распределение входят два (или более) параметра, их оценки следует рассматривать как случайные величины, поскольку эти оценки являются функциями от наблюдений (см. § 5.10). В общем случае эти случайные величины *не независимы*. Оценка надежности сама будет функцией оценок параметров; чтобы найти ее дисперсию, необходимо вычислить ковариацию (меру степени зависимости) оценок параметров. В следующем параграфе представлены основные формулы для вычисления ковариации и коэффициента корреляции (безразмерной ковариации). Рассмотрим две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  с совместной плотностью  $f(x, y)$ . Ковариация случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  определяется как

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy, \quad (5.78)$$

где  $E(\xi) = \mu_x$ ,  $E(\eta) = \mu_y$  — средние соответственно  $\xi$  и  $\eta$ . Для дискретных распределений употребляют аналогичную формулу

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) P(\xi = x_i, \eta = y_j). \quad (5.79)$$



В любом случае ковариацию можно записать через математические ожидания

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - \mu_x)(\eta - \mu_y)]. \quad (5.80)$$

Выражение (5.80) можно упростить, раскрыв скобки:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E[\xi\eta - \mu_x\eta - \mu_y\xi + \mu_x\mu_y] = E(\xi\eta) - \mu_x\mu_y. \quad (5.81)$$

У п р а ж н е н и е 1. Используя (5.78) или (5.79), вывести (5.81) из (5.80).

В том случае, когда  $\xi$  и  $\eta$  независимы,  $E(\xi\eta) = \mu_x\mu_y$ , так что  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ . Однако в общем случае ковариация может быть как положительной, так и отрицательной.

У п р а ж н е н и е 2. При помощи (5.78) и (5.70) показать, что  $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta) = \mu_x\mu_y$ , если  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины (обратное не всегда верно; см. [1], стр. 222).

Коэффициент корреляции  $\rho(\xi, \eta)$  определяется так:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{var} \xi \cdot \text{var} \eta}}. \quad (5.82)$$

Можно показать, что  $-1 \leq \rho \leq 1$  [см. [5], стр. 263—264]. Если  $\rho = \pm 1$ , то говорят, что между величинами  $\xi$  и  $\eta$  существует полная корреляция. Более точно,  $\xi$  можно с вероятностью 1 представить в виде линейной функции  $\eta$  (и наоборот) тогда и только тогда, когда  $\rho = \pm 1$ .

У п р а ж н е н и е 3. Найти коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  с совместной плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y - 2xy), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{для остальных } (x, y) \end{cases}$$

[см. упражнение, помещенное перед (5.77)].

У п р а ж н е н и е 4. Найти дисперсию  $a\xi \mp b\eta$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные.

О т в е т:

$$\text{var}(a\xi \mp b\eta) = a^2 \text{var} \xi + b^2 \text{var} \eta \mp 2ab \text{cov}(\xi, \eta).$$

У п р а ж н е н и е 5. Найти дисперсию  $\xi\eta$ , предполагая, что  $\xi^2$  и  $\eta^2$  некоррелированы.

О т в е т:

$$\begin{aligned} \text{var}(\xi, \eta) &= \mu_x^2 \text{var} \eta + \mu_y^2 \text{var} \xi + \text{var} \xi \text{var} \eta - \\ &- \text{cov}(\xi, \eta)^2 - 2\mu_x\mu_y \text{cov}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

## 5.10. ТЕОРИЯ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

Выборка связана с тем, что в процессе повторения случайного опыта появляется последовательность наблюдений или измерений. Понятие случайного опыта основано на понятии выборочного пространства, которое было введено в § 5.1 как множество всех возможных исходов опыта.

Пусть  $\xi$  обозначает исход случайного опыта. Если, например, опыт заключается в бросании одной монеты, то мы предварительно договариваемся, что выборочное пространство будет состоять только из двух исходов: выпадения герба ( $G$ ) и надписи ( $H$ ). Значение понятия «случайный опыт» состоит в том, что до опыта мы не знаем, какой будет исход опыта. Однако существуют вполне определенные, хотя, возможно, неизвестные, вероятности любого исхода опыта (см. § 5.3). Таким образом, величина  $\xi$  является *функцией* опыта; мы будем говорить, что это случайная функция или чаще *случайная величина*, поскольку до опыта невозможно с определенностью сказать, какое значение она примет. Как было показано в § 5.4, всегда можно случайную величину  $\xi$  считать действительным числом, построив отображение ( $G, H$ ) на числа 0 и 1 соответственно. Тогда, например, вместо выражения «монета упала гербом вверх» можно говорить «наблюдаемое значение  $\xi$  равно 0».

### 5.10.1. Простой случайный выбор—случайная выборка

Процесс простого случайного выбора имеет свое определение. Рассмотрим сначала серию  $n$  случайных опытов ( $n$  бросаний монеты,  $n$  измерений диаметра стержня и т. п.)\*. Исходы можно представить себе как

\* Двумерная случайная величина (например, диаметр и длина стержня) будет рассматриваться, как два наблюдения на каждом шаге опыта. Заметим также, что речь идет об *одной* случайной величине. Все  $n$  случайных опытов состоят в одном и том же; не может быть такого, чтобы в первом опыте бросали монету, во втором — игральную кость и т. д.

серию действительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ : в первом опыте мы наблюдаем  $\xi = x_1$ , во втором  $\xi = x_2$  и т. д. Следовательно,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , если их рассматривать до опыта, очевидным образом связаны с «порождающей» случайной величиной  $\xi$ \*.

Будем считать, что имеется процесс простого случайного выбора, если выполнены следующие два условия:

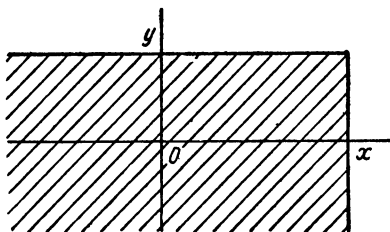


Рис. 5.3.

1) вероятность любого отдельного исхода (например, выпадения герба) не меняется от опыта к опыту и  
 2) случайные величины  $x_1, \dots, x_n$  независимы в совокупности (см. § 5.9). Говорят также, что множество наблюдений  $x_1, \dots, x_n$  образует *простую случайную выборку* (или, короче, *случайную выборку*).

Случайные величины  $x_i$  находятся к случайной величине  $\xi$  в том отношении, что они имеют с ней одно и то же распределение вероятностей. Таким образом, основная функция распределения  $F(x) = P(\xi \leq x) = P(x_i \leq x)$ ;  $i = 1, \dots, n$  (см. § 5.4).

Существует много других видов выборочной процедуры, которые можно найти в учебниках по прикладной статистике: *последовательная выборка*, *цензурированная выборка*, *расслоенная выборка*, *целевая (purposive) выборка*, *выборка по группам* и др. В частности, в [8] и [9] можно найти описание приемов, употребляемых для достижения случайности, а также описание перечисленных видов выборок. С первыми двумя видами выборок мы познакомим читателя в гл. 10.

\* Мы будем также употреблять термины: *основная случайная величина*, *основная совокупность*, *основное распределение* и т. д. Употребляется также выражение «*генеральная совокупность*». (Прим. перев.)

### 5.10.2. Эмпирическое распределение

Всюду в этой главе речь будет идти только о простом случайном выборе. Определим *эмпирическое распределение* (или *выборочное распределение*) как распределение вероятностей, которое получилось бы, если бы каждой точке  $x_1, \dots, x_n$  была приписана вероятность

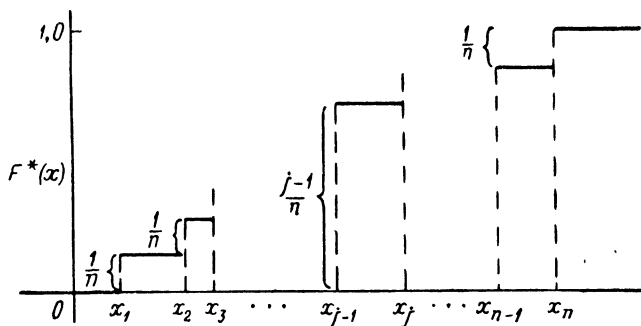


Рис. 5.4.

$1/n$ . Это распределение, очевидно, дискретно, а следовательно, его функция распределения ступенчатая; она имеет скачки величины  $1/n$  в каждой из точек  $x_1, \dots, x_n$  (см. § 5.6). На рис. 5.4 дан вид *эмпирической функции распределения*  $F^*(x)$  случайной выборки.

Заметим, что наблюдения  $x_1, \dots, x_n$  у нас расположены в порядке возрастания<sup>1</sup>:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Аналитически функцию  $F^*(x)$  можно выразить формулой

$$F^*(x) = \frac{j-1}{n}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (j=1, 2, \dots, n+1), \quad (5.83)$$

в которой

$$x_0 \equiv -\infty, \quad x_{n+1} \equiv +\infty.$$

С другой стороны, если  $\nu$  обозначает число наблюдений, не превосходящих  $x$ , то

$$F^*(x) = \frac{\nu}{n}. \quad (5.84)$$

<sup>1</sup> Не обязательно, чтобы в процессе наблюдения величины  $\xi$  они следовали в том же порядке.

Таким образом,  $F^*(x)$  является частотой события  $\xi \leq x$  в  $n$  опытах; вероятность этого события составляет  $F(x)$ , где  $F(x)$  — функция распределения основной случайной величины  $\xi$ . Очевидно,  $F^*(x)$ , будучи функцией исходов опытов, сама является случайной величиной. Важность  $F^*(x)$  состоит в том, что при больших выборках ( $n \rightarrow \infty$ )  $F^*(x)$  при любом фиксированном  $x$  сходится по вероятности к  $F(x)$ . Смысл указанного свойства в том, что, взяв достаточно большую выборку, можно с вероятностью, произвольно близкой к единице, определить основную функцию распределения с произвольной степенью точности. Сформулированное утверждение называется в п. 6.22. К сожалению, в общем случае высокая точность требует очень большого количества наблюдений (см. п. 6.2.2, 6.2.3).

### 5.10.3. Выборочные моменты

Отвлечемся на время от случайной природы величин  $x_j$  и будем считать  $F^*(x)$  фиксированной. Вследствие (5.32) и замечания в начале п. 5.10.2

$$E[g(\eta^*)] = \frac{1}{n} \sum_i g(x_i)^1. \quad (5.85)$$

Отсюда следует, что если  $g(\eta^*) = \eta^{*k}$ , то  $k$ -й начальный выборочный момент равен

$$a_k \equiv E(\eta^{*k}) = \frac{1}{n} \sum_i x_i^k. \quad (5.86)$$

Аналогично  $k$ -й момент относительно среднего или  $k$ -й центральный момент

$$m_k \equiv E[(\eta^* - a_1)^k] = \frac{1}{n} \sum (x_i - a_1)^k. \quad (5.87)$$

Будем различать выборочные моменты и моменты основного распределения, используя для первых латинские буквы ( $a_k, m_k, \dots$ ), а для последних — греческие ( $\alpha_k, \mu_k, \dots$ ). Выборочное среднее получается по формуле (5.86) при  $n=1$ . Его обычно обозначают через  $m$  или  $\bar{x}$ .

<sup>1</sup> Здесь  $\eta^*$  понимается как случайная величина с функцией распределения  $F^*(x)$ . Суммирование производится от 1 до  $n$ .

*Выборочная дисперсия* дается выражением  $m_2$  по формуле (5.87); ее обычно обозначают через  $s^2$ . Выпишем эти формулы \*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad (5.88)$$

и

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2. \quad (5.89)$$

Вспомним теперь, что наблюдения являются случайными величинами с общей функцией распределения  $F(x)$ , свойственной основной случайной величине  $\xi$ , средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$  (см. § 5.7). Тогда выборочные моменты (5.86)—(5.89) сами будут случайными величинами, как функции случайных величин  $x_1, \dots, x_n$ . Очевидно, распределения вероятностей выборочных моментов однозначно определяются основной функцией распределения  $F(x)$ . Далее, выборочные моменты сами обладают моментами, однозначно определяемыми той же функцией. Мы рассмотрим только первые два момента [ $E(\cdot)$  и  $\text{var}(\cdot)$ ] выборочных моментов  $\bar{x}$  и  $s^2$ . В ([5], гл. 27) можно найти способ вычисления любых моментов выборочных моментов произвольного порядка \*\*.

Прежде всего отметим три свойства *математического ожидания*. Первое из них состоит в том, что математическое ожидание суммы любого конечного числа случайных величин, независимых или зависимых, равно сумме их математических ожиданий. Это свойство в общности, достаточной для наших целей, получается из формул (5.32) и (5.32') применением элементарных свойств интеграла (или суммы) (интеграл суммы равен сумме интегралов). Второе свойство состоит в том, что математическое ожидание произведения любого конечного числа *независимых в совокупности* случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Это

\* Иногда смешивают выборочную дисперсию (5.89) с *несмещенной* оценкой дисперсии  $\sigma^2$  основного распределения. Несмещенная оценка  $\sigma^2$  обозначается через  $s'^2$  (гл. 5—9), причем  $s'^2 = [n/n-1]s^2$  (см. также п. 7.4.4).

\*\* См. И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). Гостехиздат, 1955. (Прим. перев.)

следует из того, что многомерный интеграл можно представить в виде повторного интеграла ([5], стр 173). Третье свойство констатирует, что при умножении случайной величины на постоянную математическое ожидание также умножается на эту постоянную. Данное утверждение также следует из свойств интегралов и сумм. Мы обозначим перечисленные свойства соответственно *C1*, *C2* и *C3*.

У п р а ж н е н и е. Показать, что: а) математическое ожидание постоянной равно этой же постоянной, б) дисперсия постоянной равна нулю.

Из уравнения (5.88) при помощи *C1* и *C3* получаем:

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum E(x_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu. \quad (5.90)$$

Это показывает, что математическое ожидание выборочного среднего равно среднему основного распределения.

По определению второго центрального момента (§ 5.7),

$$\text{var}(\bar{x}) \equiv E[(\bar{x} - \mu)^2]. \quad (5.91)$$

В силу *C1*, *C3* (пункт (а) последнего упражнения) и формулы (5.90)

$$\begin{aligned} E[(\bar{x} - \mu)^2] &= E[\bar{x}^2 - 2\mu\bar{x} + \mu^2] = E(\bar{x}^2) - \\ &- 2\mu E(\bar{x}) + \mu^2 = E(\bar{x}^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(\bar{x}^2) - \mu^2. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Теперь остается найти  $E(\bar{x}^2)$ . Имеем

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \quad (5.93)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j \right]. \quad (5.94)$$

В силу *C3*, для первой суммы в скобках имеем

$$\begin{aligned} E(\sum x_i^2) &= \sum E(x_i^2) = \\ &= na_2 = \\ &= n(\mu^2 + \sigma^2). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Вторая сумма состоит из  $n(n-1)/2$  произведений  $x_i x_j$ , где  $i$  и  $j$  различны (все слагаемые вида  $x_i^2$  вошли в первую сумму); поэтому  $x_i$  и  $x_j$  независимы. Но тогда в силу С2  $E(x_i x_j) = E(x_i) E(x_j) = \mu \cdot \mu = \mu^2$ . Суммируя, получаем

$$\frac{2n(n-1)}{2} \mu^2 = n(n-1) \mu^2.$$

Учитывая коэффициент  $1/n^2$  за скобками и С3, приходим к выражению

$$\begin{aligned} E(\bar{x}^2) &= \frac{1}{n^2} [n(\mu^2 + \sigma^2) + n(n-1)\mu^2] = \\ &= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Окончательно, учитывая (5.92) и (5.96),

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (5.97)$$

Таким образом, дисперсия среднего случайной выборки равна одной  $n$ -й дисперсии основного распределения. Очевидно, при достаточно большом  $n$  разброс  $\bar{x}$  можно сделать сколь угодно малым. Следствие этого свойства выборочного среднего дается в п. 7.2.2.

При помощи подобных же выкладок можно показать (см. [5], стр. 347—348), что

$$E(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2, \quad (5.98)$$

$$\text{var}(s^2) = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\sigma^4)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n^3}. \quad (5.99)$$

Если  $F(x)$  — нормальная функция распределения со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ , мы находим, что  $\mu_4 = 3\sigma^4$  [см. формулу (5.49)]. В данном случае  $\text{var}(s^2)$  сводится к  $2\sigma^4(n-1)/n^2$ .

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во иностранной литературы, 1964.
2. E. Parzen. Modern probability theory and its applications. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.



3. A. M. Mood. Introduction to the theory of statistics. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.
4. A. H. Bowker and G. J. Lieberman. Engineering statistics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1959.
5. Г. Крамер. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
6. G. Birkhoff and S. Mac Lane. A survey of modern algebra. The Macmillan Company, New York, 1947, ch. 11.
7. J. G. Kemeny, H. Mirkil, J. L. Snell and G. L. Thompson. Finite mathematical structures. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1959, ch. 1—3.
8. F. E. Croxton and D. J. Cowden. Applied general statistics, 2d ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1955.
9. W. E. Deming. Some theory of sampling. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.
10. Tables of normal probability functions. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series, 23, 1953.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Hoel P. G. Introduction to mathematical statistics. Second Edition. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954.
- Siegel S. Nonparametric statistics: for the behavioral Sciences, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
- Uspensky J. V. Introduction to mathematical probability. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1937.

## ГЛАВА 6

# МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

### 6.1. ВВЕДЕНИЕ

Как было выяснено в гл. 5, меры (вероятности) таких событий, как события «устройство функционирует исправно», «время безотказной работы устройства превосходит  $T$ », «выходной параметр (параметры) устройства лежит (лежат) в заданных пределах» и т. п., а также сочетаний подобных событий определяются распределениями вероятностей. Все три перечисленных события можно выразить как простое событие «успеха» и назвать их вероятностью «надежностью». Однако при определенных законах отказов для различных целей можно оценивать не само событие «успеха», а какие-нибудь связанные с ним события. Почти тривиальным, но очень характерным примером является оценка вероятности «успеха», как единица минус отношение числа отказов к общему числу испытаний.

Другим примером, который уже не столь прост и тривиален, может служить оценка, связанная с событием «время безотказной работы превосходит  $T$ ». Прежде всего, мы можем интересоваться только двумя событиями: 1) устройство отказало ранее  $T$  (неудача) и 2) устройство проработало время  $T$  (успех). Подобная ситуация в точности эквивалентна ситуации предыдущего примера. Однако пространство можно расширить, отмечая моменты времени, когда происходят отказы. Чтобы иметь возможность использовать эту дополнительную информацию для оценки вероятности события

«время безотказной работы больше  $T$ », требуется детализировать функции распределения времени безотказной работы с соответствующим выборочным пространством  $\{t > 0\}$ . Выбор подходящего распределения может оказаться сложной задачей, поскольку аналитический вид распределения зависит от «механизма» отказов конкретного устройства. В результате большой экспериментальной работы показано, что существует небольшое количество распределений вероятностей, возможность применения которых почти универсальна. Особую важность для теории надежности представляет *показательное распределение* времени безотказной работы. В настоящей главе на основании правдоподобных математических и физических предпосылок будут введены показательный и другие законы времени безотказной работы. Одним из методов вывода подобных распределений является использование *интенсивности отказов*. Вывод основывается прежде всего на принципе нахождения простейших функциональных видов интенсивностей отказов. Основанием такого подхода служит то обычное обстоятельство, что простые предположения позволяют получать широко применимые результаты. Другая используемая модель связана с так называемым «процессом рождения и гибели» (см. [1], стр. 434)\*. Замечательно, что простое обобщение *процесса чистой гибели* приводит к другому выводу показательного закона, *гамма-распределению*, а также комбинированному *экспоненциально-гамма-распределению* времени безотказной работы.

Почти все подобные распределения времени безотказной работы допускают определенную нормальную аппроксимацию (см. § 6.10).

Нормальное распределение в очень общих случаях применимо к описанию оперативных характеристик или выходов устройств. В самом деле, если замечено отклонение от нормальности, то это рассматривается как случай определенной разладки; обычно находится причина отклонения и оно устраняется. Таким образом, в широком классе случаев для оценки таких событий, как, на-

---

\* По поводу процессов рождения и гибели см. М. Барглетт. Введение в теорию случайных процессов. Изд-во иностранной литературы, 1958. (Прим. перев.)

пример, «проводимость лежит в определенных пределах», применимо нормальное распределение.

В тех случаях, когда конкретное математическое выражение распределения времени безотказной работы или выходного параметра априори неизвестно либо его использование трудно или неудобно, всегда можно вернуться к наблюдению «успехов» и «неудач». Подобная модель является очень общей; она связана с *биномиальной* схемой испытаний. Даже в случае такого по виду простого распределения, как биномиальное, можно показать, что выбор модели распределения зависит от схемы опытов, т. е. от *выборочного пространства*. Так, если количество испытаний заранее фиксировано, можно применять *биномиальное распределение*; однако, если опыт производится до получения определенного числа отказов, следует применить *отрицательное биномиальное распределение*.

Характерно, что в подобном случае, когда модель распределения дискретна, обнаруживается применимость при определенных предельных соотношениях нормального распределения; последнее позволяет вычислять «биномиальное» вероятности. Это еще раз говорит об универсальности нормального закона.

Поскольку модели дискретных распределений представляют большую общность, опишем их в первой части этой главы, а затем в параграфах, о которых уже упоминалось, займемся непрерывными моделями.

## 6.2. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Биномиальное распределение уже было введено в § 5.4, где мы установили, что если производится  $N$  независимых испытаний с вероятностью неудачи ( $F$ ) и успеха ( $S$ ) в каждом из них соответственно  $p$  и  $q \equiv 1-p$ , то число  $v$  неудач в  $N$  испытаниях подчиняется биномиальному распределению с параметрами  $N, p$ :

$$P(v=f) = \binom{N}{f} p^f q^{N-f}. \quad (6.1)$$

Очевидно, число успехов в  $N$  испытаниях есть  $N-v$ . Так как событие  $N-v=k$  эквивалентно событию  $v=N-k$ , то эти два события имеют одинаковые вероятности. Та-

ким образом, в силу (6.1) распределение числа успехов в  $N$  испытаниях выражается формулой

$$P(N - v = k) = P(v = N - k) = \binom{N}{N - k} p^{N-k} q^k, \quad (6.2)$$

т. е. мы заменим  $f$  в (6.1) на  $N - k$ . Если обозначить  $\xi = N - v$ , то, используя известное тождество

$$\binom{N}{N - k} = \binom{N}{k}, \quad (6.3)$$

можно привести (6.2) к виду

$$P(\xi = k) = \binom{N}{k} q^k p^{N-k}. \quad (6.4)$$

Таким образом, число успехов  $\xi$  подчиняется биномиальному распределению с параметрами  $N, q$ .

При заданном значении  $p$  между 0 и 1 формулы (6.1), (6.4) позволяют вычислять вероятность произвольного фиксированного числа неудач или успехов в условиях опыта, сформулированных вначале этого параграфа. Важно заметить, что  $N$  должно быть либо фиксировано в начале опыта, либо быть независимым от результатов каждого испытания. Формулы (6.1) или (6.4) не будут иметь смысла, если, например, мы решили бы проводить испытания до появления первой «неудачи».

В качестве примера представим себе, что нам известна надежность  $R \equiv q$  управляемого снаряда; пусть она равна 0,90. Чему равна вероятность того, что из 10 запусков будет по меньшей мере 9 успешных? Событие  $E$ , которое нас интересует, представляет собой объединение двух событий: «ровно 9 успехов» и «ровно 10 успехов». Таким образом,

$$P(E) = P[(\xi = 9) \cup (\xi = 10)]. \quad (6.5)$$

Каждое из этих событий является точкой выборочного пространства всевозможных исходов 10 испытаний. Поскольку события несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей.

В силу (6.4)

$$\begin{aligned} P(E) &= \binom{10}{9} (0,90)^9 (0,10) + \binom{10}{10} (0,90)^{10} = \\ &= 10 (0,387) (0,10) + 1 (0,349) \end{aligned} \quad (6.6)$$

или

$$P(E) = 0,736. \quad (6.7)$$

Если  $N$  велико, подобные вычисления становятся чрезвычайно громоздкими даже в том случае, когда число успехов ненамного отличается от  $N$ . Поэтому составлены таблицы сумм биномиальных вероятностей (см., например, [3]), которые в таких случаях приносят большую пользу.

### 6.2.1. Моменты биномиального распределения

Выше (5.52) было показано, что моментная производящая функция распределения числа неудач (6.1) равна

$$\psi(t) = (q + pe^t)^N. \quad (6.8)$$

Дифференцируя (6.8) по  $t$  и затем полагая  $t=0$ , мы получим, как видно из результата § 5.8, среднее случайной величины  $v$ . Так,

$$\psi'(t) = N (q + pe^t)^{N-1} pe^t \quad (6.9)$$

и

$$\psi'(0) = E(v) = pN (q + p)^{N-1} = Np, \quad (6.10)$$

поскольку  $q + p = 1$ .

Дифференцируя повторно и полагая  $t=0$ , получаем второй начальный момент

$$\psi''(t) = N (q + pe^t)^{N-1} pe^t + N(N-1) (q + pe^t)^{N-2} p^2 e^{2t} \quad (6.11)$$

и

$$\psi''(0) = Np + N(N-1)p^2$$

или

$$E(v^2) = Npq + N^2 p^2. \quad (6.12)$$

Стало быть, дисперсия или второй момент  $v$  относительно среднего равен

$$\text{var } v = E(v^2) - E^2(v) = Npq. \quad (6.13)$$

Моменты высших порядков можно определить тем же способом, однако выкладки сильно усложняются.

Среднее  $Np$  есть *математическое ожидание* числа неудач при  $N$  испытаниях. В предыдущем примере, где  $q=0,9$ , а значит,  $p=0,1$ , следует ожидать одной неудачи при 10 запусках снарядов. Более общий факт состоит в том, что при увеличении числа опытов  $N$  общее число неудачных запусков, отнесенное к  $N$ , будет в некотором смысле сходиться к  $p=0,1$ . Это является проявлением теоретической закономерности, носящей название *закона больших чисел*.

Рассмотрим вывод этого закона.

### 6.2.2. Закон больших чисел

С целью установления закона больших чисел используем неравенство Чебышева (п. 5.7.1), доказанное нами лишь в случае непрерывных случайных величин, но в действительности справедливое для любых распределений, обладающих первыми двумя моментами. Будем применять неравенство Чебышева к случайной величине  $v/N$ , для которой  $E(v/N) = p$  и  $\text{var}(v/N) = pq/N$ . Согласно неравенству Чебышева в данном случае

$$P\left(\left|\frac{v}{N} - p\right| \geq k \sqrt{\frac{pq}{N}}\right) \leq \frac{1}{k^2}, \quad (6.14)$$

где  $k$  — произвольное положительное число. Положив  $k \sqrt{pq/N} = \varepsilon$ , получим

$$P\left(\left|\frac{v}{N} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{N\varepsilon^2}. \quad (6.15)$$

Из последнего неравенства видно, что для любых сколь угодно малых  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  найдется такое  $N$  (равное  $pq/\varepsilon^2\delta$  или следующему за ним целому числу), что наблюдаемая частота  $v/N$  будет отличаться от  $p$  больше, чем на  $\varepsilon$ , лишь с вероятностью, меньшей  $\delta$ . В этом случае говорят, что случайная величина  $v/N$  сходится по

вероятности к постоянной  $p$ . Например, для наперед фиксированных  $\delta=0,01$ ,  $\varepsilon=0,01$  и  $p=0,1$  при

$$N \geq \frac{(0,1)(0,9)}{10^{-6}} = 90,000$$

вероятность отличия частоты от вероятности, большего, чем 0,01, меньше 0,01.

В случае, когда  $p$  неизвестно, мы можем воспользоваться тем же неравенством, заметив, что всегда  $pq \leq \frac{1}{4}$ ; отсюда получается оценка  $N \geq 1/4\varepsilon^2\delta$ .

### 6.2.3. Нормальная аппроксимация

Результат, выраженный формулой (6.15), может быть заменен более точным выражением, связанным с предельной аппроксимацией биномиального распределения нормальным распределением. Мы ограничимся формулировкой этого результата\*.

При больших  $N$

$$P\left[\left|\frac{y}{N} - p\right| \geq \varepsilon\right] \approx 2\left[1 - \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{N}{pq}}\right)\right], \quad (6.16)$$

где  $Npq$  должно быть больше, скажем, 25, а  $\Phi$  обозначает нормированную нормальную функцию распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt. \quad (6.17)$$

Интересно численно сравнить (6.16) с предыдущим примером. Приравниваем правую часть (6.16) величине  $\delta=0,01$  и находим  $N$  из таблицы нормального распределения ([2]; см. также § 6.10). Имеем

$$0,01 = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{30}\sqrt{N}\right)\right], \quad (6.18)$$

---

\* Имеются и значительно более общие формы подобного предельного закона [см., например, W. Feller. On the normal approximation to the binomial distribution. Ann. math. statist., 16, (1945), 319—329].



откуда  $N$  получается примерно равным 5970. Хотя  $Npq = 5,4$  намного меньше 25, мы можем гарантировать, что, скажем, 7000 наблюдений уже будет достаточно для «близости» частоты неудач к истинному значению  $p = 0,1$  в смысле (6.15).

#### 6.2.4. Несмещенная оценка

Предыдущие выкладки показывают, что желательный для практики результат, заключающийся в близости частоты неудач (успехов) к истинному значению надежности (надежности), получает теоретическое обоснование. Таким образом, коль скоро число испытаний достаточно велико, наблюдаемое отношение числа неудач (отказов) к числу испытаний будет сколь угодно точной оценкой значения  $p$ . Можно показать, что оценка  $v/N$  обладает некоторыми желательными свойствами, которые требуются от оценок (см. § 7.2). В частности, она является *несмещенной*, т. е. ее математическое ожидание в точности равно значению оцениваемого параметра, каково бы ни было  $N$ :

$$E\left(\frac{v}{N}\right) = \sum_{j=0}^N \frac{j}{N} \binom{N}{j} p^j q^{N-j} = \quad (6.19)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{N!}{(N-j)!(j-1)!} p^j q^{N-j} = \quad (6.20)$$

$$= \frac{Np}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} p^j q^{N-1-j}. \quad (6.21)$$

Окончательно

$$E\left(\frac{v}{N}\right) = p, \quad (6.22)$$

поскольку сумма в (6.21) равна 1 как сумма вероятностей всех возможных исходов  $N-1$  испытаний. Более подробно вопросы, связанные с оценками, будут рассмотрены в гл. 7.

### 6.3. МУЛЬТИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если опыт вида, рассмотренного в § 6.2, допускает большее, чем 2, число исходов, мы приходим к некоторому простому обобщению биномиального распределения. Допустим, что опыт состоит из независимых испытаний, каждое из которых может иметь  $k$  несовместных исходов; вероятности  $p_1, \dots, p_k$  соответствующих исходов не меняются от испытания к испытанию;

$$\sum_{j=1}^k p_j = 1.$$

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_k$  обозначают количества исходов при  $N$  испытаниях, в которых произошло соответственно 1, 2,  $\dots$ ,  $k$ -е событие. Тогда

$$\begin{aligned} P(v_1 = n_1, v_2 = n_2, \dots, v_k = n_k) &= \\ &= \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} \end{aligned} \quad (6.23)$$

называется *мультиномиальным распределением*; это будет совместное распределение случайных величин  $v_1, \dots, v_k$ :

$$\sum_{j=1}^k v_j = N, \quad \sum_{j=1}^k n_j = N \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^k p_j = 1.$$

Располагая общим мультиномиальным распределением (6.23), можно получить различные безусловные и условные распределения, а также коэффициенты корреляции любой пары случайных величин.

**У п р а ж н е н и е.** Показать, что среднее и дисперсия  $v_j$  даются формулами:

$$E(v_j) = N p_j, \quad \text{var}(v_j) = N p_j q_j,$$

где  $q_j = 1 - p_j$ .

В качестве примера использования мультиномиального распределения покажем, что

$$\text{cov}(v_1, v_2) = -N p_1 p_2.$$

Сначала найдем безусловное распределение двумерной величины  $(v_1, v_2)$ . С этой целью перепишем (6.23) как

совместное распределение только  $v_1, \dots, v_{k-1}$ , поскольку  $v_k = N - v_1 - \dots - v_{k-1}$ :

$$P(v_1 = n_1, \dots, v_{k-1} = n_{k-1}) = \frac{N! p_1^{n_1} \dots p_{k-1}^{n_{k-1}} (1 - p_1 - \dots - p_{k-1})^{N - n_1 - \dots - n_{k-1}}}{n_1! \dots n_{k-1}! (N - n_1 - \dots - n_{k-1})!}, \quad (6.24)$$

где

$$0 \leq \sum_{j=1}^{k-1} v_j \leq N, \quad 0 \leq \sum_{j=1}^{k-1} n_j \leq N, \quad \sum_{j=1}^{k-1} p_j \leq 1.$$

Просуммируем сначала по всем возможным значениям  $v_{k-1}$ :

$$P(v_1 = n_1, \dots, v_{k-2} = n_{k-2}) = \frac{N! p_1^{n_1} \dots p_{k-2}^{n_{k-2}}}{n_1! \dots n_{k-2}! (N - n_1 - \dots - n_{k-2})!} \sum_{n_{k-1}=0}^{N - n_1 - \dots - n_{k-2}} \times \left\{ \frac{(N - n_1 - \dots - n_{k-2})! p_{k-1}^{n_{k-1}} (1 - p_1 - \dots - p_{k-1})^{N - n_1 - \dots - n_{k-1}}}{(N - n_1 - \dots - n_{k-2} - n_{k-1})! n_{k-1}!} \right\} = \quad (6.25)$$

$$= \frac{N! p_1^{n_1} \dots p_{k-2}^{n_{k-2}} (1 - p_1 - \dots - p_{k-2})^{N - n_1 - \dots - n_{k-2}}}{n_1! \dots n_{k-2}! (N - n_1 - \dots - n_{k-2})!}, \quad (6.26)$$

так как согласно известной формуле бинома Ньютона

$$\sum_{j=0}^{N-a} \frac{(N-a)!}{(N-a-j)! j!} p^j (b-p)^{N-a-j} = (b-p+p)^{N-a} = b^{N-a}. \quad (6.27)$$

Сравнивая (6.26) с (6.24), мы замечаем, что они имеют тот же вид, с тем лишь отличием, что в (6.26) не входит  $v_{k-1}$ . По индукции получаем

$$P(v_1 = n_1, v_2 = n_2) = \frac{N! p_1^{n_1} p_2^{n_2} (1 - p_1 - p_2)^{N - n_1 - n_2}}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}, \quad (6.28)$$

где

$$0 \leq v_1 + v_2 \leq N, \quad 0 \leq n_1 + n_2 \leq N; \quad p_1 + p_2 \leq 1.$$

Поскольку

$$\text{cov}(v_1, v_2) = E(v_1, v_2) - E(v_1)E(v_2),$$

мы должны найти  $E(v_1 v_2)$ .

$$E(v_1 v_2) = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 n_2 P(v_1 = n_1, v_2 = n_2). \quad (6.29)$$

Сначала просуммируем по  $n_2$

$$\frac{N! p_1^{n_1} n_1}{n_1!} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{n_2 p_2^{n_2} (1-p_1-p_2)^{N-n_1-n_2}}{n_2! (N-n_1-n_2)!}. \quad (6.30)$$

Можно переписать (6.30) следующим образом\*:

$$\begin{aligned} & \frac{N! p_1^{n_1} n_1 p_2}{n_1! (N-n_1-1)!} \times \\ & \times \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \frac{(N-n_1-1)! p_2^{n_2} (1-p_1-p_2)^{N-n_1-1-n_2}}{n_2! (N-n_1-n_2-1)!} = \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$= \frac{N! p_1^{n_1} n_1 p_2 (1-p_1)^{N-n_1-1}}{n_1! (N-n_1-1)!}. \quad (6.32)$$

Просуммируем теперь по  $n_1$

$$E(v_1 v_2) = \frac{N!}{(N-2)!} p_2 \sum_{n_1=0}^{N-2} \frac{p_1^{n_1+1} (1-p_1)^{N-n_1-2} (N-2)!}{n_1! (N-n_1-2)!} = \quad (6.33)$$

$$= p_2 p_1 N (N-1), \quad (6.34)$$

---

\* Переходя от (6.30) к (6.31), мы заменяем нижний предел суммирования с 0 на 1, так как это слагаемое есть 0 благодаря наличию множителя  $n_2$ . Тогда  $n_2/n_2!$  можно записать, как  $1/(n_2-1)!$  Затем подстановкой  $n_2=j+1$ , изменяется индекс суммирования, после чего  $j$  снова переобозначается на  $n_2$ . Наконец, все выражение умножается и делится на  $(N-n_1-1)!$  Формула (6.32) получается из (6.31) при помощи бинома Ньютона. Подобные же преобразования применяются и для получения (6.33); в этом случае верхний предел суммирования заменяется, поскольку при  $1/(N-n_1-2)! \equiv 0$  при  $n_1=N-1$ .

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(v_1, v_2) &= N(N-1)p_1p_2 - N^2p_1p_2 = \\ &= -Np_1p_2,\end{aligned}\tag{6.35}$$

что и требовалось доказать.

Коэффициент корреляции [см. (5.82)] равен

$$\rho(v_1, v_2) = \frac{-Np_1p_2}{[Np_1(1-p_1)Np_2(1-p_2)]^{1/2}}$$

или

$$\rho(v_1, v_2) = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.\tag{6.36}$$

Чтобы убедиться в том, что  $|\rho(v_1, v_2)| \leq 1$ , заметим, что поскольку  $p_1 + p_2 \leq 1$ , то  $p_1 \leq 1 - p_2$  и  $p_2 \leq 1 - p_1$ ; значит,  $p_1/(1-p_2) \leq 1$  и  $p_2/(1-p_1) \leq 1$ . Из соображений симметрии следует, что для получения  $\operatorname{cov}(v_i, v_j)$  и  $\rho(v_i, v_j)$  следует лишь заменить индекс 1 на  $i$  и 2 на  $j$  в выражениях (6.35) и (6.36).

Одним из применений мультиномиального распределения является нахождение распределения вероятностей наименьшего (наибольшего) члена выборки, произведенной из непрерывной совокупности (см. п. 9.3.2). Другое применение к вычислению надежности получается следующим образом.

Предположим, что возможными исходами испытаний на надежность могут быть не просто успех и неудача (отказ), но сам отказ рассматривается как объединение взаимно несовместных событий  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Каждое из событий  $F_j$  связано с определенным видом отказа. Однако к определению  $F_j$  следует подходить осторожно, следя за тем, чтобы каждому испытанию соответствовало не более одного  $F_j$ .

Для любой модели, в которой используется мультиномиальное распределение, можно получить оценки параметров  $p_1, \dots, p_{k-1}$  в виде  $\hat{p}_j = v_j/N$ ; эти оценки являются несмещенными и сходятся к истинным значениям  $p_j, j=1, 2, \dots, k-1$ . Случайные величины  $v_j/N$  также обладают предельным распределением, аналогичным (6.16); это распределение — *многомерное нормальное распределение*. Подробности читатель найдет в рекомендованной литературе.

#### 6.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим модель, в которой производятся биномиальные испытания, но выборочное пространство отлично от того, которое было принято в § 6.2. До этого количество испытаний было фиксировано заранее; наблюдаемой случайной величиной было количество отказов. В этом параграфе мы поступим наоборот — фиксируем  $c$  и будем производить независимые испытания до тех пор, пока не произойдет  $c$  отказов. Тогда количество  $v$  испытаний до  $c$  отказов будет случайной величиной с распределением

$$P(v = n) = \binom{n-1}{c-1} p^c q^{n-c}, \quad (6.37)$$

где  $n = c, c+1, \dots$ ;  $p$  и  $q$  обозначают вероятности отказа (неудачи) и успеха в каждом отдельном испытании.

Чтобы вывести формулу (6.37), заметим следующее. Событие, состоящее в том, что  $c$ -й отказ произойдет в  $n$ -м испытании, эквивалентно сложному событию: при  $n-1$  испытаниях произойдет  $c-1$  отказов и в  $n$ -м испытании — еще один отказ.

Поскольку события независимы, то соответствующие вероятности

$$\binom{n-1}{c-1} p^{c-1} q^{n-c} \text{ и } p$$

следует перемножить, что и дает (6.37). Иногда удобнее ввести новую случайную величину  $\xi \equiv v - c$ ;  $\xi$  равна дополнительному количеству испытаний сверх  $c$ , необходимому для окончания опыта. Кроме того,  $\xi$  имеет смысл количества успехов до  $c$ -го отказа.

Имеем

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= P(v = k + c) = \\ &= \binom{k + c - 1}{c - 1} p^c q^k \end{aligned} \quad (6.38)$$

или, принимая во внимание, что

$$\binom{k+c-1}{c-1} \equiv \binom{k+c-1}{k},$$

$$P(\xi = k) = \binom{k+c-1}{k} p^c q^k, \quad (6.39)$$

где  $k=0, 1, 2, \dots$

Можно показать ([1], стр. 61), что

$$\binom{k+c-1}{k} = (-1)^k \binom{-c}{k},$$

где

$$\binom{-c}{k} \equiv \frac{(-c)(-c-1)\dots(-c-k+1)}{k!}.$$

Тогда уравнение (6.39) принимает вид

$$P(\xi = k) = \binom{-c}{k} p^c (-q)^k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (6.40)$$

Распределение (6.40) называется *отрицательным биномиальным распределением*, так как правая часть представляет собой общий член разложения по степеням  $q$  выражения  $p^c(1-q)^{-c}$ .

Заметим, что  $\xi$  (или  $\nu$ ) можно рассматривать как «время ожидания» до  $c$ -го отказа, если каждое испытание занимает единицу времени, например, испытание производится ежесекундно.

При  $c=1$  формула (6.39) имеет вид

$$P(\xi = k) = q^k p; \quad (6.41)$$

это уже рассмотренное нами *геометрическое* распределение.

### 6.4.1. Среднее и дисперсия

Среднее и дисперсию случайной величины проще всего получить из формулы (6.40). Имеем:

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{-c}{k} p^c (-1)^k q^k = \quad (6.42)$$

$$= qp^c \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-c}{k} (-q)^k = \quad (6.43)$$

$$= qp^c \frac{d}{dq} [(1-q)^{-c}] = \quad (6.44)$$

$$= qp^c c (1-q)^{-c-1} \quad (6.45)$$

и окончательно

$$E(\xi) = \frac{qc}{p}, \quad (6.46)$$

так как  $p \equiv 1-q$ . Например, при  $p=0,10$  и  $c=1$  следует ожидать  $0,9/0,1=9$  успехов или всего 10 испытаний до первого отказа.

Дисперсия  $\xi$  получается из соотношения

$$\text{var } \xi = E(\xi^2) - E^2(\xi). \quad (6.47)$$

Таким образом, нам нужно найти

$$E(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \binom{-c}{k} p^c (-1)^k q^k = \quad (6.48)$$

$$= q^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \binom{-c}{k} p^c (-1)^k q^{k-2} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{-c}{k} p^c (-1)^k q^k. \quad (6.49)$$



Второе слагаемое в правой части (6.49) согласно (6.42) и (6.46) равно  $qc/p$ . Первое слагаемое составляет

$$q^2 p^c \frac{d^2}{dq^2} (1-q)^{-c} = q^2 p^c c \frac{d}{dq} (1-q)^{-c-1} = \quad (6.50)$$

$$= q^2 p^c c (c+1) (1-q)^{-c-2} = \quad (6.51)$$

$$= \frac{c(c+1)q^2}{p^2}. \quad (6.52)$$

Таким образом, на основании (6.47) получим

$$\text{var } \xi = \frac{c(c+1)q^2}{p^2} + \frac{qc}{p} - \frac{q^2 c^2}{p^2} = \frac{qc}{p^2}. \quad (6.53)$$

Следовательно, случайная величина  $\xi$  с распределением (6.39) или (6.40) имеет математическое ожидание  $qc/p$  и стандартное отклонение  $\sqrt{qc/p}$ . Заметим, что случайная величина  $v = \xi + c$  имеет среднее  $c/p$  и стандартное отклонение  $\sqrt{qc/p}$ .

#### 6.4.2. Применение отрицательного биномиального распределения

Пусть теперь необходимо вычислить вероятность того, что до  $c$ -го отказа будет произведено не более  $n$  испытаний (включая испытание, на котором наступил  $c$ -й отказ). Эта вероятность получается из (6.37) суммированием по  $v = c, c+1, \dots, n$ :

$$P(v \leq n) = \sum_{j=c}^n \binom{j-1}{c-1} p^c q^{j-c}. \quad (6.54)$$

Чтобы вычислить эту сумму, рассмотрим события  $v \leq n$  и  $X_n \geq c$ , где  $X_n$  имеет смысл числа отказов в  $n$  испытаниях. Очевидно, эти события эквивалентны, а следовательно, имеют ту же вероятность. Вероятность последнего события есть

$$P(X_n \geq c) = \sum_{j=c}^n \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad (6.55)$$

поскольку  $X_n$  обладают обычным биномиальным распределением. В результате из (6.54) и (6.55) получается интересное тождество:

$$\sum_{j=c}^n \binom{j-1}{c-1} p^c q^{j-c} = \sum_{i=c}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i}. \quad (6.56)$$

Располагая таблицей функции распределения биномиального закона, можно найти правую часть (6.56), а стало быть, и левую.

Пример. Чему равна вероятность того, что до третьего отказа необходимо произвести по меньшей мере 50 испытаний, если  $p=0,1$ ? На основании (6.56) искомая вероятность  $P$  равна сумме

$$P = \sum_{j=3}^{50} \binom{j-1}{2} (0,1)^3 (0,9)^{j-3} = \quad (6.57)$$

$$= \sum_{j=3}^{50} \binom{50}{j} (0,1)^j (0,9)^{50-j}. \quad (6.58)$$

По табл. ([3], стр. 69) находим, что  $P=0,88827$ .

### 6.4.3. Несмещенная оценка $p$

Если  $p$  неизвестно, то его можно оценить из опыта, в котором биномиальные испытания повторяются до получения  $c$ -го отказа. В этом случае несмещенной оценкой  $p$  будет

$$\hat{p} = \frac{c-1}{n-1}, \quad c > 1, \quad (6.59)$$

где  $n$  — количество произведенных испытаний. При  $c=1$  (геометрическое распределение количества испытаний) несмещенная оценка имеет вид

$$\hat{p} = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 0, & n > 1. \end{cases} \quad (6.60)$$

Чтобы установить справедливость формулы (6.60), обозначим  $\hat{p}$  в зависимости от  $n$  как  $f_n$ ; потребуем, чтобы

$0 \leq f_n \leq 1$ . Тогда для того, чтобы  $\hat{p}$  была несмещенной, должно быть  $E(\hat{p}) = p$ , так что

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} f_n q^{n-1} p \quad (6.61)$$

или

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n q^{n-1}. \quad (6.62)$$

Формула (6.62) должна представлять тождество относительно  $q$ , а  $f_n$  должны быть постоянными, не зависящими от  $q$ . Вследствие этого, продифференцировав обе части по  $q$ , получим

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) f_{n+2} q^n. \quad (6.63)$$

Правая часть есть степенной ряд по  $q$ , сходящийся в интервале  $0 \leq |q| \leq 1$ , а следовательно, это регулярная функция  $q$ . Таким образом, коэффициенты ее степенного ряда определяются однозначно и в данном случае они должны быть нулями. Следовательно,  $f_n = 0$  при  $n \geq 2$ . Наконец, используя (6.61) или (6.62), мы видим, что  $f_1 = 1$ , откуда и получается (6.60).

Формула (6.59) устанавливается следующим образом. Имеем:

$$E(\hat{p}) = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{c-1}{n-1} \binom{n-1}{c-1} p^c q^{n-c} = \quad (6.64)$$

$$= p \sum_{n=c-1}^{\infty} \binom{n-1}{c-1-1} p^{c-1} q^{n-(c-1)}. \quad (6.65)$$

Выражение под знаком суммы представляет вероятность того, что до  $c-1$ -го отказа произойдет  $n$  испытаний; та-

ким образом, сумма по всем возможным  $n$  равна 1. Следовательно,

$$E(\hat{p}) = p, \quad (6.66)$$

что и требовалось доказать. Можно также доказать [4], что  $\hat{p}$ , определяемое формулой (6.59), является единственной несмещенной оценкой  $p$ .

#### 6.4.4. Предельные показательные распределения и гамма-распределение

При помощи предельного перехода от геометрического распределения можно перейти к показательному распределению (п. 6.8.1). В первом случае случайная величина представляет собой количество испытаний до первого отказа, во втором случае — время безотказной работы. Чтобы осуществить переход от одного к другому, предположим, что испытания производятся со все большим и большим темпом. Если при этом вероятность отказа в каждом испытании стремится к нулю, то время до первого отказа также будет стремиться к нулю. Чтобы получить предельный процесс, заметим сначала, что

$$P(v > n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} q^{j-1} p = (1-p)^n. \quad (6.67)$$

Далее, введем новую величину  $\tau = v\Delta t$  и предположим, что  $p = \lambda\Delta t$ , где  $\lambda$  — постоянная. Тогда элемент вероятности случайной величины  $\tau$  будет равен

$$\begin{aligned} f(t) dt &\equiv P(t < \tau < t + dt) = \\ &= P(v\Delta t > t) - P(v\Delta t > t + dt) = \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$= P\left(v > \frac{t}{\Delta t}\right) - P\left(v > \frac{t}{\Delta t} + \frac{dt}{\Delta t}\right) = \quad (6.69)$$

$$= (1 - \lambda\Delta t)^{t/\Delta t} - (1 - \lambda\Delta t)^{t/\Delta t + dt/\Delta t} = \quad (6.70)$$

$$= (1 - \lambda\Delta t)^{t/\Delta t} [1 - (1 - \lambda\Delta t)^{dt/\Delta t}]. \quad (6.71)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  правая часть (6.71) будет стремиться к

$$e^{-\lambda t} [1 - 1 + \lambda dt + o(dt)]. \quad (6.72)$$

Следовательно,

$$f(t) dt = \lambda e^{-\lambda t} dt + o(dt). \quad (6.73)$$

Окончательно, разделив обе части на  $dt$  и устремив  $dt$  к нулю, получим

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (6.74)$$

т. е. плотность вероятности показательного закона.

Аналогично распределения количества испытаний до  $c$ -го отказа имеет в качестве предельного распределения распределение с плотностью

$$f_c(t) = \frac{\lambda^c t^{c-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(c)}. \quad (6.75)$$

Этот закон носит название гамма-распределения (п. 6.9.2.1).

## 6.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Распределение Пуассона — это пример дискретного распределения на бесконечном счетном выборочном пространстве. Точками выборочного пространства будут числа  $0, 1, 2, \dots$ ; распределение Пуассона определяется формулой

$$P(v=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (6.76)$$

$\lambda > 0.$

Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1, \quad (6.77)$$

формула (6.76), очевидно, определяет собственное распределение при любом положительном значении параметра  $\lambda$ .

В приложениях  $v$  обычно обозначает «число событий» в ситуации, когда имеется большое количество источников возникновения события, однако каждый из них приводит к событию лишь с малой вероятностью.

Например, много сотён элементов контура управления снаряда чувствительны к вибрации среды. Предположим, что «критические» пики ускорения возникают во времени с определенной частотой  $\delta$  и что для любого элемента существует малая вероятность  $p$  того, что величина ускорения будет больше «критического» уровня, достижение которого приводит к отказу элемента. В фиксированном интервале  $t$  нам следует ожидать примерно  $\delta pt$  отказов. Далее, если отказ одного или большего числа элементов за время операции  $T$  приводит к отказу всего контура, то надежность контура управления определится вероятностью отсутствия отказов за время  $T$

$$R = e^{-\delta p T} . \quad (6.78)$$

Выражение (6.78) представляет просто нулевой член распределения Пуассона (6.76).

Хотя приведенный пример несколько более сложен, чем это необходимо для иллюстрации, заметим, что обе величины ( $p$  и  $\delta$ ) можно определить в конкретных опытах; оба эти параметра различными способами уменьшают, что приводит к увеличению надежности. В общем смысле формула (6.78) выражает закон взаимодействия элемента со средой, где внутренние свойства элемента характеризуются параметром  $p$ , а свойства среды — параметром  $\delta$ .

В п. 6.8.1 будет дана иная интерпретация формулы (6.78), связанная с введением случайной величины  $\tau$  — времени безотказной работы. Отсюда получается, что (6.78) есть вероятность того, что  $\tau$  будет больше  $T$  для *показательного закона распределения*  $\tau$ . Величина  $\delta p$  называется интенсивностью отказов; она равна обратной величине к среднему времени безотказной работы.

Упражнение. Показать, что  $\nu$ , определенная формулой (6.76), имеет среднее  $\lambda$  и стандартное отклонение  $\sqrt{\lambda}$ .

Воспользовавшись замечанием, приведенным после формулы (6.77), мы, естественно, будем ожидать, что биномиальное распределение (6.1) в пределе стремится к распределению Пуассона, когда количество испытаний  $N$  увеличивается, а вероятность  $p$  отказа в одном испытании становится малой. Для доказательства положим  $N \rightarrow \infty$ ,

$p \rightarrow 0$ , но так, чтобы  $Np \rightarrow \lambda^*$ . Тогда (6.1) можно переписать следующим образом:

$$P(v=f) = \binom{N}{f} \left( \frac{\lambda}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^f \left( 1 - \frac{\lambda}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^{N-f}. \quad (6.79)$$

Далее,

$$f! \binom{N}{f} = \frac{N!}{(N-f)!} = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+1-f)}. \quad (6.80)$$

Поскольку

$$\frac{\Gamma(N+a)}{\Gamma(N+b)} \sim N^{a-b}, \quad N \rightarrow \infty \quad (6.81)$$

(см. [5]), то

$$\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+1-f)} \sim N^f, \quad N \rightarrow \infty. \quad (6.82)$$

Это эквивалентно следующей записи:

$$\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+1-f)} = N^f (1 + o(1)). \quad (6.83)$$

Значит, можно записать

$$f! P(v=f) = (1 + o(1)) \frac{\left( \lambda + N o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^f \left( 1 - \frac{\lambda}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^N}{\left( 1 - \frac{\lambda}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^f}. \quad (6.84)$$

Следовательно, при  $N \rightarrow \infty$

$$P(v=f) \rightarrow \frac{\lambda^f e^{-\lambda}}{f!}. \quad (6.85)$$

Если наблюдаемые значения  $v$  в  $k$  независимых испытаниях равны, соответственно  $v_1 = n_1, v_2 = n_2, \dots, v_k = n_k$ , то *несмещенной оценкой* параметра  $\lambda$  будет

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k n_j. \quad (6.86)$$

---

\* Как обычно,  $o(f(N))$  обозначает функцию  $N$ , стремящуюся к нулю быстрее, чем  $f(N)$ , т. е.  $o(f(N))/f(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Функция  $o(1) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Обозначение  $Np \rightarrow \lambda$  означает, что  $p = \lambda/N + o(1/N)$ .

Упражнение 1. Группа надежности некоторого предприятия получила отчеты об отказах клапанов за 10 рабочих дней. Количество отказов было равно соответственно 3, 3, 2, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 4. Чему равна оценка интенсивности отказов в расчете на один день?

Ответ:

$$\hat{\lambda} = 3.$$

Упражнение 2. Найти оценку вероятности  $P_0$  того, что за один день не произойдет ни одного отказа.

Ответ:

$$\hat{P}_0 \simeq e^{-\hat{\lambda}} = 0,05.$$

Упражнение 3. Пусть получена дополнительная информация, что в течение одного дня было в среднем  $N = 500$  переключений клапанов. Найти оценку вероятности безотказной работы клапана при одном переключении.

Ответ:

$$\hat{R} = 1 - \hat{p} \simeq 1 - \frac{\hat{\lambda}}{N} = 0,994.$$

Пример. Предположим, что в результате предыдущих испытаний была получена оценка  $\hat{R} = 0,97$ . Тогда можно сделать заключение, что 80% отказов не было доложено. Дальнейшее исследование группы надежности может обнаружить что доложены только „безусловные“ отказы, в то время, как в предыдущих отчетах давались сведения как о безусловных, так и о „частичных“ отказах.

Упражнение 4. Считается, что управляемый снаряд функционирует безотказно, если не произойдет ни одного отказа его многочисленных элементов, функционирование которых можно считать независимым. Информация по 10 запускам показывает, что количества отказов были соответственно 1, 1, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 1, 0.

Найти оценку вероятности безотказного функционирования снаряда. Объяснить, в чем отличие этой модели от биномиальной модели успехов и отказов.

## 6.6. ОБОБЩЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ УСПЕХОВ (ОТКАЗОВ)

В § 6.2 и 6.4 была показана важность выборочного пространства при биномиальных испытаниях: оказалось, что распределение модели зависит от того, какое взято выборочное пространство, или от описания множества возможных исходов опыта. В том случае, когда количе-



ство испытаний заранее фиксировано, число отказов (успехов), как было показано, имеет *биномиальное* распределение. С другой стороны, если число отказов заранее фиксировано, то число испытаний имеет *отрицательное биномиальное распределение*.

Сделаем теперь важное обобщение этой задачи путем следующей геометрической интерпретации последовательности биномиальных испытаний (рис. 6.1). Рас-

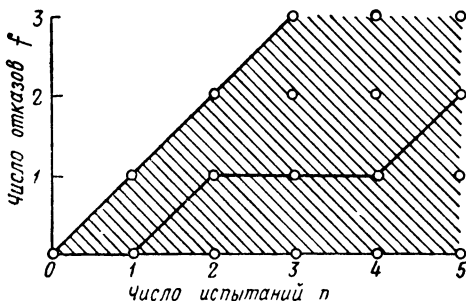


Рис. 6.1.

смотрим обычные прямоугольные координаты, в которых абсцисса обозначает количество испытаний, а ордината — количество отказов. Отправляясь от начала координат, отложим одну единицу вправо по горизонтали, если результатом первого испытания был успех; в противном случае откладывается одна единица вправо и одна вверх. Так, точка  $1, 0$  соответствует случаю, когда первое испытание было успешным, точка  $1, 1$  (по диагонали) — случаю отказа в первом испытании.

В результате второго испытания также откладывается одна единица вправо или одна вправо и одна вверх в зависимости от того, был ли успех или отказ. При этом точка, полученная после первого испытания, играет роль начала координат. Таким образом, после двух испытаний можно попасть в одну из трех точек:  $2, 2$ ;  $2, 1$  или  $2, 0$ . Продолжая этот процесс, можно попасть в любую целочисленную точку заштрихованной области, включая ее границы. Ломаная линия показывает траекторию, соответствующую результату SFSSF ..., где S обозначает успех, F — отказ.

Очевидно, существует  $\binom{n}{f}$  различных траекторий, приходящих в точку  $(n, f)$ ; каждой из них соответствует  $f$  успехов и  $n-f$  отказов. Прежде чем определять вероятности точек  $(n, f)$ , мы обязаны договориться о виде выборочного пространства в опыте, связанном с биномиальными испытаниями.

Выборочное пространство определяется, если мы зададим на графике границу, так что в случае, когда блуждающая точка попадает в какую-либо точку границы, испытания прекращаются. Это можно также назвать *правилом остановки*.

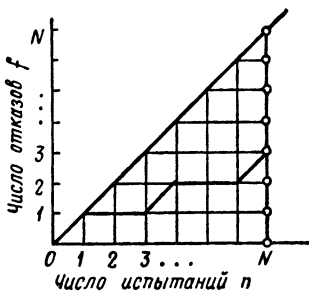


Рис. 6.2.

Например, если заранее фиксировано число испытаний  $N$ , то граничные точки будут лежать на вертикальной прямой  $n=N$ ,  $0 \leq f \leq N$  (рис. 6.2) \*.

На рис. 6.2 точки границы показаны кружочками. Ввиду того, что точка  $(N, f)$  соответствует  $f$  отказам и  $(N-f)$  успехам, вероятность этой точки

$$\binom{N}{f} p^f q^{N-f},$$

где  $p$  — вероятность отказа, а  $q = 1-p$ .

\* Очевидно, испытания не всегда имеют последовательный характер. Например, возможно испытание по группам. При этом требуется, чтобы результату (т. е. общему количеству отказов в группе) не могла соответствовать точка, лежащая за выбранной границей.

Неизменность вероятностей точек будет обеспечена только в том случае, если мы возьмем объем группы не больше, чем минимальное количество испытаний, необходимое для достижения границы из точки, соответствующей началу группового испытания. Например, на рис. 6.2, вероятности не изменятся, если мы сгруппируем все  $N$  испытаний (см. формулы после рис. 6.2). Однако если  $N=10$ , а мы каким-то образом достигли точки  $(n, f) = (5, 2)$ , то для пересечения границы можно образовать группу максимум из 5 испытаний. Для плана рис. 6.3 в начале опыта можно сгруппировать максимум  $s$  испытаний. Для плана рис. 6.4 это число равно 3.

Если договориться, что опыт оканчивается при получении  $c$  отказов, точки границы будут выглядеть, как на рис. 6.3, т. е. они будут лежать на горизонтальной прямой  $f=c$ ,  $n \geq c$ .

Граничным точкам в этом случае соответствуют вероятности

$$\binom{n-1}{c-1} p^c q^{n-c},$$

но отнюдь не  $\binom{n}{c} p^c q^{n-c}$ . Это происходит вследствие того, что точка  $(n, c)$  не достижима из соседней слева точки  $(n-1, c)$ , так как в этой точке опыт закан-

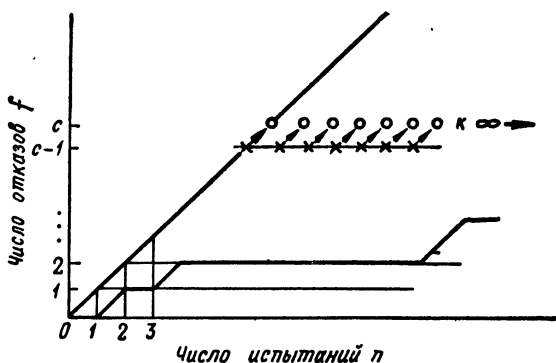


Рис. 6.3.

чивается. Таким образом, количество траекторий, приходящих в ту или иную *граничную* точку  $(n, c)$ , равно количеству траекторий, приходящих в точку  $(n-1, c-1)$  (такие точки на рис. 6.3 отмечены крестиками).

На рис. 6.4 показано очень важное выборочное пространство. Это пример последовательного выборочного метода Вальда ([6], гл. 5). Нижняя граница на рисунке может быть описана уравнением

$$n = 2f + 5, \quad f \geq 0, \quad (6.87)$$

а верхняя — уравнением

$$n = 2f - 3, \quad f \geq 3. \quad (6.88)$$

Хотя вывод общей формулы для вероятностей, соответствующих граничным точкам, представляет чрезвычайно трудную задачу, мы можем тем не менее для каждой отдельной точки определить эту вероятность, подсчитав,

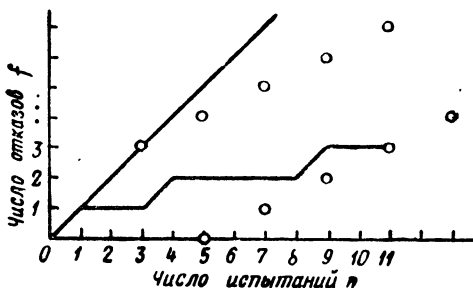


Рис. 6.4.

сколько в нее приходит траекторий. Заметим сначала, что число траекторий в каждую точку  $n, f$  равно сумме числа траекторий, приходящих в точки  $(n-1, f)$  и  $(n-1, f-1)$ . При этом нужно следить за тем, чтобы траекто-

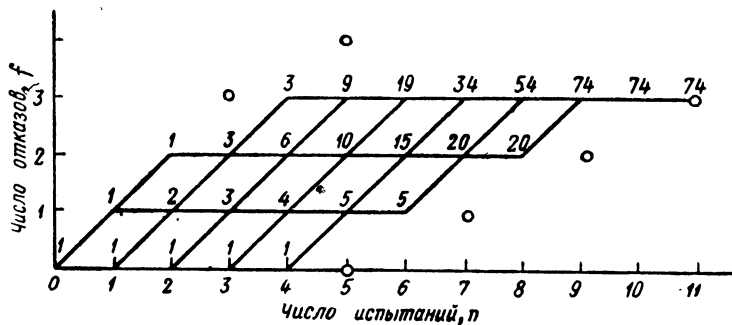


Рис. 6.5.

рии, идущие в интересующую нас точку границы, не проходили через другие точки границы (в противном случае опыт заканчивается еще до достижения рассматриваемой точки).

В качестве иллюстрации на рис. 6.5 показано множество траекторий, идущих в точку  $(11, 3)$  в случае выбо-

рочно́го пространства, которое соответствует рис. 6.4. Точка  $(11, 3)$  — результат 3 отказов и 8 успехов, полученных в произвольном порядке, за исключением случаев, которые соответствуют прохождению через другие точки границы. Количество возможных траекторий, проходящих в точку  $11, 3$ , равно 74, это можно видеть из рис. 6.5. Следовательно, вероятность, соответствующая точке  $(11, 3)$ , есть  $74p^3q^8$ .

У п р а ж н е н и е. Вычислить тем же способом вероятности всех граничных точек при  $f \leq 5$ .

Заметим, что выборочные пространства, показанные на рис. 6.3 и 6.4, состоят из бесконечного множества точек. В этих случаях может возникнуть вопрос: могут ли испытания продолжаться неограниченно долго?

Ответ заключается в следующем: подобным событием можно пренебречь, поскольку вероятность того, что граница не будет достигнута ни за какое конечное число испытаний, равна нулю. Вальд [6] установил этот результат для более общих выборочных пространств, подобных изображенному на рис. 6.4. В случае выборочного пространства (рис. 6.3) это свойство является непосредственным следствием того факта, что  $P(v > n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  [последнее утверждение доказывается при помощи формулы (6.18)]. Однако строгого доказательства мы здесь приводить не будем\*.

### 6.6.1. Несмещенная оценка $p$

Метод подсчета траекторий можно использовать для получения несмещенной оценки  $p$  [4]. С этой целью подсчитаем количество траекторий, попадающих в заданную точку границы из точки  $(1, 1)$  и разделим его на количество траекторий, попадающих в нашу точку из  $(0, 0)$ .

---

\* Для строгого доказательства требуется специальная теорема: если  $A_n$  обозначают события, причем  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  и если

$A \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , то  $P(A) = \lim P(A_n)$  (см. [12], стр. 33). В нашем

случае  $A_n \equiv (v > n)$ , а  $A$  — событие, состоящее в том, что „ $v > 1$ ,  $v > 2$ , ...“, т. е. „ $v$  больше любого конечного числа“.

Так, в примере, показанном на рис. 6.5, количество траекторий, приходящих из точки  $(1,1)$  в точку  $(11,3)$ , как легко видеть, равно 26. Следовательно, в том случае, если опыт заканчивается получением 3 отказов в 11 испытаниях, то несмещенной оценкой вероятности  $p$  отказа будет  $\hat{p} = \frac{26}{74} = 0,351$ . Заметим, что это значение отлично от того, которое получилось бы при использовании выборочного пространства (см. рис. 6.2).

**У п р а ж н е н и е 1.** Подсчитать количество траекторий из точки  $1, 1$ , заканчивающихся при  $f \leq 5$ , в случае выборочного пространства (рис. 6.4). Найти несмещенную оценку  $p$  для соответствующих точек границы.

**У п р а ж н е н и е 2.** Доказать, что в случае выборочного пространства рис. 6.2 справедлива общая формула, согласно которой несмещенная оценка есть  $\hat{p} = f/N$ , а в случае выборочного пространства, взятого из рис. 6.3,  $\hat{p} = (c - 1)/(n - 1)$ , если только  $c > 1$ . Заметим, что при  $c = 1$  и  $n > 1$  не существует траекторий из  $1, 1$  в какую бы то ни было граничную точку; это находится в соответствии с формулой (6.60).

Общие методы, развитые в данном параграфе, должны сделать для читателя ясным важность описания до опыта множества возможных исходов, т. е. выборочного пространства. Если этот этап не осуществлен, то невозможно делать правильные выводы относительно значения  $p$ , для оценки которого обычно и производятся биномиальные испытания.

В гл. 10 описанные методы будут использованы для контроля надежности.

## 6.7. МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Модели подобного вида используются для оценки таких событий, как, например,  $E_1$  — «время безотказной работы больше  $T$ », где  $T$  — требуемое или ожидаемое время работы устройства, или  $E_2$  — «выходной параметр лежит в заданных пределах». При этом вероятность любого такого события можно назвать надежностью устройства. (В действительности «надежность» можно было бы определить, как  $P(E_1 \cap E_2)$ , т. е. вероятность совместного осуществления *обоих* событий).

Временные характеристики отказов обычно связываются с отказами трех типов. Если устройство вводится в действие в момент  $t = 0$ , то оно уже при этом может

быть в состоянии отказа. Детская смертность (до и после рождения) может служить хорошим примером для понимания отказов первого типа. Мы назовем такие отказы *начальными*. Вероятность начального отказа устройства можно оценить долей дефектных устройств в момент включения. Возможен и такой случай, когда начальные отказы проявляются вскоре после момента  $t=0$ . Например, для высококачественных электронных ламп некоторых видов период «приработки» используется для отбраковки ламп, отказывающих в первые несколько часов работы. После приработки лампы отказывают со значительно меньшей интенсивностью, чем в начальный период.

Другим примером, в котором проявляются ранние отказы, является следующее. Часто в полисы по страхованию жизни, распространяющиеся на всех иждивенцев, не включаются новорожденные до достижения ими двухнедельного возраста. Более того, типичные таблицы смертности показывают, что до 10 лет ребенок может погибнуть от врожденных или наследственных дефектов; пережив этот возраст, ребенок будет почти застрахован от подобной смерти.

Пройдя начальный период, многие устройства входят в режим постоянной интенсивности отказов, которая, как правило, ниже, чем в начальный период. Так, люди в возрасте от 10 до 30 лет умирают обычно в результате случайностей. После этого периода начинаются процессы изнашивания; возрастает смертность вследствие старения. Период постоянной интенсивности отказов, будь это жизнь детей и взрослых, электронных ламп и т. п., называется *периодом случайных отказов*. В этот период отказы обуславливаются действием необычно жестких, непредвиденных и (или) непредотвратимых внешних обстоятельств, возникающих в процессе работы «устройства». Последний период называется *периодом поздних отказов*; он обычно связан с постепенным изнашиванием материала, накапливаемым разрушением, усталостью и т. п.

В соответствии с этим мы имеем три типа отказов: *начальные, случайные и поздние*. Каждый из них связан с определенным периодом работы устройства: начальные отказы происходят в начальный момент или вскоре за ним; случайные отказы происходят в проме-

жуточный период; наконец, имеются поздние отказы, свойственные большинству, если не всем устройствам, будь это человеческие существа или электромеханические устройства.

Прежде всего рассмотрим *интенсивность отказов*, доставляющую общий подход к определению распределений времени безотказной работы, в частности показательного распределения, распределения Вейбулла и распределения крайних значений. Далее мы приведем различные выводы распределений крайних значений, а также их применения. Затем будет дана модель, основанная на обобщенном *процессе чистой гибели*, которая ведет снова к показательному распределению, а также к более общему распределению времени безотказной работы включающему в качестве частных случаев показательное и гамма-распределение. В конце рассматривается важное и общеизвестное нормальное распределение.

### 6.8. ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ

*Интенсивность отказов*  $h(t)$  определяется по заданному распределению времени безотказной работы как (условная) плотность вероятности времени до отказа при условии, что устройство не отказало до момента  $t$ . Обозначим через  $f(t)$  (безусловную) плотность вероятности. Тогда  $f(t)dt$  будет представлять долю устройств, включенных в момент  $t=0$ , которые отказали в интервале  $(t, t+dt)$ . С другой стороны,  $h(t)dt$  представляет собой долю тех устройств, которые не отказали до момента  $t$ , но отказали в том же интервале  $(t, t+dt)$ . Легко видеть, что  $h(t)$  и  $f(t)$  связаны соотношением

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad (6.89)$$

где

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Действительно, по определению,  $h(t)$

$$P[(t < \tau < t + dt) | (\tau > t)] \equiv h(t) dt. \quad (6.90)$$

Но

$$P[(t < \tau < t + dt) | (\tau > t)] = \frac{P[(t < \tau < t + dt) \cap (\tau > t)]}{P(\tau > t)}. \quad (6.91)$$



(Это общая формула, определяющая условные вероятности). Но числитель правой части составляет

$$P(t < \tau < t + dt) \equiv f(t) dt,$$

поскольку событие  $(t < \tau < t + dt)$  содержится в событии  $(\tau > t)$ . Ввиду того, что  $P(\tau > t) = 1 - F(t)$ , после сокращения на  $dt$  мы убеждаемся в справедливости (6.89).

Перед тем как перейти к изучению возможных видов функции  $h(t)$ , решим уравнение (6.89) относительно  $f(t)$  или  $F(t)$ , считая  $h(t)$  известной.

Имеем

$$\frac{dF}{1-F} = h(t) dt \quad (6.92)$$

или

$$[-\log(1-F)]_{F(0)}^{F(t)} = \int_0^t h(x) dx$$

или после подстановки

$$\log \frac{1-F(t)}{1-F(0)} = -\int_0^t h(x) dx,$$

откуда

$$1 - F(t) = [1 - F(0)] \exp \left[ -\int_0^t h(x) dx \right]. \quad (6.93)$$

Дифференцируя, получаем

$$f(t) = [1 - F(0)] h(t) \exp \left[ -\int_0^t h(x) dx \right]. \quad (6.94)$$

Из уравнения (6.93) видно, что при  $t \rightarrow \infty$  должно быть

$$\int_0^t h(x) dx \rightarrow \infty,$$

поскольку  $F(\infty) = 1$ . (Иначе  $F(\infty)$  не была бы собственной функцией распределения.)

Значение  $F(0)$  может быть любым числом между нулем и единицей, т. е.  $F(0)$  — это вероятность начального отказа в момент  $t=0^*$ .

В последующих выкладках мы будем считать, что  $F(0)=0$ ; это предположение позволяет записать (6.93) и (6.94) в виде

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \int_0^t h(x) dx \right] \quad (6.93')$$

и

$$f(t) = h(t) \exp \left[ - \int_0^t h(x) dx \right]. \quad (6.94')$$

### 6.8.1. Показательное распределение

Наиболее простой вид  $h(t)$  — это

$$h(t) = \lambda, \quad \lambda > 0, \quad (6.95)$$

где  $\lambda$  — постоянная. В этом случае, очевидно, уравнение (6.94') дает

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (6.96)$$

т. е. плотность вероятности показательного распределения. Постоянная  $\lambda$  имеет смысл *параметра отказов*, а обратная ей величина равна *среднему времени безотказной работы*.

### 6.8.2. Распределение Вейбулла

В качестве дальнейшего примера рассмотрим другой простой вид функции  $h(t)$ , а именно

$$h(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1}, \quad (6.97)$$

где  $\alpha > 0, \lambda > 0$ .

---

\* Строго говоря, нам следовало бы везде употреблять обозначение  $F(+0)$ , т. е.  $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$  при  $t > 0$  ( $t > 0$ ).  $F(-0)$  всегда можно определить как тождественный нуль, но  $F(+0)$  не обязательно равна нулю. Таким образом, при решении уравнения (6.93) непрерывность не необходима.

В этом случае

$$\int_0^t h(x) dx = \lambda t^\alpha, \quad (6.98)$$

следовательно,

$$f(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}. \quad (6.99)$$

Это плотность так называемого двухпараметрического распределения Вейбулла. Очевидно, показательное распределение является по отношению к распределению Вейбулла частным случаем, соответствующим  $\alpha=1$  в формуле (6.99).

Найдем среднее и дисперсию случайной величины  $\tau$ , подчиненной закону Вейбулла (6.99). Имеем

$$E(\tau^n) = \int_0^\infty \alpha \lambda t^{n-1+\alpha} e^{-\lambda t^\alpha} dt. \quad (6.100)$$

Положим  $t^\alpha = u$ , тогда  $\alpha t^{\alpha-1} dt = du$  или  $dt = \frac{1}{\alpha} u^{(1/\alpha)-1} du$ , откуда

$$E(\tau^n) = \int_0^\infty \lambda u^{n/\alpha} e^{-\lambda u} du \quad (6.101)$$

или

$$E(\tau^n) = \Gamma\left(\frac{n}{\alpha} + 1\right) \lambda^{-n/\alpha}. \quad (6.102)$$

При  $n=1$

$$E(\tau) = \alpha_1 = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \lambda^{-1/\alpha}. \quad (6.103)$$

При  $n=2$

$$E(\tau^2) = \mu_2 + \alpha_1^2 = \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) \lambda^{-2/\alpha}. \quad (6.104)$$

Следовательно,

$$\text{var}(\tau) = \mu_2 = \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) \lambda^{-2/\alpha} - \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right\}^2 \lambda^{-2/\alpha}$$

или

$$\mu_2 = \lambda^{-2/\alpha} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right\}^2 \right]. \quad (6.105)$$

Мы возвратимся к распределению Вейбулла в п. 7.5.5, где рассматриваются методы оценки параметров. На рис. 6.6 показаны плотности вероятности за-

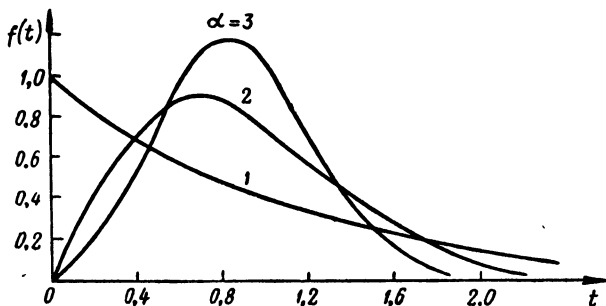


Рис. 6.6. Распределение Вейбулла [формула (6.99)] при  $\lambda=1$ .

кона Вейбулла при  $\lambda=1$  и нескольких значениях параметра  $\alpha$ . (Изменение параметра  $\lambda$  просто «сжимает» или растягивает кривую; таким образом,  $\lambda$  играет роль «масштабного» параметра.)

У п р а ж н е н и е. Найти  $h(t)$  для распределения с плотностью вероятности

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} [1 - P(2, \lambda t)],$$

где

$$P(N, \lambda t) = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{N-1} e^{-u}}{\Gamma(N)} du.$$

Доказать последнее соотношение.

### 6.8.3. Распределение крайних значений

Рассмотрим еще один вид интенсивности отказа

$$h(t) = \alpha \gamma e^{\gamma t}. \quad (6.106)$$

Из уравнения (6.94') легко получить выражение

$$f(t) = \alpha \gamma e^{\gamma t} e^{-\alpha(e^{\gamma t} - 1)}. \quad (6.107)$$

Ниже будет показано, что эту плотность можно заменой переменной преобразовать в *нормированную плотность вероятности крайнего значения*. В п. 6.8.3.2 даются различные подходы и применения.

На рис. 6.7 показаны плотности вида (6.107) при нескольких значениях  $\alpha$  и  $\gamma=1$  ( $\gamma$  — масштабный параметр).

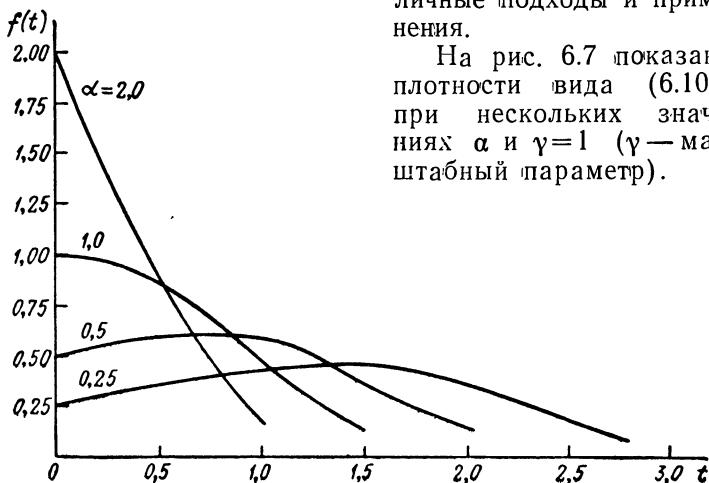


Рис. 6.7. Распределение крайнего значения (6.107) при  $\gamma=1$ .

Как показано в [7], нормированное распределение крайних значений дается формулой

$$P(\xi \leq x) = e^{-e^{-(x-u)/\beta}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (6.108)$$

Поскольку

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\alpha(e^{\gamma t} - 1)}, \quad 0 < t < \infty, \quad (6.109)$$

то величины  $\xi$  и  $\tau$  можно связать уравнением

$$e^{\gamma \tau} - 1 = e^{-\xi/\beta}, \quad (6.110)$$

в котором  $\alpha = e^{u/\beta}$ .

Далее, если

$$\eta = (\xi - u)/\beta, \quad (6.111)$$

то

$$P(\eta \leq y) = P(\xi \leq \beta y + u) = e^{-e^{-y}}, \quad -\infty < y < \infty. \quad (6.112)$$

Случайная величина  $\eta$  называется приведенным или нормированным крайним значением (по аналогии с нормированной нормальной случайной величиной). В [8] имеется таблица распределения  $\eta$ .

### 6.8.3.1. ПРИМЕР ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ

В случае, когда  $h(t)$  имеет вид

$$h(t) = \alpha h_1(t; \beta_1, \beta_2, \dots), \quad (6.113)$$

где  $\alpha$  — неизвестный параметр, а  $\beta_1, \beta_2, \dots$  — параметры, которые известны (или считаются известными), модели интенсивностей отказов сводятся к модели показательного распределения с одним неизвестным параметром  $\alpha$ . Это делается следующим образом. Вместо выборочного пространства, совпадающего с осью времени  $\tau$ , вводится «псевдовремя»

$$\xi \equiv \int_1^{\tau} h_1(x; \beta_1, \beta_2, \dots) dx,$$

при помощи которого определяется выборочное пространство. Это преобразование сводится к показательному распределению  $\xi$ . Действительно,

$$P(\xi \leq u) = P(H_1(\tau) \leq u), \quad (6.114)$$

где

$$H_1(\tau) = \int_0^{\tau} h_1(x; \beta_1, \beta_2, \dots) dx. \quad (6.115)$$

Так как  $H_1(\tau)$  возрастает по  $\tau$ , правая часть (6.114) равна  $P(\tau \leq H_1^{-1}(u))$ , где  $H_1(H_1^{-1}(u)) = u$ . Следовательно,

$$P(\xi \leq u) = 1 - e^{-\alpha u}, \quad 0 < u < \infty, \quad (6.116)$$

т. е. показательной функции распределения.

В п. 8.5.1 этот упрощенный прием будет использован для получения точных доверительных пределов надежности в том случае, когда для описания модели отказов

взято распределение Вейбулла. Однако обычно параметры  $\beta_1, \beta_2, \dots$  не удается определить точно, и их также нужно оценивать по наблюдениям. В этом случае, как мы покажем в § 8.5 и 8.6, для получения доверительных пределов можно применить приближенные методы, основанные на нормальном распределении.

### 6.8.3.2. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КРАЙНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Модель отказов, приводящая к распределению крайнего значения, описана в [9]. Соответствующий вид отказов связан с коррозией. В качестве примера берется использование металлических труб как легкого строительного материала для камеры сгорания жидкостного реактивного двигателя ракеты. В этих трубах находится жидкость (топливо), используемая для охлаждения камеры. Трубы должны иметь минимальную толщину, чтобы обеспечивался достаточный теплообмен с охлаждающей жидкостью. Отказ наступает в том случае, когда вследствие сгорания газа тонкостенные трубы прогорают, в результате чего жидкость попадает в камеру сгорания. В этом случае, как правило, выходная характеристика двигателя ракеты снижается, что ведет к нежелательным последствиям.

Сущность модели, которая рассматривается в данном случае, состоит в том, что на поверхности трубы в начальный момент времени существуют углубления различной глубины; каждое углубление может увеличиваться, пока не образуется отверстие. Чтобы описать модель строго, мы предположим, что отказ наступает в тот момент, когда в трубе образуется *одно* отверстие. Если время образования отверстия пропорционально разности между толщиной трубы и начальным углублением, причем последнее подчинено показательному распределению вероятностей, то в качестве модели времени безотказной работы мы будем иметь один из видов распределения крайнего значения. Это распределение получается из следующих соображений.

Пусть  $D$  — толщина трубы,  $d_1$  — начальное значение  $i$ -го углубления (в момент  $t=0$ ). Пусть далее  $\tau_i = k(D - d_i)$  — время до образования отверстия из  $i$ -го углубления. Будем считать, что  $d_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) —

случайная выборка из (урезанного) показательного распределения

$$1 - F(d) \equiv P(d_i \geq d) = \frac{e^{-\lambda d} - e^{-\lambda D}}{1 - e^{-\lambda D}}, \quad 0 \leq d \leq D, \quad (6.117)$$

где  $F(d)$  — функция распределения  $d$ .

Тогда

$$G(t) = P(\tau_i \leq t) = P\left(d_i \geq D - \frac{t}{k}\right) = \frac{e^{\lambda t/k} - 1}{e^{\lambda D} - 1}, \quad 0 \leq t \leq kD. \quad (6.118)$$

Если теперь  $\tau$  — время безотказной работы, то

$$\tau = \min_i \tau_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6.119)$$

согласно принятому предположению о том, что отказ наступает, как только образовалось хотя бы одно отверстие. Легко видеть, что функция распределения значения случайной выборки объема  $N$  дается выражением

$$P(\tau \leq t) = H(t) = 1 - (1 - G(t))^N, \quad (6.120)$$

где  $G(t)$  — функция распределения совокупности, из которой произведена выборка. Естественно предположить, что количество углублений ( $N$ ) очень велико; в то же время легко убедиться в том, что при

$$H(t) \sim 1 - e^{-NG(t)}. \quad (6.121)$$

Подставив (6.118), будем иметь

$$H(t) \sim 1 - \exp\left[-\frac{N}{e^{\lambda D} - 1}(e^{\lambda t/k} - 1)\right]. \quad (6.122)$$

Если положить

$$\alpha \equiv \frac{N}{e^{\lambda D} - 1}, \quad (6.123)$$

$$\gamma \equiv \frac{\lambda}{k}, \quad (6.124)$$

то получим

$$H(t) \sim 1 - e^{-\alpha(e^{\gamma t} - 1)}, \quad t > 0 \quad (6.125)$$

и

$$H'(t) \sim \alpha \gamma e^{\gamma t} e^{-\alpha(e^{\gamma t} - 1)}, \quad (6.125')$$



что представляет собой вид распределения крайнего значения, полученный по интенсивности отказов п. 6.8.3.

В примере с камерой сгорания ракетного двигателя можно указать в качестве показательных следующие численные значения:

$$D = 2 \times 10^{-2} \text{ дюйма}, \quad k = 10^7 \frac{\text{сек}^{-1}}{\text{дюйм}},$$

$$\lambda = 4 \times 10^2 \text{ дюйм}^{-1}, \quad N = 3 \times 10^3.$$

Когда  $\lambda D = 8$ , тогда в (6.117) можно пренебречь  $e^{-\lambda d}$ , т. е. можно считать, что  $P(d_i \geq d) \approx e^{-\lambda d}$ . Тогда величина  $1/\lambda$  будет приближенно равна средней глубине углубления, которая в данном случае составляет 0,0025 дюйма. Определим теперь продолжительность процесса горения, при которой вероятность безотказной работы будет равна, скажем,  $R = 0,50$ :

$$H(t) = 1 - R = 1 - \exp \left[ -\frac{3 \times 10^3}{3 \times 10^3} (e^{4 \times 10^{-2} t} - 1) \right] \quad (6.126)$$

или при  $R = 0,50$

$$0,693 = e^{4 \times 10^{-2} t} - 1, \quad (6.127)$$

откуда

$$t \approx 13,200 \text{ сек.} \quad (6.128)$$

При  $R = 0,95$  подобные вычисления дают

$$t \approx 1260 \text{ сек.} \quad (6.129)$$

## 6.9. МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ГИБЕЛИ

### 6.9.1. Вывод показательного распределения

Чтобы ввести читателя в более общее распределение вероятностей времени безотказной работы, основанное на процессе гибели с многими состояниями\*, мы дадим здесь вывод показательного распределения, в котором используется процесс гибели с двумя состояниями. Смысл понятия «процесс гибели» будет выяснен ниже.

Пусть имеется устройство, которое может пребывать в двух состояниях: исправном состоянии  $E_1$  и состоянии отказа  $E_0$ .

\* Более подробно о процессах рождения и гибели см. [1], гл. 17.

Считается, что в начальный момент (при  $t=0$ ) устройство находится в состоянии  $E_1$ .

Обозначим через  $P_1(t)$ ,  $P_0(t)$  соответственно вероятности того, что в момент  $t$  устройство находится в  $E_1$  и  $E_0$ . Переход возможен лишь из  $E_1$  в  $E_0$ . Если устройство находится в состоянии  $E_0$ , то оно в нем и останется. Предположим, что выполняется следующее условие. Если в момент  $t$  устройство находится в состоянии  $E_1$ , то вероятность перехода в состояние  $E_0$  в течение интервала времени  $(t, t+h)$  приблизительно пропорциональна  $h^*$ . Тогда вероятность  $P_0(t+h)$  нахождения устройства в состоянии  $E_0$  в момент  $t+h$  будет составлять сумму следующих двух вероятностей:

1) вероятности того, что в момент  $t$  устройство находилось в состоянии  $E_0$ ;

2) вероятности того, что устройство в момент  $t$  находилось в состоянии  $E_1$ , а в течение интервала  $(t, t+h)$  перешло в состояние  $E_0$ .

Тогда мы получим

$$P_0(t+h) = P_0(t) + P_1(t)[\lambda h + o(h)], \quad (6.130)$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности, а  $o(h)$  обозначает функцию от  $h$ , для которой

$$\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Можно (6.130) переписать следующим образом:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = \lambda P_1(t) + \frac{o(h)}{h}. \quad (6.131)$$

Устремив  $h$  к нулю, получим

$$P'_0(t) = \lambda P_1(t). \quad (6.132)$$

Подобным же образом вероятность  $P_1(t+h)$  того, что устройство в момент  $t+h$  находится в состоянии  $E_1$ , рав-

---

\* То, что имеется в виду, выражено последним членом правой части (6.130).

на вероятности того, что в момент  $t$  также было состояние  $E_1$  и за время  $h$  не произошло изменения состояния:

$$P_1(t+h) = P_1(t)(1 - \lambda h - o(h)) \quad (6.133)$$

или

$$\frac{P_1(t+h) - P_1(t)}{h} = -\lambda P_1(t) + \frac{o(h)}{h}. \quad (6.134)$$

Полагая  $h \rightarrow 0$ , имеем

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t). \quad (6.135)$$

Поскольку в момент  $t=0$  устройство находится в состоянии  $E_1$ , то

$$\left. \begin{aligned} P_1(0) &= 1, \\ P_0(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.136)$$

Решая (6.132) и (6.135) при начальных условиях (6.136), мы находим

$$P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (6.137a)$$

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}. \quad (6.137b)$$

Полученному решению можно дать следующую интерпретацию:  $P_0(t)$  есть вероятность состояния отказа в момент  $t$ . Следовательно,  $1 - P_0(t)$  представляет вероятность исправного состояния в момент  $t$ .  $P_0(t) + P_1(t) = 1$ , поскольку устройство может находиться только в одном из двух несовместных состояний. Если ввести случайную величину  $\tau$  как время (ожидания) до отказа, то, очевидно, будет

$$G_0(t) \equiv P(\tau \leq t) = P_0(t), \quad (6.138)$$

т. е.  $G(t)$  будет функцией распределения времени безотказной работы  $\tau$ . Заметим, что выше мы рассматривали состояние как случайную величину; переменная  $t$  представляла собой параметр распределения вероятностей состояний.

Можно прийти к (6.138) несколько иным путем, введя в рассмотрение случайную величину  $\tau$  по следующему принципу.

Пусть  $g_0(t)$  обозначает вероятность того, что переход устройства в состояние  $E$  произойдет в интервале времени  $(t, t+dt)$ . Тогда  $g_0(t)$  будет представлять собой плотность вероятности времени безотказной работы. Будем иметь

$$g_0(t) dt = P_1(t) \lambda dt + o(dt), \quad (6.139)$$

так как для возможности перехода в состояние  $E_0$  за время от  $t$  до  $t+dt$  необходимо, чтобы в момент  $t$  устройство находилось в состоянии  $E_1$ . Разделив (6.139) на  $dt$  и положив  $dt \rightarrow 0$ , получим

$$g_0(t) = \lambda P_1(t). \quad (6.140)$$

Используя полученный ранее результат (6.137б), имеем

$$g_0(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (6.141)$$

что представляет плотность вероятности времени безотказной работы. Очевидно, в соответствии с (6.138)

$$P_0(t) = \int_0^t g_0(u) du \quad (6.142)$$

является функцией распределения случайной величины  $\tau$ .

### 6.9.2. Вывод более общего распределения времени безотказной работы

Рассмотрим более общую ситуацию, при которой устройство в момент  $t$  может находиться в любом из конечного числа  $N$  состояний. Как и прежде,  $E_0$  будет обозначать состояние отказа, в то время как  $E_1, \dots, E_N$  — состояния безотказной работы. Переходы могут происходить только таким образом: состояние  $E_k (1 \leq k < N)$  достигается только переходом из состояния  $E_{k+1}$ ; в состоянии  $E_0$  можно перейти из любого состояния. Попад в состояние  $E_0$ , устройство в нем и остается. Этот (случайный) процесс показан на рис. 6.8\* Стрелки на этой схеме обозначают направления переходов; в направлении против стрелок переходы невозможны. Постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  характеризуют вероятности переходов и будут сейчас определены. Более точно вероятно-

\* Вывод, подобный предлагаемому ниже, дается в [1], гл. 17.

стный закон, управляющий рассматриваемым процессом, формулируется следующим образом.

1. Если в момент  $t$  устройство находится в состоянии  $E_k$  ( $2 \leq k \leq N$ ), то вероятность перехода в состояние  $E_{k-1}$  в интервале  $(t, t+h)$  равна  $\lambda h + o(h)$ . Вероятность перехода в этом же интервале в состояние  $E_0$  равна  $\mu h + o(h)$ . При  $k=1$  вероятность перехода (единственно возможного) в  $E_0$  за время от  $t$  до  $t+h$  равна  $(\lambda + \mu)h + o(h)$ .

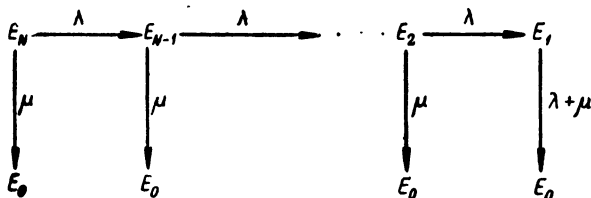


Рис. 6.8.

2. Вероятность двух и большего числа переходов (например, из  $E_k$  в момент  $t$  в  $E_{k-1}$  и затем в  $E_{k-2} \dots$ ) в интервале времени  $(t, t+h)$  представляет  $o(h)$  ( $2 \leq k \leq N$ ).

Обозначим через  $P_k(t)$  вероятность нахождения устройства в состоянии  $E_k$  в момент  $t$ . Пусть  $1 \leq k < N-1$ . Тогда вероятность нахождения устройства в состоянии  $E_k$  в момент  $t+h$  складывается из следующих вероятностей:

1) вероятности того, что в момент  $t$  устройство было в состоянии  $E_k$  и в интервале времени  $(t, t+h)$  не произошло перехода в другое состояние; эта вероятность составляет

$$P_k(t) [1 - \lambda h - \mu h - o(h)];$$

2) вероятности того, что в момент  $t$  устройство было в состоянии  $E_{k+1}$ , и в интервале времени  $(t, t+h)$  произошел один переход в  $E_k$ ; эта вероятность равна

$$P_{k+1}(t) [\lambda h + o(h)];$$

3) вероятности того, что в момент  $t$  устройство было в состоянии  $E_{k+r}$ , где  $r > 1$ , и за время от  $t$  до  $t+h$  произошло  $r$  изменений состояния; эта вероятность равна

$$P_{k+r}(t) \cdot o(h).$$

Отсюда

$$P_k(t+h) = P_k(t)(1 - \lambda h - \mu h) + P_{k+1}(t)\lambda h + o(h). \quad (6.143)$$

Разделив на  $h$  и положив  $h \rightarrow 0$ , выводим

$$P'_k(t) = -(\lambda + \mu)P_k(t) + \lambda P_{k+1}(t), \quad (6.144)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N-1$ .

Аналогично

$$P'_N(t) = -(\lambda + \mu)P_N(t). \quad (6.145)$$

Очевидно, возможно ставить самые различные начальные условия; однако если согласиться, что в момент  $t=0$  устройство находится в состоянии  $E_N$ , то

$$P_N(0) = 1,$$

$$P_k(0) = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1. \quad (6.146)$$

Перед тем как перейти к решению уравнений (6.144) и (6.145) относительно  $P_k(t)$ , введем случайную величину  $\tau$ , определив ее как время безотказной работы, и найдем ее связь с этими характеристиками. Пусть  $g_0(t)$  обозначает плотность вероятности  $\tau$ . Тогда вероятность того, что  $\tau$  (время до достижения состояния  $E_0$ ) придется на интервал  $(t, t+dt)$ , будет равна сумме следующих вероятностей:

1) вероятности того, что в момент  $t$  устройство находится в состоянии  $E_k$ , а за этим последует один переход в  $E_0$  в интервале  $(t, t+dt)$ ; эта вероятность равна

$$P_k(t) \cdot (\mu dt + o(dt)), \quad k = 2, \dots, N;$$

2) вероятности того, что в момент  $t$  устройство находится в состоянии  $E_1$  и за время от  $t$  до  $t+dt$  произошел один переход в  $E_0$ ; эта вероятность равна

$$P_1(t) \cdot [(\lambda + \mu) dt + o(dt)];$$

3) вероятности того, что в момент времени  $t$  устройство находится в состоянии  $E_r$  ( $2 \leq r \leq N$ ) и за время от  $t$  до  $t+h$  произойдет  $m$  ( $2 \leq m \leq r$ ) переходов, в результате которых устройство придет в состояние  $E_0$ . Эта вероятность равна

$$P_r(t) \cdot o(dt).$$

Таким образом,

$$g_0(t) dt = (\lambda + \mu) P_1(t) dt + \mu \sum_{k=2}^N P_k(t) dt + o(dt). \quad (6.147)$$

Разделив (6.147) на  $dt$  и положив  $dt \rightarrow 0$ , получим:

$$g_0(t) = \lambda P_1(t) + \mu \sum_{k=1}^N P_k(t). \quad (6.148)$$

Вероятности  $P_k(t)$ ,  $k=1, \dots, N$  проще всего определить, применив к уравнениям (6.144) и (6.145) с начальными условиями (6.146) преобразование Лапласа. Соответствующие выражения после подстановки в (6.146) дают

$$g_0(t) = e^{-\mu t} \left[ \frac{\lambda (\lambda t)^{N-1} e^{-\lambda t}}{(N-1)!} + \mu \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\lambda k)^k e^{-\lambda t}}{k!} \right]. \quad (6.149)$$

Последнее выражение\* представляет собой плотность вероятности времени безотказной работы  $\tau$ . В общей модели остаются справедливыми формулы (6.138) и (6.142). Из упражнения § 6.8.2 имеем

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{N-1} e^{-u}}{\Gamma(N)} du \equiv P(N, \lambda t).$$

---

\* Формулу (6.149) можно получить значительно проще. Действительно, как легко видеть,  $g_0(t) = P(\min\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k, \eta\} > t)$ , где  $\xi_i, \eta$  — независимые в совокупности случайные величины, причем  $\xi_i$  показательно распределены с параметром  $\lambda$ , а  $\eta$  — с параметром  $\mu$ . Тогда  $g_0(t) = P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k > t; P(\eta > t))$ , после чего остается использовать (5.54). (Прим. перев.)

Используя этот факт, можно переписать (6.149) как

$$g_0(t) = e^{-\mu t} \left[ \frac{\lambda (\lambda t)^{N-1} e^{-\lambda t}}{(N-1)!} + \mu \left( 1 - \int_0^{\lambda t} \frac{u^{N-1} e^{-u}}{\Gamma(N)} du \right) \right]. \quad (6.149')$$

Заменяя переменную интегрирования  $u = \lambda x$ , мы находим, что функция распределения  $G_0(t)$ :

$$G_0(t) = 1 - e^{-\mu t} \left[ 1 - \int_0^{\lambda t} \frac{\lambda^N x^{N-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(N)} dx \right], \quad (6.150)$$

поскольку, чтобы получить  $g_0(t)$ , следует продифференцировать  $G_0(t)$ .

Следовательно, вероятность безотказной работы за время  $t$

$$R(t) = e^{-\mu t} \left[ 1 - \int_0^{\lambda t} \frac{\lambda^N x^{N-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(N)} dx \right]. \quad (6.151)$$

Таким образом, в случае общей модели получается комбинированная интенсивность отказов, в которую входит экспонента, характеризующая случайные отказы, и характеристика *поздних* отказов. Уравнение (6.151) показывает, что вероятности событий «отсутствие случайных отказов за время  $t$ » и «отсутствие поздних отказов за время  $t$ » в формуле для вероятности отсутствия отказов обоих видов за время  $t$  перемножаются.

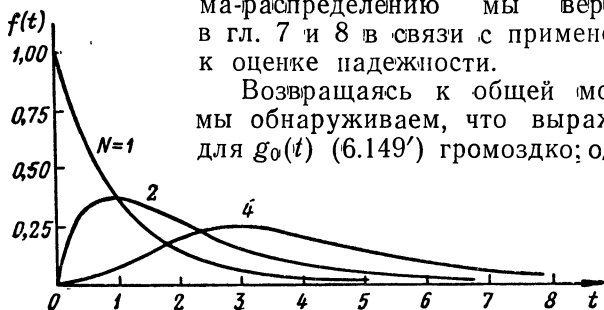
### 6.9.2.1. ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Перед тем как закончить рассмотрение этой общей модели, рассмотрим интеграл в (6.151), обозначенный через  $P(N, \lambda t)$ . Это известное гамма-распределение, которое обычно записывают так:

$$P(N, \lambda t) = \frac{1}{\Gamma(N)} \int_0^{\lambda t} \lambda^N x^{N-1} e^{-\lambda x} dx. \quad (6.152)$$



На рис. 6.9 показан вид плотности вероятности  $dP(N, \lambda t)/dt$  при различных  $N$  и  $\lambda=1$ . Можно убедиться в том, что среднее  $\mu=N/\lambda$ , а дисперсия  $\sigma^2=N/\lambda^2$ . К гамма-распределению мы вернемся в гл. 7 и 8 в связи с применением к оценке надежности.



Возвращаясь к общей модели, мы обнаруживаем, что выражение для  $g_0(t)$  (6.149') громоздко; однако

Рис. 6.9. Плотность вероятности гамма-распределения ( $\lambda=1$ ).

$g_0(t)$  и функцию распределения  $G_0(t)$  можно находить по таблицам Молина [10]. Если использовать обозначения Молина

$$q(x, a) = \frac{a^x e^{-a}}{x!} \quad (6.153)$$

и

$$P(c, a) = \sum_{x=c}^{\infty} \frac{a^x e^{-a}}{x!}, \quad (6.154)$$

то можно показать, что обобщенная плотность вероятности времени безотказной работы (6.149) примет вид:

$$g_0(t) = e^{-\mu t} \{ \lambda q(N-1, \lambda t) + \mu [1 - P(N, \lambda t)] \}. \quad (6.155)$$

Точно так же функция распределения (6.150) будет равна

$$G_0(t) = 1 - e^{-\mu t} [1 - P(N; \lambda t)]. \quad (6.156)$$

Таким образом, вероятность безотказной работы за время  $t$  (6.151) будет составлять

$$R(t) = e^{-\mu t} [1 - P(N, \lambda t)]. \quad (6.157)$$

Интересно заметить, что в [11] предложено в качестве выражения  $R(t)$

$$R(t) = e^{-\mu t} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{t - m}{\sigma} \right) \right], \quad (6.157a)$$

где  $\Phi(X)$  — нормированная нормальная функция распределения

$$\Phi(X) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^X \exp \left[ -\frac{1}{2} v^2 \right] dv^*. \quad (6.157б)$$

Сходство (6.157) и (6.157a) не только в форме записи, но также в том, что  $P(N, \lambda t)$ , гамма-распределение, можно аппроксимировать распределением в некотором предельном смысле [см. также (6.159) и § 6.10]. Недостаток формулы (6.157a) в том, что она не является собственным распределением вероятностей в интервале  $\infty < t < \infty$ , поскольку нормальное распределение имеет «хвост», простирающийся и на отрицательную часть оси  $t$ . Однако этим можно пренебречь, коль скоро значение параметра  $m$  достаточно велико по сравнению с  $\sigma$ .

Мы видим, что общая модель приводит к выражению, в которое входит комбинированное показательное и гамма-распределение; соответствующие вероятности можно вычислить по (6.157) и (6.154). На рис. 6.10, 6.11 и 6.12 показаны некоторые примеры плотностей общего распределения времени безотказной работы. Кривые нормализованы при помощи соотношения

$$ag_0(at; \lambda/a, \mu/a, N) = g_0(t; \lambda, \mu, N). \quad (6.155a)$$

Таким образом,  $\lambda$  всегда можно считать равным 1 и плотности можно изобразить как двухпараметрическое семейство, потому что при растяжении временной шкалы параметры и плотность преобразуются по формуле (6.155a).

---

\* Формула (6.157a) имеет весьма простой физический смысл. Действительно, если действуют два независимых фактора, один из которых приводит к отказу по показателю, а другой по нормальному закону, то вероятности безотказной работы следует перемножить и мы приходим к (6.157a). (Прим. перев.)

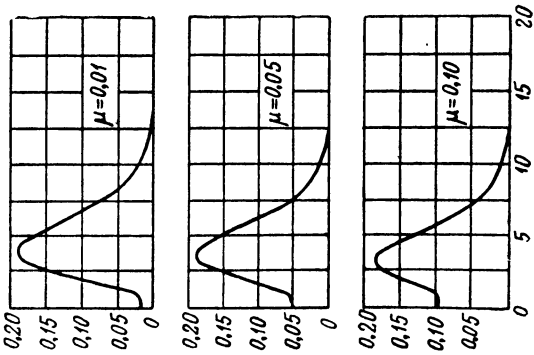


Рис. 6.10. График  $g_0(t)$  ( $N=5$ ;  $\lambda=1,0$ ).

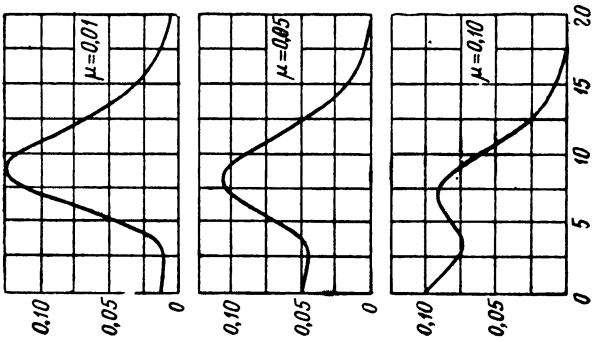


Рис. 6.11. График  $g_0(t)$  ( $N=20$ ;  $\lambda=1,0$ ).

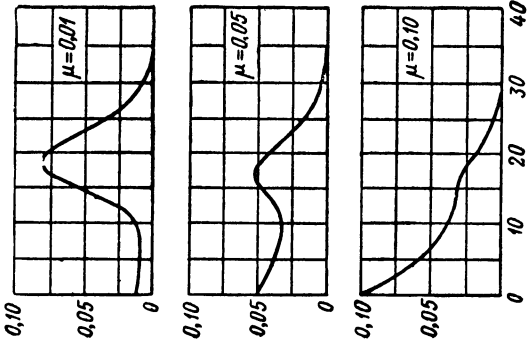


Рис. 6.12. График  $g_0(t)$  ( $N=20$ ;  $\lambda=1,0$ ).

### 6.9.2.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Рассмотрим некоторые специальные и предельные случаи плотности вероятности распределения времени безотказной работы (6.149):

- 1)  $\mu > 0, \lambda = 0, N$  конечно;
- 2)  $\mu = 0, \lambda > 0, N$  конечно;
- 3)  $\mu > 0, \lambda > 0, N \rightarrow \infty$ ;
- 4)  $\mu = 0, \lambda = \beta N$ , где  $N$  велико, но фиксировано;
- 5)  $\mu > 0, \lambda = \beta N, N \rightarrow \infty$ .

Этим пяти случаям соответствуют следующие результаты.

В случае 1 мы будем иметь показательную плотность распределения (случайные отказы)\*

$$g_0(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (6.158)$$

В случае 2 будем иметь гамма-распределение времени безотказной работы (поздние отказы)

$$g_0(t) = \frac{\lambda^N t^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (6.159)$$

В случае 3 при  $N \rightarrow \infty$  плотность вероятности будет стремиться к показательному распределению (6.158) (случайные отказы) в силу того, что с ростом  $N$  начало периода старения будет уходить в бесконечность. Это также согласуется с интуитивным распределением модели, так как, очевидно, при  $N \rightarrow \infty$  невозможно, чтобы отказ произошёл после перехода через всю последовательность состояний.

Рассмотрим случай 4. Будем считать  $\lambda$  пропорциональным  $N$ , чтобы допустить возможность перехода через всю последовательность состояний даже в том случае, когда

---

\* Ввиду того, что  $\lambda = 0$ , из состояния  $E_N$  невозможен никакой переход, кроме перехода в состояние  $E_0$ . Это означает, что можно просто переобозначить  $E_N$  как  $E_1$ , после чего придем к уже изученному процессу с двумя состояниями.

$N$  велико. Полагая  $\mu = 0$ ,  $\lambda = \beta N$ , мы видим, что плотность  $g_0(t)$  приближается к нормальной плотности вероятности со средним  $1/\beta$  и стандартным отклонением  $1/\beta N^{1/2}$ . Таким образом, при большом, но фиксированном  $N$ ,  $g_0(t)$  будет приближенно нормальной плотностью.

В случае 5 плотность  $g_0(t)$  сходится к предельному распределению, равному  $\mu e^{-\mu t}$  при  $t < 1/\beta$ , с резким „выбросом“ при  $t = 1/\beta$ . Вероятность, соответствующая интервалу  $\theta < t < 1/\beta$ , равна  $1 - e^{-\mu/\beta}$ ; в точке выброса сосредоточена вероятность  $e^{-\mu/\beta}$ .

Почти очевидно, что нельзя ожидать получения предельной плотности вероятности, имеющей такой вид, как в примерах (рис. 6.10—6.12), при  $N \rightarrow \infty$ ; чтобы описать подобные распределения, необходимо по меньшей мере три параметра.

### 6.9.2.3. НАЧАЛЬНЫЕ ОТКАЗЫ

До сих пор при выводе моделей мы не учитывали начальных отказов. Наиболее простой подход состоит в том, чтобы учитывать вероятность  $\alpha$  нахождения устройства в момент  $t=0$  в состоянии  $E_N$ . Тогда начальные условия (6.146) заменятся следующими:

$$P_N(0) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (6.146')$$

$$P_k(0) = 0, \quad 1 \leq k \leq N - 1.$$

В результате получается, что  $g_0(t)$ , полученную из (6.149) или (6.155), следует умножить на  $\alpha$ . Таким образом, мы просто определяем  $P_0(0) = 1 - \alpha$ . Начальные отказы «замедленного» типа, которые мы рассматривали,

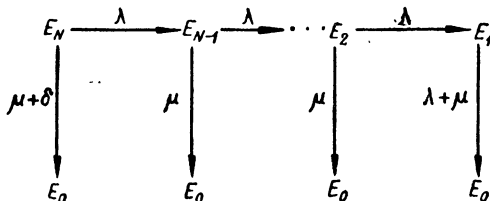


Рис. 6.13.

можно включить в модель, предположив, что коэффициент пропорциональности, соответствующий скачку из состояния  $E_N$  в  $E_0$ , равен  $\mu + \delta$ , где  $\delta > 0$ . Это показано

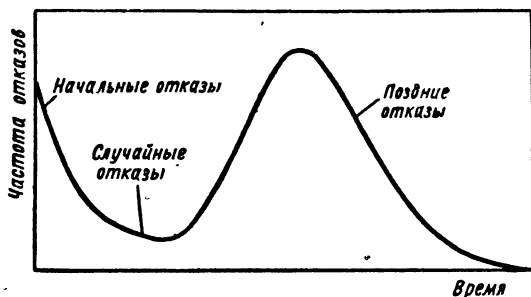


Рис. 6.14. Частота отказов как функция времени.

на рис. 6.13. В результате получилась кривая интенсивности отказов, общий вид которой изображен на рис. 6.14. Однако выкладки очень сложны, и мы их здесь опускаем.

#### 6.9.2.4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Чтобы раскрыть физический смысл параметров  $N$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ , рассмотрим два примера.

1. В качестве примера возьмем автомобильную покрышку. Ее можно представить состоящей из большого количества тонких слоев резины. Когда колесо катится по дороге, слой резины может внезапно оторваться от колеса. Если принять в качестве состояния покрышки  $t$  любой момент  $t$  количество оторвавшихся к этому моменту слоев резины, то легко видеть, что условия перехода от любого состояния к следующему соответствуют рассмотренной модели. При отрыве последнего слоя происходит протирание покрышки. Однако можно также представить, что колесо натывается на гвоздь, вследствие чего происходит прокол шины, независимо от того, сколько слоев резины стерлось. Последний случай соответствует предусмотренным в нашей модели переходам из любого состояния в состояние отказа.

2. Второй пример, который имеет весьма общее применение ко всем видам оборудования, подверженным

сильно действующим внешним условиям (транспортировке, падению, воздействию тепла, холода или же межпланетных условий), состоит в следующем. Внешние условия можно разделить на две категории: 1) настолько жесткие условия, что уже однократное их действие вызывает отказ системы; 2) менее жесткие условия, однократное действие которых не приводит к отказу, но повторное действие вызывает отказ системы (возможно, различных видов). В этом случае параметр  $N$  следует интерпретировать как «сопротивление» оборудования нежестким воздействиям или толчкам; отказ наступает только в том случае, когда количество толчков становится равным  $N$ . Параметр  $\lambda$  имеет смысл частоты наступления подобных толчков. Параметр  $\mu$  равен частоте толчков, приводящих к немедленному отказу.

Хорошим примером может служить электрооборудование некоторых зондирующих спутников, запущенных за несколько последних лет. Энергия спутника накапливается в нескольких десятках батарей (источником энергии служат несколько тысяч солнечных элементов, посаженных на «гребное колесо»). Можно предположить, что отдельные батареи могут выводиться из строя столкновением с микрометеоритами (что может служить источником и для других повреждений). В момент, когда выведено из строя определенное количество батарей, эффективная передача информации со спутника становится невозможной. С другой стороны, независимо от количества исправных батарей может произойти внезапный отказ цепи, служащей для передачи информации; это приведет к тому же результату.

## 6.10. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Одной из наиболее важных моделей непрерывных распределений является *нормальное* (гауссово) распределение. Оно уже встречалось нам, выступая в качестве предельного случая для биномиального (дискретного) распределения (п. 6.2.3) и (непрерывного) гамма-распределения (п. 6.9.2.2.). Для ясности напомним его определение. (Одномерная) случайная величина  $\xi$  называется нормально-распределенной (или имеющей нормальное распределение) со средним  $\mu$  и стандартным

отклонением  $\sigma$ , если ее плотность вероятности дается выражением

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (6.160)$$

$$\sigma > 0$$

$$-\infty < \mu < \infty.$$

Соответственно функция распределения  $\xi$  имеет вид

$$P(\xi \leq x) \equiv F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dt. \quad (6.161)$$

При  $\mu=0$  и  $\sigma=1$   $\xi$  называется нормированной нормальной случайной величиной с нормированными нормальными плотностью и функцией распределения.

Для обозначения этих функций употребляются специальные обозначения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (6.162)$$

и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (6.163)$$

График функции  $\varphi(x)$  — это колоколообразная кривая, симметричная относительно прямой  $x=0$ ; ее максимум достигается при  $x=0$  и равен  $1/\sqrt{2\pi} \approx 0,399$  (рис. 6.15). Очевидно, нормированная нормальная функция распределения обладает необходимыми свойствами функций распределения (§ 5.5), а именно:

$$\Phi(-\infty) = 0; \quad (6.164)$$

$$\Phi(+\infty) = 1. \quad (6.165)$$

Ввиду симметрии  $\varphi(x)$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \quad (6.166)$$



Из (6.166) находим, что при  $x=0$   $\Phi(0) = 1 - \Phi(0)$ , откуда  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ .

На рис. 6.16 показано поведение кривой  $\Phi(x)$ . Для доказательства свойства (6.165) заметим, что

$$\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx. \quad (6.167)$$

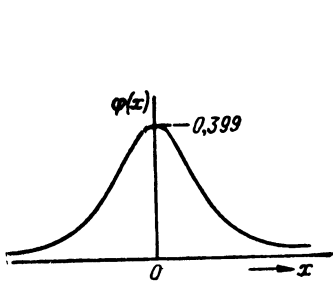


Рис. 6.15. Нормированная нормальная плотность  $\varphi(x)$ .

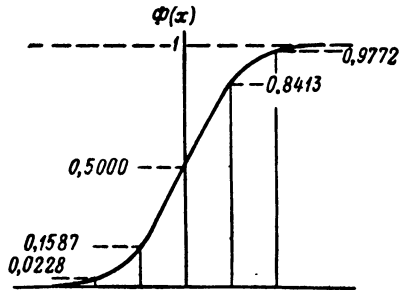


Рис. 6.16. Нормированная нормальная функция распределения  $\Phi(x)$ .

Далее перейдем к другой переменной, положив  $x^2/2 = y$ ,  $dx = dy/\sqrt{2y}$ , откуда

$$\Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-1/2} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1. \quad (6.168)$$

При этом мы использовали известную теорему из теории преобразования Лапласа, согласно которой

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad (6.169)$$

а также то, что  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

Если  $\xi$  обладает нормальным распределением, то вероятность, заключенную в интервале  $(a, b)$ , всегда можно найти по таблицам нормированной нормальной функции распределения.

Пусть  $\mu$  — среднее, а  $\sigma$  — стандартное отклонение  $\xi$ . Тогда  $(\xi - \mu)/\sigma$  будет нормированной нормальной случайной величиной (§ 5.7). Следовательно,

$$P(a < \xi < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{\xi - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right), \quad (6.170)$$

что равно  $\Phi[(b - \mu)/\sigma] - \Phi[(a - \mu)/\sigma]$ .

Таблицы Национального бюро стандартов [2] содержат значения  $\varphi(x)$  (6.162) и значения  $2\Phi(x) - 1$ , где  $\Phi(x)$  определено равенством (6.163) с точностью до 15 десятичных знаков.

### 6.10.1. Центральная предельная теорема

Как мы уже видели в двух частных случаях, нормальное распределение выступает в качестве предельного закона для многих распределений вероятностей. Более того (и, возможно, это наиболее существенно), предельное распределение любой достаточно хорошей функции выборочного среднего или выборочных центральных моментов является асимптотически-нормальным при неограниченном увеличении объема выборки безотносительно к виду закона распределения совокупности.

Этим мы воспользуемся в § 8.3 при решении задачи о приближенном нахождении доверительных интервалов для оценок надежности.

Читатель, вероятно, знаком с тем, что многие виды ошибок измерений распределены приблизительно нормально. Теоретическое обоснование этой закономерности содержится в знаменитой *центральной предельной теореме*.

Центральная предельная теорема применима вообще в тех случаях, когда измерение или случайная величина, которая нас интересует, представляет *сумму* большого числа других случайных величин или «случайных эффектов». Приведем наиболее простую форму центральной предельной теоремы ([12], стр. 214).

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — одинаково распределенные, независимые в совокупности случайные величины с общим средним  $\mu$  стандартным отклонением  $\sigma$ . Тогда, если

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j,$$

то при  $n \rightarrow \infty$

$$P(\xi \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \quad (6.171)$$

Это означает, что  $\xi$  асимптотически-нормально с параметрами  $(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ . В частности, среднее  $\bar{x}$  случайной выборки объема асимптотически-нормально с параметрами  $(\mu, \sigma/\sqrt{n})^*$ .

У п р а ж н е н и е. Доказать последнее утверждение.

Как мы уже указывали, любая „хорошая“ функция  $f(\bar{x})$  среднего  $\bar{x}$  асимптотически-нормальна, т. е.

$$P(f(\bar{x}) \leq x) \approx \Phi\left[\frac{x - f(\mu)}{\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=\mu} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}\right]. \quad (6.172)$$

(См. § 8.3).

Из (6.172), например, можно вывести, что арксинус-преобразование (п. 8.3.3) сводится к асимптотически-нормальной величине  $\arcsin \sqrt{\hat{p}}$ , т. е. нормальной ( $\arcsin \sqrt{p}$   $1/(2\sqrt{N})$ ). Понятно, что сама  $\hat{p} = \hat{f}/N$  асимптотически-нормальна ( $p, \sqrt{pq/N}$ ). Аналогично оценка  $\hat{\lambda}$  параметра  $\lambda$  распределения Пуассона (6.86), будучи выборочным средним, асимптотически-нормальна ( $\lambda, \sqrt{\lambda/N}$ ).

Более полное изложение нормального и других связанных с ним распределений читатель найдет во многих литературных источниках, в частности в [12—14]. Элементарно изложены свойства многомерного нормального распределения. В [15] дается подробный обзор применений логарифмически-нормального распределения\*\*.

---

\* Выражение «асимптотическая нормальность с параметрами  $(a, b)$ » или просто «асимптотическая нормальность  $(a, b)$ » означает только то, что предельная функция распределения есть  $\Phi[(x-a)/b]$ . Отсюда не обязательно следует, что среднее и стандартное отклонения  $\xi$  сходятся к  $a$  и  $b$ .

\*\* См. Я. Б. Шор. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. Изд-во «Советское радио», 1962, (Прим. перев.)

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во иностранной литературы, 1955.
2. Tables of probability functions. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 1953, p. 23.
3. Tables of the cumulative binomial probability distribution. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1953.
4. M. A. Girshick, F. Mosteller and L. J. Savage. Unbiased estimates for certain binomial sampling problems with applications. *Ann. Math. Stat.*, 1946, v. 17, p. 13—23.
5. Е. С. Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, 1951.
6. А. Вальд. Последовательный анализ. Физматгиз, 1960.
7. E. J. Gumbel. Statistics of extremes. Columbia University Press, New York, 1958.
8. Probability tables for the analysis of extreme value data. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 1953, v. 22.
9. B. Epstein. The exponential distribution and its role in life testing. *Ind. Qual. Control*, 1958, XV, 6, December.
10. E. C. Molina. Poisson's exponential binomial limit. D. Van Nostrand company, Inc., Princeton, N. J., 1942.
11. W. A. Gunn. The reliability of complex systems. Western Conference Proceedings, 1956, ASQC, August, p. 20—21.
12. Г. Крамер. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
13. S. S. Wilks. Mathematical statistics. Princeton University Press Princeton, N. J., 1943.
14. A. M. Mood. Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.
15. J. Aitchison and J. A. Brown. The lognormal distribution with special reference to its use in economics. Cambridge University Press, 1957.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Acheson M. A. Life factors affecting acceptance procedures. Proc. 2d National Symposium on Quality Control and Reliability in Electronics, Washington, D. C., 1956, 9—10 January, p. 156—164.
- Allen W. R. Inference from tests with continuously increasing stress. *Operations Research*, 1959, v. 7, 3, June, p. 303—312.
- Bartholomew D. J. Testing for departure from the exponential distribution. *Biometrika*, 1957, v. 44, Pt. 1 and 2, June, p. 253—257.
- Birnbaum Z. W. A statistical model for life-length of materials. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1958, v. 53, 281, March, p. 151—160.
- Broadbent S. Simple mortality rates. *Applied Statistics*, 1958, v. 7, 2, June, p. 86—95.
- Cohen A. C. Estimating the parameters of a modified poisson distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1960, v. 55, 289, March, p. 139—143.
- Cox D. R. The analysis of exponentially distributed life-times with two types of failure. *J. Roy. Stat. Soc.*, 1959, v. 21B, 2, p. 411—421.
- Davis D. J. An analysis of some failure data. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1952, v. 47, p. 113—150.

Eldredge G. G. Analysis of corrosion pitting by extreme-value statistics and its application to oil well tubing caliper surveys. *Corrosion*, 1957, v. 13, January p. 51—60.

Flehinger B. J. and Lewis P. A. Two-parameter lifetime distributions for reliability studies of renewal processes. *IBM Journal Research and Development*, 1959, v. 5, January, p. 58—73.

Godfrey M. L. Theory of extremal values applied to tests. *Ind. Labs*, 1958, v. 9, July, p. 9—12. 1958, August, p. 74—79.

Gumbel E. J. Statistician attacks extreme values in technical problems. *Ind. Labs.*, 1956, v. 7, December, p. 22—30.

Kao J. H. K. A new life-quality measure for electron tubes. *IRE, Trans. Reliability and Quality Control*, 1956, PGRQC-7, April, p. 1—11.

Raff M. S. On approximating the point binomial. 1956, v. 51, June, p. 293—303.

Saito, Kin-ichiro. Maximum-likelihood estimate of proportion using supplementary information. *Bull. Math. Statistics (Japan)*, 1956, v. 7, 1,2, December, p. 11—17.

Stoller D. S. A failure model for equipment undergoing complex operation. *Operations Research*, 1958, v. 6, 5, September—October, p. 723—728.

Wohl J. G. Dependability of military equipment: a systems approach. *Elec. Mfg*, 1959, v. 63, March, p. 93—100, 153.

## ГЛАВА 7

### ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ

#### Часть I

##### 7.1. ВВЕДЕНИЕ. ФУНКЦИЯ НАДЕЖНОСТИ

В гл. 6 были описаны необходимые для дальнейшего важные модели дискретных и непрерывных распределений.

В этой и следующей главах изучаются задачи оценки  $R$ ; как будет обнаружено,  $R$  является некоторой определенной функцией параметров распределения и получается суммированием или интегрированием плотности вероятности по выборочному пространству. Так, если  $P(\xi \leq x) \equiv F(x; \theta_1, \theta_2, \dots)$  — функция распределения, зависящая от параметров  $\theta_1, \theta_2, \dots$ , а  $x_1$  и  $x_2$  определяют событие „успех“, то  $R$  будет определяться выражением

$$\begin{aligned} R &= P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2; \theta_1, \theta_2, \dots) - \\ &- F(x_1; \theta_1, \theta_2, \dots) = R(\theta_1, \theta_2, \dots), \end{aligned} \quad (7.1)$$

называемым *функцией надежности*, или *надежностью*.

##### 7.1.1. Пример с нормальным распределением

Допустим, что  $x_1$  и  $x_2$  — нижний и верхний допустимые пределы данной рабочей характеристики  $\xi$ , которая обладает нормальным распределением со средним  $\theta_1$  и стандартным отклонением  $\theta_2$ . Определим успех как собы-

тие, состоящее в том, что  $\xi$  лежит в указанных пределах. Тогда, коль скоро  $x_1$  и  $x_2$  известны,

$$R = P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} \right] dx = \\ = R(\theta_1, \theta_2).$$

### 7.1.2. Пример с показательным распределением

В случае показательного распределения надежность может быть, например, определена как вероятность безотказной работы устройства на протяжении времени, большего  $T$ . Имеем

$$R = P(\tau > T) = \int_T^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = [-e^{-t/\theta}]_T^{\infty} = e^{-T/\theta}. \quad (7.2)$$

Если  $T$  известно, то (7.2) можно записать, как  $R(\theta)$ .

### 7.1.3. Пример с биномиальным распределением

Распределение вероятностей не обязательно будет непрерывным. Так, в случае биномиального распределения, если  $\theta$  обозначает вероятность безотказной работы одного элемента, а надежность  $R$  определена как вероятность безотказной работы по меньшей мере  $r$  элементов, то

$$R = P(r \leq \zeta \leq n) = \binom{n}{n} \theta^n + \binom{n}{n-1} \theta^{n-1} (1-\theta) + \dots + \\ + \binom{n}{r} \theta^r (1-\theta)^{n-r} = R(\theta),$$

коль скоро  $r$  и  $n$  известны.

### 7.1.4. Задача оценки $R$

Приведенные примеры снова подтверждают то обстоятельство, что надежность можно выразить в виде некоторой функции одного или нескольких параметров распределения. В общем случае  $R$  не выражается в явном аналитическом виде через плотность вероятности; кроме того, истинные значения  $\theta_1, \theta_2, \dots$  бывают неизвестны. Однако при подходе к задаче оценки  $R$  удобно сначала рассмотреть задачу оценки параметров модели распределения, которые все же входят явно.

Коль скоро подобные оценки  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots$  параметров  $\theta_1, \theta_2, \dots$  получены, мы можем перейти к их использованию для получения оценок надежности.

Таким образом, в настоящей главе мы изложим основные аспекты оценки *параметров* моделей распределений. Этот материал является «классическим» в том смысле, что его можно найти, и притом в более подробном изложении, в рекомендованных учебниках по статистике. Однако здесь основное внимание будет уделено специфическим распределениям, важным для исследования надежности, а также для гл. 8.

## 7.2. СВОЙСТВА ОЦЕНОК

В § 5.10 были рассмотрены выборочные среднее и дисперсия, дающие примеры наиболее универсальных оценок. Выборочное среднее является в общем случае наилучшей оценкой истинного среднего  $\mu$  совокупности, из которой произведена выборка. Оно дает оценку *центра* распределения совокупности. Выборочная дисперсия при тех же условиях является оценкой рассеивания или дисперсии распределения совокупности  $\sigma^2$ .

Более обще можно сказать, что оценка — это функция выборки, «оценивающая» в том или ином смысле функцию параметров распределения, из которого взята выборка.

Будет ли оценка «хорошей» или «плохой», зависит от того, какая берется функция выборки и какая функция параметров распределения оценивается. От «хорошей» оценки требуется, чтобы она была «близкой» к истинному значению оцениваемой функции.

Напомним, что выборочные значения являются случайными величинами (§ 5.10), а следовательно, и оценка является случайной величиной, определим некоторые оптимальные свойства оценок.

### 7.2.1. Несмещенность

Оценка называется несмещенной, если

$$E(\hat{\theta}) = \theta. \quad (7.3)$$

Это означает следующее. Если  $x_1, \dots, x_n$  — выборочные значения, взятые из совокупности с плотностью (или функ-



цией распределения), которая является функцией параметра  $\theta$  (возможно, еще и других параметров), то  $\hat{\theta}$  должна быть функцией, математическое ожидание которой равно  $\theta$ . Тогда  $\hat{\theta}$  является несмещенной оценкой  $\theta$ .

Пример.  $\bar{x} \equiv \sum x_i/n$  является несмещенной оценкой  $\mu$ . Действительно,  $E(x_i) = \mu$  и

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum E(x_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

У п р а ж н е н и е. Выборочная дисперсия, определяемая формулой

$$s^2 \equiv m_2 \equiv \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2,$$

не является несмещенной оценкой  $\sigma^2$ .

Доказать это утверждение, используя тот факт, что  $E(x_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ . Какой будет несмещенная оценка (см. § 5.10)?

Пример. Проиллюстрируем предыдущий пример на *биномиальном* распределении вероятностей (параметр  $n = 1$ )

$$P(\xi = 0) = q,$$

$$P(\xi = 1) = p \equiv 1 - q.$$

Из совокупности производится выборка  $x_1, \dots, x_n$  объема  $n$ .  $x_i$  могут быть единицами или нулями. Тогда  $\bar{x} \equiv \sum \frac{x_i}{n}$  будет равно числу единиц  $f$  в выборке, деленному на  $n$ . Поскольку  $E(x_i) = p$ , то  $\bar{x} = \frac{f}{n}$  — несмещенная оценка  $p$ . В нашей обычной

интерпретации нулями обозначаются успехи, а единицами — отказы;  $q$  и  $p$  обозначают соответственно вероятности успеха и отказа. Тогда наблюдаемая доля отказов в выборке будет несмещенной оценкой истинной вероятности отказа  $q$ . Заметим, что извлечение случайной выборки объема  $n$  из такой биномиальной совокупности с формальной точки зрения то же самое, что и  $n$  независимых испытаний с постоянной вероятностью  $p$  неудачи в каждом испытании.

### 7.2.2. Состоятельность

Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной, если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

( $n$  обозначает объем выборки). Это означает, что за счет увеличения объема выборки можно добиться сколь

угодно малой вероятности отклонения состоятельной оценки от оцениваемого параметра больше, чем на заданную величину, как бы мала она ни была.

Пример 1.  $\bar{x}$  — состоятельная оценка  $\mu$ . Чтобы доказать это, предположим, что существует дисперсия  $\sigma^2$ . (В действительности это не обязательно; важно лишь существование среднего  $\mu$ ) (см. [1], стр. 254)\*. Применим неравенство Чебышева (п. 5.7.1):

$$P(|\bar{x} - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\text{var } \bar{x}}{\epsilon^2}. \quad (7.4)$$

Но  $\text{var } \bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$  (§ 5.10). Следовательно,

$$P(|\bar{x} - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},$$

а это выражение стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Пример 2.

$$\bar{x}' \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i$$

является состоятельной оценкой  $\mu$  (хотя и смещенной). Заметим, что последняя оценка *асимптотически-несмещенная*, т. е. при  $n \rightarrow \infty$  смещение стремится к нулю.

### 7.2.3. Минимум дисперсии

Третье важное желательное свойство оценки заключается в том, чтобы она имела при любом объеме выборки  $n$  минимально возможную дисперсию. Это приводит к более сложным аспектам теории оценок. Заметим только, что если подобные оценки существуют, то они обычно получаются по *методу максимального правдоподобия* (см. [1], гл. 32, 33).

## 7.3. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК

Для целей настоящей главы понадобятся лишь методики получения оценок, обоснование которых значительно сложнее. Однако даже в рамках имеющегося аппарата мы можем исследовать некоторые важные свойства получаемых оценок.

---

\* См. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1962, стр. 218. (Прим. перев.)

Метод максимального правдоподобия получения оценок, как правило, более прост и обычно дает лучшие оценки, чем другие методы, например альтернативный метод приравнивания выборочных моментов к моментам совокупности. Сначала изложим в общих чертах метод максимального правдоподобия, применив его затем к нескольким примерам. Во многих случаях этот метод эквивалентен упомянутому альтернативному методу. Однако метод приравнивания моментов в некоторых случаях более прост с точки зрения вычислений. Оба метода дают *асимптотически-нормальные* оценки: при стремлении к бесконечности объема выборки распределение оценки стремится к нормальному закону.

#### 7.4. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ (ОДИН НЕИЗВЕСТНЫЙ ПАРАМЕТР)

Предположим, что имеется случайная выборка  $x_1, \dots, x_n$  из совокупности с плотностью  $f(x; \theta)$ . Здесь  $\theta$  обозначает параметр распределения, который может быть средним распределения, что, конечно, не обязательно. Задача состоит в отыскании такой функции  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ , чтобы  $\hat{\theta}$  была хорошей оценкой  $\theta$ . С этой целью введем функцию

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta). \quad (7.5)$$

Функция  $L$ , определенная равенством (7.5), называется *функцией правдоподобия выборки*.

Посмотрим, каким образом это определение приводит к хорошей оценке  $\theta$ . Прежде всего, правая часть (7.5) по виду совпадает с совместной плотностью вероятности  $n$  независимых одинаково распределенных случайных величин. Таким образом,  $L$  можно рассматривать как *априорную* вероятность получения наблюдений  $x_1, \dots, x_n$ . Однако, поскольку  $x_1, \dots, x_n$  рассматриваются как уже полученные,  $L$  будет просто функцией неизвестного параметра  $\theta$ , который мы хотим оценить. Метод максимального правдоподобия состоит в нахождении значения  $\theta$  (7.5), максимизирующем  $L$ . Идея, на которой основывается этот метод, состоит в том, что максимизируется „вероятность получения наблюдаемого результата“ на основании приведенного выше формального соответствия. В этой ана-

логии мы пытаемся отыскать значение  $\theta$ , при котором „наиболее правдоподобно“ получение (уже данного) результата опыта.

Так как  $\mathfrak{C} \equiv \log L$  является возрастающей функцией  $L$ , то значение  $\theta$ , обращающее в максимум  $\log L$ , также максимизирует  $L$ . Обычно это значение  $\theta$  получается при помощи решения уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \theta} = 0$$

относительно  $\theta$ . Полученное таким образом значение  $\theta$  обозначается  $\hat{\theta}$ , оно является функцией  $x_1, \dots, x_n$ .

#### 7.4.1. Применение к непрерывным распределениям

**Пример.** Предположим, что производится испытание на долговечность и с этой целью поставлено на испытание  $n$  электронных ламп. Опыт прекращается, когда все лампы откажут. Времена наработки до отказа обозначим  $t_1, \dots, t_n$ . Пусть время наработки до отказа имеет доказательное распределение с плотностью

$$f(t; \theta) = \begin{cases} \theta^{-1} e^{-t/\theta} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0, \end{cases}$$

где параметр  $\theta$  представляет среднее распределения. Функция правдоподобия  $L$  имеет вид:

$$L = \theta^{-n} \exp \left[ -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n t_i \right], \quad (7.6)$$

откуда

$$\mathfrak{C} = -n \log \theta - \frac{1}{\theta} \sum t_i \quad (7.7)$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum t_i. \quad (7.8)$$

Положив  $\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \theta} = 0$  и решив уравнение (7.8) относительно  $\theta$ , получим для решения  $\hat{\theta}$  выражение

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i. \quad (7.9)$$

У п р а ж н е н и е. Продифференцировав (7.8) и используя (7.9), показать, что (7.9) дает *максимальное* значение  $\mathfrak{C}$ . Заметим, что полученная оценка является средним выборки  $t_1, \dots, t_n$ . Таким образом, та же оценка получится, если приравнять выборочное среднее среднему совокупности.

Если каким-то образом определена оценка, ее можно рассматривать как случайную величину, поскольку она является функцией исходов испытаний  $(x_1, \dots, x_n)$ ; это было отмечено в § 5.10. Таким образом, оценка обладает функцией распределения, средним дисперсией и т. д. Например, мы находим из (5.54), что  $\hat{\theta}$  предыдущего примера имеет гамма-распределение.

Важно также заметить, что гамма-распределение связано с известным  $\chi^2$ -распределением. Чтобы показать это, запишем на основании (5.54)

$$P(\hat{\theta} \leq x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x \left(\frac{n}{\theta}\right)^n t^{n-1} e^{-tn/\theta} dt. \quad (7.10)$$

Определим теперь  $\chi^2 = 2n\hat{\theta}/\theta$ . Тогда

$$P(\chi^2 \leq y) = P\left(\hat{\theta} \leq \frac{\theta y}{2n}\right) = \quad (7.11)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\theta y/2n} \left(\frac{n}{\theta}\right)^n t^{n-1} e^{-tn/\theta} dt. \quad (7.12)$$

Сделаем замену переменной интегрирования в (7.12), получим

$$P(\chi^2 \leq y) = \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \int_0^y t^{n-1} e^{-t/2} dt, \quad (7.13)$$

что представляет функцию распределения  $\chi^2$  с  $2n$  „степенями свободы“. Мы будем употреблять для данной случайной величины обозначение  $\chi_{2n}^2$ , чтобы показать ее зависимость от параметра  $2n$ .

У п р а ж н е н и е. В предыдущем примере  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , т. е.  $\hat{\theta}$  — несмещенная оценка  $\theta$ . Справедливо также соотношение  $\text{var } \hat{\theta} = \frac{\theta^2}{n}$ .

Установить эти соотношения двумя способами.

### 7.4.1.1. Частный пример

Следующий пример совсем иного рода, чем рассмотренные выше, поскольку в нем оценку максимального правдоподобия невозможно получить путем дифференцирования функции правдоподобия. Предположим, что

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{при } 0 < x < \theta, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7.14)$$

(Легко видеть, что  $f(x, \theta)$  представляет плотность, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x; \theta) dx = \int_0^{\theta} \frac{dx}{\theta} = 1.)$$

Имеем

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n, \quad (7.15)$$

$$0 < x_i < \theta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

По виду (7.15) мы замечаем, что  $L$  максимизируется при наименьшем возможном значении  $\theta$ , а также то, что  $\theta$  не может быть меньше, чем наибольшее из  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Таким образом, оценкой максимального правдоподобия для  $\theta$  будет

$$\hat{\theta} = \max_i x_i. \quad (7.16)$$

Оценка максимального правдоподобия не всегда является несмещенной\*.

Рассмотрим снова предыдущий пример. Поскольку  $\hat{\theta}$  — максимальное значение выборки, то ее элемент вероятности будет равен

$$P(y < \hat{\theta} < y + dy) = g(y) dy = n \overline{F(y; \theta)}^{n-1} f(y; \theta) dy,$$

---

\* Она даже не всегда состоятельна (см п. 7.2.2). (См также J. Neuman. Lectures and conferences on mathematical statistics and probability. Graduate School, U. S. Department of Agriculture, Washington, Second Edition, 1952, p. 189—190.)

где  $f(y; \theta)$  дается уравнением (7.14), а  $F(y; \theta)$ , как обычно, обозначает функцию распределения, соответствующую плотности  $f(y; \theta)^*$ . Таким образом,

$$g(y) = n \left( \frac{y}{\theta} \right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta^n} y^{n-1}, \quad (7.17)$$

откуда

$$E(\hat{\theta}) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} y^n dy \quad (7.18)$$

или

$$E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1} \theta. \quad (7.19)$$

Таким образом,  $\hat{\theta}$ , определенная (7.16), не является несмещенной оценкой  $\theta$ , однако  $\hat{\theta}' \equiv \frac{n+1}{n} \hat{\theta}$  уже будет несмещенной.

У п р а ж н е н и е. Показать, что

$$\text{var } \hat{\theta} = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2 (n+2)}.$$

#### 7.4.2. Применение к дискретным распределениям

Метод максимального правдоподобия применим и к дискретным распределениям. Для этого вместо (7.5) следует записать следующее равенство:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = P(\zeta = x_1) \dots P(\zeta = x_n), \quad (7.20)$$

где  $P(\zeta = x_i)$  зависит от параметра  $\theta$ .

Пусть, например,  $\zeta$  имеет биномиальное распределение

$$P(\zeta = 0) = q, \quad (7.21)$$

$$P(\zeta = 1) = p \equiv 1 - q,$$

а  $p$  рассматривается как оцениваемый параметр. Тогда

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; p) &= \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = \\ &= p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

\* Мы применяем здесь мультиномиальное распределение (§ 6.3).

(Вспомним, что  $x_i$  — это нули или единицы.) Следовательно,

$$\mathcal{C} = (\sum x_i) \log p + (n - \sum x_i) \log(1 - p),$$

откуда получаем

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p} = 0 = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1 - p}. \quad (7.23)$$

Решив (7.23) относительно  $p$  и обозначив решение через  $\hat{p}$ , будем иметь

$$\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n}. \quad (7.24)$$

Снова, как и в примере с показательным распределением (7.9), выборочное среднее оказалось оценкой максимального правдоподобия параметра (в данном случае  $\hat{p}$ ), который в действительности является средним распределения совокупности (7.21).

У п р а ж н е н и е. Найти оценку максимального правдоподобия параметра  $\lambda$  распределения Пуассона

$$P_k \equiv P(\zeta = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

О т в е т.

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum k_i}{n}, \quad (7.25)$$

где  $n$  — количество испытаний;  $k_i$  — число событий в  $i$ -м испытании,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 7.4.3. Дисперсия оценки максимального правдоподобия

На уравнении правдоподобия основан также весьма удобный приближенный метод нахождения дисперсии оценки  $\hat{\theta}$ . Точное значение дисперсии  $E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2$  вычисляется гораздо сложнее. При определенных условиях, если после дифференцирования выборочные значения заменить их математическими ожиданиями, мы получим формулу

$$\text{var } \hat{\theta} \simeq - \left( \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \theta^2} \right)^{-1}.$$

Поскольку оценка максимального правдоподобия не всегда является несмещенной, то такой метод дает точ-



ное значение дисперсии лишь в пределе при  $n$ , стремящемся к бесконечности. В п. 7.5.4 мы увидим, что приведенное выражение представляет собой частный случай формулы, по которой можно находить дисперсии и ковариации для двух и большего числа оценок параметра.

Пример. Рассмотрим показательное распределение. Продифференцировав в (7.8) по  $\theta$ , получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum t_i. \quad (7.26)$$

Заменив  $\sum t_i$  на  $E(\sum t_i)$ , получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}, \quad (7.27)$$

откуда

$$\text{var } \hat{\theta} = \frac{\theta^2}{n}, \quad (7.28)$$

то является также точным значением дисперсии.

#### 7.4.4. Доверительные пределы для параметров

Как было указано выше, оценки максимального правдоподобия обычно сходятся к нормальному распределению при увеличении объема выборки. Так, если  $\hat{\theta}$  — оценка максимального правдоподобия  $\theta$  при объеме выборки, равном  $n$ , и

$$\zeta \equiv \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\text{var } \hat{\theta}}},$$

то

$$P(\zeta \leq x) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (7.29)$$

при  $n$ , стремящемся к бесконечности\*.

Это позволяет находить приближенные доверительные пределы параметров распределений по способу, который мы ниже изложим.

---

\* Пример п. 7.4.1.1. представляет исключение, поскольку обычно  $\text{var } \hat{\theta} = 0(1/n^2)$ , а не  $0(1/n)$ .

Пусть  $\gamma$  — установленный доверительный уровень. Зададимся целью найти интервал значений  $\theta$ , границы которого  $C_1$  и  $C_2$  являются функциями выборочных значений (т. е.  $C_1, C_2$  — случайные величины) и который обладает тем свойством, что

$$P(C_1 < \theta < C_2) = \gamma, \quad (7.30)$$

каково бы ни было истинное значение  $\theta$ .

Вследствие (7.29)

$$P(-K_{(1-\gamma)/2} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\text{var } \hat{\theta}}} < K_{(1-\gamma)/2}) \approx \gamma, \quad (7.31)$$

где  $K_\alpha$  определяется уравнением

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_\alpha}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1 - \Phi(K_\alpha),$$

т. е.  $K_\alpha$  является „нормальным уклонением, которое превосходитсся с вероятностью  $\alpha$ “\*. Оценим теперь  $\text{var } \hat{\theta}$ , которая обычно является функцией  $\theta$  и других параметров, заменяя параметры их оценками, и обозначим полученную оценку через  $V$ . Тогда событие в скобках в левой части (7.31) приближенно эквивалентно событию

$$(\hat{\theta} - K_{(1-\gamma)/2} V^{1/2} < \theta < \hat{\theta} + K_{(1-\gamma)/2} V^{1/2}).$$

Таким образом,  $\theta$  принадлежит интервалу  $\hat{\theta} \pm K_{(1-\gamma)/2} V^{1/2}$  с вероятностью, приближенно равной  $\gamma$ . Заметим, что в уравнении (7.31) можно было бы взять любую пару  $K_{\varepsilon_1}$  и  $K_{\varepsilon_2}$  с тем условием, что  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1 - \gamma$ .

Пример. Пусть  $\bar{x}$  и  $s^2$  обозначают среднее и дисперсию выборки из нормальной совокупности. Найдем приближенные доверительные пределы для  $\mu$ . Так как  $\text{var } \bar{x} = \sigma^2/n$ , то  $V = s^2/(n-1)$  (используется несмещенная оценка  $\sigma^2$ ). Следовательно, интервал

$$\bar{x} \pm K_{(1-\gamma)/2} \sqrt{\frac{s}{n-1}}$$

\* Принят термин *квантиль* или  $1 - \alpha$  — *квантиль* для определения  $K_\alpha$ . (Прим. перев.)

содержит выборочное среднее  $\bar{x}$  с вероятностью, приблизительно равной  $\gamma$ . Если бы  $\sigma^2$  была известным параметром, то вероятность покрытия  $\mu$  интервалом  $\bar{x} \pm K_{(1-\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  точно равнялась бы  $\gamma^*$ .

У п р а ж н е н и е. Найти *односторонний* (нижний) доверительный предел для параметра  $R \equiv 1 - p$  биномиального распределения, т. е. такое  $\hat{R}_L$ , что

$$P(\hat{R}_n < R < 1) \approx \gamma.$$

Воспользоваться тем же нормальным приближением, но в данном случае заменим  $\text{var } \hat{R} = R(1-R)/n$  выражением  $(n-f)f/n^3$ , где  $f$  — наблюдаемое число отказов.

О т в е т.

$$\hat{R}_L = \frac{n}{n + K_{1-\gamma}^2} \left( \hat{R} + \frac{K_{1-\gamma}^2}{2n} - K_{1-\gamma} \sqrt{\frac{\hat{R}(1-\hat{R})}{n} + \frac{K_{1-\gamma}^2}{4n^2}} \right). \quad (7.32)$$

## 7.5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ К РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ С ДВУМЯ И БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

### 7.5.1. Оценка параметров нормального распределения

Метод максимального правдоподобия легко обобщить на случай неизвестных параметров. Наиболее известное применение относится к параметрам нормального распределения. Поскольку

$$\begin{aligned} f(x; \mu, \sigma^2) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right], \\ &-\infty < x < \infty, \\ &-\infty < \mu < \infty, \\ &\sigma^2 > 0, \end{aligned} \quad (7.33)$$

---

\* При неизвестном  $\sigma^2$  для определения доверительных пределов  $\mu$  используется  $t$ -распределение Стюдента.  $\mu$  попадает в интервал  $\bar{x} \pm t_{(1-\gamma)/2}$  с вероятностью, точно равной  $\gamma$ , где  $t_\alpha$  — значение уклонения студентовской  $t$ -величины с  $n-1$  степенями свободы, которое эта величина превосходит с вероятностью  $\alpha$ .

См. А. Н. В о w k e r and G. J. L i e b e r m a n, *Engineering, Statistics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1959, (табл. 3, стр. 588).

то

$$L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[ \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \right] \quad (7.34)$$

и

$$\mathfrak{C} \equiv \log L = \text{const} - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2.$$

Запишем теперь условия

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial (\sigma^2)} = 0.$$

Первое из них дает

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \mu) = 0. \quad (7.35)$$

Ввиду того, что  $\sigma^2 > 0$ , решение  $\hat{\mu}$  уравнения (7.35) имеет вид

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i. \quad (7.36)$$

Второе условие приводит к уравнению

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum (x_i - \mu)^2 = 0, \quad (7.37)$$

решение которого  $s^2 = m_2$ , имеет вид

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \hat{\mu})^2. \quad (7.38)$$

[Заметим, что в (7.38) появляется  $\hat{\mu}$  вместо  $\mu$ , поскольку (7.35) и (7.37) решаются совместно.]

Только что было показано, что  $s^2$  — смещенная оценка  $\sigma^2$ , но  $[n/(n-1)]s^2$  — несмещенная оценка. Заметим, что ни  $s$ , ни даже  $s\sqrt{n(n-1)}$  не являются несмещенной оценкой  $\sigma$  (см. [1], стр. 484).

## 7.5.2. Оценка параметров гамма-распределения

Другим примером, в котором также приходится оценивать два параметра, является гамма-распределение с плотностью, имеющей согласно (6.159) следующий вид:

$$f(x; \lambda, \alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{array} \right\} \quad (7.39)$$

$$(\alpha > 0, \lambda > 0).$$

Имеем

$$\mathfrak{C} = \alpha n \log \lambda - n \log \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum \log x_i - \lambda \sum x_i, \quad (7.40)$$

откуда

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \alpha} = n \log \lambda - n \Psi(\alpha) + \sum \log x_i = 0 \quad (7.41)^*$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \lambda} = \frac{\alpha n}{\lambda} - \sum x_i = 0. \quad (7.42)$$

Исследование уравнений (7.41) и (7.42) показывает, что совместное решение их относительно  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$  можно получить только методом проб и ошибок. В том случае, когда  $\alpha$  не слишком мало, скажем,  $\alpha \geq 2$ , существует хорошее приближение  $\Psi(\alpha)$ , имеющее вид

$$\Psi(\alpha) \approx \log\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (7.43)$$

Например, при  $\alpha = 2$  и  $3$  точные значения  $\Psi(\alpha)$  составляют соответственно  $0,423$  и  $0,923$ , а значения, вы-

---

\*  $\Psi(Z) \equiv \frac{d}{dZ} \log \Gamma(Z)$  называется логарифмической производной  $\Gamma$ -функции или просто пси-функцией.

численные по формуле (7.43) равны 0,494 и 0,923\*. Уравнения (7.42) и (7.41) принимают следующий вид:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\lambda}}{n} \sum x_i, \quad (7.44)$$

$$\hat{\lambda} = \exp [\Psi(\hat{\alpha}) - (1/n) \sum \log x_i]. \quad (7.45)$$

Уравнение (7.45) можно упростить, положив

$$\exp \Psi(\hat{\alpha}) \approx \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{24 \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2} \right) = \quad (7.46)$$

$$= \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{24 \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)}. \quad (7.47)$$

В (7.46) мы использовали приближение  $e^x \approx 1 + x$ , справедливое при малых  $x$ . Если ввести оценку  $\hat{\omega} \equiv \hat{\alpha} - \frac{1}{2}$ , то (7.44) и (7.45) примут вид

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{2} + \frac{\hat{\lambda}}{n} \sum x_i, \quad (7.48)$$

$$\hat{\lambda} = \left( \hat{\omega} + \frac{1}{24\hat{\omega}} \right) (\prod x_i)^{-1/n} \quad (7.49)$$

Пример. Пусть распределение времени безотказной работы электрогенератора имеет вид (7.39). В семи испытаниях генераторов получены значения наработок до отказа: 100, 110, 150, 175, 185, 200 и 220 час.\*\*. Оценить параметры  $\alpha$  и  $\lambda$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sum x_i}{n} &= 162,9 \text{ и } \exp \left[ -\frac{1}{n} \sum \log x_i \right] = \\ &= (\prod x_i)^{-1/n} = 0,00637. \end{aligned}$$

\* Относительно точных значений см. [2], стр. 16. (Заметим, что в [2]  $\Psi(x)$  имеет смысл нашего  $\Psi(x+1)$ , так что  $\Psi(2) = \Psi(1)$  и т. д.)

\*\* Численные значения из этого примера будут использованы в вычислении доверительных пределов (§ 8.5, 8.6); при этом будет использована аппроксимация нормальным распределением. Однако нельзя ожидать, чтобы при таком малом объеме выборки, как 7, нормальное распределение служило хорошим приближением; для этой цели необходимо иметь минимум 50—100 наблюдений. Малая выборка используется исключительно с целью иллюстрации, чтобы читатель мог вникнуть в вычисления во всех деталях.

Следовательно,

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2} + 162,9\hat{\lambda} \quad (7.48')$$

$$\hat{\lambda} \left( \hat{\omega} = \frac{1}{24\hat{\omega}} \right) (0,00637). \quad (7.49')$$

При помощи методики, которая дается в приложении 7А или 7Б\*, получаем следующие оценки:

$$\hat{\lambda} = 0,0841, \quad \hat{\omega} = 13,20 \quad \text{или} \quad \hat{\alpha} = 13,70. \quad (7.50)$$

### 7.5.3. Метод приравнивания моментов

Посмотрим, как метод приравнивания моментов действует в случае использования данных предыдущего примера. Среднее распределения с плотностью (7.39) равно

$$\mu = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad (7.51)$$

а его дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \quad (7.52)$$

Метод заключается в том, чтобы приравнять выборочные среднее и (несмещенную) дисперсию к среднему и дисперсии совокупности (7.51) соответственно. Только что было получено  $\bar{x} = 162,9$ . Выборочная дисперсия, умноженная для несмещенности на  $n/(n-1)$ , равна

$$\frac{ns^2}{n-1} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 2032. \quad (7.53)$$

Таким образом, имеем два уравнения относительно  $\alpha$  и  $\lambda$ :

$$\frac{\alpha}{\lambda} = 162,9, \quad \frac{\alpha}{\lambda^2} = 2032,$$

---

\* Заметим, что проще решать уравнения (7.48') и (7.49'), как одно уравнение; задаваясь  $\hat{\lambda}$ , решаем относительно  $\hat{\omega}$ , подставляем в (7.49') полученные новые значения  $\hat{\lambda}$  и т. д.

откуда получаем:

$$\hat{\lambda} = \frac{162,9}{2032} = 0,0802,$$

$$\hat{\alpha} = 13,06. \quad (7.54)$$

Эти оценки получены путем несложных вычислений, в то время как оценки максимального правдоподобия (7.50) относительно сложны. Численные значения, полученные обоими методами, несколько различаются, но не настолько, чтобы можно было судить, какой из методов лучше.

По теории оценки максимального правдоподобия будут лучшими при *больших* выборках; при увеличении объема выборки их дисперсии стремятся к наименьшему достижимому значению\*, но при малых выборках, по-видимому, не существует простого приема, на основании которого можно было бы считать один метод предпочтительнее другого.

#### 7.5.4. Дисперсии и ковариации оценок максимального правдоподобия

Приближенные значения дисперсий и ковариаций двух и большего числа оценок можно найти непосредственно из уравнений правдоподобия. Проиллюстрируем этот метод на предыдущем примере с гамма-распределением.

Сначала вычислим вторые частные производные  $\mathfrak{C}$  [из (7.41) и (7.42)]:

$$\mathfrak{C}_{\alpha\alpha} \equiv \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \alpha^2} = -n\Psi'(\alpha), \quad (7.55)$$

$$\mathfrak{C}_{\lambda\lambda} \equiv \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \lambda^2} = -\frac{\alpha n}{\lambda^2}, \quad (7.56)$$

$$\mathfrak{C}_{\lambda\alpha} \equiv \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} = \mathfrak{C}_{\alpha\lambda}. \quad (7.57)$$

(В том случае, когда в какую-либо из вторых частных производных входят выборочные значения, например  $\sum x_i$ ,

---

\* Можно показать, что в общих предположениях существует минимальное достижимое значение дисперсии оценки и что дисперсии оценок максимального правдоподобия при увеличении  $n$  сгруппируются к этому значению.



то они заменяются математическими ожиданиями, например  $n\alpha/\lambda$ .)

Далее, образуем матрицу  $A$

$$A = \begin{bmatrix} \zeta_{\alpha\alpha} & \zeta_{\alpha\lambda} \\ \zeta_{\alpha\lambda} & \zeta_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}. \quad (7.58)$$

Тогда матрица  $B$ , определенная как

$$B = \begin{bmatrix} \text{var } \hat{\alpha} & \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \\ \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) & \text{var } \hat{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (7.59)$$

будет равна матрице, обратной к  $A$ , с обратным знаком\*

$$B = -A^{-1}. \quad (7.60)$$

Так, в примере с гамма-распределением

$$A = \begin{bmatrix} -n\Psi'(a) & \frac{n}{\lambda} \\ \frac{n}{\lambda} & -\frac{\alpha n}{\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

---

\* Описываемый метод получения дисперсий и ковариаций несколько отличается от общепринятого (см. [4], стр. 212). В обычном методе исходят из первоначальной плотности и находят математические ожидания

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 \log f}{\partial \lambda^2}, \frac{\partial^2 \log f}{\partial \alpha \partial \lambda},$$

усредненные по плотности. Математические ожидания подставляются затем в матрицу  $A$ , и находится обратная матрица с обратным знаком. Каждый элемент делится на объем выборки  $n$ . Мы отступаем от этого метода ввиду того, что в более сложных задачах, когда выборки объемов  $n_1, n_2, \dots$ , получены из различных совокупностей с общими параметрами, нелегко найти  $n$ , соответствующее обычному методу. С другой стороны, если уже составлено уравнение правдоподобия, то повторно не представляет труда продифференцировать это уравнение и поступить, как указано выше. В рассматриваемом примере оба метода приводят к тому же результату. В других примерах (оценка параметров нормального распределения, распределения Вейбулла) следует заменить такие значения, как  $\sum (x_i - \mu)^2$ , появляющиеся во вторых производных функции правдоподобия, математическими ожиданиями (например,  $n\sigma^2$ ) или же решить одно или несколько уравнений правдоподобия относительно одних параметров, выразив их через другие.

Если имеется только один параметр (скажем,  $\alpha$ ), то  $B = -A^{-1} = (\partial^2 \zeta / \partial \alpha^2)^{-1}$  снова с той оговоркой, что выборочные значения заменяются их математическими ожиданиями (см. п. 7.4.3).

Чтобы обратить эту матрицу, вычислим сначала определитель  $A$

$$\text{Det } A = \frac{n^2 \alpha \Psi'(\alpha)}{\lambda^2} - \frac{n^2}{\lambda^2} = \frac{n^2}{\lambda^2} (\alpha \Psi'(\alpha) - 1). \quad (7.61)$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} \begin{bmatrix} -\frac{\alpha n}{\lambda^2} & -\frac{n}{\lambda} \\ -\frac{n}{\lambda} & -n \Psi'(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (7.62)$$

где матрица (7.62) получена путем замены каждого элемента матрицы  $A$  его алгебраическим дополнением.

Далее, из (7.60)

$$B = \frac{1}{n [\alpha \Psi'(\alpha) - 1]} \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \Psi'(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (7.63)$$

Значит,

$$\text{var } \hat{\alpha} = \frac{\alpha}{n [\alpha \Psi'(\alpha) - 1]}, \quad (7.64)$$

$$\text{var } \hat{\lambda} = \frac{\lambda^2 \Psi'(\alpha)}{n [\alpha \Psi'(\alpha) - 1]}, \quad (7.65)$$

$$\text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n [\alpha \Psi'(\alpha) - 1]}. \quad (7.66)$$

Можно показать, что  $\Psi'(\alpha) \approx 1/(\alpha - \frac{1}{2})$  [например,  $\Psi'(2) = 0,6449$ ], в то время как

$$1/(2 - \frac{1}{2}) = 0,6667; \quad \Psi'(3) = 0,3949, \text{ а}$$

$$1/(3 - \frac{1}{2}) = 0,4000; \quad \Psi'(4) = 0,2838;$$

$$1/(4 - \frac{1}{2}) = 0,2857 \text{ и т. д.).}$$

Следовательно,  $\alpha \Psi'(\alpha) - 1 \approx 1/(2\alpha - 1)$ . Тогда выражения (7.64), (7.65) и (7.66) будут приближенно равны:

$$\text{var } \hat{\alpha} \approx \frac{\alpha (2\alpha - 1)}{n}, \quad (7.64')$$

$$\text{var } \hat{\lambda} \approx \frac{2\lambda^2}{n}, \quad (7.65')$$

$$\text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \approx \frac{\lambda (2\alpha - 1)}{n}. \quad (7.66')$$

**У п р а ж н е н и е.** Найти приближения дисперсий и ковариаций  $\bar{x}$  и  $s^2$ , определенных формулами (7.36) и (7.38). Следует помнить, что  $\Sigma(x_i - \mu)$  и  $\Sigma(x_i - \mu)^2$  после дифференцирования необходимо заменить математическими ожиданиями.

Возвращаясь к примеру с семью электрогенераторами, мы можем найти приближенные значения стандартных отклонений оценок  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$ , подставив в формулы (7.64') и (7.65') численные значения оценок (7.50), полученных по методу максимального правдоподобия. Так,  $\alpha \simeq \hat{\alpha} = 13,70$  и  $\lambda \simeq \hat{\lambda} = 0,0841$ , откуда\*

$$\langle \text{var } \hat{\alpha} \rangle^{\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\frac{(13,70)(26,4)}{7}} = 7,19,$$

$$\langle \text{var } \hat{\lambda} \rangle^{\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\frac{2(0,0841)^2}{7}} = 0,0450,$$

а также

$$\langle \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \rangle = \frac{(0,0841)(26,4)}{7} = 0,317.$$

Таким образом, коэффициент корреляции  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$  приближенно равен

$$\langle \hat{\rho}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \rangle \simeq \frac{0,317}{(7,19)(0,0450)} = 0,98.$$

В общем случае

$$\hat{\rho} \simeq \frac{2\alpha - 1}{\sqrt{2\alpha(2\alpha - 1)}}. \quad (7.67)$$

Это выражение близко к 1 даже при сравнительно малых  $\alpha$ .

Снова подчеркнем то обстоятельство, что формулы для дисперсий справедливы только при больших выборках. В случае гамма-распределения (и распределения Вейбулла) будет также присутствовать некоторая ошибка за счет смещенности оценки (которая, однако, исчезает при  $n \rightarrow \infty$ ). В результате мы приходим к выводу, что при малом объеме выборки дисперсия оценивается весьма неточно.

\* Символ  $\langle \rangle$  обозначает численную оценку выражения, стоящего в скобках.

### 7.5.5. Оценка параметров распределения Вейбулла

Плотность распределения Вейбулла была определена в п. 6.8.2 с помощью формулы

$$f(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}, \quad t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0. \quad (7.68)$$

Применим к этой задаче метод максимального правдоподобия точно так же, как в рассмотренном случае гамма-распределения. Логарифм правдоподобия будет равен

$$\mathfrak{L} \equiv \log L = n \log \alpha + n \log \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log t_i - \lambda \sum_{i=1}^n t_i^\alpha, \quad (7.69)$$

откуда

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum \log t_i - \lambda \sum t_i^\alpha \log t_i = 0 \quad (7.70)$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum t_i^\alpha = 0. \quad (7.71)$$

Обозначив решение через  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}$ , мы можем переписать (7.70) и (7.71) следующим образом:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum t_i^{\hat{\alpha}}} \quad (7.70')$$

и

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\hat{\lambda} \sum t_i^{\hat{\alpha}} \log t_i - \sum \log t_i}. \quad (7.71')$$

При получении этих оценок полезно применить методику приложений 7А и 7Б. В этом случае также проще задаться  $\hat{\alpha}$ , вычислить  $\hat{\lambda}$  из (7.70'), затем пересчитать  $\hat{\alpha}$  по (7.71'), подставив в это уравнение полученное значение  $\hat{\lambda}$ . По всей вероятности, для выбора подходящего начального значения  $\hat{\alpha}$  требуется некоторый опыт; но итерационный процесс, описанный в приложении 7А и 7Б, почти наверное сходится к истинным значениям независимо от выбора начального значения  $\hat{\alpha}$ .

В качестве примера рассмотрим статистику наработок до отказа электрогенераторов, которую мы приводили выше.

Мы имели  $t_1, \dots, t_n = 100, 110, 150, 175, 185, 200$  и  $220$  час соответственно. Чтобы найти подходящее начальное значение  $\hat{\alpha}$ , приравняем выборочное среднее ранее найденному среднему распределения (6.103):

$$162,9 = \lambda^{-1/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \quad (7.72)$$

Используя (7.72), (7.70') и таблицы  $\Gamma(x)$  (см. [5], стр. 193), легко найти начальное значение  $\hat{\alpha} = 2,2$ . Применяя затем итерационный процесс, рассмотренный в приложениях 7А и 7Б, находим

$$\hat{\alpha} = 4,6690, \quad \hat{\lambda} = 3,04238 \times 10^{-11}. \quad (7.73)$$

Чтобы получить оценки дисперсий и ковариаций, поступим так же, как и в случае гамма-распределения. Из (7.70) и (7.71) находим:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum t_i^\alpha \log^2 t_i, \quad (7.74)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}, \quad (7.75)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \alpha \partial \lambda} = -\sum t_i^\alpha \log t_i. \quad (7.76)$$

На этот раз мы не будем заменять величины, содержащие  $t_i$ , их математическими ожиданиями, так как это привело бы к неправильной оценке дисперсий (см. последний абзац п. 7.5.4).

Подставляя оценки (7.73) в (7.74) — (7.76), получаем:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \alpha^2} \right\rangle = -194,9062,$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \lambda^2} \right\rangle = -0,75626 \times 10^{22};$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \alpha \partial \lambda} \right\rangle = -12,12624 \times 10^{11}.$$

Таким образом, матрица  $A$  принимает вид:

$$A = \begin{bmatrix} -194,9062 & -12,12624 \times 10^{11} \\ -12,12624 \times 10^{11} & -0,75626 \times 10^{22} \end{bmatrix}$$

и

$$\text{Det } A = 0,35406 \times 10^{22}.$$

Далее,

$$-A^{-1} = \frac{1}{0,35406 \times 10^{22}} \begin{bmatrix} 0,75626 \times 10^{22} & -12,12624 \times 10^{11} \\ -12,12624 \times 10^{11} & 194,9062 \end{bmatrix},$$

$$\langle \text{var } \hat{\alpha} \rangle \approx 2,1360 \approx 2,14,$$

$$\langle \text{var } \hat{\lambda} \rangle \approx 550,49 \times 10^{-22} \approx 550 \times 10^{-22},$$

$$\langle \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \rangle \approx -34,249 \times 10^{-11} \approx -34,2 \times 10^{-11}.$$

В данном случае мы находим также, что

$$\langle \hat{\rho}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \rangle = \frac{-34,249 \times 10^{-11}}{10^{-11} \sqrt{(2,1360)(550,49)}} \approx -1,00.$$

Таким образом, оценки  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$  имеют сильную отрицательную корреляцию. Интересно найти наименьшие возможные значения дисперсий, пренебрегая смещенностью оценок  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$ . Это можно сделать, заменив в (7.74) и (7.76) выражения, зависящие от выборочных значений, их математическими ожиданиями. Пусть, например, мы должны найти по (7.74) математическое ожидание  $\Sigma t_i^\alpha \log^2 t_i$ . Так как  $t_i$  — независимые случайные величины, справедливо равенство

$$E(\Sigma t_i^\alpha \log^2 t_i) = nE(\tau^\alpha \log^2 \tau), \quad (7.77)$$

где  $\tau$  обладает плотностью вероятности вида (7.68).

Далее,

$$E(\tau^\alpha \log^2 \tau) = \int_0^\infty \alpha \lambda t^{2\alpha-1} \log^2 t e^{-\lambda t^\alpha} dt. \quad (7.78)$$

Этот интеграл можно взять, заменив  $t^{2\alpha-1}$  на  $t^{\beta-1}$ , вычислив затем (при помощи преобразования Лапласа) выражение

$$\int_0^{\infty} \alpha \lambda t^{\beta-1} e^{-\lambda t^\alpha} dt,$$

продифференцировав полученное соотношение дважды по  $\beta$  и, наконец, снова заменив  $\beta$  на  $2\alpha$ . Таким образом, получаем

$$E(\tau^\alpha \log^2 \tau) = \frac{1}{\alpha^2 \lambda} [\Psi'(2) + (\Psi(2) - \log \lambda)^2]. \quad (7.79)$$

Тот же метод используется для вычисления  $E(\tau^\alpha \log \tau)$ ; здесь необходимо лишь одно дифференцирование по  $\beta$ . Имеем

$$E(\tau^\alpha \log \tau) = \frac{1}{\alpha \lambda} [\Psi(2) - \log \lambda]. \quad (7.80)$$

У п р а ж н е н и е. Разобрать приведенный метод со всеми подробностями. (Заметим, что  $\Psi(2) = 1 - E$ , где  $E$  — постоянная Эйлера;  $E = 0,577215665$ . Заметим также, что

$$\Psi'(2) = \frac{\pi^2}{6} - 1 = 0,644934067.)$$

Если временно обозначить  $\Psi(2) - \log \lambda$  через  $\Delta$ , то дисперсионная матрица случайных величин  $\alpha$  и  $\lambda$ , взятых именно в таком порядке, будет равна

$$-A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{-1} & \left(\frac{-\alpha \lambda \Delta}{n}\right) \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{-1} \\ \frac{-\alpha \lambda \Delta}{n} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{-1} & \frac{\lambda^2}{n} \left[1 + \Delta^2 \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{-1}\right] \end{bmatrix}. \quad (7.81)$$

Коэффициент корреляции  $\hat{\rho}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$  равен

$$\hat{\rho} = \frac{-\Delta}{\sqrt{\pi^2/6 + \Delta^2}}. \quad (7.82)$$

Если теперь *оценить* дисперсии и ковариации путем подстановки оценок (7.73) в матрицу —  $A^{-1}$ , то мы получим:

$$\langle \text{var } \hat{\alpha} \rangle \approx 1,893,$$

$$\langle \text{var } \hat{\lambda} \rangle \approx 489,3 \times 10^{-22}, \quad (7.83)$$

$$\langle \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \rangle \approx -30,40 \times 10^{-11}.$$

Заметим также следующее. Если  $\lambda$  очень мало, то из оценки  $\hat{\lambda}$  следует, что  $\Delta$  будет очень большим, а тогда из (7.82) получается, что  $\langle \hat{\rho} \rangle \approx -1$ . Такие оценки значений дисперсий и ковариаций представляют наименьшие возможные значения в предположении, что  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$  равны нулю. Таким образом, ранее полученные оценки являются приемлемыми и весьма точными. Заметим, что при непосредственных вычислениях необходимо удерживать несколько дополнительных десятичных знаков, поскольку между  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$  существует сильная отрицательная корреляция.

У п р а ж н е н и е. Применить изложенные методы к распределению крайнего значения (п. 6.8.3).

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
2. E. J a h n k e and F. E m d e. Tables of functions. 4th ed., Dover Publications, Inc., New York, 1945.
3. C. R. Rao. Advanced statistical methods for biometric research. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952.
4. A. M. Mood. Introduction to the theory of statistics. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.
5. H. B. Dwight. Tables of integrals and other mathematical data. The Macmillan Company, New York, 1934.
6. F. A. Willers. Practical analysis. Dover Publications, Inc., 1948.

#### ДСПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Bartholomew D. J. A problem of life testing. J. Am. Stat. Assoc., 1957, v. 52, 279, September, p. 350—354.
- Chapman D. G. Estimating the parameters of a truncated Gamma distribution. Ann. Math. Stat., 1956, v. 27, 2, June, p. 493—505.



Cohen A. C. Simplified estimators for the normal distribution when samples are singly censored or truncated. *Technometrics*, 1959, v. 1, 3, August, p. 217—237.

Durand D. and Greenwood J. A. Aids for fitting the Gamma distribution by maximum likelihood. *Technometrics*, 1960, v. 2, 1, February, p. 55—56.

Hartley H. O. The modified Gauss-Newton method for the fitting of non-linear regression functions by least squares. *Technometrics*, 1961, v. 3, 4, May, p. 269—280.

Herd G. R. Estimation of reliability functions. Proc. 3rd National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics (IRE). Washington, D. C., 1957, 14—16 January, p. 113—122.

Kao J. H. K. A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing of electron tubes. *Technometrics*, 1959, v. 1, 4, November, p. 389—407.

K'a'o' J. H. K. Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies. *IRE Trans. Reliability and Quality Control*, 1958, v. 13, July, p. 15—22.

Moore P. G. The transformation of a truncated Poisson distribution. *Skand. Akt.*, 1956, v. 39, 1—2, p. 19—25.

## Приложение 7А

### Решение уравнений вида $x=f(x)$

Во многих случаях уравнение, определяющее оценку максимального правдоподобия, невозможно решить непосредственно и потребуется применение метода проб и ошибок. Если уравнение представим в виде  $x=f(x)$ , где  $f$ — известная функция  $x$ , существует чрезвычайно эффективный метод получения решения; этот метод допускает также обобщение на случай двух и большего числа уравнений того же вида. В случае двух уравнений последние выглядят следующим образом:

$$x = f_1(x, y),$$

$$y = f_2(x, y).$$

Сначала рассмотрим случай одной переменной; обобщение на две и большее число переменных будет сделано в приложении 7Б.

Пусть  $x=\zeta$ — корень нашего одномерного уравнения, т. е.

$$\zeta = f(\zeta).$$

Пусть, далее,  $x_0$ — начальное пробное значение корня  $\zeta$ . Определим  $x_1=f(x_0)$ . Предположим, что

$$x_0 = \zeta \pm \varepsilon. \quad (7A.1)$$

Тогда

$$x_1 = f(x_0) = f(\zeta + \varepsilon) = f(\zeta) + \varepsilon f'(\zeta) + O(\varepsilon^2)$$

или

$$x_1 = \zeta + \varepsilon f'(\zeta) + O(\varepsilon^2). \quad (7A.2)$$

Далее, пусть  $x_0^1$  обозначает следующее начальное значение, которое мы используем. Определим его как линейную комбинацию первого пробного значения  $x_0$  и полученного значения  $x_1$

$$x_0^1 = Ax_0 + Bx_1. \quad (7A.3)$$

Но в силу (7A.1) и (7A.2) из (7A.3) получаем

$$x_0^1 = A(\zeta + \varepsilon) + B[\zeta + \varepsilon f'(\zeta) + O(\varepsilon^2)] \quad (7A.4)$$

или

$$x_0^1 = \zeta(A + B) + \varepsilon[A + Bf'(\zeta)] + O(\varepsilon^2). \quad (7A.5)$$

Величины  $A$  и  $B$  находятся в нашем распоряжении. Поскольку мы хотим, чтобы  $x_0^1$  было насколько возможно ближе к корню  $\zeta$ , потребуем, чтобы

$$A + B = 1, \quad (7A.6)$$

положим также коэффициент при  $\varepsilon$  равным нулю:

$$A + Bf'(\zeta) = 0. \quad (7A.7)$$

Решим теперь (7A.6) и (7A.7) относительно  $A$  и  $B$ :

$$B = \frac{1}{1 - f'(\zeta)}, \quad (7A.8)$$

$$A = 1 - B.$$

Однако производная  $f'(\zeta)$  не известна. Ее можно аппроксимировать, скажем,  $f'(x_0)$ . Чтобы избежать необходимости дифференцировать  $f(x)$ , можно определить  $x_2 \equiv f(x_1)$ , откуда получается аппроксимация  $f'(x_0)$  выражением  $(x_2 - x_1)/(x_1 - x_0)$ . Используя это выражение

совместно с (7A.8) в уравнении (7A.3), окончательно получим

$$x_0^1 = \frac{x_1^2 - x_0 x_2}{2x_1 - x_0 - x_2} = x_2 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2x_1 + x_0 + x_2}. \quad (7A.9)$$

Таким образом,  $x_0^1$  можно взять в качестве новой начальной пробы, после чего процесс повторяется. Сходимость обычно бывает очень быстрой, так как если ошибка предыдущего шага порядка  $\varepsilon$ , то ошибка следующего шага уже будет порядка  $O(\varepsilon^2)$ . Однако при  $f'(\zeta) = 1$  процесс сходится более медленно (если он вообще сходится), так как в этом случае нельзя добиться того, чтобы в (7A.5) было  $A+B=1$  и в то же время исключалась ошибка порядка  $\varepsilon^*$ .

Пример. Вычислить квадратный корень произвольного числа. Пусть  $N > 0$  — заданное число. Мы хотим решить уравнение

$$x^2 = N \quad (7A.10)$$

или в виде, требуемом для данного метода,

$$x = \frac{N}{x}. \quad (7A.11)$$

Пусть  $x_0$  — начальная проба. Тогда

$$x_1 = N/x_0, \quad x_2 = N/x_1 = x_0.$$

Следовательно, из (7A.9) получаем

$$x_0^1 = \frac{\left(\frac{N}{x_0}\right)^2 - x_0^2}{2\frac{N}{x_0} - 2x_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{x_0} + x_0 \right). \quad (7A.12)$$

Вообще,  $n$ -я итерация  $x_0^{(n)}$  равна\*\*

$$x_0^n = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{x_0^{(n-1)}} + x_0^{(n-1)} \right). \quad (7A.13)$$

У п р а ж н е н и е. Решить уравнение

$$x = 2 \sin x \quad (7A.14)$$

(из [6], стр. 223, корень  $\zeta = 1,8954942$ ). Начать с точки  $x = 2$ .

\* Этот результат известен под названием процесса Айткена (см. F. V. Hildebrand. Introduction to numerical analysis. New York: McGraw-Hill Book Co, 1956, p. 445.

\*\* Уравнение (7A.13) можно назвать «счастливой случайностью»: в общем случае невозможно получить такую простую рекуррентную формулу.

**Решение  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными**

Предположим, что мы имеем систему  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, которые необходимо определить, и что эти уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{7Б.1}$$

Уравнения (7Б.1) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{X} = f(\mathbf{X}), \tag{7Б.2}$$

где  $\mathbf{X}$  и  $f(\mathbf{X})$   $n \times 1$  — матрицы (вектор-столбцы).

Пусть  $n \times 1$  — матрица  $\zeta$  представляет решение, т. е.

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \\ \vdots \\ f_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \end{bmatrix}. \tag{7Б.3}$$

Пусть  $\mathbf{X}_0$  обозначает  $n \times 1$  — матрицу пробных значений, причем

$$\mathbf{X}_0 = \zeta + \varepsilon, \tag{7Б.4}$$

где

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}. \tag{7Б.5}$$

Положим также

$$\mathbf{X}_1 = f(\mathbf{X}_0). \tag{7Б.6}$$

Имеем\*

$$\mathbf{X}_1 = f(\zeta + \varepsilon) = \zeta + \mathbf{J}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{7Б.7}$$

---

\*  $O(\varepsilon^2)$  обозначает  $n+1$ -матрицу, все элементы которой имеют порядок  $O(\varepsilon^2)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_i)$ .

где  $\mathbf{J} — n \times n$  — матрица частных производных  $f_i$  по  $x_j$ , вычисленных при  $x_j = \zeta_j$ . Другими словами,  $\mathbf{Y}$  — это обычный якобиан. (Заметим, что  $\mathbf{J}\varepsilon$  — это  $n + 1$ -матрица, поскольку  $n + 1$ -матрица  $\varepsilon$  умножается на  $n \times n$  матрицы  $\mathbf{J}$ ). Например, при  $n = 2$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (7Б.8)$$

где производные взяты при  $(x_1, x_2) = (\zeta_1, \zeta_2)$ .

Если положить

$$\mathbf{X}_0^1 = \mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{B}\mathbf{X}_1, \quad (7Б.9)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B} — n \times n$  — матрицы, то мы будем иметь

$$\mathbf{X}_0^1 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{\zeta} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{J})\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Положим теперь

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (\text{тождественная матрица}) \quad (7Б.10)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (\text{нулевая матрица}).$$

Вычитая, находим

$$\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{J}) = \mathbf{I}, \quad (7Б.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1},$$

где  $(\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1}$  — обратная матрица к матрице  $\mathbf{I} - \mathbf{J}$ .

Затем

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1},$$

так что

$$\mathbf{X}_0^1 = [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1}] \mathbf{X}_0 + (\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \mathbf{X}_1. \quad (7Б.12)$$

Как и в случае одного уравнения с одним неизвестным, частные производные матрицы  $\mathbf{J}$  можно аппроксимировать, положив  $\mathbf{X}_2 \equiv f(\mathbf{X}_1)$ ; затем, используя подходящие разностные отношения, можно оценить  $\partial f_i / \partial x_1$  и т. д.

Пример. Решить систему уравнений

$$x = -\frac{1}{2} + 162,9y,$$

$$y = \left(x + \frac{1}{24x}\right) (0,00637).$$

Это именно та система уравнений, которая используется в п. 7.5.2 для получения оценок максимального правдоподобия в случае гамма-распределения. Хотя в самом деле проще рассматривать эту систему как одно уравнение, подставив первое уравнение во второе с целью иллюстрации. Они будут рассмотрены отдельно. В качестве начального вектор-решения положим  $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Тогда

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 162,4 \\ 0,0066354 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0,58091 \\ 1,03449 \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти матрицы  $\mathbf{J}$ , вычислим теперь оценки частотных производных  $\partial f_1/\partial x$ ,  $\partial f_1/\partial y$ ,  $\partial f_2/\partial x$ ,  $\partial f_2/\partial y$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \approx \frac{f_1(x_1, y_0) - f_1(x_0, y_0)}{x_1 - x_0} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \approx \frac{f_1(x_0, y) - f_1(x_0, y_0)}{y_1 - y_0} = 162,9,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \approx \frac{f_2(x_1, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{x_1 - x_0} = 0,0063683,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} \approx \frac{f_2(x_0, y_1) - f_2(x_0, y_0)}{y_1 - y_0} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 162,9 \\ 0,0063683 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{I} - \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 162,9 \\ -0,0063683 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} = \begin{bmatrix} -26,738 & -4355,6 \\ -0,17028 & -26,738 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} = \begin{bmatrix} 27,738 & 4355,6 \\ 0,17028 & 27,738 \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$\mathbf{X}_0^1 = \begin{bmatrix} 27,738 & 4355,6 \\ 0,17028 & 27,738 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -26,738 & -4355,6 & 162,4 \\ -0,17028 & -26,738 & 0,0066354 \end{bmatrix}$$

или

$$\mathbf{X}_0^1 = \begin{bmatrix} 4383,34 \\ 27,90828 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4371,15 \\ -27,83089 \end{bmatrix}.$$

Новое приближение имеет вид

$$\mathbf{X}_0^1 = \begin{bmatrix} 12,19 \\ 0,07739 \end{bmatrix}.$$

Так как решение получено  $\begin{bmatrix} 13,20 \\ 0,0841 \end{bmatrix}$ , мы видим, что первое приближение дает замечательно точный результат (при условии, что мы отправлялись от значения  $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ).

Вычислим теперь второе приближение начиная с  $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0,077 \end{bmatrix}$ .

Имеем:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 12,0433 \\ 0,0777358 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 12,163162 \\ 0,0767379 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 162,90024 \\ 0,00636822 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & -162,90024 \\ -0,00636822 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \begin{bmatrix} -26,7490 & -4357,41852 \\ -0,1703435 & -26,7490 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \begin{bmatrix} 27,7490 & 4357,41852 \\ 0,1703435 & 27,7490 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{X}_0^1 = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0,077 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} 12,0433 \\ 0,0777358 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 674,05903 \\ 4,21486 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -660,87365 \\ -4,13085 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,18538 \\ 0,08401 \end{bmatrix}.$$

Следующее приближение можно получить, используя предыдущие матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , поскольку они уже довольно устойчивы. В результате получим

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 13,1956 \\ 0,084074 \end{bmatrix},$$

что при подстановке в исходные уравнения дает весьма хорошее соответствие.

## ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ

### Часть 2

#### 8.1. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ И НАХОЖДЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ ПО ФУНКЦИИ НАДЕЖНОСТИ

Мы уже видели, что надежность можно выразить как функцию параметров  $\theta_1, \theta_2, \dots$  распределения. Методы получения оценок  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots$  этих параметров были описаны в гл. 7. Теперь мы исследуем вопрос о том, каким образом связать эти два вида информации, чтобы получить доверительные пределы надежности и точечные оценки. Другими словами, будут исследованы построение и свойства функции надежности или оценки  $\hat{R} = R(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots)$ .

Рассмотрим сначала однопараметрическое распределение, такое, как показательное. Для показательного распределения

$$\hat{R} = e^{-\hat{T}/\theta} \quad (8.1)$$

является оценкой

$$R = e^{-T/\theta}, \quad (8.2)$$

где  $\hat{\theta}$  — оценка  $\theta$ .

Если в формуле (8.1)  $\hat{\theta}$  — оценка максимального правдоподобия, то, как можно показать (см. упражнение к § 8.2),  $\hat{R}$  также будет оценкой максимального правдоподобия, причем оценка надежности в (8.1) получается просто путем подстановки оценки  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$  в (8.2).



Если, далее, мы хотим сопоставить оценке надежности доверительную границу, то это можно сделать, вычислив доверительную границу для  $\theta$ , т. е.  $\hat{\theta}_c$ , и подставив полученное значение в формулу (8.2); в результате получится доверительный предел надежности  $\hat{R}_c = e^{-T/\hat{\theta}_c}$ . Это всегда возможно в том случае, когда надежность монотонно зависит от параметра. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если  $R(\theta)$  — возрастающая функция  $\theta$ , а  $\hat{\theta}_c$  — нижний доверительный предел  $\theta$ , то события  $\hat{\theta}_c < \theta$  и  $R(\hat{\theta}_c) < R(\theta)$  эквивалентны. Однако если бы  $R$  была убывающей функцией своего аргумента, то мы получили бы *верхний* доверительный предел  $\theta$ , и тогда для нахождения *нижнего* доверительного предела  $R(\hat{\theta}_c) < R(\theta)$  понадобился бы верхний предел для параметра  $\theta$ , т. е.  $\hat{\theta}'_c > \theta$ .

Если функция надежности зависит от двух или большего числа параметров, мы можем найти ее точечную оценку  $\hat{R}$ , просто подставив точечные оценки неизвестных параметров в функцию надежности. *Однако в общем случае, когда имеется более одного неизвестного параметра, нельзя подставлять доверительные пределы данных параметров непосредственно в выражение надежности с целью получения доверительного предела последней.* Об этом см. в § 8.4.

## 8.2. МЕТОД ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассмотрим два примера оценки надежности для однопараметрических распределений.

**У п р а ж н е н и е.** Непосредственно показать, что в случае показательного распределения времени безотказной работы оценка максимального правдоподобия  $R$  имеет вид  $e^{-T/\hat{\theta}}$ , где  $\hat{\theta}$  — оценка максимального правдоподобия  $\theta$  (7.9). (Указание: выразить плотность вероятности через  $R$ .)

**П р и м е р.** В 100 испытаниях произошло 10 отказов. Предполагая, что испытания подчиняются биномиальному закону, вычислим 90%-ный нижний доверительный предел  $R = 1 - p$ , где  $p$  — вероятность отказа в каждом испытании. Будем различать следующие два случая: а) до опыта согласились произвести 100

испытаний; б) до опыта решили производить испытания до тех пор, пока не наберется 10 отказов.

Ответ. а) Используем приближенное равенство (7.32), из которого получаем  $\hat{R}_L = 0,862$ . В приложении 8А построены верхние доверительные пределы для  $p = 1 - R$ , соответствующие доверительному уровню *по меньшей мере*  $\gamma$  (здесь не требуется никакой аппроксимации). Рис. П.3, дает  $\hat{R}_L = 0,85$  (единица минус верхний доверительный предел  $p$ ). Здесь используется метод приложения 8А. Оказывается, что первый предел оптимистически высок; однако это можно легко объяснить, поскольку рассматриваемые доверительные пределы получены на основании двух различных методик. В случае, когда требуется принять решение с наименьшим риском, рекомендуется последний метод.

б) В этом случае можно воспользоваться результатами приложения 8В и рис. П.3, откуда получается  $\hat{R}_L = 0,865$ . Нахождение аналога (7.32) представляет сложную задачу, так как  $\text{var } \hat{R}$  — очень сложная функция  $p$  (или  $R$ ). См. связанную с этим задачу 33 из гл. 9 [1].

### 8.3. ОБЩИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ОЦЕНОК НАДЕЖНОСТИ И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Существует альтернативный метод оценки надежности. Важное значение его объясняется тем, что он не ограничивается однопараметрическими распределениями, а может быть распространен и на многопараметрические распределения. Вначале рассмотрим альтернативный метод только для однопараметрических распределений.

Если можно найти среднее и дисперсию оценки  $\hat{R} = R(\hat{\theta})$ , то *приближенные доверительные пределы*  $R(\hat{\theta})$  получим, *воспользовавшись общей закономерностью, согласно которой при большом объеме выборки  $n$   $\hat{R}$  распределена по закону, близкому к нормальному.* Сначала будут даны общие формулы для среднего и дисперсии, а также несколько примеров их применения.

#### 8.3.1. Среднее значение функции надежности

В широких предположениях математическое ожидание функции выборочного момента (такого, как  $\bar{x}$ ,  $s^2$ , или, в общем случае, оценок, имеющих вид функций сумм

от функций всех выборочных значений\*) можно определить по следующей формуле ([2], стр. 345):

$$E[G(\hat{\theta})] = G(\theta) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (8.3)$$

где  $G(\theta)$  — некоторая функция  $\theta$  (в нашем случае — функция надежности), а  $\hat{\theta}$  — соответствующий момент совокупности или значение параметра, причем требуется, чтобы  $E(\hat{\theta}) \rightarrow \theta$  (при  $n \rightarrow \infty$ )\*\*.

Выражение  $O(1/n)$  является функцией от объема выборки  $n$  при  $n \rightarrow \infty$ , стремящейся к нулю столь же быстро, как  $1/n$ .

Если, например,  $\hat{\theta} = \bar{x}$ , выборочному среднему, и  $G(x) = x^2$ , то при больших  $n$  мы будем иметь

$$E(\bar{x}^2) \approx \mu^2 \quad (8.4)$$

(в действительности  $E(\bar{x}^2) = \mu^2 + \sigma^2/n$ ; при  $n \rightarrow \infty$  это выражение, очевидно, сходится к  $\mu^2$ ).

В качестве второго примера положим

$$G(\bar{x}) = \arcsin \sqrt{\bar{x}}.$$

Тогда

$$E(\arcsin \sqrt{\bar{x}}) \approx \arcsin \sqrt{\mu}. \quad (8.5)$$

### 8.3.2. Дисперсия функции надежности

Дисперсию функции  $G(\hat{\theta})$  можно, соответственно, найти по следующей формуле ([2], стр. 345):

$$\text{var}(G(\hat{\theta})) = \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\theta}}\right)_{\hat{\theta}=\theta}^2; \quad \text{var} \hat{\theta} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (8.6)$$

\* Это предложение означает, что  $G = G[\Sigma f(x_i)]$ ; например,  $G = (\Sigma \log x_i)^2$ .

\*\* В этом случае должно быть либо  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , либо  $E(\hat{\theta}) = \theta f(n)$ , где  $f(n) = 1 + O(1/n)$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $f(n) \rightarrow 1$  не медленнее, чем с указанной скоростью, иначе в формуле (8.3) нельзя будет писать  $O(1/n)$ .

Так, для предыдущих примеров при больших  $n$  справедливы следующие выражения дисперсии:

$$\text{var}(\bar{x}^2) \approx \frac{4\mu^2\sigma^2}{n} \quad (8.7)$$

и

$$\text{var}(\text{arc sin } \sqrt{\bar{x}}) \approx \frac{1}{4\mu(1-\mu)} \frac{\sigma^2}{n}. \quad (8.8)$$

### 8.3.3. Примеры

**Пример 1.** Пусть  $\bar{x} = f/n$ , где  $f$  — число отказов в выборке объема  $n$ , взятой из биномиального распределения (7.21). Тогда

$$G(\bar{x}) \equiv \text{arc sin } \sqrt{\bar{x}} = \text{arc sin } \sqrt{\frac{f}{n}}.$$

Найдем приближенное значение дисперсии  $G$  из уравнения (8.8).

Имеем

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = pq = p(1-p);$$

следовательно,

$$\text{var} \left[ \text{arc sin } \sqrt{\frac{f}{n}} \right] \approx \frac{1}{4n}. \quad (8.9)$$

В этом примере дисперсия не зависит от параметра  $p$  с точностью до членов порядка малости не ниже  $n^{-3/2}$ . Использование функции  $\text{arc sin } \sqrt{f/n}$  называется арксинус-преобразованием биномиальной совокупности. Смысл такого преобразования — получить оценку ( $\text{arc sin } \sqrt{p}$ ) со „стабильной“ дисперсией, т. е. когда дисперсия лишь слабо зависит от  $p$ .

**Пример 2.** Найдем  $\text{var } s = \text{var } \sqrt{s^2}$ , где  $s^2$  определена формулой (7.38). Используем соотношение

$$\text{var}(s^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4,$$

справедливое для того случая, когда выборка взята из *нормальной* совокупности [см. (5.99) и последующие формулы].

Отв е т.

$$\text{var } s = \frac{\sigma^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

В общем случае, когда основное распределение совокупности произвольно

$$\text{var } s = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{4\sigma^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

([2], стр. 353). Ввиду того что для нормального распределения  $\mu_4 = 3\sigma^4$ , имеем

$$\text{var } s = \frac{\sigma^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом, в частных случаях ошибка может быть меньше, чем в общем случае (8.6).

Пример 3. Найдем приближенные значения математического ожидания и стандартного отклонения  $\hat{R}$ , определенных формулой (8.1), в которой  $\hat{\theta}$  взята из (7.9).

Ответ.  $E(\hat{R}) \approx e^{-T/\theta} = R$

$$\sigma_{\hat{R}} \equiv + \sqrt{\text{var } \hat{R}} \approx \frac{T}{\theta \sqrt{n}} e^{-T/\theta} = \frac{R \log 1/R}{\sqrt{n}}.$$

Результат предыдущего примера и формула, следующая после (7.31), могут теперь быть использованы с целью получения *приближенных* доверительных пределов, например для  $R = e^{-T/\theta}$ . После соответствующих выкладок получаем

$$P(C_1 < e^{-T/\theta} < C_2) \approx \gamma,$$

где

$$C_1 = e^{-T/\hat{\theta}} \left( 1 - K_{(1-\gamma)/2} \frac{T}{\hat{\theta} \sqrt{n}} \right); \quad (8.10)$$

$$C_2 = e^{-T/\hat{\theta}} \left( 1 + K_{(1-\gamma)/2} \frac{T}{\hat{\theta} \sqrt{n}} \right),$$

а  $\gamma$  — доверительный уровень.

Если необходимо получить только *нижний* доверительный предел  $R = e^{-T/\theta}$  с тем же доверительным уровнем  $\gamma$ , следует положить  $C_2 \equiv 1$ ; тогда

$$C_1 = e^{-T/\hat{\theta}} \left( 1 - K_{1-\gamma} \frac{T}{\hat{\theta} \sqrt{n}} \right). \quad (8.11)$$

Пример 4. Точные доверительные пределы для  $R = e^{-T/\theta}$  можно найти из соотношений (7.11) — (7.13). На основании (7.11) случайная величина  $2n\hat{\theta}/\theta$  обладает распределением  $\chi^2_{2n}$ . Пусть  $\chi^2_{2n; 1-\gamma}$  обозначает величину уклонения, достигаемую случайной величиной  $\chi^2$  с  $2n$  степенями свободы с вероятностью  $1 - \gamma$ . Тогда

$$P \left[ \frac{2n\hat{\theta}}{\theta} < \chi^2_{2n; 1-\gamma} \right] = \gamma \quad (8.12)$$

или

$$P \left[ \frac{2n\hat{\theta}}{\chi^2_{2n; 1-\gamma}} < \theta \right] = \gamma. \quad (8.13)$$

Таким образом, нижним доверительным пределом для  $\theta$  будет  $2n\hat{\theta}/\chi^2_{2n; 1-\gamma} \equiv \hat{\theta}_c$ .

Из замечаний, помещенных после формулы (8.2), следует, что

$$R(\hat{\theta}_c) = \exp \left( -\frac{T\chi^2_{2n; 1-\gamma}}{2n\hat{\theta}} \right) \quad (8.14)$$

представляет собой нижний доверительный предел  $R$  с доверительным уровнем  $\gamma$ . Этот же метод будет в п. 8.5.1, применен к распределению Вейбулла и в п. 8.61 к гамма-распределению.

У п р а ж н е н и е. Сравнить нижние доверительные пределы, полученные по формуле (8.11) и по формуле (8.14) (рассмотреть численный пример: для нахождения значений  $\chi^2_{2n; 1-\gamma}/2n$  можно воспользоваться табл. П. 8).

#### 8.4. ОБОБЩЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если  $G$  является функцией двух оценок параметров скажем,  $G(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$ , то в широких предпосылках

$$E[G(\hat{\theta}, \hat{\lambda})] = G(\theta, \lambda) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[G(\hat{\theta}, \hat{\lambda})] &= \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\theta}}\right)^2 \text{var} \hat{\theta} + \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\lambda}}\right)^2 \text{var} \hat{\lambda} + \\ &+ 2\left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\theta}}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial \hat{\lambda}}\right) \text{cov}(\hat{\theta}, \hat{\lambda}) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

В производные функции (8.16) следует подставить  $\hat{\theta} = \theta$ ,  $\hat{\lambda} = \lambda$ , где  $E(\hat{\theta}) \approx \theta$ ,  $E(\hat{\lambda}) \approx \lambda$ , как и в однопараметрическом случае.

### 8.4.1. Примеры

У п р а ж н е н и е. Пусть  $\bar{x}$  — выборочное среднее,  $s^2$  — выборочная дисперсия случайной выборки из нормальной совокупности. Положим

$$\hat{R} = 1 - \Phi\left(\frac{T - \bar{x}}{s}\right), \quad (8.17)$$

где  $\Phi(Z)$  — нормированная нормальная функция распределения

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^Z e^{-t^2/2} dt.$$

Найти приближенное выражение для  $\text{var } \hat{R}$ . Использовать тот факт, что  $\bar{x}$  и  $s$  статистически независимы ([2], стр. 381—382)\*.

О т в е т.

$$\text{var } \hat{R} \approx \frac{\Phi^2}{n} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{T - \mu}{\sigma} \right)^2 \right],$$

где

$$\varphi \equiv \varphi\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

П р и м е р. Пятьсот 200-ваттных ламп испытываются до полного отказа. Предположим, что распределение времени безотказной работы приблизительно нормально со средним  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . В результате наблюдений получены значения выборочного среднего

$$\bar{x} = \frac{1}{50} \sum t_i = 1500 \text{ час}$$

и выборочной дисперсии

$$s = \left[ \frac{1}{50} \sum (t_i - 1500)^2 \right]^{1/2} = 100 \text{ час}.$$

Найдем 90%-ный нижний доверительный предел вероятности  $R$  того, что лампа не откажет на протяжении 1200 час.

О т в е т. Для оценки данной вероятности по формуле (8.17) находим выражение

$$\hat{R} = 1 - \Phi\left(\frac{1200 - 1500}{100}\right) = 1 - \Phi(-3) = 0,99865.$$

---

\* Г. Крамер. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948. Доказательство этого факта см. на стр. 421. (Прим. перев.)

Из результата предыдущего примера получим после замены  $\mu$  и  $\sigma$  их оценками  $\bar{x}$  и  $s$  ( $\langle \rangle$  обозначают подобную „оценку“  $\text{var } \hat{R}$ ):

$$\langle \text{var } \hat{R} \rangle^{1/2} \equiv V^{1/2} = 0,00147.$$

Окончательно из п. 7.4.4 получаем приближенное значение 90%-ного нижнего доверительного предела для  $R$

$$\hat{R}_L = 0,99865 - 1,282(0,00147) = 0,9968.$$

Более точные методы решения этой задачи, основывающиеся на нормальном распределении, приведены в § 8.7. В следующих пунктах приближенные и точные методы будут применены к распределению Вейбулла, гамма-распределению и распределению крайнего значения (последний пример отнесен к упражнениям). Несколько раз для иллюстрации будет использован пример п. 7.5.2 с результатами испытаний на долговечность семи электрогенераторов.

### 8.5. ОЦЕНКА И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ $R$ В СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

В качестве оценки вероятности  $R$  того, что  $\tau > T$  имеем выражение

$$\hat{R} = \exp(-\hat{\lambda}T^{\hat{\alpha}}). \quad (8.18)$$

Тогда в силу (8.15) и (8.16) получим

$$E(\hat{R}) \approx \exp(-\lambda T^{\alpha}) \quad (8.19)$$

и

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{R} \approx T^{2\alpha} e^{-2\lambda T^{\alpha}} \times \\ \times \{ \lambda^2 \log^2 T \text{ var } \hat{\alpha} + \text{var } \hat{\lambda} + 2\lambda \log T \text{ cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Оценки  $E(\hat{R})$  и  $\sqrt{\text{var } \hat{R}}$  можно получить, заменив всюду в (8.19) и (8.20)  $\alpha$  и  $\lambda$  их оценками (7.73), а также используя значения дисперсий и ковариаций из п. 7.5.5. Например, при  $T = 100$  час имеем

$$\begin{aligned} \langle E(\hat{R}) \rangle &\approx 0,936 \\ \langle \sqrt{\text{var } \hat{R}} \rangle &\approx 0,065. \end{aligned} \quad (8.21)$$



Таким образом, 90%-ный нижний доверительный предел  $R$  будет равен

$$0,936 - K_{0,10}(0,065) = 0,936 - 1,282(0,065) = 0,853.$$

Следовательно, если требуемое время безотказной работы составляет 100 час, то вероятность такого события (надежность) будет равна по меньшей мере 0,853 (с доверительным уровнем 90%).

### 8.5.1. Точный доверительный предел для $R$ в случае распределения Вейбулла

Если параметр  $\alpha$  распределения Вейбулла известен, то можно получить точные доверительные пределы  $R$ , поскольку известно точное распределение оценки максимального правдоподобия

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{\sum t_j^\alpha}{n}. \quad (8.22)$$

Заметим прежде всего, что

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t^\alpha}, \quad (8.23)$$

т. е.  $\tau$  имеет распределение Вейбулла.

Положим  $\zeta = \tau^\alpha$ , тогда

$$P(\zeta \leq y) = P(\tau^\alpha \leq y) = P(\tau \leq y^{1/\alpha}) \quad (8.24)$$

и из (8.23)

$$P(\zeta \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}. \quad (8.25)$$

Таким образом,  $\zeta$  или  $\tau^\alpha$  имеет обычное показательное распределение.

На основании (7.11) среднее выборки объема  $n$  из показательного-распределенной совокупности обладает распределением, связанным с  $\chi^2$ . Таким образом,

$$P\left(\frac{2n\lambda}{\hat{\lambda}} \leq y\right) = P(\chi_{2n}^2 \leq y). \quad (8.26)$$

Следовательно,  $2n\lambda/\hat{\lambda}$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $2n$  степенями свободы.

Используя последнее замечание, получаем доверительные пределы для  $\lambda$ , а следовательно, и для  $R = e^{-\lambda T^\alpha}$ . Пусть  $\chi_{2n; \alpha}^2$  обозначает уровень, который превышает случайной величиной, обладающей распределением  $\chi^2$  с вероятностью  $\alpha$ . Тогда

$$P(\chi_{2n}^2 \geq \chi_{2n; 1-\gamma}^2) = 1 - \gamma. \quad (8.27)$$

Например, при  $2n = 14$  и  $\gamma = 0,90$  по таблице распределения  $\chi^2$  ([3], стр. 557) находим, что  $\chi^2 = 21,064$ . Учитывая замечание, помещенное после (8.26), будем иметь

$$P\left(\frac{2n\lambda}{\hat{\lambda}} \leq \chi_{2n; 1-\gamma}^2\right) = \gamma \quad (8.28)$$

или

$$P\left(\lambda \leq \frac{\hat{\lambda} \chi_{2n; 1-\gamma}^2}{2n}\right) = \gamma. \quad (8.29)$$

Из формулы (8.29) следует, что  $\hat{\lambda} \chi_{2n; 1-\gamma}^2 / 2n$  представляет собой верхний доверительный предел  $\lambda$ , соответствующий доверительному уровню  $\gamma$ . Ввиду того что событие в скобках в (8.29) эквивалентно событию

$$\exp(-\lambda T^\alpha) \geq \exp\left(-\frac{\hat{\lambda} T^\alpha \chi_{2n; 1-\gamma}^2}{2n}\right), \quad (8.30)$$

непосредственно получается

$$P\left[R \geq \exp\left(-\frac{\hat{\lambda} T^\alpha \chi_{2n; 1-\gamma}^2}{2n}\right)\right] = \gamma. \quad (8.31)$$

Вернемся к рассмотренному примеру, предполагая, что известно значение параметра  $\alpha = 4,669$  [из формулы (7.73)]. Поскольку  $\lambda = 3,04238 \times 10^{-11}$ ,  $T = 100$ ,  $n = 7$ ,  $\chi_{14; 0,10}^2 = 21,064$ , то нижним доверительным пределом  $\hat{R}_L$  (при доверительном уровне 0,90) для вероятности  $R$  безотказной работы на протяжении 100 час будет

$$\hat{R}_L = \exp\left[-\frac{(3,04238 \times 10^{-11})(100^{4,669})(21,064)}{14}\right] = e^{-0,0997}. \quad (8.32)$$

Таким образом,

$$\hat{R}_L = 0,905. \quad (8.33)$$

Сравнение значения  $\hat{R}_L$  с ранее полученным значением 0,853 для двухпараметрического распределения Вейбулла иллюстрирует тот общий факт, что дополнительная информация (о параметре  $\alpha$ ) уточняет нижнюю границу  $R$ .

У п р а ж н е н и е. Применяя результаты этого пункта и п.7.5.5 к распределению *крайнего значения*

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\alpha(e^{\lambda t})^{-1}} \quad (8.34)$$

получить приближенные и точные доверительные пределы для  $R$ . Подставить те же данные.

### 8.6. ОЦЕНКА И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ $R$ В СЛУЧАЕ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Оценка вероятности того, что наработка до отказа будет больше  $T$ , дается выражением

$$\hat{R} = \int_T^{\infty} \frac{\hat{\lambda} \hat{\alpha} x^{\hat{\alpha}-1} e^{-\hat{\lambda}x}}{\Gamma(\hat{\alpha})} dx. \quad (8.35)$$

Если в этом интеграле произвести замену переменной, получим

$$\hat{R} = \int_{\hat{\lambda}T}^{\infty} \frac{u^{\hat{\alpha}-1} e^{-u}}{\Gamma(\hat{\alpha})} du. \quad (8.36)$$

Как мы видели в п. 6.8.2, данный интеграл можно представить в виде суммы\*

$$\hat{R} = 1 - \sum_{k=\hat{\alpha}}^{\infty} \frac{(\hat{\lambda}T)^k e^{-\hat{\lambda}T}}{k!}.$$

---

\* Строго говоря, это не совсем так, поскольку индекс суммирования для этого должен быть целым числом; однако при дробных значениях  $s$  хорошее приближение дает интерполяция для табл. II Молина.

Таким образом, можно использовать табл. II Молина [4], в которой табулированы значения функции\*

$$P(c, a) = \sum_{x=c}^{\infty} \frac{a^x e^{-a}}{x!}.$$

Пусть  $T = 100$  час,  $a \equiv \hat{\lambda}T = (0,0841)(100) = 8,41$ ,  $c \equiv \hat{\alpha} = 13,7$ .

По табл. II получаем (используя интерполяцию)

$$\hat{R} = 1 - 0,05924 = 0,941. \quad (8.37)$$

Чтобы получить дисперсию  $\hat{R}$ , где  $\hat{R}$  дается формулой (8.35), следует непосредственно использовать (8.16); однако на этом пути возникают трудности, связанные с оценкой окончательных выражений. Чтобы избежать их, используем представление Эджворта гамма-распределения через нормальную функцию распределения ([2], стр. 229):

$$\begin{aligned} \hat{R} \approx & 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\lambda}T - \hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\alpha}}}\right) + \\ & + \frac{\left[\left(\frac{\hat{\lambda}T - \hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\alpha}}}\right) - 1\right]}{3\sqrt{\hat{\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\lambda}T - \hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\alpha}}}\right)^2\right] - \dots \end{aligned} \quad (8.38)$$

Слагаемое  $1 - \Phi[(\hat{\lambda}T - \hat{\alpha})/\sqrt{\hat{\alpha}}]$  можно рассматривать как нормальное приближение „хвоста“ гамма-распределения, причем нормальное распределение берется с тем же средним  $\hat{\alpha}/\hat{\lambda}$  и стандартным отклонением  $\sqrt{\hat{\alpha}/\hat{\lambda}}$ , что и гамма-распределение. Последним поправочным членом в (8.38) учитывается асимметрия гамма-распределения.

Пример. Используя (8.38) в качестве представления  $\hat{R}$ , вычислим  $\hat{R}$  при значениях  $\hat{\alpha} = 13,70$ ,  $\hat{\lambda} = 0,0841$ ,  $T = 100$  (при этом

\* И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). Изд-во технико-теоретической литературы, 1955, табл. II. (Прим. перев.)

используются соответствующие таблицы нормальной функции распределения и плотности). Затем путем применения (8.16) к (8.38) найдем формулу для  $\text{var } R$ , а также оценку  $\text{var } \hat{R}$ , учитывая только нормальный член в (8.38).

Если определить  $\hat{\beta} \equiv (\hat{\lambda}T - \hat{\alpha})/\sqrt{\hat{\alpha}}$ , то приведенные выше оценки  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\lambda}$  дают  $\hat{\beta} = -1,43$ . Поскольку

$$\hat{R} = 1 - \Phi(\hat{\beta}) + \frac{\hat{\beta}^2 - 1}{3\sqrt{\hat{\alpha}}} \Phi(\hat{\beta}), \quad (8.39)$$

то из таблиц находим  $1 - \Phi(\hat{\beta}) = 0,9236$ ,  $\Phi(\hat{\beta}) = 0,1435$ , откуда  $\hat{R} = 0,9236 + 0,0135 = 0,937$ , т. е. мы получили значение, довольно близкое к (интерполированному) значению, соответствующему формуле (8.37). Из (7.64') — (7.66') находим

$$\langle \text{var } \hat{R} \rangle \approx \frac{\Phi^2(\hat{\beta})}{n} \left[ \frac{2\hat{\lambda}^2 T^2}{\hat{\alpha}} - (2\hat{\alpha} - 1) \left( 1 + \frac{\hat{\beta}}{2\sqrt{\hat{\alpha}}} \right) \left( 1 + \frac{3\hat{\beta}}{2\sqrt{\hat{\alpha}}} \right) \right]. \quad (8.40)$$

Подстановка заданных численных значений  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\beta}$  дает

$$V \equiv \langle \text{var } \hat{R} \rangle \approx 0,00403 \text{ и } V^{1/2} \approx 0,0635. \quad (8.41)$$

Таким образом, 90%-ный нижний доверительный предел для  $R$  равен

$$0,937 - K_{0,10}(0,0635) = 0,937 - 1,282(0,0635) = 0,856.$$

Интересно сравнить эти результаты с полученными ранее для распределения Вейбулла.

### 8.6.1. Точный доверительный предел для $R$ в случае гамма-распределения

Если параметр  $\alpha$  гамма-распределения известен, то можно определить точные доверительные пределы для параметра  $\lambda$ , а также для вероятности  $R$  безотказной работы на протяжении времени  $T$ .

Выпишем для удобства плотность вероятности гамма-распределения:

$$f(t; \lambda, \alpha) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0 & t \leq 0, \end{cases} \quad (8.42)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha > -1 \\ \lambda > 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда [по формуле (7.42)] оценкой максимального правдоподобия параметра  $\alpha/\lambda \equiv \beta$  будет

$$\hat{\beta} = \frac{\sum t_i}{n}. \quad (8.43)$$

Можно показать (см. [2], стр. 505), что случайная величина  $2n\hat{\beta}\lambda$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $2n\alpha$  степенями свободы. Из этого следует, что

$$P(2n\hat{\beta}\lambda \leq \chi_{2n\alpha; 1-\gamma}^2) = \gamma \quad (8.44)$$

или

$$P\left(\lambda \leq \frac{\chi_{2n\alpha; 1-\gamma}^2}{2n\hat{\beta}}\right) = \gamma. \quad (8.45)$$

Таким образом, постоянная, стоящая в правой части неравенства, заключенного в скобки, равна верхнему доверительному пределу для  $\lambda$ , который соответствует доверительному уровню  $\gamma$ .

Теперь нужно из (8.45) получить доверительный предел для  $R$ , где

$$R \equiv R(\lambda T) = \int_{\lambda T}^{\infty} \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du. \quad (8.46)$$

По виду (8.46) очевидно, что  $R(\lambda T)$  является убывающей функцией  $\lambda$ ; это означает, что если  $U$  — верхняя граница  $\lambda$ , то  $R(UT)$  будет нижней границей  $R$ . Тогда из (8.45) и (8.46) находим

$$P\left[R \geq R\left(\frac{T\chi_{2n\alpha; 1-\gamma}^2}{2n\hat{\beta}}\right)\right] = \gamma. \quad (8.47)$$

Таким образом, в случае гамма-распределения правая часть выражения в квадратных скобках будет давать нижний доверительный предел  $R$ -события, состоящего в том, что наработка будет больше  $T$ .

В качестве примера снова возьмем статистические данные по семи электрогенераторам; при этом, однако, предположим, что  $\alpha$  известна и равна 13,7. Данному примеру соответствуют  $T = 100$ ,  $n = 7$ ,  $\hat{\beta} = 132,9$ .

Чтобы получить  $\chi_{2n\alpha; 0,10}^2 = \chi_{191,8; 0,10}^2$ , используем свойство гамма-распределения, состоящее в том, что при большом числе степеней свободы величина  $\sqrt{2\chi_m^2}$  приближенно нормальна со средним  $\sqrt{2m-1}$  и дисперсией 1 ([2], стр. 251)\*. Тогда, если  $K_{1-\gamma}$  обозначает нормальное уклонение, превышаемое с вероятностью  $1-\gamma$ , то

$$K_{1-\gamma} \approx \sqrt{2\chi_{m; 1-\gamma}^2} - \sqrt{2m-1} \quad (8.48)$$

или

$$\chi_{m; 1-\gamma}^2 \approx \frac{1}{2} (K_{1-\gamma} + \sqrt{2m-1})^2. \quad (8.49)$$

При  $\gamma=0,90$ ,  $m=191,8$  по формуле (8.49) получаем

$$\chi_{191,8; 0,10}^2 = \frac{1}{2} (1,282 + \sqrt{382,6})^2 = 217,2. \quad (8.50)$$

Следовательно,

$$\frac{T_{\chi_{2n\alpha; 1-\gamma}^2}}{2n\hat{\beta}} = \frac{100(217,2)}{14(162,9)} = 9,52.$$

Теперь необходимо оценить  $R$ , пользуясь формулой (8.46). С этой целью вспомним замечания, следующие за формулой (8.36), согласно которым нужно использовать табл. II Молина [4]. Значениями параметров в данном случае будут  $a=9,52$ ,  $c=13,7$ . При помощи интерполирования получаем  $P(c,a)=0,122$ . Таким образом, нижний доверительный предел для  $R$  с доверительным уровнем 0,90 будет

$$\hat{R}_L = 1 - 0,122 = 0,878. \quad (8.51)$$

Это значение можно сравнить с результатами, следующими за формулой (8.41).

Как и следовало ожидать, нижний доверительный предел (0,856) для  $R$  в случае, когда нужно оценивать два параметра, меньше значения  $\hat{R}_L=0,878$ , полученного

---

\* Более точное приближение ([3], стр. 556) получается, если считать, что  $\chi_m^2/m$  нормальна со средним  $1-2/9m$  и дисперсией  $2/9m$ . В нашем частном примере разница между этими двумя приближениями мала.

по формуле (8.51); использование дополнительной информации об основном распределении времени безотказной работы дает «более точную» оценку. Интересно также сравнить нижний доверительный предел, полученный для тех же данных в условиях, когда принимается распределение Вейбулла (8.33) и один параметр считается известным.

### 8.7. ОЦЕНКА И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ $R$ В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В п. 8.4.1 дан приближенный метод нахождения оценки и доверительного интервала для

$$R = 1 - \Phi\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right),$$

где  $\Phi(x)$  — нормированная нормальная функция распределения (§ 6.10). Здесь мы покажем, как находить точные доверительные интервалы для  $R = \Phi[(\mu - T)/\sigma]$  в случае, когда для  $\mu$  и  $\sigma$  имеются лишь выборочные оценки. Как уже отмечалось,  $T$  часто представляет требуемое время работы, хотя сужать его смысл до такого случая не целесообразно. Например, можно определить надежность как вероятность того, что результирующее напряжение превысит заданный допустимый уровень. На нижеследующих примерах покажем, как такие задачи решаются с помощью *односторонних толерантных пределов* (табл. П.9). Эти таблицы построены для решения обратной задачи: как по имеющейся выборке вычислить *толерантный предел* при *фиксированной* доле распределения

В рассматриваемой задаче предполагается, что *толерантный предел задан*, а долю распределения, соответствующую превышению предела (например, долю изделий с временем безотказной работы, меньшим, чем необходимо), следует *найти* по выборке. В каждом случае доверительный уровень задается заранее.

Представляет также интерес оценка функции

$$R = \Phi\left(\frac{T_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{T_1 - \mu}{\sigma}\right),$$



равная вероятности того, что нормально-распределенная случайная величина попадет между данными пределами  $T_1$  и  $T_2$ . Эти пределы часто соответствуют требованиям, предъявляемым к рабочим параметрам, таким, как давление, концентрация смеси и т. д. Таким образом, необходимо выяснить, как находить приближенный нижний доверительный предел для  $R$ .

Толерантные пределы строятся следующим образом.

Из нормально-распределенной совокупности (наработки до отказа, выходных параметров и т. п.) производится случайная выборка объема  $n$ . Затем вычисляются  $\bar{x}$  и арифметическое значение квадратного корня из несмещенной оценки дисперсии  $s'$  \*.

Тогда *односторонний толерантный предел* дается выражением  $\bar{x} - Ks'$  (или  $\bar{x} + Ks'$ ). Он обладает тем свойством, что с вероятностью  $\gamma$  по крайней мере  $(1 - \alpha)$ -я часть распределения будет сосредоточена в интервале  $(\bar{x} - Ks', +\infty)$  или  $(-\infty, \bar{x} + Ks')$ . Величина  $K$  называется толерантным множителем; очевидно, она является функцией  $n$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$ .

В табл. П.9 представлены значения  $K$  при  $n = 3 (1) 25 (5) 50$ ;  $\gamma = 0,75; 0,90; 0,95; 0,99$ ;  $\alpha = 0,25; 0,10; 0,05; 0,01; 0,001^{**}$ .

### 8.7.1. Примеры

Следующие примеры иллюстрируют использование таблиц толерантных множителей.

Пример 1. Используем данные примера п. 8.4.1, в котором  $\bar{x} = 1500$  час и

$$s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s = \sqrt{\frac{50}{49}} (100) = 101 \text{ час.}$$

Чему будет равен нижний толерантный предел вида  $\bar{x} - Ks'$ , обладающий следующим свойством: с вероятностью  $\gamma = 0,90$  вероятность того, что время безотказной работы лампы превысит

\* Величина  $s' = s \sqrt{n/(n-1)}$ , где  $s$  — корень из выборочной дисперсии, т. е.  $s^2 = (1/n) \sum (x_i - \bar{x})^2$  (эта оценка, как было показано, является несмещенной).

\*\* Таблицы взяты из А. Н. Bowker, G. J. Lieberman. Engineering statistics. 1959, p. 230—231. Table 8, 3.

найденный толерантный предел, будет равна по меньшей мере  $1 - \alpha = 0,95$ . По табл. П.9 находим, что толерантный множитель  $K = 1,965$ ; при  $1 - \alpha = 0,95$  нижний толерантный предел  $\bar{x} - Ks' = 1302$  час. Последнее означает, что мы можем сделать вывод: с вероятностью по меньшей мере 0,95 время безотказной работы лампы превысит 1302 час и достоверность подобного вывода будет 90%. Это означает, что если бы мы повторили выборку и вновь произвели соответствующие вычисления, то в результате получился бы вывод, отличающийся *лишь численным значением нижнего толерантного предела*. В случае решения обратной задачи, решаемой в следующем примере, повторение выборочной процедуры приведет к изменению *только численного значения вероятности превышения фиксированного* нижнего предела. В любом случае доверительный уровень (0,90) равен ожидаемой частоте *правильных выводов* в длинном ряде повторений процедуры.

**Пример 2.** Используя выборочные данные предыдущего примера, найти 90%-ный нижний доверительный предел вероятности того, что время безотказной работы превысит (заданный) срок в 1302 час.

Ответ. 0,95. Чтобы получить этот результат, вычисляется значение  $K = (1500 - 1302)/101 = 1,965$ ; затем по табл. П.9 при  $\gamma = 0,90$  находим значение  $\alpha$ , соответствующее значениям  $K = 1,965$ ,  $n = 50$ . В результате получаем  $\alpha = 0,05$ , откуда требуемый нижний доверительный предел  $1 - \alpha = 0,95$ . Если бы  $K$  нельзя было найти по таблице непосредственно, то для получения верного значения пришлось бы применить интерполяцию. Это показано в следующем примере.

**Пример 3.** Решим задачи п. 8.4.1 по способу, указанному в предыдущем примере. В данном случае  $K = (1500 - 1200)/101 = 2,97$ . Из табл. П.9 находим, что при  $\gamma = 0,90$ ,  $n = 50$   $\alpha$  лежит между 0,01 и 0,001. Лучше всего применить следующий метод интерполяции.

Из таблицы нормальной функции распределения [5] находим, что значения  $K_\alpha$  (уклонение для нормированного нормального закона, превышаемое с вероятностью  $\alpha$ ) при  $\alpha = 0,01$  и 0,001, будут равны  $K_{0,01} = 2,326$  и  $K_{0,001} = 3,090$ . Соответствующие *толерантные множители* будут 2,735 и 3,604. При помощи обычной линейной интерполяции  $K_\alpha$  получаем  $K_\alpha = 2,326\lambda + 3,090(1 - \lambda)$ , где  $\lambda = (3,604 - 2,97)/(3,604 - 2,735) = 0,73$ . Таким образом,  $K_\alpha = 2,532$ . Из таблицы нормальной функции распределения находим  $\alpha = 0,00567$  и, стало быть,  $1 - \alpha = 0,99433$ . Заметим, что использование нормальных уклонений с целью интерполирования вовсе не обязательно. Оказывается, что  $K_\alpha$  почти линейно зависит от  $\log \alpha$ ; имеется соответствующая таблица. Интересно сравнить значение 0,99433 с нижним доверительным пределом 0,9968, полученным в п. 8.4.1.

**У п р а ж н е н и е.** Следует рассмотреть данные предыдущего примера, но при  $T = 1350$  час. Сравнить 90%-ные нижние доверительные пределы  $R = \Phi[(\mu - T)/\sigma]$ , полученные по методу этого пункта и п. 8.4.1.

Ответ. 0,881 и 0,889. Заметим, что приближенный метод п. 8.4.1 снова оказывается несколько оптимистическим, как и в предшествующем примере.

Способы нахождения точного доверительного интервала вида  $(\hat{R}_L < R < \hat{R}_U)$ , где  $R = \Phi[(\mu - T)/\sigma]$ , изложены в [6].

### 8.7.1.1. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ДЛЯ $R$ (ДВУСТОРОННИЙ ВАРИАНТ)

Решим задачу оценки вероятности того, что нормально-распределенная случайная величина будет находиться между *двумя* фиксированными пределами. Иначе говоря, мы хотим построить доверительные пределы надежности вида

$$R = \Phi\left(\frac{T_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{T_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

Можно показать, используя методы § 8.4, что нижний доверительный предел на  $R$  получается при помощи следующих формул. Если задана

$$\hat{R} = \Phi\left(\frac{T_2 - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{T_1 - \bar{x}}{s}\right),$$

то можно вычислить выражение

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{R} = & \frac{1}{n} \left[ \varphi_1^2 \left(1 + \frac{1}{2} \Delta_1^2\right) + \varphi_2^2 \left(1 + \frac{1}{2} \Delta_2^2\right) - \right. \\ & \left. - 2\varphi_1\varphi_2 \left(1 + \frac{1}{2} \Delta_1\Delta_2\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i = (2\pi)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{T_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ \Delta_i = \frac{T_i - \mu}{\sigma}, \end{aligned} \right\} i = 1, 2.$$

Тогда

$$\hat{R}_L = \hat{R} - K_{1-\gamma} V^{1/2}$$

будет нижним доверительным пределом  $R$ , соответствующим доверительному уровню  $\gamma$ , где  $K_{1-\gamma}$  — отклонение нормированного нормального закона, превышаемое с веро-

ятностью  $1 - \gamma$ , а  $V^{1/2} \equiv \langle \text{var} \hat{R} \rangle^{1/2}$ , где  $\langle \text{var} \hat{R} \rangle$  обозначает значение  $\text{var} \hat{R}$  при  $\mu$  и  $\sigma$ , замененных соответственно,  $\bar{x}$  и  $s$ .

Пример. Допустимые пределы тяги в ТРД равны  $20\,000lb_f \pm \pm 3\%$ , т. е.  $19\,400lb_f$  и  $20\,600lb_f$  представляют соответственно нижний и верхний пределы. В результате испытания 12 двигателей получены значения среднего  $\bar{x} = 19\,900lb_f$  и стандартного отклонения  $s = 250lb_f$ . Чему равен 90%-ный нижний доверительный уровень вероятности того, что в ракетном двигателе будут выполнены требования по тяге?

Согласно изложенному выше приближенному методу

$$\Delta_2 \equiv \frac{T_2 - \bar{x}}{s} = \frac{20\,600 - 19\,900}{250} = 2,8,$$

$$\Delta_1 \equiv \frac{T_1 - \bar{x}}{s} = \frac{19\,400 - 19\,900}{250} = -2,0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \Phi(2,8) - \Phi(-2,0) = \Phi(2,8) + \Phi(2,0) - 1 = \\ &= 0,99744 + 0,97725 - 1 = 0,97469. \end{aligned}$$

Далее,  $\Phi_1 = 0,05399$ ,  $\Phi_2 = 0,00792$  (из таблиц нормированной нормальной плотности вероятности). Затем вычисляем

$$V = \langle \text{var} \hat{R} \rangle = 0,000530 \quad \text{и} \quad V^{1/2} = 0,0230,$$

откуда

$$\hat{R}_L = 0,9747 - 1,282(0,0230) = 0,9452.$$

Способ определения доверительного интервала для

$$R = \Phi\left(\frac{T_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{T_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

читатель найдет в [6]; этот метод считается более точным, однако он намного более сложен, чем описанный выше.

## 8.8. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОГО, ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО И ПУАССОНОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В приложениях 8.А и 8.Б представлены методы построения односторонних доверительных пределов для вероятности отказов  $p$  в случае биномиальной последовательности испытаний и интенсивности отказов  $\lambda$  в случае распределения Пуассона.

Эти результаты можно использовать для построений нижних доверительных пределов надежности  $R$  в случаях, когда последняя является невозрастающей (обычно она строго убывает) функцией  $p$ . Например, если надежность определяется как вероятность безотказной работы последовательной системы (§ 9.2), где все  $n$  (независимых) подсистем обладают одной и той же вероятностью отказа  $p$ , то

$$R = (1 - p)^n. \quad (8.52)$$

Если  $\hat{p}_c$  — верхний доверительный предел  $p$  с доверительным уровнем  $\gamma$ , то

$$\hat{R}_c = (1 - \hat{p}_c)^n \quad (8.53)$$

будет нижним доверительным пределом  $R$  с доверительным уровнем  $\gamma$  (это утверждение в общем случае установлено в § 8.1). Подобный же результат можно получить и для *параллельной* системы (§ 9.4), состоящей из независимых  $n$  подсистем с одинаковой вероятностью отказа  $p$ . В этом случае

$$R = 1 - p^n \quad (8.54)$$

и  $R$  тоже будет убывающей функцией  $p$ . Очевидно также, что можно исследовать случай *смешанной последовательно-параллельной системы*, состоящей из независимых подсистем с *одинаковой* вероятностью отказа  $p$ . Вообще, если

$$R = f(p) \quad (8.55)$$

представляет убывающую функцию  $p$ , то

$$\hat{R}_c = f(\hat{p}_c) \quad (8.56)$$

будет для  $R$  нижним доверительным пределом с доверительным уровнем  $\gamma$ , коль скоро  $\hat{p}_c$  — верхний доверительный предел  $p$ , соответствующий тому же доверительному уровню.

В п. 9.2.1 и § 9.4 будут изложены методы нахождения нижних доверительных пределов  $R$  в случае независимых последовательных и параллельных систем, когда вероятности отказов подсистем не обязательно равны одной и той же постоянной  $p$ .

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Фелер Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во иностранной литературы, 1955.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
3. A. H. Bowker and G. J. Lieberman. Engineering statistics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1959.
4. E. C. Molina. Poisson's exponential binomial limit. D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J., 1942.
5. Tables of normal probability functions. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 23, 1953.
6. G. J. Resinkoff and G. J. Lieberman. Tables of the non-central t-distribution. Stanford University Press, Stanford, Calif., 1957.
7. C. R. Blythe and D. W. Hutchinson. Table of neyman-shortest unbiased confidence intervals for the binomial parameter. Biometrika., 1960, v. 47, pt. 3 and 4, December, p. 381—391.

## ДПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Cohen A. C. Jr. On the solution of estimating equations for truncated and censored samples from normal populations. Biometrika, 1957, June, v. 44, pt. 1 and 2, p. 225—236.
- Connor W. S. Interpreting reliability by fitting theoretical distributions to failure data. Ind. Eng. Chem., 1960, v. 52, p. 75A—76A, February; 1960, v. 52, p. 71A—72A, April.
- Crow E. L. Confidence intervals for a proportion. Biometrika, 1956, v. 43, pt. 3 and 4, December, p. 423—435.
- Crow E. L. and Gardner R. S. Confidence intervals for the expectation of a poisson variable. Biometrika, 1959, v. 46, pt. 3 and 4, December, p. 441—453.
- Sarhan A. E. and Greenberg B. G. Tables for best linear estimates by order statistics of the parameters of single exponential distributions from singly and doubly censored samples. J. Am. Stat. Assoc., 1957, v. 52, 277, March, p. 58—87
- Walsh J. E., Asymptotic efficiencies of a nonparametric life test for smaller percentiles of a gamma distribution. J. Am. Stat. Assoc., 1956, v. 51, September, p. 467—480.
- Walsh J. E., Estimating population mean, variance and percentage points from truncated data. Skand. Akt. 1956, v. 39, 1—2, p. 47—58.

### Приложение 8А

#### Односторонние биномиальные доверительные пределы

В приложении доказывается, что  $C(F)$ , определяемые формулой (8А.1), представляют верхние доверительные пределы биномиального параметра  $p$ . На рис. П.1—П.5 показаны значения  $C(F)$  при различных  $F$  и при объеме выборки от 5 до 1000, а также при  $\gamma=0,50; 0,80;$

0,90; 0,95 и 0,99. В этом случае система сводится к последовательности  $N$  независимых испытаний, в которой наблюдается число отказов. В результате можно сделать следующий вывод: истинная вероятность  $p$  отказа системы не больше  $C$ . Если подобный вывод делается в целом ряде испытаний, в каждом из которых наблюдается число отказов в последовательности независимых испытаний, то в некотором смысле можно гарантировать, что большинство выводов будут правильными. Это можно осуществить, если фиксировать доверительный уровень  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$  (обычно 0,90 или выше) таким образом, чтобы при любом значении параметра  $p$  ожидаемая доля правильных выводов в длинном ряде таких выводов была равной или большей  $\gamma$ . Если в каждом отдельном случае мы будем знать, что вероятность истинности нашего вывода будет равна по меньшей мере  $p$  независимо от истинного значения  $p$ , то из статистического смысла вероятности можно заключить, что гарантия, о которой говорилось, будет иметь место.

Заметим, что значение  $p$  может быть разным для различных совокупностей, из которых производятся выборки; объем выборки  $N$  также может быть переменным (при этом предполагается, что он все же фиксируется до опыта).

Очередные задачи решаются следующим путем. Предположим сначала, что из совокупности с вероятностью неудачи, равной (неизвестной) постоянной  $p$ , где  $0 \leq p \leq 1$ , производится выборка объема  $N$ . Множество возможных исходов состоит из всех возможных значений числа отказов (неудач)  $(0, 1, \dots, N)$ ; оно называется *выборочным пространством* (§ 6.6). Рассмотрим теперь следующее уравнение, определяющее величины  $C(F)$ ;  $F=0, \dots, N$ :

$$\sum_{j=0}^F \binom{N}{j} [C(F)]^j [1 - C(F)]^{N-j} = 1 - \gamma, \quad (8A.1)$$

где  $0 < \gamma < 1$ . Теперь покажем, что  $C(F)$  представляют верхние доверительные пределы для  $p$ .

Прежде всего,  $0 < C(0) < C(1) \dots < C(F) < C(F+1) < \dots < C(N) = 1$ .

Чтобы убедиться в этом, нужно сначала показать, что уравнение (8A.1) имеет единственное решение [за исклю-

чением случая  $F=N$ , в котором  $C(N)$  определяется как 1]. Рассмотрим функцию

$$g_F(x) = \sum_{j=0}^F \binom{N}{j} x^j (1-x)^{N-j}.$$

Имеем  $g_F(0)=1$ ;  $g_F(1)=0$ ; далее,

$$g'_F(x) = -\binom{N}{F} (N-F) x^F (1-x)^{N-F-1} \leq 0 \text{ при } 0 \leq x \leq 1.$$

Следовательно,  $g_F(x) = 1 - \gamma > 0$  обладает единственным корнем ( $0 < x < 1$ ). Однако при  $F=N$  левая часть (8А.1) тождественно равна 1; в этом случае мы можем положить  $C(N)=1$ .

Чтобы установить неравенство  $C(F) < C(F+1)$ , запишем

$$g_F(Z) = 1 - \gamma, \quad (8A.2)$$

$$g_{F+1}(Y) = 1 - \gamma. \quad (8A.3)$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что  $Y > Z$ . Имеем

$$g_{F+1}(Y) = g_F(Y) + \binom{N}{F+1} Y^{F+1} (1-Y)^{N-F-1} = 1 - \gamma \quad (8A.4)$$

или

$$g_F(Y) = 1 - \gamma - \binom{N}{F+1} Y^{F+1} (1-Y)^{N-F-1}. \quad (8A.5)$$

Правая часть (8А.5) должна быть положительной и меньшей  $1 - \gamma$ . Если предположить, что  $Y \leq Z$ , то  $g_F(Y) \geq g_F(Z)$ , поскольку  $g_F(x)$  — невозрастающая функция  $x$  (при  $0 < x < 1$  строго убывающая). Но последнее неравенство противоречит (8А.2) и (8А.5), а также замечанию, следующему за (8А.5). Таким образом,  $Y > Z$ .

Теперь, чтобы доказать теорему, предположим, что  $p$  (неизвестная вероятность отказа) лежит в интервале  $[C(F), C(F+1)]$ , т. е.  $C(F) \leq p \leq C(F+1)$ , где  $F = 0, 1, \dots, N-1$ .

Пусть  $X$  обозначает число отказов в  $N$  испытаниях. Покажем, что

$$P[C(X) \geq p] \geq \gamma. \quad (8A.6)$$



С этой целью заметим, что событие  $X = F + 1$  или  $F + 2$  или ... или  $N$  эквивалентно событию  $C(X) = C(F + 1)$  или  $C(F + 2)$  или ... или  $C(N)$ , что, в свою очередь, сводится к событию  $C(X) \geq p$ . Значит (см. пример, предшествующий п. 5.3.1),

$$P[X = F + 1 \text{ или } \dots \text{ или } N] \leq P[C(X) \geq p]. \quad (8A.7)$$

Левую часть (8A.7) можно записать так:

$$1 - \sum_{j=0}^F \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}. \quad (8A.8)$$

Но последняя функция не возрастает по  $p$ . Тогда, если заменить  $p$  на  $C(F)$ , выражение (8A.8) будет невозрастающим. Следовательно, учитывая (8A.7),

$$1 - \sum_{j=0}^F \binom{N}{j} [C(F)]^j [1 - C(F)]^{N-j} \leq P[C(X) \geq p]. \quad (8A.9)$$

Левая часть (8A.9) равна  $\gamma$  независимо от  $F$  (см. 8A.1); этим устанавливается требуемое неравенство (8A.6). Правда, остается еще рассмотреть случай, когда  $0 \leq p \leq C(0)$ . Но в этом случае непосредственно очевидно, что

$$P[C(X) \geq p] = 1 \geq \gamma, \quad (8A.10)$$

так что (8A.6) справедливо независимо от истинного значения  $p$ . Этим доказательство завершается.

Заметим, что поскольку надежность  $R \equiv 1 - p$ , то  $C(F)$ , определяемое формулой (8A.1), можно использовать для получения *нижних* доверительных пределов для  $R$ . Событие  $C(X) \geq p$  эквивалентно событию  $1 - C(X) \leq R$ , следовательно, эти события имеют одну и ту же вероятность. Значит,

$$P[1 - C(X) \leq R] \geq \gamma, \quad (8A.11)$$

а это говорит о том, что  $1 - C(F)$  дают для  $R$  нижние доверительные пределы (при доверительном уровне  $\gamma$ ).

**Точные односторонние доверительные пределы в случае биномиальной схемы**

**8Б.1. Введение**

В приложении дается метод вычисления точных верхних доверительных пределов для биномиального параметра. Результат состоит в том, что верхние доверительные пределы можно построить с *точным* доверительным уровнем  $\gamma$ , а не с условием  $\geq \gamma$  (где  $\gamma$  равна, например, 0,90).

Доверительные пределы последнего типа получаются по методам приложения 8А. В любом случае рассматривается  $N$  независимых испытаний с вероятностью  $p$  отказа в каждом испытании. Количество отказов обозначается через  $F$ . Чтобы получить неточные пределы, следует обратиться к соответствующим вычислениям или к рис. П.1—П.5, откуда получается верхний доверительный предел  $\bar{C}(F; \gamma)$ , связанный с выводом \*

$$\bar{C}(F; \gamma) \geq p. \quad (8Б.1)$$

*Априорная* вероятность правильности данного вывода будет равна по меньшей мере  $\gamma$ .

Чтобы найти точные пределы, после получения  $F$  отказов в  $N$  испытаниях производится *дополнительное испытание*. Оно осуществляется следующим образом. Из равномерной совокупности извлекается число  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ )\*\*. Тогда вычисляется (или находится по таблицам)  $C(F+r; \gamma)$  и принимается, что

$$C(F+r; \gamma) \geq p. \quad (8Б.2)$$

Априорная вероятность правильного вывода (8Б.2) *точно* равна  $\gamma$ . Интуитивно очевидно, что  $C$  всегда меньше или равно  $\bar{C}$ , поскольку выводу (8Б.2) соответствует не большая достоверность, чем необходимо.

---

\* В настоящем приложении обозначение  $\bar{C}$  соответствует обозначению  $C$  приложения 8А.

\*\* Можно воспользоваться для этого таблицей, например, трехзначных случайных чисел.

В этом приложении будут изложены основы теории, а также график, иллюстрирующий один простой пример ( $N=2$ ;  $\gamma=0,50$  и  $0,90$ ). В случае больших выборок становится безразличным, какой метод использовать. Изложенный метод, очевидно, может дать заметный эффект лишь в случае малых выборок.

## 8Б.2. Обоснование

Пусть  $X$  обозначает число отказов в  $N$  независимых испытаниях с вероятностью  $p$  отказа в каждом из них. Обозначим через  $r$  случайную величину, равномерно распределенную в интервале  $(0,1)$ :

$$P(r \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1. \end{cases} \quad (8Б.3)$$

Нетрудно показать, что функция распределения  $X+r$  имеет вид\*

$$P(X+r \leq x) = \sum_{j=0}^{[x-1]} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} + \\ + \binom{N}{[x]} p^{[x]} (1-p)^{N-[x]} (x - [x]), \quad (8Б.4)$$

где  $0 \leq x \leq N+1$ .

На рис. 8Б.1 и 8Б.2 показано расхождение между функциями распределения  $X$  и  $X+r$ . Определим теперь функцию  $C(x)$  как решение уравнения

$$\sum_{j=0}^{[x-1]} \binom{N}{j} C^j (1-C)^{N-j} + \binom{N}{[x]} C^{[x]} (1-C)^{N-[x]} (x - [x]) = \\ = 1 - \gamma, \quad (8Б.5)$$

где  $0 < \gamma < 1$ . Мы видим, что посредством этого уравнения  $C(x)$  определяется только при  $1 - \gamma < x < N + 1 - \gamma$ ;

\*  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , например,  $[1,43]=1$ ,  $[2]=2$  и т. д.

доопределим ее как 0 при  $0 \leq x < 1 - \gamma$  и как 1 при  $N + 1 - \gamma \leq x \leq N + 1$ . Чтобы показать, что это можно сделать, рассмотрим сначала уравнение (8Б.5) при  $1 - \gamma < x < N + 1 - \gamma$ . Левая часть (8Б.5), как функция  $C$ , будет больше  $1 - \gamma$  при  $C = 0$  и будет равна 0 при  $C = 1$ .

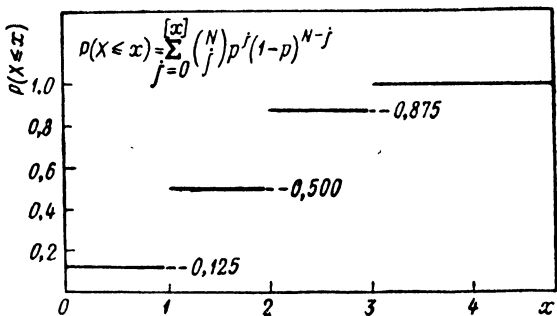


Рис. 8Б.1.  $p(X \leq x)$ ;  $p = \frac{1}{2}$ ;  $N = 3$ .

Эта функция, далее, убывает при возрастании  $C$  от 0 до 1.

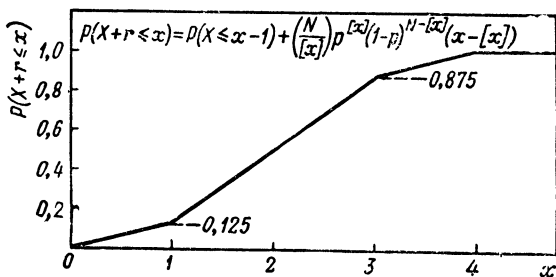


Рис. 8Б.2.  $p(X+r \leq x)$ ;  $p = \frac{1}{2}$ ,  $N = 3$ .

Приняв, что левая часть (8Б.5) убывает по  $C$ , мы получим, следующее: при  $x$  из интервала  $1 - \gamma < x < N + 1 - \gamma$  (8Б.5) имеет единственный корень  $C$  в отрезке  $0 \leq C \leq 1$ . Чтобы установить убывание левой части (8Б.5), продиф-

ференцируем ее по  $\bar{C}$  (заметим, что все члены, кроме одного, после дифференцирования исчезают):

$$\frac{d}{d\bar{C}} = - \binom{N}{[x-1]} (N - [x - 1]) C^{[x-1]} (1 - C)^{N-[x]} +$$

$$+ \binom{N}{[x]} [x] C^{[x-1]} (1 - C)^{N-[x]} (x - [x]) - \quad (8Б.6)$$

$$- \binom{N}{[x]} (N - [x]) C^{[x]} (1 - C)^{N-[x]-1} (x - [x]) =$$

$$= \binom{N}{[x]} [x] C^{[x-1]} (1 - C)^{N-[x]} (x - [x] - 1) -$$

$$- \binom{N}{[x]} (N - [x]) C^{[x]} (1 - C)^{N-[x]-1} (x - [x]) \quad (8Б.7)$$

$< 0$ , так как  $(x - [x] - 1) < 0$ . При выводе (8Б.7) из (8Б.6) было использовано тождество

$$\binom{N}{f-1} (N - f + 1) \equiv \binom{N}{f} f.$$

При  $0 \leq x \leq 1 - \gamma$  и  $N + 1 - \gamma \leq x \leq N + 1$  разность между левой и правой частями (8Б.5) становится равной 0 только в случае  $x = 1 - \gamma$  и  $x = N + 1 = \gamma$ . Значит, можно произвольным образом определить  $C(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq 1 - \gamma$  и  $C(x) \equiv 1$  при  $N + 1 - \gamma \leq x \leq N + 1$ .

Докажем теперь, что  $C(x)$  не убывает по  $x$  (строго возрастает при  $1 - \gamma < x < N + 1 - \gamma$ ). Действительно, вспомним, что производная левой части (8Б.5) меньше 0. Дифференцируя (8Б.5), на этот раз по  $x$ , получаем

$$(< 0) \frac{dC}{dx} + \binom{N}{[x]} (C(x))^{[x]} (1 - C(x))^{N-[x]} = 0, \quad (8Б.8)$$

где  $(< 0)$  обозначает правую часть (8Б.7). Таким образом,

$$dC/dx > 0.$$

Ввиду того что второе слагаемое левой части (8Б.8) положительно, требуемое утверждение установлено.

Чтобы установить теперь основной результат, согласно которому  $C(x)$  является верхним доверительным пределом  $p$  с доверительным уровнем, в точности равным  $\gamma$ , возьмем любое число  $p$  между 0 и 1; тогда для некоторого  $x$  из интервала  $1 - \gamma \leq x \leq N + 1 - \gamma$  будет  $p = C(x)$ .

Событие  $X+r \geq x$  эквивалентно событию  $C(X+r) \geq C(x)$ , т. е.  $C(X+r) \geq p$ . Следовательно,

$$P(X+r \geq x) = P[C(X+r) \geq p]. \quad (8Б.9)$$

Далее,

$$\begin{aligned} P(X+r \geq x) &= 1 - P(X+r \leq x) = \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{[x-1]} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} + \\ &+ \binom{N}{[x]} p^{[x]} (1-p)^{N-[x]} (x - [x]) \end{aligned} \quad (8Б.10)$$

и так как  $p = C(x)$ , то из (8Б.4) имеем

$$P(X+r \geq x) = 1 - (1 - \gamma) = \gamma.$$

Таким образом, на основании (8Б.9)

$$P[C(X+r) \geq p] = \gamma. \quad (8Б.11)$$

Последнее говорит о том, что при любом значении  $p$  верхний доверительный предел, вычисленный по (8Б.4), будет

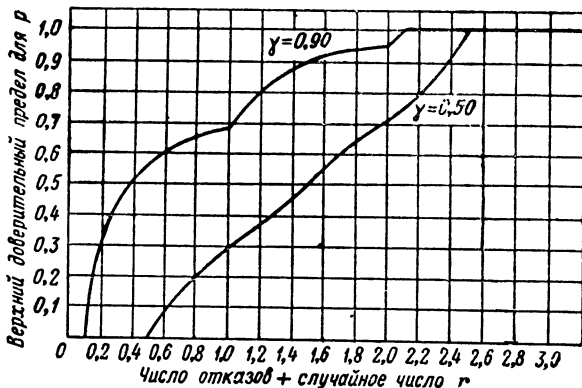


Рис. 8Б.3. Точные верхние доверительные пределы для биномиального параметра  $p$  при объеме выборки  $N=2$  и доверительных уровнях  $\gamma=0,50$  и  $\gamma=0,90$ .

„покрывать“  $p$  с той же вероятностью  $\gamma$  [при  $X+r \leq 1$  и  $\geq N+1-\gamma$  получается соответственно  $C(X+r) \equiv 0$  и  $1$ ].

На рис. 8Б.3 вычерчен вид  $C(x)$  при  $N=2$ ;  $\gamma=0,50$  и  $0,90$ . В [7] имеются таблицы двусторонних доверительных пределов для  $\gamma=0,95$ ,  $\gamma=0,99$  и  $N=2(1) 24(2) 50$ .

**Верхние доверительные пределы для  $p$  в случае выборки с отрицательным биномиальным распределением**

В § 6.4 выборочное пространство было задано  $c$  отказами в переменном числе  $n$  испытаний;  $c$  задается заранее, и испытания производятся до тех пор, пока не наберется  $n$  отказов. В подобной ситуации можно, так же как и в случае фиксированного числа испытаний, показать, что верхние доверительные пределы  $p$  при доверительном уровне  $\gamma$  находятся посредством решения уравнения

$$\sum_{j=n}^{\infty} \binom{j-1}{c-1} C^c (1-C)^{j-c} = 1 - \gamma \quad (8B.1)$$

относительно  $C$ . Однако сначала на основании результатов приложения 8А, относящихся к биномиальным испытаниям с фиксированным числом испытаний, перепишем (8B.1) в виде

$$1 - \sum_{j=n}^{\infty} \binom{j-1}{c-1} C^c (1-C)^{j-c} = \gamma \quad (8B.2)$$

или

$$\sum_{j=c}^{n-1} \binom{j-1}{c-1} C^c (1-C)^{j-c} = \gamma. \quad (8B.3)$$

Но с учетом (8.56), (8B.3) примет вид

$$\sum_{j=c}^{n-1} \binom{n-1}{j} C^j (1-C)^{n-1-j} = \gamma \quad (8B.4)$$

или

$$\sum_{j=0}^{c-1} \binom{n-1}{j} C^j (1-C)^{n-1-j} = 1 - \gamma. \quad (8B.5)$$

Из уравнения (8A.1) следует, что верхний доверительный предел  $C$  может быть получен по рис. П.1—П.5, если отождествить  $n-1 \equiv N$ ,  $c-1 \equiv F$ .

Для примера положим  $C=2$ .

Допустим, что второй отказ произошел в десятом испытании. Тогда верхний доверительный предел  $C$  для  $p$ , соответствующий доверительному уровню  $\gamma=0,90$ , на основании рис. П.3, где  $F=1$ ,  $N=9$ , будет равным  $C=0,37$ . Если  $c=1$  и отказ произошел в первом же испытании ( $n=1$ ), имеем  $C=1,00$ .

### Приложение 8Г

#### Верхние доверительные пределы для $\lambda$ в случае распределения Пуассона

При использовании модели распределения Пуассона (§ 6.5) верхние доверительные пределы для параметра  $\lambda$  строятся так же, как и в биномиальном случае. Пусть в результате испытания произошло  $n$  событий, например  $n$  отказов, где  $n \geq 0$ . Тогда верхние доверительные пределы  $C$  для  $\lambda$ , соответствующие доверительному уровню  $\gamma$ , можно определить, решая уравнение

$$\sum_{k=0}^n \frac{C^k e^{-C}}{k!} = 1 - \gamma. \quad (8Г.1)$$

С этой целью можно использовать табл. II Молина [4], поскольку в обозначениях этого автора

$$P(c, a) = \sum_{x=c}^{\infty} \frac{a^x e^{-a}}{x!}. \quad (8Г.2)$$

Ввиду того что

$$\sum_{k=0}^n \frac{C^k e^{-C}}{k!} = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{C^k e^{-C}}{k!} = 1 - \gamma,$$

следует приравнять  $a \equiv C$  и  $c \equiv n+1$ , а затем по таблице найти значение  $a$  из условия  $P(c, a) = \gamma$  (если необходимо, при помощи интерполирования).

В качестве примера примем  $\gamma=0,90$  и  $n=5$ . Тогда по табл. II Молина  $C=9,275$ . Можно также использовать рис. П.1—П.5; из них получим  $C$ , если вспомним, что



когда объем выборки  $N$  становится большим, а  $p$  — малым, так что  $Np \sim \lambda$ , биномиальное распределение приближается к распределению Пуассона. Чтобы определить  $C$  для рассматриваемого примера, следует использовать рис. П.3, где  $F=5$ , и считать значение абсциссы при  $N$  насколько возможно большим. В данном случае наибольшим будет  $N=1\ 000$ . Отсюда находим, что верхний доверительный предел для  $p$  при  $N=1\ 000$  приблизительно равен 0,0093. Так как  $\lambda \sim Np$ , то верхний доверительный предел для  $\lambda$  будет составлять приблизительно  $1\ 000 (0,0093) = 9,3$ , что очень хорошо согласуется со значением, полученным по табл. II Молина [4].

В общем, если, скажем,  $n > 5$ , то рис. П.1—П.5 уже можно не пользоваться.

Предположим теперь, что произведено  $K$  наблюдений с соответствующими числами событий  $n_1, n_2, \dots, n_K$ . Тогда непосредственным методом будет решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{\sum_{j=1}^K n_j} \frac{(KC)^k e^{-KC}}{k!} = 1 - \gamma, \quad (8Г.3)$$

поскольку известно, что

$$\sum_{j=1}^K n_j$$

обладает распределением Пуассона с параметром  $K\lambda$ . Возьмем данные из примера § 6.5. Имеем  $K=10$ ,  $\sum n_j = 30$ . Если принять  $\gamma=0,90$ , то для верхнего доверительного предела  $\lambda$  [4] дает  $C=3,83$ . Предположим теперь, что вместо этих данных взяты  $\sum n_j = 15$ ,  $K=5$ . Несмещенная оценка  $\lambda$  останется той же:  $\hat{\lambda}=3$ , однако верхний доверительный предел с доверительным уровнем 0,90 станет  $C=4,26$ ; это иллюстрирует тот вполне естественный факт, что при большем объеме выборки будет меньшая точность.

Если  $n_j=85$  или более, а доверительный уровень  $\gamma \geq 0,90$ , табл. II из [4] не может быть применена. Одна-

ко нетрудно показать, что правильный верхний доверительный предел  $\lambda$  дает формула

$$C = \frac{\chi^2_{2(f+1); 1-\gamma}}{2K}, \quad (8.Г.4)$$

где  $f = \sum n_j$ , так что можно применять табл. П.8.

Упражнение 1. Доказать равенство (8Г.4). Указание: см. 6.8.2 и (7.13). Применить это равенство к рассмотренным примерам.

Упражнение 2. Вывести следующую приближенную формулу для  $C$ :

$$C \approx \frac{f+1}{K} \left[ 1 + \frac{K_{1-\gamma}}{3\sqrt{f+1}} - \frac{1}{9(f+1)} \right]^3, \quad (8Г.5)$$

где  $K_{1-\gamma}$  обозначает нормальное уклонение, превышаемое с вероятностью  $1-\gamma$ . (Указание: см. стр. 262)

## ГЛАВА 9

# СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

### 9.1. ВВЕДЕНИЕ

Модели надежности, которые рассматриваются в этой главе, имеют целью установить связь между элементами системы и их влиянием на работу этой системы. Эта связь имеет два аспекта. Во-первых, следует рассмотреть выходную характеристику или качество отдельного элемента и, во-вторых, функциональную связь во множестве элементов, образующих в своей совокупности «структуру» системы.

Наблюдения над выходной характеристикой могут иметь качественный или количественный характер. В случае качественных данных в результате операции может быть лишь успех ( $S$ ) или неудача (отказ,  $F$ ). Количественные же данные можно использовать по-разному. Прежде всего, мы можем фиксировать, попадает ли выходной параметр в заданные пределы (например, в пределы допусков), и соответственно классифицировать испытание как успех или отказ, т. е. количественные данные в этом случае используются как качественные. При этом выход может характеризоваться одним параметром, определяющим надежность, или же несколькими параметрами, возможно функционально связанными, но такими, что ни один из них сам по себе нельзя отождествить с надежностью. В последнем случае событие «успех» формулируется как некоторое условие для совокупности параметров. Далее, можно собрать несколько наблюдений выходной характеристики и, минуя предварительную классификацию индивидуальных наблюдений на успехи и отказы, при помощи

*анализа переменных* определить вероятность нахождения выхода в заданных пределах (как и прежде, это могут быть пределы допусков). Наконец, может быть и такой случай, когда для каждого отдельного элемента нельзя указать *независимых* пределов, однако взаимодействие характеристик элементов образует выход системы, для которого имеет смысл говорить о допустимых пределах. Выход системы может иметь как качественную, так и количественную природу, в зависимости от этого его исследуют тем или иным способом.

Функциональная структура системы определяет закон взаимодействия характеристик элементов, согласно которому они функционируют определенным образом и в определенной последовательности. Система может быть построена таким образом, что для успешного ее функционирования требуется исправное действие всех элементов. В таком случае она называется *последовательной системой*. Есть такие системы, в которых при отказе любого элемента найдется другой элемент, способный выполнить его функции. Система с подобным свойством называется *параллельной*. Очень часто системы обладают свойствами как параллельных, так и последовательных. Нам необходимо исследовать действие системы, основываясь на ее функциональной структуре, путем рассмотрения вероятностных соотношений в случаях, когда характеристики элементов имеют количественный или качественный характер.

Важность исследования надежностной структуры состоит в том, что она позволяет выявлять фактические или потенциальные узкие места системы с точки зрения надежности. Еще важнее, что таким образом есть возможность выработать методику устранения подобных узких мест. Например, возможно подсчитать, сколько требуется резервных элементов для обеспечения заданного уровня надежности системы. Далее, можно оценить надежность системы, построенной из элементов с известной надежностью, или, наоборот, каким образом, исходя из требования к надежности системы, предъявить требования к надежности элементов. Из этого следует, каким образом распределить время и средства, идущие на разработку и построение системы. Из излагаемых методик можно видеть также, каким образом устанавливать допустимые пределы характеристик элементов, обеспе-

чивающие надежную работу системы, или переменные пределы в зависимости от возможностей соседних элементов.

Этот анализ часто называют анализом надежности, связанным с прочностью. Все эти исследования вносят существенный вклад в методики оценки надежности.

## 9.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим *систему*, состоящую из двух или более *подсистем*. Одна из самых простых моделей отказов строится следующим образом. Пусть  $S$  обозначает событие, состоящее в том, что система работает безотказно, а  $S_j, j=1, \dots, n, \dots$  — события, состоящие в исправной работе подсистем. Предположим, что  $S$  имеет место тогда и только тогда, когда имеют место все  $S_j$ , т. е. система исправна тогда и только тогда, когда исправны все подсистемы. В этом случае систему называют *последовательной*. Последнее соотношение можно выразить символом  $\cap$ , введенным в п. 5.2.1:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n, \quad (9.1)$$

откуда

$$P(S) = P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n), \quad (9.2)$$

с помощью соотношений п. 5.3.1 для условия вероятностей (9.2) можно переписать следующим образом:

$$P(S) = P(S_1/S_2 \cap \dots \cap S_n) P(S_2 \cap \dots \cap S_n) = \quad (9.3)$$

$$= P(S_1/S_2 \cap \dots \cap S_n) P(S_2/S_3 \cap \dots \cap S_n) P(S_3 \cap \dots \cap S_n) \quad (9.4)$$

и вообще

$$P(S) = \left[ \prod_{j=1}^{n-1} P(S_j/S_{j+1} \cap \dots \cap S_n) \right] P(S_n). \quad (9.5)$$

### 9.2.1. Независимые последовательные системы

Если предположить, что  $S_j$  *независимы в совокупности*, т. е. вероятность исправности  $j$ -й подсистемы будет одной и той же при любом сочетании событий, касающихся *других* подсистем, так что

$$P(S_j/S_{j+1} \cap \dots \cap S_n) = P(S_j), \quad j=1, 2, \dots, n-1,$$

формула (9.5) примет вид

$$P(S) = \prod_{j=1}^n P(S_j). \quad (9.6)$$

Обозначив

$$P(S) \equiv R; \quad P(S_j) \equiv R_j,$$

получим

$$R = \prod_{j=1}^n R_j, \quad (9.7)$$

где  $R$  обозначает надежность \*. Таким образом, надежность всей системы равна произведению надежностей подсистем. Это так называемое «правило умножения» для *независимых последовательных систем*.

Если условие независимости не выполняется, но система все же является последовательной, то любая из формул (9.2) — (9.5) определяет надежность. Заметим, что в (9.1) — (9.5) индексы можно переставлять местами. Например, при  $n=2$  выражение

$$P(S) = [P(S_1 | S_2)] P(S_2), \quad (9.8)$$

соответствующее (9.5), можно записать также в виде

$$P(S) = [P(S_2 | S_1)] P(S_1). \quad (9.9)$$

Упражнение 1. Показать, что если  $P(S_2/S_1) < P(S_2)$ , то  $P(S_1/S_2) < P(S_1)$ , а также  $P(F_2/F_1) < P(F_2)$ , где  $F_j \equiv \bar{S}_j$ .

Упражнение 2. Определим две случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  следующим образом.  $X_1 = 0$  (1), если подсистема 1 находится в исправном (неисправном) состоянии; аналогично  $X_2 = 0$  (1), если подсистема 2 исправна (неисправна). Определим  $P(X_1 = 1)$ , как  $p_1 \equiv 1 - R_1$ , и  $P(X_2 = 1)$ , как  $p_2 \equiv 1 - R_2$ . Пусть  $P(S_2/S_1) = \delta$ . Вычислить коэффициент корреляции  $(X_1, X_2)$ .

О т в е т.

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{R_1(\delta - R_2)}{\sqrt{R_1 R_2 (1 - R_1)(1 - R_2)}}. \quad (9.10)$$

\* От слова «reliability» (англ.). (Прим. перев.).

Предположим, что система — последовательная. Какой будет вид выражения для надежности системы  $R = P(X_1 = 0, X_2 = 0)^*$  через  $\rho$ ?

О т в е т.

$$R = R_1 R_2 + \rho \sqrt{R_1 R_2 (1 - R_1)(1 - R_2)}. \quad (9.11)$$

У п р а ж н е н и е 3. Доказать, что

$$R_1 R_2 - \frac{1}{4} \leq R \leq R_1 R_2 + \frac{1}{4}. \quad (9.12)$$

На основании этого показать, что последовательная система из двух подсистем не может иметь надежность большую, чем  $R_1 R_2 + \frac{1}{4}$ , и что для достижения этого предела необходимо, чтобы  $R_1 \equiv R_2 = 0,5$ .

П р и м е р. Покажем, что

$$\min(R_1, R_2) \leq R_1 R_2 + \frac{1}{4}. \quad (9.13)$$

Пусть  $R_1 = \min(R_1, R_2)$ , т. е.  $R_1 \leq R_2$ . Нам нужно показать, что  $R_1 \leq R_1 R_2 + \frac{1}{4}$ , или, что то же,

$$R_1(1 - R_2) \leq \frac{1}{4}. \quad (9.14)$$

Но для *любого*  $R_2$  ( $0 \leq R_2 \leq 1$ ).

$$R_2(1 - R_2) \leq \frac{1}{4}. \quad (9.15)$$

Поскольку  $R_1 \leq R_2$ , левая часть (9.15) не увеличится, если мы заменим первый множитель  $R_2$  величиной  $R_1$ , а это и доказывает (9.14).

У п р а ж н е н и е 4. Доказать, что надежность последовательной системы, состоящей из двух подсистем, не больше, чем минимум надежностей подсистем.

У к а з а н и е. Выше было показано, что  $R = \delta R_1$ . Максимум  $\delta R_1$  достигается тогда, когда  $\delta$  равно своему максимальному значению, т. е. 1. Но ввиду того, что  $P(X_1 = 0 | X_2 = 0) = \delta R_1 / R_2 \leq 1$ , из  $\delta = 1$  следует неравенство  $R_1 \leq R_2$ . Таким образом,  $R_1 = \min(R_1, R_2)$ , а стало быть,  $R \leq \min(R_1, R_2)$ .

У п р а ж н е н и е 5. Используя соотношение

$$S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \subset S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

показать, что надежность любой последовательной системы не больше, чем минимальное значение надежностей ее подсистем.

\* Вместо знака  $\cap$  использована заятая (см. § 5.4).

В § 9.3 будет рассмотрена модель «слабейшего звена», представляющая собой частный случай *зависимой последовательной системы*. В этой модели достигается максимально возможное значение надежности, т. е. надежность системы равна минимуму надежностей подсистем.

#### 9.2.1.1. ПРИМЕР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Лучшим примером последовательной системы служит многоступенчатый снаряд. Это группы подсистем или элементов, одни из которых работают совместно, другие — последовательно во времени, но важно то, что для успешного пуска необходимо, чтобы каждая операция была произведена без отказа. Так, прежде всего должна сработать первая ступень, затем должна произойти расцепка, воспламенение и горение в двигателе второй ступени и т. д. В данном случае все эти операции последовательные во времени; однако понятие последовательной системы не следует связывать с временным чередованием событий. Например, первая ступень сама по себе представляет последовательную систему. Так, если она состоит из нескольких формирующих двигателей, то каждый из них должен работать безотказно; это относится и к подсистемам, осуществляющим управление и контроль.

Вообще, если снаряд «расчленишь» на ограниченное число основных подсистем, которые можно предположить статистически независимыми, то надежность этого снаряда будет равна произведению надежностей основных подсистем.

#### 9.2.2. Нижние доверительные пределы для надежности независимых последовательных систем

Задача определения нижних доверительных пределов надежности  $R$  независимых последовательных систем равносильна задаче определения верхних доверительных пределов вероятности отказа  $p$  (ненадежности), решение которой дано в § 8.1. Имея в виду содержание приложения 8А, дадим следующую формулировку интересующей нас задачи:

на основании результатов испытаний подсистем, выражающихся числами отказов  $f_1$  в  $N_j$  испытаниях для  $j$ -й



подсистемы ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), найти такое множество чисел  $C_{N_1, \dots, N_k}(f_1, \dots, f_k; \gamma)$  что

$$P[p \leq C_{N_1, \dots, N_k}(f_1, \dots, f_k; \gamma)] \geq \gamma, \quad (9.16)$$

где  $p$  — истинная, неизвестная вероятность отказа системы;  $\gamma$  — доверительный уровень вывода о том, что  $C$  — верхний доверительный предел для  $p$ . В том случае, когда мы имеем дело с *независимой последовательной* системой, (9.16) принимает вид

$$P\left[1 - \prod_{j=1}^k (1 - p_j) \leq C_{N_1 \dots N_k}(f_1, \dots, f_k; \gamma)\right] \geq \gamma, \quad (9.17)$$

где  $p_j$  — истинное, но неизвестное значение ненадежности  $j$ -й подсистемы.

Один из методов построения  $C^*_{N_1 \dots N_k}(f_1, \dots, f_k; \gamma)$  с условием (9.17) дается формулой

$$C^*_{N_1 \dots N_k}(f_1, \dots, f_k; \gamma) = 1 - \prod_{j=1}^k [1 - C_{N_j}(f_j; \gamma_j)], \quad (9.18)$$

где

$$\prod_{j=1}^k \gamma_j = \gamma \quad (9.19)$$

и число  $C_{N_j}(f_j; \gamma_j)$  представляет верхний доверительный предел для  $\gamma_j$ -й подсистемы с доверительным уровнем  $\geq \gamma_j$ , определенный, например, по методам приложений 8А, 8Б или 8В (гл. 8) или по какому-нибудь иному методу. Чтобы показать, что  $C^*$  формул (9.18) и (9.19) действительно удовлетворяет (9.17), очевидно, нужно установить неравенства вида

$$P\left\{\prod_{j=1}^k (1 - p_j) \geq \prod_{j=1}^k [1 - C_{N_j}(f_j; \gamma_j)]\right\} \geq \prod_{j=1}^k \gamma_j. \quad (9.20)$$

Событие  $\prod_j \{1 - p_j \geq 1 - C_{N_j}(f_j; \gamma_j)\}$  включается в событие

$$\left\{\prod_{j=1}^k (1 - p_j) \geq \prod_{j=1}^k [(1 - C_{N_j}(f_j; \gamma_j))]\right\}.$$

(При  $k=2$  это утверждение равносильно следующему: из  $1-p_1 \geq 1-C_1$  и  $1-p_2 \geq 1-C_2$  следует, что  $(1-p_1)(1-p_2) \geq (1-C_1)(1-C_2)$ , но обратное не всегда верно.) Таким образом, вероятность первого события не превосходит вероятности второго. Следовательно,

$$P\left\{\bigcap_j [1-p_j \geq 1-C_{N_j}(f_j; \gamma_j)]\right\} \leq \\ \leq P\left\{\prod_{j=1}^k (1-p_j) \geq \prod_{j=1}^k [1-C_{N_j}(f_j; \gamma_j)]\right\}. \quad (9.21)$$

Далее, предполагается, что испытания различных подсистем имеют независимые исходы; следовательно, вероятность сложного события [левая часть (9.21)] равна произведению вероятностей отдельных событий:

$$P\left\{\bigcap_j [1-p_j \geq 1-C_{N_j}(f_j; \gamma_j)]\right\} = \\ = \prod_{j=1}^k P[1-p_j \geq 1-C_{N_j}(f_j; \gamma_j)]. \quad (9.22)$$

Но правая часть (9.22) не меньше величины

$$\prod_{j=1}^k \gamma_j,$$

а тогда из (9.21) следует требуемое неравенство (9.20).

Пример. Пусть  $k=2$ ,  $\gamma=0,90$ ,  $N_1=50$ ,  $f_1=2$ ,  $N_2=100$ ,  $f_2=3$  ( $N_1$  и  $N_2$  фиксированы до испытаний). Тогда

$$C_{50,100}^*(2,3; 0,90) = 1 - [1 - C_{50}(2; \gamma_1)] [1 - C_{100}(3; \gamma_2)],$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — положительные числа, такие, что  $\gamma_1\gamma_2=0,90$ . Таким образом,  $\gamma_1 = \gamma_2 = (0,90)^{1/2} = 0,9487$  будет удовлетворять этому требованию. Из рис. П.3 и П.4 (при помощи интерполирования) или из [1] находим

$$C_{50}(2; 0,9487) = 0,1200,$$

$$C_{100}(3; 0,9487) = 0,0761,$$

откуда

$$C_{50,100}^*(2,3; 0,90) = 0,188$$

и нижний доверительный предел надежности системы с доверительным уровнем  $0,90$  оказывается равным  $0,813$ . Заметим, что выбор  $\gamma_1 = \gamma_2$  в некоторой степени произволен. Возможно, что при другом выборе  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  с соблюдением условия  $\gamma_1\gamma_2=0,90$  можно достичь меньшего значения  $C^*$ .

Предлагаем читателю рассмотреть случай  $\gamma_1 = 1,0$ ,  $\gamma_2 = 0,90$  и наоборот.

**У п р а ж н е н и е.** Независимая последовательная система состоит из двух подсистем типа А и двух подсистем типа Б. Подсистемы типа А обладают одинаковой надежностью; то же относится и к подсистемам типа Б. Подсистема типа А испытывалась 50 раз, причем было 2 отказа, Б—100 раз и было 3 отказа. Чему равен нижний 90%-ный доверительный предел надежности системы?

О т в е т.

$$\hat{R}_L = (0,813)^2 = 0,66.$$

### 9.2.3. Другой, более предпочтительный метод вычисления доверительных пределов для последовательной системы

Изложенный выше метод является общим в том смысле, что его можно применять в случае различных объемов выборок для подсистем и доверительных пределов подсистем, основанных на разнородной информации: например, при биномиальных испытаниях может фиксироваться количество испытаний или общее количество отказов. Однако нижние доверительные пределы надежности, получаемые по этому методу, можно значительно уточнить при помощи иного метода, разработанного Бьюлером [2] и Стеком [3]. Подробное доказательство того, что этот метод дает лучшие доверительные пределы, очень сложно, и мы его приводить не будем; однако Линдстром и Мадден нашли простой метод, который, как показали авторы, дает почти такие же доверительные пределы, что и методы [2, 3], в том случае, когда все  $N_j$  равны \*. Метод состоит в следующем.

Вычислим

$$\hat{R} = \prod_{j=1}^k \frac{N - f_j}{N}. \quad (9.23)$$

Тогда  $\hat{R}$  будет точечной оценкой надежности независимой последовательной системы. Величина  $N(1 - \hat{R})$  бу-

\*Авторы произвели численное сравнение только при  $k=2,3$  ввиду большой трудоемкости вычисления доверительных пределов по методу [2, 3]. Однако есть основания считать, что приводимый простой метод будет давать правильные доверительные пределы также при больших  $k$  и неравных  $N_j$ , но для получения доверительного уровня требуется довольно большой объем вычислений с помощью метода Монте-Карло.

дет представлять число отказов системы  $F$  в  $N$  испытаниях. Тогда по рис. П.1—П.5 определим нижний доверительный предел, соответствующий произвольно выбранному доверительному уровню  $\gamma$ . Величина  $N(1 - \hat{R})$  не обязательно будет целым числом; однако требуемый результат можно достичь интерполированием.

В том случае, когда  $N_j$  не равны, вычисляем

$$\hat{R} = \prod_{j=1}^k \frac{N_j - f_j}{N_j} \quad (9.24)$$

и значение  $N_m(1 - \hat{R})$ , где  $N_m$ —минимальное из  $N_j$ . Число  $N_m(1 - \hat{R})$  рассматривается как число отказов системы в  $N_m$  испытаниях. Далее нижний доверительный предел определяется так же, как и выше.

*Пример.* Пусть  $N_1 = N_2 = 100$ ,  $f_1 = 2$ ,  $f_2 = 3$ . Тогда  $\hat{R} = (0,98)(0,97) = 0,9506$ .

Имеем  $F = 4,94$  и по рис. П.3 находим для 90%-ного нижнего доверительного предела (с  $N = 100$ ,  $F = 4,94$ ) значение  $1 - 0,090 = 0,910$ . Если  $N_1 = 50$  вместо 100, тогда  $\hat{R} = (0,96) \cdot (0,97) = 0,9312$  и мы получаем  $F = 50(1 - 0,9312) = 3,44$ .

Таким образом, по рис. П.3 находим, что нижний 90%-ный доверительный предел (с  $N = 50$ ,  $F = 3,44$ ) равен  $1 - 0,140 = 0,860$  (вспомним, что предыдущий метод дал для этой величины значение 0,813).

То, что упрощенный метод позволяет находить правительные доверительные пределы надежности системы, интуитивно подтверждается следующими рассуждениями. Положим  $k=2$  (можно рассмотреть любое значение  $k$ ). Сначала допустим, что  $N_1 = N_2 = N$ . Две подсистемы испытывают автономно, причем наблюдаемые числа отказов равны  $f_1$  и  $f_2$ . Тогда результаты  $N$  испытаний ( $f_1$  отказов и  $N - f_1$  успехов) одной подсистемы можно сопоставить с  $N$  результатами для другой подсистемы ( $f_2$  отказов,  $N - f_2$  успехов); при этом можно образовать множество  $N$  пар, каждая из которых будет представлять результат «испытания системы». Описанное спаривание можно осуществить путем случайного выбора результатов испытаний. Легко сообразить, что величина  $N(1 - \hat{R})$  будет *математическим ожиданием* числа пар, в которых произошел отказ хотя бы в одном случае. Это

число (не обязательно целое) затем интерпретируется так, как если бы это было наблюдаемое число отказов последовательной системы в  $N$  испытаниях.

Если для определенности  $N_1 < N_2$ , то метод предполагает, что в качестве эквивалентного числа испытаний системы выбирается  $N_1$ . Это естественно, поскольку при помощи спаривания можно образовать лишь  $N_1$  различных пар. Снова  $N_1(1 - \hat{R})$  представляет математическое ожидание числа отказов системы.

Пусть, например,  $k=2$ ,  $N_1=2$ ,  $N_2=3$ ,  $f_1=1$ ,  $f_2=2$ , т. е. имеется две различные подсистемы  $A$  и  $B$ , причем  $A$  испытывалась 2 раза и получен один отказ, а  $B$  — 3 раза и было 2 отказа. Перенумеруем испытания подсистем  $A$ :  $A_1, A_2$ , и подсистем  $B$ :  $B_1, B_2, B_3$ . Ниже представлены возможные множества испытаний системы

$$\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1B_2 \\ A_2B_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1B_3 \\ A_2B_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1B_2 \\ A_2B_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_1B_3 \\ A_2B_2 \end{pmatrix}$$

Так,

$$\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{pmatrix}$$

представляет два испытания системы, первое из которых состоит из первого испытания  $A$  в сочетании с первым испытанием  $B$ . Второе испытание системы состоит из второго испытания  $A$  в сочетании со вторым испытанием  $B$ ; подобным же образом определены и остальные пять множеств испытаний системы.

Теперь договоримся, что  $A_1$  — отказ и  $B_1, B_2$  — также отказы. Тогда получается следующая сводка результатов:

$$\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} FF \\ SF \end{pmatrix} \equiv 2 \text{ отказам системы,}$$

$$\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} FF \\ SS \end{pmatrix} \equiv 1 \text{ отказу системы,}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 B_2 \\ A_2 B_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} FF \\ SS \end{pmatrix} \equiv 1 \text{ отказу системы,}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 B_2 \\ A_2 B_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} FF \\ SF \end{pmatrix} \equiv 2 \text{ отказам системы,}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 B_3 \\ A_2 B_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} FS \\ SF \end{pmatrix} \equiv 2 \text{ отказам системы,}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 B_3 \\ A_2 B_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} FS \\ SF \end{pmatrix} \equiv 2 \text{ отказам системы.}$$

Математическое ожидание числа отказов системы в двух испытаниях равно

$$F = \frac{2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2}{6} = \frac{10}{6},$$

т. е.  $1 \frac{2}{3}$  отказов в двух испытаниях системы. Но это можно получить и непосредственно по формуле

$$\hat{R} = \left(\frac{2-1}{2}\right) \left(\frac{3-2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6},$$

откуда

$$F = N_m (1 - \hat{R}) = 2 \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 2 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{10}{6}.$$

Упражнение 1. Как определить  $N_m$  в том случае, когда в системе имеется несколько идентичных подсистем? Проверить полученный результат на системе с надежностью вида  $R = R_1^2$ .

Упражнение 2. Используя приближение нормальным распределением, вывести формулу для доверительных пределов надежности независимой последовательной системы, основанных на однотипных испытаниях рассматриваемого вида.

Часть ответа.

$$\hat{R} = \prod_{j=1}^k \frac{S_j}{N_j},$$

где  $S_j$  — число успехов в  $N_j$  испытаниях  $j$ -й подсистемы ( $S_j = N_j - f_j$ , где  $f_j$  — число отказов);

$$\text{var } \hat{R} = \prod_{j=1}^k R_j^2 \left[ \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1-R_j}{N_j R_j}\right) - 1 \right],$$

где

$$R_j = E \left( \frac{S_j}{N_j} \right).$$

Применить метод п. 7.4.4. Использовать полученную формулу для определения 90%-ного нижнего доверительного предела  $R$  при  $k = 2$ ,  $N_1 = 50$ ,  $f_1 = 2$ ,  $N_2 = 100$ ,  $f_2 = 3$ .

О т в е т.  $\hat{R}_L = 0,891$ .

На рис. П.6—П.11 показаны нижние доверительные уровни для надежности независимых последовательных систем, состоящих из двух и трех подсистем

$$N_1 = N_2 (= N_3) = N, \text{ где } 5 \leq N \leq 40;$$

доверительный уровень  $\gamma = 0,50; 0,90; 0,95$ ; при различных сочетаниях наблюдаемых отказов ( $F_1, F_2$ ) или ( $F_1, F_2, F_3$ ). Численные значения получены по методам [2 и 3] и заимствованы из [4].

### 9.3. МОДЕЛЬ «СЛАБЕЙШЕГО ЗВЕНА»

Данная модель является примером последовательной системы, для которой надежность системы равна наибольшему значению, достижимому в случае последовательных систем, а именно минимуму надежностей подсистем (§ 9.2).

В случае последовательных систем можно записать соотношение

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n, \quad (9.25)$$

которое получается из (9.1) при помощи применения операции дополнения (п. 5.2.1) к обеим частям этой формулы: отказ системы наступает тогда и только тогда, когда отказывает одна или большее число подсистем. Дополнительное предположение, которое мы примем, будет состоять в том, что, когда отказывает система, отказывает и некоторая «отмеченная» подсистема, скажем первая.

Тогда наше предположение можно выразить формулой

$$F \subset F_1. \quad (9.26)$$

Но поскольку  $F_1 \subset F$ , то события  $F$  и  $F_1$  эквивалентны и имеют одну и ту же вероятность, т. е.

$$P(F) = P(F_1). \quad (9.27)$$

Поскольку любое из  $F_j$  приводит к  $F$ , имеем также

$$F_1 \supset F_j, \quad j = 2, \dots, n, \quad (9.28)$$

а следовательно,

$$P(F_1) \geq P(F_j), \quad j = 2, \dots, n. \quad (9.29)$$

Окончательно

$$P(F) = P(F_1) = \max P(F_j) \quad (9.30)$$

или

$$R = R_1 = \max R_j. \quad (9.31)$$

Результат, выраженный формулой (9.30) или (9.31), не зависит от того, какая подсистема «отмечена». Очевидно, эта система должна быть зависимой, поскольку вероятность отказа отмеченной подсистемы при условии, что отказала любая другая подсистема, равна 1. Если вместо «отмеченной подсистемы» говорить о «слабейшем звене», то мы видим, что механизм отказов нашей модели обладает свойствами механизма отказов цепи. Цепь состоит из звеньев, одно (или несколько) из которых является «слабейшим», т. е. его (их) «прочность» минимальна. Если напряжение превышает прочность одного или нескольких звеньев, цепь разрывается. При разрыве цепи всегда оказывается разорванным звено; с другой стороны, разрыв любого звена ведет к разрыву цепи. Таким образом, цепь представляет более конкретный физический пример, где осуществляется рассмотренная модель. Дальнейшие свойства модели цепи будут рассмотрены в п. 9.3.1.

Рассмотрим пример модели слабейшего звена. Исходя из общей причины отказа цепи, т. е. из того, что одно из звеньев не выдерживает *внешнего* напряжения, можно поискать примеры, связанные с надежностью, в которых также наблюдается подобное обстоятельство.

Со спутника на орбите могут вестись наблюдения, измерения и передача информации, которую специалисты группировки, противостоящей той, которая его за-



пустыла, могут квалифицировать как «нежелательную».

Один из методов выведения из строя спутника — производство взрыва, т. е. мгновенное образование теплого потока в области его нахождения; вследствие этого разрушаются некоторые виды аппаратуры, необходимой для наблюдений, измерений и передачи информации. Если взрыв произойдет близко, то, вероятно, вся аппаратура будет разрушена; если он слишком удален для того, чтобы большая часть аппаратуры вышла из строя, то отказывает лишь наиболее уязвимая, или «слабейшая», аппаратура. Здесь наблюдается аналогия с внешней силой, превосходящей минимальную прочность различных существенных компонент.

Внутренние проявления отказов, такие, как начальные, случайные и поздние, рассмотренные в § 6.7, носят иной характер, чем в данном случае (конечно, при условии, что система остается работоспособной, пока внешнее воздействие не достигнет критического уровня). Вообще, если работа системы происходит при жестких внешних условиях, помимо модели внутренних отказов следует рассмотреть модель слабейшего звена.

### 9.3.1. Модель цепи

Модель цепи, которая будет здесь рассмотрена, представляет собой частный случай модели слабейшего звена § 9.3. Предположим, что «цепь» состоит из одинаковых «звеньев», т. е. разрывное усилие всех звеньев подчинено *фиксированному распределению вероятностей*. Цепь разрывается, отказывает, коль скоро отказывает слабейшее звено. Однако последнее событие зависит только от разброса разрывных усилий, обусловленного упомянутым распределением, т. е. от вероятности того, что слабейшее звено будет обладать прочностью, меньшей, чем приложенное усилие; эту вероятность можно вычислить.

Аналогично предполагается, что усилие, приложенное к звену, обладает некоторым распределением вероятностей. Вероятность того, что звено не разорвется, будет тогда равна вероятности того, что прочность превосходит приложенное усилие.

Если звенья собраны в цепь, то усилие, приложенное ко всей цепи, будет также приложено к каждому из

звеньев (можно представить себе невесомую цепь с подвешенным к ней грузом).

Рассматриваемая модель не ограничивается примером реальной или идеальной цепи. Представим себе вычислительную машину, содержащую много тысяч электронных ламп. Если к этой машине приложено сильное ударное воздействие, то одна (или большее число) лампа может отказать. Несмотря на то что номинальное сопротивление всех ламп ударному воздействию одно и то же, действительное сопротивление будет переменным благодаря случайным колебаниям, присущим материалу и производственному процессу.

Ниже эта модель будет рассмотрена более подробно. Прежде всего определяется надежность  $R_l$  отдельного звена. На основании предположения о том, что надежность цепи равна надежности ее слабейшего звена, определяется надежность  $R_n$   $n$ -звенной цепи. Затем будет показано, что надежность цепи находится между двумя пределами:  $n$ -й степенью надежности звена и ее первой степенью. Будет ли равна надежность системы одному из этих пределов или какому-нибудь промежуточному числу, зависит от вида распределений прочности и усилия.

Рассмотрим сначала «звено», существенной характеристикой которого является «разрывное усилие». Это число, сопоставленное звену так, что коль скоро приложено усилие, большее или равное этому числу, происходит отказ звена. Предположим, что «разрывное усилие» или «прочность» звена задается лишь посредством распределения вероятностей. Будем считать, что совокупность прочностей звеньев обладает плотностью  $f(x)$  и соответствующей (непрерывной) функцией распределения  $F(x)$ , так что

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \quad (9.32)$$

представляет вероятность нахождения прочности звена между  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Данное выражение можно интерпретировать обычным способом, рассмотрев бесконечную совокупность звеньев, тогда  $F(b) - F(a)$  будет долей таких звеньев, прочность которых лежит между  $a$  и  $b$ . Подобным же образом представим себе, что усилие

определено посредством плотности  $g(y)$  и (непрерывной) функции распределения  $G(y)$ , так что

$$G(d) - G(c) = \int_c^d g(y) dy \quad (9.33)$$

равно вероятности нахождения усилия между  $c$  и  $d$  ( $d > c$ ). Удобно ввести положительные случайные величины  $X \equiv$  прочности звена и  $Y \equiv$  примененному усилию. Тогда

$$P(X \leq x) = F(x)$$

и

$$P(Y \leq y) = G(y). \quad (9.34)$$

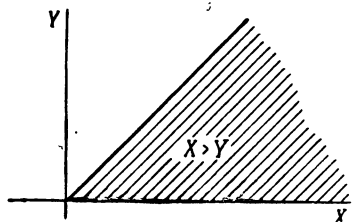


Рис. 9.1.

Будем считать, что  $X$  и  $Y$  — независимые случайные величины, определенные на одном и том же выборочном пространстве. Надежность

звена определяется как вероятность того, что звено не разорвется, т. е. вероятность того, что прочность звена больше приложенного усилия, или в символах

$$R_l = P(X > Y). \quad (9.35)$$

Далее, величину  $P(X > Y)$  можно записать в виде интеграла от совместной плотности вероятности  $f(x)g(y)$  по области, показанной на рис. 9.1 штриховкой. Таким образом,

$$R_l \equiv P(X > Y) = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} f(x) g(y) dx dy$$

или

$$R_l = \int_0^{\infty} g(y) [1 - F(y)] dy. \quad (9.36)$$

Очевидно, последнее выражение можно также записать следующим образом:

$$P(X > Y) = \int_0^{\infty} \int_0^x f(x) g(y) dy dx = \int_0^{\infty} f(x) G(x) dx. \quad (9.37)$$

### 9.3.2. Прочность цепи

Теперь представим себе процесс образования «цепи» из  $n$  «звеньев», которые выбраны из совокупности с плотностью распределения прочности  $f(x)$ . Это то же самое, что взять случайную выборку  $X_1, \dots, X_n$  прочностей звеньев из совокупности с плотностью вероятности  $f(x)$ . Прочность цепи равна прочности самого слабого звена, т. е. прочность  $Y_n$   $n$ -звенной цепи есть минимум из  $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$ .

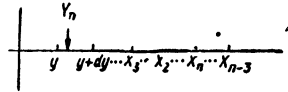


Рис. 9.2.

Задача состоит в том, чтобы выразить распределение вероятностей  $Y_n$  через  $f(x)$ .

Пусть  $f_n(y)$  — плотность вероятности  $Y_n$ , и пусть, для определенности,  $Y_n = X_1$ , т. е.  $X_1$  — минимальное из  $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Представив  $X_i$  как точки оси  $x$ , попадающие в непересекающиеся интервалы или ячейки, мы можем с помощью мультиномиального распределения (§ 6.3) вычислить вероятность попадания  $X_1$  в интервал  $(y, y + dy)$ , а  $X_2, \dots, X_n$  — в область, лежащую справа от  $y$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} P(y < Y_n < y + dy) &= f_n(y) dy = \\ &= \frac{n!}{n!(n-1)!} f(y) dy [1 - F(y)]^{n-1}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

а стало быть,

$$f_n(y) = n [1 - F(y)]^{n-1} f(y). \quad (9.39)$$

Таким образом, функция распределения прочности  $n$ -звенной цепи будет равна

$$\begin{aligned} F_n(y) &= \int_0^y f_n(t) dt = \\ &= \int_0^y n [1 - F(t)]^{n-1} f(t) dt = n \int_0^{F(y)} (1 - u)^{n-1} du \end{aligned} \quad (9.40)$$

$$(9.41)$$

(последнее выражение получено путем замены переменной

$$u = F(t), \quad du = F'(t) dt = f(t) dt).$$

Таким образом,

$$F_n(y) = [- (1 - u)^n]_0^{F(y)} = 1 - [1 - F(y)]^n. \quad (9.42)$$

Следовательно, для любого значения усилия  $Y$ , обладающего плотностью вероятности  $g(y)$ , вероятность того, что прочность  $Y_n$  превысит усилие  $Y$ , приложенное к цепи, на основании (9.36) будет составлять

$$R_n = P(Y_n > Y) = \int_0^{\infty} g(x) [1 - F_n(x)] dx \quad (9.43)$$

или, учитывая (9.42),

$$R_n = \int_0^{\infty} g(x) [1 - F(x)]^n dx. \quad (9.44)$$

Таким образом, надежность  $n$ -звенной цепи равна  $R_n$ .

### 9.3.2.1. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $R_n$

Покажем теперь, что надежность  $n$ -звенной цепи не меньше, чем надежность отдельного звена, возведенная в  $n$ -ю степень, т. е.  $R_1^n$ .

Для большей ясности будем писать не  $R_i$ , а  $R_1$ ; это в самом деле так, поскольку при  $n=1$  (9.44) надежность одного звена принимает вид (9.36). Таким образом, нужно показать, что

$$R_n \geq R_1^n. \quad (9.45)$$

Рассмотрим выражение

$$H(u, v) = \int_0^{\infty} \{u [1 - F(x)]^{(v-1)/2} + \\ + v [1 - F(x)]^{(v+1)/2}\}^2 g(x) dx, \quad (9.46)$$

которое, очевидно, неотрицательно; в этом выражении  $u$  и  $v$  — параметры, не зависящие от переменной интегрирования,  $v$  — натуральное число.

Если раскроем квадрат суммы, стоящей в фигурных скобках, получим

$$H(u, v) = u^2 R_{v-1} + 2uvR_v + v^2 R_{v+1} \geq 0. \quad (9.47)$$

Из теории квадратичных форм известно, что

$$R_{v-1} R_{v+1} \geq R_v^2, \quad (9.48)$$

откуда

$$R_0 R_2 \geq R_1^2 \quad (9.49)$$

или, поскольку  $R_0 \equiv 1$  [это следует из (9.44), если потребовать, чтобы эта формула выполнялась и при  $n=0$ ],

$$R_2 \geq R_1^2. \quad (9.50)$$

Таким образом, требуемое неравенство справедливо при  $n=2$ . *Предположим* теперь, что (9.45) справедливо при некотором  $n$ , и покажем, что

$$R_{n+1} \geq R_1^{n+1}. \quad (9.51)$$

Это даст возможность сделать вывод, что

$$R_2 \geq R_1^2 \Rightarrow R_3 \geq R_1^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow R_m \geq R_1^m \Rightarrow \dots,$$

т. е. (9.45) будет установлено для любого  $n$ . Это обычный метод математической индукции.

Положим в (9.48)  $v=1, 2, \dots, n$ . Тогда получим неравенства:

$$\begin{array}{ll} R_1^2 \leq R_2 & v=1 \\ R_2^2 \leq R_1 R_3 & v=2 \\ R_3^2 \leq R_2 R_4 & v=3 \\ \vdots & \vdots \\ R_n^2 \leq R_{n-1} R_{n+1} & v=n. \end{array} \quad (9.52)$$

Почленно перемножив эти неравенства, получим

$$R_1^2 R_2^2 \dots R_n^2 \leq R_1 R_2^2 R_3^2 R_4^2 \dots R_{n-1}^2 R_n R_{n+1} \quad (9.53)$$

или

$$R_1 R_n \leq R_{n+1}. \quad (9.54)$$

Так как по предположению справедливо (9.45), мы будем иметь

$$R_1 (R_1^n) \leq R_1 R_n \leq R_{n+1} \quad (9.55)$$

или

$$R_1^{n+1} \leq R_{n+1}. \quad (9.56)$$

По индукции (9.45) справедливо при любых  $n$ .

Легко видеть, что верхний предел  $R_n$  равен  $R_1$ , поскольку подынтегральное выражение  $[1-F(\cdot)]g(\cdot)$  в интеграле (9.36) всегда больше или равно подынтегральному выражению (9.44), а именно  $[1-F(\cdot)]^n g(\cdot)$ . Таким образом,

$$R_1^n \leq R_n \leq R_1. \quad (9.57)$$

### 9.3.2.2. ДОСТИЖЕНИЕ ВЕРХНЕГО И НИЖНЕГО ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ $R_n$

Верхнее и нижнее предельные значения  $R_n$ , задаваемые формулой (9.57), достигаются при выполнении следующих свойств цепи:

1. **Верхний предел**  $R_n = R_1$ . Пусть звенья обладают одинаковой прочностью, т. е.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < s, \\ 1, & x \geq s \end{cases} \quad (9.58)$$

имеет место тогда, когда стандартное отклонение прочности звеньев равно нулю, так что вся вероятность сосредоточена в точке  $x=s$ . В этом случае (9.44) дает

$$R_n = \int_0^s g(x) dx = G(s). \quad (9.59)$$

Это выражение представляет вероятность того, что усилие не превзойдет уровня  $s$ . Поскольку первая часть

(9.59) не зависит от  $n$ , надежность  $n$ -звенной цепи, очевидно, равна надежности каждого из (одинаково прочных) звеньев\*.

2. **Нижний предел**  $R_n = R_1^n$ . Чтобы получить это предельное значение  $R_n$ , проинтегрируем (9.44) по частям:

$$R_n = n \int_0^{\infty} G(x) [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx. \quad (9.60)$$

Предположим теперь, что распределение усилия  $G(x)$  сосредоточено в одной точке  $x=s$ .

В этом случае

$$R_n = n \int_s^{\infty} [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx \quad (9.61)$$

или

$$R_n = [1 - F(s)]^n. \quad (9.62)$$

Так как в случае, когда усилие может принимать лишь одно значение, вероятность того, что прочность отдельного звена больше приложенного усилия, будет равна  $1 - F(s)$ , надежность цепи будет равна  $n$ -й степени надежности звена\*\*.

### 9.3.3. Исследование прочности

Примем предположение, что  $f(x)$  и  $g(x)$  являются нормальными плотностями вероятности с математическими ожиданиями  $m_1$ ,  $m_2$  и стандартными отклонениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Коль скоро  $m_1$  и  $m_2$  велики по отношению к  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то можно теоретически допустить отрицательные значения прочностей и усилий: все равно они будут иметь пренебрежимо малые вероятности. Случайная величина  $\xi =$

\* Для равенства  $R_n = R_1$  не обязательно, чтобы  $F(x)$  имела вид (9.58). Важно лишь то, чтобы функция случайной величины  $Y$  вида  $P\{Y_n < Y\} P\{Y_n > Y\}$  была с вероятностью 1 равна 0. (Прим. перев.)

\*\* Этот предел достигается также в более общем случае, когда функция  $P\{Y_n < Y\} P\{Y_n > Y\}$  случайной величиной  $Y_n$  с вероятностью 1 равна 0. (Прим. перев.)



$= X - Y$  также будет нормально-распределенной со средним  $m_1 - m_2$  и стандартным отклонением  $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}$ . Нам нужно найти

$$P(X > Y) = P(\xi > 0).$$

Имеем

$$R_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{(t - m_1 + m_2)^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right\} \right] dt. \quad (9.63)$$

После замены переменной находим

$$R_l = \Phi \left( \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right), \quad (9.64)$$

где  $\Phi$  — нормированная нормальная функция распределения (§ 6.10).

Если  $m_1$  больше  $m_2$  и разность между ними неограниченно возрастает, а  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  остаются фиксированными, то  $\Phi \rightarrow 1$ ; это соответствует той физической картине, когда при средней прочности, большей по сравнению со средним усилием, надежность звена будет высокой. Данная ситуация показана на рис. 9.3. Чтобы вычислить надежность 2-, 3-, ...  $n$ -звенной цепи при нормальных плотностях  $f(x)$  и  $g(x)$ , тре-

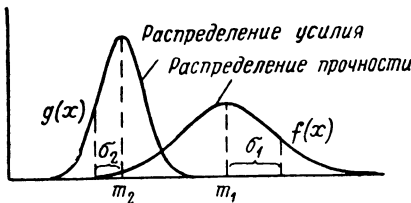


Рис. 9.3.

буется применение численного интегрирования.

Следующие упражнения связаны с задачей вычисления надежности звена и иллюстрируют некоторые практические аспекты модели прочности.

**Пример.** Произведено  $n$  испытаний на срабатывание твердо-топливного ракетного двигателя (ТРД), в каждом из которых замерялось максимальное значение давления в камере сгорания. Разрывное давление для камер ракет, как известно, подчиняется нормальному закону со средним  $m_1$  и стандартным отклонением  $\sigma_1$ .

Найдем оценку и нижний доверительный предел вероятности того, что двигатель не взорвется, предположив следующее: максимальное давление в камере сгорания распределено по нормальному закону.

Пусть  $X$ ,  $Y$  — случайные величины, обозначающие соответственно разрывное давление и максимальное давление в камере. Нам необходимо получить оценку  $R_l$ , заданной в виде (9.64). Относительно распределения  $X$  известно, что оно  $(m_1, \sigma_1)$  нормально; параметры  $(m_2, \sigma_2)$  нормального распределения  $Y$  не известны, и их нужно оценить. Оценка  $R_l$  получится, когда мы подставим выборочные среднее  $\bar{y}$  и дисперсию  $s^2$ , найденные по наблюдаемым значениям максимального давления в (9.64):

$$\hat{R}_l = \Phi \left( \frac{m_1 - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2 + s^2}} \right).$$

Чтобы найти нижний доверительный предел для  $R_l$ , сначала вычислим дисперсию  $\hat{R}_l$  приближенным методом (см. § 8.4). Заметим, что  $\bar{y}$  и  $s^2$  независимы, а стало быть, *некоррелированы*:

$$\text{var } \hat{R}_l \cong \frac{1}{n} \frac{\varphi^2}{n} \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{m_1 - m_2}{\sigma_2}\right)^2}{2 \left(1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\right)^3} \right],$$

где  $\Phi \equiv \Phi \left( \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)$  — нормированная нормальная плотность вероятности.

*Численная* оценка  $\text{var } \hat{R}_l$ , которую мы обозначим  $\langle \text{var } \hat{R}_l \rangle$  или  $V$ , может быть получена с помощью замены  $m_2, \sigma_2$  во всех случаях их оценками  $\bar{y}$  и  $s$ . Тогда согласно методу п. 7.4.4 приближенный нижний доверительный предел  $R_l$ , соответствующий доверительному уровню  $\gamma$ , имеет вид

$$\hat{R}_L = \hat{R}_l - K_{1-\gamma} V^{1/2}.$$

Так, при  $m_1 = 800$ ,  $\sigma_1 = 100$ ,  $n = 20$ ,  $\bar{y} = 450$ ,  $s = 25$ ,  $\gamma = 0,90$  имеем

$$\hat{R}_l = \Phi(3,3955) \cong 0,999658,$$

$$V \equiv \langle \text{var } R_l \rangle =$$

$$= \frac{(0,0012512)^2}{20} \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{100}{25}\right)^2} + \frac{\left(\frac{800 - 450}{25}\right)^2}{2 \left[1 + \left(\frac{100}{25}\right)^2\right]^3} \right\} = 6,166 \times 10^{-8},$$

откуда

$$V^{1/2} = 0,0002483.$$

Следовательно,

$$\hat{R}_L = 0,999658 - 1,282(0,0002483) = 0,99934.$$

У п р а ж н е н и е. Решить предыдущий пример с тем отличием, что не максимальные, а разрывные давления составляют случайную выборку объема  $m$ .

#### 9.4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

Параллельной системой называется система, состоящая из  $n$  подсистем и построенная таким образом, что ее отказ происходит лишь в случае отказа *всех* подсистем, т. е. система исправна, если исправна *хотя бы одна* подсистема. Легко показать, что все свойства, установленные в § 9.2 для последовательных систем, можно при помощи двойственности переформулировать как свойства параллельных систем. Для этого нужно заменить  $S_j$  на  $F_j$ ,  $S$  на  $F$  и наоборот; однако следует заметить, что формула, дающая выражение *надежности* последовательной системы, при параллельной системе будет давать *ненадежность*.

У п р а ж н е н и е 1. Сформулировать соответствующие свойства надежности параллельных систем, находящихся в двойственном отношении к формулам § 9.2.

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что нижний доверительный предел надежности независимой параллельной системы можно найти, вычислив

$$\hat{R} = 1 - \prod_{j=1}^k \frac{\hat{f}_j}{N_j}, \quad (9.65)$$

затем определив „эквивалентное число отказов“ по формуле

$$F = N_m (1 - \hat{R}), \quad (9.66)$$

где  $N_m$  — минимальное из  $N_j$ , и найдя доверительный предел по рис. П.1—П.5 (или непосредственно по методу приложения 8А).

У п р а ж н е н и е 3. Показать, что

$$1 - \prod_{j=1}^k C_{N_j}(f_j, \gamma_j)$$

— нижний доверительный предел надёжности независимых параллельных систем с доверительным уровнем

$$\gamma = \prod_{j=1}^k \gamma_j,$$

если  $C_N(f_j, \gamma_j)$  — верхний доверительный предел ненадежности  $j$ -й подсистемы, построенный по  $f_j$  отказам из  $N_j$  испытаний и доверительному уровню  $\gamma_j$ .

Свойство параллельных систем часто выражается инженерным понятием *резервирование (избыточность)*, поскольку в системе имеются резервные элементы, обеспечивающие ее исправную работу в условиях, когда отказывает один или несколько основных элементов. Следующий пример резервирования относится к тому случаю, когда все элементы работают, но для успешного функционирования системы требуется исправная работа только некоторых из них. Мерой резервирования может служить процентное отношение количества элементов, которые могут выполнять определенную функцию, к требуемому количеству элементов. В п. 9.4.1, 9.4.2 и 9.4.3 приведены примеры разнообразных применений резервирования.

#### 9.4.1. Пример частично параллельной системы

Система воспламенения ракетного двигателя включает  $n$  отдельных воспламенителей, соединенных параллельно. Для уменьшения вероятности отказа конструкция системы устроена таким образом, что даже при отказе нескольких воспламенителей воспламенение происходит. Однако из-за ограниченных габаритов системы каждый воспламенитель сам по себе «мал», так что его энергия может оказаться недостаточной для воспламенения горючего. В действительности будет какая-то вероятность  $P_k \leq 1$  того, что при  $k$  исправных воспламенителях произойдет воспламенение горючего.

Пусть  $q$  обозначает вероятность исправной работы отдельного воспламенителя; тогда вероятность  $Q_k$  иметь  $k$  исправных воспламенителей из общего числа  $n$  записывается, как

$$Q_k = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}, \quad (9.67)$$

где  $p \equiv 1 - q$ . Следовательно, вероятность  $R$  того, что произойдет воспламенение, будет равна

$$R = \sum_{k=1}^n P_k Q_k, \quad (9.68)$$

где  $Q_k$  определены формулой (9.67).

Можно считать, что вероятности  $P_k$  возрастают по  $k$ . Действительно, физически очевидно, что вероятность воспламенения при  $k+1$  воспламенителях больше, чем при  $k$ .

Можно принять частное предположение, что  $j$  воспламенителей оказывается достаточным для воспламенения горючего, в то время как при исправной работе  $j-1$  воспламенителя оно никогда не происходит. В этом частном случае

$$P_k = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < j, \\ 1, & j \leq k \leq n. \end{cases} \quad (9.69)$$

Тогда формула (9.68) примет вид

$$R = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} q^k p^{n-k}. \quad (9.70)$$

Таким образом, безотказная работа системы эквивалентна событию, состоящему в том, что исправны по крайней мере  $j$  подсистем. При  $j=1$  система будет полностью *параллельной*, в остальных случаях — *частично параллельной*.

На рис. 9.4 представлены значения  $R$ , взятые из (9.70), при  $n=8$  и  $j=3; 4; 5; 6; 7; 8$ , где  $q$  изменяется от 0,50 до 0,999. Например, если известно, что  $j=4$ , а надежность отдельного воспламенителя составляет  $q=0,88$ , то надежность системы будет равна 0,999.

В общем случае, когда справедлива формула (9.68), значения  $P_k$  необходимо определять по результатам испытаний. Подробное рассмотрение наиболее рациональных способов организации подобного опыта выходит за рамки настоящего параграфа; однако логично представить себе ряд серий испытаний системы с  $n$  воспламенителями, где, скажем, в  $j$ -й серии ставится  $j \leq n$

исправных воспламенителей. Доля успешных воспламенителей используется для оценки  $P_j$ ; после этого проводятся подобные же испытания, но уже с другим  $j$  и т. д. Логично также применить метод «вверх и вниз». Важно

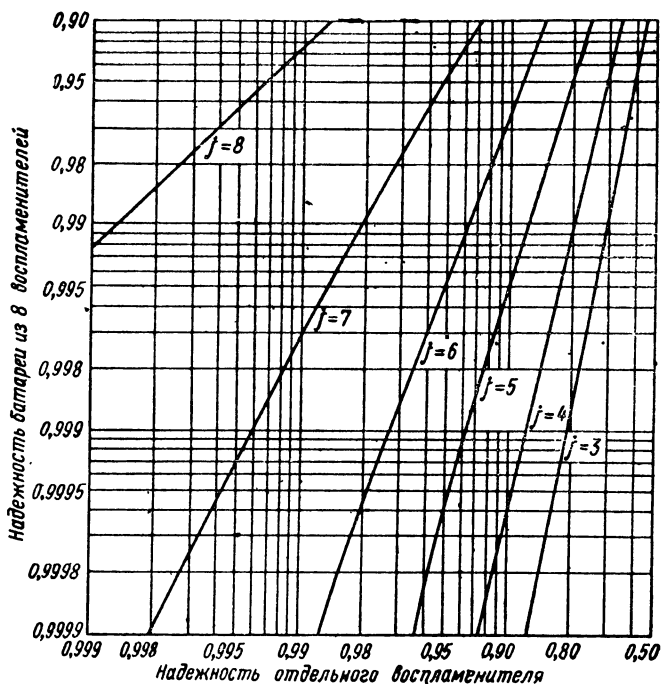


Рис. 9.4. Надежность батареи из восьми воспламенителей как функция надежности отдельного воспламенителя при условии, что для успешного действия необходимо и достаточно наличие хотя бы  $j$  исправных воспламенителей.

также заметить следующее. Мы предположили, что событие «работает 1 воспламенитель» эквивалентно тому, что его цепь не разорвана. Однако с физической точки зрения возможно и следующее: когда работает достаточное число воспламенителей, отказавший воспламенитель благодаря своему расположению вблизи работающих может также сработать; тогда его энергия добавится к энергии остальных. Здесь мы сталкиваемся с приме-

ром возможности «взаимодействия, повышающего надежность» (§ 4.6).

В этом случае значение  $Q_h$  будет большим, чем значение, определяемое формулой (9.67). Более того, в только что описанном способе испытаний эффект взаимодействия можно выявить, преднамеренно поставив на испытания исправные воспламенители с разорванной цепью.

**У п р а ж н е н и е.** Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем. Пусть  $\tau$  обозначает время безотказной работы системы,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — время наработки до отказов подсистем. Показать, что: а) система будет последовательной тогда и только тогда, когда  $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$ ; б) система будет параллельной тогда и только тогда, когда  $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$ .

**О т в е т.** а) Событие  $\tau > t$  означает безотказную работу системы, когда  $t$  — некоторое требуемое время работы. Ввиду того, что события  $[\tau > t]$ ,  $[\min(\tau_1, \tau_2) > t]$  и  $[(\tau_1 > t) \cap (\tau_2 > t)]$  эквивалентны (первые два по определению, последнее же эквивалентно им в силу простого алгебраического преобразования),

$$P(S) \equiv P(\tau > t) = P(\tau_1 > t, \tau_2 > t) \equiv P(S_1 \cap S_2).$$

Ответ на пункт б) получается подобным же путем.

#### 9.4.1.1. ПРИМЕР НЕНАГРУЖЕННОГО РЕЗЕРВА

Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем. Сначала включается 1-я подсистема, а 2-я находится в запасе (в ненагруженном резерве). Если за время  $t$  ( $t$  — необходимое время работы) 1-я подсистема откажет, то немедленно включается 2-я подсистема; в противном случае она вообще не понадобится. Система отказывает только в том случае, когда вторая подсистема также откажет за время  $t$  (где  $t$  отсчитывается с момента включения 1-й подсистемы). Предположим, что наработки до отказов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  1-й и 2-й подсистем — независимые случайные величины; другими словами, вероятность того, что 2-я подсистема проработает фиксированное время, не изменится, если станет известным время наработки первой системы. Чтобы определить надежность системы, заметим следующее. Система отказывает в том и только в том случае, когда происходят два события ( $u < \tau_1 < u + du$ ) и  $\tau_2 < t - u$ , где  $u$  — любое фиксированное число между 0 и  $t$ . Вероятность первого события равна  $f_1(u)du$ , т. е. элементу вероятности случайной величины  $\tau_1$ . Второе событие имеет вероятность

$F_2(t-u)$ , где  $F_2(\cdot)$  — функция распределения  $\tau_2$ . Ввиду того что  $\tau_1$  и  $\tau_2$  независимы, вероятность совместного осуществления событий равна произведению их вероятностей, т. е.  $f_1(u) du \cdot F_2(t-u)$ .

Отказ может наступить в любой момент  $u$  от 0 до  $t$ . При различных  $u$  события  $(u < \tau_1 < u + du) \cap (\tau_2 < t - u)$  взаимно-несовместны; следовательно, вероятность отказа системы получим, просуммировав по всем возможным значениям  $u$ . Это осуществляется при помощи интегрирования по  $u$  от 0 до  $t$ , т. е.

$$P_{(\text{отказа системы})} = \int_0^t F_2(t-u) f_1(u) du.$$

Последнее выражение представляет вероятность события  $\tau_1 + \tau_2 < t$ , которое, очевидно, эквивалентно событию отказа системы. Таким образом, если  $\tau$  обозначает наработку до отказа системы, то

$$1 - R = P(\tau < t) = P(\tau_1 + \tau_2 < t).$$

Заметим, что надежность подобной системы не может быть меньше надежности обычной параллельной системы, поскольку для последней должно быть  $\tau_1 < t$  и  $\tau_2 < t$ , но событие  $\tau_1 + \tau_2 < t$ , более узкое, чем событие  $[(\tau_1 < t) \cap (\tau_2 < t)]$ . Следовательно, вероятность первого события меньше или равна вероятности последнего события, т. е. вероятность отказа системы с ненагруженным резервом не больше, чем вероятность отказа параллельной системы.

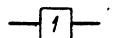
У п р а ж н е н и е. В дублированной системе с ненагруженным резервом наработки до отказа  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  имеют показательные распределения с параметрами  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Вычислить вероятность того, что система проработает по меньшей мере время  $t$  (см. [10]).

#### 9.4.2. Пример смешанной параллельно-последовательной системы

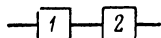
В следующем примере рассматривается проектирование оптимального контура и комбинации датчиков давления, используемых в датчике критического состояния. Когда обнаруживается значительный перепад давления в топливопроводе жидкотопливного ракетного двигателя, датчик реагирует на это, и переключатель замыкает цепь, с которой он связан.



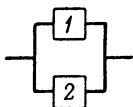
Виды схем



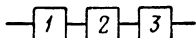
$$P_1 = \alpha q_1 + (1 - \alpha) q_2$$



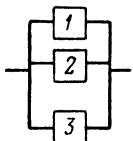
$$\begin{aligned} P_{2a} &= \alpha q_1^2 + (1 - \alpha) [1 - (1 - q_2)^2] \\ &= \alpha q_1^2 + (1 - \alpha) q_2 (2 - q_2) \end{aligned}$$



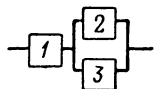
$$\begin{aligned} P_{2b} &= \alpha [1 - (1 - q_1)^2] + (1 - \alpha) q_2^2 \\ &= \alpha q_1 (2 - q_1) + (1 - \alpha) q_2^2 \end{aligned}$$



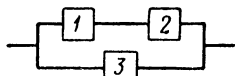
$$\begin{aligned} P_{3a} &= \alpha q_1^3 + (1 - \alpha) [1 - (1 - q_2)^3] \\ &= \alpha q_1^3 + (1 - \alpha) [3q_2 - 3q_2^2 + q_2^3] \end{aligned}$$



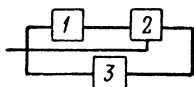
$$\begin{aligned} P_{3b} &= \alpha [1 - (1 - q_1)^3] + (1 - \alpha) q_2^3 \\ &= \alpha [3q_1 - 3q_1^2 + q_1^3] + (1 - \alpha) q_2^3 \end{aligned}$$



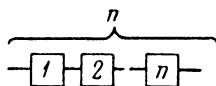
$$\begin{aligned} P_{3c} &= \alpha q_1^2 (2 - q_1) + \\ &+ (1 - \alpha) q_2 [1 + q_2 - q_2^2] \end{aligned}$$



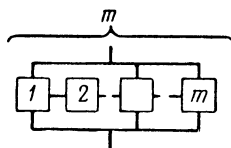
$$\begin{aligned} P_{3d} &= \alpha q_1 (1 + q_1 - q_1^2) + \\ &+ (1 - \alpha) q_2^2 (2 - q_2) \end{aligned}$$



$$P_{3e} = \alpha q_1 (2 - q_1) + (1 - \alpha) q_2^2 \equiv P_{2b}$$



$$P_{na} = \alpha q_1^n + (1 - \alpha) [1 - (1 - q_2)^n]$$



$$P_{mb} = \alpha [1 - (1 - q_1)^m] + (1 - \alpha) q_2^m$$

Рис. 9.5.

Датчик может отказывать в двух случаях:

1) при значительном перепаде давления цепь не замыкается (существует критическое состояние, но оно не обнаруживается);

2) при отсутствии значительного перепада давления цепь размыкается (критического состояния нет, но ошибочно считается, что оно имеется).

В общем, датчик критического состояния отказывает тогда, когда он либо не реагирует на существующее критическое состояние, либо ошибочно отмечает наличие критического состояния, когда его нет. Если критическое состояние отмечено (безразлично, истинное оно или ложное), т. е. цепь разомкнута, система дает сигнал задержки пуска. Таким образом, отказ индивидуального датчика давления может проявиться в том, что при наличии критического состояния цепь не замыкается или при отсутствии замыкается. Однако, если в цепи имеются другие переключатели, отказ одного из них может и не привести к отказу системы.

Иллюстрацией этого служит рис. 9.5, на котором представлены всевозможные цепи, составленные при помощи трех датчиков давления с переключателями; там же показаны вероятности отказа той или иной цепи. На рисунке также показаны общая  $n$ -звенная последовательная схема и  $m$ -звенная параллельная схема. Чтобы вычислить соответствующие вероятности отказа для каждой схемы, обозначим через  $\alpha$  вероятность критического состояния,  $q_1$  — вероятность отказа отдельного датчика давления при критическом состоянии и через  $q_2$  — вероятность отказа отдельного датчика при отсутствии критического состояния.

Рассмотрим, например, схему 3с.

Прежде всего заметим, что отказ может происходить двумя несовместными способами:

1. Когда имеется критическое состояние (с вероятностью  $\alpha$ ) и цепь остается замкнутой (незамеченное критическое состояние), если 1, 2, 3-й датчики отказали; 1-й и 2-й ошибочно не разомкнули цепи, а 3-й разомкнул; 1-й и 3-й не разомкнули, а 2-й разомкнул. Эти события несовместны, а их вероятности равны соответственно  $q_1^3$ ,  $q_1^2(1 - q_1)$ ,  $q_1^2(1 - q_1)$ . Значит, вероятность незамеченного критического состояния будет равна  $\alpha [q_1^3 + 2q_1^2(1 - q_1)]$ .

2. Если критического состояния нет, а цепь разомкнута (неправильная задержка пуска). Это событие сводится к осуществлению одного из пяти несовместных событий: 1, 2 и 3-й датчики разомкнуты; 1-й и 2-й разомкнуты, а 3-й замкнут; 1-й и 3-й разомкнуты, а 2-й замкнут; 2-й и 3-й разомкнуты, а 1-й замкнут; 1-й разомкнут, а 2-й и 3-й замкнуты. Соответствующие вероятности составляют

$$q_2^3, q_2^2(1 - q_2), q_2^2(1 - q_2), q_2^2(1 - q_2), q_2(1 - q_2)^2.$$

Таким образом, вероятность ошибочной задержки пуска составит

$$(1 - \alpha)[q_2^3 + 3q_2^2(1 - q_2) + q_2(1 - q_2)^2].$$

Следовательно, ввиду того что задержка и отсутствие задержки — события несовместные,

$$P_{3c} = \alpha[q_1^3 + 2q_1^2(1 - q_1)] + (1 - \alpha)[q_2^3 + 3q_2^2(1 - q_2) + q_2(1 - q_2)^2]$$

или после упрощения

$$P_{3c} = \alpha q_1^2(2 - q_1) + (1 - \alpha)q_2[1 + q_2 - q_2^2],$$

что соответствует рис. 9.5. Другие вероятности находят подобным же образом. Заметим, что схема 3c эквивалентна схеме с двумя параллельными переключателями 2b. Стало быть, схема 3c не дает преимуществ по сравнению со схемой 2b, поскольку для последней требуется меньшее число переключателей.

Если сравнить только схемы 1, 2a и 2b, то легко видеть, что условие

$$P_{2a} \leq P_1 \leq P_{2b}$$

равносильно неравенству

$$q_2(1 - q_2) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} q_1(1 - q_1) \quad (9.71)$$

или

$$q_2 \geq 0,5 + \left[0,25 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} q_1(1 - q_1)\right]^{1/2}, \quad (9.72)$$

$$q_2 \leq 0,5 - \left[0,25 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} q_1(1 - q_1)\right]^{1/2}.$$

Если положить  $\alpha=0,10$  (это значение принимается во всех последующих вычислениях), то получим области оптимальности схем  $2a$  и  $2b$ , как показано на рис. 9.6. Среди схем 1,  $2a$ ,  $2b$  первая нигде не оптимальна; соот-

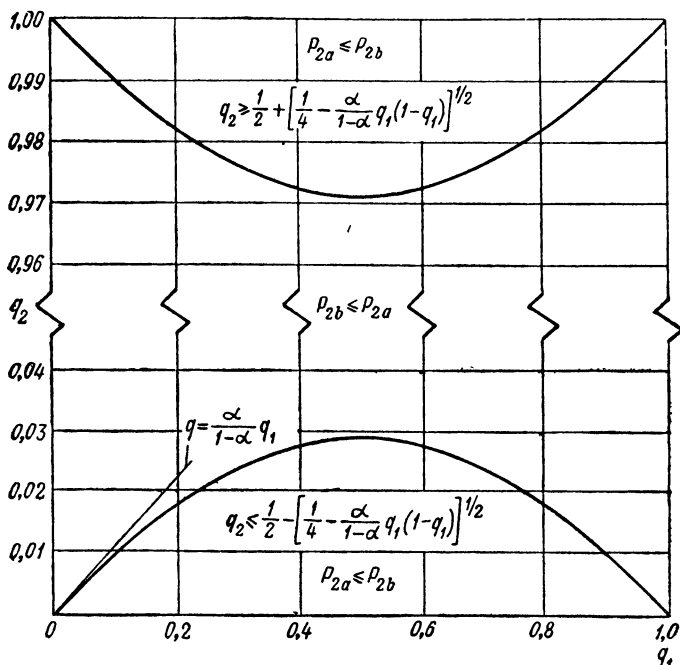


Рис. 9.6. Области оптимальности схем с двумя переключателями: последовательной ( $2a$ ) и параллельной ( $2b$ ) (см. табл. 9.1).

ветствующая ей вероятность отказа больше или равна вероятности отказа схем  $2a$  или  $2b$  во всей области

$$0 \leq q_1 \leq 1, 0 \leq q_2 \leq 1.$$

На рис. 9.6 показана вся область, где либо  $2a$ , либо  $2b$  дает минимальную вероятность отказа; однако наибольший интерес представляет область  $q_1 \leq 1, q_2 \leq 1$ : на практике следует ожидать, что  $q_1$  и  $q_2$  малы. В соот-

ветствии с этим рассмотрим только асимптотические выражения, получаемые из (9.71) при  $q_1, q_2 \rightarrow 0$ :

$$q_2 \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} q_1. \quad (9.73)$$

Это будет условием неравенства  $P_{2a} \leq P_{2b}$ .

На рис. 9.6 показана также линейная аппроксимация (9.73) точной области оптимальности.

В случае трехзвенных схем необходимо сравнить схемы  $2a, 2b, 3a, 3b, 3c, 3d$ . Это можно сделать так же, как и выше, приняв, что  $P_{3a}$  меньше или равна каждой из вероятностей  $P_{2a}, P_{2b}, P_{3b}, P_{3c}, P_{3d}$  и т. д.; при этом всякий раз следует удерживать лишь низшие степени  $q_1$  и  $q_2$ . Когда это будет сделано для каждой из шести схем, мы получим оптимальные области, показанные на рис. 9.7 (масштаб не отмечен). На рисунке видно, что из всех рассмотренных схем только трехзвенные являются оптимальными в неперекрывающихся секторах, покрывающих всю область\*.

Рассмотрим численный пример. Пусть  $\alpha=0,10$ ;  $q_1=0,01$ ;  $q_2=0,001$ . Тогда имеем

$$\frac{0,10}{1-0,10} (0,01)^2 \leq q_2 \leq \frac{0,10}{1-0,10} (0,10),$$

откуда  $0,0000111 \leq q_2 \leq 0,00111$ , так что  $(q_1, q_2)$  лежит в области, где оптимальной будет схема  $3c$ .

Из рис. 9.5 находим

$$\begin{aligned} P_{3c} &= 0,10 (0,0001) (1,99) + 0,90 (0,0001) \times \\ &\times (1 + 0,001 - 0,000001) = 0,0000199 + 0,0009009 = \\ &= 0,0009208. \end{aligned}$$

Значения вероятностей для других схем будут составлять:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0,0019; & P_{2a} &= 0,0018; & P_{2b} &= 0,0020; \\ P_{3a} &= 0,0027; & P_{3b} &= 0,0030; & P_{3d} &= 0,0010. \end{aligned}$$

Все они больше, чем  $P_{3c}$ .

---

\* Этот и предыдущие результаты показывают, что чем больше переключателей в цепи, тем более оптимальной становится схема. Однако автор этого не проверял. Если это действительно так, то для отыскания действительного оптимума, о котором идет речь, следует учесть дополнительное условие — ограниченность объема.

В силу того, что схема 3e равносильна схеме из двух параллельно соединенных переключателей, следует ожи-

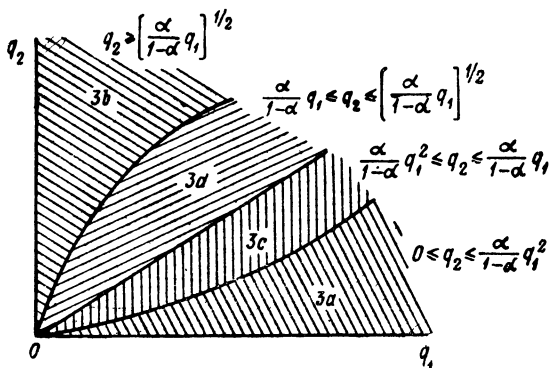


Рис. 9.7. Области оптимальности схем с тремя переключателями (см. табл. 9.1).

дать, что при добавлении дополнительных звеньев (при четырех и большем количестве переключателей) улучшения не будет.

Так как оптимальная схема зависит от значений  $q_1$  и  $q_2$ , возникает вопрос: как быть, если эти параметры определены неточно? Если, скажем, оценка  $(q_1, q_2)$  лежит в области 3c, в то время как истинное значение  $(q_1, q_2)$  — в области 3d (рис. 9.7), то выбранная схема оптимальной не будет. Эта задача не столь сложна, как это может показаться на первый взгляд: ведь минимальная вероятность отказа при переходе через границы областей изменяется непрерывно. Значит, и ошибка будет при фиксированном  $\alpha$  непрерывной функцией «расстояния» между истинным  $(q_1, q_2)$  и его оценкой. Итак, задача целиком сводится к определению достаточного объема выборки и количества испытаний датчиков давления с переключателями, чтобы обеспечить заданную точность оценок вероятностей отказа.

У п р а ж н е н и е 1. Проверить утверждение, что минимальная вероятность отказа непрерывна при переходе через границы областей, показанных на рис. 9.7.

У п р а ж н е н и е 2. Исследовать влияние дополнительного ограничения: отношение частоты ложных задержек пусков к частоте необнаруженного критического состояния должно быть больше, чем 10:1.

### 9.4.3. Пример исследования надежности проекта

Данный пример относится к электронной системе, однако то же можно применить и в оборудовании других видов. Электронное оборудование выбрано для иллюстрации потому, что описанный вид предсказания обычно используется на практике, а кроме того, здесь можно ввести понятие условий применения деталей. Хотя и при других видах оборудования не следует пренебрегать влиянием на надежность условий применения деталей, обычно только при электронном и электромеханическом оборудовании представляется возможным собирать достаточную информацию и получать из нее обоснованные аналитические зависимости. Дело в том, что элементы оборудования неэлектронного типа по большей части вырабатываются специально для конкретной системы с ее функциональной схемой и техническими условиями. В частности, это турбины, камеры сгорания, газогенераторы и другие элементы жидкостных ракетных двигателей, а в твердотопливных — корпус, изолирующий слой, сопло и т. п. В этих и подобных примерах информация об отказах элементов обычно весьма ограничена и относится лишь к данной конкретной системе. Следовательно, ее нельзя применять к другим системам данного типа. С другой стороны, электронные детали очень часто являются стандартными, серийными, и в системе обычно встречается большое количество однотипного оборудования.

Резервирование, которое будет рассмотрено несколько ниже, ни в какой мере не является исключительным для электронного оборудования и может быть применено при соответствующих условиях к исследованию надежности проектов оборудования любых видов.

#### 9.4.3.1. УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ

В большинстве случаев электронные системы и монтажи состоят из совокупности электронных и электромеханических деталей с известными интенсивностями отказов. Факторами, определяющими эффект, получаемый при сборке этих деталей в систему, являются: 1) на-

дежностная структура оборудования и 2) условия применения деталей.

Существует большой опыт использования и большой объем информации об отказах; все это обобщено и табулировано в [5, 6].

Мы знаем, что интенсивность отказов детали при стандартном электрическом режиме и в стандартных внешних условиях, т. е. в лаборатории, бывает коррелированной с интенсивностью отказов при другом электрическом режиме и при других внешних условиях. Подобную корреляцию можно выразить посредством множителей, которые иногда называют *коэффициентами условий применения* и обозначают  $K_A$ . Для скорректирования интенсивности отказов, чтобы учесть электрический режим и внешние условия применения той или иной детали, следует умножить эту интенсивность на  $K_A$ . Множители  $K_A$ , которые могут быть больше или меньше единицы, также подробно табулированы (см. список литературы к главе). Таким образом, прежде чем использовать численное значение интенсивности отказов той или иной детали, необходимо предварительно найти условия ее применения. Последнее можно осуществить после того, как будет построен макет оборудования на основании самой лучшей техники сборки. Для каждой детали измеряются локальные условия, т. е. внутренние условия, свойственные монтажу системы, особенно температура и вибрация. Таким образом, натуральный макет или монтаж элементов играет большую роль при воссоздании внутренних условий. Уровень второго фактора — электрической нагрузки — обычно становится известным, если рассмотреть контур и исследовать функцию элемента во всем изделии.

Следует также принять во внимание внешние условия. Они определяются требованиями, предъявляемыми к использованию системы. Под этим подразумевается, что данное оборудование может использоваться в различных внешних условиях: в составе стационарного наземного оборудования; оборудования снаряда при статических испытаниях; оборудования снаряда в полете; оборудования спутника и т. д. Множители, служащие приведению в соответствие этих последних видов внешних условий к стандартным внешним условиям, называются *коэффициентами вида использования* и обозна-



чаются  $K_{op}$ . Значения  $K_{op}$  для различных условий использования приведены в [5]. В качестве примера предполагается, что общее воздействие условий полета снаряда на оборудование характеризуется в 1000 раз более жесткими условиями ( $K_{op}=1000$ ) по сравнению с однотипным оборудованием, используемым в обычной лабораторной вычислительной машине. Если же его поставить в определенное место в отсеке между ступенями, например, непосредственно за соплом, то  $K_{op}$  будет еще большим.

Таким образом, чтобы установить интенсивность отказов определенной детали, ожидаемую при ее использовании в данной системе, необходимо осуществить следующие этапы исследования.

1. Составить перечень деталей, указывая их названия и количество.
2. Определить стандартные интенсивности отказов.
3. Найти множители  $K_A$  при помощи соответствующего расчета, учитывающего уровни их электрической нагрузки и действующих условий.
4. Выбрать подходящее значение множителя  $K_{op}$ .
5. Перемножить величины п. 2, 3, 4, в результате чего получится интенсивность отказов при использовании. Это и будет ожидаемой интенсивностью отказов в конкретной части системы при данной схеме и данном использовании системы.

Та же процедура осуществляется для всех частей системы. Если детали данного вида применяются в системе неоднократно, то указанную процедуру следует проделывать каждый раз.

Часто в электронном оборудовании при предположении о показателем распределении времени безотказной работы и отсутствии какого-либо резервирования надежность оценивают почти непосредственно. Это можно сделать, сложив интенсивности отказов при использовании, соответствующие всем деталям; в результате получится интенсивность отказов системы, из которой очевидным образом находится оценка надежности (см. § 8.1). В приводимом примере (табл. 9.1) дается иллюстрация данной методики: надежность индивидуального элемента (контрольного контура солнечного элемента) оценивается на основании интенсивно-

стей отказов его деталей. Тем не менее эту простую методику невозможно применить, если оговоренные условия в действительности не выполнены; тогда следует использовать только «укороченный» метод. «Общий» метод оценки надежности системы состоит в использовании надежностей составных частей в соответствии с надежностной структурой системы, учитывающей эффект резервирования (избыточности); этот вопрос будет рассмотрен в следующем пункте. Если окончательная оценка покажет, что общая надежность не удовлетворяет заданному требованию, можно применить ряд мер, обеспечивающих повышение надежности. Так, используют более качественные детали, которые обладают большей прочностью (т. е. меньшими значениями коэффициентов условий применения); можно также усовершенствовать монтаж, улучшив локальные условия; наконец, можно применить резервирование.

#### 9.4.3.2. РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

Понятие резервирования легко уяснить себе при помощи схематического представления (рис. 9.5, 9.9, 9.10 и 9.11); эффект резервирования виден из соответ-

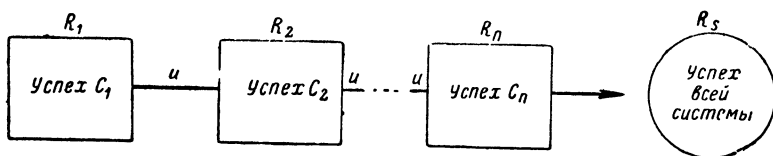


Рис. 9.8. Простая последовательная система (резервирование отсутствует). Структурная схема надежности.

#### Формула надежности

$$R_s = R_1 R_2 \dots R_n$$

или  $R_s = R^n$ , если все  $R_i = R$ .

ствующих формул надежности. Важно заметить, что как в выкладках этого пункта, так и в примере всей схемы надежности основываются на *независимых* последовательных и параллельных системах. На рис. 9.8 и 9.9 показаны схемы, которые рассмотрены в § 9.2 и 9.4. Рис. 9.10 и 9.11 представляют непосредственное обобщение первых двух моделей рис. 9.8 и 9.9. Предлагаем читателю выписать формулы, соответствующие рис. 9.10 и 9.11, непосредственно по формулам, связанным с рис. 9.8 и 9.9.

Формулы надежности можно также получить непосредственно из схем надежностей структуры, используя знаки пересечения  $\cap$  и объединения  $\cup$  (п. 5.2.1).

Так, по рис. 9.8. имеем

успех системы = [успех  $C_1$ ]  $\cap$  [успех  $C_2$ ]  $\cup \dots \cap$  [успех  $C_n$ ],

$$R_s = P \{ [\text{успех } C_1] \cap [\text{успех } C_2] \cap \dots \cap [\text{успех } C_n] \}$$

или, что то же,  $R_s = R_1 R_2 \dots R_n$ .

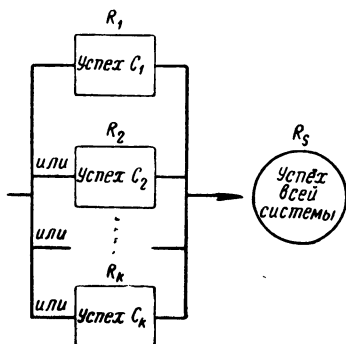


Рис. 9.9. Простая параллельная система с  $k-1$  резервными элементами.

**Формула надежности**

$$R_s = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2) \dots (1 - R_k)$$

или

$$R_s = 1 - (1 - R)^k, \text{ если все } R_i = R.$$

Читатель может мысленно представить себе рис. 9.10, как рис. 9.9, где каждый из элементов  $C_1, C_2, \dots, C_k$  заменен последовательной системой элементов (рис. 9.8); после этого формула надежности становится непосредственно очевидной.

В случае, показанном на рис. 9.9:

успех системы = [успех  $C_1$ ]  $\cup$  (успех  $C_2$ )  $\cup \dots$   
 $\dots \cup$  [успех  $C_k$ ];

$$\begin{aligned} R_s &= P \{ \overline{[\text{успех } C_1] \cap [\text{успех } C_2] \cap \dots \cap [\text{успех } C_k]} \} = \\ &= 1 - P \{ \overline{[\text{успех } C_1] \cap [\text{успех } C_2] \cap \dots \cap [\text{успех } C_k]} \} = \\ &= 1 - P \{ \overline{[\text{успех } C_1]} P \{ \overline{[\text{успех } C_2]} \} \dots P \{ \overline{[\text{успех } C_k]} \} \} \end{aligned}$$

или

$$R_s = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2) \dots (1 - R_k).$$

Рис. 9.11 можно представить себе, как рис. 9.8, где каждый элемент ( $C_1, C_2, \dots, C_n$ ) заменен параллельной системой элементов (рис. 9.9); снова отсюда непосредственно получается вид формулы надежности.

Из приведенных примеров формул надежности (рис. 9.8—9.11) видно, что значение  $R_s$  теоретически может быть изменено посредством выбора количества элементов и способа их соединения. Прежде всего оказывается, что  $R_s$  можно заставить сколько угодно приблизиться к 1, просто взяв достаточно большое  $k$ . Однако обычно этому препятствуют реальные условия. Примером может служить ограничение объема для авиационного оборудования.

Другая проблема возникает в связи с тем, что использование резервных элементов приводит к сложности схемы и монтажа. Кроме того, иногда необходи-

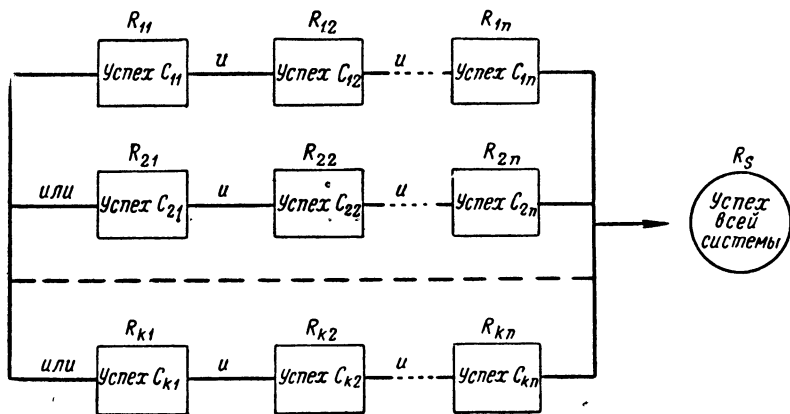


Рис. 9.10. Последовательно-параллельная система (резервирование последовательных систем). Структурная схема надежности.

#### Формула надежности

$$R_s = [1 - (1 - R_{11}R_{12} \dots R_{1n})(1 - R_{21}R_{22} \dots R_{2n}) \dots (1 - R_{k1}R_{k2} \dots R_{kn})]$$

или

$$R_s = 1 - (1 - R_1R_2 \dots R_n)^k, \text{ если } R_{ij} = R_j,$$

или

$$R_s = 1 - (1 - R^n)^k, \text{ если все } R_{ij} = R.$$

мо ввести специальные элементы, выявляющие отказы и осуществляющие переключение с отказавших элементов на резервные. Переключающие элементы также обладают конечной надежностью; при выводе формул для надежности ее следует учитывать.

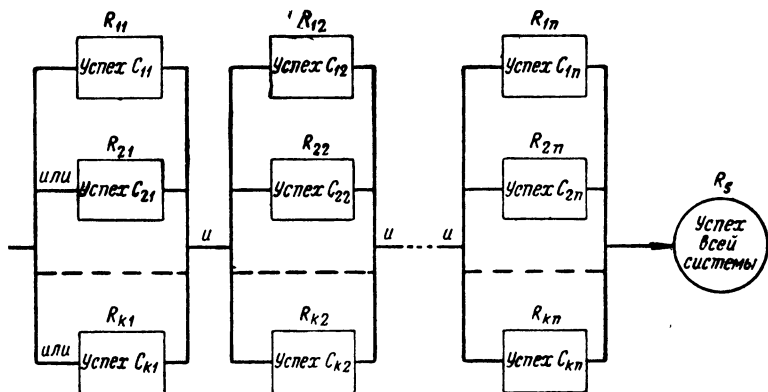


Рис. 9.11. Параллельно-последовательная система (поэлементное резервирование).

**Формула надежности**

$$R_s = [1 - (1 - R_{11})(1 - R_{21}) \dots (1 - R_{k1})] \times \\ \times [1 - (1 - R_{12})(1 - R_{22}) \dots (1 - R_{k2})] \dots \\ \dots [1 - (1 - R_{1n})(1 - R_{2n}) \dots (1 - R_{kn})]$$

или

$$R_s = [1 - (1 - R_1)^h][1 - (1 - R_2)^h \dots [1 - (1 - R_n)^h], \\ \text{если } R_{ir} = R_j;$$

если все  $R_{ij} = R_j$ , то

$$R_s = [1 - (1 - R)^h]^n.$$

Только что рассмотренные четыре основные схемы надежности — это наиболее простые из тех, которые встречаются в практике. В п. 9.4.1 уже встречался пример частично параллельной системы; при этом легко обнаружилось, что данная схема может быть включена в примеры рис. 9.10 и 9.11. Например, если при рассмотрении рис. 9.10 положить, что для работы системы необходима исправная работа по меньшей мере  $r$  из  $k$  параллельных звеньев, то вероятность такого события на основании (9.70) будет равна

$$R_s = \sum_{i=r}^k \binom{k}{i} [R_{11}R_{12} \dots R_{1n}]^i [1 - R_{11}R_{12} \dots R_{1n}]^{k-i}, \quad (9.74)$$

коль скоро  $R_{1j} = R_{2j} = \dots = R_{kj}$ .

Мы хотим показать, что вообще, и в случае более сложных схем резервирования, формулы надежности можно составлять на основании простых моделей, которыми мы до сих пор ограничивались. Когда имеется в нашем распоряжении формула для расчета вероятностей состояний системы, можно поступить следующим образом. Выпишем последовательность или множество операций, которые должны быть выполнены для безотказной работы системы; это можно сделать при помощи схем, подобных тем, которые показаны на рис. 9.8—9.11. Обычно большинство систем состоит из основных подсистем, соединенных последовательно; при этом в подсистемах иногда применяется резервирование элементов или частей. Затем подобным же образом можно установить структуру всех более мелких подразделений в подсистемах. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока еще не достигнут тот уровень разбиения системы, при котором уже нет дискретной связи \* типа успех — отказ между отдельным элементом и окружающими его элементами. Тогда каждой части или элементу ставится в соответствие известное или оцененное (из наблюдений либо аналитически) значение надежности и по методам и формулам, подобным только что описанным и проиллюстрированным на следующем примере, определяется надежность системы.

#### 9.4.3. ПРИМЕР РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ПОДСИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ \*\*

Оборудованием, рассматриваемым в данном примере, является система контроля температуры, которая служит составной частью космического корабля, предназ-

---

\* В подобных случаях зачастую наблюдается взаимодействие элементов одного из видов, рассмотренных в § 8.7, п. 933, § 95 и далее.

\*\* Этот пример основан на неопубликованных материалах А. С. Рида.

наченного для научных исследований Луны. Корабль состоит из движущей системы, системы ориентировки, источника энергии, системы контроля за полетом, системы связи и телеметрической системы, а также подсистемы контроля температуры; все они образуют последовательную систему.

Назначение подсистемы контроля температуры — оградить внутреннюю аппаратуру от крайних значений температуры, которые возникнут во время полета и после посадки на Луну; требуется обеспечить нормальный температурный режим в пределах от 40 до 75°.

Метод контроля температуры во время полета и лунного дня основан на использовании равновесия излучения, во время лунной ночи — на использовании хими-

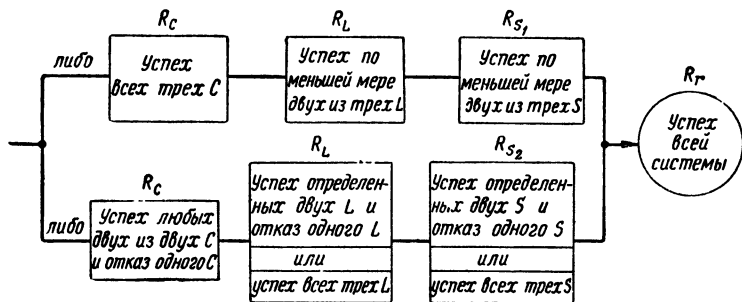


Рис. 9.12. Структурная схема надежности подсистемы контроля температуры при работе во время полета и лунного дня. Контроль эмиссии излучения осуществляется при помощи насадок, которые открываются и перемещаются согласно программе, задаваемой системой контроля.

Энергия, необходимая для этого, получается от солнечной батареи через систему контроля, которая таким образом участвует в двух операциях. Химический источник устроен довольно просто; он активизируется, когда температура корабля падает до определенного значения благодаря расходу тепла во время лунной ночи.

Схема подсистемы контроля температуры состоит из трех солнечных батарей  $S$  (каждая из них собрана из 22 солнечных элементов), трех контрольных панелей  $C$ , трех насадок  $L$  и химического источника; соответствующая схема резервирования показана на рис. 9.12.

Для успешного осуществления температурного режима необходимо иметь успех как во время полета и лунного дня, так и во время лунной ночи. Рассмотрим эти две операции отдельно.

**Надежность, связанная с временем полета и лунным днем.** Для нормального питания должна работать по меньшей мере половина из 66 солнечных элементов. Это означает, что должно работать не менее двух контрольных панелей  $C$ , каждая из которых последовательно соединена с солнечной батареей  $S$ .

Далее, безотказная работа насадки  $L$  зависит от безотказной работы связанной с ней цепи контрольной панели. Таким образом, если

- $R_C$  — надежность одной цепи контрольной панели  $C$ ;
- $R_L$  — надежность одной насадки для контроля температуры  $L$ ;
- $R_{S1}$  — надежность солнечной батареи  $S$  при отсутствии отказов контрольной панели;
- $R_{S2}$  — надежность солнечной батареи  $S$  при одной отказавшей контрольной панели,

то структурная схема всей системы контроля температуры будет выглядеть так, как показано на рис. 9.12. Этот рисунок позволяет непосредственно вывести формулу надежности (9.75), если вспомнить, что когда работают всего две цепи контрольной панели, то для безотказной работы системы необходима безотказная работа связанных с ними солнечных батарей. Это можно выразить формулой

$$R_T = R_C^3 \left[ \binom{3}{2} R_L^2 (1 - R_L) + R_L^3 \right] \left[ \binom{3}{2} R_{S1}^2 (1 + R_{S1}) + R_{S1}^3 \right] + 3R_C^2 (1 - R_C) [R_L^2 (1 - R_L) + R_L^3] [R_{S2}^2 (1 - R_{S2}) + R_{S2}^3], \quad (9.75)$$

которую легко свести к виду

$$R_T = \frac{R_C^3 [3R_L^2 - 2R_L^3] [3R_{S1}^2 - 2R_{S1}^3] + 3R_C^2 (1 - R_C) R_L^2 R_{S2}^3}{}, \quad (9.76)$$

где  $R_{S1}$  и  $R_{S2}$  находятся следующим образом.



Обозначим через  $q$  вероятность безотказной работы отдельного солнечного элемента. Тогда вероятность безотказной работы по меньшей мере  $r$  из  $k$  солнечных элементов будет равна

$$P = \sum_{i=r}^k \binom{k}{i} q^i (1-q)^{k-i}. \quad (9.77)$$

Для вычисления  $R_{S_1}$  необходимо найти вероятность безотказной работы по меньшей мере 33 солнечных элементов из 66, т. е.

$$R_{S_1} = \sum_{i=33}^{66} \binom{66}{i} q^i (1-q)^{66-i}. \quad (9.78)$$

Далее,  $R_{S_2}$  равна вероятности безотказной работы 33 солнечных элементов из общего числа 44:

$$R_{S_2} = \sum_{i=33}^{44} \binom{44}{i} q^i (1-q)^{44-i}. \quad (9.79)$$

Было известно, что  $q$  приблизительно равно 0,97. Тогда  $R_{S_1}$  и  $R_{S_2}$ , вычисленные по формулам (9.78) и (9.79), почти равны 1. В этом случае формулу (9.76) можно приблизительно представить, как

$$R_T = 3R_C^2 R_L^2 - 2R_C^3 R_L^3 = R_C^2 R_L^2 (3 - 2R_C R_L). \quad (9.76')$$

Значения  $R_C$ ,  $R_L$  для 90-часового полета.

Значение  $R_C$  для 90-часового полета было получено следующим образом. Перечень составных частей, интенсивности их отказов по каждому элементу и в целом дается в табл. 9.1 (считалось, что время безотказной работы контрольного устройства распределено по показательному закону; надежность составных частей, связанных с панелью, принята равной 1 для периода полета, посадки на Луну и операций на лунной поверхности).

Таким образом, по табл. 9.1 для предполагаемого значения надежности цепи контроля панели находим

$$\begin{aligned} R_C(90 \text{ час}) &= \exp[-(90)(0,818 \times 10^{-5})] = \\ &= e^{-0,000736} = 0,999264. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Таблица 9.1

## Схема отдельной солнечной контрольной панели

Детали	Интенсивности отказов отдельных элементов, %/1 000 час	Количество деталей	Общая интенсивность отказов деталей данного вида, %/1 000 час
Транзисторы . . . . .	0,018	20	0,360
Диоды . . . . .	0,0036	14	0,050
Сопротивления:			
угольные . . . . .	0,0015	22	0,033
пленочные . . . . .	0,002	23	0,046
проволочные . . . . .	0,015	1	0,015
Конденсаторы . . . . .	0,001	8	0,008
Танталовые (электролитические) конденсаторы:			
твердые . . . . .	0,001	1	0,001
фольговые . . . . .	0,005	1	0,005
Трансформаторы и дроссели	0,020	2	0,040
Электродвигатели . . . . .	0,050	1	0,050
Приводы . . . . .	< 0,001	1	0
Предохранители . . . . .	0,020	6	0,120
Реле . . . . .	0,030	3	0,090

Итого: 0,818

На основании прошлого опыта, можно видеть, что установившаяся оценка уровня надежности одной системы насадок для контроля температуры и ее чувствительного активатора превосходит 0,995 при времени работы, равном 90 час. Мы будем считать эту оценку точной, т. е.

$$R_L(90 \text{ час}) = 0,995. \quad (9.81)$$

Подставив  $R_C$  и  $R_L$  в формулу (9.76'), получим для 90-часового полета

$$R_T(\text{при полете}) = (0,999264)^2 (0,995)^2 \times \\ \times [3 - 2(0,999264)(0,995)], \\ \underline{R_T(\text{при полете}) = 0,999902.} \quad (9.82)$$

Значения  $R_C$ ,  $R_L$  для лунного дня. Модель надежности насадок для контроля температуры и кон-

троля панелей на поверхности Луны в дневное время будет такой же, как и для случая полета. Уровень надежности одной системы насадок для 15 земных дней (360 час) на основании тех же рассуждений, что и в случае 90-часового полета, может быть принят равным  $R_L(360 \text{ час}) = 0,98$ ; это значение весьма достоверно. Используя ранее вычисленную интенсивность отказов (табл. 9.1), получим

$$R_C = \exp[-(360)(0,818 \times 10^{-6})] = e^{0,00295} = 0,99706.$$

Надежность солнечных элементов, как можно показать, для 410 час весьма мало отличается от 1, так что снова применима приближенная модель; по формуле (9.76') находим

$$R_T(\text{день}) = (0,99706)^2 (0,98)^2 [3 - 2(0,99706)(0,98)]$$

или

$$R_T(\text{день}) = 0,99845. \quad (9.83)$$

**Надежность для лунной ночи.** Для функционирования системы на протяжении лунной ночи необходимо выбрать иную модель надежности. Ночью солнечная панель или ее насадки, предназначенные для контроля температуры, должны быть закрыты, чтобы не происходило утечки тепла. Согласно конструктивному исполнению, эти два элемента работают параллельно, т. е. насадка резервирует соответствующую солнечную панель. Если солнечная панель и насадка из-за отказов не закроются, то из строя выйдут также соответствующие солнечные батареи, поскольку они не могут выдержать тем-

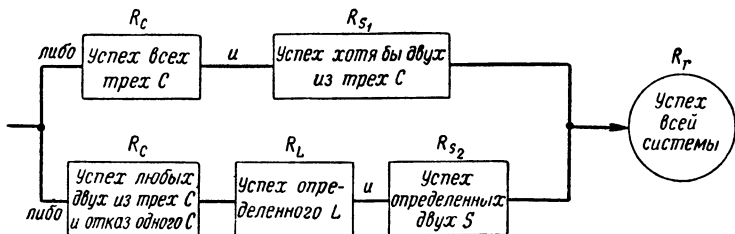


Рис. 9.13. Структурная схема надежности подсистемы контроля температуры при работе во время лунной ночи.

пературы лунной ночи. Следовательно, во время лунной ночи должны быть закрыты по крайней мере две солнечные панели, в противном случае произойдет отказ тепловой природы, который не позволит перейти к следующей операции при наступлении дня. После того как операция закончена, химический источник активизируется термостатом, когда внешняя температура падает ниже определенного уровня.

Структурная схема надежности, соответствующая операции во время лунной ночи без химического источника, показана на рис. 9.13.

Имеем

$$\begin{aligned}
 R_T (\text{ночь}) &= R_C^3 \left[ \binom{3}{2} R_{S_1}^2 (1 - R_{S_1}) + R_{S_1}^3 \right] + \\
 &+ \binom{3}{2} \tilde{R}_C^2 (1 - R_C) R_L R_{S_2}^2 = R_C^3 [3R_{S_1}^2 - 2R_{S_1}^3] + \\
 &+ 3R_C^2 (1 - R_C) R_L R_{S_2}^2 = R_C^3 + 3R_C^2 (1 - R_C) R_L, \\
 &\text{если } R_{S_1}, R_{S_2} \approx 1.
 \end{aligned}$$

Для 360 час лунной ночи, положив, как и прежде,  $R_C = 0,99706$  и  $R_L = 0,98$ , будем иметь

$$R_T (\text{ночь}) = 0,99354. \quad (9.84)$$

Общая ожидаемая надежность солнечных панелей и насадок, предназначенных для лунных операций, равна произведению вероятностей безотказной работы, соответствующих дневному и ночному времени:

$$R_T (\text{лунные день и ночь}) = (0,99845) (0,99354),$$

$$R_T (\text{лунные день и ночь}) = 0,992. \quad (9.85)$$

**Толчки при взлете и посадке.** Накопленный опыт говорит о том, что при взлете и на активном участке траектории не замечается какой бы то ни было ненадежности солнечных панелей или насадок контроля температуры, так что в качестве достоверной оценки надежности за этот период можно взять 0,9999. Что касается толчков при посадке, то здесь можно принять оценку надежности в 0,999.

**Химический источник.** Химический источник представляет собой весьма простое устройство, обладающее достаточной надежностью. Можно полагать, что с учетом возможных опасностей во время полета и посадки надежность этого устройства будет по меньшей мере 0,995.

**Оценка надежности для всей операции системы контроля температуры.** Оценка надежности для всей операции получается как произведение отдельных оценок надежности, соответствующих полету, дневному и ночному времени работы солнечной контрольной панели, насадок и солнечных батарей, а также вероятности безотказной работы химического источника. Следовательно,

$$R_T \text{ (для полета, лунного дня и лунной ночи)} = \\ = (0,999902) \cdot (0,992) \cdot (0,9999) \cdot (0,999) \cdot (0,995) = 0,986.$$

#### 9.5. ИЗМЕНЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ КАК ФУНКЦИЯ ИЗМЕНЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДСИСТЕМ

Представляет большую важность задача нахождения распределения вероятностей одной, а возможно, и большего числа выходных характеристик системы, зависящих от входных переменных и «передаточных функций» подсистем. Например, сопло ракетного двигателя развивает установившуюся тягу, которая представляет собой функцию в основном независимых переменных\*, давления в камере  $p_c$  и площади критического сечения сопла  $A_t$ ; эта функция определяется соотношением

$$F = C_F p_c A_t, \quad (9.86)$$

где  $C_F$  — коэффициент тяги.

---

\* Строго говоря,  $C_F$  является функцией от  $p_c$  и  $A_t$ , а также других переменных; однако она относительно нечувствительна к их изменению при оптимальных условиях расширения. Далее,  $p_c$  является, строго говоря, функцией  $A_t$  в том смысле, что уровень давления в камере при установившемся режиме определяется размером площади критического сечения, но разброс давления в камере (от одного ракетного двигателя к другому) происходит главным образом за счет разброса скоростей потока струи или скоростей возгорания.

Другой пример — результирующее увеличение скорости, сообщаемой капсуле, которая должна попасть на Луну, последней ступенью твердотопливного ракетного двигателя. В предположении, что движение происходит в безвоздушном пространстве и гравитация отсутствует, в соответствующей системе единиц справедлива формула

$$V = gI_{sp} \log \left( 1 + \frac{W_p}{W_M} \right), \quad (9.87)$$

Величина  $I_{sp}$  представляет *удельный импульс* системы топливо—сопло,  $W_p$  — вес топлива,  $W_M$  — вес металлических частей ракетного двигателя + вес капсулы.

Важно, чтобы увеличение скорости было достаточным для достижения капсулой, отделившейся от ступени ракеты, некоторой окрестности Луны. С другой стороны, это увеличение не должно быть большим, чтобы небольшая капсула смогла выйти на лунную орбиту. Таким образом, последняя ступень должна сообщить капсуле строго определенное увеличение скорости. Изменчивость или неопределенность удельного импульса  $I_{sp}$  и весов  $W_p$  и  $W_M$  приводят к изменчивости скорости  $V$ . Возникает задача определения величины вариации  $V$  как функции от известных вариаций величин  $I_{sp}$ ,  $W_p$  и  $W_M$ ; это необходимо для решения обратной задачи: какими могут быть вариации последних величин, чтобы скорость  $V$  не выходила за допустимые пределы?

Обычные требуемые или допустимые пределы для одного или нескольких параметров можно выразить с помощью вероятности: мы ожидаем, что допуски будут удовлетворены с определенной вероятностью. Это можно сделать, если предположить, что все параметры обладают нормальным распределением. Последнее предположение, сочетаемое с методом вычисления математических ожиданий и дисперсий функций нескольких переменных, дает весьма полезный и практический подход к решению рассматриваемой задачи. Рассмотрим теперь общую теорию.

### 9.5.1. Метод вычисления средних и дисперсий функции нескольких переменных

В последующем изложении  $Y$  будет обозначать некоторую выходную характеристику, представляющую функцию нескольких случайных величин:  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Таким образом,

$$Y = H(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (9.88)$$

Средние и стандартные отклонения  $X_j$  будут обозначаться соответственно символами  $\bar{X}_j$  и  $\sigma_j$ . Предположим также, что между  $X_j$  возможна корреляция;  $\rho(X_i, X_j) \equiv \equiv r_{ij}$ . Однако следует заметить, что в большинстве встречающихся на практике случаев коэффициенты корреляции можно считать равными нулю. Во всяком случае, это будет справедливо, если  $X_j$  *попарно независимы*.

Математическое ожидание или среднее значение выхода  $Y$  дается приближенной формулой

$$\bar{Y} = H(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n). \quad (9.89)$$

Эта формула будет точной, если  $H$  представляет линейную функцию  $X_j$ , т. е.

$$H = \sum_{j=1}^n a_j X_j, \quad (9.90)$$

где  $a_j$  — постоянные. Обычно чем больше отклонение  $H$  от линейной функции (гиперплоскости) в области изменения  $X_j$ , тем большая ошибка получается при применении формулы (9.89). Однако если функция  $H$  обладает первыми частными производными в окрестности точки  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ , то в этой окрестности она будет близка к линейной функции. Если к тому же стандартные отклонения, а стало быть, и интервалы изменения случайных величин  $X_j$  настолько малы, что с высокой вероятностью эти величины будут находиться в малой окрестности их средних, формула (9.89) будет давать хорошее приближение. Если предположить, что в интервалах изменения  $X_j$  существуют и ограничены частные производные функции  $H$  второго порядка, то для ошиб-

ки формулы (9.89) можно указать грубую оценку, однако здесь мы не станем этого делать.

Дисперсия  $Y$  может быть получена посредством разложения  $H$  в ряд Тэйлора в окрестности точки  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ . При этом следует отбросить все члены, содержащие производные второго и высших порядков или произведения более, чем двух первых производных. Полученное таким образом выражение для  $Y - \bar{Y}$  возводится в квадрат и затем берется математическое ожидание с учетом того, что  $E(X_j - \bar{X}_j) = 0$ . В результате получаем формулу

$$\text{var } Y = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial X_j} \right)^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{i < j} \left( \frac{\partial H}{\partial X_i} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial X_j} \right) \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (9.91)$$

Все производные в (9.91) вычислены в точке  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$  и при взятии математического ожидания, о котором шла речь, рассматриваются, как постоянные. Отметим сходство формул (9.89) и (9.91) с формулами (8.15) и (8.16). Однако в последнем случае случайные величины  $X_j$  рассматривались как выборочные статистики, полученные по случайной выборке объема  $n$  из фиксированной совокупности. В данном случае имеет смысл говорить о том, что объем выборки увеличивается.

При  $n$ , стремящемся к бесконечности, выражения, соответствующие (9.89) и (9.91), становятся точными. В настоящей задаче, напротив,  $n$  фиксировано, так что точность формулы (9.91) зависит в некотором смысле от «гладкости» функции  $H$  и величины стандартных отклонений  $\sigma_j$ , а также, возможно, и от моментов  $X_j$  более высоких порядков.

**Упражнение 1.** Вывести формулы (9.89) и (9.91), следуя очерченному методу.

**Упражнение 2.** При помощи формулы (9.91) показать, что если  $Y = X_1^a X_2^b$ , то

$$\frac{\text{var } Y}{\bar{Y}^2} = a^2 \frac{\sigma_1^2}{\bar{X}_1^2} + b^2 \frac{\sigma_2^2}{\bar{X}_2^2} + 2ab \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\bar{X}_1 \bar{X}_2}.$$

**Упражнение 3.** Пусть  $Y = X^2$ . Найти точное значение математического ожидания  $\bar{Y}$  и ошибку в процентах, которая происходит от его замены значением, получаемым в формуле (9.89)



Пример. Пусть  $Y_1 = H_1(X_1, X_2)$ ,  $Y_2 = H_2(X_1, X_3)$ . Чему равна ковариация  $Y_1$  и  $Y_2$ , если  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  независимы? Согласно определению

$$\text{cov}(Y_1 Y_2) = E[(Y_1 - \bar{Y}_1)(Y_2 - \bar{Y}_2)].$$

Имеем

$$Y_1 - \bar{Y}_1 = \left(\frac{\partial H_1}{\partial X_1}\right)(X_1 - \bar{X}_1) + \left(\frac{\partial H_1}{\partial X_2}\right)(X_2 - \bar{X}_2) + \dots,$$

$$Y_2 - \bar{Y}_2 = \left(\frac{\partial H_2}{\partial X_1}\right)(X_1 - \bar{X}_1) + \left(\frac{\partial H_2}{\partial X_3}\right)(X_3 - \bar{X}_3) + \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned} (Y_1 - \bar{Y}_1)(Y_2 - \bar{Y}_2) &= \left(\frac{\partial H_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial H_2}{\partial X_1}\right)(X_1 - \bar{X}_1)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial H_1}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial H_2}{\partial X_1}\right)(X_2 - \bar{X}_2)(X_1 - \bar{X}_1) + \\ &+ \left(\frac{\partial H_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial H_2}{\partial X_3}\right)(X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3) + \\ &+ \left(\frac{\partial H_1}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial H_2}{\partial X_3}\right)(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3) + \dots \end{aligned}$$

Математические ожидания последних трех слагаемых обращаются в нуль, откуда получаем

$$\text{cov}(Y_1, Y_2) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial H_2}{\partial X_1}\right)\sigma_1^2 + \dots \quad (9.92)$$

Упражнение 4. Пусть в предыдущем примере  $H_1$  и  $H_2$  зависят только от  $X_1$ . Чему будет равен коэффициент корреляции  $Y_1$  и  $Y_2$ ?

$$\begin{aligned} \text{Отв. } \rho(Y_1, Y_2) &= \frac{\left(\frac{dH_1}{dX_1}\right)\left(\frac{dH_2}{dX_1}\right)\sigma_1^2}{\left|\left(\frac{dH_1}{dX_1}\right)\right|\left|\left(\frac{dH_2}{dX_1}\right)\right|\sigma_1^2} = \\ &= \begin{cases} +1, & \text{если } \left(\frac{dH_1}{dX_1}\right), \left(\frac{dH_2}{dX_1}\right) \text{ одного знака,} \\ -1, & \text{если } \left(\frac{dH_1}{dX_1}\right), \left(\frac{dH_2}{dX_1}\right) \text{ противоположных} \\ & \text{знаков.} \end{cases} \end{aligned}$$

### 9.5.2. Нахождение допусков

Предположим теперь, что для каждой из независимых случайных величин и выходного качества нужно установить допуски по отношению к их номинальному или среднему значению. Мы будем предполагать, что все величины распределены по нормальному закону и допуск случайной величины  $X$  сводится к указанию таких значений  $\bar{X}-a$ ,  $\bar{X}+a$ , что

$$P(\bar{X}-a \leq X \leq \bar{X}+a) = 1 - \alpha,$$

где  $\alpha$  — некоторое малое число, скажем 0,10; 0,05; 0,01 и т. д. Вероятность  $\alpha$  для всех величин, фигурирующих в постановке задачи, одна и та же. Таким образом, если мы укажем допуски для величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y$  в таком виде:

$$X_1 \pm a_1, X_2 \pm a_2, \dots, X_n \pm a_n, Y \pm b,$$

то это будет означать, что

$$P(X_j \geq \bar{X}_j + a_j) = \frac{\alpha}{2} \quad (9.93)$$

для всех  $X_j$  (аналогично и для  $Y$ ). Из формулы (9.93) получаем

$$P\left(\frac{X_j - \bar{X}_j}{\sigma_j} \geq \frac{a_j}{\sigma_j}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad (9.94)$$

и, поскольку  $(X_j - \bar{X}_j)/\sigma_j$  обладает нормированным нормальным распределением,

$$\frac{a_j}{\sigma_j} = K_{\alpha/2} = \frac{b}{\sigma_Y}, \quad (9.95)$$

где  $K_{\alpha/2}$  — уровень, превышаемый нормированной случайной величиной с вероятностью  $\alpha/2$ . При  $\alpha = 0,10; 0,05; 0,01; 0,005$  и  $0,001$  значения  $K_{\alpha/2}$  будут равны соответственно 1,645; 1,960; 2,576; 2,807 и 3,291 (с точностью до трех десятичных знаков).

Формула (9.95) позволяет выражать допуски через стандартные отклонения и стандартные отклонения через допуски.

Пример. Рассмотрим выражение тяги, заданное формулой (9.86). Обычные 99%-ные допуски ( $\alpha = 0,01$ ) имеют значения:

$$p_c = 35,2 \text{ см}^2 \pm 3\%;$$

$$A_t = 890,4 \text{ см}^2 \pm 2\%$$

и

$$C_F = 1,45$$

(предполагается постоянным, т. е. стандартное отклонение равно нулю).

Из этих данных находим [см. (9.94)]

$$\frac{\sigma_{p_c}}{p_c} = \frac{0,03}{2,576} = 0,0163,$$

$$\frac{\sigma_{A_t}}{A_t} = \frac{0,02}{2,576} = 0,00776.$$

По формуле (9.89) и на основании упражнения 2 п. 9.5.1 находим, что значение  $\sigma_F/\bar{F}$  составляет

$$\frac{\sigma_F}{\bar{F}} = [0,000266 + 0,000060]^{1/2} = 0,0181.$$

Таким образом, допуск для тяги равен  $(2,576)(0,0181)(100\%) = 4,66\%$ .

Упражнение 1. Найти максимальные допуски для диаметра горловины сопла (в дюймах), если заданы только допуски для давления  $p_c$  и тяги  $F$ , соответствующие последнему примеру. Чему будет равен максимальный допуск для диаметра горловины, если вместо одного сопла используется четыре одинаковых сопла?

Упражнение 2. Вернемся к примеру с последней ступенью ракеты, рассмотренному в начале этого параграфа. По заданным допускам увеличения скорости, удельного импульса и веса горючего вычислить максимальный допуск веса металлических частей ракеты вместе с капсулой. В качестве исходных значений можно принять

$$I_{sp} = 290 \pm 1\%,$$

$$W_p = 200 \pm 0,5\%,$$

$$V = 3140 \pm 1,5\%$$

(всюду предполагается, что допуски 99%-ные).

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Tables of the cumulative binomial probability distribution. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1953.

2. R. J. Buehler. Confidence intervals for the product of two binomial parameters. J. Am. Stat. Assoc., 1953, v. 52, p. 482—493.

3. G. P. Steck. Upper confidence limits for the failure probability of complex networks. Sandia Corporation Research Report, 1957, December (obtainable from OTS, Department of Commerce, Washington 25, D. C.).

4. Space technology laboratories. Inc., Report № TR-59-0000-00756. Tables of upper confidence limits on probability of 1, 2 and 3 component serial systems, 1959, July.

5. J. H. Bollman. Instructions and data for failure and prediction. Bell Telephone Laboratories Report, 1957, 11 October.

6. RCA technical report 59-46-1. Reliability Stress Analysis for Electronic Equipment, 1959, 15 January.

7. A. Albert. A measure of the effort required to increase reliability. Technical Report № 43, 1958, 5 November, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, Contract №№ 60nr-25140 (NR 342-022).

8. Г. Крамер. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.

9. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. Operational methods in applied mathematics, 2d ed. Oxford University Press, 1943.

10. L. A. Gioian and R. H. Myers. Redundancy considerations in space and satellite systems. Proc. 7th National Symposium on Reliability and Quality Control, Philadelphia, Pa., 1961, 9—11 January.

## ДСПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Белов Ф. И., Соловейчик Ф. С. Вопросы надежности радиоэлектронной аппаратуры. Госэнергоиздат, 1961.

Bellman R. and Dreyfus S. Dynamic programming and the reliability of multicomponent devices. Operations Research, 1958, v. 6, 2, April, p. 200—206.

Brown H. B. The role of specification in predicting equipment performance. Proc. 2d National Symposium on Quality Control and Reliability, Washington, D. C., 1956, 9—10 January, p. 133—148.

Cohen G. D. Predicting performance failure. Machine Design, 1957, v. 29, 20, 3, October, p. 106—111.

Cox D. R. and Smith W. L. On the superposition of renewal processes. Biometrika, 1954, v. 41, p. 91—99.

Creveling C. J. Increasing the reliability of electronic equipment by the use of redundant circuits. Proc. IRE, 1956, v. 44, April, p. 509—515.

DiToro M. J. Reliability criterion for constrained systems. IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1956, PGRQC-8, September, p. 1—6.

Drenick R. F. The failure law of complex equipment. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1960, v. 8, № 4, December, p. 680—690.

Firstman, Sidney I. The use of reliability estimates in the design of missile prelaunch checkout equipment. Proc. 6th Joint Military-Industry Guided Missile Reliability Symposium, 1960, 15—17 February, p. 2—147.

Gordon R. Optimum component redundancy for maximum system reliability. Operations Research, 1957, v. 5, 2, April, p. 229—243.

Howard W. J. Chain reliability: a simple failure model for complex mechanisms. RAND Report № RM-1058, 1953, 27 March.

Kahn L. B. A statistical model for evaluating the reliability of safety systems for plants manufacturing hazardous products. *Technometrics*, 1959, v. 1, 3, August, p. 293—307.

Krohn, Charles A. Improve circuit reliability. *Electronic Design*, 1959, v. 7, 7, 1 April, p. 20—25.

McLean J. P. and Moskowitz F. Some reliability aspects of systems design. *IRE Trans. Reliability and Quality Control*, 1956 PGRQC-8, September, p. 7—35.

Meltzer, Sanford A. Designing for reliability. *IRE Trans. Reliability and Quality Control*, 1956, PGRQC-8, September, p. 36—43.

Moan O. B. Reliability of series-parallel combinations. *Control Eng.*, 1957, v. 4, April, p. 99—100.

Morrison, S. James. The study of variability in engineering design. *Applied Statistics*, 1957, v. 6, 2, June, p. 133—138.

Wagner D. H. Numerical reliability requirements (AGREE). *Proc. 3rd Natl. Symp. Reliability and Quality Control in Electronics*, IRE, 1957, January, p. 154—158.

Wehrfritz, Frank W. Uses of the propagation of errors. *National Convention Trans., ASQC*, 1956, p. 673—676.

Welker E. L. and Bradley C. E. A general method for determining logistic requirements for a satellite system. *Proc. 6th Joint Military-Industry Guided Missile Reliability Symposium*, 1960, 15—17 February, p. 2—351 to 2—378.

Whiteman I. R. Reliability starts with the design. *IRE Proc. 5th Natl. Symp. on Reliability and Quality Control in Electronics*, 1959, 12—14 January, p. 98—102.

## Приложение 9А

### Методика распределения значений надежности

В § 2.8 уже отмечалась важность задачи распределения значений надежности. В приложении описана методика, которой можно следовать в процессе осуществления программы конструирования. В результате применения этой методики надежность увеличивается до требуемого предела.

Эта методика основана на одной теореме А. Альберта [7], которую мы разъясним ниже.

Предполагается, что на любом этапе осуществления программы конструирования систему можно разбить на некоторое число подсистем и исходить из начальной надежности каждой подсистемы, полученной, если это возможно, в результате испытаний подсистем. Пусть  $R_1, R_2, \dots, R_n$  обозначают надежности подсистем. Предположим, что выполняется правило перемножения (9.7), т. е. надежность  $R$  системы имеет вид

$$R = R_1 R_2 \dots R_n. \quad (9A.1)$$

Пусть  $R$  обозначает требуемую надежность системы, причем  $\bar{R} > R$ . Тогда требуется повысить *хотя бы* одно значение  $R_i$ , чтобы в формуле (9А.1) достигнуть значения  $\bar{R}$ . С этой целью необходимо затратить некоторое *усилие*, которое нужно каким-то путем распределить между подсистемами. Величина усилия будет некоторой функцией числа испытаний, количества людских ресурсов, используемых для данной задачи и т. д. При весьма общих предположениях относительно свойств подобной *функции усилий* в [7] показано, что методика повышения  $R$  до значения  $\bar{R}$  сводится к следующему.

1. Надежности  $R_1, R_2, \dots, R_n$  располагаются в убывающем порядке. Для сокращения записи мы будем считать, что их нумерация соответствует случаю, когда

$$R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_n. \quad (9A.2)$$

2. Каждая из надежностей  $R_1, R_2, \dots, R_{K_0}$  увеличивается до *одного и того же* значения  $\bar{R}_0$ ; надежности  $R_{K_0+1}, \dots, R_n$  не увеличиваются. Номер  $K_0$  выбирается из следующего соображения.

$K_0$  равен максимальному значению  $j$ , для которого

$$R_j < \left[ \frac{\bar{R}}{\prod_{i=j+1}^{n+1} R_i} \right]^{1/j} = r_j, \quad (9A.3)$$

где  $R_{n+1} = 1$  по определению. Значение  $\bar{R}_0$  определяется как

$$\bar{R}_0 = \left[ \frac{\bar{R}}{\prod_{j=K_0+1}^{n+1} R_j} \right]^{1/K_0}. \quad (9A.4)$$

3. Очевидно, теперь надежность системы будет равна  $\bar{R}$ , поскольку новая надежность равна

$$\bar{R}_0^{K_0} R_{K_0+1} \dots R_n = \bar{R}_0^{K_0} \prod_{j=K_0+1}^{n+1} R_j. \quad (9A.5)$$

Учитывая (9А.4), получаем, что новая надежность равна

$$\bar{R}. \quad (9A.6)$$

Пример. Пусть  $R_1 = 0,70$ ,  $R_2 = 0,80$ ,  $R_3 = 0,90$ . Тогда  $R = 0,504$ . Требуемое значение надежности системы  $\bar{R} = 0,65$ . Предположим, что мы не стали выбирать  $K_0$  по формуле (9А.3), а произвольно положили  $K_0 = 1$  и использовали формулу (9А.4). Тогда мы получим

$$\bar{R}_0 = \left[ \frac{0,65}{(0,80)(0,90)(1,00)} \right]^{1/1} = 0,903. \quad (9A.7)$$

Имеем

$$\bar{R} = 0,65 = (0,903)(0,80)(0,90),$$

что и требовалось. Однако на основании теоремы можно заключить, что усилие, необходимое для повышения надежности, распределено не оптимальным образом. Другими словами, приложено большее усилие, чем это требовалось. Определим теперь  $K_0$  посредством (9А.3). С этой целью вычислим три величины:

$$r_1 = \left( \frac{\bar{R}}{R_2 R_3 (1,00)} \right)^1, \quad r_2 = \left( \frac{\bar{R}}{R_3 (1,00)} \right)^{1/2}, \quad r_3 = \left( \frac{\bar{R}}{(1,00)} \right)^{1/3}. \quad (9A.8)$$

Имеем

$$r_1 = 0,903,$$

$$r_2 = (0,722)^{1/2} = 0,850,$$

$$r_3 = (0,65)^{1/3} = 0,866.$$

Так как  $R_1 < r_1$ ,  $R_2 < r_2$ ,  $R_3 > r_3$ , то  $K_0 = 2$ ; в этом случае наибольшее значение индекса  $j$  со свойством  $R_j < r_j$  равно 2. Далее, учитывая (9А.4),  $\bar{R}_0 = (0,65/0,90) = (0,722)^{1/2} = 0,850$ ; это означает, что усилия необходимо распределить следующим образом. Надежность подсистемы № 1 нужно увеличить с 0,70 до 0,850, а подсистемы № 2 — с 0,80 до 0,850; надежность подсистемы № 3 нужно оставить на прежнем уровне. В результате надежность всей системы будет равна  $0,65 = (0,850)^2(0,90)$ .

Когда процедура распределения (А)—(С), проиллюстрированная на примере, завершена, результаты примененных усилий через некоторое время следует проверить. Например, когда после первого предсказания надежности, пройдет 6 месяцев, а надежность должна быть обеспечена, скажем, через 18 месяцев, мы можем в результате повторных испытаний получить оценки  $R_1 = 0,80$ ;  $R_2 = 0,87$ ;  $R_3 = 0,90$  (используя предыдущий пример). Действительно, вследствие различных причин

часть усилий могла быть приложена к повышению надежности подсистемы 3, в результате чего ее надежность должна повыситься, скажем, до 0,93, хотя в первоначальной программе такое повышение предусмотрено не было. С другой стороны, могла увеличиться точность оценок надежности. В этом случае методику распределения надежности следует применить повторно; в результате получим другие требования к подсистемам и другое распределение усилий для выполнения этих требований. Через определенный период времени программа должна повторяться и в случае необходимости должно осуществляться перераспределение.

До этого мы не конкретизировали свойств функции усилий, использованной в [7] для получения описанной методики. Такую конкретизацию можно произвести следующим образом.

Прежде всего с каждой подсистемой связана *одна и та же* функция усилий  $G(R_i, \bar{R}_i)$ , являющаяся мерой усилий, необходимых для повышения надежности  $i$ -й подсистемы с  $R_i$  до  $\bar{R}_i$ . Предположение о том, что функция усилий для всех подсистем одна и та же, является недостатком; тем не менее это дает хорошее первое приближение к задаче. Остальные предположения сводятся к следующему:

1.  $G(x, y) \geq 0$ .

2.  $G(x, y)$  не убывает по  $y$  при фиксированном  $x$  и не возрастает по  $x$  при фиксированном  $y$ . Например,

$$G(0,35; 0,65) \leq G(0,35; 0,75)$$

и

$$G(0,25; 0,65) \geq G(0,35; 0,65).$$

3. Если  $x \leq y \leq z$ , то  $G(x, y) + G(y, z) = G(x, z)$ . Это означает, что величина усилий, необходимого для повышения надежности с  $x$  до  $z$ , равна сумме величины усилий для повышения на надежности с  $x$  до  $y$  и с  $y$  до  $z$ .

4.  $G(0, x)$  обладает производной  $h(x)$ , причем  $xh(x)$  строго возрастает в интервале  $0 < x < 1$ .

Как показано в [7], в этих предположениях существует единственное решение задачи, и оно дается проце-



дурой  $A-C$ , коль скоро требуется минимизировать выражение

$$\sum_{i=1}^n G(R_i, \bar{R}_i) \quad (9A.9)$$

при условиях

$$\prod_{i=1}^n \bar{R}_i = \bar{R}. \quad (9A.10)$$

Единственное решение будет иметь вид

$$\bar{R}_i = \begin{cases} \bar{R}_0, & i \leq K_0, \\ R_i, & i > K_0, \end{cases} \quad (9A.11)$$

где  $K_0$  определяется соотношением (9A.3), а  $\bar{R}_0$  — соотношением (9A.4) [предполагается, что произведено упорядочение вида (9A.2)].

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что

$$G(x, y) = \begin{cases} a \log \frac{y+b}{x+b}, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \begin{matrix} a, b > 0, \\ x \geq y \end{matrix} \end{cases}$$

удовлетворяет сформулированным требованиям к функции  $G(x, y)$ . Предположим, что мы ввели новое ограничение:  $\lim_{y \rightarrow 1} G(x, y) = +\infty$  ( $0 \leq x < 1$ ). Является ли это ограничение разумным? Показать, что функция

$$G(x, y) = \begin{cases} a \log \frac{1-x}{1-y}, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \begin{matrix} a > 0, \\ x \geq y \end{matrix} \end{cases}$$

удовлетворяет этому дополнительному ограничению.

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что  $G(x, y)$  должна иметь вид  $H(y) - H(x)$ .

У к а з а н и е. Установить, что

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial G(0, y)}{\partial y},$$

т. е. эта функция зависит только от  $y$ . Затем установить равенство  $G(x, x) = 0$ , исходя из первоначальных предположений. На основании этих рассуждений вывести требуемый результат.

У п р а ж н е н и е 3. Доказать, что усилие, необходимое для перехода от (0,70; 0,80; 0,90) к (0,903; 0,80; 0,90) больше, чем то усилие, которое требуется для получения значений (0,85; 0,85; 0,90). В качестве функции усилий принять

$$G(x, y) = y^{1/2} - x^{1/2}.$$

### Надежность системы с заменой элементов

В приложении показано, что надежность сложной системы можно в некотором смысле описать показательным распределением наработки до отказа.

Предположим, что имеется последовательная система с большим числом элементов, законы возникновения отказов которых независимы (см. § 9.2). Все элементы имеют одну и ту же функцию распределения  $F(t)$  наработки между отказами с плотностью  $f(t)$ . Если какой-либо элемент отказывает, он тотчас же заменяется новым.

Элемент, который ставится взамен отказавшего, является новым, однако другие элементы в это время уже имеют некоторую наработку, и, стало быть, их наработка до отказа может быть меньше, чем у новых элементов. В процессе работы системы отказывают все новые и новые элементы; они также заменяются, так что система всегда находится в «рабочем состоянии»; но в любой момент времени элементы будут обладать различным возрастом.

В начале работы системы, когда все элементы новые (их возраст равен 0), надежность (вероятность отсутствия отказов) будет функцией от  $t$  вида

$$R(t) = [1 - F(t)]^N, \quad (9Б.1)$$

где  $N$  — число элементов. Но если в начальный момент времени возраст элементов положителен, формулу (9Б.1) следует видоизменить так, чтобы учитывался этот возраст. Если в некоторый момент времени  $t_0$  наработки элементов составляют  $x_1, \dots, x_N$ , то (условная) вероятность того, что система проработает еще по меньшей мере  $t$  единиц времени, равна

$$R(t; t_0 | x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N \frac{1 - F(x_j + t)}{1 - F(x_j)}. \quad (9Б.2)$$

Здесь  $x_j$  представляют случайные величины, зависящие от выбранного момента  $t_0$  и функции распределения  $F$  наработки между отказами. Если будут известны плот-

ности вероятности наработок  $x_j$ ,  $g(x_j; t_0)$ , то безусловная вероятность того, что система проработает еще время  $t$ , будет равна

$$R(t; t_0) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} R(t; t_0 | x_1, \dots, x_N) \prod_{j=1}^N g(x_j; t_0) dx_1 \dots dx_N, \quad (9Б.3)$$

что после подстановки (9Б.2) дает

$$R(t; t_0) = \left[ \int_0^{\infty} \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} g(x; t_0) dx \right]^N. \quad (9Б.4)$$

Ниже будет выведена формула для плотности  $g(x; t_0)$  (9Б.22). Здесь мы рассмотрим только предельное распределение возраста при  $t_0 \rightarrow \infty$ . Из формулы (9Б.22) и замечания после (9Б.29) имеем

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} g(x; t_0) = \frac{1-F(x)}{\mu}, \quad (9Б.5)$$

где  $\mu$  — средняя наработка на отказ, т. е. среднее распределение  $F$ .

Другими словами, если взять произвольный элемент и посмотреть на возраст элемента, который будет поставлен на его место через длительное время, то возраст этого элемента будет находиться в интервале  $(x, x+dx)$  с вероятностью приблизительно  $[1-F(x)]dx/\mu$ . [Правая часть (9Б.5), очевидно, будет плотностью вероятности, так как ее интеграл в пределах от 0 до  $\infty$  равен 1]]. Подстановка (9Б.5) в (9Б.4) дает

$$R(t; \infty) = \frac{1}{\mu^N} \left\{ \int_0^{\infty} [1-F(x+t)] dx \right\}^N. \quad (9Б.6)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$[R(t; \infty)]^{1/N} \equiv \tilde{R} = \int_0^{\infty} \frac{1-F(x+t)}{\mu} dx. \quad (9Б.7)$$

Сделаем замену  $x + t = y$ ; тогда  $dx = dy$  и (9Б.7) примет вид

$$\tilde{R} = \int_t^{\infty} \frac{1 - F(y)}{\mu} dy \quad (9Б.8)$$

или

$$\tilde{R} = \int_0^{\infty} \frac{1 - F(y)}{\mu} dy - \int_0^t \frac{1 - F(y)}{\mu} dy = 1 - \frac{t}{\mu} + \int_0^t \frac{F(y)}{\mu} dy. \quad (9Б.9)$$

$$(9Б.10)$$

Предположим теперь, что распределение  $F$  наработки между отказами обладает дисперсией  $\sigma^2$ . Можно показать (см. [8], стр. 256), что при  $y < \mu$

$$F(y) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (\mu - y)^2}. \quad (9Б.11)$$

(Это неравенство справедливо для любой функции распределения  $F$  со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ ).

Отсюда

$$\int_0^t \frac{F(y)}{\mu} dy \leq \frac{1}{\mu} \int_0^t \frac{\sigma^2 dy}{\sigma^2 + (\mu - y)^2}. \quad (9Б.12)$$

Интеграл в правой части (9Б.12) можно преобразовать, положив  $(\mu - y)/\sigma = x$ :

$$\frac{\sigma}{\mu} \int_{(\mu-t)/\sigma}^{\mu/\sigma} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sigma}{\mu} \left[ \arctg\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \arctg\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right) \right]. \quad (9Б.13)$$

Далее, поскольку

$$\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B},$$

это выражение принимает вид

$$\frac{\sigma}{\mu} \arctg \left[ \frac{\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu-t}{\sigma}}{1 + \left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)} \right] = \frac{\sigma}{\mu} \arctg \left[ \frac{\frac{\sigma t}{\mu^2}}{\left[\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 + 1 - \frac{t}{\mu}\right]} \right] \leq \quad (9Б.14)$$

$$\leq \frac{\sigma}{\mu} \arctg \left[ \frac{\frac{\sigma t}{\mu^2}}{1 - \frac{t}{\mu}} \right]. \quad (9Б.15)$$

Так как  $\arctg x \leq x$ , то последнее выражение не превосходит

$$\frac{\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}{\frac{\mu}{t} - 1}.$$

Следовательно,

$$\tilde{R} = 1 - \frac{t}{\mu} + H, \quad (9Б.16)$$

где

$$H \leq \frac{\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}{\frac{\mu}{t} - 1}. \quad (9Б.17)$$

Отсюда видно, что для фиксированного  $t$ ,  $\mu = \alpha N$  и  $\sigma = o(N)H$  будет ограниченной функцией более высокого порядка малости, чем  $N^{-1}$ . Поскольку при  $N \rightarrow \infty$

$$\left[1 - \frac{t}{\alpha N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right]^N \rightarrow e^{-t/\alpha}, \quad (9Б.18)$$

то

$$R(t; \infty) \rightarrow e^{-t/\alpha}. \quad (9Б.19)$$

Таким образом, для большого, но фиксированного  $N$  будет

$$R(t; \infty) \approx e^{-tN/\mu}, \quad (9Б.20)$$

что и требовалось показать.

Если система содержит  $N_1$  элементов с функцией распределения наработки между отказами  $F_1$ ,  $N_2$  элементов с соответствующей функцией  $F_2$  и т. д., то естественно ожидать, что

$$R(t; \infty) \approx \exp \left[ -t \left( \frac{N_1}{\mu_1} + \frac{N_2}{\mu_2} + \dots \right) \right], \quad (9Б.21)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \dots$  — средние распределений соответственно  $F_1, F_2, \dots$ .

Ранее было указано, что предельная плотность вероятности возраста дается формулой (9Б.5). Можно

показать, что распределение возраста элементов в произвольный момент  $t_0$  при условии, что в начальный момент элементы были новыми, выражается формулой

$$g(x; t_0) = \begin{cases} u(t_0 - x)(1 - F(x)), & x < t_0, \\ \delta(x - t_0)(1 - F(x)), & x = t_0, \\ 0, & x > t_0, \end{cases} \quad (9Б.22)$$

где  $\delta(x - t_0)$  — дельта-функция Дирака, для которой

$$\int \delta(x - t_0)[1 - F(x)] dx = 1 - F(t_0),$$

а  $u(t)$  — вероятность замены в момент  $t$  (это не плотность вероятности);  $u(t)$  удовлетворяет уравнению восстановления

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t - y)f(y) dy. \quad (9Б.23)$$

Уравнение (9Б.23) можно интерпретировать следующим образом:  $u(t)dt$  есть вероятность какого-нибудь восстановления в интервале времени  $(t, t + dt)$ , причем ничего не говорится о числе восстановлений до момента  $t$ . С другой стороны,  $f(t)dt$  равна вероятности того, что в интервале  $(t, t + dt)$  произойдет *первое* восстановление. Подынтегральное выражение в (9Б.23), умноженное на  $dt$ , представляет вероятность того, что первое восстановление произойдет между  $y$  и  $y + dy$ , после чего произойдет восстановление в интервале времени  $(t - y, t - y + dt)$ .

В результате интегрирования этого выражения по  $y$  получится полная вероятность, включающая все возможные случаи восстановления в интервале  $(t, t + dt)$ , за исключением того случая, когда в этом интервале восстановление произойдет *впервые*. Последний случай учитывается первым слагаемым правой части (9Б.23), умноженным на  $dt$ .

Таким образом, разделив обе части на  $dt$ , получим формулу (9Б.23).

Формулу (9Б.22) можно объяснить следующим образом. Вероятность того, что возраст элемента в момент  $t_0$  лежит в интервале  $(x, x + dx)$ , равна вероятности того,

что элемент был заменен в момент  $t_0 - x$  и он отказал на протяжении времени  $x$ . Это справедливо при  $x < t_0$ . Поскольку предполагается, что в нулевой момент времени элемент был новым, плотность вероятности  $g(x; t_0)$  при  $x > t_0$  должна быть равна 0 (элемент не может иметь возраст, превосходящий  $t_0$ ). При  $x = t_0$  использованное выражение дает вероятность того, что элемент проработает ровно  $t_0$  (в обозначении плотности).

Общая теория говорит о том, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1/\mu$ ; таким образом, (9Б.5) следует из (9Б.22), если положить  $t_0 \rightarrow \infty$ . Чтобы установить соотношение  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1/\mu$ , применим к (9Б.23) преобразование Лапласа:

$$\bar{u}(s) = \bar{f}(s) + \bar{u}(s)\bar{f}(s), \quad (9Б.24)$$

где

$$\bar{u}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt, \quad (9Б.25)$$

т. е. преобразованию Лапласа  $u(t)$ .

Аналогично определяется и  $\bar{f}(s)$ . Уравнение (9Б.24) можно переписать следующим образом:

$$s\bar{u}(s) = \frac{s\bar{f}(s)}{1 - \bar{f}(s)}. \quad (9Б.26)$$

Используем известную теорему о преобразованиях Лапласа ([9], стр. 256), согласно которой

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\bar{h}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t), \quad (9Б.27)$$

если  $\bar{h}(s)$  — преобразование Лапласа  $h(t)^*$ .

Ввиду того, что  $f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , из формулы (9Б.27) получаем, что  $s\bar{f}(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt = 1. \quad (9Б.28)$$

\* См. В. А. Диткин, А. П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Физматгиз, 1961. (Прим. перев.)

Чтобы найти предел  $\bar{s}\bar{f}(s)/1 - \bar{f}(s)$ , продифференцируем отдельно числитель и знаменатель. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{u}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} -s - \frac{\bar{f}(s)}{\bar{f}'(s)} = \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(s)}{\bar{f}'(s)} = \frac{1}{\int_0^{\infty} t f(t) dt} = \frac{1}{\mu}. \end{aligned} \quad (9Б.29)$$

Из (9Б.27) мы видим теперь, что  $u(t) \rightarrow 1/\mu$  при  $t \rightarrow \infty$ . Рассмотрим следующий пример.

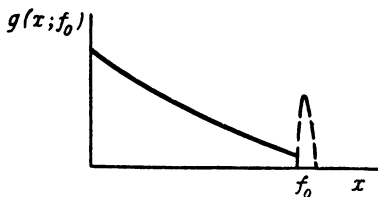


Рис. 9Б.1.

Пусть  $f(t) = (1/\mu)e^{-t/\mu}$ , тогда  $\bar{f}(s) = 1/(\mu s + 1)$ ,  $\bar{u}(s) = 1/\mu s$ , а значит,  $u(t) = 1/\mu$ . Из (9Б.22) имеем

$$g(x; t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & x < t_0, \\ \delta(x - t_0) e^{-x/\mu}, & x = t_0, \\ 0, & x > t_0. \end{cases}$$

Эта плотность вероятности имеет вид, как на рис. 9Б.1. „Пик“ на рис. 9Б.1 сосредоточивает вероятность  $e^{-t_0/\mu}$ , так что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(x; t_0) dx &= \int_0^{t_0} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} dx + e^{-t_0/\mu} + 0 = \\ &= 1 - e^{-t_0/\mu} + e^{-t_0/\mu} = 1. \end{aligned}$$

В качестве второго примера положим

$$f(t) = \frac{4t}{\mu^2} e^{-2t/\mu}. \quad (9Б.30)$$



Имеем

$$\bar{f}(s) = \frac{4}{(\mu s + 2)^2},$$

откуда

$$\bar{u}(s) = \frac{4}{\mu s (\mu s + 4)} = \frac{1}{\mu s} - \frac{1}{\mu s + 4}$$

и

$$u(t) = \frac{1}{\mu} (1 - e^{-4t/\mu}). \quad (9Б.31)$$

Плотность вероятности возрастает, при  $x < t_0$  будет равна

$$g(x; t_0) = \frac{1}{\mu} (1 - e^{-4(t_0-x)/\mu}) e^{-2x/\mu} \left(1 + \frac{2x}{\mu}\right). \quad (9Б.32)$$

Подставив (9Б.32) в (9Б.4) [или непосредственно (9Б.5)], мы найдем, что при  $t_0 \rightarrow \infty$

$$\tilde{R} = \left(1 + \frac{t}{\mu}\right) e^{-2t/\mu}. \quad (9Б.33)$$

При малых  $t/\mu$

$$\tilde{R} = e^{-t/\mu} + o\left(\frac{t}{\mu}\right). \quad (9Б.34)$$

Таблица 9Б.1

Относительная ошибка для обоих приближений

$\frac{t}{\mu}$	$\tilde{R} \left(1 + \frac{t}{\mu}\right) e^{-\frac{2t}{\mu}}$	$e^{-\frac{2t}{\mu}}$	Ошибка, %	$e^{-\frac{t}{\mu}}$	Ошибка, %
0,5	0,552	0,368	-33	0,607	+10
0,2	0,804	0,670	-17	0,818	+1,7
0,1	0,900	0,818	-9,1	0,904	+0,44
0,05	0,950	0,905	-4,7	0,9512	+0,13

Заметим, что  $e^{-\frac{t}{\mu}}$  приближает  $\tilde{R}$  лучше, чем  $e^{-2t/\mu}$ , так как в последнем случае ошибка при  $\frac{t}{\mu} \rightarrow 0$  будет  $O\left(\frac{t}{\mu}\right)$ .

В табл. 9Б.1 показана относительная ошибка в процентах для обоих приближений.

Приведенные результаты в некотором смысле обосновывают использование показательного распределения наработки между отказами для системы, состоящей из большого числа элементов, возраст которых из-за предыдущих отказов и восстановлений смешан.

На результатах настоящего приложения основывается выбор метода профилактики, т. е. правила замены элементов с целью предотвращения или исключения отказов. Можно исследовать также влияние соответствующего периода профилактики или проверки функционирования элементов. Однако если от устройства требуется непрерывная работа, то профилактическая замена элементов приведет к тому же результату, что и отказ элементов. В последнем случае желательно иметь два или больше комплектов устройства (например, комплекты РЛС), чтобы в любой момент времени один из них работал, но и в этом случае может случиться, что все комплекты одновременно будут находиться в состоянии отказа; вероятность такого события будет тем меньшей, чем больше число комплектов.

## ИСПЫТАНИЯ НА НАДЕЖНОСТЬ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ РЕШЕНИЯ

### 10.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе будут рассмотрены *выборочные планы* для оценки выполнения требований по надежности. Между этим вопросом и результатами гл 7 и 8, касающимися оценки и доверительных интервалов, существует тесная связь. Выборочные процедуры, которые рассматривались выше, основываются на случайной выборке из качественных (успех, отказ) и количественных совокупностей (например, распределения наработки до отказа). В любом случае задача состояла в том, чтобы оценить функцию параметров основного распределения, которой придается смысл надежности  $R$ ; это может быть, например, вероятность успеха или вероятность того, что время наработки до отказа будет больше  $T$ . Точность оценки выражается при помощи доверительного предела, обычно нижнего одностороннего предела  $\hat{R}_L$  функции  $R$ ; в результате обработки наблюдений получается вывод:  $\hat{R}_L < R$ . При этом фиксируется априорная вероятность  $\gamma$  (доверительный уровень) правильности статистического вывода (или же требуется, чтобы эта вероятность была не меньше  $\gamma$ )\*.

---

\* Здесь мы будем употреблять обозначения, которые введены в § 10.6 и последующих параграфах. Однако в § 10.3 символом  $R_2 \equiv 1 - p_2$  (как в обычной биномиальной выборке) обозначается допустимое значение надежности. Далее, в § 10.3  $\beta$  обозначает риск ошибки, связанной с выводом  $R_2 < R$ . Следовательно, в этой главе обозначения  $(R_L, \beta)$  и  $(R_L, 1 - \gamma)$  имеют один и тот же смысл.

Другими словами, в серии выводов подобного рода, основанных на наблюдениях выборок, можно ожидать, что  $100\gamma\%$  (или не меньше  $100\gamma\%$ ) выводов будет верными. С другой стороны,  $100(1-\gamma)$  представляет риск (в %) ошибочности любого такого вывода.

Если заранее условлено, что в случае вывода  $\hat{R}_L \leq R$  производится некоторое действие  $A$ , то когда в действительности  $R \leq \hat{R}_L$ , действие  $A$  может привести к серьезным и даже опасным последствиям.

Точнее, мы должны дать значение  $\hat{R}_L$  и максимальный риск ошибки, связанной с выводом  $\hat{R}_L < R$ . Таким образом, задача состоит в том, чтобы определить выборочный план, сочетаемый с *критерием*, зависящим от результатов наблюдений, согласно которому мы принимаем или не принимаем решение  $\hat{R}_L < R$ . Если подобное соотношение в действительности не выполняется, то выборочный план должен обеспечивать, чтобы вероятность решения  $\hat{R}_L < R$  была равна или не превосходила заданной величины.

Другая, эквивалентная, постановка задачи формулируется следующим образом. *Надежность  $\hat{R}_L$  должна быть продемонстрирована с достоверностью  $\gamma$* . Величина  $1-\gamma$  — это тот же самый максимальный риск. Будет показано, что задание  $\hat{R}_L$  и  $\gamma$  неоднозначно определяет выборочный план. Этот вопрос рассматривается в § 10.3 и последующих параграфах настоящей главы.

В § 10.2 с весьма общей точки зрения рассматриваются биномиальные выборки; это обобщает результаты § 6.6.

В § 10.4 представлен известный метод последовательного анализа Вальда. В частности, оптимальное свойство метода Вальда (минимум среднего числа наблюдений) по существу вытекает из материала § 10.2.

В § 10.5—10.9 представлены выборочные планы, основанные на распределениях времени безотказной работы; основное внимание уделено при этом показательному распределению.

В значительной степени теория и приложения выборочных планов, основанных на показательном распределении, обязаны своим развитием Б. Эпстейну и М. Собелу [11]

В § 10.6 изучаются также выборочные планы, основанные на более общем распределении времени безотказной работы, рассмотренном в п. 6.8.3.1.

Выборочные планы, основанные на нормальном распределении, здесь не представлены; они обстоятельно описаны в литературе, особенно в [1—3].

### **10.1.1. Неслучайные факторы, влияющие на определение выборочных планов**

Вообще говоря, чем большие информации используются при принятии решения или осуществлении какого-то действия, тем меньше вероятность ошибки.

Чтобы увеличить информацию, а следовательно, уменьшить вероятность ошибки, можно увеличить объем выборки или число испытаний, на основании которых принимается решение. Однако представим себе, что величина риска — это убыток, выраженный в долларах. Если предположить, что наблюдения также обладают стоимостью в долларах, попытка уменьшить риск неверного решения до пренебрежимо малой величины и таким образом предотвратить возможный убыток сведется на нет за счет стоимости наблюдений.

Стоимость — не единственный неслучайный фактор, влияющий на определение выборочного плана. Перед тем как задать любой план, следует учитывать реальные особенности процесса. Учет их всегда ведет к сужению допустимого множества выборочных планов. Например, по типу испытываемого оборудования и методу испытаний определяется, будет ли использоваться качественная или количественная информация. Конечно, может быть определенная свобода выбора вида информации. Например, в случае, когда испытываемые изделия работают непрерывно, желательно замерять наработки до отказов; однако установка автоматического устройства, которое фиксировало бы все эти величины, может оказаться дорогостоящей или нецелесообразной. Поэтому довольствуются подсчетом отказавших изделий через дискретные периоды (например, каждое утро).

Это изменяет выборочную модель. Характеристики отказов оборудования и сложность условий эксплуатации могут быть такими, что невозможно приписать наработке до отказа какое-либо распределение; в этом случае наиболее реалистическим будет наблюдение успехов и отказов.

Дополнительные ограничения, сильно влияющие на определение выборочного плана, исходят из того, каким образом возможно испытывать элементы и насколько быстро нужно выдать результат испытаний. Например, в зависимости от того, имеются ли все изделия в готовом виде или они вырабатываются последовательно, может оказаться более или менее выгодным последовательный метод. С другой стороны, для обеспечения высокой достоверности может оказаться необходимым бóльший объем наблюдений, чем получаемый в результате испытания отдельных элементов в порядке их поступления.

Метод усечения выборки зависит от таких факторов, как необходимость окончания испытаний к определенному сроку (например, при наличии расписания режима работ); наличие ограниченного числа изделий, отпущенных на испытания; ограничение времени испытаний. Эти факторы, типичные для техники, не являются единственными.

Таким образом, существо задачи установления плана испытаний на надежность состоит в том, чтобы с учетом ограничений, связанных с реальными условиями, добиться в некотором смысле наименьшего риска неправильных решений.

## **10.2. МЕТОДЫ ИСПЫТАНИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ, ОСНОВАННЫЕ НА БИНОМИАЛЬНОЙ ВЫБОРКЕ**

Рассмотрим методы принятия одного из двух возможных решений на основании биномиальной выборки. Одно решение состоит в том, чтобы принять изделие как достаточно надежное для определенных целей; второе решение, противоположное, состоит в том, чтобы забраковать изделие как недостаточно надежное.

Биномиальная выборка, или, как мы будем говорить, биномиальный выборочный план, состоит в испы-

тании совокупности изделий по одному; другими словами, производится последовательность испытаний, результатом каждого из которых может быть успех или отказ. Вероятность отказа в каждом испытании постоянна и равна  $p$ , и результат любого испытания статистически независим от результатов любых других испытаний.

Испытания прекращаются по некоторому закону, и в этот момент принимается одно из двух указанных решений. Используя установившуюся в данном вопросе терминологию, скажем, что критерий выбора плана выражается через параметр  $p \equiv 1 - R$  — неизвестную ненадежность испытываемых изделий.

Чтобы решить, принять изделие или забраковать, прежде всего следует договориться о том, какие значения  $p$  допустимы и какие недопустимы.

В результате выбирается некоторое значение ненадежности  $p_c$ , так что при  $p \leq p_c$  желательно, чтобы выборочный план приводил к приемке изделия как достаточно надежного. Если же  $p > p_c$ , то желательно, чтобы он приводил к браковке изделия как недостаточно надежного. Однако мы уже знаем, что ни один выборочный план в этом смысле не может быть безошибочным; он всегда сопряжен с некоторой неопределенностью. Таким образом, решения о браковке изделий могут приниматься и при  $p \leq p_c$  точно так же, как решения о приемке при  $p > p_c$ . Если осуществляется какой-либо из этих случаев, то, очевидно, решение будет ошибочным.

Ясно, что опасность ошибки зависит от «расстояния»  $p$  от  $p_c$ . Если  $p$  в действительности намного меньше  $p_c$  и при этом в результате испытаний решается забраковать изделие, то эта ошибка будет более серьезной, чем в том случае, когда  $p$  лишь ненамного меньше  $p_c$ . Так же если  $p$  намного больше  $p_c$  и мы в результате испытаний примем изделия, то это будет более серьезной ошибкой, чем когда  $p$  лишь ненамного превосходит  $p_c$ .

Следовательно, чтобы выборочный план был эффективным, он должен почти исключать серьезные ошибки. Таким образом, при  $p \ll p_c$  должна быть достаточно малой вероятность браковки, а при  $p \gg p_c$  — вероятность приемки,

### 10.2.1. Оперативная характеристика

Выборочные планы, рассматриваемые ниже, характеризуются тем, что при  $p < p_c$  и  $p \rightarrow 0$  вероятность браковки изделия также стремится к нулю. Характер этого поведения выражается при помощи оперативной характеристики ОС  $L(p)$  плана рис. 10.1,а. Функция  $L(p)$  определяется как вероятность того, что в результате выборочного плана изделие будет принято. ОС является

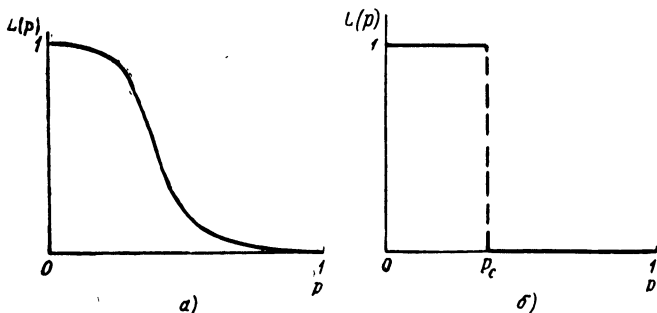


Рис. 10.1.

$L_p$  — вероятность приемки;  $p$  — вероятность отказа

мерой способности плана отделять надежные изделия от ненадежных. Идеальным был бы выборочный план с ОС, изображенный на рис. 10.1,б, поскольку для всех  $p \leq p_c$  этот план приводил бы к приемке изделий, а для всех  $p > p_c$  — к браковке их. Однако можно показать, что для достижения подобного «безошибочного» решающего правила необходимо сделать объем выборки бесконечным. Если можно производить лишь конечное число испытаний, то, вообще, чем круче функция ОС, тем ближе соответствующий план к плану с минимальной ошибкой. Но перед тем как выбрать план, необходимо рассмотреть и другие критерии, связанные с допустимыми ошибками неправильных решений; этот вопрос рассматривается в § 10.3.

### 10.2.2. Общие свойства биномиального выборочного плана

Прежде чем перейти к вопросу о критерии, который можно использовать для установления выборочного плана, исследуем общие свойства подобных планов.



Наиболее общая схема биномиальной выборки описана § 6.6.

Выборочное пространство, или множество возможных исходов выборки задавалось граничными точками плоскости, где одна координата соответствует числу испытаний, а другая — числу отказов. Чтобы определить выборочный план с двумя возможными решения-

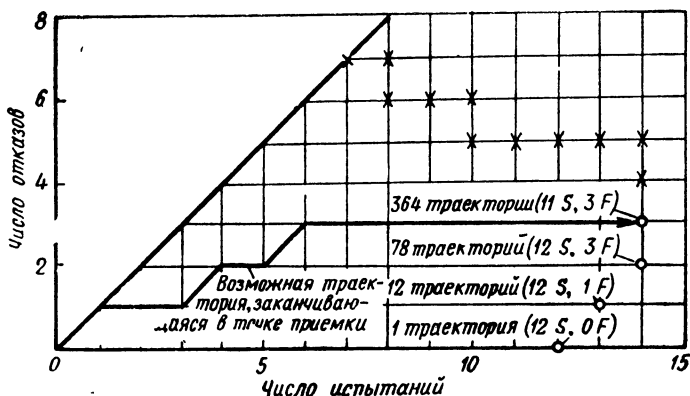


Рис. 10.2.

× — граничные точки браковки; ○ — граничные точки приемки; S — успех (с вероятностью  $q$ ); F — отказ (с вероятностью  $p$ ).

ми, следует разбить граничные точки на две группы. Если после какого-то испытания достигается граничная точка, принадлежащая первой группе, то принимается решение забраковать изделие. При достижении точки из второй группы решается принять изделие. Первую группу граничных точек обычно называют *критической областью*.

На рис. 10.2 показан биномиальный выборочный план, где граничные точки, образующие критическую область, отмечены крестиками.

Вероятность  $L(p)$  того, что в результате испытаний по выборочному плану рис. 10.2 изделие будет принято, можно найти, просуммировав вероятности, соответствующие четырем «приемочным» граничным точкам. Эти вероятности определяются по методу, описанному в § 6.6. В результате для ОС находим

$$L(p) = q^{12} + 12q^{11}p + 78q^{10}p^2 + 364q^9p^3. \quad (10.1)$$

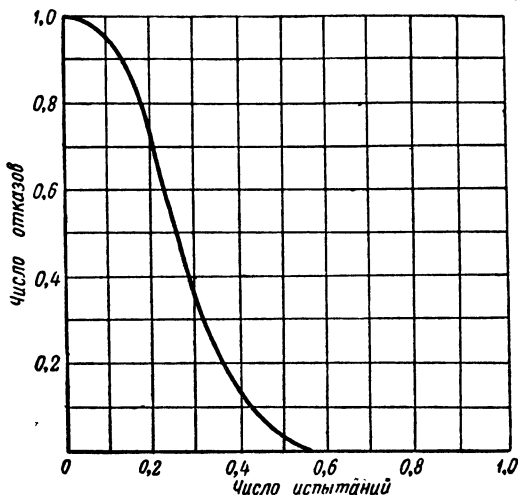


Рис. 10.3.

На рис. 10.3 показан график  $L(p)$ , задаваемый формулой (10.1).

### 10.2.3. Среднее число испытаний

Предположим, что точки критической области плана, показанного на рис. 10.2, сдвинуты произвольным образом (если необходимо, можно к ним добавить еще дополнительные точки, чтобы сделать границу замкнутой), но с тем условием, что ни одна траектория, ведущая в точки приемки, не может быть прервана [см, например, рис. 10.4,а и 10.4,б]. Тогда функция  $L(p)$  будет по-прежнему определяться формулой (10.1), поскольку вероятности достижения точек приемки остались неизменными.

Чем же тогда будут различаться биномиальные выборочные планы рис. 10.4,а; 10.4,б и 10.2? Отличие будет в количестве испытаний до принятия решения. В любом из трех планов максимально возможное число испытаний — 14. Однако при любом заданном  $p$  число испытаний будет иметь какое-то распределение. Так, интервал этого распределения для плана рис. 10.4,а будет от 4 до 14.

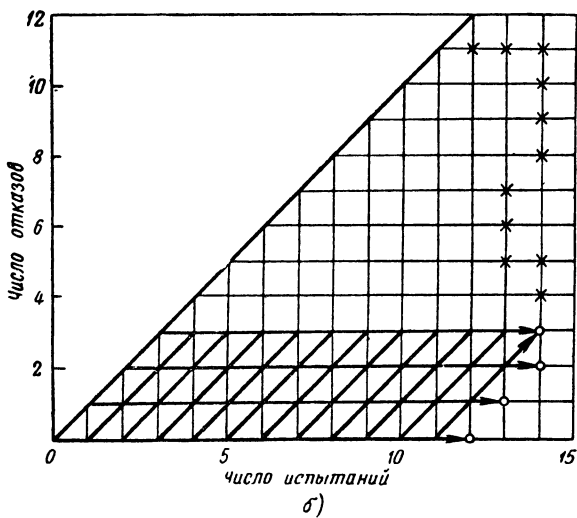
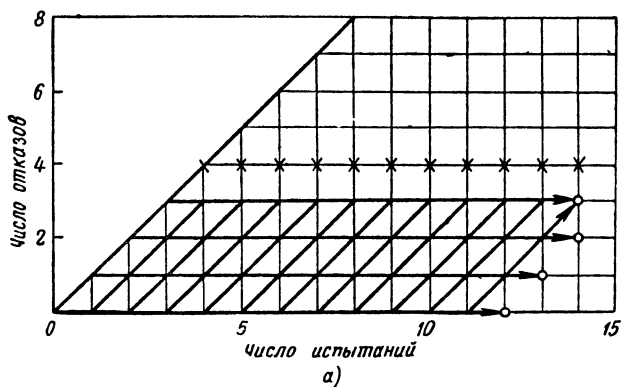


Рис. 10.4.

× — граничные точки браковки, ○ — граничные точки приемки.  
 Сеткой показаны все траектории, идущие к границе приемки.

Эту характеристику того или иного биномиального выборочного плана можно описать, вычислив *среднее число испытаний* до принятия решения как функцию  $p$ . Эту функцию сокращенно обозначим  $ASN$  (average sample number) (рис. 10.8).

Очевидно, из трех планов, показанных на рис. 10.2, 10.4,а и 10.4,б, второй обладает наименьшим  $ASN$ , т. е. график этой функции будет лежать под графиками для

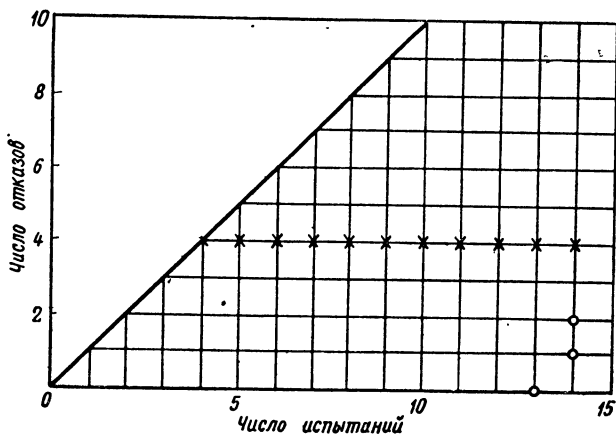


Рис. 10.5. Укороченный выборочный план.

других планов. Экономия наблюдений будет особенно заметной при больших  $p$ , так как, если изделие ненадежно, блуждающая точка, по всей вероятности, быстрее достигнет критической области.

Далее, возможно также на рис. 10.4,а сдвинуть точки приемки (12,0), (13,1) и (14,2) в точки (11,0), (12,1) и (13,2) соответственно (точку (14,3), оставив без изменения); это также не изменит функцию  $L(p)$  (10.1). Последнее, очевидно, потому, что если в процессе испытаний достигнута какая-либо из точек (11,0), (12,1) или (13,2), то это уже *гарантирует* приемку изделия. Подобные изменения (рис. 10.6) еще уменьшают  $ASN$ , давая большую экономию в числе наблюдений, чем план, изображенный на рис. 10.4,а. План, изображенный на рис. 10.5, называется укороченным выборочным планом и обычно заменяет выборку фиксированного объема, показанную на рис. 10.7.

Очевидно, укороченный выборочный план рис. 10.6 имеет меньшее  $ASN$ , чем все планы, изображенные на рис. 10.2, 10.4 и 10.7.

$ASN$  плана рис. 10.5 можно найти аналитическим путем через биномиальное распределение.  $ASN$  планов

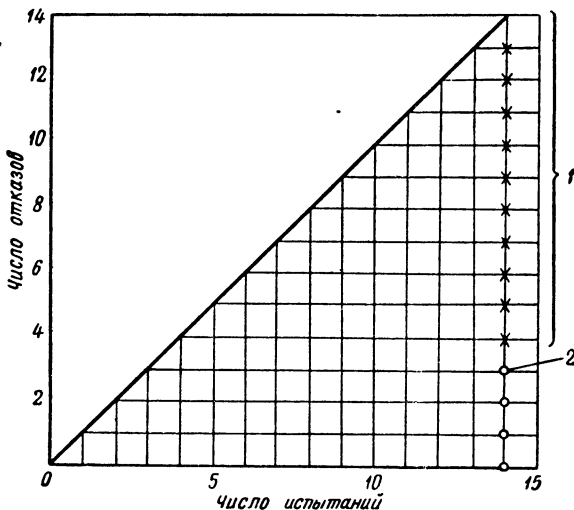


Рис. 10.6. Выборка постоянного объема.

1 — критическая область (граница браковки); 2 — допустимое число отказов для приемки  $F=3$ .

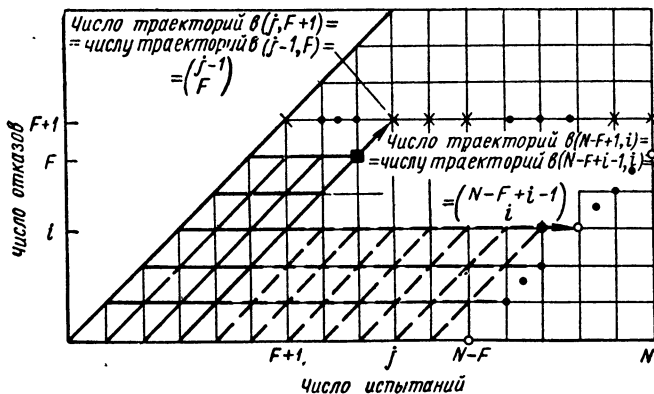


Рис. 10.7.

рис. 10.2 и 10.4 удобнее вычислять путем непосредственного суммирования по всем граничным точкам вероятностей достижения данной точки, умноженных на число испытаний до попадания в нее.

### 10.2.3.1. Формула для ASN в случае укороченного выборочного плана

Вычислим ASN для общего укороченного выборочного плана, задаваемого максимальным числом испытаний  $N$  и максимальным числом отказов  $F$ , при котором изделия принимаются. (На рис. 10.6  $N=14$ ,  $F=3$ .) Общий укороченный выборочный план показан на рис. 10.8.

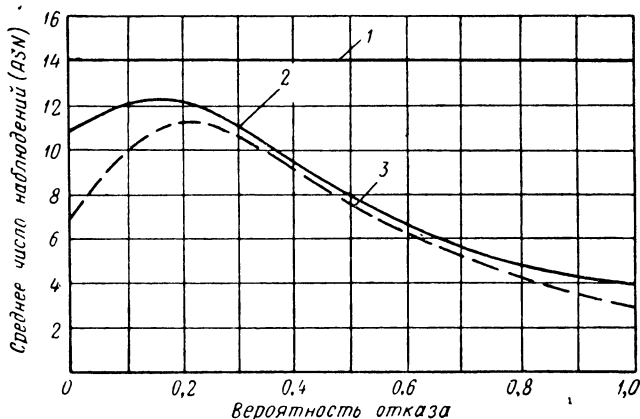


Рис. 10.8.

1 — план рис. 10.6; 2 — план рис. 10.5; 3 — план рис. 10.11.

Рассмотрим точки браковки, координаты которых имеют вид  $(j, F+1)$ , где  $j$  пробегает значения от  $F+1$  до  $N$ . Вероятность, соответствующая точке  $(j, F+1)$ , равна  $p^{F+1}q^{j-F-1}$ , умноженному на число траекторий, попадающих в точку  $(j, F+1)$ . Последнее число равно числу траекторий в точки  $(j-1, F)$ , так как точка  $(j, F+1)$  достижима только из точки  $(j-1, F)$ .

Таким образом, вероятность, соответствующая  $(j, F+1)$ , составляет

$$P(j, F+1) = \binom{j-1}{F} q^{F+1} q^{j-F-1}. \quad (10.2)$$

Поскольку число испытаний до достижения точки  $(j, F+1)$  равно  $j$ , часть математического ожидания, соответствующая точкам браковки, будет равна

$$E_r = \sum_{j=F+1}^N j \binom{j-1}{F} p^{F+1} q^{j-F-1}. \quad (10.3)$$

Для точек приемки, обращаясь к рис. 10.8, находим аналогично

$$E_a = \sum_{i=0}^F (N-F+i) \binom{N-F+i-1}{i} p^i q^{N-F} \quad (10.4)$$

и окончательно  $ASN = E_r + E_a$ .

Математические ожидания  $E_r$  и  $E_a$  можно теперь выразить через биномиальное распределение (§ 6.2); в результате мы сможем вычислить  $ASN$  из [1]. Введем обозначение

$$B(n, p; X) = \sum_{j=X}^n \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad (10.5)$$

что представляет собой «вероятность  $X$  или более отказов в  $n$  биномиальных испытаниях», т. е. «хвост» биномиального распределения. Чтобы найти  $E_r$ , используем тождество (6.56), обозначив его левую часть через  $H$ :

$$H \equiv \sum_{j=F+1}^N \binom{j-1}{F} p^{F+1} q^{j-F-1} \equiv B(N, p; F+1). \quad (10.6)$$

Из этой формулы выводим

$$q \frac{dH}{dq} = \sum_{j=F+1}^N (j-F-1) \binom{j-1}{F} p^{F+1} q^{j-F-1} = \quad (10.7)$$

$$= E_r - (F+1) B(N, p; F+1). \quad (10.8)$$

$q(dH/dq)$  можно найти непосредственно из (10.7). Учитывая, что слагаемые, соответствующие  $j=F+1$ ,

равны 0, после некоторых несложных преобразований биномиальных коэффициентов находим

$$q \frac{dH}{dq} = \frac{q(F+1)}{p} \sum_{j=F+2}^N \binom{j-1}{F+1} p^{F+2} q^{j-F-2} = \quad (10.9)$$

$$= \frac{q(F+1)}{p} B(N, p; F+2), \quad (10.10)$$

снова применяя (10.6). Из (10.8) и (10.10) получим

$$E_r = \frac{q(F+1)}{p} B(N, p; F+2) + (F+1) B(N, p; F+1). \quad (10.11)$$

Чтобы найти  $E_a$ , заменим индекс суммирования в (10.4):  $j = N - F + i$ , и положим  $f + 1 \equiv N - F$ , в результате чего получим

$$E_a = \sum_{j=f+1}^N j \binom{j-1}{f} q^{f+1} p^{j-f-1}. \quad (10.12)$$

Правая часть (10.12) имеет тот же вид, что и (10.3) для  $E_r$ , только вместо  $F$  стоит  $f$  и вместо  $p$  стоит  $q$ . Из (10.11) находим

$$E_a = \frac{p(f+1)}{q} B(N, q; f+2) + (f+1) B(N, q; f+1). \quad (10.13)$$

Далее, из формулы (10.5) легко заметить, что

$$B(n, q; X) \equiv 1 - B(n, p; n - X + 1). \quad (10.14)$$

По формуле (10.13), учитывая (10.4) и определение  $f$ , получим

$$E_a = \frac{N-F}{q} - \frac{(N-F)p}{q} B(N, p; F) - (N-F) B(N, p; F+1), \quad (10.15)$$



откуда

$$ASN = E_r + E_a = \frac{N-F}{q_1} + \frac{q(F+1)}{p} B(N, p; F+2) - \\ - (N-2F-1)B(N, p; F+1) - \frac{(N-F)p}{q} B(N, p; F). \quad (10.16)$$

Выражение  $ASN$ , даваемое формулой (10.16), можно представить в более простом виде

$$ASN = \frac{F+1}{p} B(N+1, p; F+2) + \\ + \frac{N-F}{q} [1 - B(N+1, p; F+1)], \quad (10.17)$$

заметив, что

$$\binom{N+1}{j} \equiv \binom{N}{j} + \binom{N}{j-1}. \quad (10.18)$$

**У п р а ж н е н и е.** Заметим, что тождество (10.18) следует из того, что число непрерываемых траекторий в точку  $(N+1, j)$  равно сумме числа непрерываемых траекторий в точку  $(N, j)$  и в точку  $(N, j-1)$ . Вывести (10.17) из (10.16) при помощи (10.5).

Функция  $ASN$  плана, показанного на рис. 10.5, задается формулой (10.17), где  $N=14$ ,  $F=3$ ; она изображена на рис. 10.8 сплошной линией.

Заметим, что для больших  $p$  математическое ожидание числа сэкономленных испытаний является значительным; в то же время для выборки постоянного объема всегда требуется ровно 14 испытаний.

#### 10.2.4. Усовершенствование укороченного выборочного плана с целью его оптимизации

Выше мы рассмотрели ряд выборочных планов с одной и той же  $OC$ , но с различными  $ASN$ . Среди них «наименьшим»  $ASN$  обладает укороченный выборочный план. Поэтому среди рассмотренного множества планов он является наилучшим. *Замечательно, что существуют биномиальные выборочные планы, которые еще больше уменьшают  $ASN$  и при этом функцию  $OC$  оставляют почти неизменной.* Если бы мы попытались сделать  $ASN$  еще меньшей, чем для укороченного плана,

оставляя максимально возможное число испытаний неизменным (в нашем иллюстрированном примере этот максимум составляет  $N=14$ ), то  $OC$  изменилась бы в сторону ухудшения, т. е. она стала бы более пологой. Следовательно, значения  $L(p)$  при  $p$ , меньших  $p_c$ , но близких к нему,  $p_c$  уменьшились бы, а ее значения при  $p$  больших, но близких к нему, увеличились. Если допустить, что максимальное число наблюдений увели-

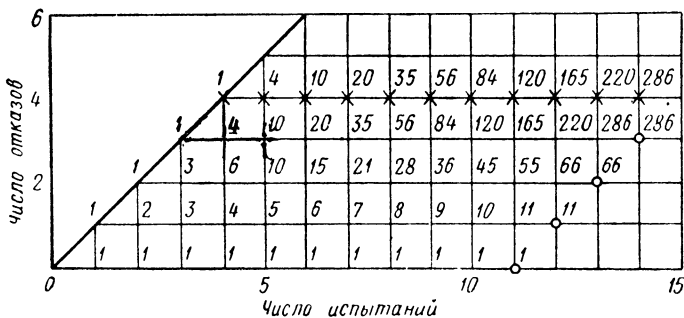


Рис. 10.9.

чится и даже станет равным бесконечности, то можно добиться, как было сказано, чтобы  $OC$  осталась почти неизменной или даже улучшилась, а  $ASN$  уменьшилась\*. Проиллюстрируем это положение. Сначала рассмотрим укороченный выборочный план, показанный на рис. 10.6, а затем начнем его видоизменять, чтобы уменьшить  $ASN$ .

На рис. 10.9 изображен снова выборочный план рис. 10.6, причем показано, сколько траекторий приходит в каждую точку.

Первым изменением будет перенос точки браковки (4,4) в (3,3). На рис. 10.10 показан план, который получается вследствие такого изменения; отмечено, сколько траекторий приходит в каждую точку.

Единственное изменение  $OC$  связано с сокращением числа траекторий в точку приемки (14,3); вместо 286 оно

\* Если допустить возможность неограниченного продолжения испытаний, то становится важным распределение числа испытаний до принятия решений (см. [5]).

стало равным 285. Следовательно, если  $L(p) - OC$  плана рис. 10.9\*, то  $L_1(p) = L(p) - q^{11}p^3$  будет  $OC$  для плана рис. 10.10. Таким образом,  $L_1(p) < L(p)$  при всех  $p$ , максимальное уменьшение равно 0,00069 и достигается при  $p = \frac{3}{14} = 0,214$ .  $ASN$  также уменьшается при всех  $p$  на величину  $p^2(1 - q^{11})$ , которая при  $p = 1$ , очевидно, равна

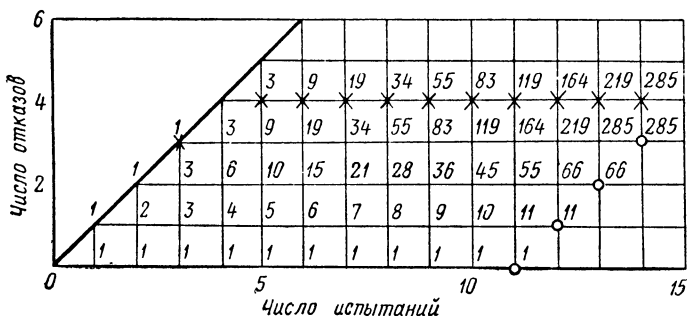


Рис. 10.10.

одному испытанию; при малых  $p$  эта величина намного меньше и сводится к нулю, когда  $p = 0$ .

У п р а ж н е н и е. Показать, что уменьшение  $ASN$  в самом деле равно  $p^2(1 - q^{11})$ .

Чтобы уменьшить  $ASN$  также при малых значениях  $p$ , сделаем следующее изменение. Переместим точку приемки (11,0) в плане рис. 10.10 ближе к началу координат. По причинам, которые будут объяснены позже, новая точка приемки помещается в (7,0). На рис. 10.11 изображено это второе изменение укороченного выборочного плана рис. 10.9.

Оперативная характеристика  $L_2(p)$  данного плана изображена на рис. 10.11; она равна

$$L_2(p) = q^7 + 7q^{11}p + 56q^{11}p^2 + 265q^{11}p^3. \quad (10.19)$$

\*  $L(p)$  была определена формулой (10.1). Заметим, что  $L(p)$ , соответствующую рис. 10.5 или рис. 10.9, можно найти непосредственно, как

$$L(p) = q^{11} + 11q^{11}p + 66q^{11}p^2 + 286q^{11}p^3. \quad (10.1a)$$

(Показать, что (10.1) и (10.1a) совпадают.)

Таким образом,

$$L(p) - L_2(p) = q^{11} - q^7 + 4q^{11}p + 10q^{11}p^2 + 21q^{11}p^3 = \quad (10.20)$$

$$= q^{11}(1 + 4p + 10p^2 + 21p^3) - q^7. \quad (10.21)$$

Можно подсчитать, что  $L_2(p)$  отличается от  $L(p)$  не больше, чем на 0,01 (когда  $p \approx 0,3$ ). ASN плана рис. 10.11 изображена на рис. 10.8 пунктиром. При  $p \geq 0,2$  средняя экономия числа испытаний по сравнению с укороченным планом составляет от 1 до 4.

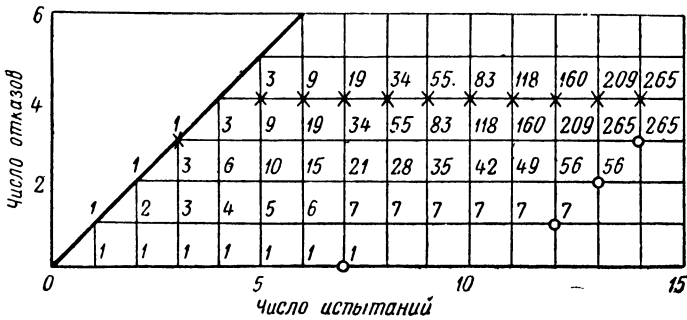


Рис. 10.11.

Процесс усовершенствования укороченного выборочного плана можно продолжить, перемещая в направлении начала координат как граничные точки браковки, соответствующие малой доле успехов, так и граничные точки приемки, соответствующие малой доле отказов. Рис. 10.12 иллюстрирует получаемый таким образом поч-

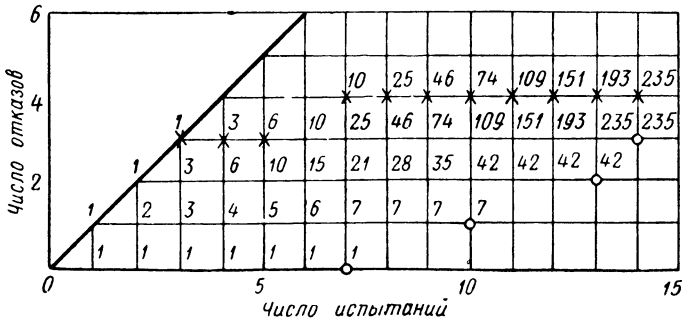


Рис. 10.12.

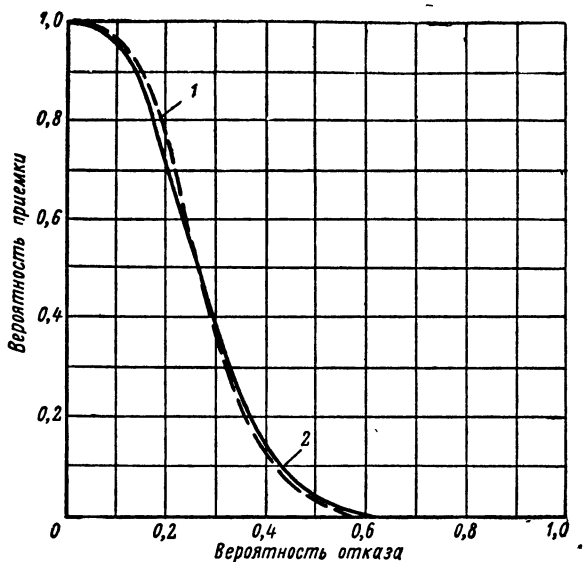


Рис. 10.13.

1 — см. рис. 10.12; 2 — см. рис. 10.5.

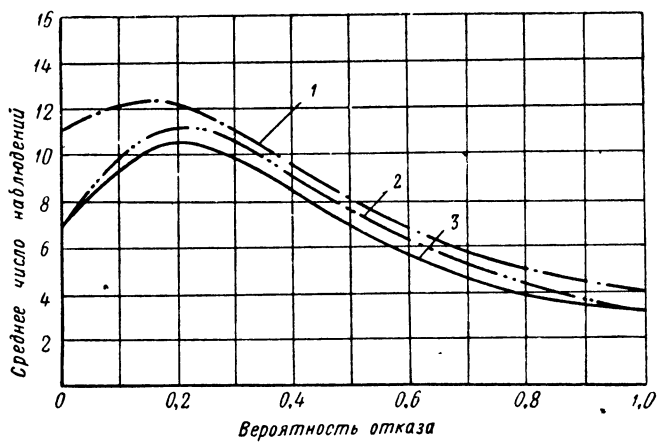


Рис. 10.14.

1 — план рис. 10.15; 2 — план рис. 10.11; 3 — план рис. 10.12.

ти «оптимальный» план,  $OC$  которого очень незначительно отличается от  $OC$  укороченного плана (рис. 10.5 или 10.9), но зато  $ASN$  почти достигает минимально возможного значения. На рис. 10.13 и 10.14 изображены  $OC$  и  $ASN$  для плана, показанного на рис. 10.12. В § 10.4 будет доказано, что план рис. 10.12 по существу эквивалентен усеченному последовательному анализу Вальда для биномиального параметра. Известно, что при определенных условиях неусеченный план Вальда является оптимальным или почти оптимальным, где «оптимальность» понимается в том смысле, что при заданной  $OC$  функция  $ASN$  настолько мала, насколько возможно.

### 10.3. КРИТЕРИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БИНОМИАЛЬНОГО ВЫБОРОЧНОГО ПЛАНА (ВЫБОРКИ ПОСТОЯННОГО ОБЪЕМА ИЛИ УКРОЧЕННОГО ПЛАНА)

В § 10.2 было оговорено, что эффективный выборочный план должен характеризоваться малой вероятностью браковки при  $p \ll p_c$  и соответственно малой вероятностью приемки при  $p \gg p_c$ . Это требование можно использовать для определения некоторого класса биномиальных выборочных планов.

Выберем некоторое  $p_1 < p_c$  и некоторое  $p_2 > p_c$  и потребуем, чтобы вероятность браковки при  $p = p_1$  была не больше  $\alpha$ , а вероятность приемки при  $p = p_2$  не превосходила  $\beta$ .  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые наперед заданные величины, по возможности малые; например  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,10$ . Очевидно, это налагает условия на значения оперативной характеристики в двух точках ее области определения  $p_1$  и  $p_2$ .

Именно:

$$\begin{aligned} L(p_1) &= 1 - \alpha, \\ L(p_2) &= \beta. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Ввиду того что от  $OC$  требуется убывание по  $p^*$ , при  $p \leq p_1$ ,  $L(p) \geq 1 - \alpha$ , а при  $p \geq p_2$ ,  $L(p) \leq \beta$ .

Применим теперь сформулированный критерий к классу биномиальных выборок фиксированного объ-

---

\* Достаточным условием этого является то, чтобы отношение  $f/n$  для всех граничных точек приемки было меньше, чем для всех точек браковки.

ема (см. рис. 10.7). Чтобы однозначно определить выборочный план такого рода, необходимо задать два параметра:  $N$  — число испытаний и  $F$  — максимально допустимое число отказов в  $N$  испытаниях, при котором изделия еще принимаются.

На основании (10.22) параметры  $N$  и  $F$  должны удовлетворять соотношениям

$$L(p_1) = \sum_{j=0}^F \binom{N}{j} p_1^j q_1^{N-j} \geq 1 - \alpha, \quad (10.23)$$

$$L(p_2) = \sum_{j=0}^F \binom{N}{j} p_2^j q_2^{N-j} \leq \beta.$$

Знак неравенства в (10.23) употребляется потому, что в общем случае невозможно найти такие целые числа  $N$  и  $F$ , которые бы удовлетворяли (10.22); вместо этого требуется, чтобы риск ошибки при  $p \leq p_1$  и  $p \leq p_2$  был *не больше* соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ . Например, можно найти значения  $N_1, F_1$  так, что  $L(p_1)$  несколько больше  $1 - \alpha$ , а  $L(p_2)$  несколько больше  $\beta$ ; тогда, возможно, значения  $N_1 + 1, F_1$  будут *действительно* удовлетворять неравенства (10.23), так как  $L(p)$  — убывающая функция  $N$  при любом фиксированном  $p$  между 0 и 1.

Когда  $N$  и  $F$  малы (скажем,  $N \leq 20, F \leq 4$ ), в общем случае этого нельзя сделать, не предполагая, что  $L(p_1)$  и  $L(p_2)$  также малы. Например, при  $\alpha = \beta = 0,10, p_1 = 0,13, p_2 = 0,41$  условие  $N = 14, F = 3$  дает  $L(0,13) = 0,9021, L(0,41) = 0,1095$ ; при  $N = 15, F = 3$  имеем  $L(0,13) = 0,8796, L(0,41) = 0,0785$ .

Первые значения хорошо согласуются с (10.22), но не удовлетворяют неравенству (10.23).

**У п р а ж н е н и е.** На основании таблиц [4] найти параметры  $N$  и  $F$  биномиального выборочного плана при  $p_1 = 0,126, p_2 = 0,242, \alpha = \beta = 0,10$ .

О т в е т.  $N \approx 70, F = 12$ .

Чему будет равно среднее число испытаний в укороченном плане, если истинная надежность равна  $0,874 (= 1 - p_1)$ ?

Из п. 10.2.3 уже известно, что ошибки обоих родов (т. е. ошибочная приемка изделий с низкой надежностью или браковка высоконадежных изделий) останут-

ся теми же, если выборку постоянного объема соответствующим образом укоротить. Значит, при использовании критерия  $(p_1, \alpha; p_2, \beta)$  оперативную характеристику укороченного плана проще всего найти, рассмотрев план с выборкой постоянного объема и пользуясь таблицами [4]. Среднее число испытаний выражается формулой (10.17); значения этой функции также можно найти по таблицам [4].

Может случиться, что заданы только  $p_2$  и  $\beta$ . Это тот случай, когда заказчик задается «минимально допустимой» надежностью  $R_2=1-p_2$ , которая должна быть «подтверждена» производителем изделия с достоверностью  $\gamma=1-\beta$ . Например, если  $R_2=0,90$ ,  $\gamma=0,90$ , то по табл. П. 1 или из рис. П. 3 находим: выборка объема  $N=22$  с условием  $F=0$  дает такой метод испытаний, что если в 22 испытаниях не произойдет ни одного отказа, то требования по надежности будут удовлетворены.

Но рис. П. 3 показывает, что требуемому условию удовлетворяет целое множество выборочных планов, например,

$$(N, F) = (22, 0), (38, 1), (52, 2), (65, 3), (78, 4)$$

и т. д. Если бы производитель платил за испытания пропорционально их числу, то наиболее подходящим был бы план с наименьшим  $N$ , а именно с  $N=22$ . Однако производитель должен учитывать возможность того, что заданные требования не будут выполнены и он вынужден будет немедленно или через некоторое время возместить потребителю убыток.

В примере с  $N=22$ ,  $F=0$  для того, чтобы вероятность подтверждения требуемой надежности составляла по меньшей мере 90%, истинная надежность должна быть 0,9952 или выше. Если производитель уверен в том, что его изделия при использовании заказчиком будут иметь надежность только 95%, он сделает вывод, что вероятность выполнения заданного требования при испытании составит всего 32,4%.

Очевидно, в описанной ситуации производитель, если он хочет, чтобы требуемые условия выполнялись с вероятностью 90%, использует план с большим числом испытаний.

В этом случае мы находим, что план должен характеризоваться параметрами  $p_1=0,05$ ,  $\alpha=0,10$ ,  $p_2=0,10$ ,



$\beta=0,10$ ; используя приведенную выше методику (10.22), получим, что  $N \approx 190$ ,  $F=13$  также удовлетворяют дополнительным требованиям.

Если же необходимость постановки 190 испытаний, возникшая вследствие введения требования  $\alpha=0,10$ , связана с большими затратами производителя, то остается единственный путь: увеличить истинное значение надежности.

У п р а ж н е н и е. Показать, что если  $p_1 = 0,04$ ,  $\alpha = 0,10$ ;  $p_2 = 0,10$ ,  $\beta = 0,10$ , то этим требованиям удовлетворяют  $N \approx 117$ ,  $F=7$ .

Каковы будут подходящие значения  $N$  и  $F$ , если  $p_1 = 0,03$ ,  $\alpha = 0,10$ ;  $p_2 = 0,10$ ,  $\beta = 0,10$ ? Вычислить в каждом случае среднее число испытаний в укороченном плане, если  $R = 1 - p_1$ .

Если заказчик (например, правительство) оплачивает стоимость испытаний, часто определяются не только  $p_2$  и  $\beta$ , но и верхний предел числа испытаний. Производитель должен либо выпускать продукт с достаточно высокой надежностью, либо он вынужден будет платить за дополнительные испытания.

#### 10.4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ВАЛЬДА К ПОДТВЕРЖДЕНИЮ НАДЕЖНОСТИ

В п. 10.3.1 были приведены некоторые примеры того, какие следствия вытекают из требований к подтверждению надежности в случае выборки постоянного объема или укороченных выборочных планов. В настоящем параграфе к этой задаче будут применены последовательные биномиальные планы Вальда.

Требования к плану такие же, как и в § 10.3, а именно  $(p_1, \alpha; p_2, \beta)$ . Используя оптимальный метод выбора границы браковки (критической области) для *выборки постоянного объема*, Вальд показал ([6], гл. 5)\*, что границы приемки и браковки в случае более общего выборочного плана можно *приблизительно* описать двумя параллельными прямыми в плоскости «отказы — испытания» с наклоном  $s < 1$ \*\*.

\* Вместо обозначения  $(p_0, p_1)$ , употребляемого в цитированном источнике, мы пишем  $(p_1, p_2)$ .

\*\* Последовательные выборочные планы Вальда имеют весьма общие применения, выходящие за пределы биномиальной выборки. См. по этому поводу ([6], гл. 3) и дальнейшие применения в гл. 7—9.

на Вальда показан на рис. 6.4. Формулы, определяющие соответственно границу приемки и границу браковки  $(n, a_n)$  и  $(n, r_n)$ , имеют вид \*:

$$a_n = \left[ \frac{\log \frac{\beta}{1-\alpha}}{\log \frac{p_2}{p_1} - \log \frac{1-p_2}{1-p_1}} + n \frac{\log \frac{1-p_1}{1-p_2}}{\log \frac{p_2}{p_1} - \log \frac{1-p_2}{1-p_1}} \right], \quad (10.24)$$

$$-r_n = \left[ \frac{\log \frac{\alpha}{1-\beta}}{\log \frac{p_2}{p_1} - \log \frac{1-p_2}{1-p_1}} + n \frac{\log \frac{1-p_2}{1-p_1}}{\log \frac{p_2}{p_1} - \log \frac{1-p_2}{1-p_1}} \right]. \quad (10.25)$$

Согласно описанию, приведенному в § 10.2, испытания прекращаются решением о приемке, если график последовательности отказов или успехов  $(n, f)$  впервые попадает в какую-либо из точек  $(n, a_n)$  в плоскости «отказы—испытания». Аналогично, если  $(n, f) \equiv (n, r_n)$ , то испытания прекращаются и принимается решение о браковке. Постоянные  $a_n, r_n$  зависят только от выбора  $(p_1, \alpha; p_2, \beta)$ , и их можно вычислить для произвольного числа  $n$  до испытаний.

В табл. 10.1 приведены граничные точки приемки и браковки при числе испытаний, не превосходящем 25, для плана с  $(p_1, \alpha; p_2, \beta) = (0,15; 0,10; 0,42; 0,10)$  эти значения вычислены по формулам (10.24) и (10.25).

Таблица 10.1

Граничные точки приемки и браковки

$n$	$a_n$	$r_n$	$n$	$a_n$	$r_n$
1	..	..	14	2	6
2	..	..	15	2*	6
3	..	3	16	2*	6
4	..	3	17	3	7*
5	..	3	18	3*	7
6	0	4*	19	3*	7
7	0*	4	20	3*	7
8	0*	4	21	4	8*
9	0*	4	22	4*	8
10	1	5*	23	4*	8
11	1*	5	24	4*	9*
12	1*	5	25	5	9
13	1*	6*			

Примечание. Звездочками обозначены недостижимые точки.

\* Квадратными скобками обозначено наибольшее целое число, не превосходящее числа, стоящего в скобках.

Так, если в (10.24) выражение в скобках равно 3,25, то  $a_n=3$ . Если в (10.25) выражение в скобках равно -4,35, то  $-r_n=-5$  или  $r_n=5$ .

На рис. 10.15 дан вид граничных точек приемки. Оперативную характеристику плана, показанного на этом рисунке, можно получить из системы двух уравнений\*:

$$L(p) = \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^h}{1 - \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^h \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h} \quad (10.26)$$

и

$$p = \frac{\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^h - 1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^h \left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^h - 1} \quad (10.27)$$

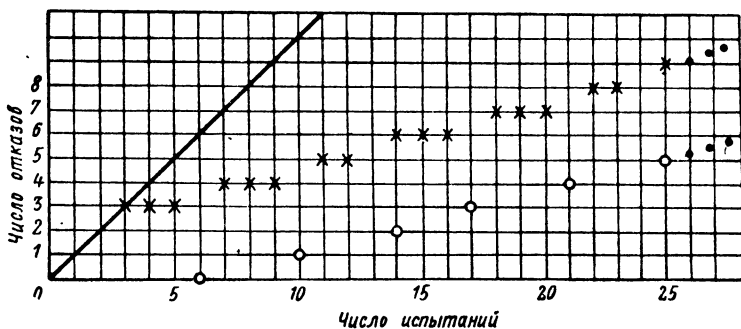


Рис. 10.15. Последовательный биномиальный план Вальда.  
 $p_1=0,15$ ,  $\alpha=0,10$ ;  $p_2=0,42$ ,  $\beta=0,10$ .

Чтобы найти  $L(p)$  как функцию  $p$ , следует выбирать  $h$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и затем по формулам (10.26) и (10.27) вычислять соответствующие значения  $L(p)$  и  $p$ .

У п р а ж н е н и е. Показать, что по значениям

$$h = +\infty, 1, 0, -1, -\infty$$

\* Эти замечательные формулы для ОС являются частным случаем (для биномиальных выборочных планов) формул, выведенных А. Вальдом в 1944 г., охватывающих более общие последовательные выборочные планы Вальда.

получаются соответственно соотношения:

$$\begin{aligned}
 L(0) &= 1, \\
 L(p_1) &= 1 - \alpha, \\
 L(s) &= \frac{\log \frac{\alpha}{1-\beta}}{\left(\log \frac{\beta}{1-\alpha} + \log \frac{\alpha}{1-\beta}\right)}, \\
 L(p_2) &= \beta, \\
 L(1) &= 0,
 \end{aligned}$$

где  $s$  — общий „наклон“ границ приемки и браковки, задаваемый коэффициентом  $n$  в формуле (10.24). Указание. Следует найти пределы (10.26) и (10.27) при  $h \rightarrow \infty$  путем отдельного дифференцирования числителя и знаменателя по  $h$ .

Коль скоро для некоторого  $h > 0$   $L(p)$  и  $p$  найдены, то для  $-h$  эти величины можно найти намного проще, чем по формулам (10.26) и (10.27). Для этого служат формулы

$$p' = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^h p \quad (10.28)$$

и

$$L(p') = \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h L(p), \quad (10.29)$$

где  $p'$ ,  $L(p')$  — координаты  $OC$ , соответствующие  $-h$ .

Если  $OC$  известна, то значения функции, показывающей среднее число наблюдений, можно найти по следующей формуле:

$$ASN = \frac{L(p) \log \frac{\beta}{1-\alpha} - [1 - L(p)] \log \frac{\alpha}{1-\beta}}{p \log \frac{p_2}{p_1} - (1-p) \log \frac{1-p_1}{1-p_2}}. \quad (10.30)$$

В довольно общем случае, хотя и не всегда, максимальное значение  $ASN$  достигается вблизи  $p=s$ ; в этом случае

$$ASN(s) = \frac{\left(\log \frac{\beta}{1-\alpha}\right) \left(\log \frac{\alpha}{1-\beta}\right)}{\log \frac{p_2}{p_1} \cdot \log \frac{1-p_1}{1-p_2}}. \quad (10.31)$$

Заметим, что логически возможен и такой случай, когда испытания продолжаются неограниченно долго, никогда не заканчиваясь. Но как было замечено в § 6.6, вероятность такого события равна 0. Следовательно, число  $v$  испытаний, приводящих к принятию решения, обладает собственным распределением, т. е. событию  $v = \infty$  соответствует нулевая вероятность. Было также установлено, что все моменты (среднее, дисперсия и т. д.)

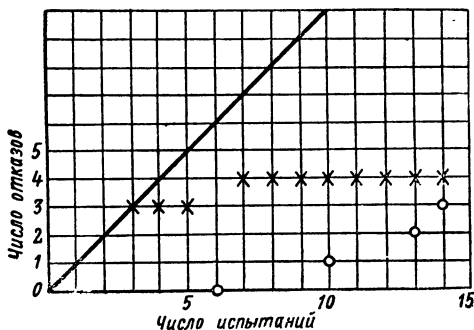


Рис. 10.16.

этого распределения существуют и конечны\*. В частности,  $E(v) \equiv ASN$  выражается формулой (10.30). В [5] приведены графики стандартного отклонения (корня из дисперсии) случайной величины  $v$  для некоторых примеров биномиальных выборочных планов. Эти графики показывают, что колебания числа испытаний могут быть значительными, т. е. частные значения числа испытаний до принятия решения, соответствующие плану Вальда, могут с высокой вероятностью превосходить число испытаний в выборке постоянного объема (§ 10.3), построенной по тем же  $p_1, \alpha; p_2, \beta$ . Однако если сравнить  $ASN$  плана Вальда с числом испытаний в выборке постоянного объема (или даже с  $ASN$  укороченного плана), то всегда обнаруживается, что план Вальда характеризуется наименьшим *средним* числом испытаний до принятия решения.

\* C. Stein. A note on cumulative sums. Ann. Math. Statist., 1946, v. 17, p. 498—499.

Упражнение 1. Вычислить  $OC$  и  $ASN$  для плана Вальда; задаваемого параметрами  $(p_1, \alpha; p_2, \beta) = (0,15; 0,10; 0,42; 0,10)$ . Вычертить их как функции от  $p$ . Сравнить с выборкой постоянного объема, построенной по тем же значениям параметров.

Упражнение 2. Заменить план, показанный на рис. 10.15, усеченным планом, ограничив число испытаний 14-ю и сделав (14-3) точкой приемки. Показать, что усеченный план будет таким, как на рис. 10.16. Заметим, что данный план отличается от показанного на рис. 10.12 только тем, что точкой границы приемки, ближайшей к началу координат, будет (6,0) вместо (7,0).

Вычислить  $OC$  и  $ASN$  для усеченного плана Вальда по методам § 10.2.

Приведенное упражнение иллюстрирует замечание, сделанное в конце п. 10.2.4. Оно показывает, что построение «оптимального» усеченного биномиального выборочного плана можно упростить, если отправляться от последовательного плана Вальда с параметрами  $(p_1, \alpha; p_2, \beta)$ , который следует усечь и далее поступить так, как в упражнении. Следует сначала задаться несколько меньшими  $\alpha$  и  $\beta$ , чем требуемые, поскольку вообще в результате усечения обычного последовательного плана Вальда эти ошибки немного увеличиваются.

## 10.5. ИСПЫТАНИЯ НА НАДЕЖНОСТЬ, ОСНОВАННЫЕ НА ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Методы § 10.2—10.4 можно без изменения перенести на тот случай, когда имеется подходящая модель, описывающая характеристики отказов устройства. В этом случае существует функция распределения  $P(\tau \leq t) = F(t)$ , вид которой может быть известен или неизвестен; эта функция может зависеть от одного или нескольких параметров, которые также могут быть известными или неизвестными. Если требуемое время работы устройства равно  $T$  и при этом каждое испытание состоит в проверке, проработало ли данное устройство время  $T$ , то, очевидно, в этом случае для подтверждения надежности применимы биномиальные выборочные методы.

Подчеркнем, что в данной главе еще не использовалась информация о «форме» распределения времени безотказной работы. Если это можно сделать, т. е. если мы знаем характеристики отказов или можем сделать относительно этих характеристик разумные предположения, то следует ожидать, что подобная информация улучшит выборочные методы. Другими словами, мы мо-

жем повысить доверительный уровень или гарантируемую надежность или уменьшить объем выборки, необходимой для подтверждения заданного уровня надежности. Когда известен вид распределения времени безотказной работы, возникают две смежные задачи:

1. Возможно ли подтвердить заданную надежность, если нельзя или нежелательно испытывать все изделия в течение времени  $T$ , а можно только какое-то время  $T'$ ?

2. Каким образом использовать информацию о наблюдаемых наработках (поскольку интуитивно чувствуется, что дополнительная информация может хотя бы сэкономить некоторое количество испытаний и при этом не снизить требований к результатам испытаний)?

Решение обеих задач, очевидно, зависит от знания аналитического вида распределения времени безотказной работы, а также некоторых параметров этого распределения.

В следующих параграфах будут даны некоторые выборочные планы испытаний на надежность, основанные на однопараметрическом показательном распределении (п. 6.8.1).

В § 10.6 мы обобщим метод биномиальной выборки, чтобы изучить случай, когда желательно испытывать каждое изделие на протяжении времени  $t$ , вообще говоря, отличное от требуемого времени работы  $T$ . Будет также показано, что те же методы можно применить в случае, когда распределение времени безотказной работы имеет общий вид (см. п. 6.8.3.1). В § 10.7—10.9 рассматриваются выборочные планы испытаний на надежность, в которых время испытаний может варьироваться экспериментатором или использоваться информация о наблюдаемых моментах отказов. Однако в этих случаях представленные методы, вообще говоря, применять нельзя, если основное распределение времени безотказной работы отлично от показательного и имеет общий вид, оговоренный в п. 6.8.3.1. Это обстоятельство вызывает сожаление, поскольку оно ведет к необоснованно широкому использованию показательного распределения, особенно в области электроники, в качестве основного распределения при оценке надежности и построении выборочных планов. Хотя характеристики отказов многих элементов следуют показательному закону распределения, на некоторые из них этот закон не вли-

жет, и поэтому следует производить тщательную проверку правильности предпосылок. Эпштейн \* описывает испытания, целью которых является проверка указанного предположения. Ошибки, к которым приводит использование показательного распределения в случае, когда действительное распределение относится к типу распределений Вейбулла, исследовались Зеленом и Даннемиллером \*\*. Однако если в качестве распределения времени безотказной работы элемента можно принять показательный закон (как мы уже видели из приложения 9Б, при некоторых условиях в случае сложной системы этот закон допускает обоснование), то на этом основании можно строить различные выборочные методы.

#### 10.6. ИСПЫТАНИЯ НА НАДЕЖНОСТЬ ПРИ ВРЕМЕНИ ИСПЫТАНИЯ, ОТЛИЧНОМ ОТ ТРЕБУЕМОГО ВРЕМЕНИ РАБОТЫ

Основное требование состоит в том, чтобы устройство проработало время  $T$ ; вероятность такого события определяет его надежность  $R$ . Если время безотказной работы  $\tau$  имеет показательное распределение, то

$$R = e^{-T/\theta}, \quad (10.32)$$

где  $\theta$  — средняя наработка на отказ или средняя «продолжительность жизни». В соответствии с принципом, установленным в § 10.1, требуется определить нижний доверительный предел  $\hat{R}_L$  с доверительным уровнем  $\gamma$ , т. е. требуется выполнение условия

$$P[\hat{R}_L < R] \geq \gamma. \quad (10.33)$$

Если выборочный план позволяет делать вывод о том что  $\hat{R}_L < R$  с доверительным уровнем  $\gamma$ , то мы будем говорить, что надежность  $\hat{R}_L$  подтверждается с достоверностью  $\gamma$ .

\* B. Epstein, Tests for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential. Part I, Technometrics, 1960, February, v. 2, № 1, p. 83; part II, Technometrics, May 1960, v. 2, № 2, p. 167.

\*\* M. Zelen, M. C. Dannemiller. The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution. Technometrics, 1961, February, v. 3, № 1, p. 29.



Выборочный метод определяется следующим образом. На испытания ставится одновременно \*  $N$  изделий; через время  $t$  фиксируется число отказов. Если оно не превосходит некоторого заданного предела  $F$ , то заданное значение надежности  $R_L$ , считается обеспеченным с достоверностью  $\gamma$ ; в противном случае констатируется, что надежность не подтверждена.

Чтобы показать, как вычисляются параметры  $(N, F)$ , допустим, что  $\hat{R}_L$  — фиксированная надежность, которую необходимо подтвердить с достоверностью  $\gamma$  при длительности работы  $T$ . Тогда нижний доверительный предел  $\hat{\theta}_L$  среднего времени безотказной работы  $\theta$  с доверительным уровнем  $\gamma$  определяется, как показано в § 8.1, путем решения уравнения

$$e^{-T/\hat{\theta}_L} = \hat{R}_L \quad (10.34)$$

относительно  $\hat{\theta}_L$ :

$$\hat{\theta}_L = \frac{T}{\log \frac{1}{\hat{R}_L}}. \quad (10.35)$$

Далее, если выбрано время испытаний  $t$ , вероятность отказа отдельного изделия за это время будет  $p_\theta = 1 - e^{-t/\theta}$ . Следовательно, верхним доверительным пределом  $p_\theta$  с доверительным уровнем  $\gamma$  является  $\hat{p}_U = 1 - e^{-t/\hat{\theta}_L}$ . Мы находим, что к этой задаче можно применить метод биномиальной выборки, так как все определяется значениями  $N$  и  $F$ ; если происходит не более  $F$  отказов, то согласно результатам приложения 8А (теперь фиксированная) величина  $\hat{p}_U$  будет верхним доверительным пределом  $p_\theta$ .

---

\* Это делается для того, чтобы быстрее прийти к решению. Читатель легко заметит, что изделия можно было бы испытывать по одному, каждое на протяжении времени  $t$  (получится более длительное испытание); к такому плану непосредственно применимы методы § 10.2—10.4. Здесь не рассматриваются испытания с заменой, когда отказавшие изделия немедленно заменяют новыми и когда среднее время испытаний становится еще меньшим (см. п. 10.7.2 и [9]).

Заметим, что между описанной здесь биномиальной выборкой и той, которая описана в § 10.2, имеется существенное различие. Оно состоит в том, что  $N$  изделий ставятся на испытания одновременно. Выборочное пространство состоит из множества наблюдений в момент  $t$ ;  $0, 1, 2, \dots, N$ , соответствующих возможному количеству изделий, отказавших за время испытаний; однако невозможно наблюдать *траектории*, т. е. последовательности успехов и отказов. Тем не менее все же можно воспользоваться геометрической интерпретацией биномиальной выборки при помощи плоскости «отказы—испытания»: ниже будет показано, что возможно *частично укоротить* рассматриваемый выборочный план.

**Пример.** Электронная лампа определенного типа должна проработать 1 000 час, причем требуется, чтобы ее оперативная характеристика за это время не вышла за допустимые пределы. Заказчик требует, чтобы была обеспечена надежность 0,90 с достоверностью 90%. На испытания поставлено 75 ламп; испытания длятся 3 недели (500 час). Если предположить, что время безотказной работы распределено по показательному закону (считая отказом выход параметра за заданные пределы), то какое следует допустить максимальное число отказов  $F$ , при котором требуемая надежность будет обеспечена с требуемой достоверностью?

**Решение.** Имеем  $\hat{R}_L = 0,90$ ,  $T = 1\,000$ , следовательно, на основании (10.35)

$$\hat{\theta}_L = \frac{1\,000}{0,1053} = 9\,500 \text{ час.}$$

Так как  $t = 500$ , то

$$\hat{p}_U = 1 - e^{-500/9500} = 1 - e^{-0,5263} = 0,0513.$$

Из рис. П.3 ( $\gamma = 0,90$ ) находим  $F = 1$ .

Заметим, что если  $N$  и  $F$  не определены, то они находятся в нашем распоряжении. Позже мы еще вернемся к этому вопросу.

Для удобства в табл. П.2—П.6 представлены объемы выборки  $N$ , соответствующие значениям  $F$  при заданных  $t/\theta_L$  и  $\gamma$  (см. табл. П.2—П.6 [7]). К тому же для определения  $F$  и  $N$  кроме таблицы можно воспользоваться рис. П.1—П.5 (подобно тому как в предыдущем примере был использован рис. П.3).

Покажем теперь, как выборочный план можно частично укоротить. Предположим, что за испытаниями можно наблюдать непрерывно, так что в любой момент

из интервала  $(0, t)$  известно, сколько до этого момента произошло отказов. Тогда, коль скоро число отказов стало равным  $F+1$ , можно прекратить испытания и принять решение, что требуемая надежность не подтвердилась. Очевидно, это то же самое, что переместить точки области браковки  $(N, j)$ , где  $F+1 \leq j \leq N$ , в точки  $(N-j+F+1, F+1)$ , как это сделано в п. 10.2.3. Заметим, что с *точками приемки* нельзя сделать соответствующего укорачивания: какое бы малое время ни осталось до конца испытания  $(t)$ , всегда существует возможность того, что даже все  $N$  изделий откажут.

Интересно отметить следующие стороны описанного укорачивания.

1. Те  $N-F-1$  изделий, которые не отказали, имеют такое же качество, как и новые, независимо от того, сколько они проработали; это является следствием того, что распределение времени безотказной работы — показательное. Таким образом, вследствие этого основного предположения контроль не является разрушающим для неотказавших изделий.

2. Укороченный план характеризуется случайной величиной  $\tau_1$  — временем до окончания испытаний.  $\tau_1$  принадлежит интервалу времени  $(0, t)$ . Математическое ожидание времени испытаний, как показал Элстейн\*, равно

$$E_{\theta}(\tau_1) = \sum_{k=1}^{F+1} \binom{N}{k} p_{\theta}^k (1-p_{\theta})^{N-k} E_{\theta}(X_{k,N}), \quad (10.36)$$

где  $p_{\theta} = 1 - e^{-t/\theta}$ ;

$$E_{\theta}(X_{k,N}) = \theta \sum_{j=1}^k \frac{1}{N-j+1} \approx \theta \log \frac{N+1/2}{N-k+1/2}.$$

Из (10.36) видно, что среднее время испытаний является функцией истинной средней наработки изделия на отказ  $\theta$ .

---

\* В. Epstein. Truncated life tests in the exponential case. Ann. Math. Stat., 1954, v. 25, p. 555—564, формулы (20), (1) и (10); В. Epstein and M. Sobel. Sequential life tests in the exponential case. Ann. Math. Stat., 1955, v. 26, p. 82—93, см. p. 86.

Для очень малых  $\theta$  следует ожидать быстрого окончания испытаний; если же  $\theta$  велико, то испытания скорее всего займут все время  $t$ . Например, при  $F=0$  в (10.36) будет отличен от нуля всего один член:

$$E_{\theta}(\tau_1) = \theta p_{\theta} (1 - p_{\theta})^{N-1}. \quad (10.36')$$

При  $\theta \rightarrow 0$   $E_{\theta}(\tau_1) \rightarrow 0$ ; если же  $\theta \rightarrow \infty$ , то  $E_{\theta}(\tau_1) \rightarrow t$ , так как  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta (1 - e^{-t/\theta}) = t$ .

До сих пор мы специально не занимались вероятностью подтверждения надежности в том случае, когда истинная наработка на отказ  $\theta$  намного больше, чем  $\hat{\theta}_L$ . В табл. 10.2 (см. [7]) представлены такие отношения  $\theta$  к  $\hat{\theta}_L$ , что если истинная наработка на отказ равна  $\theta$ , а допустимое число отказов взято равным  $F$ , причем требования характеризуются параметрами  $\hat{\theta}_L$  и  $\gamma=0,90$  (табл. П.5, рис. П.3), то вероятность подтверждения надежности будет 0,95. Оказывается, что отношение  $\theta/\hat{\theta}_L$  практически независимо от времени испытаний  $t$ , так что параметр  $t$  в табл. 10.2 не входит.

Таблица 10.2

$F$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta/\hat{\theta}_L$	40	11	6,7	5,0	4,1	3,6	3,3	3,1	2,9	2,7	2,5

Табл. 10.2 можно использовать для однозначного определения плана из табл. П.5, рис. П.3 ( $\gamma=0,90$ ) при учете дополнительной информации об истинной средней наработке  $\theta$ .

**Пример.** Пусть  $\hat{\theta}_L = 9\,500$  час,  $t = 500$  час,  $\tau = 1\,000$  час,  $\gamma = 0,90$ . Предположим далее, что  $\theta$  примерно равно 47 500 час.

По табл. 10.2 находим, что при  $\theta/\hat{\theta}_L = 5,0$   $F = 3$ . Далее из рис. П.3 находим, что если при испытании  $N \approx 130$  изделий на протяжении 500 час произойдет не более 3 отказов, то будет обеспечена надежность 0,90 (соответствующая 9 500 час работы) с достоверностью 90%. Вероятность подтверждения надежности будет составлять 95%. Испытания на надежность, характеризую-

щиеся параметрами  $F = 0$ ,  $N = 44$ ,  $t = 500$ , будут эквивалентными только что рассмотренным, с тем лишь отличием, что для обеспечения 95%-ной вероятности подтверждения надежности необходимо, чтобы истинная наработка на отказ составляла  $46 \times 9\,500 = 437\,000$  час. Очевидно, если истинная наработка на отказ лишь немногим больше минимально допустимого значения  $\hat{\theta}_L$ , для достаточно высокой вероятности подтверждения надежности требуется весьма большой объем испытаний. В этом случае главным фактором может оказаться стоимость, и необходимо принять меры к тому, чтобы сбалансировать убыток вследствие большого числа испытаний и убыток вследствие браковки.

### 10.6.1. Обобщение на частично известную интенсивность отказов

Методы предыдущих параграфов могут быть распространены на такой случай испытаний на надежность, когда основная функция распределения времени безотказной работы имеет вид

$$G(t; \theta) = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{\theta} H(t; \beta_1, \beta_2, \dots) \right], \quad (10.37)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \dots$  — известные (или полагаемые известными) параметры, а  $\theta$  — единственный неизвестный параметр. Это обобщение было рассмотрено в п. 6.8.3.1.

*Пример.* Предположим, что основная функция распределения времени безотказной работы имеет вид

$P(\tau \leq t) \equiv p_\theta = 1 - e^{-t^2/\theta}$ ,  $t > 0$  (функция распределения Вейбулла), где  $\theta > 0$  — неизвестный параметр. (Показать, что средняя наработка на отказ  $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\delta\theta}$ .)

Чтобы подтвердить требуемую надежность 0,90 ( $T = 1\,000$  [час]) с достоверностью  $\gamma = 0,90$  при 500-часовых испытаниях, найдем

$$\hat{\theta}_L = \frac{T^2}{\log(1/\hat{R}_L)} = 9,5 \times 10^6,$$

откуда

$$\hat{p}_U = 1 - e^{-t^2/\hat{\theta}_L} = 0,0260.$$

Если  $N = 150$ , по рис. П. 3 находим, что  $F = 1$ . Мы видим, что это более строгое требование, чем в случае показательного основного распределения (см. пример на стр. 385).

У п р а ж н е н и е 1. Используя данные приведенного примера, рассмотреть двухпараметрическое распределение Вейбулла (п. 6.8.2)

$$P(\tau \leq t) \equiv p_\theta = 1 - e^{-t^\beta/\theta}, \quad t > 0, \quad \theta > 0,$$

для которого известно, что  $\beta = \frac{1}{2}$ .

(В [8] представлено большое количество выборочных планов для распределения Вейбулла времени безотказной работы\*.)

У п р а ж н е н и е 2. Применить результаты данного пункта к распределению крайнего значения (п. 6.8.3).

## 10.7. ИСПЫТАНИЯ НА НАДЕЖНОСТЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИИ О НАРАБОТКАХ ДО ОТКАЗОВ (ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

### 10.7.1. Испытания до отказа всех элементов

В данном случае на испытания ставится выборка из  $N$  изделий. Испытания заканчиваются, когда все они откажут; при этом записываются наработки до отказов  $t_1, \dots, t_N$ , отсчитываемые от момента начала работы изделия. Требуемое время работы изделия при его последующем применении составляет  $T$ . Желательно подтвердить надежность  $\hat{R}_L$  с достоверностью  $\gamma$ . Каким должен быть объем выборки  $N$  и какой следует принять критерий для того, чтобы определить, удовлетворяют ли изделия поставленным требованиям?

Метод решения этих задач основывается на формуле (8.14). В наших обозначениях должно выполняться соотношение

$$\hat{R}_L \leq \exp \left[ -\frac{T\chi_{2N; 1-\gamma}^2}{2N\hat{\theta}} \right], \quad (10.38)$$

---

\* Планы [8] сформулированы таким образом, что требуется подтвердить заданную наработку на отказ. Чтобы переформулировать это требование как подтверждение надежности, необходимо выбрать требуемую длительность работы  $T$  и затем сопоставить надежность

$$R(T) = \exp(-T^\beta/\theta)$$

средней наработке (6.103) при  $\alpha \equiv \beta$  и  $\lambda \equiv \frac{1}{\theta}$ .

где

$$\hat{\theta} = \sum_{j=1}^N \frac{t_j}{N}$$

или

$$\frac{\hat{\theta}}{T} \geq \frac{\chi_{2N; 1-\gamma}^2}{2N \log(1/\hat{R}_L)}. \quad (10.39)$$

Пример. Пусть  $\hat{R}_L = 0,90$ ,  $\gamma = 0,90$ ,  $T = 1000$  час,  $N = 75$ . Какой принять критерий для решения о том, обеспечена ли требуемая надежность?

Из (10.39) и по табл. П. 8. находим

$$\frac{\chi_{2N; 1-\gamma}^2}{2N} = \frac{\chi_{150; 0,10}^2}{150} = 1,155, \quad \log \frac{1}{\hat{R}_L} = 0,10535,$$

откуда

$$\hat{\theta} \geq \frac{(1,155)(1000)}{0,10535} = 10960 \text{ час.}$$

Следовательно, если выборочное среднее наработок до отказов больше 10960 час, то требуемая надежность 0,90 будет подтверждена с достоверностью 90%.

По табл. П.7 можно найти нижние пределы для статистики  $\hat{\theta}/T$  при  $\gamma = 0,80, 0,90, 0,95$ ;  $\hat{R}_L = 0,90, 0,95, 0,99, 0,995$  и  $N = 5, 10, 15, 25, 50, 100, 250$  и 500. Если подходящее значение в табл. П.7 меньше, чем  $\hat{\theta}/T$ , то соответствующая надежность  $\hat{R}_L$  будет подтверждаться с достоверностью  $\gamma$ .

Пример. Предположим, что выборка объема  $N$  не фиксирована, как в предыдущем примере, а требуется, чтобы при истинной надежности  $R = e^{-T/\nu} = 0,95$  вероятность подтверждения была 0,95. Какими должны быть объем выборки и критерий принятия данного решения?

Обозначим через  $L(\theta)$  вероятность прохождения контроля, т. е. вероятность приемки при истинном значении  $\theta$ . Тогда [см. (8.12)] получим

$$P\left(\frac{2N\hat{\theta}}{\theta} \leq \chi_{2N; L(\theta)}^2\right) = 1 - L(\theta).$$

Значит, если  $R = e^{-T/\theta}$  и  $L(\theta)$  является фиксированной, то будем иметь

$$\frac{\hat{\theta}}{T} \leq \frac{\chi_{2N \cdot L(\theta)}^2}{2N \log(1/R)}. \quad (10.40)$$

В данном примере  $L(\theta) = 0,95$ ,  $R = 0,95$ . Значит, должны одновременно удовлетворяться следующие два соотношения:

$$\frac{\hat{\theta}}{T} \leq \frac{\chi_{2N; 0,95}^2}{2N \log(1/0,95)}, \quad (10.41a)$$

$$\frac{\hat{\theta}}{T} \geq \frac{\chi_{2N; 0,10}^2}{2N \log(1/0,90)}. \quad (10.41b)$$

Правая часть (10.41a) является возрастающей функцией  $N$ , а (10.41b) — убывающей функцией  $N$  (см. табл. П. 8); следовательно, найдется такое единственное минимальное значение  $N$ , которое удовлетворит обоим требованиям). В данном примере совместная система неравенств (10.41a), (10.41b) дает

$$\frac{\chi_{2N; 0,10}^2}{2N} \leq 2,054 \frac{\chi_{2N; 0,95}^2}{2N}, \quad (10.42)$$

поскольку  $\frac{\log(1/0,90)}{\log(1/0,95)} = \frac{0,10535}{0,05219} = 2,054$ .

По табл. П. 8 находим, что требуемым объемом выборки будет  $2N = 35$  или  $N \approx 18$ . Далее, критерием приемки будет

$$\hat{\theta} \geq T \frac{\chi_{35; 0,10}^2}{35} \cdot \frac{1}{0,10535} = 1000 \frac{1,32}{0,10535} = 12530.$$

Мы обращаем внимание читателя на тот факт, что, хотя испытывается меньшее количество изделий (18 вместо 75), для обеспечения требований по надежности *наблюдения* средняя наработка должна быть большей.

### 10.7.2. Испытания до отказа $r$ изделий ( $r \leq N$ )

В данном случае на испытания ставится также  $N$  изделий. Испытания заканчиваются в момент, когда отказывает  $r \leq N$  изделий, при этом записываются наработки отказавших элементов  $t_1, \dots, t_r$ , отсчитываемые с момента начала испытания. Очевидно, подобный план включает в качестве частного случая план, описанный в п. 10.7.1. При решении задач § 10.6 применяется также дополнительный прием; это немедленная замена отка-



завших изделий\*. В этом случае число испытываемых изделий постоянно равно  $N$ , в то время как при отсутствии замены это число в случайные моменты времени уменьшается, достигая, в конце концов, значения  $N-r+1$ . Польза подобного вида испытаний в том, что вывод о надежности можно сделать *быстрее*, чем в случае, когда мы будем ждать отказа всех изделий. Разумеется, это приемлемо лишь тогда, когда испытание дополнительных изделий оправдывается сэкономленным временем испытаний. «Дополнительные изделия» — это не только те, которые ставятся взамен отказавших; чтобы выполнить заданные требования по надежности, необходимо увеличить также число  $N$  испытываемых изделий по сравнению с тем случаем, когда все изделия испытываются до отказа.

Можно показать, что как при замене, так и без нее [10]  $2r\hat{\theta}_{r,N}/\theta$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $2r$  степенями свободы, где  $r\hat{\theta}_{r,N}$  — суммарная наработка (всех элементов, отказавших и не отказавших) к моменту окончания испытаний. Это означает, что к рассматриваемому случаю можно непосредственно применить критерий оценки надежности п. 10.7.1. Остается только в табл. П.7 заменить  $\hat{\theta}$  величиной  $\hat{\theta}_{r,N}$  и вместо  $N$  взять  $r$ .

Пример. Пусть  $\hat{R}_L = 0,90$ ,  $T = 1000$  час,  $r = 75$ ,  $N \geq 75$ . Требования по надежности такие же, как и в первом примере п. 10.7.1. Тогда если  $\hat{\theta}_{75,N} \geq 10960$  час, то требуемая надежность 0,90 будет подтверждена с достоверностью 90%.

Исследуем теперь роль параметра  $N$  в приведенном примере. В [11] показано, что среднее время ожидания до  $r$ -го отказа (или время ожидания  $\tau_1$  до принятия решения при испытании без замены  $N$  изделий) равно

$$E_{NR}(\tau_1) = \theta \sum_{j=1}^r \frac{1}{N-j+1}. \quad (10.43)$$

---

\* В [9] рассмотрен тот же метод испытания, что и в § 10.6, с иной точки зрения; там разобран также случай замены, не охваченный § 10.6.

Соответственно для испытаний с заменой согласно [9]

$$E_R(\tau_1) = \frac{\theta_r}{N}. \quad (10.44)$$

1. При испытаниях без замены можно определить среднюю экономию времени до принятия решения при любом объеме выборки  $N \geq r$  по сравнению с объемом  $N = r$ . Для этого следует вычислить отношение

$$\lambda_{NR} = \frac{\theta \sum_{j=1}^r \frac{1}{N-j+1}}{\theta \sum_{j=1}^r \frac{1}{r-j+1}} = \frac{\sum_{j=1}^r \frac{1}{N-j+1}}{\sum_{j=1}^r \frac{1}{j}}. \quad (10.45)$$

Можно показать, что величину  $\lambda_{NR}$  хорошо приближает\*

$$\lambda_{NR} \approx \frac{\log \frac{N + 1/2}{N - r + 1/2}}{\log(r + 1/2) + E}. \quad (10.46)$$

У п р а ж н е н и е. Каким должен быть в предыдущем примере объем выборки  $N$ , чтобы по сравнению со случаем  $N = r = 75$  снизить среднее время до принятия решения на 50%?

О т в е т:  $N = 81,6 \approx 82$ .

2. При испытаниях с заменой отношение средних длительностей ожидания будет равно

$$\lambda_R = \frac{\theta r / N}{\theta r / r} = \frac{r}{N}. \quad (10.47)$$

У п р а ж н е н и е. Исходя из того, что для выборочного плана должны быть выполнены условия  $\hat{R}_L = 0,90$ ,  $\gamma = 0,90$ ,  $T = 1000$  час,

---

\* См. п. 11.3.2, где  $C_1 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \approx \log\left(N + \frac{1}{2}\right) + E$  ( $E$  — постоянная Эйлера, равная  $0,577215665 \dots$ ). При помощи этого выражения легко из (10.45) получить (10.46).

$r = 75$ , вычислить среднее время ожидания до принятия решения если  $\theta = \hat{\theta}_L = 9492$  час, в случае испытаний с заменой и без замены, взяв  $N = 75, 82, 100, 200$  и  $500$ .

О т в е т.

$N$	Среднее время ожидания при испытаниях, час	
	с заменой	без замены
75	9 492	4,9014 (9492) = 46 524
82	8 682	2,3979 (9492) = 22 761
100	7 119	1,3715 (9492) = 13 018
200	3 560	0,4685 (9492) = 4 447
500	1 424	0,16234 (9492) = 1 541

К этому упражнению можно сделать следующее замечание. При заданном  $N$  не имеет смысла сравнивать средние длительности ожидания, поскольку в случае замены испытываются  $N+r-1$  изделий, а в случае отсутствия замены — всего  $N$  изделий. Однако если предположить, что неотказавшие изделия ничем не отличаются от новых (как получается из теории), а следовательно, ничего не стоит увеличить число одновременно испытываемых изделий или брать дополнительные изделия для замены отказавших (скажем, вместо того чтобы пускать их в продажу), то с точки зрения временных характеристик предпочтительнее производить испытания с заменой, поскольку в любом случае «тратится»  $r$  изделий.

Ниже приводится модель стоимости, предложенная Эпстейном [12]. Она показывает, что: 1) как при замене, так и в другом случае можно выбрать такое  $N$ , что стоимость испытаний сведется к минимуму, и 2) самый экономичный план без замены характеризуется стоимостью, не превосходящей стоимости самого экономичного плана с заменой.

### 10.7.3. Модель стоимости для испытаний на надежность (пример)

Предположим, что необходимо удовлетворить некоторым требованиям по надежности, причем можно использовать выборочные планы как с заменой, так и без замены. Из заданных требований следует, что в обоих случаях в конце испытаний должно быть  $r$  отказавших

изделий. Пусть  $N_R$  обозначает число изделий, которые ставятся на испытания в начальный момент и заменяются новыми в случае испытаний с заменой;  $N_{NR}$  — число изделий, которые ставятся на испытания в случае испытаний без замены. Далее, пусть  $C_1$  — стоимость единицы времени ожидания окончания испытаний;  $C_2$  — стоимость постановки на испытание одного изделия. Тогда математическое ожидание общей стоимости испытаний с заменой согласно (10.44) будет равно

$$C_R = C_1 \theta \frac{r}{N_R} + C_2 (N_R + r - 1), \quad (10.48)$$

а в случае испытаний без замены согласно (10.43)

$$C_{NR} = C_1 \theta \sum_{j=1}^r \frac{1}{N_{NR} - j + 1} + C_2 N_{NR} \quad (10.49)$$

или

$$C_{NR} \approx C_1 \theta \log \frac{N_{NR} + 1/2}{N_{NR} - r + 1/2} + C_2 N_{NR}. \quad (10.49a)$$

(Мы использовали приближение (10.46), где в каждом случае  $\theta$  равно истинной наработке на отказ.) Для каждого метода в отдельности можно найти значение  $N_R$  или  $N_{NR}$ , минимизирующее математическое ожидание общей стоимости, используя обычные приемы нахождения наименьшего значения функции. Для оптимального метода с заменой получим

$$\bar{N}_R \approx \sqrt{\frac{C_2 \theta r}{C_2}} \quad (10.50)$$

(при этом следует взять то из двух ближайших целых чисел к правой части данной формулы, при котором  $C_R$  меньше).

Для оптимального метода без замены имеем

$$\bar{N}_{NR} \approx \frac{r - 1 + \sqrt{4(C_1 \theta r / C_2) + r^2}}{2}, \quad (10.51)$$

где также берется одно из двух ближайших целых чисел, минимизирующее  $C_{NR}$ .

Пример. Пусть  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 100$ ,  $r = 10$ ,  $\theta = 1000$ . Тогда  $\bar{N}_R = 10$  и  $\bar{N}_{NR} = 16$ . На основании (10.48) минимум математического ожидания общей стоимости испытаний будет в каждом случае равен

$$\bar{C}_R = 1000 + 1900 = 2900 \quad (10.48')$$

и на основании (10.49а)

$$\bar{C}_{NR} = 932 + 1600 = 2532. \quad (10.49а')$$

Таким образом, испытания *без замены* оказались более экономичными, чем испытания *с заменой*. Докажем, что и в общем случае  $\bar{C}_{NR}$  не может быть больше  $\bar{C}_R^*$ .

Для упрощения записи положим

$$\frac{C_1 \theta r}{C_2} \equiv \alpha$$

и будем обозначать оптимальные значения  $N_R$ ,  $C_R$ ;  $N_{NR}$ ,  $C_{NR}$  соответственно символами  $\bar{N}_R$ ,  $\bar{C}_R$ ;  $\bar{N}_{NR}$ ,  $\bar{C}_{NR}$ .

На основании (10.48)

$$\frac{\bar{C}_R}{C_2} = \frac{\alpha}{\bar{N}_R} + \bar{N}_R + r - 1. \quad (10.52)$$

Затем определим

$$\tilde{N}_{NR} \equiv r + \bar{N}_R - 1 \geq r.$$

Целое число  $\tilde{N}_{NR}$  не обязательно будет равно значению  $N_{NR}$ , минимизирующему  $C_{NR}$ . Далее,

$$\frac{\bar{C}_{NR}}{C_2} \leq \frac{\tilde{C}_{NR}}{C_2}, \quad (10.53)$$

где  $\tilde{C}_{NR}$  — математическое ожидание общей стоимости в случае испытаний без замены при  $N_{NR} = \tilde{N}_{NR}$ . Использував *точную* формулу (10.49) для  $C_{NR}$  и определенное  $\tilde{N}_{NR}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{C}_{NR}}{C_2} &= \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{1}{r + \bar{N}_R - 1} + \dots + \frac{1}{\bar{N}_R} \right] + \\ &+ r + \bar{N}_R - 1 \leq \frac{\alpha}{r} \left[ r \left( \frac{1}{\bar{N}_R} \right) \right] + r + \bar{N}_R - 1 \end{aligned} \quad (10.54)$$

(если  $r > 1$ , неравенство будет строгим; если  $r = 1$ , оно перейдет в равенство).

\* Это доказательство принадлежит Рилею (J. D. Riley. Space Technology Laboratories. Inc.)

При помощи (10.52) находим

$$\frac{\bar{C}_{NR}}{C_2} \leq \frac{\alpha}{\bar{N}_R} + r + \bar{N}_R - 1 = \frac{\bar{C}_R}{C_2}. \quad (10.55)$$

Тогда из (10.53) и (10.55) следует

$$\bar{C}_{NR} \leq \bar{C}_R, \quad (10.56)$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** Если  $r = 1$ , то, очевидно,

$$\bar{C}_{NR} = \bar{C}_R.$$

**Замечание 2.** При  $C_1 = 0$ ,  $C_2 > 0$  должно быть  $\bar{N}_R = 1$ ,  $\bar{N}_{NR} = r$  и  $\bar{C}_R = C_2 r = \bar{C}_{NR}$ .

**Замечание 3.** Если  $C_1 > 0$ ,  $C_2 = 0$ , т. е. постановка изделий на испытания ничего не стоит, тогда оптимальные значения  $\bar{N}_R$  и  $\bar{N}_{NR}$  равны бесконечности, откуда получается, что  $\bar{C}_R$  и  $\bar{C}_{NR}$  равны нулю.

**Замечание 4.** Во всех остальных случаях  $\bar{C}_{NR} < \bar{C}_R$ , т. е. имеет место строгое неравенство.

## 10.8. УСЕЧЕННЫЕ И ЦЕНЗУРИРОВАННЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЕЖНОСТЬ

В этом случае любое изделие испытывается время, не большее  $t$ . Если, скажем,  $j = e$  изделие отказывает в момент  $t_j \leq t$ , то это время фиксируется. Если изделие не откажет за время  $t$ , то это фиксируется как *успех*; в любом случае немедленно выбирают новое изделие и ставят его на испытания. Процесс продолжается до тех пор, пока не наберется  $r$  отказов. В результате получится информация в виде  $t_1, \dots, t_r$  и числа изделий, которые не отказали. Число  $r$  задается заранее; следовательно, общее число испытываемых изделий заранее не известно, а является случайной величиной. Время  $t$  называется временем *усечения*. Этот метод называется *цензурированным*, поскольку мы знаем только число тех изделий, время безотказной работы которых превзошло

бы  $t^*$ . В случае показательного распределения времени безотказной работы можно показать [13], что  $2\hat{S}/\theta$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $2r$  степенями свободы, где  $\hat{S}$  — суммарная наработка всех изделий, отказавших и не отказавших, т. е.

$$\hat{S} = \sum_{j=1}^r t_j + (N - r)t, \quad (10.57)$$

а  $N$  — общее число изделий, участвовавших в испытании.

Если необходимо обеспечить требуемую надежность  $\hat{R}_L$  с достоверностью  $\gamma$ , причем требуемое время работы составляет  $T$ , для получения критерия можно поступить так же, как и в п. 10.7.1. Так, из (10.39) путем замены  $\hat{\theta}$  величиной  $\hat{S}/r$  и  $N$  величиной  $r$  находим, что этот критерий имеет вид

$$\frac{\hat{S}/r}{T} \geq \frac{\chi_{2r; 1-\gamma}^2}{2r \log\left(\frac{1}{\hat{R}_L}\right)}. \quad (10.58)$$

Пример. Пусть  $\hat{R}_L = 0,90$ ,  $\gamma = 0,90$ ,  $T = 1000$  сек,  $r = 75$ . Какой следует использовать критерий, чтобы решить, выполняется ли заданное требование по надежности?

Из (10.58) и по табл. П. 8 (интерполируя) находим:

$$\frac{\chi_{2r; 1-\gamma}^2}{2r} = \frac{\chi_{150; 0,10}^2}{150} = 1,155,$$

$$\log \frac{1}{\hat{R}_L} = 0,10535,$$

---

\* Альтернативный метод испытаний, в котором число испытываемых изделий  $N$  фиксируется заранее, изложен в [14]. В этом случае все  $N$  изделий можно испытывать одновременно; если какое-либо изделие не отказало за время  $t$ , то его не рассматривают. Число  $r$  наблюдаемых отказов и наработки  $t_1, \dots, t_r$  будут случайными. Этот пример находит применение в п. 12.6.7 в качестве основания случайно планируемого эксперимента. Недостатком этого метода является то, что чисто случайные эксперименты неосуществимы.

откуда

$$\hat{S} \geq 75 \frac{(1,155)(1\,000)}{0,10535} = 75(10,960) = 822000 \text{ сек.}$$

Следовательно, если общая наработка (время ожидания до окончания испытаний) всех элементов больше 822000 *сек*, то требуемая надежность 0,90 будет обеспечена с достоверностью 90%.

Как и в п. 10.7.1 и 10.7.2, по табл. П.7 находятся нижние пределы статистики  $\hat{S}/rT$  для значений

$$\gamma = 0,80; 0,90; 0,95; \hat{R}_L = 0,90; 0,95; 0,99; 0,995$$

и

$$r = 5, 10, 15, 25, 50, 100, 250 \text{ и } 500.$$

Если  $\hat{S}/rT$  превосходит подходяще выбранное значение из табл. П.7, то соответствующая надежность  $\hat{R}_L$  будет подтверждена с достоверностью  $\gamma$ .

Рассматриваемый метод может потребовать чрезмерного времени до принятия решения. В этом случае среднее время ожидания равно  $r\theta$ . Действительно, математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону  $\chi^2$  с  $2r$  степенями свободы, равно  $2r$  (предлагаем читателю убедиться в этом, используя формулу (7.13) и тот факт, что  $2\hat{S}/\theta$  обладает указанным распределением). Заметим, что время испытания одного изделия  $t$  не входит ни в критерий, ни во время ожидания; таким образом, выбор  $t$  является произвольным. Однако ниже мы увидим, что его значение влияет на математическое ожидание числа испытываемых изделий.

Снижение среднего времени ожидания достигается путем одновременной постановки на испытания  $r$  изделий. Если все изделия откажут до момента  $t$ , испытание заканчивается. В противном случае, если за это время откажет лишь  $f_1$  изделий, то берется  $r - f_1$  изделий и они ставятся на испытания также на время  $t$ . Если необходимо, процесс повторяется, причем всякий раз на испытания ставится число изделий, равное разности между  $r$  и накопленным числом отказов. Когда набирается  $r$  отказов, испытания прекращаются. Можно показать, что в этом случае сокращается среднее время ожидания до окончания испытаний, а критерий остается неизменным.



Другим путем снижения среднего времени ожидания является прекращение испытаний в момент, когда произойдет выполнение критерия (10.58), если только это событие произойдет, или в момент, когда накопится  $r$  отказов. Дополнительное время испытаний может лишь увеличить значение  $\hat{S}/rT$  сверх требуемого предела. Таким образом, план можно *усечь* решением о приемке (т. е. когда выполняются требования по надежности), но не решением о браковке, противоположным условию § 10.6.

Математическое ожидание  $E(N)$  числа испытываемых изделий легко подсчитать, заметив, что до  $r$  отказов (в случае неусеченного плана) производят независимые испытания с постоянной вероятностью неудачи (отказа)  $p = 1 - e^{-t/\theta}$ . Таким образом, учитывая (6.37), распределением вероятностей  $N$  будет

$$P(N = k) = \binom{k-1}{r-1} (1 - e^{-t/\theta})^r (e^{-t/\theta})^{k-r}, \quad (10.59)$$

а следовательно, в силу замечания, помещенного после (6.53), математическое ожидание  $N$  будет равно

$$E(N) = \frac{r}{1 - e^{-t/\theta}}. \quad (10.60)$$

Теперь мы видим, что время испытания  $t$  определяет число изделий, которые участвуют в испытаниях. При больших  $t$   $E(N)$  уменьшается, приближаясь к  $r$  (очевидно, это его нижний предел); если же  $t$  становится все меньшим и меньшим, приближаясь к нулю, то, как видно из (10.60), математическое ожидание числа испытываемых изделий стремится к бесконечности.

Ввиду того что время испытания  $t$  не влияет на время ожидания, то, очевидно, наиболее экономичным методом описанного типа будет такой, у которого  $t$  наибольшее. При  $t \rightarrow \infty$  нужно просто поставить на испытания  $r$  изделий и ожидать, пока все они откажут (это должно с вероятностью 1 произойти в какой-то конечный момент времени). Но тогда целесообразно поставить все  $r$  изделий на испытания одновременно. Последние два плана обладают одним и тем же критерием подтверждения надежности; однако второй из них такой же,

как и в п. 10.7.1, очевидно, потребует намного меньше времени для испытаний.

Из результатов п. 10.7.2 известно, что, если поставить на испытания *больше*, чем  $r$  изделий, и испытывать их до накопления  $r$  отказов, мы получим дальнейшее снижение времени ожидания до выполнения необходимого требования на надежность.

Ясно, что если можно выбирать  $t$  каким угодно образом, то метод, описанный в настоящем параграфе, будет сравнительно неэффективным\*. Его применение имеет смысл только в том случае, когда  $t$  задается физическими условиями и одновременные испытания трудно осуществимы или дорого стоят. Следующие два примера иллюстрируют те случаи, когда может быть применен рассматриваемый метод. Второй из этих примеров интересен в том отношении, что он показывает применимость рассматриваемого метода в другой области, помимо испытаний на надежность.

**Пример 1.** Требуется испытать на надежность электронное оборудование некоторого вида, необходимое для зондирования, с временем безотказной работы, распределенным по показательному закону. Было решено использовать не стандартные источники питания, на которые действуют колебания испытательной камеры и ее низкая температура, а такие батареи, которые будут использованы в ракете. Это к тому же позволяет исследовать поведение параметров батарей, а также совместное функционирование действия этих двух видов оборудования. Но при этом сказалась следующая особенность: расчетное время работы батарей короткое, поскольку не требовалось, чтобы она продолжала работать после того, как произойдет зондирование атмосферы (примерно за неделю); к тому же было лишь ограниченное число батарей подобного типа. Вследствие этого все испытания электронного оборудования пришлось ограничить максимальной длительностью в  $t$  час.

**Пример 2.** Чтобы испытать надежность снаряда, производится серия выстрелов по цели. Надежность определяется как вероятность попадания в цель. Цель имеет форму круга радиусом  $a$ . Измеряются расстояния от центра цели до точек попадания снаряда, если они лежат внутри круга радиуса  $b$ . Что касается тех снарядов, которые не попадают в этот последний круг, то отмечается лишь их общее количество\*\*.

\* Авторам неизвестно, до каких пределов групповые испытания изменяют время ожидания в случае метода, описанного в настоящем параграфе.

\*\* Представим себе, что прямо над центром цели установлена фотокамера с полем зрения, соответствующим радиусу  $b$ . Тогда попадания в поле зрения будут сфотографированы так, что их можно измерить.

Примем следующие предположения:

1) истинный центр нападения совпадает с центром цели (т. е. отсутствует смещение);

2) ошибка прицеливания и ошибка отклонения снаряда от траектории независимы и обладают одним и тем же стандартным отклонением  $\sigma$ .

В этих условиях *квадрат* радиального расстояния от центра цели будет иметь *показательное* распределение со средним  $2\sigma^2$  (см. [15], стр. 236 или следующее упражнение).

Если далее условиться, что решение о том, что требуемая надежность  $\hat{R}_L$  обеспечена с достоверностью  $\gamma$ , принимается при попадании  $r$  снарядов в зону наблюдения радиусом  $b$ , то мы придем к усеченному и цензурированному плану, описанному в настоящем параграфе.

Упражнение 1. Пусть  $\hat{R}_L=0,90$ ,  $\gamma=0,90$ ,  $a=3$  мильям,  $b=2$  мильям,  $r=75$  попаданиям в зону наблюдения радиусом  $b$ . Какой вид будет иметь критерий обеспечения надежности?

Ответ. Аналогично (10.57) имеем

$$\hat{S} = \sum_{j=1}^r d_j^2 + b^2 (N - r),$$

где  $d_j$  — радиальное расстояние  $j$ -го попадания, а  $N$  — число снарядов, выпущенных до получения  $r$  попаданий в круг.

Из (10.58) получаем следующий критерий решения о подтверждении требований по надежности:

$$\hat{S} \geq \frac{ra^2}{\log(1/\hat{R}_L)} \frac{\chi_{2r; 1-\gamma}^2}{2r} = \frac{75(3^2)1,155}{0,10535} = 6410.$$

Интересно заметить, что математическое ожидание числа выпущенных снарядов, которое вычисляется путем подстановки в (10.60)  $2\sigma^2$  вместо  $\theta$  и  $b^2$  вместо  $t$ , будет равно

$$E(N) = \frac{r}{1 - e^{-b^2/2\sigma^2}}. \quad (10.60')$$

Чему будет равно математическое ожидание при  $\sigma = 1$  милье?

Ответ.  $E(N) \approx 87$ .

Упражнение 2. Показать, что сумма квадратов двух независимых нормально распределенных случайных величин с нулевыми средними и стандартными отклонениями  $\sigma$  имеет показательное распределение со средним  $2\sigma^2$ .

Решение. Сначала найдем распределение  $\zeta^2$ , где  $\zeta$  — нормальная случайная величина со средним 0 и стандартным отклонением  $\sigma$ . Для функции распределения имеем

$$P(\zeta \leq X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^X e^{t^2/2\sigma^2} dt.$$

Положим  $\eta = \xi^2$ ; тогда  $\eta \geq 0$  и событие  $\eta \leq y$ , где  $y \geq 0$ , будет эквивалентно событию  $(-\sqrt{y} \leq \xi \leq \sqrt{y})$  значит,  $(P(\eta \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq \xi \leq \sqrt{y}))$ . Следовательно,

$$P(\eta \leq y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt.$$

Функцию распределения  $\eta$  получим, продифференцировав  $P(\eta \leq y)$  по  $y$ :

$$f(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-y/2\sigma^2}$$

или

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2\sigma^2}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Теперь найдем м. п. ф. (§ 5.8) случайной величины  $\eta$ . Имеем

$$\begin{aligned} \psi(t) = E(e^{\eta t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{yt} f(y) dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} \exp\left[-y\left(\frac{1}{2\sigma^2} - t\right)\right] dy = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2\sigma^2} - t\right)^{1/2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\sigma^2} - t\right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Как было замечено в § 5.8, м. п. ф. суммы двух независимых одинаково распределенных случайных величин будет равна  $(\psi(t))^2$ , откуда

$$(\psi(t))^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\sigma^2} - t\right)} = \frac{1}{1 - 2\sigma^2 t}.$$

Но последнее выражение представляет собой м. п. ф. показательной-распределенной случайной величины со средним  $2\sigma^2$ .

## 10.9. ПРИМЕНЕНИЕ ВАЛЬДОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПЛАНОВ ИСПЫТАНИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ ДЛЯ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ

В § 10.4 было отмечено, что последовательные выборочные планы Вальда имеют весьма общее применение, выходящее за пределы биномиальной выборки. В [16]

они применяются к последовательным испытаниям на надежность в том случае, когда основное распределение времени безотказной работы показательное. Из совокупности, характеризующейся функцией надежности

$$R(t) = e^{-t/\theta}, \quad (10.61)$$

где  $\theta$  — истинная наработка на отказ, производится случайная выборка (§ 5.10) объема  $N$ . Эти  $N$  изделий ставятся на испытания и непрерывно в реальном масштабе времени наблюдаются общая наработка и число отказов. Как только удовлетворяется некоторый критерий, описанный ниже, тотчас испытания прекращаются и принимается решение, что требуемая надежность подтвердилась или не подтвердилась.

Как в § 10.7—10.10, можно использовать испытания как с заменой, так и без замены. При испытаниях с заменой постоянно испытывается  $N$  изделий с немедленной заменой отказавших изделий; при испытаниях без замены этого не делают. В общем случае при испытаниях с заменой среднее время до окончания испытаний будет меньше, чем при испытаниях без замены.

Если применить к последовательному плану настоящего параграфа модель стоимости п. 10.7.3, то можно обнаружить, что здесь наблюдается та же ситуация, что и там: оптимальный план без замены характеризуются математическим ожиданием общей стоимости, не превосходящим математическое ожидание общей стоимости оптимального плана с заменой (см. п. 10.9.5). Однако теоретически это положение обосновать трудно, поскольку точные формулы для средних длительностей ожидания весьма сложны.

Если применять к выборочному плану настоящего параграфа последовательный выборочный план Вальда, то возникает еще дополнительная сложность. Может оказаться, что все  $N$  изделий откажут еще до того, как принятый критерий позволит прийти к решению. В этом случае следует либо поставить на испытания большее число изделий, либо задаться (заранее) правилом *усечения*, т. е. отдельным критерием прихода к одному из двух вышеупомянутых решений.

Вопрос об усечении рассматривается в [16].

### 10.9.1. Требования к критерию выборочного плана

Требования к критерию рассматривались в § 10.3; они записываются как  $(p_1, \alpha; p_2, \beta)$ . Напомним, что в применении к испытаниям на надежность  $p_2 \equiv 1 - \hat{R}_L$ ;  $\beta \equiv 1 - \gamma$ . Величины  $p_1 \equiv 1 - R_1$  и  $\alpha$  употребляются для однозначного определения выборочного плана.

Можно установить, основываясь на общем последовательном методе отношения правдоподобия Вальда [6] или непосредственно по [16], что хорошим приближением для границ принятия решения служат две параллельные прямые в плоскости «суммарная наработка — отказы», задаваемые уравнениями:

$$\begin{aligned} V(t) &= h_1 + fs \quad (\text{граница приемки}), \\ V(t) &= -h_2 + fs \quad (\text{граница браковки}), \end{aligned} \quad (10.62)$$

где  $V(t)$  — общая наработка к моменту  $t$ , которая задается уравнениями (10.66) или (10.67) в случае испытаний с заменой и без замены соответственно;

$$h_1 = \frac{T \log \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\log \frac{1 - p_1}{1 - p_2}}; \quad (10.63)$$

$$h_2 = \frac{T \log \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\log \frac{1 - p_1}{1 - p_2}}; \quad (10.64)$$

$$s = \frac{T \log \left[ \frac{\log(1 - p_2)}{\log(1 - p_1)} \right]}{\log \frac{1 - p_1}{1 - p_2}}. \quad (10.65)$$

Здесь  $T$  обозначает требуемое время безотказной работы изделия. Суммарная наработка  $V(t)$  в любой момент  $t$  будет равна

$$V(t) = Nt \quad (10.66)$$

для испытаний с заменой и

$$V(t) = \sum_{j=0}^f t_j + (N - f)t \quad (10.67)$$

для испытаний без замены.  $t_j$  — это наблюдаемые наработки до отказов, отсчитываемые от момента постановки на испытание  $N$  изделий;  $t_0 \equiv 0$ .

Величины  $h_1$ ,  $h_2$  и  $s$  зависят только от требований, так что границы выборочного плана можно определить в виде графика в плоскости  $V(t)$ ,  $f$  до испытаний для

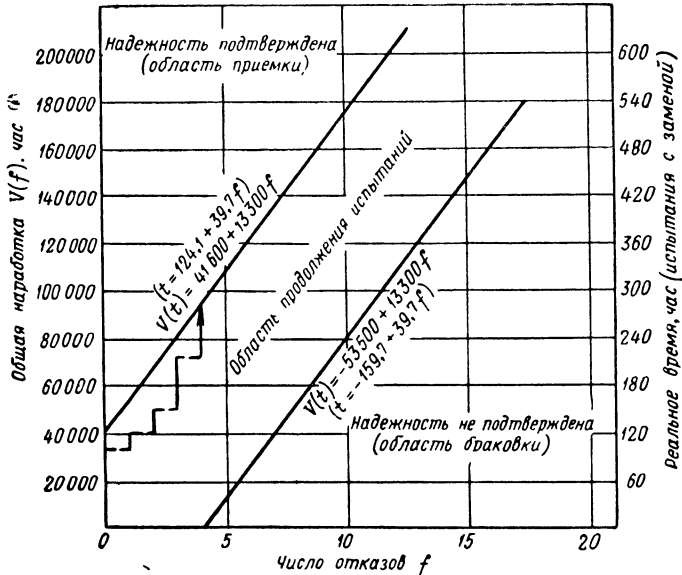


Рис. 10.17. Последовательный план Вальда для испытаний на долговечность.

любых значений  $V(t)$  и  $f$ , какие могут понадобиться. Такой график показан на рис. 10.17. Как только график числа отказов по одной координате и суммарной наработки по другой в первый раз коснется или пересечет какую-нибудь из двух границ, изображенных на рис. 10.17, сразу же принимается соответствующее решение (см. п. 10.9.4, где приведен пример, относящийся к рис. 10.17).

### 10.9.2. Свойства выборочного плана

Оперативную характеристику (ОС) последовательного плана Вальда испытаний на надежность можно найти из следующих выражений, которые сходны с при-

веденными в § 10.4 для последовательных биномиальных планов Вальда:

$$L(p) = \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^h}{1 - \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^h \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^h}, \quad (10.68)$$

$$\log(1-p) = \frac{h \log \frac{1-p_2}{1-p_1}}{\left[\frac{\log(1-p_2)}{\log(1-p_1)}\right]^h - 1}. \quad (10.69)$$

В формулах (10.68) и (10.69) параметр  $h$  пробегает все действительные числа от  $-\infty$  до  $+\infty$ , как и в § 10.4. Читатель может легко доказать, что значениям  $h = +\infty, +1, 0, -1, -\infty$  соответствуют  $p = 0, p_1, p_s \equiv 1 - e^{-T/s}, p_2$  и 1.

Упражнение. Показать, что значениями  $L(p)$  в данных пяти точках будет соответственно

$$L(p) = 1, 1 - \alpha, \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha}}{\log \frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{\alpha\beta}}, \beta \text{ и } 0.$$

### 10.9.3. Среднее число отказов и среднее время ожидания до принятия решения

Можно показать [16], что математическое ожидание суммарной наработки связано с математическим ожиданием  $E(f)$  числа отказов до принятия решения посредством соотношения \*

$$E[V(\tau_1)] = \frac{TE(f)}{\log \frac{1}{1-p}}, \quad (10.70)$$

где  $\tau_1$  — время ожидания до принятия решения;  $f$  — число отказов, необходимое для принятия решения;  $p$  —

\*  $f$  обозначает случайную величину, равную числу отказов, которые произойдут до принятия решения,  $f$  обозначает просто число отказов в любой момент времени, т. е. это абсцисса плоскости  $V(t), f$ .



истинная вероятность отказа (т. е. вероятность того, что время безотказной работы изделия будет меньше  $T$ ).

Можно показать также [16], что

$$E(f) \approx \begin{cases} \frac{\frac{h_2^2}{T} - L(p) \frac{h_1 + h_2}{T}}{\frac{s}{T} + \frac{1}{\log(1-p)}}, & p \neq 1 - e^{-\frac{T}{s}}, \\ \frac{h_1 h_2}{s^2}, & p = p_s = 1 - e^{-\frac{T}{s}}. \end{cases} \quad (10.71)$$

Чтобы получить выражение для среднего времени до принятия решения  $E_R(\tau_1)$  при любом  $p$  в случае испытаний с заменой, сначала перейдем в (10.66) к математическим ожиданиям (перейдя от  $t$  к  $\tau_1$ ):

$$E[V(\tau_1)] = NE_R(\tau_1). \quad (10.72)$$

Следовательно, в случае испытаний с заменой  $E_R(\tau_1)$  можно найти по формулам (10.70) — (10.72).

В случае *отсутствия замены* приближенная формула [16] для среднего времени ожидания принимает вид

$$E_{NR}(\tau_1) \approx \frac{T}{\log \frac{1}{1-p}} \log \left[ \frac{N + \frac{1}{2}}{N - E(f) + \frac{1}{2}} \right]. \quad (10.73)$$

Нетрудно показать, используя (10.73), что  $E_{NR}(\tau_1)$  больше  $E_R(\tau_1)$  приблизительно на  $\Delta$ , где

$$\Delta = \frac{T [E(f)]^2}{2 \left( N + \frac{1}{2} \right)^2 \log \frac{1}{1-p}}. \quad (10.74)$$

Заметим, что математическое ожидание числа отказов до принятия решения  $E(f)$  не зависит от того, используются испытания с заменой или без замены. Это видно из выражения данной величины.

В табл. 10.3 для различных наборов условий ( $p_1, \alpha; p_2, \beta$ ) приведены следующие характеристики: параметры  $h_1/T, h_2/T, s/T$  последовательного плана Вальда; оперативная характеристика  $L(p)$  при  $p = p_s = 1 - e^{-T/s}$ ; мате-

матическое ожидание числа отказов  $E(f)$  при  $p=p_1, p_s, p_2, 1$  [если  $p=0$ , то  $E(f)=0$ , откуда, понятно, следует, что  $L(p)=1$ ; далее, при  $p=0, p_1, p_2, 1$   $L(p)$  равна соответственно  $1, 1-\alpha, \beta, 0$ ]; среднее время ожидания в случае испытаний с заменой  $NE_R(\tau_1)/T$ , т. е. отнесенное к требуемому времени работы  $T$  и умноженное на объем выборки  $N$ , при  $p=0, p_1, p_s, p_2$  (если  $p=1$ , то  $E_R(\tau_1)=0^*$ ). Оценки среднего времени ожидания (нормированные) в случае испытаний без замены можно получить, прибавив величину  $N\Delta/T$  к соответствующему значению  $NE_R(\tau_1)/T$ , где  $\Delta$  задается формулой (10.74).

#### 10.9.4. Пример применения последовательного плана Вальда к испытаниям на надежность

Пусть  $p_1=0,05, \alpha=0,05; p_2=1-\hat{R}_L=0,10, \beta\equiv 1-\gamma=0,10, T=1000$  час. По табл. 10.3

находим:

$$\begin{aligned} h_1 &= 41,6 \times 1000 = 41\,600 \text{ час}, \\ h_2 &= 53,5 \times 1000 = 53\,500 \text{ час}, \\ s &= 13,3 \times 1000 = 13\,300 \text{ час}. \end{aligned}$$

Предположим, что на испытания на надежность отведено 3 недели (500 час) и что решено применить испытания с заменой. По табл. 10.3 среднее время ожидания (прикидочно равное максимальному значению при  $p=p_s$ ) составляет

$$E_R(\tau_1) \approx \frac{167,2 \times 1000}{N}.$$

Это выражение следует приравнять 500 час. Следовательно, для того, чтобы иметь уверенность в получении решения в требуемое время, количество изделий, поставленных на испытания, должно составить

$$N \approx \frac{167,2 \times 1000}{500} \approx 335,$$

---

\* При  $p=1$  отказ произойдет не в какой-то момент из интервала  $0 < t < T$ , а немедленно; действительно, показательное распределение обладает тем свойством, что любому интервалу  $t < \tau < \infty$  соответствует положительная вероятность.

Таблица 10.3  
**Параметры последовательного плана Вальда для испытаний на долговечность**

$P_1$	$1 - \hat{R}_L = P_2$	$\alpha$	$1 - \gamma = \beta$	$\frac{h_2^{***}}{T}$	$\frac{h_2}{T}$	$\frac{s}{T}$	$L(p)^* \left. \vphantom{L(p)^*} \right\} p = P_2$	$E(f)^{**}$				$NER(\tau_1)/T^{***}$		
								$p = P_1$	$p = P_2$	$p = 1$	$p = P_1$	$p = P_2$	$p = 1$	
0,01	0,10	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,05 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 30,9 \\ 23,6 \\ 30,3 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 23,1 \\ 23,1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 30,9 \\ 30,3 \\ 23,6 \end{array} \right.$	24,7	$\left. \begin{array}{l} 0,500 \\ 0,562 \\ 0,438 \end{array} \right\} 0,0397$ $0,500$	0,37	1,57	1,84	1,25	36,9	38,7	17,5
								0,28	1,18	1,66	1,23	27,9	29,0	15,8
								0,33	1,18	1,40	0,96	33,1	29,0	13,3
0,01	0,05	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 71,4 \\ 54,6 \\ 70,1 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 54,6 \\ 53,3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 71,4 \\ 70,1 \\ 54,6 \end{array} \right.$	39,5	$\left. \begin{array}{l} 0,500 \\ 0,562 \\ 0,438 \end{array} \right\} 0,0250$ $0,500$	1,07	3,26	3,23	1,81	106,9	129,0	62,9
								0,81	2,45	2,91	1,77	80,2	96,8	56,7
								0,96	2,45	2,45	1,38	95,6	96,8	47,7
0,05	0,20	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 17,1 \\ 13,1 \\ 16,8 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 12,8 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 17,1 \\ 16,8 \\ 13,1 \end{array} \right.$	8,56	$\left. \begin{array}{l} 0,500 \\ 0,562 \\ 0,438 \end{array} \right\} 0,1104$ $0,500$	1,41	4,01	3,81	2,00	27,5	34,3	17,0
								1,06	3,01	3,43	1,97	20,7	25,8	15,4
								1,26	3,01	2,89	1,53	24,6	25,8	12,9
0,05	0,10	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 54,5 \\ 41,6 \\ 53,5 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} 40,6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 54,5 \\ 53,5 \\ 41,6 \end{array} \right.$	13,3	$\left. \begin{array}{l} 0,500 \\ 0,562 \\ 0,438 \end{array} \right\} 0,0723$ $0,500$	7,9	16,7	12,9	4,09	154,5	222,8	122,4
								6,0	12,6	11,6	4,02	116,3	167,2	110,3
								7,1	12,6	9,8	3,13	138,6	167,2	92,8
								5,3	9,3	8,7	3,05	102,5	124,0	82,8

**Примечания:**

1. Чтобы определить  $h_1$ ,  $h_2$  и  $s$ , нужно умножить соответствующие значения из таблицы на  $T$  — требуемое время безотказной работы изделия.  
 2. На графике суммарной наработки (ордината) как функции числа отказов (абсцисса)  $h_1$  и  $h_2$  соответствуют границам приемки и браковки на оси общей наработки.

3. Чтобы найти  $ER(\tau_1)$ , следует умножить соответствующие значения из таблицы на  $T/N$ , где  $N$  — объем выборки, взятой для испытаний.

\*  $L(0) = 1$ ,  $L(P_1) = 1 - \alpha$ ,  $L(P_2) = \beta$ ,  $L(1) = 0$ .

\*\*  $E(f) = 0$  при  $p = 0$ .

\*\*\*  $\frac{NER(\tau_1)}{T} = \frac{h_1}{T}$  при  $p = 0$ .

Математическое ожидание числа отказов определяется по табл. 10.3. Оно оказывается равным  $E(f)=12,6$  при  $p=p_s=1-e^{-T/s}=0,1104$ . Значит, с достаточно высокой вероятностью для испытаний не потребуется большего числа изделий, чем 350.

На рис. 10.17 данный план изображен графически. Заметим, что реальное время  $t$  в случае плана с заменой пропорционально величине суммарной наработки; чтобы перейти к реальному времени, следует разделить суммарную наработку на объем выборки, равный в нашем примере 335.

При использовании плана без замены реальное время  $t$  получается путем вычитания из общего времени наблюдения  $V(t)$  суммарной наработки до отказов и деления полученного выражения на число неотказавших изделий; это видно из формулы (10.67).

Предположим, что в результате испытаний на надежность получены следующие данные:  $t_1=100$  час,  $t_2=120$  час,  $t_3=150$  час,  $t_4=220$  час и до момента  $t=283$  час отказов больше не было. Тогда по (10.17) или аналитическим путем можно показать, что решение о подтверждении надежности 0,90 с достоверностью 90% будет принято по истечении 283 час испытаний. В случае использования плана без замены, но при тех же условиях решение о приемке будет принято через 284,6 час.

**У п р а ж н е н и е.** Доказать сформулированные утверждения. Установить также общее свойство, согласно которому при фиксированном числе отказов для достижения решения о приемке в случае испытаний без замены требуется больший интервал отсутствия отказов, чем в случае испытаний с заменой.

**У к а з а н и е.** Пусть  $t_R$  и  $t_{NR}$  — соответствующие длительности времени до получения решения о приемке в случае испытаний с заменой и без замены.

Суммарные наработки в рассматриваемый момент должны совпадать, т. е.

$$\sum_{j=0}^f t_j + (N - f) t_{NR} = N t_R.$$

Из этого следует вывести неравенство

$$\frac{t_R}{t_{NR}} \leq 1.$$

### 10.9.5. Модель стоимости

Как и в п. 10.7.3, можно определить среднюю стоимость испытаний с заменой и без замены, если принять приближения последовательного плана Вальда. Мы сделаем численное сравнение только для  $p = p_S$  на основании плана, выбранного в п. 10.9.4; тогда нужно будет найти оптимальные объемы выборки  $\bar{N}_R$  и  $\bar{N}_{NR}$  и соответствующие стоимости.

Пусть  $C_1 = 100 \frac{\text{долл.}}{\text{час}}$ ,  $C_2 = 100 \frac{\text{долл.}}{\text{изд.}}$ . Для средней суммарной стоимости в случае испытаний с заменой и без замены получим:

$$C_R = C_1 E_R(\tau_1) + C_2 (N_R + E(f) - 1), \quad (10.75)$$

$$C_{NR} = C_1 E_{NR}(\tau_1) + C_2 N_{NR}. \quad (10.76)$$

Значения, которые следует подставить в эти формулы, находятся по табл. 10.3:

$$C_R = 1 \cdot \frac{167,2(1000)}{N_R} + 100 \cdot (N_R + 12,6 - 1) \quad (10.75')$$

$$C_{NR} = 1 \cdot \frac{1000}{0,0751} \log \left( \frac{N_{NR} + \frac{1}{2}}{N_{NR} + \frac{1}{2} - 12,6} \right) + 100 N_{NR}, \quad (10.76')$$

где  $E_{NR}(\tau_1)$  определено формулой (10.73).

Предлагаем читателю убедиться в том, что оптимальные объемы выборки будут равны  $\bar{N}_R = 41$  и  $\bar{N}_{NR} = 47$ , а минимум математического ожидания общей стоимости, соответственно  $\bar{C}_R = 9338$  долл. и  $\bar{C}_{NR} = 8804$  долл. Эти результаты согласуются с положением, высказанным в начале § 10.9.

Упражнение 1. Вычислить значения  $\bar{N}_R$ ,  $\bar{N}_{NR}$ ,  $\bar{C}_R$  и  $\bar{C}_{NR}$  при  $C_1 = 10 \frac{\text{долл.}}{\text{час}}$ ,  $C_2 = 10 \frac{\text{долл.}}{\text{изд.}}$  и других данных, соответствующих приведенному примеру.

Упражнение 2. Сравнить характеристики последовательного плана Вальда с заменой и плана п. 10.7.2 (также с заменой).

Использовать значения параметров  $p_1 = 0,05$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $p_2 = 0,10$ ,  $\beta = 0,10$ . Сравнить стоимости. Рассмотреть также случай испытаний без замены.

У п р а ж н е н и е 3. Критерий только что рассмотренного выборочного плана можно выразить посредством ограничений на среднюю наработку на отказ, т. е. посредством задания параметров  $\theta_1$ ,  $\alpha$ ;  $\theta_2$ ,  $\beta$ . Преобразовать формулы (10.63) — (10.65), (10.68) — (10.71), (10.73) и (10.74) в выражения, определяемые через  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (см. [16]). Заметим, что требуемое время работы  $T$  в подобное выражение критерия выборочного плана испытаний на надежность не входит. Заметим также, что подобное же преобразование можно осуществить применительно ко всем выборочным планам испытаний на надежность, рассмотренным в настоящей главе.

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. H. Bowker and G. J. Lieberman. Engineering statistics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1959, p. 467—535.
2. G. J. Lieberman and G. J. Resnikoff. Sampling plans for inspection by variables. J. Am. Stat. Assoc., 1955, v. 50, June, p. 457—516.
3. G. J. Resnikoff and G. J. Lieberman. Tables of the non-central t-distribution. Stanford University Press, Stanford, Calif., 1957.
4. Tables of the cumulative binomial distribution. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1955.
5. C. Eisenhart, M. W. Hastay and W. A. Wallis. Techniques of statistical analysis. McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 1947, Ch. 6.
6. А. В а л ь д. Последовательный анализ. Физматгиз, 1960.
7. M. Sobel and J. A. Tischendorf. Acceptance sampling with new life test objectives. Proc. 5th National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, Philadelphia, 1959, 12—14 January, p. 108—118.
8. H. P. Coode and J. H. K. Kao. Sampling plans based on the Weibull distribution. Proc. 5th National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, Philadelphia, 1961, 9—11 January, p. 24—40.
9. B. Epstein. Truncated life tests in the exponential case. Ann. Math. Stat., 1954, v. 25, p. 555—564.
10. B. Epstein. Testing of hypotheses. Wayne State Univ. Tech. Report № 3, 1958, 1 October [Выполнено по контракту № NR 2163(00), NR 042018 для морского ведомства; этот доклад помещен также в [12].
11. B. Epstein and M. Sobel. Life testing. J. Am. Stat. Assoc., 1953, v. 48, p. 486—502.
12. Statistical techniques in life testing. PB171580, U. S. Department of Commerce, Office of Technical Services, Washington 25, D. C., 1961, July.
13. J. Nadler. Inverse binomial sampling plans when an exponential distribution is samples with censoring. Ann. Math. Stat., 1960, v. 31, December, p. 1201—1204.

14. D. Mendenhall and E. H. Lehman Jr. An approximation to the negative moments of the positive binomial useful in life testing. *Technometrics*, 1960, v. 2, May, p. 227—242.

15. Г. Крамер. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.

16. B. Epstein and M. Sobel. Sequential life tests in the exponential case. *Ann. Math. Stat.*, 1955, v. 26, p. 82—93.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Albert G. E. Accurate sequential tests on the mean of an exponential distribution. *Ann. Math. Stat.* 1956, v. 27, June, p. 460—470.

Bechofer R. A note on the limiting relative efficiency of the Wald sequential probability ratio test. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1960, v. 55, p. 660—663.

Breakwell J. V. Economically optimum acceptance tests. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1956, v. 51, June, p. 243—256.

Burr I. W. Average sample number under curtailed or truncated sampling. *Ind. Qual. Control*, 1957, v. 13, 8, February, p. 5—7.

Chernoff H. and Lieberman G. J. Sampling inspection by variables with no calculations. *Ind. Qual. Control*, 1957, v. 13, 7, January, p. 5—7.

Epstein B. Statistical developments in Life Testing. Proc. 3rd National Symposium on Reliability and Quality Control, Washington, D. C. 1957, 14—16 January, p. 106—112.

Harter H. L. Circular error probabilities. *J. Am. Stat. Assoc.* 1960, v. 55, p. 723—731.

Lindley D. V. Binomial sampling schemes and the concept of information. 1957, v. 44, pt. 1,2, *Biometrika*, p. 179—186.

Moranda P. B. Effect of Bias on estimates of the circular probable error. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1960, v. 55, p. 732—735.

Moriguti, Sigeiti Efficiency of a sampling inspection plan. Reports of Statistical Applications Research, Union of Japanese Scientists and Engineering, 1956, v. 4, 3, July, p. 1—7.

Sobel M. Statistical techniques for reducing the experiment time in reliability studies. *Bell System Techn. J.*, 1956, v. 35, January p. 179—202.

Stevens C. F. A sequential test for comparing component reliabilities. *IRE Trans. Reliability and Quality Control*, 1957, RQC-12, November, p. 37—47.

Walsh J. E. Estimating future from past in life testing. *Ann. Math. Stat.*, 1957, v. 28, June, p. 432—441.

## ГЛАВА 11

# МОДЕЛИ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ

### 11.1. ВВЕДЕНИЕ

Периодически оценивая надежность, мы получим временную последовательность, по которой можно определить характер изменения надежности. С этой целью необходимо исследовать кривые повышения (роста) надежности.

Прежде всего мы имеем дело с текущей оценкой надежности и знаем ее закон возрастания к наблюдаемому моменту времени. Спрашивается, можно ли экстраполировать или распространить кривую роста на будущее? Если это так, то можно оценить установившийся уровень надежности, по которому мы будем судить о выполнении заданных требований к надежности. Далее, исследование роста надежности — это не только периодическая фиксация результатов. При помощи такого исследования можно находить источники повышения надежности, что позволяет более обоснованно подходить к последующему планированию.

Так, можно определить, как на повышение надежности сказывается количество испытаний, стоимость, переделки в системе, распределение обслуживающего персонала, эффективность обработки информации об отказах, количество и виды конструктивных изменений и другие факторы. В результате можно более эффективно использовать средства, рабочую силу и время.

Следует подчеркнуть, что учет надежности при конструировании системы играет первостепенную роль (см. § 12.5). В особенности это относится к исследованию



кривых роста для определенных видов оборудования. Например, в случае жидкостного ракетного двигателя, если вычертить кривую надежности в зависимости от числа испытаний, мы обычно находим, что эта кривая начинает «выравниваться». Само собой разумеется, что это будет иметь место в том случае, когда надежность стремится к единице; однако данное явление может наблюдаться и тогда, когда надежность значительно меньше единицы. Другими словами, вследствие постоянных испытаний, сбора информации об отказах, анализа, отдельных технических усовершенствований по истечении некоторого времени быстро достигается точка «прекращения роста».

Достигается предельное значение надежности. Если это значение является недостаточным, тогда следует изменить проект или общий принцип проектирования. Обычно оказывается, что при осуществлении нового проекта его надежность вначале ниже надежности предыдущего. Затем этот разрыв быстро преодолевается и, в конце концов, устанавливается определенное, более высокое значение надежности. Это значение зависит как от возможностей, заложенных в проекте, так и от нашего умения исследовать надежность. Таким образом, первостепенную важность с точки зрения стоимости и времени представляет определение предельных значений надежности и соответствующих точек «прекращения роста».

Обычно приходится исследовать сложные системы, подверженные постоянным переделкам; в результате вполне закономерно, что точки кривой надежности будут подвержены определенным колебаниям, которые объясняются как названной причиной, так и случайными ошибками результатов испытаний. Эти колебания искажают истинный вид кривой роста надежности, а следовательно, уменьшают наши возможности определения истинного уровня предельной и фактической надежности системы.

В соответствии с этим в настоящей главе на простых моделях объясняются методы определения кривых роста надежности и нахождения доверительных пределов для оценок и экстраполяций. Рассматривается также некоторый класс математических моделей, при помощи которого можно описывать функции роста.

## 11.2. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ РОСТА НАДЕЖНОСТИ

Допустим, что испытывается некоторое устройство, которое понадобится для определенного применения. Применение это будет такого рода, что устройство либо выполнит свои функции, либо откажет. Предположим, что устройство настолько простое, что возможен лишь один способ отказа, и что усилия конструктора направлены на выявление причины отказа и перестройку системы, когда отказ вообще будет невозможен. Предположим далее, что любая переделка системы либо полностью успешна, либо не изменяет вероятности отказа  $p$ . Другими словами, в любой момент времени вероятность отказа равна либо  $p$ , либо 0.

В описанной ситуации меры по повышению надежности связаны с повторением действия (испытаниями) устройства. Если в каком-либо испытании устройство срабатывало безотказно, разработчик или конструктор решает, что до следующего испытания никаких изменений делать не нужно, полагаясь на уже произведенные изменения. Если же устройство в каком-то испытании отказало, то у инженера существует вероятность  $\alpha$  к следующему испытанию устранить возможность отказов\*. Чтобы придать нашей модели математическую форму, обозначим через  $P_1(n)$  вероятность того, что в момент, предшествующий  $n$ -му испытанию, устройство еще ненадежно, т. е. находится в состоянии 1. Соответственно под  $P_0(n)$  мы будем понимать вероятность абсолютной надежности (состояние 0) в тот же момент времени.

Пусть известно, что перед первым испытанием устройство находилось в состоянии 1, т. е.  $P_1(1) = 1$ .

---

\* Описанная модель не настолько тривиальна, как может показаться с первого взгляда. Бывает, что после внесения изменений некоторый элемент отказывает снова. Анализ отказов еще не решает задачи. Это можно объяснить тем, что наши данные здесь ограничены, а также и тем, что требования к системе (к виду материала, весу, габаритам и пр.) ограничивают возможности «инженерно» решить задачу для того или иного элемента, не изменив существенным образом конструкцию или характеристики системы. Примером такого рода являются ранние разработки подвижного сопла для ТРД. Горловина изготовлялась из различных материалов и различной формы, но отказ наступал настолько быстро, что невозможно было установить его причину, пока не был найден выход в виде нового существенного усовершенствования

Посмотрим, каким образом устройство может оказаться в состоянии 1 перед  $n$ -м испытанием. Это возможно в двух несовместных случаях: 1) перед  $n-1$ -м испытанием устройство находится в состоянии 1, и это испытание проходит без отказа, вероятность такого события равна

$$P_{n-1}(1) \cdot (1 - p);$$

2) перед  $n-1$ -м испытанием устройство находится в состоянии 1, в  $n-1$ -м испытании происходит отказ; после этого производится неудачная попытка исключить возможность отказов. Вероятность этого события составляет

$$P_{n-1}(1) \cdot p \cdot (1 - \alpha).$$

Поскольку вероятность пребывания в состоянии 1 перед  $n$ -м испытанием равна сумме вероятностей несовместных событий, приводящих к данному событию, будем иметь

$$P_n(1) = P_{n-1}(1) \cdot (1 - p) + P_{n-1}(1) \cdot p \cdot (1 - \alpha) \quad (11.1)$$

ли

$$P_n(1) = P_{n-1}(1) [1 - p\alpha]. \quad (11.2)$$

Подставив начальное условие  $P_1(1) = 1$ , легко находим по индукции, что

$$P_n(1) = (1 - p\alpha)^{n-1}. \quad (11.3)$$

Чтобы найти  $P_n(0)$ , заметим, что устройство может находиться перед  $n$ -м испытанием в состоянии 0, если выполняется одно из двух условий: 1) оно уже было в состоянии 0 перед  $n-1$ -м испытанием; 2) оно было в состоянии 1 перед  $n-1$ -м испытанием; в данном испытании произошел отказ, и после этого была устранена возможность дальнейших отказов. Следовательно,

$$P_n(0) = P_{n-1}(0) + P_{n-1}(1) \cdot p\alpha \quad (11.4)$$

или на основании (11.3) (где необходимо взять  $n-1$  вместо  $n$ )

$$P_n(0) = P_{n-1}(0) + p\alpha(1 - p\alpha)^{n-2}. \quad (11.5)$$

Ввиду того что  $P_1(1) = 1$ ,  $P_1(0) = 0$  (так как в этот момент устройство находится в состоянии 1, то оно не может находиться в состоянии 0).

Последовательно полагая  $n=2, 3, \dots$ , мы получим

$$P_n(0) = p\alpha [1 + (1 - p\alpha) + \dots + (1 - p\alpha)^{n-2}] = \quad (11.6)$$

$$= \frac{p\alpha [1 - (1 - p\alpha)^{n-1}]}{1 - (1 - p\alpha)} \quad (11.7)$$

или

$$P_n(0) = 1 - (1 - p\alpha)^{n-1}. \quad (11.8)$$

Этот результат можно было бы получить и непосредственно, заметив, что в любой момент времени устройство находится в одном из двух состояний: 1 или 0. Так как вероятность состояния 1 перед  $n$ -м испытанием дается формулой (11.3), то вероятность состояния 0 в этот же момент времени будет равна (11.8).

Определим теперь надежность устройства  $R_n$  во время  $n$ -го испытания, как безусловную вероятность того, что устройство не откажет при  $n$ -м испытании. Указанное событие может произойти двумя несовместными способами:

1. Перед  $n$ -м испытанием устройство находится в состоянии 0 [с вероятностью  $1 - (1 - p\alpha)^{n-1}$ ].

2. Перед  $n$ -м испытанием устройство находится в состоянии 1 и во время этого испытания не отказывает [вероятность этого события равна  $(1 - p\alpha)^{n-1}(1 - p)$ ].

Таким образом,

$$R_n = 1 - (1 - p\alpha)^{n-1} + (1 - p\alpha)^{n-1}(1 - p) \quad (11.9)$$

или

$$R_n = 1 - (1 - p\alpha)^{n-1}p. \quad (11.10)$$

Читатель может также легко убедиться в том, что если вероятность пребывания устройства в начальный момент времени в состоянии 1 равна  $\beta$ , т. е.  $P_1(1) = \beta$ , то

$$R_n = 1 - (1 - p\alpha)^{n-1}\beta p. \quad (11.11)$$

Заметим, что если  $\beta < 1$ , то надежность при  $n$ -м испытании больше, чем в том случае, когда устройство находится в начальный момент в состоянии 1 с вероятностью 1.

В описанном случае надежность возрастает по показательному закону. Это более наглядно видно из формулы

$$R_n = 1 - Ae^{-C(n-1)}, \quad (11.12)$$

где

$$A \equiv \beta p; \quad (11.13)$$

$$C \equiv \log \frac{1}{1 - pa} > 0. \quad (11.14)$$

В § 11.3 указаны методы оценки параметров моделей роста надежности.

### 11.2.1. Дальнейшие свойства описанной модели

Возникает вопрос, зависит ли результат любого испытания от результатов прочих испытаний? Интуитивно чувствуется, что зависит. Мы покажем, что это действительно так. Данный результат может означать большее, а именно, что если *априори* выбрать кривую роста надежности, например, в виде (11.12) и пытаться подобрать модель отказов, которая бы ей соответствовала, то при этом следует осторожно подходить к предположению о независимости испытаний. Подобная «осторожность» нужна лишь при экстраполяции и построении доверительных пределов, в то же время оценки параметров кривой роста можно находить, не заботясь о том, зависимы ли испытания.

Исследуем теперь вопрос о зависимости испытаний. Пусть  $T_n$  — случайная величина, равная 1, если в  $n$ -м испытании был успех, и 0 в случае отказа;  $V_n$  — другая случайная величина, которая равна 1, если перед  $n$ -м испытанием устройство находилось в состоянии 1, и 0, если оно находилось в состоянии 0. Из (11.3), (11.8) и (11.10) получим:

$$\left. \begin{aligned} P(V_n = 0) &= 1 - \Delta^{n-1}, \\ P(V_n = 1) &= \Delta^{n-1}, \\ P(T_n = 0) &= p\Delta^{n-1}, \\ P(T_n = 1) &= 1 - p\Delta^{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

где

$$\Delta \equiv 1 - pa.$$

Найдем теперь совместное распределение  $T_m$  и  $T_n$ . Для этого целесообразно ввести вспомогательную случайную величину  $X_n$  по следующему правилу.

$X_n=0$ , если перед  $n$ -м испытанием устройство находится в состоянии 1 и во время этого испытания отказывает:

$$P(X_n=0)=p\Delta^{n-1};$$

$X_n=1$ , если перед  $n$ -м испытанием устройство находится в состоянии 1 и во время этого испытания не отказывает;

$$P(X_n=1)=(1-p)\Delta^{n-1};$$

$X_n=2$ , если устройство перед  $n$ -м испытанием находится в состоянии 0 (следовательно, никакой отказ не возможен);

$$P(X_n=2)=1-\Delta^{n-1}.$$

Если определить формулой

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=p_{ij} \quad (11.16)$$

условные вероятности ( $i, j=0, 1, 2, \dots$ ), то их можно записать в виде матрицы

$$P \equiv (p_{ij}) = \begin{bmatrix} (1-\alpha)p & (1-\alpha)(1-p) & \alpha \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.17)$$

Так, например,  $p_{01}$  имеет вид  $p_{01}=(1-\alpha)(1-p)$ . Чтобы получить это выражение, заметим, что если перед  $n$ -м испытанием устройство находится в состоянии 1 и во время этого испытания отказывает ( $X_n=0$ ), то оно может оказаться в состоянии 1 и не отказаться в  $n+1$ -м испытании ( $X_{n+1}=1$ ) только в том случае, когда его не исправили (вероятность этого равна  $1-\alpha$ ) и потом оно не отказало (с вероятностью  $1-p$ ). Таким образом, требуемая условная вероятность будет составлять  $(1-\alpha)(1-p)$ . Другие элементы матрицы находятся подобным же путем.

У п р а ж н е н и е. Доказать, что элементы матрицы  $P$  имеют вид (11.17).

Элементы  $p_{ij}$  матрицы  $\mathbf{P}$  называются переходными вероятностями (за один шаг) однородной цепи Маркова ([1], стр. 340).

Каждый из них определяет вероятность перехода за одно испытание из соответствующего «состояния  $i$ » в «состояние  $j$ ». Это не те состояния, которые использованы при определении случайной величины  $V_n$ ; ввиду этого в случае  $X_n$  мы будем обозначать состояния кавычками.

Из теории цепей Маркова следует, что, возведя матрицу  $\mathbf{P}$  в  $k$ -ю степень, мы получим вероятности перехода за  $k$  шагов  $p_{ij}^{(k)}$  ([1], стр. 347—348).  $p_{ij}^{(k)}$  обозначают условные вероятности того, что наша «система» через  $k$  испытаний после «состояния  $i$ » окажется в «состоянии  $j$ ». Таким образом,  $p_{ij}^{(k)}$  есть условная вероятность события  $X_{n+k} = j$  при условии  $X_n = i$ .

У п р а ж н е н и е. Показать, что

$$\mathbf{P}^k = \begin{bmatrix} (1-\alpha) p \Delta^{k-1} & (1-\alpha)(1-p) \Delta^{k-1} & 1 - (1-\alpha) \Delta^{k-1} \\ p \Delta^{k-1} & (1-p) \Delta^{k-1} & 1 - \Delta^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.18)$$

У к а з а н и е. Использовать тот факт, что сумма вероятностей, стоящих в любой из строк, должна равняться 1, так как, например в случае второй строки, если система находится в «состоянии 1», то она должна либо остаться в нем, либо перейти в «состояние 0» или в «состояние 2».

Рассмотрим теперь четыре события:

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad T_m = 0, \quad T_n = 0, \\ (b) \quad T_m = 0, \quad T_n = 1, \\ (c) \quad T_m = 1, \quad T_n = 0, \\ (z) \quad T_m = 1, \quad T_n = 1, \end{array} \right\} \quad (11.19)$$

где  $n \leq m - 1$ .

Событие (а) наступает в том случае, когда перед  $n$ -м испытанием устройство находится в «состоянии 1» и во время этого испытания отказывает; то же самое происходит при испытании  $m$ . Таким образом, вероят-

ность события (а) равна произведению следующих двух вероятностей:

$$(a_1) P(X_n = 0) = p\Delta^{n-1},$$

$$(a_2) p_{00}^{(m-n)} = (1 - \alpha) p\Delta^{m-n-1}$$

или

$$P(T_m = 0, T_n = 0) = p^2 (1 - \alpha) \Delta^{m-2}. \quad (11.20)$$

Вероятность события (б) равна произведению вероятностей

$$(б_1) P(X_n = 1) = (1 - p) \Delta^{n-1},$$

$$(б_2) p_{10}^{(m-n)} = p\Delta^{m-n-1},$$

откуда

$$P(T_m = 0, T_n = 1) = p(1 - p) \Delta^{m-2}. \quad (11.21)$$

Вероятность события (в) равна произведению вероятностей

$$(в_1) P(X_n = 0) = p\Delta^{n-1},$$

$$(в_2) p_{01}^{(m-n)} + p_{02}^{(m-n)} = (1 - \alpha)(1 - p) \Delta^{m-n-1} +$$

$$+ 1 - (1 - \alpha) \Delta^{m-n-1} = 1 - p(1 - \alpha) \Delta^{m-n-1},$$

откуда получаем

$$P(T_m = 1, T_n = 0) = p[\Delta^{n-1} - p(1 - \alpha) \Delta^{m-2}]. \quad (11.22)$$

Наконец, вероятность события (г) равна произведению вероятностей

$$(г_1) P(X_n = 1) = (1 - p) \Delta^{n-1},$$

$$(г_2) p_{11}^{(m-n)} + p_{12}^{(m-n)} = (1 - p) \Delta^{m-n-1} + 1 -$$

$$- \Delta^{m-n-1} = 1 - p\Delta^{m-n-1}$$

плюс вероятность

$$(г_3) P(X_n = 2) = 1 - \Delta^{n-1},$$

так что

$$P(T_m = 1, T_n = 1) = 1 - p[\Delta^{n-1} + (1 - p) \Delta^{m-2}]. \quad (11.23)$$



Следовательно, совместное распределение вероятностей  $(T_m, T_n)$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} P(T_m=0, T_n=0) &= p^2(1-\alpha)\Delta^{m-2}, \\ P(T_m=0, T_n=1) &= p(1-p)\Delta^{m-2}, \\ P(T_m=1, T_n=0) &= p[\Delta^{n-1} - p(1-\alpha)\Delta^{m-2}], \\ P(T_m=1, T_n=1) &= 1-p[\Delta^{n-1} + (1-p)\Delta^{m-2}], \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

где

$$n \leq m-1.$$

У п р а ж н е н и е 1. Выписать вероятности  $P(T_m=0, T_n=0)$  и т. д. в случае, когда  $n \geq m+1$ .

У п р а ж н е н и е 2. Проверить совместное распределение (11.24) на непротиворечивость, показав, что сумма всех вероятностей равна 1; найти также безусловное распределение  $T_m$  (или  $T_n$ ).

Найдем теперь ковариацию  $T_m$  и  $T_n$  и попутно коэффициент корреляции. Если  $n \leq m-1$ , то

$$\begin{aligned} \text{cov}(T_m, T_n) &= E(T_m T_n) - E(T_m)E(T_n) = \\ &= p^2 \Delta^{m-2} (1 - \alpha - \Delta^n), \end{aligned} \quad (11.25)$$

$$\text{var } T_m \cdot \text{var } T_n = p^2 \Delta^{m+n-2} (1 - p \Delta^{m-1})(1 - p \Delta^{n-1}). \quad (11.26)$$

Значит, коэффициент корреляции равен

$$\rho(T_m, T_n) = \frac{p \Delta^{[(m-n)/2]-1} (1 - \alpha - \Delta^n)}{[(1 - p \Delta^{m-1})(1 - p \Delta^{n-1})]^{1/2}}. \quad (11.27)$$

У п р а ж н е н и е 3. Вывести (11.25), (11.26) и (11.27) со всеми подробностями. Воспользоваться тем, что  $T_m T_n = 1$  тогда и только тогда, когда  $T_m = 1$  и  $T_n = 1$ . Рассмотреть также случай  $n \geq m+1$ .

Если мы рассмотрим формулу (11.27), то обнаружим, что коэффициент корреляции будет положительным или отрицательным в зависимости от того, положительно или отрицательно выражение  $1 - \alpha - \Delta^n$ . Поскольку  $\Delta \equiv 1 - p\alpha$  больше, чем  $1 - \alpha$ , но меньше 1, то при достаточно больших  $n$  коэффициент корреляции становится положительным для всех  $m \geq n+1$ . Но при «малых»  $n$  и при  $m$ , ненамного больших  $n$ , коэффициент корреляции может быть отрицательным.

Прежде чем приступить к обобщению результатов данного параграфа и § 11.2, вернемся снова к модели § 11.2. До сих пор предполагалось, что может быть только один вид отказов; однако можно рассмотреть следующее обобщение «испытаний». Допустим, что в качестве  $n$ -го испытания рассматривается последовательность  $N$  испытаний и что только в том случае, когда ни в одном из них не произошло отказа, групповое испытание считается успешным. Если же в групповом испытании произойдет хотя бы один отказ, то это считается отказом группового испытания; как и прежде, в этом случае существует вероятность  $\alpha$  «исправления» устройства к следующей группе  $N$  испытаний, т. е. к  $n+1$ -му групповому испытанию. Если вероятность отказа в любом испытании равна  $p'$ , то вероятность отказа в групповом испытании составит  $p = 1 - (1 - p')^N$ . Это означает, что мы должны только заменить в предыдущих формулах  $p$  величиной  $1 - (1 - p')^N$ .

Понятно, что построение модели роста надежности с учетом возможности различных типов отказов связано с большими трудностями. Однако и в этом направлении имеются некоторые результаты [2].

Этот и предыдущий пункты в некотором смысле следует рассматривать как вводные в задачу пригонки кривых роста надежности к упорядоченным группам данных об отказах. Снова подчеркнем то утверждение, которое было сформулировано в начале этого пункта: результаты испытаний могут быть весьма тесно коррелированы или зависимы; это показано на очень простом примере модели роста надежности § 11.2. Указанное обстоятельство следует при возможности учитывать при предсказании надежности и определении доверительных пределов.

В следующем параграфе будет рассмотрена задача пригонки кривой роста к наблюдениям отказов и успехов сначала по методу максимального правдоподобия, а затем по методу наименьших квадратов. Для применения метода максимального правдоподобия к *зависимым* наблюдениям надлежит задаться моделью, которая учитывала бы корреляцию между группами наблюдений успехов и отказов.

Используя результаты настоящего параграфа, мы могли бы увидеть, как «выглядит» подобная модель.

Оказывается, что нам пришлось бы находить совместное распределение всей совокупности случайных величин  $T_1, \dots, T_n, \dots$ .

В то же время нам пока известны только распределения *пар*  $T_m, T_n$ .

Распределений этого последнего типа уже достаточно для того, чтобы применить метод наименьших квадратов: дисперсии оценок можно найти, рассмотрев только математические ожидания произведений пар наблюдений. Другими словами, нам необходимо рассмотреть лишь обычную корреляцию, а не какую-то более сложную зависимость. К сожалению, у нас нет возможности вдаваться в подробности этой задачи.

### 11.3. ПРИГОНКА КРИВОЙ К МОДЕЛИ РОСТА НАДЕЖНОСТИ

Модель, которую мы рассмотрим, будет основываться на следующих предположениях. Программа испытаний состоит из  $N$  этапов. На каждом этапе производится определенное число испытаний изделий; в каждом случае фиксируется только факт отказа или безотказной работы.

Все испытания одного этапа производятся с изделиями одной и той же надежности. Результаты этапа используются для улучшения изделий, поступающих на следующий этап испытаний.

После выполнения всей программы испытаний ( $N$  этапов) желательно подобрать кривую роста для  $N$  групп данных, о которых шла речь. Информация о  $k$ -группе (нумерация производится в хронологическом порядке) фиксируется в виде числа испытаний  $n_k$  и числа успехов в них  $S_k$ . Модель роста надежности может, к примеру, иметь вид

$$R_k = R_\infty - \frac{\alpha}{k}, \quad (11.28)$$

где  $R_k$  — истинная надежность изделий во время  $k$ -го этапа испытаний;  $R_\infty$  — установившееся значение надежности, достижимое при  $k \rightarrow \infty$ ;  $\alpha > 0$  характеризует скорость роста (он в данном случае носит „гиперболический“ характер).

### 11.3.1. Оценки максимального правдоподобия

Мы применим метод максимального правдоподобия к оценке параметров  $R_\infty$  и  $\alpha$ . Для  $k$ -го этапа мы будем иметь

$$L_k = \text{const } R_k^{S_k} (1 - R_k)^{n_k - S_k}. \quad (11.29)$$

Предполагая, что результаты всех этапов статистически независимы, получаем\*

$$L = \prod_{k=1}^N L_k = \text{const } \prod_{k=1}^N R_k^{S_k} (1 - R_k)^{n_k - S_k}, \quad (11.30)$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv \log L = \log \text{const} + \sum S_k \log \left( R_\infty - \frac{\alpha}{k} \right) + \\ + \sum (n_k - S_k) \log \left( 1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k} \right). \end{aligned} \quad (11.31)$$

Уравнения правдоподобия примут вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_\infty} = \sum \frac{S_k}{R_\infty - \frac{\alpha}{k}} - \sum \frac{n_k - S_k}{1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k}} = 0, \quad (11.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = - \sum \frac{\frac{S_k}{k}}{R_\infty - \frac{\alpha}{k}} + \sum \frac{\frac{n_k - S_k}{k}}{1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k}} = 0. \quad (11.33)$$

Уравнения (11.32) и (11.33) можно переписать так:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_\infty} = \sum \frac{\frac{S_k}{n_k} - \left( R_\infty - \frac{\alpha}{k} \right)}{\frac{1}{n_k} \left( R_\infty - \frac{\alpha}{k} \right) \left( 1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k} \right)} = 0, \quad (11.32')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = - \sum \frac{\frac{1}{k} \frac{S_k}{n_k} - \left( R_\infty - \frac{\alpha}{k} \right) \frac{1}{k}}{\frac{1}{n_k} \left( R_\infty - \frac{\alpha}{k} \right) \left( 1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k} \right)} = 0. \quad (11.33')$$

\* Во всех случаях суммирование производится от 1 до  $N$ .

Последние уравнения можно решить лишь методом проб и ошибок. Для получения начальных значений  $\alpha$  и  $R_\infty$  положим, что  $1 - R_\infty \ll \alpha/k \ll 1$ .

Заменим также  $n_k$  выражением  $\bar{n} = (1/N) \sum n_k$ . В этих предположениях выражение, которое останется в знаменателях обеих сумм, будет равно  $\alpha/k$ , так как  $R_\infty - \alpha/k \approx R_\infty$  и  $1 - R_\infty + \alpha/k \approx \alpha/k$ ; остальные постоянные сократятся, так что мы получим

$$\frac{1}{\bar{n}} \sum k S_k = \frac{N(N+1)}{2} R_\infty - \alpha N, \quad (11.34)$$

$$\frac{1}{\bar{n}} \sum S_k = N R_\infty - \alpha \sum \frac{1}{k}. \quad (11.35)^*$$

Решение (11.34) и (11.35) дает

$$\hat{\alpha} = \frac{\frac{1}{\bar{n}} \left( \sum k S_k - \frac{N+1}{2} \sum S_k \right)}{\frac{N+1}{2} C_1 - N}, \quad (11.36)$$

$$\hat{R}_\infty = \frac{\frac{1}{\bar{n}} \left( \frac{C_1}{N} \sum k S_k - \sum S_k \right)}{\frac{N+1}{2} C_1 - N}, \quad (11.37)$$

где

$$C_1 \equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \approx \log \left( N + \frac{1}{2} \right) + E, \quad (11.38)$$

( $E$  — постоянная Эйлера, равная 0,577215665...)

Пример. Оценим  $\alpha$  и  $R_\infty$  в (11.36) и (11.37) на основании данных, приведенных в табл. 11.1.

По формуле (11.38) находим  $C_1 \approx 3,598$ ; по формулам (11.36) и (11.37) получаем  $\hat{\alpha} = 0,782$ ,  $\hat{R}_\infty = 0,901$ .

---

\* В п. 11.32 находятся оценки по методу наименьших квадратов; их можно использовать вместо решения уравнений (11.34) и (11.35) в качестве начальных значений.

Таблица 11.1

$k$	$n_k$	$S_k$	$kS_k$	$S_k/nk$
1	10	5	5	0,500
2	8	5	10	0,600
3	9	6	18	0,667
4	9	7	28	0,778
5	10	6	30	0,600
6	10	7	42	0,700
7	10	8	56	0,800
8	10	7	56	0,700
9	10	6	54	0,600
10	11	7	70	0,636
11	10	9	99	0,900
12	11	10	120	0,909
13	12	9	117	0,750
14	10	8	112	0,800
15	10	7	105	0,700
16	10	8	128	0,800
17	10	9	153	0,900
18	10	9	162	0,900
19	10	10	190	1,000
20	10	9	180	0,900
$N = 20$	$\bar{n} = 10$	$\Sigma S_k = 152$	$\Sigma kS_k = 1735$	

На рис. 11.1 показан график функции  $\hat{R}_k = 0,901 - 0,782/k$ , умноженной на  $S_k/nk$ .

Более точные оценки  $\alpha$  и  $R_\infty$  получаются следующим образом. Вычислим знаменатели формул (11.32') и (11.33')

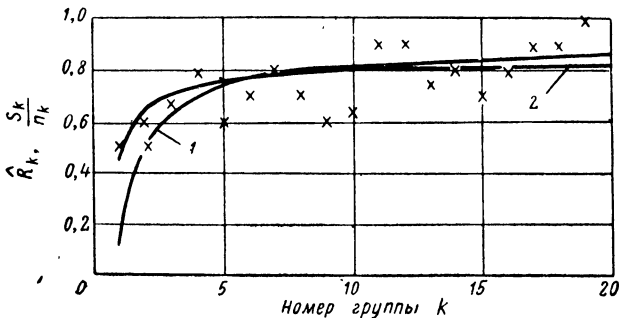


Рис. 11.1. График функции  $\hat{R}_k = 0,901 - 0,782/k$ , умноженной на  $S_k/nk$ .

1 — первое приближение; 2 — второе приближение.

использовав начальные значения  $\alpha$  и  $R_\infty$ , найденные из уравнений (11.34) и (11.35). В результате получим уравнения для оценок:

$$\sum \frac{kS_k}{D_k n_k} = R_\infty \sum \frac{k}{D_k} - \alpha \sum \frac{1}{D_k}, \quad (11.32'')$$

$$\sum \frac{S_k}{n_k D_k} = R_\infty \sum \frac{1}{D_k} - \alpha \sum \frac{1}{k D_k}, \quad (11.33'')$$

где

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{k}{n_k} \left( \hat{R}_\infty - \frac{\hat{\alpha}}{k} \right) \left( 1 - \hat{R}_\infty + \frac{\hat{\alpha}}{k} \right) = \\ &= \frac{k}{n_k} \left( 0,901 - \frac{0,782}{k} \right) \left( 0,099 + \frac{0,782}{k} \right). \end{aligned}$$

Значения различных коэффициентов, фигурирующих в уравнениях (11.32'') и (11.33''), получаются по табл. 11.1:

$$\sum \frac{kS_k}{D_k n_k} = 1067,$$

$$\sum \frac{k}{D_k} = 1389,$$

$$\sum \frac{1}{D_k} = 240,2,$$

$$\sum \frac{S_k}{n_k D_k} = 154,6,$$

$$\sum \frac{1}{k D_k} = 121,6.$$

Отсюда следует, что уравнения (11.32'') и (11.33'') будут иметь вид

$$1067 = 1389R_\infty - 240,2\alpha,$$

$$154,6 = 240,2R_\infty - 121,6\alpha.$$

Решение этих уравнений дает второе приближение

$$\hat{\alpha} = 0,374, \quad \hat{R}_\infty = 0,833.$$

Третье приближение, основанное на последних значениях  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{R}_\infty$ , будет иметь вид

$$\hat{\alpha} = 0,407, \quad \hat{R}_\infty = 0,831,$$

что указывает на быструю сходимость процесса.

### 11.3.1.1. ДИСПЕРСИИ И КОВАРИАЦИИ

На основании формул (11.32) и (11.33) вторые частные производные  $\mathfrak{C}$  по  $R_\infty$  и  $\alpha$  равны:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial R_\infty^2} = - \sum \frac{S_k}{\left(R_\infty - \frac{\alpha}{k}\right)^2} - \sum \frac{n_k - S_k}{\left(1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k}\right)^2}, \quad (11.39)$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \alpha^2} = - \sum \frac{\frac{S_k}{k^2}}{\left(R_\infty - \frac{\alpha}{k}\right)^2} - \sum \frac{\frac{n_k - S_k}{k^2}}{\left(1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k}\right)^2}, \quad (11.40)$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial R_\infty \partial \alpha} = \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \alpha \partial R_\infty} = \sum \frac{\frac{S_k}{k}}{\left(R_\infty - \frac{\alpha}{k}\right)^2} + \sum \frac{\frac{n_k - S_k}{n}}{\left(1 - R_\infty + \frac{\alpha}{k}\right)^2}. \quad (11.41)$$

Таким образом, оценки вторых частных производных можно вычислить, подставив в (11.39) и (11.40) ранее полученные оценки  $\alpha$  и  $R_\infty$  с учетом табл. 11.1. Приняв  $\alpha = 0,39$ ,  $R_\infty = 0,83$ , получим:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial R_\infty^2} \right\rangle \approx -1155,3,$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \alpha^2} \right\rangle \approx -69,95,$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \alpha \partial R_\infty} \right\rangle \approx -184,40.$$



Считая  $R_\infty$  первым параметром, а  $\alpha$  вторым, получим

$$A = \begin{bmatrix} -1155,2 & 184,40 \\ 184,40 & -69,95 \end{bmatrix},$$

$$\text{Det } A = 46810,$$

откуда

$$-A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,001494 & 0,003939 \\ 0,003939 & 0,02468 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \langle \text{var } \hat{R}_\infty \rangle & \langle \text{cov} (\hat{R}_\infty, \hat{\alpha}) \rangle \\ \langle \text{cov} (\hat{R}_\infty, \hat{\alpha}) \rangle & \langle \text{var } \hat{\alpha} \rangle \end{bmatrix}.$$

(Символ  $\langle \rangle$  обозначает взятие оценки). Дисперсия  $\hat{R}_k \equiv \hat{R}_\infty - \hat{\alpha}/k$  находится следующим образом:

$$\langle \text{var } \hat{R}_k \rangle = \langle \text{var } \hat{R}_\infty \rangle + \frac{1}{k^2} \langle \text{var } \hat{\alpha} \rangle - \frac{2}{k} \langle \text{cov} (\hat{R}_\infty, \hat{\alpha}) \rangle$$

или

$$\langle \text{var } \hat{R}_k \rangle = 0,001494 + \frac{0,02468}{k^2} - \frac{0,007878}{k}. \quad (11.42)$$

Теперь можно найти нижний доверительный предел с доверительным уровнем  $\gamma$  (см. п. 7.4.4):

$$\hat{R}_{L, k} = \hat{R}_k - K_{1-\gamma} \sqrt{\langle \text{var } \hat{R}_k \rangle}. \quad (11.43)$$

На рис. 11.2 показана оценка максимального правдоподобия  $\hat{R}_k$ , а также нижний доверительный предел  $\hat{R}_{L, k}$  в зависимости от  $k$  при  $\gamma = 0,90$ ,  $\hat{\alpha} = 0,39$ ,  $\hat{R}_\infty = 0,83$ . Теперь можно делать обоснованные выводы относительно некоторой будущей  $k$ -й группы, основываясь на имеющейся информации и уравнении (11.43). Вывод будет иметь следующий вид: „истинная надежность группы с номером, скажем,  $k=40$  принадлежит интервалу  $(\hat{R}_{L, 40}, 1)$ “.

и этот вывод будет иметь достоверность  $\gamma$ . Однако подобные выводы не будут иметь оснований, если модель не соответствует действительности или же модель верна, но следующие данные будут взяты из совокупности с иными значениями [постоянных  $R_\infty$  и  $\alpha$ . К тому же, мы

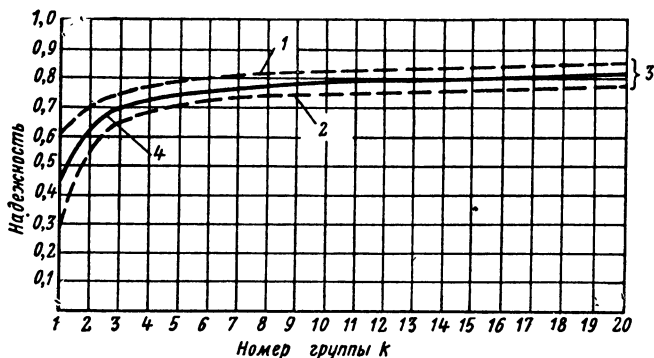


Рис. 11.2. Оценка максимального правдоподобия  $\hat{R}_k$  и нижний доверительный предел  $R_{Lk}$  в зависимости от  $k$  при  $\gamma=0,90$ ,  $\alpha=0,39$ ,  $\hat{R}_\infty=0,83$ .

1 — верхний 90%-ый доверительный предел; 2 — нижний 90%-ый доверительный предел; 3 — 80%-ый доверительный интервал; 4 —  $\hat{R}_k = 0,83 - \frac{0,39}{k}$ .

правомочны сделать только один вывод подобного рода; группа  $k$ , которой он касается, должна выбираться заранее или по крайней мере быть независимой от произвольных результатов испытаний. Мы не касаемся здесь вопроса о проверке истинности выбранной модели, хотя подобное испытание в принципе осуществимо\*.

### 11.3.2. Оценки по методу наименьших квадратов

Попытаемся теперь получить оценки параметров  $R_\infty$  и  $\alpha$  по методу наименьших квадратов. С этой целью минимизируем сумму квадратов  $Q$  отклонений наблюдаемой

\* См. [3], стр. 321—322, где описывается проверка *линейности* в задаче линейной регрессии, для которой  $x_i$  (наши  $R_k$ ) распределены по нормальному закону и центрированы линией регрессии.

частоты успехов  $S_k/n_k$  от математического ожидания  $R_\infty$  —  $\alpha/k$  по параметрам  $R_\infty$  и  $\alpha$ . Имеем:

$$Q = \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{n_k} - R_\infty + \frac{\alpha}{k} \right)^2, \quad (11.44)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial R_\infty} = -2 \sum \left( \frac{S_k}{n_k} - R_\infty + \frac{\alpha}{k} \right) = 0, \quad (11.45)^*$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 2 \sum \left( \frac{S_k}{n_k} - R_\infty + \frac{\alpha}{k} \right) \frac{1}{k} = 0. \quad (11.46)^*$$

Мы получаем два уравнения, линейные относительно неизвестных  $R_\infty$  и  $\alpha$ :

$$\sum \frac{S_k}{n_k} = N R_\infty - \alpha C_1, \quad (11.47)$$

$$\sum \frac{S_k}{k n_k} = R_\infty C_1 - \alpha C_2, \quad (11.48)$$

где

$$C_1 = \sum \frac{1}{k}; \quad C_2 = \sum \frac{1}{k^2}.$$

Решив (11.47) и (11.48) относительно  $R_\infty$  и  $\alpha$  и обозначив решение через  $\hat{R}_\infty$  и  $\hat{\alpha}$ , найдем оценки по методу наименьших квадратов

$$\hat{R}_\infty = \frac{C_2 \sum (S_k/n_k) - C_1 \sum (S_k/k n_k)}{N C_2 - C_1^2}, \quad (11.49)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{C_1 \sum (S_k/n_k) - N \sum (S_k/k n_k)}{N C_2 - C_1^2}. \quad (11.50)$$

Легко показать, что эти оценки являются несмещенными (п. 7.2.1). Для этого нужно взять математические ожидания обеих частей равенств (11.49) и (11.50) и использовать соотношение

$$E \left( \frac{S_k}{n_k} \right) = R_\infty - \frac{\alpha}{k}.$$

\* Суммирование ведется от 1 до  $N$ .

Численные значения  $C_1$  и  $C_2$  наиболее просто определить формулами

$$C_1 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \approx \log\left(N + \frac{1}{2}\right) + E,$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \approx \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N + \frac{1}{2}},$$

где  $E = 0,57715665 \dots$  — постоянная Эйлера;

$$\frac{\pi^2}{6} = 1,64493407 \dots$$

Для дисперсий и ковариаций оценок  $\hat{R}_\infty$  и  $\hat{\alpha}$ , полученных по методу наименьших квадратов, можно получить точные значения непосредственно по (11.49) и (11.50). Однако соответствующие вычисления очень сложны. *Оценки, полученные по методу наименьших квадратов, могут быть успешно использованы для нахождения хороших начальных значений оценок максимального правдоподобия.* Тогда по методу итераций, приведенному в п. 11.3.1, получаются почти точные значения. Вычислить оценки дисперсий и ковариаций так, как это предлагается в п. 11.3.1, громоздко, но несложно. Это все же проще, чем пользоваться точными формулами, о которых мы упоминали. Например, используя данные п. 11.3.1, получаем по методу наименьших квадратов, что

$$\hat{R}_\infty = 0,802, \quad \hat{\alpha} = 0,248.$$

Эти значения гораздо ближе к полученным в п. 11.3.1 после второй итерации; следовательно, если исходить из этих значений, понадобится одна итерация.

Для модели можно брать и другие функциональные выводы скорости роста надежности. Более общая модель имеет вид

$$R_k = R_\infty - \alpha f(k), \quad (11.51)$$

где  $f(k)$  — положительная, монотонно убывающая функция  $k$ . Чтобы найти оценки  $R_\infty$  и  $\alpha$  по методу наименьших квадратов, необходимо вычислить суммы

$$C_1 = \sum_{k=1}^N f(k), \quad C_2 = \sum_{k=1}^N \overline{f(k)^2}.$$

Для удобства в табл. 11.2 приведены приближенные формулы для нескольких видов  $f(k)$ , которые могут быть использованы в модели.

Таблица 11.2

**Приближенные формулы для**

$$C_1 = \sum_{k=1}^N f(k) \text{ и } C_2 = \sum_{k=1}^N f(k)^2$$

$f(k)$	$C_1$	$C_2$
$k^{-1/2}$	$2\left(N + \frac{1}{2}\right)^{1/2} - 1,460$	$\log\left(N + \frac{1}{2}\right) + E$
$k^{-1}$	$\log\left(N + \frac{1}{2}\right) + E$	$\frac{\pi^2}{6} - \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-1}$
$k^{-2}$	$\frac{\pi^2}{6} - \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{3} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-3}$
$k^{-3}$	$1,2020569 - \frac{1}{2} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\frac{\pi^6}{945} - \frac{1}{5} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-5}$

$$E \approx 0,577215665, \quad \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493407$$

$$\frac{\pi^4}{90} \approx 1,08232323, \quad \frac{\pi^6}{945} \approx 1,01734306$$

### 11.3.3. Краткие выводы о методах оценок

Пожалуй, самый простой метод получения оценок параметров кривой роста надежности — это метод наименьших квадратов: уравнения, необходимые для того, чтобы применить этот метод, решать обычно легче, чем уравнения максимального правдоподобия. Для получения оценок дисперсий и ковариаций можно подставить оценки, полученные по методу наименьших квадратов, прямо во вторые частные производные логарифмической функции правдоподобия [например, (11.39) — (11.41)]. Однако рекомендуется использовать оценки, полученные по методу наименьших квадратов, в качестве начальных приближений метода максимального правдоподобия; дальнейшие приближения находятся путем итераций (ср. п. 11.3.1).

В тех случаях, когда уравнения максимального правдоподобия решаются проще, чем уравнения метода наименьших квадратов, следует всюду пользоваться методом максимального правдоподобия. Это основывается на той общей закономерности, что методы максимального правдоподобия имеют тенденцию к минимизации дисперсии оценок.

#### 11.4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Стоит прокомментировать содержание этой главы, а также добавить несколько обобщающих замечаний; в самом деле, приведенные методы еще не дают общего подхода к задачам, связанным с ростом надежности.

##### 11.4.1. Задачи, возникающие при отсутствии независимости

В § 11.2 была рассмотрена очень простая модель роста надежности, которую, как было отмечено, можно применять к последним этапам конструирования, где большая часть задачи связана с отдельным элементом или подсистемой. Далее эта модель была исследована с тем, чтобы математически описать корреляцию результатов испытаний; в результате было сделано заключение: для достоверных выводов относительно будущей надежности следует по возможности учитывать коррелированность результатов испытаний. Но в § 11.3 предполагалось, что результаты испытаний независимы, а следовательно, некоррелированы. Это было сделано для упрощения выкладок и сведения к минимуму алгебраических преобразований.

Один из методов учета коэффициента корреляции в оценке максимального правдоподобия п. 11.3.2 состоит в следующем. Предполагается, что существует коэффициент корреляции, отрицательный для близко расположенных испытаний и положительный, стремящийся к пулю для далеко отстоящих испытаний. [Это согласуется с замечаниями по поводу формулы (11.27)] Затем при вычислении дисперсий и ковариаций оценок параметров кривой роста принятую корреляционную функцию используют при вычислении математических ожиданий таких величин, как  $\sum S_R/n_R$  или  $(\sum S_R/n_R)^2$  (ср. п. 5.9.2). Построение модели для оценки данной корреляционной

функции представляется нам крайне сложным. Вероятно, наиболее приемлемый метод состоит в том, чтобы приписать коэффициенту корреляции произвольные значения, а затем на основании опыта как-то их подправлять.

#### 11.4.2. Другие возможные виды моделей

В § 11.3 в качестве меры надежности было принято отношение числа успехов к общему числу испытаний, т. е. это была биномиальная модель возникновения отказов. Вместе с тем индивидуальные испытания могут заключаться в измерениях, скажем, наработки до отказов. В этом случае (в предположении о показательном распределении времени безотказной работы) подходящей моделью роста надежности может служить

$$R_k = e^{-\alpha_k T}, \quad (11.52)$$

где  $\alpha_k$  — некоторая заданная убывающая функция  $k$  с одним или несколькими неизвестными параметрами;  $T$ , как всегда, обозначает требуемое время безотказной работы. В этом случае для получения оценок неизвестных параметров, а через них и оценок для  $R_k$ , можно также применить метод максимального правдоподобия или метод наименьших квадратов подобно тому, как это сделано на примерах п. 11.3.1 и 11.3.2.

При решении задачи о предсказании надежности необходимы совсем другие подходы. Здесь мы приведем только один пример.

Пусть  $\hat{R}_k$  обозначает оценку надежности при  $k$ -м испытании (например,  $k$ -е испытание может означать испытание изделий на протяжении  $k$ -го месяца после начала программы испытаний).

Обозначим через  $\hat{X}_k$  оценку надежности тех изделий, которые испытываются *на протяжении*  $k$ -го испытания. Тогда  $\hat{R}_k$  определится, как

$$\hat{R}_k = \alpha \hat{X}_k + (1 - \alpha) \hat{R}_{k-1}. \quad (11.53)$$

где  $\alpha$  — подходящим образом выбранная постоянная между 0 и 1. Очевидно, что  $\hat{R}_k$  — взвешенная оценка (теку-

щего) результата  $k$ -го испытания и результатов всех предыдущих испытаний.

Если  $\alpha$  мала (скажем,  $\alpha=0,1$ ), то предыдущие данные будут иметь большой вес. При больших  $\alpha$  (скажем,  $\alpha=0,9$ ) большую важность представляют текущие данные. Величину  $\alpha$  можно выбрать в зависимости от сложности конструируемого устройства, частоты изменения схемы и других факторов.

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во иностранной литературы, 1955.

2. Н. К. Weiss. Estimation of reliability growth in a complex system with a Poisson-type failure. Operations Research, 1956, v. 4, 5, October, p. 532—545.

3. А. М. Mood. Introduction to the theory of statistics. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Ayer M., Brunk H. D., Ewing G. M., Reid, W. T. Silverman E. An empirical distribution function for sampling with incomplete information. Ann. Math. Stat., 1955, v. 26, p. 641—647.

Gabriel K. R. The distribution of the number of successes in a sequence of dependent trials. Biometrika, 1959, v. 46, pt. 3, and 4, p. 454—460.

Mandel J. Fitting a straight line to certain types of cumulative data. J. Am. Stat. Assoc., 1957, v. 52, December, p. 552—566.

Noether G. E. Two sequential tests against trend. J. Am. Stat. Assoc., 1956, v. 51, p. 440—450.

Wheeler R. E. A variable probability distribution function. Specification, Rocket Motors, Aeronautical, Qualification Test.



## ГЛАВА 12

# ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ И ИСПЫТАНИЯ

### 12.1. ЦЕЛИ ИСПЫТАНИЙ

Испытать какой-либо объект — это значит поставить его в такие условия, чтобы обнаружилось его реальные особенности. Однако испытания — это не отдельная операция, которую можно было бы выполнить на каком-то этапе создания сложной системы; они представляют собой непрерывную операцию, при помощи которой получается информация на всех этапах развития системы.

На каждом этапе получают различные виды информации, поэтому вполне естественно, что применяются различные методы испытаний.

Испытания могут служить разным целям. На начальном этапе в результате испытаний узнают, реализуема ли та или иная схема, может ли быть использован определенный элемент.

При дальнейшем развитии системы возникает вопрос о том, какой вариант схемы является оптимальным в смысле эффективности, надежности, стоимости, поведения при различных возмущениях и т. д.

Когда структура изделия становится более определенной, нас могут интересовать более тонкие вопросы, связанные с дальнейшим снижением стоимости, эксплуатацией, использованием стандартных блоков и т. п.

Далее начинается этап испытаний различных качеств, целью которых является проверка системы на выполнение определенных требований по эффективности и надежности.

Наконец, следует произвести полное испытание внутренних возможностей изделия при более жестких или более разнообразных условиях, чем первоначальные.

Подобное испытание служит цели установить, что система достаточно устойчива по отношению к более жестким условиям, и, стало быть, можно удешевить ее эксплуатацию, транспортировку и т. д. или же можно расширить круг задач, решаемых системой.

## 12.2. МЕТОДОЛОГИИ ИСПЫТАНИЙ

В теории надежности существует несколько методологий испытаний, каждая со своими критериями; когда на этом основании возникают разногласия, то это, как правило, объясняется недопониманием функционирования испытываемого изделия, этапа, на котором находится его создание, а также практического назначения испытаний.

Остановимся на этих пунктах более подробно. Под выражением «функционирование» понимаются функциональные и физические связи элементов между собой и в системе. В этой связи мы будем рассматривать только два уровня сложности оборудования: *элемент* и *систему*. Эти понятия связаны: система представляет собой функционально-определенный объект, состоящий из взаимосвязанных элементов. Степень связанности — это как раз один из тех факторов, которые определяют методологию испытаний. Примером двух противоположностей в этом отношении могут служить твердое ракетное топливо и транзистор в электронной вычислительной машине. Первое представляет собой значительно более связанный элемент. Как то, так и другое необходимы для работы системы; однако, испытания транзистора имеют более определенный смысл в связи с его назначением в системе, чем испытания топлива. Топливо может взаимодействовать с топливным баком, с прокладкой или, например, с соплом. Таким образом, необходимо учитывать влияние на информацию, получаемую в результате испытаний; взаимодействия с окружающим оборудованием и вида использования данного элемента; эти факторы в свою очередь оказывают влияние на подход к испытаниям.

## 12.3. ИСПЫТАНИЯ СИСТЕМ И ЭЛЕМЕНТОВ

На метод испытаний также влияет уровень развития системы. Одна система может быть собрана из стандартных отработанных элементов, другая же требует

специальной разработки каких-то особенных элементов. В первом случае, когда поведение элементов хорошо изучено и не предполагается создавать для них необычные условия, большую часть испытаний составят испытания системы. Если же элементы—нового типа, то для них необходимо организовать специальные испытания. Испытания элементов составляют важную часть создания системы; именно на этом этапе испытываются различные типы элементов при условиях, варьируемых в широких пределах: нужно убедиться, что из определенного набора вариантов выбран наилучший и что при функционировании в более крупной системе, когда значения параметров отклонятся от их номинальных значений, будет достигаться определенный эффект.

Одним из важных требований к испытаниям элементов является правильное моделирование внешних условий системы, куда включаются входные характеристики и изменения в элементах. Помимо этого, высокие требования к надежности отдельных элементов обуславливают необходимость большого числа испытаний для подтверждения этой надежности. *Таким образом, испытания элемента больше служат цели повышения надежности путем оптимального выбора, чем оценке абсолютного значения надежности.*

Когда производятся испытания на уровне системы, то, очевидно, нет нужды моделировать внешние условия.

В этом случае уже имеются допустимые требования к надежности элементов системы, что облегчает определение значения надежности (решение этой задачи, конечно, зависит от стоимости, а также от числа изделий, которые можно испытывать). Одним из недостатков преждевременного перехода к испытаниям системы является то, что в этом случае будет очень много необъяснимых отказов элементов, а это очень затрудняет исследование статистики отказов. Другой недостаток заключается в следующем: в условиях отказов большого числа элементов остальные элементы будут подвержены большому числу включений, что, очевидно, сделает их режим более жестким, чем в установившихся условиях; поэтому получится искаженная картина образования отказов по сравнению с той, которая наблюдалась бы при работе системы в реальных условиях.

Испытания реакции системы на внешние условия представляют самостоятельную важную проблему. Например, когда испытывается большой ракетный двигатель при помощи создания соответствующих температурных условий и вращательного движения, невозможно воспроизвести все ускорения, действующие в полете. Единственным путем исследования, например, последнего фактора является сравнение испытаний при полетах с наземными испытаниями; но здесь опять мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что разница в результатах таких испытаний объясняется не одним различием в ускорениях. По возможности внешние условия, которые нельзя воспроизвести при испытании всей системы, следует компенсировать воссозданием подобных условий при испытаниях элементов. На этом пути можно, например, сделать более прочными или каким-либо образом усовершенствовать элементы, чувствительные к ускорениям.

При испытаниях системы в первую очередь следует выяснить, насколько надежно работают элементы в системе, а не ответить на вопрос, удовлетворяют ли элементы требуемым допускам. Не нужно уделять чрезмерного внимания испытаниям элементов на допуски.

Допуски должны быть подчинены цели создания надежной и работоспособной системы. Испытания системы не исключают испытания элементов, но они помогают выявлять ненадежные элементы, которые в последующем необходимо заменить или усовершенствовать. Испытания системы служат цели реалистической оценки надежности, а также улучшения основных элементов путем систематического выявления слабых мест и постановки требований. Это помогает правильно распределять усилия, направленные на повышение надежности.

Частные задачи испытаний с течением времени меняются; однако главная цель остается одной и той же — как можно более эффективное получение информации с целью успешного и быстрого осуществления проекта. Это должно быть выполнено оптимальным образом. Следовательно, планирование любого частного испытания должно быть согласовано с общей программой, чтобы получаемая информация имела максимальную пользу применения на последующих этапах программы.

## 12.4. МЕТОДЫ ИСПЫТАНИЙ

В дополнение к рассмотренным выше факторам следует добавить, что методы испытаний должны быть эффективными в смысле выявления истинного поведения оборудования.

Вернемся к нашему первоначальному определению испытания — постановка объекта в условия, выявляющие его реальные особенности. Несомненно, последним этапом испытаний должны быть натурные испытания; однако очевидно также то, что если этот последний этап не подготовить как следует посредством соответствующих испытаний на более ранних этапах, то в конце концов может оказаться, что реальный характер изделия не тот, который требовался. Чтобы исключить возможность подобной ситуации, оборудование следует подвергнуть некоторым или всем испытаниям, кратко описанным ниже. Эти испытания позволяют выявить слабые места оборудования, характеристики его поведения и природу отказов.

### 12.4.1. Испытания на долговечность

Испытания на долговечность или на время безотказной работы, подробно разобранные в гл. 8 и 10 с точки зрения оценки и обеспечения надежности, имеют также другие важные аспекты. Нас интересует не только то, *когда* отказало изделие, но также и то, за счет *какой части* элемента или за счет *какого элемента* системы произошел отказ. Кроме того, мы хотим раскрыть *природу отказов*, т. е. выяснить виды отказов (например, уход параметра, неустойчивое поведение какой-нибудь характеристики, внезапные отказы и т. д.), а также механизм отказов, причины отказов, обуславливаемые плохой конструкцией, неправильным использованием составных частей и т. д. Если критическим параметром изделия является *время безотказной работы*, то ответ на все эти вопросы дается испытаниями на долговечность, воспроизводящими реальную картину отказов.

Многочисленные виды электронного, электромеханического и гидравлического оборудования попадают в эту категорию, коль скоро аппаратура работает непрерывно или испытывается на протяжении большого количества

циклов, но при этом включение и выключение не создают более жестких условий, чем при обычной работе. В том случае, когда время безотказной работы распределено по показательному или какому-нибудь другому простому закону, испытания на долговечность покажут, насколько время безотказной работы оборудования больше (или меньше), чем это требуется для его использования. Это, в свою очередь, определяет, где прежде всего нужно повысить надежность. Если время не является критическим параметром, тогда очень часто для «исключения» отказов и раскрытия их природы и механизма оказываются более приемлемыми методы, которые будут описаны ниже.

#### 12.4.2. Испытания на число циклов

Испытания этого вида аналогичны испытаниям на долговечность. Использовать их имеет смысл тогда, когда включение и выключение являются более разрушительными операциями, чем простое накопление времени работы. Для испытаний данного вида важным параметром является  $\bar{T}$ , равное среднему числу циклов до отказа. В этом случае точечной оценкой надежности будет  $\hat{R} = 1 - (1/\bar{T})$ . Этой формулой можно пользоваться лишь в тех случаях, когда длительность цикла испытаний равна длительности рабочего цикла изделия или же время между включением и выключением оказывает пренебрежимо малое влияние на интенсивность отказов.

#### 12.4.3. Граничные испытания

Граничные испытания играют важную роль в установлении надежности, однако применять их следует очень осторожно. Так, например, во многих случаях можно установить, что элемент (или система) с большой степенью достоверности выдерживает значительно большее напряжение, чем то, которое может встретиться при его (ее) использовании. Однако если последнее утверждение окажется несостоятельным, т. е. изделие не выдержит повышенного напряжения, тогда экспериментатор не будет знать истинного значения критического на-

пряжения. В таком случае в испытания следует ввести процедуру, описанную в п. 12.6.7.3.

#### 12.4.4. Испытания на влияние окружающей среды

Как показывает само название, испытания этого вида служат для определения реакции изделия на различные внешние условия. Обычно подобные испытания включаются в программу испытаний качества\*; часто их организуют на стадии конструирования при меньшем числе параметров и при ослабленных требованиях к ним.

Исследуя широкий диапазон внешних условий, мы получаем большую уверенность в годности изделия, чем при испытании того же количества оборудования в обычных условиях. Однако, как было сказано выше, следует избегать необычных или нереальных внешних условий, так как результаты таких испытаний потом трудно будет использовать.

Испытания определяются не только теми условиями, в которые ставится изделие, но также *последовательностью* или *порядком, испытаний*. В этой и в гл. 13 описаны различные способы испытаний, при помощи которых можно более эффективно получать достоверную информацию.

### 12.5. НАУЧНЫЙ МЕТОД

*Научный метод* представляет собой аналитический и методологический фундамент статистического экспериментирования. Основания его методологии сводятся к следующему:

- 1) выдвигается гипотеза, основанная на теории или на опыте;
- 2) предлагается метод испытаний и производятся наблюдения;
- 3) наблюдения сравниваются с ожидаемым поведением, соответствующим исходной гипотезе;
- 4) подытоживается существенная информация и делаются выводы;
- 5) вырабатывается более усовершенствованная гипотеза;

---

\* Об испытаниях качества см. MIL-R-25534A (USAF) Military Specification, Rocket Motors, Aeronautical, Qualification Test.

6) повторяются этапы со 2-го по 5-й до тех пор, пока гипотеза не будет достаточно усовершенствована и подтверждена.

В типичном примере из промышленности осуществление этой методологии начинается с выработки проекта системы, которая должна выполнять заданные функции; это будет начальная гипотеза. Затем производятся испытания, проект совершенствуется, потом производятся повторные испытания и так далее — до тех пор, пока изделие не будет удовлетворять всем требованиям и обладать заданной надежностью. Время, за которое будет решена задача установления соответствия конечным условиям, зависит: от этапа I, определяемого способностями разработчика, ресурсами, которые можно использовать, и требованиями к проекту; от эффективности этапов 2, 3, 4 и 5. Очевидно, большая часть дела зависит от разработчика: чем точнее он сможет приблизиться к конечным условиям, тем сильнее уменьшится количество шагов между проектом системы и ее реализацией. Однако, как указывалось в предыдущих параграфах, современному сложному оборудованию свойственна такая неопределенность и взаимосвязь элементов, что, как правило, в первоначальном проекте и первом макете всех их предвидеть просто невозможно. Поскольку большинство таких случайностей проявляется при работе системы, их можно обнаружить в испытаниях (если только эти испытания эффективны и адекватны) еще до того, как система или элемент приобретет устойчивую структуру.

На поздней стадии переработки будут уже дорогостоящими и приведут к потере ценного времени.

## 12.6. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ

Планирование и анализ результатов опытов имеют один важный аспект. Это связано со степенью уверенности, которой обладают любые утверждения и гипотезы, выведенные из выборочных наблюдений. Эта степень уверенности численно измеряется вероятностью, так что можно делать объективные сравнения. Таким образом, решения принимаются на математической, а не на субъективной основе, допускающей возможность различных толкований.



Планирование испытаний не менее важно, чем их анализ, поскольку правильно составленный план позволяет делать обоснованные сравнения. В п. 12.6.5 будет приведен пример, показывающий, как вследствие неправильно поставленного опыта получают неверные решения.

### **12.6.1. Факторы, учитываемые при планировании испытаний**

При планировании опытов или испытаний учитывают большое количество факторов. Перечислим некоторые из них.

1. Каковы цели испытаний?
2. Как будут (или должны) интерпретироваться результаты?
3. Как сопоставить информацию, получаемую в данном испытании, с предыдущими или последующими испытаниями такого же или сходного оборудования?
4. Сколько изделий имеется в наличии и в каком виде они могут поступать на испытания (партиями, последовательно и т. д.)?
5. Количество видов факторов.
6. Количество уровней для каждого фактора.
7. Какие из этих факторов связаны, а какие можно рассматривать как независимые?
8. В каком виде необходимо получать информацию?
9. Является ли выборка однородной?
10. Является ли выборка представительной для совокупности?
11. Являются ли испытания разрушающими?
12. Дорого ли обходится испытание изделий?
13. Насколько полный контроль осуществляется над испытаниями?
14. Насколько сложным может быть план испытаний, если учесть возможность:
  - а) субъективных ошибок;
  - б) изменения графика доставки изделий на испытания;
  - в) влияния графика проведения сложных испытаний;
  - г) потери информации.

### 12.6.2. Элементы факторного анализа

Перед тем как выбрать план эксперимента, следует обратить внимание на все факторы, перечисленные в п. 12.6.1. Существует большое количество статистических методов, каждый из которых состоит в том, что факторам придаются значения в определенной последовательности; при помощи этих методов получается обоснованное сравнение эффективности различных факторов. В этом и состоит первоочередная задача статистического экспериментирования. Далее, коль скоро выбран статистический план, то тем самым в значительной степени определяется и метод анализа результатов и тем самым уменьшается вероятность их неправильного объяснения.

Статистическое экспериментирование отличается от *классического и традиционного* метода испытаний тем, что с целью определения влияния факторов одновременно варьируется несколько факторов. Сущность традиционного метода исследования нескольких факторов состоит в следующем: все факторы, кроме одного, остаются неизменными, а этот один фактор варьируется в определенных пределах. Эта процедура повторяется для каждого фактора. Подобный метод не только не эффективен, но и может привести к ошибочным выводам; при этом методе невозможно достичь оптимального эффекта, он также не позволяет выявить взаимодействие факторов.

Основой статистического экспериментирования является следующее: факторам придаются значения таким образом, чтобы на основании эксперимента можно было математически выразить их влияние и сравнить их между собой, а также оценить их действие при различных случайных колебаниях. Чтобы получить более ясное представление об этом, обратимся к некоторым простым примерам, специально построенными для данной цели.

### 12.6.3. Простой пример \*

Представим себе, что нам необходимо исследовать эффект действия двух факторов  $A$  и  $B$  на некоторый вид оборудования, обладающего некоторой доступной для

\* Пример взят с любезного позволения проф. Ф. Мэссея из его лекций (U.C.L.A., 1958).

измерения характеристикой, на которую эти факторы могут влиять. Фактор  $A$  имеет три уровня:  $A_1, A_2, A_3$ ; фактор  $B$  — два уровня:  $B_1$  и  $B_2$ . Таким образом, оборудование может испытываться в шести возможных сочетаниях факторов (условиях). В табл. 12.1 представлены три набора наблюдений, каждый из которых может быть получен при испытании изделий при шести условиях.

В скобках записаны значения чистого эффекта\*.

Таблица 12.1

	(0)	(0)	(0)	Средние
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	по строке
(-1) $B_1$	4	4	4	4
(+1) $B_2$	6	6	6	6
Средние по столбцу	5	5	5	5 Общее среднее

а)

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	4,4	4,4	4,4	4
$B_2$	6,6	6,6	6,6	6
	5	5	5	5

б)

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	3,5	4,4	3,5	4
$B_2$	5,7	5,7	6,6	6
	5	5	5	5

в)

12.6.3.1. ТАБЛ. 12.1,а

В данном случае видно, что различные уровни  $A$  не оказывают влияния на результат, а фактор  $B$  оказывает влияние. Средний эффект  $B_1$  на общее среднее равен (-1),  $B_2$  равен (+1). Эти значения записаны в таблице в скобках.

12.6.3.2. ТАБЛ. 12.1,б

В этом случае можно сделать тот же вывод, что и из табл. 12.1,а; однако, полностью повторяя опыт, мы стремились подтвердить этот результат. Представляется

\* Чистый эффект фактора определяется как влияние этого фактора на основную характеристику; он происходит только за счет наличия *данного фактора*. В чистый эффект не включается дополнительное влияние, производимое *взаимодействием* с другими факторами.

также, что ошибка измерения (иногда ее называют случайной или выборочной ошибкой) отсутствует, поскольку все результаты в точности повторялись.

### 12.6.3.3. ТАБЛ. 12.1,а

Эта таблица показывает, что  $B_1$  и  $B_2$  дают тот же средний эффект, что и в двух предыдущих примерах; это относится и к  $A$ . Однако в данном случае имеет место большая ошибка наблюдений. Если произведен всего один опыт, то, по всей вероятности, нельзя сделать вывод о том, что  $A$  не влияет на результат, а  $B$  дает средний эффект от  $(-1)$  до  $(+1)$  на общее среднее.

Табл. 12.2 иллюстрирует изменчивость эффекта в том случае, когда оба фактора  $A$  и  $B$  производят средний эффект.

Таблица 12.2

		(+2)	(-1)	(-1)			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>								A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
(-1) B <sub>1</sub>	6	3	3	4	B <sub>1</sub>	6,6	3,3	3,3	4	B <sub>1</sub>	5,7	2,4	5,1	4
(+1) B <sub>2</sub>	8	5	5	6	B <sub>2</sub>	8,8	5,5	5,5	6	B <sub>2</sub>	9,7	6,4	3,7	6
	7	4	4	5		7	4	4	5		7	4	4	5
	a)					б)					в)			

### 12.6.3.4. ТАБЛ. 12.2,а

При воздействии  $A_1$  наблюдаемые значения по сравнению с общим средним увеличиваются на  $(+2)$ ; при воздействии  $A_2$  и  $A_3$  эффект оказывается равным  $(-1)$ . Как и в табл. 12.1,  $B_1$  изменяет наблюдаемые значения на  $(-1)$ , а  $B_2$  — на  $(+1)$ .

### 12.6.3.5. ТАБЛ. 12.2,б

Здесь наблюдаются те же самые влияния; подтверждением этому служит повторение. Дисперсия ошибки равна нулю.

### 12.6.3.6. ТАБЛ. 12.2,в

Уровни факторов  $A$  и  $B$  оказывают здесь тот же средний эффект; однако в данном примере замешана ошибка наблюдений: ее можно заметить по разбросу значений в клетках.

В табл. 12.3 отражен еще один эффект. В дополнение к чистому (раздельному) эффекту  $A$  и  $B$ , отраженному в табл. 12.2, мы имеем здесь *эффект взаимодействия  $AB$* .

Таблица 12.3

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	5	2	5	4
$B_2$	9	6	3	6
	7	4	4	5

а)

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
	5,5	2,2	5,5	4
	9,9	6,6	3,3	6
	7	4	4	5

б)

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	4,6	2,2	4,6	5
$B_2$	8,10	4,8	1,5	6
	7	4	4	4

в)

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$(+2) B_1$	(-1)	(-1)	(+2)	0
$(+1) B_2$	(+1)	(+1)	(-2)	0
	0	0	0	0

г)

12.6.3.7. ТАБЛ. 12.3,а

Отличие, наблюдаемое между табл. 12.3,а и табл. 12.2,а, объясняется эффектом *взаимодействия*. В самом деле, если данные табл. 12.2,а вычесть из данных табл. 12.3,а, то получим данные табл. 12.3,г, т. е. значения эффектов взаимодействия.

12.6.3.8. ТАБЛ. 12.3,б

Здесь, как в 12.2,б и 12.1,б, имеет место разброс наблюдений.

12.6.3.9. ТАБЛ. 12.3,в

В этом случае средние эффекты  $A$ ,  $B$  и  $AB$  (последнее обозначает взаимодействие) такие же, как и в табл. 12.3,а и 12.3,б, однако здесь имеется разброс наблюдений.

12.6.3.10. ТАБЛ. 12.3,г

Здесь мы видим оба эффекта  $A$  и  $B$  в отдельности, т. е. чистые эффекты, а также эффект взаимодей-

ствия  $AB$ . Величины эффектов взаимодействия показаны числами в скобках в клетках. Взаимодействие приводит к тому, что суммарный эффект  $A$  различен для различных уровней  $B$  и наоборот.

Интересно отметить согласие между табл. 12.3,  $a$  и первым набором наблюдений в табл. 12.2,  $b$ . Если бы табл. 12.2,  $b$  не была повторена, то стало бы невозможно отличить ошибки наблюдений от взаимодействия факторов.

#### 12.6.4. Компоненты дисперсии

Приведенные примеры показывают, каким образом факторы и их взаимодействие влияют на наблюдаемые данные. Заметим, что значение в любой клетке является составным и справедливо следующее соотношение. Наблюденный эффект равен общему среднему + чистый эффект  $A$  + чистый эффект  $B$  + эффект взаимодействия  $AB$  + случайное колебание. Символически это можно записать так:

$$y_{ij} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad (12.1)$$

где

$$i = 1, 2, 3; j = 1, 2 \text{ и}$$

$$\sum a_i = 0, \sum b_j = 0, \sum_i (ab)_{ij} = \sum_j (ab)_{ij} = 0, \sum \varepsilon_{ij} = 0.$$

(12.2)

Формулу (12.1) можно переписать следующим образом:

$$(y_{ij} - \mu) = a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ij}.$$

Возведя обе части в квадрат и просуммировав по всем  $i$  и  $j$ , найдем

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2 &= \sum_i \sum_j a_i^2 + \sum_i \sum_j b_j^2 + \\ &+ \sum_i \sum_j (ab)_{ij}^2 + \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Заметим, что в силу условия (12.2) все попарные произведения обращаются в нуль.

Формула (12.3) утверждает, что

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \text{Суммарная} \\ \text{дисперсия} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Дисперсии} \\ \text{за счет фактора} \\ A \end{array} \right) + \\ & + \left( \begin{array}{c} \text{Дисперсия} \\ \text{за счет фактора} \\ B \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Дисперсия за} \\ \text{счет взаимодействий} \\ AB \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Дисперсия} \\ \text{за счет ошибок} \\ \text{наблюдений} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (12.4)$$

Любую из этих дисперсий на практике можно вычислить, пользуясь соответствующей формулой. Рассмотрим, например, табл. 12.4. Важность формулы (12.3) или, что то же, (12.4) состоит в том, что суммарную дисперсию наблюдения можно разделить на дисперсии, обусловленные различными факторами. После такого разделения выборочные распределения вероятностей и теоремы дисперсионного анализа позволяют определять значимость дисперсий, обусловленных чистыми эффектами и взаимодействием по сравнению с дисперсией ошибки наблюдений.

Таблица 12.4

**Дисперсионный анализ в случае усовершенствованной программы испытаний**

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов (SS)	Средний квадрат	F=отношение
Перепад	2	$(D_0^2 + D_1^2 + D_2^2)/3 - G^2/18$	$SS_D/2$	$9SS_D/2SS_E$
Колебание температуры	2	$(T_0^2 + T_1^2 + T_2^2)/3 - G^2/18$	$SS_T/2$	$9SS_T/2SS_E$
Вибрация	2	$(V_0^2 + V_1^2 + V_2^2)/3 - G^2/18$	$SS_V/2$	$9SS_V/2SS_E$
Температура горения	2	$(F_0^2 + F_1^2 + F_2^2)/3 - G^2/18$	$SS_F/2$	$9SS_F/2SS_E$
Ошибка	9	Получается путем вычитания записанных выше четырех SS из общей суммы	$SS_E/9$	
Общий эффект	17	$\Sigma (\text{кажд. набл.})^2 - G^2/18$		

Формулы для дисперсионного анализа приведены в табл. 12.4.

Читателям, не знакомым с дисперсионным анализом, рекомендуем [1—3], где этот предмет излагается с достаточной подробностью. Здесь мы только объясним, как пользоваться табл. 12.4. Число во второй колонке этой таблицы, называемое «числом степеней свободы» и соответствующее тому или иному источнику вариации, равно количеству отдельных слагаемых, которые можно выбрать произвольно, когда выполняются определенные ограничения, связанные с фиксированием общей суммы квадратов

Среднее значение квадрата, т. е. сумма квадратов, поделенное на число степеней свободы, является оценкой определенной линейной комбинации дисперсий факторов. Отношение оценок дисперсий, полученных на основании двух независимых выборок из нормальной совокупности, обладает  $F$ -распределением, зависящим только от числа степеней свободы каждой из выборок

В последней колонке табл. 12.4 приводится  $F$ -отношение как средний квадрат того или иного фактора, поделенный на среднеквадратическую ошибку наблюдения. Если отношение выходит за пределы значения  $F$ , которое можно найти по таблице, задавшись доверительным уровнем [1—3], начальное предположение несущественности дисперсии рассматриваемого фактора считается неверным, т. е. значение вариации фактора отлично от того, которое имело бы место, если бы присутствовала только случайная вариация. Из этого следует, что фактор действительно оказывает воздействие на поведение изделия.

Таким образом, можно исследовать каждый источник вариации с количественной стороны; в результате мы выясним, являются ли эффекты взаимодействия и чистые эффекты существенными (при выбранном доверительном уровне). Наконец (это в табл. 12.4 не показано), можно получить оценки среднего эффекта и дисперсии для каждого фактора и для взаимодействия. Это можно сделать чисто арифметически, приравняв каждое число в колонке «средний квадрат» линейной комбинации соответствующих дисперсий, т. е. математическому ожиданию квадрата. Этот очень полезный аспект дисперсионного анализа в [1—3] не описывается; его можно найти в статистической литературе, обычно под названием «компонент дисперсии». Специальное исследование имеется во II части серии из трех статей: «Fundamentals of analysis of variance», проф. Charles R. Hicks, помещенной в журнале «Industrial Quality Control», 1956, September, № 13; в книге Henry Scheffé's «The analysis of variance», опубликованной J. Wiley and Sons 1st Edition, 1959, точечные и интервальные оценки компонент дисперсии (стр. 228 и далее); F. Lemus приводит пример оценки компонент дисперсии в статье «A mixed model factorial experiment in testing electrical connectors», Industrial Quality Control, 1960, December, № 17.

Таким образом, мы можем определить, имеется ли определенное свидетельство взаимодействия или же взаимодействия  $AB$  невозможно выявить на фоне выборочных ошибок. Аналогично можно сравнить дисперсию, обусловленную  $A$  (или  $B$ ) со случайным разбросом, чтобы определить ее статистическую значимость.



Рассуждения, которые мы только что провели очень кратко, справедливы для любого количества факторов и любого количества уровней. Однако, очевидно, при возрастании количества факторов и уровней возрастает также число возможных сочетаний результатов эксперимента. Существуют многочисленные методики (см. стр. 473), служащие для сокращения числа сочетаний, которые необходимо наблюдать, но подробное рассмотрение различных методик эксперимента выходит за рамки настоящей главы. В литературе [1—3] описано и проанализировано большое количество таких методик.

### 12.6.5. Пример нестатистического эксперимента

Мы уже знакомы со статистическим экспериментом и с тем, что понимается под его анализом. Рассмотрим теперь результаты испытания, которое не является статистическим экспериментом. Описываемое испытание связано с определенным методом планирования, но в нем не принято никаких соглашений относительно статистических понятий.

Исходный план испытаний представлен табл. 12.5.

Было предложено испытать 24 изделия при 18 различных сочетаниях четырех основных видов внешних условий: колебания температуры, вибрации, мгновенного перепада и температуры горения. Некоторые изделия подвергались колебанию температуры с  $-60^{\circ}\text{C}$ , другие — с  $+80^{\circ}\text{C}$ ; некоторые совсем не подвергались. Дополнительные подробности читатель найдет в табл. 12.5. Внешние факторы и их уровни, при которых производились испытания, были выбраны с учетом конструкции и условий функционирования изделия. Горение во всех случаях было статическим.

Одно из достоинств данной программы состоит в том, что изделие испытывается при нескольких различных условиях. Однако программа имеет и недостатки. Во-первых, испытания проводятся последовательно, не образуя единого целого. Оценить эту особенность только по табл. 12.5 затруднительно. Та же самая информация в упорядоченном виде заключена в табл. 12.6, где наглядно показаны все возможные сочетания внешних факторов и принятых уровней для испытаний. Теперь очевидна недостаточность баланса и эффективно постро-

Таблица 12.5

**Программа испытаний для предварительного  
определения качества**

Номер изделия	Испытания после температурования изменения $T$ заряда $T_1$ °C ÷ $T_2$ °C	Испытания на вибрацию при $T$ заряда = = $T$ , °C	Испытания на удар при $T$ заряда = = $T$ , °C	Испытания при $T$ заряда, °C (стагическое горение)
1	-60 ÷ +80			-54
2	+80 ÷ +60			+65
3		-60		+65
4		+80		-54
5		-60		+65
6		+80		-54
7			-54	+65
8			+74	-54
9				+65
10	-60 ÷ +80	-60		+65
11	+80 ÷ -60	+80		-54
12		-60	-54	+65
13		+80	+74	-54
14	-60 ÷ +80	-60	-54	+65
15	+80 ÷ -60	+80	+74	-54
16		-60		+65
17		+80		-54
18			-54	-54
19			+74	+65
20		-60	-54	-54
21		+80	+74	+65
22		-60	-54	+65
23		+80	+74	-54
24				-54

енного плана. Величины в клетках в табл. 12.6 соответствуют нормам изделий в табл. 12.5.

Вторым значительным недостатком является то, что программа испытаний в рассматриваемом виде не позволяет анализировать данные, если не прибегать к интерпретации, в сильной степени произвольной. Эффекты действия внешних факторов, их дисперсии и их взаимодействие оказываются смешанными. Во время проведения программы предварительных испытаний обычно изделие впервые существенным образом соприкасается с внешними условиями, и этот опыт используется в дальнейших испытаниях и при эксплуатации. Хотя предельные уровни внешних условий при предварительных испытаниях не такие исключительные, как при последующих, но и тогда достигается представительная

Таблица 12.6

**Программа испытаний для предварительного определения качества (те же данные, что и в табл. 12.5, но представленные в другом порядке, чтобы показать отсутствие баланса)**

Испытания на удар при $T, ^\circ\text{C}$	Температура статического горения, $^\circ\text{C}$	Темперирование заряда, $^\circ\text{C}$ (испытания после нагревания — охлаждения заряда)									Число испытаний
		—			-60 ÷ +80			+80 ÷ -60			
		—	-60	+80	—	-60	+80	—	-60	+80	
Не производились	-54	24		17 4 6	1					11	6
	+65	9	16 3 5			10		2			6
-54	-54	18	20								2
	+65	7	12 22			14					4
+74	-54	8		13 23						15	4
	+65	19		21							2
Число испытаний		6	6	6	1	2	0	1	0	2	24
		18			3			3			

картина сочетания факторов, на основании которой уже можно судить об ожидаемом поведении изделия.

Если все испытания прошли успешно, мы получаем определенную уверенность в том, что при воздействии внешних условий двигатель сработает безотказно; в этом случае можно перейти к дальнейшей программе испытаний, рассчитывая на успех; можно планировать ограниченное производство изделий.

Однако, если при воссоздании внешних условий произошел отказ, очень важно суметь определить частные значения внешних условий, к которым изделие наиболее чувствительно. Рассмотренная программа испытаний не позволяет этого сделать. Когда определены

внешние факторы, обуславливающие неудовлетворительное функционирование или недостаточное значение оперативной характеристики, мы можем принять соответствующие меры к тому, чтобы добиться «нечувствительности» к подобным внешним условиям. Это — главная цель, которую следует иметь в виду при выработке и использовании статистической программы испытаний. Помимо этого, получаемые результаты можно использовать для конструирования других подобных двигателей и для лучшего выявления потенциальных возможностей данного двигателя.

Теперь покажем аналитическим путем, что по предложенной программе внешние факторы оценить невозможно. Предположим, что нам необходимо сравнить эффект, оказываемый на выход системы температурой горения, если перепад отсутствует. По табл. 12.6 можно было бы сравнить средний эффект при испытаниях, результаты которых записаны в 1-й строке, с соответствующими значениями 2-й строки. С этой целью введем в рассмотрение следующую математическую модель (без взаимодействия):

$$y = \mu + t + v + d + f + \varepsilon,$$

где  $y$  — суммарный эффект (значение некоторого параметра, например давления, удельного импульса, описывающего расположение изделия к успеху или отказу);

$\mu$  — средний эффект (значение, которое можно получить, если внешние условия будут исключены);

$t$  — эффект, оказываемый колебанием температуры на поведение изделия;

$v$  — эффект, оказываемый вибрацией на поведение изделия;

$d$  — эффект, оказываемый перепадом;

$f$  — эффект, оказываемый температурой горения;

$\varepsilon$  — вклад случайного колебания значения  $y$  (т. е. случайная ошибка).

При помощи этой модели можно выразить суммы наблюдаемых значений соответственно по 1-й и 2-й строкам следующим образом:

$$\bar{y}_{-54^{\circ}\text{C}} = 6\mu + 4t_0 + t_1 + t_2 + 2v_0 + 4v_2 + 6d_0 + 6f_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_6,$$

$$\bar{y}_{+65^{\circ}\text{C}} = 6\mu + 4t_0 + t_1 + t_2 + 2v_0 + 4v_1 + 6d_0 + 6f_2 + \varepsilon_7 + \dots + \varepsilon_{12},$$

где индексы 0, 1 и 2 (за исключением тех, которые относятся к ошибкам) обозначают нижний, средний и верхний уровни соответствующих факторов. Чтобы сравнить действие указанных двух температур, возьмем разности средних 1-й и 2-й строк:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{+65^{\circ}\text{C}} - \bar{y}_{-51^{\circ}\text{C}} &= (f_2 - f_0) \pm \frac{2}{3} (v_1 - v_2) + \\ &+ \frac{1}{6} [(\epsilon_7 + \dots + \epsilon_{12}) - (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_6)]. \end{aligned}$$

Последний член правой части этой формулы, т. е. ошибка, при увеличении объема выборки, стремится к нулю; первый член является мерой изменения эффекта, производимого температурой горения (оценку которой мы хотим получить); второй член является мерой отклонения, вызванного вибрацией. Очевидно, если вибрация действительно присутствует, т. е.  $(v_1 - v_2)$  не равно нулю, то она будет входить в разность средних соответствующих строк, влияя таким образом на оценку отклонения, обусловленного температурой заряда. Подобное явление, непонятное без математической модели, в статистике называется *смещением*. Оно практически приводит к тому, что если разности строк оказываются очень большими, то это воспринимается как эффект температуры заряда. Тогда в проект вносятся изменения, имеющие целью уменьшить влияние температуры, в то время как в действительности следовало бы обратить внимание на вибрацию. Этот пример показывает значение систематического экспериментирования, которое исключает ошибочные выводы и неправильные действия.

Для оценки эффекта, обусловленного внешними условиями, можно сделать и другие сравнения, однако они также будут почти всегда подвержены смещению, если не получать должный контраст путем использования наблюдений из двух (отдельных) клеток. Однако недостатки подобной процедуры состоят в том, что, во-первых, вследствие малости выборки велика ошибка наблюдения и, во-вторых, сравнение можно производить не при общих, а лишь при частных условиях.

Еще одним недостатком этой программы является то, что она дает недостаточную информацию для хорошего измерения дисперсии при каждом рассматриваемом

уровне и факторе. Это весьма существенное ограничение, поскольку точные оценки предельных значений выходной характеристики, соответствующих заданным требованиям, можно получить лишь в том случае, когда

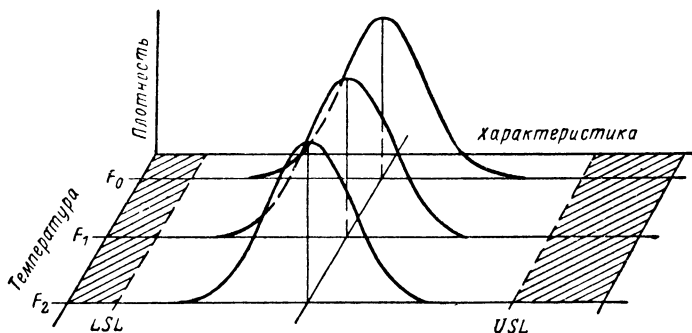


Рис. 12.1. Случай, когда температура горения не оказывает заметного влияния на характеристику изделия.

имеются точные оценки среднего и разброса влияния каждого из факторов на характеристику двигателя. Если указанные среднее и дисперсию можно найти, то и в этом случае на основании строгих математических выкладок § 8.7 можно показать, что существует некоторая неопределенность наших действий. Рассмотрим рис. 12.1 и 12.2. На обоих рисунках средний эффект на-

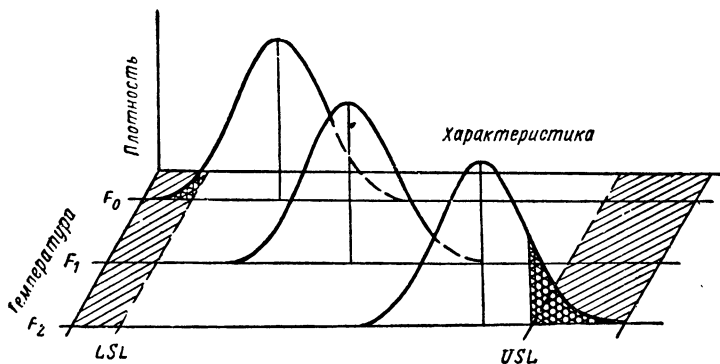


Рис. 12.2. Случай, когда температура горения влияет на характеристику изделия. (Вероятность отказа соответствует густо заштрихованной области под кривыми).

ходится между допустимыми пределами ( $USL$  и  $LSL$ ); однако ввиду случайных колебаний относительно этих средних некоторая доля значений эффекта может выйти за эти пределы (см. рис. 12.2), что ведет к ненадежности.

В ситуации, показанной на рис. 12.1, отказы невозможны; но если разброс распределения станет больше, то может появиться возможность отказов. Подобного рода информация не получается из только что рассмотренной программы.

### **12.6.6. Программа статистических испытаний твердотопливного ракетного двигателя**

С учетом факторов планирования испытаний, изложенных в п. 12.6.1, была предложена иная программа. На испытания отпущено 24 изделия; однако можно видеть, что требуемая информация, соответствующая четырем внешним условиям, может быть получена при 18 испытаниях с горением, если только между внешними условиями нет статистического взаимодействия. Измеряемыми величинами были сила тяги, скорость возгорания, импульс, давление в камере и др. Выборка считалась однородной и обладающей нормальным распределением. Испытания были разрушающими, поскольку испытывались достаточно дорогие твердотопливные ракеты, и расход 20—25 изделий был обоснован. Испытания носили случайный характер; статистик находился далеко от места испытаний. Вместо примера п. 12.6.5 был предложен план испытаний, который является одним из наиболее простых и легко организуемых статистических методов (см. также п. 12.6.8). План испытаний, показанный в табл. 12.7, был предложен в качестве альтернативы к примеру табл. 12.6.

План представляется греко-латинским квадратом  $3 \times 3$ ; принимается 9 различных наборов внешних условий, равномерно выбранных из пространства внешних условий. Рассматриваемый план является сбалансированным. Он содержит еще один уровень температуры ( $+18^\circ\text{C}$ ) по сравнению с первоначальным планом испытаний. План построен таким образом, что представляется возможным оценивать эффект действия каждого фактора на характеристику изделия; при этом согласно нашей модели считается, что взаимодействие либо отсут-

Таблица 12.7

**Усовершенствованная программа предварительных испытаний качества (без взаимодействия значимых факторов)**

Испытания на удар при $T$ , °C	Испытания после темперирования			Число испытаний	Сумма по всем наблюдениям
	—	$-65 \div +80$	$+80 \div -60$		
	$t_0$	$t_1$	$t_2$		
Не проводились $d_0$	$v_0 f_1 / 2$	$v_1 f_2 / 2$	$v_2 f_0 / 2$	6	$D_0$
$-54^\circ \text{C}$ $d_1$	$v_1 f_0 / 2$	$v_2 f_1 / 2$	$v_0 f_2 / 2$	6	$D_1$
$+74^\circ \text{C}$ $d_2$	$v_2 f_2 / 2$	$v_0 f_0 / 2$	$v_1 f_1 / 2$	6	$D_2$
Число испытаний	6	6	6	18	
Сумма по всем наблюдениям	$T_0$	$T_1$	$T_2$		Суммарное $G$

$v_0$ —вибрация отсутствует;  $v_1$ —вибрация при  $T$  заряда  $-60^\circ \text{C}$ ;  $v_2$ —вибрация при  $T$  заряда  $80^\circ \text{C}$ ;  $V_0$ —сумма наблюдений при испытаниях на вибрацию при  $v_0$ ;  $V_1$ —сумма наблюдений при испытаниях на вибрацию при  $v_1$ ;  $V_2$ —сумма наблюдений при испытаниях на вибрацию при  $v_2$ ;  $f_0$ —испытание при температуре  $-54^\circ \text{C}$ ;  $f_1$ —испытание при температуре  $+18^\circ \text{C}$ ;  $f_2$ —испытание при температуре  $+65^\circ \text{C}$ ;  $F_0$ —сумма наблюдений при испытаниях  $+54^\circ \text{C}$ ;  $F_1$ —сумма наблюдений при испытаниях  $+18^\circ \text{C}$ ;  $F_2$ —сумма наблюдений при испытаниях при  $+65^\circ \text{C}$ .

Примечание. Во всех случаях горение было статическим.

ствует, либо является малым по сравнению с чистым действием. Этого нельзя предполагать до тех пор, пока испытания не подтвердят, что взаимодействие в самом деле отсутствует. Важным является возможность вычислить разброс относительно средних значений характеристик. Следовательно, на основании вероятностных методов находятся оценки, показывающие (при заданном доверительном уровне), как часто выходная характеристика будет находиться в заданных пределах с учетом влияния температуры, вибрации и т. п. Если проект проанализировать таким образом, то становится очевидным, какие факторы являются определяющими для значения выходной характеристики (если таковые имеются) и какие следует для них назначить допуски. Далее,



на данном этапе в случае необходимости должно быть проведено соответствующее изменение в проекте.

Чтобы повысить достоверность информации, получаемой в результате испытаний, желательно полностью повторить опыт, хотя для этого требуется использовать девять двигателей. На подобную процедуру уходит всего 18 изделий, т. е. на 6 меньше, чем в исходной про-

Таблица 12.8

Фактор	Уровни для испытаний		
	0	1	2
Колебания температуры	6	6	6
Вибрация	6	6	6
Перепад	6	6	6
Температура горения	6	6	6

грамме; для сравнения получаются следующие количества наблюдений (табл. 12.8).

Коль скоро взаимодействие факторов пренебрежимо мало, эффект, оказываемый каждым из четырех факторов, определяется на основании опыта с такой же точ-

ностью, как если бы весь эксперимент служил только для исследования этого отдельного фактора. В действительности, сравнения, производимые в предложенном плане, являются более реалистичными, чем сравнения в однофакторных экспериментах, так как они основаны на средних эффектах при очень различных, но общих условиях. Для оценки ошибки наблюдений имеется 9 степеней свободы.

Таким образом, при успешном осуществлении подобной программы появляется высокая степень уверенности в том, что двигатель будет действовать при всех возможных значениях внешних условий. В случае отсутствия отказов в 18 испытаниях с достоверностью 95% подтвердится надежность 85% (см. рис. П.4).

### 12.6.7. Пример статистического экспериментирования с электронным оборудованием

Этот пример взят из программы разработки [5]. Он показывает, как может измениться план испытаний и их анализ, если учесть вид испытываемого оборудования, ранее полученную информацию и требования к новой информации. В данном случае ситуация такова, что важно выяснить эффект взаимодействия факторов. Ана-

литический вид распределения времени безотказной работы известен. Ожидается, что наработка на отказ будет зависеть от внешних условий. Наконец, время испытаний ограничено, что необходимо учесть при выработке плана испытаний.

Испытаниями на внешние условия было установлено, что критической для системы является некоторая часть электронного оборудования. Это потребовало проведения некоторой переделки в проекте, после чего возникла необходимость в исследовании характеристик наработки при некоторых исчислениях внешних условий.

Условиями, эффект которых исследовался, были вибрация, влажность и колебания температуры.

Было известно, что распределение времени безотказной работы испытываемого оборудования показательное. Однако время испытаний ограничено, так что испытания должны были через время  $T$  прекратиться. В качестве показательных для внешних условий были выбраны следующие значения уровней:

Вибрация	$a_0$	$a_1$	$a_2$
Влажность	$b_0$	$b_1$	
Колебание температуры	$c_0$	$c_1$	

Таким образом, получилось  $3 \times 2^2 = 12$  сочетаний внешних факторов и уровней, и, поскольку требовалось исследовать взаимодействие факторов и их чистые эффекты, было решено, что наиболее подходящим планом испытаний будет простой факторный план с группами из  $N$  изделий.

Эксперимент состоял в том, что каждая из 12 групп по  $N$  комплектов оборудования ставилась в те или иные внешние условия, соответствующие определенным уровням; испытания продолжались до момента отказа либо до момента  $T$  в зависимости от того, какой из них наступал раньше. Для средней интенсивности отказов (обратной величины к наработке на отказ) при различных сочетаниях внешних условий были получены следующие оценки.

Для любой комбинации внешних условий

$$(a_i, b_j, c_k) \equiv (i, j, k) \quad (i=0, 1, 2; j=0,1; k=0,1)$$

из уравнения правдоподобия [5] можно вычислить

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{t_{ijk} + (N - n_{ijk})T}, \quad (12.5)$$

где  $n_{ijk}$  — число отказов до момента  $T$  при сочетании  $(i, j, k)$  внешних условий;

$t_{ijk}$  — суммарная наработка элементов, отказавших при сочетании  $(i, j, k)$ .

Средняя интенсивность отказов определяется просто, как число отказов, происшедших в ситуации  $(i, j, k)$ , поделенное на общее время, соответствующее всем изделиям, которые испытывались в данной ситуации, отказавшим или нет. Полученная статистика показана в табл. 12.9.

Таблица 12.9

**Оценки средней наработки при различных сочетаниях внешних условий**

Колебания температуры	Вибрация					
	$a_0$		$a_1$		$a_2$	
	Влажность		Влажность		Влажность	
	$b_0$	$b_1$	$b_0$	$b_1$	$b_0$	$b_1$
$c_0$	$\hat{\mu}_{000}$	$\hat{\mu}_{010}$	$\hat{\mu}_{100}$	$\hat{\mu}_{110}$	$\hat{\mu}_{200}$	$\hat{\mu}_{210}$
$c_1$	$\hat{\mu}_{001}$	$\hat{\mu}_{011}$	$\hat{\mu}_{101}$	$\hat{\mu}_{111}$	$\hat{\mu}_{201}$	$\hat{\mu}_{211}$

**12.6.7.1. УСТАНОВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ ЭФФЕКТА ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ**

Табл. 12.9 подсказывает, что нужно использовать метод дисперсионного анализа; однако можно показать (см. [5]), что

$$\text{var } \hat{\mu} = \mu^2 |N| 1 - e^{(-\mu T)};$$

следовательно, чтобы изменить соотношение между средним и дисперсией, необходимо произвести преобразование данных ([3], гл. 8.5). Если  $\mu T$  велико, можно использовать логарифмическое преобразование, если  $\mu T$  мало, можно перейти к квадратному корню. Тогда табл. 12.9 заменяется таблицей преобразованных дан-

ных, после чего уже можно применить обычный метод дисперсионного анализа. Таким образом выявляется важность эффектов различных внешних условий и их уровней, и мы получаем количественное основание для планирования дальнейших усовершенствований. Помимо этого, при помощи дисперсионного анализа находится взаимодействие двух и большего числа внешних условий, которое классическим методом выявить невозможно.

### 12.6.7.2. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ

Поскольку известно, что время безотказной работы распределено по показательному закону, знание  $\mu_{ijk}$  — интенсивностей отказов — полностью определяет распределение времени безотказной работы при внешних усло-

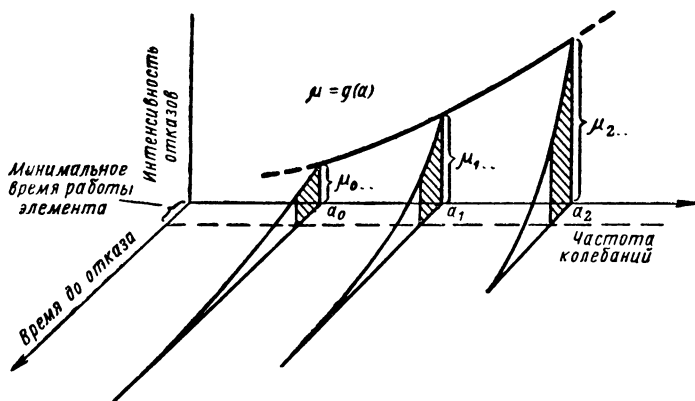


Рис. 12.3. Поверхность отклика на частоту колебаний (заштрихованная область соответствует ожидаемой области отказов).

виях  $(i, j, k)$ . Значит, согласно табл. 12.9 мы можем построить поверхность отклика, подобную изображенной на рис. 12.3, для случая вибрации. Этот рисунок построен следующим образом. Для каждого уровня вибрации берется среднее значение  $\hat{\mu}$ ; это дает оценку  $\mu_{0..}$  математического ожидания интенсивности отказов  $a_0$ :

$$\hat{\mu}_{0..} = \frac{\sum_{i, k} \hat{\mu}_{0ik}}{4}.$$

Аналогично оценками  $a_1$  и  $a_2$  будут

$$\hat{\mu}_{1..} = \frac{\sum_{j,k} \hat{\mu}_{1ik}}{4} \quad \text{и} \quad \hat{\mu}_{2..} = \frac{\sum_{j,k} \hat{\mu}_{2ik}}{4}.$$

Подобные оценки значений  $\mu_{i..}$  для каждого уровня вибрации представляют собой усредненные значения по остальным измерениям пространства внешних условий. Следовательно, для любой кривой наработки мы получаем более представительную выборку характеристик. Этот метод отличается от обычного метода испытаний на долговечность, при котором исследуется только отдельный внешний фактор, если его уровни варьируются. Поверхность отклика для внешних условий можно построить для любого фактора; графическим методом обнаруживается, существует ли корреляция между интенсивностью отказов и уровнями внешних условий.

Если от элемента требуется исправная работа в течение времени  $t_0$ , то вероятность такого события после испытаний с уровнем вибрации  $a_0$  будет оцениваться как

$$P(a_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \hat{\mu}_{0..} e^{(-\hat{\mu}_{0..})t} dt = e^{(-\hat{\mu}_{0..})t_0}.$$

Построение поверхности (рис. 12.3) проведено по шаблону, так как уровни факторов были дискретными. Однако если исследовано достаточное количество уровней и выведено уравнение регрессии между интенсивностью отказов и соответствующим внешним фактором, скажем, в виде  $\mu = g(a)$ , где  $a$  обозначает уровень вибрации, а  $\mu$  — интенсивность отказов, тогда вероятность безотказной работы на протяжении времени  $t_0$  при уровне вибрации  $a^*$  примет вид

$$P(a^*, t_0) = e^{-g(a^*)t_0}.$$

### 12.6.7.3. НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОПИСАННОГО МЕТОДА \*

До сих пор мы имели дело с исследованием поведения изделия и его надежности при внешних условиях, варьируемых в определенном интервале. Однако не

\* Это понятие развито в § 13.2.

всегда нужно исследовать поведение характеристик во всем интервале, если в ходе испытаний выяснится, что изделие действительно обладает высокой надежностью. Обычно нас интересует нахождение областей отказов, и, стало быть, мы *хотим*, чтобы некоторые изделия отказывали; следовательно, представляется естественным, чтобы самые крайние сочетания внешних условий (например,  $a_2b_1c_1$ ) брались в первую очередь. Объясняется это следующим: если не откажет ни одно изделие или откажет очень немного изделий, то при крайних значениях внешних условий будет получена низкая интенсивность отказов; путем экстраполяции можно сделать вывод\* о низкой интенсивности отказов при нормальных и облегченных условиях. Например, если бы нам удалось с высокой степенью достоверности сделать вывод, что 99% изделий проработают минимально необходимое время при крайних значениях условий, то тем самым уже без дальнейших испытаний дается достаточная гарантия годности изделия. При дорогостоящем изделии или испытании нецелесообразно тратить дополнительное время и средства на то, чтобы при раздельном испытании убедиться в годности изделия при наивысшем уровне: все равно окончательное подтверждение надежности оборудования будет осуществлено после полной сборки системы.

Однако если в результате испытаний при крайних условиях нельзя сделать положительного вывода, то для подтверждения надежности необходимо исследовать поведение характеристик изделия; теория граничных испытаний здесь уже неприменима. Следовательно, в этом случае нужно продолжать испытания, отходя от крайних условий таким образом, чтобы всегда для рассматриваемой области можно было делать экстраполяцию статистических выводов. Рассмотрим с целью иллюстрации рис. 12.4 и пример с двумя внешними условиями. В нем исследуются внешние условия двух видов:  $A$  и  $B$ . Нас будут интересовать не только чистые эффекты  $A$  и  $B$ , но и их взаимодействие. В качестве выборки для испытаний мы возьмем усовершенствован-

---

\* Если это необходимо, для экстраполяции используются коэффициенты  $K_A$  (см. п. 9.4.3.1). Кроме того, можно применить инженерный подход, основанный на виде отказов и предыдущем сопоставимом опыте.

ный элемент, теоретически рассчитанный на значения внешних условий, при которых в предыдущих испытаниях произошел отказ. Можно поступить следующим образом. Пусть условия, при которых в первоначальных испытаниях произошел отказ, будут  $a_2b_3$  (см. рис. 12.4). Новое изделие испытывается при  $a_3b_4$ . Если испытание пройдет успешно, возникнет достоверная гарантия того,

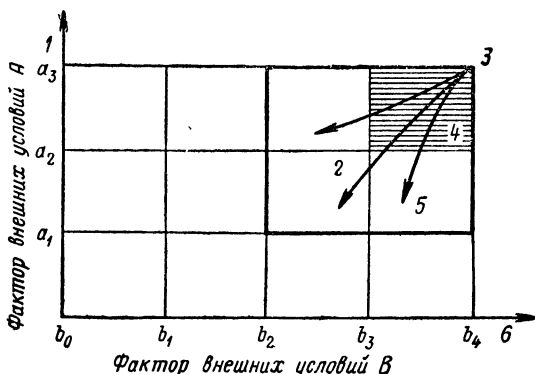


Рис. 12.4. Последовательное изменение параметров при испытаниях.

1 — направление возрастания жесткости условий; 2 — направление изменения параметров в ходе испытаний; 3 — первая площадь испытания ( $a_3b_4$ ); 4 — вторая площадь испытания (заштрихована), 5 — третья площадь испытания (обведена жирной линией); 6 — направление возрастания жесткости условий.

что изделие сработает и при  $a_2b_3$ , так как эти условия более облегченные, чем  $a_3b_4$ . При необходимости удовлетворить заданным требованиям по надежности и достоверности объем выборки нужно увеличить, пока эти требования не будут выполнены. Например, из табл. П.6 видно следующее: для обеспечения 95%-ной достоверности того, что изделие будет обладать средней нагрузкой  $\hat{\Theta}_L$  при времени испытаний, равном  $\hat{\Theta}_L/20$ , нужно, чтобы в 60 испытаниях не было ни одного отказа. Иной план испытаний допускает не более одного отказа в 97 опытах (см. также § 10.6). Если же при  $a_3b_4$  надежность не подтвердится, мы расширяем область исследования до  $a_3b_3$ ,  $a_2b_3$  и  $a_2b_4$ , так что вместе с  $a_3b_4$  образуется простой факторный план  $2 \times 2$ , на основании которого можно оценить чистые эффекты, взаимодей-

ствия и вариации. Подобный процесс продолжается до тех пор, пока экспериментатор не получит достаточную информацию о внешних условиях, приводящих к отказам, или убедится в том, что при требуемых условиях изделие работает безотказно.

### **12.6.8. Роль статистического экспериментирования в надежности**

Может быть, сто́ит закончить эту главу некоторым замечанием предостерегающего характера. В настоящее время статистическое экспериментирование является хорошо развитым; по нему накоплен большой опыт; но в то же время его следует применять только как полезный аппарат, служащий повышению надежности. Экспериментатор не должен пытаться подогнать поведение оборудования под статистическую модель — скорее наоборот.

Перед тем как выработать план, требуется большая работа по обоснованию. Обычно статистик не располагает таким подробным знанием аппаратуры, как инженер-конструктор, а значит, оба должны работать совместно, чтобы на основании опыта конструктора у статистика была возможность выработать наиболее приемлемый план\*.

Следовательно, целесообразно принимать настолько простые планы испытаний, чтобы их можно было осуществить при перечисленных условиях. Поступая таким образом, мы теоретически теряем часть информации; однако, если у статистика нет возможности контролировать испытания и сопутствующие им условия, зачастую в результатах первоначального плана становится очень трудно разобраться. Например, стенд для испытаний на влияние внешних условий поврежден или вышел из строя на ранней стадии осуществления программы испытаний. Или, когда начались испытания, выяснилось, что для них отпущено меньше изделий, чем предполагалось.

В учебниках по планированию эксперимента можно найти метод анализа в случае пропуска данных, но он связан с определенными ограничениями. В то же время, если план испытаний будет сравнительно простым и

---

\* См Del Priore F. R., Day B. B. The engineer and statistician can meet. Navord Report, 1953; 4028.



произойдет подобное нарушение, то, как правило, удастся сохранить намного больше информации, чем в случае очень мудреного плана.

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. O. L. Davies. Design and analysis of industrial experiments. Oliver and Boyd, London and Edinburgh, 1954.
2. W. G. Cochran and G. M. Cox. Experimental designs, 2d ed. John Wiley and sons, New York, 1957.
3. O. Kempthorne. The design and analysis of experiments. John Wiley and sons, New York, 1952.
4. D. E. Hartvigsen and D. K. Lloyd. The application of statistical test designs to qualification testing of rockets in guided missiles. Proc. Western Regional Conference ASQC, San Francisco, 1957.
5. D. K. Lloyd. Multienvironmental life testing of parts and components in rockets and guided missiles by statistical design. IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1958, December.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Acheson M. A. Quality acceptance practices in specifications. Proc. 3rd National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, IRE, 1957, v. 14—16, January, p. 136—140.
- Bailey N. T. J. Science, statistics and operational research. 1956, Research № 9, June, p. 202—207.
- Ball L. W. Management use of laboratory testing to achieve reliability. National Convention Trans., ASQC, 1956, p. 663—671.
- Batson H. C. Applications of factorial  $x^2$  analysis to experiments in chemistry. National Convention Trans., Am. Soc. Quality Control, 1956, p. 9—23.
- Box G. E. P. Integration of techniques in process development. National Convention Trans., ASQC, 1957, p. 687—702.
- Brickley R. L. and Horton W. H. Statistical approach to r and d problems. Elec. Mfg., v. 57, 1956, May, p. 88—94, 362.
- Cleminshaw C. Environment-functional tests: key to systems reliability. Ind. Labs, 1958, v. 9, 8, August, p. 34—34.
- Derr E. H. Tests to failure boost sparrow i reliability. Space aeronautics, 1959, v. 32, 1, July, p. 133—141.
- Hill D., Voegtlen D. and Yueh J. Parts vs systems: the reliability dilemma. IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1956, v. PGRQC-6, February, p. 27—38.
- Kuzmin W. R. Experiments to expose marginal reliability designs. Proc. 5th National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, IRE, 1959, 12—14, January, p. 55—64.
- Levenbach G. J. Accelerated life testing of capacitors. IRE Trans. Reliability and Quality Control, 1957, v. RQC-10, June, p. 9—20.
- Luebbert W. F. Achieving operational effectiveness and reliability with unreliable components and equipment. IRE Convention Record, 1956, Pt. VI, March, p. 41—49.
- Zelen M. Problems in life testing: factorial experiments. Trans, 13th Midwest Quality Control Conference, ASQC, 1958, November, p. 21—33.

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПЛАНЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ

### 13.1. ВВЕДЕНИЕ

Располагая статистическими методами, мы имеем возможность весьма эффективно получать достаточно достоверные данные. Поэтому совершенно очевидно, что эти методы играют существенную роль в любой программе исследования надежности. Исследования некоторых статистических планов, появившиеся в литературе по математической статистике, были доведены до высокой степени совершенства и нашли широкое применение в теории и практическом применении [1—3]. В примерах предыдущей главы мы использовали два плана этого типа (п. 12.6.6, 12.6.7). Однако, несмотря на то, что различные стандартные или классические статистические планы очень ценны при решении отдельных вопросов, они не подходят для всех тех случаев, с которыми мы встречаемся при исследовании надежности. Причина заключается в том, что такие классические планы, как факториалы, латинские квадраты, неполные блоки и т. д., создавались и совершенствовались при решении частных задач в сельском хозяйстве или биологии. Кроме того, особенности организации промышленного производства требуют создания все новых и новых планов, которые, кстати, уже начинают появляться в научно-технической литературе\*. В параграфах настоя-

---

\* С рядом вопросов, касающихся типов ситуаций и методов, упоминаемых в этом параграфе, можно более детально ознакомиться, обратившись к первым пяти статьям журнала «Technometrics» (v. 3, 3, August 1961).

щей главы описываются некоторые наиболее важные планы, которые применяются при исследовании надежности.

Во введении (§ 0.1) рассматривались некоторые причины ненадежности и те ситуации, которые ей способствуют. Уместно пересмотреть эти причины в свете экспериментального планирования. Динамическая сложность процесса технической разработки характеризуется обстоятельствами, которые следует относить больше к области промышленного экспериментирования, а не к другим, менее динамичным и более поддающимся управлению и контролю областям научного исследования.

Например, очень часто имеют место изменения программ конструктивных разработок, которые практически невозможно предусмотреть; так, нарушаются графики производства и снабжения, аннулируются контракты, возникает потребность выделять средства для выполнения приоритетных программ (с повышенной срочностью исполнения), т. е. иногда возникает необходимость проявлять большую гибкость, чем это обычно предусматривается в классических статистических планах. Кроме того, при организации производства изделия или наблюдения часто поступают последовательно, друг за другом, и надо сказать, что и в этой области успехи статистической методологии довольно скромны. Последовательность поступления наблюдений имеет свои достоинства и недостатки.

Достоинства состоят в возможности использовать самую раннюю информацию и принимать решения, прежде чем завершится полная выборка, т. е. появляется возможность использовать эту информацию для изменения продукта производства. С другой стороны, когда мы имеем дело с развивающейся программой разработки, возникает проблема однородности последовательно поступающих данных.

Следующая характерная особенность заключается в том, что иногда на поведение изделия может влиять очень большое число факторов, и мы сталкиваемся с проблемой распознавания этих факторов на основании испытаний небольшого числа дорогостоящих изделий. Последнее еще больше осложняется, когда имеется возможность испытывать изделие только один раз из-за

того, что в результате испытания образец разрушается или становится непригодным для дальнейшего использования. Однако в настоящее время разработаны новые статистические планы и методы, которые помогают решать некоторые из вышеупомянутых проблем, и часть из них уже появилась в научно-технической литературе.

Ниже описываются пять типов проверки: 1) непрерывные экспериментальные планы; 2) испытания на чувствительность; 3) произвольно сбалансированные планы; 4) совершенствование операций; 5) исследование поверхности отклика.

### 13.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ

В п. 12.6.7.3 рассматривался ряд вопросов, подробное изложение которых приведено в работе Гарнера и Гартбигсена «Программы непрерывной разработки и экспериментальные планы» и в работе [4]. Необходимо отметить, что эти статистические планы основываются на простом принципе, который заключается в таком выборе отрезков полных факторных планов, чтобы их можно было исследовать независимо друг от друга или объединять друг с другом с целью увеличения объемов выборки и чтобы позволить произвести более точные сравнения. Такая ситуация возникает в программе разработки, когда в разные моменты времени на различных этапах проверки — осуществимости, контрольных и качества — выделяется определенное количество изделий. Эти этапы следуют один за другим, а принятые решения о переходе к следующему этапу зависят от результатов предыдущего (или предыдущих) этапов. Кроме того, в начале программы нам приходится встречаться в основном с сильным воздействием некоторых факторов; и по мере их распознавания наша задача будет заключаться в установлении значений любых (в том числе и незначительных) эффектов. Эту задачу мы сможем решить, если будем эффективно использовать все данные, включая полученные при самых первых проверках. В рассматриваемом примере отрезки представляют собой дробные факториалы, которые в сумме составляют полный факторный план.

### 13.2.1. Типичный анализ испытаний небольшого ракетного двигателя\*

Разрабатывается небольшой ракетный двигатель, от которого требуется, чтобы он был надежным и безопасным при работе в различных окружающих условиях. Эти условия могут быть описаны с помощью следующих факторов:

температуры	$F$ ;
старения	$A$ ;
колебания температуры	$T$ ;
вибраций	$V$ ;
влажности	$H$ ;
ударных нагрузок	$S$ .

Было решено исследовать по два уровня для каждого фактора, а именно предельные границы их изменения, которые наблюдаются в условиях эксплуатации. Поскольку есть достаточные основания полагать, что при этих граничных значениях катастрофические отказы не ожидаются, проведение испытаний при промежуточных значениях этих факторов было признано излишним.

Рассматривалось влияние окружающих условий на основную переменную (давление в камере сгорания), т. е. величина ее отклонения от номинального значения под действием различных факторов. Вопрос, будет ли изделие функционировать вообще, не ставился, поскольку если бы при крайних значениях каких-либо факторов происходили катастрофические отказы, то появилась бы необходимость ввести испытания при промежуточных значениях факторов с целью определения критических уровней этих факторов. Тогда пришлось бы основательно переработать изделие, а данный пример до некоторого момента времени оставался бы неподходящим.

Как это везде принято, верхний предел фактора обозначается индексом 1, а нижний (или отсутствие этого фактора) — индексом 0. Всего имелось 64 ракетных двигателя: 16 — для испытаний при разработке, 16 — для

---

\* Перепечатано из неопубликованного начального варианта работы [4] Garner N. R., Hartvigsen D. E. «Continuous development programs and experimental designs».

пробных или контрольных испытаний и 32 — для испытаний качества. Планом для испытаний при разработке был выбран дробный факторный план  $\frac{1}{4} \times 2^6$ . Он представлен в табл. 13.1 данными о давлении в камере сгорания в условных единицах.

Таблица 13.1

План испытаний при разработке

		$F_0$				$F_1$				
		$A_0$		$A_1$		$A_0$		$A_1$		
		$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$	
$V_0$	$H_0$	$S_0$	7,7					19,1		
		$S_1$			9,5		16,6			
	$H_1$	$S_0$		9,9				15,1		18,2
		$S_1$				12,9				
$V_1$	$H_0$	$S_0$		9,7						18,4
		$S_1$				11,5		14,6		
	$H_1$	$S_0$	8,0						19,6	
		$S_1$			12,2		16,6			

Если мы предположим, что любые существующие возмущения происходят за счет только чистых эффектов факторов и что разность суммы квадратов можно использовать в качестве оценки отклонения при эксперименте, можно составить таблицу предварительного дисперсионного анализа, основываясь только на результатах испытаний при разработке (табл. 13.2).

Из таблицы видно, что температура заряда  $F$  сильно влияет на давление в камере сгорания, если это не вызывается взаимодействиями более высокого порядка, которые смешиваются с  $F$ . Аналогичное примечание справедливо и для старения  $A$ . Остальные факторы не оказывают сколько-нибудь значительного эффекта.

Таблица 13.2

**Предварительный дисперсионный анализ испытаний  
при разработке**

	Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Среднеквадратичное значение	F-соотношение
1	<i>F</i>	1	201,64	201,64	142,78*
2	<i>A</i>	1	33,64	33,64	23,83*
3	<i>T</i>	1	0,06	0,06	
4	<i>V</i>	1	0,16	0,16	
5	<i>H</i>	1	1,82	1,82	
6	<i>S</i>	1	0,16	0,16	
Предварительная оценка изменчивости при эксперименте**		9	12,71	1,4122	

\* Имеет значимость при 5%-ном уровне, где  $F_{0,05}=5,12$  для 1; 9 степеней свободы.

\*\* Получена путем объединения всех эффектов, превышающих главные эффекты.

Воспользовавшись односторонними толерантными пределами, из табл. П.9 получим, что при объеме выборки, равном 8, можно быть на 95% уверенным в том, что

Таблица 13.3

**Суммы и средние значения результатов испытаний  
при разработке**

Уровни	Суммы		Средние	
	0	1	0	1
<i>F</i>	81,4	138,2	10,17	17,27
<i>A</i>	98,2	121,4	12,27	15,75
<i>T</i>	109,3	110,3	13,66	13,79
<i>V</i>	109,0	110,6	13,62	13,82
<i>H</i>	107,1	112,5	13,39	14,06
<i>S</i>	110,6	109,0	13,82	13,82
Общая сумма	219,6		13,73	

95% из совокупности двигателей, испытываемых при высокой температуре  $F_1$ , будут иметь давление в камере сгорания меньше

$$17,27 + 3,19 \sqrt{1,4122} = 21,06 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \text{ (см. п. 8.7).}$$

Если этой информации достаточно для того, чтобы перейти к пробным испытаниям без внесения конструктивных изменений, то производим испытания 16 следующих двигателей в условиях, указанных в табл. 13,4, и будем исследовать сводные результаты этих испытаний. В рассматриваемом примере это как раз и произ-

Таблица 13.4

**Результаты испытаний при разработке (в скобках)  
и пробных испытаний**

		$F_0$				$F_1$			
		$A_0$		$A_1$		$A_0$		$A_1$	
		$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$
$V_0$	$H_0$	$S_0$	(7,7)		13,4		17,0	(19,1)	
		$S_1$		9,0	(9,5)		(16,6)		18,8
	$H_1$	$S_0$		(9,9)	11,1		16,6		(18,2)
		$S_1$	8,9			(12,9)		(15,1)	19,4
$V_1$	$H_1$	$S_0$		(9,7)	12,9		16,2		(18,4)
		$S_1$	8,8			(11,5)		(14,6)	19,9
	$H_1$	$S_0$	(8,0)			13,4		16,5	(19,6)
		$S_1$		8,5	(12,2)		(16,6)		21,1

водится. Однако если бы было признано необходимым внести какие-то конструктивные изменения, то результаты, полученные в этом втором случае, должны были бы сравниваться с результатами испытаний при разработке отдельно, чтобы определить эффективность этих конструктивных изменений. Далее с помощью этих данных производится дисперсионный анализ (см. табл. 13.5).

Этот план помогает оценивать все чистые эффекты и двухфакторные взаимосвязи. Исследуя только двухфакторную взаимосвязь  $FT$ , которая кажется нам наиболее важной, мы найдем из табл. 13.6, что  $T_0$  против  $T_1$  при



Таблица 13.5

**Дисперсионный анализ результатов испытаний при  
разработке и пробных испытаний**

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Среднеквадратичное значение	F-соотношение
<i>F</i>	1		422,68	565,84**
<i>A</i>	1		83,53	111,82**
<i>T</i>	1		0,75	
<i>V</i>	1		0,69	
<i>H</i>	1		0,75	
<i>S</i>	1		0,58	
<i>FA</i>	1		0,03	
<i>FT</i>	1		5,69	7,62*
<i>FV</i>	1		0,01	
<i>FH</i>	1		0,00	
<i>FS</i>	1		0,87	
<i>AT</i>	1		0,30	
<i>AV</i>	1		2,26	
<i>AH</i>	1		0,47	
<i>AS</i>	1		0,22	
<i>TV</i>	1		1,09	
<i>TH</i>	1		0,05	
<i>TS</i>	1		1,01	
<i>VH</i>	1		0,26	
<i>VS</i>	1		0,05	
<i>HS</i>	1		1,57	
Пробные испытания к испытаниям при разработке	1		4,43	5,93*
Экспериментальное значение отклонения	9	6,72	0,747	
Общий эффект	31	534,01		

\* Имеет значимость при 5%-ном уровне для 1 и 9 степеней свободы.

\*\* Имеет значимость при 1%-ном уровне для 1 и 9 степеней свободы.

$F_0$  составляет сумму квадратов  $(79,1)^2/8 + (88,3)^2/8 - (167,4)^2/16 = 5,29$ , а  $T_0$  против  $T_1$  при  $F_1$  — сумму  $(144,0)^2/8 + (139,7)^2/8 - (283,7)^2/16 = 1,15$ , а это свидетельствует о том, что взаимодействие вызвано колебанием температуры при низкой температуре заряда  $F$ .

В то время как среднее давление в камере сгорания при пробных испытаниях увеличилось, величина отклонения, наоборот, уменьшилась, т. е. улучшилась вос-

Таблица 13.6

**Суммы и средние значения  
результатов испытаний для оценки  
взаимодействия факторов  $F$  и  $T$**

	Суммы		Средние	
	$F_0$	$F_1$	$F_0$	$F_1$
$T_0$	79,1	144,0	9,89	18,00
$T_1$	88,3	139,7	11,04	17,46

производительность. Таким образом, если бы все двигатели работали при температуре  $F_1$ , мы могли быть на 95% уверены в том, что 95% ракетных двигателей имеют давление в камере сгорания меньше, чем

$$17,73 + 2,91 \sqrt{0,747} = 20,2 \frac{\text{кг}^2}{\text{см}^2}.$$

Таблица 13.7

**Суммы и средние значения результатов испытаний  
при разработке и пробных испытаниях**

Уровни	Суммы		Средние	
	0	1	0	1
$F$	167,4	283,7	10,46	17,73
$A$	199,7	251,4	12,48	15,71
$T$	223,1	228,0	13,94	14,25
$V$	223,2	227,9	13,95	14,24
$H$	223,1	228,0	13,94	14,25
$S$	227,1	223,4	14,23	13,96
Разработка	219,6		13,73	
Пробные	231,5		14,47	
Итого	451,1		14,10	

Исходя из полученных данных, можно сделать следующие выводы:

1. Двигатель чувствителен к температуре его топливного заряда. Давление в камере сгорания растет с увеличением температуры заряда.

\* Толерантный фактор, используемый при вычислениях, выбран из табл. П.9 для выборки с объемом, равным 10, поскольку число степеней свободы для стандартного отклонения равно 9.

2. Старение способствует увеличению давления в камере сгорания.

3. Двигатель чувствителен к колебаниям температуры при низких температурах топливного заряда.

4. Давление в камерах сгорания пробных двигателей слегка увеличилось по сравнению с давлениями в двигателях, проходивших испытания при разработке.

5. Оценка экспериментального отклонения составляет  $(0,747 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2})^2$ .

Ввиду того что критическое давление в камере сгорания было равно  $25 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ , что значительно выше верхнего толерантного уровня в 23,4, являющегося 99%-ным доверительным уровнем 99,9% двигателей, которые испытывались при температуре заряда  $F_1$ , мы приняли решение перейти к следующему этапу проверок, т. е. к испытаниям качества, без каких-либо переделок.

Таблица 13.8

**Полный набор закодированных данных об испытаниях при разработке, проверочных испытаниях и испытаниях качества**

			$F_0$				$F_1$			
			$A_0$		$A_1$		$A_0$		$A_1$	
			$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$	$T_0$	$T_1$
$V_0$	$H_0$	$S_0$	7,7	9,8	13,9	13,4	18,4	17,0	19,1	22,8
		$S_1$	9,5	9,0	9,5	15,4	16,6	18,2	22,5	18,8
	$H_1$	$S_0$	9,3	9,9	11,1	13,1	16,6	16,9	22,4	18,2
		$S_1$	8,9	11,3	13,3	12,9	18,0	15,1	19,4	22,4
$V_1$	$H_0$	$S_0$	9,6	9,7	12,9	14,6	16,2	18,3	23,2	18,4
		$S_1$	8,8	9,2	13,0	11,5	17,5	14,6	19,9	22,8
	$H_1$	$S_0$	8,0	8,9	13,4	13,4	19,3	16,5	19,6	22,7
		$S_1$	9,2	8,5	12,2	14,1	16,6	16,5	21,3	21,1

При испытаниях последующих 32 двигателей были учтены остальные 32 сочетания факторов (окружающих условий) полного факториала.

Окончательные результаты, включающие полученные в ходе испытаний при разработке, пробные испытания и испытания качества, приведены в табл. 13.8.

В табл. 13.9 и 13.10 приведены результаты дисперсионного анализа. Основываясь на результатах анализа

Таблица 13.9

**Общий дисперсионный анализ**

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Среднеквадратичное значение	F-соотношение
<i>F</i>	1	—	991,46	1135,69
<i>A</i>	1	—	234,89	269,06
<i>F</i>	1	—	1,02	—
<i>V</i>	1	—	0,01	—
<i>H</i>	1	—	0,04	—
<i>S</i>	1	—	0,69	—
<i>FT</i>	1	—	6,70	7,67
Испытания качества к испытаниям при разработке и пробным Экспериментальное значение отклонения	1	—	55,68	63,78
Общая сумма	63	1138,53	—	—

пробных испытаний и испытаний при разработке, было решено исследовать только чистые эффекты и взаимодействие *FT*.

На основе всех этих данных можно сделать окончательное заключение.

1. Давление в камере сгорания в большой степени чувствительно к температуре топливного заряда. Среднее значение давления при низкой температуре заряда равно  $11,09 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ , а при высокой равно  $18,97 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ . Однако

это меньше, чем предполагалось вначале.

2. При старении давление в камере сгорания увеличивается, но изменение его оказывается меньше, чем предполагалось вначале.

3. Давление в камерах сгорания двигателей при испытаниях качества выше, чем в камерах двигателей, проходивших пробные испытания, в последних же оно выше, чем давление в камерах сгорания двигателей, проходивших испытания при разработке.

Таблица 13.10

**Суммы и средние по всем испытаниям**

Условия	Уровни			
	суммы		средние	
	0	1	0	1
<i>F</i>	355,0	606,9	11,09	18,97
<i>A</i>	419,6	542,3	13,11	16,95
<i>T</i>	476,9	485,0	14,90	15,16
<i>V</i>	480,4	481,5	15,01	15,04
<i>H</i>	481,8	480,1	15,06	15,00
<i>S</i>	484,3	477,6	15,13	14,93
Испытания качества	510,8		15,96	
Испытания при разработке и проверочные	451,1		14,10	

4. Давление в камере сгорания становится слегка чувствительным к колебаниям температуры, когда двигатели испытываются при низких температурах.

Однако эти изменения недостаточны, чтобы влиять на надежность двигателя.

5. Давление в камере сгорания нечувствительно ко всем остальным проверявшимся факторам окружающей среды.

6. Экспериментальное значение отклонения равно  $0,873 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ , т. е. стандартное отклонение равно  $0,934 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ .

7. Если бы все эти двигатели испытывались в наихудших температурных условиях, т. е. при  $F_1$ , в 99% двигателей в течение 99% времени давление было бы меньше  $22,82 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ .

Если эта надежность оказывается достаточной, программа вступает в свою следующую фазу — массовое производство.

Однако имеет смысл исследовать причины различия между двигателями, которые изготавливаются на различных этапах и при необходимости вносить соответствующие коррективы. Например, вполне возможно, что различия происходят за счет недостаточного освоения методов производства и контроля качества на начальных стадиях выполнения программы. Если это так, то, вероятно, не обязательно предпринимать корректирующие действия.

### 13.3. ИСПЫТАНИЯ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Часто мы сталкиваемся с проблемой определения уровня какого-либо фактора, который является критическим, т. е. оказывает критическое воздействие на технические характеристики прибора. До этого уровня можно ожидать, что работа будет успешной, а после достижения его происходит отказ; здесь успех и отказ определены как функционирование или нефункционирование испытываемого изделия.

Обычно мы считаем, что окружающие условия (или определенные факторы) оказывают какое-то воздействие на тактико-технические свойства изделия, в результате чего в определенном диапазоне условий, например между двумя уровнями температуры, происходят небольшие отклонения режима работы этого изделия от номинального. Однако если этот диапазон выбран очень большим, то часто могут происходить радикальные изменения отклика. Причина кроется в том, что физические или химические свойства изделия при этом подвергаются таким изменениям, что его свойства начинают резко отличаться от заданных. Так, может прекратиться работать диод при слишком низкой температуре или электронно-лучевая трубка при определенном уровне вибрации, хотя никакие изменения их характеристик, вплоть до достижения этого критического уровня, не наблюдаются. Классическим примером, который обычно приводится при обсуждении испытаний на чувствительность, является исследование детонации взрывчатого вещества при бросании его с различной высоты. Проблема заключается в том, чтобы установить метод нахождения среднего критического уровня, а также оценить степень отклонения относительно этого сред-

него значения, после чего можно сделать вероятностные заключения о надежности.

В отдельных случаях полученная информация может указать на необходимость создания искусственных условий для защиты от критических обстоятельств или на необходимость вообще отказаться от использования того или иного изделия, которое вынуждено подвергаться воздействию фактора, превышающего определенный уровень.

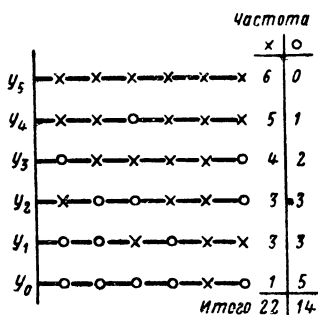


Рис. 13.1. Неэффективный выборочный метод выявления критического уровня.

Одна из проблем, с которой приходится часто сталкиваться при нахождении критического уровня, заключается в следующем. В тех случаях, когда мы выбираем фактор при заданном уровне, а он не влияет критически на работу изделия (если это изделие *одноназового действия*), то нельзя узнать, насколько велик коэффициент критичности фактора при этом уровне.

Рассмотрим случай с ракетным двигателем, работающим на твердом топливе, который под воздействием низких температур, взорвался сразу же после запуска. Возможности произвести повторные испытания этого двигателя нет, и, следовательно, нельзя узнать, насколько была температура ниже критического уровня.

Совершенно другое положение наблюдается при испытании жидкостного ракетного двигателя, когда при определенной температуре замерзает и запирается дроссельный клапан, в результате чего двигатель не запускается. После оттаивания клапан будет вполне нормально функционировать и его можно испытывать еще раз при более высокой температуре, и так будет продолжаться до тех пор, пока не установится критическая температура.

Если изделий достаточно много и они дешевы (что бывает очень редко), то одним из способов получения полезной информации будет испытание группы изделий в диапазоне различных уровней и измерение соотношения изделий, работавших успешно и имевших отказы

в каждой группе. Результаты подобного эксперимента выглядят так, как показано на рис. 13.1, где отказ обозначается крестиком (X), успех — нулем (O), а  $y_i$  представляет собой  $i$ -й уровень фактора  $y$  (температура, соотношение компонент и т. д.). Из этих данных можно обычным путем получить среднее (или медиану) и стандартное отклонение распределения успеха, при необходимости преобразуя и нормализуя данные, чтобы получить возможность сделать обычные вероятностные оценки. Однако этот эксперимент не очень эффективен, поскольку, например, из шести испытаний при  $y_5$  не получено никакой полезной информации (за исключением того, что успехов при  $y_5$  не было вообще).

Обычно мы ожидаем, что успехи будут в тех случаях, когда уровни факторов значительно ниже критических, а отказы — когда уровни факторов значительно выше критических уровней. Отсюда возникает необходимость найти выборочный метод, который стремился бы концентрировать испытания около критического уровня. Описываемый ниже метод и обладает этим свойством. В различных источниках его называют по-разному: *испытание на чувствительность*, анализ Брюстона или метод «вверх и вниз».

### 13.3.1. Методика испытаний на чувствительность

Перед испытаниями выбираются два числа: 1) уровень  $h_0$  фактора  $H$ , при котором начинается испытание, и 2) разница  $d_0$  уровней фактора  $H$  между двумя последовательными испытаниями. Методика испытаний состоит в следующем.

Испыгывается первое изделие при  $h_0$ . Если испытание проходит успешно, уровень  $H$  увеличивается до  $h_0 + d_0$  и испытывается второе изделие. При успешных результатах эта процедура увеличения фактора  $H$  на разницу (шаг) после каждого испытания повторяется до тех пор, пока не произойдет отказ. Как только произойдет отказ, следующее изделие испытывается при уровне, который на один шаг  $d_0$  ниже уровня, соответствующего последнему испытанию. Таким образом, общее правило для каждого испытания состоит в том, что, если последнее испытание было успешным, следует увеличить уровень фактора  $H$  на  $d_0$ , и если при послед-



нем испытании произошел отказ, уменьшить уровень фактора на  $d_0$ . Последовательность испытаний может быть представлена так, как это показано на рис. 13.2. Первое испытание было успешным, поэтому второе изделие испытывалось при уровне  $h_0 + d_0$ , а при этом испытании произошел отказ. Следующее испытание проводилось при  $h_0$  и было успешным. Так продолжалось до тех пор, пока не была исчерпана вся выборка. Очевидно, эта процедура автоматически концентрирует испы-

Нормализованные данные				$n_i$	
		$x'_5$	$\sigma'_5$	$x'_5$	$\sigma'_5$
3,2	$h_0 + 4d_0$			2	
3,0	$h_0 + 3d_0$		x	2	5
2,8	$h_0 + 2d_0$		x x x x x o x x x	7	4
2,6	$h_0 + d_0$	x x x	x x o o x o x o o	8	3
2,4	$h_0$	o o o x x x o x o o	o o	5	2
2,2	$h_0 - d_0$		x o o o o	1	1
2,0	$h_0 - 2d_0$		o	1	0
Итого				25	25

Рис. 13.2. Метод «вверх — вниз» при испытаниях на чувствительность.

тания около критического уровня, и, таким образом, средний критический уровень аппроксимируется медианой, если распределение сильно не искажено (перекошено). Важно также иметь меру отклонения, чтобы можно было установить доверительные пределы, т. е. мы значительно больше заинтересованы в получении 99%-ного доверительного предела, в качестве гарантии того, что взрыв или какой-либо другой катастрофический отказ не произойдет, чем в получении 50%-ного предела, или медианы. Кроме того, если полученные данные упорядочены так, что они следуют какому-либо известному распределению (например, нормальному), то могут быть установлены более жесткие доверительные пределы. Следовательно, исходя из результатов предыдущих экспериментов, желательно заранее знать тип распределения и уметь упорядочивать данные так, чтобы они были нормально распределены. Тогда наша задача будет состоять в том, чтобы определить оценки параметров нормального закона распределения  $\mu$  и  $\sigma$ .

В настоящем примере данные рассматриваются как результаты выборки из нормального распределения. Наши действия заключаются в исследовании полученных данных и определении того, какие из крестиков (X) и из нулей (O) имеют наименьшую общую частоту. (Мы выбираем наименьшее число, чтобы исключить смещение, которое может быть вызвано выбором  $h_0$ , сильно отличающегося от критического значения, что приводит к появлению слишком большого числа отказов или успехов, прежде чем будет достигнута критическая область.) Обозначим это число через  $N$ , а частоту этого самого редкого из всех событий, возникающего при самом низком уровне, — через  $n$ ; при следующем, более высоком, уровне она будет равна  $n_1$  и так далее до  $n_k$  — частоты события при самом высоком уровне, при котором наблюдается это событие. Тогда

$$\sum_{i=0}^k n_i = N.$$

Если  $h^*$  — самый низкий уровень наименее часто встречающегося события, тогда оценка  $\bar{x}$  для  $\mu$  определяется выражением

$$\bar{x} = h^* + d \left[ \frac{\sum_{i=0}^k in_i}{N} + \frac{1}{2} \right], \text{ если используются нули;}$$

$$\bar{x} = h^* + d \left[ \frac{\sum_{i=0}^k in_i}{N} - \frac{1}{2} \right], \text{ если используются крестики.}$$

Оценка для  $\sigma$  получается из выражения\*

$$s = 1,620d \left[ \frac{N \sum_{i=0}^k i^2 n_i - \left( \sum_{i=0}^k in_i \right)^2}{N^2} + 0,030 \right].$$

---

\* Эта формула справедлива при  $\frac{s}{d} > 0,533$ .

Таблица 13.11

Схема вспомогательных вычислений

$n_i$	$i$	$in_i$	$i^2 n_i$
2	5	10	50
2	4	8	32
7	3	21	63
8	2	16	32
5	1	5	5
1	0	0	0
$N = 25$		60	182

$$\bar{x} = 2,0 + 0,2 (2,4 + 0,5) = 2,58;$$

$$s = 1,62 + 0,2 (1,52 + 0,030) = 0,502.$$

Воспользовавшись в качестве примера данными из рис. 13.2, составим табл. 13.11 для нулей (в этом случае выбор не играет роли, поскольку успехи и отказы наблюдались одинаковое число раз).

При вычислении доверительных интервалов все действия до перехода к действительным данным должны производиться с нормализованными числами.

### 13.3.1.1. СТАНДАРТНЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ СРЕДНЕГО И ДИСПЕРСИЯ

Для определения уровня достоверности оценок  $\mu$  и  $\sigma$  мы вычисляем их стандартные отклонения: соответственно

$$\sigma_x = \frac{G_\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_s = \frac{H_\sigma}{\sqrt{N}},$$

где  $G$  и  $H$  получены из рис. 13.3 и зависят от величины  $\sigma/d$ . Так как обычно мы не знаем истинного значения  $\sigma$ , необходимо воспользоваться его оценкой  $s$ , имея

$$s_x = \frac{Gs}{\sqrt{N}}, \quad s_s = \frac{Hs}{\sqrt{N}}.$$

В данном примере  $\frac{\sigma}{d} \approx 0,50/0,20 = 2,5$ . Из рис. 13.3 находим, что  $G = 0,92$ ,  $H = 1,92$ ; отсюда

$$s_x = 0,92 \times \frac{0,502}{5} = 0,09,$$

$$s_s = 1,92 \times \frac{0,502}{5} = 0,19.$$

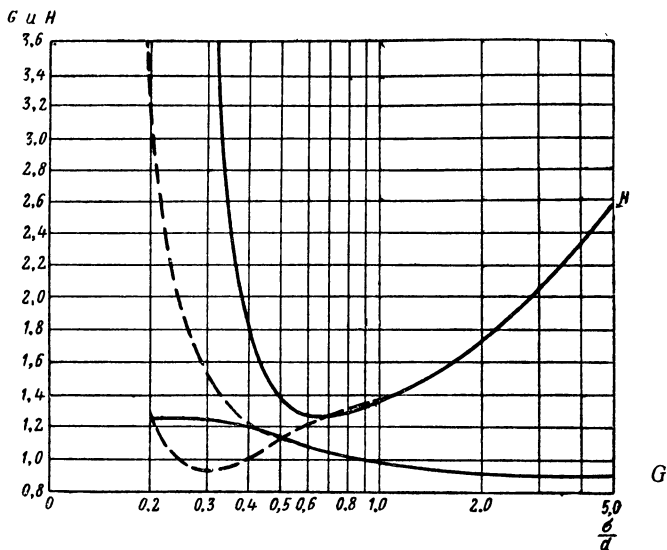


Рис. 13.3. Кривая для оценки стандартных ошибок оценок среднего значения и стандартного отклонения.

Зависимость  $G$  от  $\frac{\sigma}{d}$  служит для получения оценок стандартного (или среднего квадратичного) отклонения от среднего значения; зависимость  $H$  от  $\frac{\sigma}{d}$  — для получения оценок стандартного отклонения от стандартного отклонения.

Сплошная линия указывает на те величины, которые необходимо использовать, если  $\bar{X}$  совпадает с какой-либо высотой при испытаниях. Пунктирная кривая указывает на величины для тех случаев, когда  $\bar{X}$  расположен на равном удалении от двух высот. В остальных случаях требуется линейная интерполяция.

### 13.3.1.2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ДЛЯ $\mu$

Найденное значение  $s_{\bar{x}}$  позволяет нам установить доверительные пределы для  $\bar{x}$ , чтобы получить верхнюю и нижнюю границы значений  $\mu$ . Например, 95%-ные доверительные пределы для  $\mu$  равны  $2,58 \pm (2,06) \times (0,09)$ , т. е.  $\bar{x} \pm (t_{95\% k}) s_{\bar{x}}$ , где  $k = 24$  и равно числу степеней свободы, исходя из которых определены оценки, а  $t_{95\% k}$  получено из двусторонней таблицы  $t$ -распределения\*.

\* Величины  $t$ , используемые в п. 13.2.1.2—13.2.1.4, получены из таблицы С [1].

### 13.3.1.3. ПРОЦЕНТНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Ответ на вопрос, при каком уровне из строя выйдет не более 5% изделий, получается из выражения  $\bar{x} - t_{95\%k} s$ , где  $t_{95\%k}$  должно быть получено из односторонней таблицы  $t$ -распределения с  $k$  степенями свободы. В рассматриваемом примере это можно оценить как

$$2,58 - (1,71) \times (0,50) = 1,72.$$

### 13.3.1.4. УРОВЕНЬ ДОСТОВЕРНОСТИ ОЦЕНКИ

При желании ввести уровень достоверности в ответ на заданный выше вопрос мы должны вычислить величину стандартного отклонения  $\bar{x} - t_{95\%k} s$ , которая равна

$$\sqrt{s_{\bar{x}}^2 + t_{95\%k}^2 s_s^2},$$

и связать односторонний доверительный уровень с оценкой процентного (квантильного) предела. Так, например, если мы желаем быть на 90% уверены, что 95% испытываемых изделий будет иметь число отказов больше определенного значения  $P_{95\%/90\%}$ , тогда

$$P_{95\%/90\%} = 1,72 - 1,28 \sqrt{0,09^2 + (1,71)^2 \times (0,19)^2} = 1,30.$$

### 13.3.2. Особенности методики испытаний на чувствительность

Итак, испытания на чувствительность представляют собой весьма эффективный выборочный метод, однако при интерпретации полученных результатов требуется проявлять осторожность.

Причина состоит в том, что оценки основаны на принципе максимального правдоподобия и в ходе вычислений используются некоторые приближения, которые при определенных условиях снижают точность оценок. Например, при выборе шага  $d$ , если известно приблизительное значение  $\sigma$  или имеется оценка  $\sigma$ , величина шага  $d$  должна

быть выбрана близкой к  $\sigma$ . Если  $d$  больше  $3\sigma$ , то как это видно из кривых, значительно снижается точность  $H$ , а следовательно, и  $s_s G$  является возрастающей функцией от  $\frac{d}{\sigma}$ , поэтому, чем меньше величина  $d$ , тем точнее оценка  $\mu$ . Однако, если шаг достаточно мал, а выбранный начальный уровень испытания невысок, то слишком много наблюдений будет произведено напрасно, прежде чем мы достигнем области медианы. Кроме того, когда  $d$  меньше  $\frac{\sigma}{3}$ , фактор  $H$  становится очень большим; следовательно, по возможности лучше всего выбирать значение  $d$ , лежащее между  $\frac{\sigma}{3}$  и  $\frac{5\sigma}{2}$ . Этому методу присущи допущения о нормальности закона распределения или о возможности нормализации данных, а это означает, что, не убедившись в действительности этих положений, нельзя делать достаточно достоверные утверждения.

В тех случаях, когда требуется в целях безопасности сделать утверждение, скажем, с 99,9%-ной вероятностью, то данным методом лучше всего воспользоваться только для поиска и теоретического определения уровня, а затем произвести подтверждение заданной вероятности и надежности в этой точке.

#### 13.4. СЛУЧАЙНО СБАЛАНСИРОВАННЫЕ ПЛАНЫ

Довольно часто классическое статистическое экспериментирование критикуют, называя слишком «топорным». Оно якобы недостаточно хорошо оснащено, чтобы удовлетворить динамическим требованиям промышленного производства. При определенных обстоятельствах это может быть справедливо, но как часто эти требования являются результатом плохого планирования или принятия неправильных решений! Тем не менее, положение таково, что мы не можем всегда гарантировать то, что наши эксперименты находятся под неослабным контролем и ограждены от внешних воздействий (изменения расписаний, утраты вспомогательного оборудования и прочих непредвиденных обстоятельств). Другой недостаток классических статистических экспериментов заключается в том, что факторов, влияющих на поведение изделия, настолько много, что описать его с по-

мощью сочетаний всех этих факторов становится практически невозможно или нецелесообразно.

Правда, мы можем использовать дробные факторные планы или какие-нибудь другие формы модифицированного классического плана и таким образом значительно уменьшить объем выборки. Но тогда план становится слишком сложным или трудным для анализа, особенно если возникают изменения, подобные упомянутым выше. Эти доводы в различной степени верны в зависимости от обстоятельств, соответствующих каждой ситуации. Недавно появились планы, которые учитывают в какой-то мере упомянутую негибкость классического плана и нестатистический технический подход к вопросам экспериментирования. Они известны под общим названием *случайного баланса* [6]. Эти планы исключают многие возражения, выдвинутые против классических планов, правда, ценой определенных потерь. Все это сказывается на эффективности оценки и особенно на доверительных утверждениях об эффектах взаимодействия. Тем не менее, если ею пользоваться осторожно и с достаточным пониманием, методика составления случайно сбалансированных планов может оказаться очень эффективным средством и ценным вкладом в практику аналитического экспериментирования.

Возможно, наиболее ценным является ее применение в качестве средства для отбора, «просеивания». Рассмотрим состояние программы разработок на самой ранней ее стадии, когда изделия производятся в небольших количествах, причем для проведения экспериментов выделяется по возможности в последовательном порядке ограниченное число изделий. К тому же почти ничего не известно о воздействии на оперативные характеристики изделия, отклик или его надежность многих факторов, таких, как окружающая среда, процессы производства, условия испытаний и т. д. При классическом статистическом экспериментировании было бы весьма трудно создать план, который учитывал бы все эти положения.

Приведем наиболее простой и наглядный пример приложения случайно сбалансированного плана.

Предположим, что  $A, B, C, \dots, M$  являются исходными факторами с уровнями  $a_i, i=1, 2, 3; b_j, j=1, 2, 3, 4, 5; c_k, k=1, 2; \dots; m_p, p=1, 2, 3.$

Пусть отклик  $r$ -го изделия будет обозначен через  $y_r$ . Тогда случайно сбалансированный план может быть представлен в виде:

Выход или отклик		Выходные факторы				
		$A$	$B$	$C$	$\dots$	$M$
$y_1$	←	$a_3$	$b_5$	$c_1$	$\dots$	$m_2$
$y_2$	←	$a_3$	$b_4$	$c_2$	$\dots$	$m_1$
$y_3$	←	$a_1$	$b_1$	$c_2$	$\dots$	$m_1$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_r$	←	$a_2$	$b_2$	$c_1$	$\dots$	$m_3$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_n$	←	$a_3$	$b_5$	$c_2$	$\dots$	$m_2$

т. е. изделие 1 испытывает воздействие 3-го уровня фактора  $A$  (температура);

изделие 1 испытывает воздействие 5-го уровня фактора  $B$  (время обработки);

изделие 1 испытывает воздействие 1-го уровня фактора  $C$  (уровень влажности);

$\vdots$   
 $\vdots$   
 $\vdots$

изделие 1 испытывает воздействие 2-го уровня фактора  $M$  (числовой оператор).

При составлении плана уровни фактора  $A$  записываются в соответствующей колонке, в случайном порядке. Аналогичным образом заполняются колонки факторов  $B, C, \dots, M$ . Очевидно, любая матрица внутри матрицы  $n \times M$  также является случайно сбалансированным планом, так что этот план можно исследовать, несмотря на отсутствие некоторых членов  $y_r$ . (Отсутствие здесь неприемлемо для нулевого или неопределенного отклика, любой из которых может характеризовать катастрофический отказ и должен включаться при любом исследовании воздействия этих факторов). План же можно расширить по мере поступления новых данных, просто добавляя случайные уровни факторов  $A, B, \dots, M$ .

Кроме того, поскольку  $n$  не зависит от  $M$ , можно исследовать сколько угодно интересующих нас факторов независимо от числа изделий в выборке. Как видно, это методика отличается гибкостью.

Предварительный анализ начинается графическим представлением данных в виде диаграмм рассеивания



(рис. 13.4). Отклик  $Y$  наносится против каждого уровня соответствующего фактора. Это позволит выявить, оказывает ли влияние тот или иной фактор или определенный уровень фактора на отклик. Однако в результате мы получим только приближенную сравнительную оценку, поскольку из-за смещения нельзя произвести точно сбалансированное сравнение.

Первое сравнение производится путем проверки. Вместо того, чтобы вычислять среднее арифметическое для

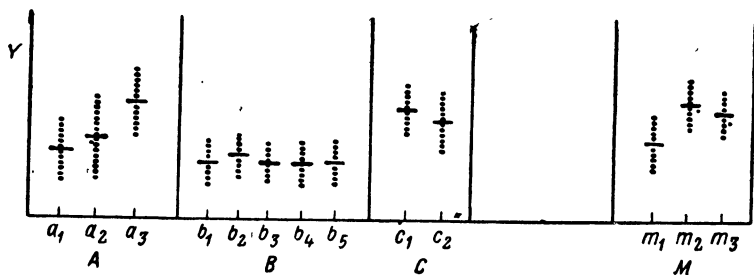


Рис. 13.4. Типичная диаграмма рассеивания (поперечные черточки указывают положение медиан).

каждого уровня, значительно быстрее и удобнее сравнивать медианы. После нахождения того фактора, который оказывает воздействие, можно рассчитать уровень значимости этого эффекта. Однако необходимо помнить, что из-за утраты ортогональности (см. [1], стр. 587) между сравнениями проверка значимости оказывается только приближенной.

Каждый исследуемый фактор рассматривается так же, как и при анализе полностью рандомизированного блока, т. е. путем сравнения вариаций между *различными факторами* и *внутри однородных факторов*, причем в каждой классификации имеется неравное число наблюдений. Например, при определении значимости воздействия фактора  $A$  мы должны вычислить:

$$1) \frac{(\text{сумма всех наблюдений})^2}{\sum_{i=1}^3 r_i} = \frac{(\sum_{i,j} a_{ij})^2}{\sum_{i=1}^3 r_i};$$

$$2) \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{(\text{сумма всех наблюдений,})^2}{r_i} \right] = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{(\sum_j a_{ij})^2}{r_i} \right];$$

3) сумма квадратов отдельных наблюдений  $= \sum a_{ij}^2$ , где  $r_i$  — число наблюдений фактора  $A$  при уровне  $A_i$  и  $a_{ij}$  —  $j$  наблюдение фактора  $A$  при уровне  $A_i$ .

В качестве критерия значимости используется  $F$ -признак. Коэффициент  $F$  получается из табл. 13.12 как отношение среднего квадратического фактора  $A$  к среднему квадратическому внутри  $A$ . Степени свободы, соответствующие  $F$ -признаку, равны 2 и  $(\sum r_i - 3)$ . Более подходящими могут оказаться альтернативные критерии значимости, основанные на непараметрических методах. В рассматриваемом примере как раз и используется непараметрический метод [см. (13.2)].

Стандартное отклонение среднего получено из выражения

$$s_{ai}^2 = \frac{\sum_j a_{ij}^2 - \frac{(\sum_j a_{ij})^2}{r_i}}{r_i(r_i - 1)}. \quad (13.1)$$

Таблица 13.12

**Дисперсионный анализ для фактора  $A$**

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Среднеквадратичное значение
Фактор $A$	2	(2) — (1)	$\frac{(2) - (1)}{2}$
Внутри фактора $A$	$(\sum r_i - 3)$	(3) — (2)	$\frac{(3) - (2)}{\sum r_i - 3}$
Общий эффект	$(\sum r_i - 1)$	(3) — (1)	

После определения тех факторов, которые оказывают значимое воздействие, их отделяют от остальных данных, чтобы позволить выделить среди оставшихся следующие по значимости факторы. Это осуществляется алгебраическим вычитанием эффектов этих значимых

факторов и уровней. Таким образом, если в вышерас-  
смотренном примере  $A$  и  $C$  признаны единствен-  
ными двумя чистыми значимыми эффектами, на-  
следующий шаг состоит в оценке их величин. Мы за-  
полняем таблицу  $3 \times 2$  сред-  
них, как это показано  
в табл. 13.13.

Таблица 13.13  
Таблица средних ( $3 \times 2$ )

	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$C_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
$C_2$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$

Сначала наблюдения по-  
мещаются в своих соответ-  
ствующих ячейках. Вычис-  
ляются средние каждой  
ячейки и для каждого  
уровня приводятся средние эффекты факторов  $A$  и  $C$ ,  
где  $A_1 C_1$  выбрано в качестве стандартного уровня:

$$A_1: \quad 0 = 0;$$

$$A_2: \quad \frac{[(\bar{x}_2 + \bar{x}_5) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_4)]}{2} = a_2^*;$$

$$A_3: \quad \frac{[(\bar{x}_3 + \bar{x}_6) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_4)]}{2} = a_3^*;$$

$$C_1: \quad 0 = 0;$$

$$C_2: \quad \frac{(\bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_6) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)}{3} = c_2^*.$$

Эффекты  $A$  и  $C$  теоретически можно исключить из от-  
клика  $y_r$  уменьшением соответствующего эффекта, как  
это объяснялось выше, на уровне входного фактора для  
любого заданного наблюдения, т. е.

$$\begin{aligned} y_1 - a_3^* &\rightarrow y_1^1 \\ y_2 - a_3^* - c_2^* &\rightarrow y_2^1 \\ y_3 &- c_2^* \rightarrow y_3^1 \\ \vdots & \\ y_r - a_2^* &\rightarrow y_r^1 \\ \vdots & \\ y_n - a_3^* - c_2^* &\rightarrow y_n^1. \end{aligned}$$

Теперь мы имеем следующий ряд значений  $y_r (\{y_r^i\} \equiv \equiv Y_1)$ , который также представляется в виде диаграмм рассеивания и еще раз исследуется на наличие факторов, оказывающих значимый эффект на работу изделия. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется достаточно различимых чистых эффектов.

Как видно, данный пример дальше анализировать очень трудно. Значимые взаимодействия сложно определять из-за смешения или отсутствия наблюдений или неравенства объемов выборок, имеющих место для определенных сочетаний факторов. Причина заключается в том, что возможны  $3 \times 5 \times 2 \times \dots \times 3$  сочетаний, причем наблюдается не более чем  $n$  из них (меньше в тех случаях, когда случайно повторяется какое-либо сочетание факторов).

Мы видели, как можно абстрагировать важные факторы, не накладывая каких-либо значительных ограничений на проведение испытаний. Конструкция не останется недоработанной, если в какой-либо момент времени конфигурация изделия изменится или остановится производство. Итак, зная значимые чистые эффекты (и взаимосвязи в более сложных примерах), можно продолжать исследовать эффекты этих факторов при более упорядоченных условиях классического статистического экспериментирования.

### 13.4.1. Многократно сбалансированные планы

Случайно сбалансированные планы приводят к слишком большим расхождениям с действительностью, поэтому прибегают к модификации планов с целью уменьшения дисбаланса (рассогласования).

Один из методов для этого заключается в том, чтобы составить план, в котором в каждой колонке имеется равное число уровней каждого фактора. Другой способ следующий: выбирают подгруппы факторов в традиционных статистических планах, выделяют в случайном порядке изделия для каждого плана и затем объединяют несколько планов. В конечном итоге получается случайный сбалансированный план с полной уравновешенностью внутри подгруппы. План этого типа называется *многократно сбалансированным*. Можно видеть, что это своего рода полушаг в сторону классических

планов, поэтому он не так гибок, как простые случайно сбалансированные планы. Однако основное преимущество этого плана остается в силе: число исследуемых факторов не зависит от числа изделий, предназначенных для испытаний.

Рассмотрим, например, положение, когда:

фактор	<i>A</i>	имеет	3	уровня	$a_1$	$a_2$	$a_3$ ,
"	<i>B</i>	"	4	"	$b_1$	$b_2$	$b_3, b_4$ ,
"	<i>C</i>	"	3	"	$c_1$	$c_2$	$c_3$ ,
"	<i>D</i>	"	2	"	$d_1$	$d_2$ ,	
"	<i>E</i>	"	2	"	$e_1$	$e_2$ ,	
"	<i>F</i>	"	3	"	$f_1$	$f_2$	$f_3$ ,
"	<i>G</i>	"	3	"	$g_1$	$g_2$	$g_3$ ,
"	<i>H</i>	"	4	"	$h_1$	$h_2$	$h_3$ .

Здесь имеется 8 факторов и сгруппированное число уровней, что дает  $2^2 \times 3^4 \times 4^2 = 5184$  возможных сочетаний факторов. Для нашего эксперимента имеется всего лишь 36 изделий. Можем подразделить факторы на три группы: *A, B, C*; *D, E, F*; *G, H*; причем каждая группа содержит не более 36 сочетаний.

Группа *ABC* имеет 36 сочетаний, группа *DEF* — 12 и группа *GH* — 12 сочетаний. Итак, *ABC* можно рассматривать как полный факторный план, повторяемый однажды для 36 изделий, *DEF* — как полный факторный план, повторенный трижды, *GH* — тоже как полный факторный план, повторенный три раза. Эти три плана включают 36 изделий, каждому из которых соответствует случайное сочетание факторов. Тогда на изделие 1 воздействуют факторы с уровнями;

$$\begin{array}{l} a_1, b_3, c_3 \text{ в подплане } ABC, \\ a_2, e_2, f_1 \text{ в подплане } DEF, \\ g_2, h_3 \text{ в подплане } GH \end{array}$$

и аналогичным образом на изделия 2 — 36.

Многократно случайно сбалансированный план может быть записан так, как это показано в табл. 13.14. Этот план исследуется так же, как и случайно сбалансированный, однако здесь появляется еще возможность анализировать факторы внутри подпланов более удобными способами. Это означает, что благодаря уравни-

вешенности подплана эффекты взаимодействия факторов внутри подплана могут лучше оцениваться, чем взаимодействие факторов, являющихся членами различных подпланов.

Таблица 13.14

**Многократно сбалансированный план с тремя подпланами: ABC, DEF, GH**

Изделие	A B C	D E F	G	H
1	$a_1 b_3 c_3$	$d_2 e_2 f_1$	$g_2$	$h_3$
2	$a_2 b_2 c_1$	$d_2 e_2 f_1$	$g_2$	$h_3$
3	$a_1 b_1 c_1$	$d_2 e_1 f_3$	$g_2$	$h_1$
.	. . .	. . .	.	.
.	. . .	. . .	.	.
.	. . .	. . .	.	.
36	$a_1 b_1 c_2$	$d_1 e_2 f_2$	$g_2$	$h_3$

В последнем случае обычно будет существовать несбалансированность в числе наблюдений на каждое сочетание факторов. Однако сравнения факторов внутри подплана все еще не будут «чистыми», поскольку уровни факторов, внешних по отношению к этому подплану, не сбалансированы.

**13.4.1.1. ПРИМЕР МНОГОКРАТНО СБАЛАНСИРОВАННЫХ ПЛАНОВ\***

В эксперименте участвовало 12 входных переменных (источников вариаций). К испытаниям подготовлено 32 изделия и решено, что каждая переменная будет исследоваться только на двух уровнях. Это делается для того, чтобы те факторы, которые окажут воздействие, смогли далее исследоваться более тщательно с помощью классических статистических планов.

Двенадцать факторов, каждый из которых имеет по два уровня, составляют общее число в  $2^{12} = 4096$  сочетаний факторов. Было решено разделить 12 факторов на две группы по 6 переменных, причем каждая группа составлялась как дробный факторный план вида

\* Перепечатано по разрешению Будне Т. А. из работы «The applications of random balance designs».

$1/2 \times 2^6 = 1/32$ . Дробные факторные планы были получены путем смешения 5-факторной взаимосвязи с чистым эффектом. Изделия с 1 по 32 случайным образом соответствовали 32-факторным сочетаниям в каждой группе. Первый подплан содержит входные факторы *A, B, C, D, E, F* и второй подплан — факторы *G, H, I, J, K, L*. Окончательные результаты эксперимента вместе с наблюдениями представлены в табл. 13.15.

Анализ начинается с построения 12 диаграмм рассеивания, по одной для каждой переменной.

Таблица 13.15

**Наблюденные экспериментальные значения  $Y_1$  и результаты математической обработки  $Y_2, Y_3, Y_4$**

Номер испытания	Уровни входных переменных												Результаты испытаний			
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1	-	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	78	103	103	103
2	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	103	92	100	95
3	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+	97	99	99	99
4	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	-	+	77	91	99	94
5	+	+	+	-	+	-	-	+	+	-	+	+	113	102	102	97
6	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	77	90	98	93
7	-	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	66	91	99	94
8	-	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	93	105	105	100
9	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	86	99	99	94
10	+	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	+	93	82	90	90
11	-	-	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	87	100	100	100
12	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+	+	100	89	97	92
13	-	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	+	72	97	105	100
14	+	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	124	113	113	108
15	-	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	-	83	96	104	99
16	-	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-	88	101	101	101
17	+	-	-	+	-	-	-	+	-	-	+	-	96	97	97	97
18	-	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	100	100	100	100
19	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	-	72	84	92	92
20	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	86	86	94	94
21	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	69	94	102	97
22	+	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	103	104	104	99
23	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	77	91	91	91
24	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+	104	93	101	96
25	-	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-	+	84	96	96	96
26	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-	-	89	91	99	94
27	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-	-	+	92	92	100	100
28	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	+	-	78	92	100	95
29	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	87	88	96	96
30	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	81	95	95	95
31	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	99	100	100	100
32	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	72	97	97	97

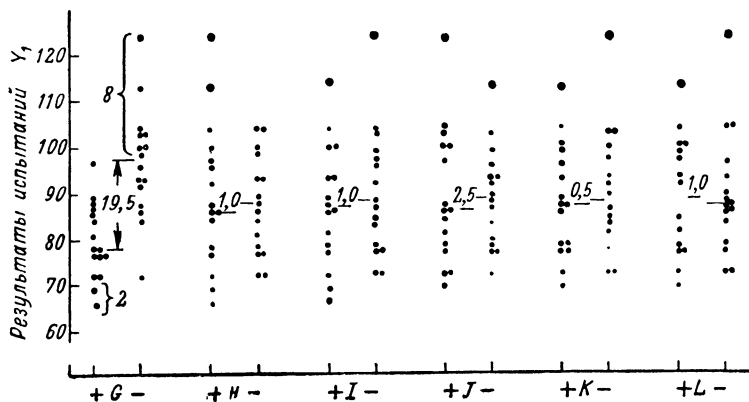
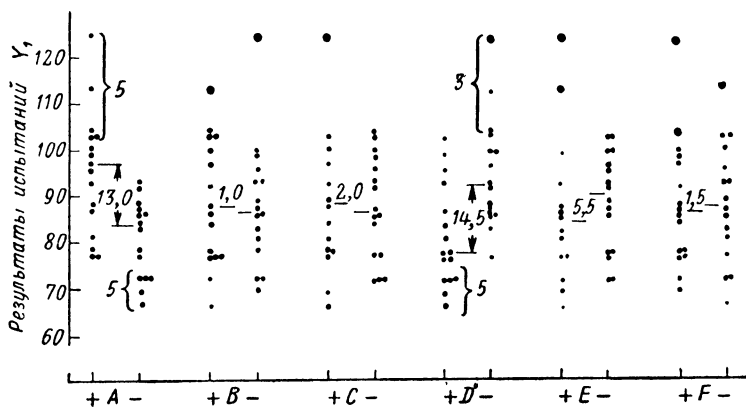


Рис. 13.5. Диаграммы рассеивания для  $Y_1$  (только чистые эффекты).

Диаграммы показаны на рис. 13.5. Анализ этих диаграмм выявляет наличие значимых чистых эффектов. Для проверки уровня значимости можно воспользоваться методом дисперсионного анализа, описанным в § 13.4, который в данном случае сводится к проверке критерия  $t$  или к непараметрическим проверкам. Простой непараметрический критерий существует и удобен в применении, когда имеется два уровня каждого фактора и равное число наблюдений для каждого уровня\*. Если

\* См. Tukey J. W. A quick, compact, two-sample test to duckworth's specifications. *Technometrics*, 1:1, February, 1959, p. 39.



$g$  есть число наблюдений одной группы, большее, чем число любых наблюдений второй группы, плюс число наблюдений второй группы, которое меньше числа любых наблюдений первой группы (в обоих случаях имеется по меньшей мере одно наблюдение), то вероятность наблюденного или худшего «проскальзывания» приблизительно имеет вид

$$P(g) = \frac{g}{2s}. \quad (13.2)$$

Заметим, что приближение не зависит от числа наблюдений  $n$  при каждом уровне. Это верно при  $n \geq 10$ . Критические значения для двусторонних 5,1- и 0,1%-ных критериев значимости равны соответственно  $g \approx 7, 10$  и 14.

Как видно, факторы  $A, D$  и  $G$  оказывают значимые воздействия при расхождениях между медианами, равных соответственно 13,0; 14,5 и 19,5. Величины  $g$  для  $A, D$  и  $G$  равны 10, 8 и 10. Следовательно, используя уравнение (13.2), находим, что уровни значимости расхождений факторов  $A, D$  и  $G$  равны соответственно, 0,01, 0,03 и 0,01.

Следующий шаг заключается в оценке влияния трех значимых факторов и в исключении их из наблюдений. Из табл. 13.16 видно, что неуравновешенность существ-

Таблица 13.16

**Сгруппированные результаты однократных наблюдений**

	$D(+)$		$D(-)$	
	$A(+)$	$A(-)$	$A(+)$	$A(-)$
$G(+)$	81	78	97	88
	78	72	89	87
	77	72	—	86
	77	69	—	83
	—	69	—	77
$G(-)$	103	93	124	100
	99	84	113	92
	96	72	104	86
	87	—	103	—
	—	—	100	—
	—	—	93	—

вует за счет неравенства объемов выборок. Поэтому, если эффекты для  $A$ ,  $D$  и  $G$  вычислялись просто как арифметические разности между величинами, соответствующими положительным и отрицательным уровням, то будет иметь место смешение. Можно уменьшить влияние этого смешения, рассматривая средние значения. Из табл. 13.16 можно составить табл. 13.17.

Таблица 13.17

**Средние значения сгруппированных результатов наблюдений**

	$D(+)$		$D(-)$	
	$A(+)$	$A(-)$	$A(+)$	$A(-)$
$G(+)$	78,25	71,40	93,00	84,20
$G(-)$	96,25	83,00	100,17	92,67

Из этой таблицы находим

$$\frac{\Sigma[A(+)-A(-)]}{4} = 10,60,$$

$$\frac{\Sigma[D(+)-D(-)]}{4} = -11,87,$$

$$\frac{\Sigma[G(+)-G(-)]}{4} = -12,81.$$

Округлив эффекты до целых чисел, преобразуем результаты наблюдений  $Y_1$  из рис. 13.5, прибавляя к ним:

- 11, когда (+) появляется в колонке  $A$ ;
- +12, когда (+) появляется в колонке  $D$ ;
- +13, когда (+) появляется в колонке  $G$ .

Это дает нам ряд наблюдений  $Y_2$  (см. табл. 13.15).

Вся процедура повторяется снова.

Из наблюдений  $Y_2$  составляются 12 диаграмм рассеивания (рис. 13.6), в которых опять проверяются расхождения между уровнями. В результате исследования диаграмм находим, что  $C$  является единственным оставшимся чистым эффектом, который имеет значимость. Следовательно, теперь нам остается проверить эффекты взаимодействия. Диаграммы рассеивания для эффектов

взаимодействия составляются аналогично диаграммам чистых эффектов. Знаки в двух колонках, соответствующие указанным на диаграмме взаимосвязям, перемно-

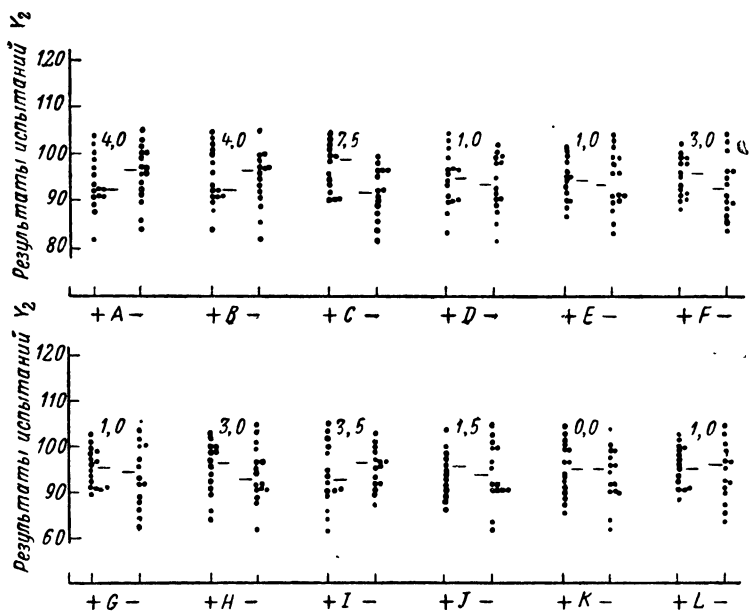


Рис. 13.6. Диаграммы рассеивания  $Y_2$  (чистые эффекты).

жаются. Знак (+) или (—) определяет уровень (+) или (—) взаимодействия. Обычно не желательно и не требуется наносить все взаимодействия первого порядка, поскольку существует

$$\binom{n}{2} \equiv \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1}{2} n(n-1)$$

путей выбора взаимодействия первого порядка из  $n$  факторов, которые в настоящем примере дадут  $\left(\frac{12}{2}\right) = 66$  различных диаграмм рассеивания.

Мы можем избежать построения всех 66 диаграмм. Упорядочим наблюдения  $Y_2$ : если знаки эффектов взаимодействия (+) и (—) хорошо рассеяны (диспергиро-

ваны), это указывает на то, что эффекты взаимодействия факторов незначительны. Однако если заметна тенденция одного знака группироваться вверху или внизу ряда, то есть основания предполагать о существовании эффекта взаимодействия. Уровни значимости могут быть вычислены непосредственно из уравнения 13.2.

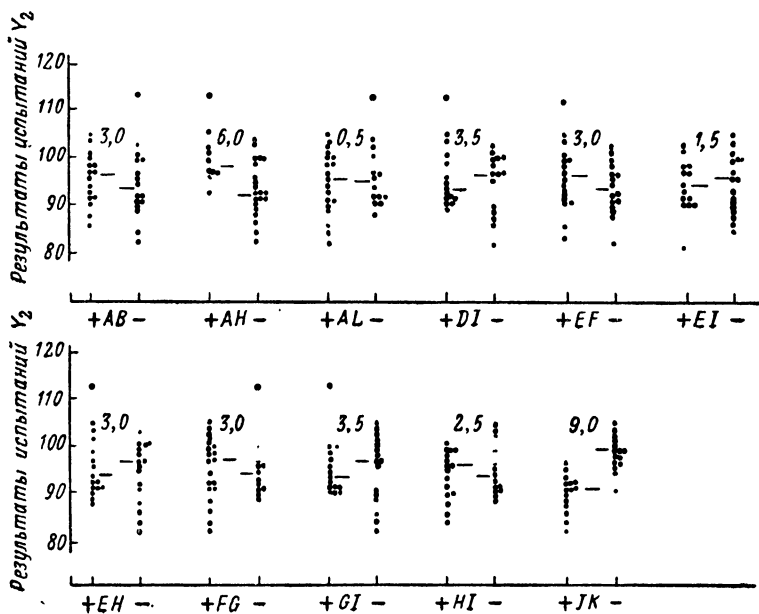


Рис. 13.7. Диаграммы рассеивания  $Y_2$  (выбранные взаимодействия).

Отобранные взаимосвязи показаны на рис. 13.7. Наблюдалось два вероятно значимых (эффекта) взаимодействия факторов  $JK$  и  $AH$ .

Расхождения между медианами  $C$ ,  $JK$  и  $AH$  соответственно равны 7,5; 9,0 и 6,0.

Мы собирались затем составить табл. 2<sup>3</sup>, подобную табл. 13.16 и 13.17 для  $C$  (+), (-);  $JK$  (+), (-); и  $AH$  (+), (-); однако обнаружили, что некоторые клетки таблицы будут не заполнены. Поэтому выбираем два наиболее сильных эффекта  $C$  и  $JK$  и составляем таблицу 2<sup>2</sup>, т. е. табл. 13.18.

Таблица 13.18

К оценке эффектов  $C$  и  $JK$ 

$C (+)$		$C (-)$	
$KJ (+)$	$JK (-)$	$JK (+)$	$JK (-)$
96	113	97	100
94	105	93	99
92	104	92	97
91	103	92	97
91	102	91	96
—	101	90	—
—	100	89	—
—	100	88	—
—	99	86	—
—	95	84	—
—	91	82	—

Снова для оценки эффектов  $C$  и  $JK$  используем средние, в результате чего получим таблицу 13.19, которая

Таблица 13.19

К оценке эффектов  $C$  и  $JK$ 

	$JK (+)$	$JK (-)$
$C (+)$	92,80	101,18
$C (-)$	89,45	97,80

в свою очередь дает

$$\sum \frac{[C (+) - C (-)]}{2} = 3,36;$$

$$\sum \frac{[JK (+) - JK (-)]}{2} = - 8,36.$$

Поскольку эффект  $C$  значительно меньше, чем любое из ранее наблюдаемых расхождений, было решено преобразовать данные только для взаимодействия  $JK$ . Это осуществлялось изменением содержимого колонки  $Y_2$  путем добавления к результатам наблюдения цифры 8, когда оба знака при  $J$  и  $K$  совпадали.

В результате мы получили ряд модифицированных данных  $Y_3$  (см. табл. 13.15). Данные  $Y_3$  опять были на-

несены на диаграммы рассеивания (которые здесь не приводятся) и было обнаружено, что с учетом поправки для  $JK$  расхождение  $AN$  исчезло. Расхождения медиан оказались значительно меньше полученных при предыдущей оценке. Наибольшими с точки зрения расхождения медиан явились расхождения эффектов фактора  $C$  и взаимодействия  $EH$  и  $GG$ , которые были соответственно равны 3,0; 4,5 и 3,0. После составления табл. 13.18  $C \times G \times EH$  было найдено, что только  $EH$  вызывает ощутимый эффект, равный 5,06. Тогда значения  $Y_3$  были изменены путем добавления ( $-5$ ) к тем наблюдениям, для которых совпадали знаки при  $E$  и  $H$ .

Это дает нам ряд модифицированных данных  $Y_4$ , показанных в табл. 13.15, которые опять-таки представлены в виде диаграмм рассеивания, причем

стал заметным больший эффект, оказываемый факторами  $I$  и  $C$ . При табулировании эффект фактора  $C$  оценивался в 4 единицы, а фактора  $I$  — в 5 единиц.

Соответственно были видоизменены значения  $Y_4$ .

При последующем построении диаграмм рассеивания не удалось выявить ощутимого эффекта, поэтому был сделан вывод о том, что при данном анализе найдены все значимые чистые эффекты и установлены все эффекты взаимодействия. Найденные значимые факторы и взаимосвязи показаны в табл. 13.20.

Произведенный анализ позволяет дать ответ на вопрос, какие факторы и взаимосвязи влияют на результаты наблюдения. Метод определения величины эффекта оставляет желать лучшего, поскольку, как показал анализ, неуравновешенность приводит к утрате информации и к внесению определенного смещения.

Однако очень важно знать, *какие* факторы влияют на наблюдения, и для получения лучших оценок их величин мы можем обратиться к теории регрессии.

Таблица 13.20

**Найденные значимые факторы и взаимосвязи**

Переменная	Оцениваемое воздействие	Оценки по уравнению регрессии
$G$	13	15,9
$D$	12	12,1
$A$	-11	-8,7
$JK$	-8	-10,1
$EH$	-5	-6,2
$I$	-5	-5,1
$C$	4	4,9

Пусть имеется линейная зависимость

$$y_i = Ux_{i_1} + Gx_{i_2} + Dx_{i_3} + Ax_{i_4} + JKx_{i_5} + \\ + ENx_{i_6} + Ix_{i_7} + Cx_{i_8}.$$

Тогда, воспользовавшись методом наименьших квадратов для получения нормальных уравнений и решив их, мы получим оценки по уравнению регрессии (см. табл. 13.20) (необходимо заметить, что вообще противоположные значения в случайно сбалансированных планах являются неортогональными\*, и поэтому при оценке влияний  $G$ ,  $D$ ,  $A$ ,  $JK$ ,  $EN$ ,  $I$  и  $C$  по уравнениям регрессии требуется рассчитывать обратные матрицы).

Как явствует из работы [8], для данного частного примера, в котором все главные влияния являются несмещенными и ортогональными, мог быть применен более эффективный план. Однако основная цель исследуемого примера заключалась в том, чтобы показать методы оценки вообще. Эти методы пригодны независимо от того, существуют для данной программы сбалансированные планы или не существуют. Обычно, если сбалансированный план существует, ему необходимо отдать предпочтение, но только не в тех случаях, когда он оказывается пригодным за счет пренебрежения исследованиями всех возможных факторов. Случайная уравновешенность является в основном отборочным инструментом, и соответственно этому должно быть его место при экспериментировании в интересах исследования надежности.

Анализ сопровождается повторяющимися операциями сортировки, модификаций и упорядочения наблюдений. Для выполнения операций подобного типа очень удобно использовать цифровые вычислительные машины, тогда методы исследования с помощью случайного сбалансирования планов могут стать еще более эффективными.

### 13.5. МЕТОД СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ОПЕРАЦИИ

В обычном процессе производства после выбора и проведения той или иной операции приходится контролировать ее выполнение с помощью средств контроля

\* См. Wilks S S. Mathematical statistics. § 9.6. Princeton University Press, 1950.

качества. Мы осуществляем это путем тщательной проверки соответствия уровней входных переменных определенным величинам (в заданных пределах их изменения). Кроме того, измеряем значения выходных переменных, чтобы оценить, случайными ли являются ожидаемые отклонения и не выходят ли они из заданных пределов. Но хотя настоятельная необходимость проведения такого контроля очевидна, совершенно ясно также, что при этом сохраняется, если так можно выразиться, «статус кво» выходных переменных. Это может быть удовлетворительным только в тех случаях, когда процесс согласно какому-то определению является оптимальным. Например, если наши выходные данные свидетельствуют о наличии (маргинальной) проблемы крайних значений надежности, тогда, очевидно, требуется каким-то образом повысить его надежность.

С другой стороны, если характеристики на выходе удовлетворяют заданным требованиям, то, вероятно, есть возможность усовершенствовать этот процесс с экономической точки зрения и повысить его эффективность, не снижая качества выходного продукта.

Может оказаться, что входные уровни были получены при лабораторных экспериментах. Тогда, даже если эти уровни были получены с помощью методов оптимального поиска (см. п. 13.6), может оказаться, что оптимум, полученный в лабораторных условиях, не совпадает с производственным; т. е. по различным причинам оптимальные входные уровни при эксперименте окажутся не совсем оптимальными в производственном процессе. В этих случаях единственный путь получения оптимума — обратиться непосредственно к производству, так как лабораторные исследования опять приведут нас только к тем же уровням.

Вывод заключается в том, что для нахождения оптимального процесса мы должны ввести некоторые отклонения непосредственно в сам процесс производства, измерить их влияние и пытаться достигнуть оптимума. Сущность этой методики, которая здесь называется методом *совершенствования операций* [9], в принципе аналогична исследованию поверхности отклика, но отличается от него в деталях по следующим причинам.

Во-первых, поскольку мы имеем дело с процессом производства, при котором изготавливается довольно-



таки удовлетворительное (после лабораторных экспериментов) изделие, необходимо проявлять большую осторожность, чтобы не снизить производительность.

Во-вторых, с психологической точки зрения будет неправильно заявлять о том, что предлагаемый способ явится всего лишь экспериментальным или что его теоретическая подоплека будет весьма сложна. Поэтому при стремлении к оптимуму вносимые изменения не могут быть так велики или сложны, как при лабораторных экспериментах. Однако это компенсируется тем, что, поскольку процесс производства постоянно повторяется, можно ожидать получения достаточного количества наблюдений для произведения хороших оценок эффектов и их стандартных ошибок. Поэтому мы станем воздерживаться от изменения каких-либо переменных до тех пор, пока не получим достаточного количества данных. Суть метода заключается в том, чтобы внести заранее заданное отклонение в каждый из входных факторов нормального процесса. Это означает, следующее: теперь вместо одного набора входных условий будет несколько наборов входных условий по числу различных возможных сочетаний факторов и их уровней. Выход (или отклик) для каждого из этих входных сочетаний измеряется несколько раз до тех пор, пока не станет возможным статистически различить преимущества и недостатки каждого из них путем сравнения с результатами на выходе исходного процесса. Затем отбираются благоприятные уровни и процесс повторяется, пока не будет установлен оптимальный набор входных уровней.

Процесс испытания с учетом полного набора входных условий, т. е. с учетом всех условий и каждого по одному набору называется *циклом*. Выполнение циклов, повторяющееся до тех пор, пока не будет принято решение об изменении входных уровней, называется *фазой*.

Метод совершенствования операций лучше всего объяснить на примере. Рассмотрим случай, в котором выходная переменная (отклик) есть функция двух входных переменных (процентный состав и время). Однако этот подход можно распространить до любого числа входных переменных, а принятие решения может касаться нескольких выходных переменных. Например, технические характеристики, процентное содержание изделий,

успешно прошедших испытания, стоимость единицы изделия и т. д. могут измеряться для каждой фазы и ряда входных условий. Однако в данном примере для наглядности рассматривается отклик одного типа.

### 13.5.1. Пример\*

Задача метода совершенствования операций состояла в том, чтобы определить, может ли изменение времени обработки и процентного состава при изготовлении теплостойкого материала определенного типа улучшить его способность противостоять воздействию заданного теплового потока в течение заданного промежутка времени.

Исходный процесс изготовления проводился при входных переменных суровьями, указанными на рис. 13.8 единицей. Было решено ввести положительные и отрицательные отклонения от исходных уровней как по времени, так и по процентному составу. В результате



Рис. 13.8. Координаты входных переменных или условия проведения испытаний на первом этапе.

к этим двум входным факторам было получено дополнительно еще четыре сочетания. Они обозначены на рис. 13.8 цифрами 2, 3, 4 и 5. Один цикл состоял из однократного ряда наблюдений (для условий 1, 2, 3, 4 и 5). Измеряемым параметром была величина эрозии материала под действием заданного теплового потока в течение заданного промежутка времени. В табл. 13.21 в закодированном виде представлены наблюдения исходной толщины испытываемого образца минус величины эрозии. Следовательно, мы собираемся найти те значения времени обработки и процентного состава, которые соответствуют минимальной эрозии. В табл. 13.21 приведены результаты, наблюдений для четырех циклов. Поскольку эта операция повторяющаяся, для облегчения обработки и объяснения результатов очень удобно составлять стандартные рабочие карточки [10].

\* Здесь используется методика, изложенная в работах [9] и [10].

В табл. 13.22, 13.23 и 13.24 показаны образцы рабочих карточек для первого, второго и третьего циклов.

В первой карточке (табл. 13.22) содержится информация о первом цикле, поэтому не все ряды заполнены.

Таблица 13.21

**Результаты воздействия теплового потока на испытываемый образец**

Условие	1	2	3	4	5
Цикл 1	75,9	77,6	76,2	81,4	71,7
Цикл 2	76,8	77,3	80,0	81,5	75,7
Цикл 3	78,1	77,3	79,3	78,7	78,0
Цикл 4	77,5	76,8	78,0	79,8	72,1

Вычисления средних и эффектов, по-видимому, не требуют объяснений. При расчете стандартного отклонения и пределов изменения ошибки необходимо помнить, что, как только будет получено достаточно наблюдений (к концу 3-го цикла), для оценки стандартного отклонения потребуется использовать величину размаха. При этом пределы изменения ошибки будут отличаться в  $\pm 2$  раза по сравнению со стандартным отклонением, т. е. стандартное отклонение умножается на среднеквадратическое из коэффициентов эффектов. Тогда пределы для эффектов будут равны  $\pm \frac{2s}{n^2}$ .

Пределы ошибки для изменения в среднем равны  $\pm \frac{4s}{(5n)^{1/2}}$ . Вычисление стандартного отклонения не может

быть начато, пока не закончатся два цикла. Оценка  $\sigma$ , т. е.  $s$ , получается умножением наблюдаемого размаха в цикле на коэффициент  $f_{h,n}$ , полученный из табл. 13.25, где  $n$  — число циклов, а  $k$  — число условий в цикле. В данном примере оценка  $\sigma$ , которая использовалась для первых двух циклов, была получена из предыдущих сведений о стандартном процессе.

В конце каждого цикла после обработки выходных данных на рабочей карточке результаты помещаются на информационном плакате. Эти плакаты по окончании

Таблица 13.22  
**Рабочая карточка для вычислений по методу совершенствования операций для двух входных переменных. Цикл  $n = 1$ . Отклик — толщина образца после испытания**

Вычисление средних		Вычисление стандартного отклонения		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Оперативные условия				
(I) Сумма по предыдущему циклу				Предыдущая сумма $s$ =
(II) Среднее по предыдущему циклу	75,9	76,2	81,4	Предыдущее среднее $s$ =
(III) Новые наблюдения				Новое $s =$ размах $\times f_{к, n}$ =
(IV) Разница между (II) и (III)	75,9	76,2	81,4	Размах =
(V) Новые суммы				Новая сумма $s$ =
(VI) Новые средние: $\bar{y}_i$	75,9	76,2	81,4	Новое среднее = $\frac{\text{(новая сумма } s)}{n-1}$ =

Вычисление эффектов		Вычисление пределов изменения ошибки
Время	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_3 + \bar{y}_4 - \bar{y}_2 - \bar{y}_5) = 4,1$	Для нового среднего =
Процентный состав	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_3 + \bar{y}_5 - \bar{y}_2 - \bar{y}_4) = -5,6$	$= \frac{1,78}{\sqrt{n}} \sigma^* = \pm 3,2$
Время, умноженное на процентный состав	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 - \bar{y}_5) = 0,3$	Для новых эффектов =
Изменение среднего эффекта	$= \frac{1}{5} (\bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 + \bar{y}_5 - 4\bar{y}_1) = 0,7$	$= \frac{1,78}{\sqrt{n}} \sigma^* = \pm 3,2$
		Для изменения среднего =
		$= \frac{1,78}{\sqrt{n}} \sigma^* = \pm 2,8$

Используется предварительная оценка  $\sigma = 1,6$

Рабочая карточка для вычислений по методу совершенствования операций для двух входных переменных. Цикл  $n=2$ . Отклик — толщина образца после испытания

Таблица 13.23

Вычисление средних		Вычисление стандартного отклонения					
Оперативные условия		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	—
(I) Сумма по предыдущему циклу		75,9	77,6	76,2	81,4	71,7	Предыдущая сумма $s$
(II) Среднее по предыдущему циклу		75,9	77,6	76,2	81,4	71,7	Предыдущее среднее $s$
(III) Новые наблюдения		76,8	77,3	80,0	81,5	75,7	Новое $s = \text{размах} \times f_{k,n}$
(IV) Разница между (II) и (III)		-0,9	0,3	-3,8	-0,1	-4,0	Размах
(V) Новые суммы		152,7	154,9	156,2	162,9	157,4	Новая сумма $s$
(VI) Новые средние: $y_i$		76,4	77,4	78,1	81,4	78,7	Новое среднее = $\frac{\text{новая сумма } s}{n-1} = 1,29$
Вычисление эффектов		Вычисление пределов изменения ошибки					
Время	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_3 + \bar{y}_4 - \bar{y}_2 - \bar{y}_5) = 1,7$	Для нового среднего = $\frac{2}{\sqrt{n}} \sigma^* = \pm 2,3$					
Процентный состав	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_3 + \bar{y}_5 - \bar{y}_2 - \bar{y}_4) = -1,0$	Для новых эффектов = $\frac{2}{\sqrt{n}} \sigma^* = \pm 2,3$					
Время, умноженное на процентный состав	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 - \bar{y}_5) = -2,3$	Для изменения среднего = $= \frac{1,78}{\sqrt{n}} \sigma^* = \pm 2,0$					
Изменение среднего эффекта	$= \frac{1}{5} (\bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 + \bar{y}_5 - 4 \bar{y}_1) = 2,0$						

\* Используется предварительная оценка  $\sigma = 1,6$

Таблица 13.24  
 Рабочая карточка для вычислений по методу совершенствования операций для двух входных переменных. Цикл  $n = 3$ . Отклик — толщина образца после испытания

Вычисление средних		Вычисление стандартного отклонения					
Оперативные условия		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
(I) Сумма по предыдущему циклу		152,7	154,9	156,2	162,9	157,4	Предыдущая сумма $s$ = 1,29
(II) Среднее по предыдущему циклу		76,4	77,4	78,1	81,4	78,7	Предыдущее среднее $s$ = 1,29
(III) Новые наблюдения		78,1	77,3	79,3	78,7	78,0	Новое $s$ = размах $\times f_{k,n}$ = 1,54
(IV) Разница между (II) и (III)		-1,7	0,1	-1,2	2,7	0,7	Размах = 4,40
(V) Новые суммы		230,8	232,2	235,5	241,6	235,4	Новая сумма $s$ = 2,83
(VI) Новые средние: $y_i$		76,9	77,4	78,5	80,5	78,5	Новое среднее = $\frac{\text{новая сумма } s}{n} = 1$ = 1,41
Вычисление эффектов		Вычисление пределов измерения ошибки					
Время	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_3 + \bar{y}_4 - \bar{y}_2 - \bar{y}_5) = 1,5$	Для нового среднего = $\frac{1,78}{\sqrt{n}} \sigma = \pm 1,62$					
Процентный состав	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_3 + \bar{y}_5 - \bar{y}_2 - \bar{y}_4) = -0,5$	Для новых эффектов = $\frac{1,78}{\sqrt{n}} \sigma = \pm 1,62$					
Время, умноженное на процентный состав	$= \frac{1}{2} (\bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 - \bar{y}_5) = -1,5$	Для изменения среднего = $\frac{1,78}{\sqrt{n}} \sigma = \pm 1,45$					
Изменение среднего эффекта	$= \frac{1}{5} (\bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 + \bar{y}_5 - 4 \bar{y}_1) = 1,4$						

Таблица 13.25

Значения констант  $f_{k, n}$ 

Число циклов, $n$	Количество сочетаний условий в графе $k$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,63	0,42	0,34	0,30	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23
3	0,72	0,48	0,40	0,35	0,32	0,30	0,29	0,27	0,26
4	0,77	0,51	0,42	0,37	0,34	0,32	0,30	0,29	0,28
5	0,79	0,53	0,43	0,38	0,35	0,33	0,31	0,30	0,29
6	0,81	0,54	0,44	0,39	0,36	0,34	0,32	0,31	0,30
7	0,82	0,55	0,45	0,40	0,37	0,34	0,33	0,31	0,30
8	0,83	0,55	0,45	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31	0,30
9	0,84	0,56	0,46	0,40	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
10	0,84	0,56	0,46	0,41	0,37	0,35	0,33	0,32	0,31
11	0,84	0,56	0,46	0,41	0,38	0,35	0,33	0,32	0,31
12	0,85	0,57	0,47	0,41	0,38	0,35	0,34	0,32	0,31
13	0,85	0,57	0,47	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32	0,31
14	0,85	0,57	0,47	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32	0,31
15	0,86	0,57	0,47	0,42	0,38	0,36	0,34	0,33	0,31
16	0,86	0,57	0,47	0,42	0,38	0,36	0,34	0,33	0,32
17	0,86	0,57	0,47	0,42	0,38	0,36	0,34	0,33	0,32
18	0,86	0,57	0,47	0,42	0,38	0,36	0,34	0,33	0,32
19	0,86	0,58	0,47	0,42	0,38	0,36	0,34	0,33	0,32
20	0,86	0,58	0,47	0,42	0,38	0,36	0,34	0,33	0,32

любого цикла могут выглядеть, как табл. 13.26. Цель этого плаката — представить в наиболее простой форме те данные, которые будут использованы при принятии решения об изменении процесса производства и вызвать интерес к попытке усовершенствовать продукт производства.

Из результатов, записанных на рабочих карточках первых трех циклов, мы видим, что процесс можно усовершенствовать, хотя данных для статистического подтверждения этого к концу третьего цикла оказывается недостаточно. Поэтому циклы повторяются до тех пор, пока наличие реального эффекта не станет очевидным. После этого можно принять решение о переходе ко второму набору входных условий и фаза считается завершенной. В следующей фазе могут исследоваться те же факторы, но с другими уровнями или какие-либо другие интересующие нас факторы.

Теперь рассмотрим возможность интерпретации результатов. Если изменение какого-либо эффекта превышает соответствующий предел ошибки, можно заклю-

## Информационный плакат

Фаза 1	Последний завершенный цикл: 8	
Измеряется	Остаточная толщина	Другие отклики
Требуется	Максимизация	
Средние результаты наблюдений	Процентное содержание 76,9      77,7 77,2      80,3	78,4 Время
Эффекты с 95%-ными пределами изменения ошибки	Время Процентное содержание $S \times T$ Изменение среднего	$+2,3 \pm 1,4$ $-1,1 \pm 1,4$ $-0,8 \pm 1,4$ $+0,4 \pm 1,2$
Стандартное отклонение	1,4	
Предварительная оценка	1,6	

чить, что воздействие этого фактора действительно имеет место. Если предполагается, что отклик располагается в плоскости, то изменение средней укажет форму поверхности непосредственно в исследуемой области. Например, при малом или равном нулю действительном изменении средней поверхность будет приблизительно плоской, а максимальный отклик будет, вероятно, наблюдаться в направлении максимального наклона плоскости. Поэтому следующие исследования необходимо производить именно в этом направлении. При отрицательном изменении средней исходный процесс для исследуемых факторов можно считать близким к максимуму в этой области. Если изменение среднего эффекта положительно, это свидетельствует о вогнутости поверхности, т. е. о необходимости перемещения в этой области. Более подробное аналитическое исследование поверхностей отклика можно найти в § 13.6.



Предположим теперь, что содержание плаката свидетельствует о наличии достаточного количества данных для того, чтобы можно было принять решение. В этом случае решение будет, вероятно, приниматься руководителем производства совместно со специалистами групп контроля качества, конструирования и надежности, которые окажут помощь при объяснении результатов. В рассматриваемом примере наличие возможности увеличения отклика имеет настолько большое значение, что любое решение может быть принято даже по одному только измеряемому отклику, а о второстепенных откликах, т. е. о тех, которые не влияют на технические характеристики и надежность изделия, можно почти не заботиться.

Подобные примеры встречаются в ракетостроении. Ракетный двигатель на твердом топливе, вероятно, взорвется, если величина эрозии какой-либо части его корпуса превысит заданное значение. Разрушение самого двигателя и вспомогательного оборудования приводит к большим денежным затратам. В этом случае второстепенные отклики (стоимость производства или вес), вероятно, не будут учитываться. Однако совершенно очевидно, что во многих других ситуациях решение об усовершенствовании процесса путем выбора одного из наиболее эффективных сочетаний условий обработки будет зависеть не только от увеличения основного отклика. Это решение зависит и от увеличения (если оно происходит) стоимости или веса и т. п. Следовательно, информационный плакат обеспечивает возможность контролировать не только основные, но и все остальные отклики.

Обратимся опять к примеру. Из информационного плаката видно, что время обработки оказывает положительное воздействие на отклик, а процентный состав — отрицательное (хотя и не такое значительное). Кроме того, оба изменения для среднего эффекта и эффекта взаимодействия невелики, поэтому можно полагать, что в данной области поверхность линейна. Если нам требуется двигаться в сторону максимального отклика (т. е. минимальной величины эрозии), можно представить условия стандартного процесса 4 сочетанием (рис. 13.8) и исследовать область вокруг этой точки. Вообще говоря, установленного правила определения разброса уровней фактора нет, но глубокое понимание

рассматриваемого процесса дает возможность приблизительно оценить его размах. В настоящем примере предложено использовать тот же разброс уровней времени относительно условия 4, что и в предыдущей фазе. Однако во второй фазе было решено расширить область изменения процентного состава. Условия производства во второй фазе представлены на рис. 13.9 цифрами 6, 7, 8, 9, 10.

Исследуются те уровни в сочетаниях процентного состава и времени обработки, которые на рис. 13.9 условно обозначены цифрами 6, 7; 8, 9, 10. Снова циклы повторяются до тех пор, пока эффекты факторов, если они имеют место, не станут различными, и фаза заканчивается.

Совершенно не обязательно, что в каждой фазе будет одинаковое число циклов, так как по мере приближения к оптимуму изменение эффекта становится меньше, а это для выявления изменения потребует производства выборки большего объема.

Однако не требуется вносить изменения в процесс сразу же, как только воздействие превысит пределы ошибки. Выше указывалось, что кроме основного отклика могут оказаться важными и другие отклики. К тому же, поскольку любая модификация существующего процесса или дополнение к нему обычно приводит сначала к увеличению затрат, даже если затраты будут окупаться впоследствии усовершенствованием продукта или сразу же за счет того, что операция будет менее дорогостоящей, имеет смысл в этих новых условиях процесс не изменять. В [9] рассматривается пример оценки стоимости работ при совершенствовании операций и обсуждаются вопросы перехода к следующей фазе.

Рассматриваемая методика предназначена для непрерывной работы и составляет часть обычных производственных операций. Однако пользоваться ею необходимо осторожно. После выявления ее положительных

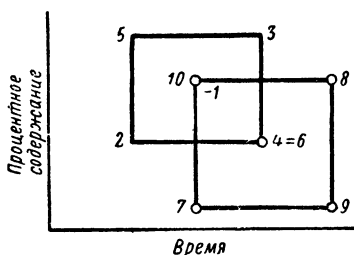


Рис. 13.9. Координаты входных переменных или новые условия проведения испытаний на втором этапе.

качеств обычно перестают обращать внимание на отрицательные. Как только устанавливается приблизительный ряд оптимальных условий для заданного ряда факторов и перед тем, как исследовать их более точно, с помощью методов § 13.6 следует проверить дополнительные факторы. Может быть, эти дополнительные факторы уже проверялись на начальных фазах и были отброшены как имевшие второстепенное значение. Но после того как основные факторы «исчерпались», возможно, что какое-нибудь последующее увеличение отклика будет изменяться за счет изменения менее значительных факторов и окажется важным. Чаще всего это происходит в граничных областях надежности, где требуется исследовать все возможности усовершенствования.

Особое значение при использовании метода имеет тщательный выбор характерного отклика, т. е. установление того, что изменения, которые мы можем произвести, будут достоверными и что производимая проверка окажется представительной для условий применения.

Если при заданных уровнях рассматриваемых факторов отклик не изменяется, то появляются возможности дальнейшего исследования. Одна из них состоит в увеличении диапазона изменения уровней факторов, когда воздействие было мало по сравнению с отклонением за счет ошибки. Другая возможность заключается в том, чтобы исследовать совершенно другие или дополнительные факторы, когда отклик может зависеть от этих факторов или от их взаимодействия с рядом исходных факторов.

### 13.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА

В § 13.5 излагались принципы поиска ряда входных условий, которые оптимизируют выходные данные или отклики.

Исследование поверхности отклика также касается определения оптимального отклика, но этот метод намного сложнее. Различие между этими двумя методами объясняется их различными приложениями — метод усовершенствования операций применяется непосредственно в процессе производства, тогда как исследование поверхности отклика обычно является средством, которое используется при проведении лабораторных исследований. Следовательно, в последней методике отсутствуют

прежние ограничения (т. е., и что самое существенное, требования простоты методов и сохранения непрерывности роста производительности), и поэтому есть возможность применять более уточненные и эффективные статистические способы для получения оптимального ряда условий. Отклик можно рассматривать как зависимую переменную, а входные уровни — как ряд независимых переменных. Если допускается изменение входных переменных, то это означает, что можно определенным образом изменять поверхность отклика.

Таким образом, умея представлять мгновенную область исследования (определяемую величинами входных переменных), мы сможем определить, в каком направлении следует искать оптимум.

Область исследования может, следовательно, перемещаться в этом направлении до тех пор, пока не будет достигнут и определен оптимум. Как видно, принципиальной разницы по сравнению с методом усовершенствования операций не существует. Однако, оценивая функциональную зависимость переменных, т. е. форму поверхности отклика, можно получить более подробное представление об области исследования, в результате чего можно выбрать более правильный путь к достижению оптимума.

### 13.6.1. Геометрическое представление для случая с двумя входными переменными

В качестве примера выбрана поверхность отклика, определяемая только двумя входными переменными. Однако этот способ можно распространить также и на любое число входных переменных.

На рис. 13.10 показано, что определенное свойство материала исследуемого образца зависит от двух условий обработки (от двух входных переменных). Предположим, что начальная область исследования находится в углах заштрихованной области  $A_1$ . Тогда будем иметь четыре отклика, по одному на каждое сочетание.

Мы имеем достаточно оснований допустить, что до оптимума еще сравнительно далеко и что поэтому поверхность отклика в этой исследуемой области можно аппроксимировать плоскостью, т. е.  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ . Действительная поверхность отклика неизвестна, и, сле-

Довательно, мы проверяем допущения (в данном случае допущения о плоской поверхности) с помощью статистической проверки согласия.

Плоскость, уравнение которой получается с помощью метода наименьших квадратов, имеет определенный наклон к плоскости  $x_1x_2$ . Поэтому, найдя эту линию наи-

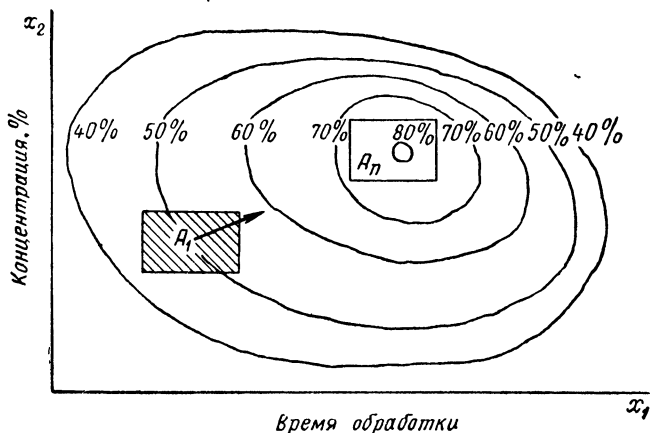


Рис. 13.10. Контуры области поверхности как функции концентрации в процентах  $X_2$  и времени  $X_1$ .

большого наклона и перемещая область исследования в этом направлении, мы можем максимизировать скорость приближения к оптимуму. Эту операцию продолжаем до тех пор, пока не найдем, что плоскость или линейное уравнение уже не соответствует этой поверхности.

После этого исследуется уравнение второго порядка

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2, \quad (13.3)$$

чтобы оценить поверхность отклика в той же области. Это может произойти, когда мы достигнем, например, области  $A_n$  (см. рис. 13.10).

Если уравнение второго порядка дает хорошее согласие, то, пользуясь нашими знаниями геометрии конических сечений, мы сможем изучить форму этой поверхности.

Для этого, преобразуя вышеуказанное уравнение второго порядка (13.3) к каноническому виду (см. п. 13.6.3.4), т. е. перенося начало координат в центр конического сечения и сдвигая  $x_1$  и  $x_2$  вдоль главных осей  $X_1$  и  $X_2$  конического сечения, получим уравнение

$$y - B_0 = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2. \quad (13.4)$$

Исследование этого уравнения позволяет получить хорошее представление о поверхности отклика. Поэтому рассмотрим уравнение (13.4) более подробно.

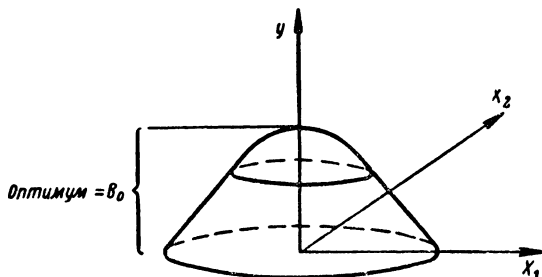


Рис. 13.11. Поверхность отклика при  $B_{11}, B_{22} < 0$ .

При  $B_{11}, B_{22} < 0$ , уравнение (13.4) описывает семейства концентрических эллипсов с центром при  $X_1=0$  и  $X_2=0$ . Если это рассматривать в качестве поверхности отклика, т. е., изобразив третью ось  $y$ , как это показано на рис. 13.11, из уравнения (13.4) можно видеть, что максимальное значение  $y$  получается, когда  $X_1=X_2=0$  и равно  $B_0$ .

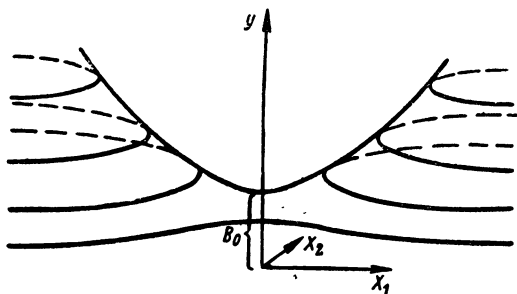


Рис. 13.12. Поверхность отклика при  $B_{11} > 0, B_{22} < 0$ .

Когда  $B_{11}$  и  $B_{22}$  имеют противоположные знаки, выражение (13.4) представляет собой гиперboloид; т. е. форма поверхности отклика образует седло с минима-

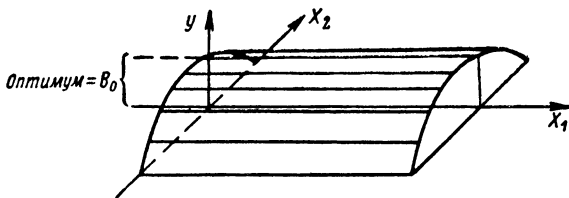


Рис. 13.13. Стационарный гребень,  $B_{11}=0$ ;  $B_{22}<0$ .

сом в точке  $y=B_0$  (рис. 13.12). В этом случае центр конического сечения не дает оптимального отклика для обоих переменных, а является лишь только решением при максимуме для  $X_2$  и минимуме для  $X_1$ . Оптимальный отклик для  $y$ , если он вообще существует, можно получить при перемещении в сторону  $\pm X_1$  при  $X_2=0$ .

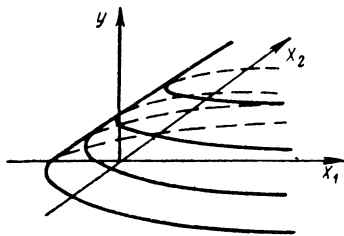


Рис. 13.14. Восходящий гребень,  $B_{11}=0$ .

Когда  $B_{11}$  равно нулю, а  $B_{22}$  имеет отрицательный знак, уравнение (13.4) описывает ряд прямых линий, параллельных оси  $X_1$ . Однозначный оптимум отсутствует, так как любая точка на линии  $X_2=0$  и  $y=B_0$  характеризует оптимум. Из рис. 13.13 видно, что это можно рассматривать как частный случай того, что изображено на рис. 13.11 или 13.12.

Существует также еще одна поверхность, называемая *восходящим гребнем*, которую можно получить, если уравнение (13.3) преобразуется к виду

$$y - B_0 = B_1 X_1 + B_{22} X_2^2.$$

Это уравнение параболы — кривой, центром которой является неопределенность на оси  $X_1$ .  $B_1$  характеризует скорость увеличения отклика в направлении  $+X_1$  при  $X_2=0$ . Эта поверхность показана на рис. 13.14.

### 13.6.2. Примеры использования метода

Прежде, чем описать механику исследования поверхности, рассмотрим некоторые примеры.

Предположим, у нас имеется прибор, от которого требуется высокая вероятность успешной работы. Известно, что при нескольких его испытаниях отмечается тенденция к сильному увеличению начальной интенсивности отказов; затем несколько меньшая интенсивность отказов стабилизируется, а потом снова по мере накопления наработки во время испытаний начинает проявляться большая интенсивность отказов.

Данный тип модели отказов наблюдался для различных приборов и оборудования: для автобусов, легковых автомобилей, ракетных двигателей и сложных электронных приборов. Это происходит по различным причинам. Погрешности производства и ошибки человека могут вызвать начальные «вносимые» («наведенные») отказы с последующей более высокой инцидентностью отказов, являющихся результатом отказов по изнашиванию. Мы, конечно, пытаемся уменьшить вероятности этих отказов, но все-таки очень важно при определенных обстоятельствах установить момент времени, когда наступит минимум вероятности отказа.

Рассматривая в качестве прибора жидкостный ракетный двигатель, можно опять столкнуться с подобными же вопросами. Сколько включений и сколько секунд работы должны мы задать для двигателя при различных калибровочных, оценочных и приемных испытаниях, чтобы последующие огневые испытания имели наибольшую вероятность успеха?

Очевидно, это будет иметь решающее значение, если следующее огневое испытание окажется «боевой работой» (как часть какой-либо системы вооружения или космического корабля). Условия работы жидкостного ракетного двигателя таковы, что большая доля отказов происходит в начале испытаний; с увеличением же наработки двигателя в результате изнашивания начнут возникать отказы отдельных его элементов. Это означает, что распределение отказов двигательной установки зависит как от числа ее включений, так и от наработки (в секундах). Мы должны найти не только оптимальное число испытаний, но также и среднее время работы при каждом испытании. В этом примере можно, следо-



вательно, составить программу проверки, в которой одна входная переменная равнялась бы числу включений двигателя, а другая входная переменная представляла бы заданную продолжительность испытания.

При этом каждый двигатель подвергается испытаниям с заданным временем работы: первый двигатель испытывается в течение 20 сек, второй — 40 сек и т. д. В качестве отклика (который требуется максимизировать) можно выбрать следующее:  $y$  равен полному числу включений, умноженному на суммарное время работы в секундах. Следовательно, для оценки поверхности, которая получается при исследовании указанной зависимости, можно воспользоваться методикой, изложенной в настоящем параграфе.

В качестве другого примера может служить исследование прочности образца твердого топлива на разрыв, которая зависит от его химического состава и от времени полимеризации (термообработки). Если в процессе производства образца было выбрано слишком малое количество одного какого-нибудь химического компонента и время термообработки бралось очень малым, то топливо будет слишком «мягким». В этом случае прочностные характеристики топлива будут неудовлетворительными, так как топливо будет оползать при хранении. Но при слишком большой концентрации определенного компонента или продолжительном времени полимеризации топливо станет слишком хрупким, будет растрескиваться при обращении с ним и при транспортировке, а это, вероятно, может привести к отказу двигателя во время работы. В этом примере отклик можно изобразить процентным содержанием успехов при испытаниях образцов топлива, которые подвергаются воздействию условий, соответствующих испытаниям на ползучесть и хрупкость, т. е. исследуются оба свойства, каждое из которых считается в данном случае вредным.

Нет причины ограничиваться исследованием отклика только одного типа. Например, может возникнуть необходимость максимизировать технические характеристики изделия определенного типа, не уменьшая при этом надежности изделия и сохраняя его вес ниже какого-то заданного уровня. И даже, более того, может потребоваться оптимизация всех этих откликов. Однако очень трудно максимизировать одновременно более одно-

го отклика, если неизвестны функциональные зависимости или не установлены относительные важности нескольких откликов. Именно поэтому требуется уменьшать множество откликов до одного и, таким образом, получать один оптимум. Если эту зависимость или относительную важность нельзя определить, то выбирается один отклик в качестве главного, он затем оптимизируется при наличии определенных ограничений, которые налагаются «второстепенными» откликами.

### 13.6.3. Методика исследования

Если  $y$  есть отклик и  $x_1, x_2, \dots$  — входные переменные или факторы, то истинная поверхность отклика может быть описана функцией

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots),$$

где  $\varphi$  — некоторая функция  $x_i$ -х. Это уравнение может быть записано в виде ряда Тэйлора относительно начала  $x_i$ -х.

$$y = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum_{i \leq j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (13.5)$$

Считается, что в локальной области экспериментирования поверхность может быть представлена либо плоскостью, либо поверхностью второго порядка. Уравнения плоскости или конической поверхности оцениваются методом наименьших квадратов по результатам наблюдений из экспериментального плана. В различных работах предлагалось много планов, которые удачно подходили к этой форме исследований. Однако в задачи настоящей книги не входит рассмотрение всех этих планов (кроме наиболее простых типов). Подробные сведения об этих планах читатель может найти в работах [1, 2].

Методы, используемые при нахождении оптимума, довольно сильно различаются в зависимости от того, каким уравнением можно описать экспериментальную область — линейным или квадратным. Поэтому эти методы следует рассматривать отдельно, хотя на практике они обычно дополняют друг друга.

### 13.6.3.1. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ И МЕТОД БЫСТРЕЙШЕГО ПСДЪЕМА

Пока из опыта не станет известно, что в области экспериментирования ожидается наличие оптимальных условий, первую область экспериментирования предполагается аппроксимировать  $(p-1)$ -мерной плоскостью и оценивать по уравнению (13.6) по  $n$  экспериментальным точкам (откликам):

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{p-1} b_i x_i, \quad (13.6)$$

где  $b_r$  — суть оценки  $\beta_r$ , полученные при минимизации выражения  $(y - \beta_0 - \sum \beta_i x_i)^2$  и решении нормальных\* уравнений. Затем определяется, дает ли уравнение (13.6) хорошее согласие с действительностью, т. е. линейна ли поверхность. Сначала мы вычисляем «наименьший квадрат отсутствия согласия»

$$\Sigma (y_E - y_0)^2 / (n - p), \quad (13.7)$$

где  $y_E$  — математическое ожидание  $\hat{y}$  для заданного ряда входных условий [см. (13.6)] и  $y_0$  — наблюдаемый отклик при эксперименте при тех же входных условиях. Согласно выражению (13.7) отклонения происходят по двум причинам: за счет отсутствия согласия и за счет ошибки выборочного обследования. Поэтому, если имеется оценка ошибки выборочного обследования, то с помощью  $F$ -проверки можно определить, содержит ли выражение (13.7) какое-нибудь отклонение за счет отсутствия согласия или его величина определяется только ошибкой выборочного обследования. В эксперименте оценки ошибки можно получить путем добавления к плану, скажем,  $c$  наблюдений в его центре и вычислением суммы квадратов  $S_c^2$  для этого ряда  $c$  наблюдений. Несмещенная оценка дисперсии ошибки оказывается равной  $\frac{S_c^2}{c-1}$ . Необходимо отметить, что эти дополнительные точки не влияют на значения коэффициентов  $b_i$  при  $x_i$ -х, хотя  $b_0$  меняется. (Чи-

\* Метод наименьших квадратов см в [1].

татель убедится в этом, решив сначала нормальные уравнения без этих центральных точек, а затем — с ними.

$F$ -соотношение можно составить в следующем виде:

$$F(c-1, n-p) = \frac{(c-1) \Sigma (y_E - y_0)^2}{(n-p) S_c^2}.$$

Если эта величина превышает табличное значение для  $F$ -распределения при  $c-1$  и при  $n-p$  степеней свободы при выбранном заранее уровне значимости, это будет указывать на то, что уравнение поверхности имеет плохое согласие с действительностью и требуется исследовать уравнения более высокого порядка, используя вышеуказанную  $F$ -проверку до тех пор, пока не будет наблюдаться хорошее согласие.

Если дисперсия ошибки известна и равна  $\sigma_0^2$  (следовательно, не требуется ее оценивать с помощью последующих наблюдений), тогда можно воспользоваться  $\chi^2$ -проверкой согласия, где

$$\chi_{n-p}^2 = \frac{\Sigma (y_E - y_0)^2}{\sigma_0^2}.$$

Если  $\chi_{n-p}^2 / (n-p)$  превышает значение величины, взятой из табл. П.8, которая соответствует  $n-p$  степеням свободы и выбранному заранее уровню значимости, мы заключаем, что это уравнение не адекватно. Если согласие хорошее, тогда  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  являются оцениваемыми наклонами плоскости и мы следующим образом можем приступить к продвижению по пути быстрейшего подъема:  $b_i$  — скорость изменения отклика относительно  $x_i$  в закодированных единицах;  $k_i$  — число исходных единиц в закодированных единицах; тогда  $b_i/k_i$  — скорость изменения отклика относительно фактора  $x_i$  в его исходных единицах. Составляется табл. 13.27.

Если координаты центра экспериментальной области  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  выражаются в исходных единицах, тогда параметры (или координаты) шагов подъема в плоскости имеют вид:

$$\text{первый шаг } x_1^* + 1; x_2^* + \frac{b_2 k_2}{b_1 k_1}, \dots, x_n^* + \frac{b_n k_n}{b_1 k_1},$$

$$\text{второй шаг } x_1^* + 2; x_2^* + 2 \frac{b_2 k_2}{b_1 k_1}, \dots, x_n^* + 2 \frac{b_n k_n}{b_1 k_1}.$$

и т. д.

## Исходные данные для метода быстрого подъема

Изменение	$x_1$	$x_2 \dots$	$x_n$
Отклика на закодированное $x_i$	$b_1$	$b_2 \dots$	$b_n$
Исходных единиц $x_i$	$b_1 k_1$	$b_2 k_2 \dots$	$b_n k_n$
Отклика На единичное изменение $x_1$	1	$\frac{b_2 k_2}{b_1 k_1} \dots$	$\frac{b_n k_n}{b_1 k_1}$

Подставляя эти величины в закодированном виде в уравнение

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n,$$

получим расчетную величину  $\hat{y}$  для каждого шага, причем любой из них, очевидно, лежит в плоскости. Теперь нам требуется определить, на каком удалении от плоскости экстраполяция будет соответствовать наблюдаемому отклику в этой точке. Поскольку имеется несколько предсказанных откликов для нескольких рядов предполагаемых величин  $x$ , следующий шаг заключается в проверке того, дает ли действительно какой-нибудь один ряд предполагаемых значений  $x$  отклик, близкий к предсказанному. Если имеется плохое соответствие, тогда мы возвращаемся назад по линии быстрого подъема, наблюдая каждый ряд предполагаемых входов, пока не установим то место, где при удалении от исходных уровней линейная зависимость начинает нарушаться. При этом необходимо проявлять осторожность, чтобы не проверять соответствие предсказываемого и действительного откликов на слишком большом удалении от исходных уровней; в противном случае исследование может «переступить» через оптимальный отклик. Специальные способы определения величины шага отсутствуют, однако хорошее знание существа вопроса всегда позволит произвести грамотные оценки. Может оказаться, что некоторый консерватизм метода будет служить помехой. Если для определения того момента,

когда произошло отклонение линейности исходного уравнения, потребуется значительное возвращение, то необходимо иметь определенное число наблюдений, с помощью которых можно будет оценить другое линейное уравнение, получая новый ряд коэффициентов  $b_i$ , а значит, и новый путь быстреего подъема. Эта процедура повторяется до тех пор, пока линейное уравнение не сможет иметь хорошего согласия с результатами наблюдений. Когда это произойдет, потребуется искать поверхность более высокого порядка, которая будет иметь хорошее согласие с данными наблюдениями.

### 13.6.3.2. ПРИМЕР ДЛЯ МЕТОДА БЫСТРЕЙШЕГО ПОДЪЕМА (см. [11])

Производился эксперимент, при котором некоторый критерий полезного использования продукта был ниже 50%. Предполагалось, что этот к. п. д. можно повысить по меньшей мере до 70 или даже до 80%. При этом считалось, что он зависит от пяти входных факторов  $S$ ,  $R_1$ ,  $P$ ,  $D$ ,  $R_2$ . Во время экспериментов каждый из факторов принимал значения, соответствующие двум уровням. Фактор  $S$  представлял количество растворителя,  $R_1$  — отношение первого химического компонента к базовому компоненту,  $P$  — чистоту растворителя,  $D$  — время сушки,  $R_2$  — отношение второго химического компонента к базовому компоненту. В табл. 13.28 приведены предельные значения уровней этих факторов, где (—1) и

Т а б л и ц а 13.28

#### Предельные значения уровней входных факторов

Входные факторы	Уровни входных факторов	
	—1	+1
$S$ — растворитель	500	550
$R_1$ — отношение первого компонента к базовому компоненту	9,0	9,5
$P$ — чистота растворителя	95	98
$D$ — время сушки	4	5
$R_2$ — отношение второго компонента к базовому компоненту	3,0	3,5

(+1) обозначают соответственно нижний и верхний уровни.

Поскольку считалось, что процесс все еще далек от оптимального, было решено поверхность отклика для первой области экспериментирования аппроксимировать плоскостью. План, предусматривающий выборку  $2^5$  сочетаний, был выбран равным  $1/4$  дробного факториала. При этом потребовалось произвести 8 наблюдений ( $1/4 \times 2^5$ ). Кроме чистых эффектов, никаких других значимых эффектов не ожидалось. Однако план был составлен таким образом, чтобы эффект взаимодействия высокого порядка, который может иметь место в действительности, не смешивался с какими-нибудь чистыми эффектами.

План показан в табл. 13.29, где зависимость между истинной переменной и  $x_i$  (закодированная переменная) имеет вид:

$$x_1 = \frac{S - 525}{25}, \quad x_4 = \frac{D - 4,5}{2,5},$$

$$x_2 = \frac{R_1 - 9,25}{0,25}, \quad x_5 = \frac{R_2 - 3,25}{0,25}.$$

$$x_3 = \frac{P - 96,5}{1,5},$$

Числа в колонке  $y_0$  представляют собой наблюдаемые отклики, числа в колонке  $y_E$  — математические ожидания, которые получены из уравнения (13.9). Этот

Таблица 13.29\*

**Выборочный план для исследования поверхности отклика**

Номер эксперимента	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$-b_5$	$b_{12}$	$b_{13}$	$y_0$	$y_E$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1x_2$	$x_1x_3$		
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	34,4	36
2	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	51,6	49,6
3	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	31,2	33,2
4	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	45,1	43,6
5	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	54,1	52,6
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	62,4	64,6
7	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	50,2	48,2
8	1	1	1	1	1	-1	1	1	58,6	60,2

\* Таблица взята из работы Owen L. Davies. Design and analysis of industrial experiments, 1954.

план составляется после объединения следующих тождеств (см. [1—3]):

$$\left. \begin{array}{l} \text{чистый эффект } x_4 \equiv \text{взаимодействию } x_1 x_2 x_3; \\ \text{чистый эффект } x_5 \equiv \text{взаимодействию } -x_2 x_3. \end{array} \right\} (13.8)$$

Если бы план рассматривался как полный факториал для  $x_1, x_2, x_3$ , то следующее уравнение регрессии:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} (x_1 x_2) + \beta_{13} (x_1 x_3) + \\ + \beta_{23} (x_2 x_3) + \beta_{123} (x_1 x_2 x_3),$$

содержало бы чистые эффекты и эффекты взаимодействия  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Сначала с помощью метода наименьших квадратов требуется оценить коэффициенты  $\beta$ , а затем, учитывая тождества (13.8), — коэффициенты при  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и  $x_5$  следующего уравнения регрессии:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} (x_1 x_2) + b_{13} (x_1 x_3) - \\ - b_5 x_5 + b_4 x_4.$$

Однако если  $b_{12}$  и  $b_{13}$  будут малы по сравнению с коэффициентами при линейных членах, ими пренебрегают, поскольку они связаны с эффектами взаимодействия, которые не являются значимыми при выбранном удалении условий эксперимента от оптимума. Таким образом, решая нормальные уравнения и пренебрегая коэффициентами при членах, учитывающих взаимодействия более высокого порядка, которые принимались во внимание при оценках  $b_i$ -х, мы получаем следующие зависимости:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_0 \rightarrow b_0 = 48,5, \quad \beta_{12} \rightarrow b_{12} = 0,2, \\ \beta_1 \rightarrow b_1 = 7,9, \quad \beta_{13} \rightarrow b_{13} = -1,8, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Принимаются} \\ \text{равными нулю,} \end{array}$$

$$\beta_2 \rightarrow b_2 = -2,2, \quad \beta_{23} \rightarrow -b_5 = 0,4,$$

$$\beta_3 \rightarrow b_3 = 6,0, \quad \beta_{123} \rightarrow b_4 = 0,4,$$

в результате чего уравнение плоскости поверхности отклика имеет вид:

$$\hat{y} = 48,5 + 7,9x_1 - 2,2x_2 + 6,0x_3 + 0,4x_4 + 0,4x_5. \quad (13.9)$$

Вычислив  $\Sigma(y_O - y_E)^2$ , получим величину, равную 26,5. Эта величина слишком велика, так как из предыдущих



вычислений известно, что дисперсия ошибки равна 0,5. Происходит это из-за того, что действительно имеет место взаимодействие  $x_1$  и  $x_3$ . Если бы при вычислении  $\Sigma(y_0 - y_E)^2$  были учтены взаимодействия  $x_1x_3$  и  $x_1x_2$ , тогда мы бы получили величину, равную 0,06, что свидетельствовало бы о хорошем согласии. Если при проверке совпадение не было установлено, то в качестве статистической проверки отсутствия согласия лучше всего воспользоваться  $\chi^2$ -проверкой, а не  $F$ -проверкой, так как мы производим проверку при известной дисперсии (см. п. 13.6.3.1).

Возможно, эффект взаимодействия  $x_1x_3$  действительно имеет место. Однако он мал по сравнению с чистыми эффектами  $x_1x_2x_3$ . Следовательно, им можно было пренебречь и для вычисления линии быстрого подъема использовать линейное уравнение.

Итак, теперь мы готовы двигаться вдоль линии быстрого подъема (табл. 13.30).

После выполнения 8-го шага при расчете подъема было решено произвести эксперимент № 9 при тех же значениях  $x_i$ , что и для 5-го шага, чтобы убедиться в сохранении линейной зависимости. В результате эксперимента наблюдался отклик, соответствующий 77%, сравнение которого с предсказанными 74,8% свидетельствует о близком их совпадении. Поэтому следующий эксперимент № 10 производился для 7-го шага, при котором наблюдался результат в 80%, а не предсказанные 85,2%. Отклик должен был быть наверняка меньше 100%, поэтому предполагалось, что отклик начнет уходить от плоской поверхности подобно тому, как это происходит в области 7-го шага. Однако для того чтобы уточнить наличие переходной области, были произведены эксперименты для 6-го и 8-го шагов. Результаты наблюдений действительно свидетельствовали о наличии кривизны поверхности, а это указывало на необходимость учета членов второго порядка. При втором эксперименте, произведенном с целью получения результатов наблюдений для этой оценки, было решено, чтобы центр плана соответствовал данным координатам 7-го шага, разброс уровней факторов  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  оставался тем же самым, а разброс уровней факторов  $x_4$  и  $x_5$  слегка увеличился. Затем снова определялся оптимум, но уже другими методами, описанными ниже.

Таблица 13.30  
**Результаты движения вдоль линии быстрой подъема**

Основные исходные данные и масштабные коэффициенты	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Расчетное значение $y$	Наблюденное значение
Базовый уровень	525	9,25	95,5	4,5	3,25		
Число исходных единиц в кодированной, $k_i$	25	0,25	1,5	0,5	0,25		
Изменение отклика на закодированную единицу, $b_i$	7,9	-2,2	6,0	0,4	0,4		
Изменение исходной единицы, $x_i, b_i, k_i$	197,5	-0,55	9,0	0,2	0,1		
Изменение уровня на 10 единиц, $x_1$	10	-0,028	0,456	0,011	0,005		
Шаги							
Величина $x_i$ для 8 последовательных шагов							
1-й	535	9,22	96,0	4,5	3,25	53,9	
2-й	545	9,19	96,4	4,5	3,26	59,0	
3-й	555	9,17	96,9	4,5	3,26	64,3	
4-й	565	9,14	97,3	4,5	3,27	69,3	
5-й	575	9,11	97,8	4,6	3,27	74,8	77
6-й	585	9,08	98,2	4,6	3,28	79,9	81
7-й	595	9,06	98,7	4,6	3,28	85,2	80
8-й	605	9,03	99,1	4,6	3,29	90,3	76

### 13.6.3.3. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Метод быстрейшего подъема обеспечивает близкое совпадение области экспериментирования с оптимальной или стационарной областью, но не позволяет найти сам оптимум. В этот момент обычно необходимо «охватить» область экспериментирования большим количеством наблюдений, так как число коэффициентов, которые требуется оценить в уравнении более высокого порядка, быстро растет с числом факторов, подлежащих исследованию, что показано в табл. 13.31.

Таблица 13.31

#### Зависимость числа коэффициентов от количества факторов

Число констант, которые требуется оценить			Число наблюдений в факторном плане (каждый фактор имеет 2 уровня)			
Порядок уравнения согласия			Порядок факториала			
Число факторов в эксперименте	1	2	Полный	1/2	1/4	1/8
2	3	6	4	2	1	
3	4	10	8	4	2	1
4	5	15	16	8	4	2
5	6	21	32	16	8	4
5	7	28	64	32	16	8

Можно видеть, что в определенных случаях даже полный факторный план не обеспечивает достаточного количества наблюдений для оценки уравнения регрессии. Бокс и другие [1] предложили получать дополнительные наблюдения в точках, равноотстоящих от центра факторного плана, с координатами исходных наблюдений. На рис. 13.15 показан пример для двух факторов. Подобные планы называются ортогональными составными планами.

В работах [1, 2] приводятся примеры планов, которые используются для исследования поверхности отклика, причем при экспериментах могут учитываться факторы при двух и более уровнях.

После получения достаточного количества наблюдений мы опять с помощью метода наименьших квадратов

тов \* оцениваем приближение второго порядка для  $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$\hat{y} = b_0 + \sum_i b_i x_i + \sum_{i \leq j} b_{ij} x_i x_j. \quad (13.10)$$

Это уравнение проверяется на согласие с помощью метода  $F$ -проверок (см. п. 13.6.3.1). Мы полагаем, что можно найти уравнение второго порядка, которое удовлетворило бы поверхности локальной области оптимума эксперимента.

В противном случае потребовалось бы оценивать кубические уравнения или даже уравнения более высоких порядков, однако их исследование становится чрезвычайно трудным. Понимание существа предмета может позволить быстро установить потребность использования уравнений более высокого порядка, однако прежде всего необходимо оценить область эксперимента. Например, уравнение второго порядка может не дать хорошего согласия из-за того, что

различия между уровнями факторов окажется слишком велико, или, возможно, не все факторы, влияющие на отклик, будут приняты во внимание. Все эти обстоятельства должны непременно учитываться, ибо в противном случае ценность метода значительно снижается.

Затем уравнение (13.10) преобразуется к каноническому виду (п. 13.6.3.4)

$$\hat{y} = B_0 + \sum B_{ii} X_i^2 \quad (13.10a)$$

Свойства поверхности, определяемой этим уравнением, являются более расширенными по сравнению с рассмотренным в п. 13.6.1 двумерным случаем.

\* О применении метода наименьших квадратов для согласования нелинейных функций регрессии см. Hartley H. Technometrics v. 3, 2, May 1961, p. 269—280.

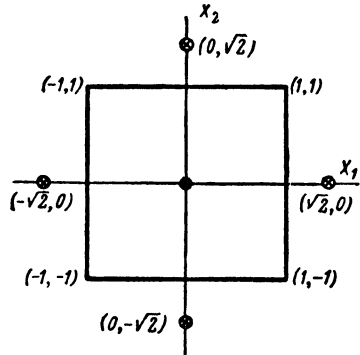


Рис. 13.15. Дополнительный факторный план.

● — центр дополнительных  $n_1$  наблюдений; ⊗ — дополнительные наблюдения к факторному плану  $2^2$ .

Например, если все  $B_{ii}$  отрицательны, то оцениваемая поверхность будет иметь максимум, равный  $B_0$  в центре эллипсоидов.

Если некоторые  $B_{ii}$  положительны, то поверхность определяется эллиптическими гиперboloидами, что свидетельствует о наличии минимаксов.

Если один или несколько коэффициентов  $B_{ii}$  стремятся к нулю, то это указывает на наличие гребней в направлении соответствующих осей  $X_i$ .

После оценки коэффициентов  $b_i$  из уравнения (13.10) остается только привести это уравнение к каноническому виду (13.10а).

### 13.6.3.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Члены первого порядка уравнения (13.10) исключаются перенесением начала координат в центр поверхности. Положение центра определяется после дифференцирования правой части уравнения (13.10) по очереди по каждому  $x_i$  и приравнивания полученных выражений нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= b_1 + 2b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n, \\ 0 &= b_2 + b_{21}x_1 + 2b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ 0 &= b_n + b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \dots + 2b_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Обозначим решения этих уравнений через  $x_{1s}$ ,  $x_{2s}$ ,  $x_{3s}$  и т. д. Тогда эти величины будут определять центр поверхности и, кроме того, дадут стационарную величину отклика  $y$ . Затем путем несложных преобразований начало координат переносится в центр поверхности

$$x^*_1 = x_1 - x_{1s}, \quad x^*_2 = x_2 - x_{2s}, \dots,$$

что при подстановке в (13.10) дает

$$\hat{y} - B_0 = \sum_{i < j} b_{ij} x^*_i x^*_j + \sum b_{ii} x^{*2}_i, \quad (13.11)$$

где  $B_0 = b_0 + \frac{1}{2} \sum b_{ii} x_{is}$  (т. е. стационарная величина).

Члены с двойным произведением в уравнении (13.11) исключаются при повороте перенесенных координатных осей относительно нового начала координат так, чтобы они стали главными осями поверхности второго порядка. Новые оси также ортогональны. В результате получим уравнение (13.10а), которое для удобства читателя повторяется:

$$\hat{y} - B_0 = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + \dots + B_{nn}X_n^2,$$

где  $B_{ii}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  — суть корни характеристического уравнения

$$0 = \begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2} b_{12} \dots \frac{1}{2} b_{1n} \\ \frac{1}{2} b_{12} & b_{22} - B & \frac{1}{2} b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} b_{1n} & \frac{1}{2} b_{2n} \dots b_{nn} - B \end{vmatrix} \quad (13.12)$$

а  $X_i$  — линейные выражения в

$$x^*_i = (x_i - x_{is}),$$

так что

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = m_{11}x^*_1 + m_{12}x^*_2 + \dots + m_{1n}x^*_n, \\ \vdots \\ X_n = m_{n1}x^*_1 + m_{n2}x^*_2 + \dots + m_{nn}x^*_n, \end{array} \right\} \quad (13.13)$$

где  $m_{ij}$  — искомые величины, которые являются решениями  $n$  систем уравнений,  $i=1, 2, \dots, n$

$$\left. \begin{array}{l} (b_{11} - B_{ii}) m_{i1} + \frac{1}{2} b_{12} m_{i2} + \dots + \frac{1}{2} b_{1n} m_{in} = 0 \\ \frac{1}{2} b_{12} m_{i1} + (b_{22} - B_{ii}) m_{i2} + \dots + \frac{1}{2} b_{2n} m_{in} = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} b_{1n} m_{i1} + \frac{1}{2} b_{2n} m_{i2} + \dots + (b_{nn} - B_{ii}) m_{in} = 0 \end{array} \right\} \quad (13.14)$$

где  $B_{ii}$  — решения  $B$  из уравнения (13.12).

Эта система уравнений получается в результате подстановки элементов определителя характеристического уравнения (13.12) в качестве коэффициентов при  $m$  в  $i$ -м ряду уравнений (13.13), где элементами в уравнении (13.12) являются  $B_{ii}$  вместо  $B$ .

Решения уравнений (13.14) не позволяют получить величины  $m$  в явном виде, и мы получаем только величины, пропорциональные их истинным значениям. Последние же получаются с помощью дополнительных условий ортогональности

$$m_{i1}^2 + m_{i2}^2 + \dots + m_{in}^2 = 1$$

для

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку преобразование ортогонально, уравнение (13.15) позволяет нам выразить  $x^*_i$  через  $X_i$ :

$$\left. \begin{array}{l} x^*_1 = m_{11}X_1 + m_{21}X_2 + \dots + m_{n1}X_n, \\ \vdots \\ x^*_n = m_{1n}X_1 + m_{2n}X_2 + \dots + m_{nn}X_n. \end{array} \right\} (13.15),$$

### 13.6.3.5. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМУМА ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА\*

В процессе изготовления твердого ракетного топлива производилось смешивание определенного количества пороха с растворителем, с последующей заливкой смеси в определенную форму и высушиванием растворителя в печи. Переменными при этом были:  $T$ —температура в печи,  $c$ —концентрация растворителя и  $t$ —время сушки. Рассматриваемый отклик оптимизировался относительно этих переменных. Начальные эксперименты позволили установить приблизительные значения этих величин для процесса производства:  $T=167^\circ\text{C}$ ,  $c=27,5\%$  и  $t=6,5$  час.

Было решено произвести трехфакторный эксперимент при двух уровнях для каждой переменной, что обеспечи-

\* Перепечатано с разрешения G. E. P. Vox, Owen L. Davies. Editor of «Design and analysis of industrial experiments». published by Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh, 1-st Edition, 1954.

вало получение восьми из минимума десяти наблюдений, необходимых для оценки коэффициентов уравнения поверхности второго порядка (см. табл. 13.31). Кроме того, наблюдались еще семь других сочетаний, которые приведены в табл. 13.33.

Если переменные закодированы с помощью следующих соотношений:

$$x_1 = \frac{T - 167}{5}, \quad x_2 = \frac{c - 27,5}{2,5}, \quad x_3 = \frac{t - 6,5}{1,5},$$

то зависимости между уровнями в плане и исходными единицами имеют вид, который показан в табл. 13.32.

Таблица 13.32

**Зависимость между уровнями в плане и исходными единицами**

Уровни факторов в условных единицах	Исходные единицы		
	температура, $T$	концентрация, $c$	время, $t$
-2	157	22,5	3,5
-1	162	25	5
0	167	27,5	6,5
1	172	30	8
2	177	32,5	9,5

В табл. 13.33 показаны отклики в зависимости от закодированных уровней входных факторов.

Уравнение второго порядка

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i=1 \leq j=1}^{3,3} b_{ij} x_i x_j$$

совпало \* с результатами наблюдений. Отсюда оцениваемое уравнение поверхности отклика в области экспериментирования имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 57,71 + 1,94x_1 + 0,91x_2 + 1,07x_3 - 1,54x_1^2 - \\ & - 0,26x_2^2 - 0,68x_3^2 - 3,09x_1x_2 - 2,19x_1x_3 - 1,21x_2x_3. \end{aligned} \quad (13.16)$$

\* Подробности об оценке коэффициентов см. в работе [1].



Таблица 13.33

**Закодированные уровни экспериментальных  
переменных и полученные результаты для  
8 основных и 7 дополнительных экспериментов**

Эксперимент	$x_1$	$x_2$	$x_3$	Отклик
1	-1	-1	-1	45,9
2	-1	-1	1	53,3
3	-1	1	-1	57,5
4	-1	1	1	58,8
5	1	-1	-1	60,6
6	1	-1	1	58,0
7	1	1	-1	58,6
8	1	1	1	52,6
9	0	0	0	56,9
10	2	0	0	55,4
11	-2	0	0	46,9
12	0	2	0	57,5
13	0	-2	0	55,0
14	0	0	2	58,9
15	0	0	-2	50,3

Сумма квадратов, полученная из разницы между наблюдаемыми величинами  $y$  и расчетными величинами, была равна 24,6. Это соответствовало 5 степеням свободы. Предварительная оценка экспериментальной ошибки уже имела и была равна 1,5. Поэтому был сделан вывод о том, что это уравнение второго порядка дает достаточно хорошее согласие, поскольку величина  $\chi^2_5 = 24,6 / (1,5)^2 = 11$  не является значимой при заданном 5%-ном уровне (см. табл. П.8).

Центр системы определен путем частного дифференцирования уравнений (13.16) по  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  и решением этих уравнений после приравнивания их нулю:

$$0 = 1,94 - 3,08x_1 - 3,09x_2 - 2,19x_3;$$

$$0 = 0,91 - 3,09x_1 - 0,52x_2 - 1,21x_3;$$

$$0 = 1,07 - 2,19x_1 - 1,21x_2 - 1,36x_3,$$

что дает

$$x_{1s} = 0,061, \quad x_{2s} = 0,215, \quad x_{3s} = 0,499, \quad \hat{y}_s = 58,14.$$

Коэффициенты канонического разложения  $B_{ii}$  получаются из выражения

$$0 = \begin{vmatrix} (-1,54 - B) & -1,54 & -1,10 \\ -1,54 & (-0,26 - B) & -0,60 \\ -1,10 & -0,60 & (-0,68 - B) \end{vmatrix}$$

Отсюда

$$B_{11} = -3,19, \quad B_{22} = -0,07, \quad B_{33} = -0,78.$$

Значения  $m_{ij}$  при  $i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$  находятся при решении трех систем уравнений, полученных из (13.14). Их решения дают следующую ортогональную зависимость между  $X_i$  и  $x_i$ :

	$x_1 - 0,061$	$x_2 - 0,215$	$x_3 - 0,499$
$X_1$	0,751	0,488	0,444
$X_2$	0,307	0,338	-0,890
$X_3$	0,585	-0,804	0,104

Тогда, например,

$$X_1 = 0,751(x_1 - 0,061) + 0,488(x_2 - 0,215) + 0,444(x_3 - 0,499)$$

или

$$(x_1 - 0,061) = 0,751X_1 + 0,307X_2 + 0,585X_3.$$

Уравнение (13.16) в каноническом виде записывается следующим образом:

$$\hat{y} - 58,14 = -3,19X_1^2 - 0,07X_2^2 + 0,78X_3^2. \quad (13.17)$$

Исследование этого уравнения показывает, что коэффициент при  $X_2^2$  близок к нулю, а поскольку коэффициенты при  $B_{11}$  и  $B_{33}$  противоположны по знаку, мы имеем седловую точку. Однако коэффициент  $B_{33}$  к тому же еще мал, так что поверхность представляет собой уплощенное седло. Минимум наблюдается при  $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ .

Движение вдоль оси  $X_1$  приведет к резкому уменьшению отклика. Но мы ожидаем увеличения отклика при движении в любую сторону вдоль оси  $X_3$ .

Таблица 13.34

**Уровни экспериментальных переменных и полученные результаты для дополнительных экспериментов**

Эксперимент	$x_1$	$x_2$	$x_3$	Отклик
16	2	-3	0	59,4
17	2	-3	0	61,5
18	-1,4	2,6	0,7	59,5
19	-1,4	2,6	0,7	58,5

Соответственно этому были произведены четыре дополнительных эксперимента (табл. 13.34, эксперименты 16—19), и выражение для канонического уравнения (13.18) было получено заново:

$$\hat{y} - 59,23 = -3,51X_1^2 - 0,25X_2^2 + 0,24X_3^2. \quad (13.18)$$

Дополнительные наблюдения привели к небольшому изменению в сторону максимума. Следовательно, так как воздействия  $X_2$  и  $X_3$  были малы, можно сделать вывод о том, что максимум получается при  $X_1=0$  и приблизительно равен 60. Этот отклик мог быть получен для любой точки на плоскости  $X_1=0$ , проходящей через оси  $X_2$  и  $X_3$ . Тогда любое сочетание  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , удовлетворяющее уравнению (13.19), дает максимум

$$0 = 0,751(x_1 - 0,061) + 0,488(x_2 - 0,215) + 0,444(x_3 - 0,499) \quad (13.19)$$

или в исходных единицах

$$0 = 0,150T + 0,195c + 0,296t - 32,76. \quad (13.20)$$

Необходимо помнить, что уравнение (13.20) справедливо только в условиях эксперимента, так что при значениях  $T$ ,  $c$  и  $t$ , выходящих соответственно за пределы

157—177, 20—34 и 3,5—9,5, если даже они и удовлетворяют уравнению (13.20), отклик не обязательно будет равен максимуму, равному 60.

В большинстве подобных случаев при выборе значений  $T$ ,  $c$  и  $t$  могут быть использованы рассуждения общего характера. Так, например, время  $t$  может оказаться ограничивающим фактором для процесса с точки зрения производственного потока. В этом случае устанавливается минимальное время, равное 3,5, а вторая из оставшихся переменных  $T$  и  $c$  выбирается на основании каких-либо других соображений.

Методика, изложенная в этом параграфе, важна не только для нахождения оптимального сочетания различных факторов, которые все вместе определяют отклик, но также и для понимания основной теории самого процесса (см. [13]). Вот почему в методику вводится математическое представление поверхности отклика. Например, метод совершенствования операций обеспечивает выбор оптимального набора входных переменных, и то, что это осуществляется сравнительно медленно, при этом не имеет значения; однако его методология не позволяет оценивать функциональные зависимости. Метод же исследования поверхности отклика основан на допущении, что функциональные зависимости существуют и известны и их можно аппроксимировать и оценивать.

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. O. L. Davies. Design and analysis of industrial experiments. Oliver and Boyd London and Edinburgh, 1954.
2. W. G. Cochran and G. M. Cox. Experimental designs, 2d ed., John Wiley and Sons, New York, 1957.
3. O. Kempthorne. The design and analysis of experiments. John Wiley and Sons, New York, 1957.
4. N. R. Garner and D. E. Hartvigsen. Experimental designs in development, proof and qualification testing of rocket motors. Proc. Western Regional Conference ASQC, San. Diego, 1958, August.
5. Statistical analysis for a new procedure in sensitivity experiments. Applied Mathematics Panel, National Defense Research Committee, AMP Report № 101, IIR, SRG-P № 40, 1944, July.
6. F. E. Satterthwaite. Random balance experimentation. Technometrics, 1959, v. 1, 2, May, p. 111—137.
7. T. A. Budne. The application of random balance designs. Technometrics, 1959, v. 1, 2, May, p. 139—155.
8. J. S. Hunter. Technometrics, 1959, v. 1, 2, May, p. 180—184.
9. G. E. P. Box. Evolutionary operation: a method for increasing industrial productivity. Applied Statistics, 1957, v. 6, 2, p. 3—23.

10. G. E. P. Box and J. S. Hunter. Condensed calculations for evolutionary operations programs. *Technometrics*, 1959, v. 1, 1, February, p. 77—95.

11. G. E. P. Box and K. B. Wilson. On the experimental attainment of optimum conditions. *J. Roy. Stat. Soc., Series B*, 1951, v. 13, 1, p. 18.

12. G. E. P. Box. Exploration and exploitation of response surfaces: some general considerations and examples. *Biometrics*, v. 10, 1, s. 8.

13. G. E. P. Box and P. V. Voule. The exploration and exploitation of response surfaces: an example of the link between the fitted surface and the basic mechanism of the system. *Biometrics*, 1955, v. 11, p. 287—322.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Anscombe F. J. Quick analysis methods for random balance screening experiments. *Technometrics*, 1959, v. 1, 2, May, p. 195—209.

Box G. E. P. A basis for selection of a response surface design. *J. Am. Stat.-Assoc.*, 1959, v. 54, 287, September, p. 622—654.

Dickinson A. W. Computer program abstracts, response surface evaluation (025). *Chem. Eng. Progress*, 1959, v. 55, September, p. 86, 88.

Hunter J. S. Some statistical principles underlying evolutionary operations. Proc. 2d Stevens Symposium, 63—75, and Chemical Division and Metropolitan Section, ASQC, 1958, January.

Hunter J. S. Statistical methods for determining optimum conditions. National Convention Trans. ASQC, 1956, p. 415—428.

Koehler T. Evolutionary operations, some actual examples. Proc. 2d. Stevens Symposium, p. 5—8.

Satterthwaite F. E. New developments in experimental design. Proc. Rutgers Quality Control Conf., ASQC, 1956, p. 55—57.

Shainin D. Use logical research methods for component specification. *Automatic Control*, 1957, v. 6, June, p. 28—32.

Vaswani R. Sequential decisioning technique for optimization of complex systems. *J. Ind. Eng.*, 1956, v. 7, 4, July—August, p. 174—178.

Whidden P. Design of experiment in metals processing. National Convention Trans., ASQC, 1956, p. 677—683.

White well J., C. Practical applications of evolutionary operations. National Convention Trans., ASQC, 1959, p. 603—616.

Younden W. J. Engineering vs. classical test patterns. *Ind. Eng. Chem.*, 1956, v. 48, August, p. 59A—60A.

## РАЗДЕЛ III

# ПРИМЕРЫ ПРОГРАММ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ И ЕЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ

---

---

В данном разделе рассматриваются три примера, относящиеся к изделиям трех различных типов. Условия применения и тактико-технические характеристики их изделий очень различны, что обнаруживается в каждом случае при решении определенных задач. К тому же в этих примерах, за исключением второго, вопросы использования специального оборудования, предназначенного для испытаний в целях исследования надежности, не рассматривались.

Таким образом, информацию о надежности можно было получить только в процессе испытаний при разработке того или иного оборудования.

В качестве первого примера выбран мощный ракетный двигатель, работающий на твердом топливе, который находится в стадии конструктивной разработки. При этом имеются два существенных момента, определяющие объем и характер программы разработки и исследования надежности. Во-первых, ракетный двигатель на твердом топливе может пройти огневые испытания только один раз, а это в сочетании с высокой стоимостью материалов и производства означает, что число испытаний натуральных двигателей жестко ограничено. Во-вторых, по своей природе ракетный двигатель на твердом топливе представляет простую, но многоэлементную систему; значит, конструктивное изменение всего лишь одного элемента часто влечет за собой соответствующие изменения в конструкции многих элементов остальной части системы. Все это ведет к тому, чтобы изменения

конструкции элементов производились в группах. Следовательно, программа состоит из четких, но перекрывающих друг друга этапов, в ходе которых производятся и вносятся конструктивные изменения в натурный двигатель.

Во втором примере описывается необходимая деятельность для того, чтобы в возможно короткий срок усовершенствовать и принять уже хорошо разработанное турбогенераторное устройство, номинальный уровень надежности которого уже был подтвержден. При этом отдельные блоки исследуемой подсистемы могут испытываться много раз.

В третьем примере рассматривается мощный жидкостный ракетный двигатель, находящийся на стадии непрерывного усовершенствования путем испытаний и изменений как отдельных элементов, так и всей системы в целом. Система достаточно сложна, однако взаимосвязь между элементами здесь значительно слабее, чем в ракетном двигателе, работающем на твердом топливе, а это означает, что элементы могут быть значительно лучше отработаны каждый в отдельности перед испытаниями в системе двигателя. Кроме того, могут быть внесены значительные изменения, которые совершенно не скажутся на характеристиках других элементов. Другое важное свойство программы испытаний состоит в том, что двигательная установка может проходить несколько огневых испытаний, не имея отказов в результате изнашивания. Продолжительность каждого такого испытания имеет огромное значение с точки зрения измерения надежности.

Подход к рассмотрению указанных примеров имеет много общего, однако при определении конфигураций, установлении приемлемости любого испытания, при выборе критериев для обсуждения или классификации результатов испытаний и при обеспечении полноты охвата информации предусматриваются различные допущения. Кроме того, методы оценки информации сильно различаются как за счет ограничений и условий испытаний каждого типа оборудования, так и за счет различия в интерпретации данных с целью оценки надежности.

Каждый пример является достаточно полным и раскрывает частное приложение общих методов, рассмотренных в предыдущих главах.

## ГЛАВА 14

# ПРОГРАММА ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ МОЩНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ, РАБОТАЮЩЕГО НА ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ, В ПРОЦЕССЕ КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРАБОТКИ

### 14.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Рассматриваемый двигатель является более эффективным с точки зрения размеров и конструкции по сравнению с любым предшествующим ракетным двигателем, работающим на твердом топливе (РДТТ). Следовательно, имеется очень небольшой опыт, на основе которого можно судить о его надежности. Кроме того, из-за высокой стоимости и самой природы двигателя проводилось либо очень мало огневых испытаний специально с целью подтверждения надежности\*, либо они не проводились вообще (а каждый двигатель может пройти только одно огневое испытание).

---

\* Обычно в процессе выполнения программы разработки ракетного двигателя существуют определенные моменты, в которых отмечается прогресс. Например, кульминация начальной программы ОКР (опытно-конструкторских разработок) или предполетные оценочные испытания, при которых выборка двигателей неизменной конструкции подтверждает возможность вступления двигателя в фазу летных испытаний, в течение которой будет происходить дальнейшее развитие программы опытно-конструкторских разработок. Через некоторое время на основании результатов летных и статических испытаний на этом этапе выбираются наиболее совершенная конструкция двигателя и более устойчивый процесс производства. Конструкция фиксируется, и начинается выполнение программы квалификационных испытаний, чтобы подтвердить пригодность двигателя и средств производства к этапу массового производства. Периоды программы, в течение которых производится несколько огневых испытаний однотипных двигателей (с неизменной конструкцией),



Поэтому назначение программы оценки надежности состоит в том, чтобы в ходе выполнения программы опытно-конструкторских разработок определить и измерить те величины, которые характеризуют способность двигателя надежно выполнять функции движущей силы одно- или многоступенчатой ракеты при ее полете в заданный район, т. е. в цель.

Для решения этих проблем требуется рассмотреть три основные практические и статистические задачи:

1) связь между требованиями надежности двигателя в программе предполетных опытно-конструкторских разработок и требованиями к эксплуатационной надежности системы вооружения;

2) получение достоверной информации по надежности в процессе опытно-конструкторских разработок, когда задачи испытаний отличаются друг от друга и конструкция двигателя непрерывно подвергается изменениям;

3) получение эффективных оценок надежности на основании результатов ограниченного числа огневых испытаний натуральных двигателей.

#### 14.2. РАССМОТРЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ

1. Основная задача для любого данного снаряда заключается в том, чтобы он упал в районе заданной цели. Эту задачу для одноступенчатой ракеты можно представить в виде требований к надежности ее двигателя, а именно, для успешной работы ракеты не должны про-

---

вероятно, представляют возможность получить одновременно наиболее достоверные и представительные данные. Однако в эти периоды проходит огневые испытания довольно небольшая часть всех испытываемых двигателей. Следовательно, одни только программы предполетных оценочных испытаний и квалификационных испытаний не могут подтвердить удовлетворение высоких требований по надежности, предъявляемых к ракетным двигателям, работающим на твердом топливе. Таким образом, чтобы обеспечить необходимый объем выборки, требуется использовать информацию из других источников, данные статистических и летных испытаний на этапе ОКР.

В данной главе представлен метод оценки надежности, который предусматривает использование информации только лишь с начала и до конца программы предполетных оценочных испытаний. Однако этот метод с небольшими изменениями (в основном административного порядка) может быть применен к программам летных испытаний на этапе опытно-конструкторских разработок и квалификационных испытаний (испытаний качества).

исходить ни внезапные отказы, которые могли бы привести вообще к невыполнению ее назначения, ни значительные изменения летно-тактических свойств, что привело бы к большому промаху. В то же время очевидно, что при работе двигателя, когда внезапные отказы не возникают, а технические параметры лежат в заданных пределах (при успешном функционировании остальной аппаратуры ракеты), всегда будет иметь место разброс попаданий в район цели или около нее. Сначала для оценки надежности могут быть использованы результаты только стендовых огневых испытаний, поскольку в ходе развития программы еще отсутствует возможность производить летные испытания. Поэтому в течение данного периода невозможно полностью изучить влияние взаимодействия параметров двигателя ракеты и остальных ее систем. Таким образом, исходные основные предпосылки, позволяющие формулировать критерии успеха или отказа системы вооружения через критерии успеха или отказа двигателя, могут быть основаны на эмпирических довольно-таки произвольных зависимостях. Однако если четко установить основные предпосылки, серьезно в них разобраться и найти им точное приложение, то можно получить оценки надежности, достоверные в рамках этих основных предпосылок. Следовательно, если надежность определяется как вероятность успешной работы системы вооружения, то надежность двигателя функциональной подсистемы системы вооружения можно интерпретировать как вероятность успешной работы двигателя. В свою очередь эту вероятность можно рассматривать как вероятность работы в пределах норм, указанных в техническом задании на данный двигатель. Итак, связь между системой вооружения и двигателем определяется техническими заданиями, которые, конечно, пересматриваются и уточняются после получения результатов летных испытаний.

2. Численная величина надежности двигателя, которую можно ожидать или требуется подтвердить в соответствии с договором, будет зависеть от степени совершенства двигателя, от числа единиц, представленных для испытаний, и от требований к надежности системы вооружения в целом.

Приемлемость испытаний на этапе конструктивной разработки для оценки надежности зависит от достовер-

ности данных, а также от назначения и условий проведения испытаний, обеспечивающих получение этих данных. Как правило, сущность экспериментальных проверок отличается от сущности испытаний с целью исследования надежности. Испытания на надежность обычно требуют огромной однородной выборки двигателей с конструкцией, достаточно представительной для ее окончательного варианта. На практике обычно невозможно обеспечить производство большого числа дорогостоящих двигателей специально для подтверждения надежности системы. Дело в том, что даже если это удастся сделать, то к моменту завершения производства и испытаний результаты оценки надежности будут относиться к устаревшей конструкции, поскольку одновременные технические испытания, весьма вероятно, приведут к ее дальнейшему усовершенствованию. Следовательно, в этой программе надежность должна оцениваться по результатам технических испытаний на этапе опытно-конструкторских разработок. Однако эти испытания обычно проводятся с выборками небольшого объема, причем конструкции испытываемых изделий непрерывно изменяются. Поэтому требуется учитывать задачи технических испытаний, отличать их цели от целей испытаний на надежность и находить возможности их согласования, но без ограничения исследовательской природы испытаний на стадии разработок.

Это осуществляется путем «отбора» технических испытаний, полезных с точки зрения исследования надежности, с помощью правил подачи заявлений и определением степени репрезентативности конструкции двигателя относительно ее летного варианта. Таким образом, представительные данные можно получить и использовать для определения достоверной оценки надежности, даже если двигатель и претерпевает изменения в процессе опытно-конструкторских разработок.

В описанной процедуре подразумевается, что для оценки надежности будут использоваться результаты испытаний только натуральных двигателей.

Программа разработки современных ракетных двигателей, работающих на твердом топливе, включает в себя большое число опытных испытаний неполноразмерных двигателей. Начальные исследования пригодности новых составов топлива самым лучшим и наиболее эко-

номически выгодным образом проводятся именно на этих двигателях. Подобные исследования позволяют ответить на вопрос, будет ли то или иное топливо удовлетворять требованиям внутренней баллистики для натуральных двигателей. Во многих случаях могут быть установлены точные масштабные прогнозы характеристик внутренней баллистики. Испытания неполноразмерных двигателей проводятся также с целью определения свойств конструкций заряда и корпуса, изоляционных материалов, конструкций поворотных сопел и т. д. Однако между неполноразмерными и натурными двигателями существуют и такие различия, которые невозможно полностью учесть с помощью масштабных или корреляционных коэффициентов. Например, эти различия могут возникать из-за недостатка знания механических свойств натуральных топливных зарядов (моделей и величин напряжений), которые непосредственно связаны с проблемами растрескивания топлива и отклеивания от внутренних стенок корпуса. Кроме того, любые частные проблемы, связанные с особенностями процессов производства и контроля качества натуральных двигателей, могут быть решены только при испытаниях натуральных двигателей.

Итак, несмотря на то, что техническая информация, получаемая в ходе испытаний неполноразмерных двигателей, очень существенна для отработки функционирования и технических характеристик натурального двигателя, наилучшим образом убедиться в удовлетворении требований к конечному продукту можно лишь при испытаниях натуральных двигателей с достаточно представительными конструкциями.

3. Поскольку для испытаний выделяется только ограниченное число представительных натуральных двигателей, большое значение приобретают статистические методы получения оценок надежности. Статистические методы, которые используются в настоящей программе, рассмотрены в п. 9.2.2.

#### **14.3. ОПИСАНИЕ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОГРАММЫ**

Программа делится на четыре части:

1. Метод распределения систем на главные подсистемы.
2. Правила подачи заявлений.

3. Классификация результатов испытаний в процессе опытно-конструкторских разработок с целью оценки надежности.

4. Оценка надежности.

### 14.3.1. Распределение

В целях компенсации относительно небольшого числа испытаний натуральных двигателей очень важно стремиться использовать все представительные данные. Это достигается делением двигательной установки на три главные подсистемы, причем испытание каждого двигателя оценивается с точки зрения поведения главных подсистем. Таким образом, если при каком-либо испытании двигатель в целом не является представительным (относительно окончательного варианта его конструкции), это не препятствует оценке надежности тех главных подсистем, которые по своей конструкции и по режимам работы оказываются достаточно представительными для окончательного летного варианта. Рассматриваются три главные подсистемы:

- а) подсистема воспламенения топливного заряда;
- б) подсистема внутренней изоляции (бронировки) корпуса;
- в) подсистема управления вектором тяги.

Оценка надежности двигателя производится по результатам испытаний главных подсистем (испытания проводятся в условиях, аналогичных работе натурального двигателя) и может начаться с первого же огневого испытания.

### 14.3.2. Приемлемость главных подсистем

Главные подсистемы, испытываемые при работе натурального двигателя с точки зрения оценки надежности должны подразделяться на приемлемые и неприемлемые. Чтобы определить при каком-либо огневом испытании натурального двигателя, какая из испытываемых подсистем достаточно представительна с точки зрения ее летной конфигурации (для использования при оценке надежности), необходимо выбрать критерии, которые смогли бы определить приемлемость этой подсистемы (табл. 14.1).

Таблица 14.1

Главная подсистема	Характеристики приемлемости*
<p>Подсистема А. Топливный заряд—воспламенитель</p>	<p><math>W_p</math> — вес топливного заряда лежит в пределах <math>\pm</math> — % согласно настоящему техническому заданию на модель</p>
<p>Подсистема Б. Внутренняя изоляция (и бронировка) корпуса</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Конструкция двигателя включает в себя корпус и донную крышку, бронировку и изоляцию согласно отчету о текущем весе и центровке (балансировке) двигателя (указанные веса соответствуют боевому варианту ракеты).</li> <li>2. Вес топливного заряда заданный, как и в подсистеме А</li> </ol>
<p>Подсистема В. Управление вектором тяги</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Конструкция двигателя включает в себя поворотные сопла (указанные веса соответствуют весам поворотных сопел боевого варианта ракеты).</li> <li>2. Полетного веса агрегат силового привода сопла.</li> <li>3. Вес топливного заряда заданный, как и в подсистеме А.</li> <li>4. При испытаниях двигателя должна быть предпринята попытка привести в действие силовой привод сопел.</li> <li>5. Предсказываемое время срабатывания не меньше указанного в техническом задании на текущую модель (если только не испытывается отсечка тяги)</li> </ol>

\* Характеристики, которые требуются для определения приемлемости ракетного двигателя, работающего на твердом топливе, при оценке его надежности на этапе разработки, могут быть указаны только в очень общих чертах. В процессе конструктивных разработок отправными источниками для составления четко определенного образа создаваемой конструкции служат критерии принципиальной схемы двигателя и режимы работы. В действительности разрабатываемый подобным образом двигатель имеет свое первое обоснованное и законченное определение в техническом задании на двигатель, составленном для предполетных оценочных испытаний. Но даже и в этом случае до завершения программы ППОИ характеристики внутренней баллистики с достаточной точностью оказываются неизвестными.

При испытаниях главные подсистемы, которые в принципе признаны приемлемыми, должны оцениваться с помощью следующих категорий: успех, отказ и исключение. Однако отдельные изделия и результаты их испытания могут быть исключены и перед испытаниями. Наиболее характерные основания для исключения изделий из испытаний перечислены ниже.

Испытанию подлежат все главные подсистемы (А, Б, В). Исключение до начала испытаний подлежит утверждению головным разработчиком или руководителем испытаний.

1. Главная подсистема не обладает необходимыми характеристиками приемлемости.

2. В зависимости от назначения или условий проведения испытания определенная подсистема может быть исключена из-за несоответствия параметров или характеристик при возникновении или из-за возможности возникновения неисправностей.

Например, если при проверке обнаруживаются такие раковины и трещины, которые наверняка приведут к неисправности, то подсистему топливный заряд — воспламенитель можно считать исключенной.

3. Если расчеты показывают, что характеристики внутренней баллистики выходят за пределы, установленные в техническом задании на текущую модель, а проведение испытаний работы двигателя утверждено, то эти характеристики исключаются. Перед официальной программой предполетных оценочных испытаний (ППОИ) это основное правило допускает максимум  $n$  исключений. Это основное правило запрещает делать исключения во время выполнения официальной программы ППОИ.

4. Условные исключения:

а) подсистема должна быть исключена, если происходит отказ экспериментальной детали, которая так и была обозначена в заявлении перед испытанием и впервые испытывается в натурном двигателе. Однако если подсистема выходит из строя из-за отказа какой-либо неуказанной в заявлении детали, то это будет классифицироваться как отказ;

б) подсистема должна быть исключена, если происходит отказ устаревшей детали, которая так и была обозначена в заявлении перед испытанием. Устаревшая де-

таль определяется как деталь, используемая в испытываемой конструкции в целях экономии, но для которой уже предусматривается значимое изменение или конструктивное изменение по надежности (см. п. 14.4.1) \*.

### 14.3.3. Правила подачи заявлений

Для выявления и обеспечения полноты данных необходимо определить назначение испытания и, применяя основные правила приемлемости, установить возможность использования результатов этого испытания для оценки надежности. Это осуществляется с помощью заявления определенной формы, которое должно быть составлено перед каждым испытанием натурального двигателя. Затем оно представляется руководителю программы на утверждение. Типичная форма заявления представлена в табл. 14.2. Необходимо заметить, что в заявлении об исключениях должны быть указаны причины отказов и приведены веские обоснования, а также ссылки на донесения об отказах, на отчеты о проверках, на указания о технических изменениях и т. д. Например, если деталь условно исключается из-за того, что она устарела, то в форме должен быть приведен номер указания о техническом изменении или номер новой детали и т. д. Руководитель программы может устанавливать возможное количество условных исключений.

Таблица 14.2

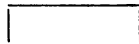
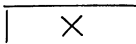
Форма заявления перед огневыми испытаниями

ЗАЯВЛЕНИЕ		
<p>А. Серийный номер двигателя <i>FWE-23</i>. Тип двигателя <i>II ступень XM-83</i>. Исп. стенд <i>G-8</i>. Номер испытания <i>3,5FS-12</i>. Дата испытания <i>4 янв. 196</i>—. Технич. задан. <i>SPR-4003</i>.</p>		
<p>Б. Какая из следующих главных подсистем приемлема для оценки надежности?</p>		
	Приемлема	Неприемлема
1. Топливный заряд-воспламенитель (А)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Внутренняя изоляция корпуса (бронировка) (Б)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

\* В заявлении перед испытанием должны быть указаны причины всех исключений.



## 3. Управление вектором тяги (В)



В. Причины неприемлемости какой-либо главной подсистемы:

*Внутренняя изоляция не соответствует типу двигателя, предназначенного для эксплуатации в летных условиях.*

Г. Какие части, элементы и т. д. отсутствуют в испытываемой конструкции; указать причины:

*Внешняя изоляция сопел*

Д. Какие технические характеристики должны быть исключены при оценке надежности (только испытания при разработке)? Указать причины: \_\_\_\_\_

Е. Какие элементы или детали объявлены экспериментальными или устаревшими (для условного исключения)?

*1. Сопловые вкладыши объявлены экспериментальными (новая деталь №3-157192; предыдущая деталь № 3-157087). Это первое испытание с целью определения, не приведет ли использование сплава к меньшей эрозии.*

*2. Сопла № 1, 2 объявлены устаревшими (прежняя деталь № 3-156863 используется вместо настоящей детали № 3-156921). Деталь № 3-156921 была введена как конструктивное изменение по надежности в испытании № 3,5FS-10. Использование старой детали может привести к избыточному моменту или к замедлению и остановке сопел. Старая деталь применена из-за отсутствия новых деталей во время сборки.*

Ж. Примечание. *Это шестые испытания при разработке, при которых используется топливо НКК.*

З. Программа испытаний сопла (число циклов, углы отклонения и период работы):

*шесть циклов по  $\pm 3^\circ$ , начинающихся на 5, 15, . . . , 65 сек попеременно с шестью циклами по  $\pm 6^\circ$  на 10, 20, . . . , 60 сек. начиная от нулевого времени*

Подписи и утверждения:

Руководство программой \_\_\_\_\_

Инженер-испытатель \_\_\_\_\_

Дата \_\_\_\_\_ Надежность \_\_\_\_\_

#### 14.3.4. Классификация результатов испытаний

Каждая главная подсистема будет классифицироваться как успешно прошедшая испытания или испытывавшая отказ в зависимости от ее работы в процессе эксплуатации, от того, совершился ли успешный полет или его постигла неудача. Исключения могут составить те случаи, когда по независящим от подсистемы (внешним по отношению к ней) причинам этой подсистеме вообще не будет предоставлена возможность пройти испытания (успешно или с отказом). Подробное описание основных правил классификации представлено в табл. 14.3.

Таблица 14.3

#### Основные правила классификации результатов испытаний

	Подсистема топливный заряд—воспламенитель (А)
Успех	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Подсистема А не выходит из строя и не исключается и все характеристики лежат в пределах, указанных в техническом задании на данную модель.</li><li>2. Подсистема безотказно работает в случае выхода значений ее характеристик за пределы, указанные в техническом задании, при условии, что это отмечено в заявлении и утверждено до испытания (см. стр. 559)</li></ol>
Отказ	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Воспламенитель не сработал вообще или не воспламенил топливный заряд.</li><li>2. Задержка воспламенителя больше максимальной величины, указанной в техническом задании.</li><li>3. Выброс давления (тяги) при воспламенении превышает значение установившегося давления в камере сгорания (тяги).</li><li>4. Неустойчивое горение, т. е. пики давления в камере сгорания (тяги) <math>\geq 10\%</math> от установившегося давления в камере сгорания.</li><li>5. Взрыв двигателя, который можно отнести за счет топлива или воспламенителя.</li><li>6. Значения характеристик лежат вне пределов, установленных техническим заданием на данную модель, хотя в заявлении говорится о том, что они не должны выходить за эти пределы</li></ol>

	Подсистема топливный заряд—воспламенитель (А)
Исключение после испытаний	<p>1. Испытания, при которых отказы происходят из-за внешних относительно подсистемы А причин, например из-за отказа другой главной подсистемы, ошибок оператора, неисправностей вспомогательных средств и аппаратуры, при условии, что отказ самой подсистемы А еще не произошел.</p> <p>2. Отказ подсистемы за счет отказа устаревшей или экспериментальной детали, что оговорено в заявлении перед испытанием.</p> <p>3. Испытания, при которых подсистема А не выходит из строя, но не имеет возможности удовлетворить заявленному назначению испытания</p>
	Подсистема внутренней изоляции (и бронировки) (Б)
Успех	1. Подсистема Б не выходит из строя и не исключается
Отказ	1. Прогар корпуса или донной крышки во время нормальной работы
Исключение после испытаний	<p>1. Испытания, которые приводят к отказу по не зависящим от подсистемы Б причинам, например из-за отказов других главных подсистем, ошибок оператора, неисправностей измерительных средств или аппаратуры, при условии, что отказ самой подсистемы Б до этого еще не произошел.</p> <p>2. Отказ подсистемы Б из-за отказа устаревшей или экспериментальной части, отмеченной в заявлении перед испытанием.</p> <p>3. Испытания, при которых подсистема Б не выходит из строя, но и не имеет при этом возможности удовлетворить объявленному назначению испытаний</p>
	Система управления вектором тяги (В)
Успех	1. Подсистема В не выходит из строя, не исключается и работает в соответствии с программой в течение всего времени испытания
Отказ	<p>1. Происходит заедание или заклинивание поворотных сопел или отклонение не соответствует заданному по программе.</p> <p>2. Наблюдается утечка газов или прогар в любой части узла поворота сопла.</p> <p>3. Неисправность силового привода</p>

	Подсистема топливный заряд—воспламенитель (А)
Исключение после испытаний	<p>1. Испытания, которые приводят к отказам по не зависящим от подсистемы В причинам, например из-за отказов других главных подсистем, ошибки оператора, неисправностей измерительных средств или аппаратуры, при условии, что отказ самой подсистемы В до этого еще не произошел.</p> <p>2. Отказ подсистемы В из-за отказа устаревшей или экспериментальной части, отмеченной в заявлении перед испытанием.</p> <p>3. Испытания, при которых подсистема В не выходит из строя, но и не имеет при этом возможности удовлетворить объявленному назначению испытаний</p>

**Примечание.** Можно потребовать, чтобы на разработчика была возложена ответственность за получение (и подтверждение) численного значения надежности. Чтобы не было противоречия со здравым смыслом, требования к численному значению надежности не должны включать: 1) оборудование, разработанное другими разработчиками-соисполнителями\*, которое испытывается вместе со всей системой двигателя; 2) промежуточные приспособления, ответственность за функционирование которых лежит на двух или более разработчиках-соисполнителях. Однако когда оборудование поставляется разработчику (по двигателю) через торговую организацию или от другого разработчика (завода-смежника) и не относится к категории 2, то это оборудование считается находящимся под ответственностью этого разработчика с точки зрения удовлетворения любых требований к численному значению надежности.

\* Разработчиком-соисполнителем является один из нескольких разработчиков, каждый из которых разрабатывает отдельную основную подсистему. Однако ни один из них не несет полной ответственности за всю систему вооружения.

#### 14.4. ОТЧЕТЫ О СОСТОЯНИИ НАДЕЖНОСТИ И ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ

Отчет о состоянии надежности (см. табл. 14.4) составляется сразу же после преобразования данных, полученных при испытании. Затем, используя основные правила и информацию, содержащуюся в форме заявления, сотрудники группы надежности разработчика оценивают данные. Это делается после любого испытания натурального двигателя для каждой главной подсистемы. В колонке замечаний должно помещаться краткое описание отказа или причина исключения подсистемы, если она подпадает под соответствующую категорию. Если происходит отказ, который не может быть отнесен за счет какой-нибудь определенной подсистемы, этот факт также должен быть обязательно отмечен. При необходимости

### Форма отчета о надежности

Дата испытания 4 янв. 196 г. Испытание № 3.5 ПП-12 Испыт. стенд G-8 Донесение об испытании № 36  
 Тип двигателя II ступень XM-83 Серийный номер двигателя FWE-23 Номер техн. задания на модель SPR-4003

Данные об испытании двигателя

Суммарный импульс, кг·сек \_\_\_\_\_ Задержка воспламенения, сек \_\_\_\_\_  
 Средняя тяга, кг \_\_\_\_\_ Выброс тяги при воспламенении, кг \_\_\_\_\_  
 Удельный импульс, кг·сек/кг \_\_\_\_\_ Полезный вес топлива, кг \_\_\_\_\_  
 Макс—мин (кривая тяги во времени), кг \_\_\_\_\_ Вес двигателя, кг \_\_\_\_\_  
 Скорость нарастания тяги, кг/сек \_\_\_\_\_ Коэффициент заполнения \_\_\_\_\_  
 Скорость убывания тяги, кг/сек \_\_\_\_\_ Температура сгорания, °C \_\_\_\_\_  
 Время работы, сек \_\_\_\_\_ Окружающие условия отн. влажность 60% \_\_\_\_\_  
 Среднее давление в камере сгорания, кг/см<sup>2</sup> \_\_\_\_\_ Топливный заряд подвергался температурованию \_\_\_\_\_

**Классификация результатов испытаний (заполняется сотрудниками группы надежности)**

Главная подсистема	Исключение		Отказ		Успех		Замечания
	перед испытанием	после испытания	характ. искл.	характ. не искл.	характ. искл.	Все характ. в норме	
А				Х			Задержка воспламенения вышла за пределы, указанные в ТЗ
Б	Х						См. форму заявления (табл. 14.2)
В						Х	Эрозия < 2%. Величина монтажа в допустимых пределах

Дополнительные замечания \_\_\_\_\_

Ответственный инженер \_\_\_\_\_ Отдел и группа \_\_\_\_\_ Дата \_\_\_\_\_

следует приводить также ссылки на донесения об отказах, на сообщения о корректирующих действиях и т. д. Отчеты о состоянии надежности, включающие информацию за определенный календарный месяц, могут быть подобраны в хронологическом порядке и обобщены так, как это показано в приведенном ниже примере. Затем, пользуясь методами п. 14.4.2, можно получать и ежемесячно передавать точечные оценки надежности и ее нижние доверительные пределы.

#### 14.4.1. Представительные и текущие данные

Поскольку обычно испытания для оценки надежности проводятся в небольшом количестве, каждая главная подсистема должна обязательно обладать высокой надежностью. Однако в начале программы может произойти сразу несколько отказов, в результате чего совокупная интенсивность отказов окажется настолько высокой (и не будет оснований не доверять этим данным), что потребуется чрезмерно большое число успешных испытаний, чтобы ее «поглотить». Это практически неосуществимо, и подобная обработка данных в ходе выполнения программы разработки, предназначенной для усовершенствования изготавливаемого изделия, оказывается совершенно нереальной.

Если бы эти отказы были случайными или происходили по неустановленным причинам, тогда было бы неразумно отбрасывать начальные данные, поскольку эти виды отказов характеризуют действительную надежность и по существу указывают на то, что подсистема недостаточно надежна. Однако начальные отказы обычно не случайны, т. е. они имеют легко объяснимые причины и в ходе программы разработки подлежат анализу и корректирующим действиям.

Это корректирующее действие, называемое *конструктивным изменением по надежности*, определяется как модификация с целью исключения ранее наблюдаемого отказа в натурном двигателе, которой должны подвергаться все последующие двигатели. Данные, полученные после конструктивного изменения по надежности, будут рассматриваться как однородные, а начальные данные отбрасываются как не являющиеся более представительными для существующей конструкции. Данные, получаемые после внесения конструктивных изменений по на-

дежности, называются *текущими данными*. Решение о том, что составляет конструктивное изменение по надежности, подлежит утверждению со стороны руководства программой и касается только той определенной подсистемы, которая подвергалась модификации. Кроме того, в ходе программы разработки могут производиться конструктивные изменения не обязательно с целью повышения надежности, а, например, для улучшения тактико-технических характеристик и уменьшения веса. Если эти изменения приводят к *значимым конструктивным изменениям* согласно взаимному соглашению между руководством программой и разработчиком, то данные, полученные после их внесения, будут также считаться текущими данными.

## 14.4.2. Оценка надежности двигателя

### 14.4.2.1. МЕТОДИКА ОЦЕНКИ

Надежность двигателя вычисляется по результатам испытаний главных подсистем. Как правило, по окончании каждого испытания возможна классификация главных подсистем на успешно прошедшие испытания (успех), вышедшие из строя (отказ) или подлежащие исключению из рассмотрения (исключение). Однако иногда происходят отказы всей системы, а вышедшую из строя подсистему (или подсистемы) обнаружить не удастся. Поэтому желательно иметь возможность производить точную и полную классификацию каждого испытания, а неопознанный отказ, являющийся как-никак отказом этой системы, должен обязательно учитываться при оценке ее надежности. В этом случае неопознанный отказ произвольно относят к главной подсистеме, испытавшей наибольшее число отказов в выборке, по которой оценивается надежность системы. Если последующий анализ позволит правильно определить неопознанный отказ, то оценки надежности должны быть пересчитаны.

Все оценки надежности двигателя, который ниже будет рассматриваться в качестве примера, основываются на текущих данных. Таким образом, приемлемые испытания должны подсчитываться для каждой главной подсистемы и только до последних конструктивных изменений по надежности или значимых конструктивных изменений. Итак, метод оценки надежности заключается



в следующем: определяется число приемлемых испытаний каждой главной подсистемы. Наименьшее из этих трех чисел ( $N$ ) характеризует количество проведенных эквивалентных испытаний двигателей. Для вычисления надежности двигателя требуется подсчитать число известных отказов, которые произошли при последних  $N$  испытаниях каждой подсистемы. Кроме того, те отказы, характер которых не был установлен и которые не были отнесены к какой-либо главной подсистеме, произвольно добавляются к одной из этих подсистем, выбираемой установленным выше порядком. В результате получается распределение отказов для заданного числа эквивалентных испытаний двигателей, которое может быть записано в виде  $(N; f_1, f_2, f_3)$ , где  $f_1, f_2, f_3$  — числа отказов отдельных подсистем, а  $f_1 + f_2 + f_3$  — общее число отказов (включая неопознанные отказы) за период проведения  $N$  эквивалентных испытаний двигателей. Минимальное значение надежности для  $(N; f_1, f_2, f_3)$ , например, при 90%-ном доверительном уровне может быть получено из рис. П.10.

#### 14.4.2.2. ПРИМЕР ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ

1. Этот пример иллюстрирует метод оценки надежности двигателя. Метод табулирования результатов, как это показано в табл. 14.5, признан достаточно удобным. Таблица представляет собой обычную сводку, в которой в хронологическом порядке приводятся признаки (или классификации) результатов испытаний, получаемые из донесений о надежности. В каждом испытании участвуют все главные подсистемы, но согласно основным правилам они могут быть приемлемы или неприемлемы для оценки надежности (см. табл. 14.1). Результатом испытания каждой из подсистем А, Б и В может быть успех (У), отказ (О) или исключение (в таблице обозначается пропуском).

2. В рассмотренном выше примере главной подсистемой, которая характеризуется наименьшим количеством приемлемых и неисключенных испытаний, является подсистема В с пятью испытаниями, т. е. можно считать, что испытывалось не больше пяти эквивалентных полностью снаряженных двигателей. Отсчитывая от испытания 9 по 5 последних испытаний каждой главной подсистемы, находим, что подсистема А присутствовала и

Таблица 14.5

Номер испытания (в хронологическом порядке)	Номер донесения о надежности	Дата испытания	Результаты		
			А	Б	В
1			У		
2				О	
3			У		У*
4			О	У*	
5			У*	У*	О*
6			У*		
7			У*	У*	У*
8			У*	У*	О*
9			У*	У*	У*

Подсистема	Общее число испытаний	Общее число отказов	Число отказов в 5 последних испытаниях [см. 14.4.2 (2)]
А	8	1	0
Б	6	1	0
В	5	2	2

**Номер  
испытания**
**Пояснения к таблице**

- |   |  |
|---|--|
| 1 | Подсистема А приемлема. Успех. Б и В исключены             |
| 2 | Подсистема Б приемлема. Отказ. А и В исключены             |
| 3 | Подсистемы А и В приемлемы. Успех. Б исключена             |
| 4 | Подсистемы А и Б приемлемы. А—отказ, Б—успех, В исключена  |
| 5 | Подсистемы А и Б—успех, В—отказ                            |
| 6 | Подсистемы А—успех, Б и В исключены                        |
| 7 | Все подсистемы—успех                                       |
| 8 | Все подсистемы приемлемы, а отказ произошел в подсистеме В |
| 9 | Все подсистемы А, Б и В—успех                              |

была приемлема в испытаниях 9, 8, 7, 6 и 5; подсистема Б — в испытаниях 9, 8, 7, 5 и 4; подсистема В — в испытаниях 9, 8, 7, 5 и 3. Таким образом, при получении оценки надежности двигателя для каждой из подсистем должны использоваться только вышеупомянутые испытания, т. е. только те результаты из таблицы, которые отмечены звездочками. За период испытаний этих пяти эквивалентных полностью снаряженных двигателей подсистема А не имела отказов, подсистема Б тоже не имела отказов, а подсистема В имела два отказа (испытания 5 и 8).

3. Итак, используя обозначения из раздела 14.4.2.1, информацию о надежности можно записать в виде 5; 0, 0, 2. Это говорит о том, что количество испытанных двигателей эквивалентно пяти полностью снаряженным двигателям и что при последних пяти испытаниях подсистемы А и Б отказов не имели, а в подсистеме В произошло два отказа.

В этом случае 90%-ный доверительный предел для надежности, полученный из рис. П.10, равен 24,7%.

Точечная оценка надежности получается непосредственно с помощью правила перемножения, т. е.

$$\frac{(5-0)(5-0)(5-2)}{5^3} = \frac{3}{5} = 60\%$$

#### 14.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В главе показано, как можно оценить надежность ракетного двигателя, работающего на твердом топливе, по результатам испытаний в процессе технической разработки, не ограничивая исследовательскую сущность этих испытаний. Эти оценки могут быть получены, даже если окончательный вариант исследуемой конструкции или оборудования еще полностью не отработан.

Основные понятия и подход к решению частной задачи, рассмотренной в этой главе, можно использовать при исследовании различных систем в тех случаях, когда наблюдаются следующие обстоятельства:

1) требуется оценить надежность системы относительно ее окончательного использования;

2) система находится в состоянии непрерывной разработки с целью получения окончательного варианта конструкции;

3) задачи испытаний меняются по ходу разработки системы, а специальные испытания для оценки надежности либо вообще не проводятся, либо проводятся в небольшом количестве;

4) для испытаний выделяется ограниченное количество систем и система может испытываться ограниченное число раз (возможно, даже только один раз);

5) надежность оценивается с помощью только качественных признаков (успех—отказ).

## ГЛАВА 15

# ПРОГРАММА ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ТУРБОГЕНЕРАТОРНОГО УСТРОЙСТВА

### 15.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Ранее накопленный опыт показал, что рассматриваемое турбогенераторное оборудование обладало довольно высокой надежностью. Однако с ним конкурировало электрохимическое оборудование различного типа, которое имело даже более высокую надежность, но не являлось полностью удовлетворительным с точки зрения веса. Было решено, что, если при определенном ограниченном объеме работ турбогенераторную систему изготовят более надежной и она сможет подтвердить определенную заданную надежность, ее можно будет использовать вместо существующего оборудования.

Для достижения этой цели требовалось решить следующие проблемы:

1. Получить достоверные данные о надежности в ходе выполнения программы, когда цели испытаний сильно изменяются, а образ и конструкция испытываемого изделия меняются незначительно.

2. Как можно раньше подтвердить, что требования по надежности удовлетворяются, и, кроме того, установить статистический управляющий метод, согласованный с этим методом подтверждения.

### 15.2. УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ И ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА

Если выборочная конфигурация хорошо определена, то считается, что для оценки надежности изделия можно использовать все испытания при разработке за исключением лишь тех определенных испытаний, которые

проводятся с целью исследования влияния граничных и крайне чрезвычайных условий на тактико-технические характеристики этого изделия. Для контроля полноты данных перед каждым испытанием заполняется специальная форма заявления. В этом заявлении устанавливается пригодность результатов данного испытания в интересах исследования надежности. Кроме того, в нем содержится основная информация, касающаяся испытания и самого изделия, а именно: дата, серийный номер изделия, условия проведения испытания (включаются использование экспериментального оборудования, проведение определенных мероприятий и окружающие условия).

Под успехом подразумевалась способность этого изделия работать на всех режимах, указанных в техническом задании, в течение времени и при условиях, заданных потребителем, а отказ характеризовался как неспособность успешно работать при этих условиях. Исключения составляли те испытания, которые в специальном заявлении были признаны неприемлемыми, и те, при которых происходил отказ изделия (или не давалось возможности успешно работать) по независящим от него (*внешним по отношению к нему*) причинам. Результаты таких испытаний классифицировались как *исключения* и при оценке надежности не учитывались.

Условия проведения испытаний кроме оговоренных в форме заявления считались достаточно представительными для условий эксплуатации этого устройства потребителем. Это также относилось и к наработке при каждом испытании, которую всегда желательно иметь равной заданной наработке.

Предшествующий опыт начальных испытаний показал, что модель отказов не описывалась никаким простым статистическим распределением наработки на отказ. Было известно также, что каждое устройство должно пройти большое число испытаний, прежде чем возникнут отказы за счет изнашивания. Поэтому каждое испытание рассматривалось как независимое при условии, что оборудование не «накопило» слишком много испытаний. Следовательно, для оценки надежности смогли быть использованы обычные методы биномиальной выборки (§ 10.5). Оборудование, используемое в программе оценки надежности, подвергалось определен-

ному числу испытаний, но не большому. То оборудование, которое подвергалось большому числу испытаний и все еще продолжало испытываться, автоматически исключалось из программы оценки или подтверждения надежности, но при этом оно служило для обеспечения информации об изнашивании и технической информации вообще.

### 15.3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСПЫТАНИЙ

Испытания производились таким образом, что их результаты поступали последовательно и поэтому был выбран последовательный выборочный план. Поскольку требования к надежности установлены весьма высокие, ожидалось, что на испытание уйдет целый год (около 2 500 испытаний, чтобы повысить надежность по сравнению с ее существующим уровнем и подтвердить удовлетворение требований).

По двум причинам считалось также необходимым изменить обычный последовательный план (§ 10.4): 1) ожидалось, что будет происходить и будет проверяться только повышение надежности и 2) поскольку совокупность была неоднородна, потребовался метод исключения данных о начальных и высоких интенсивностях отказов. Эти две проблемы были решены: 1) превращением обычного двустороннего последовательного выборочного плана в односторонний и 2) включением в методику критерия значимости с целью определения вероятности расхождения интенсивностей отказов для двух групп данных. Два этих метода заслуживают того, чтобы их исследовали более подробно.

Последовательный выборочный план имеет преимущество перед выборочным планом с фиксированным объемом выборки не только благодаря соответствию способа получения данных, но и за счет необходимости проведения в среднем меньшего количества испытаний для подтверждения определенной надежности с заданной вероятностью.

Последовательный план обычно включает линию приемки и критическую линию (линию отбраковки); однако в настоящем примере критическая линия отбраковки была не обязательна. В данном случае возможность неприятия исключалась, так как если бы оборудование

не смогло пройти границу приемки, это лишь активизировало бы деятельность при разработке, а изготовить какое-либо третье устройство, которое могло бы соперничать по свойствам, в имевшееся время представлялось невозможным.

К тому же желательно было получить возможно больше данных об устройстве, поскольку были основания полагать, что его можно использовать в космических системах, где вопрос выигрыша в весе имеет решающее значение. Главный риск для существующей системы вооружения состоял в возможности приемки устройства с меньшей, чем это требовалось, надежностью. Это означало, что вероятность ( $\beta$ ) приемки устройства с надежностью, равной установленному минимуму или меньшей его, должна быть невелика, скажем 5%. В результате был выбран последовательный биномиальный план с использованием только границы приемки. Математическая сторона этого вопроса рассмотрена в приложении 15А.

Другое важное заключение состоит в том, что метод периодических сообщений о промежуточных оценках надежности должен быть согласован с подтверждением окончательных требований. Этот вопрос был решен путем создания семейства линий точно таким же образом, как была получена линия приемки. Подробности метода расчета кривых описываются в приложении 15А. Способ использования этого семейства линий для периодических сообщений описывается в п. 15.4.3. Любое значение надежности, полученное таким путем, должно было рассматриваться в качестве «индекса», который больше имел значение как мера сравнения с конечными требованиями выборки, а не как абсолютная оценка.

Это второе положение, касающееся проверки изменения интенсивности отказов, имеет также большое значение. Обычно при статистических проверках с целью усовершенствования или изменения выходных характеристик изделия мы берем две или более серии однородных данных и сравниваем средние, используя стандартные статистические проверки, такие, как  $t$ -проверка или  $F$ -проверка (допуская нормальное распределение). Делая это, мы в действительности проверяем расхождение между изделиями, представленными в виде этих данных, тогда как в нашем настоящем положении проверяем рас-



хождения между группами данных, которые характеризуют накопление изменений в изделии через определенные промежутки времени. Строго говоря, с точки зрения статистики мы должны прежде, чем объединять данные, проверить устройство при каждом изменении; однако, имея ограниченные данные о каком-либо устройстве, невозможно делать различия между отдельными изменениями, и поэтому мы выдвигаем нулевую гипотезу: *неизменной остается* (до тех пор, пока данные не покажут обратное) *надежность изделия, а не само изделие*. В буквальном смысле мы высказываем уверенность в инженере-конструкторе и, полагаясь на его опыт, утверждаем, что, несмотря на небольшие изменения в конструкции, никакого уменьшения надежности не ожидается. Мы вынуждены так поступить, поскольку в сложной системе каждое испытание или испытываемая система отличаются друг от друга и можно утверждать по-разному в зависимости от строгости критериев различия. Однако если в изделии происходит основное изменение, то надежность существенно нового изделия должна быть подтверждена отдельно. Разница между основным и неосновным (небольшим) изменениями часто оказывается неясной, хотя, если изменение, вначале считавшееся неосновным, сильно скажется на надежности, это обнаружится с помощью статистических методов, которые рассматриваются в п. 15.4.1. Данные, полученные до момента внесения изменения, статистически значимого для надежности, можно рассматривать как не являющиеся более представительными для текущей конфигурации. Все же данные после момента значительного изменения считаются «текущими данными».

Это необходимо, так как использование обычного последовательного анализа в программе разработки может привести к тому, что более низкая надежность, выявленная по результатам начальных испытаний, покажет, что оборудование вообще неудовлетворительно, т. е. удовлетворение критерия приемки окажется совершенно невероятным.

Программа разработки предназначается для усовершенствования несоответствующего определенным требованиям оборудования. Но ожидаемые и более многочисленные начальные отказы могут привести к такой высокой интенсивности отказов, что, если не будет обеспече-

но исключение самых ранних данных, мы не сможем компенсировать начальную интенсивность отказов, которая по ходу развития программы разработок становится все менее и менее представительной.

Для компенсации низкой надежности изделий, испытываемых до  $n_1$ -го опыта, (а) в последующих  $n_2$  опытах должно участвовать изделие со значительно большей надежностью, чем это требуется вообще, или (б) для

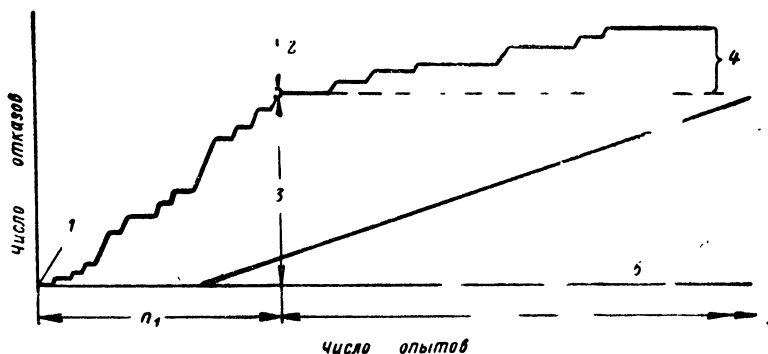


Рис. 15.1. Влияние непредставительных данных:

1 — начало испытаний; 2 — значимое изменение интенсивности отказов; 3 — следствие высокой начальной интенсивности отказов; 4 — улучшение за счет более низкой интенсивности отказов; 5 — если начальные данные не исключить, потребуется очень большое количество испытаний, прежде чем график пересечет линию приемки.

пересечения линии приемки требуется иметь значительно больше опытов с удовлетворительной надежностью, чем это действительно необходимо. Таким образом, в общих случаях использовать непредставительные данные оказывается слишком невыгодно (рис. 15.1).

Методика определения текущих данных с помощью конструктивных изменений по надежности (см. п. 14.4.1) считается неподходящей, так как при уже существующем высоком уровне надежности модификации могут представлять собой только неосновные изменения конструкций. Кроме того, сами испытания и их число выбираются довольно-таки произвольно, так что найденные значения изменяются, поскольку интенсивности отказов зависят от выбранной совокупности данных.

#### 15.4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ\*

По мере получения результаты в хронологическом порядке наносились на график, как обычно при последовательном анализе, в виде зависимости числа отказов от числа опытов.

Типичные графики представлены на рис. 15.1—15.5. Данные пересматриваются ежемесячно.

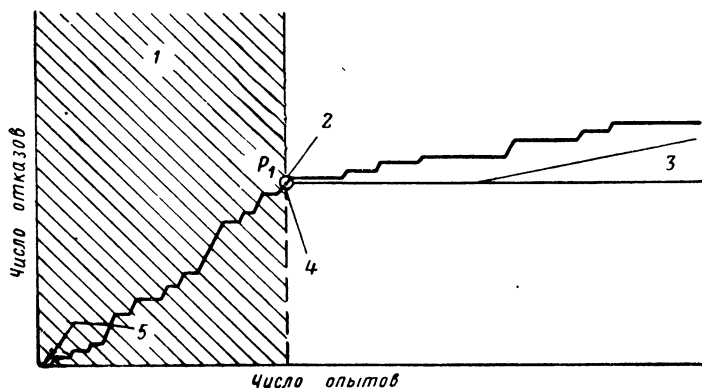


Рис. 15.2. Изменение интенсивностей отказов и отбрасывание (исключение) данных:

- 1 — данные отбрасываются; 2 — новое начало текущих данных; 3 — линия приемки; 4 — значимое изменение интенсивности отказов в совокупности; 5 — начало испытаний по программе исследования надежности.

Сначала производилась проверка того, все ли данные за месяц или только их часть являлись однородными относительно существующих текущих данных. Если это так, они объединялись и добавлялись к существующим текущим данным. Если же было обнаружено значительное изменение интенсивности отказов, устанавливался точный опыт, при котором (со «статистической» точки зрения) произошло изменение, и он рассматривался как новое начало текущих данных (рис. 15.2). Рассмотрим методы нахождения нового начала.

\* Значения надежности, используемые в настоящем параграфе, невелики по сравнению с теми, которые требовались в предыдущих разделах главы, так как они были специально подобраны для простоты и наглядности графического и расчетного материала.

### 15.4.1. Статистический критерий значимости изменения (см. приложение 15Б)

Предположим, что у нас имеется график данных, подобный приведенному на рис. 15.3. При проверке оказалось, что точка  $P$  соответствует моменту начала изменения интенсивности отказов. Требуется проверить значимость расхождения между соответствующими истинными

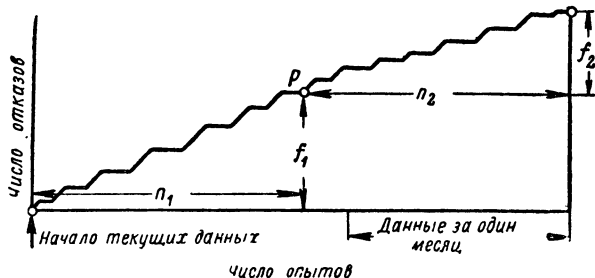


Рис. 15.3. Проверка изменения интенсивности отказов.

интенсивностями отказов в совокупностях, образованных делящей точкой  $P$ . Пусть между началом текущих данных и  $P$  имеется  $f_1$  отказов в  $n_1$  опытах и  $f_2$  отказов в  $n_2$  опытах между точкой  $P$  и последними данными. Если  $h_1 = \frac{f_1}{n_1}$  и  $h_2 = \frac{f_2}{n_2}$  (выбираем при необходимости  $h_1$  и  $h_2$  так, чтобы  $h_1 > h_2$ ), проверка производится вычислением вероятности  $P(h_1, h_2)$  расхождения, равного или большего, чем  $|h_1 - h_2|$ , т. е.

$$P(h_1, h_2) = 2 \sum_{r=f_1}^{n_1} \binom{n_1}{r} \binom{n_2}{f_1 + f_2 - r} / \binom{n_1 + n_2}{f_1 + f_2}.$$

Если эта величина меньше  $\alpha = 5\%$ , или  $1\%$ , или любого другого заданного уровня значимости, мы знаем, что между интенсивностями отказов начальной и конечной совокупностей происходит значимое изменение. Очевидно, может существовать несколько точек  $P$ , каждая из которых делит данные на две группы, представляющие совокупности с значительно различающимися интенсив-

ностями отказов. Теперь мы произвольно определяем начало (0) новых текущих данных (самую «свежую» точку  $P$ , т. е. крайнюю справа на рис. 15.3) так, чтобы  $P(h_1, h_2) < \alpha$ .

#### 15.4.1.1. ПРИМЕР

Сначала исследовалась точка  $P_1$  для того, чтобы убедиться, не представляет ли она точку изменения. В этой точке две наблюдаемые интенсивности отказов между  $O$  и  $N$  равны соответственно  $\frac{43}{92}$  и  $\frac{13}{59}$ . Вероятность получения этого или еще худшего расхождения равна 0,00335, что имеет высокую значимость (при работе с риском

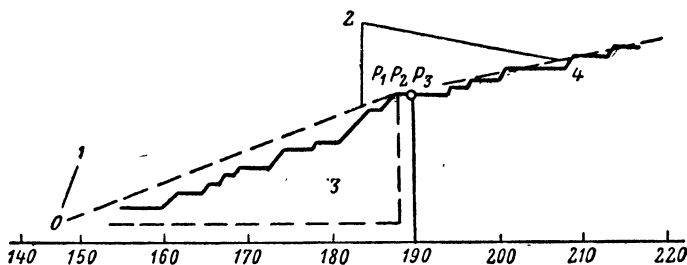


Рис. 15.4. Проверка значимости изменений в точке  $P_1$ :

1 — начало предыдущего значимого изменения интенсивности отказов; 2 — разница наклонов характеризует расхождение интенсивностей отказов; 3 — 43 отказа, 92 опыта со времени изменения интенсивности отказов в предшествующей совокупности; 4 — 13 отказов; 59 опытов от  $P_1$  до конца отчетного периода  $N$ .

$\alpha = 1\%$ ). Ясно, что это не крайняя точка, и поэтому исследуется  $P_3$ . Наблюдаемые интенсивности отказов равны  $\frac{43}{98}$  и  $\frac{13}{53}$ . Соответствующая вероятность равна 0,02815, что не имеет значимости при уровне в  $1\%$ . Таким образом, самое последнее изменение лежит в пределах от  $P_1$  до  $P_3$ . (Из рис. 15.4 видно, что точки значимого изменения не должны лежать справа от  $P_3$ , поскольку наблюдаемые интенсивности отказов становятся более близкими.) Вероятность в точке  $P_2$  (т. е.  $\frac{43}{95}$ ,  $\frac{13}{56}$ ) равна 0,01013, т. е. не имеет значимости; а путем вычислений было найдено, что самое последнее изменение

интенсивности отказов в этой совокупности соответствует 190-му опыту, на один опыт раньше  $P_2$ . Если изменение не обнаруживается, данные необходимо рассматривать как однородные. Через определенные периоды после добавления новых данных с помощью рассмотренной выше проверки определяются самые последние изменения. Часто случается, что в одном периоде намечается какая-то тенденция, но при этом нет достаточного количества данных и выявить изменение можно будет только после поступления новых данных. Возможно, но очень редко, обнаружение двух или более изменений за один период; в этих случаях изменение интенсивности отказов должно быть очень велико.

Необходимо сделать предостережение: проверять изменение интенсивности отказов следует ограниченное число раз; если проверку производить после каждого испытания, на уровне значимости статистической проверки будет сказываться повторная выборка. Однако если мы будем использовать проверку значимости с редкими интервалами, т. е. ограниченное число раз, то это не будет чрезмерно сказываться на уровне значимости. Точное статистическое решение этого вопроса неизвестно, однако считают, что ценность возможности определения точки для начала отсчета неизмеримо выше небольших статистических погрешностей.

#### 15.4.2. Подтверждение надежности

Определив, какая часть данных представляет собой однородные текущие данные, необходимо установить соответствующий критерий, чтобы решать, когда они будут характеризовать достаточную надежность. Односторонний последовательный приемочный план позволяет выполнить это требование. Начало последовательного плана помещается в начало текущих данных, и, когда график данных пересечет линию приемки, говорят, что прибор подтвердил требования к численному значению надежности. Могут существовать некоторые дополнительные требования (при испытаниях на воздействие окружающей среды и т. д.), которые задаются в виде определенных соотношений в текущих данных. Если эти дополнительные требования не были удовлетворены, то испытания продолжаются в условиях воздействия окру-

жающей среды до тех пор, пока требующиеся соотношения не будут удовлетворены. Уравнения (15A.2) и (15A.3) определяют зависимость положения линий приемки от требований надежности.

### 15.4.3. Сообщения о надежности

При составлении отчетов о состоянии надежности используется та же мера, которая служит для подтверждения надежности при приемке. Удобно пользоваться прозрачным планшетом с нанесенным на него семейством прямых, описываемых уравнениями 15A.1 и 15A.2

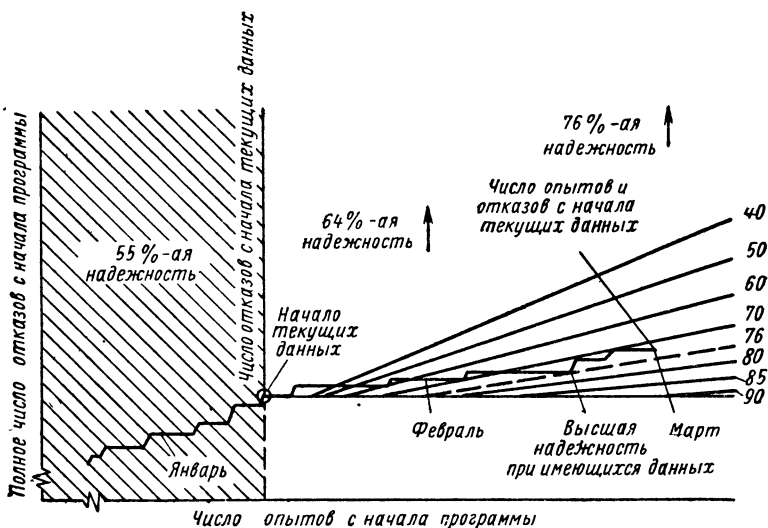


Рис. 15.5. Использование семейства линий для отчета.

и соответствующих последовательности промежуточных значений надежности и тому же доверительному уровню, который использовался для определения линии приемки. Начало планшета помещается в начало самых поздних текущих данных; тогда линия, соответствующая наибольшему значению надежности для этого графика данных (при необходимости линия определяется с помощью интерполяции), определяет ту надежность, которая представляется для отчета. Так, например, согласно рис. 15.5 сообщается надежность, равная 76% с вероят-

ностью в 90%. Мы не сообщаем какое-либо меньшее значение надежности, пока не произойдет изменение в совокупности. Причина этого заключается в «примирении» основной идеи последовательного анализа с настоящей методикой, поскольку при стандартной последовательной проверке мы бы прекратили выборку при пересечении линии надежности в 76%, имея заданное конечное значение надежности, равное 76%. Таким образом, при этом испытании изделие было бы принято. Обычно надежность возрастает так, что график стремится изогнуться к оси абсцисс. Это семейство линий используется для проверок в конце каждого отчетного периода.

### 15.5. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе было показано, как при необходимости можно видоизменить и применить существующие общие статистические методы для того, чтобы обеспечить правильную оценку надежности при решении частных задач. Использованный в данном примере последовательный биномиальный выборочный план с таким же успехом мог быть основан на показательном (см. § 10.9), нормальном или других распределениях \*, если бы имелось достаточно оснований считать, что одно из этих распределений описывает кривую отказов оборудования. В случае показательного распределения наработки до отказа (как это часто допускается в электронике) границы приемки и семейство прямых могут быть получены методом, аналогичным указанному в приложении 15А. По осям ординат и абсцисс должны откладываться соответственно долговечность невосстанавливаемого элемента и отказы (см. § 10.9). Подробности здесь не приводятся.

### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. P. Miller. Table of binomial coefficients. Cambridge University Press, 1954.

2. A. Hald. Statistical tables and formulas. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952.

---

\* Последовательные выборочные планы, основанные на нормальном распределении, описываются в книге А. Вальда «Последовательный анализ». Физматгиз, 1960. (Прим. перев.)



3. А. Хальд. Математическая статистика с техническими приложениями. Изд-во иностранной литературы, 1956.

4. Tables of the cumulative binomial probability distribution. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1953.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Fairfield J. H. A rapid method of comparing two percentages. Industrial Quality Control, 1959, v. 16, 5, November, p. 20—21.

Page E. S. On problems in which a change in a parameter occurs at an unknown point. Biometrika, 1957, v. 44, pt. I and II, p. 248—252.

Ruther F. J. Reliability via the component part. Military Electronics, 1958, v. 5, 2, August, p. 12—15.

### Приложение 15А

#### Линии односторонней выборочной приемки и отчетности при оценке надежности

В обычных последовательных биномиальных выборочных планах имеются как линии приемки, так и критические линии (см. § 10.4). Но поскольку наша цель состоит в том, чтобы избежать решения об отбраковке, желательно составить план без критической границы, т. е. с одной лишь границей приемки, как это показано на рис. 15А.1. Это можно сделать с помощью уравнений из § 10.4, в которых «риск производителя»  $\alpha$  устанавливается равным нулю. Подробности здесь не приводятся, однако их можно найти в соответствующей литературе\*.

Ниже описаны свойства полученного плана.

При  $p \leq s$  функция  $L(p)$  становится равной единице, а при  $p > s$  она связана с  $p$  следующим соотношением:

$$p = \frac{[L(p)]^{-\frac{s}{h}} - 1}{[L(p)]^{-\frac{1}{h}} - 1}, \quad (15A.1)$$

где  $h$  — координата точки пересечения линии приемки и оси отказов, а  $s$  — наклон линии приемки.

---

\* Statistical research group. Columbia University, Report № SRG, p. 255.

Sequential analysis of statistical data: applications. Columbia University Press, New York, 1945, Secs. B. 0933, B. 0935.

Итак, вероятность принятия решения (только приемки) равна единице при  $p \leq s$ . Однако при  $p > s$  существует определенная вероятность непринятия решения вообще. Из технических условий, точнее, из требования подтвердить надежность  $\hat{R}_L \equiv 1 - p^*$  с вероятностью  $\gamma \equiv 1 - \beta$ , может быть получено соотношение для определения двух констант  $s$  и  $h$ . Из уравнения 15А.1

$$p^* = \frac{\beta \frac{s}{h} - 1}{\beta \frac{1}{h} - 1}. \quad (15A.2)$$

Например, в качестве критерия приемки может оказаться требование подтвердить 98%-ную надежность с вероятностью, равной 95%. Тогда  $p^* = 0,020$  и  $\beta = 0,05$ .

Чтобы однозначно определить  $s$  и  $h$ , необходимо найти еще одну зависимость между ними. Существует несколько способов получения этой зависимости. Один из них, которому в действительности следуют при осуществлении программы исследования надежности, описывается в гл. 15. Его суть заключается в том, чтобы установить, что при  $p = p^*$ , заказчик должен пойти на определенный риск  $\Delta\beta$ , состоящий в том, что прибор рассматривается как удовлетворяющий требованиям надежности после проведения серии последовательных успешных опытов. Тогда, второе выражение будет иметь вид

$$\Delta\beta = (1 - p^*) \frac{h}{s} \quad (15A.3)$$

[поскольку  $\frac{h}{s}$  — число опытов к первому моменту принятия решения о приемке (см. рис. 15А.1)]. Произвольно было принято, что  $\Delta\beta$  приблизительно равно около  $\frac{1}{4}$  полного риска при приемке, когда  $p = p^*$ , т. е.  $\beta/4$ .

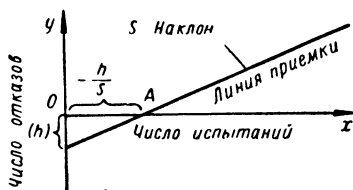


Рис. 15А.1. План только с линией приемки.

Теперь для определения границы приемки можно решить два уравнения (15А.2) и (15А.3), подставив  $p^* = 0,02$ ,  $\beta = 0,05$  и  $\Delta\beta = 0,0125$ . Более того, тем же путем можно построить семейство прямых, выбирая последовательность промежуточных значений  $p^*$ . В табл. 15А приводятся отрезки на оси опытов  $\left(-\frac{h}{s}\right)$  и наклоны ( $s$ ) семейства этих прямых, соответствующие различным значениям  $p^*$ .

Таблица 15А

**Значения констант для построения семейства прямых**

Интенсивность отказов, $p^*$	0,40	0,30	0,20	0,15	0,10	0,05	0,02
Надежность, %	60	70	80	85	90	95	98
Отрезок на оси опытов $-\frac{h}{s}$	8,58	12,29	19,64	26,96	41,59	85,43	216,90
Наклон, $s$	0,2615	0,1909	0,1241	0,0920	0,0607	0,0300	0,01192

*Приложение 15Б*

**Метод расчета изменения интенсивности отказов**

Формула для вычисления вероятности того, что наблюдаемое расхождение интенсивностей отказов в двух группах опытов указывает на значительное изменение интенсивности отказов в совокупности, приведена в п. 15.4.1. Для удобства она приводится здесь вновь\*:

$$P(h_1, h_2) = 2 \sum_{r=f_1}^{n_1} \binom{n_1}{r} \binom{n_2}{f_1+f_2-r} / \binom{n_1+n_2}{f_1+f_2}. \quad (15Б.1)$$

Вероятность  $P(h_1, h_2)$  может быть вычислена непосредственно с помощью таблиц биномиальных коэффициентов [1], или таблиц логарифмов биномиальных коэффициентов ([2], табл. XIV), или, если потребуется,

\* Так как  $\binom{n_2}{f_1+f_2-r} \equiv 0$  при  $r > f_1+f_2$ , верхний предел суммы можно записать в виде  $\min(n_1, f_1+f_2)$ .

с помощью таблиц логарифмов факториалов ([2] табл. XIII), которые определяют биномиальные коэффициенты в формуле (15Б.1). Методы аппроксимации вероятности  $P(h_1, h_2)$  рассматриваются также в работе ([3], стр. 705—711).

В настоящем приложении приводится пример точного расчета  $P(h_1, h_2)$ , в котором используются таблицы биномиальной функции распределения [4]. Чтобы пользоваться этими таблицами, сначала умножаем и делим члены уравнения 15Б.1 на  $p$  и  $1-p$  с соответствующими показателями степени

$$P(h_1, h_2) = \frac{2 \sum_{r=f_1}^{n_1} \binom{n_1}{r} p^r (1-p)^{n_1-r} \binom{n_2}{f_1+f_2-r} p^{f_1+f_2-r} (1-p)^{n_2-(f_1+f_2-r)}}{\binom{n_1+n_2}{f_1+f_2} p^{f_1+f_2} (1-p)^{n_1+n_2-f_1-f_2}} \quad (15Б.2)$$

Причина заключается в том, что таблицы в работе [4] дают возможность рассчитать члены вида

$$\begin{aligned} & \binom{n_2}{f_1+f_2-r} p^{f_1+f_2-r} (1-p)^{n_2-f_1-f_2+r} = \\ & = B(n_2, p; f_1+f_2-r) - B(n_2, p; f_1+f_2-r+1) \end{aligned}$$

просто путем подстановки расхождений в эти таблицы

$$B(n, p; x) \equiv \sum_{j=x}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}. \text{ При пользовании эти-}$$

ми таблицами необходимо сначала выбрать некоторое фиксированное значение  $p$ . Обычно лучше всего использовать выражение

$$p \approx \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2},$$

так как при этом знаменатель в уравнении (15Б.2) будет близок к максимуму, а значит, будет обеспечено наличие максимального количества значащих цифр. Прекрасной иллюстрацией этой методики служит числовой пример, схема вычислений для которого приведена в табл. 15Б.1.

Вычисление  $P(h_1, h_2)$ 

$$(h_1 = \frac{11}{24}, h_2 = \frac{14}{60}, p = \frac{25}{84} \approx 0,30)$$

$r$	$B(24; 0,30; r)$	$\Delta_r(2) = \binom{24}{r} (0,30)^r (0,50)^{24-r}$	$B(60; 0,30, 26-r)$	$-\Delta_r(4) = \binom{60}{25-r} (0,30^{25-r}) \times (0,70)^{60-(25-r)}$	$(3) \times (5)$
(1)	(2)	(3)*	(4)	(5)*	(6)
11	0,07424	0,04285	0,83789	0,06215	0,002663
12	0,03139	0,01989	0,90004	0,04319	0,000859
13	0,01150	0,00787	0,94323	0,02729	0,000215
14	0,00363	0,00265	0,97052	0,01560	0,000041
15	0,00098	0,00075	0,98612	0,00801	0,000006
16	0,00023		0,99413		
					$\epsilon = 0,003784$

$$\binom{84}{25} (0,30)^{25} (0,70)^{59} = B(84; 0,30; 25) - B(84; 0,30; 26) = 0,55998 - 0,46524 = 0,09474$$

$$P(h_1, h_2) = \frac{2 \times (0,003784)}{0,09474} = 0,0799 \approx 8\% \text{ (не имеет значимости при 5\%-ном уровне)}$$

\*  $\Delta_r(j)$  — содержимое ряда  $r$ , колонка  $j$ , минус содержимое ряда  $r+1$ , колонка  $j$ .

## ГЛАВА 16

# ПРОГРАММА ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ МОЩНОГО ЖИДКОСТНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА ЭТАПЕ КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРАБОТКИ

### 16.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Цель этой программы состоит в измерении надежности мощного жидкостного ракетного двигателя за время его превращения из опытного образца в двигатель, пригодный для использования в эксплуатации (для серийного производства).

Двигатель предназначен для работы в очень жестких условиях, и поэтому, несмотря на то, что большая часть проверок может проводиться при испытаниях отдельных его составных частей, основную долю работ и окончательную доводку следует проводить при испытаниях двигательных систем в целом. Это означает, что конструкция системы (или ее статистический образ) постоянно изменяется и что во многих испытаниях участвуют системы, содержащие экспериментальное оборудование или работающие на нестандартных экспериментальных режимах.

Следующая проблема состоит в том, что при высокой стоимости используемого топлива или при наличии ограниченных емкостей топливных баков испытательных средств большая часть огневых испытаний проводится при неполной продолжительности работы ракетных двигателей.

Основными задачами исследования являются:

1. Установление связи между техническими характеристиками двигателя на этапе опытно-конструкторских разработок и эксплуатационными требованиями.

2. Получение достоверных данных о надежности без ограничения исследовательской сущности технических испытаний.

3. Получение достоверных оценок надежности на основании результатов испытаний с учетом того, что время работы некоторых из них отличается от времени работы при эксплуатации.

## 16.2. ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМ

Подход к решению задач, перечисленных в л. 1 и 2 предыдущего параграфа, в основном тот же, что и при решении аналогичных проблем для ракетного двигателя на твердом топливе, описанных в гл. 14. Это означает, что в качестве критерия при интерпретации требований к системе вооружения исходя из требований к двигателю используется техническое задание на модель двигателя. Эти пределы получаются при моделировании условий полета для различных систем ракеты на электронной вычислительной машине. Таким образом, работа двигателя определяется как успех только в том случае, когда это приводит к успешному полету ракеты; если же в результате работы двигателя полет окажется неудачным, т. е. ракета упадет в район, удаленный от цели на расстояние больше заданного, то результат испытания двигателя рассматривается как отказ (если это испытание не должно быть исключено). Основные правила классификации огневых испытаний приведены на стр. 593—595.

### 16.2.1. Основные правила надежности

Было принято, что в интересах исследования надежности может быть использовано большинство результатов испытаний при разработке. Исключения могли бы составить испытания с преднамеренными внесениями (вводом) неисправностей, испытания до отказа, испытания пределов безопасности и первые проверочные или калибровочные испытания и т. д. или испытания с временем работы менее 10 сек. Во всех случаях назначения подобных испытаний должны быть предварительно указаны в специальном заявлении перед испытанием. Все испытания, которые попадают под эти категории, независимо от их исхода должны быть исключены.

Пример формы заявления показан в табл. 16.1. Минимальное ограничение по времени в 10 сек было выбрано потому, что в противном случае у двигателя не оказалось бы достаточно времени, чтобы выйти на устойчивый режим работы, и это не смогло бы служить достаточно характерным примером.

Существует еще ряд причин, почему определенные испытания должны быть исключены при оценке надежности.

В процессе выполнения программы разработки система подвергается постоянным изменениям и модификациям. Причина этого состоит в следующем. Несмотря на то, что основные усовершенствования могут производиться в процессе испытаний отдельных элементов, окончательная доводка и подтверждение согласования с системой должны происходить при испытании всей системы двигателя в целом. Следовательно, система будет часто содержать *экспериментальные* элементы, а отказ системы только за счет отказа экспериментального элемента не обязательно будет истинным отказом системы. В этих случаях результаты испытания должны быть исключены. С другой стороны, полное исключение испытания из-за того, что в нем участвовал какой-то экспериментальный элемент, означает утрату ценной информации. Например, если бы испытание оказалось успешным, информация об успешной работе всех остальных элементов системы осталась бы неиспользованной. Это положение упрощается, если разрешить производить исключения после испытаний при отказах элементов, объявленных экспериментальными (о чем имеется запись в заявлении). Подобные доводы применимы для случаев с *устаревшими, изношенными и испорченными* элементами, которые могут быть использованы в конструкции системы в целях экономии.

Этими условиями можно легко злоупотреблять, если не будут обеспечены определенные формы контроля. Один из способов контроля состоит в требовании, чтобы в заявлении перечислялись только те компоненты, которые подпадают под одну из четырех вышеуказанных категорий. Вторым способом контроля является ограничение количества условно исключенных элементов до одного главного и трех второстепенных, как это указывается в основных правилах. Не обязательно заявлять обо



ПРИМЕРНАЯ ФОРМА ЗАЯВЛЕНИЯ ПРИ  
ВЫПОЛНЕНИИ ПРОГРАММЫ ОЦЕНКИ  
НАДЕЖНОСТИ

**Заявление для программы оценки надежности**

Дата испытания \_\_\_\_\_  
 Модель двигателя \_\_\_\_\_ Испытательный \_\_\_\_\_  
 стенд \_\_\_\_\_

Номер \_\_\_\_\_  
 Серийный номер двигателя \_\_\_\_\_

1. Приемлемо ли испытание для оценки надежности:  да  нет, почему

калибровочные или первые

проверочные  п. 2

испытание до отказа  п. 4

границы безопасности  превосходит пределы п. 5

испытание при внесенной  
неисправности  другие

2. Заданная продолжительность работы \_\_\_\_\_

3. Окружающие условия при испытании \_\_\_\_\_

4. Назначенные тактико-технические характеристики выходят за пределы, указанные в техническом задании на модель

5. Элементы, отличающиеся от элементов основного перечня:

экспериментальные, устаревшие, изношенные и испорченные

а) главный \_\_\_\_\_ Почему? \_\_\_\_\_

б) второстепенный \_\_\_\_\_ Почему? \_\_\_\_\_

в) второстепенный \_\_\_\_\_ Почему? \_\_\_\_\_

г) второстепенный \_\_\_\_\_ Почему? \_\_\_\_\_

Подпись и отдел лица, заполняющего форму

Заполняется группой надежности

Результат испытания:

успех  Действительное время

отказ  работы при испытании

исключение

Замечания \_\_\_\_\_

Подпись лица, ответственного за оценку надежности

Дата \_\_\_\_\_

всех элементах, относящихся к одной из этих условно исключаемых категорий; однако отказ элемента приведет к исключению испытания *только в том случае*, если этот элемент указан в заявлении. Если же о нем не было заявлено и он выходит из строя, то испытание рассматривается как отказ системы. Это может привести к тому, что инженер-испытатель или конструктор будет вынужден строить предположения, учитывая только четыре определенных элемента, а не те многие, которые могут отказать; однако в этом положении он может исключить все испытание, считая конструкцию «слишком экспериментальной». Если система двигателя содержит больше потенциально исключаемых элементов, чем один главный и три второстепенных, вовсе не обязательно исключить испытание.

### **Основные правила классификации испытаний для программы исследования надежности**

**Успех.** Обычно это такое огневое испытание, которое могло бы привести к удовлетворительному полету ракеты с точки зрения работы подсистемы двигателя.

1. В двигателе происходит успешное воспламенение, запуск, устойчивая работа на установившемся режиме и контролируемое выключение двигателя согласно техническому заданию на модель.

2. Продолжительность работы двигателя равна заданному времени работы с разбросом за счет выключения двигателя в пределах  $\pm 5\%$ , причем это время работы должно быть не менее 10 сек. Если продолжительность работы двигателя превышает указанный допуск за счет условий, внешних по отношению к двигателю, то по специальному соглашению с руководством программы работа может классифицироваться и как успех (при условии, что остальные требования классификации успеха будут удовлетворены).

**Отказ.** Огневое испытание двигателя обычно классифицируется как отказ, если оно приводит к нарушению нормального полета и если это испытание не может быть классифицировано как исключение.

1. Тактико-технические характеристики не удовлетворяют требованиям технического задания на модель.

2. Происходит непредусмотренное выключение двигателя за счет каких-либо внутренних относительно этого двигателя причин, например, в целях предотвращения разрушения.

**Исключение.** Огневое испытание может быть классифицировано как исключение либо до, либо после проведения испытания. Испытания, которые классифицируются как исключение перед их проведением, так и остаются исключенными независимо от исхода испытания.

В заявлении перед испытанием должны быть указаны все причины, на основании которых это испытание классифицируется как исключение.

### **Исключение перед испытанием**

1. Если огневое испытание предназначено для специального испытания при внесенной неисправности, испытания до отказа, испытания пределов безопасности, служит в качестве первой проверки или калибровочного испытания, или испытания с заданным временем работы менее 10 сек, то подобное испытание должно быть исключено.

2. Если конструкция содержит больше экспериментальных, изношенных, устаревших или испорченных компонентов, чем может быть условно исключено (один главный элемент и три второстепенных), она может быть, по усмотрению инженера-проектировщика, исключена как неподходящая для наиболее надежной конструкции, например, как это определяется главным перечнем элементов (п. 16.2.2).

### **Исключение после испытаний**

1. Огневое испытание может быть исключено, если отказ происходит только лишь из-за использования новых методов проверки, не предусмотренных в текущем техническом задании на модель. Если результат испытания удовлетворяет требованиям успеха, это так и должно классифицироваться.

2. Огневое испытание должно быть исключено, если при этом происходит отказ только лишь экспериментального, устаревшего, изношенного или испорченного элемента, который уже был условно исключен. Если резуль-

тат испытания удовлетворяет требованиям классификации успеха, это испытание так и должно классифицироваться [определения экспериментальных, устаревших, изношенных и испорченных элементов приводятся при рассмотрении главного перечня (см. п. 16.2.2)]. Количество элементов, которые могут быть перечислены в заявлении перед испытанием и использованы в качестве основания для исключения после испытания, ограничивается одним главным элементом и тремя второстепенными, причем главными элементами могут быть камера сгорания двигателя, турбонасосный агрегат или газогенератор. Все остальные компоненты считают второстепенными.

3. Огневое испытание должно быть исключено, если отказ происходит за счет условий, внешних по отношению к системе двигателя, например, из-за неисправности средств, измерительной аппаратуры или из-за ошибки оператора, что препятствует выполнению задач испытания.

### 16.2.2. Главный перечень и исключаемые элементы

Необходимо дать определение понятию *экспериментальный*. Возможно, это не лучшее слово, так как в широком смысле его можно понимать как применяемое к неокончательному варианту конструкции изделия. Если мы будем использовать слово «экспериментальный» в этом смысле, то из-за того, что обычно большинство элементов двигателя подвергается изменениям до создания окончательного варианта его конструкции, слишком много элементов двигателя или слишком много испытаний будет исключено. Это не позволит нам оценить надежность двигателя, находящегося в стадии отработки. Поэтому для определения понятия «экспериментальный» мы воспользуемся еще одним, третьим, средством контроля: *главным перечнем элементов*. Этот перечень составляется в тот момент при выполнении программы разработок, когда начинают испытываться первые двигатели. Он должен включать элементы двигателя, которые, по мнению ответственных за их разработку инженеров, к тому моменту времени являются наиболее надежными. Для включения в перечень может быть выбрана только одна конструкция каждого элемента, но

зато в перечне должны быть представлены все элементы. В ходе развития программы разработки инженер имеет право заменять любую конструкцию в главном перечне, если он считает, что эта конструкция окажется более надежной. Главный перечень должен быть текущим все время. Таким образом, экспериментальный элемент— это тот, который еще не появился в главном перечне. Но как только он туда попал, его уже нельзя включать как экспериментальную деталь. Элемент, который уже появлялся в главном перечне, но был заменен более надежной деталью, определяется как *устаревший* элемент. *Изношенный* элемент— это тот, который уже использовался при испытаниях в двигателе больше заданного числа раз или свыше заданной наработки. *Испорченный* элемент это тот, который испытал воздействие чрезвычайных условий, таких, как небрежное обращение, резкие перепады характеристик с выходом за пределы, указанные в техническом задании, и который из-за этого может выйти из строя. Такой компонент возможно использовать только в случае крайней необходимости.

Все эти определения необходимо иметь в виду, так как, зная наиболее надежную в данный момент конструкцию, можно оценить ее способность работать в соответствии с окончательными тактико-техническими требованиями.

### 16.2.3. Сфера деятельности при оценке надежности

В сферу деятельности при оценке надежности входят результаты испытаний, используемые для оценки надежности, результаты испытаний двигателей, которые проводятся с целью опытно-конструкторских разработок на испытательных площадках разработчика, огневых испытаний при приемке, квалификационных огневых испытаний, а также тех, которые проводятся в полигонных условиях как часть испытаний ракетной системы, и летных испытаний. Совершенно очевидно, что летные испытания системы вооружения являются наиболее показательными и реалистичными, однако они сравнительно ограничены, и, более того, при возникновении отказа в полете бывает даже невозможно из-за отсутствия убедительных доказательств привязать причину отказа

к определенной системе, например, к силовой установке. В большинстве случаев после испытаний почти невозможно исследовать состояние ракеты, а информация, записанная на киноплёнку или передаваемая по телеметрии, может оказаться недостаточной.

Кроме того, летное испытание, как правило, это испытание двигателя одноразового действия; следовательно, большая часть информации поступает от статистических испытаний при опытно-конструкторских разработках и от наиболее официальных квалификационных испытаний и при приемке готовой продукции. Испытания на этапе опытно-конструкторских разработок проводятся на системах, содержащих экспериментальные, устаревшие и другие части, тогда как наиболее официальные испытания проводятся на двигателях, собранных почти исключительно из компонентов, имеющих в главном перечне. Продолжительность огневых испытаний, за исключением летных, не обязательно должна быть равна полному времени работы двигателя; однако каждый двигатель следует испытывать несколько раз. Уменьшение продолжительности огневых испытаний происходит либо за счет ограниченных возможностей испытательных средств, либо за счет дороговизны или ограничений по суммарной наработке двигателя перед его непосредственной эксплуатацией.

### 16.3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Как видно, вся эта информация очень разнородна. Трудность частично преодолевается разделением данных и сравнением результатов, скажем, летных и приемочных испытаний. Другим средством упорядочения является составление заявлений. Но основная проблема остается нерешенной: различное время работы двигателя и влияние этого на интенсивность отказов. Хорошо известно, что запуск и выключение оборудования этого типа оказывает на систему значительно более вредное влияние, чем простое увеличение наработки: поэтому мы не можем, например, утверждать, что включение двигателя и его работа в течение минуты эквивалентны одной трети времени его работы при трехкратном включении. Также неправильно приравнивать кратковременную работу к работе в течение полного времени. Поэтому необходи-

мо найти какой-то весовой коэффициент, изменяющийся от нуля до единицы, который мог бы учитывать неполное время работы двигателя при огневых испытаниях. Это позволит нам судить об отказах на эквивалентное испытание с полным временем работы. Важность этого заключения очевидна, ибо в противном случае будут наблюдаться большие расхождения при оценке надежности. Если бы мы пренебрегли продолжительностью работы, т. е. приравнили бы вес кратковременного испытания к весу испытания с полным временем работы, то любая оценка надежности сильно расходилась бы с действительной величиной; или же, если бы мы установили вес, равный отношению продолжительности испытания к полному номинальному времени работы двигателя, то занизили бы значение надежности.

Было решено получать весовые коэффициенты  $\omega_i$  непосредственно из самих данных о проведенных испытаниях. При этом  $\omega_i$  — некоторая величина, принимающая значения от нуля до единицы и соответствующая любому огневому испытанию с заданным временем работы  $T_i$ . Порядок рассмотрения статистического метода оценки надежности для этого оборудования можно разделить теперь на два этапа. На первом этапе рассматривается метод оценки весовых коэффициентов. Второй этап заключается в том, чтобы ответить на вопрос, как надо применить эти весовые коэффициенты к полученным данным, чтобы получить достоверные, несмещенные оценки надёжности.

### 16.3.1. Весовые коэффициенты

Весовой коэффициент  $\omega_i$ , связанный с любым огневым испытанием с заданным временем работы  $T_i$ , описывается выражением

$$\omega_i = \frac{p_i + \epsilon(1 - p_i)}{p_k + \epsilon(1 - p_k)}, \quad (16.1)$$

где  $p_i$  — вероятность отказа двигателя за счет тех отказов, которые происходили при его работе в течение времени  $T_i$  после включения;  $p_k$  — вероятность отказа при полном времени работы. Величина  $\epsilon$  представляет собой условную вероятность отказа при выключении, т. е. при условии, что отказ не произошел перед выключением

двигателя. Таким образом, можно сказать, что (согласно уравнению (16.1)) весовой коэффициент  $\omega_i$  представляет собой отношение вероятности отказа, определяемой отказами при включении, при работе или при выключении двигателя за время  $T_i$ , к вероятности отказа двигателя за счет отказов при включении, работе или при выключении за время  $T_k$ , которое определяется как полное время работы двигателя\*. Отношение к отказам при выключении двигателя несколько отличается от отношения к отказам при его включении и работе. Это происходит по двум причинам. Во-первых, нам требуется отличать отказы при включении от других «обычных» (стандартных) отказов, которые происходят в момент выключения, и, во-вторых, отказы при выключении могут и не произойти, если обычный отказ уже завершил испытание.

Для оценки  $\omega_i$  нам потребуется следующий набор определений:

$T_i$  — заданное время работы  $i$ -й группы;

$N_i$  — число огневых испытаний в  $i$ -й группе;

$f_i$  — число отказов при выключении в  $i$ -й группе;

$f_{ij}$  — число стандартных отказов в  $i$ -й группе, произошедших за промежутки времени ( $T_{j-1}$ ,  $T_j$ ).

Затем в соответствии с вышеуказанными определениями в табл. 16.2 был занесен ряд предположительных результатов испытаний. Для простоты вычислений устанавливаются следующие определения:

$$H_i = N_i - f_i - \sum_{j=1}^i f_{ij} \quad (\text{т. е. число успехов в } i\text{-й группе});$$

$$F_j = \sum_{r=j}^k f_{rj} \quad (\text{т. е. число стандартных отказов в } j\text{-й колонке});$$

$$G_i = \sum_{j=i}^k (F_j + H_j + f_j). \quad (16.2)$$

---

\*  $\omega_i$  может быть аналогичным образом определен как условная вероятность отказа в момент времени  $T_i$  или до него при условии, что отказ произойдет в момент времени  $T_k$  или до него.



С помощью следующих формул можно рассчитать оценки максимума правдоподобия  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{p}_i$ :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sum_{r=1}^k \hat{f}_r}{\sum_{r=1}^k H_r + \sum_{r=1}^k \hat{f}_r},$$

$$\hat{p}_i = \hat{p}_{i-1} \downarrow \frac{F_i(1 - \hat{p}_{i-1})}{G_i} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, k, \quad \hat{p}_0 \equiv 0. \quad (16.3)$$

Затем эти величины подставляют в уравнение (16.1) для получения  $\hat{w}_i$  оценки  $w_i$ . Величина  $\hat{\varepsilon}$ , полученная из (16.3), — просто отношение общего числа отказов при выключении к полному числу огневых испытаний, при которых не произошло ни одного стандартного отказа. Вывод уравнений (16.3) приводится в приложении 16А.

### 16.3.2. Пример вычисления весовых коэффициентов

В качестве примера используем данные из табл. 16.2. На основании выражений (16.1) и (16.2) произведем вычисления, как это показано в табл. 16.3.

Весовые коэффициенты должны оцениваться исходя из достаточно большого количества данных, чтобы в различных ячейках имелось достаточно отказов для получения «стабильных» значений. Достаточными могут оказаться данные за девять месяцев или может потребоваться минимум, скажем, в 30 отказов. Соответствующие требования будут зависеть от интенсивности отказов оборудования, а также от темпов проведения испытаний. Обычно весовые коэффициенты несколько меняются при выполнении любой программы разработки, а поэтому их необходимо периодически пересчитывать. Если выпускаются ежемесячные отчеты о надежности, то весовые коэффициенты вычисляются каждый раз перед их использованием для обработки получаемых результатов. После вычисления и привязки к испытанию весовой коэффициент должен оставаться постоянным для этого испытания, даже если вычисление весового коэффициента

Таблица 16.2

Группа $i$	Пусть $k = 6, T_k = 140$		Число отказов за промежутки времени ( $T_{j-1}, T_j$ )						$N_i$
	Заданное время работы $T_i$	Число испы- таний $N_i$	(0,10)	(10,20)	(20,40)	(40,60)	(60,100)	(100,140)	
1	10	162	$f_{11}   f_1$ 20   2	..	..	..	..	..	140
2	20	27	$f_{21}$ 1	$f_{22}   f_2$ 0   0	..	..	..	..	26
3	40	26	$f_{31}$ 0	$f_{32}$ 0	$f_{33}   f_3$ 0   1	..	..	..	25
4	60	1	$f_{41}$ 0	$f_{42}$ 0	$f_{43}$ 0	$f_{44}   f_4$ 0   0	..	..	1
5	100	10	$f_{51}$ 0	$f_{52}$ 0	$f_{53}$ 0	$f_{54}$ 0	$f_{55}   f_5$ 0   0	..	10
6	140	126	$f_{61}$ 12	$f_{62}$ 0	$f_{63}$ 5	$f_{64}$ 2	$f_{65}$ 4	$f_{66}   f_6$ 1   3	97
		$F_j$	33	2	5	2	4	1	

Таблица 16.3

$i$	$F_i$	$H_i$	$f_i$	$G_i$	$\hat{p}_i$	$\hat{p}_i + \hat{\varepsilon}(1 - \hat{p}_i)$	$w_i$
1	33	140	2	352	0,0938	0,1116	0,551
2	2	26	0	177	0,1040	0,1216	0,600
3	5	25	1	149	0,1341	0,1511	0,746
4	2	1	0	118	0,1487	0,1654	0,817
5	4	10	0	115	0,1784	0,1946	0,961
6	1	97	3	101	0,1865	0,2025	1,000

$$\hat{\varepsilon} = 0,01967$$

ента по более поздним данным указывает на то, что его значение для данной продолжительности работы изменилось. Это оказывается очень удобным как в приложениях, так и при вычислениях.

### 16.3.3. Пример вычисления надежности с использованием весовых коэффициентов

Весовые коэффициенты определяются и оцениваются на основе большого количества данных с целью приложения их к меньшей и более текущей группе данных (см. п. 16.3.5, § 16.4). Основания для определения (16.1) можно сделать очевидными, применяя найденные весовые коэффициенты к той же группе данных, из которой они получены.

Этот метод применения состоит в том, чтобы оценить надежность  $R$  как  $\hat{R}$ :

$$\hat{R} = 1 - \frac{\text{полное число отказов}}{\sum_i N_i \hat{w}_i}. \quad (16.4)$$

Для данных табл. 16.1 с помощью схемы расчета, приведенной в табл. 16.2, получим

$$\hat{R} = 1 - (53/261,3) = 0,7972 \approx 79,7\%.$$

Заметим, что численное значение  $\hat{R}$  чрезвычайно близко к величине

$$1 - \hat{p}_k + \hat{\varepsilon}(1 - \hat{p}_k) = 0,7975,$$

(где  $k=6$ ), которая по определению является оценкой

вероятности отсутствия отказов (обычных или при выключении)  $R$  к моменту окончания или в течение полного времени работы  $T_k$ . В самом деле, если мы допустим, что весовые коэффициенты точно известны (а не оцениваются приближительно), будем иметь

$$\hat{w}_i = \frac{p_i + \varepsilon(1 - p_i)}{p_k + \varepsilon(1 - p_k)}.$$

Тогда [из уравнения (16.4) математическое ожидание  $\hat{R}$  будет равно

$$E(\hat{R}) = 1 - \frac{\sum_i N_i [p_i + \varepsilon(1 - p_i)]}{\sum_i N_i \frac{[p_i + \varepsilon(1 - p_i)]}{[p_k + \varepsilon(1 - p_k)]}} = \quad (16.5)$$

$$= 1 - [p_k + \varepsilon(1 - p_k)] \equiv R. \quad (16.6)$$

Таким образом,  $\hat{R}$  будет несмещенной оценкой  $R$ .

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что величина

$$\sum_i N_i [p_i + \varepsilon(1 - p_i)]$$

является математическим ожиданием полного числа отказов.

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что, если известны точные значения весовых коэффициентов, величина

$$\hat{R}' = 1 - \frac{\sum_i \frac{\text{Полное число отказов в } i\text{-й группе}}{\hat{w}_i}}{\sum_i N_i}$$

также является несмещенной оценкой  $R$ . Сравнить численные значения оценок  $\hat{R}$  и  $\hat{R}'$ , используя данные из табл. 16.1 и 16.2.

У п р а ж н е н и е 3. Рассмотреть следующие результаты испытаний (см. табл. 16.1).

Кратковременная работа $T_1$	$(0, T_1)$			$(T_1, T_2)$	
	$N$	$f_{11} = f$	$f_{10} = 0$	$f_{10} = 0$	
Полное время работы $T_2$	$N$	$f_{21} = f$		$f_{22} = y$	$f_{20} = 0$

Показать путем алгебраических преобразований, что  $\hat{R} = \hat{R}' = 1 - \hat{p}_2$  (заметим, что  $\hat{\varepsilon} = 0$ ).

#### **16.3.4. Использование весовых коэффициентов и оценка надежности**

Группа надежности каждый месяц выписывает в хронологическом порядке результаты испытаний на каждой испытательной площадке. Типичная форма записи представлена в табл. 16.3. В списке приводятся двигатели, находящиеся на стадии опытно-конструкторских работ, и серийные двигатели, которые определяются серийными номерами.

Поскольку эти двигатели имеют одинаковую конструкцию, их можно свести в одну группу. Летные и другие полигонные испытания производятся с двигателями, конструкция которых соответствует сравнительно более поздним этапам разработки, и вдобавок ко всему, к ним подходят совершенно по-другому, они испытываются разными людьми, и, конечно, при летных испытаниях двигатель работает (испытывается) в реальных условиях. Следовательно, эти данные должны анализироваться аналогичным образом, но отдельно от серийных испытаний и испытаний при опытно-конструкторских разработках, и при этом влияние различных факторов будет оцениваться путем сравнения их оценок надежности.

#### **16.3.5. Тип статистической оценки**

Наиболее показательной и полезной характеристикой надежности принята подвижная средняя оценка надежности.

Объем выборки из результатов 100 последних эквивалентных испытаний при полном времени работы считался достаточно большим для обеспечения удовлетворительного уровня гарантии, но и не настолько всеобъемлющим, чтобы включать слишком много начальных непредставительных данных при разработке. Полная двигательная установка состояла из нескольких двигателей, данные об одном из которых приведены в табл. 16.4. Следовательно, требовался постоянный объем выборки, в результате чего последовательный план не применялся.

Для получения оценки надежности двигательной установки нужно объединить полученные надежности всех этих двигателей, а это значительно проще сделать

Страница \_\_\_\_\_ Ракетный двигатель \_\_\_\_\_

Хронология данных об испытаниях по программе оценок надежности,  
конец месяца X-X-6X

Номер пере- числения	Номер испыта- ния, стенд	Дата, серий- ный номер двигателя	Тип ис- пытаний	Заданное вре- мя работы; действитель- ное время работы	Весовой коэффици- циент	Результ- тат	Примечания
341	2.1-002 α3	X-X-6X 916	ОКР	160 161	1,00	У	Все требования ТЗ удовлетво- рены
342	3.2-051 α1	X-X-6X 1408	П	60 60	0,82	У	Все требования ТЗ удовлетво- рены
343	2.3-110 β1	X-X-6X 1100	ОКР			И	Заявленные испытания при на- личии неисправн. (см. сообщение об отказах N-FR-95).
344	2.3-111 β1	X-X-6X 1100	ОКР	140 65	1,00	О	Внезапная отсечка подачи топ- лива в камеру сгорания (см. со- общение об отказах N-FR-95)
345	2.4-021 δ3	X-X-6X 910	ОКР	100 101	0,96	У	Все требования ТЗ удовлетво- рены
346	3.2-052 α1	X-X-6X 1408	П	40 40	0,75	У	Все требования ТЗ удовлетво- рены
347	2.1-003 α3	X-X-6X 916	ОКР			И	Испытания до отказа см. фор- му заявления 347
348	2.1-004 α3	X-X-6X 916	ОКР	60 61	0,82	У	Все требования ТЗ удовлетво- рены

Примечания. ОКР — испытания при опытно-конструкторской разработке;

П — приемные испытания (серийное производство);

У — успех; О — отказ; И — исключение.

Итого:

6 приемных испытаний из 8.

1 отказ из 5,35 эквивалентных ис-  
пытаний при полном времени работ.

(и статистически допустимо), если результаты основываются на выборках одинаковых объемов, т. е. по 100 последним эквивалентам испытаний с полным временем работы по каждому двигателю.

#### 16.4. ОТЧЕТНОСТЬ О СОСТОЯНИИ НАДЕЖНОСТИ

Расчет надежности довольно прост. Каждому огневому испытанию, которое не исключается, соответствует весовой коэффициент (табл. 16.4), зависящий только от заданного времени работы при испытании. Для выбора последнего испытания за отчетный период все весовые коэффициенты складываются в обратном хронологическом порядке до тех пор, пока не будет достигнуто число, не меньшее 100 (но и не большее 101). Затем подсчитывается полное число испытаний за этот период, которые классифицируются как отказы. Если это число равно  $f$ , то точечная оценка надежности равна  $\frac{100-f}{100}$ . Доверительные пределы надежности можно получить с помощью рис. П.1—П.5. Это число, характеризующее рост надежности двигателя в пределах выбранных нами критериев и средств контроля, сообщается каждый месяц.

#### 16.5. ПОДТВЕРЖДЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ

Кроме требований к отчетности существует требование подтверждения договорной надежности. Это можно выразить в такой форме, что вся двигательная установка, состоящая, скажем, из трех ступеней, должна подтвердить к июлю 196 X г. минимальную надежность в 90% с вероятностью в 90%. Это означает (рис. П.3), что при 100 испытаниях каждой из трех ступеней должно произойти не более шести отказов. При составлении планов, если для всех трех двигателей требуется одинаковая разработка, эти шесть отказов могут быть поделены поровну между двигателями, и тогда каждый из них будет иметь мгновенное значение надежности в 98%. Если бы двигатели каждой ступени изготавливали разные разработчики, то перед каждым из них была бы поставлена цель добиться получения 98%-ной точечной оценки или минимальной надежности в 95% с вероятностью, равной 90%.

Если же все ступени изготавливаются одним и тем же разработчиком, то необходимость предъявлять раз-

личные требования к двигателям каждой ступени отпадает, поскольку очевидно, что разработчик имеет меньше шансов удовлетворить требования по каждой ступени, чем общие требования ко всей двигательной установке в целом.

К последним 100 эквивалентным испытаниям с полным временем работы, которые используются при показательной выборке, могут предъявляться дополнительные требования. Например, определенная часть испытаний может проводиться специально с целью оценки воздействия окружающей среды, может быть задано определенное число огневых испытаний с полным временем работы и, кроме того, может накладываться ограничение по числу испытаний на каждый двигатель. По возможности эти факторы должны вводиться в форме статистического плана, но это не всегда возможно из-за ограниченных возможностей расписания работ, измерительных и испытательных средств. Однако подобное сбалансированное статистическое подтверждение надежности обеспечит дополнительную уверенность в результатах. Если же конечные цели не будут достигнуты, то, несомненно, должны быть выявлены соответствующие причины.

Программа разработки должна предусматривать возможно раннее включение испытаний на воздействие окружающей среды, испытаний при нормальной работе и в процессе производства с тем, чтобы можно было измерить их влияние и принять соответствующие меры.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Barton H. A. and Thatcher A. G., Rocket engine reliability. Ordnance, 1957, v. 41, 220, January — February, p. 722—726.

#### *Приложение 16А*

#### **Уравнения максимума правдоподобия для $p_i$ и $\epsilon$**

Вероятность отказа равна вероятности появления одного из двух несовместимых событий: 1) обычного отказа, т. е. не при выключении двигателя и 2) отказа при выключении двигателя.

На рис. 16А.1 представлена модель отказов двигателя и соответствующие ей параметры.



Времена  $T_1, T_2, \dots, T_{r-1}, T_r, \dots, T_k$  представляют собой заданные продолжительности работы с соответствующими вероятностями  $p_i$ , одновременно являясь дискретными временными интервалами для классификации наработки до отказов;  $p_i$  определяется как вероятность обычного отказа к моменту времени  $T_i$  или в течение

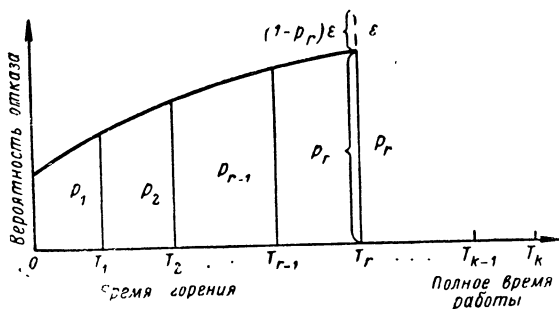


Рис. 16.А.1.  $\varepsilon$  — вероятность отказа при выключении двигателя при условии успешной работы до этого момента;  $p_r$  — вероятность обычного отказа до или после момента времени  $T_r$ .

его для  $i=1, \dots, k$ . Величина  $\varepsilon$  определяется как условная вероятность отказа при выключении двигателя (при том условии, что двигатель не отказал до момента выключения). Отсюда вероятность отказа в момент времени  $T_i$  или до него равна  $p_i + \varepsilon (1 - p_i)$ . Теперь нам требуется оценить  $p_i$  и  $\varepsilon$  с помощью метода максимума правдоподобия.

Во-первых, будем считать, что время работы  $T_r$  задано только для группы из  $N_r$  огневых испытаний. Если при выключении двигателя наблюдается  $f_r$  отказов, а за промежуток времени  $T_j - T_{j-1}$  происходит  $f_{rj}$  отказов, где  $j=1, \dots, r$ , тогда

$$H_r = N_r - f_r - \sum_{j=1}^r f_{rj}$$

является числом успехов в этой группе.

Функция правдоподобия задается с помощью вероятности появления события (см. § 7.4 и 6.3), т. е.

$$L_r = \frac{N_r!}{H_r! f_r! \prod_{j=1}^r f_{rj}!} [(1-p_r)(1-\varepsilon)]^{H_r} [(1-p_r)\varepsilon]^{f_r} \times \\ \times \prod_{j=1}^r (p_j - p_{j-1})^{f_{rj}}. \quad (16A.1)$$

Функция правдоподобия  $L$  для всех групп огневых испытаний равна

$$L = \prod_{r=1}^k L_r. \quad (16A.2)$$

Логарифмируя правую и левую части выражения (16A.2), где  $\mathfrak{C} \equiv \log L$ , мы получим

$$\mathfrak{C} = \text{const} + \sum_{r=1}^k (H_r + f_r) \log(1-p_r) + \\ + \sum_{r=1}^k f_r \log \varepsilon + \sum_{r=1}^k H_r \log(1-\varepsilon) + \\ + \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^r f_{rj} \log(p_j - p_{j-1}) \quad (16A.3)$$

или

$$\mathfrak{C} = \text{const} + \sum_{r=1}^k (H_r + f_r) \log(1-p_r) + \\ + \sum_{r=1}^k f_r \log \varepsilon + \sum_{r=1}^k H_r \log(1-\varepsilon) + \\ + \sum_{j=1}^k F_j \log(p_j - p_{j-1}), \quad (16A.4)$$

где

$$F_j = \sum_{r=1}^k f_{rj}.$$

Параметры  $p_i$  и  $\varepsilon$ , максимизирующие  $\mathfrak{C} \equiv \log L$ , точно так же характеризуют и  $L$ .

Дифференцируя  $\mathfrak{C}$  по  $p_i$  и  $\varepsilon$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial p_i} &= -\frac{H_i + f_i}{1 - p_i} + \frac{F_i}{p_i - p_{i-1}} - \frac{F_{i+1}}{p_{i+1} - p_i}, \\ \text{где } i &= 1, 2, \dots, k-1 \\ \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial p_k} &= -\frac{H_k + f_k}{1 - p_k} + \frac{F_k}{p_k - p_{k-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (16A.5)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{1 - \varepsilon} \sum_{r=1}^k H_r + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{r=1}^k f_r. \quad (16A.6)$$

Если принять

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

то получим систему уравнений, которые решаются относительно  $\hat{p}_i, \dots, \hat{p}_k$  и  $\hat{\varepsilon}$  (величины  $p_i$  и  $\varepsilon$  записываются с „крышками“ для обозначения того, что они являются оценками истинных значений):

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_i}{\hat{p}_i - \hat{p}_{i-1}} - \frac{F_{i+1}}{\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i} &= \frac{H_i + f_i}{1 - \hat{p}_i}, \\ \text{при } i &= 1, 2, \dots, k-1; \hat{p}_0 = 0, \\ \frac{F_k}{\hat{p}_k - \hat{p}_{k-1}} &= \frac{H_k + f_k}{1 - \hat{p}_k}, \\ \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \sum_{r=1}^k f_r &= \frac{1}{1 - \hat{\varepsilon}} \sum_{r=1}^k H_r. \end{aligned} \right\} \quad (16A.7)$$

Легко проверить, что следующие решения:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \frac{\sum_{r=1}^k f_r}{\sum_{r=1}^k H_r + \sum_{r=1}^k f_r}, \\ \hat{p}_i &= \hat{p}_{i-1} + \frac{F_i}{G_i} (1 - \hat{p}_{i-1}) \\ \text{при } i &= 1, 2, \dots, k; \\ \hat{p}_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16A.8)$$

где

$$G_i = \sum_{j=i}^k F_j + H_j + f_j,$$

удовлетворяют системе уравнений (16A.7).

### Приложение 16Б

#### Дисперсии и ковариации $\hat{p}_i$ и $\hat{\varepsilon}$

Для получения оценок дисперсий и ковариаций  $\hat{p}_i$  и  $\hat{\varepsilon}$  мы поступим так же, как и в п. 7.5.4. Из уравнений (16A.5) и (16A.6) мы имеем

$$\mathcal{C} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial p_i^2} = -\frac{H_i + f_i}{(1-p_i)^2} - \frac{F_i}{(p_i - p_{i-1})^2} \frac{F_{i+1}}{(p_{i+1} - p_i)^2} \quad (16B.1)$$

для  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ; и

$$\mathcal{C}_{kk} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial p_k^2} = -\frac{H_k + f_k}{(1-p_k)^2} - \frac{F_k}{(p_k - p_{k-1})^2}, \quad (16B.2)$$

$$\mathcal{C}_{\varepsilon\varepsilon} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial \varepsilon^2} = -\frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \sum_{r=1}^k H_r - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{r=1}^k f_r. \quad (16B.3)$$

Смешанные частные производные имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}_{ij} &\equiv \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial p_j \partial p_i} \equiv \mathfrak{C}_{ji} = 0, & \left. \begin{array}{l} j < i-1 \\ j > i+1, \end{array} \right\} \\ \mathfrak{C}_{ij} &= \frac{F_i}{(p_i - p_{i-1})^{2r}}, & j = i-1, \\ \mathfrak{C}_{ij} &= \frac{F_{i+1}}{(p_{i+1} - p_i)^{2r}}, & j = i+1 \end{aligned} \right\} (16Б.4)$$

и

$$\mathfrak{C}_{i\varepsilon} = \mathfrak{C}_{\varepsilon i} \equiv \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial \varepsilon \partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Например, при  $k=2$  матрица частных производных становится равной (после упорядочения  $p_1, p_2$  и  $\varepsilon$ )

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{H_1 + f_1}{(1 - p_1)^2} & -\frac{F_1}{p_1^2} & -\frac{F_2}{(p_2 - p_1)^2} & -\frac{F_2}{(p_2 - p_1)^2} & 0 \\ \frac{F_2}{(p_2 - p_1)^2} & -\frac{H_2 + f_2}{(1 - p_2)^2} & -\frac{F_2}{(p_2 - p_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{H_1 + H_2}{(1 - \varepsilon)^2} & -\frac{f_1 + f_2}{\varepsilon^2} \end{bmatrix}.$$

Для получения оценок дисперсий и ковариаций легче всего заменить  $p_i$  и  $\varepsilon$  в матрице  $\mathbf{A}$  оценками  $\hat{p}_i$  и  $\hat{\varepsilon}$ ; тогда  $\mathbf{A}$  становится числовой матрицей. В результате следующего шага находим отрицательное значение обратной матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$ ; элементы полученной матрицы являются (в том же порядке) искомыми оценками дисперсий и ковариаций.

В качестве примера возьмем данные из п. 16.3.2. Используя уравнения (16Б.1) — (16Б.4), получаем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -23147 & 19223 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19223 & -24774 & 5519 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5519 & -14936 & 9383 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9383 & -13919 & 4535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4535 & -19791 & 15242 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15242 & -15393 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15819 \end{bmatrix}.$$

Обратную матрицу  $A^{-1}$  рассчитать нетрудно, однако подробности вычислений здесь не приводятся\*.

В итоге мы получаем матрицу дисперсий и ковариаций  $B = -A^{-1}$ :

$$B = \begin{bmatrix} -0,00024159 & 0,00023888 & 0,00023085 & 0,00022698 \\ 0,00023888 & 0,00028764 & 0,00027797 & 0,00027331 \\ 0,00023085 & 0,00027797 & 0,00044373 & 0,00043628 \\ 0,00022698 & 0,00027331 & 0,00043628 & 0,00053376 \\ 0,00021904 & 0,00026374 & 0,00042102 & 0,00051508 \\ 0,00021689 & 0,00026115 & 0,00041689 & 0,00051003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0,00021904 & 0,00021689 & 0 \\ & 0,00026374 & 0,00026115 & 0 \\ & 0,00042102 & 0,00041689 & 0 \\ & 0,00051508 & 0,00051003 & 0 \\ & 0,00070987 & 0,00070290 & 0 \\ & 0,00070290 & 0,00076096 & 0 \\ & 0 & 0 & 0,00006322 \end{bmatrix}.$$

По диагонали матрицы  $B$  располагаются по порядку: оценки дисперсий  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_6$  и дисперсии  $\hat{\epsilon}$ . Остальные элементы матрицы являются оценками ковариаций соответствующих оценок. Например, в 1-м ряду во 2-й колонке мы имеем\*\*  $\langle \text{cov}(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \rangle = 0,00023888$ .

Заметим, что матрица  $B$  симметрична, как это и должно быть, поскольку  $\langle \text{cov}(\hat{p}_i, \hat{p}_j) \rangle = \langle \text{cov}(\hat{p}_j, \hat{p}_i) \rangle$ . Отметим также, что  $\langle \text{cov}(\hat{\epsilon}, \hat{p}_i) \rangle = 0$ , т. е.  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{p}_j$  не коррелированы.

Если требуется вычислить оценку коэффициента корреляции  $\rho_{ij}$  между  $\hat{p}_i$  и  $\hat{p}_j$ , используют следующую формулу:

$$\langle \rho_{ij} \rangle = \frac{\langle \text{cov}(\hat{p}_i, \hat{p}_j) \rangle}{(\langle \text{var} \hat{p}_i \rangle \langle \text{var} \hat{p}_j \rangle)^{1/2}}. \quad (16Б.5)$$

Например,

$$\langle \rho_{12} \rangle = \frac{0,00023888}{(0,00024159 \cdot 0,00028764)^{1/2}} = \frac{0,00023888}{0,00026361}$$

или

$$\langle \rho_{12} \rangle = 0,9062.$$

\* См. Kemeny J. G. и др. Finite mathematical structures, Prentice-Hill, Inc., Englewood Cliffs, № 1, 1959, p. 240—243.

\*\* Знак  $\langle \dots \rangle$  означает числовую оценку величины в скобках.

В другом примере

$$\langle \rho_{\hat{\epsilon}_i} \rangle = \frac{0,00070290}{(0,00070987 \cdot 0,00076096)^{1/2}} = \frac{0,00070290}{0,00073497}$$

или

$$\langle \rho_{\hat{\epsilon}_i} \rangle = 0,9564.$$

Предположим, что рассматривается  $\rho_{16}$ , т. е. коэффициент корреляции для „далеко разнесенных“  $\hat{p}_i$ .

Мы имеем

$$\langle \rho_{16} \rangle = \frac{0,00021689}{\frac{1}{(0,00024159 \cdot 0,00076096)^2}} = 0,5058.$$

Этот результат указывает на то, что с увеличением промежутков времени, при которых оценивается распределение наработки до отказа, коэффициент корреляции стремится к уменьшению.

Дисперсии весовых коэффициентов  $w_i$  могут оцениваться следующим образом\*.

Поскольку

$$\hat{w}_i = \frac{\hat{p}_i + (1 - \hat{p}_i) \hat{\epsilon}}{\hat{p}_k + (1 - \hat{p}_k) \hat{\epsilon}} = U_i(\hat{p}_i, \hat{p}_k; \hat{\epsilon}), \quad (16Б.6)$$

то

$$\begin{aligned} \langle \text{var } \hat{w}_i \rangle \approx & \left\langle \left( \frac{\partial U_i}{\partial \hat{p}_i} \right)^2 \right\rangle \langle \text{var } \hat{p}_i \rangle + \left\langle \left( \frac{\partial U_i}{\partial \hat{p}_k} \right)^2 \right\rangle \langle \text{var } \hat{p}_k \rangle + \\ & + \left\langle \left( \frac{\partial U_i}{\partial \hat{\epsilon}} \right)^2 \right\rangle \langle \text{var } \hat{\epsilon} \rangle + 2 \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial \hat{p}_i} \right\rangle \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial \hat{p}_k} \right\rangle \langle \text{cov}(\hat{p}_i, \hat{p}_k) \rangle, \quad (16Б.7) \end{aligned}$$

Значения  $\langle \text{var } \hat{p}_i \rangle$ ,  $\langle \text{cov}(\hat{p}_i, \hat{p}_k) \rangle$  и т. д. получают из матрицы  $\mathbf{B}$ , а значения частных производных в уравнении (16Б.7) из следующих выражений:

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial \hat{p}_i} \right\rangle = \frac{1 - \hat{\epsilon}}{\hat{p}_k + (1 - \hat{p}_k) \hat{\epsilon}}, \quad (16Б.8)$$

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial \hat{p}_k} \right\rangle = \frac{(1 - \hat{\epsilon}) [\hat{p}_i + (1 - \hat{p}_i) \hat{\epsilon}]}{[\hat{p}_k + (1 - \hat{p}_k) \hat{\epsilon}]^2}, \quad (16Б.9)$$

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial \hat{\epsilon}} \right\rangle = \frac{\hat{p}_k - \hat{p}_i}{[\hat{p}_k + (1 - \hat{p}_k) \hat{\epsilon}]^2}. \quad (16Б.10)$$

\* Члены, содержащие ковариации  $(\hat{p}_i, \hat{\epsilon})$  и  $(\hat{p}_k, \hat{\epsilon})$  отсутствуют, так как в этом случае они равны нулю (см. п. 9.5.1).

Например, найдем  $\langle \text{var } \hat{w}_i \rangle$ . Из табл. 16.2  $\hat{p}_1=0,0938$ ,  $\hat{p}_6=0,1865$ ,  $\hat{\varepsilon}_1=0,01967$ , тогда

$$\left\langle \left( \frac{\partial U_1}{\partial \hat{p}_1} \right)^2 \right\rangle = (4,841)^2 = 23,44, \quad (16Б.11)$$

$$\left\langle \left( \frac{\partial U_1}{\partial \hat{p}_6} \right)^2 \right\rangle = (-2,668)^2 = 7,118, \quad (16Б.12)$$

$$\left\langle \left( \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\varepsilon}} \right)^2 \right\rangle = (2,261)^2 = 5,112 \quad (16Б.13)$$

и

$$\left\langle \frac{\partial U_1}{\partial \hat{p}_1} \right\rangle \left\langle \frac{\partial U_1}{\partial \hat{p}_6} \right\rangle = 4,841 \cdot (-2,668) = -12,92. \quad (16Б.14)$$

Подставляя эти величины вместе с соответствующими значениями дисперсий и ковариаций из матрицы **B** в уравнение (16Б.7), получаем окончательно

$$\langle \text{var } \hat{w}_1 \rangle \approx 0,005798.$$

Упражнение. Найти  $\langle \text{var } \hat{w}_2 \rangle, \dots, \langle \text{var } \hat{w}_5 \rangle$ . Заметим, что  $\langle \text{var } \hat{w}_6 \rangle \equiv 0$ .

Ответ. 0,006086; 0,005853; 0,004937; 0,001451.

Поскольку  $p_k + (1-p_k)\varepsilon$  — вероятность того, что устройство откажет в момент или в течение времени  $T_k$  (полное номинальное время работы), мы можем найти верхний доверительный предел этой величины по формуле (п. 7.4.4)

$$1 - \hat{R}_L^* = \hat{p}_k + (1 - \hat{p}_k) \hat{\varepsilon} + K_{1-\gamma} \sqrt{\langle \text{var} [\hat{p}_k + (1 - \hat{p}_k) \hat{\varepsilon}] \rangle}, \quad (16Б.15)$$

где

$$\langle \text{var} [\hat{p}_k + (1 - \hat{p}_k) \hat{\varepsilon}] \rangle = (1 - \hat{\varepsilon})^2 \langle \text{var } \hat{p}_k \rangle + (1 - \hat{p}_k)^2 \langle \text{var } \hat{\varepsilon} \rangle. \quad (16Б.16)$$

В рассматриваемом примере  $k=6$ ; отсюда

$$\langle \text{var} [\hat{p}_6 + (1 - \hat{p}_6) \hat{\varepsilon}] \rangle = 0,0007732$$

(из табл. 16.2 и матрицы **B**);



$\hat{p}_0 + (1 - \hat{p}_0)\hat{\varepsilon} = 0,2025$ , и поэтому при  $\gamma = 0,90$  ( $K_{0,10} = 1,282$  — стандартное нормальное отклонение, превышаемое с вероятностью 0,10)

$$1 - \hat{R}_L = 0,2025 + 1,282 \times 0,02781 = 0,2382. \quad (16Б.17)$$

Результат, полученный в уравнении (16Б.17), означает, что

$$\hat{R}_L = 0,7618 \quad (16Б.18)$$

— 90%-ный нижний доверительный предел для вероятности успешного удовлетворения требований к полному времени работы.

Интересно сравнить указанную оценку и доверительный предел с результатами, полученными из уравнения (16.4). Мы имеем

$$1 - \hat{R} = \frac{\text{полное число отказов}}{\Sigma N_i w_i} = \quad (16Б.19)$$

$$= \frac{53}{261,3} = 0,2028. \quad (16Б.20)$$

Простая биномиальная дисперсия равна

$$\frac{\hat{R}(1 - \hat{R})}{\Sigma N_i w_i} = 0,0006188,$$

а квадратный корень из этой величины равен 0,02488. Отсюда верхний 90%-ный доверительный предел вероятности отказа равняется

$$1 - \hat{R}'_L = 0,2028 + 1,282 \times 0,02488 = 0,2347 \quad (16Б.21)$$

или

$$\hat{R}'_L = 0,7653 \quad (16Б.22)$$

— 90%-ный нижний доверительный предел вероятности успешного удовлетворения требований к полному времени работы. Два доверительных предела  $\hat{R}_L$  и  $\hat{R}'_L$ , полученные из уравнений (16Б.18) и (16Б.22), очень близки, так же как и точечные оценки надежности.

Кроме того, биномиальный доверительный предел можно найти с помощью рис. П.3. При 53 отказах в 261 эквивалентном опыте с полным временем работы нижний 90%-ный доверительный предел надежности равен  $1 - 0,24 = 0,76$ .

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1

**Число испытаний без отказов в зависимости от надежности и доверительного уровня**

Надежность	Доверительный уровень, %							
	50	60	70	80	90	95	99	99,9
0,9999	6932	9163	12040	16094	23026	29957	46052	69078
0,999	693	916	1204	1609	2303	2996	4605	6908
0,998	347	458	602	805	1152	1498	2303	3454
0,997	231	305	401	537	768	999	1535	2303
0,996	173	229	301	401	575	747	1149	1723
0,995	138	183	241	321	460	598	920	1379
0,994	115	152	201	267	383	498	765	1148
0,993	99	130	174	229	328	427	657	985
0,992	86	114	150	200	287	373	574	860
0,991	77	101	134	178	255	332	510	764
0,99	69	92	120	160	229	298	459	688
0,98	34	45	60	80	114	149	228	342
0,97	23	30	40	53	76	99	151	227
0,96	17	23	30	39	57	74	113	170
0,95	14	18	24	31	45	58	90	135
0,94	11	15	20	26	37	49	75	112
0,93	10	13	17	22	32	42	64	96
0,92	9	11	15	19	28	36	55	83
0,91	8	10	13	17	25	32	49	74
0,90	7	9	12	15	22	29	44	66
0,89	6	8	11	14	20	26	40	60
0,88	6	8	10	13	18	24	36	54
0,87	5	7	9	12	17	22	33	50
0,86	5	7	8	11	16	20	31	46
0,85	5	6	8	10	15	19	29	43
0,80	3	4	6	7	11	14	21	31
0,75	3	4	5	6	8	11	16	24
0,70	2	3	4	5	7	9	13	20
0,65	2	2	3	4	6	7	11	16
0,60	2	2	3	4	5	6	9	14
0,50	1	2	2	3	4	5	7	10

Таблица П.2

Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени  $t$  для обеспечения средней наработки по меньшей мере  $\hat{\theta}_L$  при доверительном уровне  $\gamma = 75\%$ , где допустимое число отказов равно  $F$

F	$t/\hat{\theta}_L$													
	1,0	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	
0														
1	2	3	7	14	28	69	138	278	694	1,387	2,773	6,932	13,863	
2	4	6	14	28	55	134	269	539	1,347	2,693	5,386	13,464	26,927	
3	6	9	21	41	80	199	392	785	1,961	3,921	7,841	19,602	39,204	
4	7	12	28	53	105	259	511	1,022	2,555	5,110	10,219	25,547	51,094	
5	9	15	34	65	129	318	628	1,255	3,138	6,275	12,549	31,373	62,745	
6	11	18	40	77	152	376	742	1,485	3,712	7,423	14,846	37,114	74,227	
7	13	21	46	90	176	433	855	1,712	4,280	8,559	17,117	42,793	85,585	
8	14	24	53	101	199	490	968	1,937	4,843	9,685	19,369	48,422	96,844	
9	16	26	59	113	222	547	1,081	2,161	5,402	10,803	21,605	54,013	108,025	
10	18	29	65	125	245	603	1,192	2,383	5,957	11,914	23,828	59,570	119,139	
11	19	32	71	136	268	659	1,302	2,604	6,510	13,020	26,040	65,099	130,197	
12	21	35	77	148	291	715	1,413	2,825	7,061	14,121	28,242	70,603	141,206	
13	23	37	83	158	313	770	1,522	3,044	7,609	15,218	30,435	76,087	152,173	
14	24	40	89	171	336	825	1,632	3,262	8,156	16,311	32,621	81,552	163,103	
14	26	43	95	183	358	880	1,740	3,480	8,700	17,400	34,800	87,000	173,999	

Примечания: 1. Необходимо отметить, что для входа в таблицу требуется только отношение  $t$  (времени испытания для каждого изделия) к  $\hat{\theta}_L$ .

2. Величина  $1 - \gamma$  — эквивалентна максимуму риска потребителя при  $\hat{\theta}_L$ .

3. Последние четыре или пять колонок включены в таблицу лишь из-за требования к объему выборки, и ожидается, что их содержимое не будет использоваться без проверки соответствия допущения о показателем распределения исследуемому процессу.

Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени  $t$   
 для обеспечения средней наработки по меньшей мере  $\hat{t}_L$  при доверительном уровне  
 $\gamma = 80\%$ , где допустимое число отказов равно  $F^*$

F	$t/\hat{t}_L$												
	1.0	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001
0								339	846	1,692	3,384	8,459	16,918
1	2	4	9	17	33	81	161	619	1,547	3,093	6,185	15,463	30,925
2	6	10	23	45	88	217	428	878	2,194	4,388	8,776	21,939	43,877
3	8	13	30	57	113	280	551	1,126	2,815	5,630	11,260	28,149	56,298
4	10	16	36	70	138	341	672	1,370	3,424	6,848	13,695	34,238	68,475
5	11	19	42	83	162	401	790	1,609	4,021	8,041	16,081	40,201	80,401
6	13	22	49	95	187	460	906	1,844	4,609	9,217	18,433	46,082	92,164
7	15	25	55	107	211	520	1,038	2,076	5,190	10,380	20,760	51,900	103,799
8	16	28	62	119	234	580	1,154	2,307	5,767	11,534	23,067	57,666	115,332
9	18	30	68	131	257	636	1,268	2,536	6,339	12,678	25,356	63,390	126,779
10	20	33	74	143	281	692	1,382	2,764	6,908	13,814	27,631	69,077	138,153
11	22	36	80	155	305	750	1,495	2,990	7,474	14,947	29,893	74,733	149,465
12	23	39	86	167	328	805	1,608	3,215	8,036	16,072	32,144	80,360	160,720
13	25	41	92	178	351	862	1,720	3,439	8,597	17,193	34,386	85,964	171,928
14	27	44	98	190	374	918	1,831	3,662	9,155	18,310	36,619	91,547	183,095

\* См. примечания к табл. П2.

Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени  $t$  для обеспечения средней наработки по меньшей мере  $\hat{b}_L$  при доверительном уровне  $\gamma = 85\%$ , где допустимое число отказов равно  $F^*$

F	$t/\hat{b}_L$												
	1,0	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001
0	2	4	10	20	38	95	189	400	999	1,998	3,995	9,986	19,972
1	4	8	18	35	69	171	337	698	1,745	3,490	6,980	17,450	34,899
2	6	11	25	49	97	240	472	971	2,428	4,855	9,710	24,275	48,550
3	8	14	32	62	123	306	600	1,233	3,081	6,161	12,321	30,802	61,604
4	10	17	39	75	149	370	727	1,485	3,771	7,421	14,841	37,103	74,205
5	12	20	46	88	175	432	848	1,732	4,329	8,658	17,315	43,287	86,574
6	14	23	52	101	200	493	970	1,975	4,938	9,875	19,749	49,372	98,743
7	15	26	59	114	225	554	1,108	2,216	5,538	11,076	22,151	55,377	110,754
8	17	29	65	126	250	615	1,227	2,453	6,132	12,264	24,528	61,320	122,640
9	19	32	71	138	274	675	1,345	2,685	6,721	13,442	26,884	67,210	134,420
10	21	35	78	151	297	734	1,462	2,923	7,306	14,611	29,222	73,055	146,110
11	22	37	84	163	321	792	1,578	3,155	7,886	15,773	31,545	78,862	157,723
12	24	40	90	175	345	849	1,693	3,386	8,464	16,927	33,854	84,634	169,268
13	26	43	97	187	369	907	1,808	3,616	9,038	18,076	36,151	90,377	180,754
14	28	46	103	199	393	965	1,921	3,844	9,605	19,219	38,438	96,094	192,187

\* См. примечания к табл. П.2.

Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени  $t$  для обеспечения средней наработки по меньшей мере  $\hat{\theta}_L$  при доверительном уровне  $\gamma=90\%$ , где допустимое число отказов равно  $F^*$

F	$t / \hat{\theta}_L$												
	1,0	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001
0	3	5	12	24	47	116	231	461	1,152	2,303	4,606	11,513	23,026
1	5	9	20	40	79	195	390	778	1,946	3,891	7,780	19,450	38,898
2	7	12	28	55	109	266	533	1,065	2,662	5,323	10,645	26,612	53,223
3	9	15	35	69	137	333	668	1,337	3,341	6,681	13,362	33,404	66,808
4	11	19	42	83	164	398	798	1,599	3,997	7,994	15,988	39,968	79,936
5	13	22	49	97	190	462	927	1,855	4,638	9,275	18,549	46,374	92,747
6	15	25	56	110	217	528	1,054	2,107	5,267	10,533	21,064	52,661	105,322
7	16	28	63	123	243	589	1,178	2,355	5,886	11,771	23,542	58,855	117,710
8	18	31	70	136	269	648	1,300	2,599	6,498	12,995	25,990	64,974	129,948
9	20	34	76	149	294	709	1,421	2,842	7,103	14,206	28,412	71,030	142,060
10	22	37	83	161	319	770	1,541	3,082	7,704	15,407	30,814	77,034	154,068
11	23	40	89	174	344	830	1,660	3,320	8,300	16,598	33,197	82,991	165,982
12	25	42	95	187	369	888	1,779	3,557	8,891	17,782	35,564	88,908	177,816
13	27	45	102	199	393	947	1,896	3,792	9,479	18,958	37,916	94,790	189,580
14	29	48	108	212	417	1,007	2,013	4,026	10,064	20,128	40,256	100,640	201,280

\* См. примечания к табл. П.2.

Таблица П.6

Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени  $t$  для обеспечения средней наработки по меньшей мере  $\hat{\theta}_L$  при доверительном уровне  $\gamma=95\%$ , где допустимое число отказов равно  $F^*$

F	$t/\hat{\theta}_L$												
	1,0	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001
0	3	6	15	31	60	149	298	600	1,498	2,996	5,992	14,979	29,958
1	6	11	25	49	97	236	473	949	2,372	4,744	9,488	23,720	47,439
2	8	14	33	65	129	314	630	1,260	3,148	6,296	12,592	31,479	62,958
3	10	18	41	80	159	386	775	1,551	3,877	7,754	15,508	38,769	77,537
4	12	21	48	95	189	456	914	1,831	4,577	9,154	18,307	45,768	91,535
5	14	24	56	109	217	527	1,052	2,103	5,257	10,514	21,027	52,566	105,131
6	16	27	63	123	245	597	1,183	2,369	5,922	11,843	23,685	59,212	118,424
7	18	31	70	137	274	656	1,315	2,630	6,575	13,149	26,297	65,741	131,481
8	19	34	77	150	299	722	1,444	2,887	7,218	14,435	28,870	72,174	144,347
9	21	37	84	164	327	785	1,571	3,142	7,853	15,706	31,411	78,526	157,052
10	23	40	91	178	353	846	1,697	3,393	8,482	16,963	33,925	84,811	169,622
11	25	43	98	190	379	908	1,821	3,642	9,104	18,208	36,416	91,038	182,076
12	27	46	105	205	405	971	1,945	3,889	9,722	19,443	38,886	97,213	194,426
13	29	49	111	218	431	1,034	2,067	4,134	10,335	20,669	41,338	103,343	206,686
14	30	52	117	231	457	1,095	2,189	4,378	10,944	21,887	43,773	109,433	218,865

\* См. примечания к табл. П.2.

Таблица П.7  
**Объем выборки и критерии для подтверждения надежности при заданном доверительном уровне**

N	$\hat{R}_L$											
	$\gamma=0,80$				$\gamma=0,90$				$\gamma=0,95$			
	0,90	0,95	0,99	0,995	0,90	0,95	0,99	0,995	0,90	0,95	0,99	0,995
5	12,7	26,1	133	267	15,2	31,2	159	319	17,4	35,7	182	365
10	11,9	24,4	124	249	13,5	27,7	141	283	14,9	30,6	156	313
15	11,5	23,6	120	241	12,7	26,1	133	267	13,9	28,5	145	291
25	11,0	22,6	115	231	12,0	24,6	125	251	12,8	26,3	134	269
50	10,6	21,8	111	223	11,2	23,0	117	235	11,8	24,2	123	247
100	10,3	21,1	107	215	10,7	22,0	112	225	11,1	22,8	116	233
250	10,0	20,5	104	209	10,3	21,1	107	215	10,5	21,6	110	221
500	9,9	20,3	103	207	10,1	20,7	105	211	10,2	20,9	106	213

Примечания: 1. В методике исследований испытаний на долговечность в п. 10.7.1 при  $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N} \geq$  табличного значения надежности  $\hat{R}_L$  подтверждается при длительном уровне  $\gamma$ . Объем выборки рзеч N; заданное время работы T;  $t_1, \dots, t_N$  — наблюдаемые наработки до отказов.

2. Для методики из п. 10.7.2 заменить  $\hat{\theta}$  и N на  $\hat{\theta}_{r,N}$  и r соответственно.

3. Для методики из п. 10.8 заменить  $\hat{\theta}$  и N на  $\hat{\theta}_r$  и r соответственно.



### Квантили (процентные точки) распределения

<i>n</i>	0,05	0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	10	20	30
1	0,0 <sup>6</sup> 39	0,0 <sup>5</sup> 157	0,0 <sup>4</sup> 39	0,0 <sup>3</sup> 16	0,0 <sup>3</sup> 98	0,0 <sup>2</sup> 39	0,016	0,064	0,148
2	0,001	0,001	0,005	0,010	0,025	0,052	0,106	0,223	0,356
3	0,005	0,008	0,024	0,038	0,072	0,117	0,195	0,335	0,475
4	0,016	0,023	0,052	0,074	0,121	0,178	0,266	0,412	0,549
5	0,032	0,042	0,082	0,111	0,166	0,229	0,322	0,469	0,600
6	0,050	0,064	0,113	0,145	0,206	0,272	0,367	0,512	0,638
7	0,069	0,085	0,141	0,177	0,241	0,310	0,405	0,546	0,667
8	0,089	0,107	0,168	0,206	0,272	0,342	0,436	0,574	0,691
9	0,108	0,128	0,193	0,232	0,300	0,369	0,463	0,598	0,710
10	0,126	0,148	0,216	0,256	0,325	0,394	0,487	0,618	0,727
11	0,144	0,167	0,237	0,278	0,347	0,416	0,507	0,635	0,741
12	0,161	0,184	0,256	0,298	0,367	0,436	0,525	0,651	0,753
13	0,177	0,201	0,274	0,316	0,385	0,453	0,542	0,664	0,764
14	0,193	0,217	0,291	0,333	0,402	0,469	0,556	0,676	0,773
15	0,207	0,232	0,307	0,349	0,418	0,484	0,570	0,687	0,781
16	0,221	0,246	0,321	0,363	0,432	0,498	0,582	0,697	0,789
17	0,234	0,260	0,335	0,377	0,445	0,510	0,593	0,706	0,796
18	0,247	0,272	0,348	0,390	0,457	0,522	0,604	0,714	0,802
19	0,258	0,285	0,360	0,402	0,469	0,532	0,613	0,722	0,808
20	0,270	0,296	0,372	0,413	0,480	0,543	0,622	0,729	0,813
22	0,291	0,317	0,393	0,434	0,499	0,561	0,638	0,742	0,823
24	0,310	0,337	0,412	0,452	0,517	0,577	0,652	0,753	0,831
26	0,328	0,355	0,429	0,469	0,532	0,592	0,665	0,762	0,838
28	0,345	0,371	0,445	0,484	0,547	0,605	0,676	0,771	0,845
30	0,360	0,386	0,460	0,498	0,560	0,616	0,687	0,779	0,850

$\chi^2_n/n$  (где  $n$ —число степеней свободы)

40	50	60	70	80	90	95	97,5	99	99,5	99,9	99,95	$n$
0,275	0,455	0,708	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,64	7,88	10,83	12,12	1
0,511	0,693	0,916	1,20	1,61	2,30	3,00	3,69	4,61	5,30	6,91	7,60	2
0,623	0,789	0,982	1,22	1,55	2,08	2,60	3,12	3,78	4,28	5,42	5,91	3
0,688	0,839	1,011	1,22	1,50	1,94	2,37	2,79	3,32	3,72	4,62	5,00	4
0,731	0,870	1,03	1,21	1,46	1,85	2,21	2,57	3,02	3,35	4,10	4,42	5
0,762	0,891	1,04	1,21	1,43	1,77	2,10	2,41	2,80	3,09	3,74	4,02	6
0,785	0,907	1,04	1,20	1,40	1,72	2,01	2,29	2,64	2,90	3,47	3,72	7
0,803	0,918	1,04	1,19	1,38	1,67	1,94	2,19	2,51	2,74	3,27	3,48	8
0,817	0,927	1,05	1,18	1,36	1,63	1,88	2,11	2,41	2,62	3,10	3,30	9
0,830	0,934	1,05	1,18	1,34	1,60	1,83	2,05	2,32	2,52	2,96	3,14	10
0,840	0,940	1,05	1,17	1,33	1,57	1,79	1,99	2,25	2,43	2,84	3,01	11
0,848	0,945	1,05	1,17	1,32	1,55	1,75	1,94	2,18	2,36	2,74	2,90	12
0,856	0,949	1,05	1,16	1,31	1,52	1,72	1,90	2,13	2,29	2,66	2,81	13
0,863	0,953	1,05	1,16	1,30	1,50	1,69	1,87	2,08	2,24	2,58	2,72	14
0,869	0,956	1,05	1,15	1,29	1,49	1,67	1,83	2,04	2,19	2,51	2,65	15
0,874	0,959	1,05	1,15	1,28	1,47	1,64	1,80	2,00	2,14	2,45	2,58	16
0,879	0,961	1,05	1,15	1,27	1,46	1,62	1,78	1,97	2,10	2,40	2,52	17
0,883	0,963	1,05	1,14	1,26	1,44	1,60	1,75	1,93	2,06	2,35	2,47	18
0,887	0,965	1,05	1,14	1,26	1,43	1,59	1,73	1,90	2,03	2,31	2,42	19
0,890	0,967	1,05	1,14	1,25	1,42	1,57	1,71	1,88	2,00	2,27	2,37	20
0,897	0,970	1,05	1,13	1,24	1,40	1,54	1,67	1,83	1,95	2,19	2,30	22
0,902	0,972	1,05	1,13	1,23	1,38	1,52	1,64	1,79	1,90	2,13	2,23	24
0,907	0,974	1,05	1,12	1,22	1,37	1,50	1,61	1,76	1,86	2,08	2,17	26
0,911	0,976	1,04	1,12	1,22	1,35	1,48	1,59	1,72	1,82	2,03	2,12	28
0,915	0,978	1,04	1,12	1,21	1,34	1,46	1,57	1,70	1,79	1,99	2,07	30

$n$	0,05	0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	10	20	30
35	0,394	0,420	0,491	0,529	0,588	0,642	0,708	0,795	0,862
40	0,423	0,448	0,518	0,554	0,611	0,663	0,726	0,809	0,872
45	0,448	0,472	0,540	0,576	0,630	0,680	0,741	0,820	0,880
50	0,469	0,494	0,560	0,594	0,647	0,695	0,754	0,829	0,886
55	0,488	0,512	0,577	0,610	0,662	0,708	0,765	0,837	0,892
60	0,506	0,529	0,592	0,625	0,675	0,720	0,774	0,844	0,897
70	0,535	0,558	0,618	0,649	0,697	0,739	0,790	0,856	0,905
80	0,560	0,582	0,640	0,669	0,714	0,755	0,803	0,865	0,911
90	0,581	0,602	0,658	0,686	0,729	0,768	0,814	0,873	0,917
100	0,599	0,619	0,673	0,701	0,742	0,779	0,824	0,879	0,921
120	0,629	0,648	0,699	0,724	0,763	0,798	0,839	0,890	0,929
140	0,653	0,671	0,719	0,743	0,780	0,812	0,850	0,898	0,934
160	0,673	0,690	0,736	0,758	0,793	0,824	0,860	0,905	0,939
180	0,689	0,706	0,749	0,771	0,804	0,833	0,868	0,910	0,942
200	0,703	0,719	0,761	0,782	0,814	0,841	0,874	0,915	0,945
250	0,732	0,746	0,785	0,804	0,832	0,858	0,887	0,924	0,951
300	0,753	0,767	0,802	0,820	0,846	0,870	0,897	0,931	0,956
350	0,770	0,783	0,816	0,833	0,857	0,879	0,904	0,936	0,959
400	0,784	0,796	0,827	0,843	0,866	0,887	0,911	0,940	0,962
450	0,795	0,807	0,837	0,852	0,874	0,893	0,916	0,944	0,964
500	0,805	0,816	0,845	0,859	0,880	0,898	0,920	0,946	0,966
750	0,839	0,848	0,872	0,884	0,901	0,917	0,934	0,956	0,972
1000	0,859	0,868	0,889	0,899	0,914	0,928	0,943	0,962	0,976
5000	0,936	0,939	0,949	0,954	0,961	0,967	0,974	0,983	0,989
$\infty$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Примечание.  $x_{n; \alpha}^2$  означает квантиль, где  $n$ —число степеней свободы,  
Например:  $x_{10; 0,95}^2/10=1,83$ ;  $x_{10; 0,95}^2/10=0,394$ .

Продолжение табл. П.8

40	50	60	70	80	90	95	97,5	99	99,5	99,9	99,95	n
0,922	0,981	1,04	1,11	1,19	1,32	1,42	1,52	1,64	1,72	1,90	1,98	35
0,928	0,983	1,04	1,10	1,18	1,30	1,39	1,48	1,59	1,67	1,84	1,90	40
0,933	0,985	1,04	1,10	1,17	1,28	1,37	1,45	1,55	1,63	1,78	1,84	45
0,937	0,987	1,04	1,09	1,16	1,26	1,35	1,43	1,52	1,59	1,73	1,79	50
0,941	0,988	1,04	1,09	1,16	1,25	1,33	1,41	1,50	1,56	1,69	1,75	55
0,944	0,989	1,04	1,09	1,15	1,24	1,32	1,39	1,47	1,53	1,66	1,71	60
0,949	0,990	1,03	1,08	1,14	1,22	1,29	1,36	1,43	1,49	1,60	1,65	70
0,952	0,992	1,03	1,08	1,13	1,21	1,27	1,33	1,40	1,45	1,56	1,60	80
0,955	0,993	1,03	1,07	1,12	1,20	1,26	1,31	1,38	1,43	1,52	1,56	90
0,958	0,993	1,03	1,07	1,12	1,18	1,24	1,30	1,36	1,40	1,49	1,53	100
0,962	0,994	1,03	1,06	1,11	1,17	1,22	1,27	1,32	1,36	1,45	1,48	120
0,965	0,995	1,03	1,06	1,10	1,16	1,20	1,25	1,30	1,33	1,41	1,44	140
0,968	0,996	1,02	1,06	1,09	1,15	1,19	1,23	1,28	1,31	1,38	1,41	160
0,970	0,996	1,02	1,05	1,09	1,14	1,18	1,22	1,26	1,29	1,36	1,38	180
0,972	0,997	1,02	1,05	1,08	1,13	1,17	1,21	1,25	1,28	1,34	1,36	200
0,975	0,997	1,02	1,04	1,07	1,12	1,15	1,18	1,22	1,25	1,30	1,32	250
0,977	0,998	1,02	1,04	1,07	1,11	1,14	1,17	1,20	1,22	1,27	1,29	300
0,979	0,998	1,02	1,04	1,06	1,10	1,13	1,15	1,18	1,21	1,25	1,27	350
0,981	0,998	1,02	1,04	1,06	1,09	1,12	1,14	1,17	1,19	1,24	1,25	400
0,982	0,999	1,02	1,03	1,06	1,09	1,11	1,13	1,16	1,18	1,22	1,23	450
0,983	0,999	1,01	1,03	1,05	1,08	1,11	1,13	1,15	1,17	1,21	1,22	500
0,986	0,999	1,01	1,03	1,04	1,07	1,09	1,10	1,12	1,14	1,17	1,18	750
0,988	0,999	1,01	1,02	1,04	1,06	1,07	1,09	1,11	1,12	1,14	1,15	1000
0,995	1,00	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,07	5000
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\infty$

который превышает с вероятностью  $\alpha$ .

## Толерантные множители для

Коэффициенты  $K$  соответствуют вероятности  $\gamma$  того, что по (или больше  $\bar{x} - Ks'$ ), где  $\bar{x}$  и  $s'$  — оценки среднего и стандартного

$a$	$\gamma=0,75$					$\gamma=0,90$				
	$n$	0,25	0,10	0,05	0,01	0,001	0,25	0,10	0,05	0,01
3	1,464	2,501	3,152	4,396	5,805	2,602	4,258	5,310	7,340	9,651
4	1,256	2,134	2,680	3,726	4,910	1,972	3,187	3,957	5,437	7,128
5	1,152	1,961	2,463	3,421	4,507	1,698	2,742	3,400	4,666	6,112
6	1,087	1,860	2,336	3,243	4,273	1,540	2,494	3,091	4,242	5,556
7	1,043	1,791	2,250	3,126	4,118	1,435	2,333	2,894	3,972	5,201
8	1,010	1,740	2,190	3,042	4,008	1,360	2,219	2,755	3,783	4,955
9	0,984	1,702	2,141	2,977	3,924	1,302	2,133	2,649	3,641	4,772
10	0,964	1,671	2,103	2,927	3,858	1,257	2,065	2,568	3,532	4,629
11	0,947	1,646	2,073	2,885	3,804	1,219	2,012	2,503	3,444	4,515
12	0,933	1,624	2,048	2,851	3,760	1,188	1,966	2,448	3,371	4,420
13	0,919	1,606	2,026	2,822	3,722	1,162	1,928	2,403	3,310	4,341
14	0,909	1,591	2,007	2,796	3,690	1,139	1,895	2,363	3,257	4,274
15	0,899	1,577	1,991	2,776	3,661	1,119	1,866	2,329	3,212	4,215
16	0,891	1,566	1,977	2,756	3,637	1,101	1,842	2,299	3,172	4,164
17	0,883	1,554	1,964	2,739	3,615	1,085	1,820	2,272	3,136	4,118
18	0,876	1,544	1,951	2,723	3,595	1,071	1,800	2,249	3,106	4,078
19	0,870	1,536	1,942	2,710	3,577	1,058	1,781	2,228	3,078	4,041
20	0,865	1,528	1,933	2,697	3,561	1,046	1,765	2,208	3,052	4,009
21	0,859	1,520	1,923	2,686	3,545	1,035	1,750	2,190	3,028	3,979
22	0,854	1,514	1,916	2,675	3,532	1,025	1,736	2,174	3,007	3,952
23	0,849	1,508	1,907	2,665	3,520	1,016	1,724	2,159	2,987	3,927
24	0,845	1,502	1,901	2,656	3,509	1,007	1,712	2,145	2,969	3,904
25	0,842	1,496	1,895	2,647	3,497	0,999	1,702	2,132	2,952	3,882
30	0,825	1,475	1,869	2,613	3,454	0,966	1,657	2,080	2,884	3,794
35	0,812	1,458	1,849	2,588	3,421	0,942	1,623	2,041	2,833	3,730
40	0,803	1,445	1,834	2,568	3,395	0,923	1,598	2,010	2,793	3,679
45	0,795	1,435	1,821	2,552	3,375	0,908	1,577	1,986	2,762	3,638
50	0,788	1,426	1,811	2,538	3,358	0,894	1,560	1,965	2,735	3,604

\*  $s'$  — корень квадратный из несмещенной оценки дисперсии (см. § 8.7).

Таблица П.9

## нормальных распределений

крайней мере  $(1-\alpha)$ -я доля распределения будет меньше  $\bar{x} + Ks'$  отклонения\*, вычисленных из выборки объема  $n$ .

$\gamma=0,95$					$\gamma=0,99$				
0,25	0,10	0,05	0,01	0,001	0,25	0,10	0,05	0,01	0,001
3,804	6,158	7,655	10,552	13,857					
2,619	4,163	5,145	7,042	9,215					
2,149	3,407	4,202	5,741	7,501					
1,895	3,006	3,707	5,062	6,612	2,849	4,408	5,409	7,334	9,540
1,732	2,755	3,399	4,641	6,061	2,490	3,856	4,736	6,411	8,348
1,617	2,582	3,188	4,353	5,686	2,252	3,496	4,287	5,811	7,566
1,532	2,454	3,031	4,143	5,414	2,085	3,242	3,971	5,389	7,014
1,465	2,355	2,911	3,981	5,203	1,954	3,048	3,739	5,075	6,603
1,411	2,275	2,815	3,852	5,036	1,854	2,897	3,557	4,828	6,284
1,366	2,210	2,736	3,747	4,900	1,771	2,773	3,410	4,633	6,032
1,329	2,155	2,670	3,659	4,787	1,702	2,677	3,290	4,472	5,826
1,296	2,108	2,614	3,585	4,690	1,645	2,592	3,189	4,336	5,651
1,268	2,068	2,566	3,520	4,607	1,596	2,521	3,102	4,224	5,507
1,242	2,032	2,523	3,463	4,534	1,553	2,458	3,028	4,124	5,374
1,220	2,001	2,486	3,415	4,471	1,514	2,405	2,962	4,038	5,268
1,200	1,974	2,453	3,370	4,415	1,481	2,357	2,906	3,961	5,167
1,183	1,949	2,423	3,331	4,364	1,450	2,315	2,855	3,893	5,078
1,167	1,926	2,396	3,295	4,319	1,424	2,275	2,807	3,832	5,003
1,152	1,905	2,371	3,262	4,276	1,397	2,241	2,768	3,776	4,932
1,138	1,887	2,350	3,233	4,238	1,376	2,208	2,729	3,727	4,866
1,126	1,869	2,329	3,206	4,204	1,355	2,179	2,693	3,680	4,806
1,114	1,853	2,309	3,181	4,171	1,336	2,154	2,663	3,638	4,755
1,103	1,838	2,292	3,158	4,143	1,319	2,129	2,632	3,601	4,706
1,059	1,778	2,220	3,064	4,022	1,249	2,029	2,516	3,446	4,508
1,025	1,732	2,166	2,994	3,934	1,195	1,957	2,431	3,334	4,364
0,999	1,697	2,126	2,941	3,866	1,154	1,902	2,365	3,250	4,255
0,978	1,669	2,092	2,897	3,811	1,122	1,857	2,313	3,181	4,168
0,961	1,646	2,065	2,863	3,766	1,096	1,821	2,296	3,124	4,096

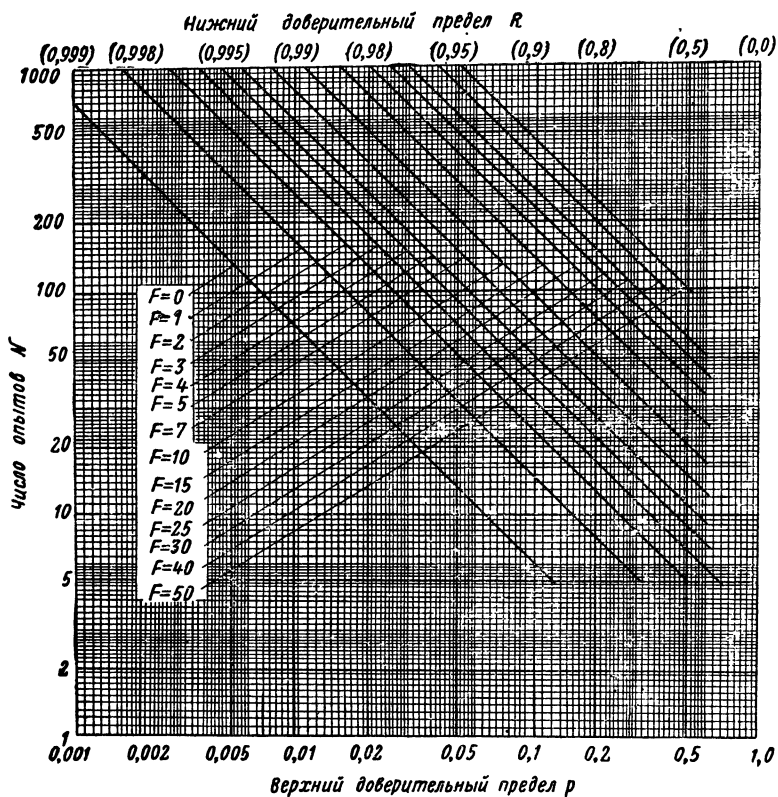


Рис. П.1. Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов  $N$ , наблюдаемых отказов  $F$  и доверительном уровне  $\gamma=0,50$ .

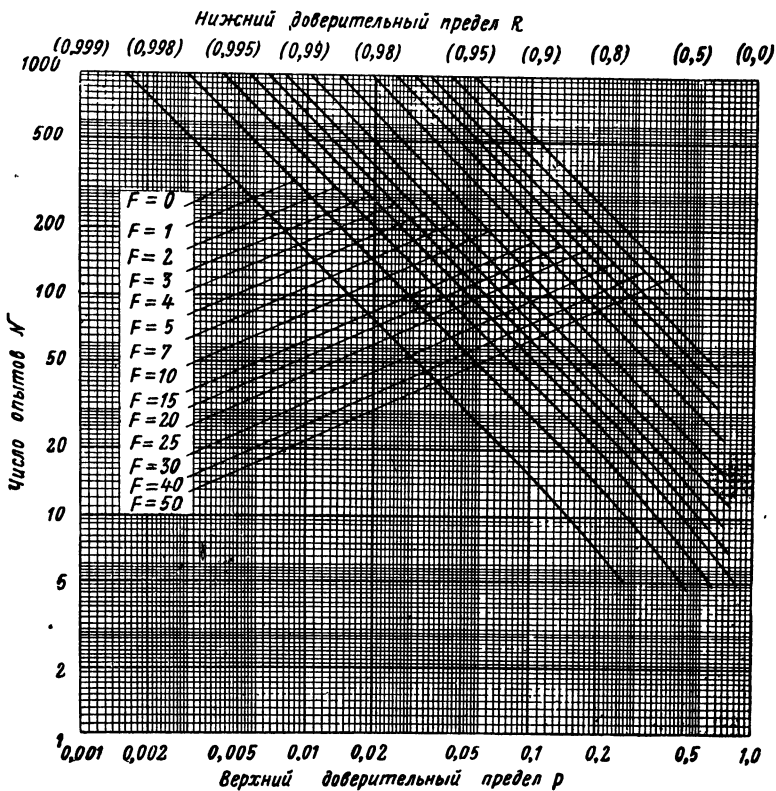


Рис. П.2. Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов  $N$ , наблюдаемых отказах  $F$  и доверительном уровне  $\gamma=0,80$ .



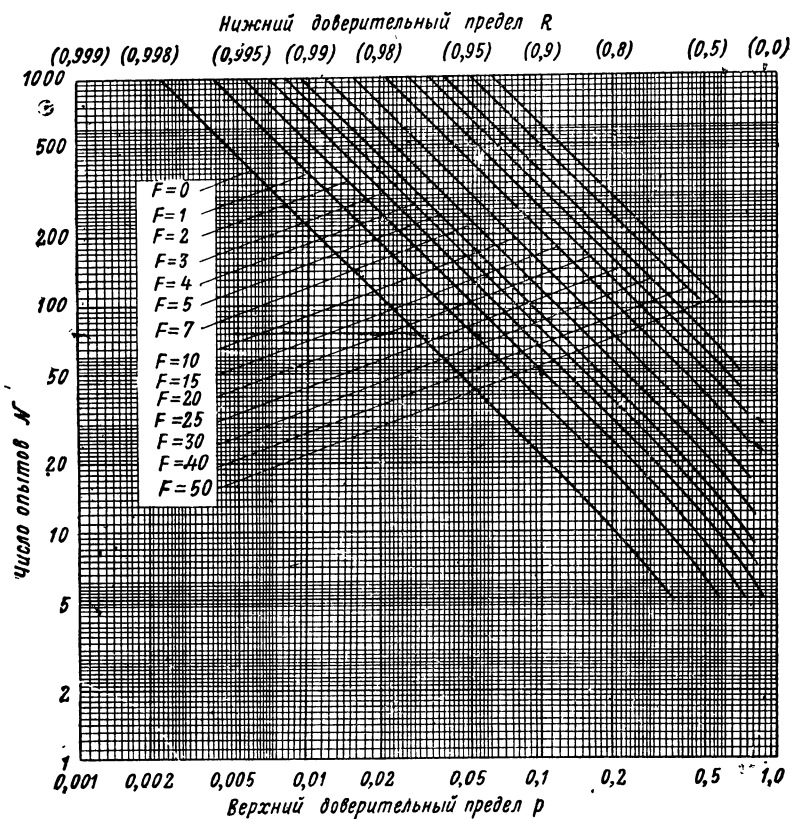


Рис. П.3. Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов  $N$ , наблюдаемых отказах  $F$  и доверительном уровне  $\gamma=0,90$ .

Нижний доверительный предел  $R$

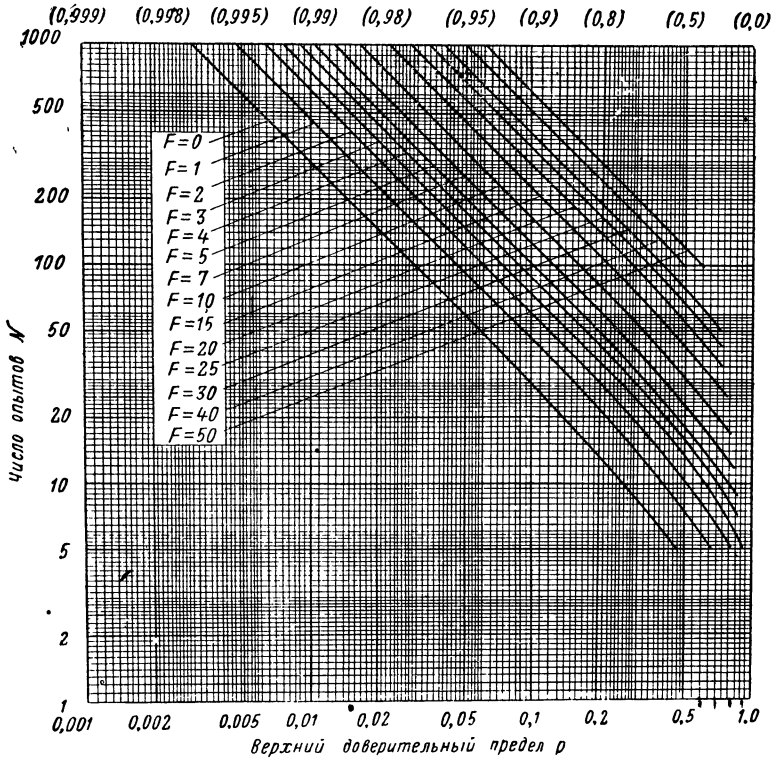


Рис. П.4. Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов  $N$ , наблюдаемых отказов  $F$  и доверительном уровне  $\gamma=0,95$ .

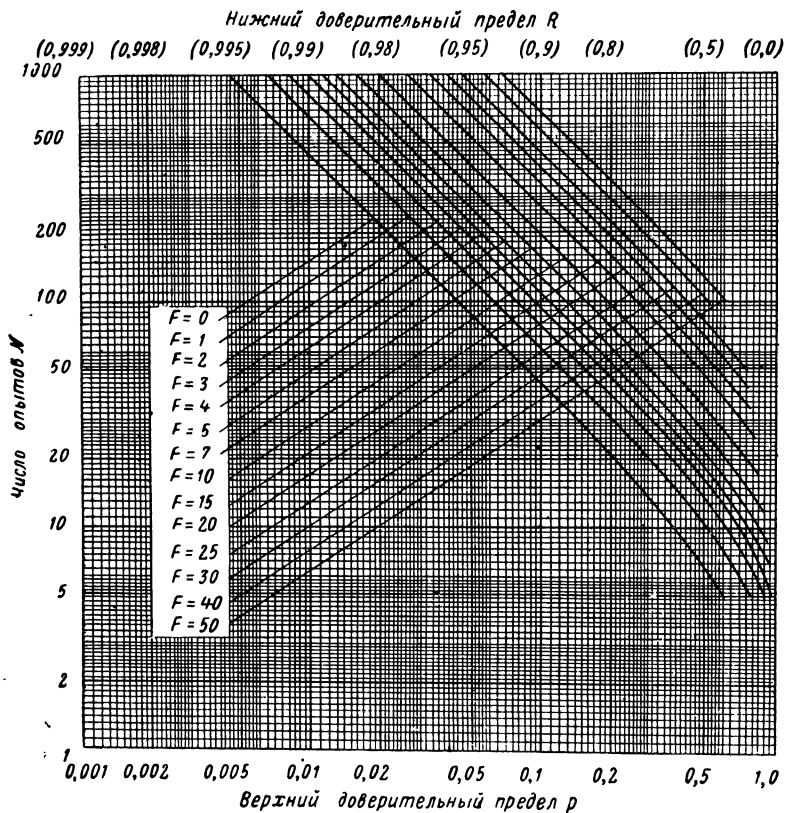


Рис. П.5. Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов  $N$ , наблюдаемых отказов  $F$  и доверительном уровне  $\gamma=0,99$ .

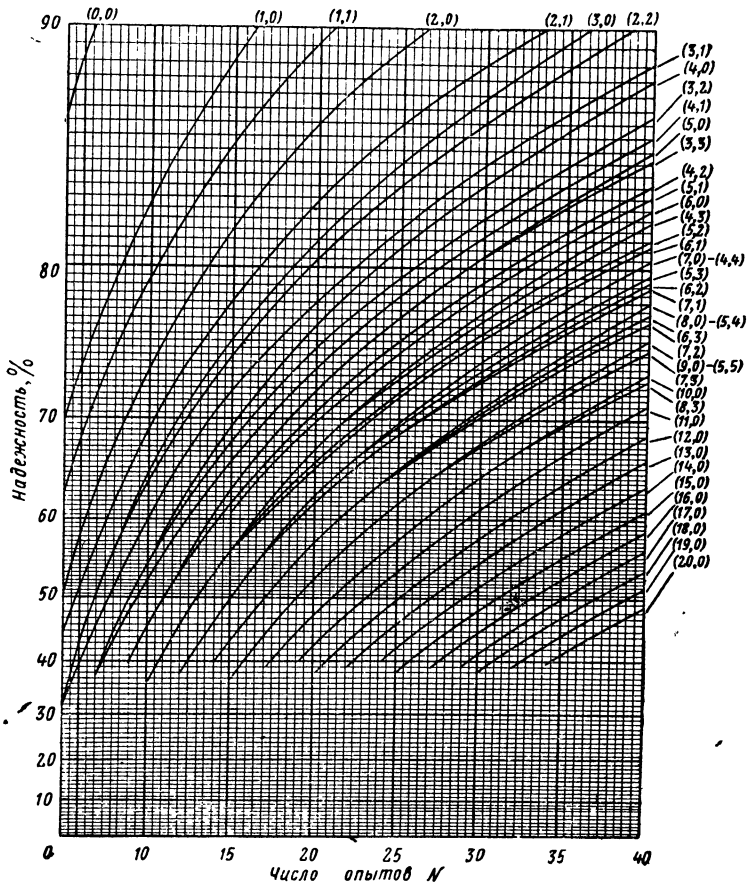


Рис. П.6. 50-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из двух подсистем.  $N$  опытов с каждой подсистемой. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны.)

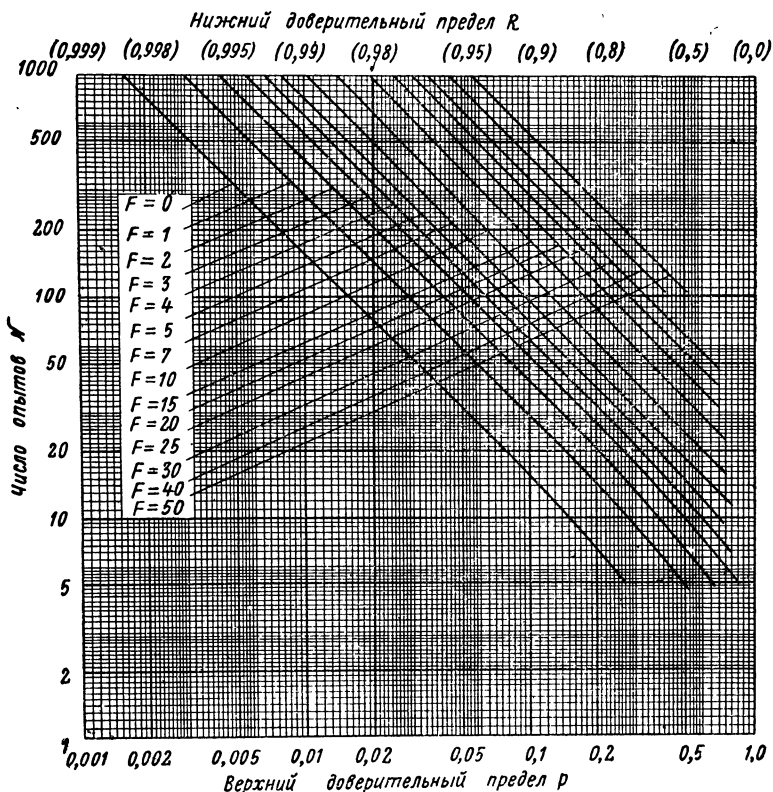


Рис. П.7. 90-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из двух подсистем.  $N$  опытов с каждой подсистемой. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны.)

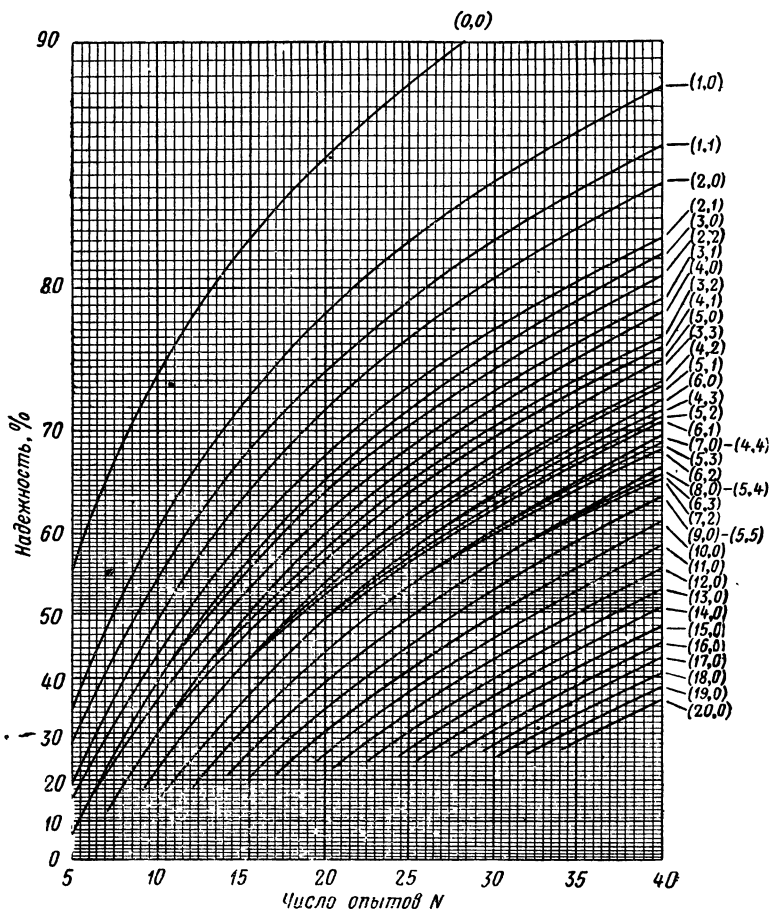


Рис. П.8. 95-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из двух подсистем.  $N$  опытов с каждой подсистемой. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны.)

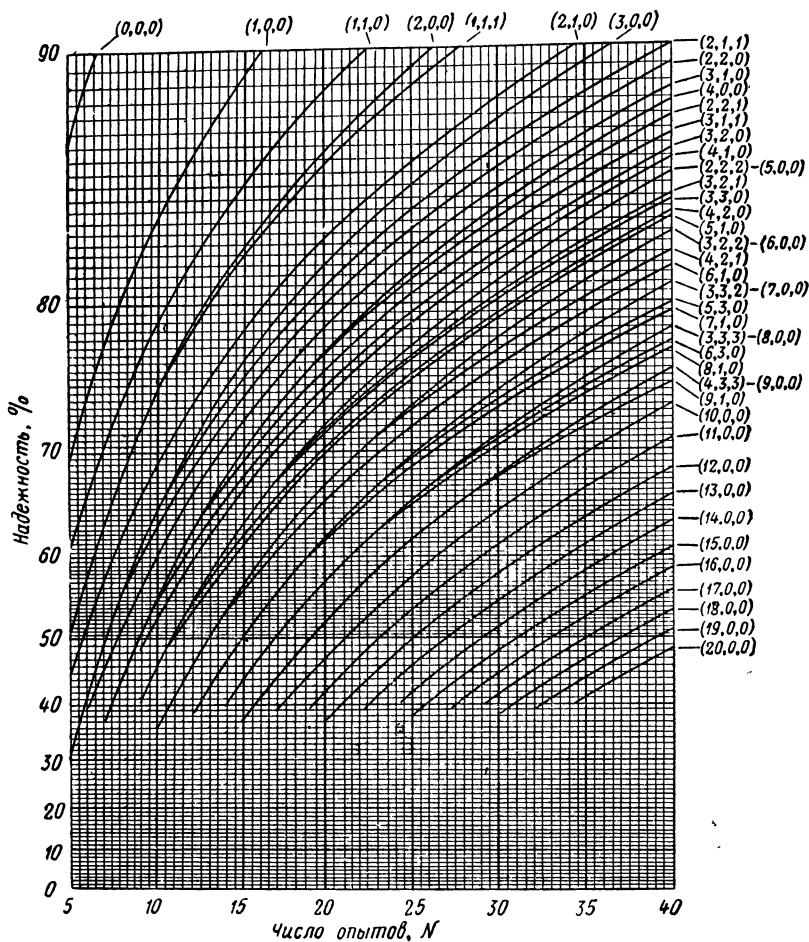


Рис. П.9. 50-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из трех подсистем. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны.)

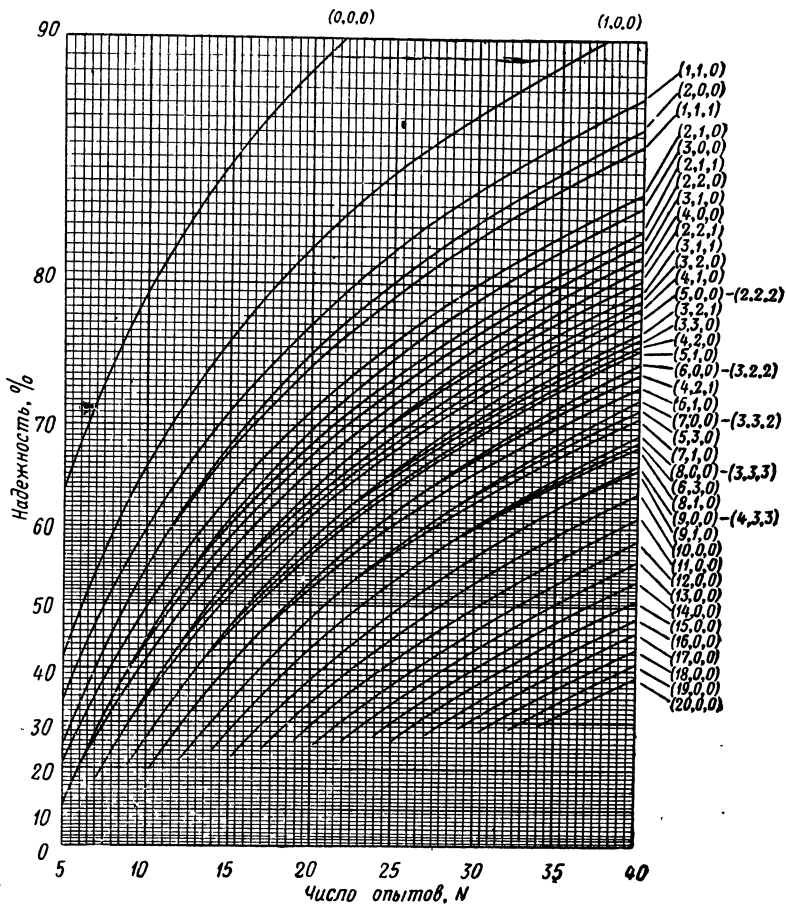


Рис. П.10. 90-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из трех подсистем. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны.)



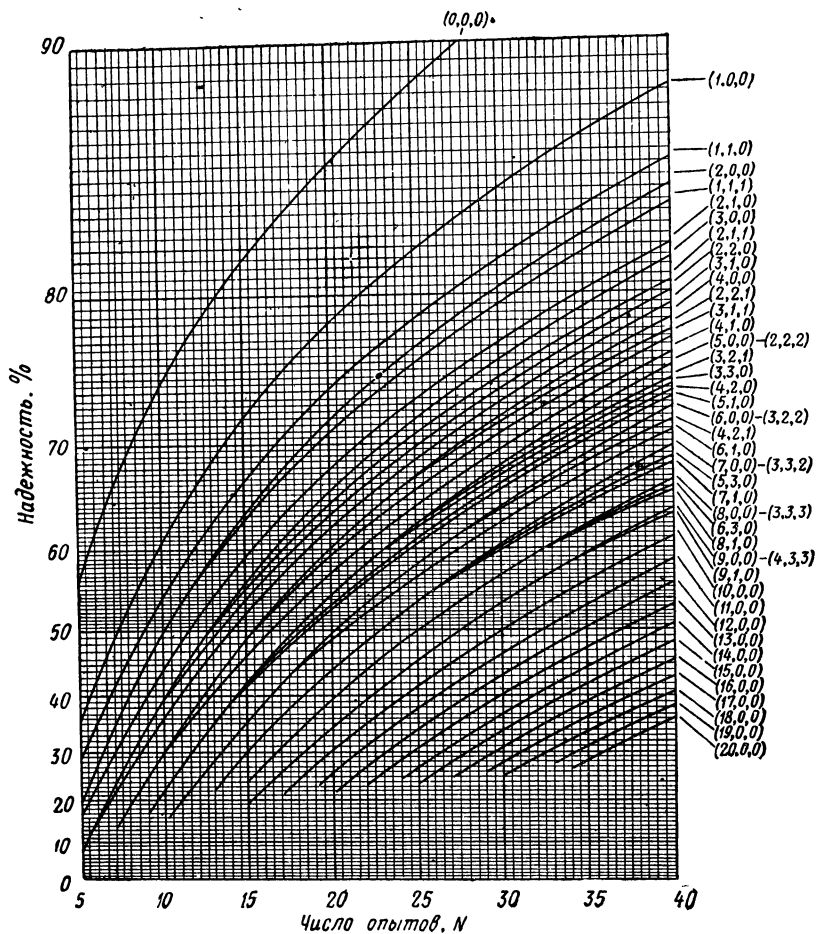


Рис. П.111. 95-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из трех подсистем. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны.)

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

Анализ с точки зрения надежности (reliability analysis) 46

— системы регулирования температуры космического корабля (of space vehicle temperature control system) 325

Арксинус-преобразование (arcsine transformation) 210, 250, 251

Асимптотическая нормальность (asymptotic normality) см. нормальная аппроксимация 210, 218

Асимптотически несмещенная оценка (asymptotically unbiased estimator) 217

Ассоциативный закон (associative law), см. табл. 5.1 108

### Б

Безусловное распределение (marginal distribution) 138, 140

— случайных величин для дискретного распределения (for discrete distribution) 143

Биномиальное распределение (binominal distribution) 93, 120, 128, 135, 214

— примеры 137, 140

— отказов (of failures) 155

— среднее (mean) 157

— нормальная аппроксимация (normal approximation) 159

— связь с отрицательным биномиальным распределением (relation to negative binomial distribution) 169

— успехов (of successes) 156

— дисперсии (variance) 157, 158.

Биномиальные выборочные планы (binomial sampling plans)

— параметры (parameters) 360

— применение при оценке надежности турбогенератора (turbo-generator) 573

— граничные точки (boundary points of) 360

— критерии для планов с выборкой постоянного объема или укороченных выборочных планов (criteria for fixed sample size or curtailed sampling plan) 373

— оптимальный план для заданной функции оперативной характеристики (optimum plan for given operating characteristic function) 370

- с использованием модели распределения времени безотказной работы (time-to-failure model) 381
- последовательный план Вальда (Wald sequential) 373, 376
- Биномиальные доверительные пределы (binomial confidence limits) 269
- точные (exact) 273
- Биномиальные коэффициенты (binomial coefficients) 120, 367
- Бюджет и надежность (budget and reliability) 15

## В

- Вероятность (probability)
  - свойство аддитивности (additive property) 111
  - условная вероятность (conditional) 113, 122
  - ошибки при принятии решения (of error in making decision) 374
  - одновременного осуществления двух событий 137
- Вероятности состояния (state probabilities) 193, 418
- Весовой коэффициент (weighting factor)
  - вычисление (computation) 598
  - определение 598
  - пример вычисления 600
  - приложения 39, 598
  - дисперсия (variance of) 614
- Взаимодействие элементов (component interaction) 99
- Внезапный отказ (random failure) 18, 19
- Внешние факторы (environmen-

- tal factors), см. факторы внешних условий 465
- установление важности (establishing importance of) 465
- Выборка случайная (sample random) 145
- Выборочная дисперсия (sample variance) 149
  - несмещенная оценка дисперсии основного распределения (unbiased estimator of population variance), см. дисперсия 149
- Выборочное распределение (sample distribution) 147
- Выборочное среднее (sample mean) 148
  - как состоятельная оценка истинного среднего совокупности (as consistent estimator for population mean) 215
  - определение 148
  - как несмещенная оценка истинного среднего совокупности (as unbiased estimator for population mean), см. среднее 215, 216
- Выборочные методы (sampling) 101, 145, 175, 354, 356
  - биномиальные (binomial) 155, 357, 359
  - укороченные (curtailed) 363
  - цензурированные (censored) 146, 391, 397
  - частичное укорачивание (partial curtailment of) 385
  - целевая выборка (purposive) 146
  - для оценки выполнения требований по надежности (for reliability demonstration) 354
  - последовательная выборка

- (sequential) 146, 177, 376, 403, 574
- простая случайная выборка (simple random) 146
- расслоенная выборка (stratified) 146
- усечение выборки (truncation of) 357, 373, 381, 397, 404
- Выборочные пространства (sample space) 105, 145
- при биномиальных испытаниях (for binomial trials) 175, 270, 360
- непрерывные (continuuous) 105, 124
- счетные (denumerable) 105
- дискретные (discrete) 105
- несчетные (non-denumerable) 105
- выборочные точки (sample points of), см. событие 105
- Выборочный момент (sample moment) 148

## Г

- Гамма-распределение (gamma-distribution) 137, 199, 228, 258, 260
- как предельная форма отрицательного биномиального распределения (as limiting form of negative binomial distribution) 171
- связь с  $\chi^2$ -распределением (relation to Chi-square distribution) 220
- как специальный случай плотности вероятности распределения времени безотказной работы (as a special case of the generalized time-to-failure distribution) 203

- Гамма-функция (gamma-function) 131, 136, 172, 174, 186, 198, 199, 208, 220, 228, 236, 258, 260
- ссылка на таблицы 236
- Геометрическое распределение (geometric distribution) 124, 165
- предельная форма (limiting form of) 171
- Главный перечень элементов (master list of components) 52
- использование 595
- Граница приемки (acceptance boundary)
  - для биномиальных выборочных методов (или планов) (for binomial sampling plans) 360
  - для последовательного плана Вальда (for Wald sequential plan) 376
  - для последовательного плана Вальда испытаний на долговечность (for Wald sequential life-test sampling plan) 405
- Граница браковки (rejection boundary)
  - для общей схемы биномиальной выборки (биномиального выборочного плана) (for general binomial sampling plan) 360—365
  - для последовательного выборочного плана Вальда при испытаниях на долговечность (for Wald sequential life-test sampling plan) 376, 405
- Граничные испытания (peripheral testing) 445

- при подтверждении надежности (in demonstration of required reliability) 469
- исключение испытаний в программе оценки надежности (exclusion of tests in reliability evaluation program) 573
- Граничные точки (boundary points)
  - биномиальных выборочных планов (of binomial sampling plans) 360
- Греко-латинский квадрат (graeco-latin square) 473
  - статистический план испытаний ракетного двигателя на твердом топливе (statistical design for solid propellant rocket engine) 462
- Группа надежности (reliability group)
  - деятельность (activities) 27, 31, 36
  - эффективность (effectivity) 34
  - необходимость официальной координации работ с остальными организационными единицами предприятия (need for formal coordination) 54
  - положение, занимаемое на предприятии (position in organization) 31
- Группировка результатов испытаний (combining test results)
  - справедливость (validity of) 89
- Д
  - анализ для оценки надежности ЖРД (for reliability evaluation of liquid rocket engine) 597
  - качественные (attribute), определение 92
  - центральная картотека (central file) 63
    - сбор (collection of) 59
  - текущие (current), определение 566
  - неправильная обработка (deficient handling) 21
  - расчет рассылки (distribution) 62
  - толкование (interpretation of) 37, 54, 63
  - однородность (homogeneity of) 63
  - полнота (integrity of) 54, 560
  - тип данных, используемых при оценке надежности ЖРД 595, 597
  - заявление перед испытанием (pretest declaration) 84
  - центральная картотека информации о надежности (reliability central file) 80
  - примеры 81—84
  - представительные, репрезентативные (representative) методы отбора (method of control) 556
  - последовательные (sequential)
    - — достоинства (advantages) 475
    - — недостатки (disadvantages) 475
  - необходимость преобразования (need for transformation) 466
- Данные (информация) (data)
  - анализ (analysis of) 63

- виды исходных данных 91, 92
- организация обмена (transmittal) 21
- Датчик критического состояния (abort sensing system) 311
- Дельта-функция Дирака (Dirac delta-function) 349
- Диаграмма рассеивания (scatter diagram), см. случайно сбалансированные планы 495
- Дискретные распределения вероятностей (discrete distributions), см. распределения вероятностей и функция распределения 119
- Дисперсионный анализ (analysis of variance)
  - для непрерывных экспериментальных планов (in continuous experimental designs) 477
  - при определении компонентов дисперсии (in determining components of variation) 454
- Дисперсия (variance)
  - определение 131
  - для арксинус-преобразования биномиальной совокупности (for arcsine transformation) 251
  - биномиального распределения (of binomial distribution) 157, 158
  - постоянной (of constant) 150
  - функции (of a function)
  - — нескольких случайных величин (of several random variables) 334
  - оценки однопараметрического распределения (of a single parameter estimator) 249
- оценка двухпараметрического распределения (of two parameter estimators) 253
- гамма-распределения (for gamma-distribution) 200
- выборочного распределения (sample distribution) 149
- среднего случайной выборки (of sample mean) 151
- — приложения (application) 217
- выборочного стандартного отклонения (of sample standard deviation) 217
- выборочной дисперсии (of sample variance) 252
- — для нормального распределения 151
- весовых коэффициентов (of weighting factors) 614
- линейной функции (of linear function) 144
- оценки максимального правдоподобия (of maximum likelihood estimator) 223
- — для многопараметрических распределений (for multiparameter distributions) 231
- — для отрицательного биномиального распределения (for negative binomial distributions) 223
- произведения (of product) 145
- функции надежности (of reliability function) 250
- — при показательном распределении (exponential distribution) 253
- — при гамма-распределении (gamma-distribution) 259

- при нормальном распределении (normal distribution) 254, 266
  - при распределении Вейбулла (Weibull distribution) 255, 256
  - оценок параметра роста надежности (of reliability growth parameter estimators) 431
- Дистрибутивный закон (distributive law), см. табл. 5.1 108, 112
- пересечения по отношению к объединению (of intersection with respect to union) 108
  - объединения по отношению к пересечению (of union with respect to intersection) 109
- Доверительные пределы (confidence limits)
- параметра биномиального распределения (on binomial parameter) 226, 248, 267, 269
  - в случае отрицательного биномиального распределения (in negative binomial sampling) 278
  - точные (exact)
  - — в случае биномиальной схемы (on binomial parameter) 273
  - — применительно к показательному распределению (on exponential reliability function) 253
  - — в случае гамма-распределения (on Gamma reliability function) 260
  - — в случае нормального распределения (on normal reliability function) 263, 266
  - — в случае распределения Вейбулла (on Weibull reliability function) 255
  - — средней выборки из нормальной совокупности (on mean of normal distribution) 225
  - — среднего времени безотказной работы (on mean time-tofailure) 248
  - — полученные путем нормального приближения (based on normal approximation) 225, 226, 248, 249, 252, 254, 256, 257, 259, 265, 266, 267, 293, 433, 614—616.
  - ограничения (limitations) 229
  - параметра распределения Пуассона (on the Poisson distribution parameter) 267, 279
  - вероятности удовлетворения требования к полному времени работы двигателя (on probability of meeting full duration requirement) 615
  - функции надежности (on reliability function)
  - — при показательном распределении (exponential distribution) 258
  - — при гамма-распределении (gamma-distribution) 258
  - — для независимой параллельной системы (of independent parallel system) 268, 306
- Доверительные уровни (confidence levels) 37, 96
- Доверительный предел (confi-

dence coefficient) 252, 354  
Донесение об отказах (failure report form) 61, 64  
— распределение (distribution of) 68  
— пример 66  
Донесение о наработке (log of operating time) 72  
Допуски (tolerances) 337  
— выражение через стандартные отклонения (standard deviations) 337  
Достоверность (assurance, statistical), см доверительные пределы и уровни 311

### Е

Единичная ступенчатая функция (unit step function), как функция распределения (as a distribution function) 129

### Ж

Жидкостный ракетный двигатель (ЖРД) (liquid propellant rocket engine)  
— критерии для классификации результатов испытаний (criteria for test classification)  
— — успех, отказ, исключение (success, failure, exclusion) 593  
— программа оценки надежности (reliability evaluation program) 589

### З

Зависимость, статистическая (dependence, statistical)  
— опытов в модели роста надежности (of trials in growth model), см независимость 420

Зависимость интенсивности отказов от условий применения деталей (part application failure rates) 318, 327, 328

— ссылки на таблицы 318

Задачи, возникающие при исследовании, надежности (reliability goals) 42

Закон больших чисел (law of large numbers) 158

Закон двойственности (dualization law), см. табл. 5.1 109

Закон инволюции (involution law), см. табл. 5.1 108

Закон погашения (absorption law), см. табл. 5.1

Замена изделий (replacement procedure)

— при испытаниях на время безотказной работы (in life testing) 384, 391

— в случае применения последовательного выборочного плана Вальда (in Wald sequential) 404

Замена элементов (component replacement) 345

Запрос группы надежности о корректирующем действии (reliability action request form) (образец) 70

Запятая (comma)

— используется вместо символа пересечения (in place of intersection symbol) 122, 138, 284

Значимое конструктивное изменение (significant design-change) в программе подтверждения надежности (in reliability demonstration program) 567



## И

Изменчивость (variability) числа опытов до принятия решения (of number of trials to reach decision), см. дисперсия 380

Изношенный элемент (wornout component), определение 596

Интенсивность отказов (hazard function)

— определение 183

— показательное распределение (for exponential distribution) 185

— распределение крайних значений (for extreme value distribution) 187

— гамма-распределение (for gamma-distribution) 186

— примеры 189, 190

— приложения к испытаниям на надежность (reliability demonstration procedure) 388

— свойства (properties) 183

— распределение Вейбулла (Weibull distribution) 185

Интенсивность отказов (failure rate)

— пример расчета изменения 586

— пример определения значимого изменения (of search for significant difference) 580

— проверка значимости расхождения между инт. отк. в совокупностях, образованных делящей точкой 579

— проверка изменения (test for change in) 575

Интервалы (intervals) типы (types) 125, 126

Исключение (exclusion), испытаний, неучет их результатов при оценке надежности (of tests from reliability evaluation) 560, 573, 590

Испорченный элемент (damaged component) определение 596

Испытания на надежность (life testing)

— цензурированные (censored) 397

— при обобщенной функции распределения времени безотказной работы (based on generalized time-to-failure distribution) 388

— сокращение среднего времени ожидания до принятия решения (reduction of expected time to completion of decision) 399

— усеченные (truncated) 397

— до отказа всех изделий (until all items fail) 309

— до отказа  $r$  изделий из  $N$  (until  $r$  out of  $N$  items fail) 391

— приложения 444

Испытания (testing)

— неполноразмерных РДТТ (subscale testing of solid propellant rocket engines) 554—555

— планирование (planning of) 51

— предпосылки для (reasons for) 441

— на чувствительность (sensitivity) 485

— последовательность (порядок) (sequence) 446, 469

— систем (system) 441

— на время безотказной рабо-

- ты, на долговечность (time-to-failure) 444
- цензурированные (censored) 391, 397
- элемент (component) 441
- на число циклов (cycle-to-failure) 445
- на влияние окружающей среды (environmental) 446
- факторы, учитываемые при планировании 448
- граничные (peripheral) 445
- Испытания отдельных элементов (component testing)
  - достоинства (advantages) 442
  - недостатки (disadvantages) 443
  - в больших ЖРД (in large liquid propellant rocket engines) 589
- Испытания на влияние окружающей среды (environmental testing) 446
  - примеры 456, 462, 464, 476
  - как требование для подтверждения надежности (as reliability demonstration requirement) 606
- Испытания на чувствительность (sensitivity testing), см. анализ по Брюстону (Bruceton analysis) 485—493
  - доверительные пределы (confidence limits) 491, 492
  - критический уровень (critical level) 492
  - оценка среднего (estimator for mean) 490
  - оценка стандартного отклонения (estimator for standard deviation) 489
  - выбор начальных условий (choice of initial conditions) 487, 490
- методика 487
- процентные пределы (percentage limits) 492
- стандартное отклонение среднего (standard deviation of mean) 491
- стандартное отклонение стандартного отклонения (standard deviation of standard deviation) 491
- Испытания систем (system testing) 441—443
  - достоинства (advantages) 441
  - недостатки (disadvantages) 442
  - по программе разработки жидкостного ракетного двигателя (in liquid rocket engine development program) 589
- Исследование зависимости между усилием и прочностью звена (stress versus strength analysis)
  - необходимость 91
- Исследование надежности батарейного источника питания (battery reliability analysis) 115
- Исследование поверхности отклика (response surface experimentation)
  - примеры использования 527
  - сравнение с методом совершенствования операция (comparison with evolutionary operations) 522
  - определение оптимума (determination of optimum) 529
  - примеры 542

- геометрическое представление для случая с двумя входными переменными (geometrical illustration for two input variables) 523—526
- методика 529
- метод быстрого подъема (method of steepest ascent) 530
- пример 533

## К

- Каноническое уравнение (canonical equation)
  - преобразование к каноническому виду (reduction to) 540
- Классификация результатов испытаний (test results classification)
  - основные правила для ЖРД (ground rules) 593
  - основные правила для РДТТ (ground rules) 561
- Ковариация (covariance)
  - определение 143—145
  - — для непрерывных распределений (continuous distributions) 143
  - — для дискретных распределений (discrete distributions) 143
  - — через математические ожидания (in terms of expected values) 144
  - оценок (of estimators)
    - — параметров гамма-распределения (gamma-distribution parameters) 231
    - — параметров распределения Вейбулла (Weibull distribution parameters) 235
    - — распределения времени

- безотказной работы (of time-to-failure distribution) 612
  - — максимального правдоподобия (of maximum likelihood estimators) 231
- при мультиномиальном распределении (in multinomial distribution) 161
  - для независимых случайных величин (for independent random variables) 144
- Коммутативный закон (commutative law) 108
  - приложение 111
- Контроль качества (quality control) 28
  - связь с исследованием надежности 32, 33
- Контроль поставщика (vendor control) 53
- Конструирование (human engineering) 22
- Конструктивные изменения (design change)
  - влияние на анализ экспериментов (effect on analysis of experiment) 479
  - влияние на оценки надежности (effect on reliability evaluation) 566, 567, 576
- Конструктивное изменение по надежности (reliability design change), определение 566
- Координация работ с целью повышения надежности (co-ordination of reliability efforts)
  - методы обеспечения (methods of ensuring) 55
- Коррозия (corrosion), приложения распределения край-

него значения (application of extreme value distribution) 190

Коэффициент вида использования (operating mode factor) 319

Коэффициент корреляции (correlation coefficient)

— определение 144

— оценок распределения времени безотказной работы (of estimators of time-to-failure distribution) 613

— оценок параметра гамма-распределения (of gamma-distribution parameter estimators) 234

— при мультиномиальном распределении (in multinomial distribution) 164

— свойства (properties) 144

— результатов испытаний в модели роста надежности (of success ratios during reliability growth) 437

— двух характеристик подсистем (of two subsystem attributes) 286

— оценок параметра распределения Вейбулла (of Weibull distribution parameter estimators) 238

Коэффициент условий применения  $K_A$  (application factor) 318

Критерии (criteria)

— для подтверждения надежности (for reliability demonstration) биномиальная выборка (binomial sampling) 373—376, рис. П1—П5, табл. П.1

— для оценки результатов ис-

пытаний на надежность, долговечность (life testing) 384, 388, 389, 398, 405, табл. 10.3, табл. П2—П.7.

— для общей оценки надежности 84, 87

— общие представления о 38, 39

— основные правила для выбора и 561, 562, 571, 590, 593

Критерии классификации отказов (failure criteria)

— для ЖРД (for liquid propellant rocket engine) 593

— для РДТТ (for solid propellant rocket engine) 561

Критическая область (critical region)

— для биномиальных выборочных планов (for binomial sampling) 360

Критические уровни внешних условий (critical levels of environment) 488

## Л

Логарифмически-нормальное распределение (lognormal distribution) 210

## М

Математика, ее роль в исследовании надежности (Mathematics, its role in reliability) 89

Математическое ожидание (expectation)

— свойства (properties) 149

Математическое ожидание (expected value)

— для арксинус-преобразования биномиальной совокупности (for arcsine transformation) 249—251

- постоянной (of constant) 150
- определение 130
- функции (of a function)
- — одной оценки (выборочного момента) (of one estimator) 249
- — двух оценок (of two estimators) 253
- произведения двух случайных величин (of product of two random variables) 144
- оценки надежности (of reliability estimator) 252
- — при показательном распределении (exponential distribution) 252
- — при распределении Вейбулла (Weibull distribution) 255—256
- — выборочного среднего (of sample mean) 150
- — выборочной дисперсии (of sample variance) 151
- суммы (of sum), см. среднее 150
- Математическое ожидание времени испытаний (expected test time) 386
- в укороченных планах испытаний на долговечность (in curtailed life test) 385, 386
- при испытаниях на долговечность (in life test)
- — без замены (nonreplacement procedure) 392
- — с заменой (replacement procedure) 391
- Матрица (matrix)
- условных вероятностей (of conditional probabilities) 421
- обращение (inverse of) 232
- Матрица дисперсий и ковариаций (variance-covariance matrix) 232, 233, 237, 612
- Метод максимального правдоподобия (maximum likelihood method) 218, 226
- приложения
- — к биномиальному распределению (to binomial distribution) 222
- — к показательному распределению (to exponential distribution) 219
- — к гамма-распределению (to gamma-distribution) 228
- — к нормальному распределению (to normal distribution) 226
- — к распределению Пуассона (to Poisson distribution) 223
- — к распределению Вейбулла (to Weibull distribution) 235
- — частный пример 219
- использование при оценке надежности ЖРД (in estimation of liquid propellant rocket engine reliability) 607
- использование при оценке параметров роста надежности (in estimation of reliability growth) 427
- Многokrратно сбалансированные планы (multiple balance designs) 440—441
- достоинства (advantages) 499
- методика 499—501
- составление (construction of) 500
- пример 501
- Многомерное нормальное рас-

- предделение (multivariate normal distribution) 210  
 Модель отказов (failure model) 97, 153  
 — влияние метода получения выборочных данных на (effect of method of sampling on) 94  
 — типы, определения (types, determination of) 94, 95  
 Модели процесса гибели (death process models) 192  
 Модель скорости роста надежности (rate-of-growth model) 426  
 — выводы 435  
 Модель слабейшего звена (weakest-link-model) 294  
 — модель цепи как частный случай (chain model, as particular case of) 295, 296  
 Модель стоимости для испытаний на надежность (cost model for reliability demonstration) 394, 412  
 Модель цепи (chain model) 295, 296  
 Моментная производящая функция (moment generating function) 133  
 — для биномиального распределения (for binomial distribution) 135, 137, 157  
 — в случае дискретного распределения (for discrete distribution) 135  
 — применительно к пуассоновским случайным величинам (applied to Poisson random variables) 135, 137  
 — обращение (inversion of) 136  
 — квадрата нормально распределенной случайной величины (of square of normal variable) 402  
 — для суммы случайных независимых величин (for sum of independent random variables) 136, 403  
 Моменты (moments) 130  
 — биномиального распределения (of the binomial distribution) 157  
 — распределения (of a distribution) 137  
 — по отношению к среднему (about the mean) 130, 131  
 — для нормального распределения (for normal distribution) 134  
 — начальные (ordinary) 130  
 — случайной величины (of a random variable) 133  
 — выборочного распределения (of a sample distribution) 133  
 — —  $k$ -й центральный момент ( $k$  central moment) 148  
 — —  $k$ -й начальный момент ( $k$  ordinary moment) 148  
 — выборочных моментов (of sample moments) 149  
 Мультиномиальное распределение (multinomial distribution), приложения 161, 164, 222, 299
- ## Н
- Надежность (reliability)  
 — финансирование мероприятий по исследованию (budgeting) 15, 26, 35  
 — определение 36  
 — — для модели роста (for growth model) 417, 420

- при конструировании (in design) 415
- независимых последовательных систем (of independent serial systems) 286, 321
- — доверительные пределы (confidence limits), рис. П6—П11
- *n*-звенной цепи (*n*-link chain) 300
- — верхнее предельное значение (maximum value) 302
- — нижнее предельное значение (minimum value) 302
- как новая методология (as a new methodology) 30
- как вероятностное понятие (as a probability concept) 36
- последовательной системы (of serial system) 294
- — для модели слабейшего звена (of weakest link)
- эффективность организации исследования (organizational effectivity) 27—35
- и тактико-технические характеристики (and performance) 48
- Научный метод (scientific method) 446
- как фундамент статистического экспериментирования (as basis of statistical experimentation) 447
- Национальная безопасность (national security) 30
- влияние последствий ненадежности (implications of unreliability) 13
- Начальный период (burn-in period) 182
- Независимая параллельная система (independent parallel system) 306, 321
- доверительные пределы
- — надежности (confidence limits on reliability of) 268, 306
- Независимые последовательные системы (independent serial systems) 284, 321
- доверительные пределы надежности (confident limits on reliability of) 268, 287, 294, рис. П6—П11
- Независимость (independence)
- определение с помощью
- — условных вероятностей (conditional probabilities) 115
- — функций распределения (distribution functions) 140
- — функций плотности вероятности (probability density functions) 141
- — случайных величин (random variables) 122
- событий (of events) 115
- — в совокупности (mutual) 115, 146, 284
- — попарная (pairwise) 115
- — случайных величин (random variables) 122
- Неоднократные совокупности (heterogeneous populations) при оценке надежности (in reliability evaluation) 554
- Непрерывные распределения вероятностей (continuous probability distributions) 124
- Неравенство Чебышева (Tchebycheff's inequality) 131
- приложения 133, 158, 217
- Несмещенная оценка (unbiased estimator) 215

- биномиального параметра (of binomial parameter) 160
  - для обобщенных биномиальных выборочных планов (in generalized binomial sampling) 180
  - для отрицательного биномиального распределения (for negative binomial distribution) 169—171
  - единственность, однозначность (uniqueness) 170, 171
  - для геометрического распределения (for geometric distribution) 169—171
  - дисперсии основного распределения (for parent distribution variance) 149
  - связь с выборочной дисперсией (relation to sample variance) 149
  - надежности для произвольного распределения времени безотказной работы (of reliability, for arbitrary time-failure distribution) 602—604
- Несовместные события (mutually exclusive events) 313
- связь с независимостью (relation to independence) 117, 118
- Нормальная аппроксимация (normal approximation)
- биномиального распределения (to binomial sampling) 159
  - для вычисления доверительных пределов (for calculation of confidence limits) 225, 226, 249, 253, 254, 255, 229, 259, 265, 267, 293, 432, 615
  - гамма-распределения (to gamma-distribution) 201, 203
  - ограничения при малых объемах выборки (limitations for small sample size) 229
- Нормальная плотность вероятности (normal probability density function) см. нормальное распределение 133, 207, 225
- нормированная 135
- Нормальное распределение (normal distribution) 206 210, 226, 263, 332, 304, 305, 356, 402
- центральная предельная теорема (central limit theorem) 209
  - как предельный случай общей модели распределения времени безотказной работы (as a limiting form of a generalized) (time-to-failure distribution) 203
  - средние отклонения (mean deviation) 127
  - свойства (properties) 207
  - стандартное отклонение (standard deviation) 128
  - нормированное 133, 134, 207
  - ссылки на таблицы 209
  - толерантные пределы (tolerance limits) 209
  - — односторонние (one-sided) 628—629 табл. П.9
- Нормальная функция распределения (normal distribution function), см. Нормированная нормальная функция распределения 128
- Нормальная функция распределения (нормированная) (standard, normal distribution)



on function) 128, 159, 201, 207, 224, 254, 263, 304, 305  
Нормальное уклонение (normal deviate) 225

Нормированное нормальное распределение (standard normal distribution) 206—209

Нормированное распределение крайних значений (standardized extreme value distribution) см. Распределение крайних значений 188

## О

Объединение событий (union of events), см. события 107

Однородность данных (homogeneity of data) 554, 581

Оперативная характеристика (operating characteristic function) 359

— определение 359

— примеры 361, 370

— последовательного биномиального плана Вальда (for Wald sequential binomial sampling plan) 378

Оптимальный отклик (optimum response)

— определение методами совершенствования операций (from evolutionary operation) 511

— определение путем исследования поверхности отклика (from response surface experimentation) 522

Организация исследования надежности

— положение, занимаемое группой надежности (placing of reliability group) 31

— независимость группы надежности (independence of) 34

— деятельность в интересах исследования надежности (reliability activities) 31, 32

Основная функция распределения (underlying distribution) 146

Ответственность (responsibilities)

— конфликт ответственности между группой исследования надежности и остальными группами (conflict of between reliability and existing groups) 28

— руководства (of management) 27—31

— группы исследования надежности (of reliability group) 21

Отдел планирования испытаний (test planning department) 28

Отказ (failure)

— определение 64

— анализ 61, 63, 65, 70

— формы сообщений (report forms) 61

— донесение, пример 66

— виды (modes of) 49, 80, 444

— внезапный (random) 18

— зависимый (secondary) 50

— за счет «изнашивания» (wearout) 92, 182, 199, 205

— за счет ошибки оператора (due to human error) 61

— испытания до отказа, см. испытания на долговечность

— катастрофический в статистическом плане (catastrophic in statistical design) 476

- начальный (initial) 92, 182, 204,
- обычный (ordinary) 598, 607
- при выключении (shutdown) 598, 607
- случайный (chance) 93, 199, 205
- причина которого не установлена (неопознанный) (handling of unassignable) 19, 567
- Отклонения при эксперименте (experimental variations) 449, 451, 453, 463, 477, 482, 484, 485, 530
- Отрицательное биномиальное распределение (negative binomial distribution) 165
  - дисперсия (variance) 167
  - связь с биномиальным распределением (relation to binomial distribution) 169
- Оценка (estimator) 213
  - состоятельная (consistent) 213
  - минимум дисперсии (minimum variance) 216
  - функции надежности (of reliability function) 217
    - — при показательном распределении (for exponential distribution) 248, 253, 247
    - — при гамма-распределении (for gamma-distribution) 258
    - — при нормальном распределении (for normal distribution) 263, 266
    - — при распределении Вейбулла (for Weibull distribution) 255
    - несмещенная (unbiased) 215
- методы получения (methods of finding) 217
- свойства (properties) 215
- Оценка надежности (reliability estimation) 92, 97
  - при произвольном распределении времени безотказной работы (of arbitrary time-to-failure distribution) 607
    - и доверительные уровни (and confidence levels) 38
    - и предсказание надежности (and prediction) 102
    - и повышение надежности (and reliability growth) 102
  - РДТТ, методика 568
  - турбогенераторного устройства (turbogenerator) 572—583
  - мощного ЖРД (large liquid propellant rocket engine) 589—616
    - как абсолютная мера (as an absolute measure) 41
    - как относительная мера (as a relative measure) 41
- Оценка надежности (reliability evaluation)
  - и подтверждение надежности (reliability demonstration) 575, 582, 606
  - и заключение договора 41, 553, 606
  - исключение испытаний (exclusion of tests from) 560—563, 590, 593
  - в случае выборки из неоднородной совокупности (in heterogeneous population) 554
  - при наличии непредстави-

- тельных данных (non-representative data) 40
- Оценки максимального правдоподобия (maximum likelihood estimators)
  - минимально достижимое значение дисперсии (minimum variance) 231
  - параметров в модели роста надежности (of reliability growth parameters) 426
  - дисперсии и ковариации оценок в модели роста надежности (variances and covariances in reliability growth model) 431—433
- Оценки по методу наименьших квадратов (least square estimators)
  - для параметров модели роста надежности (for reliability growth model parameters) 433
- Ошибка оператора (human error) 61
- Ошибка (error)
  - эксперимента, измерения, случайная выборочная (experimental, measurement, random sampling)
  - риск, в выборочном плане (risk of, in sampling plan) 355
  - два рода (two kinds) 374
  - отклонение (см. отклонения при эксперименте)

## П

- Параллельно-последовательная система (parallel-serial system) 311, 322
- Параллельные системы (parallel systems) 306, 321

- частично параллельные системы (partially parallel system) 307—308
- резервирование («избыточность») (redundancy) 307
- Параметры (parameters)
  - биномиального выборочного плана (of binomial sampling plan) 373
  - распределения (of distribution)
    - — биномиального (binomial) 137, 156
    - — крайних значений (extreme value) 188
    - — нормального (normal) 131
    - — Пуассона (Poisson) 137
    - — времени безотказной работы (of time-to-failure) 203—204
    - — Вейбулла (Weibull) 186
- Передача информации о надежности (reliability reporting) 59—88, 563—566, 606
  - при последовательном анализе (from sequential sampling computations) 576, 582, 583
  - форма отчета о надежности (reliability report) РДТТ, пример 564
- Пересмотр конструкции (design review) 31, 35, 46
  - и конструктор 48
  - — примерный перечень вопросов для пересмотра конструкции с точки зрения надежности (check list) 48
- Пересмотр конструкции с точки зрения надежности (reliability design review) 46—50

Переходная вероятность (transition probability) 193, 422

План программы исследования надежности как руководство к действию (reliability program plan as a charter of activities) 56

— содержание 57

Плотность вероятности (probability density function)

— определение 125

— для распределения времени безотказной работы (for time-to-failure distribution), 194, 195

— для  $n$  случайных величин (for  $n$  variables) 140

— нормальная (normal) 133, 207

— возраста (of age) 345, 346, 348

— примеры 351—353

— свойства (properties) 126, 127

— связь с интенсивностью отказов (relation to hazard function) 183

— для двух случайных величин (in two variables) 141

Поверхность отклика (response surface)

— каноническое уравнение (the canonical equation) 525

— аппроксимация плоскостью (repr. by linear equation) 523

— аппроксимация уравнением второго порядка (repr. by quadratic equation) 524

Подвижная средняя оценка надежности (moving average reliability estimate) 604

Подтверждение надежности

(reliability demonstration), см. удовлетворение требований к надежности 70, 100, 354—412

— использование биномиального выборочного плана (use of binomial sampling plan) 357—389

— — при показательном распределении времени безотказной работы (for exponential distribution) 383, 389

— — при последовательных биномиальных выборочных планах Вальда (Wald sequential binomial sampling plans) 376

— при показательном распределении времени безотказной работы (based on exponential time-to-failure distribution) 383—412

— применительно к более общим распределениям (applied to more general distributions) 388

— — с использованием методов биномиальной выборки (use of binomial sampling methods) 382

— — при испытаниях до отказа  $r$  изделий из  $N$  (censored life test— $r$  out of  $N$  items failed) 391

— — при испытаниях до отказа всех изделий (uncensored life test— all items failed) 389

— при времени испытания, отличном от требуемого времени работы (test time unequal to required life of equipment) 383

- с использованием вальдовских последовательных планов испытаний на надежность (Wald sequential life test) 403
- при времени испытаний, отличном от требуемого времени работы (test time unequal to required time) 383, 598
- при испытаниях на надежность, основанных на времени безотказной работы 381, 383, 597
- при цензурированных и усеченных испытаниях на надежность для ... (censored and truncated life test) 391, 397
- с усечением плана решением о приемке (test truncation by acceptance) 400
- модель стоимости для ... (cost model for) 394, 412
- — примеры 394, 412
- риск производителя при ... (producer's risk in) 375
- для жидкостных ракетных двигателей (for liquid propellant rocket engines) 45, 589
- для ракетных двигателей, работающих на твердом топливе (for solid propellant rocket engines) 553
- управляемого снаряда (guided missile) 401
- связь с распределением требований к надежности (related to reliability apportionment) 44
- истинная величина надежности (true reliability) 42

- Показательное распределение (exponential distribution) 135, 185, 189, 192, 214, 247, 383, 402, 404
- при последовательном выборочном плане Вальда (in Wald sequential sampling plan) 403
  - — критерии (criteria) 405
  - — модель стоимости (cost model) 412
  - — параметры (parameters) 410
  - — пример 409
  - — вывод с использованием процесса гибели (derivation based on death process) 192
  - для интенсивности отказов (hazard function for) 185
  - моментная производящая функция для ... (moment generation function for) 136
  - как предельная форма геометрического распределения (as limiting form of geometric distribution) 171
  - как предельный случай общей модели распределения времени безотказной работы (as a limiting case of general time-to-failure distribution) 203
  - как распределение суммы квадратов двух нормально распределенных случайных величин (as distribution of sum of squares of two normal variables) 402
  - роль в испытаниях на надежность (при подтверждении надежности) (role in reliability demonstration) 382, 389, 398, 402

- урезанное (truncated) 191
- как частный случай общей модели распределения времени безотказной работы (as a special case of general time-to-failure distribution) 203
- частный случай связи с интенсивностью отказов (relation to particular form of the hazard function) 189
- Попарно независимые события (pairwise independent events), см. независимость 115, 334
- Последовательно - параллельная система (serial-parallel system) 322, 268
- Последовательные биномиальные выборочные планы Вальда (Wald sequential binomial sampling plans)
  - уравнения прямых для линий приемки и браковки (acceptance and rejection lines) 376
  - функция, показывающая среднее число испытаний (average sample number) 379
  - уравнение для получения оперативной характеристики плана (operating characteristic function) 378
- Последовательные системы (serial systems) 284, 321
  - модель цепи (chain model), 296
  - определение с помощью времени безотказной работы (in terms of time-to-failure) 310
  - зависимые (dependent) 285, 287, 294
  - независимые (independent) 100, 284, 321
  - модель «слабейшего» звена (weakest link) 294
- Последовательный анализ (sequential sampling) 177, 178, 376, 403
  - достоинства (advantages) 574
  - при показательном распределении времени безотказной работы (exponential distribution) 404, 583
  - при нормальном распределении времени безотказной работы (normal distribution) 583
  - в программе оценки надежности (in reliability program), см. последовательный выборочный план Вальда 574
- Последовательный план Вальда для испытаний на надежность (Wald sequential life test)
  - оперативная характеристика (operating characteristic function) 406
  - пример 409
  - среднее время ожидания (expected waiting time)
    - при испытаниях с заменой (replacement procedure) 408, 409
    - при испытаниях без замены (nonreplacement procedure) 408, 411
  - среднее число отказов (expected number of failures) 411

Правило остановки (stopping rule) 177

Правило перемножения (product rule) 16, 20, 100, 286, 321, 324, 340, 570

Представление Эджворта (Edgeworth expansion) 259

Преобразование Лапласа (Laplace transform) 131, 136, 137, 198, 208, 350

Приемлемые подсистемы (applicable subsystems)

- для оценки надежности (for purposes of reliability evaluation) 556
- ракетного двигателя, работающего на твердом топливе (of solid propellant rocket engines) 556

Приравнивание моментов, метод (method of matching moments) 230

Проверка на согласие (goodness-of-fit-test) при исследовании поверхности отклика (for fitted response surface) 530, 534—539, 544

Проверка  $F$  ( $F$ -test)

- использование при дисперсионном анализе (in analysis of variance) 466, 478, 480, 483
- использование в случайно сбалансированных планах (in random balance designs) 497
- использование при исследовании поверхности отклика (in response surface experimentation) 531

Программа испытаний для предварительного определения качества (цель) (pre-

qualification test program) 457

Пропуск данных (missing values) 471

— влияние на результаты исследования случайно сбалансированного плана (effect on analysis of random balance experiment) 495

Процесс Айткена (Aitken's  $\delta^2$  process) 242

Пси-функция (логарифмическая производная  $\Gamma$ -функции) (psi-function) 228, 232, 238, 229

## Р

Разбиение систем (system apportionment), см. распределение значений надежности

— при оценке надежности ракетного двигателя (in rocket engine reliability evaluation program) 555

— методика 340

Ракетный двигатель (rocket engine)

— допуски на тактико-технические характеристики (tolerances on performance parameters) 332, 338

— пример применения распределения, крайнего значения в случае отказов из-за коррозии (extreme value distribution to corrosion of) 190

— на твердом топливе

— — критерии для классификации результатов испытаний (criteria for test result classifications) 563

— — пример нестатистического эксперимента (example of poor test program) 456

- программа статистических испытаний (statistical designed test program) 462
- программа оценки надежности (test program) 551
- приемлемость результатов испытаний неполноразмерных двигателей для оценки надежности (applicability of subscale testing) 554—555
- программа подтверждения надежности мощного жидкостного ракетного двигателя (reliability demonstration program for liquid propellant rocket engine) 589
- статистическое экспериментирование (statistical experimentation) 476
- Распределение Вейбулла (Weibull distribution) 185
  - примеры использования 383—389
  - среднее (mean) 186
  - дисперсия (variance) 186
- Распределение вероятностей (probability distribution)
  - биномиальное (binomial) 93, 120, 135, 155, 214
  - Вейбулла (Weibull) 96, 185, 255, 388
  - выборочное (эмпирическое) (of sample) 147
  - гамма-(Gamma-) 96, 220, 228, 259
  - геометрическое (geometric) 95, 124, 165
  - двумерное (in two dimensions) 137
  - дискретное (discrete) 93, 119

- квадрата нормальной случайной величины (of square of normal variable) 402
- крайних значений (extreme value) 187, 239
- многомерное (in  $n$ -dimensions) 138
- мультиномиальное (multinomial) 161, 299
- непрерывное (continuous) 93, 124
- нормальное (normal) 94, 206, 213, 226, 255, 263, 304, 356, 402
- основное (underlying) 148
- отрицательное биномиальное (negative binomial) 165
- показательное (exponential) 94, 124, 136, 214, 247, 383, 398, 402
  - как предельная форма 172
- Пуассона (Poisson) 96, 124, 135, 172, 279
  - условное (conditional) 141
- хи-квадрат (chi-square) 220, 398
  - числа испытаний до  $k$ -й неудачи 124
  - числа испытаний до принятия решения (of number of trials to reach a decision) 361, 380
- Распределение времени безотказной работы (time-to-failure distribution)
  - обобщение 200
  - примеры 203
  - начальные отказы «замедленного» типа (delayed) 204
  - предельные случаи (limiting cases) 203
  - — вычисления с помощью таблиц Молина 200



— физический смысл параметров модели (physical interpretation of parameter) 205

Распределение значений надежности (reliability apportionment) 43, 97, 340

— применительно к РДТТ 556

Распределение крайних значений (extreme value distribution) 187

— применительно к задаче о коррозии (application to corrosion problem) 190

— пример интенсивности отказов (hazard function) 189

Распределение «прочностей» звена (stress distribution) 297—298

Распределение Пуассона (Poisson distribution) 124, 137, 172

— доверительный предел для параметра (confidence limit on parameter of) 279

— как предельная форма биномиального распределения (as limiting form of binomial distribution) 173

— моментная производящая функция (moment generating function) 135

— связь с показательным законом распределения (relation to exponential distribution) 173

— стандартное отклонение (standard deviation) 173

Распределение «разрывных усилий»

— звена (strength distribution) 297—298

Распределение Стьюдента

(*t*-распределение) (Student *t*-distribution) 226, 491

Распределение хи-квадрат (Chi-square distribution) 37, 257, 262, 398

— случайной величины (random variable) 253

— проверка согласия (test for goodness of fit) 531

Расчет рассылки данных (distribution of data) 62, 68

Резервирование (redundancy), см. структурные модели надежности 19, 98, 99, 306, 307, 321, 325

Риск ошибки  $\alpha$  и  $\beta$  (risks,  $\alpha$  and  $\beta$ ) 374

Риск потребителя (customer's risk) 375

Риск производителя (producer's risk)

— связь с договорными обязательствами (relationship to contractual obligations) 375

Рост надежности (reliability growth) 41, 415

— взвешенные оценки (weighed estimates) 439

— измерение с помощью (measurement of)

— — оценок по методу наименьших квадратов (by least squares estimation) 433

— — оценок максимального правдоподобия (by maximum likelihood estimation) 427

— модель времени безотказной работы (a time-to-failure model for) 438

— отсутствие независимости

- испытаний (non-independence of tests) 420, 437
- простая модель (a simple attribute model for) 417
- различие между ЖРД и РДТТ (difference) 102
- по показательному закону (exponential reliability growth) 420

### С

- Свойство идемпотентности (idempotent law) (табл. 5.1) 108
- Система сообщения данных об отказах (failure reporting system) 53, 59—70, 84
- Сложность  $\mu$  (complexity)
  - оборудования (of equipment) 16
  - организационная (organizational) 17
  - как источник ненадежности (as reason for unreliability) 12, 15
- Сложность программы разработки (development program complexity)
  - влияние на статистическое экспериментирование (effect on statistical experimentation) 474, 475
- Случайная величина (random variable)
  - определение 119
  - как функция опыта (as function of experiment) 145
  - независимость (independence) 122, 140
  - нормированная (standardized) 128
- Случайная выборка (random sample) 145

- Случайное варьирование (random variation) 449
  - в модели роста надежности (in reliability growth), см. экспериментальное отклонение 417
- Случайно сбалансированный план (random balance design)
  - достоинства и недостатки 493, 499
  - составление (construction of) 494
  - как средство отбора, «просеивания» (as «screening» tool) 494
  - преобразование в многократно сбалансированный план (modification to multiple balance designs) 499
  - проверка уровней значимости (significance tests for) 497, 503
- Случайность (randomness)
  - приемы для достижения (procedures to achieve) 146
- Случайный опыт (random experiment) см. статистическое экспериментирование 145
- Случайный отказ (chance failure) 182
- Смещенная оценка (bias), см. несмещенная оценка
  - при оценке надежности (in reliability estimate) 598
  - стандартного отклонения (of sample standard deviation) 227
  - выборочной дисперсии (of sample variance) 227, 230
- События 105

- вероятности (probabilities) 110
- дополнение (complement of) 106
- достоверное (certain) 105
- невозможное (impossible) 105
- независимость (independence) 115
- несовместные (mutually exclusive) 107, 117, 121, 161, 313
- объединение (union of) 107
- пересечение (intersection of) 108, 122, 138, 286
- свойства (properties) 108—109
- совместное (joint) 138
- успех, примеры (success) 113, 153, 213
- эквивалентность (equivalence) 110, 310
- Совершенствование операций (evolutionary operation)
  - метод 510
  - цикл, определение (cycle) 512
  - пример 513
  - информационный плакат (information board) 514, 519
  - фаза, определение (phase) 512
  - как стандартная процедура (as a standard procedure)
  - в процессе производства (in manufacturing operations) 520
  - рабочие карточки, примеры (work sheets) 513, 515
- Совместное распределение вероятностей (joint probability distribution) 424
- Совместная функция распределения (joint distribution function)
  - многомерное распределение вероятности, свойства ( $n$  random variables) 137
  - двумерное распределение вероятности (two random variables) 140
- Совместные события (joint events) 137
- Солнечные элементы (solar cells) 206, 326
- Сообщение данных о надежности (reliability reports) 53, 84, 87
  - примеры
  - — сводный отчет об отказах элемента (component failure summary) 79
  - — сводка сообщений об отказах подсистем ракеты (missile system summary) 85
  - — сводный отчет об отказах системы двигательных установок (propulsion system summary) 86, 605
  - — отчет о состоянии проблем надежности (reliability problem status) 72
- Соотношение для дополнения (complement relation) 108
- Состоятельная оценка (consistent estimator)
  - определение 216
  - пример 217
- Среднее (mean) 130
  - при биномиальном распределении (of binomial distribution) 157
  - функции нескольких переменных (of a function of several variables) 334

- при гамма-распределении (of gamma-distribution) 200
- при отрицательном биномиальном распределении (of negative binomial distribution) 167
- оценки надежности (of reliability estimator)
- — распределение Вейбулла (Weibull distribution) 256
- функции надежности (reliability function) 249
- выборочное среднее (sample) 148
- Среднее число испытаний до принятия решения (Average Sample Number function)
  - для укороченного выборочного плана (for curtailed binomial sampling plan) 365
  - определение 363
  - максимальное значение (maximum value) 379
  - метод вычисления (method of computation) 365
  - для последовательных биномиальных планов Вальда (for Wald sequential binomial sampling plan) 381
- Стандартное нормальное отклонение (standard normal deviate) 225, 338
- Стандартное отклонение (standard deviation)
  - случайной величины (of random variable) 131
  - связь с допуском (relation to tolerance) 338
- Статистическое экспериментирование (statistical experimentation) 440—546
  - простой пример (simple example) 449
  - отличие от классических методов испытаний (difference from traditional testing methods) 449
  - необходимость нестатистических экспериментов, пример (consequences of not using) 456
  - потребность производства в новых статистических планах (need for new) 473—474
  - связь с научным методом (relationship to the scientific method) 446
  - роль при исследовании надежности (role in reliability) 471
  - непрерывные экспериментальные планы (continuous experimental designs) 475
  - — пример с небольшим ракетным двигателем (small rocket engine) 476
  - метод совершенствования операций (evolutionary operations) 510
  - случайно сбалансированные планы (random balance designs) 493
  - исследования поверхности отклика (response surface exploration) 522
  - факторный план (factorial design) 449, 464
    - — использование дробного
    - — факторного плана (use of fractional factorial design) 477
  - при испытаниях на время безотказной работы (time-to-failure testing) 464
  - при исследовании электронного оборудования (electronic equipment) 464

- при создании ракетного двигателя на твердом топливе 462
- как средство для выявления корреляции между интенсивностью отказов и уровнем внешних условий (as means of obtaining correlation between failure rate and environmental level) 467
- Стоимость (cost)
  - испытаний на надежность (of reliability demonstration)
  - — для потребителя (to customer) 375
  - — при выборочных планах, без замены (for nonreplacement sampling procedure) 394
  - — для производителя (to producer) 375
  - — при выборочных планах с заменой (for replacement sampling procedure) 394
  - и ненадежность (and unreliability) 15
- Структурные модели надежности (reliability structure models) 97, 282—353
  - параллельные системы (parallel systems) 306, 308
  - — смешанные (mixed) 311—318
  - — частично-параллельные (partial) 307
  - — резервные (stand-by) 307
  - последовательные системы (serial) 284, 308
  - — независимые (independent) 284
  - — модель слабейшего звена (weakest link model) 294

— — модель цепи (chain model) 296

Структурные схемы надежности (reliability structure diagrams) 312, 321, 322, 326, 330

Сходимость по вероятности (convergence in probability)

— эмпирической функции распределения (of sample distribution function) 148

— частоты успехов (of success ratio) 158, 159

## Т

Текущие данные (current data)

— определение 566

— при последовательном анализе (with sequential sampling) 578

Теория выборочного метода (sampling theory) 145

Теория регрессии (regression theory)

— использование в случайно сбалансированных планах (use of in random balance experimentation) 509—510

Толерантные пределы (табл. П9) (tolerance limits)

— в случае нормального распределения, односторонние (for normal distribution, one-sided) 263

— применительно к испытаниям ракетного двигателя 477

## У

Укороченный план испытаний на надежность (curtailed life test) 385

Уравнение восстановления (renewal equation) 349

Уравнение правдоподобия (likelihood equation) 219, 223  
Уровень развития (level of development)  
— влияние на подход к испытаниям (effect of test philosophy) 441  
Усечение (truncation) 380, 403  
— правила для последовательных выборочных планов Вальда испытаний на надежность (rules for, in Wald sequential life test) 403, 404  
Усеченные и цензурированные испытания  
— на надежность (truncated and censored life test) 397  
— приложение для подтверждения надежности управляемого снаряда (application to guided missile reliability demonstration) 401—402  
Условия применения деталей (part application) 318  
Условная вероятность (conditional probability) 122, 141  
— определение 113  
— в модели роста (in growth model) 421  
— для последовательных систем (for serial systems) 284  
Успех (success)  
— определение 39, 153  
— — для РДТТ (for solid propellant rocket engine) 561—563  
— — для ЖРД (for liquid propellant rocket engine) 590, 593  
— — для подсистемы регулирования температуры космического корабля (for space vehicle's temperature

control subsystem) 326, 331  
— — для турбогенераторного устройства (for turbo-generator device) 573  
— критерий (criteria) 39  
Устаревший элемент системы (obsolete component), определение 596  
Учет наработки (operational time logging)  
— сбор данных (collection of data) 72, 76  
— примерные формы (sample forms) 76, 78

## Ф

Факторный план (factorial design) 465  
— при исследовании поверхности отклика (in response surface experiment) 527  
Финансирование мероприятий по исследованию надежности (reliability budgeting) 35  
Формы отчета о надежности (declaration forms) 84  
— примеры  
— — для ЖРД (for liquid propellant rocket engine) 563, 564  
— — для ФДТТ (for solid propellant rocket engine) 592  
Функция надежности (reliability function) 97  
— определение 213  
— оценка для (estimators for)  
— — показательного распределения (exponential distribution) 247  
— — гамма-распределения (Gamma-distribution) 258  
— — нормального распределе-

ния (normal distribution) 254, 266  
 — — распределения Вейбулла (Weibull distribution) 255, 256  
 — — примеры  
 — — с биномиальным распределением (binomial distribution) 214, 253  
 — — с показательным распределением (exponential distribution) 214  
 — — с гамма-распределением (Gamma distribution) 260  
 — — с нормальным распределением (normal) 213, 263, 266  
 Функция правдоподобия (likelihood function) 218, 219, 221, 223  
 — (log-likelihood function) 607, 226, 228  
 Функции распределения (distribution functions) 127—130, 138  
 — биномиальные (binomial) 128  
 —  $\chi^2$ -распределение (chi-square) 220  
 — условные (conditional) 141  
 — непрерывные (continuous) 125, 184  
 — дискретные (discrete) 128  
 — распределения крайних значений (extreme value) 187  
 — гамма-распределение (Gamma) 199, 220  
 — в случае дискретного распределения 129  
 — для более общего распределения времени безотказной работы (for general time-to-

failure distribution) 183, 195, 465

— связь с интенсивностью отказов 183

Функция (кривая) роста надежности (reliability growth function) 425

— доверительные пределы (confidence limits) 432

— выводы и обобщения 436

Функция усилий для повышения надежности (reliability effort function) 341

## Х

Характеристическая функция (characteristic function) 137

## Ц

Центральная картотека информации о надежности (reliability central data file)

— образцы информационных листов

— — — «Батарейный источник питания» (battery) 83

— — — «Сопло ракетного двигателя» (nozzle) 82

— «Клапан» (valve) 81

Центральная предельная теорема (central limit theorem) 209

— приложения

— для арксинус-преобразования (to arcsine transformation) 210

— к общей функции среднего выборки (to general function of sample mean) 210

— для распределения Пуассона (to Poisson distribution) 210

Цепи Маркова (Markoff chains) 422

## Ч

- Число испытаний (trials)  
— в биномиальном выборочном плане (binomial sampling) 360  
— математическое ожидание числа испытаний до принятия решения (expected number, to reach decision) 366  
— в последовательных выборочных планах Вальда (in Wald sequential sampling) 377  
Чистые эффекты (main effects) 450

## Э

- Эйлера постоянная (Euler's constant) 393, 428, 436  
Эквивалентные испытания с полным временем работы (equivalent full duration tests) 598  
Экспериментальное значение отклонения (см. отклонения при эксперименте)  
Экспериментальный элемент системы (experimental component), определение 595  
Элемент плотности вероятности

(probability density element) 126

- Элемент системы (component)  
— испорченный, определение (damaged) 596  
— экспериментальный, определение (experimental) 595  
— доработка в процессе испытания в системе (improvement by system testing) 442  
— устаревший, определение (obsolete) 596  
— изношенный, определение (worn — out) 596  
Эмпирическая функция распределения (sample distribution function) 147  
— как случайная величина (as a random variable) 148  
Эффект взаимодействия (interaction effects)  
— пример вычисления 483  
Эффективность (effectivity)  
— группы надежности (reliability group's) 34  
— с стратегической точки зрения (strategic) 13

## Я

- Явление смешения (confounding effect) 460
-





## О Г Л А В Л Е Н И Е

От редактора перевода . . . . .	5
Предисловие авторов . . . . .	7
Введение. Возрастающее значение надежности . . . . .	11
0.1. Причины ненадежности . . . . .	15
0.1.1. Возможности эксперимента . . . . .	15
0.1.2. Сложность оборудования . . . . .	16
0.1.3. Сложность организации . . . . .	17
0.1.4. Ошибка оператора . . . . .	18
0.2. Предупреждение ненадежности . . . . .	19
0.2.1. Резервирование . . . . .	19
0.2.2. Организация производства . . . . .	20
0.2.3. Контроль со стороны руководства и организация взаимодействия по обмену информацией . . . . .	21
0.2.4. Конструирование и осведомленность в вопросах надежности . . . . .	22
Дополнительная литература . . . . .	23

## Р а з д е л I

### **Руководство, организация производства и передача информации**

<i>Глава 1. Руководство и организация . . . . .</i>	<i>27</i>
1.1. Ответственность руководства . . . . .	27
1.2. Положение, занимаемое группой надежности на предприятии . . . . .	31
1.3. Независимая группа надежности . . . . .	34
1.4. Способности личного состава . . . . .	34
1.5. Финансирование группы надежности . . . . .	35
Дополнительная литература . . . . .	35

<b>Глава 2. Задачи и деятельность при планировании и выполнении программы исследования надежности . . . . .</b>	<b>36</b>
2.1. Введение . . . . .	36
2.2. Оценка надежности . . . . .	36
2.3. Надежность как вероятностное понятие . . . . .	36
2.4. Надежность как функция критерия успеха . . . . .	39
2.5. Непредставительные образы и испытания . . . . .	40
2.6. Применение оценки надежности при заключении контрактов . . . . .	41
2.7. Задачи, возникающие при исследовании надежности	42
2.8. Распределение требований к надежности . . . . .	43
2.9. Пересмотр конструкции с точки зрения надежности	46
2.9.1. Примерный перечень вопросов для пересмотра конструкции с точки зрения надежности . . . . .	48
2.10. Запас знаний о надежности . . . . .	50
2.11. Планирование испытаний и анализ . . . . .	51
2.12. Контроль производства и пересмотр технического задания, материалов и обработки . . . . .	52
2.13. Контроль поставщика . . . . .	53
2.14. Система сообщения данных о надежности и отказах . . . . .	53
2.15. Математическая и статистическая обработка . . . . .	54
2.16. Внутренняя координация . . . . .	54
2.17. Распространение знаний о надежности . . . . .	55
2.18. Заключение и вывод. План программы исследования надежности . . . . .	56
Дополнительная литература . . . . .	57
<b>Глава 3. Организация системы передачи информации о надежности . . . . .</b>	<b>59</b>
3.1. Сбор, обработка и представление информации о надежности . . . . .	59
3.2. Сбор (тип и объем информации) . . . . .	59
3.2.1. Формы сообщений об отказах . . . . .	61
3.2.2. Отказы из-за ошибок оператора . . . . .	61
3.3. Расчет рассылки данных . . . . .	62
3.4. Анализ информации, составление донесений и соответствующий контроль . . . . .	63
3.5. Пример системы сообщения данных . . . . .	64
3.6. Распределение донесений об отказах . . . . .	68
3.7. Начало анализа отказов . . . . .	70
3.8. Контроль, анализ и корректирующее действие . . . . .	70

3.9. Донесения о наработке . . . . .	72
3.10. Журнал учета наработки . . . . .	76
3.11. Метод сбора временной информации . . . . .	78
3.12. Центральная картотека информации о надежности	80
3.12.1. Примеры информации о надежности в централь-	
ной картотеке . . . . .	80
3.13. Заявление перед испытанием . . . . .	84
3.14. Периодические сводки по надежности и отказам	
для руководства проектом и конструкторов . . . .	84
3.15. Периодические доклады вышестоящему руководству	
о состоянии надежности . . . . .	87
3.16. Специальные сообщения о надежности . . . . .	88
Дополнительная литература . . . . .	88

## Раздел II

### Математический аппарат надежности

<i>Глава 4. Модели надежности и их анализ (нематематическое введение)</i> . . . . .	91
4.1. Виды исходных данных . . . . .	91
4.2. Распределения вероятностей . . . . .	93
4.3. Неопределенность наблюдений . . . . .	96
4.4. Статистические оценки и оценка надежности . . . .	97
4.5. Структурные модели надежности. Резервирование	
и его распределение . . . . .	97
4.6. Взаимодействие элементов . . . . .	99
4.7. Статистический выбор и подтверждение надежности	
100	
4.8. Предсказание и повышение надежности . . . . .	102
Использованная литература . . . . .	103
Дополнительная литература . . . . .	103
<i>Глава 5. Основы теории вероятностей и математической статистики</i> . . . . .	104
5.1. Введение . . . . .	104
5.2. Выборочные пространства . . . . .	105
5.2.1. Действия с событиями . . . . .	106
5.3. Вероятности событий . . . . .	110
5.3.1. Условная вероятность . . . . .	113
5.3.2. Независимость событий . . . . .	115
5.3.3. Пример (исследование надежности батарейного	
источника питания космического корабля). . . .	115
5.4. Дискретные распределения вероятностей . . . . .	119

5.5. Непрерывные распределения вероятностей . . . . .	124
5.6. Функции распределения в случае дискретных распределений . . . . .	128
5.7. Математические ожидания и моменты . . . . .	130
5.7.1. Неравенство Чебышева . . . . .	131
5.8. Моментная производящая функция . . . . .	133
5.9. Двумерные и многомерные распределения вероятностей . . . . .	137
5.9.1. Условные распределения . . . . .	141
5.9.2. Ковариация . . . . .	143
5.10. Теория выборочного метода . . . . .	145
5.10.1. Простой случайный выбор — случайная выборка . . . . .	145
5.10.2. Эмпирическое распределение . . . . .	147
5.10.3. Выборочные моменты . . . . .	148
Использованная литература . . . . .	151
Дополнительная литература . . . . .	152
<b>Глава 6. Модели дискретных и непрерывных распределений . . . . .</b>	<b>153</b>
6.1. Введение . . . . .	153
6.2. Биномиальное распределение . . . . .	155
6.2.1. Моменты биномиального распределения . . . . .	157
6.2.2. Закон больших чисел . . . . .	158
6.2.3. Нормальная аппроксимация . . . . .	159
6.2.4. Несмещенная оценка . . . . .	160
6.3. Мультиномиальное распределение . . . . .	161
6.4. Геометрическое и отрицательное биномиальное распределения . . . . .	165
6.4.1. Среднее и дисперсия . . . . .	167
6.4.2. Примесиение отрицательного биномиального распределения . . . . .	168
6.4.3. Несмещенная оценка $P$ . . . . .	169
6.4.4. Предельные показательные распределения и гамма-распределение . . . . .	171
6.5. Распределение Пуассона . . . . .	172
6.6. Обобщенные биномиальные модели успехов (отказов) . . . . .	175
6.6.1. Несмещенная оценка $P$ . . . . .	180
6.7. Модели непрерывных распределений . . . . .	181
6.8. Интенсивности отказов . . . . .	183
6.8.1. Показательное распределение . . . . .	185
6.8.2. Распределение Вэйбулла . . . . .	185
6.8.3. Распределение крайних значений . . . . .	187

6.8.3.1. Пример интенсивности отказов . . . . .	189
6.8.3.2. Пример на применение распределения крайнего значения . . . . .	190
6.9. Модели процесса гибели . . . . .	192
6.9.1. Вывод показательного распределения . . . . .	192
6.9.2. Вывод более общего распределения времени безотказной работы . . . . .	195
6.9.2.1. Гамма-распределение . . . . .	199
6.9.2.2. Предельные случаи общей модели распределения времени безотказной работы . . . . .	203
6.9.2.3. Начальные отказы . . . . .	204
6.9.2.4. Физический смысл параметров модели . . . . .	205
6.10. Нормальное распределение . . . . .	206
6.10.1. Центральная предельная теорема . . . . .	209
Использованная литература . . . . .	211
Дополнительная литература . . . . .	211
<b>Глава 7. Оценка надежности. Часть 1 . . . . .</b>	<b>213</b>
7.1. Введение. Функция надежности . . . . .	213
7.1.1. Пример с нормальным распределением . . . . .	213
7.1.2. Пример с показательным распределением . . . . .	214
7.1.3. Пример с биномиальным распределением . . . . .	214
7.1.4. Задача оценки $R$ . . . . .	214
7.2. Свойства оценок . . . . .	215
7.2.1. Несмещенность . . . . .	215
7.2.2. Состоятельность . . . . .	216
7.2.3. Минимум дисперсии . . . . .	217
7.3. Методы получения оценок . . . . .	217
7.4. Метод максимального правдоподобия (один неизвестный параметр) . . . . .	218
7.4.1. Применение к непрерывным распределениям . . . . .	219
7.4.1.1. Частный пример . . . . .	221
7.4.2. Применение к дискретным распределениям . . . . .	222
7.4.3. Дисперсия оценки максимального правдоподобия . . . . .	223
7.4.4. Доверительные пределы для параметров . . . . .	224
7.5. Применение метода максимального правдоподобия к распределениям с двумя и большим числом неизвестных параметров . . . . .	226
7.5.1. Оценка параметров нормального распределения . . . . .	226
7.5.2. Оценка параметров гамма распределения . . . . .	228
7.5.3. Метод приравнивания моментов . . . . .	230
7.5.4. Дисперсии и ковариации оценок максимального правдоподобия . . . . .	231

7.5.5. Оценка параметров распределения Вейбулла . . .	235
Использованная литература . . . . .	239
Дополнительная литература . . . . .	239
Приложение 7А. Решение уравнений вида $x = f(x)$ . . . . .	240
Приложение 7Б. Решение $n$ уравнений с $n$ неизвестными . . .	243
<b>Глава 8. Оценка надежности. Часть 2 . . . . .</b>	<b>247</b>
8.1. Оценка надежности и нахождение доверительных пределов по функции надежности . . . . .	247
8.2. Метод оценки надежности для однопараметрических распределений . . . . .	248
8.3. Общий метод нахождения приближенных оценок надежности и доверительных интервалов . . . . .	249
8.3.1. Среднее значение функции надежности . . . . .	249
8.3.2. Дисперсия функции надежности . . . . .	250
8.3.3. Примеры . . . . .	251
8.4. Обобщение приближенного метода на двухпараметрические распределения . . . . .	253
8.4.1. Примеры . . . . .	254
8.5. Оценка и доверительный предел для $R$ в случае распределения Вейбулла . . . . .	255
8.5.1. Точный доверительный предел для $R$ в случае распределения Вейбулла . . . . .	256
8.6. Оценка и доверительный предел для $R$ в случае гамма-распределения . . . . .	258
8.6.1. Точный доверительный предел для $R$ в случае гамма-распределения . . . . .	260
8.7. Оценка и доверительный интервал для $R$ в случае нормального распределения . . . . .	263
8.7.1. Примеры . . . . .	264
8.7.1.1. Доверительные пределы для $R$ (двусторонний вариант) . . . . .	266
8.8. Доверительные пределы для параметров биномиального, отрицательного биномиального и пуассоновского распределений . . . . .	267
Использованная литература . . . . .	269
Дополнительная литература . . . . .	269
Приложение 8А. Односторонние биномиальные доверительные пределы . . . . .	269
Приложение 8Б. Точные односторонние доверительные пределы в случае биномиальной схемы . . . . .	273
8.Б.1. Введение . . . . .	273
8.Б.2. Обоснование . . . . .	274

Приложение 8В. Верхние доверительные пределы для $p$ в случае выборки с отрицательным биномиальным распределением . . . . .	278
Приложение 8Г. Верхние доверительные пределы для $\lambda$ в случае распределения Пуассона . . . . .	279
<b>Глава 9. Структурные модели надежности . . . . .</b>	<b>282</b>
9.1. Введение . . . . .	282
9.2. Последовательные системы . . . . .	284
9.2.1. Независимые последовательные системы . . . . .	284
9.2.1.1. Пример последовательной системы . . . . .	287
9.2.2. Нижние доверительные пределы для надежности независимых последовательных систем . . . . .	287
9.2.3. Другой, более предпочтительный метод вычисления доверительных пределов для последовательной системы . . . . .	290
9.3. Модель „слабейшего звена“ . . . . .	294
9.3.1. Модель цепи . . . . .	296
9.3.2. Прочность цепи . . . . .	299
9.3.2.1. Предельные значения $R_n$ . . . . .	300
9.3.2.2. Достижение верхнего и нижнего предельных значений $R_n$ . . . . .	302
9.3.3. Исследование прочности . . . . .	303
9.4. Параллельные системы и резервирование . . . . .	306
9.4.1. Пример частично параллельной системы . . . . .	307
9.4.1.1. Пример ненагруженного резерва . . . . .	310
9.4.2. Пример смешанной параллельно-последовательной системы . . . . .	311
9.4.3. Пример исследования надежности проекта . . . . .	318
9.4.3.1. Условия применения деталей . . . . .	318
9.4.3.2. Резервирование . . . . .	321
9.4.3.3. Пример расчета надежности подсистемы контроля температуры космического корабля . . . . .	325
9.5. Изменчивость характеристики системы, как функция изменчивости характеристик подсистем . . . . .	332
9.5.1. Метод вычисления средних и дисперсий функции нескольких переменных . . . . .	334
9.5.2. Нахождение допусков . . . . .	337
Использованная литература . . . . .	338
Дополнительная литература . . . . .	339
Приложение 9А. Методика распределения значения надежности . . . . .	340
Приложение 9Б. Надежность системы с заменой элементов . . . . .	345



<b>Глава 10. Испытания на надежность и связанные с ними решения . . . . .</b>	<b>354</b>
10.1. Введение . . . . .	354
10.1.1. Неслучайные факторы, влияющие на определение выборочных планов . . . . .	356
10.2. Методы испытаний на надежность, основанные на биномиальной выборке . . . . .	357
10.2.1. Оперативная характеристика . . . . .	359
10.2.2. Общие свойства биномиального выборочного плана . . . . .	359
10.2.3. Среднее число испытаний . . . . .	361
10.2.3.1. Формула для <i>ASN</i> в случае укороченного выборочного плана . . . . .	365
10.2.4. Усовершенствование укороченного выборочного плана с целью его оптимизации . . . . .	368
10.3. Критерии для построения биномиального выборочного плана (выборки постоянного объема или укороченного плана) . . . . .	373
10.4. Применение последовательных биномиальных планов Вальда к подтверждению надежности . . . . .	376
10.5. Испытания на надежность, основанные на времени безотказной работы . . . . .	381
10.6. Испытания на надежность при времени испытания, отличном от требуемого времени работы . . . . .	383
10.6.1. Обобщение на частично известную интенсивность отказов . . . . .	388
10.7. Испытания на надежность с использованием информации о наработках до отказов (показательное распределение) . . . . .	389
10.7.1. Испытания до отказа всех элементов . . . . .	389
10.7.2. Испытания до отказа $R$ изделий ( $R \geq n$ ) . . . . .	391
10.7.3. Модель стоимости для испытаний на надежность (пример) . . . . .	394
10.8. Усеченные и цензурированные испытания на надежность . . . . .	397
10.9. Применение вальдовских последовательных планов испытаний на надежность для подтверждения надежности . . . . .	403
10.9.1. Требования к критерию выборочного плана . . . . .	405
10.9.2. Свойства выборочного плана . . . . .	406
10.9.3. Среднее число отказов и среднее время ожидания до принятия решения . . . . .	407

10.9.4. Пример применения последовательного плана Вальда к испытаниям на надежность . . . . .	409
10.9.5. Модель стоимости . . . . .	412
Использованная литература . . . . .	413
Дополнительная литература . . . . .	414
<b>Глава 11. Модели повышения надежности . . . . .</b>	<b>415</b>
11.1. Введение . . . . .	415
11.2. Простая модель роста надежности . . . . .	417
11.2.1. Дальнейшие свойства описанной модели . . . . .	420
11.3. Пригонка кривой к модели роста надежности . . . . .	426
11.3.1. Оценки максимального правдоподобия . . . . .	427
11.3.1.1. Дисперсии и ковариации . . . . .	431
11.3.2. Оценки по методу наименьших квадратов . . . . .	433
11.3.3. Краткие выводы о методах оценок . . . . .	436
11.4. Заключительные замечания . . . . .	437
11.4.1. Задачи, возникающие при отсутствии независи- мости . . . . .	437
11.4.2. Другие возможные виды моделей . . . . .	438
Использованная литература . . . . .	439
Дополнительная литература . . . . .	439
<b>Глава 12. Экспериментирование и испытания . . . . .</b>	<b>440</b>
12.1. Цели испытаний . . . . .	440
12.2. Методология испытаний . . . . .	441
12.3. Испытания систем и элементов . . . . .	444
12.4. Методы испытаний . . . . .	444
12.4.1. Испытания на долговечность . . . . .	444
12.4.2. Испытания на число циклов . . . . .	445
12.4.3. Граничные испытания . . . . .	445
12.4.4. Испытания на влияние окружающей среды . . . . .	446
12.5. Научный метод . . . . .	446
12.6. Статистическое экспериментирование . . . . .	447
12.6.1. Факторы, учитываемые при планировании испы- таний . . . . .	448
12.6.2. Элементы факторного анализа . . . . .	449
12.6.3. Простой пример . . . . .	449
12.6.3.1. Табл. 12.1, а . . . . .	450
12.6.3.2. Табл. 12.1, б . . . . .	450
12.6.3.3. Табл. 12.1, в . . . . .	451
12.6.3.4. Табл. 12.2, а . . . . .	451
12.6.3.5. Табл. 12.2, б . . . . .	451
12.6.3.6. Табл. 12.2, в . . . . .	451

12.6.3.7. Табл. 12.3, а . . . . .	452
12.6.3.8. Табл. 12.3, б . . . . .	452
12.6.3.9. Табл. 12.3, в . . . . .	452
12.6.3.10. Табл. 12.3, г . . . . .	452
12.6.4. Компоненты дисперсии . . . . .	453
12.6.5. Пример нестатистического эксперимента . . . . .	456
12.6.6. Программа статистических испытаний твердо- топливного ракетного двигателя . . . . .	462
12.6.7. Пример статистического экспериментирования с электронным оборудованием . . . . .	464
12.6.7.1. Установление относительной важности эффек- та внешних факторов . . . . .	466
12.6.7.2. Оценка надежности . . . . .	467
12.6.7.3. Некоторые практические аспекты применения описанного метода . . . . .	468
12.6.8. Роль статистического экспериментирования в на- дежности . . . . .	471
Использованная литература . . . . .	472
Дополнительная литература . . . . .	472

**Глава 13. Статистические планы для исследования на-  
дежности . . . . . 473**

13.1. Введение . . . . .	473
13.2. Непрерывные экспериментальные планы . . . . .	475
13.2.1. Типичный анализ испытаний небольшого ракет- ного двигателя . . . . .	476
13.3. Испытания на чувствительность . . . . .	48
13.3.1. Методика испытаний на чувствительность . . . . .	487
13.3.1.1. Стандартные отклонения среднего и диспер- сия . . . . .	490
13.3.1.2. Доверительные пределы для $\mu$ . . . . .	491
13.3.1.3. Процентные пределы . . . . .	492
13.3.1.4. Уровень достоверности оценки . . . . .	492
13.3.2. Особенности методики испытаний на чувстви- тельность . . . . .	492
13.4. Случайно сбалансированные планы . . . . .	493
13.4.1. Многократно сбалансированные планы . . . . .	499
13.4.1.1. Пример многократно сбалансированных пла- нов . . . . .	501
13.5. Метод совершенствования операций . . . . .	510
13.5.1. Пример . . . . .	513
13.6. Исследование поверхности отклика . . . . .	522

13.6.1. Геометрическое представление для случая с двумя входными переменными . . . . .	523
13.6.2. Примеры использования метода . . . . .	527
13.6.3. Методика исследования . . . . .	529
13.6.3.1. Линейное уравнение и метод быстрого подъема . . . . .	530
13.6.3.2. Пример для метода быстрого подъема (см. [11]) . . . . .	533
13.6.3.3. Уравнения второго порядка . . . . .	538
13.6.3.4. Преобразование к каноническому виду . . . . .	540
13.6.3.5. Пример определения оптимума при наличии поверхности второго порядка . . . . .	542
Использованная литература . . . . .	547
Дополнительная литература . . . . .	548

### Раздел III

#### **Примеры программ оценки надежности и ее подтверждения**

<i>Глава 14. Программа оценки надежности мощного ракетного двигателя, работающего на твердом топливе, в процессе конструктивной разработки . . . . .</i>	551
14.1. Цели и задачи . . . . .	551
14.2. Рассмотрение основных задач . . . . .	552
14.3. Описание и порядок выполнения программы . . . . .	555
14.3.1. Распределение . . . . .	556
14.3.2. Приемлемость главных подсистем . . . . .	556
14.3.3. Правила подачи заявлений . . . . .	559
14.3.4. Классификация результатов испытаний . . . . .	561
14.4. Отчеты о состоянии надежности и оценка надежности . . . . .	563
14.4.1. Представительные и текущие данные . . . . .	566
14.4.2. Оценка надежности двигателя . . . . .	567
14.4.2.1. Методика оценки . . . . .	567
14.4.2.2. Пример оценки надежности . . . . .	568
14.5. Заключение . . . . .	570
<i>Глава 15. Программа оценки надежности турбогенераторного устройства . . . . .</i>	572
15.1. Цели и задачи . . . . .	572
15.2. Условия проведения испытаний и основные правила . . . . .	572
15.3. Статистические аспекты испытаний . . . . .	574
15.4. Статистический анализ данных . . . . .	578

15.4.1. Статистический критерий значимости изменения (см. приложение 15Б) . . . . .	579
15.4.1.1. Пример . . . . .	580
15.4.2. Подтверждение надежности . . . . .	581
15.4.3. Сообщения о надежности . . . . .	582
15.5. Выводы и заключение . . . . .	583
Использованная литература . . . . .	583
Дополнительная литература . . . . .	584
Приложение 15 А. Линии односторонней выборочной приемки и отчетности при оценке надежности . . . . .	584
Приложение 15 Б. Метод расчета изменения интенсивности отказов . . . . .	586
<b>Глава 16. Программа оценки надежности мощного жидкостного ракетного двигателя на этапе конст- руктивной разработки . . . . .</b>	<b>589</b>
16.1. Цели и задачи . . . . .	589
16.2. Обсуждение проблем . . . . .	590
16.2.1. Основные правила надежности . . . . .	590
16.2.2. Главный перечень и исключаемые элементы . . . . .	595
16.2.3. Сфера деятельности при оценке надежности . . . . .	596
16.3. Статистический анализ данных . . . . .	597
16.3.1. Весовые коэффициенты . . . . .	598
16.3.2. Пример вычисления весовых коэффициентов . . . . .	600
16.3.3. Пример вычисления надежности с использова- нием весовых коэффициентов . . . . .	602
16.3.4. Использование весовых коэффициентов и оценка надежности . . . . .	604
16.3.5. Тип статистической оценки . . . . .	604
16.4. Отчетность о состоянии надежности . . . . .	606
16.5. Подтверждение надежности . . . . .	606
Дополнительная литература . . . . .	607
Приложение 16 А. Уравнения максимума правдоподобия для $p_i$ и $\epsilon$ . . . . .	607
Приложение 16 Б. Дисперсии и ковариации $\hat{p}_i$ и $\epsilon$ . . . . .	611

## Приложения

### Таблицы

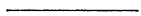
<i>Табл. П.1.</i> Число испытаний без отказов в зависимости от надежности и доверительного уровня . . . . .	617
<i>Табл. П.2.</i> Минимальный объем выборки для испытаний в те- чение времени $t$ для обеспечения средней наработки по меньшей мере $\hat{\theta}_L$ при доверительном уровне $\gamma = 75\%$ , где допустимое число отказов равно $F$ . . . . .	618

<i>Табл. П.3</i> Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени $t$ для обеспечения средней наработки по меньшей мере $\hat{\theta}_L$ при доверительном уровне $\gamma = 80\%$ , где допустимое число отказов равно $F$ . . . . .	619
<i>Табл. П.4</i> Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени $t$ для обеспечения средней наработки по меньшей мере $\hat{\theta}_L$ при доверительном уровне $\gamma = 85\%$ , где допустимое число отказов равно $F$ . . . . .	620
<i>Табл. П.5</i> Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени $t$ для обеспечения средней наработки по меньшей мере $\hat{\theta}_L$ при доверительном уровне $\gamma = 90\%$ , где допустимое число отказов равно $F$ . . . . .	621
<i>Табл. П.6</i> Минимальный объем выборки для испытаний в течение времени $t$ для обеспечения средней наработки по меньшей мере $\hat{\theta}_L$ при доверительном уровне $\gamma = 95\%$ , где допустимое число отказов равно $F$ . . . . .	622
<i>Табл. П.7</i> Объем выборки и критерии для подтверждения надежности при заданном доверительном уровне . . . . .	623
<i>Табл. П.8</i> Квантили (процентные точки) распределения $\chi^2_{n/n}$ (где $n$ — число степеней свободы) . . . . .	624
<i>Табл. П.9</i> Толерантные множители для нормальных распределений . . . . .	628

### Рисунки

<i>Рис. П.1</i> Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов $N$ , наблюдаемых отказов $F$ и доверительном уровне $\gamma = 0,50$ . . . . .	630
<i>Рис. П.2</i> Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов $N$ , наблюдаемых отказов $F$ и доверительном уровне $\gamma = 0,80$ . . . . .	631
<i>Рис. П.3</i> Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов $N$ , наблюдаемых отказов $F$ и доверительном уровне $\gamma = 0,90$ . . . . .	632
<i>Рис. П.4</i> Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности) при числе опытов $N$ , наблюдаемых отказов $F$ и доверительном уровне $\gamma = 0,95$ . . . . .	633
<i>Рис. П.5</i> Верхний доверительный предел ненадежности (единица минус нижний доверительный предел надежности)	

	при числе опытов $N$ , наблюдаемых отказов $F$ и доверительном уровне $\gamma = 0,99$ . . . . .	634
<i>Рис. П.6.</i>	50-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из двух подсистем. $N$ опытов с каждой подсистемой. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны) . . . . .	635
<i>Рис. П.7.</i>	90-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из двух подсистем. $N$ опытов с каждой подсистемой. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны) . . . . .	636
<i>Рис. П.8.</i>	95-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из двух подсистем. $N$ опытов с каждой подсистемой. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны) . . . . .	637
<i>Рис. П.9.</i>	50-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из трех подсистем. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны) . . . . .	638
<i>Рис. П.10.</i>	90-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из трех подсистем. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны) . . . . .	639
<i>Рис. П.11.</i>	95-процентный нижний доверительный предел надежности системы для наблюдаемых сочетаний отказов последовательной системы, состоящей из трех подсистем. (Все перестановки сочетаний отказов эквивалентны) . . . . .	640
	Предметный указатель . . . . .	641



ДАВИД К. ЛЛОЙД и МИРОН ЛИПОВ

**Надежность. Организация исследования, методы,  
математический аппарат**

Редактор *Н. Я. Гутчина*

Техн. редактор *А. А. Свешников*

Обложка художника *В. И. Шаповалова*

---

Сдано в набор 29/II 1964 г.

Подписано к печати 15/VII 1964 г.

Формат 84×108<sup>1/32</sup>

Объем 35,26 п. л.

Уч.-изд. л. 34,86

Тираж 8100 экз.

Цена в пер. № 5 2 р. 54 к., № 7—2 р. 64 к.

Темплан 1964 г. № 25

Заказ 1113

---