Ю. М. Ломсадзе

Теоретико-групповое введение в теорию элементарных частиц

Высшая школа · 1962

Ю. М. ЛОМСАДЗЕ

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для физических специальностей
высших технических учебных заведений
и университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

Москва — 1962

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги — подготовить читателя с совершенно **минимальным** багажом знаний к основному курсу современной теории элементарных частиц — теории квантованных полей. В книге изложены простейшие сведения из теории тех групп, которые имеют первостепенное значение для теории элементарных частиц и без знания которых совершенно невозможно сколько-нибудь серьезное понимание последней.

Помимо своей основной цели, книга может помочь как начинающим теоретикам, так и экспериментаторам — физикам ориентироваться в современной литературе по физике элементарных частиц. Она может быть безусловно полезной также и другим лицам, интересующимся физикой элементарных частиц, но не избравшим эту увлекательнейшую область науки своей специальностью.

Автор глубоко признателен чл.-корр. АН БССР проф. Ф. И. Федорову и доц. С. Д. Берману за внимательный квалифицированный просмотр рукописи до ее опубликования и за ряд весьма ценных советов и замечаний, учтенных автором при окончательном редактировании рукописи. Автор также глубоко признателен А. Е. Ковальчуку, И. Ю. Кривскому, В. И. Куштану, В. И. Лендьелу, А. С. Сало, В. И. Фущичу, И. В. Химичу и И. М. Шубе за большую помощь, оказанную ими при подготовке рукописи к печати, и за ряд ценных замечаний.

Ю. М. Ломсадзе

ВВЕДЕНИЕ

Последние полвека весьма форсированного, а иногда и необычайно бурного развития физики были посвящены, главным образом, поискам и выявлению сущности мельчайших «кирпичиков», из которых составлено все грандиозное здание окружающего нас, столь разнообразного по своим свойствам, мира. Эти мельчайшие «кирпичики», «конечные составляющие» мироздания принято называть *элементарными* (реже: *фундаментальными) частицами.*

История открытия элементарных частиц начинается на пороге нашего века с открытия в 1897 г. Дж. Томсоном носителя минимального отрицательного электрического заряда — электрона, встречающегося в природе буквально «на каждом шагу», и в дни, когда пишется эта книга, обрывается открытием в 1960 г. группой сотрудников Объединенного института ядерных исследований в Дубне (под Москвой) новой, исключительно редкостной частицы — антисигмаминус-гиперона, относящегося к категории так называемых «странных» частиц. В течение этого относительно небольшого промежутка времени было экспериментально обнаружено 30 различных сортов элементарных частиц.

В число известных в настоящее время сортов элементарных частиц входят: *электроны, протоны, нейтроны* (последние две частицы, из которых состоят атомные ядра, именуются также общим термином — нуклонами), *фотоны* («кванты» света[1]), *нейтрино* («нейтрончик», электрически нейтральная частица с массой покоя, равной нулю), многочисленные сорта *мезонов* (с массами, промежуточными между массами электрона и нуклона[2]) и *гиперонов* (с массами, превышающими массу нуклона) плюс, наконец, большая группа так называемых *«античастиц»*, каждая из которых отличается от соответствующей *«частицы»*, в узком смысле этого слова, некоторыми свойствами и, в частности, знаком электрического заряда. К числу «античастиц» относятся, например, позитроны («антиэлектроны»), антипротоны, антинейтроны и т. д.

Нет, однако, никаких оснований, ни теоретических, ни экспериментальных, полагать, что в увлекательную историю открытия новых сортов элементарных частиц уже не будут вписаны свежие страницы. Представляется, наоборот, более естественным ожидать, что наметившиеся в последние годы бурные темпы развития экспериментальной техники приведут в самом ближайшем будущем к обнаружению новых, пока скрытых от нас, «конечных составляющих» мироздания.

Эти «конечные составляющие» обладают свойствами, во многих отношениях *принципиально* отличными от привычных нам свойств больших, макроскопических тел. Факт взаимного превращения элементарных частиц («уничтожение» одних частиц и «рождение» на их месте других частиц) — лишь одно из любопытнейших проявлений специфических свойств микромира.

Современной теорией элементарных частиц — теорией, описывающей специфические процессы движения, взаимодействия и взаимопревращения этих частиц — является теория так называемых квантованных полей, часто именуемая также квантовой теорией полей. Каждая элементарная частица возникает в этой теории как особое «проявление» этого квантованного поля.

---

[1] *Квант* можно перевести как *порция* (лат. *quantum* означает *сколько*).

[2] Греч. *mesos* означает *промежуточный*.

Сам термин «элементарные частицы» обусловлен тем, что на современном уровне теоретической мысли, основанном на теории квантованных полей, эти частицы приближенно рассматриваются как точечные, неделимые, не имеющие структуры. И не следует, конечно, этому термину придавать абсолютного смысла, т. е. представлять себе дело таким образом, что эта точечность, неделимость, отсутствие структуры является «истиной в последней инстанции». Более того, уже в наши дни экспериментальная техника продвинулась настолько далеко вперед, что вопрос о структуре элементарных частиц интенсивно обсуждается сейчас не только в абстрактно-теоретическом, но и чисто экспериментальном плане.

Современная теория квантованных полей и особенно ее новейший формализм, приведший, с одной стороны, к крупнейшим успехам теории и, с другой стороны, наиболее четко обрисовавший принципиальные трудности ее, пользуется очень сложным математическим аппаратом, часто (пожалуй, даже слишком часто) таким, которого еще не успела коснуться строгая математическая мысль. Однако отсутствие математически строгой обоснованности этой теории является, конечно, естественным следствием ее необычайно бурного развития, особенно в последнее десятилетие, и не может быть кому-либо поставлено в упрек — ни физикам, ни математикам.

Впрочем, имеется широкий круг вопросов, которые связаны как с обоснованием современной теории квантованных полей, так и с рядом важнейших ее следствий и которые допускают совершенно строгий математический анализ на основе *теории групп*. Простейшим сведениям из теории групп, имеющих первостепенное значение для всей теории квантованных полей, и посвящена настоящая книга.

Ряд утверждений в книге (причем это всегда специально оговорено) приведен без доказательств ввиду громоздкости последних, а также ввиду того, что эти доказательства, о существовании которых физик, разумеется, обязан знать, не представляют для него тем не менее самостоятельного интереса ни с точки зрения понимания физической теории, ни с точки зрения понимания необходимости именно данной физической теории. Следует, однако, отличать утверждения вышеуказанного типа от тех утверждений, негромоздкие доказательства которых не приведены в книге с единственной целью предоставить их проведение самому читателю, понимающему важность именно активного изучения предмета. Петитом (мелким шрифтом) выделен текст, который содержит более углубленное рассмотрение затрагиваемых вопросов и который в первом чтении при желании может быть опущен без всякого ущерба для понимания дальнейшего основного текста.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРУПП

§ 1. ПОНЯТИЕ ГРУППЫ

Понятие группы — одно из фундаментальных абстрактных математических понятий, нашедших самое многостороннее применение в современной теоретической физике и особенно в современной теории элементарных частиц. *Группой* называется конечная или бесконечная совокупность G элементов g, f, h,... какой-либо природы (например, чисел, предметов, каких-либо операций и т. д.), удовлетворяющая следующим четырем требованиям:

1. В совокупности определено некоторое действие (или, как еще говорят, правило композиции), именуемое *групповым «произведением»*. Это значит, что каждой паре элементов g и f из этой совокупности, взятых в данном порядке, приведен в соответствие некоторый элемент из этой же совокупности, называемый групповым «произведением» элемента g на элемент f:

$$h = gf. \tag{1.1}$$

2. Для группового «произведения» любых трех элементов g, f и h из этой совокупности справедлив *закон ассоциативности*:

$$(gf)\,h = g\,(fh). \tag{1.2}$$

Это значит, что если мы возьмем элемент, являющийся «произведением» элемента g на элемент f, и «умножим» его на элемент h, то мы получим точно такой же элемент, как если бы мы «умножили» элемент g на элемент, являющийся «произведением» элемента f на элемент h.

3. В совокупности существует по крайней мере один элемент, обозначаемый как e (или как 1) и обладающий тем свойством, что

$$eg = ge = g \tag{1.3}$$

для каждого элемента g совокупности. Элемент e называется *единичным элементом* (или *единицей*) группы.

4. Вместе с любым элементом g совокупность содержит также некоторый, вообще говоря другой, элемент, обозначаемый как g^{-1} и обладающий тем свойством, что

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e. \tag{1.4}$$

Элемент g^{-1} называется элементом, *обратным* элементу g.

Если групповое «произведение» обладает свойством коммутативности, так что для каждой пары элементов f и g

$$fg = gf, \tag{1.5}$$

сама группа называется *коммутативной* или *абелевой*. Если же хотя бы для одной пары элементов групповое «произведение» некоммутативно, группа называется *некоммутативной*.

Заметим, что требование 1 не устанавливает какого-либо правила для нахождения элемента, являющегося групповым «произведением» двух данных элементов. Правило это может быть совершенно произвольным, не обязательно соответствующим обычному, известному из элементарной алгебры понятию произведения, тем более, что речь идет здесь о произведении элементов, отнюдь не обязательно являющихся числами. Важно только, как это уже вытекает из требования 2, чтобы групповое «произведение» удовлетворяло закону ассоциативности (1.2).

«Совокупность» элементов, состоящая из одной единицы, при условии, что под групповым «произведением» понимается обычное произведение, образует, очевидно, группу, причем абелеву. Нуль же образует группу, причем также абелеву, если под групповым «произведением» понимать либо обычное произведение, либо обычную сумму. Приведем теперь менее тривиальные примеры групп.

П р и м е р ы 1 и 2. Нетрудно понять, что совокупность всех рациональных чисел, исключая нуль, при условии, что под групповым «произведением» понимается обычное произведение, образует абелеву группу. Роль единичного элемента в этом случае играет обычная единица. Нетрудно также понять, что совокупность всех рациональных чисел, на этот раз, однако, включая нуль, при условии, что под групповым «произведением» понимается обычная сумма, тоже образует абелеву группу. При этом роль единичного элемента играет уже нуль.

Обратим внимание на то, что под групповым «произведением» в только что разобранных примерах нельзя понимать обычное частное или обычную разность чисел, поскольку ни частное, ни разность не удовлетворяют закону ассоциативности (1.2).

Пример 3. Совокупность всех несингулярных[1] матриц одного и того же порядка при условии, что под групповым «произведением» понимается обычное произведение матриц, образует некоммутативную (матрицы, вообще говоря, не коммутируют между собой!) группу. Роль единичного элемента здесь играет единичная матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

(невыписанные элементы этой квадратной матрицы — нулевые).

Пример 4. Совокупность всех возможных подстановок каких-либо n предметов (например, n аргументов функции) при условии, что под групповым «произведением» некоторой подстановки (i) на некоторую подстановку (j) понимается «результирующая подстановка», образует некоммутативную, так называемую *симметричную группу*, состоящую из $n!$ элементов. При этом «результирующая подстановка» определяется как подстановка, являющаяся результатом последовательного проведения сперва второй подстановки (j), а затем первой подстановки (i). Такой, казалось бы, обратный порядок действия подстановок в их групповом «произведении» (сперва действует вторая подстановка, а затем — первая) не является, конечно, обязательным. Однако, как мы увидим ниже, он очень удобен,

---

[1] *Несингулярной (неособенной)* называется матрица A, имеющая обратную A^{-1}, такую, что $AA^{-1} = I$, для чего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы детерминант матрицы A был отличен от нуля. Во всей этой книге термин «матрица» используется лишь для обозначения именно *квадратной* матрицы.

и мы вместе со всеми будем его придерживаться. Роль единичного элемента в группе подстановок играет «тождественная подстановка», т. е. «подстановка», оставляющая все предметы на своих местах.

Подстановка чисел, переводящая, например, 2 в 4, 4 в 5, 5 в 2, 1 в 3 и 3 в 1, обозначается как

$$(245)\cdot(13). \tag{1.7}$$

Этот способ записи указывает, что данная подстановка есть групповое «произведение» *циклической* подстановки (2 4 5) на *циклическую* подстановку (1 3). Читателю не доставит особого труда сообразить, что и любая другая подстановка может быть представлена в виде группового «произведения», вообще говоря, нескольких циклических подстановок. Некоммутативность группы подстановок видна из следующего простого примера:

$$\left.\begin{aligned}(12)\cdot(23)\,F\,(x_1, x_2, x_3)=(12)\,F\,(x_1, x_3, x_2)=F\,(x_2, x_3, x_1),\\ (23)\cdot(12)\,F\,(x_1, x_2, x_3)=(23)\,F\,(x_2, x_1, x_3)=F\,(x_3, x_1, x_2),\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

показывающего, что $(1\,2)\cdot(2\,3)\neq(2\,3)\cdot(1\,2)$.

Из этого примера, кроме того, видно, почему удобнее под групповым «произведением» двух подстановок понимать результат их действия в «обратном» порядке (на функцию сперва действует правая, а затем — левая подстановки!). С аналогичной ситуацией мы встретимся и в дальнейшем при рассмотрении других групп, элементами которых являются какие-либо преобразования (например, вращения системы координат).

Пример 5. Совокупность всех возможных вращений системы координат на плоскости [1] (двухмерной системы координат) при условии, что под групповым «произведением» понимается «результирующее вращение», т. е. результат двух последовательно проведенных вращений [2], образует абелеву *группу вращений системы координат на плоскости* (или, более просто, *группу двухмерных вращений*). Роль единичного элемента здесь играет «тождественное вращение», т. е. «вращение» на угол 0 (или, конечно, на целое кратное 2π).

---

[1] Здесь и в дальнейшем, если специально не оговорено, мы всегда будем иметь в виду *прямоугольную* систему координат.

[2] Вращение системы координат на плоскости иногда называют также поворотом. Мы, однако, не будем вводить различия между терминами «вращение» и «поворот», предпочитая, как правило, пользоваться лишь первым термином.

П р и м е р 6 . Совокупность всех возможных вращений системы координат трехмерного пространства («трехмерной системы координат») при условии, что под групповым «произведением» двух вращений понимается «результирующее вращение» (т. е. результат сперва второго, а затем первого вращения!), образует уже некоммутативную *группу вращений трехмерной системы координат* (или, более просто, *группу трехмерных вращений*). Роль единичного элемента здесь также играет «тождественное вращение», т. е. «вращение», оставляющее систему координат без изменения.

Некоммутативность группы трехмерных вращений видна из рассмотрения следующего простого примера (см. рис. 1).

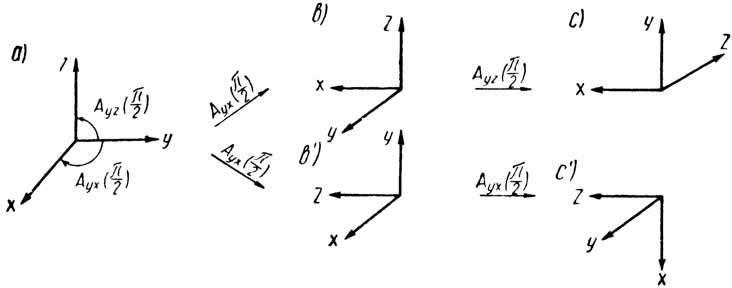

Рис. 1

Пусть мы намерены подвергнуть исходную систему координат (*а*) двум вращениям: вращению $\boldsymbol{A}_{yx}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ в плоскости (*yx*) на угол $\frac{\pi}{2}$ и вращению $\boldsymbol{A}_{xz}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ в плоскости (*xz*) на тот же угол. При этом обозначение (*yx*) содержит в себе не только указание на вполне определенную координатную плоскость, но и указание на то, какое направление вращений в этой плоскости считается положительным, а именно: положительным направлением вращений в плоскости считается направление по кратчайшему пути от первой оси ко второй (в данном случае от оси *y* к оси *x*) до их совпадения как направленных прямых.

Если мы подвергнем исходную систему координат (a) сперва вращению $A_{yx}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, а затем вращению $A_{xz}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, то в результате, пройдя через промежуточную систему координат (b), мы придем к системе координат (c). Если же мы изменим порядок вращений и совершим сперва вращение $A_{xz}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, а уже затем вращение $A_{yx}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, то мы придем, через промежуточную систему координат (b'), к системе координат

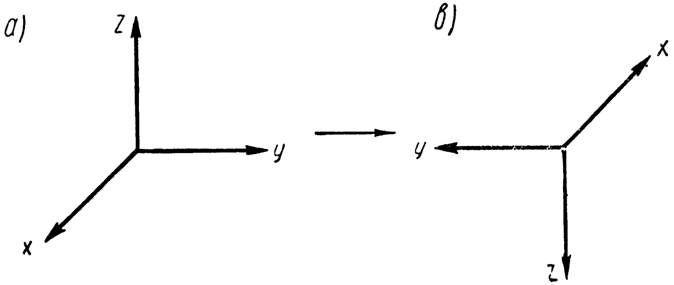

Рис. 2

(c'), очевидно, не совпадающей с системой координат (c). Это и иллюстрирует некоммутативность группы трехмерных вращений.

П р и м е р 7. Инверсия трехмерной системы координат (или, как еще говорят, пространственная инверсия) плюс «тождественное преобразование», не изменяющее систему координат и играющее роль единичного элемента, образуют абелеву группу пространственной инверсии, если под групповым «произведением» двух преобразований, как обычно, понимать «результирующее преобразование». При этом, говоря об инверсии системы координат, в соответствии с общепринятой терминологией подразумевают инверсию одновременно всех трех осей этой системы координат (см. рис. 2). При такой инверсии правая система координат (a) переходит в левую (b), левая же перешла бы в правую.

Заметим, что инверсия двух каких-либо осей трехмерной системы координат оставляет правую систему координат правой же, левую — левой же и эквивалентна некоторому вращению трехмерной системы координат. Например, инверсия осей x и y (см. рис. 3) эквивалентна вращению системы координат в плоскости (xy) на угол π. Инверсия

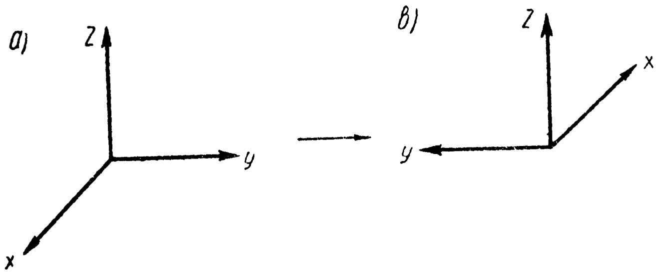

Рис. 3

же только одной оси (такую инверсию называют также *зеркальным отражением*) эквивалентна двум последова-

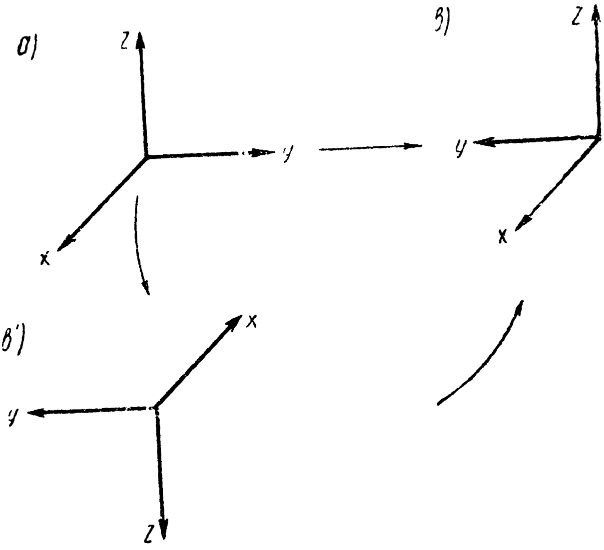

Рис. 4

тельно проведенным преобразованиям — инверсии трех осей и некоторому вращению трехмерной системы координат (обратим внимание читателя на то, что оба эти преобразования коммутируют между собой!). Например, зеркальное отражение оси y (переход от системы координат (a) к системе координат (b) на рис. 4) может быть представлено как результат инверсии всех трех осей (переход от (a) к (b')) и последующего вращения системы координат в плоскости (xz) на угол π (переход от (b') к (b)).

Мы можем объединить группу трехмерных вращений и группу пространственной инверсии в одну группу, именуемую *полной ортогональной трехмерной группой* (почему эта группа называется ортогональной, мы выясним несколько ниже, в § 7). Помимо всевозможных трехмерных вращений и пространственной инверсии, мы должны включить в эту группу (если хотим получить действительно группу) все возможные «перекрестные» элементы, каждый из которых есть групповое «произведение» (т. е. «результирующее преобразование») какого-либо вращения и пространственной инверсии. Во введенную таким образом группу будут автоматически входить инверсии как двух, так и одной оси. Группа трехмерных вращений и группа пространственной инверсии могут быть названы *подгруппами*[1] полной ортогональной трехмерной группы.

Пример 8. Совокупность всех возможных параллельных переносов трехмерной системы координат (всех возможных «трехмерных трансляций») при обычном условии, что под групповым «произведением» понимается «результирующий перенос», образует абелеву *группу трехмерных параллельных переносов (или группу трехмерных трансляций)*.

Объединение полной ортогональной трехмерной группы и группы трехмерных трансляций в одну группу приводит к так называемой *трехмерной евклидовой группе*. При этом, как и при построении полной ортогональной трехмерной группы в примере 7, мы должны включить в трехмерную евклидову группу, помимо всех элементов двух ее подгрупп, также и всевозможные «перекрестные» элементы— групповые «произведения» элементов из разных подгрупп. Поскольку элементы каждой из подгрупп суть преобразования системы координат, групповое «произведение» этих элементов определяется, конечно, обычным путем, а именно, просто как «результирующее преобразование». Заметим, что элементы двух вышеназванных подгрупп, входящих в трех-

[1] *Подгруппой* некоторой группы называется совокупность элементов группы, сама образующая группу относительно того же самого правила композиции.

мерную евклидову группу, вообще говоря, *не коммутируют* между собой.

Пример 9. Совокупность всех возможных переходов от одной произвольной инерциальной [1] трехмерной системы координат к другой, движущейся относительно первой с некоторой постоянной скоростью, при условии, что под групповым «произведением» двух таких переходов понимается «результирующий переход» в смысле обычной, ньютоновой механики, образует абелеву *группу Галилея*. Пусть один из элементов группы Галилея есть переход от одной инерциальной системы координат к другой [2], движущейся относительно нее с некоторой скоростью $\mathbf{v}_1$, и другой элемент — переход от одной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно нее со скоростью $\mathbf{v}_2$. Из обычной, ньютоновой механики известно, что «результирующим» этих двух переходов является переход от одной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно нее со скоростью, равной векторной сумме скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_{\text{рез}} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \tag{1.9}$$

Единичным элементом группы Галилея является, конечно, «тождественный переход», т. е. «переход» от одной инерциальной системы координат к другой, «движущейся» относительно нее с нулевой скоростью.

Наше настойчивое апеллирование при определении группы Галилея к обычной, ньютоновой механике требует некоторого пояснения. Пусть, например, нам дано два вращения в плоскости (xy), одно — на угол φ_1 и другое — на угол φ_2, и требуется найти «результирующее вращение». Не вызывает никакого сомнения, что «результирующее вращение» есть вращение в той же плоскости (xy) на угол

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{1.10}$$

Это непосредственно вытекает из определения самого понятия «угла между двумя направленными прямыми», роль которых в данном случае играют оси системы координат на

---

[1] Как известно, *инерциальной* называется система координат, движущаяся по инерции, т. е. без ускорения.

[2] Нужно совершенно четко представлять себе, что фиксирование элемента группы Галилея означает фиксирование лишь вектора скорости $\mathbf{v}$, с которой движется преобразованная система координат относительно исходной (иными словами, означает фиксирование лишь *вида преобразования* системы координат), и отнюдь не означает какого-либо фиксирования *самой* исходной системы координат.

плоскости. Несколько более сложным, но также очевидным путем (об этом в свое время, в § 5, мы будем говорить более подробно) находятся параметры, однозначно определяющие «результирующее вращение» и в случае группы трехмерных вращений.

С первого взгляда может показаться, что и в случае группы переходов от одной инерциальной системы координат к другой не должно вызывать каких бы то ни было сомнений, что «результирующим переходом» будет переход, соответствующий векторной сумме скоростей (формула (1.9)), и что наша осторожная ссылка на обычную, ньютонову механику может быть опущена безо всякого ущерба. Необходимо, однако, прежде всего уяснить себе, что вопрос о нахождении параметра, определяющего «результирующий переход» (как, впрочем, и любое другое «результирующее преобразование», совершаемое над реальными телами), уже *не является* чисто математическим вопросом, допускающим в качестве ответа в известной степени произвольное аксиоматическое определение, а является вопросом *физическим*. Чтобы разобраться в сути этого дела, сформулируем этот вопрос более подробно.

Пусть нам задана некоторая, «исходная» (всегда имеется также в виду: *инерциальная*) система координат в пространстве — конечно, не абстрактно-математическая система координат, а «жестко связанная» с каким-либо реальным телом. Пусть, кроме того, имеется другая, жестко связанная с другим реальным телом, система координат, движущаяся относительно исходной с некоторой скоростью $\mathbf{v}_1$. И пусть, наконец, имеется еще третья система координат, также жестко связанная с некоторым третьим телом и движущаяся относительно второй системы координат со скоростью $\mathbf{v}_2$. Интересующий нас вопрос, эквивалентный вопросу о нахождении параметра, определяющего «результирующий переход», состоит в том, какова скорость третьей системы координат относительно исходной — вопрос, безусловно поддающийся экспериментальной проверке и, как оказывается, отнюдь не являющийся тривиальным. Дело в том, что, в отличие от правила (1.10) сложения углов, правило (1.9) сложения скоростей *не вытекает* ни из каких априорных [1] соображений.

---

[1] *Априорный* означает *независимый от опыта, доопытный* (лат. *a priori* значит *изначально*).

Правда, ньютонова механика, именуемая в наше время «классической» механикой, автоматически (более подробно об этом будет сказано в § 5) приводит к соотношению (1.9), и наш «здравый смысл», воспитанный на этой механике, невольно восстает против появления каких-либо сомнений в справедливости этого «классического» соотношения. И действительно, вплоть до начала XX в. никому в голову не приходила, казалось бы, абсурдная мысль оспаривать это «очевидное» соотношение.

Однако в 1905 г., когда были ниспровергнуты фундаментальные основы ньютоновой механики и гением А. Эйнштейна было воздвигнуто величественное здание так называемой *специальной теории относительности*, когда оказалось, что ньютонова механика является лишь *первым приближением* к реальности, пригодным для описания движения реальных тел лишь со скоростями, значительно меньшими скорости света, — тогда физики были поставлены перед тем непреложным фактом, что скорость «результирующего перехода» *на самом деле* — вопреки, казалось бы, очевидности — не совпадает с векторной суммой соответствующих скоростей и лишь приближенно равна этой сумме для относительно малых скоростей. Более подробное обсуждение этого и важного, и интересного вопроса мы вынуждены, однако, отложить до гл. III.

На этом мы закончим рассмотрение примеров групп, перечень которых можно было бы неограниченно увеличить. Мы старались приводить в основном примеры *тех* групп, которые имеют важнейшее значение для физики и особенно для физики элементарных частиц. Читатель заметил, конечно, что основной упор мы делаем на группы различных *преобразований системы координат*, т. е. на группы переходов от одной произвольной системы координат к какой-либо другой, либо повернутой каким-то образом (*группа трехмерных вращений*), либо подвергнутой пространственной инверсии (*группа пространственной инверсии*), либо параллельно перенесенной (*группа трехмерных трансляций*), либо, наконец, движущейся относительно исходной с какой-то постоянной скоростью (*группа Галилея*). Это вызвано тем, что в современной физике и особенно в физике элементарных частиц буквально на каждом шагу возникает необходимость рассматривать различные вопросы, связанные с какими-либо преобразованиями системы координат. Читатель убедится в этом несколько ниже.

Что же касается возможных *других* преобразований системы координат, то мы не включили их в наш перечень ввиду их значительно меньшей роли в современной физике элементарных частиц. Речь идет о переходах от одной произвольной системы координат к другой, движущейся относительно нее каким-то *произвольным* образом (например, вращающейся относительно нее вокруг некоторой оси [1]). Рассмотрение таких переходов относится уже к компетенции так называемой *общей теории относительности* — другого замечательного творения А. Эйнштейна. Из-за ряда специфических трудностей эта теория стоит в настоящее время несколько в стороне от главного направления в физике элементарных частиц, но вряд ли можно сомневаться в том, что этой теории еще предстоит, и возможно в самое ближайшее время, сказать свое решающее слово [2]. Теперь мы предлагаем читателю решить следующие несложные задачи.

Задачи

1. Как можно определить групповое «произведение», чтобы совокупность чисел $+1$, -1, $+i$, $-i$ образовывала группу?

2. Можно ли в качестве правила композиции в группе всех возможных векторов выбрать скалярное произведение векторов? Векторное произведение? Почему?

3. Может ли у какого-либо элемента группы существовать два различных обратных элемента?

4. Может ли группа содержать два различных единичных элемента?

5. Показать, что элемент, обратный элементу $f \cdot g$, есть $g^{-1} \cdot f^{-1}$.

6. Указать, какие элементы полной ортогональной трехмерной группы и группы трехмерных трансляций коммутируют между собой.

7. Указать, какие элементы группы Галилея и трехмерной евклидовой группы коммутируют между собой.

8. Бесконечная группа, вся бесконечная совокупность элементов которой может быть задана конечным числом непрерывных ве-

---

[1] Не следует путать переход от одной системы координат к другой, вращающейся относительно нее, с элементом группы вращений, т. е. с переходом от одной системы координат к другой, повернутой относительно нее. Различие этих двух переходов (или преобразований) надо представлять себе совершенно четко.

[2] Читателю, заинтересовавшемуся общей теорией относительности, можно порекомендовать книги А. Эддингтона «Теория относительности» (Гостехиздат, 1934), или В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения». Физматгиз, 1961.

щественных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ называется *группой Ли*. Например, группа двухмерных вращений является группой Ли, поскольку каждый элемент этой группы однозначно определяется одним вещественным непрерывным параметром — углом поворота системы координат на плоскости.

Какие из других приведенных нами в качестве примеров групп являются группами Ли и какое наименьшее число их параметров?

9. Показать, что совокупность всех матриц некоторого порядка n с детерминантом, равным 1, образует группу, если в качестве правила композиции выбрать обычное матричное произведение.

§ 2. ОПЕРАТОРЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В дальнейшем нам часто придется пользоваться понятием, смысл которого интуитивно ясен и без пояснений. Это понятие *оператора*, строгое определение которого состоит в следующем. Мы будем говорить, что нам задан некоторый *оператор* $\boldsymbol{T}$, действующий в каком-то, конечном или бесконечном множестве M элементов $\xi, \eta, \ldots$ какой-либо природы (какой именно — безразлично), если каждому элементу $\xi \in M$ приведен[1] в соответствие определенный элемент $\eta \in M$. В этом случае пишут

$$\boldsymbol{T}\xi = \eta. \tag{2.1}$$

Не следует, конечно, думать, что употребленный здесь исключительно ради удобства термин «множество» чем-то отличается от фигурировавшего в § 1 термина «совокупность».

Заметим, что существует и более широкое понятие оператора, переводящего каждый элемент одного множества M_1 в определенный элемент, вообще говоря, *другого* множества M_2. Нам, однако, это более широкое понятие оператора не понадобится.

Чтобы уяснить себе более четко понятие оператора, вспомним, что мы говорим, что нам задана некоторая функция f, определенная на некотором множестве чисел, если каждому числу x из этого множества приведено в соответствие определенное число $f(x)$ (вообще говоря, не из этого множества чисел). Таким образом, если функция есть «соответствие» между числами, то оператор есть не что иное, как «соответствие» между элементами некоторого множества, в общем случае не являющимися числами. И если факт задания функции обычно записывается в виде $y = f(x)$, то факт задания оператора можно записать не только в виде (2. 1), но и в виде $\eta = f(\xi)$.

[1] Значок $\in$, как обычно, означает «принадлежит».

Два оператора T_1 и T_2, действующие в одном и том же множестве M, называются равными

$$T_1 = T_2, \tag{2.2}$$

если

$$T_1 \xi = \eta \quad \text{и} \quad T_2 \xi = \eta, \tag{2.3}$$

каков бы ни был элемент $\xi \in M$.

Многочисленные примеры операторов безусловно знакомы читателю. Приведем некоторые из них.

Пример 1. Производная d/dx. В качестве множества M, в котором действует этот оператор, можно выбрать множество всех комплексных функций, имеющих производные сколь угодно высокого порядка.

Пример 2. Интеграл $\int\limits_a^b \ldots dx$. В качестве множества M, в котором может действовать этот оператор при конечных a и b (т. е. при $|a|, |b| < \infty$), можно выбрать множество всех интегрируемых на отрезке (a,b) комплексных функций.

Пример 3. Оператор возведения в фиксированную степень m. В качестве множества M, в котором может действовать этот оператор, можно выбрать множество всех комплексных чисел.

Пример 4. Оператор умножения на фиксированное комплексное число α. В качестве множества M здесь также можно выбрать множество всех комплексных чисел.

Пример 5. Оператор, переводящий n каких-либо комплексных чисел в n же фиксированных линейных однородных комбинаций из этих чисел. Этот оператор может действовать в множестве, каждый элемент которого есть совокупность n каких-либо комплексных чисел.

Пример 6. Оператор умножения на фиксированное вещественное число α. Этот оператор может действовать в множестве всех вещественных чисел.

Среди всего множества разнообразных операторов особая роль как в чисто математической теории групп, так и в многочисленных приложениях этой теории к физике принадлежит линейным операторам, что в первую очередь объясняется их исключительной простотой. Оператор T, действующий в M, называется линейным, если для любых комплексных чисел α и β

$$T(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha T\xi + \beta T\eta, \tag{2.4}$$

каковы бы ни были элементы ξ и η из M.

Конечно, для того, чтобы равенство (2.4) имело определенный смысл, нужно, чтобы в множестве M были *введены понятия* суммы $\xi + \eta$ двух произвольных ее элементов и произведения $\alpha\xi$ произвольного его элемента на любое комплексное число. При этом каждая из этих двух операций должна снова приводить к определенному элементу из *того же* множества M, или, как еще говорят, множество M должно быть *замкнуто* (или *инвариантно*) относительно каждой из этих операций.

Если, кроме того, эти операции удовлетворяют естественным требованиям, оправдывающим названия этих операций,— это требования коммутативности и ассоциативности для суммы и ассоциативности для произведения, — то множество M таких элементов называется *линейным комплексным пространством* и обозначается как L. Элементы ξ, η, . . . пространства L называются его *векторами* и обозначаются как $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, . . . и т. д. Конечно, как и в случае группы, вводимые в линейном комплексном пространстве L операции не обязаны совпадать с известными из элементарной алгебры операциями сложения и умножения чисел. В общем случае такое совпадение и невозможно, поскольку векторами линейного пространства (как и элементами группы) в общем случае не являются числа.

Строгое определение пространства L состоит в следующем. Множество M называют *линейным комплексным пространством* L, если введенные в этом множестве операции сложения элементов и умножения элементов на любые комплексные числа α, β, . . . удовлетворяют аксиомам:

а) если $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \in M$, то и $(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \in M$,

б) $\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$,

в) $(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Theta})$,

г) в M существует «нулевой» элемент «0» такой, что $\boldsymbol{\xi}$ + «0» $= \boldsymbol{\xi}$ для всех $\boldsymbol{\xi} \in M$,

д) если $\boldsymbol{\xi} \in M$, то и $\alpha\boldsymbol{\xi} \in M$,

е) $\alpha(\beta\boldsymbol{\xi}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{\xi}$,

ж) $1 \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$,

з) $0 \cdot \boldsymbol{\xi} =$ «0»,

и) $\alpha(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) = \alpha\boldsymbol{\xi} + \alpha\boldsymbol{\eta}$,

к) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{\xi} = \alpha\boldsymbol{\xi} + \beta\boldsymbol{\xi}$.

Часто бывает желательным при определении линейного пространства L ограничиться требованием замкнутости его относительно умножения не на *произвольное комплексное*, а только, например, на *произвольное вещественное* число α. В этом случае говорят о *линейном вещественном пространстве* L. Читатель должен обратить внимание на то, что комплексный или вещественный характер линейного пространства зависит не от комплексности или вещественности самих *векторов* ξ, η, . . . этого пространства (ведь в линейном пространстве может и *не существовать* операция комплексного сопряжения этих векторов), а от комплексности или вещественности *чисел* α, умножение на которые не выводит ни один вектор ξ, η, . . . за пределы этого пространства.

Аналогичным образом, когда говорят о линейном операторе $\boldsymbol{T}$, действующем в линейном вещественном пространстве L, то имеют в виду, что условие (2. 4) должно выполняться для любых *вещественных* чисел α, β.

Теперь мы сможем сделать заключение о линейности или нелинейности операторов, приведенных в примерах 1—6 этого параграфа. Для этого заметим прежде всего, что 1) множество всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций, 2) множество всех комплексных функций, интегрируемых на отрезке (a, b), и 3) множество всех комплексных чисел α образуют линейные комплексные пространства, если правила сложения их элементов и умножения этих элементов на комплексные числа заимствовать из элементарной алгебры. Точно так же множество всех вещественных чисел можно рассматривать как линейное вещественное пространство с заимствованными из элементарной алгебры правилами сложения векторов этого пространства и умножения этих векторов на вещественные числа.

Учитывая это, легко показать, что операторы из примеров 1, 2, 4 суть линейные операторы, действующие в линейных комплексных пространствах. Оператор из примера 6 также линеен, но действует уже в линейном вещественном пространстве (хотя мог бы действовать и в линейном комплексном пространстве). Оператор же из примера 3 — нелинеен, если степень m не равна 1.

Что же касается оператора из примера 5, то здесь требуется некоторое пояснение. Прежде всего в множестве совокупностей $(v_1, v_2, . . ., v_n)$ из n чисел $v_1, v_2, . . . v_n$ нужно ввести понятия суммы любых двух совокупностей и умножения совокупности на произвольное комплексное число α. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что если определить эти понятия по формулам

$$\left.\begin{aligned}(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (v_1', v_2', \ldots, v_n') = \\ (v_1 + v_1', v_2 + v_2', \ldots, v_n + v_n'), \\ \alpha (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n),\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

то рассматриваемое нами множество совокупностей станет линейным комплексным пространством L. Указанный же в примере 5 оператор станет тогда линейным оператором, действующим в L.

Задачи

1. Показать, что линейное пространство L можно рассматривать как группу, в которой групповое «произведение» элементов определено как сумма векторов пространства.

2. Линеен ли оператор комплексного сопряжения?

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Если линейная комбинация $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n$ векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в L равна «нулевому» вектору "0" лишь при условии, что все числа $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то говорят, что векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *линейно независимы*. В противном случае эти векторы называются *линейно зависимыми*. Линейное пространство [1] L называется *n-мерным* и обозначается как L_n, если в L есть n и не более линейно независимых векторов. Если же в L существует бесконечное число линейно независимых векторов, то пространство L называется *бесконечномерным* и обозначается как L_∞. Бесконечномерные пространства L_∞ делятся на *счетномерные*, в которых максимальная система линейно независимых векторов образует бесконечное счетное множество векторов, и на *континуальномерные*, в которых такая максимальная система образует континуум векторов.

В линейном пространстве существует, разумеется, не одна максимальная система линейно независимых векторов, и каждая такая система называется *векторным базисом* (или просто *базисом*, или, наконец, *системой координат*) в этом пространстве.

[1] Здесь и в дальнейшем, если специально не оговорено, под термином «линейное пространство» можно понимать как комплексное, так и вещественное линейное пространство.

Нетрудно доказать важное утверждение: *любой вектор ξ n-мерного линейного пространства L можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации*

$$\xi = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n \qquad (3.1)$$

векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *базиса.*

В самом деле, вследствие n-мерности пространства L существуют такие числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, не все равные нулю, что

$$\beta\xi + \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{e}_n = "0". \qquad (3.2)$$

При этом, β не может равняться нулю, поскольку это противоречило бы линейной независимости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ базиса. Поэтому имеет место (3.1) с

$$\alpha_1 = -\beta_1/\beta, \quad \alpha_2 = -\beta_2/\beta, \ldots, \alpha_n = -\beta_n/\beta. \qquad (3.3)$$

Чтобы доказать единственность разложения (3.1), допустим, что наряду с (3.1) имеет место также и

$$\xi = \alpha_1' \mathbf{e}_1 + \alpha_2' \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n' \mathbf{e}_n. \qquad (3.4)$$

Умножив равенство (3.4) на -1 и сложив его с равенством (3.1), получим

$$«0» = (\alpha_1 - \alpha_1')\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')\mathbf{e}_2 + \ldots + (\alpha_n - \alpha_n')\mathbf{e}_n. \qquad (3.5)$$

Поскольку, однако, векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы, должно быть

$$\alpha_1 = \alpha_1', \quad \alpha_2 = \alpha_2', \ldots, \alpha_n = \alpha_n', \qquad (3.6)$$

что и доказывает наше утверждение.

Коэффициенты разложения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в (3.1) называются *координатами* (или же *компонентами*) вектора ξ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Между вектором ξ и его координатами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в фиксированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ существует, таким образом, *взаимно-однозначное соответствие*.

Легко обнаружить, что при сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все координаты его умножаются на это число. Ясно также, что все координаты «нулевого» вектора, и только «нулевого» вектора, суть нули, причем в любом базисе.

Наконец, покажем, что при переходе от одного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в L_n к другому $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ каждого вектора ξ претерпевают *линейное* преобразование. В самом деле, имеем

$$\xi = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \tag{3.7}$$
$$\xi = \alpha'_1 \mathbf{e}'_1 + \alpha'_2 \mathbf{e}'_2 + \ldots + \alpha'_n \mathbf{e}'_n.$$

Но каждый из старых базисных векторов можно разложить по новым базисным векторам:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \beta_{11} \mathbf{e}'_1 + \beta_{12} \mathbf{e}'_2 + \ldots + \beta_{1n} \mathbf{e}'_n, \\ \mathbf{e}_2 &= \beta_{21} \mathbf{e}'_1 + \beta_{22} \mathbf{e}'_2 + \ldots + \beta_{2n} \mathbf{e}'_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}_n &= \beta_{n1} \mathbf{e}'_1 + \beta_{n2} \mathbf{e}'_2 + \ldots + \beta_{nn} \mathbf{e}'_n. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Если теперь подставить (3.8) в первое из равенств (3.7) и учесть единственность разложения вектора ξ по новым базисным векторам, то мы придем к равенствам

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_1 &= \beta_{11} \alpha_1 + \beta_{21} \alpha_2 + \ldots + \beta_{n1} \alpha_n, \\ \alpha'_2 &= \beta_{12} \alpha_1 + \beta_{22} \alpha_2 + \ldots + \beta_{n2} \alpha_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha'_n &= \beta_{1n} \alpha_1 + \beta_{2n} \alpha_2 + \ldots + \beta_{nn} \alpha_n, \end{aligned}\right\}, \tag{3.9}$$

доказывающим наше утверждение.

Читатель, конечно, понимает, что термины «вектор», «векторный базис» (или «система координат») и «координаты вектора», введенные нами здесь чисто алгебраическим путем, заимствованы из аналитической геометрии. Это заимствование, разумеется, не случайно и оправдано следующим обстоятельством.

Рассмотрим в трехмерном пространстве совокупность всех возможных (т. е. всех размеров и всех направлений) векторов в смысле аналитической геометрии, исходящих из начала координат O. Совокупность этих векторов с обычными для них правилами сложения и умножения на вещественные числа образует, как легко понять, линейное вещественное пространство L. Элементами (или, по нашей терминологии, «векторами») этого пространства как раз и являются эти векторы в смысле аналитической геометрии.

В качестве «векторного базиса» (или «системы координат») в этом пространстве можно выбрать любую тройку некомпланарных (т. е. не лежащих в одной плоскости) векторов. Поэтому размерность этого линейного пространства L, как и следовало ожидать, равна трем. Что же касается нашего определения «координат некоторого вектора ξ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$», то в рассматриваемом нами случае оно, очевидно, совпадает с обычным определением координат этого вектора в фиксированной, вообще говоря, *не прямоугольной* системе координат (см. рис. 5).

Все сказанное означает, что известное из аналитической геометрии понятие вектора в трехмерном пространстве является частным случаем более общего, абстрактного понятия вектора линейного пространства[1]. Привычные же геометрические представления, связанные с термином «вектор», делают более наглядными утверждения, касающиеся этого абстрактного понятия.

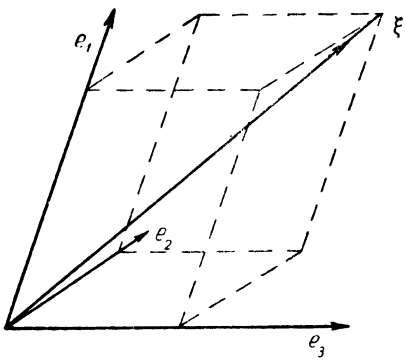

Рис. 5

Проиллюстрируем еще понятие базиса на примере линейного пространства совокупностей $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ из n чисел. Очевидно, что в качестве базиса в этом пространстве можно выбрать систему n векторов

$$(1, 0, \ldots, 0), \quad (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1), \tag{3.10}$$

причем в таком базисе координатами вектора $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ будут сами числа $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Установим теперь важный факт: *все линейные пространства одной и той же размерности n изоморфны*

[1] Здесь стоит подчеркнуть, что в линейном пространстве L_n, и в частности в L_3, введены лишь *две* операции: сложение элементов («векторов») и умножение элемента на число. Этих операций, однако, не достаточно, чтобы исчерпать все содержание аналитической геометрии, или, более точно, евклидовой геометрии. Например, в одних лишь терминах сложения и умножения на число нельзя определить, что такое «угол между векторами», что такое «расстояние между векторами» (т. е. расстояние между концами векторов) и т. д. Чтобы исчерпать все содержание евклидовой геометрии, необходимо ввести в линейном пространстве L_n *еще одну* операцию, например, понятие «скалярного произведения двух векторов» или же понятие «расстояния между двумя векторами». Если это будет сделано — и сделано в соответствии с обычной аналитической геометрией, — то линейное пространство L_n получит право называться евклидовым пространством, обозначаемым как E. Более подробное изложение этого вопроса читатель найдет в примере 5 из § 5.

(*«одинаковы»*) *между собой. Изоморфизм* двух линейных пространств L и L', по определению, означает, что между векторами этих пространств можно установить взаимно-однозначное соответствие, *согласующееся* с введенными в пространствах двумя действиями в том смысле, что если вектору $\boldsymbol{\xi} \in L$ приведен в соответствие вектор $\boldsymbol{\xi}' \in L'$, а вектору $\boldsymbol{\eta} \in L$ — вектор $\boldsymbol{\eta}' \in L'$, то вектору $(\alpha\boldsymbol{\xi}+\beta\boldsymbol{\eta}) \in L$ с любыми числами α и β должен с необходимостью соответствовать вектор $(\alpha\boldsymbol{\xi}'+\beta\boldsymbol{\eta}') \in L'$ с теми же числами α и β.

Установить требуемое взаимно-однозначное соответствие между векторами двух каких-либо линейных пространств L_n и L_n' проще всего следующим образом. Выберем в L_n и L_n' определенные (какие именно—безразлично) векторные базисы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ и каждому вектору $\boldsymbol{\xi} \in L_n$ с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ приведем в соответствие вектор $\boldsymbol{\xi}' \in L_n'$ с теми же координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Легко убедиться в том, что установленное таким образом взаимно-однозначное соответствие между векторами из L_n и L_n' действительно *согласуется* в вышеуказанном смысле как с правилом сложения векторов, так и с правилом умножения вектора на число. Заметим, что при этом «нулевому» вектору из L_n с необходимостью будет соответствовать «нулевой» же вектор из L_n'.

Если тот факт, что каждому вектору $\boldsymbol{\xi} \in L_n$ приведен в соответствие каким-то образом вектор $\boldsymbol{\xi}' \in L_n'$, можно записать в виде $\boldsymbol{\xi}' = f(\boldsymbol{\xi})$, то изоморфное соответствие между векторами из L_n и L_n' (изоморфизм L_n и L_n') мы будем обозначать как $\boldsymbol{\xi}' = I(\boldsymbol{\xi})$.

С другой стороны, *линейные пространства различной размерности заведомо не изоморфны* (*«неодинаковы»*) *между собой*. Докажем это утверждение от противного. Предположим, что L_n и L_m, где, скажем, $n > m$, изоморфны между собой. Выберем в L_n базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и пусть базисным векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ соответствуют в L_m векторы $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$. Вследствие линейной независимости базисных векторов линейная комбинация $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ равна «нулевому» вектору "0" лишь при условии, что все $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Но в силу определения изоморфизма это утверждение немедленно переносится и на векторы $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ из L_m, что противоречит размерности этого пространства.

Мы заключаем, таким образом, что *единственной существенной характеристикой конечномерного линейного пространства L является его размерность.*

Докажем теперь еще одно весьма существенное для всего дальнейшего утверждение: *каждый линейный оператор, действующий в линейном пространстве L, можно изобразить при помощи матрицы.*

Чтобы это сделать, выберем в L какой-либо базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Пусть оператор T переводит вектор $\xi = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n$ в вектор $\xi' = \alpha'_1 \mathbf{e}_1 + \alpha'_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha'_n \mathbf{e}_n$:

$$T\xi = \xi'. \tag{3.11}$$

Имеем:

$$\alpha'_1 \mathbf{e}_1 + \alpha'_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha'_n \mathbf{e}_n = T(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 T\mathbf{e}_1 + \alpha_2 T\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n T\mathbf{e}_n, \tag{3.12}$$

но, в свою очередь, как векторы того же пространства L,

$$\left.\begin{aligned} T\mathbf{e}_1 &= a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1} \mathbf{e}_n, \\ T\mathbf{e}_2 &= a_{12} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2} \mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T\mathbf{e}_n &= a_{1n} \mathbf{e}_1 + a_{2n} \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn} \mathbf{e}_n, \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

где a_{11}, a_{21} и т. д. суть некоторые числа. Поэтому

$$\alpha'_1 \mathbf{e}_1 + \alpha'_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha'_n \mathbf{e}_n = \alpha_1 (a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1} \mathbf{e}_n) + \alpha_2 (a_{12} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2} \mathbf{e}_n) + \ldots + \alpha_n (a_{1n} \mathbf{e}_1 + a_{2n} \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn} \mathbf{e}_n). \tag{3.14}$$

Отсюда, вследствие единственности разложения вектора по фиксированному базису:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_1 &= a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \ldots + a_{1n} \alpha_n, \\ \alpha'_2 &= a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \ldots + a_{2n} \alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha'_n &= a_{n1} \alpha_1 + a_{n2} \alpha_2 + \ldots + a_{nn} \alpha_n. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Это линейное преобразование координат $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вектора ξ в координаты $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ вектора ξ' можно записать и в матричной форме

$$\mathrm{A}' = \boldsymbol{A}\mathrm{A}, \tag{3.16}$$

если ввести матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

и «колонки» (или «столбцы»)

$$\mathrm{A} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}' \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Каждую из колонок можно рассматривать как частный случай квадратной матрицы, невыписанные элементы которой суть нули:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 \dots 0 \\ \alpha_2 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \alpha_n & 0 \dots 0 \end{matrix}}_{n}\Bigg), \quad \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} \alpha_1' & 0 \dots 0 \\ \alpha_2' & 0 .. \ 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \alpha_n' & 0 \dots 0 \end{matrix}}_{n}\Bigg). \tag{3.19}$$

Эквивалентность «развернутой» (3.15) и матричной (3.16) форм записи станет очевидной, если вспомнить известное правило перемножения двух квадратных матриц[1].

Таким образом, всякой линейной операции $\boldsymbol{T}$, совершаемой над вектором ξ, соответствует в фиксированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ определенное линейное преобразование координат этого вектора, характеризуемое матрицей (3.17). Эта матрица называется *матрицей оператора* $\boldsymbol{T}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$. Очевидно, что при фиксированном базисе двум различным линейным операторам $\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}_2$ будут соответствовать с необходимостью две различные матрицы

[1] Это правило гласит: элемент произведения матриц, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца (т. е. ij-ый элемент произведения матриц) равен сумме произведений элементов i-ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-ого столбца второй матрицы. Иными словами:

$$c_{j} = \sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} b_{\kappa j},$$

Здесь $a_{i\kappa}$ означает $i\kappa$-ый элемент первой матрицы $\boldsymbol{A}$, $b_{\kappa j}$ означает κj-ый элемент второй матрицы $\boldsymbol{B}$, а c_{ij} означает ij-ый элемент произведения матриц $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$. Отсюда, в частности, вытекает, что произведение матрицы на «колонку» есть «колонка» же, как это и зафиксировано в (3.16).

A_1 и A_2, и наоборот. Это и доказывает наше утверждение.

Конечно, в случае бесконечномерного пространства L и матрицы A будут бесконечного порядка, и, в частности, если бесконечномерное пространство L является континуальномерным, то матрицы A будут континуальными. Последнее означает, что индексы, указывающие место матричного элемента в матрице, пробегают континуум значений. Такую матрицу можно построить, например, из всего набора значений некоторой функции $f(x,y)$ от двух непрерывных вещественных аргументов, причем в качестве $x'y'$-ого элемента такой матрицы можно взять значение $f(x'y')$ этой функции при $x = x'$ и $y = y'$.

Заметим, что если ввести «колонки»

$$\mathbf{E} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}' \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

то равенства (3.8) можно переписать в матричной форме

$$\mathbf{E} = \beta \mathbf{E}', \tag{3.21}$$

где матрица

$$\mathrm{B} \equiv \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Преобразования же (3.9) координат векторов запишутся в виде

$$\mathrm{A}' = \widetilde{\mathrm{B}}\,\mathrm{A}, \tag{3.23}$$

где $\widetilde{\mathrm{B}}$ — матрица, транспонированная к матрице B, т. е. получающаяся из матрицы B заменой строк на столбцы и наоборот:

$$\widetilde{\mathrm{B}} \equiv \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Равенства (3.21) и (3.23), таким образом, свидетельствуют: при изменении базиса координаты вектора преобразуются по матрице $\widetilde{\mathrm{B}}$, транспортированной к матрице B, задающей преобразование (3.21) старых базисных векторов в новые.

Читателю не доставит большого труда проверить, что 1) сумма двух линейных операторов, 2) произведение линейного оператора на произвольное число и 3) произведение двух линейных операторов будут также линейными операторами, если придать каждой из этих операций следующий естественный смысл:

$$\left.\begin{aligned}(T_1 + T_2)\,\xi = T_1\,\xi + T_2\,\xi, \quad (\alpha T)\,\xi = \alpha\,(T\xi),\\ (T_1\,T_2)\,\xi = T_1\,(T_2\,\xi).\end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

Легко также убедиться в том, что если линейные операторы $\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}_2$ изображаются в некотором фиксированном базисе матрицами $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$, то операторы $\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$, $\alpha\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$ изображаются в этом же базисе матрицами $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$, $\alpha\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ соответственно.

Задачи

1. Показать, что совокупность всех полиномов степени, не большей некоторого числа n, с обычными операциями сложения полиномов и умножения их на числа образует линейное пространство. Найти размерность этого пространства и указать один из возможных его базисов.

2. Объяснить, почему совокупность всех полиномов некоторой фиксированной степени не образует линейного пространства.

3. Показать, что совокупность всех числовых матриц некоторого фиксированного порядка n с обычными правилами сложения матриц и умножения их на числа образует линейное пространство. Найти размерность этого пространства и указать один из возможных его базисов.

4. Показать, что если среди некоторых векторов линейного пространства имеется хотя бы один «нулевой» вектор, то все эти векторы линейно зависимы.

§ 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ

Теперь мы можем ввести еще одно важное понятие — понятие *представления группы*. Мы будем говорить, что нам задано некоторое *представление* $\boldsymbol{T}(g)$ группы G, если каждому элементу g' приведен в соответствие определенный оператор $\boldsymbol{T}(g')$, действующий в некотором множестве M, так что при этом групповому «произведению» элементов группы приводится в соответствие с необходимостью произведение операторов[1], соответствующих этим элементам, и единице

[1] Смысл «произведения» двух операторов в самом общем случае определяется точно так же, как и в частном случае линейных операторов, т. е. по третьей из формул (3.25).

группы — «тождественный оператор» $\boldsymbol{E}$, не изменяющий элемента множества M, на который он действует:

$$\boldsymbol{T}(g_1 g_2) = \boldsymbol{T}(g_1)\,\boldsymbol{T}(g_2) \tag{4.1}$$

и

$$\boldsymbol{T}(e) = \boldsymbol{E}. \tag{4.2}$$

Заметим, что запись $\boldsymbol{T}(g)$ здесь вовсе не следует понимать как результат действия оператора $\boldsymbol{T}$ на элемент g; эта запись указывает лишь на зависимость оператора $\boldsymbol{T}$ («вида» оператора) от элемента группы g.

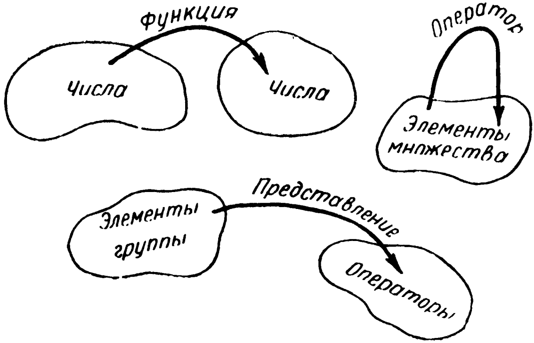

Рис. 6

Вспоминая определения функции и оператора (§ 2) и имея в виду только что данное определение представления группы, мы можем сказать, что если функция есть «соответствие» между числами, оператор — «соответствие» между элементами некоторого множества, то представление группы есть не что иное, как «соответствие» между элементами группы и некоторыми операторами, действующими в некотором множестве элементов. Это обстоятельство изображено на рис. 6.

Если каждым двум различным элементам группы приводятся в соответствие с необходимостью два различных оператора, т. е. если между элементами группы и операторами $\boldsymbol{T}(g)$ существует взаимно-однозначное соответствие, то представление называется *изоморфным*. В общем же случае, т. е. при отсутствии требования взаимно-однозначного соответствия, представление будет *гомоморфным*[1]. Изоморфное представление является, таким образом, частным случаем гомоморфного представления.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что совокупность $T(g)$ операторов $T(g_1)$, $T(g_2)$, . . . какого-либо представления группы сама образует группу. В случае, если представление изоморфно, обе группы (исходная группа и совокупность $T(g)$ операторов ее представления) различаются только обозначением элементов, таблицы же группового умножения их элементов совершенно одинаковы и любое утверждение, касающееся одной группы, может быть немедленно перенесено на другую группу[2]. В этом случае пишут (в полном соответствии с термином «изоморфизм»):

$$G \cong T(g). \tag{4.3}$$

Весьма частным, но очень важным случаем представлений групп являются линейные представления, все операторы $T(g_1)$, $T(g_2)$, . . . которых суть линейные операторы, действующие в некотором линейном пространстве L. Поскольку, как мы знаем, каждый линейный оператор T может быть изображен в фиксированном базисе своей матрицей, любое линейное представление можно задать также матрицами с указанием базиса пространства L. Более того, *при матричном способе задания линейного представления даже нет необходимости в указании базиса пространства L*. Это связано с тем, что сами матрицы, без указания базиса пространства, определяют линейные операторы фактически однозначно, с точностью до так называемых *эквивалентных* операторов.

Прежде чем разбираться, почему это так, мы должны дать четкое определение эквивалентности двух линейных операторов. Линейный оператор T, действующий в L_n, и линейный оператор T', действующий в L'_n, называются *эквивалентными*, если между L_n и L'_n можно установить такой изоморфизм $\xi = I(\xi')$, чтобы из условий:

$$1.\ T\xi = \eta,$$
$$2.\ I(\xi) = \xi' \text{ и } I(\eta) = \eta',$$

---

[1] Термин *гомоморфизм* (греч.) можно перевести как *одностороннее отображение*.

[2] Из определения изоморфизма следует, например, что группа G и совокупность операторов $T(g)$ ее изоморфного представления должны иметь *одинаковую мощность*, поскольку, по самому определению, два множества имеют одинаковую мощность, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. В частности, если группа G состоит из конечного числа элементов, то совокупность $T(g)$ должна состоять из *такого же числа* операторов.

с необходимостью вытекало $T'\xi' = \eta'$, каков бы ни был вектор $\xi \in L_n$. Такой изоморфизм между L_n и L_n', как зависящий от операторов T и T', мы будем называть *T, T'-изоморфизмом*. Ясно, что это определение эквивалентности двух операторов вполне соответствует общепринятому пониманию слова «эквивалентность».

Зафиксируем в L_n какой-либо базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, и пусть в этом базисе оператор T изображается матрицей A. Тогда справедливы легко доказываемые следующие два утверждения.

1) Если T' — оператор, действующий в L_n' и эквивалентный T, то в L_n' найдется такой базис, в котором оператор T' изображается той же матрицей A. Это именно будет базис $I_T(\mathbf{e}_1)$, $I_T(\mathbf{e}_2), \ldots, I_T(\mathbf{e}_n)$, соответствующий по T, T'-изоморфизму базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

2) Если T' — оператор, действующий в L_n' и в некотором базисе $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ изображаемый той же матрицей A, то T' эквивалентен T. Построение T, T'-изоморфизма между L_n и L_n', требующегося для доказательства эквивалентности операторов T и T', может быть осуществлено следующим путем. Каждому базисному вектору $\mathbf{e}_i$ в L_n поставим в соответствие базисный вектор $\mathbf{e}_i'$ в L_n'. Это значит, что $\mathbf{e}_1' = I(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{e}_2' = I(\mathbf{e}_2), \ldots$, $\mathbf{e}_n' = I(\mathbf{e}_n)$. Такое соответствие будет, конечно, взаимно-однозначным. Чтобы определить теперь функцию I для векторов ξ, не совпадающих с базисными, потребуем, чтобы эта функция была линейной, т. е. чтобы для любых двух векторов ξ и η из L_n и любых двух чисел α и β выполнялось: $I(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha I(\xi) + \beta I(\eta)$. Если вспомнить, что каждый вектор ξ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, то нетрудно понять, что это требование линейности изоморфизма действительно дает возможность установить взаимно-однозначное соответствие между векторами из L_n и L_n', причем это соответствие будет как раз требуемым T, T'-изоморфизмом.

Таким образом, существование в L_n и L_n' двух базисов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$, в которых матрицы операторов T и T' совпадают, необходимо и достаточно для эквивалентности операторов T и T'.

Все сказанное, конечно, справедливо и для случая, когда линейные пространства L_n и L_n' совпадают, т. е. когда линейные операторы T и T' действуют в одном и том же пространстве L_n. Предварительно, однако, обратим внимание читателя на следующее обстоятельство.

При доказательстве в § 3 изоморфизма двух линейных пространств одной и той же размерности мы фактически доказали больше, чем утверждали. Именно, мы не только доказали, что между векторами любых двух n-мерных пространств L_n и L_n' можно установить изоморфизм, но и доказали, что этот изоморфизм можно установить таким образом, чтобы произвольно заданный базис одного пространства перешел в произвольно же заданный базис другого пространства.

Если теперь представить себе, что пространства L_n и L'_n совпадают, то это означает: между векторами линейного пространства L_n можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, согласующееся с двумя введенными в пространстве действиями [1], чтобы один произвольно заданный в L_n базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ перешел в другой произвольно же заданный базис $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ того же пространства L_n. Такое взаимно-однозначное соответствие между векторами одного и того же пространства L_n мы будем называть *автоморфизмом* [2] (а не изоморфизмом, как в случае аналогичного соответствия между векторами разных пространств). Автоморфизм будет обозначаться как $\eta = a(\xi)$.

Теперь мы можем дать определение эквивалентности двух операторов T и P, действующих в одном и том же пространстве L_n. Два линейных оператора T и P, действующих в L_n, называются *эквивалентными*, если между векторами в L_n можно установить такой автоморфизм $\eta = a_T(\xi)$, чтобы из условий

$$1.\ T\xi = \theta, \quad 2.\ a(\xi) = \eta,\ a_T(\theta) = \varphi$$

с необходимостью вытекало $P\eta = \varphi$, каков бы ни был вектор $\xi \in L_n$. Такой операторный автоморфизм, чтобы подчеркнуть его зависимость от операторов T и P, мы будем называть *T,P-автоморфизмом*.

Пользуясь приведенными ранее соображениями, легко установить важный факт: существование в L_n двух базисов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, в которых матрицы действующих в L_n операторов T и P совпадают, необходимо и достаточно для эквивалентности операторов T и P. Это означает, что если мы задаем в L_n матрицу, не указывая, однако, базиса в L_n, то мы тем не менее задаем оператор фактически *однозначно*, с точностью до эквивалентных операторов.

Рассмотрим более сложный случай, когда в каждом из пространств L_n и L'_n действует не один оператор, а целая *совокупность* операторов, задающая представление некоторой группы. Пусть в L_n действует совокупность линейных операторов $T(g_1)$, $T(g_2), \ldots$, задающая некоторое (линейное) представление $T(g)$ группы G, а в L'_n — совокупность линейных операторов $T'(g_1)$, $T'(g_2), \ldots$, задающая представление $T'(g)$ той же группы G.

Следующее определение эквивалентности двух представлений $T(g)$ и $T'(g)$ является естественным обобщением понятия эквивалентности двух операторов. Линейное представление $T(g)$, дей-

[1] Ясно (см. § 3), что соответствие $\eta = f(\xi)$ между векторами из L_n называется *согласующимся* с двумя действиями в L_n, если из $f(\xi) = \eta$ и $f(\theta) = \varphi$ вытекает $f(\alpha\xi + \beta\theta) = \alpha\eta + \beta\varphi$. Ясно также, что согласованность соответствия в данном случае означает просто его линейность.

[2] *Автоморфизм* (греч.) можно перевести как *отображение на самое себя*.

ствующее в L_n, и линейное представление $T'(g)$, действующее в L'_n, называются *эквивалентными*, если между векторами из L_n и векторами из L'_n можно установить такой изоморфизм $\xi' = I_{T(g)}(\xi)$, чтобы из условий

$$1.\ T(g_i)\,\xi = \theta, \qquad 2.\ I_{T(g_i)}(\xi) = \eta,\ I_{T(g_i)}(\theta) = \varphi$$

с необходимостью вытекало $T(g_i)\,\eta = \varphi$, каков бы ни был вектор $\xi \in L_n$ и каков бы ни был оператор $T(g_i)$ представления. Такой операторный изоморфизм, чтобы подчеркнуть его зависимость от двух представлений группы, мы будем называть $T(g), T'(g)$-*изоморфизмом*.

Аналогично уже рассмотренному случаю двух операторов, можно легко убедиться в том, что существование в L_n и L'_n двух базисов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, в которых матрицы операторов $T(g_i)$ и $T'(g_i)$ совпадают для любого элемента группы g_i, необходимо и достаточно для эквивалентности двух представлений $T(g_i)$ и $T'(g_i)$.

Введем, далее, определение эквивалентности двух представлений $T(g)$ и $P(g)$, действующих в одном и том же линейном пространстве L_n. Линейные представления $T(g)$ и $P(g)$, действующие в L_n, называются *эквивалентными*, если в L_n существует такой автоморфизм $\eta = a_{T(g)}(\xi)$, чтобы из условий

$$1.\ T(g_i)\,\xi = \theta, \qquad 2.\ a_{T(g)}(\xi) = \eta,\ a_{T(g)}(\theta) = \varphi$$

с необходимостью вытекало $P(g_i)\,\eta = \varphi$, каков бы ни был вектор $\xi \in L_n$ и каков бы ни был оператор $T(g_i)$ представления. Такой операторный автоморфизм мы будем называть $T(g), P(g)$-*автоморфизмом*.

Наконец, справедливо следующее важнейшее для дальнейшего утверждение, которое можно доказать по аналогии с рассмотренным ранее случаем двух отдельных операторов: *существование в* L_n *двух базисов* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, *в которых матрицы действующих в* L_n *операторов* $T(g_i)$ и $P(g_i)$ *двух представлений* $T(g)$ и $P(g)$ *группы совпадают для любого элемента группы* g_i, *необходимо и достаточно для эквивалентности двух представлений* $T(g)$ и $P(g)$. Но это как раз и означает, что любое линейное представление $T(g)$ некоторой группы можно задать матрицами $A(g_1), A(g_2), \ldots$ без указания базиса пространства L_n. Тем самым мы определим представление группы с точностью до эквивалентного представления, т. е. фактически *однозначно*.

Таким образом, термин «матрица» *совершенно эквивалентен* термину «линейный оператор». Важность этого положения состоит в том, что задание представления с помощью именно матриц является весьма удобным в практическом отношении. Линейные представления групп называются часто также матричными представлениями.

Класс линейных (или матричных) представлений групп играет в современной физике первостепенную роль, но, главным образом, не вследствие каких-то особых преимуществ этих представлений, а вследствие их особой простоты и значительной разработанности. Ниже всегда, если это специально не оговорено, будут иметься в виду именно *линейные* представления групп. Размерность пространства L, в котором действуют операторы $T(g_1)$, $T(g_2)$,... представления, называется также размерностью представления.

Имея в виду доказанный в § 3 факт изоморфности двух линейных пространств одной и той же размерности, мы в дальнейшем в качестве пространства L, в котором действует какое-либо представление группы, всегда будем рассматривать без ограничения общности линейное пространство совокупностей $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ n чисел с двумя действиями, определяемыми по формулам (2.5),

§ 5. ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Примеры 1 и 2. Отметим прежде всего тривиальный факт: если каждому элементу какой-либо группы (какой именно — безразлично) привести в соответствие единицу, то тем самым будет задано одномерное[1] гомоморфное представление этой группы. Представление группы, например, всех положительных вещественных чисел, в которой правило композиции определено как обычное произведение, можно построить, сопоставив каждому такому числу корень квадратный из этого числа в арифметическом смысле. Такое линейное — заметим это — представление будет, очевидно, одномерным и изоморфным.

Пример 3. Нетрудно понять, что для группы несингулярных матриц одного и того же порядка n, где правило композиции определено как обычное матричное произведение, изоморфное представление может быть задано теми же матрицами. Поскольку такое представление действует *в том же* пространстве, в каком действуют и элементы группы, в свою очередь являющиеся операторами, оно называется *основным представлением* данной группы.

Пример 4. Построим теперь основное представление группы подстановок из трех чисел (см. пример 4 из § 1). Такая группа состоит из 3! элементов

$$(1),\ (12),\ (13),\ (23),\ (123),\ (132), \qquad (5.1)$$

являющихся линейными операторами, действующими в не-

[1] Обычное число можно рассматривать как матрицу первого порядка.

котором пространстве L_3. В качестве этого пространства можно взять совокупность всех возможных троек (v_1, v_2, v_3) чисел v_1, v_2, v_3 с введенными по (2. 5) двумя действиями.

Если выбрать в L_3 базис (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) (ср. выражение (3. 10), то каждый из шести операторов изобразится своей матрицей:

$$(1)\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad (12)\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad (13)\sim\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\text{ и т. д.}\tag{5.2}$$

(вид остальных матриц читатель может найти самостоятельно). Установленное по (5. 2) соответствие и есть, очевидно, требуемое 3-мерное изоморфное представление группы подстановок из трех чисел, называемое *основным* представлением этой группы.

Пример 5. Чтобы построить основное представление группы вращений системы координат на плоскости, можно действовать в полной аналогии с предыдущим примером. Каждый элемент этой группы можно рассматривать как оператор[1], действующий в линейном вещественном пространстве L_2. В качестве пространства L_2 можно выбрать множество двоек (v_1, v_2) вещественных[2] чисел с введенными по (2.5) двумя действиями.

Выберем в L_2 стандартный базис (1,0), (0,1) и дополнительно потребуем, чтобы вектор (1, 0) был ортогонален вектору (0,1). Это означает, что мы хотим построить в L_2 прямоугольную систему координат.

Строго говоря, мы не можем реализовать эту идею, пока мы не введем в линейном пространстве еще одну операцию, например понятие «скалярного произведения двух векторов» (вспомним подстрочное примечание на стр. 28). Нам понадобится здесь это понятие лишь для вещественных линейных пространств.

Определение. Мы будем говорить, что в вещественном линейном пространстве L_n задано *скалярное произведение векторов*, если каждой паре векторов ξ, $\eta \in L_n$ сопоставлено определенное число, обозначаемое как (ξ, η) и удовлетворяющее следующим четы-

---

[1] Конечно, строго говоря, элементом группы вращений является вращение системы координат, т. е. операция, преобразование, а не оператор, совершающий это преобразование. Ясно, однако, что не имеет смысла делать какое-либо различие между группой операций и группой соответствующих операторов. Эти группы мы будем считать *тождественными* (а не только изоморфными).

[2] В отличие от примера 4, где линейное пространство L_3 могло быть как вещественным, так и комплексным, здесь требование вещественности *существенно*, поскольку речь идет именно о группе вращений системы координат в плоскости нашего, обычного, вещественного трехмерного пространства.

рем требованиям:

$$1.\ (\xi,\ \eta) = (\eta,\ \xi),$$

т. е. скалярное произведение симметрично;

$$2.\ (\alpha\xi,\ \eta) = \alpha(\xi,\ \eta),$$

где α — произвольное вещественное число;

$$3.\ (\xi_1 + \xi_2,\ \eta) = (\xi_1,\ \eta) + (\xi_2,\ \eta),$$

т. е. скалярное произведение дистрибутивно;

$$4.\ (\xi_1\,\xi) \geqslant 0,$$

причем равенство нулю возможно лишь для «нулевого» вектора "0".

Линейное пространство L_n с определенным в нем скалярным произведением, удовлетворяющим требованиям 1 — 4, называется *евклидовым вещественным пространством* и обозначается как E_n. Непосредственной проверкой можно легко убедиться в том, что в случае линейного пространства совокупностей $(v_1,\ v_2, \dots\ v_n)$ n вещественных чисел с введенными по (2.5) двумя действиями скалярное произведение векторов ξ и η, определенное по формуле

$$(\xi,\ \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n,$$
$$\xi \equiv (\xi_1,\ \xi_2, \dots,\ \xi_n),\ \ \eta \equiv (\eta_1,\ \eta_2, \dots, \eta_n), \tag{5.3}$$

действительно удовлетворяет всем требованиям 1 — 4.

Введем еще несколько терминов, знакомых читателю из курса аналитической геометрии. *Длиной вектора* ξ называется число $\sqrt{(\xi,\ \xi)}$, обозначаемое как $|\xi|$ («модуль» вектора ξ). *Углом между вектором* ξ и вектором η называется число

$$\varphi = \arccos\frac{(\xi,\ \eta)}{|\xi|\,|\eta|}, \tag{5.4}$$

т. е.

$$\cos\varphi = \frac{(\xi,\ \eta)}{|\xi|\,|\eta|}. \tag{5.5}$$

Если угол равен $\pi/2$, т. е. если $(\xi,\ \eta) = 0$, то векторы ξ и η называются *ортогональными друг другу*.

Для того чтобы угол между двумя векторами, определяемый по формуле (5.4) или же по формуле (5.5), был *вещественным* числом, нужно доказать, что

$$\left|\frac{(\xi,\ \eta)}{|\xi|\,|\eta|}\right| \leqslant 1 \tag{5.6}$$

или, что то же самое,

$$\frac{(\xi,\ \eta)^2}{|\xi|^2\ |\eta|^2} \leqslant 1, \tag{5.7}$$

т. е.

$$(\xi,\ \eta)^2 \leqslant |\xi|^2\ |\eta|^2. \tag{5.8}$$

Чтобы доказать неравенство (5.8), известное в алгебре под именем *неравенства Коши-Буняковского*, рассмотрим вектор $\xi - \tau\eta$, где τ — произвольное вещественное число. На основании требования 4 для скалярного произведения

$$(\xi - \tau\eta,\ \xi - \tau\eta) \geqslant 0, \tag{5.9}$$

или, на основании других требований,

$$\tau^2(\eta,\ \eta) - 2\tau(\xi,\ \eta) + (\xi,\ \xi) \geqslant 0. \tag{5.10}$$

Это означает, что, каково бы ни было вещественное τ, стоящий справа квадратный трехчлен относительно τ должен быть неотрицательным. Это, в свою очередь, означает, что он не может иметь двух различных вещественных корней (действительно, если квадратный трехчлен имеет различные вещественные корни τ_1 и τ_2, он может быть представлен в виде $(\eta, \eta)(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)$, из которого следует, что он не может не изменять знака). Таким образом, мы должны заключить, что дискриминант квадратного уравнения

$$\tau^2 (\eta, \eta) - 2\tau (\xi, \eta) + (\xi, \xi) = 0 \tag{5.11}$$

не может быть положительным, т. е. должно быть

$$(\xi, \eta)^2 - (\xi, \xi)(\eta, \eta) \leq 0, \tag{5.12}$$

что и требовалось доказать.

Мы можем теперь определить *ортогональный векторный базис (прямоугольную систему координат)* в евклидовом вещественном пространстве E_n как векторный базис, в котором каждая пара

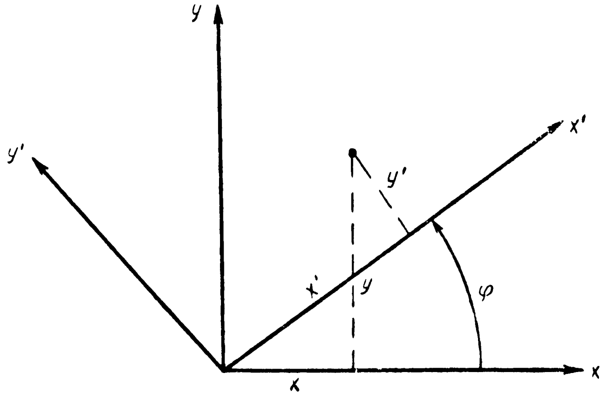

Рис. 7

векторов ортогональна друг другу. Если в линейном вещественном пространстве совокупностей $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ вещественных чисел скалярное произведение двух векторов определить по формуле (5.3), то базис (3.10), как легко убедиться, будет ортогональным. В дальнейшем всегда будет иметься в виду, что в евклидовом вещественном пространстве E_n совокупностей $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ вещественных чисел сложение векторов и умножение их на числа определяются по (2.5), а скалярное произведение — по (5.3).

Введем, наконец, понятие *расстояния между векторами* (между «концами векторов») в евклидовом вещественном пространстве E_n. Если обозначить через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ координаты вектора ξ в некотором, произвольно выбранном, ортогональном базисе и через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — координаты другого вектора η в том же базисе, то расстояние между векторами ξ и η определяется как

$$r(\xi, \eta) = |\xi - \eta| = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)^2} \tag{5.13}$$

Читателю, желающему более обстоятельно познакомиться с алгебраическим формализмом линейных и евклидовых пространств, можно порекомендовать многочисленную литературу по линейной алгебре [1].

Хорошо известно, что при повороте прямоугольной системы координат в плоскости, которую мы обозначим как (xy), на некоторый угол φ координаты x, y произвольного вектора, исходящего из начала координат, переходят в другие x', y', связанные со старыми координатами соотношениями (см. рис. 7):

$$\left.\begin{aligned} x' &= \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Это преобразование можно записать в *матричной форме*

$$X' = A_{xy}(\varphi)\,X, \tag{5.15}$$

если ввести матрицу второго порядка

$$A_{12}(\varphi) \equiv A_{xy}(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

и «колонки»

$$X \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Ясно, что совокупность матриц $A_{xy}(\varphi)$ со всеми возможными φ (однопараметрическая совокупность!) задает искомое *основное представление группы двухмерных вращений*. Это можно подтвердить также непосредственной проверкой того, что произведение матриц двух вращений есть матрица «результирующего вращения»:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

и что единице группы соответствует единичная матрица.

П р и м е р 6. Несколько труднее найти основное представление группы вращений трехмерной системы координат. С этой целью разложим прежде всего произвольное вращение этой, по предположению прямоугольной, системы координат на групповое «произведение» трех вращений в

---

[1] Например, книгу И. М. Г е л ь ф а н д а «Лекции по линейной алгебре» (Гостехиздат, 1948).

в трех координатных плоскостях (xy), (yz) и (zx), для чего обратимся к рис. 8.

Спроектируем одну из произвольным образом повернутых осей, например ось x', на плоскость (xy) и обозначим углы,

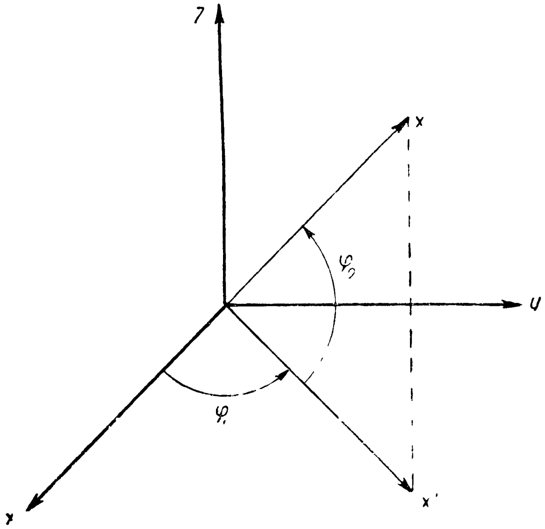

Рис. 8

образованные полученной проекцией и исходной осью x и конечной осью x' как φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда, чтобы прийти к конечной системе координат (x', y', z'), мы сделаем предварительно два поворота исходной системы координат: первый поворот — в плоскости (xy) на угол φ_1, в результате чего мы придем к промежуточной системе координат (x'', y'', z''), и второй поворот — в промежуточной координатной плоскости $(z''x'')$ на угол φ_2. Заметим, что направление второго поворота, указанного на рисунке, отрицательно, поэтому и угол поворота для случая, изображенного на рисунке, будет отрицательным.

В результате двух таких поворотов исходная система координат перейдет во вторую промежуточную систему координат (x''', y''', z'''), причем ось x''' уже будет совпадать с конечной осью x'. Очевидно, что для совпадения остальных двух осей теперь уже достаточно повернуть вторую промежуточную систему координат вокруг оси x''', т. е. в плоскости $(y'''z''')$, на некоторый угол φ_3, не обозначенный на рисунке во избежание его загромождения. Проведя такое «разложение», т. е. найдя углы φ_1, φ_2 и φ_3, мы можем теперь непосредственно приступить к построению интересующего нас основного представления.

Если координаты некоторого произвольного вектора, исходящего из начала координат, обозначить как x, y, z, то после первого поворота в плоскости (xy) на угол φ_1 они перейдут в x'', y'', z'', связанные со старыми координатами соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1, \\ y'' &= -x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1, \\ z'' &= z. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Эти соотношения можно записать в матричной форме

$$X'' = A_{12}(\varphi_1)\,X, \tag{5.20}$$

если ввести матрицу третьего порядка

$$\boldsymbol{A}_{12}(\varphi_1) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

и «колонки»

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X'' \equiv \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

При этом мы ввели также более удобные обозначения для координат, которыми мы в дальнейшем систематически будем пользоваться:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x, & x_1'' &= x'', \\ x_2 &= y, & x_2'' &= y'', \\ x_3 &= z, & x_3'' &= z''. \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

После второго поворота в плоскости $(z''x'')$ на угол φ_2 координаты вектора перейдут в x''', y''', z''', причем эти последние будут определяться через координаты с двумя штрихами матричным равенством

$$X''' = \boldsymbol{A}_{31}(\varphi_2)\,X'', \tag{5.24}$$

получаемым аналогично равенству (5.20). В (5.24) введена матрица

$$\boldsymbol{A}_{31}(\varphi_2) \equiv \begin{pmatrix} -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

а также введена «колонка»

$$X''' \equiv \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

Наконец, после третьего поворота в плоскости $(y''' z''')$ на угол φ_3 координаты вектора перейдут в конечные x', y', z', определяемые через координаты с тремя штрихами матричным равенством

$$X' = \boldsymbol{A}_{23}(\varphi_3)\, X''', \tag{5.27}$$

где матрица

$$\boldsymbol{A}_{23}(\varphi_3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \\ 0 & -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Если теперь «колонку» X'' из (5.20) подставить в (5.24) и полученный результат в свою очередь подставить в (5.27), то можно найти непосредственную связь между исходными и конечными координатами вектора в форме следующего матричного равенства

$$X' = \boldsymbol{A}_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\, X, \tag{5.29}$$

где матрица трехмерного вращения

$$\boldsymbol{A}_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \boldsymbol{A}_{23}(\varphi_3)\,\boldsymbol{A}_{31}(\varphi_2)\,\boldsymbol{A}_{12}(\varphi_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_3 & \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \\ \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 - \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 & \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 - \sin\varphi_3 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

Нетрудно сообразить, что совокупность всех матриц $\boldsymbol{A}_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ со всеми возможными φ_1, φ_2 и φ_3 (трехпараметрическая совокупность!) задает искомое *основное, очевидно трехмерное и изоморфное, представление группы трехмерных вращений*. Обратим внимание на то, что в произведении (5.30) матрицы расположены в обратном порядке (ср. аналогичную ситуацию с группой подстановок из примера 4 в § 1).

Пример 7. Для построения основного представления группы пространственной инверсии учтём, что координаты x, y, z произвольного вектора, исходящего из начала трехмерной системы координат, при инверсии системы перейдут в x', y', z', связанные со старыми координатами матричным равенством

$$X' = A^{-} X, \tag{5.31}$$

где матрица пространственной инверсии

$$A^{-} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Если, таким образом, пространственной инверсии системы координат сопоставить матрицу A^{-}, а «тождественному преобразованию», — как обычно, единичную матрицу (в данном случае 3-го порядка), то тем самым будет задано *основное, трехмерное, изоморфное представление группы пространственной инверсии*.

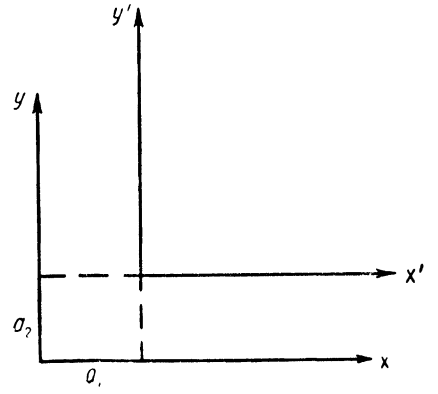

Рис. 9

Пример 8. Для построения основного представления группы трехмерных трансляций учтём, что при такой трансляции координаты произвольного вектора, исходящего из начала координат трехмерного пространства, преобразуются как

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a_1, \\ y' &= y - a_2, \\ z' &= z - a_3 \end{aligned}\right\}, \tag{5.33}$$

где a_1, a_2 и a_3 — суть сдвиги системы координат вдоль каждой из трех осей (см. рис. 9, где для простоты изображена трансляция двухмерной системы координат). Заметим, что преобразования (5.33), которые можно рассматривать как преобразования вычитания из вектора с координатами x, y, z вектора с координатами a_1, a_2, a_3, *не являются линейными*.

По этой причине у группы трансляций основное представление будет *нелинейным*. Это основное представление, очевидно, задается нелинейными операторами вычитания из каждого данного вектора трехмерного пространства определенного фиксированного вектора.

Построим пример *линейного* (матричного) представления группы трехмерных трансляций. А именно, нетрудно понять, что если каждой трансляции, характеризуемой сдвигами a_1, a_2 и a_3, мы сопоставим число (матрицу 1-го порядка)

$$a^{a_1} b^{a_2} c^{a_3}, \tag{5.34}$$

где a, b и c — некоторые фиксированные, не зависящие от вида трансляции, числа (комплексные или вещественные), то тем самым будет задано уже линейное, очевидно одномерное, представление группы трехмерных трансляций.

Пример 9. Найдем теперь основное представление группы Галилея. Как известно из ньютоновой механики, при переходе от одной системы координат к другой, движущейся относительно нее с некоторой постоянной скоростью v, старые x, y, z и новые x', y', z' координаты произвольного трехмерного вектора, исходящего из начала координат (такой вектор в механике обычно именуется радиусом-вектором), связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v_x t, \\ y' &= y - v_y t, \\ z' &= z - v_z t, \end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

где время t отсчитывается от момента времени начала движения системы координат. Если эти три соотношения дополнить тривиальным четвертым соотношением

$$t' = t, \tag{5.36}$$

которое в ньютоновой механике обычно не пишется, но справедливость которого всегда молчаливо предполагается, то эти четыре соотношения можно записать в матричной форме

$$\mathcal{X}' = A^{\text{Гал}}(\mathrm{v})\,\mathcal{X}. \tag{5.37}$$

При этом мы ввели следующие обозначения для матрицы Галилея

$$A^{\text{Гал}}(\mathrm{v}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & 0 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 & -v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

и для четырехмерных «колонок»

$$\mathcal{X} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}. \tag{5.39}$$

Нетрудно понять, что совокупность всех матриц $A^{\text{Гал}}(\mathbf{v})$ со всеми возможными $\mathbf{v}$ (трехпараметрическая совокупность!) задает *основное, очевидно четырехмерное и изоморфное, представление группы Галилея.*

Читатель, конечно, понимает, что сама группа и совокупность матриц ее *основного* представления, тоже образующая группу, являются более, чем просто изоморфными. Эти две группы следует считать *тождественными*. Более того, для многих из рассмотренных нами групп (двух групп вращений, группы пространственной инверсии и группы Галилея) задание основного представления группы следует фактически расценивать как математически четкое *определение* самой группы.

В свое время, когда мы будем несколько более подробно анализировать важнейшие для физики элементарных частиц группы, мы увидим, что перечисленными примерами представлений отнюдь не исчерпываются все возможные представления рассмотренных нами групп.

Задачи

1. Для каких групп единичное предстаьление является изоморфным?

2. Показать, что совокупность матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ задает изоморфное представление группы целых чисел n, где групповое «произведение» понимается как обычная сумма.

§ 6. КАК ПРЕОБРАЗУЮТСЯ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ?

Предположим для простоты, что в некоторой системе координат (x, y, z) нам задано определенное число, например 5. Изменим теперь каким-то образом эту систему координат (повернем ее как-то, совершим пространственную инверсию, сдвинем ее параллельно или перейдем к движущейся системе координат) и постараемся выяснить, во что перейдет это число 5 в новой системе координат, скажем (x', y', z'). Нетрудно понять, что ответа на поставленный вопрос *не* *существует*, поскольку это число «само по себе» никак не изменится, если только мы сами его не изменим. Такой вопрос имеет не больший смысл, чем вопрос об определении того, во что перейдет заданное значение некоторой *неизвестной* функции в фиксированной точке при переходе к какой-либо другой точке.

Представим себе, что по каким-то соображениям мы должны считать, что число 5 не остается без изменения при переходе к другим системам координат и что, например, в системе координат $(x', y', z',)$ оно равно уже 6. Мы можем для краткости обозначить это число одним символом a, подразумевая при этом, что в нештрихованной системе координат $a = 5$, в то время как в штрихованной $a = 6$. Поскольку, однако, в нашем распоряжении находятся не две, а бесконечное (более точно, несчетное) множество различных систем координат, которыми мы пользуемся, символ a будет иметь определенный смысл только тогда, когда мы укажем значение этого символа во *всех* возможных системах координат. Для этого нам понадобилось бы составить таблицу значений a с несчетным количеством ячеек.

Но можно придать символу a определенный смысл и другим путем. Именно, можно *выделить* в пространстве какую-то систему координат, задать значение этого символа в этой системе и указать *правило*, по которому, зная значение символа в выделенной системе координат, можно определить значение этого символа в любой другой системе координат. Выделение же системы координат проще всего осуществить, жестко связав ее с каким-нибудь реально существующим телом, например, с Землей или Солнцем. В этом случае, всем будет понятно, о какой именно выделенной системе координат идет речь и от какой системы надо производить расчеты значений символа a по данному правилу.

В более общем случае мы можем задать в выделенной системе координат некое *множество* чисел (или функций или других математических величин), которое можно рассматривать как *значение* некоторого символа в этой системе координат, и определять значение этого символа (т. е. множество, вообще говоря, других чисел) в любой другой системе координат по какому-то *правилу*.

Мы хотим теперь поставить важный вопрос: может ли это правило быть совершенно *произвольным* или оно должно удовлетворять каким-то общим *ограничениям*?

Чтобы понять, в чем здесь может быть дело, вновь рассмотрим простейший пример. Пусть правило, позволяющее по значению a $(\varphi = 0)$ некоторого символа a в выделенной системе координат (x_0, y_0, z_0) определять значение $a(\varphi)$ этого символа в системе координат (x, y, z), «повернутой» относительно нее в плоскости (xy) на угол φ, гласит

$$a(\varphi) = (\varphi + 1)\, a(\varphi = 0). \tag{6.1}$$

Мы можем, однако, перейти к системе координат (x, y, z) *не непосредственно* из исходной, а через посредство «промежуточной» системы координат (x', y', z'), «повернутой» относительно исходной на угол φ'. В этой «промежуточной» системе

$$a(\varphi') = (\varphi' + 1)\, a(0). \tag{6.2}$$

Зная же a (φ'), мы можем вычислить значение символа a в конечной системе с помощью перехода от «промежуточной» системы к конечной, «повернутой» относительно нее на угол $\varphi - \varphi'$, по тому же правилу (6.1). Если обозначить получаемое таким путем значение символа как $\bar{a}(\varphi)$, то

$$\bar{a}(\varphi) = (\varphi - \varphi' + 1)\, a(\varphi') = (\varphi - \varphi' + 1)(\varphi' + 1)\, a(0). \quad (6.3$$

Из сравнения выражений (6.3) и (6.1) вытекает, что, вообще говоря,

$$\bar{a}(\varphi) \neq a(\varphi). \tag{6.4}$$

Таким образом, в случае, если действует правило (6.1) значение символа a в какой-либо системе координат, вообще говоря, *зависит* от того, каким путем пришли мы к этой системе — непосредственно ли из исходной, выделенной системы, или же через посредство какой-то промежуточной системы координат. Результат, кроме того, будет, вообще говоря, зависеть от выбора промежуточной системы координат.

С целью избежать подобной неоднозначности (мы ведь с самого начала предполагали, что в каждой фиксированной системе координат символ a должен иметь вполне *определенное* значение!) мы можем ввести *дополнительное* правило, согласно которому переходить к какой-либо системе координат можно лишь *непосредственно* из исходной, выделенной системы. Это правило делает наш второй путь перехода, через «промежуточную» систему координат, *незаконным*, и тем самым полностью снимается вопрос о неоднозначности символа a. При этом, конечно, даже при фиксированном правиле типа (6.4) значения символа a в различных системах координат будут существенно зависеть от того, какую из систем координат мы выделим и примем в качестве исходной.

В рамках абстрактной математики и абстрактных систем координат нельзя выдвинуть каких-либо принципиальных возражений против такого *выделения* одной из систем координат, причем, безразлично какой. Представим себе, однако, что символ a есть не только абстрактно-математическое понятие, но и отражает какую-то *конкретную физическую сущность*, т. е. является, как принято говорить, некоторой *физической величиной* (например, массой частицы, вектором ее скорости или вектором ускорения, энергией частицы, напряженностью электрического или магнитного полей в данной пространственной точке и т. д.)[1].

Представим себе также, что значения этой физической величины в различных системах координат находятся по правилу типа правила (6.1). Поскольку эти значения, с одной стороны, существенно зависят от выбора «исходной» системы координат, а с другой стороны, могут быть установлены экспериментально, имеется принципиальная возможность определить, *какая именно* система координат, принятая в качестве «исходной», приводит к значениям физической величины в различных системах координат, реально *наблюдаемым* на эксперименте.

Если бы нам удалось найти такую «истинно исходную» систему координат для некоторой физической величины, естественно было бы думать, что эта система координат будет «истинно исходной» и для *всех* возможных физических величин[2]. Такая система координат должна быть какой-то особой, чем-то выделяться среди всех других мыслимых систем координат. Может ли существовать такая особая, выделенная система координат в нашем пространстве?

---

[1] В одном случае значение физической величины (масса, энергия) определяется одним числом, в другом случае — набором чисел (например, значение вектора скорости определяется тройкой чисел, то же самое справедливо и для вектора ускорения и для напряженностей электрического или магнитного полей). Поэтому говорят об одно-, двух- или многокомпонентной физической величине. В принципе, конечно, физическая величина может быть и бесконечно компонентной.

[2] Все последующие соображения остаются, однако, справедливыми и в случае, если допустить существование не одной, а нескольких «истинно исходных» систем координат, различных для разных физических величин.

Одно из замечательных завоеваний современной научной мысли, прошедшей трудный многовековой путь своего развития, состоит в четком понимании того, что в нашем пространстве *нет* каких-то особых, чем-то выделенных систем координат, — ни среди «повернутых» каким-то образом, ни среди взаимноотраженных или параллельно перенесенных, ни, наконец, среди инерциальных, т. е. движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью. Все такие системы координат должны считаться *совершенно равноправными*. При этом отсутствие выделенной системы координат среди систем координат , «повернутых» друг относительно друга, т. е. отличающихся лишь направлением своих осей, означает *изотропность* пространства, среди взаимно отраженных — *симметрию* пространства относительно *правого и левого*, среди взаимно параллельно перенесенных — *однородность* пространства. Что же касается отсутствия выделенной системы координат среди различных инерциальных систем, то это просто означает отсутствие «истинно покоящейся» системы координат.

Современному физику все эти истины кажутся настолько очевидными и тривиальными, что ему трудно представить себе, что когда-то господствовало совершенно иное понимание всего этого. В очень далекие времена, когда люди имели весьма и весьма ограниченное представление об окружающем их мире и представляли себе Землю как плоскую чашу, над которой сверху «нависает» звездный небосвод, понятие «верха» или «низа» выглядело абсолютным. Поэтому система координат с одной из осей, направленных «вверх» (или «вниз»), по тем представлениям имела вполне определенное преимущество по сравнению со всеми другими системами с наклоненными осями.

Когда же, благодаря естественному стремлению человека к постоянному расширению своего кругозора, выяснилось, что Земля на самом деле не есть плоская чаша, а имеет примерно шарообразную форму, понятия «верха» и «низа» потеряли свое всякое абсолютное значение и превратились в *относительные* понятия. То направление, которое человек, находящийся, например, на северном полюсе, считает «верхом» (см. рис. 10), его антипод, т. е. человек, находящийся на южном полюсе, считает «низом», человек на экваторе — боковым направлением, а человек, находящийся где-то в умеренном поясе, — вообще косым направлением. У каждого из этих четырех людей имеется свой «верх». Вопрос же о том, какое из четырех мнений верно, а какие ложны, *столь* же бессмысленен, как и вопрос о правоте одного из двух людей, стоящих лицом друг к другу и спорящих о том, справа или слева находится дом.

Решение двух этих вопросов состоит в том, что *все* мнения верны, что в нашем пространстве *все* направления совершенно *равноправны*, ни одно из них не может претендовать на то, чтобы считаться, например, «абсолютным верхом», и что «правое» и «левое» в пространстве также *совер-*

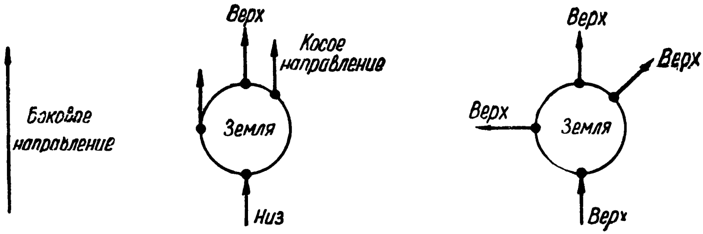

Рис. 10

шенно равноправны (см., однако, гл. IV). Это и означает, что нет никаких причин для *выделения* какой-либо системы координат, ни среди «повернутых» каким-то образом друг по отношению к другу, ни среди взаимно отраженных.

Поскольку, далее, все точки нашего пространства также совершенно равноправны и ни одна из них не может претендовать на то, чтобы считаться «истинным началом координат», нет никаких причин для выделения какой-либо системы координат и среди взаимно параллельно перенесенных.

Несколько сложнее обстояло исторически дело с установлением отсутствия «истинно покоящейся» системы координат. По представлениям, господствовавшим в физике XIX в., окружающий нас мир казался «пустым ящиком», наполненным материальными телами. Хотя, конечно, было ясно, что реальных «стенок» у такого «ящика», которые можно было бы принять за координатные плоскости «истинно покоящейся» системы координат, не существует, долгое время лелеялась надежда на возможность фиксации этих воображаемых стенок с помощью каких-то *косвенных* соображений или экспериментов.

Классическая механика Ньютона, в свое время получившая блестящее подтверждение экспериментом, физикам XIX в. казалась некой «абсолютно верной» теорией. Естественно поэтому, что в качестве критерия для установления «истинно покоящейся» системы координат ими было выдвинуто то требование, чтобы в этой системе координат законы классической механики выполнялись с *абсолютной точностью*. Разочарование наступило тогда, когда было показано, что если законы этой механики точно верны для некоторой системы координат, то они точно же верны и для любой другой системы координат, движущейся относительно нее с некоторой постоянной скоростью. Поскольку, однако, электродинамика, как тогда казалось, не обладает таким свойством инвариантности, все надежды на отыскание «истинно покоящейся» системы координат стали возлагаться именно на нее. Эта критическая ситуация существовала вплоть до 1905 г., когда Эйнштейну удалось одним ударом разрубить гордиев узел противоречий, в которых тогда безнадежно запутывалась классическая теория, и фактически впервые *четко отказаться* от самого термина «истинно покоящейся» системы координат, как не соответствующего объективной реальности.

Окончательный вывод, к которому мы приходим и который соответствует современному уровню знаний, состоит в том, что в нашем пространстве среди возможных, рассматриваемых нами систем координат нет никаких выделенных. Но если это так, правила типа правила (6.1) для вычисления значений какой-либо физической величины в различных системах координат должны быть признаны неприемлемыми, поскольку такие правила предполагают существование какой-то выделенной системы координат, которую можно считать «истинно исходной».

Какие же тогда правила преобразования физических величин при переходе от одной системы координат к другой можно считать *совместными* с принципом равноправности всех (имеется в виду: рассматриваемых нами) систем координат? Вспомнив наши рассуждения в связи с правилом (6.1), нетрудно понять, что для этого необходимо и достаточно, чтобы значение физической величины в произвольной зафиксированной системе координат, получаемое согласно такому правилу, *не зависело* от того, переходим ли мы к этой системе координат из некоторой исходной *непосредственно*, или через посредство какой-то промежуточной системы, а также не зависело от выбора этой промежуточной системы координат.

Пусть при каком-то переходе g от одной системы координат к другой физическая величина V преобразуется по некоторому правилу

$$V' = T(g) V, \tag{6.5}$$

где $T(g)$ — некоторый оператор, переводящий значение V физической величины в исходной системе координат в значение V' этой величины в конечной системе. Если мы теперь перейдем от исходной системы координат к конечной не непосредственно, а через посредство некой промежуточной системы, то получим последовательно

$$V'' = T(g_1) V, \tag{6.6}$$

$$\overline{V}' = T(g_2) V'', \tag{6.7}$$

где, очевидно, $g_2 \cdot g_1 = g$. Подстановка (6.6) в (6.7) дает

$$\overline{V}' = T(g_2) T(g_1) V. \tag{6.8}$$

Поскольку, согласно нашему условию, должно быть $\overline{V}' = V'$, мы заключаем, что для любых g_1 и g_2 должно также быть

$$T(g_2 g_1) = T(g_2) \cdot T(g_1). \tag{6.9}$$

Сравнивая (6.9) и (4.1) и замечая, что совокупность операторов $T(g)$ обязана также удовлетворять условию

$$T(e) = E \tag{6.10}$$

(см. (4.2)), мы приходим к важнейшему выводу о том, что *всякая физическая величина при каких-либо преобразованиях g_1, g_2, ... системы координат может преобразовываться лишь по операторам $T(g_1)$, $T(g_2)$, ..., задающим одно из представлений соответствующей группы преобразований системы координат.*

Таким образом, если бы нам удалось найти *все возможные* представления группы преобразований системы координат, мы получили бы *полный* список операторов, по которым только и могут преобразовываться физические величины при различных преобразованиях систем координат. К сожалению, в такой общей постановке задача эта в настоящее время практически не может быть решена. Если же ограничить класс возможных операторов $T(g)$ лишь линейными операторами, то задача значительно облегчается.

Мы знаем, что говорить о линейности (или нелинейности) оператора имеет смысл лишь в том случае, когда множество, в котором действует этот оператор, образует линейное пространство L. Поскольку операторы интересующих нас представлений групп различных преобразований системы координат должны действовать в множестве возможных значений физических величин, мы прежде всего убедимся в том, что множество возможных значений каждой физической величины можно рассматривать как линейное, вещественное или комплексное, пространство L.

В общем случае, как мы уже говорили, физическая величина многокомпонентна, скажем n-компонентна. Таким образом, под значением физической величины, вообще говоря, нужно понимать совокупность $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ n чисел[1]. Если на множестве всех возможных таких совокупностей n чисел ввести операции сложения совокупностей и умножения совокупности на произвольное число по правилам (2.5), то множество этих совокупностей (т. е. множество значений физической величины) станет, как известно, линейным пространством L_n, в котором могут действовать линейные представления групп.

Здесь следует обратить внимание на одну тонкость, связанную с пониманием термина «возможные значения физической величины». Рассмотрим для конкретности в качестве физической величины энергию E какой-либо частицы. Мы можем рассматривать множество возможных значений E как одномерное вещественное линейное пространство L_1 только в том случае, если в качестве возможных значений E допустим не только положительные, но и отрицательные числа (вспомним требование ∂ для линейного пространства!). Однако отрицательные значения E лишены физического смысла и не реализуются в природе.

Устранить это препятствие можно следующим образом. Рассмотрим формально множество возможных значений E, допустив и отрицательные значения. Тогда это расширен-

---

[1] Если физической величиной является совокупность каких-то *n функций*, то фиксирование ее определенного значения, понимаемого как совокупность n чисел, достигается фиксированием не только системы координат, но и пространственной точки. Например, под значением напряженности $E(x_1, x_2, x_3)$ электрического поля мы будем понимать совокупность $E_1(x_1, x_2, x_3)$, $E_2,(x_1, x_2, x_3)$, $E_3(x_1, x_2, x_3)$ трех чисел $E_1(x_1, x_2, x_3)$, $E_2(x_1, x_2, x_3)$, $E_3(x_1, x_2, x_3)$, отнесенных к определенной системе координат и к некоторой фиксированной пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$.

ное множество станет линейным вещественным пространством L_1, в котором уже могут действовать линейные представления групп. Чтобы, однако, не прийти при этом к физическому абсурду, связанному с приписыванием частице в какой-либо системе координат отрицательной энергии, мы должны дополнительно потребовать, чтобы правило преобразования значения энергии при переходе от одной системы координат к произвольной другой, удовлетворяло определенному ограничению. А именно, такому ограничению, чтобы значение энергии, заданное как положительное число в какой-либо системе координат, оставалось положительным же и *в любой другой* системе координат. Иными словами, условие положительности энергии должно быть *инвариантным* относительно операторов ее преобразования при переходе от одной системы координат к произвольной другой.

Точно таким же образом будет обстоять дело и в общем случае многокомпонентной физической величины. В гл. III мы увидим, что согласно специальной теории относительности скорость $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ какого-либо тела по модулю не может превысить скорости света в вакууме: $|\mathbf{v}| \leqslant c$. Это значит, что закон преобразования для скорости $\mathbf{v}$ должен быть таким, чтобы значение этой скорости, заданное в какой-либо системе координат и по модулю не превышающее c, не превысило по модулю c и в любой другой системе координат. Мы увидим также, что закон преобразования скорости действительно удовлетворяет этому требованию.

Несмотря на то, что ограничение линейными представлениями значительно облегчает задачу отыскания всех представлений интересующих нас групп, для эффективного решения этой задачи в настоящее время необходимо еще больше сузить класс искомых представлений. А именно, во всем дальнейшем мы будем интересоваться только линейными *непрерывными* представлениями групп. Строгое определение непрерывности представления для произвольных групп значительно увело бы нас в математические дебри. Но для интересующих нас групп линейных преобразований системы координат понятие непрерывности их линейных представлений довольно элементарно.

В соответствии с соображениями § 5 каждая интересующая нас группа тождественна группе матриц, задающих *основное* представление этой группы: $G \cong A(g)$. Линейное представление такой группы G, задающееся матрицами

$A(g)$, мы будем называть *непрерывным*, если любым двум бесконечно близким матрицам $A(g_1)$ и $A(g_2)$ с необходимостью соответствуют две бесконечно близкие же матрицы $B(g_1)$ и $B(g_2)$. При этом две матрицы считаются бесконечно близкими, если бесконечно близки все соответствующие элементы их.

На современном уровне физических знаний разрывные представления групп преобразований системы координат вряд ли могут составлять значительный интерес для физики. В дальнейшем, говоря о представлениях групп, мы всегда будем иметь в виду именно непрерывные их представления.

В настоящее время суженная задача, сводящаяся к отысканию всех линейных непрерывных представлений рассмотренных нами групп преобразований системы координат, решена по существу до конца. Здесь мы должны еще раз подчеркнуть, что нет ровно никаких оснований считать, что физические величины при преобразованиях системы координат могут преобразовываться лишь линейно, как это предполагается в современной физике элементарных частиц. Поскольку, однако, до сего времени не найдено ни одного существенно нелинейного представления[1] интересующих нас групп, говорить сейчас о возможности нелинейных преобразований физических величин было бы преждевременно.

Теперь мы должны ввести еще ряд важных понятий, значительно облегчающих процедуру отыскания всех возможных матричных представлений каких-либо групп.

---

[1] Чтобы понять смысл термина «существенно нелинейное представление», покажем, как, зная какое-либо линейное представление группы, построить тривиальным образом нелинейное представление этой группы. Для такого построения достаточно совершить над векторами ξ пространства L_n, где действует данное линейное представление, некое *нелинейное* преобразование: $\xi \in L_n \to \eta \in L_n$. Тогда, очевидно, каждый линейный оператор, действующий на непреобразованные векторы ξ, будет индуцировать определенный нелинейный оператор, действующий на преобразованные векторы η. И таким образом, на основе линейного представления может быть построено определенное нелинейное представление, которое, по понятным причинам, мы можем назвать *несущественно нелинейным представлением*. Нелинейные же представления, которые нельзя построить этим путем, и будут называться *существенно нелинейными*.

§ 7. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть для некоторой группы G нам удалось найти совокупность матриц n-го порядка

$$A(g_1), \quad A(g_2), \ldots, \tag{7.1}$$

задающую n-мерное представление нашей группы. Задание некоторой матрицы $A(g)$ n-го порядка, как мы знаем, эквивалентно заданию определенного линейного преобразования

$$V' = A(g)\,V \tag{7.2}$$

от одной совокупности n чисел

$$V \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

к другой

$$V' \equiv \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n' \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

«Колонки» V и V' можно рассматривать как векторы в линейном n-мерном пространстве, причем $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и, соответственно, $v_1', v_2'., \ldots, v_n'$ являются компонентами этих векторов в базисе (3.10).

На рис. 11 мы не могли, конечно, изобразить n-мерное пространство, так как наше реальное пространство является «только» трехмерным и попытка вообразить себе, например, четырехмерное пространство уже встречает значительные затруднения. Тем не менее читатель должен уметь «абстрактно» представлять себе изображенные на этом рисунке n взаимно-перпендикулярных координатных осей n-мерного пространства. В этом пространстве и действует представление (7.1). Примеры n-мерного пространства и векторов в нем нам уже встречались при построении представлений различных групп в § 5. Найденное нами там (см. формулу (5.2)) основное представление группы подстановок трех чисел действует в трехмерном пространстве, векторами в котором являются тройки (v_1, v_2, v_3) чисел. Основные представления группы вращений системы координат как на плоскости, так и в трехмерном пространстве, определенные по формулам (5.21) и (5.30), действуют опять-таки в

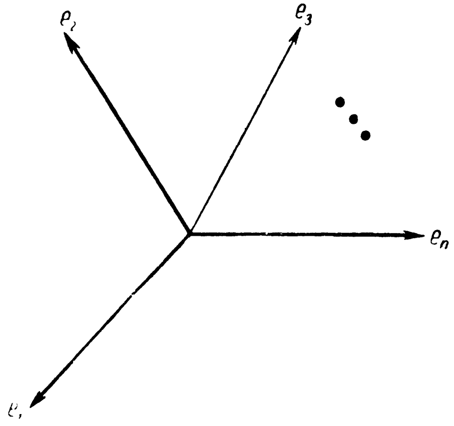

Рис. 11

трехмерном пространстве, векторами в котором являются те же радиусы-векторы различных точек. Основное представление группы пространственной инверсии также действует в трехмерном пространстве на те же самые векторы. Найденное нами линейное представление (5.34) группы трехмерных трансляций действует уже в одномерном пространстве, в котором мы не вводим обозначения для векторов. И, наконец, найденное нами основное представление группы Галилея (см. (5.38)) действует уже в четырехмерном пространстве ($xyzt$), векторами в котором являются радиусы-векторы точек этого пространства (формула (5.39)).

Перейдем теперь в n-мерном пространстве к новой системе координат, или, как говорят, перейдем к новому векторному базису, совершив над исходными базисными векторами некоторое линейное преобразование. Тогда компоненты v_1, v_2, ... вектора V перейдут в новые $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., связанные со старыми некоторым матричным соотношением

$$\overline{V} = SV, \tag{7.5}$$

и компоненты v_1', $v_2', \ldots$ в $\overline{v}_1'$, $\overline{v}_2', \ldots$:

$$\overline{V}' = SV'. \qquad (7.6)$$

Мы не будем чем-либо ограничивать переход от одного векторного базиса к другому и, соответственно этому, не будем накладывать на матрицу S каких-либо условий, однако мы потребуем, чтобы эта матрица была несингулярной. Тогда соотношения (7.5) и (7.6) эквивалентны следующим:

$$V = S^{-1}\overline{V}, \quad V' = S^{-1}\overline{V}'. \qquad (7.7)$$

Найдем связь между новыми компонентами $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2, \ldots$ и $\overline{v}_1'$, $\overline{v}_2', \ldots$ исходного и конечного векторов в новом базисе. Подставляя в (7.2) V и V' из (7.7), получим

$$S^{-1}\overline{V}' = A(g)\, S^{-1}\overline{V}, \qquad (7.8)$$

или, после умножения обеих частей слева на S,

$$\overline{V}' = SA(g)\, S^{-1}\overline{V}. \qquad (7.9)$$

Таким образом, если векторы n-мерного пространства L_n при *старом*, исходном векторном базисе преобразовывались по матрице $A(g)$, то теперь, при *новом* векторном базисе, *те же самые* векторы преобразуются по матрице

$$SA(g)\, S^{-1}. \qquad (7.10)$$

Поскольку, однако, нет никаких причин для выделения в n-мерном пространстве того или иного базиса и все возможные векторные базисы должны считаться совершенно *равноправными*, естественно матрицы A и SAS^{-1} назвать *эквивалентными*.

Нетрудно убедиться, что совокупность матриц

$$SA(g_1)\, S^{-1}, \quad SA(g_2)\, S^{-1}, \ldots, \qquad (7.11)$$

эквивалентных матрицам представления (7.1) группы G, также задает *представление* этой же группы. По причинам, о которых говорилось выше, оба представления (7.1) и (7.11) называются *эквивалентными*.

Смысл введенного понятия эквивалентных представлений состоит в том, что для отыскания *всех возможных* представлений какой-нибудь группы по существу достаточно отыскать лишь все возможные *неэквивалентные* представления этой группы, из которых все остальные могут быть получены с помощью всех возможных несингулярных матриц S по формуле (7.10).

§ 8. РАЗЛОЖИМЫЕ И ПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Может оказаться, что при некотором *удачно выбранном* векторном базисе (т. е. при удачно выбранной матрице $\boldsymbol{S}$) *все* матрицы представления (7.11) примут «ящичную» (или, как еще говорят, «ступенчатую») структуру:

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}(g)\boldsymbol{S}^{-1} \equiv \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}'(g) & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{A}''(g) \end{array}\right). \tag{8.1}$$

Здесь $\boldsymbol{A}'(g)$ есть матрица порядка n' и $\boldsymbol{A}''(g)$ — матрица порядка n'', причем, конечно, $n'+n''=n$. В этом случае говорят, что представление (7.11) *разложимо* и разлагается на *два* представления:

$$\boldsymbol{A}'(g_1), \quad \boldsymbol{A}'(g_2), \ldots, \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{A}''(g_1), \quad \boldsymbol{A}''(g_2), \ldots \tag{8.3}$$

(нетрудно проверить, что как совокупность матриц (8.2), так и совокупность матриц (8.3) действительно задают *представления* нашей группы G).

Подобный процесс разложения можно продолжить и *дальше*, т. е. попытаться в свою очередь разложить каждое из полученных представлений (8.2) и (8.3) с помощью удачного выбора матриц $\boldsymbol{S}'$ и $\boldsymbol{S}''$ и т. д. до тех пор, пока дальнейшее разложение окажется невозможным. В результате такого процесса мы разобъем исходное представление (7.11) на некоторое число, конечное или бесконечное, неразложимых представлений. Среди всего множества представлений данной группы неразложимые ее представления играют, очевидно, первостепенную роль, и если для какой-то группы нам удалось отыскать все ее *неразложимые* представления (причем, фактически достаточно отыскать лишь все *неэквивалентные неразложимые* представления), то совершая процесс, *обратный* процессу разложения, мы можем построить *все* множество представлений этой группы.

Заметим, что в том векторном базисе, в котором представление имеет «ящичную» структуру (8.1), каждый вектор n-мерного пространства

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n'} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

переходит при действии матрицы (8.1) в вектор *такого же* типа (т. е. с равными нулю последними n'' компонентами). То же самое справедливо и для любого вектора вида

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ v_{n'+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

т. е. с равными нулю первыми n' компонентами.

Можно поэтому сказать, что множество (или пространство) всех векторов (7.3) разбивается на два подмножества (или подпространства) векторов (8.4) и (8.5), каждое из которых *инвариантно* относительно действия *всех* матриц (8.1) данного представления.

Покажем, что найденное нами в § 5 основное представление группы подстановок трех чисел разложимо и разлагается на одномерное и двухмерное. Действительно, если в качестве матрицы $\boldsymbol{S}$ выбрать матрицу

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

то все шесть матриц, задающих наше представление, приобретут ступенчатую структуру:

$$\boldsymbol{SA}(1)\,\boldsymbol{S}^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{SA}(12)\,\boldsymbol{S}^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ и т. д.} \tag{8.7}$$

(читатель легко может убедиться, что и остальные, невыписанные, четыре матрицы будут иметь ту же самую структуру). Мы можем поэтому в качестве матриц, задающих представление группы подстановок трех чисел, выбрать систему матриц второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и т. д.} \tag{8.8}$$

Второе же представление, на которое разлагается исходное, является тривиальным.

Покажем еще, что найденное нами (см. формулу (5.21)) основное представление группы вращений системы координат на плоскости *разложимо* и разлагается на два одномерных представления.

Чтобы разложить двухмерное представление (5.16) на два одномерных, перейдем в двухмерном пространстве к *новому* векторному базису с помощью матрицы

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

При этом вся однопараметрическая совокупность матриц (5.16) перейдет в

$$\left(\begin{array}{c|c} e^{-i\varphi} & 0 \\ \hline 0 & e^{i\varphi} \end{array}\right), \tag{8.10}$$

что и доказывает наше утверждение. Заметим, что если при *старом* векторном базисе все элементы матриц нашего представления (формула (5.10)) были *действительные* числа, то при *новом* векторном базисе это уже *комплексные* числа. Если бы мы не выходили за рамки действительных чисел, нам *не удалось* бы разложить представление (5.10) на два одномерных.

Можно показать (мы не станем этого делать), что найденное нами (см. формулу (5.30)) основное представление группы вращений трехмерной системы координат *неразложимо* (имеется, конечно, в виду: даже если выйти за рамки действительных чисел в область комплексных чисел).

Основное же представление группы пространственной инверсии, очевидно, *разложимо* уже в «исходном» векторном базисе и разлагается на три одномерных представления. Представление (5.34) группы пространственных трансляций, как и всякое одномерное представление, конечно, *неразложимо*. Наконец, основное представление (5.38) группы Галилея, как можно показать (мы не будем этого делать), *неразложимо*.

Хотя, как мы теперь знаем, задача отыскания *всех* представлений какой-нибудь группы по существу сводится к значительно более *узкой* задаче отыскания лишь всех ее *неэквивалентных неразложимых* представлений, для многих групп эффективное решение этой задачи представляет часто значительные трудности. В частности, до сего времени не найдены все, даже конечномерные, неразложимые представления такой важнейшей для теоретической физики группы, как группа Лоренца, с которой читатель познакомится в гл. III. Чтобы еще более сузить класс отыскиваемых представлений какой-нибудь группы, мы должны ввести еще одно понятие — понятие *приводимости* представлений, менее жесткое, чем понятие их разложимости.

Пусть при определенном выборе базиса в n-мерном линейном пространстве, в котором действует заданное представление группы, все матрицы $A(g)$ этого представления имеют «полуящичную» структуру

$$\left(\begin{array}{c|c} A'(g) & B(g) \\ \hline 0 & A''(g) \end{array}\right), \tag{8.11}$$

где $B(g)$, вообще говоря, отлично от нуля, а $A'(g)$ и $A''(g)$ суть матрицы порядков n' и n'', причем, конечно, $n'+n''=n$. В этом случае говорят, что представление $A(g)$ *приводимо* и приводится к сумме двух представлений $A'(g)$ и $A''(g)$ (нетрудно непосредственной проверкой убедиться в том, что как $A'(g)$, так и $A''(g)$ действительно являются *представлениями* той же группы). Продолжая далее процесс приведения, мы в конце концов «приведем» наше исходное представление $A(g)$ к сумме *неприводимых* (имеется в виду: ни при каком выборе векторного базиса).

Заметим, что в том векторном базисе, в котором представление $A(g)$ имеет «полуящичную» структуру (8.11), всякий вектор (8.4) не может изменить своего вида под действием какой-либо матрицы (8.11). Можно поэтому сказать, что множество (или пространство) всех векторов (7.3) содержит подмножество (или подпространство) (8.4), *инвариантное* относительно действия матриц (8.11). Обратим внимание на то, что подпространство векторов (8.5) уже, вообще говоря (если $B(g)\neq 0$), не инвариантно относительно действия этих матриц.

Представим себе теперь, что нам удалось найти все неприводимые представления какой-нибудь группы. Можем ли мы утверждать, что совершая процесс, обратный процессу приведения, мы может получить *все* представления данной группы? Хотя, конечно, очевидно, что знание всех неприводимых представлений группы доставляет очень *большую* информацию вообще о *всех* ее представлениях, тем не менее в общем случае ответ на поставленный вопрос должен быть *отрицательным*.

Дело в том, что знание лишь неприводимых представлений группы не дает *никакой* информации о недиагональных элементах, типа $\boldsymbol{B}(g)$ в (8.11), приводимых ее представлений. Конечно, в частном случае, когда каждое неразложимое представление группы есть одновременно и неприводимое ее представление (заметим, что обратное справедливо всегда!), когда, следовательно, знание всех неприводимых представлений эквивалентно знанию всех ее неразложимых представлений, ответ на поставленный вопрос будет положительным.

В заключение этого параграфа заметим, что найденное нами основное представление (5.30) группы вращений трехмерной системы координат не только неразложимо, но и, как можно показать (мы не будем этого делать), *неприводимо*.

Задачи

1. Является ли представление, приведенное в задаче 2 § 5, приводимым?
2. Является ли основное представление (5.38) группы Галилея приводимым?

Глава II

ПОЛНАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ГРУППА

§ 9. УСЛОВИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Мы переходим теперь к рассмотрению одной из важнейших для современной физики элементарных частиц групп — *полной трехмерной ортогональной группы*, включающей, как помнит читатель, вращения трехмерной системы координат плюс ее инверсию. Предварительно, однако, мы остановимся на более простой группе, именно группе вращений системы координат в плоскости, например в плоскости (xy).

Обратим внимание на очевидный факт: матрица $A_{xy}(\varphi)$ вращения в плоскости (xy) обладает тем свойством, что при преобразовании (5.21) координат по этой матрице не изменяется расстояние между двумя произвольными векторами (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, исходящими из начала координат, т. е.

$$r = r', \tag{9.1}$$

где r — расстояние между двумя векторами («концами векторов») в исходной системе координат:

$$r = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2}, \tag{9.2}$$

r' — расстояние между этими же векторами в системе координат, «повернутой» относительно исходной на некоторый, произвольный угол φ:

$$r' = \sqrt{(x'-\bar{x}')^2 + (y'-\bar{y}')^2 + (z'-\bar{z}')^2}. \tag{9.3}$$

В дальнейшем нам будет более удобно слово *вектор* в трехмерном пространстве заменить словом *точка* (имеется в виду точка, изображающая «конец вектора», исходящего из начала координат). И аналогично для четырехмерного пространства-времени, с которым мы подробно познакомимся в гл. III. Желательность такой замены вызвана тем, что в дальнейшем в основу всех рассмотрений будет положено понятие, которое в большей степени принято именовать «расстоянием между двумя точками пространства», чем «расстоянием между двумя векторами пространства». Разумеется, суть дела от такой замены не изменяется.

Соотношение (9.1), очевидно, эквивалентно

$$r^2 = r'^2,$$

которым нам в дальнейшем удобнее будет пользоваться. Это соотношение понятно из геометрических представлений, но его можно вывести также и алгебраически, подставив в (9.3) выражения (5.19) для штрихованных координат через нештрихованные.

Кроме того, нетрудно непосредственно убедиться, что детерминант матрицы вращения в плоскости равен единице:

$$\operatorname{Det}[A_{xy}(\varphi)] \equiv \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \qquad (9.4)$$

Покажем теперь, что перечисленные два свойства матрицы вращения в плоскости *однозначно* определяют вид этой матрицы. Запишем общий вид линейного преобразования координат, оставляющего неизменной третью координату:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (9.5)$$

Потребуем теперь, чтобы при таком преобразовании удовлетворялось первое свойство, т. е. чтобы для произвольных двух точек имело место равенство (9.1). Подстановка (9.5) в (9.3) и приравнивание коэффициентов при одинаковых членах в полученном выражении и в выражении (9.2) дает три уравнения для определения неизвестных коэффициентов в (9.5):

$$\left.\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1, \\ b^2 + d^2 &= 1, \\ ab + cd &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

Поскольку из первого уравнения (9.6) следует $|a|<1$, то можно ввести обозначение:

$$a \equiv \cos\varphi. \tag{9.7}$$

Тогда из первого уравнения (9.6) следует, что

$$c = \pm \sin\varphi. \tag{9.8}$$

Аналогичным путем из второго уравнения (9.6) следует, что

$$b \equiv \cos\varphi, \quad d = \pm \sin\varphi. \tag{9.9}$$

Если учесть еще и третье уравнение (9.6), то получатся четыре возможных решения для коэффициентов a, b, c, и d и, следовательно, четыре возможных вида искомой матрицы вращения в плоскости (xy):

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

и

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.11}$$

Однако первые две матрицы (9.10) имеют детерминант равный -1, и поэтому должны быть отброшены, как не удовлетворяющие второму свойству[1]. Третья же и четвертая матрицы (9.11) отличаются лишь обозначением параметров, они переходят друг в друга при замене обозначений $\varphi \to -\varphi$, причем углом вращения системы координат называется параметр φ, стоящий именно в *правой* матрице (9.11). Таким образом, наше утверждение доказано.

Мы можем поэтому *не задавать* априори вида матрицы вращения в плоскости (хотя вид ее (5.21), конечно, элементарно может быть найден из геометрических представлений), а *определить* ее как матрицу такого преобразования двух координат (третья координата остается неизменной!), которое: 1) не изменяет квадрата расстояния между двумя произвольными пространственными точками и 2) имеет детерминант, равный $+1$.

---

[1] Первая из матриц (9.10) соответствует групповому «произведению» вращения на угол φ на зеркальное отражение оси y, вторая — «произведению» вращения на угол $-\varphi$ и того же зеркального отражения оси y.

Совершенно аналогичным образом обстоит дело и с группой *трехмерных* вращений. Из геометрических соображений очевидно (а можно также очень просто показать и чисто алгебраически), что при преобразовании (5.29) по матрице (5.30) трехмерного вращения квадрат расстояния (9.2) между двумя произвольными пространственными точками остается неизменным и что детерминант матрицы трехмерного вращения равен $+1$:

$$\operatorname{Det}[A_{\text{рез}}] = \operatorname{Det}[A_{23}(\varphi_1)]\cdot\operatorname{Det}[A_{31}(\varphi_2)]\cdot\operatorname{Det}[A_{12}(\varphi_3)] = 1\cdot 1\cdot 1 = 1. \tag{9.12}$$

Путем, аналогичным проделанному нами для случая вращения на плоскости, но более громоздким, можно показать, что вид матрицы вращения в пространстве, найденный нами ранее из геометрических соображений (см. формулу (5.30), может быть *однозначно* выведен из двух условий: 1) при преобразовании (5.29) координат по этой матрице (которое теперь уже может изменять все *три* координаты) остается неизменным квадрат расстояния между двумя произвольными пространственными точками и 2) детерминант матрицы преобразования равен $+1$. Иными словами, всякое линейное преобразование трех координат, оставляющее неизменным квадрат расстояния между двумя произвольными пространственными точками и имеющее детерминант равный $+1$, есть преобразование трехмерного вращения. Отказ же от второго условия приводит к преобразованиям, включающим не только вращения, но и зеркальное отражение трехмерной системы координат, т. е. ко всем преобразованиям полной ортогональной группы. Утверждения эти, обобщенные на случай *четырехмерного* пространства, окажут нам большую услугу в дальнейшем, когда мы будем рассматривать основную группу современной физики элементарных частиц — группу Лоренца.

В § 5 мы показали, что матрица произвольного трехмерного вращения представляется в виде (5.30). Теперь мы найдем условие (конечно, эквивалентное (5.30)), налагаемое на элементы матрицы трехмерного вращения, исходя из ее определения как матрицы преобразования трех координат, не изменяющего квадрата расстояния между двумя произвольными пространственными точками и имеющего детерминант, равный $+1$.

Если элементы матрицы $A_{\text{рез}}$ обозначить соответственно нижеследующей формуле

$$A_{\text{рез}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad (9.13)$$

то матричное равенство (5.29) будет эквивалентно трем обычным равенствам:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (9.14)$$

Последние три равенства можно, в свою очередь, записать в форме одного равенства, если ввести так называемый «свободный» индекс

$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (9.15)$$

или, еще более коротко, если ввести «индекс суммирования»:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (9.16)$$

Для еще более краткой, как мы будем говорить, *компактной* записи трех равенств (9.14) мы введем соглашение о суммировании. Согласно этому соглашению знак суммирования Σ в выражениях типа (9.16) мы будем в дальнейшем опускать, принимая, что если в каком-либо члене индекс повторяется *дважды* (как, например, в правой части (9.16)), то по этому индексу подразумевается *автоматическое суммирование*. Индекс, повторяющийся дважды в одном члене, называется более коротко «немым».

Поскольку в дальнейшем нам понадобится подразумевать автоматическое суммирование не только от 1 до 3, как в только что рассмотренном случае, но и от 1 до 4, а также и от 1 до 2, мы введем условие, согласно которому по «немому» малому латинскому индексу подразумевается автоматическое суммирование от 1 до 3, по «немому» большому латинскому индексу — автоматическое суммирование от 1 до 2 и по «немому» греческому индексу — автоматическое суммирование от 1 до 4. При этом и «свободные» индексы (т. е. индексы, встречающиеся в каждом члене лишь один раз) пробегают значения — малые латинские от 1 до 3, большие латинские — от 1 до 2 и греческие — от 1 до 4.

Вначале мы будем обращать внимание читателя на непривычный для него смысл выражений, записанных в компактной форме, но будем надеяться, что постепенно по мере приобретения опыта читатель сам сможет разбираться в этом смысле.

Итак, в соответствии с введенным соглашением три равенства (9.14) могут быть записаны в следующей компактной форме

$$x_i' = a_{ij} x_j. \tag{9.17}$$

Заметим, что (9.17) можно также записать в нескольких иных, компактных же формах, например,

$$x_i' = a_{ik} x_k, \quad x_l' = a_{lk} x_k. \tag{9.18}$$

Из этого примера становятся очевидными следующие два правила. Первое: «немой» индекс в каждом члене можно заменять на *произвольный* другой, но не имеющийся в данном члене. Это первое правило есть аналог известного из математического анализа правила, согласно которому переменная интегрирования (переменная предельного суммирования) может быть обозначена совершенно произвольным образом, но в случае, например, двухкратного интеграла одна из переменных интегрирования не может быть обозначена так же, как и другая. И второе правило: «свободный» индекс можно также заменить на *произвольный* другой, но делать эту замену надо одновременно во *всех* членах равенства. Причем надо строго следить за тем, чтобы новый «свободный» индекс не совпадал ни с одним из имеющихся как «свободных», так и «немых» индексов ни в одном из членов данного равенства.

Заметим, что ни в одном из членов равенства, записанного в компактной форме, не может быть индекса, встречающегося более двух раз. Появление такого, встречающегося более двух раз, индекса является свидетельством того, что где-то при замене индексов (а эта замена, как мы увидим, очень часто бывает необходимой) была допущена ошибка, т. е. было нарушено одно из двух вышеперечисленных правил.

В соответствии с введенным соглашением о суммировании квадрат расстояния между двумя точками (x_1, x_2, x_3) и ($\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$) в «исходной» системе координат можно записать в компактной форме

$$r^2 \equiv (x_i - \overline{x}_i)(x_i - \overline{x}_i) \equiv (x_i - \overline{x}_i)^2 \tag{9.19}$$

и квадрат расстояния между этими же точками в «повернутой» системе координат — в компактной форме

$$r'^2 \equiv (x'_i - \overline{x}'_i)(x'_i - \overline{x}'_i) \equiv (x'_i - \overline{x}'_i)^2. \qquad (9.20)$$

Посмотрим теперь, какому условию должны удовлетворять элементы матрицы $A_{\text{рез}}$, чтобы $r^2 = r'^2$ для произвольных точек (x_1, x_2, x_3) и $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$. Подстановка (9.17)[1] в (9.20) дает

$$r'^2 = (a_{ij}x_j - a_{ij}\overline{x}_j)(a_{ik}x_k - a_{ik}\overline{x}_k) =$$
$$= a_{ij}a_{ik}(x_j - \overline{x}_j)(x_k - \overline{x}_k). \qquad (9.21)$$

Здесь мы учли, что прежде чем взять произведение $(a_{ij}x_j - a_{ij}\overline{x}_j)$ на $(a_{ij}x_j - a_{ij}x_j)$ необходимо, например, во втором члене произвести замену «немого» индекса j на какой-либо другой, так как иначе в полученном произведении стояло бы четыре одинаковых индекса и смысл этого выражения был бы отнюдь не ясным.

Теперь необходимо провести сравнение двух выражений: (9.21) и (9.19). Коэффициенты в (9.21) должны быть такими, чтобы (9.21) сводилось к (9.19). Чтобы найти условие, необходимое и достаточное для этого, нам удобнее ввести в рассмотрение так называемый символ Кронекера, определенный по формуле

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \qquad (9.22)$$

Если девять величин δ_{ik} расположить в виде матрицы третьего порядка, по аналогии с тем, как это сделано для матрицы $A_{\text{рез}}$ в формуле (9.13), то такая матрица, очевидно, будет единичной.

Нетрудно, далее, видеть, что при действии символа Кронекера δ_{ik}, например, на величину x_k получается:

$$\delta_{ik}x_k = x_i. \qquad (9.23)$$

В самом деле, в левой части (9.23) стоит сумма по «немому» индексу k, причем очевидно, что из трех членов этой суммы только один член отличен от нуля — это член, в котором «немой» индекс k совпадает со «свободным» индексом i. Но этот член как раз и равен x_i.

---

[1] Имеется, конечно, в виду, что и координаты второй точки преобразуются по *той же* матрице, что и координаты первой точки, т. е. что наряду с (9.17) имеет место: $\overline{x}'_i = a_{ij}\overline{x}_j$.

Формула (9.13) может быть тривиально обобщена на случай действия символа δ_{ik} на любое выражение, содержащее один из индексов i или k:

$$\delta_{ik} T_{\ldots k \ldots} = T_{\ldots, i \ldots}, \quad \delta_{ik} T_{\ldots i \ldots} = T_{\ldots k \ldots} \tag{9.24}$$

(многоточием здесь обозначены другие возможные индексы у величины T).

С помощью символа Кронекера мы можем теперь очень просто провести необходимое нам сравнение выражений (9.21) и (9.19). Для этого перепишем (9.19) в виде

$$r^2 = (\delta_{ij} x_j - \delta_{ij} \overline{x}_j)(\delta_{ik} x_k - \delta_{ik} \overline{x}_k) =$$
$$= \delta_{ij} \delta_{ik} (x_j - \overline{x}_j)(x_k - \overline{x}_k). \tag{9.25}$$

Поскольку (9.21) и (9.25) должны совпадать тождественно, т. е. при любых «иксах», получаем

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{ij} \delta_{ik}. \tag{9.26}$$

Заметим, что условие это, записанное в компактной форме, есть фактически $9=3^2$ равенств (2 — число «свободных» индексов, каждый из которых пробегает независимо 3 значения), причем в каждом из этих девяти равенств как в левой, так и в правой частях стоит сумма трех членов (как в правой, так и в левой частях этих равенств по одному «немому» индексу). Читателю полезно будет выписать несколько из этих девяти равенств, представив себе остальные в уме.

Формула (9.26) может быть упрощена, если применить правило (9.24) действия символа Кронекера к правой части этой формулы, причем роль величины $T_{\ldots i \ldots}$ здесь будет играть один из символов Кронекера же (безразлично какой):

$$\delta_{ij} \delta_{ik} = \delta_{jk}. \tag{9.27}$$

В результате окончательно получим:

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \tag{9.28}$$

Это так называемое *условие ортогональности* является необходимым и достаточным условием того, чтобы при преобразованиях (9.17) расстояние между двумя произвольными точками в пространстве оставалось неизменным, означает, что приведенные преобразования суть элементы полной ортогональной группы. Девять равенств, записанных в компактной форме (9.28), можно записать в виде одного матричного равенства

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\text{рез}} \cdot \boldsymbol{A}_{\text{рез}} = \boldsymbol{I}, \tag{9.29}$$

где

$$\tilde{A}_{\text{рез}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{9.30}$$

Если вспомнить теперь, что две матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются ортогональными, если $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, то становится понятным, почему группа, объединяющая группу вращений и группу пространственной инверсии, носит название полной *ортогональной* группы.

Условие ортогональности (9.28) может быть записано еще и в другой форме, эквивалентной (9.28). Для получения этой формы заметим, что если при переходе от нештрихованной системы координат к штрихованной, «повернутой» относительно первой некоторым образом, не изменяется квадрат расстояния между двумя произвольными пространственными точками, то этот квадрат не должен изменяться и при обратном переходе от штрихованной системы координат к нештрихованной. Используя уже найденную форму условия ортогональности, нетрудно найти выражения для нештрихованных координат через штрихованные. Для этого достаточно умножить обе части (9.17) на a_{ik} (при этом, заметим, «свободный» индекс i перейдет в «немой», по которому уже будет вестись автоматическое суммирование) и учесть сперва (9.28), а затем (9.24):

$$x'_i a_{ik} = a_{ik}\, a_{ij}\, x_j = \delta_{kj}\, x_j = x_k. \tag{9.31}$$

Далее мы имеем в виду подставить (9.31) в (9.19) и сравнить полученное таким путем выражение с (9.20). Для того, чтобы подставить (9.31) в (9.19), надо предварительно заменить в (9.31) «свободный» индекс k на i, но делать это можно только во всех членах равенства. После такой замены в левой части равенства (9.31) появится трижды встречающийся в одном члене индекс, что недопустимо. Поэтому одновременно с заменой «свободного» индекса k на i необходимо провести также замену «немого» индекса в левой части (9.31) на какой-либо другой, например, j. В результате (9.31) примет вид, удобный для подстановки в (9.19):

$$x_i = x'_j\, a_{ji}. \tag{9.32}$$

Эта последняя подстановка[1] дает

$$r^2 = (x'_j - \overline{x}'_j)(x'_k - \overline{x}'_k)\, a_{ji}\, a_{ki}. \tag{9.33}$$

[1] См. примечание на стр. 74.

С другой стороны, (9.20) может быть переписано в виде (ср. с (9.25))

$$r'^2 - (x'_j - \overline{x}'_j)(x'_k - \overline{x}'_k)\, \delta_{ji}\, \delta_{ki}, \tag{9.34}$$

откуда, сравнением с (9.33), находим искомую другую форму условия ортогональности

$$a_{ji}\, a_{ki} = \delta_{jk} \tag{9.35}$$

(при этом мы учли, что $\delta_{ji}\, \delta_{ki} = \delta_{jk}$). Компактная форма (9.35) эквивалентна следующей матричной форме

$$\boldsymbol{A}_{\text{рез}}\, \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\text{рез}} = \boldsymbol{I}. \tag{9.36}$$

Из условия ортогональности, например, в форме (9.35) следует, что

$$[\operatorname{Det}(a_{ik})]^2 = 1, \tag{9.37}$$

сам же детерминант матрицы (a_{ik}) может равняться как $+1$, так и -1. В первом случае матрица (a_{ik}) будет матрицей вращения, во втором — произведением матрицы вращения на матрицу зеркального отражения системы координат.

§ 10. ТЕНЗОРЫ ГРУППЫ

Вектор V (см. (7.3)) в линейном пространстве, преобразующийся по некоторому представлению $\boldsymbol{A}(g)$ (см. (7.1)) какой-либо группы преобразований системы координат, называется также ковариантом данной группы.

Наша ближайшая цель — рассмотреть коварианты группы трехмерных вращений. В зависимости от того, по какому из имеющихся представлений этой группы преобразуется этот ковариант, он носит специальное название, например, скаляра, вектора, тензора второго ранга и т. д. При этом сами коварианты могут быть не только постоянными величинами, но и, например, *функциями* одной или нескольких пространственных точек, а также могут зависеть от других многообразий пространства (от поверхности, области и т. д.). Из соображения конкретности мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что коварианты групп, рассматриваемые нами ниже, являются функциями одной точки трехмерного или четырехмерного пространства (в зависимости от самой группы). Выбор именно такого класса ковариантов связан с тем, что в современной физике элементарных частиц этот класс встречается наиболее часто. Обобщение же на другие классы ковариантов, как читатель убедится сам, не представляет каких-либо трудностей.

Скаляром (имеется в виду: относительно *данной* группы трехмерных вращений) называется ковариант, преобразующийся по *одномерному*, единичному, представлению группы трехмерных вращений:

$$V'_{(1)} = 1 \cdot V_{(1)}. \tag{10.1}$$

Очевидно, скаляр состоит из одной единственной компоненты $v_1 = v$ в соответствии с одномерностью представления, по которому он преобразуется.

Заметим теперь, что если единственная компонента скаляра есть некоторая функция точки трехмерного пространства, то это эквивалентно тому, что в исходной, скажем *нештрихованной*, системе координат она есть функция *нештрихованных же* координат этой точки:

$$v(x_i) \equiv v(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{10.2}$$

а после перехода к другой, скажем *штрихованной*, системе координат она, очевидно, должна быть функцией уже *штрихованных* координат *той же* точки. Поскольку связь между штрихованными и нештрихованными координатами одной и той же пространственной точки определяется по (9. 32), то функция штрихованных координат может быть получена из функции нештрихованных координат по правилу

$$v'(x'_i) = v(x_i = x'_j a_{ji}), \tag{10.3}$$

или, в более подробной записи:

$$v'(x'_1, x'_2, x'_3) = v(x_1 = x'_j a_{j1},\ x_2 = x'_j a_{j2},\ x_3 = x'_j a_{j3}). \tag{10.4}$$

Заметим, что v', вообще говоря, отнюдь *не так же* зависит от *штрихованных* координат, как исходная v зависит от *нештрихованных*. Именно по этой причине в левой части (10.4) над v стоит штрих. Это важное обстоятельство нужно совершенно четко себе уяснить.

Исходя из приведенных соображений, мы можем теперь дать более полное определение скаляра, определенного по формуле (10.1) лишь схематично. Именно, скаляром называется некоторая функция $v(x_i) = v(x_1,\ x_2,\ x_3)$, заданная в некоторой, нештрихованной, системе координат и преобразующаяся при произвольном трехмерном вращении, характеризуемом матрицей вращения $\boldsymbol{A}_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv (a_{ik})$, по правилу (10.3) (вспомним в этой связи понятие символа a, введенное нами в § 6).

Вектором (имеется в виду: относительно *данной* группы трехмерных вращений) называется ковариант, преобразующийся по основному, *трехмерному* представлению группы трехмерных вращений:

$$V'_{(3)} = \boldsymbol{A}_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cdot V_{(3)}. \qquad (10.5)$$

Очевидно, вектор содержит три компоненты в соответствии с трехмерностью представления, по которому он преобразуется. Матричное равенство (10.5) эквивалентно трем следующим обычным равенствам, записанным в компактной форме:

$$v'_i = a_{ik} v_k. \qquad (10.6)$$

Поскольку каждая из компонент v_i вектора может быть функцией точки трехмерного пространства ($v_i \equiv v_i(x_p)$), то аналогично случаю со скаляром более подробная запись правила (10.6) преобразования вектора будет

$$v'_i(x'_p) = a_{ik} v_k(x_p = x'_q a_{qp}). \qquad (10.7)$$

Итак, более полное определение вектора состоит в следующем: вектором называется совокупность ($v_1(x_i)$, $v_2(x_i)$, $v_3(x_i)$) некоторых трех функций, заданная в некоторой нештрихованной системе координат и преобразующаяся при произвольном трехмерном вращении, характеризуемом матрицей вращения $\boldsymbol{A}_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv (a_{ik})$, по правилу (10.7). Иначе говоря, если нам в некоторой системе координат заданы три функции $v_1(x_i)$, $v_2(x_i)$ и $v_3(x_i)$ (причем, эти функции могут иметь совершенно *произвольный* вид!) и *оговорено*, что совокупность этих трех функций образует вектор (т. е. каждая из этих функций есть соответствующая компонента вектора), то эта оговорка указывает *правило*, именно правило (10.7), по которому мы можем найти три компоненты этого вектора (они уже будут, вообще говоря, *другими* функциями!) в системе координат, произвольно «повернутой» относительно исходной (вспомним опять-таки в этой связи наши рассуждения по поводу символа a в § 6).

Читатель должен был заметить, что наше определение вектора, данное, однако, без обычного в элементарных курсах представления его в виде «стрелки», исходящей из данной точки в пространстве, тем не менее согласуется с таким элементарным пониманием вектора: при вращении системы координат составляющие «стрелки» как раз преобразуются по закону (10.7).

Теперь мы перейдем к более сложным ковариантам группы трехмерных вращений — *тензорам* различных рангов. При этом, в отличие от уже рассмотренных случаев скаляра и вектора, за основу теперь нам удобнее будет брать не матричную, а компактную форму правил преобразования.

Тензором второго ранга называется совокупность девяти функций $v_{11}(x_i)$, $v_{12}(x_i)$, $v_{13}(x_i)$, $v_{21}(x_i)$, $v_{22}(x_i)$, $v_{23}(x_i)$, $v_{31}(x_i)$, $v_{32}(x_i)$ и $v_{33}(x_i)$, заданная в некоторой, нештрихованной, системе координат и преобразующаяся при произвольном трехмерном вращении, характеризуемом матрицей вращения $A_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv (a_{ik})$, по правилу

$$v'_{ik}(x'_p) = a_{il}\, a_{km}\, v_{lm}(x_p = x'_q\, a_{qp}). \qquad (10.8)$$

Заметим, что (10.8) есть компактная форма записи девяти $= 3^2$ равенств (2 — число «свободных» индексов как в левой, так и в правой частях (10.8)), причем в правой части каждого из этих девяти равенств стоит сумма девяти $= 3^2$ членов (2 — число «немых» индексов в правой части (10.8)).

Для того чтобы показать, что введенный по (10.8) тензор второго ранга является действительно *ковариантом* группы трехмерных вращений, т. е. что он преобразуется по некоторому *представлению* этой группы, необходимо записать девять равенств (10.8) в матричной форме. С этой целью мы введем «колонку», элементами которой являются девять компонент тензора второго ранга, причем порядок расположения этих компонент в «колонке» может быть выбран совершенно произвольно, например:

$$V_{(9)} \equiv \begin{pmatrix} v_{11}(x_i) \\ v_{12}(x_i) \\ v_{13}(x_i) \\ v_{21}(x_i) \\ \vdots \end{pmatrix}. \qquad (10.9)$$

После этого вводится другая «колонка» $V'_{(9)}$ с тем же самым расположением элементов:

$$V'_{(9)} \equiv \begin{pmatrix} v'_{11}(x'_i) \\ v'_{12}(x'_i) \\ v'_{13}(x'_i) \\ v'_{21}(x'_i) \\ \vdots \end{pmatrix}. \qquad (10.10)$$

Теперь остается найти такую матрицу $A_{(9)}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, очевидно, IX порядка, чтобы совокупность девяти равенств (10.8) была эквивалентна одному матричному равенству

$$V'_{(9)} = A_{(9)}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\cdot V_{(9)}. \tag{10.11}$$

Матрица $A_{(9)}(\varphi_1, \varphi_2. \varphi_3)$ находится безо всякого труда и в случае выбранного в (10.9) и (10.10) порядка расположения компонент $V_{(9)}$ и $V'_{(9)}$ может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} a_{11} a_{12}\cdots \\ a_{21} a_{22}\cdots \\ \vdots \quad \vdots \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} a_{11} a_{12}\cdots \\ a_{21} a_{22}\cdots \\ \vdots \quad \vdots \end{pmatrix} \cdots \\ a_{21}\begin{pmatrix} a_{11} a_{12}\cdots \\ a_{21} a_{22}\cdots \\ \vdots \quad \vdots \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} a_{11} a_{12}\cdots \\ a_{21} a_{22}\cdots \\ \vdots \quad \vdots \end{pmatrix} \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{10.12}$$

(все элементы a_{ij} являются, конечно, функциями трех углов φ_1, φ_2 и φ_3).

Матрица (10.12) называется кронекеровым произведением двух матриц (a_{ik}). В отличие от обычного, матричного, произведения двух матриц, являющегося матрицей того же порядка, что и перемножаемые матрицы, кронекерово произведение есть матрица порядка n^2, где n—порядок перемножаемых по Кронекеру матриц. Важно также иметь в виду, что порядок расположения элементов в кронекеровом произведении двух матриц, если речь идет о матрицах какого-либо представления группы, зависит от порядка расположения компонент вектора $V_{(n^2)}$ — в n^2-мерном пространстве, который преобразуется по этому кронекеровому произведению.

Итак, каждой матрице вращения $A_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv (a_{ik})$, определяемой заданием трех параметров φ_1, φ_2 и φ_3 (формула (5.30)!), можно сопоставить кронекерово произведение этой матрицы на самое себя, по которому преобразуется тензор второго ранга при соответствующем вращении системы координат. Читателю не доставит особого труда самостоятельно проверить, что совокупность всех таких кронекеровых произведений, образованных из всего трехпараметрического набора матриц вращения, задает девятимерное *представление* группы трехмерных вращений. Для этого, очевидно, достаточно показать, что если некоторой матрице вращения $B_{\text{рез}} \equiv (в_{ik})$ соответствует кронекерово произведение $B_{(9)}$, матрице вращения $C_{\text{рез}} \equiv (c_{ik})$ — кронекерово произведение $C_{(9)}$, то произведению этих двух матриц вращения $A_{\text{рез}} = B_{\text{рез}} \cdot C_{\text{рез}}$ будет соответствовать матрица

$$A_{(9)} = B_{(9)} \cdot C_{(9)}. \tag{10.13}$$

Таким образом, тензор второго ранга преобразуется при трехмерных вращениях по *девятимерному* представлению группы этих вращений. Имея в виду, что в компактной форме записи под кронекеровым произведением двух троек величин v_i и v_i (т. е. v_i на самое себя) понимается совокупность девяти величин $v_i v_k$, мы можем еще сказать (формула (10.8)!), что тензор второго ранга преобразуется как кронекерово произведение двух векторов (т. е. как величина $v_i v_k$).

Теперь нам легко ввести общее понятие тензора произвольного, n-ого, ранга. Именно, *тензором n-ого ранга* называется совокупность 3^n функций $v_{\underbrace{ik\ldots p}_{n}}(x_j)$, заданная в некоторой, нештрихованной, системе координат и преобразующаяся при трехмерных вращениях как кронекерово произведение n векторов, т. е. по правилу

$$v'_{ik\ldots t}(x'_p) = a_{im} a_{kn} \cdots a_{tl} v_{mn\ldots l}(x_p = x'_q a_{qp}). \tag{10.14}$$

где (a_{ik}) — матрица соответствующего вращения.

3^n соотношений (10.14) можно записать в матричной форме

$$V_{(3^n)} = A_{(3^n)} \cdot V_{(3^n)}, \tag{10.15}$$

если 3^n компонент тензора n-ого ранга каким-то образом расположить в «колонку» (по аналогии с (10.10)). После проверки того, что совокупность матриц $A_{3^n}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, образованных из всего трехпараметрического набора матриц вращений (a_{ik}) (при этом каждый элемент матрицы $A_{(3^n)}$ будет состоять из произведения n элементов матрицы (a_{ik}), задает 3^n-мерное представление группы трехмерных вращений, мы можем сказать, что тензор *n-ого ранга преобразуется по 3^n-мерному представлению этой группы*.

С общей точки зрения вектор можно назвать тензором первого ранга, а скаляр — тензором нулевого ранга (ранг тензора, конечно, определяется числом индексов у его компонент).

Тензор $T_{\ldots i \ldots j \ldots}(x_k)$ называется симметричным относительно индексов i и j, если

$$T_{\ldots i \ldots j \ldots}(x_k) \equiv T_{\ldots j \ldots i \ldots}(x_k). \tag{10.16}$$

и антисимметричным относительно тех же индексов, если

$$T_{\dots i \dots j \dots}(x_k) \equiv -T_{\dots j \dots i \dots}(x_k). \qquad (10.17)$$

В общем же случае тензор несимметричен относительно своих индексов. Если два индекса (или большее число их), по которым тензор симметричен, стоят рядом, то они обычно заключаются в круглые скобки (например: $T_{\dots(ij)\dots}(x_k)$), в случае же индексов, по которым тензор антисимметричен, — в квадратные скобки (например: $T_{\dots[ij]\dots}(x_k)$).

Тензорные представления группы трехмерных вращений, хотя и *не исчерпывают* всех, даже конечномерных, неразложимых представлений этой группы, составляют вместе с тем весьма *важный* для теоретической физики класс таких представлений. По матрицам этих представлений преобразуется при вращениях трехмерной системы координат большое число фундаментальных физических величин (подчеркнем еще раз, что в соответствии с доводами § 6 какая бы то ни было физическая величина может преобразовываться при преобразованиях системы координат *лишь* по одному из *представлений* соответствующей группы преобразований!). Более того *все* известные из классической (неквантовой) теории физические величины преобразуются по одному из этих *тензорных* представлений.

Например, масса, энергия, модуль скорости и т. д. при вращениях системы координат преобразуются по одномерному представлению группы вращений, т. е. являются скалярами (тензорами нулевого ранга). С другой стороны, скорость, напряженности электрического или магнитного полей и т. д. преобразуются по трехмерному, векторному представлению группы вращений, т. е. являются векторами (тензорами первого ранга). Имеются фундаментальные физические величины, преобразующиеся по тензорным представлениям группы вращений более высоких рангов и, следовательно, являющиеся тензорами высших рангов. С такими тензорами читатель встретится при дальнейшем изучении физики элементарных частиц.

Мы хотим теперь включить в рассмотрение, помимо трехмерных вращений, еще и инверсию системы координат, т. е. перейти к *полной трехмерной ортогональной группе*.

Для этого мы введем матрицу $A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)$ произвольного преобразования полной трехмерной ортогональной группы, где дополнительная переменная l может, по условию, принимать лишь два значения: ± 1. При этом $l = +1$ соответствует преобразованию трехмерного вращения:

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, +1) = A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \tag{10.18}$$

(см. (5.30)), а $l = -1$ соответствует групповому «произведению» вращения на инверсию

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, -1) = A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\, A^{-} \tag{10.19}$$

(см. (5.32)). Элементы матрицы A $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)$ мы будем в дальнейшем обозначать как a_{ik}, т. е. так, как мы раньше обозначали элементы матрицы вращения. Если же нам нужно будет иметь в виду исключительно преобразования вращений, без инверсии, мы будем это специально оговаривать. Напомним, что матрица $A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)$ удовлетворяет условию ортогональности (9.28).

Что же касается правил преобразования введенных нами ранее *тензоров* при пространственной инверсии, то здесь могут быть лишь *две* возможности. Либо для этих тензоров будет справедливо их *прежнее* правило (10.14), где теперь уже под (a_{ik}) понимается матрица A $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)$, либо помимо преобразования по этому прежнему правилу все компоненты тензора будут *дополнительно* умножаться на множитель $\mathrm{Det}\,(a_{ik}) = \pm 1$. В первом случае говорят о *тензорах полной трехмерной ортогональной группы*, во втором случае — о *псевдотензорах* этой группы[1].

Таким образом, при вращениях системы координат тензор n-го ранга и псевдотензор того же ранга преобразуются *совершенно одинаково*, а именно по закону (10.14). При пространственной же инверсии тензор n-го ранга по-прежнему преобразуется по закону (10.14) (в этом случае под (a_{ik}) уже понимается матрица пространственной инверсии (5.32)), в то время как псевдотензор n-го ранга дополнительно умножается на $-\boldsymbol{I}$, или, в матричной форме, если расположить компоненты псевдотензора в «колонку», — на n-рядную матрицу — 1. Имея в виду явный вид матрицы (5.32), нетрудно понять, что тензор четного ранга при пространственной инверсии преобразуется по единичной матрице $\boldsymbol{I}$, тензор нечетного ранга — по матрице $-\boldsymbol{I}$, псевдотензор четного ранга — по матрице $-\boldsymbol{I}$, псевдотензор нечетного ранга — по матрице $\boldsymbol{I}$.

Если тензор преобразуется по неприводимому (имеется также в виду: *комплексному*) представлению группы трехмерных вращений, то других возможностей преобразования его при пространст-

---

[1] Приставка *псевдо* (от латинского *pseudo*) означает *ложно*.

венной инверсии, кроме как умножения на $+I$ или на $-I$, не существует. Наметим путь строгого доказательства этого утверждения, фактически сводящегося к известной в алгебре лемме Шура.

Обозначим искомую матрицу преобразования тензора при пространственной инверсии через A и рассмотрим матрицу

$$B = A - \lambda I, \qquad (10.20)$$

где в качестве числа λ выберем один из, вообще говоря, комплексных корней так называемого характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\,(A - \lambda I) = 0. \qquad (10.21)$$

Выполнение условия (10.21) означает, что матрица B сингулярна, т. е. не имеет обратной.

Рассмотрим теперь линейное пространство L_n векторов $v \equiv \equiv (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, в котором действует данное неприводимое тензорное представление $A(g)$ группы трехмерных вращений, и выделим в нем базис (3.10). Тогда преобразование

$$V' = BV, \qquad (10.22)$$

где V и V' — способствующие «колонки» из координат векторов в базисе (3.10), вследствие (10.21) не может быть взаимно однозначным. И если V пробегает все пространство L_n, то V' будет пробегать пространство L_m меньшей размерности ($m<n$).

Но матрица B коммутирует со всеми матрицами $A(g)$ вместе с матрицей A и, следовательно, пространство L_m инвариантно относительно действия всех матриц $A(g)$. Поскольку, однако, представление $A(g)$ неприводимо, таким пространством L_m (подпространством пространства L_n) может быть лишь «нулевое» пространство, состоящее из единственного «нулевого» вектора. Согласно (10.22) это значит, что

$$B = 0, \qquad (10.23)$$

и, следовательно, по (10.20),

$$A = \lambda I. \qquad (10.24)$$

Примем теперь во внимание, что групповое «произведение» двух пространственных инверсий есть единица группы. Поэтому и для матрицы представления должно быть

$$A^2 = I, \qquad (10.25)$$

что, с учетом (10.24), дает окончательно

$$A = \pm I. \qquad (10.26)$$

Итак, тензором n-го ранга полной трехмерной ортогональной группы называется совокупность 3^n функций $v_{ik\ldots j}(x_p)$, заданная в некоторой, нештрихованной, системе координат и преобразующаяся при преобразованиях этой группы по правилу (10.14), где уже, однако, под a_{ij} нужно понимать ij-й элемент матрицы преобразования полной трехмерной ортогональной группы. Псевдотензор же n-го ранга полной трехмерной ортогональной группы преобразуется при преобразованиях этой группы по правилу

$$v'_{ik\ldots j}(x'_p) = \mathrm{Det}\,(a_{rs}) \cdot a_{im} a_{kn} \cdots a_{jl}\, v_{mn\ldots l}(x_p = x'_q a_{qp}). \qquad (10.27)$$

Укажем на тот важный факт, что все псевдотензоры группы в конечном счете *сводятся* к тензорам этой группы. В частности, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, псевдоскаляр (псевдотензор нулевого ранга) есть единственная независимая компонента некоторого антисимметричного по всем индексам (или, как еще говорят, полностью антисимметричного) тензора третьего ранга $v_{[ijk]}(x_p)$. В качестве такой компоненты можно взять, например, $v_{123}(x_p)$; тогда все остальные компоненты тензора либо равны $v_{123}(x_p)$, либо равны $-v_{123}(x_p)$, либо, наконец, равны нулю (это, очевидно, те компоненты, у каждой из которых совпадают хотя бы два индекса). Аналогично этому, псевдовектор (псевдотензор первого ранга) может быть составлен из единственных трех независимых компонент некоторого антисимметричного тензора II ранга $v_{[ij]}(x_p)$.

Что касается геометрического смысла псевдотензоров, то, например, псевдовектор можно, как и вектор, изобразить в пространстве в виде стрелки. Но если «стрелка-вектор» при зеркальном отражении системы координат *остается* на месте, то «стрелка-псевдовектор» *отражается* вместе с системой координат. Псевдотензоры же высших рангов, как, впрочем, и тензоры высших рангов, не имеют непосредственно простого геометрического смысла.

Хорошим примером псевдовектора является известный из механики момент импульса некоторой частицы относительно начала координат. В обычных учебниках механики, где не рассматривается зеркальное отражение системы координат, такой момент, определяемый как векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ частицы и вектора $\mathbf{p}$ ее импульса, именуется вектором. Но нашему читателю не доставит теперь большого труда понять, что это векторное произведение по существу является *псевдовектором*, поскольку его направление зависит от того, правой или левой системами координат мы пользуемся (см. рис. 12).

Наше утверждение о том, что три компоненты псевдовектора являются единственными тремя независимыми компонентами антисимметричного тензора II ранга, можно очень просто проиллюстрировать на этом же примере псевдовектора момента, если ввести 9-компонентную величину

$$M_{ij} = r_i p_j - r_j p_i. \tag{10.28}$$

Во-первых, ясно, что, поскольку r_i и p_i преобразуются как векторы, эта 9-компонентная величина преобразуется по представлению тензора II ранга и, следовательно, сама является тензором II ранга, причем, антисимметричным.

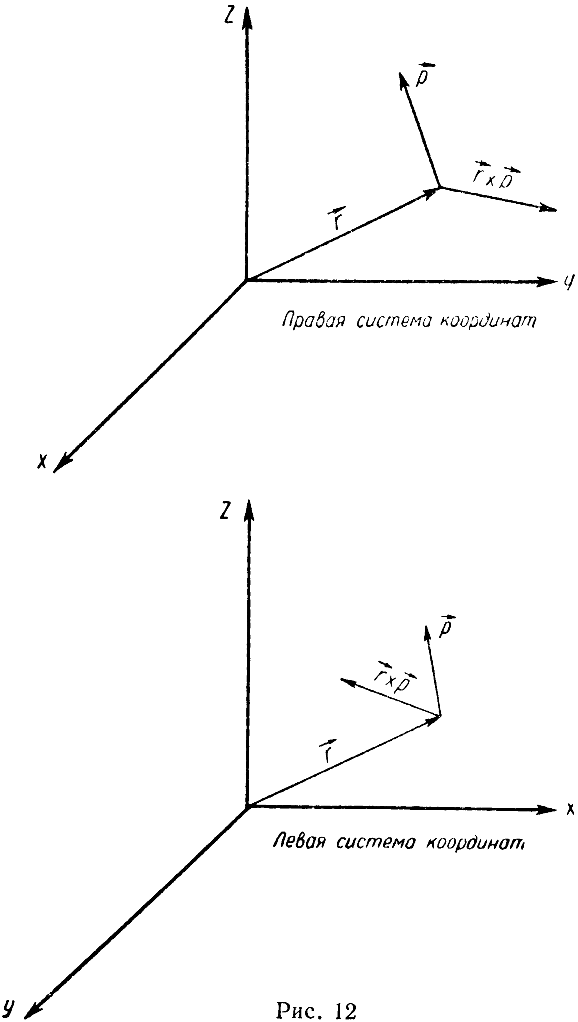

Рис. 12

Во-вторых, единственные три независимые компоненты этого тензора совпадают с тремя компонентами псевдовектора, определяемого как векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{M}$, именно:

$$M_{12}=M_3, \quad M_{23}=M_1, \quad M_{31}=M_2. \qquad (10.29)$$

Это и иллюстрирует наше утверждение.

Рассмотрим теперь матрицу $\boldsymbol{A}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)$, по которой преобразуется вектор полной ортогональной трехмерной группы. Условие ортогональности (9.28), которому она удовлетворяет, с учетом вещественности ее элементов можно переписать в виде

$$\boldsymbol{A}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)\,\boldsymbol{A}^H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)=\boldsymbol{I}. \qquad (10.30)$$

Матрица, удовлетворяющая условию (10.30), называется *унитарной*. Условие (10.30), конечно, эквивалентно условию

$$\boldsymbol{A}^H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l)=\boldsymbol{A}^{-1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l). \qquad (10.31)$$

Мы можем поэтому сказать, что векторное представление полной ортогональной трехмерной группы *унитарно*.

Нетрудно показать (предоставляем читателю сделать это самостоятельно), что кронекерово произведение унитарной матрицы на самое себя есть также унитарная матрица. Таким образом, мы приходим к выводу, что *все найденные нами тензорные представления полной ортогональной трехмерной группы унитарны*.

Для более четкого понимания важных тонкостей этого параграфа мы настойчиво рекомендуем читателю решить следующие

Задачи

1. Какие Вы знаете физические величины, помимо перечисленных в тексте, и по каким представлениям полной трехмерной ортогональной группы они преобразуются?

2. В некоторой системе координат задан скаляр $v(x_l)=2x_1+$ $+3x_2x_3$. Найти вид этого скаляра в штрихованной системе координат, получаемой из исходной вращением в плоскости (23) на угол $\pi/4$ с последующим зеркальным отражением оси x_2.

3. Ту же самую задачу решить для скаляра $v(x_i)=\sin(x_1^2+$ $+x_2^2+x_3^2)$.

4. В некоторой системе задан псевдовектор $v_i(x_j)$ с компонентами: $v_1(x_j)=2x_1-x_1x_3$, $v_2(x_j)=0$, $v_3(x_j)=x_2$. Найти вид этого псевдовектора в штрихованной системе координат, получаемой вращением исходной в плоскости (12) на угол $\pi/3$.

5. Ту же самую задачу решить для вектора $v_i(x_p)$ с компонентами $v_i(x_p)=x_i$ в исходной системе координат.

6. Задачу 4 решить для тензора II-го ранга $v_{ij}(x_p)$ с компонентами $v_{ij}(x_p)=\delta_{ij}$ в исходной системе координат.

§ 11. ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ

В предыдущем параграфе, когда мы вводили, например, понятие скаляра $v(x_p)$, мы указывали, что $v'(x'_p)$ («значение» скаляра в штрихованной системе координат) будет, вообще говоря, *не так же* зависеть от штрихованных координат x'_p, как $v(x_p)$ («значение» скаляра в нештрихованной системе) зависело от нештрихованных координат x_p, т. е. в общем случае

$$v'(x_p) \equiv v'(x'_p = x_p) \neq v(x_p) \tag{11.1}$$

(вспомним задачу 2 § 10).

Может, однако, оказаться, что для частного вида скаляра *всегда* имеет место равенство

$$v'(x_p) \equiv v(x_p), \tag{11.2}$$

какая бы ни была штрихованная система координат, рассматриваемая в данной группе. В этом случае скаляр $v(x_p)$ группы мы будем называть *инвариантным скаляром* группы.

Можно показать (это, впрочем, достаточно очевидно), что все множество скаляров полной трехмерной ортогональной группы, имеющих общий вид

$$v(x_p) = f(x_p^2) \tag{11.3}$$

с произвольной функцией f, во-первых, образует множество инвариантных скаляров этой группы (вспомним задачу 3 § 10!) и, во-вторых, исчерпывает *все возможные* инвариантные скаляры этой группы[1]. Заметим, что скаляр, являющийся константой, есть инвариантный скаляр.

Аналогичным путем можно ввести более общее понятие инвариантного *тензора* группы, для которого должно быть

$$T'_{ij\ldots k}(x_p) \equiv T_{ij\ldots k}(x_p), \tag{11.4}$$

какова бы ни была штрихованная система координат, рассматриваемая в данной группе. Можно показать, что все множество векторов полной трехмерной ортогональной группы, имеющих общий вид

$$v_i(x_p) = x_i f(x_p^2), \tag{11.5}$$

во-первых, образует множество инвариантных векторов этой группы и, во-вторых, исчерпывает *все возможные*

[1] В справедливости первой части утверждения читателю легко убедиться непосредственной проверкой. Вторая часть утверждения доказывается не очень просто.

инвариантные векторы этой группы. Заметим, что среди постоянных векторов лишь *нулевой* вектор (т. е. вектор с нулевыми компонентами) является инвариантным вектором.

Далее. Все множество тензоров II ранга полной трехмерной ортогональной группы, имеющих *общий* вид

$$\delta_{ij} f_1 \left(x_p^2\right) + x_i x_j f_2 \left(x_p^2\right), \tag{11.6}$$

во-первых, образует множество инвариантных тензоров II ранга этой группы и, во-вторых, исчерпывает все возможные инвариантные тензоры II ранга этой группы [1] (здесь полезно вспомнить задачу 6 § 10).

Аналогичным образом, наиболее *общий* вид инвариантного тензора III ранга полной трехмерной ортогональной группы — следующий:

$$x_i\, x_j\, x_k f \left(x_p^2\right). \tag{11.7}$$

Если же, однако, ограничиться рассмотрением лишь группы трехмерных вращений, без зеркального отражения, то для получения наиболее общего вида инвариантного тензора III ранга к (11.7) нужно *добавить* еще тензор вида

$$\varepsilon_{[ijk]} f_1 \left(x_p^2\right). \tag{11.8}$$

Здесь $\varepsilon_{[ijk]}$ — так называемый единичный, полностью антисимметричный, тензор III ранга, у которого в *любой* системе координат $\varepsilon_{123} = 1$, а остальные компоненты либо равны нулю, либо могут быть получены из этой компоненты перестановкой ее индексов с учетом антисимметричности тензора.

Покажем, что $\varepsilon_{[ijk]}$ действительно является инвариантным тензором III ранга группы трехмерных вращений. На основании закона преобразования тензора III ранга имеем

$$\varepsilon'_{[ijk]} = a_{il}\, a_{jn}\, a_{kn}\, \varepsilon_{[lmn]}, \tag{11.9}$$

где учтено, что условие антисимметричности инвариантно относительно произвольного преобразования тензора. Одно из 3^3 равенств (11.9) можно переписать в виде

$$\varepsilon'_{[123]} = \mathrm{Det}\left(a_{ik}\right) = 1, \tag{11.10}$$

откуда, с учетом антисимметричности $\varepsilon'_{[ijk]}$, вытекает

$$\varepsilon'_{[ijk]} = \varepsilon_{[ijk]}, \tag{11.11}$$

что и требовалось доказать.

---

[1] Первую часть этого утверждения читатель должен проверить самостоятельно.

Инвариантные тензоры высших рангов полной ортогональной трехмерной группы строятся аналогичным путем с помощью элементарных «кирпичиков» x_i и δ_{ij}. Например,

$$x_i x_j x_k x_l f_1(x_p^2) + x_i x_j \delta_{kl} f_2(x_p^2) + x_i x_k \delta_{il} f_3(x_p^2) + \\ + x_i x_l \delta_{jk} f_4(x_p^2) + x_j x_k \delta_{il} f_5(x_p^2) + \\ + x_j x_l \delta_{ik} f_6(x_p^2) + x_k x_l \delta_{ij} f_7(x_p^2) \qquad (11.12)$$

есть наиболее *общий* вид инвариантного тензора IV ранга полной ортогональной трехмерной группы. Для построения же инвариантных тензоров высших рангов *только* относительно группы трехмерных вращений в качестве элементарного «кирпичика» можно использовать и тензор $\varepsilon_{[ijk]}$.

У читателя может создаться впечатление, что в построении инвариантных ковариантов полной ортогональной трехмерной группы тензор $\varepsilon_{[ijk]}$ вообще не может участвовать. Это, однако, верно лишь в случае, если мы строим инвариантные *тензоры*, а не инвариантные псевдотензоры этой группы. При построении же последних участие $\varepsilon_{[ijk]}$ не только возможно, но и необходимо. Например, инвариантный псевдотензор III ранга полной ортогональной трехмерной группы и инвариантный псевдотензор IV ранга той же группы в самом общем виде представляются соответственно

$$\varepsilon_{[ijk]} f(x_l^2) \qquad (11.13)$$

и

$$\varepsilon_{[ijk]} x_l f_1(x_n^2) + \varepsilon_{[ijl]} x_k f_2(x_n^2) + \\ + \varepsilon_{[ilk]} x_j f_3(x_n^2) + \varepsilon_{[ljk]} x_i f_4(x_n^2). \qquad (11.14)$$

Существенное преимущество инвариантных тензоров по сравнению с остальными тензорами состоит в следующем. Если мы хотим задать какой-то вполне *определенный* тензор, у нас есть лишь один путь: мы должны *выделить* некоторую систему координат (какую именно — безразлично, поскольку мы имеем дело с тензором!) и задать в ней компоненты этого тензора. Зная же эти компоненты в выделенной системе координат и пользуясь известным *правилом* преобразования тензора, мы можем вычислить эти компоненты в произвольной *другой* системе координат, рассматриваемой в группе. Для того же, чтобы задать вполне определенный *инвариантный* тензор, такой необходимости в выделении какой-либо системы координат *нет*, поскольку инвариантный тензор, как об этом свидетельствует и его название, имеет *один и тот же* вид во *всех* системах координат, рассматриваемых в группе. Именно по этой причине инвариантные тензоры играют *особую* роль в современной физике.

Рассмотрим теперь пример часто используемого в физике инвариантного скаляра полной трехмерной ортогональной группы. Речь идет о так называемой *трехмерной* δ-функции (дельта-функции) Дирака [1]. Сперва, однако, мы рассмотрим *одномерную* δ-функцию $\delta(x)$, определяемую тем условием, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-a) = f(a) \tag{11.15}$$

для любой достаточно гладкой функции $f(x)$, причем мы не станем здесь уточнять смысл слов «достаточно гладкой».

В явном, наиболее часто применяемом виде δ-функция $\delta(x)$ может быть задана через интеграл Фурье [1]

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}. \tag{11.16}$$

δ-функция $\delta(x)$ не является, строго говоря, *обычной* функцией, устанавливающей соответствие между числами из двух множеств чисел, и относится к классу так называемых *обобщенных* функций, которые определяются лишь правилами интегрирования произведения их на обычные функции [2]. Формула (11.15) и есть фактически такое правило интегрирования [3]. Тем не менее часто полезно грубо пред-

[1] Более подробные сведения об этой важной функции читатель может почерпнуть в книге Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова «Классическая теория поля» (ГИТТЛ, 1961, стр. 30).

[2] Читатель, заинтересовавшийся теорией обобщенных функций, может обратиться к монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова «Обобщенные функции и действия над ними». (Гостехиздат, 1959).

[3] Интегральное представление (11.16), строго говоря, следует понимать как *оператор*

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} dk \ldots e^{ikx},$$

задающий также лишь правило интегрирования произведения δ-функции на обычную функцию, так что

$$\int dx f(x)\, \delta(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} dk \int dx f(x)\, e^{ikx}.$$

Обратим внимание читателя на то, что в правой части этого выражения порядок интегрирования, в соответствии с самим определением символа $\delta(x)$, изменен на обратный.

ставлять себе эту δ-функцию как везде равную нулю, за исключением точки $x = 0$, где значение этой функции бесконечно.

Трехмерная δ-функция, обозначаемая как $\delta(\mathbf{x})$ или $\delta(x_i)$, определяется как произведение трех одномерных:

$$\delta(x_i) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\, e^{ik_j x_j}, \qquad (11.17)$$

где символ

$$\int d^3\mathbf{k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_3. \qquad (11.18)$$

Трехмерную δ-функцию можно также определить тем условием, чтобы

$$\int d^3\mathbf{x}\, f(x_i)\,\delta(x_j - a_j) = f(a_i) \qquad (11.19)$$

для любой «достаточно гладкой» функции

$$f(x_i) \equiv f(x_1, x_2, x_3).$$

Трехмерную δ-функцию $\delta(x_j)$ можно грубо себе представлять как везде равную нулю, за исключением точки $x_i = 0$ (т. е. начала координат), где значение этой функции бесконечно.

Исходя из такого представления трехмерной δ-функции, нетрудно понять, что она является функцией *лишь* x_i^2, и потому (формула (11.3)!), если эта функция есть скаляр полной трехмерной ортогональной группы, то она есть *инвариантный* скаляр этой группы. Подчеркнем еще раз, что только по одному *виду* функции в какой-либо фиксированной системе координат мы *не можем* определить, во что «перейдет» эта функция при изменении системы координат (вспомним соображения § 6 !). Именно поэтому следует говорить: «если $\delta(x_i)$ есть скаляр (т. е. если, помимо вида этой функции в нештрихованной системе координат, мы знаем еще, что она преобразуется при изменении системы координат по правилу (10.3)), то это инвариантный скаляр», и мы будем не точны, если скажем просто «$\delta(x_i)$ есть инвариантный скаляр».

Теперь мы докажем утверждение предыдущего абзаца более строго, исходя из интегрального представления (11.17) трехмерной δ-функции. Пусть эта функция имеет вид (11.17) в нештрихованной системе координат. Совершим над этой системой какое-либо преобразование из полной трехмерной ортогональной группы, характеризуемой матрицей преобразования с элементами a_{ij}: $x'_i = a_{ij}x_j$. Поскольку нам задано, что наша функция есть скаляр этой группы, то в штрихованной системе координат она приобретает вид

$$\bar{\delta}(x'_i) = 1 \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{ik_j x'_l a_{lj}}. \tag{11.20}$$

С первого взгляда может показаться, что $\delta(x'_i)$ *не так же* зависит от x'_i, как $\delta(x_i)$ зависело от x_i, но это обманчивое впечатление. Чтобы убедиться в этом, сделаем следующую замену переменных интегрирования $k_i \to k'_i$ по формуле, аналогичной формуле преобразования координат:

$$k_i = k'_j a_{ji}. \tag{11.21}$$

Якобиан $J(\kappa', \kappa)$ такого преобразования есть просто детерминант матрицы (a_{ij}) и, следовательно, равен $+1$ в случае «чистых» вращений и равен -1 в случае группового «произведения» вращения на пространственную инверсию системы координат. Если теперь учесть, что при инверсии пределы интегрирования меняются на обратные, то ясно, что

$$\int d^3\mathbf{k} = \int d^3\mathbf{k}', \tag{11.22}$$

какова бы ни была матрица преобразования (a_{ij}).

После проведения вышеуказанной замены переменных интегрирования, с учетом условия ортогональности (6.35), получаем

$$\bar{\delta}(x'_i) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}' e^{ik'_l x'_l} = \delta(x'_i). \tag{11.23}$$

Это и доказывает, что если $\delta(x_i)$ есть скаляр полной трехмерной ортогональной группы, то это инвариантный скаляр этой группы.

Теперь мы укажем, как распространить все рассуждения как предыдущего, так и этого параграфа на случай преобразований системы координат, включающих, помимо преобразований из полной трехмерной ортогональной группы, еще и трехмерные *трансляции*, т. е. на случай *трехмерной евклидовой группы*. Прежде всего нам надо выяснить, как могут преобразовываться введенные нами тензоры полной трехмерной ортогональной группы при трехмерных трансляциях системы координат.

По чисто физическим соображениям принимается, что любой тензор полной трехмерной ортогональной группы, являющийся физической величиной, может преобразовываться при трехмерных трансляциях лишь по *тривиальному* (единичному) представлению группы этих трансляций. Мы придем к физическому абсурду, если допустим иную возможность, например, возможность преобразования физической величины при трехмерных трансляциях по одномерному представлению (5.34) группы трансляций при a, b и c, не равных единице. Такая возможность, в частности, для постоянного вектора означала бы изменение его компонент при трехмерных трансляциях.

При произвольном преобразовании из трехмерной евклидовой группы координаты пространственной точки преобразуются по правилу

$$x_i' = a_{ij} x_j - a_i. \tag{11.24}$$

Обратное же преобразование, как нетрудно найти, имеет вид

$$x_i = (x_j' + a_j) a_{ji}. \tag{11.25}$$

Поэтому, в соответствии с вышесказанным, тензор n-ого ранга трехмерной евклидовой группы при преобразованиях этой группы преобразуется по правилу

$$V'_{ij\ldots k}(x_p') = a_{il} a_{jm} \cdots a_{kr} V_{lm\ldots r}(x_p = (x_q' + a_q) a_{qp}). \tag{11.26}$$

Что же касается общего вида *инвариантных* тензоров трехмерной евклидовой группы, то они могут быть получены из инвариантных тензоров полной трехмерной ортогональной группы (формулы (11.3), (11.5) — (11.7), (11.12)) простой заменой $x_i \to \overset{1}{x}_i - \overset{2}{x}_i$. Здесь $\overset{1}{x}_i$ и $\overset{2}{x}_i$ суть координаты некоторых двух пространственных точек. Необходимость такого введения *двух* пространственных точек вместо *одной*, фигурировавшей ранее, вполне понятна, поскольку для инвариантности любого выражения относительно трехмерных трансляций необходимо и достаточно, чтобы это выражение зависело лишь от *разности* координат двух (или, конечно, большего числа) точек. Например, если $\delta(x_i - x_i')$ есть скаляр трехмерной евклидовой группы, то это инвариантный скаляр этой группы.

Оказывается удобным ввести специальное соглашение, согласно которому малые латинские индексы любого выражения указывают *не только* число компонент у этого выражения, но также и на *то*, что это выражение есть *тензор* соответствующего ранга трехмерной евклидовой группы. В соответствии с этим соглашением, если в дальнейшем нам встретится выражение $T_{ijk}(x_p)$, то мы без всяких оговорок должны понимать, что речь идет о *тензоре* третьего ранга. Если же нам встретится величина, вообще не содержащая индексов, мы должны считать ее скаляром трехмерной евклидовой группы[1].

Задачи

1. Построить общий вид инвариантного тензора V ранга трехмерной евклидовой группы.

2. Ту же самую задачу решить для случая трехмерной евклидовой группы, не включающей, однако, инверсию системы координат.

Мы указывали ранее, что тензорными представлениями *не исчерпываются* все возможные, даже конечномерные, неразложимые представления полной трехмерной ортогональной группы и что, следовательно, помимо тензоров есть еще не сводящиеся к тензорам конечномерные коварианты этой группы. Это так называемые *спиноры группы*.

§ 12. СПИНОРЫ ГРУППЫ

Спинорные представления можно ввести следующим путем. Рассмотрим сперва три двухрядные матрицы σ_i, удовлетворяющие антикоммутативному соотношению

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2I\delta_{ij}. \qquad (12.1)$$

Заметим, что здесь в компактной форме записано $9 = 3^2$ матричных равенств, каждое из которых, в свою очередь, эквивалентно четырем обычным равенствам.

---

[1] Вышеуказанное соглашение, однако, нельзя распространять на индексы, фигурирующие в *конкретных* выражениях для неинвариантных тензоров. Например, в конкретном выражении (см. задачу 2 из § 10) в фиксированной системе координат:

$$v\,(x_i) = 2x_1 + 3x_2\,x_3,$$

индексы в правой части не должны пониматься как тензорные и не могут поэтому служить указанием на определенный закон преобразования данной величины. Закон преобразования всего этого выражения как скаляра определяется исключительно отсутствием какого-либо индекса у $v(x_i)$. Поэтому, возможно, более удобно в конкретных выражениях для неинвариантных тензоров вместо x_1, x_2 и x_3 писать x, y и z соответственно:

$$v\,(x_i) = 2x + 3yz.$$

Матрицы σ_i называются матрицами Паули. В принципе необязательно, но практически удобно считать, кроме того, матрицы σ_i самосопряженными (или, как еще говорят, эрмитовыми). Это означает, что должно быть

$$\sigma^H{}_i \equiv \widetilde{\sigma}_i^* = \sigma_i, \tag{12.2}$$

где значок *, как обычно, указывает на операцию комплексного сопряжения. В качестве решения матричного уравнения (12.1), с учетом условия (12.2), мы можем выбрать следующий вид матриц:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

причем нетрудно убедиться в том, что (12.3) действительно удовлетворяет как (12.1), так и (12.2).

Читателю не доставит большого труда проверить, что если тройка матриц σ_i есть решение антикоммутативного соотношения (12.1), то и тройка матриц $S\sigma_i S^{-1}$, им эквивалентных, будет *также* решением этого соотношения. Так что, выбирая *различные* матрицы S, мы можем получить из одного решения соотношения (12.1) множество *других* решений, которые, как можно показать (мы не станем этого делать), *исчерпывают* множество вообще *всех* возможных решений этого соотношения. Когда из множества всех решений соотношения (12.1) выбирают какое-то одно, то говорят о выборе определенного *представления* матриц σ_i. Все дальнейшие рассуждения совершенно не зависят от того, в каком представлении взяты матрицы σ_i, но мы будем предполагать, что эти матрицы эрмитовы.

Теперь мы можем перейти непосредственно к построению спинорных представлений полной трехмерной ортогональной группы. Приведем в соответствие каждому элементу g группы вращений, характеризуемому матрицей вращения (a_{ij}), двухрядную матрицу $\Lambda(g)$, удовлетворяющую матричному уравнению.

$$\Lambda(g)\, a_{ij}\, \sigma_i \Lambda^{-1}(g) = \sigma_i. \tag{12.4}$$

Поскольку, как можно понять, уравнение (12.4) определяет матрицу $\Lambda(g)$ *лишь* с точностью до постоянного комплексного множителя, мы наложим на эту матрицу дополнительное требование:

$$\mathrm{Det}\,[\Lambda(g)] = 1, \tag{12.5}$$

ограничивающее этот множитель *двумя* значениями: $+1$ и -1. Ниже мы увидим, что устранить этот оставшийся произвол в знаке матрицы $\Lambda(g)$ принципиально невозможно.

Заметим, что мы имеем право наложить на матрицы представления $\Lambda(g)$ условие (12.5), поскольку (ср. задачу 9 из § 1):

1) если две матрицы $\Lambda(g_1)$ и $\Lambda(g_2)$ удовлетворяют этому условию, то и их произведение $\Lambda(g_1)\,\Lambda(g_2)$ также удовлетворяет этому условию,

2) единичная матрица, сопоставляемая единице группы, удовлетворяет этому условию и

3) если матрица $\Lambda(g)$ удовлетворяет этому условию, то и обратная матрица $\Lambda^{-1}(g) = \Lambda(g^{-1})$ удовлетворяет этому условию.

Можно убедиться в том, что совокупность матриц $\Lambda(g)$, находимая как решение матричного уравнения (12.4), если, конечно, такое решение существует и если пока отвлечься от неопределенности знака у матриц $\Lambda(g)$, задает действительно некоторое двухмерное *представление* трехмерной группы вращений. В самом деле, пусть для вращений, характеризуемых матрицами (a_{ik}) и (b_{ik}), найденные решения уравнения (12.4) суть $\Lambda(a)$ и $\Lambda(b)$, соответственно. Поскольку, далее, матрица $\Lambda(a)\,\Lambda(b)$ есть решение уравнения (12.4) с матрицей $(a_{ik}\,b_{kj})$, а решение этого уравнения с точностью до знака — единственное, наше утверждение доказано.

Остается лишь показать, что решение уравнения (12.4) действительно существует. Мы покажем это тем, что просто *найдем* это решение в явном виде. Именно, непосредственная проверка показывает, что матрица

$$\Lambda(ij, \varphi) = I\cos\frac{\varphi}{2} + \sigma_j\sigma_i\sin\frac{\varphi}{2}, \quad (i \neq j) \qquad (12.6)$$

является решением уравнения (12.4) для *частного* случая вращения в координатной плоскости (ij) на угол φ. Матрица же $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, соответствующая *произвольному* вращению, характеризуемому тремя углами φ_1, φ_2 и φ_3 вращений в координатных плоскостях, представляется, аналогично матрице $A_{\text{рез}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ (см. формулу (5.30)), в виде

$$\Lambda(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \Lambda(23, \varphi_3)\,\Lambda(31, \varphi_2)\,\Lambda(12, \varphi_1). \qquad (12.7)$$

Мы построили, таким образом, двухмерное представление группы трехмерных вращений, которое, как можно показать (мы не будем этого делать), *неразложимо* и, более того, *неприводимо* и не сводится к каким-либо тензорным представлениям. Это двухмерное представление называется *спинорным* представлением группы трехмерных вращений; двухкомпонентные же коварианты, преобразующиеся по этому представлению, называются *спинорами*, или, более точно, *спинорами* I ранга. Если мы теперь *добавим*, что найденные нами спиноры при пространственной инверсии системы координат преобразуются по *тривиальному* (единичному) представлению этой группы[1], мы сможем назвать эти спиноры уже *спинорами полной трехмерной ортогональной группы.*

Поскольку введенные нами спиноры I ранга имеют *две* компоненты, мы должны ввести большой латинский индекс, пробегающий только два значения: 1 и 2. Теперь мы дадим полное определение спинора I ранга. Именно, спинором I ранга полной трехмерной ортогональной группы называется совокупность двух функций $\psi_1(x_i)$, $\psi_2(x_i)$, заданных в некоторой, нештрихованной, системе координат и преобразующихся при произвольном преобразовании этой группы, характеризуемом матрицей преобразования (a_{ij}), по правилу

$$\psi'_L(x'_i) = \Lambda_{LM}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\, \psi_M(x_i = x'_j a_{ji}). \qquad (12.8)$$

Заметим, что если матрицы тензорных представлений *действительны*, то матрицы $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ спинорного представления существенно *комплексны*.

Вернемся теперь к важному вопросу о *неопределенности знака* у спинора. Из матрицы (12.6) преобразования спинора вытекает, что при вращении системы координат в какой-либо координатной плоскости (ij) на угол 2π, хотя система координат возвращается в *исходное* положение, спинор *меняет* свой знак на обратный. Именно по этой причине *принципиально невозможно* определить знак спинора в какой-либо зафиксированной системе координат и по этой же причине найденное нами спинорное представление называется *двузначным*. Заметим, что по этой причине спинорное представление, строго говоря, не соответствует введенному нами в § 4 общему понятию представления

---

[1] На основании леммы Шура (петит в § 10) ясно, что другой возможности преобразования спиноров при инверсии *не существует*, поскольку вследствие неопределенности знака спинора исчезает различие между плюс единичным и минус единичным представлениями.

группы. Тем не менее, как мы увидим ниже, это обстоятельство не является препятствием для применения спиноров в современной физике.

Другое, причем не менее существенное, отличие спинорного представления от тензорных состоит в том, что среди спиноров имеется всего лишь один спинор, являющийся инвариантным. Это тривиальный спинор (т. е. спинор, все компоненты которого есть нули).

Но как же так, — может возразить нам читатель, — ведь основное требование, которое мы предъявляли в § 6 к правилам преобразования физических величин при различных преобразованиях системы координат, состояло *как раз* в том, чтобы эти физические величины имели вполне *определенные* значения в *каждой* фиксированной системе координат? Если же спинор в зафиксированной системе координат имеет неопределенный знак, то как он может считаться физической величиной?

Чтобы рассеять вполне законное недоумение читателя, нам нужно ввести некоторое уточнение в смысл самого понятия «физической величины». Именно, нельзя в принципе исключать ту возможность, что физическая величина, отражающая какую-либо физическую сущность, может оказаться вместе с тем *непосредственно ненаблюдаемой* на эксперименте. Хорошим примером такой физической величины является вектор-потенциал $\mathbf{A}(x_j)$ электромагнитного поля, или, как мы теперь можем сказать более точно, вектор $A_i(x_j)$ электромагнитного поля относительно трехмерной евклидовой группы. Известно, что сам этот вектор не является непосредственно наблюдаемой величиной, но с его помощью могут быть построены напряженности электрического $E_i(x_j)$ и магнитного $H_i(x_j)$ полей, т. е. уже непосредственно наблюдаемые величины.

В современной же физике элементарных частиц подобного рода непосредственно ненаблюдаемые физические величины встречаются буквально на каждом шагу. Читателю, знакомому с основами квантовой механики, должно быть известно, что основная величина этой механики — так называемая волновая функция частицы $\psi(x_i)$ не может быть непосредственно наблюдаемой физической величиной, хотя бы ввиду ее комплексного характера. Непосредственно же наблюдаемые физические величины квантовой механики строятся как вещественные билинейные комбинации, типа $\psi^*(x_i)\,\psi(x_j)$, этой волновой функции.

Таким образом, множество всех физических величин мы можем разбить на два класса: класс A, непосредственно наблюдаемых, и класс B, непосредственно ненаблюдаемых, физических величин. Ясно, что физические величины класса A обязаны в каждой фиксированной системе координат иметь вполне *определенный* знак и поэтому *не могут* быть спинорами. Ясно также и то, что физические величины класса B вполне могут *и не иметь* определенного знака при условии, однако, что все физические величины класса A, строящиеся из этих величин класса B, будут иметь уже вполне *определенный* знак. Если, например, все физические величины класса A строятся как вещественные билинейные комбинации некоторой физической величины $\psi_R(x_l)$, то знак этой последней совершенно несуществен и она вполне может быть спинором.

Подобно тому, как мы вводили тензоры *высших* рангов, мы введем теперь также и *спиноры высших рангов*. Например, спинор II ранга $\psi_{LM}(x_i)$ при преобразованиях полной трехмерной ортогональной группы преобразуется по правилу

$$\psi'_{LM}(x'_i) = \Lambda_{LP}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\, \Lambda_{MQ}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\, \psi_{PQ}(x_i = x'_j a_{ji}) \tag{12.9}$$

и т. д.

Если мы дополнительно укажем, что спиноры всех рангов полной трехмерной ортогональной группы при трехмерных трансляциях преобразуются по *тривиальному* представлению группы трехмерных трансляций, мы тем самым введем понятие *спиноров различных рангов трехмерной евклидовой группы*.

Введенное нами в § 11 соглашение, согласно которому каждый малый латинский индекс есть тензорный индекс, мы можем обобщить и на большие латинские индексы, которые в дальнейшем всегда будут пониматься как *спинорные*. Таким образом, если нам встретится выражение

$$T_{ijLMN}(x_l), \tag{12.10}$$

то мы будем знать, что это не только 72-компонентная величина ($3^2 \cdot 2^3 = 72$), но и кронекерово произведение тензора II ранга и спинора III ранга трехмерной евклидовой группы. Последнее означает, что правило преобразования этой величины при произвольном преобразовании системы координат, рассматриваемом в этой группе, таково:

$$T'_{ijLMN}(x'_l) =$$
$$= a_{ip} a_{jq} \Lambda_{LP} \Lambda_{MQ} \Lambda_{NF} T_{pqPQF}(x_l = (x'_k + a_k) a_{kl}). \quad (12.11)$$

Ковариант трехмерной евклидовой группы, типа (12 .10), т. е. содержащий как спинорные, так и тензорные индексы, именуется *спинтензором*. Заметим, что (12.11) есть компактная форма записи 72 обычных равенств, в правых частях каждого из которых стоит сумма 72 же членов (в правой части (12 .11) имеются два «немых» малых латинских индекса и три «немых» больших латинских индекса!).

Задачи

1. В нештрихованной системе координат задан спинор $\psi_M(x_l)$ с компонентами $\psi_1(x_l) = x_1$, $\psi_2(x_l) = x_2$. Найти вид этого спинора в штрихованной системе координат, получаемой из исходной вращением системы в плоскости (12) на угол $\pi/4$. Для матриц σ_l использовать представление (12.3).

2. В нештрихованной системе координат задан спинтензор $\psi_{iM}(x_j)$, у которого все компоненты равны нулю, за исключением компоненты $\psi_{12}(x_i) = x_3$. Найти компоненты этого спинтензора в штрихованной системе координат, получаемой из исходной вращением в плоскости (23) на угол $\pi/2$ с последующей пространственной инверсией системы.

§ 13. ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ И СПИНОРАМИ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Тензоры и спиноры можно *складывать* и *перемножать* по определенным *правилам*. Например, выражение

$$T_i^{(1)}(x_j) + T_i^{(2)}(x_j) \quad (13.1)$$

преобразуется как тензор I ранга (вектор), и потому само есть вектор. В более общем случае, сумма двух тензоров одного и того же ранга

$$T_{ij\ldots k}^{(1)}(x_p) + T_{ij\ldots k}^{(2)}(x_p) \quad (13.2)$$

есть тензор *того же* ранга. Наконец, в самом общем случае, сумма двух спинтензоров, имеющих одинаковое число как тензорных, так и спинорных индексов:

$$T_{ij\ldots kKL\ldots M}^{(1)}(x_p) + T_{ij\ldots kKL\ldots M}^{(2)}(x_p) \quad (13.3)$$

есть спинтензор *того же* типа. Наоборот, сумма тензоров *разных* рангов или спинтензоров разных типов лишена всякого смысла.

В этой связи удобно пользоваться понятием тензорной и спинорной *размерности*, определяемой числом тензорных и спинорных индексов. В этом смысле говорят, что вектор имеет размерность вектора, тензор такого-то ранга — размерность тензора этого ранга, спинтензор определенного типа — размерность спинтензора этого типа. Мы можем поэтому сказать, что складывать можно лишь спинтензоры *одной и той же* спинтензорной размерности точно так же, как можно складывать какие-либо величины лишь одной и той же обычной размерности и нельзя складывать, например, килограммы и сантиметры.

Рассмотрим теперь правило умножения тензоров и спинтензоров. Что касается тензоров, то каким бы образом мы не записали произведение любых двух тензоров, оно всегда будет некоторым *тензором*. Например, из двух тензоров $T_i\,(x_p)$ и $T_{ij}(x_p)$ можно составить следующие комбинации

$$T_i\,(x_p)\,T_{jk}\,(x_p),\quad T_i\,(x_p)\,T_{ik}\,(x_p),$$
$$T_i\,(x_p)\,T_{ki}\,(x_p),\quad T_i\,(x_p)\,T_{jj}\,(x_p), \tag{13.4}$$

являющиеся тензорами, ранг которых определяется числом их свободных индексов. В частности, первая комбинация, называемая по понятной причине кронекеровым произведением двух тензоров[1], есть тензор III ранга.

В общем случае кронекерово произведение тензоров ранга n и n' есть тензор ранга $n + n'$. Если перемножаются тензоры одного и того же ранга, причем так, что все их индексы попарно объединяются в «немые», то говорят о *свернутом* произведении тензоров. Такое свернутое произведение есть, очевидно, скаляр. В общем же случае можно говорить о произведении двух каких-либо тензоров, *свернутом по такому-то числу индексов*.

Что касается *кронекерового* произведения двух спиноров каких-либо рангов, а также спинтензоров, то такое произведение есть также спинор или, соответственно, спинтензор, причем соответствующие размерности в таком произведении просто складываются. Если же мы хотим ввести, по аналогии с тензорами, свернутое произведение двух

[1] См. замечание после формулы (10.13).

спиноров, мы должны ввести еще *комплексно-сопряженное* спинорное представление.

Мы построим такое представление спинора I ранга, если приведем в соответствие каждому трехмерному вращению системы координат не матрицу $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, как в случае обычного спинорного представления, а матрицу

$$\Lambda^* (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \tag{13.5}$$

Если взять от обеих частей равенства (9.8) комплексно-сопряженную величину:

$$\overset{*'}{\psi}_L (x_i') = \overset{*}{\Lambda}_{LM} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\, \overset{*}{\psi}_M (x_i = x_j' a_{ji}), \tag{13.6}$$

то мы получим, что по матрице $\Lambda^*(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ преобразуется *комплексно-сопряженный* спинор $\overset{*}{\psi}_L (x_i)$.

Нетрудно, конечно, обнаружить, что комплексно-сопряженное спинорное представление (13.5) *не является* каким-то *новым* представлением по сравнению с обычным спинорным представлением. Для этого заметим, что, согласно (12.6),

$$\Lambda^* (ij, \varphi) = I \cos\frac{\varphi}{2} + \overset{*}{\sigma}_j \overset{*}{\sigma}_i \sin\frac{\varphi}{2}\,. \tag{13.7}$$

Наше утверждение следует из того, что, если взять операцию комплексного сопряжения от обеих частей антикоммутативного соотношения (12 .1), то мы найдем, что матрицы $\overset{*}{\sigma}_i$ вместе с матрицами σ_i удовлетворяют этому соотношению и, следовательно, также являются матрицами σ_i, но только в *другом* представлении.

Несмотря, однако, на *эквивалентность* комплексно-сопряженного спинорного представления обычному спинорному представлению, введение его оказывается весьма *удобным*. Спинор, преобразующийся по комплексно-сопряженному спинорному представлению, мы будем отмечать тем, что будем ставить над его индексом точку, например, $\psi_{\dot R} (x_i)$. Индекс с точкой над ним мы будем называть *сопряженным*. Спиноры высших рангов, а также спинтензоры могут иметь, конечно, как обычные, так и сопряженные индексы. Обычный индекс и сопряженный индекс называются взаимно-сопряженными, поскольку операция сопряжения над сопряженным индексом делает этот индекс вновь обычным: $\ddot{R} = R$.

Представим себе теперь, что нам даны два спинора — один обычный $\psi_R(x_i)$ и другой комплексно-сопряженный $\chi_{\dot R}(x_i)$, из которых мы можем построить выражение

$$\chi_{\dot R}(x_i)\,\psi_R(x_i). \tag{13.8}$$

Найдем, как преобразуется выражение (13.8) при изменении системы координат. Опуская для кратности аргументы спиноров, имеем

$$\chi'_{\dot K}\,\psi'_L = \Lambda^*_{KM}\,\Lambda_{LN}\,\chi_{\dot M}\,\psi_N = \Lambda^H_{MK}\,\Lambda_{LN}\,\chi_{\dot M}\,\psi_N. \tag{13.9}$$

Здесь мы использовали общее очевидное соотношение для любой матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_{KM} = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{MK}. \tag{13.10}$$

Поскольку далее матрицы σ_i предполагаются *эрмитовыми* (формула (12.2)), можно показать, что матрицы Λ^H суть матрицы обычного спинорного представления, соответствующие *обратному* преобразованию системы координат. Поэтому

$$\Lambda^H\,\Lambda = \boldsymbol{I}, \tag{13.11}$$

или в развернутой форме

$$\Lambda^H_{MK}\,\Lambda_{KN} = \delta_{MN}. \tag{13.12}$$

Если мы теперь в (13.9) положим $K = L$, то с учетом (13.12), получим

$$\chi'_{\dot K}\,\psi'_K = \delta_{MN}\,\chi_{\dot M}\,\psi_N = \chi_{\dot M}\,\psi_M = \chi_{\dot K}\,\psi_K. \tag{13.13}$$

Это показывает, что величина $\chi_{\dot K}(x_i)\,\psi_K(x_i)$ является *скаляром трехмерной евклидовой группы.*

Таким образом, мы можем ввести произведение двух спиноров различных рангов, свернутое по *одной* паре взаимно-сопряжённых индексов или по *нескольким* парам таких индексов. Такое произведение будет являться спинором, ранг которого равен числу свободных спинорных индексов. Например,

$$\chi_{L\dot M}(x_i)\,\psi_{NM}(x_i) \tag{13.14}$$

есть спинор II ранга. Аналогичным образом вводится и произведение спинтензоров, свернутое по некоторому числу тензорных и по некоторому числу взаимно-сопряженных спинорных индексов.

Основываясь на формуле (13. 11), мы можем сказать, что спинорное представление I ранга полной ортогональной группы *унитарно*. Следовательно, также унитарны спинорные представления этой группы *произвольного* ранга.

Теперь мы переходим к вопросу о *разложимости* и *приводимости* тензорных и спинорных представлений высших рангов трехмерной евклидовой группы. Мы указывали ранее, что представления тензора и спинора I ранга, а также, конечно, тензора нулевого ранга (скаляра) *неразложимы* и, более того, *неприводимы*. Можно показать (мы не станем этого делать), что тензоры и спиноры *высших* рангов, наоборот, *разложимы* и, следовательно, *приводимы*. Причем, всякое неразложимое представление, на которое разлагается тензорное или спинорное представление и которое называется неразложимым тензорным или неразложимым спинорным представлением, соответственно, является также *неприводимым*.

Интересно, что все тензорные представления *сводятся* к спинорным представлениям *четных* рангов и все тензоры, таким образом, являются *частным* случаем спиноров. Тем не менее ввиду важной роли, которую играют тензоры в современной физике, а также ввиду их специфичности вполне оправдано рассматривать их отдельно, как мы и делали.

Теперь мы можем сформулировать без доказательства основную теорему, касающуюся *полноты* спинорных представлений полной ортогональной трехмерной группы.

Эта важная теорема гласит: *неразложимыми* ($\equiv$ *неприводимыми) спинорными представлениями группы трехмерных вращений исчерпываются вообще все неразложимые представления этой группы.* Поскольку далее, правила преобразования спиноров этой группы при трехмерных трансляциях системы координат, во всяком случае, если эти спиноры суть *физические* величины, вытекают *однозначно*, эта основная теорема по существу сводится к простому утверждению: *физические величины могут быть лишь спинорами трехмерной евклидовой группы.*

Таким образом, самые общие групповые соображения позволили нам указать и эффективно найти *все возможные правила*, правда, только *линейных* преобразований физических величин при изменениях системы координат, рассматриваемых в трехмерной евклидовой группе. Фундаментальная важность этой теоремы не требует пояснений.

Основываясь на только что сформулированной основной теореме и учитывая, что все найденные нами тензорные и спинорные представления полной ортогональной трехмерной группы унитарны, мы непосредственно приходим к важному заключению: любое представление этой группы эквивалентно унитарному.

Задача

1. По какому представлению трехмерной евклидовой группы преобразуется величина

$$\mathrm{T}^{(1)}_{\dot{R}Mij}\ \mathrm{T}^{(2)}_{KL\dot{k}j}\ \mathrm{T}^{(3)}_{\dot{M}Kil}?$$

§ 14. ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в некоторой, нештрихованной, системе координат нам задано уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi(x_p) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi(x_p)=0 \quad (14.1)$$
$$(-\infty<x_i<+\infty)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(x_i)$, являющейся, в соответствии с соглашением, принятым в конце § 11, скаляром. Заметим, что для задания *определенного* уравнения, вообще говоря, нужно *выделить* какую-то систему координат, в которой и задать вид этого уравнения. Положение здесь точно *такое же*, как и с заданием определенной физической величины (вспомним соображения § 6!).

Найдем теперь вид уравнения (14.1) в некоторой другой, штрихованной системе координат, переход к которой содержится в трехмерной евклидовой группе и характеризуется преобразованием координат вида

$$x_i' = a_{ij}x_j - a_i. \quad (14.2)$$

При этом, $\varphi(x_p)$ перейдет в

$$\varphi'(x_p') = \varphi\left(x_p = (x_q' + a_q)\,a_{qp}\right).$$

Теперь мы должны заменить производные по нештрихованным координатам производными по штрихованным. Чтобы это сделать, вычислим сперва выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(x_p' = a_{pq}x_q - a_p\right), \quad (14.3)$$

рассматривая f как сложную функцию x_i. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(x_p' = a_{pq}x_q - a_p\right) = \frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\,\frac{\partial f\left(x_p' = a_{pq}x_q - a_p\right)}{\partial x_j'}. \quad (14.4)$$

Далее,

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = a_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = a_{jk} \delta_{ki} = a_{ji}. \tag{14.5}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x'_p = a_{pq} x_q - a_p) = a_{ji} \frac{\partial}{\partial x'_j} f(x'_p = a_{pq} x_q - a_p). \tag{14.6}$$

Ввиду того, что это равенство выполняется для *произвольной* функции f, оно означает равенство *операторов*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x'_j} a_{ji}. \tag{14.7}$$

Если мы умножим это соотношение на a_{ki} и воспользуемся условием ортогональности (6.35), мы получим обратное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{14.8}$$

Соотношения (14.7) и (14.8) свидетельствуют, что оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}$ при изменении системы координат по трехмерной евклидовой группе преобразуется как *вектор* этой группы. Подставив (14.7) в (14.1) и учтя правило преобразования скаляра $\varphi(x_i)$, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} \varphi'(x'_p) = 0, \quad (-\infty < x'_p < +\infty). \tag{14.9}$$

Мы видим, что уравнение (14.9) в штрихованной системе координат, какова бы ни была эта система, рассматриваемая в данной группе, имеет *ту же* структуру, что и уравнение (14.1) в исходной системе, и отличается от него *лишь* наличием у всех величин штрихов. Ясно, что это могло случиться только вследствие *частного* вида уравнения (14.1). Нетрудно обнаружить, что, например, уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \varphi(x_i) = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \varphi(x_i) = 0 \tag{14.10}$$

уже *не будут* обладать этим свойством. Уравнения типа (14.1) мы будем называть *инвариантными уравнениями*, или, более точно, уравнениями, инвариантными относительно трехмерной евклидовой группы.

Рассмотрим теперь более общий случай не одного уравнения, а системы, например, трех уравнений

$$\frac{\partial \varphi_{ij}(x_p)}{\partial x_j} = 0 \qquad (-\infty < x_p < +\infty) \qquad (14.11)$$

относительно неизвестного тензора II ранга $\varphi_{ij}(x_p)$. Нетрудно видеть, что в преобразованной системе координат эта система уравнений, рассматриваемая как *одно целое*, имеет *ту же* структуру, что и исходное уравнение (14 .1):

$$\frac{\partial \varphi'_{ij}(x'_p)}{\partial x'_j} = 0, \quad (-\infty < x'_p < +\infty). \qquad (14.12)$$

Система уравнений типа (14. 11) называется *инвариантной системой уравнений*, или, более точно, системой уравнений, инвариантной относительно трехмерной евклидовой группы. Заметим, что хотя эта система, рассматриваемая как *одно целое*, инвариантна, каждое из ее уравнений в отдельности *неинвариантно*[1].

Существенное преимущество инвариантных систем уравнений по сравнению с остальными возможными системами уравнений состоит в том, что для задания такой вполне *определенной* системы уравнений нет необходимости в *выделении* какой-либо системы координат и указании вида этой системы уравнений в *данной* системе координат, поскольку во всех таких системах координат структура этой системы уравнений *одна и та же*.

Вернемся опять к инвариантному уравнению типа (14.1). Преобразованное уравнение (14 . 9), в отличие от исходного, содержит в качестве независимой переменной не x_i, а x'_i. Это различие, однако, по существу сводится просто к различию в *обозначениях*, поскольку обе переменные пробегают *одно и то же* множество значений от $-\infty$ до $+\infty$.

Вспомним, что, например, $\sin x$ и $\sin x'$ — это по существу одна и та же функция, если речь идет о *функциях* как таковых (т. е. о «виде» этих функций), а *не о значениях* их в двух точках. Что же касается различия между исходной функцией $\varphi(x_i)$ и преобразованной функцией $\varphi'(x'_i = x_i)$ то это различие, как понимает читатель, помнящий наше

[1] В литературе вместо термина «инвариантная система уравнений» часто используется термин «ковариантная система уравнений». Нам, однако, этот последний термин кажется менее удачным. Но каждое из уравнений, входящее в инвариантную систему уравнений, уже может быть названо *ковариантным*.

замечание после формулы (10. 4), уже *существенное*. Именно, вообще говоря,

$$\varphi'(x_i) \neq \varphi(x_i). \tag{14.13}$$

Несмотря на это, согласно (14. 9), $\varphi'(x_i)$ удовлетворяет *тому же* самому исходному уравнению (14. 1). Иначе говоря, $\varphi'(x_i)$ есть *другое*, по сравнению с $\varphi(x_i)$, *частное решение* уравнения (14. 1). На основании этого мы делаем вывод, что каждое частное решение уравнения, инвариантного относительно трехмерной евклидовой группы, при произвольных изменениях системы координат, рассматриваемых в этой группе, переходит в частное решение $\varphi'(x_i' = x_i)$ *этого же* уравнения. Или другими словами *множество всех возможных частных решений уравнения, инвариантного относительно трехмерной евклидовой группы или, конечно, относительно какой-нибудь другой группы есть множество функций, инвариантное относительно этой группы.* Среди частных решений могут быть, разумеется, *и* такие, которые при произвольном изменении системы координат, рассматриваемом в данной группе, переходят *только* сами в себя. Это, очевидно, *инвариантные* тензоры группы.

Если же мы имеем не одно инвариантное уравнение, а инвариантную систему уравнений с несколькими неизвестными функциями $\varphi_1(x_i)$, $\varphi_2(x_i)$ и т. д., то множество всех возможных частных решений этой системы (причем, каждое частное решение здесь задается уже совокупностью функций) *также* инвариантно относительно данной группы. Докажем теперь это общее утверждение более строго.

Пусть $\{\varphi_1(x_i), \ldots, \varphi_n(x_i)\}$ — совокупность n пронумерованных функций. Мы будем говорить, что нам задан определенный оператор $\boldsymbol{L}$, если каждой такой совокупности функций приведена в соответствие некоторая другая совокупность $\{g_1(x_i), \ldots, g_m(x_i)\}$ m функций. В этом случае мы будем писать

$$\boldsymbol{L}\{\varphi_1(x_i). \ldots, \varphi_n(x_i)\} = \{g_1(x_i), \ldots, g_m(x_i)\}, \tag{14.14}$$

где, конечно, подразумевается, что n и m — не тензорные индексы, а $-\infty < x_i < +\infty$. Мы проведем доказательство лишь для частного случая, когда все функции суть скаляры трехмерной евклидовой группы. Распространение рассуждений на случай других возможных преобразований этих функций, а также на случай другой группы приводит к загромождению доказательства, а по существу не представляет большого труда.

Преобразование аргументов $x_i = (x'_j + a_j) a_{ji}$ при фиксированной матрице (a_{ij}) и фиксированных a_i приводит в соответствие каждой функции $f(x_i)$ новую функцию $f'(x'_i) = f(x_i = (x'_j + a_j) a_{ji}$. Поэтому такое преобразование аргументов *индуцирует* из оператора L *новый* оператор L', ставящий в соответствие совокупности $\{\varphi'_1(x'_i), \ldots, \varphi'_n(x'_i)\}$ совокупность $\{g'_1(x'_i), \ldots, g'_m(x'_i)\}$. В общем случае, конечно, $L' \neq L$.

Пусть теперь нам дано равенство

$$\underset{(-\infty < x_i < +\infty),}{L\{\varphi_1(x_i), \ldots, \varphi_n(x_i)\}} = \left\{\overbrace{0, \ldots, 0}^{m}\right\}, \tag{14.15}$$

которое для краткости можно писать в виде

$$\underset{(-\infty < x'_i < +\infty)}{L\{\varphi_1(x_i), \ldots, \varphi_n(x_i)\}} = 0, \tag{14.16}$$

и которое в сущности есть наиболее общий вид системы m уравнений с n неизвестными функциями.

Если, каково бы ни было преобразование $x_i = (x'_j + a_j) a_{ji}$ трехмерной евклидовой группы, система «исходных» уравнений (14 .16) *эквивалентна*, с точностью до обозначения, системе «преобразованных» уравнений

$$\underset{(-\infty < x'_i < +\infty),}{L'\{\varphi'_i(x'_i), \ldots, \varphi'_n(x'_i)\}} = 0, \tag{14.17}$$

то система уравнений (11 .16) называется системой, *инвариантной* относительно трехмерной евклидовой группы. Заметим, что мы *не требуем* более жесткого равенства $L' = L$.

Преимущество этого *строгого* определения инвариантной системы уравнений состоит, в частности, в том, что утверждение об инвариантности множества всех возможных частных решений такой системы уравнений становится совершенно *очевидным*. Становится также совершенно очевидным и *обратное* утверждение о том, что если множество всех возможных частных решений системы уравнений *инвариантно* относительно трехмерной евклидовой группы, то и *эта система* уравнений инвариантна относительно этой группы. Все эти утверждения без изменения распространяются и на случай, когда уравнения содержат не только тройку независимых переменных x_i, но и любое их число.

Обратим еще раз внимание на то, что во всех случаях мы предполагаем, что независимые переменные x_i, входящие в системы уравнений, пробегают *все возможные* значения, т. е. $-\infty < x_i < +\infty$. Вообще говоря, это условие необязательно. Но система уравнений может быть инвариантной относительно какой-либо группы только при *том* условии, что эта система уравнений справедлива для множества значений независимых переменных, *инвариантного* относительно данной группы, т. е. при условии, что ни одно преобразование системы координат, рассматриваемое в группе, *не выводит* какое бы то ни было значение независимых переменных *за пределы* этого множества значений.

В частности, система уравнений только с тройкой независимых переменных x_i может быть инвариантной относительно трехмерной евклидовой группы лишь при условии, что эта тройка x_i пробегает независимо *все возможные* значения в трехмерном пространстве, т. е. при условии $-\infty < x_i < +\infty$. Если ограничиться рассмотрением лишь *полной трехмерной ортогональной группы*, то тройка независимых переменных x_i инвариантной относительно этой группы системы уравнений может пробегать значения, лежащие, например, внутри сферы с заданным радиусом.

Можно поставить вопрос: нельзя ли по одному только *виду* системы уравнений (14 . 16), без проведения каких-либо расчетов, научиться *определять*, инвариантна ли такая система относительно трехмерной евклидовой группы или нет? Оказывается, что можно, если, конечно, приобрести некоторый опыт распознавания инвариантных систем уравнений и если руководствоваться следующими соображениями.

Для инвариантности системы уравнений (14. 16), во-первых, нужно, чтобы совокупность всех неизвестных функций $\{\varphi_1(x_i), \ldots, \varphi_n(x_i)\}$ являлась каким-либо *ковариантом* рассматриваемой группы. При этом, разумеется, часть этих функций может составлять один тензор или спинор, часть — другой и т. д. Во-вторых, нужно, чтобы система уравнений (14. 16) имела вид равенства нулю какого-либо *коварианта* группы (тензора или спинора). Например, первому признаку удовлетворяют как уравнение (14. 1), так и уравнения (14. 10), поскольку неизвестная функция во всех этих уравнениях есть скаляр. Однако второму признаку удовлетворяет лишь уравнение (14. 1), поскольку оно есть равенство нулю скаляра, в то время как ни одно из уравнений

(14. 10) нельзя представить в виде равенства нулю какого-либо ковариайта нашей группы.

Подчеркнем, что согласно (14. 8) оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}$ можно представлять себе как *вектор* группы, более того, как *инвариантный* вектор этой группы. Обратим также внимание на то, что этот оператор преобразуется по (14. 8), т. е. так, как вектор, отнюдь *не в силу* какого-то соглашения, как, например, в случае с функцией $\varphi(x_i)$, преобразующейся по единичному представлению в силу именно соглашения, а в силу самого *смысла* этого оператора. В этой связи полезно вспомнить наши соображения при преобразовании уравнения (14. 1), где как раз фигурирует этот оператор. В частности, важно обратить внимание на то, что при переходе от уравнения (14. 1) к уравнению (14. 9) мы никак *не преобразовывали* этот оператор, несмотря на наличие у него *тензорного* индекса. Чтобы еще лучше разобраться в сути этого обстоятельства, читателю следует четко понять различие между оператором $\boldsymbol{L}$, данным по (14. 14), и *индуцированным* оператором $\boldsymbol{L}'$.

Таким образом, на основе наших двух признаков мы могли сразу, без каких-либо расчетов, сделать вывод об инвариантности уравнения (14. 1) и неинвариантности уравнений (14. 10). Аналогичным образом устанавливается инвариантность и уравнения (14. 11), где в левой части стоит вектор $\frac{\partial \varphi_{ij}(x_v)}{\partial x_i}$. В случае же уравнений, содержащих спиноры нечетного ранга, вообще говоря, не так просто применять второй признак.

Заметим еще, что если в системе уравнений, помимо неизвестных функций, имеются еще и *заданные*, то эти функции должны составлять именно *инвариантный* ковариант данной группы.

Теперь мы переходим к важнейшему вопросу всей современной физики как науки, отражающей объективно существующие закономерности природы. Мы знаем, что каждый физический закон может быть представлен в виде некоторого уравнения или системы уравнений относительно неизвестных физических величин. Например, так называемый второй закон Ньютона для частицы представляется в виде системы трех уравнений

$$m \frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial t^2} = F_i \tag{14.18}$$

относительно неизвестной тройки функций $x_i(t)$ — координат частицы в некоторый момент времени t. Важнейший вопрос состоит в том, *могут ли физические законы представляться системами уравнений, неинвариантными относительно групп преобразования системы координат*?

Вспомнив существенное преимущество инвариантных систем уравнений по сравнению с неинвариантными, а также наши прежние соображения в § 6 об отсутствии в пространстве выделенных систем координат, читатель без труда поймет, что ответ на поставленный вопрос может быть *только отрицательным*. В самом деле, поскольку мы не можем допустить какого-либо *неравноправия* систем координат ни среди «повернутых» каким-то образом, ни среди подвергнутых инверсии[1], ни среди параллельно перенесенных, ни, наконец, среди инерциальных, мы приходим к выводу, что *всякий физический закон должен представляться системой уравнений, инвариантной относительно групп всех таких преобразований системы координат*.

Что касается первых трех групп, то мы их рассмотрели в этой главе[2]. Как же обстоит дело с группой переходов от одной инерциальной системы координат к другой? Прежде чем обсуждать этот вопрос, нам надо, очевидно, дать *определение* этой группы, причем такое определение, которое, как мы уже говорили, точно *соответствовало* бы реальности. Из соображений § 1 мы знаем, что эта задача сводится фактически к задаче определения перехода от одной инерциальной системы координат к другой, являющегося результатом двух таких переходов. Мы знаем также, что решение этой, по существу *физической*, задачи, даваемое обычной, ньютоновой механикой (формула (1.9)), и приводящее к группе Галилея, является *неверным* и лишь приближенно верно для достаточно малых скоростей переходов.

---

[1] См., однако, гл. IV.

[2] За более подробными сведениями об этих группах мы можем отослать интересующегося читателя к имеющимся монографиям, например, И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса, З. Я. Шапиро «Представления группы вращений и группы Лоренца» (ГИФМЛ, 1958), Г. Я. Любарского «Теория групп и ее применение в физике» (ГИФМЛ, 1958) или М. А. Наймарка «Линейные представления группы Лоренца» (ГИФМЛ, 1958).

Задачи

1. Показать, что если некоторый тензор трехмерной евклидовой группы симметричен или антисимметричен относительно каких-либо своих индексов в нештрихованной системе координат, то он будет обладать этим же свойством и в любой другой системе, рассматриваемой в данной группе.

2. Проверить, инвариантно ли относительно группы трехмерных вращений матричное уравнение

$$\sigma_i \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x_p) = 0,$$

где двухкомпонентная «колонка» $\psi(x_p)$ есть спинор? Относительно пространственной инверсии?

3. Ту же самую задачу решить для матричного уравнения

$$\left(\sigma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 1\right) \psi(x_p) = 0.$$

4. Как преобразуются при преобразованиях системы координат по трехмерной евклидовой группе величины

$$\psi^H(x_p)\,\psi(x_p) \quad \text{и} \quad \psi^H(x_p)\,\sigma_i\,\psi(x_p)\ ?$$

Глава III

ГРУППА ЛОРЕНЦА

§ 15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Мы уже говорили ранее, что до самого конца XIX в. всякое проявление даже малейшего сомнения в истинности правила сложения скоростей (1.9), вытекающего из, казалось бы, очевидных и незыблемых формул (5. 35) и (5. 36) преобразования координат и времени, выглядело бы безусловным физическим абсурдом или даже «ересью». Во-первых, потому, что это правило, как тогда казалось, являлось непосредственным и однозначным следствием «здравого смысла», и, во-вторых, потому, что оно «блестяще» подтверждалось всеми имевшимися к тому времени экспериментальными данными.

И лишь в самом конце XIX в. благодаря знаменитому опыту Майкельсона на ясном небе «логически завершенной» и «экспериментально подтвержденной» механики Ньютона появилось темное облачко. Было обнаружено и более поздними экспериментами неоднократно подтверждено, что скорость света относительно Земли совершенно *не зависит* от того, вращается ли Земля по направлению или против направления света [1]. А ведь согласно «здравому

[1] Мы сознательно несколько упрощаем историю с опытом Майкельсона, преподнося его в современной интерпретации. Фактически же приводимая в тексте интерпретация этого опыта, по-видимому, не следует с абсолютной категоричностью. В настоящее время, однако, факт независимости скорости света от направления движения Земли не может вызвать каких-либо сомнений.

смыслу» и механике Ньютона в первом случае скорость света должна была равняться $c - v$, а во втором $c + v$, где c — модуль скорости распространения света, а v — модуль скорости Земли (см. рис. 13).

Разрешить противоречие между теорией и экспериментом, возникшее вследствие отрицательного результата опыта Майкельсона, удалось лишь в 1905 г. автору работы под скромным названием «К электродинамике движущихся сред» — А л ь б е р т у Э й н ш т е й н у. Противоречие

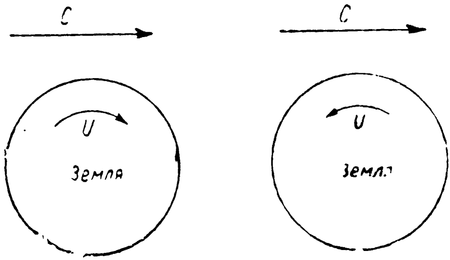

Рис. 13

оказалось следствием недопустимого *абсолютизирования* ньютоновой механики и воспитанного на этой механике «здравого смысла».

Грубо говоря, решение проблемы, столь же смелое, сколь и простое, состояло в том, что раз «очевидные» формулы (5. 35) и (5. 36) преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы координат к другой *не совместны* с отрицательным результатом опыта Майкельсона, то эти формулы, несмотря на всю их «очевидность», следует считать тем не менее *неверными*. Их следует заменить *новыми*, причем такими, которые уже согласовывались бы с результатом этого опыта. И задача отыскания таких формул также была решена Эйнштейном.

Наша ближайшая задача — восстановить вывод этих формул в современной интерпретации. Иными словами, нам предстоит, основываясь лишь на общих групповых соображениях и на отрицательном результате опыта Майкельсона, т. е. на факте независимости скорости света от выбора той или иной инерциальной системы координат, получить эти новые формулы преобразования координат и времени.

Пусть из некоторой пространственной точки с координатами x_i в нештрихованной системе координат выходит световой сигнал в момент времени t, который приходит в некоторую другую точку с координатами $\bar{x}_i$ в момент времени $\bar{t}$. Тогда скорость света c, точнее ее модуль, в нештрихованной системе координат

$$c = \frac{\sqrt{(\bar{x}_i - x_i)^2}}{\bar{t} - t}. \qquad (15.1)$$

Перейдем теперь к другой, скажем штрихованной, системе координат, совершив над ней *произвольное* преобразование, которое входит в общую группу, объединяющую как трехмерную евклидову группу, так и группу переходов от одной инерциальной системы координат к другой. При таком переходе все пространственные координаты и моменты времени переходят в штрихованные, и скорость того же самого светового сигнала

$$c = \frac{\sqrt{(\bar{x}'_i - x'_i)^2}}{\bar{t}' - t'}. \qquad (15.2)$$

В (15. 2) мы учли факт независимости скорости света от выбора той или иной системы координат из рассматриваемых в нашей общей группе.

Таким образом, переход от нештрихованных координат и времени к штрихованным должен определяться *такими* формулами, чтобы из (15. 1) следовало (15. 2), или, что то же самое, из

$$(\bar{x}_i - x_i)^2 - c^2(\bar{t} - t)^2 = 0 \qquad (15.3)$$

должно следовать

$$(\bar{x}'_i - x'_i)^2 - c^2(\bar{t}' - t')^2 = 0 \qquad (15.4)$$

для любой штрихованной системы координат.

Это, однако, возможно лишь в случае, если величина

$$\Delta s^2 \equiv (\bar{x}_i - x_i)^2 - c^2(\bar{t} - t)^2 \qquad (15.5)$$

при переходе к произвольной другой системе координат преобразуется в $f\Delta s'^2$, где

$$\Delta s'^2 \equiv (\bar{x}'_i - x'_i)^2 - c^2(\bar{t}' - t')^2, \qquad (15.6)$$

а f — некоторая функция, являющаяся, как легко видеть, одномерным *представлением* нашей общей группы.

Поскольку наша общая группа содержит переходы от одной инерциальной системы координат к другой, функция f может зависеть, в частности, от вектора $\mathbf{v}$ скорости второй системы координат относительно первой. Выявим возможный характер этой зависимости, для чего обратимся к рис. 14.

Пусть мы рассматриваем переход от нештрихованной инерциальной системы координат к штрихованной, движущейся относительно нее со скоростью **v** с компонентами v_i в нештрихованной системе координат. Пусть такому пере-

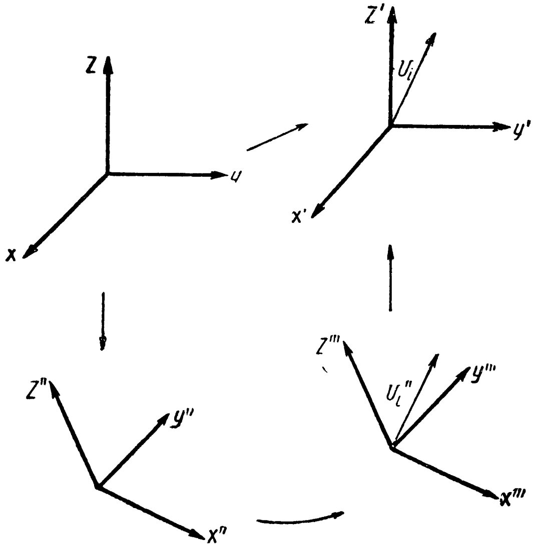

Рис. 14

ходу соответствует значение функции $f(v_i)$, где другие аргументы этой функции опущены.

Совершим теперь этот же переход, но через посредство двух *промежуточных* систем координат. Во-первых, перейдем от нештрихованной системы координат к системе с двумя штрихами, повернутой относительно нее каким-то произвольным образом. Мы знаем уже из гл. II, что такому переходу соответствует значение функции $f = 1$. Во-вторых, перейдем к системе координат с тремя штрихами, движущейся относительно двухштрихованной системы со старой скоростью **v** с компонентами v_i'' в двухштрихованной системе. Такому переходу будет соответствовать некоторое значение функции $f(v_i'')$. Наконец, в-третьих, мы «повернем» нашу трехштрихованную систему координат так, чтобы она совпала с конечной, одноштрихованной системой.

Для этого, очевидно, нужно совершить преобразование, именно вращение системы координат, обратное преобразованию от нештрихованной системы к двухштрихованной. Как мы знаем, такому преобразованию соответствует значение функции $f = 1$.

Поскольку функция f образует *представление* нашей общей группы, должно быть $1 \cdot f\,(v_i'') \cdot 1 = f\,(v_i)$ или

$$f\left(v_i''\right) = f\left(v_i\right). \tag{15.7}$$

Это означает, что функция f может зависеть лишь от *модуля* вектора скорости:

$$f \equiv f\left(|\mathbf{v}|\right). \tag{15.8}$$

Установив этот важный факт, совершим теперь *непосредственный* обратный переход от штрихованной системы координат к нештрихованной. Поскольку такой переход есть переход со скоростью $-\mathbf{v}$ и в результате него система координат возвращается в *исходное* положение, должно быть

$$f\left(|\mathbf{v}|\right) f\left(|\mathbf{v}|\right) = 1, \tag{15.9}$$

откуда

$$f\left(|\mathbf{v}|\right) = \pm 1. \tag{15.10}$$

Если преобразования координат и времени, которые мы ищем, *непрерывны* относительно параметра преобразования $\mathbf{v}$, то функция $f\,(|\mathbf{v}|)$ может равняться либо $+1$, либо -1 для всех $\mathbf{v}$. Однако, как мы знаем, в частном случае $\mathbf{v} = 0$ значение функции $f\,(0) = 1$. Поэтому и для всех $\mathbf{v}$

$$f\left(|\mathbf{v}|\right) \equiv 1. \tag{15.11}$$

Мы приходим, таким образом, к выводу, что функция f для всех возможных преобразований системы координат по нашей общей группе есть *единичное* представление этой группы. Следовательно, при всех таких преобразованиях величина

$$\Delta s^2 = \left(\overline{x}_i - x_i\right)^2 - c^2\left(\overline{t} - t\right)^2 \tag{15.12}$$

должна оставаться *инвариантной*. Эта величина Δs^2 называется квадратом *интервала* между двумя *событиями* $(x_i,\ t)$ и $(\overline{x}_i,\ \overline{t})$. Как помнит читатель, одно из событий, именно $(x_i,\ t)$, есть событие выхода светового сигнала из точки x_i в момент времени t, второе $(\overline{x}_i,\ \overline{t})$, состоит в приходе этого сигнала в точку $\overline{x}_i$ в момент времени $\overline{t}$. Таким образом, событие характеризуется *четверкой* чисел — тройкой пространственных координат (*местом*, где происходит событие) и моментом времени (*временем* совершения события).

Если ввести теперь для удобства мнимую *четвертую* координату

$$x_4 = ict, \tag{15.13}$$

то квадрат интервала (15.12) можно записать в виде

$$\Delta s^2 = (\overline{x_i} - x_i)^2 + (\overline{x_4} - x_4)^2, \tag{15.14}$$

или, в еще более кратком, *компактном* виде

$$\Delta s^2 = (\overline{x_\mu} - x_\mu)^2. \tag{15.15}$$

Здесь мы ввели «немой» греческий индекс, пробегающий в соответствии с соглашением § 9 значения от 1 до 4. В частном случае двух бесконечно близких событий, т. е. когда и расстояние между двумя точками, где произошли события, и промежуток времени между этими событиями бесконечно малы, пишут

$$ds^2 = (dx_\mu)^2. \tag{15.16}$$

Запись (15. 15) свидетельствует, что квадрат интервала Δs^2 можно рассматривать как квадрат расстояния между двумя точками (x_1, x_2, x_3, x_4) и $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4})$ четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, x_4), именуемого пространством-временем (или «миром») Минковского. Поэтому мы можем сказать, что преобразования координат и времени при изменениях системы координат, которые мы включили в наше рассмотрение, будут совместны с отрицательным результатом опыта Майкельсона *тогда и только тогда*, когда такие преобразования *не изменяют* квадрата расстояния между двумя произвольными точками «мира» Минковского.

Группа всех возможных изменений системы координат трехмерного пространства, при которых координаты x_i и время t преобразуются, во-первых, линейно и, во-вторых, преобразуются так, что при этом не изменяется квадрат расстояния между двумя произвольными точками «мира» Минковского, называется *полной четырехмерной ортогональной группой*, или же *полной однородной группой Лоренца*, или, более просто, *полной группой Лоренца*. Объединение полной однородной группы Лоренца с группой трансляций четырехмерной системы координат «мира» Минковского, также, очевидно, не изменяющих этот квадрат расстояния, носит название *полной неоднородной группы Лоренца*. Мы стоим теперь перед задачей найти *явный* вид и выяснить *физический смысл* преобразований четырех координат x_μ при всевозможных изменениях системы координат по полной группе Лоренца.

Совокупность всех этих преобразований координат, сопровождающих изменения системы координат, задает *основное*, очевидно *изоморфное*, представление этой группы. Вследствие этого *саму такую совокупность* преобразований координат x_μ мы вместе со всеми будем называть также полной группой Лоренца (вспомним соображения, приведенные в § 5).

Если же линейные преобразования четырех координат

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \tag{15.17}$$

составляющие полную группу Лоренца, объединить с четырехмерными трансляциями $x'_\mu = x_\mu - a_\mu$, то мы придем к совокупности преобразований

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu - a_\mu, \tag{15.18}$$

которую, аналогично предыдущему, можно назвать *полной неоднородной группой Лоренца.*

§ 16. ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛНОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Для решения поставленной задачи оказывается весьма удобным пользоваться аналогией между *четырехмерным* пространством-временем Минковского и обычным *трехмерным* пространством. Метод, с помощью которого мы нашли в § 9 основное представление полной трехмерной ортогональной группы, мы теперь естественным образом *обобщим* для решения задачи отыскания основного представления уже полной *четырехмерной* ортогональной группы, т. е. полной группы Лоренца.

Мы увидим, однако, что аналогия между четырехмерным пространством-временем Минковского и обычным трехмерным пространством не простирается неограниченно и пользоваться ею нужно с известной *осторожностью.* Дело в том, что в отличие от первых трех вещественных координат четвертая, временнáя координата «мира» Минковского должна быть непременно чисто *мнимой* величиной.

Мы помним из § 9, что всякое линейное преобразование трех координат x_i, оставляющее неизменным квадрат расстояния между двумя произвольными точками *трехмерного* пространства, есть либо вращение трехмерной системы координат (если детерминант преобразования равен $+1$), либо групповое «произведение» вращения на зеркальное отражение нечетного числа координатных осей (если этот детерминант равен —1). Аналогично этому, мы можем сказать, что всякое линейное преобразование уже *четырех* координат x_μ, оставляющее неизменным квадрат расстояния между двумя произвольными точками *четырехмерного* пространства-времени, есть либо вращение четырехмерной системы координат (если детерминант преобразования равен $+1$), либо групповое «произведение» такого вращения на зеркальные отражения нечетного числа координатных осей (если детерминант преобразования равен —1).

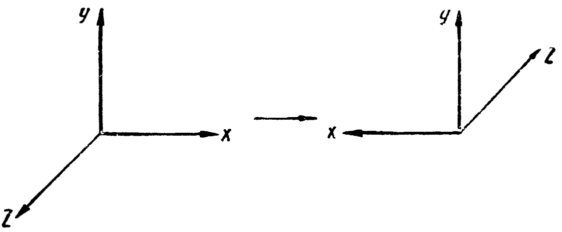

Рис. 15

Обратим внимание на то, что зеркальное отражение всех *четырех* координатных осей пространства-времени Минковского, при котором

$$x'_\mu = -x_\mu, \tag{16.1}$$

имеет детерминант, равный, $+1$, и потому сводится к некоторому *вращению* четырехмерной системы координат. Следствием этого является тот любопытный факт, что правая трехмерная система координат может быть переведена в левую и наоборот *вращением* (а не инверсией!) четырехмерной системы координат. Этот факт, однако, перестанет казаться странным, если сообразить, что можно отразить одну из осей, например x, системы координат на плоскости (xy) *вращением* трехмерной системы координат (см. рис. 15).

Не представляет какого-либо труда построить преобразования четырех координат x_μ при зеркальном отражении нечетного числа различных координатных осей. Использование аналогии с трехмерным пространством дает возможность также без особого труда найти вид преобразований этих четырех координат x_μ и при *вращениях* четырехмерной системы координат.

Пусть мы совершили какое-то произвольное вращение исходной, нештрихованной системы координат четырехмерного пространства-времени и перешли к штрихованной системе (см. рис. 16, где из четырех координатных осей штрихованной системы изображена лишь одна x_1'). Наша первая цель — «разложить» это произвольное вращение на групповое «произведение» вращений системы координат

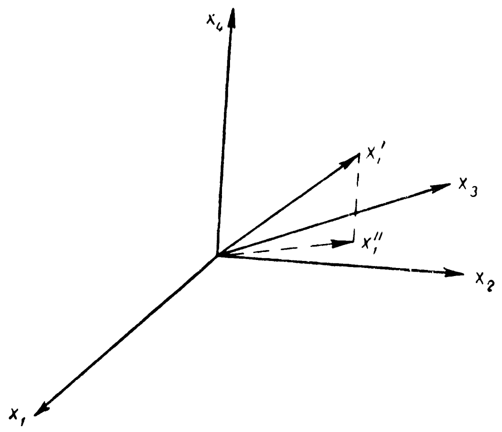

Рис. 16

в координатных плоскостях. При таком «разложении» полезно иметь в виду более простую, решенную нами ранее, в § 5, задачу «разложения» произвольного вращения трехмерной системы координат.

Проведем через две оси x_4 и x_1' плоское двухмерное многообразие, или, как мы будем говорить, плоскость $(x_4\, x_1')$ до пересечения ее с плоским трехмерным пространством $(x_1\, x_2\, x_3)$. Пересечение плоскости $(x_4\, x_1')$ с этим пространством даст некоторую прямую x_1'', исходящую из начала координат и лежащую в трехмерном пространстве $(x_1\, x_2\, x_3)$. В самом деле, плоскость, точки которой имеют две степени свободы, в четырехмерном пространстве, точки которого имеют четыре степени свободы, задается системой двух линейных уравнений, в то время как трехмерное плоское пространство, точки которого имеют три степени свободы, задается одним линейным уравнением. Пересечение плоскости и трехмерного пространства есть множество точек, удовлетворяющих как первым двум, так и третьему уравнению и, следовательно, имеющих лишь одну степень свободы. Поскольку все эти уравнения линейны, а начало координат принадлежит как плоскости, так и трехмерному пространству, искомое пересечение есть действительно прямая x_1'', исходящая из начала координат (так, как это изображено на рис. 16).

Поскольку ось x_1'' находится в трехмерном пространстве $(x_1\ x_2\ x_3)$, мы легко поймем, что для совмещения оси x_1 с этой осью x_1'' нужно совершить последовательно два вращения нештрихованной трехмерной системы координат в двух пространственных плоскостях. Совершив еще одно, третье, вращение на этот раз в пространственно-временной плоскости $(x_1''\ \ x_4)$ на угол φ_3, мы совместим, наконец, исходную ось x_1 с конечной осью x_1'.

При совмещенных же двух осях задача попарного совмещения остальных шести осей четырехмерных систем координат сводится уже к задаче совмещения двух трехмерных систем координат, «повернутых» друг относительно друга каким-то произвольным образом. Читатель уже знает, что для решения этой последней задачи достаточно совершить еще три вращения в трех координатных плоскостях.

Таким образом, произвольное вращение четырехмерной системы координат может быть представлено как групповое «произведение» *шести* вращений в шести координатных плоскостях этой системы координат. Вид преобразования координат при вращениях в какой-либо координатной плоскости четырехмерного пространства-времени может быть выписан немедленно. Например, при вращении в плоскости $(x_1\, x_4)$ на угол φ, когда изменяется лишь первая и четвертая координаты, правило преобразования координат гласит:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi + x_4 \sin\varphi, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ x_4' &= -x_1 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

и аналогично для вращений в других координатных плоскостях.

Совокупность равенств (16.2) эквивалентно одному матричному:

$$\mathscr{X}' = \boldsymbol{A}_{(14)}(\varphi)\, \mathscr{X}, \tag{16.3}$$

где

$$\mathscr{X} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{X}' \equiv \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}, \tag{16.4}$$

а матрица вращения

$$A_{14}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{16.5}$$

Точно таким же путем мы можем построить матрицы вращений и в *других* пяти координатных плоскостях. Читателю полезно выписать несколько таких матриц. После этого мы можем утверждать, что при *произвольном* вращении четырехмерной системы координат четыре координаты x_μ преобразуются как

$$\mathscr{X}' = A_{\text{рез}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_6)\, \mathscr{X}, \tag{16.6}$$

где

$$A_{\text{рез}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_6) = \\ = A_{34}(\varphi_6)\, A_{24}(\varphi_6)\, A_{23}(\varphi_4)\, A_{14}(\varphi_3) A_{13}(\varphi_2)\, A_{12}(\varphi_1). \tag{16.7}$$

В результате проведенного «разложения» мы свели произвольное линейное преобразование четырех координат x_μ, совместное с фактом, как мы будем кратко говорить, постоянства скорости света, к зеркальным отражениям нечетного числа различных осей четырехмерной системы координат и вращения в шести координатных плоскостях четырехмерного пространства-времени. Поскольку, однако, все эти преобразования совершаются в *абстрактном* четырехмерном пространстве, нам нужно выяснить *физический смысл* каждого из этих преобразований координат x_μ, т. е. установить, какому преобразованию системы координат в *реальном* трехмерном пространстве, соответствует каждое из этих преобразований четырехмерной системы координат.

Что касается инверсии *нечетного* числа осей, то их может быть восемь — четыре отражения каждой из четырех осей и четыре отражения одновременно трех осей. Конечно, не все эти отражения независимы друг от друга. Физический смысл их совершенно ясен: это либо инверсия какой-нибудь одной или одновременно трех пространственных координат, либо отражение времени (замена будущего на прошедшее и наоборот), либо, наконец, некоторое вращение трехмерной пространственной системы координат, сопровождающееся отражением времени.

Также совершенно понятен физический смысл вращений в трех «чисто» пространственных плоскостях. Поэтому остается только выяснить физический смысл вращения в какой-либо *пространственно-временной* плоскости, например в плоскости $(x_1 x_4)$, когда координаты x_μ преобразуются по формулам (16. 2).

Здесь мы должны прежде всего обратить внимание на важное обстоятельство, отличающее вращения в пространственно-временных плоскостях от вращений в чисто пространственных плоскостях. Мы уже отмечали, что при любом преобразовании четырех координат x_μ должно выполняться требование *вещественности* пространственных координат и времени. Это означает, что в какую бы штрихованную четырехмерную систему координат мы ни перешли, три пространственные координаты x'_i произвольной четырехмерной точки должны *остаться* вещественными, четвертая же x'_4, временная, — чисто мнимой.

Требование вещественности приводит к тому, что угол вращения φ в пространственно-временной плоскости уже *не может быть* вещественным, за исключением случая углов, кратных π, но может быть произвольной чисто *мнимой* величиной

$$\varphi = i\alpha, \tag{16.8}$$

где α — вещественно. Тогда $\cos i\alpha = \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\alpha}) = \operatorname{ch}\alpha$ есть, как известно, гиперболический косинус, изменяющийся в пределах от $+1$ до $+\infty$, а $-i \sin i\alpha = \frac{1}{2}(e^{-\alpha} - e^{\alpha}) = \operatorname{sh}\alpha$ — гиперболический синус, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$. Разумеется, допустимы также «результирующие» вращения, являющиеся групповыми «произведениями» вращений на углы $i\alpha$ и вращений на углы πn (n — целое положительное), т. е. допустимы вращения на углы вида

$$i\alpha + \pi n. \tag{16.9}$$

Смысл вращений в плоскости $(x_1 x_4)$ на углы вида πn совершенно ясен: при четном n это есть «тождественное» преобразование, а при нечетном n — инверсия двух координатных осей, в данном случае осей x_1 и x_4. Заметим, что преобразование (16. 1) может быть получено как результат трех последовательных вращений в трех пространственно-временных плоскостях на углы, равные π.

Чтобы выяснить физический смысл вращений в пространственно-временной плоскости на чисто мнимый угол, введем вместо параметра α новый параметр v_1 в соответствии с формулой

$$\cos i\alpha = \frac{1}{\beta}, \quad \beta \equiv \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}. \tag{16.10}$$

Из факта $\cos i\alpha \geqslant 1$ вытекает, что параметр v_1, во-первых, вещественен и, во-вторых,

$$|v_1| \leqslant c. \tag{16.11}$$

Поскольку, далее, $\sin i\alpha = \frac{iv_1/c}{\beta}$, формулы (16.2), выраженные через новый параметр v_1, приобретают вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 + iv_1 x_4/c}{\beta}, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ x_4' &= \frac{x_4 - iv_1 x_1/c}{\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

или, после перехода к переменным t и t',

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - v_1 t}{\beta}, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ t' &= \frac{t - v_1 x_2/c^2}{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

Наконец, выясним физический смысл нового параметра v_1. Рассмотрим начало трехмерной (пространственной) штрихованной системы координат, уравнения «движения» которого в штрихованной системе имеют вид $x_i' = 0$ для всех t'. В нештрихованной же системе эти же уравнения, согласно (16 . 13), выглядят как

$$x_1 - v_1 t = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0. \tag{16.14}$$

Это значит, что начало координат штрихованной системы движется относительно системы нештрихованной с постоянной скоростью v_1 вдоль оси x_1 (постоянство v_1, т. е. независимость v_1 от координат, следует из постоянства φ).

Таким образом, вращение системы координат в четырехмерном «мире» Минковского в плоскости $(x_1\, x_4)$ на некоторый чисто мнимый угол $i\alpha$ *эквивалентно* переходу от одной про-

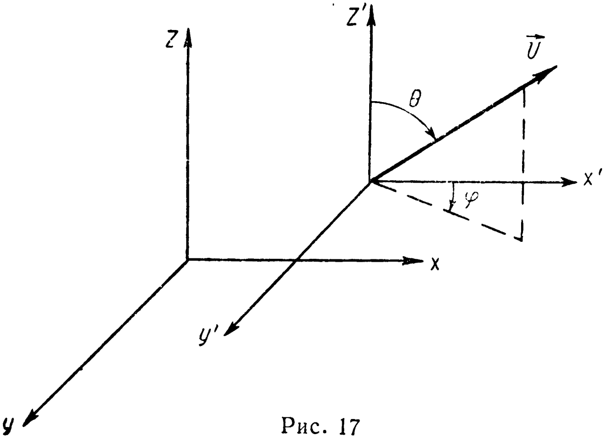

Рис. 17

странственной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно нее с какой-то постоянной скоростью v_1 вдоль оси x_1, причем связь между углом вращения $i\alpha$ и скоростью v_1 определяется по формуле (16. 10). Точно также, вращение четырехмерной системы координат в плоскости $(x_2\, x_4)$ или $(x_3\, x_4)$ эквивалентно переходу от одной пространственной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно нее с постоянной скоростью вдоль оси x_2 или x_3, соответственно. Читателю не доставит большого труда выписать формулы преобразования координат x_μ при таких переходах через параметры v_2 и v_3.

Итак, мы, наконец, нашли *правильные* формулы преобразования координат x_i и времени t при переходе от одной инерциальной системы координат к другой, именно формулы вида (16. 12) или (16. 13), ограниченные, правда, движением вдоль одной из координатных осей. В общем же случае *произвольно направленного* движения штрихованной системы координат относительно нештрихованной, т. е. в случае движения со скоростью $\mathbf{v}$ (v, φ, θ) (см. рис. 17), закон преобразования координат x_i и времени t гласит:

$$\mathscr{X}' = \boldsymbol{A}(\mathbf{v})\,\mathscr{X}, \tag{16.15}$$

где «колонки» $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$ определены по (5.39), а

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{A}_{12}^{-1}(\varphi)\boldsymbol{A}_{13}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\boldsymbol{A}(v)\boldsymbol{A}_{13}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\boldsymbol{A}_{12}(\varphi),$$

$$\boldsymbol{A}(v) \equiv \begin{pmatrix} 1/\beta & 0 & 0 & -v/\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v/c^2\beta & 0 & 0 & 1/\beta \end{pmatrix}. \tag{16.16}$$

Выражение для матрицы $\boldsymbol{A}$ ($\mathbf{v}$) получено на основании того соображения, что интересующий нас переход от нештрихованной системы координат к штрихованной (см. рис. 17) может быть представлен как результат пяти последовательно проведенных преобразований: 1) вращения исходной системы координат в плоскости (12) на угол φ, 2) вращения полученной, скажем двухштрихованной, системы в плоскости (13) на угол $\pi/2 - \theta$, 3) перехода к трехштрихованной системе, движущейся относительно двуштрихованной со скоростью, направленной по оси x и по модулю равной $|\mathbf{v}|$, 4) вращения трехштрихованной системы в плоскости (13) на угол $-(\pi/2 - \theta)$ и, наконец, 5) вращения полученной после всех этих преобразований системы в плоскости (12) на угол $-\varphi$.

Подведем итоги нашим результатам. Мы показали, что произвольное преобразование $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$ полной группы Лоренца может быть разложено на групповое «произведение»: 1) вращений в трех пространственных плоскостях (на вещественные углы), 2) вращений в трех пространственно-временных плоскостях на чисто мнимые углы (или, что все равно, преобразований от одной инерциальной системы к другой), 3) инверсий времени и одной из пространственных координат (или, что все равно, вращений в пространственно-временных плоскостях на углы вида $(2n+1)\pi$) и, наконец, 4) инверсий нечетного числа координатных осей четырехмерного пространства-времени Минковского.

Поскольку матрицы каждого из этих четырех типов преобразований координат x_μ теперь уже нам известны, а их произведение, которое мы не будем выписывать, дает общую, «результирующую» матрицу $(a_{\mu\nu})$, задача отыскания явного вида матриц $(a_{\mu\nu})$, задающих основное представление полной группы Лоренца, *тем самым* решена. И, значит, как мы уже подчеркивали, решена задача построения самой группы Лоренца.

Часто бывает желательным ограничиться рассмотрением лишь таких преобразований полной группы Лоренца, которые не включают отражение времени. В этом случае говорят о полной *ортохронной* группе Лоренца. Мы получим эту группу из полной группы Лоренца, если исключим из нее, во-первых, отражение временной координаты, во-вторых, инверсию временной координаты одновременно с одной из пространственных координат (т. е. вращения в пространственно-временных плоскостях на углы $(2n + 1)\pi$) и, в-третьих, зеркальные отражения временной координаты одновременно с какими-либо двумя пространственными координатами.

Нетрудно понять, что требование ортохронности эквивалентно требованию

$$a_{44} > 1. \tag{16.17}$$

При этом существенно, что групповое «произведение» двух произвольных преобразований полной группы Лоренца, удовлетворяющих условию (16.17), *также* удовлетворяет этому условию.

Таким образом, полная ортохронная группа Лоренца разбивается на три группы: 1) группу трехмерных пространственных вращений, 2) группу пространственной инверсии и 3) группу вращений в пространственно-временных плоскостях на чисто мнимые углы (т. е. на группу преобразований при переходах от одной инерциальной системы координат к другой). Если же исключить из полной ортохронной группы Лоренца вторую подгруппу, т. е. преобразование пространственной инверсии, то мы получим собственную ортохронную группу Лоренца.

В полной аналогии с тем, как мы получали две формы (9.28) и (9.34) условия ортогональности для группы трехмерных вращений, с помощью простой замены латинских индексов на греческие, можно получить и условие ортогональности для полной группы Лоренца в двух эквивалентных между собой формах:

$$a_{\mu\nu}\, a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \tag{16.18}$$

$$a_{\nu\mu}\, a_{\lambda\mu} = \delta_{\nu\lambda}, \tag{16.19}$$

где по-прежнему

$$\delta_{\mu\nu}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \mu=\nu\\ 0, & \text{если} \quad \mu\neq\nu.\end{cases} \tag{16.20}$$

Это объясняет, почему полную группу Лоренца можно называть также полной ортогональной четырехмерной группой.

Также очень просто показывается, что (ср. формулу (9.37)):

$$[\mathrm{Det}\,(a_{\mu\nu})]^2=1, \tag{16.21}$$

а $\mathrm{Det}\,(a_{\mu\nu}) = \pm 1$. При этом, как мы уже говорили в начале этого параграфа, значение $+1$ соответствует «чистому» вращению системы координат четырехмерного «мира» Минковского, а значение -1 соответствует групповому «произведению» такого вращения на инверсию нечетного числа координатных осей.

Итак, при переходе от одной инерциальной системы к другой пространственные координаты и время должны преобразовываться не по галилеевой матрице (5.38), несмотря—подчеркнем еще раз — на всю ее «очевидность», а именно по матрице (16.16).

Но такое изменение закона преобразования координат и времени, который казался раньше незыблемым и на котором было построено все здание механики Ньютона, должно неизбежно привести и действительно приводит к ряду *фундаментальных* следствий, в корне изменяющих наши привычные представления об основных понятиях физической науки.

Физическая теория, которая в отличие от обычной механики принимает, что при переходе от одной инерциальной системы координат к другой пространственные координаты x_i и время t преобразуются именно по матрице (16.16), т. е. так, как этого требует отрицательный результат опыта Майкельсона, носит название *специальной теории относительности* Эйнштейна.

§ 17. ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Прежде всего отметим бросающийся в глаза факт: в соответствии с (16.11) скорость одной инерциальной системы координат относительно другой не может превышать скорости c света (имеется, конечно, в виду скорость света в вакууме). Это означает, что ни одно материальное тело *нс может* двигаться относительно другого со скоростью, *большей* скорости света, — факт, которого не могла знать обычная, ньютонова механика и который с первого взгляда может показаться парадоксальным.

В самом деле, — возразит нам читатель, — если два тела движутся навстречу друг другу и каждый имеет скорость, очень близкую к скорости света, разве их относительная скорость не превысит скорости света?

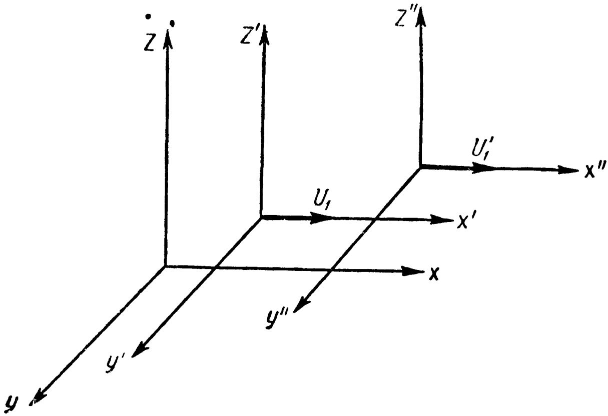

Рис. 18

Возможность отрицательного ответа на этот вопрос перестанет казаться странной, если вспомнить, что теперь, при *новых* правилах преобразования ксординат и времени при переходе от одной инерциальной системы координат к другой, должен быть и *другим* закон сложения скоростей инерциальных систем, отличный от закона (1.9).

Второе, также бросающееся в глаза обстоятельство — это факт изменения времени при новых преобразованиях (формула (16.13)!) от одной инерциальной системы координат к другой, тогда как в старых, галилеевых преобразованиях (5.37) и (5.38) время оставалось неизменным. Физически это означает, что если в обычной механике время было «абсолютным», текущим независимо от состояния движения системы координат, и одно и то же для всех инерциальных систем, то в теории относительности время теряет свою «абсолютность» и независимость от состояния движения системы координат, оно становится *разным* для *различных* инерциальных систем.

Теперь мы более подробно проанализируем эти обстоятельства.

Пусть штрихованная система координат (см. рис. 18) движется относительно исходной, нештрихованной, со скоростью v_1 вдоль оси x, а двухштрихованная относительно одноштрихованной — в том же направлении со скоростью v_1'. Определим, пользуясь формулами (16.13), скорость $v_{\text{рез}}$ движения двухштрихованной системы относительно нештрихованной.

Такая задача, очевидно, эквивалентна задаче вычисления матрицы «результирующего» преобразования координат и времени по матрицам двух «перемножаемых» в групповом смысле преобразований. Матрицы «перемножаемых» преобразований находятся либо непосредственно из вида самих преобразований, т. е. из формул (16.13), либо из матрицы (16.16), где для нашего частного случая надо положить $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$. Таким путем находим

$$\mathbf{A}_{\text{рез}}^{\text{лор}} = \begin{pmatrix} 1/\beta_1 & 0 & 0 & -v_1/\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_1/c^2\beta_1 & 0 & 0 & 1/\beta_1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1/\beta_2 & 0 & 0 & -v_2/\beta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_2/c^2\beta_2 & 0 & 0 & 1/\beta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\beta_{\text{рез}} & 0 & 0 & -v_{\text{рез}}/\beta_{\text{рез}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_{\text{рез}}/c^2\beta_{\text{рез}} & 0 & 0 & 1/\beta_{\text{рез}} \end{pmatrix}, \qquad (17.1)$$

где

$$v_{\text{рез}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}, \qquad (17.2)$$

а

$$\beta_{\text{рез}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\text{рез}}}{c}\right)^2} \qquad (17.3)$$

Поскольку матрица $A^{\text{лор}}_{\text{рез}}$ есть матрица преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно нее вдоль оси x со скоростью $v_{\text{рез}}$, то $v_{\text{рез}}$ и есть *искомая* скорость движения двуштрихованной системы координат относительно нештрихованной.

Мы рассмотрели лишь частный случай движения систем координат вдоль одной из координатных осей, для которого и нашли новое, требуемое опытом Майкельсона и, значит, соответствующее действительности, правило сложения скоростей инерциальных систем. Говоря иными словами (вспомним наши замечания в связи с формулой (1.9)), мы теперь знаем, каков параметр «результирующего» перехода в группе переходов от одной инерциальной системы координат к другой.

Конечно, в общем случае движения систем координат с произвольно направленными скоростями правило сложения скоростей, которое можно получить перемножением матриц вида (16.6), выглядит значительно сложнее. Ввиду громоздкости мы не будем здесь выписывать это общее правило.

Из формулы (17.2), в частности, вытекает, что если $v_1 < c$ и $v_1' < c$, то и

$$v_{\text{рез}} < c. \tag{17.4}$$

Это значит, что относительная скорость движущихся навстречу друг другу материальных тел *не может* достигнуть скорости света, а тем более превысить ее, если, конечно, скорости каждого из этих тел были меньше скорости света, хотя бы даже на весьма *незначительную* величину.

Кроме того, из формулы (17.2) вытекает, что если одна из скоростей v_1 или v_1' равна скорости света c, то и

$$v_{\text{рез}} = c \tag{17.5}$$

в полном *согласии* с опытом Майкельсона (впрочем, это, конечно, можно было предвидеть).

Рассмотрим теперь какие-то два события, происшедшие в одной и той же пространственной точке x_i, но в разные моменты времени t и $\bar{t}$ нештрихованной системы координат. Тогда промежуток времени между этими событиями в этой системе есть $\Delta t = \bar{t} - t$. Найдем промежуток времени между этими же событиями, но в штрихованной системе, движущейся относительно первой вдоль оси x со скоростью v_1.

На основании (16.13) находим

$$t' = \frac{t - v_1 x_1/c^2}{\beta_1}, \quad \overline{t}' = \frac{\overline{t} - v_1 x_1/c^2}{\beta_1}. \tag{17.6}$$

Отсюда промежуток времени между рассматриваемыми событиями в штрихованной системе координат

$$\Delta t' = \overline{t}' - t' = \Delta t/\beta_1 \geqslant \Delta t. \tag{17.7}$$

В качестве двух рассмотренных нами событий, произошедших в одной и той же пространственной точке, можно взять события, соответствующие двум различным положениям стрелок часов. Тогда, как нетрудно понять, соотношение (17.7) свидетельствует, что *стрелки движущихся часов*

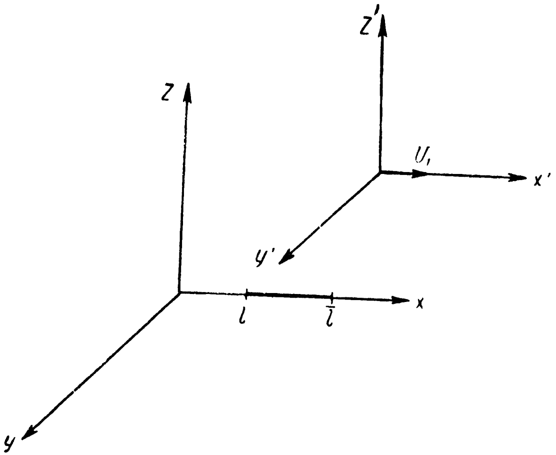

Рис. 19

идут всегда медленнее стрелок неподвижных часов. Или, более точно: время, показываемое часами в системе координат, относительно которой эти часы *движутся*, всегда *меньше* времени, показываемого этими же часами, но в системе координат, относительно которой эти часы *покоятся*. Время, отсчитываемое часами в системе, где часы покоятся, называется *собственным* временем.

Рассмотрим теперь стержень, неподвижно расположенный вдоль оси x нештрихованной системы координат (см. рис. 19).

Пусть длина этого стержня в нештрихованной системе есть $\Delta l = \overline{l} - l$. Определим длину этого же стержня, но в штрихованной системе, движущейся относительно исходной вдоль оси x со скоростью v_1.

Прежде всего следует уточнить: что такое длина стержня в *движущейся* системе? Естественно определить эту длину как пространственное расстояние между концами этого стержня, зафиксированными в *движущейся* системе координат *в один и тот же* момент времени *этой* системы. Требование, чтобы концы стержня фиксировались в один и тот же момент времени именно *движущейся* системы (а не исходной, покоящейся), существенно оговаривать, поскольку, согласно предыдущему, события, одновременные в *одной* системе координат, будут, вообще говоря, неодновременны в *другой*.

Для решения этой задачи запишем «обратные» преобразования от штрихованной системы координат к нештрихованной (эти преобразования будут, очевидно, соответствовать скорости — v_1). Имеем

$$\begin{gathered} x_1=\frac{x_1'+v_1 t'}{\beta}, \\ x_2=x_2', \\ x_3=x_3', \\ t=\frac{t'+v_1 x_1'/c^2}{\beta}. \end{gathered} \tag{17.8}$$

Отсюда для координат l' и $\bar{l}'$ концов нашего стержня, зафиксированных в момент времени t', получается

$$l=\frac{l'+v_1 t'}{\beta}, \quad \bar{l}=\frac{\bar{l}'+v_1 t'}{\beta} \tag{17.9}$$

или

$$\Delta l=\Delta l'/\beta, \tag{17.10}$$

где $\Delta l'=\bar{l}'-l$ есть искомая длина стержня в движущейся, штрихованной, системе координат. Формулу (17.10) часто пишут в виде

$$l=l_0\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}, \tag{17.11}$$

где l_0 — длина стержня в *неподвижной* системе координат, а l — длина *того же* стержня в *движущейся* системе.

Полученные нами формулы свидетельствуют, что длина стержня, как и промежуток времени между событиями, из величины абсолютной, какой она была в ньютоновой механике, превращается в *относительную*, зависящую от состояния движения системы координат. Максимальную, именно *собственную*, длину имеет стержень в системе координат, где он покоится. Стержень имеет меньшую длину в системе, относительно которой он движется, причем с увеличением скорости v_1 движения длина стержня приближается к нулю.

Подчеркнем, что такое уменьшение длины стержня имеет место лишь в случае движения штрихованной системы координат *вдоль* длины стержня. Если же штрихованная система движется *поперек* длины стержня, то эта длина не претерпевает каких-либо изменений. В случае же «косого» направления скорости штрихованной системы происходит *частичное* уменьшение длины, поскольку за это уменьшение ответственна лишь проекция скорости системы на направление стержня.

Мы не имеем возможности остановиться здесь более подробно ни на самой специальной теории относительности, ни на многочисленных других необычайно интересных ее следствиях, отсылая любознательного читателя к другим книгам, специально посвященным этой оригинальной теории [1]. Укажем лишь еще на одно весьма поучительное обстоятельство — так называемый *парадокс с часами*, неоднократно дискутировавшийся в литературе.

Пусть в исходной, нештрихованной, системе координат синхронизированы двое часов: часы A и часы B (см. рис. 20). После синхронизации приведем часы B в движение и «жестко» свяжем эти часы с некоторой, штрихованной системой координат. Тогда в исходной системе часы B должны идти медленнее часов A.

Представим себе теперь, что часы B вновь *вернулись* в исходную систему координат. Тогда, согласно сказанному, часы B должны показывать *меньшее* время, чем часы A.

Однако аналогичные рассуждения можно провести и для *штрихованной* системы координат, «жестко» связанной с часами B, поскольку обе системы, штрихованная и нештрихованная, совершенно равноправны и нет причин считать одну «истинно» покоящейся, а другую «истинно» движущейся (вспомним наши соображения в § 6!). Как же будет выглядеть *эта же* картина с часами в *штрихованной* системе координат?

---

[1] См., например, А. Эйнштейн «Сущность теории относительности» (ИИЛ, 1955) или В. Паули «Теория относительности» (ГИТТЛ, 1947).

В этой системе именно часы *A* как *движущиеся* должны идти *медленнее* по сравнению с неподвижными часами *B*. После того как обе системы координат вновь совмещены, именно часы *A* должны показывать *меньшее* время, а не часы *B*.

Итак, имеются два утверждения, очевидно, *взаимно исключающие* друг друга, поскольку всегда имеется воз-

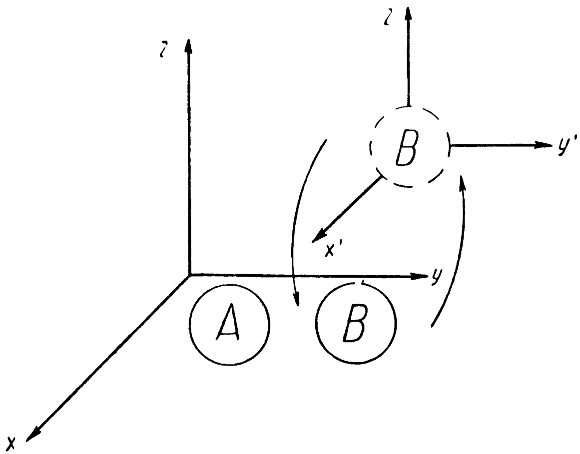

Рис. 20

можность экспериментально установить, *какие* из двух часов *в одной и той же* системе координат показывают меньшее время. Заметим, что пока часы находились во взаимном *движении*, никакого противоречия *не возникало*, поскольку в *одной* системе координат часы *B* могут идти медленнее часов *A*, а в *другой* системе, наоборот, часы *A* могут идти медленнее часов *B*.

Разрешение этого мнимого парадокса состоит просто в том, что предположение о возможности возврата часов *B* в исходную систему координат *несовместно* с *инерциальностью* штрихованной системы координат—часы *B*, приведенные в движение с *постоянной* скоростью (скоростью как вектором **v**!) из исходной системы, никогда *не смогут* вновь вернуться в эту систему.

Поэтому предполагаемое нами движение часов как движение *с ускорением* уже не входит в компетенцию *специальной* теории относительности и должно рассматриваться в рамках *общей* теории относительности. В рамках же последней решение вопроса о том, какие из часов после совмещения будут показывать меньшее время, зависит от того, какие из них двигались с ускорением — часы A или часы B.

Наконец, мы должны внести одно существенное разъяснение. Мы знаем теперь, что обычный закон (1.9) сложения скоростей должен считаться неверным и его следует заменить законом (17.2), правильно отражающим реальность. Но значит ли это, что до 1905 г. человечество просто *заблуждалось* и что ньютонова механика, основанная на «неверном» правиле (1.9), является порочной, не отражающей объективных закономерностей природы, и не имеет какого-либо права на существование?

Разумеется, нет. Чтобы понять, в чем здесь дело, представим себе, что скорость v_1 штрихованной системы координат мала по сравнению со скоростью света c:

$$v_1 \ll c, \tag{17.12}$$

так что отношением v_1/c можно пренебречь по сравнению с единицей. В этом случае, как нетрудно обнаружить, *новые* преобразования (17.13) координат и времени при переходе от одной инерциальной системы координат к другой переходят в *старые*, галилеевы:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 - v_1 t, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{17.13}$$

А это означает, что при условии (17.12) *все* результаты специальной теории относительности будут *совпадать* с результатами обычной механики, по крайней мере с *той* степенью точности, с какой можно пренебречь v_1/c по сравнению с единицей. Чтобы понять, что *практически* означает условие (17.12), надо вспомнить, что скорость света — колоссальная величина: $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*. И ясно, что для *тех* скоростей, для которых техника XIX в. позволяла провести экспериментальную проверку закона сложения скоростей (1.9), этот закон «блестяще» *подтверждался* экспериментом, и именно для *этих* скоростей он является *объективной* истиной.

Конечно, в настоящее время, когда человек глубоко проник в мир элементарных частиц, движущихся с *колос-*

сальными скоростями порядка скорости света, закон (1.9) сложения скоростей в применении к этим частицам уже не является удовлетворительным и должен быть заменен точным (осторожнее было бы сказать: *более точным*) законом (17.2).

Тот факт, что при условии (17.12) специальная теория относительности с большой степенью точности переходит в обычную, ньютонову механику, принято рассматривать как удовлетворение своеобразному «*принципу соответствия*». Согласно этому принципу всякая *новая* физическая теория, пришедшая на смену старой и *правильно* отражающая объективные закономерности природы, должна с определенной степенью точности переходить в эту *старую* теорию для *той* области явлений, для которой старая теория получила несомненное *подтверждение* экспериментом.

Наконец, обратим внимание на одно недоразумение, которое иногда возникает в связи с трактовкой специальной теории относительности, называемой часто также релятивистской теорией. Мы уже знаем, что согласно этой теории, все следствия которой замечательным образом подтверждены многочисленными современными экспериментами, пространственное расстояние и промежуток времени между событиями уже не являются абсолютными величинами, а суть величины *относительные*, зависящие от скорости движения системы координат.

Мы знаем, что, например, длина стержня в неподвижной системе координат — одна, в движущейся — другая. К сожалению, находятся еще несведущие люди, которые в этой связи самым серьезным тоном задают, как им кажется, убийственный вопрос: а какова же *на самом деле* длина стержня? Читатель легко поймет, что поставленный вопрос имеет *не больший* смысл, чем, скажем, вопрос о том, «где же *на самом деле* находится «верх» или «где же *на самом деле* находится дом — справа или слева», или «каково же *на самом деле* расстояние от заданной точки».

Все дело в том, что понятие длины или промежутка времени, как это стало ясно в 1905 г., являются *относительными* и что *нельзя* говорить просто: «длина этого стержня равна 5 *м*» или «между двумя определенными событиями прошло 2 *часа*». А следует говорить: «длина этого стержня в *данной* системе координат равна 5 *м*» или «между двумя определенными событиями в *данной* системе координат прошло 2 *часа*» точно так же, как мы говорим «в *данной* точке на земле «верх» там-то» или «относительно *моей* системы координат (или относительно *меня*) дом справа» или, наконец, «расстояние от одной заданной точки *до другой*, тоже *заданной*, равно тому-то».

Разница здесь лишь в том, что к относительности одних понятий мы давно *привыкли* и считаем это само собой разумеющимся, относительность же *других* понятий дается нам с известным трудом. Факт наличия у *одного и того же* стержня *бесконечного* (даже несчетного) числа длин также заслуживает *не большего* удивления, чем, например, факт наличия у *одной и той же* точки *бесконечного* (даже несчетного) числа расстояний.

Но относительность *понятий* ни в коем случае не означает относительности *истины*. Например, истина, состоящая в утверждении, что длина *заданного* стержня в *заданной* же системе координат равна такому-то, вполне *определенному*, числу, абсолютна и, конечно, *не зависит от воли человека*. Поэтому совершенно ясно, что *релятивистская теория при правильном ее понимании ничего общего не имеет с так называемым философским релятивизмом*, ложным направлением в философии, утверждающим, что в мире не существует объективной истины и что истина относительна и зависит целиком от воли человека.

§ 18. ТЕНЗОРЫ И СПИНОРЫ ПОЛНОЙ ОРТОХРОННОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Вспоминая соображения § 6, мы заключаем, что всякая физическая величина должна быть ковариантом *не только* трехмерной евклидовой группы, но и *более общей* группы, включающей дополнительно переходы от одной инерциальной системы координат к другой и временные трансляции, т. е. ковариантом *полной ортохронной неоднородной группы Лоренца*. Что же касается инверсии *времени*, не входящей в эту группу, то эту инверсию мы рассмотрим отдельно в гл. IV, вследствие ее некоторой *специфичности*.

Построение ковариантов полной ортохронной неоднородной группы Лоренца мы осуществим опять-таки в полной аналогии со случаем трехмерной евклидовой группы. Для этого удобно временно исключить из рассмотрения четырехмерные трансляции.

Как и в случае полной трехмерной ортогональной группы, тензорные представления различных рангов полной ортохронной группы Лоренца строятся как кронекеровы произведения соответствующего числа матриц *основного* представления группы. *Тензором n-го ранга* этой группы называется совокупность 4^n функций $v_{\mu\ldots\nu}(x_\rho)$, заданная в некоторой, нештрихованной, системе координат и преобразующаяся при преобразовании координат $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$ по этой группе, в соответствии с правилом

$$v'_{\mu\ldots\nu}(x'_\rho) = a_{\mu\lambda} \ldots a_{\lambda\delta}\, v_{\lambda\ldots\delta}(x_\rho = x'_\gamma a_{\gamma\rho}). \tag{18.1}$$

В правиле же преобразования *псевдотензора n-го ранга* в правой части должен стоять дополнительный множитель Det $(a_{\mu\nu})$ (ср. формулу (10.27)!). Так же, как и в трехмерном случае, псевдотензорные представления *не являются* какими-то *новыми* представлениями по сравнению с тензорными, и все *псевдотензоры* в конечном счете *сводятся* к обычным *тензорам*.

В частности, псевдоскаляр рассматриваемой нами группы есть единственная независимая компонента некоторого антисимметричного по всем индексам тензора IV ранга. Псевдовектор группы составляет единственные четыре независимые компоненты некоторого полностью антисимметричного тензора III ранга. Введем единичный полностью антисимметричный псевдотензор IV ранга $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}$, у которого в какой-то одной, а значит, как нетрудно проверить, и во всех системах координат компонента $\varepsilon_{1234} = 1$, а остальные либо равны нулю, либо получаются из этой компоненты перестановкой индексов. Тогда оба только что высказанных утверждения эквивалентны тому, что

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, T_{\mu\nu\alpha\beta}(x_\rho) \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, T_{\nu\alpha\beta} \tag{18.2}$$

суть псевдоскаляр и псевдовектор соответственно, если $T_{\mu\nu\alpha\beta}(x_\rho)$ и $T_{\nu\alpha\beta}$ суть тензоры IV и III рангов.

Точно так же, как мы условились относительно латинских индексов, мы введем теперь соглашение, согласно которому каждый греческий индекс какого-либо выражения должен рассматриваться *обязательно* как тензорный. Однако *начальные* буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ мы сохраним для *спинорных* индексов нашей полной ортохронной группы Лоренца, которые, как мы увидим ниже, также пробегают четыре значения.

В качестве примера, как мы будем кратко говорить, «четырехмерного» тензора, или, еще более кратко, 4-тензора, можно привести часто встречающийся вектор $A_\mu(x_\rho)$

электромагнитного поля. Пространственные компоненты этого 4-вектора совпадают с компонентами так называемого вектор-потенциала, а четвертая равна $i\varphi(x_i, t)$, где $\varphi(x_i, t)$ — так называемый «скалярный» потенциал. Поэтому пишут

$$A_\mu(x_\rho)\,[A_i(x_\rho),\; i\varphi(x_\rho)]. \tag{18.3}$$

Относительно *трехмерной* евклидовой группы пространственные составляющие $A_i(x_\rho)$ действительно ведут себя, очевидно, как вектор, а $\varphi(x_\rho)$ (или $i\varphi(x_\rho)$) — как скаляр, т. е. преобразуются независимо друг от друга. Но в случае преобразований системы координат по *группе Лоренца* компоненты $A_i(x_\rho)$ «вектор-потенциала» и «скалярный» потенциал $\varphi(x_\rho)$, вообще говоря, «перепутываются». Нетрудно понять, что такое «перепутывание» будет иметь место при переходах от одной инерциальной системы координат к другой (вспомним формулы (16.12)!).

Существенно также то, что если в какой-то системе координат функции $A_i(x_\rho)$ и $\varphi(x_\rho)$ были вещественны, то и после перехода к любой другой системе, рассматриваемой в группе Лоренца, они останутся вещественными же. Это станет очевидным, если мы вспомним так называемое требование вещественности § 16, налагаемое на матрицы $(a_{\mu\nu})$ преобразования четырех координат x_μ по группе Лоренца.

Пользуясь удобным случаем, рассмотрим еще одну важную для физики группу — группу так называемых *калибровочных* преобразований вектора $A_\mu(x_\rho)$ электромагнитного поля. Известно — и мы уже частично об этом говорили в § 6, — что сам этот вектор *не является* непосредственно наблюдаемой величиной. Непосредственно же наблюдаемые величины — *напряженности* электрического $E_i(x_\rho)$ и магнитного $H_i(x_\rho)$ полей строятся из компонент антисимметричного тензора II ранга:

$$F_{\mu\nu}(x_\rho) = \frac{\partial A_\nu(x_\rho)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu(x_\rho)}{\partial x_\nu}. \tag{18.4}$$

При этом

$$F_{i4}(x_\rho) = -i\,E_i(x_\rho), \tag{18.5}$$

а

$$F_{12}(x_\rho) = H_3(x_\rho) \quad \text{и т. д.} \tag{18.6}$$

Из выражения (18.6) (ср. выражение (10.29)) следует, в частности, что напряженность $H_i(x_\rho)$ магнитного поля является в сущности не вектором, а *псевдовектором*.

Легко видеть, что при заданной непосредственно наблюдаемой величине $F_{\mu\nu}(x_\rho)$ непосредственно ненаблюдаемый вектор $A_\mu(x_\rho)$ определяется по (18.4) *лишь* с точностью до слагаемого вида $\frac{\partial S(x_\rho)}{\partial x_\mu}$ с произвольной функцией $S(x_\rho)$. По этой причине *любой физический* закон, в котором фигурирует вектор A_μ, *не должен* изменяться при замене

$$A_\mu(x_\rho) \to A_\mu(x_\rho) + \frac{\partial S(x_\rho)}{\partial x_\mu}. \tag{18.7}$$

Совокупность всех возможных таких замен, с различными функциями $S(x_\rho)$, образующая коммутативную группу, называется группой *калибровочных* преобразований электромагнитного поля. Физические величины при преобразованиях (18.7) могут как оставаться неизменными, так и в свою очередь преобразовываться по одному из представлений этой группы.

Так же, как и в случае трехмерной группы, тензорные представления полной ортохронной группы Лоренца, хотя и образуют *важный* класс представлений этой группы, тем не менее *не исчерпывают всех*, даже конечномерных, неразложимых ее представлений. Другим важным классом представлений этой группы являются *спинорные* представления, вводимые в полной аналогии со случаем трехмерной группы.

Рассмотрим четыре четырехрядные матрицы γ_μ, удовлетворяющие антикоммутативному соотношению

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2I\delta_{\mu\nu} \tag{18.8}$$

(ср. соотношение (12.1)) и называемые матрицами Дирака. В целях удобства потребуем дополнительно, чтобы все γ-матрицы были эрмитовы.

В качестве решения соотношения (18.8) можно, например, выбрать

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & i0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{18.9}$$

где каждый элемент 0, I или σ_i суть, в свою очередь, двухрядные матрицы, причем матрицы σ_i определены по (12.3). Тогда *все возможные* решения соотношения (18.8) имеют общий вид $\boldsymbol{S}\gamma_\mu \boldsymbol{S}^{-1}$ с произвольной несингулярной матрицей $\boldsymbol{S}$.

Приведем, далее, в соответствие каждому элементу g полной ортохронной группы Лоренца характеризуемому матрицей $(a_{\mu\nu})$, четырехрядную матрицу $\Lambda(g)$, удовлетворяющую матричному уравнению

$$\Lambda(g)\, a_{\mu\nu}\, \gamma_\nu\, \Lambda^{-1}(g) = \gamma_\mu \tag{18.10}$$

(ср. уравнение (9.4)), а также дополнительному условию

$$\operatorname{Det}[\Lambda(g)] = 1. \tag{18.11}$$

Произвольный комплексный множитель, с точностью до которого определяется матрица $\Lambda(g)$ по уравнению (18.10), ограничивается условием (18. 11) лишь *четырьмя* значениями (матрица $\Lambda(g)$ четырехрядная!) : ± 1, $\pm i$, являющимися корнями четвертой степени из единицы. Как и в случае трехмерных спинорных представлений, устранить произвол в выборе *знака* этого множителя принципиально невозможно. С другой стороны, ограничить этот множитель вещественной или мнимой единицей *всегда возможно*. Ниже мы увидим, что сделать это не представляет труда.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$\Lambda(\mu\nu, \varphi) = I \cos\frac{\varphi}{2} + \gamma_\nu \gamma_\mu \sin\frac{\varphi}{2} \tag{18.12}$$

(ср. формулу (12.6)) есть решение уравнения (18.10) для частного случая вращения в координатной плоскости $(\mu\nu)$ на угол φ, а

$$\Lambda^- = \gamma_4 \tag{18.13}$$

есть решение этого же уравнения для частного случая пространственной инверсии. При этом, конечно, для вращения в пространственно-временных плоскостях угол φ должен быть чисто мнимым.

Рассмотрим произвольное вращение системы координат «мира» Минковского (разумеется, удовлетворяющее условию вещественности координат и времени) и *разложим* его на групповое «произведение» шести вращений в координатных плоскостях (12),..., (34) на углы $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$. Если мы приведем в соответствие каждому такому *произвольному* вращению четырехрядную матрицу

$$\Lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l = +1) = \Lambda(34, \varphi_6) \ldots \Lambda(12, \varphi_1), \tag{18.14}$$

то мы тем самым, очевидно, зададим четырехмерное *представление* группы четырехмерных вращений.

Если же мы укажем еще, что групповому «произведению» произвольного вращения на пространственную инверсию мы приводим в соответствие матрицу

$$\Lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l = -1) = \Lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l = +1)\, \gamma_4, \tag{18.15}$$

то мы зададим четырехмерное представление уже *полной ортохронной группы Лоренца*, называемое *спинорным* (I ранга) представлением этой группы.

Как и в трехмерном случае, полученное нами спинорное представление полной ортохронной группы Лоренца *двухзначно*, поскольку вращению в пространственной плоскости на угол 2π соответствует матрица $\mathbf{\Lambda}(ij, 2\pi) = -1$. Поэтому более правильно в правой части формулы (18.12) ставить общий неопределенный знак $\pm$. Но неопределенности большей, чем эта неопределенность в знаке, здесь нет, поскольку появление других множителей может быть исключено дополнительным, помимо (18.11), условием, чтобы единице группы четырехмерных вращений соответствовала матрица $\pm \boldsymbol{I}$, т. е. чтобы

$$\mathbf{\Lambda}(ij, \varphi \equiv 0) = \pm \boldsymbol{I}. \tag{18.16}$$

Обратим внимание читателя на то, что мы принципиально не могли ограничиться в правой части этого условия лишь одним знаком.

Что же касается матрицы $\mathbf{\Lambda}^-$ преобразования спинора *при пространственной инверсии*, то тут имеется несколько больший произвол. А именно, уравнению (18.10) и условию (18.11) удовлетворяют матрицы

$$\mathbf{\Lambda}^- = \pm \gamma_4, \ \pm \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \ \pm i\gamma_4, \ \pm i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \tag{18.17}$$

а не только матрица (18.13). Дополнительное же условие, чтобы единице группы соответствовала матрица $\pm \boldsymbol{I}$, как легко видеть, в данном случае никакого нового ограничения на выбор этих матриц не накладывает.

Вследствие неопределенности знака у спинора, как и в трехмерном случае, он *не может* быть непосредственно наблюдаемой физической величиной.

Можно показать (мы не станем этого делать), что найденное нами спинорное представление полной ортохронной группы Лоренца *неразложимо* и, более того, *неприводимо* и, конечно, не сводится к каким-либо тензорным представлениям.

Любопытно, однако, что если ограничиться лишь группой четырехмерных *вращений*, исключив пространственную инверсию, то найденное нами четырехмерное спинорное представление *разлагается* на два двухмерных. Чтобы в этом убедиться, введем новую γ-матрицу:

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \tag{18.18}$$

которая удовлетворяет *тому же* антикоммутативному соотношению (18.8), что и первые четыре γ-матрицы, а также условию эрмитовости. Можно показать (мы не будем этого делать), что матриц, антикоммутирующих со всеми γ-матрицами γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 и γ_5, не существует.

Заметим, что в представлении (18.9) для матриц γ_μ матрица γ_5 имеет вид

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{18.19}$$

Очевидно, что можно выбрать *и такое* представление γ-матриц, в котором матрицы γ_4 и γ_5 поменены местами и в котором, следовательно, *диагональна именно матрица* γ_5. Заметим, что, согласно (18.10), переход от одного представления γ-матриц к другому эквивалентен переходу от одного базиса к другому в 4-пространстве, где действуют матрицы $\Lambda(g)$.

Поскольку, кроме того, матрица γ_5 коммутирует со *всеми* матрицами $\Lambda(\mu\nu, \varphi)$, ясно, что в выбранном нами представлении *все* четырехрядные матрицы $\Lambda(\mu\nu, \varphi)$ имеют «ящичную» структуру

$$\Lambda(\mu\nu, \varphi) = \begin{pmatrix} \Sigma(\mu\nu, \varphi) & 0 \\ 0 & \Sigma'(\mu\nu, \varphi) \end{pmatrix} \tag{18.20}$$

с двухрядными матрицами Σ и Σ', что и требовалось доказать. Факт этот имеет первостепенное значение для современного представления о нейтрино — одной из интереснейших элементарных частиц. Об этом, однако, см. гл. IV.

Четырехкомпонентные ковариантны, преобразующиеся по найденному нами представлению, называются *спинорами* I ранга рассматриваемой группы, или, более коротко, четырехмерными спинорами, или, наконец, просто 4-спинорами. Мы уже говорили ранее, что 4-спинорными индексами будут α, β, γ, δ, ...

Как и в трехмерном случае, 4-спинорные представления *высших* рангов строятся как кронекеровы произведения соответствующего числа спинорных представлений I ранга. Таким образом, при преобразовании системы координат по полной ортохронной группе Лоренца спинор n-го ранга $\psi_{\alpha\ldots\beta}(x_\rho)$ преобразуется по правилу:

$$\psi'_{\alpha\ldots\beta}(x'_\rho) = \\ = \Lambda_{\alpha\delta}(\varphi_1, .., \varphi_6, l)\ldots\Lambda_{\beta\gamma}(\varphi_1,..,\varphi_6, l)\,\psi_{\delta..\varphi}\;(x_\rho = x'_\tau a_{\tau\rho}). \tag{18.21}$$

Если теперь указать, что спиноры всех рангов при четырехмерных *трансляциях* преобразуются по тривиальному представлению этой группы трансляции[1], то мы тем самым построим спинорные представления *полной ортохронной неоднородной группы Лоренца.* Кронекерово произведение 4-спинора на 4-тензор некоторых рангов носит, как и в трехмерном случае, название *спинтензора.*

Правила сложения тензоров и спиноров этой группы, а также правила перемножения (и, в частности, «свертывания» по индексам) ее тензоров переносятся из § 13 *без* каких-либо изменений, простой заменой латинских индексов на греческие. В отношении же «свертывания» по спинорным индексам здесь имеется небольшое *отличие* от трехмерного случая, связанное с *мнимым* характером углов вращения в пространственно-временных плоскостях.

Ввиду этого роль комплексно-сопряженного 3-спинорного представления здесь будет играть уже так называемое *комплексно-конъюгированное* 4-спинорное представление, задающееся матрицами:

$$\overset{*}{\gamma}_4 \Lambda^* (\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l) \overset{*}{\gamma}_4. \tag{18.22}$$

По этому представлению, очевидно, преобразуется *комплексно-конъюгированный* спинор $(\overset{*}{\gamma}_4)_{\beta\delta} \overset{*}{\psi}_\delta (x_\rho)$. В самом деле, из правила преобразования спинора $\psi_\beta (x_\rho)$

$$\psi'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} (\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l) \psi_\beta, \tag{18.23}$$

где аргументы для краткости опущены, вытекает

$$\overset{*}{\psi}{}'_\alpha = \left[\Lambda^* (\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l) \overset{*}{\gamma}_4\right]_{\alpha\beta} (\overset{*}{\gamma}_4)_{\beta\delta} \overset{*}{\psi}_\delta, \tag{18.24}$$

или

$$(\overset{*}{\gamma}_4)_{\alpha\beta} \overset{*}{\psi}{}'_\beta = \left[\overset{*}{\gamma}_4 \Lambda^* (\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l) \overset{*}{\gamma}_4\right]_{\alpha\gamma} (\overset{*}{\gamma}_4)_{\gamma\delta} \overset{*}{\psi}_\delta. \tag{18.25}$$

Нетрудно показать, пользуясь аналогией с трехмерным случаем, что комплексно-конъюгированное 4-спинорное представление *эквивалентно* обычному 4-спинорному представлению. 4-спинор, преобразующийся по комплексно-конъюгированному 4-спинорному представлению мы будем обозначать точкой над его индексом.

---

[1] Других возможностей уже по чисто *физическим* соображениям мы допустить не можем (ср. наше замечание по аналогичному поводу в § 11).

§ 19. БИЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ СПИНОРОВ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Удобство введения комплексно-конъюгированных спиноров состоит в том, что выражение типа

$$\chi_\alpha(x_\rho)\,\psi_\alpha(x_\rho) \tag{19.1}$$

есть 4-*скаляр*. Доказывается это точно таким же путем, каким было доказано ранее аналогичное утверждение для выражения (13.8). Заметим, что выражение (19.1), преобразующееся как 4-скаляр, в матричной форме имеет вид

$$\bar{\chi}(x_\rho)\,\Psi(x_\rho), \tag{19.2}$$

где

$$\Psi(x_\rho) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(x_\rho) \\ \psi_2(x_\rho) \\ \psi_3(x_\rho) \\ \psi_4(x_\rho) \end{pmatrix} \text{ и } \chi \equiv \begin{pmatrix} \chi_1(x_\rho) \\ \chi_2(x_\rho) \\ \chi_3(x_\rho) \\ \chi_4(x_\rho) \end{pmatrix}, \tag{19.3}$$

а

$$\bar{\chi}(x_\rho) \equiv \chi^H(x_\rho)\,\gamma_4 \equiv \tilde{\chi}^*(x_\rho)\,\gamma_4. \tag{19.4}$$

С помощью двух спиноров $\Psi(x_\rho)$ и $\chi(x_\rho)$ мы можем построить и различные *другие* билинейные комбинации, преобразующиеся как 4-*тензоры*. Для этого заметим, что, как нетрудно непосредственно проверить, транспонированные матрицы (18.22) комплексно-конъюгированного спинорного представления суть «обратные» матрицам обычного спинорного представления:

$$\begin{aligned}(\gamma_4^*\,\Lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l)\,\gamma_4^*)^T &= \gamma_4\,\Lambda^H(\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l)\gamma_4 = \\ &= \Lambda^{-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_6, l).\end{aligned} \tag{19.5}$$

Поэтому из правила (18.23), записанного в матричной форме

$$\Psi' = \Lambda\Psi, \tag{19.6}$$

где аргументы матрицы Λ для краткости опущены, вытекает

$$(\Psi^H)' = \Psi^H\Lambda^H, \tag{19.7}$$

или

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi}\Lambda^{-1}. \tag{19.8}$$

Выясним теперь, как преобразуется четырехкомпонентная величина

$$\bar{\chi}\gamma_\mu\Psi \tag{19.9}$$

(заметим, что эта величина не есть матрица!).
Имеем

$$\bar{\chi}'\gamma_\mu\Psi' = \bar{\chi}\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\Psi. \tag{19.10}$$

Если теперь учесть уравнение (18.10), то получим

$$\bar{\chi}'\gamma_\mu\Psi' = a_{\mu\nu}\bar{\chi}\gamma_\nu\Psi. \tag{19.11}$$

Это значит, что выражение (19.9) есть 4-*вектор*

Аналогично показывается, что выражение

$$\frac{1}{2}\bar{\chi}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\Psi \tag{19.12}$$

есть *антисимметричный 4-тензор II ранга*. Дополнительное же введение в качестве множителя матрицы γ_5 приводит к *псевдотензорам*. Например,

$$\bar{\chi}\gamma_5\Psi \tag{19.13}$$

есть 4-*псевдоскаляр*, а

$$\bar{\chi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi \tag{19.14}$$

есть 4-*псевдовектор*. Компоненты же псевдотензора $\frac{1}{2}\bar{\chi}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_5\Psi$ отличаются лишь *обозначением* от компонент тензора (19.12).

Таким образом, с помощью двух спиноров Ψ и $\bar{\chi}$ мы построили в качестве билинейных комбинаций 5 тензоров с общим числом компонент равным 16. Матрицы этих компонент следующие:

$$\left.\begin{array}{llllll} I, & & & & & \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4, & & \\ i\gamma_1\gamma_2, & i\gamma_1\gamma_3, & i\gamma_1\gamma_4, & i\gamma_2\gamma_3, & i\gamma_2\gamma_4, & i\gamma_3\gamma_4, \\ i\gamma_1\gamma_2\gamma_3, & i\gamma_1\gamma_2\gamma_4, & i\gamma_1\gamma_3\gamma_4, & i\gamma_2\gamma_3\gamma_4, & & \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. & & & & & \end{array}\right\} \tag{19.15}$$

Нетрудно понять, что *других линейно независимых* ковариантов типа рассматриваемых нами билинейных комбинаций получить *нельзя*.

Можно, однако, построить ковариантные билинейные комбинации *иного* типа, а именно, типа $\tilde{\chi}O\Psi$ или $\chi^H O'\Psi^*$, где O и O' — некоторые матрицы. Для конструирования ковариантов такого типа удобно перейти к так называемому майорановому представлению γ-матриц, в котором

$$\left.\begin{array}{c}\gamma_1=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},\ \gamma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{pmatrix},\ \gamma_3=\begin{pmatrix} 0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix},\\ \gamma_4=\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1\\ i\sigma_1 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3\\ i\sigma_3 & 0\end{pmatrix},\end{array}\right\}\qquad(19.16)$$

а для паулиевых матриц σ_i выбрано представление (12.3). В майорановом представлении все γ-матрицы эрмитовы, причем первые три — вещественные, а последние две — чисто мнимые.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при четырехмерных вращениях «строка» $\tilde{\chi}$ преобразуется точно так же, как и «строка» $\bar{\chi}=\chi^H\gamma_4$. Если поэтому в выражениях (19.2), (19.9), (19.12) — (19.14) произвести замену $\bar{\chi}\to\tilde{\chi}$, то получим соответственно скаляр, вектор, антисимметричный тензор II ранга, скаляр и вектор собственной группы Лоренца. Если же над полученными билинейными комбинациями совершить операцию комплексного сопряжения, то можно получить пять билинейных комбинаций типа $\chi^H O'\Psi^*$ *с теми же* ковариантными свойствами.

Что же касается преобразования таких билинейных комбинаций *при пространственной инверсии*, то заметим следующее. Если для закона преобразования билинейных комбинаций типа $\bar{\chi}O\Psi$ при пространственной инверсии безразлично, по какой из четырех возможных матриц (18.17) преобразуются спиноры Ψ и χ при этой инверсии, то для билинейных комбинаций типа $\tilde{\chi}O\Psi$ это уже существенно. А именно, легко видеть, что если Ψ и χ при пространственной инверсии преобразуются по матрице $\pm\gamma_4$ или $\pm\gamma_4\gamma_5$, то, в майорановом представлении γ-матриц билинейные комбинации (19.2), (19.9), (19.12) — (19.14) будут скаляром, вектором, антисимметричным тензором II ранга, псевдоскаляром и псевдовектором полной ортохронной группы Лоренца, соответственно. Если же Ψ и χ преобразуются по матрице $\pm i\gamma_4$ или $\pm i\gamma_4\gamma_5$, то вышеуказанные билинейные комбинации будут псевдоскаляром, псевдовектором, антисимметричным псевдотензором II ранга, скаляром и вектором соответственно.

Обратим внимание читателя на то существенное обстоятельство, что при рассмотрении билинейных комбинаций спиноров как типа $\bar{\chi}O\Psi$, так и типа $\tilde{\chi}O\Psi$ мы неизменно предполагали, что спиноры Ψ и χ при пространственной инверсии преобразуются *одинаково*, — предположение, отнюдь не являющееся обязательным, если Ψ и χ относятся к *разным* физическим объектам. Читателю будет полезно самостоятельно определить законы преобразования рассмотренных нами билинейных комбинаций типа $\bar{\chi} O \Psi$ и $\tilde{\chi} O \Psi$ при пространственной инверсии в различных предположениях о законах преобразования самих спиноров Ψ и χ при этой инверсии. При этом, в частности, надо иметь в виду возможность преобразования Ψ, например, по матрице $\pm \boldsymbol{I}$, а χ — по матрице $\mp \boldsymbol{I}$.

Напомним в этой связи, что из трехмерных спиноров как билинейных комбинаций типа $\chi^H O \Psi$ можно построить лишь два ковариапта (см. задачу 4 из § 14): скаляр

$$\overset{*}{\chi}_R (x_i) \Psi_R (x_j) = \chi^H (x_i) \Psi (x_j) \tag{19.16'}$$

и псевдовектор

$$\overset{*}{\chi}_R (x_j) (\sigma_i)_{RL} \psi_L (x_k) = \chi^H (x_j) \sigma_i \Psi (x_k). \tag{19.17}$$

Иными словами, в трехмерном случае есть лишь четыре линейно независимых матрицы:

$$\boldsymbol{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3. \tag{19.18}$$

Ковариантных же билинейных комбинаций типа $\tilde{\chi} O \Psi$ или $\chi^H O' \Psi^*$ из трехмерных спиноров, как можно показать (мы не будем этого делать), не существует.

Рассмотрим, наконец, важный вопрос о *разложимости* и *приводимости* 4-тензоров и 4-спиноров. Как и в трехмерном случае, тензорные представления нулевого и I рангов и спинорное представление I ранга *неразложимы* и, более того, *неприводимы*. Напротив, тензоры и спиноры *высших* рангов *разложимы* и, следовательно, тем более *приводимы*. При этом опять-таки всякое *неразложимое* представление, на которое разлагается тензорное или спинорное представление и которое называется неразложимым тензорным или неразложимым спинорным представлением, является одновременно *неприводимым*. Все 4-тензорные представления *сводятся* к 4-спинорным представлениям *четных* рангов, и все 4-тензоры являются, таким образом, *частным* случаем 4-спиноров.

Наконец, основная теорема, касающаяся полноты 4-спинорных представлений и приводимая нами без доказательства, гласит: *неразложимыми (неприводимыми) спинорными представлениями полной ортохронной группы*

Лоренца исчерпываются вообще все, по крайней мере конечномерные, неприводимые представления этой группы. Обратим внимание на то, что 4-спинорные представления исчерпывают лишь *все неприводимые* (а не неразложимые, как в трехмерном случае) представления полной ортохронной группы Лоренца.

Это означает, что знание одних лишь *спинорных* представлений полной ортохронной группы Лоренца *недостаточно* для восстановления вообще *всех*, даже конечномерных, ее представлений. Поэтому здесь мы не можем высказать столь же категорического, как в трехмерном случае, утверждения о том, что всякая физическая величина может быть лишь спинором полной ортохронной группы Лоренца. Тем не менее все известные в настоящее время физические величины являются именно *спинорами* этой группы. Что касается задачи отыскания всех, хотя бы конечномерных, *неразложимых* представлений этой группы, то эта задача, как мы уже отмечали, до сего времени не решена.

Отметим, что если все 3-спинорные представления *унитарны*, то все 4-спинорные представления, напротив, *неунитарны*. Однако *бесконечномерные* представления полной ортохронной группы Лоренца *могут быть* и унитарны. Отметим также, что немногим более десяти лет назад Гельфанду и Наймарку удалось отыскать[1] *все унитарные*, по необходимости бесконечномерные, представления собственной группы Лоренца.

Задачи

1. Каким ковариантом полной ортохронной неоднородной группы Лоренца является величина

$$\chi_{\dot{\alpha}\beta\mu\nu}(x_\rho)\,\psi_{\gamma\dot{\beta}\nu\tau}(x_\rho)\ ?$$

2. Каким ковариантом этой группы является величина

$$\overline{\chi}\,(x_\rho)\,\gamma_\mu\,\frac{\partial\,\Psi(x_\rho)}{\partial\,x_\mu}\ ?$$

3. Каким ковариантом этой группы является величина

$$\overline{\Psi}\gamma_\mu\,\gamma_5\,\Psi\quad \overline{\Psi}\gamma_\mu\,\Psi?$$

[1] См. И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Известия АН СССР, сер. мат., II, 411 (1947).

§ 20. ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Инвариантные 4-тензоры определяются, в полной аналогии с инвариантными 3-тензорами, тем условием, чтобы

$$T'_{\mu\ldots\nu}(x_\rho) = T_{\mu\ldots\nu}(x_\rho), \qquad (20.1)$$

какова бы ни была штрихованная система координат, рассматриваемая в группе.

Исключим пока из рассмотрения четырехмерные трансляции. Если основываться на аналогии с трехмерными тензорами, может показаться, что инвариантные четырехмерные тензоры можно строить лишь из элементарных «кирпичиков» x_μ, $\delta_{\mu\nu}$ и инвариантных скаляров вида $f(x_\mu^2)$. На самом же деле, мнимый характер одной из координат «мира» Минковского создает дополнительную возможность использовать при конструировании инвариантных 4-тензоров еще один вид инвариантного скаляра, а именно:

$$F(x_\mu) = \begin{cases} C, & \text{если} \quad x_\mu = 0, \\ f(x_\mu^2), & \text{если} \quad x_\mu \neq 0, \end{cases} \qquad (20.2)$$

где C — некоторая константа, так что, вообще говоря, $C \neq f(x_\mu^2 = 0)$.

Читателю нетрудно убедиться в том, что $F(x_\mu)$ действительно является инвариантным скаляром. Возможность построения такого нового независимого инвариантного скаляра связана с тем, что из-за мнимости четвертой координаты x_4 условие $x_\mu = 0$ отнюдь не эквивалентно условию $x_\mu^2 = 0$. В трехмерном же пространстве условие $x_i = 0$ совершенно эквивалентно условию $x_i^2 = 0$, и поэтому существует лишь один вид инвариантного 3-скаляра, именно $f(x_i^2)$. Обратим внимание на то, что функция $F(x_\mu)$ по необходимости должна быть разрывной в точке $x_\mu = 0$.

С учетом этого наиболее общий вид инвариантного 4-тензора, например II ранга, таков:

$$\delta_{\mu\nu}\left[f_1(x_\mu^2) + F_1(x_\mu)\right] + x_\mu x_\nu \left[f_2(x_\mu^2) + F_2(x_\mu)\right]. \qquad (20.3)$$

Инвариантные же псевдотензоры должны непременно в каждом члене содержать нечетное число раз единичный полностью антисимметричный тензор IV ранга $\varepsilon_{\mu\nu\tau\theta}$, о котором мы уже упоминали ранее в § 18.

Если же исключить из рассмотрения пространственную инверсию, то при построении тензоров можно пользоваться на совершенно равной основе всеми вышеперечисленными пятью элементарными «кирпичиками».

Что же касается инвариантных тензоров полной ортохронной *неоднородной* группы Лоренца, то они могут быть получены из этих соответствующих инвариантных тензоров простой заменой x_μ на $x_\mu - \overline{x}_\mu$.

Читателю, знакомому с соображениями § 11, не доставит большого труда убедиться, что если так называемая четырехмерная δ-функция Дирака

$$\delta\left(x_\mu - \overline{x}_\mu\right) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\,\mathbf{k}e^{ik_\mu(x_\mu - \overline{x}_\mu)}, \tag{20.4}$$

$$(d^4\,\mathbf{k} = d^3\,\mathbf{k}\cdot dk_4/i = d^3\,\mathbf{k}\cdot dk_0)$$

есть 4-скаляр полной ортохронной неоднородной группы Лоренца, то она есть *инвариантный* 4-скаляр этой группы. Четырехмерную δ-функцию, аналогично трехмерной, можно определить и тем условием, чтобы

$$\int d^4\,xf\left(x_\mu\right)\delta\left(x_\nu - a_\nu\right) = f\left(a_\mu\right) \tag{20.5}$$

для любой «достаточно гладкой» функции $f(x_\mu)$.

Четырехмерную δ-функцию, говоря нестрогим языком, можно представить себе (ср. аналогичную ситуацию с трехмерной δ-функцией) как всюду равную нулю, за исключением точки a_μ, где она обращается в «такую» бесконечность, что четырехкратный интеграл от нее равен 1. Отсюда видно, что четырехмерная δ-функция относится к инвариантным скалярам вида $F(x_\mu)$ (см. (20.2)).

Что же касается инвариантных 4-спиноров *нечетного* ранга, то, как и в трехмерном случае, единственные такие 4-спиноры — это *тривиальные*, т. е. такие, все компоненты которых суть тождественные нули.

Понятие *инвариантного уравнения* или, более общее, *инвариантной системы уравнений* относительно группы Лоренца вводится также в полной аналогии с трехмерным случаем.

Пусть задана система m уравнений относительно n неизвестных функций $\varphi_1(x_\rho), \ldots, \varphi_n(x_\rho)$:

$$\boldsymbol{L}\left\{\varphi_1\left(x_\rho\right), \ldots, \varphi_n\left(x_\rho\right)\right\} = 0 \tag{20.6}$$

(ср. формулу (14.16)). Предположим для простоты, что все функции $\varphi_1(x_\rho), \ldots, \varphi_n(x_\rho)$ суть 4-скаляра нашей группы. Тогда замена $x_\rho = (x'_\sigma + a_\sigma)\, a_{\sigma\rho}$ независимых переменных индуцирует новый оператор L'. Система уравнений (20.6) называется *инвариантной* относительно полной ортохронной неоднородной группы Лоренца, если система уравнений

$$L'\{\varphi_1'(x_\rho'), \ldots, \varphi_n'(x_\rho')\} = 0 \tag{20.7}$$

с точностью до обозначений *эквивалентна* исходной системе (20.6), каково бы ни было преобразование четырех координат, рассматриваемое в этой группе.

Из этого определения инвариантной системы уравнений вытекает также, что *все множество частных решений этой системы инвариантно относительно любых преобразований, рассматриваемых в данной группе*. Более того, *система уравнений, у которой все множество частных решений инвариантно относительно данной группы, обязательно будет сама инвариантна относительно этой группы*. Все эти соображения легко переносятся и на более общий случай, когда в системе уравнений фигурирует не только четверка x_μ независимых переменных, но и *любое* их число. Само собой разумеется, что для инвариантности системы уравнений также *необходимо*, чтобы эти уравнения были определены на *инвариантном* множестве значений независимых переменных. В частности, если в системе уравнений фигурирует лишь одна четверка переменных x_μ, то эта система может быть инвариантна относительно полной ортохронной неоднородной группы Лоренца *лишь* при условии, что такая система уравнений имеет место для *всех возможных* x_μ.

Признаки, позволяющие *распознавать* по виду инвариантную систему уравнений, здесь также аналогичны трехмерному случаю. Для инвариантности какой-либо системы уравнений, во-первых, нужно, чтобы совокупность всех неизвестных функций являлась *ковариантом* группы Лоренца, и, во-вторых, нужно, чтобы система уравнений имела вид (или могла быть приведена к виду) равенства нулю какого-либо *ковариантa* группы.

Для распознавания инвариантных уравнений полезно также иметь в виду, что оператор $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ в результате замены $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu - a_\mu$ «индуцируется» в оператор $\frac{\partial}{\partial x'_\nu} a_{\nu\mu}$.

Иначе оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad (20.8)$$

можно рассматривать как *инвариантный 4-вектор* $\left(\text{ср. аналогичную ситуацию с инвариантным 3-вектором } \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$.

Далее полезно иметь в виду, что если в системе уравнений помимо неизвестных функций фигурируют еще и *заданные*, то эти последние должны быть *инвариантными* ковариантами группы.

Соображения § 14, в связи с вопросом о том, могут ли физические законы представляться «трехмерно инвариантными» уравнениями, без изменения переносятся на группу Лоренца, и окончательный вывод, к которому мы приходим, состоит в категорическом утверждении: *всякий физический закон должен представляться системой уравнений, инвариантной относительно полной ортохронной неоднородной группы Лоренца*, или, как еще иначе говорят, *релятивистски инвариантной системой уравнений*.

Фундаментальное значение этого утверждения состоит, в частности, в том, что оно позволяет *существенно ограничить* класс возможных физических законов, отбросив как *заведомо* неверные *те* из них, которые не *удовлетворяют* этому требованию инвариантности. Легко, например, обнаружить, что так называемый второй закон Ньютона (14.18), хотя и инвариантен относительно трехмерной евклидовой группы, не инвариантен относительно вращений в пространственно-временных плоскостях «мира» Минковского, следовательно, релятивистски неинвариантен и потому должен быть признан *некорректным*.

В релятивистской неинвариантности системы уравнений (14.18) можно убедиться и не производя выкладки, а только пользуясь нашими критериями инвариантности системы уравнений. Эта неинвариантность является прямым следствием невозможности представить систему (14.18) в виде равенства нулю какого-либо *релятивистского ковариант*а (т. е. ковариант*а* именно группы Лоренца), поскольку в (14.18) фигурируют лишь коварианты *трехмерной* евклидовой группы.

Мы теперь уже знаем, что классическая механика, основанная на законе (14.18), *и на самом деле* некорректна и должна была уступить место более совершенной теории — теории относительности, уравнения которой с самого начала строятся на основе принципа *релятивистской* инвариантности. С тем, как именно это делается и какие при этом получаются релятивистски инвариантные уравнения, читатель познакомится при дальнейшем изучении теории элементарных частиц.

Сейчас же мы лишь укажем, что если ограничиться классом линейных уравнений, то для n-компонентной физической величины, являющейся функцией одной четырехмерной точки x_μ и преобразующейся как спинор некоторого ранга, общий вид релятивистски инвариантного уравнения—следующий:

$$\left(\boldsymbol{\Gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa_0\right) \Psi(x_\rho) = 0. \tag{20.9}$$

Здесь

$$\Psi(x_\rho) = \begin{pmatrix} \psi_1(x_\rho) \\ \vdots \\ \psi_n(x_\rho) \end{pmatrix}, \tag{20.10}$$

а $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ — четыре n-рядные матрицы, находимые по определенному правилу, на котором мы здесь не будем останавливаться, и $\varkappa_0$ произвольная константа.

В частности, для спинора I ранга $\Psi(x_\rho)\boldsymbol{\Gamma}_\mu = \gamma_\mu$ и релятивистски инвариантное уравнение

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa_0\right) \Psi(x_\rho) = 0 \tag{20.11}$$

носит название уравнения Дирака. Это уравнение, записанное выше в матричной форме, эквивалентно, очевидно, системе четырех линейных уравнений относительно четырех компонент 4-спинора $\psi_\alpha(x_\rho)$.

Для 4-скаляра же $\varphi(x_\rho)$ релятивистски инвариантное уравнение имеет вид

$$\left(\boldsymbol{D}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa_0\right) \Phi(x_\rho) = 0, \tag{20.12}$$

где $\boldsymbol{D}_\mu$ — определенные пятирядные матрицы, именуемые матрицами Дэффина — Кеммера, и пятирядная «колонка»

$$\Phi(x_\rho) = \begin{pmatrix} \varphi(x_\rho) \\ \dfrac{\partial \varphi(x_\rho)}{\partial x_\mu} \end{pmatrix}. \tag{20.13}$$

Система (20.12) пяти линейных уравнений первого порядка оказывается эквивалентной одному уравнению второго порядка

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \varkappa_0^2\right) \varphi(x_\rho) = 0, \tag{20.14}$$

носящему название уравнения Клейна — Гордона.

Приведем еще пример релятивистски инвариантного уравнения для 4-вектора $\varphi_\mu(x_\rho)$:

$$\left(\text{Д}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa_0\right) F(x_\rho) = 0, \tag{20.15}$$

где Д_μ — определенные, уже десятирядные, матрицы, именуемые, как и в случае пятирядных матриц, матрицами Дэффина — Кеммера, и десятирядная «колонка»

$$F(x_\rho) = \begin{pmatrix} \varphi_\mu(x_\rho) \\ \dfrac{\partial\varphi_\mu(x_\rho)}{\partial x_\nu} - \dfrac{\partial\varphi_\nu(x_\rho)}{\partial x_\mu} \end{pmatrix}. \tag{20.16}$$

Заметим, что если бы физическая величина преобразовывалась по *нелинейному* представлению группы Лоренца, то релятивистски инвариантное уравнение для нее принципиально *не могло* бы быть линейным.

Задача

1. Показать непосредственной проверкой, что уравнение Дирака релятивистски инвариантно.

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ

§ 21. СВЕДЕНИЯ ИЗ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Чтобы понять смысл переворота в современных представлениях об инвариантных свойствах одного из классов взаимодействий элементарных частиц — переворот, который произошел совсем недавно, в конце 1956 — начале 1957 г., нам понадобится определенный комплекс сведений из современной теории этих частиц.

Отметим прежде всего, что следует различать две разновидности теории элементарных частиц, одну — квантовую механику частиц и их взаимодействий и другую — теорию квантованных полей и их взаимодействий.

В квантовой механике каждое состояние частицы характеризуется так называемой волновой функцией $\Psi(x_\rho)$ — «колонкой» вида (20.10), являющейся 4-тензором или 4-спинором некоторого ранга, причем предполагается, что этот 4-тензор или 4-спинор неприводим.

При этом для частиц, собственный момент (или спин) которых по модулю есть целое число постоянной Планка h: $|\underline{s}| = nh$, волновая функция $\Psi(x_\rho)$ есть неприводимый 4-тензор ранга n. Для частиц полуцелого спина: $|\underline{s}| = \frac{2n+1}{2}h$ — эта волновая функция есть неприводимый 4-спинор ранга $2n+1$. Волновые функции для свободных, невзаимодействующих, частиц определяются как решения уравнений типа (20.9) и, вообще говоря, определенных дополнительных условий.

На примере уравнения Дирака проследим идею определения спина частицы, волновая функция которой при отсутствии взаимодействия удовлетворяет уравнению типа (20.9). Прежде всего уравнение Дирака (20.11) умножением обоих его частей на $hc\gamma_4^{-1} = hc\gamma_4$ и перенесением члена с производной по времени в правую часть можно переписать в форме уравнения Шредингера, т. е. в форме (21.1):

$$\boldsymbol{H}\Psi(x_\rho) = ih\frac{\partial\Psi(x_\rho)}{\partial t}. \tag{21.1}$$

Оператор

$$\boldsymbol{H} \equiv ic\gamma_4\gamma_i\boldsymbol{p}_i + hc\varkappa_0\gamma_4 \quad \left(\boldsymbol{p}_i \equiv \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \tag{21.2}$$

называется *оператором энергии* (или *гамильтонианом*) свободной частицы ($\boldsymbol{p}_i$ — *оператор ее импульса*).

Введем теперь в уравнение (21.1) центрально-симметричное взаимодействие $V(r)$ с внешним полем:

$$\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} + V(r). \tag{21.3}$$

Из классической механики известно, что в центрально-симметричном поле полный механический момент замкнутой системы сохраняется во времени. На языке квантовой механики это означает, что оператор полного механического момента должен коммутировать с гамильтонианом (21.3).

Оператор $\boldsymbol{L}_{[ij]}$ орбитального (несобственного) момента может быть получен трактовкой выражения (10.28) как оператора:

$$\boldsymbol{L}_{[ij]} = x_i\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{21.4}$$

Непосредственная проверка показывает, что оператор $\boldsymbol{L}_{[ij]}$ не коммутирует с гамильтонианом (21.3), что свидетельствует о наличии у рассматриваемой частицы, помимо орбитального, еще и *собственного* момента. Нетрудно, однако, показать, что оператор

$$\boldsymbol{M}_{[ij]} = \boldsymbol{L}_{[ij]} + \frac{h}{2}\sigma_{ij}, \tag{21.5}$$

где

$$\sigma_{23} = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}, \quad \sigma_{31} = \begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}, \quad \sigma_{12} = \begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}, \tag{21.6}$$

а σ_i суть паулиевы матрицы (12.3), уже коммутирует с гамильтонианом (21.3). Это означает, что $\frac{h}{2}\sigma_{ij}$ есть оператор собственного механического момента частицы. Возможные значения этого момента определяются как собственные значения такого оператора и, как можно убедиться, есть $\pm h/2$, т. е. у частицы, описываемой уравнением Дирака, $|\mathbf{s}| = h/2$

Сами волновые функции, являющиеся в общем случае комплексными, непосредственно ненаблюдаемы. Все же непосредственно наблюдаемые физические величины строятся из них как вещественные билинейные комбинации. Например, $\Psi^H(x_\rho)\,\Psi(x_\rho)$ имеет смысл плотности вероятности при измерении координат данной частицы в момент времени t; найти ее координаты равными x_ρ.

Что же касается *теории квантованных полей*, то здесь исходными объектами являются так называемые «классические» *поля* $\Psi(x_\rho)$, также являющиеся 4-спинорами и удовлетворяющие *тем же* релятивистски инвариантным уравнениям вида (20.9). Примером такого «классического» поля является электромагнитное поле $A_\mu\,(x_\rho)$, преобразующееся как 4-вектор.

Несмотря, однако, на то, что и волновые функции и «классические» поля удовлетворяют *идентичным* уравнениям (20.9), смысл их совершенно различен. В случае «классического» поля $\Psi^H_{(x_\rho)}\Psi(x_\rho)$ уже, конечно, ничего общего не имеет с плотностью вероятности обнаружения частицы в соответствующей точке пространства. Таким образом, теория «классических» полей принципиально не в состоянии описать такое «дискретное» образование, как частица.

Чтобы прийти к понятию частицы, «классические» поля подвергают процессу так называемого *квантования*. Идея этого процесса состоит в том, что «классическое» поле перестает быть *обычной* (конечно в общем случае, многокомпонентной) функцией и становится *оператором*. Причем, операторный характер этого, уже квантованного, поля определяется либо *коммутативным* (для тензорных полей), либо *антикоммутативным* (для полей спиноров нечетного ранга) соотношениями, в правых частях которых стоят *обычные* функции (неоператоры).

Например, оператор свободного 4-скалярного (или 4-псевдоскалярного) поля $\varphi(x_\rho)$ определяется *коммутативными* соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\left[\varphi(x_\rho), \varphi^H(x'_\rho)\right] \equiv \varphi(x_\rho)\varphi^H(x'_\rho) - \varphi^H(x'_\rho)\varphi(x_\rho) = \\ = i^{-1}\Delta(x_\rho - x'_\rho, \mu), \\ \left[\varphi(x_\rho), \varphi(x'_\rho)\right] = \left[\varphi^H(x_\rho), \varphi^H(x'_\rho)\right] = 0,\end{aligned}\right\} \quad (21.7)$$

где

$$\Delta(x_\rho - x'_\rho, \mu) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k e^{-ik_\rho(x_\rho - x'_\rho)} \times$$
$$\times \delta(k_\nu^2 - \mu^2)\,\varepsilon(k_0), \quad (21.8)$$

а

$$\varepsilon(k_0) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad k_0 > 0 \\ -1, & \text{если} \quad k_0 < 0 \end{cases} \quad (21.9)$$

и μ — некоторая константа, смысл которой выяснится ниже. Оператор же свободного спинорного поля $\psi(x_\rho)$ задается *антикоммутативными* соотношениями:

$$\left\{\psi_\alpha(x_\rho), \overline{\psi}_\beta(x'_\rho)\right\} \equiv \psi_\alpha(x_\rho)\overline{\psi}_\beta(x'_\rho) + \overline{\psi}_\beta(x'_\rho)\psi_\alpha(x_\rho) =$$
$$= -iS_{\alpha\beta}(x_\rho - x'_\rho, m),$$
$$\left\{\psi_\alpha(x_\rho), \psi_\beta(x'_\rho)\right\} = \left\{\overline{\psi}_\alpha(x_\rho), \overline{\psi}_\beta(x'_\rho)\right\} = 0, \quad (21.10)$$

где матрица

$$S(x_\rho - x'_\rho, m) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\Delta(x_\rho - x'_\rho, m), \quad (21.11)$$

а m — некоторая константа, смысл которой также выяснится ниже.

Мы не можем здесь останавливаться на подробном обосновании того, почему операторы скалярного и спинорного полей определяются именно выписанными нами, а не какими-либо другими соотношениями. Укажем лишь, что эти соотношения однозначно вытекают из следующих четырех требований:

1. Правые части коммутативного (для скалярного поля) и антикоммутативного (для спинорного поля) соотношений суть c-числа, т. е. обычные функции (неоператоры).

2. Перестановочные соотношения должны быть инвариантны относительно полной ортохронной неоднородной группы Лоренца.

3. Зависимость операторов $\varphi(x_\rho)$ и $\Psi(x_\rho)$ от параметров x_ρ определяется соответствующими классическими «свободными» уравнениями, т. е. уравнением Клейна — Гордона (20.14) для $\varphi(x_\rho)$ и уравнением Дирака (20.11) для $\Psi(x_\rho)$.

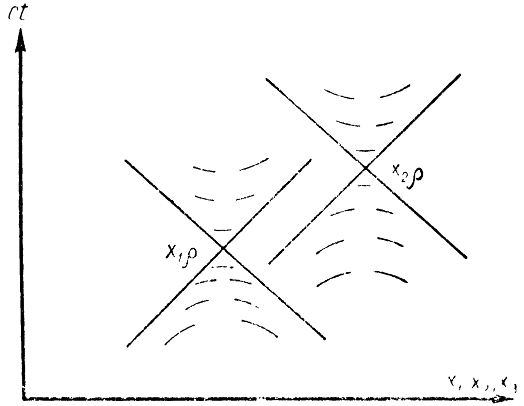

Рис. 21

4. Любой оператор поля в точке $x_{1\rho}$ должен коммутировать или антикоммутировать с любым оператором в точке $x_{2\rho}$, если

$$(x_{1\rho} - x_{2\rho})^2 > 0, \tag{21.12}$$

т. е. если, как принято говорить (см. рис. 21), две точки $x_{1\rho}$ и $x_{2\rho}$ лежат вне светового конуса друг друга. Заметим, что световой конус некоторой точки $x_{1\rho}$, определяемый уравнением

$$(x_{1\rho} - x_\rho)^2 = 0, \tag{21.13}$$

где x_ρ — текущая точка, оправдывает свое геометрическое название лишь в четырехмерном пространстве (x_i, ct) с *вещественной* четвертой координатой, как это и изображено на рис. 21.

Причина происхождения первого требования кроется, главным образом, в стремлении к максимальной простоте соотношений. Необходимость второго требования читателю должна быть понятна без пояснения. Третье требование можно рассматривать как стремление удовлетворить принципу соответствия (см. § 17) с классической теорией полей

Наконец, четвертое требование эквивалентно условию отсутствия в природе скоростей материальных тел, бо́льших скорости света c в вакууме. В самом деле, пусть из точки $x_{1\rho}$ (это значит: из пространственной точки x_{1i} в момент времени t_1) вышел некоторый материальный сигнал со скоростью $|\mathbf{v}| \leqslant c$. Нетрудно понять, что он не может достичь точки $x_{2\rho}$ (т. е. достичь пространственной точки x_{2i} в момент времени t_2), если имеет место (21.12). Две такие точки поэтому можно называть *причинно-независимыми* в том смысле, что событие, произошедшее в одной из этих точек, не может рассматриваться ни как причина, ни как следствие события, произошедшего в другой точке.

Но если исключено какое бы то ни было взаимное влияние между двумя точками $x_{1\rho}$ и $x_{2\rho}$, измерение какой-либо физической величины в одной точке не может повлиять на результат измерения любой физической величины в другой точке. На языке квантовой теории это означает, что операторы любых непосредственно наблюдаемых физических величин в точках $x_{1\rho}$ и $x_{2\rho}$ должны непременно *коммутировать* друг с другом, т. е. должно выполняться, как принято говорить, *условие причинности*. Учтем теперь, что операторы непосредственно наблюдаемых физических величин (т. е. величин класса A, см. § 12) в теории квантованных полей строятся исключительно из операторов полей и что для спинорного поля операторы физических величин класса A строятся непременно как билинейные комбинации операторов спинорного поля. Тогда нетрудно понять, что четвертое требование, предъявляемое к перестановочным соотношениям для операторов полей, как раз и обеспечивает выполнение вышеуказанного условия причинности.

Таким образом, мы заключаем, что перестановочные соотношения вытекают из *очень общих требований*.

Разумеется, коммутативными и антикоммутативными соотношениями операторы полей определяются *лишь* с точностью до *эквивалентных* операторов, или, как принято говорить, с точностью до представления (вспомним аналогичную ситуацию в случае антикоммутативного соотношения (12.1) или ((18.8)!).

Наиболее привычное представление для операторов полей — это так называемое представление «чисел заполнения». В этом представлении операторы полей имеют смысл операторов *рождения* и *поглощения частиц* и им соответствующих так называемых *античастиц*. Например,

$$\varphi(x_\rho) = \varphi^{(-)}(x_\rho) + \varphi^{(+)}(x_\rho), \tag{21.14}$$

$$\varphi^{(-)}(x_\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}\, a(k_i)\, e^{-ik_\mu x_\mu},$$

$$\varphi^{(+)}(x_\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}\, b^H(k_i)\, e^{ik_\mu x_\mu}, \tag{21.15}$$

$$\left(k_4 = iK = i\sqrt{k_i^2 + \mu^2}\right).$$

В свою очередь, $a(k_i)$ есть оператор *поглощения частицы* нулевого спина с массой покоя μ/hc и импульсом k_i, а $b^H(k_i)$ — оператор *рождения античастицы* с тем же импульсом. Оператор же $\varphi^H(x_\rho)$ будет уже содержать оператор $a^H(k_i)$ рождения той же частицы и оператор $b(k_i)$ поглощения той же античастицы.

Мы не будем здесь останавливаться на *явном* виде операторов рождения и поглощения различных частиц. Для наших целей достаточно представлять себе, что если Φ есть волновая функция системы квантованных полей, соответствующих некоторому набору различных частиц с заданными импульсами и направлениями спинов, то $a^H(k_i)\Phi$ будет уже соответствовать состоянию системы квантованных полей, состоящему из тех же частиц с теми же характеристиками + одна частица нулевого спина массы μ/hc с импульсом k_i.

Что же касается волновой функции $a(k_i)\Phi$, то она либо равна нулю (если в исходном состоянии Φ не было частицы нулевого спина массы μ/hc с импульсом k_i), либо, в противном случае, соответствует исходному состоянию системы с одной изъятой («поглощенной») частицей с вышеуказанными характеристиками.

Аналогичным образом обстоит дело и с оператором $\Psi(x_\rho)$ спинорного поля. Отличие, однако, заключается в том, что здесь будет идти речь уже о частице и античастице с массой m и спином $h/2$, и поэтому ее состояние будет характеризоваться *не только* импульсом, но и одним из двух возможных направлений спина ($s = \pm 1$) вдоль какой-то выбранной оси. Таким образом, после квантования «классического» поля автоматически возникает понятие *частицы*, а также *античастицы*.

Специально подчеркнем важный факт, о котором мы уже говорили: перестановочные соотношения типа (21.8) и (21.10) для операторов полей *инвариантны* относительно полной ортохронной неоднородной группы Лоренца Это следует из того, что функция $\Delta (x_\rho - \bar{x}_\rho, \mu)$ есть инвариантный скаляр этой группы, в чем нетрудно убедиться с помощью того же метода, каким в § 11 показывался инвариантный характер трехмерной δ-функции.

То обстоятельство, что *тензорные* поля квантуются с помощью *коммутаторов*, а *спинорные* поля *нечетного* ранга — с помощью *антикоммутаторов*, ведет и к различным статистикам для частиц, соответствующих этим полям. Именно, автоматически получается, что частицы, соответствующие квантованным *тензорным* полям и, следовательно, имеющие целый спин (в единицах h), подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Это означает, что *в одном и том же* состоянии может одновременно находиться любое число этих частиц, называемых бозонами. Частицы же, соответствующие квантованным *спинорным* полям *нечетного* ранга и, следовательно, имеющие полуцелый спин, должны подчиняться статистике Ферми — Дирака. Это означает, что в каждом фиксированном состоянии может находиться одновременно лишь *одна* такая частица, называемая фермионом. Хорошо известно, что оба эти теоретические утверждения прекрасно согласуются с экспериментом.

Теперь мы должны пояснить термин «античастица». Происхождение этого термина имеет свою историю, тесно связанную с уже упоминавшимся уравнением Дирака (21.11). Когда в 1928 г. вместо релятивистски неинвариантного квантово-механического уравнения Шредингера для электрона Дирак предложил свое релятивистски инвариантное уравнение, обнаружилось, что оно содержит одну, как тогда казалось, неприятную особенность.

Дело в том, что помимо решений, соответствующих *положительной* кинетической энергии электрона, это уравнение допускало также и физически бессмысленные решения, соответствующие *отрицательной* кинетической энергии. Отбросить же эти физически бессмысленные решения «так просто» было нельзя, поскольку электрон, даже имея в начальный момент времени положительную энергию, может согласно этому уравнению с течением времени *перейти* в состояние с отрицательной энергией, отдав часть своей энергии, например, электромагнитному излучению, как говорят, может «провалиться» на отрицательно-энергетический уровень.

Чтобы устранить эту трудность, автор знаменитого уравнения предположил, что пустое пространство — вакуум — *на самом деле* сплошь состоит из несчетного множества электронов, заполняющих *все возможные* отрицательно-энергетические состояния и в соответствии со статистикой Ферми—Дирака препятствующих электронам с положительной энергией «провалиться» на отрицательно-энергетические уровни. По предположению, такое однородное море вакуумных электронов ненаблюдаемо.

Выход, казалось, был найден. Но, как это часто бывает, новая гипотеза родила новую непредвиденную трудность, выглядевшую еще более зловеще. Хотя оригинальная гипотеза Дирака предотвращала возможность переходов электронов с положительно-энергетических уровней на отрицательно-энергетические, она не могла предотвратить возможность *обратных* переходов под влиянием, например, электромагнитного излучения.

В результате такого перехода в «ненаблюдаемом» море вакуумных электронов должно было освободиться одно место и образоваться «дырка».

Нетрудно было понять, что такая «дырка» должна быть уже вполне наблюдаема и представляться обыкновенной *частицей*, свойства которой идентичны свойствам электрона, за исключением того, что эта *новая* частица — *античастица* по отношению к электрону — должна иметь заряд, *противоположный* по знаку заряду электрона.

Трагедия состояла в том, что в то далекое время из положительно заряженных элементарных частиц был известен один только протон, масса которого почти в две тысячи раз превышала массу электрона и который поэтому никак не мог быть античастицей по отношению к электрону. Развязка наступила спустя некоторое время, когда оказалось, что предсказываемая уравнением Дирака античастица фактически еще до появления «вакуумной» идеи Дирака была обнаружена экспериментально. Она была названа позитроном, широко известным в настоящее время.

С тех пор теория элементарных частиц шагнула далеко вперед и в настоящее время совершенно не нуждается в понимании «античастицы» как «дырки» на фоне ненаблюдаемых вакуумных частиц, заполняющих все отрицательно-энергетические уровни. Согласно общепринятым современным представлениям не только фермионы, но и безоны имеют свои античастицы. Не имеют античастиц лишь частицы, соответствующие *эрмитовым* квантованным полям. В настоящее время, говоря об античастице, имеют в виду только то, что ее свойства целиком совпадают с свойствами ей соответствующей частицы, за исключением того, что античастицы отличаются от частиц знаком электрического и, вообще говоря, других зарядов.

В основу современной теории элементарных частиц кладется так называемый *лагранжиан*, в случае свободных полей составляемый как билинейная эрмитовая комбинация операторов полей. Если мы желаем построить теорию квантованных полей, инвариантную относительно какой-то группы преобразований координат и времени, мы должны потребовать, чтобы лагранжиан при всех преобразованиях, рассматриваемых в этой группе, преобразовывался как скаляр, т. е. оставался инвариантным с точки зрения зависимости его от операторов полей. Например, в случае свободного спинорного поля лагранжиан выбирается в виде:

$$L_0 = \frac{1}{2}\left(\left[\overline{\Psi}(x_\rho),\ \gamma_\mu \frac{\partial \Psi(x_\rho)}{\partial x_\mu}\right] - \left[\frac{\partial \overline{\Psi}(x_\rho)}{\partial x_\mu}\gamma_\mu,\ \Psi(x_\rho)\right]\right) + m\left[\overline{\Psi}(x_\rho),\ \Psi(x_\rho)\right]. \tag{21.16}$$

Эту, отчасти символическую, форму записи следует понимать так, что, например,

$$\left[\overline{\Psi}(x_\rho),\ \gamma_\mu \frac{\partial \Psi(x_\rho)}{\partial x_\mu}\right] \equiv \left[\overline{\Psi}_\alpha(x_\rho),\ \left(\gamma_\mu \frac{\partial \Psi(x_\rho)}{\partial x_\mu}\right)_\alpha\right].$$

Вопрос о том, почему лагранжиан (21.16) строится не просто из произведений операторов спинорного поля, а именно из *коммутаторов*, будет обсужден несколько позже.

Уравнение Дирака (20.11) для оператора $\Psi(x_\rho)$ можно получить из лагранжиана (21.16) в качестве уравнения Эйлера

$$\frac{\partial L_0}{\partial \overline{\Psi}(x_\rho)} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L_0}{\partial \dfrac{\partial \overline{\Psi}(x_\rho)}{\partial x_\mu}} = 0. \tag{21.17}$$

В случае же свободного скалярного поля $\varphi(x_\rho)$ лагранжиан выбирается в виде комбинации *антикоммутаторов*

$$L_0 = -\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{\partial \varphi^H(x_\rho)}{\partial x_\mu},\ \frac{\partial \varphi(x_\rho)}{\partial x_\mu}\right\} + \mu^2\left\{\varphi^H(x_\rho),\ \varphi(x_\rho)\right\}\right). \tag{21.18}$$

В качестве уравнения Эйлера

$$\frac{\partial L_0}{\partial \varphi^H(x_\rho)} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L_0}{\partial \dfrac{\partial \varphi^H(x_\rho)}{\partial x_\mu}}, \tag{21.19}$$

тогда получается уравнение Клейна — Гордона (20.14) для $\varphi(x_\rho)$—оператора этого поля.

Наиболее сложная проблема современной теории квантованных полей (и, значит, элементарных частиц) — это проблема их *взаимодействия*. Взаимодействие между полями вводится с помощью добавления к лагранжианам свободных полей лагранжианов *взаимодействия*, составленных из операторов как одного, так и другого (в общем случае, нескольких) полей. Лагранжиан взаимодействия так же, как и «свободный» лагранжиан, должен быть *эрмитовым* оператором. Помимо этого лагранжиан взаимодействия должен быть скаляром *той* группы преобразований координат и времени, относительно которой мы хотим сделать теорию инвариантной.

Например, лагранжиан взаимодействия четырех спинорных полей I ранга — протонного, нейтронного, электронного и нейтринного — в общем случае можно представить как линейную комбинацию пяти различных скаляров:

$$\begin{aligned} L' = {} & g_S\left[\overline{\Psi}_p(x_\rho),\ \Psi_n(x_\rho)\right]\left[\overline{\Psi}_e(x_\rho),\ \Psi_\nu(x_\rho)\right] + \\ & + g_{PS}\left[\overline{\Psi}_p(x_\rho),\ \gamma_5\Psi_n(x_\rho)\right]\left[\overline{\Psi}_e(x_\rho),\ \gamma_5\Psi_\nu(x_\rho)\right] + \\ & + g_V\left[\overline{\Psi}_p(x_\rho),\ \gamma_\mu\Psi_n(x_\rho)\right]\left[\overline{\Psi}_e(x_\rho),\ \gamma_\mu\Psi_\nu(x_\rho)\right] + \\ & + g_A\left[\overline{\Psi}_\rho(x_\rho),\ \gamma_\mu\gamma_5\Psi_n(x_\rho)\right]\left[\overline{\Psi}_e(x_\rho),\ \gamma_\mu\gamma_5\Psi_\nu(x_\rho)\right] + \\ & + g_T\left[\overline{\Psi}_\rho(x_\rho),\ \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\mu)\Psi_n(x_\rho)\right] \times \\ & \times\left[\overline{\Psi}_e(x_\rho),\ \gamma_\mu\gamma_\lambda\Psi_\nu(x_\rho)\right] + \text{эрм. сопр.} \end{aligned} \tag{21.20}$$

При этом в качестве ковариантных билинейных комбинаций операторов полей мы использовали лишь билинейные комбинации вида $\overline{\chi}O\Psi$. В общем случае все константы g могут быть комплексными. Разумеется, лагранжиан (21.10) будет скаляром лишь в том случае (который, по-видимому, и реализуется в природе), если все входящие в него спинорные операторы при пространственной инверсии преобразуются *одинаково* (см. § 19).

При этом индексы у константы g указывают на характер варианта: S — скалярный, PS — псевдоскалярный, V—векторный и A — аксиально-векторный (т. е. псевдовекторный), T — тензорный, а индексы у операторов полей соответствуют стандартным обозначениям элементарных частиц: p — протон, n — нейтрон, e — электрон и ν —нейтрино.

Если вспомнить физический смысл операторов полей в представлении «чисел заполнения», то станет ясно, что лагранжиан взаимодействия (21.20) описывает ряд актов с поглощением одних и рождением других частиц, например,

$$\left.\begin{aligned} n + \nu &\to p + e, \\ n &\to p + e + \bar{\nu}, \\ p + e &\to n + \nu \end{aligned}\right\} \tag{21.21}$$

(за последний акт ответственен невыписанный эрмитово сопряженный член в (21.20)). Заметим, что второй акт в (21.21) есть не что иное, как β-распад нейтрона с переходом его в протон и с испусканием электрона и антинейтрино.

Построенный нами лагранжиан взаимодействия (21.20) удовлетворяет обоим основным требованиям, о которых мы говорили выше, т. е. он является эрмитовым оператором и скаляром полной ортохронной неоднородной группы Лоренца, и не удовлетворяет, как мы увидим ниже, «только» *одному* требованию — он *противоречит* эксперименту. Впрочем, это выяснилось лишь совсем недавно, в конце 1956 г. И решающую роль здесь сыграло явление β-распада, давно уже известное и, казалось бы, достаточно изученное для того, чтобы не содержать в себе какой-либо потрясающей информации.

Но прежде, чем мы приступим к выяснению смысла этого открытия, мы рассмотрим вопрос об инвариантности современной теории квантованных полей относительно некоторых важных *дискретных* групп, до сего времени остававшихся вне нашего рассмотрения.

§ 22. ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ И ИНВЕРСИЯ ВРЕМЕНИ

Мы уже говорили, что в современной теории квантованных полей нет былой несимметрии между частицами и античастицами. На языке математического формализма требование *полной симметрии* между частицами и античастицами, т. е. возможность любую из двух частиц назвать собственно частицей, а другую — ее античастицей, формулируется в виде требования инвариантности всех уравнений теории относительно операции *зарядового сопряжения.* При такой операции частица переходит в свою античастицу и наоборот.

Рассмотрим в качестве поясняющего примера случай квантованного спинорного (I ранга) поля, «свободный» лагранжиан которого дается выражением (21.16), и попробуем ввести взаимодействие этого поля с внешним неквантованным электромагнитным полем $A_\mu(x_\rho)$. Если мы хотим, чтобы в искомый лагранжиан взаимодействия входило непосредственно поле $A_\mu(x_\rho)$, а не напряженности $F_{\mu\nu}(x_\rho)$ (см. формулу (18.4)), то помимо обычных требований, предъявляемых к лагранжиану, нам нужно будет еще удовлетворить специфическому требованию инвариантности относительно группы калибровочных преобразований (18.7).

Оказывается (мы не станем здесь этого доказывать), что имеется единственная возможность вышеуказанного введения в лагранжиан (21.16) электромагнитного поля $A_\mu(x_\rho)$. Эта возможность состоит в замене

$$L_0 \to L_0 + L', \tag{22.1}$$

где лагранжиан взаимодействия

$$L' \equiv ie\left[\overline{\Psi}(x_\rho),\ \gamma_\mu\ \Psi(x_\rho)\right] A_\mu(x_\rho). \tag{22.2}$$

Здесь e — некоторая вещественная константа, именуемая электрическим зарядом спинорной частицы.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что полный лагранжиан $L_0 + L'$ будет инвариантен относительно группы калибровочных преобразований (18.7), если предположить, что оператор $\Psi(x_\rho)$ спинорного поля при таких преобразованиях преобразуется по представлению этой группы, задаваемому матрицей I порядка:

$$\exp\left[-\frac{ie}{c} S(x_\rho)\right]. \tag{22.3}$$

После того как мы ввели взаимодействие интересующего нас квантованного спинорного поля с электромагнитным полем, мы можем придать операции зарядового сопряжения (в данном случае, в применении к спинорному полю) четкий математический смысл. А именно, операция зарядового сопряжения есть замена $e \to -e$.

Эта операция, обозначаемая символом C, вместе с тождественным преобразованием, образует группу зарядового сопряжения. При зарядовом сопряжении все физические величины и, в частности, операторы полей должны преобразовываться по одному из представлений этой группы.

Теперь мы можем поставить вопрос: как именно должны преобразовываться операторы $\Psi(x_\rho)$ и $\overline{\Psi}(x_\rho)$ при операции C, чтобы лагранжиан (21.16) при этой операции оставался инвариантным?

Здесь имеются две возможности: либо $\Psi(x_\rho)$ и $\overline{\Psi}(x_\rho)$ преобразуются при операции C независимо, либо они «перепутываются». Оказывается (читатель может в этом убедиться непосредственно), что в рамках первой возможности нельзя добиться требуемой инвариантности лагранжиана. С другой стороны, эта инвариантность может быть достигнута, если допустить, что при операции C оператор $\Psi(x_\rho)$ переходит в $\overline{\Psi}(x_\rho)$ и наоборот. Это значит, что при операции C оператор $\Psi(x_\rho)$ должен преобразовываться по правилу

$$\psi'_\alpha(x_\rho) = \overline{\psi}_\beta(x_\rho)\, C_{\beta\alpha}, \tag{22.4}$$

или, в матричной форме (и опуская аргументы),

$$\Psi' = C_{\text{зар}}\Psi = \widetilde{C}\,\widetilde{\overline{\Psi}}, \tag{22.5}$$

где C — некоторая матрица. Из (22.4) нетрудно найти также общий вид правила преобразования оператора $\overline{\Psi}(x_\rho)$ в оператор $\Psi(x_\rho)$.

Непосредственная проверка показывает, что как «свободный» лагранжиан (21.16), так и лагранжиан взаимодействия (22.2) в отдельности будут инвариантны относительно операции C, если матрица C удовлетворяет условию

$$C\widetilde{\gamma}_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu. \tag{22.6}$$

Одновременно с этим выясняется и смысл того, почему как в «свободных» лагранжианах, так и в лагранжианах взаимодействия произведение двух спинорных операторов (в общем случае, операторов Ферми-поля) следует всегда дополнять до коммутатора. Если бы мы этого не сделали, нам не удалось бы добиться инвариантности лагранжианов относительно операции C. По этой же причине во всех лагранжианах произведения операторов скалярного поля (в общем случае, Бозе-поля) следует дополнять до антикоммутатора. Если теперь учесть, что в случае «классического» (неквантованного) спинорного поля все лагранжианы (21.16), (21.18) и (21.20) обращаются в нуль, то станет ясно, что $\boldsymbol{C}$-инвариантной теории неквантованного спинорного поля *не существует*.

Наиболее простой вид имеет матрица $\boldsymbol{C}$ в майорановом представлении γ-матриц (19.16). В этом представлении γ-матриц в качестве матрицы $\boldsymbol{C}$ можно взять

$$\boldsymbol{C} = \gamma_4. \tag{22.7}$$

Найдя матрицу $\boldsymbol{C}$ из анализа лагранжиана (21.16), мы можем, далее, убедиться, что и перестановочные соотношения (21.10) и лагранжиан взаимодействия (21.20) четырех спинорных полей будут инвариантны относительно зарядового сопряжения с найденной матрицей $\boldsymbol{C}$, если дополнительно потребовать *вещественности* всех пяти констант g.

Мы хотим теперь обсудить давно откладываемый вопрос об инвариантности теории квантованных полей относительно *временнóй* инверсии, обозначаемой символом $\boldsymbol{T}$. Обратим прежде всего внимание на то, что ввиду наличия знаковой функции $\varepsilon(\kappa_0)$ в подынтегральном выражении перестановочной функции $\Delta(x_\rho \doteq \overline{x}_{\rho,\,\mu})$, эта перестановочная функция при инверсии времени *меняет* знак на обратный. Может поэтому показаться, что невозможно сделать перестановочные соотношения для операторов полей инвариантными относительно временной инверсии.

На самом же деле, положение можно спасти, если учесть, что речь идет о преобразованиях не обычных функций, а *операторов*, уже, вообще говоря, *не коммутирующих* между собой. Перестановочные соотношения как типа (21.8), так и типа (21.10) будут инвариантны относительно $\boldsymbol{T}$, если допустить, что при этой операции меняется на обратный также *порядок действия* операторов полей в их произведении, причем для каждой пары ферми-операторов это изменение порядка их действия должно сопровождаться еще и изменением *знака* перед ними. Конечно, изменение порядка действия двух операторов на обратный эквивалентно *перестановке* этих операторов при сохранении *обычного* порядка их действия — справа налево (т. е. сперва действует правый оператор, а затем — левый). Конечно, совершая такую перестановку операторов полей при операции $\boldsymbol{T}$ в лагранжианах, следует считать, что все операторы как бы коммутируют между собой (на самом деле — это, разумеется, не так!).

Различают *«слабое»* и *«сильное»* отражение времени в зависимости от того, *как* при таком отражении преобразуются сами операторы полей. Если операторы полей при этом переходят в *эрмитово сопряженные*, то говорят о *«слабом»* отражении времени, в противном случае говорят о *«сильном»* отражении времени. Нетрудно понять, что «сильное» отражение времени есть произведение «слабого» отражения на зарядовое сопряжение:

$$\boldsymbol{T}_c = \boldsymbol{T}_{\text{сл}} \boldsymbol{C}_{\text{зар}}. \tag{22.8}$$

При этом, разумеется, как при «слабом», так и при «сильном» отражении времени операторы Ферми-поля помимо прочего преобразуются еще по какой-то матрице. Например, в случае «слабого» отражения времени

$$\psi'_\alpha (x'_i, \ t') = \psi_\beta (x_i = x'_i, \ t = -t') \, \Omega_{\beta\alpha}. \tag{22.9}$$

Матрицу Ω естественно искать из условия инвариантности относительно операции $\boldsymbol{T}_{\text{сл}}$ «свободных» лагранжианов и перестановочных соотношений, поскольку вид этих лагранжианов и вид этих соотношений задаются, исходя из общих соображений, фактически однозначно. Что же касается лагранжианов взаимодействия полей, то их следует уже выбирать, исходя из требования инвариантности относительно операции $\boldsymbol{T}_{\text{сл}}$ и считая, что операторы спинорного поля преобразуются по (22.9) с уже определенной матрицей Ω.

Непосредственная проверка показывает, что как перестановочные *соотношения* (21.10), так и *«свободный» лагранжиан* (21.16) будут *инвариантны* относительно «слабого» отражения времени, если матрица Ω удовлетворяет условию:

$$\Omega \tilde{\gamma}_i \Omega^{-1} = -\gamma_i, \quad \Omega \tilde{\gamma}_4 \Omega^{-1} = \gamma_4. \tag{22.10}$$

В майорановом представлении (19.16) в качестве матрицы можно выбрать

$$\Omega = \gamma_5 \gamma_4 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \tag{22.11}$$

Здесь мы должны вновь подчеркнуть, что если бы мы не дополняли в лагранжианах произведение спинорных операторов до коммутатора, мы не смогли бы добиться инвариантности этих лагранжианов относительно операции $\boldsymbol{T}_{\text{сл}}$ (ср. аналогичную ситуацию с операцией $\boldsymbol{C}$). Определив, таким образом, матрицу Ω, мы можем, далее, убедиться, что *и лагранжиан взаимодействия* (21.20) *инвариантен* относительно такого «слабого» отражения времени, если все g — вещественны.

Поскольку как перестановочные соотношения (21.10) для операторов полей, так и «свободный» лагранжиан (21.16) и лагранжиан взаимодействия (21.20) рассматриваемого нами случая четырехфермионного взаимодействия, кроме того, инвариантны относительно полной ортохронной неоднородной группы Лоренца, включающей *пространственную инверсию* $\boldsymbol{P}$, мы заключаем, что *вся* рассматриваемая нами теория будет инвариантна относительно каждой из операций $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{T}$ *в отдельности.*

Вплоть до 1957 г. считалось само собой разумеющимся, что все теоретически допустимые лагранжианы взаимодействия *должны* конструироваться так, чтобы удовлетворить этому требованию инвариатности относительно *каждой* из операций $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{T}$ *в отдельности.*

Из общих положений квантовой теории вытекает, что если эта теория инвариантна относительно группы каких-либо преобразований, то всегда существует соответствующий *сохраняющийся во времени оператор.* В частности, из инвариантности теории относительно операций $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{T}$ *в отдельности* вытекают законы сохранения операторов так называемых *зарядовой, пространственной и временнóй четностей.* Каждый из этих операторов имеет по два собственных значения: ± 1, называемые соответствующей *четностью.* Остановимся подробнее на понятии *пространственной* четности.

Каждая элементарная частица обладает своей так называемой *внутренней* пространственной четностью. Четность считается положительной, если при операции $\boldsymbol{P}$ оператор соответствующего поля не изменяет своего знака, и отрицательной — если он изменяет знак на обратный. Частицы квантованного скалярного поля имеют, таким образом, положительную пространственную четность, частицы псевдоскалярного поля — отрицательную. В случае квантованного электромагнитного поля $\boldsymbol{A}_\mu(x_\rho)$ с помощью выбора калибровки (см. формулу (18.7)) всегда можно добиться, чтобы $\boldsymbol{A}_4(x_\rho) \equiv 0$. Поскольку, далее, оставшиеся пространственные компоненты вектора (формула (10.6)) при пространственной инверсии *меняют* знак на обратный, мы заключаем, что частицы электромагнитного поля — фотоны — имеют *отрицательную* внутреннюю четность.

Что же касается частиц квантованных спинорных полей *нечетного* ранга, следовательно, частиц полуцелого спина, то вследствие принципиальной *неопределенности знака* у спиноров нечетных рангов (см. § 12 и § 18) у таких частиц не существует *абсолютной* внутренней четности.

Поскольку, однако, свернутое произведение (одинаковых или различных) *спиноров* имеет уже вполне *определенный* знак, мы можем ввести понятие *относительной* внутренней четности. Мы будем говорить, что две частицы полуцелого спина имеют *одну и ту же* внутреннюю четность, если свернутое произведение операторов их квантованных полей *не меняет* своего знака при пространственной инверсии, и *различную* внутреннюю четность, если такое произведение *меняет* свой знак при этой операции.

Полная четность системы элементарных частиц определяется *не только* внутренними (абсолютными или относительными) четностями входящих в эту систему частиц, но и так называемой *орбитальной* четностью. Если система частиц находится в состоянии, собственном для оператора орбитального момента и характеризуемом орбитальным квантовым числом l, то орбитальная четность такой системы определяется как

$$\boldsymbol{P}_{\text{орб}} = (-1)^{l}. \qquad (22.12)$$

Это определение станет понятным, если учесть свойства симметрии сферических функций, описывающих состояния с определенным l, а именно, если учесть, что сферическая функция четна при четном l и — нечетна при нечетном l.

Теперь мы уже можем ввести понятие *полной четности* $\boldsymbol{P}$ системы элементарных частиц как произведения внутренних четностей всех входящих в систему элементарных частиц на орбитальную четность системы:

$$\boldsymbol{P} = \prod_{i} \boldsymbol{P}_{i} \cdot \boldsymbol{P}_{\text{орб}}. \qquad (22.13)$$

Мы уже говорили, что если теория квантованных полей *инвариантна* относительно пространственной инверсии, то оператор пространственной четности *сохраняется* во времени. А это значит, что должна сохраняться во времени *полная* четность $\boldsymbol{P}$ системы элементарных частиц, независимо от того, какие процессы происходят с этой системой. Разумеется, в случае системы, содержащей нечетное число частиц полуцелого спина, можно говорить лишь о сохранении во времени *относительной* четности системы.

§ 23. НЕСОХРАНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЧЕТНОСТИ И ИДЕЯ КОМБИНИРОВАННОЙ ИНВЕРСИИ

Монументальное здание современной теоретической физики, созданное неимоверным трудом поколений экспериментаторов и теоретиков, казалось, готово было рухнуть, когда в конце 1956 г. работающая в Америке китайская ученая Ву с сотрудниками обнаружила факт несохранения пространственной четности в β-распаде поляризованных ядер. Идея постановки этого опыта принадлежала работающим в Америке же китайским ученым Ли и Яну, предположившим возможность несохранения этой четности в связи с экспериментальными данными по распадам одной из странных частиц — так называемого K-мезона.

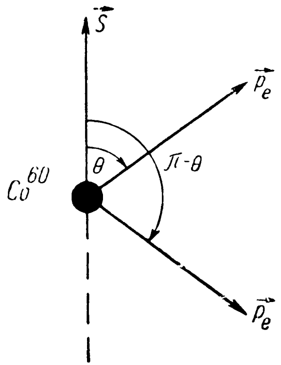

Рис. 22

Идея опыта состояла в следующем (см. рис. 22). При температуре, весьма близкой к абсолютному нулю, спины радиоактивных ядер Co_{60} под воздействием магнитного поля приобретали определенное преимущественное направление, например, вверх. После этого изучался β-распад поляризованных таким путем ядер. Именно, регистрировались числа $N(\theta)$ и $N(\pi-\theta)$ электронов, вылетевших под углом θ и $(\pi-\theta)$ к направлению спина ядер $\vec{s}$.

Оказалось, что $N(\pi-\theta)$ *значительно превышает* $N(\theta)$, из чего *сразу* вытекает, что в рассматриваемом явлении β-распада пространственная четность *не сохраняется*.

В самом деле, вероятность распада, зависящая от 3-псевдовектора s_i и 3-вектора p_i, должна быть *инвариантным* скаляром группы *трехмерных* вращений и поэтому может зависеть от угла между векторами s_i и p_i лишь через посредство свернутого произведения $s_i p_i = |\vec{s}||\vec{p}|\cos\theta$. В самом общем случае эта вероятность может быть представлена в виде

$$W = f_1((s_j p_j)^2) + s_i p_i f_2((s_j p_j)^2). \tag{23.1}$$

Если учесть, что $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$, то из результатов опыта Ву вытекает, что функция $f_2((s_i p_i)^2)$ отлична от нуля. А это, в свою очередь, означает, что вероятность распада W, помимо первого члена — *скаляра* полной ортогональной трехмерной группы, содержит еще отличный от нуля второй член — *псевдоскаляр* этой группы.

Такой неинвариантный относительно пространственной инверсии вид вероятности распада мог получиться *лишь* вследствие того, что и лагранжиан четырехфермионного взаимодействия, ответственный за β-распад, помимо скаляров полной ортогональной трехмерной группы, содержит *еще и* псевдоскаляры этой группы. Поскольку лагранжиан (21.20) *не содержит* таких псевдоскаляров, он, конечно, не может соответствовать реальности. Таким образом, теория β-распада, соответствующая реальности, с необходимостью *должна быть* неинвариантна относительно операции $\boldsymbol{P}$.

Но если это так, то по соображениям § 6 это должно означать *неравноправие* правой и левой системы координат нашего трехмерного пространства. Поскольку, однако, мы не можем себе представить наше пространство *несимметричным* относительно «правого» и «левого», мы не можем также допустить неравноправность «правой» и «левой» систем координат в этом пространстве. Теоретическая физика, таким образом, была подвергнута труднейшему *испытанию*, во время которого на чашу весов были поставлены ее *фундаментальные основы*.

Оригинальная идея выхода из создавшегося принципиального затруднения была независимо найдена несколькими авторами — Ландау, Ли, Яном и Саламом.

Согласно этой идее теория некоторых взаимодействий — и, в частности, взаимодействия, ответственного за β-распад — может быть неинвариантной относительно операции $\boldsymbol{P}$, но она *должна быть* инвариантной относительно операции $\boldsymbol{PC}$ (т. е. пространственной инверсии с *одновременным* зарядовым сопряжением).

Если теорию таких взаимодействий конструировать на основе *лишь* $\boldsymbol{PC}$-инвариантности (а не $\boldsymbol{P}$-и $\boldsymbol{C}$-инвариантности *в отдельности*), то такая теория не внесет какой-либо асимметрии в *пустое* пространство, поскольку для такого пространства операции $\boldsymbol{PC}$ и $\boldsymbol{P}$ *эквивалентны*. Пространство же с находящимися в нем элементарными частицами будет уже *несимметрично*, но такая асимметрия, как обусловленная не самим пространством, а именно частицами, *вполне допустима.* Операция $\boldsymbol{PC}$ была названа *комбинированной пространственной инверсией.*

Общепринятый в настоящее время и подтвержденный многочисленными новейшими экспериментами лагранжиан β-распадного взаимодействия

$$L' = g[\overline{\Psi}_p \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Psi_n, \overline{\Psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Psi_\nu] + \\ + \text{эрм. сопр.}, \tag{23.2}$$

где g — вещественная константа, *не инвариантен ни* относительно операции $\boldsymbol{P}$, *ни* относительно операции $\boldsymbol{C}$, взятых *в отдельности*, но, как нетрудно проверить, инвариантен как раз относительно операции $\boldsymbol{PC}$.

Отметим также, что согласно теореме Людерса — Паули, доказательство которой мы не будем здесь приводить, всякий лагранжиан, инвариантный относительно *собственной* группы Лоренца, инвариантен *также* относительно операции $\boldsymbol{PCT}_{\text{сл}}$. Отсюда вытекает (впрочем, в этом можно убедиться и непосредственно), что лагранжиан (21.16) *инвариантен* относительно «*слабого*» отражения времени.

Отметим также, что в связи с открытием несохранения пространственной четности центром всеобщего внимания физиков вновь стало *нейтрино*, как и двадцать с лишним лет тому назад, когда эта частица была еще гипотетической. Дело в том, что, поскольку теория больше не обязана быть $\boldsymbol{P}$-инвариантной, нейтрино как спинорная частица, лишенная массы покоя, может быть двухкомпонентной.

В самом деле, «свободный» лагранжиан квантованного спинорного поля I ранга без члена с массой имеет вид

$$\left[\overline{\Psi}(x_\rho), \ \gamma_\mu \frac{\partial \Psi(x_\rho)}{\partial x_\mu}\right] + \text{эрм. сопр.} \tag{23.3}$$

В рассмотренном нами ранее представлении γ-матриц, в котором имеет место «ящичная» структура (18.20) для матриц $\boldsymbol{\Lambda}$, все матрицы $\gamma_4 \gamma_\mu$ *также* имеют «ящичную» структуру. Это означает, что, пока мы не имеем дело с операцией $\boldsymbol{P}$, первые две компоненты спинора $\Psi(x_\rho)$ не «перепутываются» с остальными двумя и, следовательно, могут быть взяты в качестве компонент *отдельного* квантованного поля. При этом масса покоя соответствующей квантованному полю частицы должна *строго* равняться нулю.

Эта возможность «расщепления» лагранжиана и, следовательно, введения двухкомпонентной спинорной частицы *давно уже* предлагалась для нейтрино, но неизменно считалась *некорректной* ввиду неинвариантности такого «расщепления» относительно операции $\boldsymbol{P}$. Теперь же, когда выяснилось, что эта инвариантность *и не нужна*, возможность двухкомпонентного нейтрино получила *полное* право на существование. Более того, *все* имеющиеся к настоящему времени экспериментальные данные, по-видимому, *подтверждают* эту гипотезу двухкомпонентного нейтрино.

В заключение подчеркнем, что теория элементарных частиц, введением в которую является эта книга, в ее современном виде не может считаться сколько-нибудь завершенной.

Несомненно, однако, что теория эта является *объективной* истиной для *того* круга явлений, для которого она получила убедительное — часто даже *блестящее* — подтверждение экспериментом.

Нельзя в этой связи не вспомнить замечательные слова В. И. Ленина: «Ум человеческий открыл много диковинного в природе и откроет еще больше, увеличивая тем свою власть над ней».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юрий Мелитонович Ломсадзе

Теоретико-групповое введение

в теорию элементарных частиц

Редактор *Д. А. Тальский*

Технический редактор *Р. К. Воронина*

Корректоры: *Е. С. Гудкова, С. Р. Лановенко*

Сдано в набор 17/X-61г. Подписано к печати 19/IV 1962 г.
Бумага 84 × 108 1/32, 5,75 печ. л., 9,43 усл. печ. л., 9,0 уч.-изд. л.
Тир. 13000 Т — 03649. Изд. № ФМХ/101. Цена 27 коп. Зак. 1699

Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 20

1-я типография Трансжелдориздата МПС
Москва, Б, Переяславская, 46

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Напечатано	Следует читать
32, формула (3.21)	$\mathbf{E} = \beta\mathbf{E}'$	$\mathbf{E} = \mathbf{B}\mathbf{E}'$
147, формула (18.17)	$\Lambda^{-} = \pm\gamma_4 \pm \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \pm i\gamma_4 \pm \pm i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\Lambda^{-} = \pm\gamma_4 \pm i\gamma_4$

Зак. 1699. Тир. 13 000.